Cota anterior: Sol
Est. 7 – 26.

Sala Nova Est. 7 — ex. 6

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO,

EQUITE AURATO.

EDITIO ULTIMA

Cui accedit ANALYSIS *per Quantitatum* SERIES, FLUXIONES *ac* DIFFERENTIAS *cum enumeratione* LINEARUM TERTII ORDINIS.



BIBLIOTECA PUBLICA DE EVORA

R-10057-

AMSTÆLODAMI,

SUMPTIBUS SOCIETATIS.

M. D. CCXXIII.

Da Liv.ria da Congregaçaõ do Oratr.o da Queda

M D CCXXIII

SUMPTIBUS SOCIETATIS

EDITIO QUARTA

ISAACO NEWTONO

AUCTORE

MATHEMATICA

PRINCIPIA

NATURALIS

PHILOSOPHIAE.

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI,

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ.

ET

AUSPICIIS

AUGUSTISSIMÆ REGINÆ

ANNÆ

FLORENTI,

TRACTATUM HUNC D.D.D.

IS. NEWTONUS.

TRACTATUM HUNC D.D.D.

AL. HENRIQUUS

EPISCOPUS

A N N E

AUGUSTISSIMÆ REGINÆ

ET

REGNI

A TAGANÆ

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

CAROLO II

SERENISSIMO REGE

A

SOCIETATI REGALI

ILLUSTRISSIMÆ

IN

VIRI PRÆSTANTISSIMI

ISAACI NEWTONI

OPUS HOCCE

MATHEMATICO-PHYSICUM

Seculi Gentiſque noſtræ Decus egregium.

EN tibi norma Poli, & divæ libramina Molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Conderet, omnipotens ſibi Leges ipſe Creator
Dixerit, atque operum quæ fundamenta locarit.
Intima panduntur victi penetralia Cœli,
Nec latet, extremos quæ Vis circumrotet Orbes.
Sol ſolio reſidens ad ſe jubet omnia prono
Tendere deſcenſu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vaſtum per inane moveri;
Sed rapit immotis, ſe centro, ſingula gyris.
Hinc patet, horrificis qua ſit via flexa Cometis:
Diſcimus hinc tandem, qua cauſa argentea Phœbe
Paſſibus haud æquis eat, & cur ſubdita nulli
Hactenus Aſtronomo numerorum fræna recuſet:
Cur remeent Nodi, curque Auges progrediantur.
Diſcimus, & quantis reſluum vaga Cynthia Pontum
Viribus impellat; feſſis dum fluctibus ulvam
Deſerit, ac nautis ſuſpectas nudat arenas;
Altĕrniſve ruens ſpumantia littora pulſat.

Quæ

Quæ toties animos veterum torſere Sophorum,
Quæque Scholas hodie rauco certamine vexant,
Obvia conſpicimus; nubem pellente Matheſi:
Quæ ſuperas penetrare domos, atque ardua Cœli,
NEWTONI auſpiciis, jam dat contingere Templa.
Surgite Mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cœligenæ vires cognoſcite Mentis,
A pecudum vita longe longeque remotæ.
Qui ſcriptis primus Tabulis compeſcere Cædes,
Furta & Adulteria, & perjuræ crimina Fraudis;
Quive vagis populis circumdari mœnibus Urbes
Auctor erat; Cereriſve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab Uva;
Vel qui Niliaca monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere Voces;
Humanam ſortem minus extulit; utpote pauca
In commune ferens miſeræ ſolatia vitæ.
Jam vero Superis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita diæ
Clauſtra patent Naturæ, & rerum immobilis ordo;
Et quæ præteritis latuere incognita ſæclis.
Talia monſtrantem juſtis celebrate Camænis,
Vos qui cœleſti gaudetis nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia Veri,
NEWTONUM Muſis carum, qui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit Numine mentem:
Nec fas eſt propius Mortali attingere Divos.

ED. HALLEY.

AUC.

AUCTORIS
PRÆFATIO
AD
LECTOREM.

CUm *Veteres* Mechanicam (*uti auctor est* Pappus) *in rerum Naturalium investigatione maximi fecerint*; & *Recentiores*, *missis formis substantialibus & qualitatibus occultis*, *Phænomena Naturæ ad leges Mathematicas revocare aggressi sint*: *Visum est in hoc Tractatu* Mathesin *excolere*, *quatenus ea ad* Philosophiam *spectat*. Mechanicam *vero duplicem Veteres constituerunt*: Rationalem *quæ per Demonstrationes accurate procedit*, & Practicam. *Ad Practicam spectant Artes omnes Manuales*, *a quibus utique* Mechanica *nomen mutuata est*. *Cum autem Artifices parum accurate operari soleant*, *fit ut* Mechanica *omnis a* Geometria *ita distinguatur*, *ut quicquid accuratum sit ad* Geometriam *referatur*, *quicquid minus accuratum ad* Mechanicam. *Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur*, *imperfectior est Mechanicus*, *& si quis accuratissime operari posset*, *hic foret Mechanicus omnium perfectissimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum descriptiones in quibus* Geometria *fundatur*, *ad* Mechanicam *pertinent. Has lineas describere* Geometria *non docet sed postulat. Postulat enim ut Tyro easdem accurate describere prius didicerit quam limen attingat* Geometriæ; *dein*, *quomodo per has operationes Problemata solvantur*, *docet. Rectas & Circulos describere Problemata sunt*, *sed non Geometrica. Ex* Mechanica *postulatur horum solutio*, *in* Geometria *docetur solutorum usus. Ac gloriatur* Geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur*

Geo-

Geometria *in praxi Mechanica, & nihil aliud est quam* Mechanicæ universalis *pars illa quæ artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat. Cum autem artes Manuales in corporibus movendis præcipue versentur, fit ut* Geometria *ad magnitudinem*, Mechanica *ad motum vulgo referatur. Quo sensu* Mechanica rationalis *erit Scientia Motuum qui ex viribus quibuscunque resultant, & Virium quæ ad motus quoscunque requiruntur, accurate proposita ac demonstrata. Pars hæc* Mechanicæ *a Veteribus in* Potentiis quinque *ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui Gravitatem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non Artibus sed Philosophiæ consulentes, deque potentiis non manualibus sed naturalibus scribentes, ea maxime tractamus quæ ad Gravitatem, Levitatem, vim Elasticam, resistentiam Fluidorum & ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: & ea propter, hæc nostra tanquam Philosophiæ principia Mathematica proponimus. Omnis enim Philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut a Phænomenis motuum investigemus vires Naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phænomena reliqua. Et huc spectant Propositiones generales quas Libro primo & secundo pertractavimus. In Libro autem tertio Exemplum hujus rei proposuimus per explicationem Systematis mundani. Ibi enim, ex Phænomenis cœlestibus, per Propositiones in Libris prioribus Mathematice demonstratas, derivantur vires Gravitatis quibus corpora ad Solem & Planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propositiones etiam Mathematicas, deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Lunæ & Maris. Utinam cætera Naturæ phænomena ex principiis Mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent ut nonnihil suspicer ea omnia*

nia ex viribus quibuſdam pendere poſſe, quibus corporum particulæ per cauſas nondum cognitas vel in ſe mutuo impelluntur & ſecundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philoſophi hactenus Naturam fruſtra tentarunt. Spero autem quod vel huic Philoſophandi modo, vel veriori alicui, Principia hìc poſita lucem aliquam præbebunt.

In his edendis, Vir acutiſſimus & in omne literarum genere eruditiſſimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec ſolum Typothetarum Sphalmata correxit & Schemata incidi curavit, ſed etiam Auctor fuit ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonſtratam a me Figuram Orbium cœleſtium impetraverat, rogare non deſtitit ut eandem cum* Sociëtate Regali *communicarem. Quæ deinde hortatibus & benignis ſuis auſpiciis effecit ut de eadem in lucem emittenda cogitare inciperem. At poſtquam Motuum Lunarium inæqualitates aggreſſus eſſem, deinde etiam alia tentare cœpiſſem quæ ad leges & menſuras Gravitatis & aliarum virium, & Figuras a corporibus ſecundum datas quaſcunque leges attractis deſcribendas, ad motus corporum plurium inter ſe, ad motus corporum in Mediis reſiſtentibus, ad vires, denſitates & motus Mediorum, ad Orbes Cometarum, & ſimilia ſpectant, editionem in aliud tempus differendam eſſe putavi, ut cætera rimarer & una in publicum darem. Quæ ad motus Lunares ſpectant, (imperfecta cum ſint,) in Corollariis Propoſitionis* LXVI. *ſimul complexus ſum, ne ſingula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & ſigillatim demonſtrare tenerer, & ſeriem reliquarum Propoſitionum interrumpere. Nonnulla ſero inventa locis minus idoneis inſerere malui, quam numerum Propoſitionum & citationes mutare. Ut omnia candide legantur, & defectus, in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis Lectorum conatibus inveſtigentur, & benigne ſuppleantur, enixe rogo.*

IS. NEWTON.

Dabam *Cantabrigiæ*, e Collegio *S. Trinitatis*, Maii 8. 1686.

AUCTORIS PRÆFATIO.

IN hac Secunda Principiorum Editione, multa ſparſim emendantur & nonnulla adjiciuntur. In Libri primi Sectione II. Inventio virium quibus corpora in Orbibus datis revolvi poſſint, facilior redditur & amplior. In Libri ſecundi Sectione VII, Theoria reſiſtentiæ Fluidorum accuratius inveſtigatur & novis Experimentis confirmatur. In Libro tertio Theoria Lunæ & Præceſſio Æquinoctiorum ex Principiis ſuis plenius deducuntur, & Theoria Cometarum pluribus & accuratius computatis Orbium exemplis confirmatur.

Dabam *Londini*,
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

EDI-

EDITORIS PRÆFATIO.

NEWTONIANÆ Philoſophiæ novam tibi, Lector benevole, diuque deſideratam Editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potiſſimum contineantur in hoc Opere celeberrimo, intelligere potes ex Indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipſa te fere docebit Auctoris Præfatio. Reliquum eſt, ut adjiciantur nonnulla de Methodo hujus Philoſophiæ.

Qui Phyſicam tractandam ſuſceperunt, ad tres fere claſſes revocari poſſunt. Extiterunt enim, qui ſingulis rerum ſpeciebus Qualitates ſpecificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum ſingulorum operationes, ignota quadam ratione, pendere voluerunt. In hoc poſita eſt ſumma doctrinæ Scholaſticæ, ab *Ariſtotele* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique ſingulos Effectus ex corporum ſingularibus Naturis oriri; at unde ſint illæ Naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti ſint in rerum nominibus, non in ipſis rebus; Sermonem quendam Philoſophicum cenſendi ſunt adinveniſſe, Philoſophiam tradidiſſe non ſunt cenſendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem conſequi ſperarunt, rejecta Vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque Materiam univerſam homogeneam eſſe, omnem vero Formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium ſimpliciſſimis quibuſdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et recte quidem progreſſio inſtituitur a ſimplicioribus ad magis compoſita, ſi particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipſa tribuit Natura. Verum ubi licentiam ſibi aſſumunt, ponendi quaſcunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertosque ſitus & motus; quin & fingendi Fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrime permeent, omnipotente prædita ſubtilitate, motibuſque occultis agitata; jam ad ſomnia delabuntur, neglecta rerum conſtitutione vera: quæ ſane fruſtra petenda eſt ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certiſſimas Obſervationes inveſtigari poſſit. Qui ſpeculationum

ſuarum fundamentum deſumunt ab Hypotheſibus, etiamſi deinde ſecundum leges Mechanicas accuratiſſime procedant; Fabulam quidem elegantem forte & venuſtam, Fabulam tamen concinnare dicendi ſunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui Philoſophiam ſcilicet Experimentalem profitentur. Hi quidem ex ſimpliciſſimis quibus poſſunt principiis rerum omnium cauſas derivandas eſſe volunt: nihil autem Principii loco aſſumunt, quod nondum ex Phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheſes non comminiſcuntur, neque in Phyſicam recipiunt, niſi ut Quæſtiones de quarum veritate diſputetur. Duplici itaque Methodo incedunt, Analytica & Synthetica. Naturæ vires legeſque virium ſimpliciores ex ſelectis quibuſdam Phænomenis per Analyſin deducunt, ex quibus deinde per Syntheſin reliquorum conſtitutionem tradunt. Hæc illa eſt Philoſophandi ratio longe optima, quam præ ceteris merito amplectendam cenſuit Celeberrimus Auctor noſter. Hanc ſolam utique dignam judicavit, in qua excolenda atque adornanda operam ſuam collocaret. Hujus igitur illuſtriſſimum dedit Exemplum, Mundani nempe Syſtematis explicationem e Theoria Gravitatis feliciſſime deductam. Gravitatis virtutem univerſis corporibus ineſſe, ſuſpicati ſunt vel finxerunt alii: primus Ille & ſolus ex Apparentiis demonſtrare potuit, & ſpeculationibus egregiis firmiſſimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis Viros, præjudiciis quibuſdam plus æquo occupatos, huic novo Principio ægre aſſentiri potuiſſe, & certis incerta identidem prætuliſſe. Horum famam vellicare non eſt animus: Tibi potius, Benevole Lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus Tute ipſe judicium non iniquum feras.

Igitur ut Argumenti ſumatur exordium a ſimpliciſſimis & proximis; deſpiciamus pauliſper qualis ſit in Terreſtribus natura Gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora Cœleſtia, longiſſime a ſedibus noſtris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes Philoſophos, corpora univerſa circumterreſtria gravitare in Terram. Nulla dari corpora vere levia, jamdudum confirmavit Experientia multiplex. Quæ dicitur Levitas relativa, non eſt vera Levitas, ſed apparens ſolummodo: & oritur a præpollente Gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora univerſa gravitant in Terram, ita Terra viciſſim in corpora æqualiter gravitat; Gravitatis enim actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem, ſic oſtenditur. Diſtinguatur Terræ

totius

totius moles in binas quaſcunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam ſi pondera partium non eſſent in ſe mutuo æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent recta moveri ad infinitum, verſus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra Experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio eſſe conſtituta: hoc eſt, Gravitatis actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter a centro Terræ diſtantium, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æqualli acceleratione corporum omnium, e quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent eſſe proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam vero corpora univerſa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in Vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia ſpatia cadendo deſcribunt, ſublata ſcilicet Aeris reſiſtentia: accuratius autem comprobatur per Experimenta Pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in Terram & Terra viciſſim in corpora momentis æqualibus gravitent; Terræ pondus in unumquodque corpus, ſeu vis qua corpus Terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejuſdem in Terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque Terram attrahit, ſive corporis vis abſoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: ſiquidem aucta vel diminuta mole materiæ, oſtenſum eſt, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque Telluris ex conjunctis partium Actionibus conflari cenſenda erit; atque adeo corpora omnia Terreſtria ſe mutuo trahere oportet viribus abſolutis, quæ ſint in ratione materiæ trahentis. Hæc eſt natura Gravitatis apud Terram: videamus jam qualis ſit in Cœlis.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare; Naturæ lex eſt ab omnibus recepta Philoſophis. Inde vero ſequitur, corpora quæ in Curvis moventur, atque adeo de lineis rectis Orbitas ſuas tangentibus jugiter abeunt, Vi aliqua perpetuo agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in Orbibus curvis revolventibus neceſſario aderit Vis aliqua, per cujus actiones repetitas indefinenter a Tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum eſt, quod Mathematicis rationibus colligitur & certiſſime demonſtratur; Corpora nempe omnia, quæ moventur in linea aliqua curva in plano deſcripta, quæque radio ducto ad punctum vel quieſcens vel utcunque motum deſcribunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri a Viribus quæ ad idem punctum tendunt. Cum igitur in confeſſo ſit apud Aſtronomos, Planetas primarios circum Solem, ſecundarios vero circum ſuos primarios, areas deſcribere temporibus proportionales; conſequens eſt ut Vis illa, qua perpetuo detorquentur a Tangentibus rectilineis, & in Orbitis curvilineis revolvi coguntur, verſus corpora dirigatur quæ ſita ſunt in Orbitarum centris. Hæc itaque Vis non inepte vocari poteſt, reſpectu quidem corporis revolventis, Centripeta; reſpectu autem corporis centralis, Attractiva; a quacunque demum cauſa oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda ſunt, & Mathematice demonſtrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in Circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum ſint ut cubi diſtantiarum a centro communi; Vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Vel, ſi corpora revolvantur in Orbitis quæ ſunt Circulis finitimæ, & quieſcant Orbitarum Apſides; Vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Obtinere caſum alterutrum in Planetis univerſis conſentiunt Aſtronomi. Itaque Vires centripetæ Planetarum omnium ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum ab Orbium centris. Si quis objiciat Planetarum & Lunæ præſertim, Apſides non penitus quieſcere; ſed motu quodam lento ferri in conſequentia: reſponderi poteſt, etiamſi concedamus hunc motum tardiſſimum exinde profectum eſſe quod Vis centripetæ proportio aberret aliquantum a duplicata, aberrationem illam per computum Mathematicum inveniri poſſe & plane inſenſibilem eſſe. Ipſa enim ratio Vis centripetæ Lunaris, quæ omnium maxime turbari debet, paululum quidem duplicatam ſuperabit; ad hanc vero ſexaginta fere vicibus propius accedet quam ad triplicatam. Sed verior erit reſponſio, ſi dicamus hanc Apſidum progreſſionem, non ex aberratione a duplicata proportione, ſed ex alia prorſus diverſa cauſa oriri, quemadmodum egregie commonſtratur in hac Philoſophia. Reſtat ergo ut Vires centripetæ, quibus Planetæ primarii tendunt verſus Solem & ſecundarii verſus primarios ſuos, ſint accurate ut quadrata diſtantiarum reciproce.

Ex

PRÆFATIO.

Ex iis quæ hactenus dicta sunt, constat Planetas in Orbitis suis retineri per Vim aliquam in ipsos perpetuo agentem : constat Vim illam dirigi semper versus Orbitarum centra : constat hujus efficaciam augeri in accessu ad centrum, diminui in recessu ab eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum distantiæ, diminui in eadem proportione qua distantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione instituta inter Planetarum Vires centripetas & Vim Gravitatis, annon ejusdem forte sint generis. Ejusdem vero generis erunt, si deprehendantur hinc & inde leges eædem eædemque affectiones. Primo itaque Lunæ, quæ nobis proxima est, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ a corporibus e quiete demissis dato tempore sub ipso motus initio describuntur, ubi a viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus : Hoc utique consequitur ex ratiociniis Mathematicis. Erit igitur Vis centripeta Lunæ in Orbita sua revolventis, ad Vim Gravitatis in superficie Terræ, ut spatium quod tempore quam minimo describeret Luna descendendo per Vim centripetam versus Terram, si circulari omni motu privari fingeretur, ad spatium quod eodem tempore quam minimo describit grave corpus in vicinia Terræ, per Vim gravitatis suæ cadendo. Horum spatiorum prius æquale est arcus a Luna per idem tempus descripti sinui verso, quippe qui Lunæ translationem de Tangente, factam a Vi centripeta, metitur; atque adeo computari potest ex datis tum Lunæ tempore periodico tum distantia ejus a centro Terræ. Spatium posterius invenitur per Experimenta Pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta Lunæ in Orbita sua revolventis ad vim Gravitatis in superficie Terræ, erit ut quadratum semidiametri Terræ ad Orbitæ semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superius ostenduntur, vis centripeta Lunæ in Orbita sua revolventis ad vim Lunæ centripetam prope Terræ superficiem. Vis itaque centripeta prope Terræ superficiem æqualis est vi Gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una atque eadem : si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in Terram caderent quam ex vi sola Gravitatis. Constat igitur Vim illam centripetam, qua Luna perpetuo de Tangente vel trahitur vel impellitur & in Orbita retinetur, ipsam esse vim Gravitatis terrestris ad Lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est ut ad ingentes distantias illa sese Virtus extendat,

cum

cum nullam ejus ſenſibilem imminutionem, vel in altiſſimis montium cacuminibus, obſervare licet. Gravitat itaque Luna in Terram: quin & actione mutua, Terra viciſſim in Lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hac Philoſophia, ubi agitur de Maris æſtu & Æquinoctiorum præceſſione, ab actione tum Lunæ tum Solis in Terram oriundis. Hinc & illud tandem edocemur, qua nimirum lege vis Gravitatis decreſcat in majoribus a Tellure diſtantiis. Nam cum Gravitas non diverſa ſit a Vi centripeta Lunari, hæc vero ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ; diminuetur & Gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad Planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa Solem & ſecundariorum circa Jovem & Saturnum ſunt Phænomena generis ejuſdem ac revolutio Lunæ circa Terram, quoniam porro demonſtratum eſt vires centripetas primariorum dirigi verſus centrum Solis, ſecundariorum verſus centra Jovis & Saturni, quemadmodum Lunæ vis centripeta verſus Terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centris, quemadmodum vis Lunæ eſt ut quadratum diſtantiæ a Terra: concludendum erit eandem eſſe naturam univerſis. Itaque ut Luna gravitat in Terram, & Terra viciſſim in Lunam; ſic etiam gravitabunt omnes ſecundarii in primarios ſuos, & primarii viciſſim in ſecundarios; ſic & omnes primarii in Solem, & Sol viciſſim in primarios.

Igitur Sol in Planetas univerſos gravitat & univerſi in Solem. Nam ſecundarii dum primarios ſuos comitantur, revolvuntur interea circum Solem una cum primariis. Eodem itaque argumento, utriuſque generis Planetæ gravitant in Solem, & Sol in ipſos. Secundarios vero Planetas in Solem gravitare abunde inſuper conſtat ex inæqualitatibus Lunaribus; quarum accuratiſſimam Theoriam, admiranda ſagacitate patefactam, in tertio hujus Operis libro expoſitam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoverſum propagari ad ingentes uſque diſtantias, & ſeſe diffundere ad ſingulas circumjecti ſpatii partes, apertiſſime colligi poteſt ex motu Cometarum; qui ab immenſis intervallis profecti feruntur in viciniam Solis, & nonnunquam adeo ad ipſum proxime accedunt ut Globum ejus, in Periheliis ſuis verſantes, tantum non contingere videantur. Horum Theoriam ab Aſtronomis antehac fruſtra quæſitam, noſtro tandem ſæculo feliciter inventam & per Obſervationes certiſſime demonſtratam, Præſtantiſſimo noſtro Auctori debemus. Patet igitur

igitur Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce vero Phænomenis manifestum est & Mathematice comprobatur, vires illas, quibus Cometæ retinentur in orbitis suis, respicere Solem & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque Cometæ in Solem: atque adeo Solis vis attractiva non tantum ad corpora Planetarum in datis distantiis & in eodem fere plano collocata, sed etiam ad Cometas in diversissimis Cœlorum regionibus & in diversissimis distantiis positos pertingit. Hæc igitur est natura corporum gravitantium, ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantia. Inde vero sequitur, Planetas & Cometas universos se mutuo trahere, & in se mutuo graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione Jovis & Saturni, Astronomis non incognita, & ab actionibus horum Planetarum in se invicem oriunda; quin & ex motu illo lentissimo Apsidum, qui supra memoratus est, quique a causa consimili proficiscitur.

Eo demum pervenimus ut dicendum sit, & Terram & Solem & corpora omnia cœlestia, quæ Solem comitantur, se mutuo attrahere. Singulorum ergo particulæ quæque minimæ vires suas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum supra de Terrestribus ostensum est. In diversis autem distantiis, erunt & harum vires in duplicata ratione distantiarum reciproce: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere Globos eadem lege trahentes, Mathematice demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod a nullis non recipitur Philosophis; Effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eædem sunt, easdem esse causas & easdem esse proprietates quæ nondum cognoscuntur. Quis enim dubitat, si Gravitas sit causa descensus Lapidis in *Europa*, quin eadem sit causa descensus in *America*? Si Gravitas mutua fuerit inter Lapidem & Terram in *Europa*; quis negabit mutuam esse in *America*? Si vis attractiva Lapidis & Terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit similem esse compositionem in *America*? Si attractio Terræ ad omnia corporum genera & ad omnes distantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac Regula fundatur omnis Philosophia: quippe qua sublata nihil affirmare possimus de Universis. Constitutio rerum singularum innotescit per Observationes & Experimenta: inde vero non

niſi per hanc Regulam de rerum univerſarum natura judicamus.

Jam cum Gravia ſint omnia corpora, quæ apud Terram vel in Cœlis reperiuntur, de quibus Experimenta vel Obſervationes inſtituere licet; omnino dicendum erit, Gravitatem corporibus univerſis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non ſint Extenſa, Mobilia, & Impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non ſint Gravia. Corporum Extenſio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non niſi per Experimenta innoteſcunt: eodem plane modo Gravitas innoteſcit. Corpora omnia de quibus Obſervationes habemus, Extenſa ſunt & Mobilia & Impenetrabilia: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus Obſervationes non habemus, Extenſa eſſe & Mobilia & Impenetrabilia. Ita corpora omnia ſunt Gravia, de quibus Obſervationes habemus: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus Obſervationes non habemus, Gravia eſſe. Si quis dicat corpora Stellarum inerrantium non eſſe Gravia, quandoquidem eorum Gravitas nondum eſt obſervata; eodem argumento dicere licebit neque Extenſa eſſe, nec Mobilia, nec Impenetrabilia, cum hæ Fixarum affectiones nondum ſint obſervatæ. Quid opus eſt verbis? Inter primarias qualitates corporum univerſorum vel Gravitas habebit locum; vel Extenſio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel recte explicabitur per corporum Gravitatem, vel non recte explicabitur per corporum Extenſionem, Mobilitatem, & Impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare concluſionem, & de occultis qualitatibus neſcio quid muſſitare. Gravitatem ſcilicet Occultum eſſe quid, perpetuo argutari ſolent; occultas vero cauſas procul eſſe ablegandas a Philoſophia. His autem facile reſpondetur; occultas eſſe cauſas, non illas quidem quarum exiſtentia per Obſervationes clariſſime demonſtratur, ſed has ſolum quarum occulta eſt & ficta exiſtentia nondum vero comprobata. Gravitas ergo non erit occulta cauſa motuum cœleſtium; ſiquidem ex Phænomenis oſtenſum eſt, hanc virtutem revera exiſtere. Hi potius ad occultas confugiunt cauſas; qui neſcio quos Vortices, materiæ cujuſdam prorſus fictitiæ & ſenſibus omnino ignotæ, motibus iiſdem regendis præficiunt.

Ideone autem Gravitas occulta cauſa dicetur, eoque nomine rejicietur e Philoſophia, quod cauſa ipſius Gravitatis occulta eſt & nondum inventa? Qui ſic ſtatuunt, videant nequid ſtatuant abſurdi,

metarum prorſus regulari, nullam ipſos reſiſtentiam pati quæ vel minimum ſentiri poteſt; atque adeo neutiquam in materiam ullam incurſare, cujus aliqua ſit vis reſiſtendi, vel proinde cujus aliqua ſit denſitas ſeu vis Inertiæ. Nam reſiſtentia Mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel a defectu lubricitatis. Quæ oritur a defectu lubricitatis, admodum exigua eſt; & ſane vix obſervari poteſt in Fluidis vulgo notis, niſi valde tenacia fuerint adinſtar Olei & Mellis. Reſiſtentia quæ ſentitur in Aere, Aqua, Hydrargyro, & hujuſmodi Fluidis non tenacibus fere tota eſt prioris generis; & minui non poteſt per ulteriorem quemcunque gradum ſubtilitatis, manente Fluidi denſitate vel vi inertiæ, cui ſemper proportionalis eſt hæc reſiſtentia: quemadmodum clariſſime demonſtratum eſt ab Auctore noſtro in peregregia Reſiſtentiarum Theoria, quæ paulo nunc accuratius exponitur, hac ſecunda vice, & per Experimenta corporum cadentium plenius confirmatur.

Corpora progrediendo motum ſuum Fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Eſt itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, eſt ut Fluidi denſitas; ergo retardatio ſeu reſiſtentia erit ut eadem Fluidi denſitas; neque ullo pacto tolli poteſt, niſi a Fluido ad partes corporis poſticas recurrente reſtituatur motus amiſſus. Hoc autem dici non poterit, niſi impreſſio Fluidi in corpus ad partes poſticas æqualis fuerit impreſſioni corporis in Fluidum ad partes anticas, hoc eſt, niſi velocitas relativa qua Fluidum irruit in corpus a tergo, æqualis fuerit velocitati qua corpus irruit in Fluidum, id eſt, niſi velocitas abſoluta Fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas abſoluta Fluidi propulſi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli poteſt Fluidorum reſiſtentia, quæ oritur ab eorundem denſitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit; Fluidi cœleſtis nullam eſſe vim inertiæ, cum nulla ſit vis reſiſtendi: nullam eſſe vim qua motus communicetur, cum nulla ſit vis inertiæ: nullam eſſe vim qua mutatio quælibet vel corporibus ſingulis vel pluribus inducatur, cum nulla ſit vis qua motus communicetur: nullam eſſe omnino efficaciam, cum nulla ſit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc Hypotheſin, quæ fundamento plane deſtituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimum quidem inſervit, ineptiſſimam vocare liceat & Philoſopho prorſus

ſus indignam. Qui cœlos materia fluida repletos eſſe volunt, hanc vero non inertem eſſe ſtatuunt; Hi verbis tollunt Vacuum, re ponunt. Nam cum hujuſmodi materia fluida ratione nulla ſecerni poſſit ab inani Spatio; diſputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod ſi aliqui ſint adeo uſque dediti Materiæ, ut Spatium a corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quo tandem oporteat illos pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, Mundi per omnia pleni conſtitutionem ex voluntate Dei profectam eſſe, propter eum finem, ut operationibus Naturæ ſubſidium præſens haberi poſſet ab Æthere ſubtiliſſimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non poteſt, ſiquidem jam oſtenſum eſt ex Cometarum phænomenis, nullam eſſe hujus Ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, ſiquidem diverſa Mundi conſtitutio eodem argumento pariter ſtabiliri poſſet: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, ſed ex neceſſitate quadam Naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces ſordidas Gregis impuriſſimi. Hi ſunt qui ſomniant Fato univerſa regi, non Providentia; Materiam ex neceſſitate ſua ſemper & ubique extitiſſe, infinitam eſſe & æternam. Quibus poſitis, erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum neceſſitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam ſi neceſſario moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinata aliqua velocitate; pari neceſſitate movebitur in plagam diverſam cum diverſa velocitate; in plagas autem diverſas, cum diverſis velocitatibus, moveri non poteſt; oportet igitur immotam eſſe. Neutiquam profecto potuit oriri Mundus, pulcherrima formarum & motuum varietate diſtinctus, niſi ex liberrima voluntate cuncta providentis & gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur Naturæ leges: in quibus multa ſane ſapientiſſimi conſilii, nulla neceſſitatis apparent veſtigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, ſed Obſervando atque Experiendo addiſcere debemus. Qui veræ Phyſicæ principia Legeſque rerum, ſola mentis vi & interno Rationis lumine fretum, invenire ſe poſſe confidit; hunc oportet, vel ſtatuere Mundum ex neceſſitate fuiſſe, Legeſque propoſitas ex eadem neceſſitate ſequi; vel ſi per voluntatem Dei conſtitutus ſit ordo Naturæ, ſe tamen, homuncionem miſellum

ſurdi, unde totius tandem Philoſophiæ fundamenta convellantur. Etenim cauſæ continuo nexu procedere ſolent a compoſitis ad ſimpliciora: ubi ad cauſam ſimpliciſſimam perveneris, jam non licebit ulterius progredi. Cauſæ igitur ſimpliciſſimæ nulla dari poteſt mechanica explicatio: ſi daretur enim, cauſa nondum eſſet ſimpliciſſima. Has tu proinde cauſas ſimpliciſſimas appellabis occultas, & exulare jubebis? ſimul vero exulabunt & ab his proxime pendentes & quæ ab illis porro pendent, uſque dum a cauſis omnibus vacua fuerit & probe purgata Philoſophia.

Sunt qui Gravitatem præter naturam eſſe dicunt, & Miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam eſſe volunt, cum in Phyſica præternaturales cauſæ locum non habeant. Huic ineptæ prorſus objectioni diluendæ, quæ & ipſa Philoſophiam ſubruit univerſam, vix operæ pretium eſt immorari. Vel enim Gravitatem corporibus omnibus inditam eſſe negabunt, quod tamen dici non poteſt: vel eo nomine præter naturam eſſe affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque adeo ex cauſis Mechanicis originem non habeat. Dantur certe primariæ corporum affectiones; quæ, quoniam ſunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes ſint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint vero qualis ſit deinde futura Philoſophia.

Nonnulli ſunt quibus hæc tota Phyſica cœleſtis vel ideo minus placet, quod cum *Carteſii* dogmatibus pugnare & vix conciliari poſſe videatur. His ſua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam ſibi concedi poſtulant. NEWTONIANAM itaque Philoſophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & cauſas ſequi per Phænomena comprobatas, potius quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram Philoſophiam pertinet, rerum naturas ex cauſis vere exiſtentibus derivare: eas vero leges quærere, quibus voluit Summus Opifex hunc Mundi pulcherrimum ordinem ſtabilire; non eas quibus potuit, ſi ita viſum fuiſſet. Rationi enim conſonum eſt, ut a pluribus cauſis, ab invicem nonnihil diverſis, idem poſſit Effectus proficiſci: hæc autem vera erit cauſa, ex qua vere atque actu proficiſcitur; reliquæ locum non habent in Philoſophia vera. In Horologiis automatis idem Indicis horarii motus vel ab appenſo Pondere vel ab intus concluſo Elatere oriri poteſt. Quod ſi oblatum Horologium revera ſit inſtructum Pondere;

 ridebitur

ridebitur qui finget Elaterem, & ex Hypotheſi ſic præpropere confícta motum Indicis explicare ſuſcipiet: oportuit enim internam Machinæ fabricam penitius perſcrutari, ut ita motus propoſiti principium verum exploratum habere poſſet. Idem vel non abſimile feretur judicium de Philoſophis illis, qui materia quadam ſubtiliſſima Cœlos eſſe repletos, hanc autem in Vortices indeſinenter agi voluerunt. Nam ſi Phænomenis vel accuratiſſime ſatisfacere poſſent ex Hypotheſibus ſuis; veram tamen Philoſophiam tradidiſſe, & veras cauſas motuum cœleſtium inveniſſe nondum dicendi ſunt; niſi vel has revera exiſtere, vel ſaltem alias non exiſtere demonſtraverint. Igitur ſi oſtenſum fuerit, univerſorum corporum Attractionem habere verum locum in rerum natura; quinetiam oſtenſum fuerit, qua ratione motus omnes cœleſtes abinde ſolutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda objectio, ſi quis dixerit eoſdem motus per Vortices explicari debere, etiamſi id fieri poſſe vel maxime conceſſerimus. Non autem concedimus: Nequeunt enim ullo pacto Phænomena per Vortices explicari; quod ab Auctore noſtro abunde quidem & clariſſimis rationibus evincitur; ut ſomniis plus æquo indulgeant oporteat, qui ineptiſſimo figmento reſarciendo, noviſque porro commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora Planetarum & Cometarum circa Solem deferantur a Vorticibus; oportet corpora delata & Vorticum partes proxime ambientes eadem velocitate eademque curſus determinatione moveri, & eandem habere denſitatem vel eandem Vim inertiæ pro mole materiæ. Conſtat vero Planetas & Cometas, dum verſantur in iiſdem regionibus Cœlorum, velocitatibus variis variaque curſus determinatione moveri. Neceſſario itaque ſequitur, ut Fluidi cœleſtis partes illæ, quæ ſunt ad eaſdem diſtantias a Sole revolvantur eodem tempore in plagas diverſas cum diverſis velocitatibus: etenim alia opus erit directione & velocitate, ut transire poſſint Planetæ, alia, ut tranſire poſſint Cometæ. Quod cum explicari nequeat; vel fatendum erit, univerſa corpora cœleſtia non deferri a materia Vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos eſſe non ab uno eodemque Vortice, ſed a pluribus qui ab invicem diverſi ſint, idemque ſpatium Soli circumjectum pervadant.

Si plures Vortices in eodem ſpatio contineri, & ſeſe mutuo penetrare, motibuſque diverſis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent eſſe conformes delatorum corporum motibus, qui

ſunt

ſunt ſumme regulares, & peraguntur in Sectionibus Conicis, nunc valde eccentricis, nunc ad Circulorum proxime formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri poſſit, ut iidem integri conſerventur, nec ab actionibus materiæ occurſantis per tot ſæcula quicquam perturbentur. Sane ſi motus hi fictitii ſunt magis compoſiti & difficilius explicantur, quam veri illi motus Planetarum & Cometarum; fruſtra mihi videntur in Philoſophiam recipi: omnis enim cauſa debet eſſe Effectu ſuo ſimplicior. Conceſſa Fabularum licentia, affirmaverit aliquis Planetas omnes & Cometas circumcingi Atmoſphæris, adinſtar Telluris noſtræ; quæ quidem Hypotheſis rationi magis conſentanea videbitur quam Hypotheſis Vorticum. Affirmaverit deinde has Atmoſphæras, ex natura ſua, circa Solem moveri & Sectiones Conicas deſcribere; qui ſane motus multo facilius concipi poteſt, quam conſimilis motus Vorticum ſe invicem permeantium. Denique Planetas ipſos & Cometas circa Solem deferri ab Atmoſphæris ſuis credendum eſſe ſtatuat, & ob repertas motuum cœleſtium cauſas triumphum agat. Quiſquis autem hanc Fabulam rejiciendam eſſe putet, idem & alteram Fabulam rejiciet: nam ovum non eſt ovo ſimilius, quam Hypotheſis Atmoſphærarum Hypotheſi Vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti & in parabola moti deflexionem a curſu rectilineo oriri a Gravitate lapidis in Terram, ab occulta ſcilicet qualitate. Fieri tamen poteſt ut alius aliquis, naſi acutioris, Philoſophus cauſam aliquam comminiſcatur. Finget igitur ille materiam quandam ſubtilem, quæ nec viſu, nec tactu, neque ullo ſenſu percipitur, verſari in regionibus quæ proxime contingunt Telluris ſuperficiem. Hanc autem materiam, in diverſas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas Parabolicas deſcribere contendet. Deinde vero lapidis deflexionem pulchre ſic expediet, & vulgi plauſum merebitur. Lapis, inquiet, in Fluido illo ſubtili natat; & curſui ejus obſequendo, non poteſt non eandem una ſemitam deſcribere. Fluidum vero movetur in lineis Parabolicis; ergo lapidem in Parabola moveri neceſſe eſt. Quis nunc non mirabitur acutiſſimum hujuſce Philoſophi ingenium, ex cauſis Mechanicis, materia ſcilicet & motu, Phænomena Naturæ ad vulgi etiam captum præclare deducentis? Quis vero non ſubſannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine Mathematico qualitates occultas, e Philoſophia feliciter excluſas, denuo revocare ſuſtinuerit? ſed pudet nugis diutius immorari.

Summa rei huc tandem redit: Cometarum ingens eſt numerus; motus eorum ſunt ſumme regulares, & eaſdem leges cum Planetarum motibus obſervant. Moventur in Orbibus Conicis, hi orbes ſunt valde admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes Cœlorum partes, & Planetarum regiones liberrime pertranſeunt, & ſæpe contra Signorum ordinem incedunt. Hæc Phænomena certiſſime confirmantur ex Obſervationibus Aſtronomicis: & per Vortices nequeunt explicari: Imo, ne quidem cum Vorticibus Planetarum conſiſtere poſſunt. Cometarum motibus omnino locus non erit; niſi materia illa fictitia penitus e Cœlis amoveatur.

Si enim Planetæ circum Solem a Vorticibus devehuntur; Vorticum partes, quæ proxime ambiunt unumquemque Planetam, ejuſdem denſitatis erunt ac Planeta; uti ſupra dictum eſt. Itaque materia illa omnis quæ contigua eſt Orbis magni perimetro, parem habebit ac Tellus denſitatem: quæ vero jacet intra Orbem magnum atque Orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut conſtitutio Vorticis permanere poſſit, debent partes minus denſæ centrum occupare, magis denſæ longius a centro abire. Cum enim Planetarum tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum a Sole, oportet partium Vorticis periodos eandem rationem ſervare. Inde vero ſequitur, vires centrifugas harum partium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Quæ igitur majore intervallo diſtant a centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde ſi minus denſæ fuerint, neceſſe eſt ut cedant vi majori, qua partes centro propiores aſcendere conantur. Aſcendent ergo denſiores, deſcendent minus denſæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit diſpoſita arque ordinata materia fluida totius Vorticis, ut conquieſcere jam poſſit in æquilibrio conſtituta. Si bina Fluida, quorum diverſa eſt denſitas, in eodem vaſe continentur; utique futurum eſt ut Fluidum, cujus major eſt denſitas, majore vi Gravitatis infimum petat locum: & ratione non abſimili omnino dicendum eſt, denſiores Vorticis partes majore vi centrifuga petere ſupremum locum. Tota igitur illa & multo maxima pars Vorticis, quæ jacet extra Telluris orbem, denſitatem habebit atque adeo vim inertiæ pro mole materiæ, quæ non minor erit quam denſitas & vis inertiæ Telluris: inde vero Cometis trajectis orietur ingens reſiſtentia, & valde admodum ſenſibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus ſiſtere atque abſorbere poſſe merito videatur. Conſtat autem ex motu Cometarum

miſellum, quid optimum factu ſit perſpectum habere. Sana omnis & vera Philoſophia fundatur in Phænomenis rerum: quæ ſi nos vel invitos & reluctantes ad hujuſmodi principia deducunt, in quibus clariſſime cernuntur Conſilium optimum & Dominium ſummum ſapientiſſimi & potentiſſimi Entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibuſdam forſan hominibus minus grata ſint futura. His vel Miracula vel Qualitates occultæ dicantur, quæ diſplicent; verum nomina malitioſe indita non ſunt ipſis rebus vitio vertenda; niſi illud fateri tandem velint, utique debere Philoſophiam in Atheiſmo fundari. Horum hominum gratia non erit labefactanda Philoſophia, ſiquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos Judices præſtantiſſima Philoſophandi ratio, quæ fundatur in Experimentis & Obſervationibus. Huic vero, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc Opere præclaro Illuſtriſſimi noſtri Auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque Problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis ad quæ nec ſpes erat humanam mentem aſſurgere potuiſſe, merito admirantur & ſuſpiciunt quicunque paulo profundius in hiſce rebus verſati ſunt. Clauſtris ergo reſeratis, aditum Nobis aperuit ad pulcherrima rerum myſteria. Syſtematis Mundani compagem elegantiſſimam ita tandem patefecit & penitius perſpectandam dedit; ut nec ipſe, ſi nunc reviviſceret, Rex *Alphonſus* vel ſimplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea deſideraret. Itaque Naturæ majeſtatem propius jam licet intueri, & dulciſſima contemplatione frui, Conditorem vero ac Dominum Univerſorum impenſius colere & venerari, qui fructus eſt Philoſophiæ multo uberrimus. Cæcum eſſe oportet, qui ex optimis & ſapientiſſimis rerum ſtructuris non ſtatim videat Fabricatoris Omnipotentis infinitam ſapientiam & bonitatem: inſanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur Eximium NEWTONI Opus adverſus Atheorum impetus munitiſſimum præſidium: neque enim alicunde felicius, quam ex hac pharetra, contra impiam Catervam tela deprompſeris. Hoc ſenſit pridem, & in pereruditis Concionibus Anglice Latineque editis, primus egregie demonſtravit Vir in omni Literarum genere præclarus idemque bonarum Artium fautor eximius RICHARDUS BENTLEIUS, Sæculi ſui & Academiæ noſtræ magnum Ornamentum, Collegii noſtri *S. Trinitatis* Magiſter digniſſimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obſtrictum fateri debeo:

debeo: Huic & Tuas quæ debentur gratias, Lector benevole, non denegabis. Is enim, cum a longo tempore Celeberrimi Auctoris amicitia intima frueretur, (qua etiam apud Posteros censeri non minoris æstimat, quam propriis Scriptis quæ literato orbi in deliciis sunt inclarescere) Amici simul famæ & scientiarum incremento consuluit. Itaque cum Exemplaria prioris Editionis rarissima admodum & immani pretio coemenda supereſſent; suasit Ille crebris efflagitationibus & tantum non objurgando perpulit denique Virum Præstantissimum, nec modestia minus quam eruditione summa Insignem, ut novam hanc Operis Editionem, per omnia elimatam denuo & egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus & auspiciis prodire pateretur: Mihi vero, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quam posset emendate id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maji 12. 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* Socius,
Astronomiæ & Philosophiæ Experimentalis
Professor *Plumianus*.

INDEX

INDEX CAPITUM.
TOTIUS OPERIS.

PAG.

DEFINITIONES. 1
AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS. 12

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECT. I. *DE Methodo rationum primarum & ultimarum.* 24
SECT. II. *De inventione Virium centripetarum.* 34
SECT. III. *De motu corporum in Conicis sectionibus eccentricis.* 48
SECT. IV. *De inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex Umbilico dato.* 59
SECT. V. *De inventione Orbium ubi Umbilicus neuter datur.* 66
SECT. VI. *De inventione Motuum in Orbibus datis.* 97
SECT. VII. *De corporum Ascensu & Descensu rectilineo.* 105
SECT. VIII. *De inventione Orbium in quibus corpora Viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.* 114
SECT. IX. *De Motu corporum in Orbibus mobilibus, deque Motu Apsidum.* 121
SECT. X. *De Motu corporum in Superficiebus datis, deque Funependulorum Motu reciproco.* 132
SECT. XI. *De Motu corporum Viribus centripetis se mutuo petentium.* 147
SECT. XII. *De corporum Sphæricorum Viribus attractivis.* 173

SECT.

SECT. XIII. *De corporum non Sphæricorum Viribus attractivis.* 192
SECT. XIV. *De Motu corporum Minimorum, quæ Viribus centripetis ad singulas Magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.* 203

DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

SECT. I. *DE Motu corporum quibus resistitur in ratione Velocitatis.* 211
SECT. II. *De Motu corporum quibus resistitur in duplicata ratione Velocitatis.* 220
SECT. III. *De Motu corporum quibus resistitur partim in ratione Velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata.* 245
SECT. IV. *De corporum Circulari motu in Mediis resistentibus.* 253
SECT. V. *De densitate & compressione Fluidorum, deque Hydrostatica.* 260
SECT. VI. *De Motu & Resistentia corporum Funependulorum.* 272
SECT. VII. *De Motu Fluidorum & resistentia Projectilium.* 294
SECT. VIII. *De Motu per Fluida propagato.* 329
SECT. IX. *De Motu Circulari Fluidorum.* 345

DE MUNDI SYSTEMATE LIBER TERTIUS.

REGULÆ PHILOSOPHANDI. 357
PHÆNOMENA. 359
PROPOSITIONES. 362
SCHOLIUM. 481

PHILO-

BIBLIOTECA PÚBLICA E ARQUIVO DISTRITAL DE EVORA

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

Quantitas Materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius Denſitate & Magnitudine conjunctim.

AER, denſitate duplicata, in ſpatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato ſextuplus. Idem intellige de Nive & Pulveribus per compreſſionem vel liquefactionem condenſatis. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ per cauſas quaſcunque diverſimode condenſantur. Medii interea, ſi quod fuerit, interſtitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem ſub nomine Corporis vel Maſſæ in ſequentibus paſſim intelligo. Innoteſcit ea per corporis cujuſque Pondus. Nam Ponderi proportionalem eſſe reperi per experimenta Pendulorum accuratiſſime inſtituta, uti poſthac docebitur.

DEFINITIO II.

Quantitas Motus eſt menſura ejuſdem orta ex Velocitate & Quantitate Materiæ conjunctim.

Motus totius eſt ſumma motuum in partibus ſingulis; adeoque in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplus eſt, & dupla cum velocitate quadruplus.

BIBLIOTECA PÚBLICA E ARQUIVO DISTRITAL DE ÉVORA

DEFINITIONES.

DEFINITIO III.

Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ, fit ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo Vis Inertiæ dici possit. Exercet vero corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta; estque exercitium ejus sub diverso respectu & Resistentia & Impetus: resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum ejus mutare. Vulgus resistentiam quiescentibus & impetum moventibus tribuit: sed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem; neque semper vere quiescunt quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

DEFINITIO IV.

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione sola, neque post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertiæ. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex Ictu, ex Pressione, ex vi Centripeta.

DEFINITIO V.

Vis Centripeta est, qua corpora versus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.

Hujus generis est Gravitas, qua corpora tendunt ad centrum terræ; Vis Magnetica, qua ferrum petit magnetem; & Vis illa, quæcunque sit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in funda circumactus,

actus, a circumagente manu abire conatur; & conatu ſuo fundam diſtendit, eoque fortius quo celerius revolvitur; & quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, qua funda lapidem in manum perpetuo retrahit & in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, Centripetam appello. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centris orbium recedere; & niſi adſit vis aliqua conatui iſti contraria, qua cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, ſi vi Gravitatis deſtitueretur, non deflecteretur in terram, ſed in linea recta abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, ſi modo aeris reſiſtentia tolleretur. Per gravitatem ſuam retrahitur a curſu rectilineo & in terram perpetuo flectitur, idque magis vel minus pro gravitate ſua & velocitate motus. Quo minor erit ejus gravitas pro quantitate materiæ vel major velocitas quacum projicitur, eo minus deviabit a curſu rectilineo & longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velocitate ſecundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad diſtantiam duorum milliarium, priuſquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quaſi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quaſi decuplo longius: ſi modo aeris reſiſtentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri poſſet pro lubitu diſtantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam deſcriberet, ita ut tandem caderet ad diſtantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret priuſquam caderet; vel denique ut in terram nunquam caderet, ſed in cœlos abiret & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, qua Projectile vi gravitatis in orbem flecti poſſet & terram totam circuire, poteſt & Luna vel vi gravitatis, ſi modo gravis ſit, vel alia quacunque vi, qua in terram urgeatur, retrahi ſemper a curſu rectilineo terram verſus, & in orbem ſuum flecti: & abſque tali vi Luna in orbe ſuo retineri non poteſt. Hæc vis, ſi juſto minor eſſet, non ſatis flecteret Lunam de curſu rectilineo: ſi juſto major, plus ſatis flecteret, ac de orbe terram verſus deduceret. Requiritur quippe, ut ſit juſtæ magnitudinis: & Mathematicorum eſt invenire Vim, qua corpus in dato quovis orbe data cum velocitate accurate retineri poſſit; & viciſſim invenire Vim curvilineam, in quam corpus e dato quovis loco data cum velocitate egreſſum a data vi flectatur. Eſt autem vis hujus centripetæ Quantitas trium generum, Abſoluta, Acceleratrix, & Motrix.

DEFINITIONES.

DEFINITIONES.

DEFINITIO VI.

Vis centripetæ Quantitas Abſoluta eſt menſura ejuſdem major vel minor pro Efficacia cauſæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut Vis Magnetica pro mole magnetis vel intenſione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFINITIO VII.

Vis centripetæ Quantitas Acceleratrix eſt ipſius menſura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus magnetis ejuſdem major in minori diſtantia, minor in majori: vel vis Gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus præaltorum montium, atque adhuc minor (ut poſthac patebit) in majoribus diſtantiis a globo terræ; in æqualibus autem diſtantiis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) ſublata Aeris reſiſtentia, æqualiter accelerat.

DEFINITIO VIII.

Vis centripetæ Quantitas Motrix eſt ipſius menſura proportionalis Motui, quem dato tempore generat.

Uti Pondus majus in majore corpore, minus in minore; inque corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc Quantitas eſt corporis totius centripetentia ſeu propenſio in centrum, & (ut ita dicam) Pondus; & innoteſcit ſemper per vim ipſi contrariam & æqualem, qua deſcenſus corporis impediri poteſt.

Haſce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & abſolutas; & diſtinctionis gratia referre ad Corpora, centrum petentia, ad corporum Loca, & ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum & propenſionem totius in centrum ex propenſionibus omnium partium compoſitam; & vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca ſingula in circuitu diffuſam, ad movenda corpora quæ in ipſis ſunt; vim autem abſolutam ad Centrum, tanquam cauſa aliqua præditum, ſine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; ſive cauſa illa ſit corpus aliquod centrale (quale eſt Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro

centro vis gravitantis) ſive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat eſt hic conceptus. Nam virium cauſas & ſedes Phyſicas jam non expendo. DEFINITIONES.

Eſt igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejuſdem materiæ. Nam ſumma actionum vis acceleratricis in ſingulas corporis particulas eſt vis motrix totius. Unde juxta ſuperficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix ſeu vis gravitans in corporibus univerſis eadem eſt, gravitas motrix ſeu pondus eſt ut corpus: at ſi in regiones aſcendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque ſemper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor eſt, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel ſextuplo minus.

Porro attractiones & impulſus eodem ſenſu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulſus, vel Propenſionis cujuſcunque in centrum, indifferenter & pro ſe mutuo promiſcue uſurpo; has vires non phyſice ſed mathematice tantum conſiderando. Unde caveat lector, ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis cauſamve aut rationem phyſicam alicubi definire, vel centris (quæ ſunt puncta Mathematica) vires vere & phyſice tribuere; ſi forte aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo ſenſu in ſequentibus accipiendæ ſint, explicare viſum eſt. Nam Tempus, Spatium, Locum & Motum, ut omnibus notiſſima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates haſce non aliter quam ex relatione ad ſenſibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in abſolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares diſtingui.

I. Tempus Abſolutum, verum, & mathematicum, in ſe & natura ſua abſque relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis Durationis per motum menſura (ſeu accurata ſeu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Menſis, Annus.

DEFINITIONES.

II. Spatium Abſolutum, natura ſua abſque relatione ad externum quodvis, ſemper manet ſimilare & immobile: Relativum eſt ſpatii hujus menſura ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ a ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & a vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur: uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aerei vel cœleſtis definita per ſitum ſuum ad Terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine; ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi Terra, verbi gratia, movetur; ſpatium Aeris noſtri, quod relative & reſpectu Terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam Aer tranſit, nunc alia pars ejus; & ſic abſolute mutabitur perpetuo.

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat, eſtque pro ratione ſpatii vel Abſolutus vel Relativus. Pars, inquam, ſpatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; Superficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales ſunt; Situs vero proprie loquendo quantitatem non habent, neque tam ſunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſumma motuum partium, hoc eſt, tranſlatio totius de ſuo loco eadem eſt cum ſumma tranſlationum partium de locis ſuis; adeoque locus totius idem cum ſumma locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus Abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis paſſis fertur, relativus corporis Locus eſt navigii regio illa in qua corpus verſatur, ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur una cum navi: & Quies relativa eſt permanſio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At quies vera eſt permanſio corporis in eadem parte ſpatii illius immoti in qua navis ipſa una cum cavitate ſua & contentis univerſis movetur. Unde ſi Terra vere quieſcit, corpus quod relative quieſcit in navi, movebitur vere & abſolute ea cum velocitate qua navis movetur in Terra. Sin Terra etiam movetur; orietur verus & abſolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terra: & ſi corpus etiam movetur relative in navi; orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terra, tum corporis in navi; & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terra. Ut ſi Terræ pars illa, ubi navis verſatur, moveatur vere in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem

tem verſus cum velocitatis parte una: movebitur Nauta vere & abſolute in ſpatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relative in terra occidentem verſus cum velocitatis partibus novem. DEFINITIONES.

Tempus Abſolutum a relativo diſtinguitur in Aſtronomia per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies Naturales, qui vulgo tanquam æquales pro menſura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Aſtronomi, ut ex veriore tempore menſurent motus cœleſtes. Poſſibile eſt, ut nullus ſit motus æquabilis quo Tempus accurate menſuretur. Accelerari & retardari poſſunt motus omnes, ſed fluxus temporis abſoluti mutari nequit. Eadem eſt duratio ſeu perſeverantia exiſtentiæ rerum; ſive motus ſint celeres, ſive tardi, ſive nulli: proinde hæc a menſuris ſuis ſenſibilibus merito diſtinguitur, & ex iiſdem colligitur per Æquationem Aſtronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis neceſſitas, tum per experimentum Horologii Oſcillatorii, tum etiam per eclipſes Satellitum Jovis evincitur.

Ut partium Temporis ordo eſt immutabilis, ſic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæ de locis ſuis, & movebuntur (ut ita dicam) de ſeipſis. Nam tempora & ſpatia ſunt ſui ipſorum & rerum omnium quaſi Loca. In Tempore quoad ordinem ſucceſſionis; in Spatio quoad ordinem ſitus locantur univerſa. De illorum eſſentia eſt ut ſint Loca: & loca primaria moveri abſurdum eſt. Hæc ſunt igitur abſoluta Loca; & ſolæ tranſlationes de his locis ſunt abſoluti Motus.

Verum quoniam hæ Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui; earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles. Ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum a corpore aliquo, quod ſpectamus ut immobile, definimus loca univerſa: deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur, nec incommode in rebus humanis: in Philoſophicis autem abſtrahendum eſt a ſenſibus. Fieri etenim poteſt, ut nullum revera quieſcat corpus, ad quod loca motuſque referantur.

Diſtinguuntur autem Quies & Motus abſoluti & relativi ab invicem per Proprietates ſuas & Cauſas & Effectus. Quietis proprietas eſt, quod corpora vere quieſcentia quieſcunt inter ſe. Ideoque cum poſſibile ſit, ut corpus aliquod in regionibus Fixarum, aut longe ultra, quieſcat abſolute; ſciri autem non poſſit ex ſitu corporum ad invicem in regionibus noſtris, horumne aliquod ad longinquum

DEFINITIONIS. quum illud datam positionem servet necne; quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

Motus proprietas est, quod partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam Gyrantium partes omnes conantur recedere ab axe motus, & Progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus definiri nequit per translationem e vicinia corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam vere quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & sublata illa translatione non vere quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, absque translatione de vicinia corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto Loco movetur una Locatum: adeoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum: & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, & motu loci hujus de loco suo, & sic deinceps; usque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ supra memorato. Unde motus integri & absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli. Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem; atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod Immobile appello.

Causæ, quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem, sunt Vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur; nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari & mutari potest absque viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in qua hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur

mantur ut ſitus relativus conſervetur, conſervabitur relatio in qua motus relativus conſiſtit. Mutari igitur poteſt motus omnis relativus ubi verus conſervatur, & conſervari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejuſmodi relationibus minime conſiſtit. DEFINITIONES.

Effectus quibus motus abſoluti & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ ſunt, in vero autem & abſoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat ſitula a filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum a contorſione admodum rigeſcat, dein impleatur aqua, & una cum aqua quieſcat; tum vi aliqua ſubitanea agatur motu contrario in orbem, & filo ſe relaxante, diutius perſeveret in hoc motu; ſuperficies aquæ ſub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis: at poſtquam, vi in aquam paulatim impreſſa, effecit vas, ut hæc quoque ſenſibiliter revolvi incipiat; recedet ipſa paulatim a medio, aſcendetque ad latera vaſis, figuram concavam induens, (ut ipſe expertus ſum) & incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo, quieſcat in eodem relative. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innoteſcit & menſuratur motus aquæ circularis verus & abſolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera vaſis, ſed plana manebat, & propterea motus illius circularis verus nondum inceperat. Poſtea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, aſcenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum perpetuo creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quieſcebat in vaſe relative. Igitur conatus iſte non pendet a tranſlatione aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales tranſlationes definiri nequit. Unicus eſt corporis cujuſque revolventis motus vere circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui reſpondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri ſunt; & relationum inſtar, effectibus veris omnino deſtituuntur, niſi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in Syſtemate eorum qui Cœlos noſtros infra Cœlos Fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas ſecum deferre; ſingulæ Cœlorum partes, & Planetæ qui relative quidem in Cœlis ſuis proximis quieſcunt, moven-

DEFINITIONES.

tur vere. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quam fit in vere quiescentibus) unaque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ non sunt eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum mensuratarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus proprie intelligendæ erunt hæ mensuræ; & sermo erit insolens & pure Mathematicus, si quantitates mensuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces hasce de quantitatibus mensuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Matheſin & Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est: propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam suppetunt argumenta, partim ex motibus apparentibus qui sunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex aucta vel diminuta fili tensione augmentum vel decrementum motus, & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt Stellæ Fixæ in regionibus nostris: sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si

atten-

attenderetur ad filum, & deprenderetur tenſionem ejus illam ipſam eſſe quam motus globorum requireret; concludere liceret motum eſſe globorum, & corpora quieſcere; & tum demum ex tranſlatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum cauſis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere; & contra ex motibus ſeu veris ſeu apparentibus eorum cauſas & effectus, docebitur fuſius in ſequentibus. Hunc enim in finem Tractatum ſequentem compoſui. DEFINITIONES.

AXIOMATA,
SIVE

AXIOMATA,
SIVE
LEGES MOTUS.

LEX I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

PRojectilia perſeverant in motibus ſuis, niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari, niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

LEX II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur) ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſque determinationem componitur.

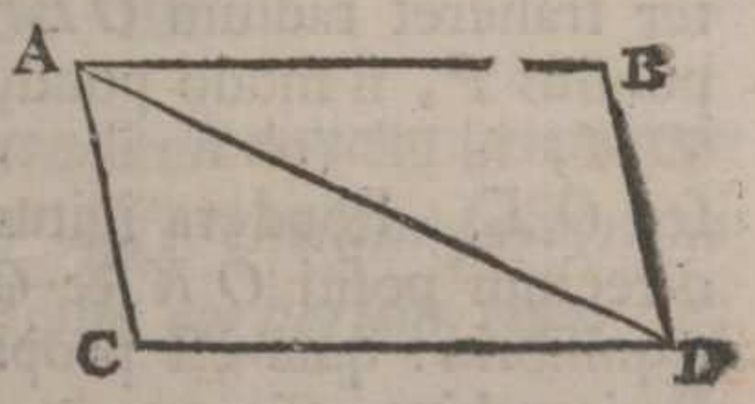
LEX III.

Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum; tantumque impediet progreſſum unius quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſua quomodocunque mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutuæ) ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, ſed motuum; ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciproce proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.



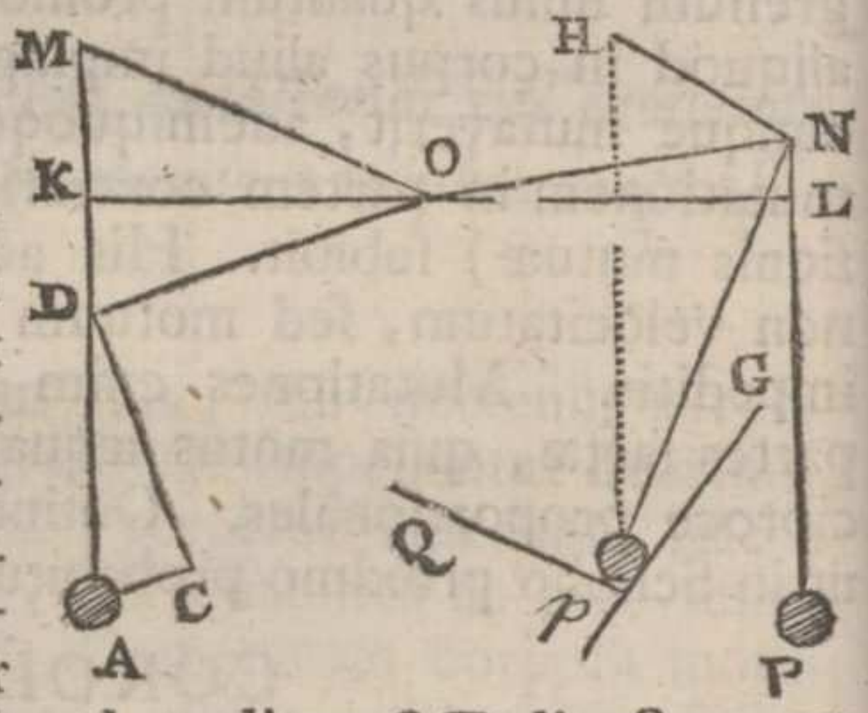
Si corpus dato tempore, vi ſola *M* in loco *A* impreſſa, ferretur uniformi cum motu ab *A* ad *B*; & vi ſola *N* in eodem loco impreſſa, ferretur ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraque feretur id eodem tempore in diagonali ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit ſecundum lineam *AC* ipſi *BD* parallelam, hæc vis per Legem II nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD*, ſive vis *N* imprimatur, ſive non; atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejuſdem reperietur alicubi in linea *CD*, & idcirco in utriuſque lineæ concurſu *D* reperiri neceſſe eſt. Perget autem motu rectilineo ab *A* ad *D* per Legem I.

Axiomata, sive

COROLLARIUM II.

Et hinc patet compoſitio vis directæ AD *ex viribus quibuſvis obliquis* AB *&* BD, *& viciſſim reſolutio vis cujuſvis directæ* AD *in obliquas quaſcunque* AB *&* BD. *Quæ quidem compoſitio & reſolutio abunde confirmatur ex Mechanica.*

Ut ſi de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *O M*, *O N* filis *M A*, *N P* ſuſtineant pondera *A* & *P*, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum *O* agatur recta *K O L* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroque *O* & intervallorum *O K*, *O L* majore *O L* deſcribatur circulus occurrens filo *M A* in *D*: & actæ rectæ *O D* parallela ſit *A C*, & perpendicularis *D C*. Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta, *K*, *L*, *D* affixa ſint an non affixa ad planum rotæ: pondera idem valebunt, ac ſi ſuſpenderentur a punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis autem *A* exponatur vis tota per lineam *A D*, & hæc reſolvetur in vires *A C*, *C D*, quarum *A C* trahendo radium *O D* directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *D C*, trahendo radium *D O* perpendiculariter, idem valet ac ſi perpendiculariter traheret radium *O L* ipſi *O D* æqualem; hoc eſt, idem atque pondus *P*, ſi modo pondus illud ſit ad pondus *A* ut vis *D C* ad vim *D A*, id eſt (ob ſimilia triangula *A D C*, *D O K*,) ut *O K* ad *O D* ſeu *O L*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ ſunt reciproce ut radii in directum poſiti *O K* & *O L*, idem pollebunt, & ſic conſiſtent in æquilibrio: quæ eſt proprietas notiſſima Libræ, Vectis, & Axis in Peritrochio. Sin pondus alterutrum ſit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.



Quod ſi pondus *p* ponderi *P* æquale partim ſuſpendatur filo *N p*, partim incumbat plano obliquo *p G*: agantur *p H*, *N H*, prior horizonti, poſterior plano *p G* perpendicularis; & ſi vis ponderis *p* deorſum tendens, exponatur per lineam *p H*, reſolvi poteſt hæc in vires *p N*, *H N*. Si filo *p N* perpendiculare eſſet planum aliquod *p Q*, ſecans planum alterum *p G* in linea ad horizontem parallela; & pondus *p* his planis *p Q*, *p G* ſolummodo incumberet; urgeret

geret illud hæc plana viribus p N, HN perpendiculariter, nimirum planum p Q vi p N, & planum p G vi HN. Ideoque ſi tollatur planum p Q, ut pondus tendat filum; quoniam filum ſuſtinendo pondus jam vicem præſtat plani ſublati, tendetur illud eadem vi p N, qua planum antea urgebatur. Unde tenſio fili hujus obliqui erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis PN, ut p N ad p H. Ideoque ſi pondus p ſit ad pondus A in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum diſtantiarum filorum ſuorum p N, AM a centro rotæ, & ratione directa p H ad p N; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque adeo ſe mutuo ſuſtinebunt, ut quilibet experiri poteſt. LEGES MOTUS.

Pondus autem p, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fiſſi facies internas: & inde vires cunei & mallei innoteſcunt: utpote cum vis qua pondus p urget planum p Q ſit ad vim, qua idem vel gravitate ſua vel ictu mallei impellitur ſecundum lineam p H in plana, ut p N ad p H; atque ad vim, qua urget planum alterum p G, ut p N ad NH. Sed & vis Cochleæ per ſimilem virium diviſionem colligitur; quippe quæ cuneus eſt a vecte impulſus. Uſus igitur Corollarii hujus latiſſime patet, & late patendo veritatem ſuam evincit; cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diverſimode demonſtrata. Ex hiſce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tenſis & ponderibus directe vel oblique aſcendentibus, cæteriſque potentiis Mechanicis componi ſolent, ut & vires Tendinum ad animalium oſſa movenda.

COROLLARIUM III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo ſummam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter ſe.

Etenim actio eique contraria reactio æquales ſunt per Legem III, adeoque per Legem II æquales in motibus efficiunt mutationes verſus contrarias partes. Ergo ſi motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, ſubducetur motui corporis inſequentis ſic, ut ſumma maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit ſubductio de motu utriuſque, adeoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut ſi corpus ſphæricum A ſit triplo majus corpore ſphærico B, habeatque duas velocitatis partes; & B ſequatur in eadem recta cum velocitatis

Axiomata, sive locitatis partibus decem, adeoque motus ipsius *A* sit ad motum ipsius *B*, ut sex ad decem: ponantur motus illis esse partium sex & partium decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem, adeoque perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus septem vel sex vel quinque, existente semper summa partium sexdecim ut prius. Si corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, adeoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septendecim vel octodecim, corpus *B*, amittendo tot partes quot *A* lucratur, vel cum una parte progredietur amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel cum una parte regredietur amisso motu suo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium $15 + 1$ vel $16 + 0$, & differentiæ contrariorum $17 - 1$ & $18 - 2$ semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium sex ante reflexionem & partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motus partes sex ante reflexionem ad motus partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

Quod si corpora vel non Sphærica vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo oblique, & requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus: dein corporis utriusque motus (per Corol. 11.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

COROL.

COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis Centrum, corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in. directum.

Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & distantia eorum dividatur [in ratione data, punctum dividens vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta. Hoc postea in Lemmate XXIII demonstratur, si punctorum motus fiant in eodem plano; & eadem ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant in eodem plano. Ergo si corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, adeoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cum distantiæ centrorum utriusque a communi gravitatis centro sint reciproce ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque adeo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus

AXIOMATA SIVE

mutat ſtatum ſuum; & reliquorum; quibuſcum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes ſummis totalibus corporum quorum ſunt centra reciproce proportionales, adeoque centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum: manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter ſe nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ; & propterea communi omnium centro mutationem in ſtatu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi a viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de hoc ſtatu. Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

COROLLARIUM V.

Corporum dato ſpatio incluſorum iidem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum abſque motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroque caſu (ex hypotheſi) & ex his ſummis vel differentiis oriuntur congreſſus & impetus quibus corpora ſe mutuo feriunt. Ergo per Legem II. æquales erunt congreſſuum effectus in utroque caſu; & propterea manebunt motus inter ſe in uno caſu æquales motibus inter ſe in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo ſe habent in Navi, ſive ea quieſcat, ſive moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

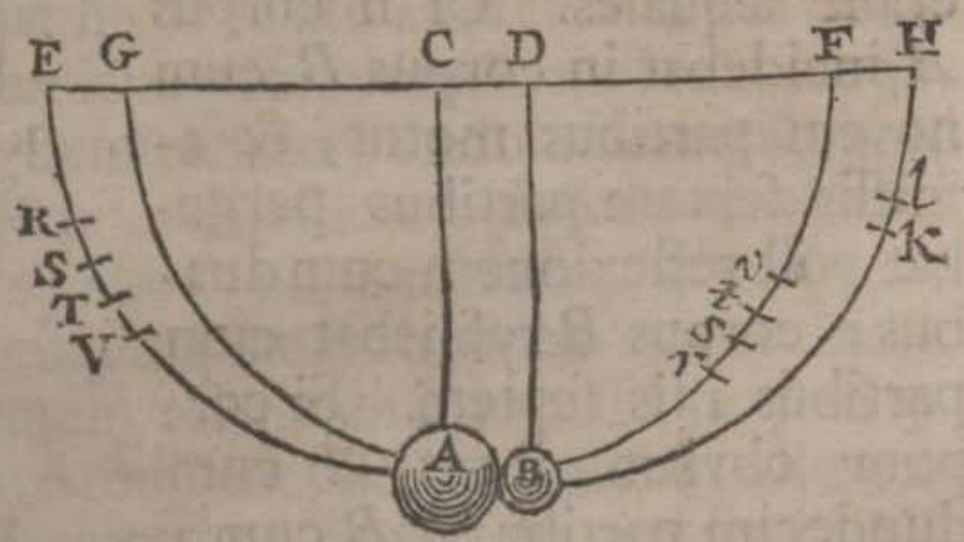
Si corpora moveantur quomodocunque inter ſe, & a viribus acceleratricibus æqualibus ſecundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter ſe, ac ſi viribus illis non eſſent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum)

rum) & ſecundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqua- LEGES
liter (quoad velocitatem) movebunt per Legem II. adeoque nun- MOTUS.
quam mutabunt poſitiones & motus eorum inter ſe.

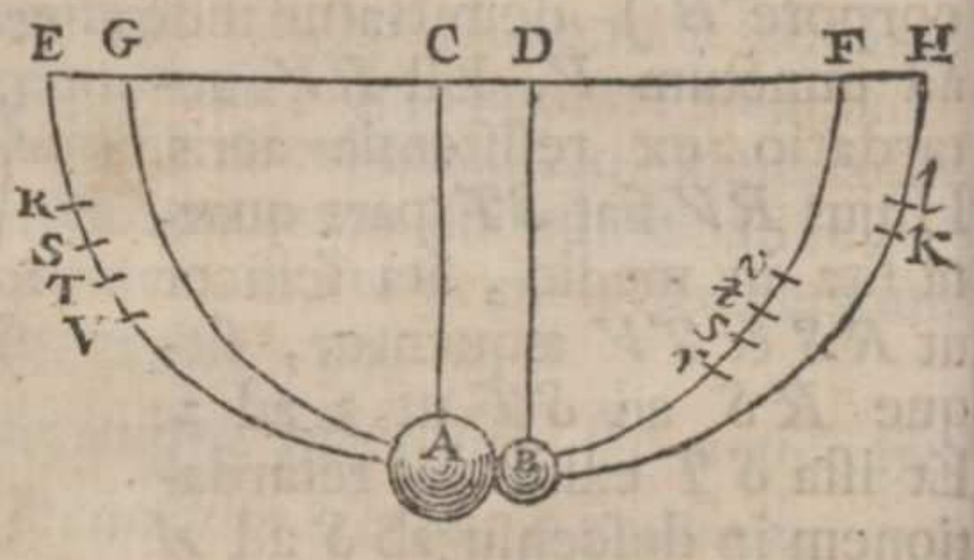
Scholium.

Hactenus principia tradidi a Mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per Leges duas primas & Corollaria duo prima *Galilæus* invenit deſcenſum Gravium eſſe in duplicata ratione temporis, & motum Projectilium fieri in Parabola; conſpirante experientia, niſi quatenus motus illi per aeris reſiſtentiam aliquantulum retardantur. Ab iiſdem Legibus & Corollariis pendent demonſtrata de temporibus oſcillantium Pendulorum, ſuffragante Horologiorum experientia quotidiana. Ex his iiſdem & Lege tertia *Chriſtophorus Wrennus* Eques Auratus, *Johannes Walliſius S. T. D.* & *Chriſtianus Hugenius*, hujus ætatis Geometrarum facile principes, regulas congreſſuum & reflexionum duorum corporum ſeorſim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter ſe (quoad has leges) omnino conſpirantes: & primus quidem *Walliſius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata eſt a *Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum Pendulorum: quod etiam *Clariſſimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus eſt. Verum, ut hoc experimentum cum Theoriis ad amuſſim congruat, habenda eſt ratio cum reſiſtentiæ aeris, tum etiam vis Elaſticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora *A*, *B* filis parallelis & æqualibus *AC*, *BD*, a centris *C*, *D*. His centris & intervallis deſcribantur ſemicirculi *EAF*, *GBH* radiis *CA*, *DB*. biſecti. Trahatur corpus *A* ad arcus *EAF* punctum quodvis *R*, & (ſubducto corpore *B*) demittatur inde, redeatque poſt unam oſcillationem ad punctum *V*. Eſt *RV* retardatio ex reſiſtentia aeris. Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta ſita in medio, ita ſcilicet ut *RS* & *TV* æquentur, ſitque *RS* ad *ST* ut 3 ad 2. Et iſta *ST* exhibebit retardationem in deſcenſu ab *S* ad *A* quam proxime. Reſtituatur corpus *B* in locum ſuum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A*, abſque errore ſenſibili, tanta erit ac



Axiomata, sive

si in vacuo cecidisset de loco *T*. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcus *T A*. Nam velocitatem Penduli in puncto infimo esse ut chordam arcus quem cadendo descripsit, Propositio est Geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*; a quo si corpus *A* demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum *r*, sit *s t* pars quarta ipsius *r v* sita in medio, ita videlicet ut *r s* & *t u* æquentur; & per chordam arcus *t A* exponatur velocitas quam corpus *A* proxime post reflexionem habuit in loco *A*. Nam *t* erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus *A*, sublata aeris resistentia, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* ascendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus *A* in chordam arcus *T A* (quæ velocitatem ejus exhibet) ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem; deinde in chordam arcus *t A*; ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime post reflexionem. Et sic corpus *B* ducendum erit in chordam arcus *B l*, ut habeatur motus ejus proxime post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante, quam post reflexionem; & tum demum conferendi sunt motus inter se & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in Pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuo directe occurrebant, quod æquales erant mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque adeo quod actio & reactio semper erant æquales. Ut si corpus *A* incidebat in corpus *B* cum novem partibus motus, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus *B* resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant *A* cum duodecim partibus & *B* cum sex, & redibat *A* cum duabus; redibat *B* cum octo, facta detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius *A* subducantur partes duodecim, & restabit nihil:



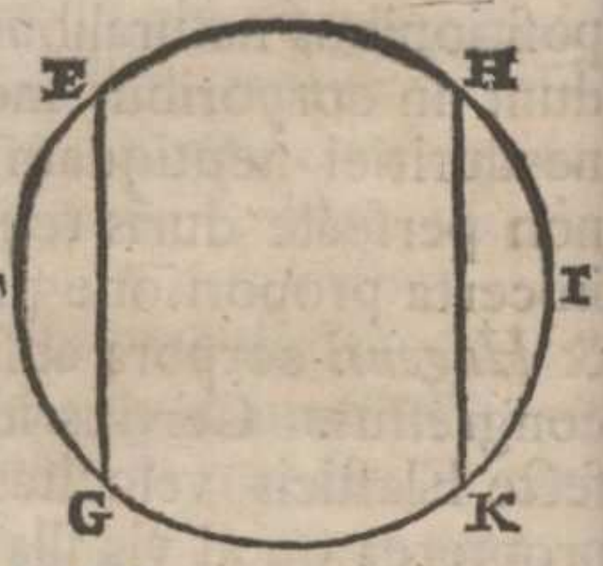
nihil: ſubducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & ſic de motu corporis *B* partium ſex ſubducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod ſi corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & poſt reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus; pergebat *B* cum quatuordecim, facta tranſlatione partium novem de *A* in *B*. Et ſic in reliquis. A congreſſu & colliſione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex ſumma motuum conſpirantium & differentia contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accurate. Difficile erat, tum pendula ſimul demittere ſic, ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco infimo *AB*; tum loca, *s*, *k* notare, ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis pilis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant. LEGES MOTUS.

Porro nequis objiciat Regulam, ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum, præſupponere corpora vel abſolute dura eſſe, vel ſaltem perfecte elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; addo quod Experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi Regula illa in corporibus non perfecte duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis Elaſticæ. In Theoria *Wrenni* & *Hugenii* corpora abſolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus. Certius id affirmabitur de perfecte Elaſticis. In imperfecte Elaſticis velocitas reditus minuenda eſt ſimul cum vi Elaſtica; propterea quod vis illa, (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur,) certa ac determinata ſit (quantum ſentio) faciatque corpora redire ab invicem cum velocitate relativa, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſus in data ratione. Id in pilis ex lana arcte conglomerata & forticurſus in data ratione. Id in pilis ex lana arcte conglomerata & fortiter conſtricta ſic tentavi. Primum demittendo Pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis Elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant Experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto Lex tertia quoad ictus & reflexiones per Theoriam comprobata eſt, quæ cum experientia plane congruit.

Axiomata, sive

In Attractionibus rem ſic breviter oſtendo. Corporibus duobus quibuſvis *A*, *B* ſe mutuo trahentibus, concipe obſtaculum quodvis interponi quo congreſſus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur verſus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obſtaculum magis urgebitur preſſione corporis *A* quam preſſione corporis *B*; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit preſſio fortior, facietque ut ſyſtema corporum duorum & obſtaculi moveatur in directum in partes verſus *B*, motuque in ſpatiis liberis ſemper accelerato abeat in infinitum. Quod eſt abſurdum & Legi primæ contrarium. Nam per Legem primam debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in Magnete & Ferro. Si hæc in vaſculis propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita, in aqua ſtagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinque ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent.

Sic etiam gravitas inter Terram & ejus partes, mutua eſt. Secetur Terra *FI* plano quovis *EG* in partes duas *EGF* & *EGI*; & æqualia erunt harum pondera in ſe mutuo. Nam ſi plano alio *HK* quod priori *EG* parallelum ſit, pars major *EGI* ſecetur in partes duas *EGKH* & *HKI*, quarum *HKI* æqualis ſit parti prius abſciſſæ *EFG*: manifeſtum eſt quod pars media *EGKH* pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, ſed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, ſuſpendetur, & quieſcet. Pars autem extrema *HKI* toto ſuo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam *EGF*; ideoque vis qua partium *HKI* & *EGKH* ſumma *EGI* tendit verſus partem tertiam *EGF*, æqualis eſt ponderi partis *HKI*, id eſt ponderi partis tertiæ *EGF*. Et propterea pondera partium duarum *EGI*, *EGF* in ſe mutuo ſunt æqualia, uti volui oſtendere. Et niſi pondera illa æqualia eſſent, Terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum.



Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciproce ut vires inſitæ: ſic in movendis Inſtrumentis mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundum determinationem virium

virium æſtimatæ, ſunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ, quæ oſcillante Libra ſunt reciproce ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt pondera, ſi recta aſcendunt & deſcendunt, æquipollent, quæ ſunt reciproce ut punctorum a quibus ſuſpenduntur diſtantiæ ab axe Libræ; ſin planis obliquis aliiſve admotis obſtaculis impedita aſcendunt vel deſcendunt oblique, æquipollent quæ ſunt reciproce ut aſcenſus & deſcenſus, quatenus facti ſecundum perpendiculum: id adeo ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in Trochlea ſeu Polyſpaſto vis manus funem directe trahentis, quæ ſit ad pondus vel directe vel oblique aſcendens ut velocitas aſcenſus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, ſuſtinebit pondus. In Horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum, ſi ſint reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, ſuſtinebunt ſe mutuo. Vis Cochleæ ad premendum corpus eſt ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progreſſivam cochleæ verſus corpus preſſum. Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fiſſi ſunt ad vim mallei in cuneum, ut progreſſus cunei ſecundum determinationem vis a malleo in ipſum impreſſæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo, ſecundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par eſt ratio Machinarum omnium. LEGES MOTUS.

Harum efficacia & uſus in eo ſolo conſiſtit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: unde ſolvitur in omni aptorum inſtrumentorum genere Problema, *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam reſiſtentiam vi data ſuperandi. Nam ſi Machinæ ita formentur, ut velocitates Agentis & Reſiſtentis ſint reciproce ut vires; Agens reſiſtentiam ſuſtinebit: & majori cum velocitatum diſparitate eandem vincet. Certe ſi tanta ſit velocitatum diſparitas, ut vincatur etiam reſiſtentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter ſe labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem ſeparandorum cohæſione & elevandorum ponderibus oriri ſolet; ſuperata omni ea reſiſtentia, vis reliqua dans accelerationem motus ſibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore reſiſtente producet. Ceterum Mechanicam tractare non eſt hujus inſtituti. Hiſce volui tantum oſtendere, quam late pateat quamque certa ſit Lex tertia Motus. Nam ſi æſtimetur Agentis actio ex ejus vi & velocitate

Axiomata, Sive tate conjunctim ; & ſimiliter Reſiſtentis reactio æſtimetur conjunctim ex ejus partium ſingularum velocitatibus & viribus reſiſtendi ab earum attritione, cohæſione, pondere, & acceleratione oriundis ; erunt actio & reactio, in omni inſtrumentorum uſu, ſibi invicem ſemper æquales. Et quatenus actio propagatur per inſtrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne reſiſtens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis ſemper erit contraria.

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De Methodo Rationum primarum & ultimarum, cujus ope ſequentia demonſtrantur.

LEMMA I.

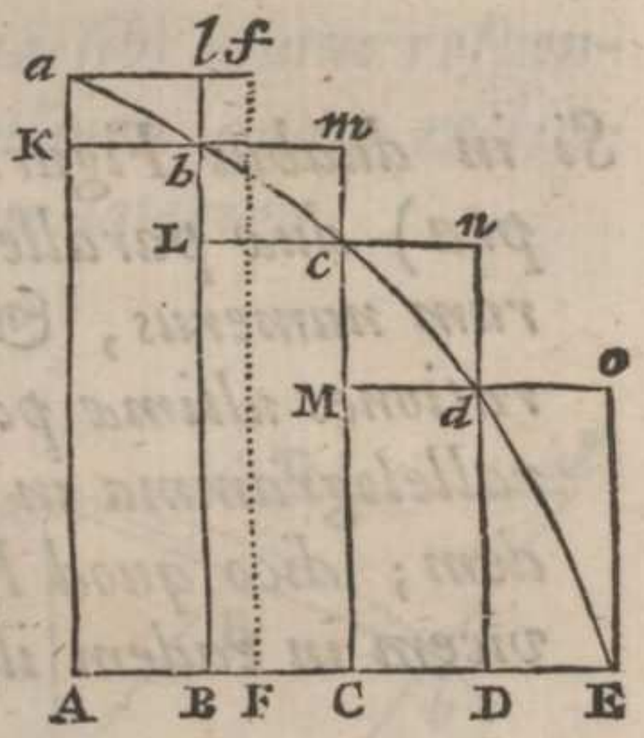
Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito conſtanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo æquales.

Si negas ; fiant ultimo inæquales, & ſit earum ultima differentia D. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia D : contra hypotheſin.

LEMMA

LEMMA II.

Si in Figura quavis AacE, *rectis* Aa, AE *& curva* acE *comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunque* Ab, Bc, Cd, &c. *sub basibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *Figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem Figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *sunt rationes æqualitatis.*



Nam Figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi *Kb* & altitudinum summa *Aa*, id est, rectangulum *ABla*. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus *AB* in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma 1.) Figura inscripta & circumscripta & multo magis Figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q. E. D.*

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines &c. AB, BC, CD, *sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim *AF* æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum *FAaf*. Hoc erit majus quam differentia Figuræ inscriptæ & Figuræ circumscriptæ; at latitudine sua *AF* in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum Figura curvilinea.

Corol. 2. Et multo magis Figura rectilinea, quæ chordis evanes-

De Motu Corporum

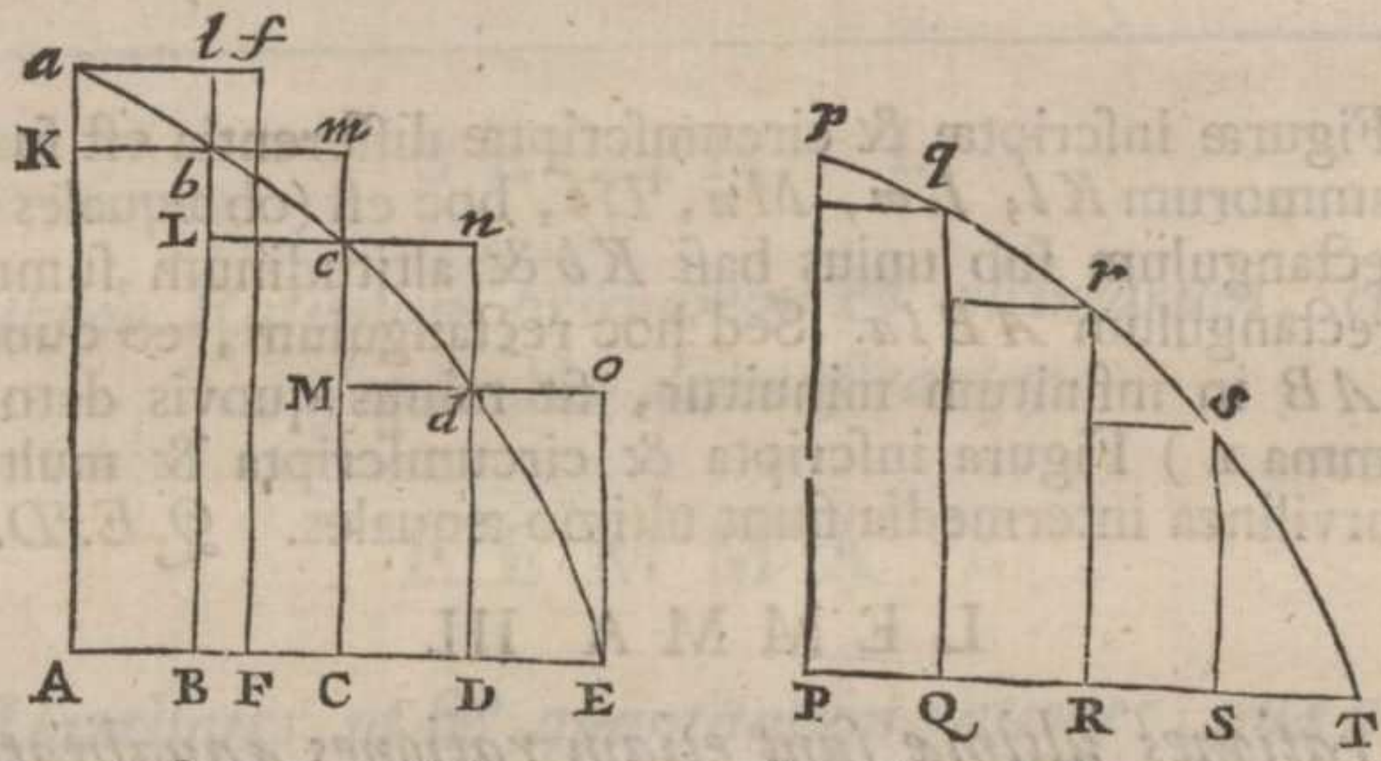
centium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum Figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & Figura rectilinea circumscripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ Figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE*,) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

Si in duabus Figuris AacE, PprT, *inscribantur* (*ut supra*) *duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una Figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod Figuræ duæ* AacE, PprT, *sunt ad invicem in eadem illa ratione.*



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita Figura ad Figuram; existente nimirum Figura priore (per Lemma III) ad summam priorem, & Figura posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in Lemmatis hujus Figuris sumantur parallelo-

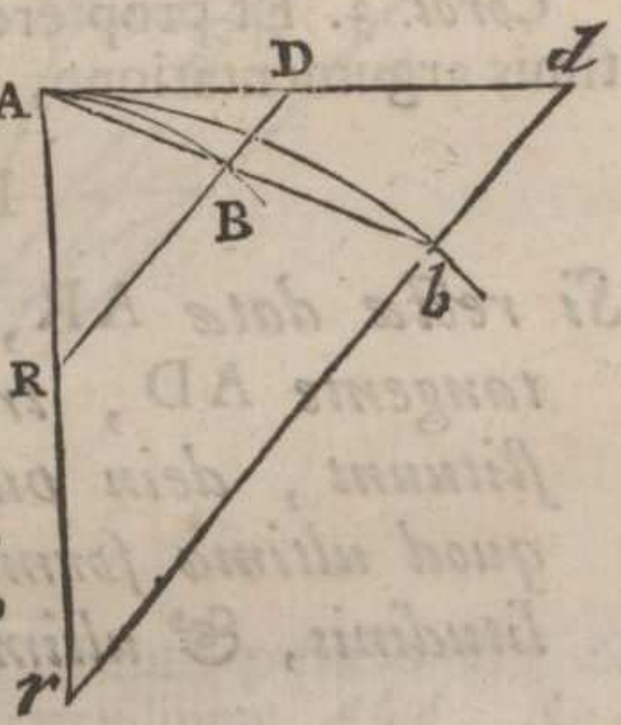
rallelogramma inter ſe ut partes, ſummæ partium ſemper erunt ut ſummæ parallelogrammorum; atque adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id eſt (per hypotheſin) in ultima ratione partis ad partem.

LEMMA V.

Similium Figurarum latera omnia, quæ ſibi mutuo reſpondent, ſunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areæ ſunt in duplicata ratione laterum.

LEMMA VI.

Si arcus quilibet poſitione datus AB *ſubtendatur chorda* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinque producta* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus* BAD, *ſub chorda & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimo evaneſcet.*



Nam ſi angulus ille non evaneſcit, continebit arcus *AB* cum tangente *AD* angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum *A* non erit continua, contra hypotheſin.

LEMMA VII.

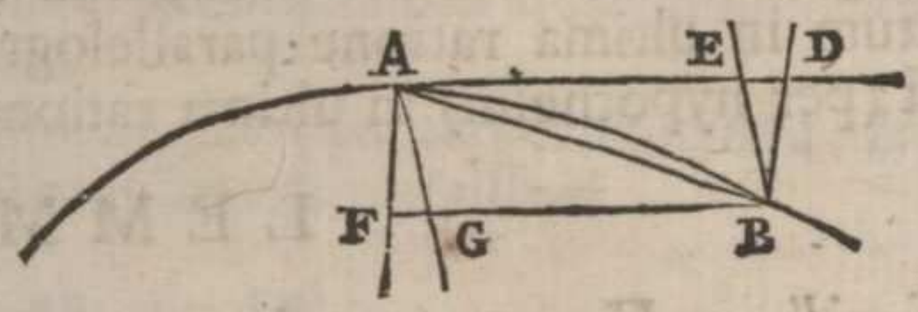
Iiſdem poſitis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, & tangentis ad invicem eſt ratio æqualitatis.

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur ſemper *A* & *AD* ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & ſecanti *BD* parallela agatur *bd*. Sitque arcus *Ab* ſemper ſimilis arcui *AB*. Et punctis *A*, *B* coeuntibus, angulus *dAb*, per Lemma ſuperius, evaneſcet; adeoque rectæ ſemper finitæ *Ab*, *Ad* & arcus intermedius *Ab* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hiſce ſemper proportionales rectæ *AB*, *AD*, & arcus intermedius *AB*

De Motu Corporum

evaneſcent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q.E.D.*

Corol. 1. Unde ſi per *B* ducatur tangenti parallela *BF*, rectam quamvis *AF* per *A* tranſeuntem perpetuo ſecans in *F*, hæc *BF* ultimo ad arcum evaneſcentem *AB* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *AFBD* rationem ſemper habet æqualitatis ad *AD*.



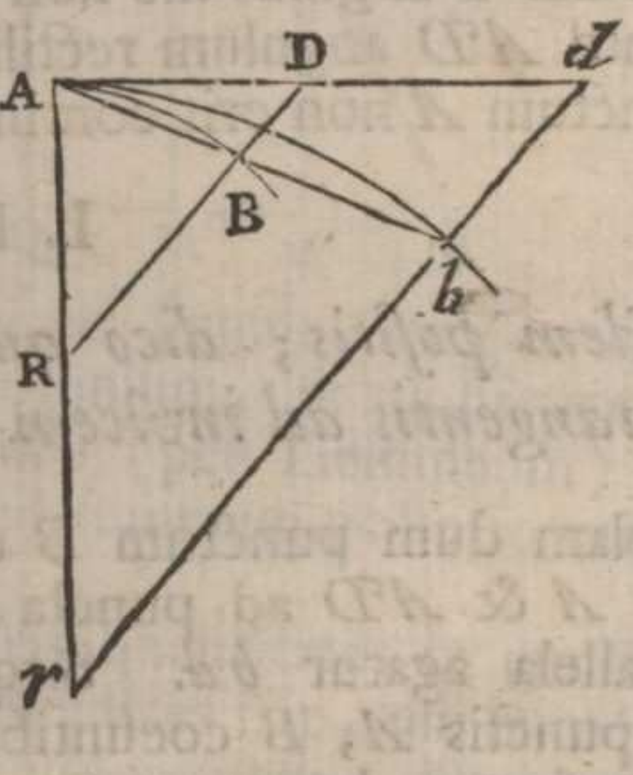
Corol. 2. Et ſi per *B* & *A* ducantur plures rectæ *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, ſecantes tangentem *AD* & ipſius parallelam *BF*; ratio ultima abſciſſarum omnium *AD*, *AE*, *BF*, *BG*, chordæque & arcus *AB* ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR *cum arcu* AB, *chorda* AB & *tangente* AD, *triangula tria* ARB, ARB, ARD *conſtituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evaneſcentium eſt ſimilitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur ſemper *AB*, *AD*, *AR* ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipſique *RD* parallela agi *rbd*, & arcui *AB* ſimilis ſemper ſit arcus *Ab*. Et coeuntibus punctis *A*, *B*, angulus *bAd* evaneſcet, & propterea triangula tria ſemper finita *rAb*, *rAb*, *rAd* coincident, ſuntque eo nomine ſimilia & æqualia. Unde & hiſce ſemper ſimilia & proportionalia *RAB*, *RAB*, *RAD* fient ultimo ſibi invicem ſimilia & æqualia. *Q.E.D.*

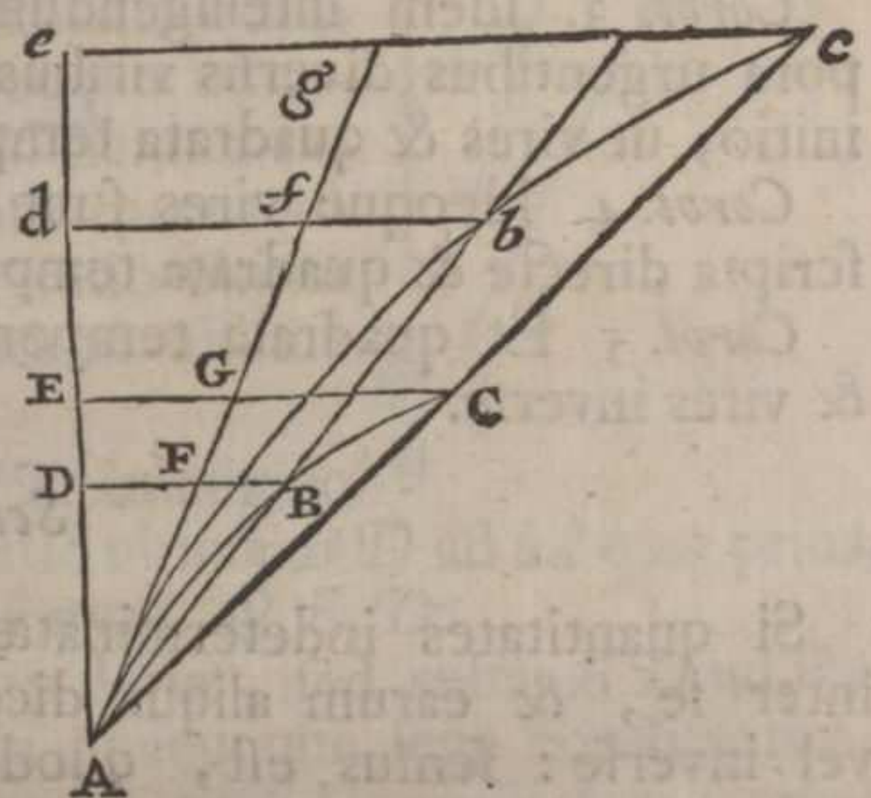


Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro ſe invicem uſurpari poſſunt.

LEMMA

LEMMA IX.

Si recta AE *& curva* ABC *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, CE *curvæ occurrentes in* B, C; *dein puncta* B, C *simul accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.*



Etenim dum puncta *B*, *C* accedunt ad punctum *A*, intelligatur semper *AD* produci ad puncta longinqua *d* & *e*, ut sint *Ad*, *Ae* ipsis *AD*, *AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *d b*, *e c* ordinatis *DB*, *EC* parallelæ quæ occurrant ipsis *AB*, *AC* productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva *Abc* ipsi *ABC* similis, tum recta *Ag*, quæ tangat curvam utramque in *A*, & secet ordinatim applicatas *DB*, *EC*, *db*, *ec* in *F*, G, *f*, *g*. Tum manente longitudine *Ae* coeant puncta *B*, *C* cum puncto *A*; & angulo *c Ag* evanescente, coincident areæ curvilineæ *Abd*, *Ace* cum rectilineis *Afd*, *Age*: adeoque (per Lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum *Ad*, *Ae*: Sed his areis proportionales semper sunt areæ *ABD*, *ACE*, & his lateribus latera *AD*, *AE*. Ergo & areæ *ABD*, *ACE* sunt ultimo in duplicata ratione laterum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

LEMMA X.

Spatia quæ corpus urgente quacunque Vi finita describit, sive Vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuo augeatur vel continuo diminuatur, sunt ipso motus initio in duplicata ratione Temporum.

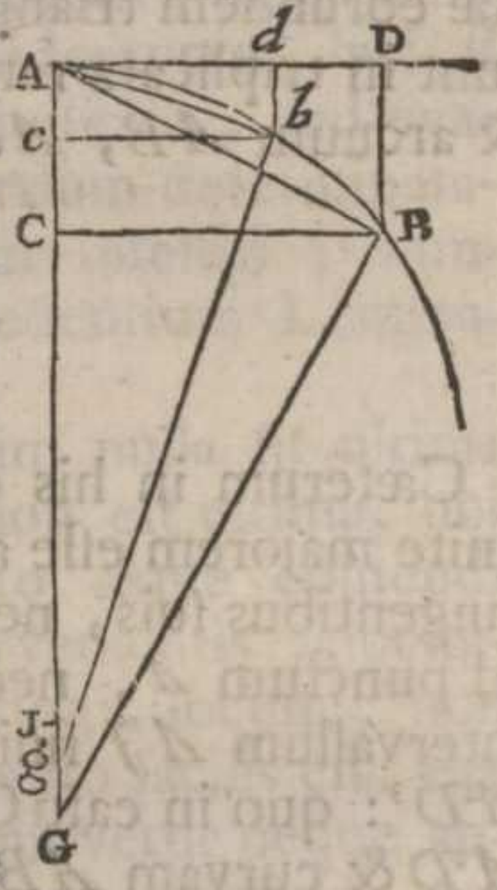
Exponantur tempora per lineas *AD*, *AE*, & velocitates genitæ per ordinatas *DB*, *EC*; & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ *ABD*, *ACE* his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per Lemma IX.) in duplicata ratione temporum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

Corol.

DE MOTU CORPORUM

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum ſimiles ſimilium Figurarum partes temporibus proportionalibus deſcribentium Errores, qui viribus quibuſvis æqualibus ad corpora ſimiliter applicatis generantur, & menſurantur per diſtantias corporum a Figurarum ſimilium locis illis ad quæ corpora eadem temporibus iiſdem proportionalibus abſque viribus iſtis pervenirent, ſunt ut

concurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta d, b, g, fitque f interſectio linearum BG, AG ultimo facta ubi puncta D, B accedunt uſque ad A. Manifeſtum eſt quod diſtantia Gf minor eſſe poteſt quam aſſignata quævis. Eſt autem (ex natura circulorum per puncta ABG, Abg tranſeuntium) AB *quad.* æquale $AG \times BD$ & Ab *quad.* æquale $Ag \times bd$, adeoque ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* componitur ex rationibus AG ad Ag & BD ad bd. Sed quoniam Gf aſſumi poteſt minor longitudine quavis aſſignata, fieri poteſt ut ratio AG ad Ag minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis aſſignata, adeoque ut ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* minus differat a ratione BD ad bd quam pro differentia quavis aſſignata. Eſt ergo, per Lemma 1, ratio ultima AB *quad.* ad Ab *quad.* æqualis rationi ultimæ BD ad bd. *Q. E. D.*



Caſ. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, & eadem ſemper erit ratio ultima BD ad bd quæ prius, adeoque eadem ac AB *quad.* ad Ab *quad.* *Q. E. D.*

Caſ. 3. Et quamvis angulus D non detur, ſed recta BD ad datum punctum convergente, vel alia quacunque lege conſtituatur; tamen anguli D, d communi lege conſtituti ad æqualitatem ſemper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis aſſignata, adeoque ultimo æquales erunt, per Lem. 1, & propterea lineæ BD, bd ſunt in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes AD, Ad, arcus AB, Ab, & eorum ſinus BC, bc fiant ultimo chordis AB, Ab, æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut ſubtenſæ BD, bd.

Corol. 2. Eorundem quadrata ſunt etiam ultimo ut ſunt arcuum ſagittæ quæ chordas biſecant & ad datum punctum convergunt. Nam ſagittæ illæ ſunt ut ſubtenſæ BD, bd.

Corol. 3. Ideoque ſagitta eſt in duplicata ratione temporis quo corpus data velocitate deſcribit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea ADB, Adb ſunt ultimo in triplicata ratione laterum AD, Ad, inque ſeſquiplicata laterum DB, db; utpote in compoſita ratione laterum AD, & DB, Ad & db exiſtentia. Sic & triangula ABC, Abc ſunt ultimo in triplicata ratione laterum BC, bc. Rationem vero ſeſquiplicatam voco triplicatæ ſubduplicatam, quæ nempe ex ſimplici & ſubduplicata componitur, quamque alias ſeſquialteram dicunt.

Corol.

De Motu Corpgrum.

Corol. 5. Et quoniam $\mathcal{D}B$, db ſunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipſarum $A\mathcal{D}$, Ad: erunt areæ ultimæ curvilineæ $A\mathcal{D}B$, Adb (ex natura Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum $A\mathcal{D}B$, Adb; & ſegmenta AB, Ab partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc ſegmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium $A\mathcal{D}$, Ad; tum chordarum & arcuum AB, Ab.

Scholium.

Cæterum in his omnibus ſupponimus angulum contactus nec infinite majorem eſſe angulis contactuum, quos Circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iisdem infinite minorem; hoc eſt curvaturam ad punctum A, nec infinite parvam eſſe nec infinite magnam, ſeu intervallum AJ finitæ eſſe magnitudinis. Capi enim poteſt $\mathcal{D}B$ ut $A\mathcal{D}^3$: quo in caſu Circulus nullus per punctum A inter tangentem $A\mathcal{D}$ & curvam AB duci poteſt, proindeque angulus contactus erit infinite minor Circularibus. Et ſimili argumento ſi fiat $\mathcal{D}B$ ſucceſſive ut $A\mathcal{D}^4$, $A\mathcal{D}^5$, $A\mathcal{D}^6$, $A\mathcal{D}^7$, &c. habebitur ſeries angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet poſterior eſt infinite minor priore. Et ſi fiat AB ſucceſſive ut $A\mathcal{D}^2$, $A\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{4}{3}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{5}{4}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{6}{5}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia ſeries infinita angulorum contactus, quorum primus eſt ejusdem generis cum Circularibus, ſecundus infinite major, & quilibet poſterior infinite major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis poteſt ſeries utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inſeri, quorum quilibet poſterior erit infinite major minorve priore. Ut ſi inter terminos $A\mathcal{D}^2$ & $A\mathcal{D}^3$ inſeratur ſeries $A\mathcal{D}^{\frac{13}{8}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{11}{7}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{9}{4}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{7}{3}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{5}{2}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{8}{3}}$, $B\mathcal{D}^{\frac{11}{4}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{14}{5}}$, $A\mathcal{D}^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rurſus inter binos quosvis angulos hujus ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deque ſuperficiebus comprehenſis demonſtrata ſunt, facile applicantur ad ſolidorum ſuperficies curvas & contenta. Præmiſi vero hæc Lemmata, ut effugerem tædium deducendi perplexas demonſtrationes, more veterum Geometrarum, ad abſurdum. Contractiores enim redduntur demonſtrationes per methodum Indiviſibilium. Sed quoniam durior eſt Indiviſibilium hypotheſis, & propterea methodus illa minus Geometrica cenſetur; malui demonſtrationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum eva-

evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites ſummarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonſtrationes qua potui brevitate præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum Indiviſibilium; & principiis demonſtratis jam tutius utemur. Proinde in ſequentibus, ſi quando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi; vimque talium demonſtrationum ad methodum præcedentium Lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quod quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima, ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æque contendi poſſet nullam eſſe corporis ad certum locum pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam, ubi attingit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur neque antequam attingit locum ultimum & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc cum attingit; id eſt, illam ipſam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quacum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quacum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima eſt quacum eſſe (vel augeri & minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere poteſt, non autem tranſgredi. Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cumque hic limes ſit certus & definitus, Problema eſt vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonſtrandis legitime uſurpantur.

Contendi etiam poteſt, quod ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & ſic quantitas omnis conſtabit ex Indiviſibilibus, contra quam *Euclides* de Incommenſurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonſtravit. Verum hæc Objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ rationes illæ quibuſcum quantitates evaneſcunt, revera non ſunt rationes quantitatum ultimarum, ſed limites ad quos quantitatum ſine limite decreſcentium rationes ſemper appropinquant; & quas propius aſſequi poſſunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero tranſ-

De Motu Corporum.

tranſgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data eſt differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ ſeu maximæ quarum iſta eſt ratio. Igitur in ſequentibus, ſiquando facili rerum conceptui conſulens dixero quantitates quam minimas, vel evaneſcentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, ſed cogita ſemper diminuendas ſine limite.

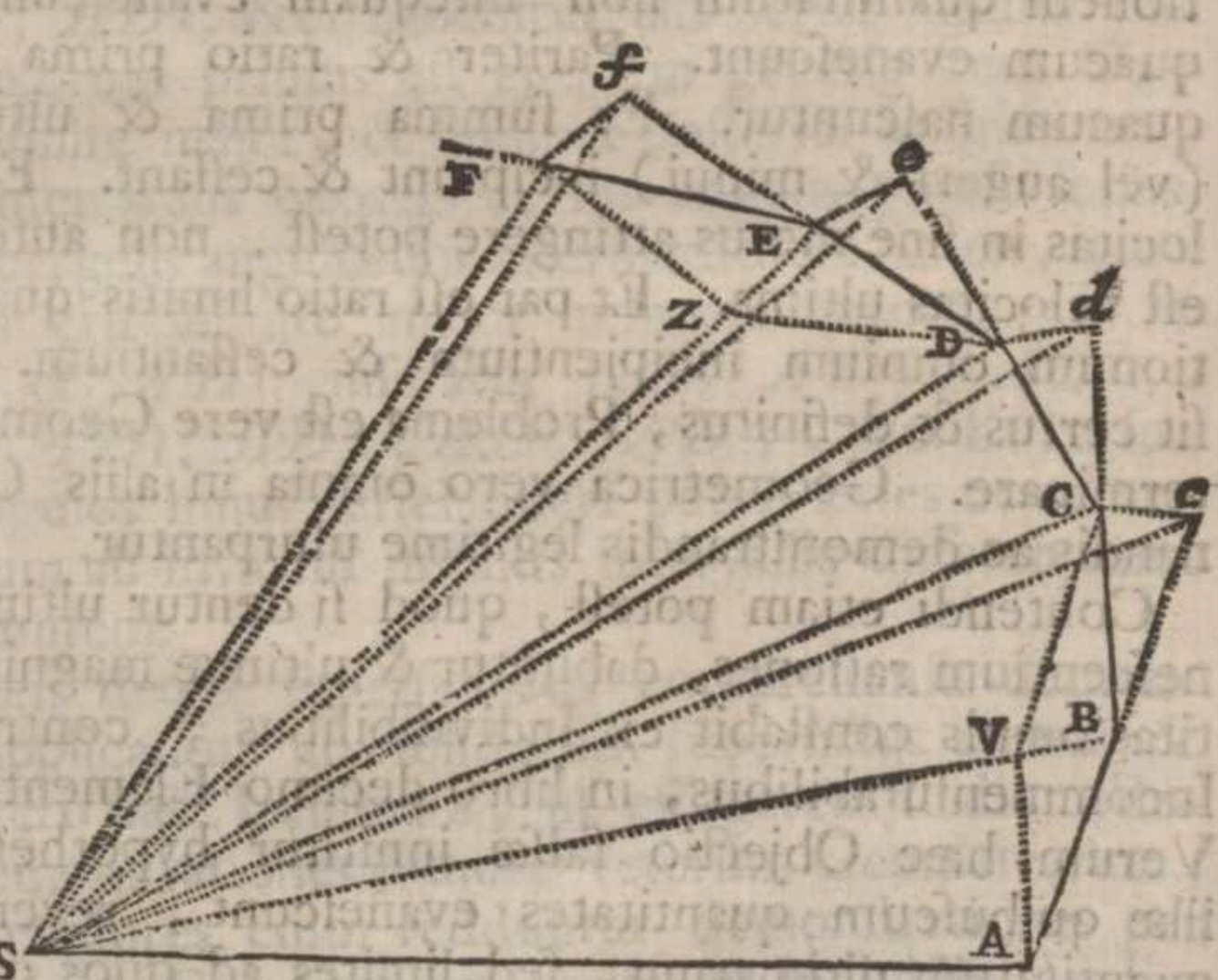
SECTIO II.

De Inventione Virium Centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtere, & eſſe temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte deſcribat corpus vi inſita rectam *AB*. Idem ſecunda temporis parte, ſi nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. 1.) deſcribens lineam *Bc* æqualem ipſi *AB*; adeo ut radiis *AS*, *BS*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulſu unico ſed magno, efficiatque ut corpus de recta *Bc* declinet & pergat in recta *BC*. Ipſi *BS* parallela agatur *cC*, occurrens *BC* in *C*; & completa ſecunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1.) reperietur in *C*, in eodem



eodem plano cum triangulo ASB. Junge SC; & triangulum SBC, ob parallelas SB, Cc, æquale erit triangulo SBc, atque adeo etiam triangulo SAB. Simili argumento si vis centripeta successive agat in C, D, E, &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas CD, DE, EF, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum SCD triangulo SBC, & SDE ipsi SCD, & SEF ipsi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis $SADS$, $SAFS$ inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter ADF, (per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva: adeoque vis centripeta, qua corpus a tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indesinenter; areæ vero quævis descriptæ $SADS$, $SAFS$ temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistentibus reciproce ut perpendiculum, a centro illo in Orbis tangentem rectilineam demissum. Est enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E, ut sunt bases æqualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF; & hæ bases sunt reciproce ut perpendicula in ipsas demissa.

Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus ab eodem corpore successive descriptorum chordæ AB, BC compleantur in parallelogrammum $ABCV$, & hujus diagonalis BV in ea positione quam ultimo habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; transibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus descriptorum chordæ AB, BC ac DE, EF compleantur in parallelogramma $ABCV$, $DEFZ$; vires in B & E sunt ad invicem in ultima ratione diagonalium BV, EZ, ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus BC & EF componuntur (per Legum Corol. 1.) ex motibus Bc, BV & Ef, EZ: atqui BV & EZ ipsis Cc & Ff æquales, in Demonstratione Propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in B & E, ideoque sunt his impulsibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistentibus a motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas bisecant

De Motu Corporum.

ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ ſagittæ ſunt ſemiſſes diagonalium de quibus egimus in Corollario tertio.

Corol. 5. Ideoque vires eædem ſunt ad vim gravitatis, ut hæ ſagittæ ad ſagittas horizonti perpendiculares arcuum Parabolicorum quos projectilia eodem tempore deſcribunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per Legum Corol. IV. ubi plana in quibus corpora moventur, una cum centris virium quæ in ipſis ſita ſunt, non quieſcunt, ſed moventur uniformiter in directum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Corpus omne, quod movetur in linea aliqua curva in plano deſcripta, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Cas. 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de curſu rectilineo per vim aliquam in ipſum agentem (per Leg. I.) Et vis illa qua corpus de curſu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima SAB, SBC, SBD, &c. circa punctum immobile S temporibus æqualibus æqualia deſcribere, agit in loco B ſecundum lineam parallelam ipſi cC (per Prop. XL. Lib. I. Elem. & Leg. II.) hoc eſt, ſecundum lineam BS; & in loco C ſecundum lineam ipſi dD parallelam, hoc eſt, ſecundum lineam SC, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde eſt ſive quieſcat ſuperficies in qua Corpus deſcribit figuram rectilineam, ſive moveatur eadem una cum corpore, figura deſcripta, & puncto ſuo S uniformiter in directum.

Corol. 1. In Spatiis vel Mediis non reſiſtentibus, ſi areæ non ſunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurſum radiorum; ſed inde declinant in conſequentia ſeu verſus plagam in quam fit motus, ſi modo arearum deſcriptio acceleratur: ſin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. In Mediis etiam reſiſtentibus, ſi arearum deſcriptio acceleratur, virium directiones declinant a concurſu radiorum verſus plagam in quam fit motus.

Scholium.

Scholium.

Urgeri poteſt corpus a vi centripeta compoſita ex pluribus viribus. In hoc caſu ſenſus Propoſitionis eſt, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro ſi vis aliqua agat perpetuo ſecundum lineam ſuperficiei deſcriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur a plano ſui motus; ſed quantitatem ſuperficiei deſcriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compoſitione virium negligenda eſt.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto deſcribit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compoſita ex vi centripeta tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice qua corpus illud alterum urgetur.

Sit corpus primum *L* & corpus alterum *T*: & (per Legum Corol. VI.) ſi vi nova, quæ æqualis & contraria ſit illi qua corpus alterum *T* urgetur, urgeatur corpus utrumque ſecundum lineas parallelas; perget corpus primum *L* deſcribere circa corpus alterum *T* areas eaſdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum *T* urgebatur, jam deſtruetur per vim ſibi æqualem & contrariam; & propterea (per Leg. I.) corpus illud alterum *T* ſibimet ipſi jam relictum vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum *L* urgente differentia virium, id eſt, urgente vi reliqua perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum *T* deſcribere. Tendit igitur (per Theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum *T* ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus unum *L* radio ad alterum *T* ducto deſcribit areas temporibus proportionales; atque de vi tota (ſive ſimplici, ſive ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium ſecundum, compoſita,) qua corpus prius *L* urgetur, ſubducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum *T* ut centrum.

Corol. 2. Et, ſi areæ illæ ſunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum *T* quamproxime.

Corol. 3. Et vice verſa, ſi vis reliqua tendit quamproxime ad

DE MOTU CORPORUM.

corpus alterum T, erunt areæ illæ temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus L radio ad alterum corpus T ducto describit areas quæ, cum temporibus collatæ, sunt valde inæquales; & corpus illud alterum T vel quiescit vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum T tendentis, vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita, ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subductionem vis totius in corpus illud alterum T agentis.

Scholium.

Quoniam æquabilis arearum descriptio Index est Centri, quod vis illa respicit qua corpus maxime afficitur, quaque retrahitur a motu rectilineo & in orbita sua retinetur: quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem, ut Indicem Centri circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

Tendunt hæ vires ad centra circulorum per Prop. 11. & Corol. 11. Prop. 1; & sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus quam minimis descriptorum sinus versi per Corol. 1v. Prop. 1; hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per Lem. v11: & propterea, cum hi arcus sint ut arcus temporibus quibusvis æqualibus descripti, & diametri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur, cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetæ sunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum: hoc est, ut cum Geometris loquar, vires sunt in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione simplici radiorum inver se

Corol.

Corol. 2. Et, cum tempora periodica ſint in ratione compoſita ex ratione radiorum directe & ratione velocitatum inverſe, vires centripetæ ſunt reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; hoc eſt, in ratione compoſita ex ratione radiorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverſe.

Corol. 3. Unde, ſi tempora periodica æquentur & propterea velocitates ſint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

Corol 4. Si & tempora periodica & velocitates ſint in ratione ſubduplicata radiorum; æquales erunt vires centripetæ inter ſe: & contra.

Corol 5. Si tempora periodica ſint ut radii & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce ut radii: & contra.

Corol. 6. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicata radiorum & propterea velocitates reciproce in radiorum ratione ſubduplicata; vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radiorum; & contra.

Corol. 7. Et univerſaliter, ſi tempus periodicum ſit ut Radii R poteſtas quælibet R^n, & propterea velocitates reciproce ut Radii poteſtas R^{n-1}; erit vis centripeta reciproce ut Radii poteſtas R^{2n-1}; & contra.

Corol. 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcunque ſimilium, centraque in figuris illis ſimiliter poſita habentium, partes deſcribunt, conſequuntur ex Demonſtratione præcedentium ad hoſce caſus applicata. Applicatur autem ſubſtituendo æquabilem arearum deſcriptionem pro æquabili motu, & diſtantias corporum a centris pro radiis uſurpando.

Corol. 9. Ex eadem demonſtratione conſequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo data vi centripeta uniformiter revolvendo tempore quovis deſcribit, medius eſt proportionalis inter diametrum circuli, & deſcenſum corporis eadem data vi eodemque tempore cadendo confectum.

Scholium.

Caſus Corollarii ſexti obtinet in corporibus cœleſtibus (ut ſeorſum collegerunt etiam noſtrates *Wrennus*, *Hookius* & *Hallæus*) & propterea quæ ſpectant ad vim centripetam decreſcentem in duplicata ratione diſtantiarum a centris, decrevi fuſius in ſequentibus exponere.

Porro

De Motu Corporum.

Porro præcedentis propoſitionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis eſt ea Gravitatis. Nam ſi corpus in circulo Terræ concentrico vi gravitatis ſuæ revolvatur, hæc gravitas eſt ipſius vis centripeta. Datur autem, ex deſcenſu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore deſcriptus, per hujus Corol. IX. Et hujusmodi propoſitionibus *Hugenius*, in eximio ſuo Tractatu *de Horologio Oſcillatorio*, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

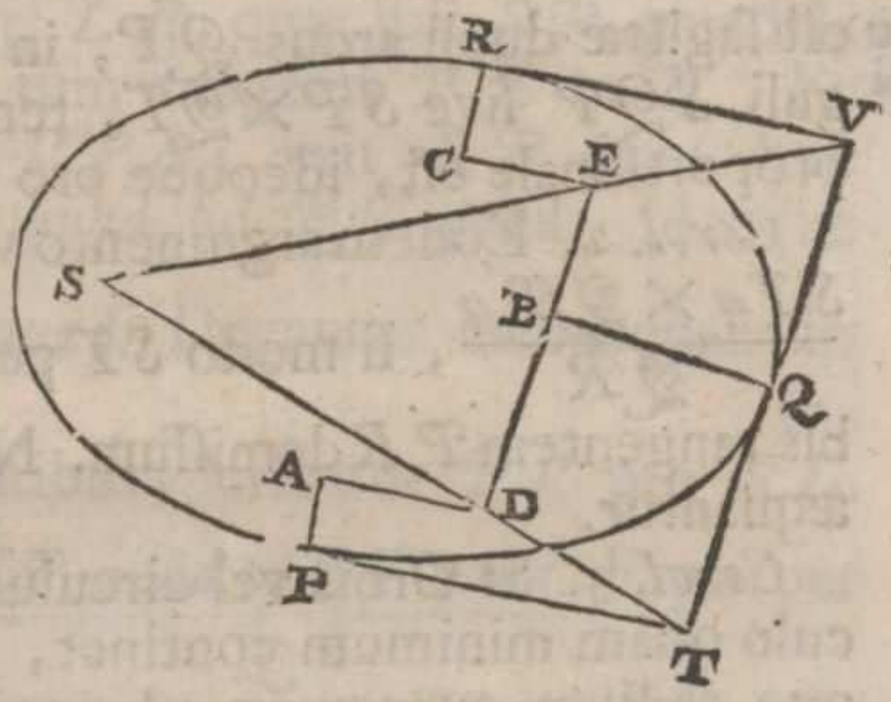
Demonſtrari etiam poſſunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis deſcribi intelligatur Polygonum laterum quotcunque. Et ſi corpus, in polygoni lateribus data cum velocitate movendo, ad ejus angulos ſingulos a circulo reflectatur; vis qua ſingulis reflexionibus impingit in circulum erit ut ejus velocitas: adeoque ſumma virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctim: hoc eſt (ſi polygonum detur ſpecie) ut longitudo dato illo tempore deſcripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli; id eſt, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium: adeoque, ſi polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore deſcripti applicatum ad radium. Hæc eſt vis centrifuga, qua corpus urget circulum: & huic æqualis eſt vis contraria, qua circulus continuo repellit corpus centrum verſus.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA I.

Data quibuſcunque in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus deſcribit, centrum illud invenire.

Figuram deſcriptam tangant rectæ tres PT, TQV, VR, in punctis totidem P, Q, R, concurrentes in T & V. Ad tangentes erigantur perpendicula PA, QB, RC, velocitatibus corporis in punctis illis P, Q, R, a quibus eriguntur reciproce proportionalia; id eſt, ita ut ſit PA ad QB, ut velocitas in Q ad velocitatem in P, & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem in Q. Per perpendiculorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur AD, DBE, EC concurrentes in D & E: Et actæ TD, VE concurrent in centro quæſito S.

Nam



Nam perpendicula a centro *S* in tangentes *PT*, *QT* demissa (per Corol. 1 Prop. 1.) sunt reciproce ut velocitates corporis in punctis *P* & *Q*; adeoque per constructionem ut perpendicula *AP*, *BQ* directe, id est ut perpendicula a puncto *D* in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta *S*, *D*, *T*, sunt in una recta. Et simili argumento puncta *S*, *E*, *V* sunt etiam in una recta; & propterea centrum *S* in concursu rectarum *TD*, *VE* versatur. *Q. E. D.*

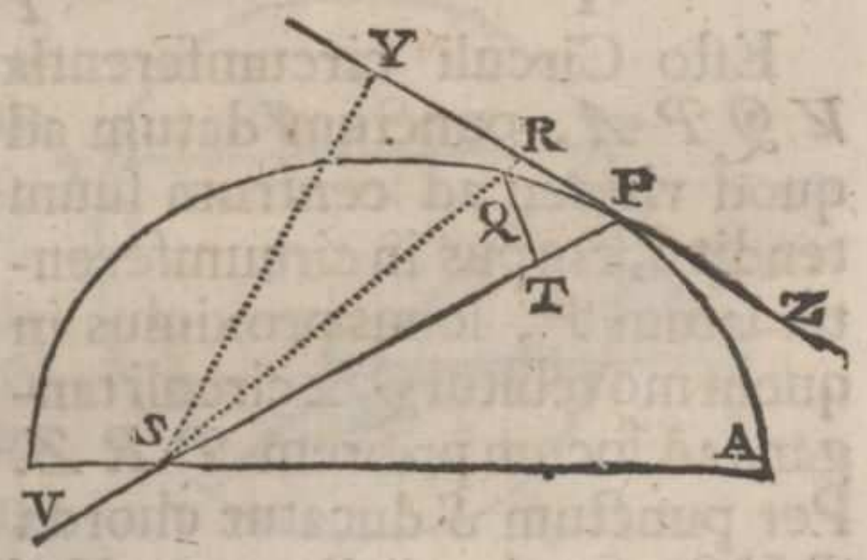
PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in Orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam nascentem tempore quam minimo describat, & sagitta arcus duci intelligatur quæ chordam bisecet, & producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut sagitta directe & tempus bis inverse.

Nam sagitta dato tempore est ut vis (per Corol. 4. Prop. 1.) & augendo tempus in ratione quavis, ob auctum arcum in eadem ratione sagitta augetur in ratione illa duplicata (per Corol. 2. & 3. Lem. xi.) adeoque est ut vis semel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut sagitta directe & tempus bis inverse. *Q. E. D.*

Idem facile demonstratur etiam per Corol. 4. Lem. x.

Corol. 1. Si corpus *P* revolvendo circa centrum *S* describat lineam curvam *APQ*, tangat vero recta *ZPR* curvam illam in puncto quovis *P*, & ad tangentem ab alio quovis Curvæ puncto *Q* agatur *QR* distantiæ *SP* parallela, ac demittatur *QT* perpendicularis ad distantiam illam *SP*: vis centripeta erit reciproce ut solidum $\frac{SP\ quad \times QT\ quad.}{QR}$ si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas, quæ ultimo fit ubi coeunt puncta *P* & *Q*. Nam *QR* æqualis



est

DE MOTU CORPORUM

est sagittæ dupli arcus QP, in cujus medio est P, & duplum trianguli SQP sive $SP \times QT$, tempori quo arcus iste duplus describitur proportionale est, ideoque pro temporis exponente scribi potest.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta est reciproce ut solidum $\frac{SYq \times QPq}{QR}$, si modo SY perpendiculum sit a centro virium in Orbis tangentem PR demissum. Nam rectangula $SY \times QP$ & $SP \times QT$ æquantur.

Corol. 3. Si Orbis vel circulus est, vel angulum contactus cum circulo quam minimum continet, eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum contactus P, & si PV chorda sit circuli hujus a corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciproce ut solidum $SYq \times PV$. Nam PV est $\frac{QPq}{QR}$.

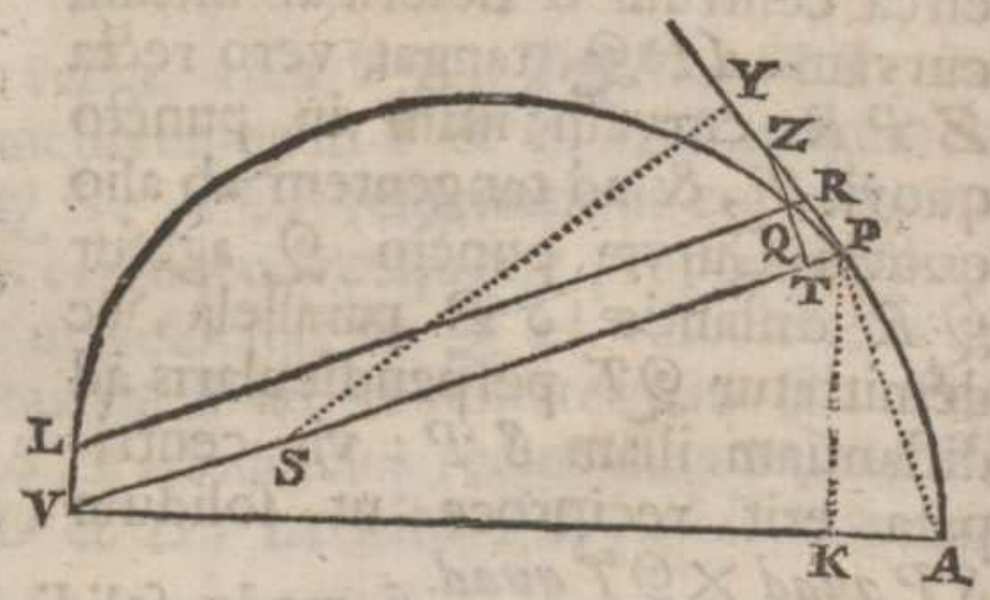
Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directe, & chorda illa inverse. Nam velocitas est reciproce ut perpendiculum SY per Corol. 1 Prop. 1.

Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea APQ, & in ea detur etiam punctum S ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, qua corpus quodvis P a cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel solidum $SYq \times PV$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in Problematis sequentibus.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentia Circuli, requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

Esto Circuli circumferentia $VQPA$, punctum datum ad quod vis ceu ad centrum suum tendit S, corpus in circumferentia latum P, locus proximus in quem movebitur Q, & circuli tangens ad locum priorem PRZ. Per punctum S ducatur chorda PV, & acta circuli diametro VA jungatur AP, & ad SP demittatur perpendiculum QT, quod productum occurrat tangenti PR in Z,



ac

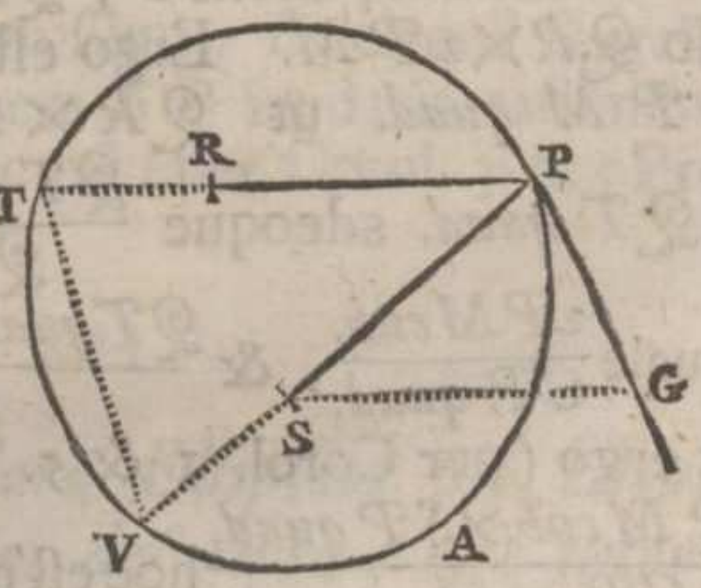
ac denique per punctum Q agatur LR quæ ipsi SP parallela sit & occurrat tum circulo in L tum tangenti PZ in R. Et ob similia triangula ZQR, ZTP, VPA; erit RP *quad.* hoc est QRL ad QT *quad.* ut AV *quad.* ad PV *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV\ quad.}{AV\ quad.}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\ quad.}{QR}$ &, punctis P & Q coeuntibus, scribatur PV pro RL. Sic fiet $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$ Ergo (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SP\,q \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ id est (ob datum AV *quad.*) reciproce ut quadratum distantiæ seu altitudinis SP & cubus chordæ PV conjunctim. *Q. E. I.* LIBER PRIMUS.

Idem aliter.

Ad tangentem PR productam demittatur perpendiculum SY, & ob similia triangula SYP, VPA; erit AV ad PV ut SP ad SY, ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale SY, & $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $SY\ quad. \times PV$. Et propterea (per Corol. 3 & 5 Prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SP\,q \times PV\ cub.}{AV\,q}$ hoc est, ob datam AV, reciproce ut $SP\,q \times PV\ cub.$ *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc si punctum datum S ad quod vis centripeta semper tendit, locetur in circumferentia hujus circuli, puta ad V; erit vis centripeta reciproce ut quadrato-cubus altitudinis SP.

Corol. 2. Vis qua corpus P in circulo $APTV$ circum virium centrum S revolvitur, est ad vim qua corpus idem P in eodem circulo & eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest ut $RP\ quad. \times SP$ ad cubum rectæ SG quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & distantiæ corporis a secundo virium centro parallela est. Nam, per constructionem hujus Propositionis, vis prior est ad vim posteriorem, ut $RP\,q \times PT\ cub.$ ad $SP\,q \times PV\ cub.$



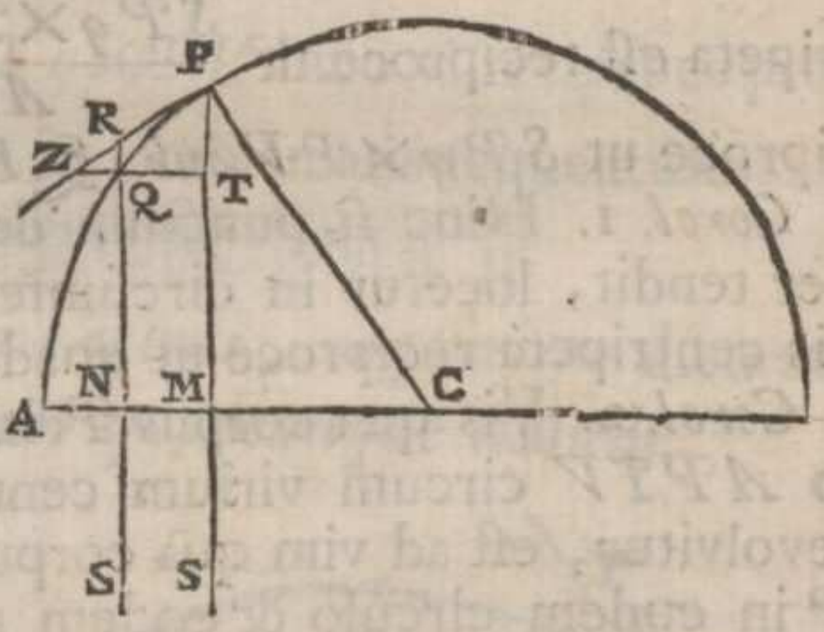
De Motu Corporum id eſt, ut $SP \times RP\ q$ ad $\frac{SP\ cub. \times PV\ cub.}{PT\ cub.}$ ſive (ob ſimilia triangula PSG, TPV) ad $SG\ cub.$

Corol. 3. Vis, qua corpus P in Orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, eſt ad vim qua corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteſt, ut $SP \times RP\ q$ contentum utique ſub diſtantia corporis a primo virium centro S & quadrato diſtantiæ ejus a ſecundo virium centro R ad cubum rectæ SG quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis a ſecundo virium centro diſtantiæ RP parallela eſt. Nam vires in hoc orbe, ad ejus punctum quodvis P, eædem ſunt ac in Circulo ejuſdem curvaturæ.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Moveatur corpus in circulo PQA: *ad hunc effectum requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi poſſint.*

A Circuli centro C agatur ſemidiameter CA parallelas iſtas perpendiculariter ſecans in M & N, & jungatur CP. Ob ſimilia triangula CPM, PZT & RZQ eſt $CP\ q$ ad $PM\ q$ ut $PR\ q$ ad $QT\ q$ & ex natura Circuli $PR\ q$ æquale eſt rectangulo $QR \times RN + QN$ ſive coeuntibus punctis P, Q rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo eſt $CP\ q$ ad $PM\ quad.$ ut $QR \times 2PM$ ad $QT\ quad.$ adeoque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\ cub.}{CP\ quad.}$, & $\frac{QT\ quad. \times SP\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\ cub. \times SP\ qu.}{CP\ quad.}$



Eſt ergo (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$ hoc eſt neglecta ratione determinata $\frac{2\ SP\ quad.}{CP\ quad.}$) reciproce ut $PM\ cub.$ *Q. E. I.*

Idem facile colligitur etiam ex Propoſitione præcedente.

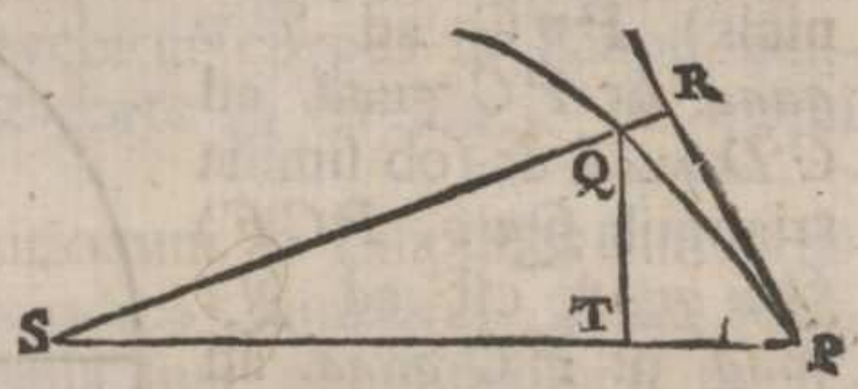
Scho-

Scholium.

Et ſimili argumento corpus movebitur in Ellipſi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ ſit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in Spirali PQS *ſecante radios omnes* SP SQ, *&c. in angulo dato: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum Spiralis.*



Detur angulus indefinite parvus PSQ, & ob datos omnes angulos dabitur ſpecie figura $SPQRT$. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$ eſtque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut QT, hoc eſt ut SP. Mutetur jam utcunque angulus PSQ, & recta QR angulum contactus QPR ſubtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipſius PR vel QT. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc eſt ut SP. Quare $\frac{QTq. \times SPq}{QR}$ eſt ut $SP\ cub.$ adeoque (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta eſt reciproce ut cubus diſtantiæ SP. *Q.E.I.*

Idem aliter.

Perpendiculum SY in tangentem demiſſum, & circuli Spiralem tangentis chorda PV ſunt ad altitudinem SP in datis rationibus; ideoque $SP\ cub.$ eſt ut $SYq \times PV$, hoc eſt (per Corol. 3 & 5 Prop. VI.) reciproce ut vis centripeta.

LEMMA XII.

Parallelogramma omnia, circa datæ Ellipſeos vel Hyperbolæ diametros quaſvis conjugatas deſcripta, eſſe inter ſe æqualia.

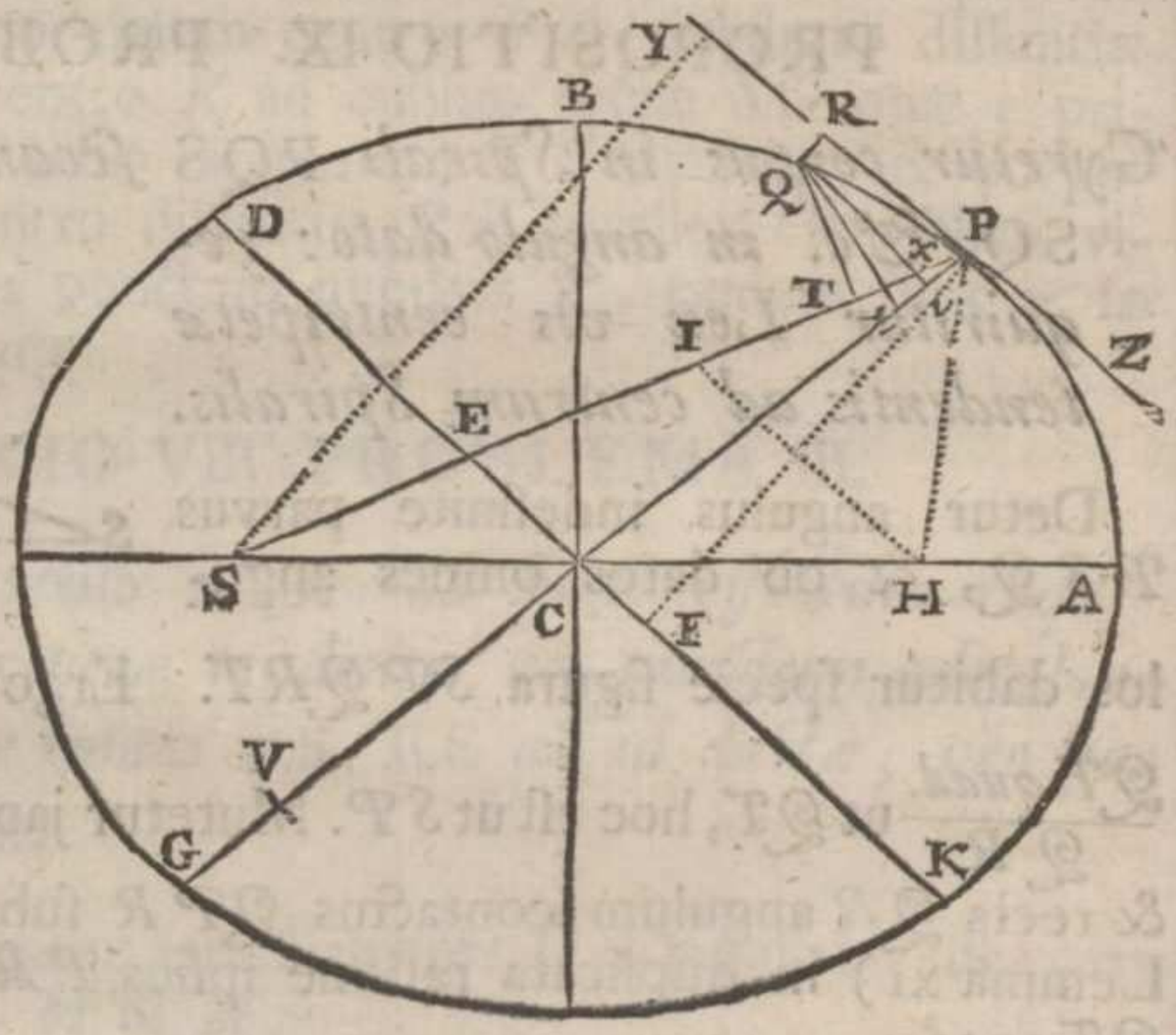
Conſtat ex Conicis.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

Gyretur corpus in Ellipſi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipſeos.

Sunto CA, CB ſemiaxes Ellipſeos; GP, DK diametri conjugatæ; PF, Qt perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & ſi compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit (ex Conicis) PvG ad Pv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob ſimilia triangula Qvt, PCF) Qv *quad.* eſt ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, PvG ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id eſt, vG ad $\frac{Qt\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq.}{PCq}$ Scribe QR pro Pv & (per Lemma XII.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non, punctis P & Q coeuntibus, $2PC$ pro vG, & ductis extremis & mediis in ſe mutuo, fiet $\frac{Qt\ quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq.}{PC}$ Eſt ergo (per Corol. 5. Prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2BCq \times CAq;}{PC}$ id eſt (ob datum $2BCq \times CAq$) reciproce ut $\frac{1}{PC}$; hoc eſt, directe ut diſtantia PC. *Q.E.I.*



Idem aliter.

In PG ab altera parte puncti t poſita intelligatur tu æqualis ipſi tv; deinde cape uV quæ ſit ad vG ut eſt DC *quad.* ad PC *quad.* Et quoniam ex Conicis eſt Qv *quad.* ad PvG, ut DC *quad.* ad PC *quad.* erit Qv *quad.* æquale $Pv \times uV$. Unde quadratum chordæ

dæ arcus PQ erit æquale rectangulo VPv; adeoque Circulus qui tangit Sectionem Conicam in P & tranſit per punctum Q, tranſibit etiam per punctum V. Coeant puncta P & Q, & hic circulus ejuſdem erit curvaturæ cum ſectione conica in P, & PV æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$. Proinde vis qua corpus P in Ellipſi revolvitur erit reciproce ut $\frac{2DCq}{PC}$ in PFq (per Corol. 3. Prop. VI.) hoc eſt (ob datum $2DCq$ in PFq) directe ut PC. *Q. E. I.*

Corol. 1. Eſt igitur vis ut diſtantia corporis a centro Ellipſeos: & viciſſim, ſi vis ſit ut diſtantia, movebitur corpus in Ellipſi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique Ellipſis migrare poteſt.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in Ellipſibus univerſis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in Ellipſibus ſimilibus æqualia ſunt per Corol. 3. & 8, Prop. IV: in Ellipſibus autem communem habentibus axem majorem, ſunt ad invicem ut Ellipſeon areæ totæ directe & arearum particulæ ſimul deſcriptæ inverſe; id eſt, ut axes minores directe & corporum velocitates in verticibus principalibus inverſe; hoc eſt, ut axes illi minores directe & ordinatim applicatæ ad axes alteros inverſe; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inverſarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si Ellipſis centro in infinitum abeunte vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac Parabola, & vis ad centrum infinite diſtans jam tendens evadet æquabilis. Hoc eſt Theorema *Galilæi*. Et ſi coni ſectio Parabolica, inclinatione plani ad conum ſectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam verſa. Et quemadmodum in Circulo vel Ellipſi, ſi vires tendunt ad centrum figuræ in Abſciſſa poſitum, hæ vires augendo vel diminuendo Ordinatas in ratione quacunque data, vel etiam mutando angulum inclinationis Ordinatarum ad Abſciſſam, ſemper augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum a centro, ſi modo tempora periodica maneant æqualia: ſic etiam in figuris univerſis, ſi Ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quacunque data, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires ad centrum quodcunque in Abſciſſa poſitum tendentes a binis quibuſvis figurarum locis, ad quæ terminantur Ordinatæ correſpondentibus Abſciſſarum punctis inſiſtentes, augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum a centro.

SECTIO

De Motu Corporum

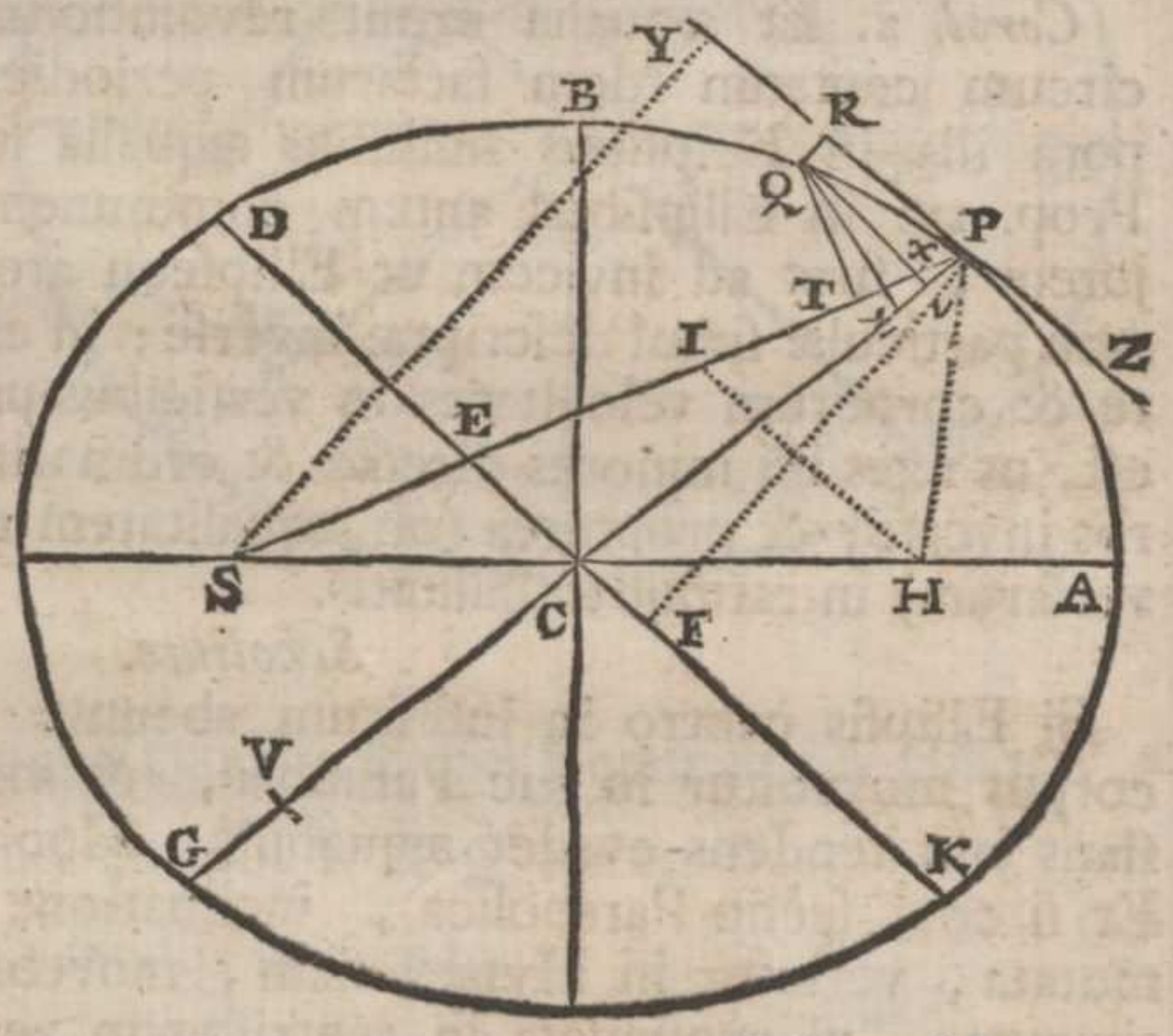
SECTIO III.

De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in Ellipſi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipſeos.

Eſto Ellipſeos umbilicus *S*. Agatur *SP* ſecans Ellipſeos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *Qx PR*. Patet *EP* æqualem eſſe ſemiaxi majori *AC*, eo quod acta ab altero Ellipſeos umbilico *H* linea *HI* ipſi *EC* parallela, (ob æquales *CS*, *CH*) æquentur *ES*, *EI*, adeo ut *EP* ſemiſumma ſit ipſarum *PS*, *PI*, id eſt (ob parallelas *HI*, *PR* & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipſarum *PS*, *PH*, quæ conjunctim axem totum 2 *AC* adæquant. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*, & Ellipſeos latere recto principali (ſeu $\frac{2\,BC\,quad.}{AC}$) dicto *L*, erit *L* × *QR* ad *L* × *Pv* ut *QR* ad *Pv*, id eſt ut *PE* ſeu *AC* ad *PC*; & *L* × *Pv* ad *GvP* ut *L* ad *Gv*; & *GvP* ad *Qv quad.* ut *PC quad.* ad *CD quad*; & (per Corol. 2 Lem. VII.) *Qv quad.* ad *Qx quad.* punctis *Q* & *P* coeuntibus, eſt ratio æqualitatis; & *Qx quad.* ſeu *Qv quad.* eſt ad *QT quad.* ut *EP quad.* ad *PF quad.* id eſt ut *CA quad.* ad *PF quad.* ſive (per Lem. XII.) ut *CD quad.* ad *CB quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, *L* × *QR* ſit ad *QT quad.* ut *AC* × *L* × *PCq.* × *CDq.* ſeu 2 *CBq.* × *PCq.* × *CDq.* ad *PC* × *Gv* × *CDq.* × *CBq.* ſive ut 2 *PC* ad *Gv*.



Sed,

Sed, punctis Q & P coeuntibus, æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QT *quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$ & fiet $L \times SPq$. æquale $\frac{SPq. \times QTq.}{QR}$ Ergo (per Corol. 1. & 5. Prop. VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$. id est, reciproce in ratione duplicata distantiæ SP. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Cum vis ad centrum Ellipseos tendens qua corpus P in Ellipsi illa revolvi potest, sit (per Corol. 1. Prop. X.) ut CP distantia corporis ab Ellipseos centro C; ducatur CE parallela Ellipseos tangenti PR: & vis qua corpus idem P, circum aliud quodvis Ellipseos punctum S revolvi potest, si CE & PS concurrant in E, erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$ (per Corol. 3. Prop. VII.) hoc est, si punctum S sit umbilicus Ellipseos, adeoque PE detur, ut SPq reciproce. *Q. E. I.*

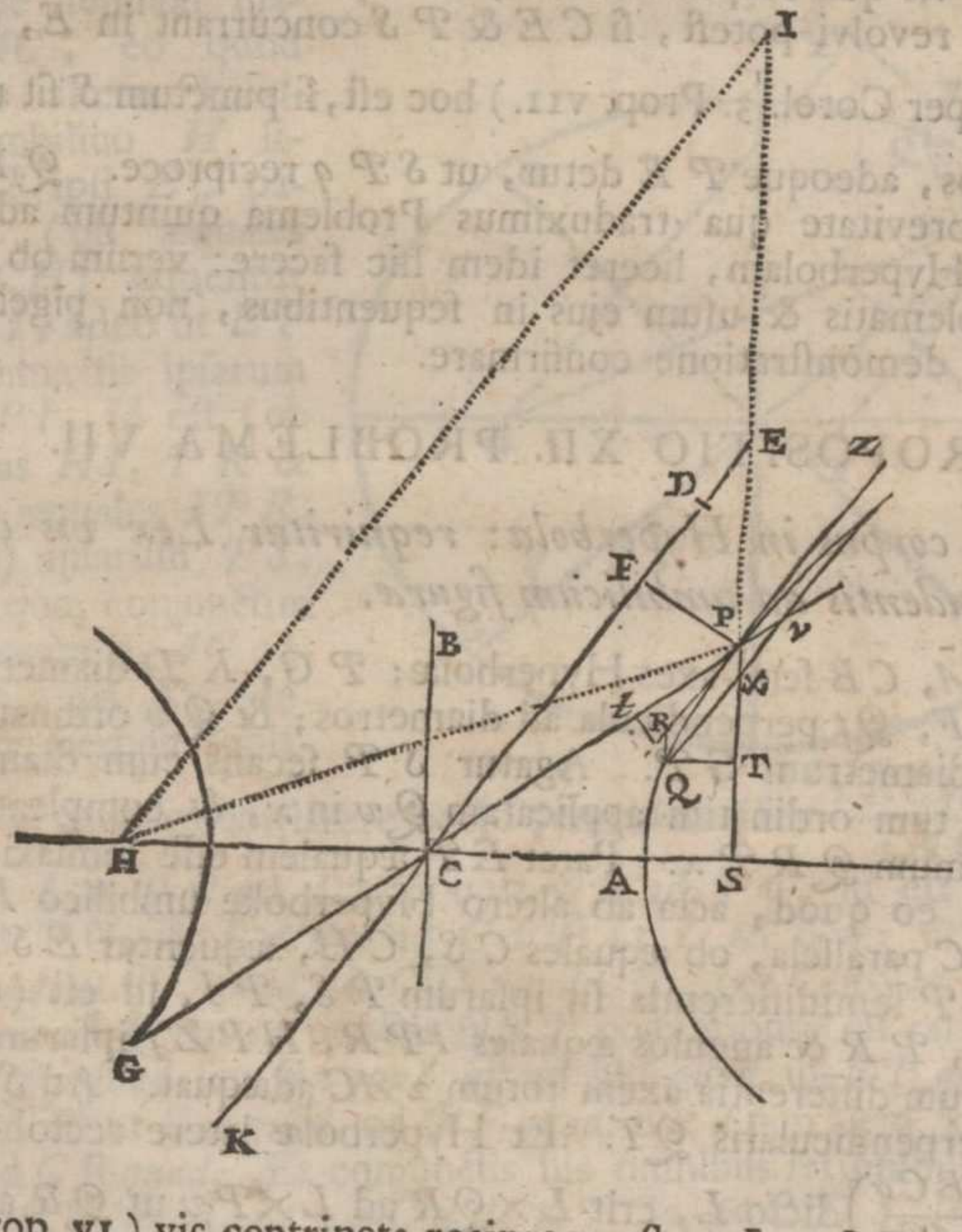
Eadem brevitate qua traduximus Problema quintum ad Parabolam, & Hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem Problematis & usum ejus in sequentibus, non pigebit casus ceteros demonstratione confirmare.

PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

Moveatur corpus in Hyperbola: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto CA, CB semi-axes Hyperbolæ; PG, KD diametri conjugatæ; PF, Qt perpendicula ad diametros; & Qv ordinatim applicata ad diametrum GP. Agatur SP secans cum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QRPx$. Patet EP æqualem esse semiaxi transverso AC, eo quod, acta ab altero Hyperbolæ umbilico H linea HI ipsi EC parallela, ob æquales CS, CH, æquentur ES, EI; adeo ut EP semidifferentia sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas IH, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH, quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT. Et Hyperbolæ latere recto principali (seu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, id est, ut PE seu AC ad PC; Et $L \times Pv$ ad $Gv\,P$ ut L ad Gv;

De Motu Corporum. Gv; & $Gv\,P$ ad Qv *quad.* ut PCq. ad CDq; & (per Corol. 2. Lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & Qx *quad.* seu Qv *quad.* est ad QTq. ut EPq. ad PFq, id est ut CAq, ad PFq, sive (per Lem. XII.) ut CDq, ad CBq: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq. ut $AC \times L \times PCq \times CDq$ seu $2\,CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CB$ *quad.* sive ut $2\,PC$ ad Gv. Sed punctis P & Q coeuntibus æquantur $2\,PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QTq. æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$. & fiet $L \times SPq$. æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. 1. & 5 Prop VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$, id est reciproce in ratione duplicata distantiæ SP. *Q.E.I.*



Idem

Idem aliter.

Inveniatur vis quæ tendit ab Hyperbolæ centro *C*. Prodibit hæc diſtantiæ *CP* proportionalis. Inde vero (per Corol. 3. Prop. VII.) vis ad umbilicum *S* tendens erit ut $\frac{PE\,cub.}{SPq}$, hoc eſt, ob datam *PE*, reciproce ut *SPq*. *Q.E.I.*

Eodem modo demonſtratur quod corpus, hac vi centripeta in centrifugam verſa, movebitur in Hyperbola conjugata.

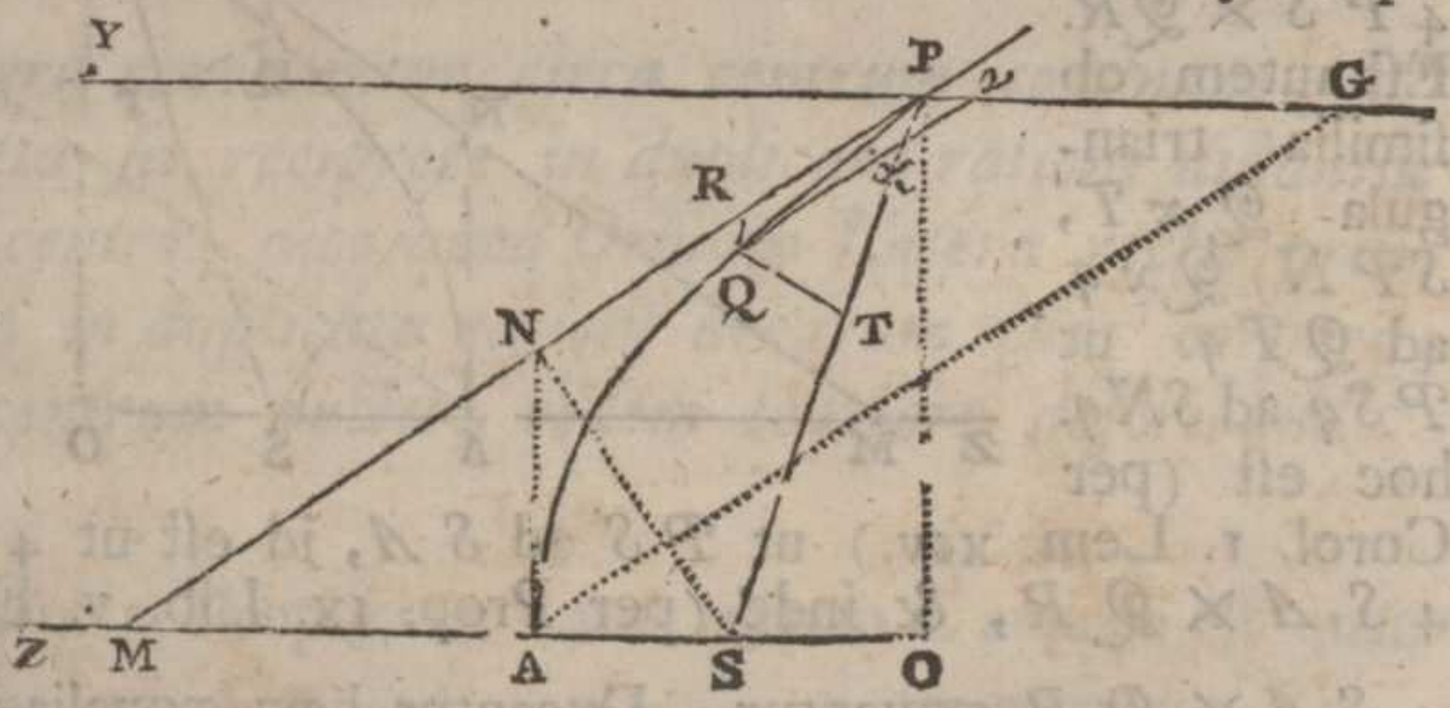
LEMMA XIII.

Latus rectum Parabolæ ad verticem quemvis pertinens, eſt quadruplum diſtantiæ verticis illius ab umbilico figuræ. Patet ex Conicis.

LEMMA XIV.

Perpendiculum quod ab umbilico Parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium eſt proportionale inter diſtantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.

Sit enim *APQ* Parabola, *S* umbilicus ejus, *A* vertex principalis, *P* punctum contactus, *PO* ordinatim applicata ad diametrum principalem, *PM* tangens diametro principali occurrens in *M*, & *SN*, linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur *AN*, & ob æquales *MS* & *SP*, *MN* & *NP*, *MA* & *AO*, parallelæ erunt rectæ *AN* & *OP*, & inde triangulum *SAN* rectangulum erit ad *A* & ſimile triangulis æqualibus *SNM*, *SNP*. Ergo *PS* eſt ad *SN*, ut *SN* ad *SA*. *Q.E.D.*



Corol. 1. *PSq.* eſt ad *SNq* ut *PS* ad *SA*.

Corol. 2. Et ob datam *SA*, eſt *SNq.* ut *PS*.

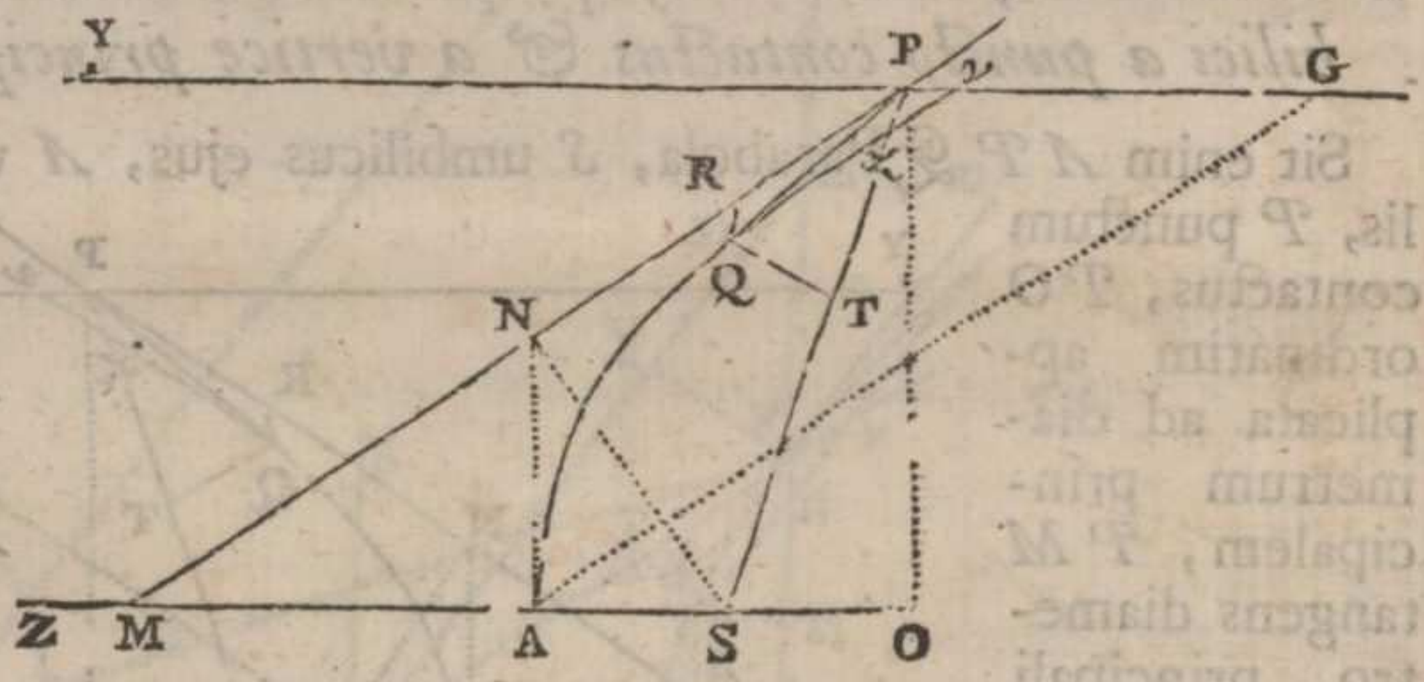
DE MOTU CORPORUM.

Corol. 3. Et concurſus tangentis cujuſvis $P M$ cum recta $S N$, quæ ab umbilico in ipſam perpendicularis eſt, incidit in rectam $A N$, quæ Parabolam tangit in vertice principali.

PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VIII.

Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat conſtructio Lemmatis, ſitque P corpus in perimetro Parabolæ, & a loco Q in quem corpus proxime movetur, age ipſi SP parallelam QR & perpendicularem QT, nec non Qv tangenti parallelam & occurrentem tum diametro YPG in v, tum diſtantiæ SP in x. Jam ob ſimilia triangula Pxv, SPM & æqualia unius latera SM, SP, æqualia ſunt alterius latera Px ſeu QR & Pv. Sed, ex Conicis, quadratum ordinatæ Qv æquale eſt rectangulo ſub latere recto & ſegmento diametri Pv, id eſt (per Lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$, ſeu $4PS \times QR$; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per Corol. 2. Lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo Qx *quad.* eo in caſu, æquale eſt rectangulo $4PS \times QR$. Eſt autem (ob ſimilia triangula QxT, SPN) $Qx\,q.$ ad $QT\,q.$ ut $PS\,q.$ ad $SN\,q.$ hoc eſt (per Corol. 1. Lem. XIV.) ut PS ad SA, id eſt ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) $QT\,q.$ & $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\,q}{QR}$, & fiet $\frac{SP\,q \times QT\,q}{QR}$. æquale $SP\,q. \times 4SA$: & propterea (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta eſt reciproce ut $SP\,q \times 4SA$, id eſt, ob datam $4SA$, reciproce in duplicata ratione diſtantiæ SP. *Q. E. I.*



Corol.

Corol. 1. Ex tribus noviſſimis Propoſitionibus conſequens eſt, quod ſi corpus quodvis P, ſecundum lineam quamvis rectam PR, quacunque cum velocitate exeat de loco P, & vi centripeta quæ ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua ſectionum Conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico & puncto contactus & poſitione tangentis, deſcribi poteſt ſectio Conica quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex data vi centripeta: & Orbes duo ſe mutuo tangentes, eadem vi centripeta deſcribi non poſſunt. LIBER PRIMUS.

Corol. 2. Si velocitas, quacum corpus exit de loco ſuo P, ea ſit, qua lineola PR in minima aliqua temporis particula deſcribi poſſit, & vis centripeta potis ſit eodem tempore corpus idem movere per ſpatium QR: movebitur hoc corpus in Conica aliqua ſectione, cujus latus rectum principale eſt quantitas illa $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo fit ubi lineolæ PR, QR in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad Ellipſin, & caſum excipio ubi corpus recta deſcendit ad centrum.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta ſit reciproce in duplicata ratione diſtantiæ locorum a centro; dico quod Orbium Latera recta principalia ſunt in duplicata ratione arearum quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore deſcribunt.

Nam, per Corol. 2. Prop. XIII. Latus rectum L æquale eſt quantitati $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo fit ubi coeunt puncta P & Q. Sed linea minima QR, dato tempore, eſt ut vis centripeta generans, hoc eſt (per Hypotheſin) reciproce ut SPq. Ergo $\frac{QTq.}{QR}$ eſt ut $QTq. \times SPq.$ hoc eſt, latus rectum L in duplicata ratione areæ $QT \times SP$. *Q.E.D.*

De Motu Corporum.

Corol. Hinc ellipſeos area tota, eique proportionale rectangulum ſub axibus, eſt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione lateris recti & ratione temporis periodici. Namque area tota eſt ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore deſcribitur, ducta in tempus periodicum.

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

Iiſdem poſitis, dico quod Tempora periodica in Ellipſibus ſunt in ratione ſeſquiplicata majorum axium.

Namque axis minor eſt medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque adeo rectangulum ſub axibus eſt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione lateris recti & ſeſquiplicata ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum, per Corollarium Prop. XIV. eſt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique ſubduplicata ratio lateris recti, & manebit ſeſquiplicata ratio majoris axis æqualis rationi periodici temporis. *Q. E. D.*

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipſibus eadem ac in Circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipſeon.

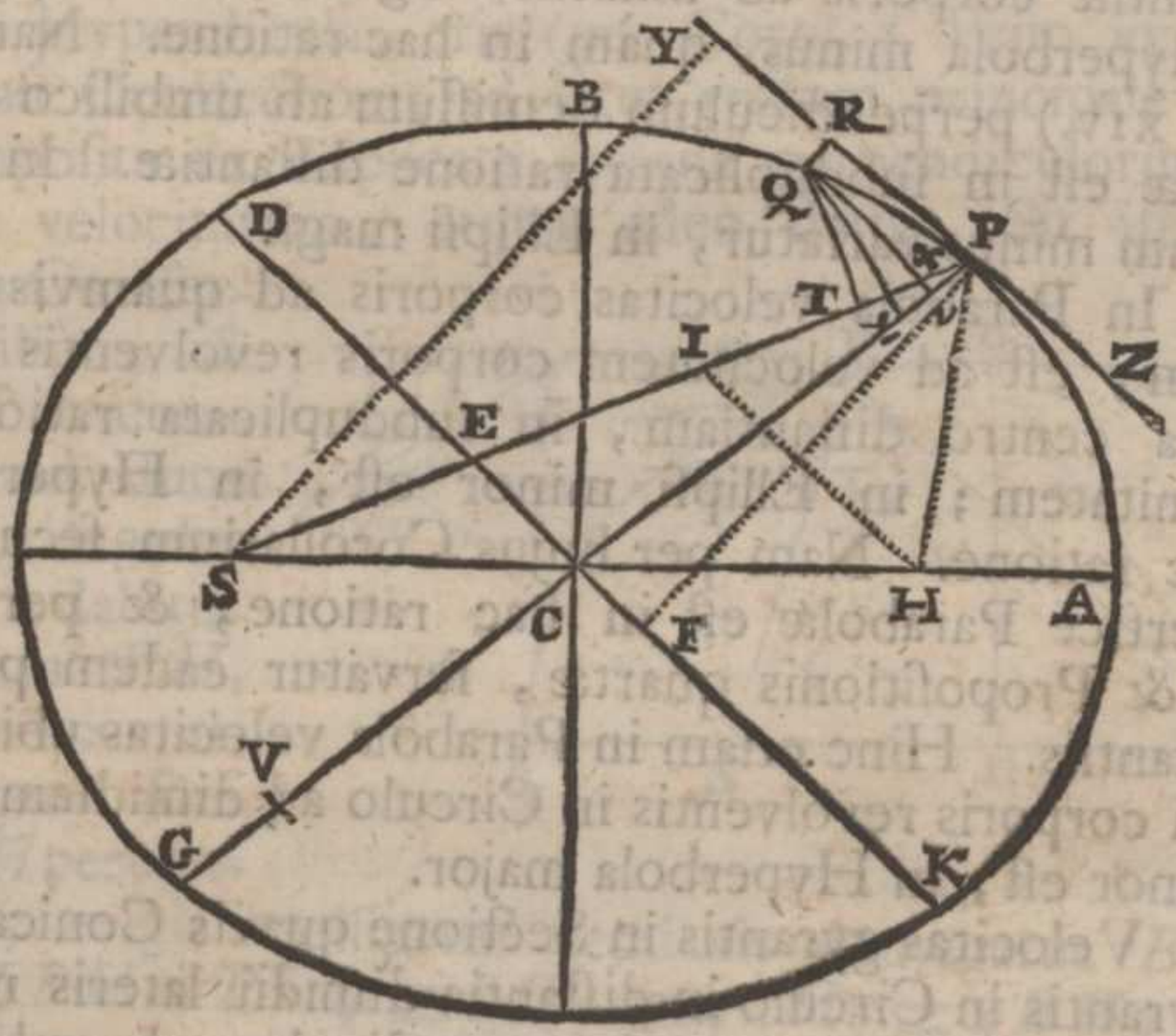
PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Iiſdem poſitis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant Orbitas, demiſſiſque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod Velocitates corporum ſunt in ratione compoſita ex ratione perpendiculorum inverſe & ſubduplicata ratione laterum rectorum principalium directe.

Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendiculum SY & velocitas corporis P erit reciproce in ſubduplicata ratione quantitatis $\frac{SYq.}{L}$ Nam velocitas illa eſt ut arcus quam minimus PQ in data temporis particula deſcriptus, hoc eſt (per Lem. VII.) ut tangens PR, id eſt (ob proportionales PR ad QT & SP ad SY) ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, ſive ut SY reciproce & $SP \times QT$ directe; eſtque

SP

$SP \times QT$ ut area dato tempore descripta, id est, per Prop. XIV. in subduplicata ratione lateris recti. *Q. E. D.* LIBER PRIMUS.



Corol. 1. Latera recta principalia sunt in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum in maximis & minimis ab umbilico communi distantiis, sunt in ratione composita ex ratione distantiarum inverse & subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe. Nam perpendicula jam sunt ipsæ distantiæ.

Corol. 3. Ideoque velocitas in Conica sectione, in maxima vel minima ab umbilico distantia, est ad velocitatem in Circulo in eadem à centro distantia, in subduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam.

Corol. 4. Corporum in Ellipsibus gyrantium velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi sunt eædem quæ corporum gyrantium in Circulis ad easdem distantias; hoc est (per Corol. 6. Prop. IV.) reciproce in subduplicata ratione distantiarum. Nam perpendicula jam sunt semi-axes minores; & hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverse cum subduplicata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio subduplicata distantiarum inverse.

Corol. 5. In eadem figura, vel etiam in figuris diversis, quarum latera

De Motu Corporum.

latera recta principalia ſunt æqualia, velocitas corporis eſt reciproce ut perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. In Parabola, velocitas eſt reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ; in Ellipſi magis variatur, in Hyperbola minus, quam in hac ratione. Nam (per Corol. 2. Lem. XIV.) perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem Parabolæ eſt in ſubduplicata ratione diſtantiæ. In Hyperbola perpendiculum minus variatur, in Ellipſi magis.

Corol. 7. In Parabola velocitas corporis ad quamvis ab umbilico diſtantiam, eſt ad velocitatem corporis revolventis in Circulo ad eandem a centro diſtantiam, in ſubduplicata ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipſi minor eſt, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus Corollarium ſecundum, velocitas in vertice Parabolæ eſt in hac ratione, & per Corollaria ſexta hujus & Propoſitionis quartæ, ſervatur eadem proportio in omnibus diſtantiis. Hinc etiam in Parabola velocitas ubique æqualis eſt velocitati corporis revolventis in Circulo ad dimidiam diſtantiam, in Ellipſi minor eſt, in Hyperbola major.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in Sectione quavis Conica eſt ad velocitatem gyrantis in Circulo in diſtantia dimidii lateris recti principalis Sectionis, ut diſtantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem Sectionis demiſſum. Patet per Corollarium quintum.

Corol. 9. Unde cum (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc Circulo ſit ad velocitatem gyrantis in Circulo quovis alio, reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in Conica ſectione ad velocitatem gyrantis in Circulo in eadem diſtantia, ut media proportionalis inter diſtantiam illam communem & ſemiſſem principalis lateris recti ſectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem ſectionis demiſſum.

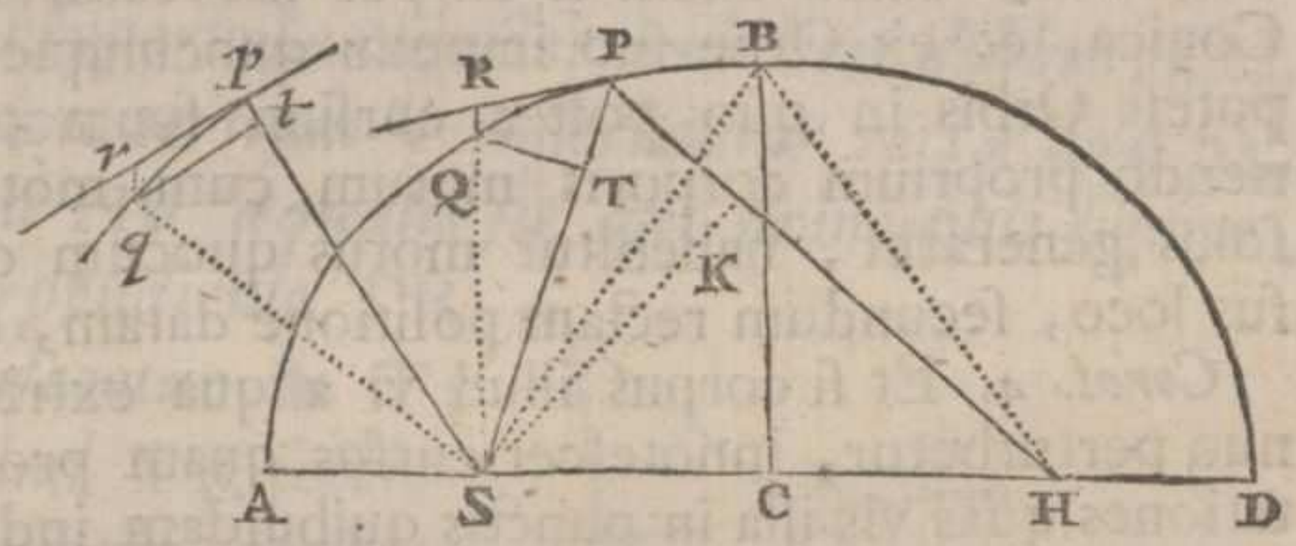
PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

Poſito quod vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, & quod vis illius quantitas abſoluta ſit cognita; requiritur Linea quam corpus deſcribit, de loco dato, cum data velocitate, ſecundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum *S* ea ſit qua corpus *p* in orbita quavis data *p q* gyretur, & cognoſcatur hujus velocitas in loco *p*.

De

De loco P, ſecundum lineam PR, exeat corpus P, cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in Coniſectionem PQ. Hanc igitur recta PR tanget in P. Tangat itidem recta aliqua pr Orbitam pq in p, & ſi ab S ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per Corol. 1. Prop. XVI.) latus rectum principale Coniſectionis ad latus rectum principale Orbitæ, in ratione compoſita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum, atque adeo datur. Sit iſtud L. Datur præterea Coniſectionis umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH, & dabitur poſitione linea PH, in qua umbilicus alter H locatur. Demiſſo ad PH perpendiculo SK, erigi intelligatur ſemiaxis conjugatus BC, & erit $\overline{SPq.} - 2KPH + PHq. = SHq. = 4CHq. = 4BHq - 4BCq. = \overline{SP + PH : quad.} - L \times \overline{SP + PH} = SPq. + 2SPH + PHq. - L \times \overline{SP + PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP + PH}$, & fiet $L \times \overline{SP + PH} = 2SPH + 2KPH$, ſeu $SP + PH$, ad PH, ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quam poſitione. Nimirum ſi ea ſit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum linea PS, adeoque figura erit Ellipſis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP + PH$, dabitur: Sin tanta ſit corporis velocitas ut latus rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo PH infinita erit, & propterea figura erit Parabola axem habens SH parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quod ſi corpus majori adhuc cum velocitate de loco ſuo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis, adeoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH, & inde dabitur. *Q. E. I.*



Corol. 1. Hinc in omni Coniſectione ex dato vertice principali D, latere recto L, & umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo DH, ad DS ut eſt latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$. Nam proportio $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L,

De Motu Corporum

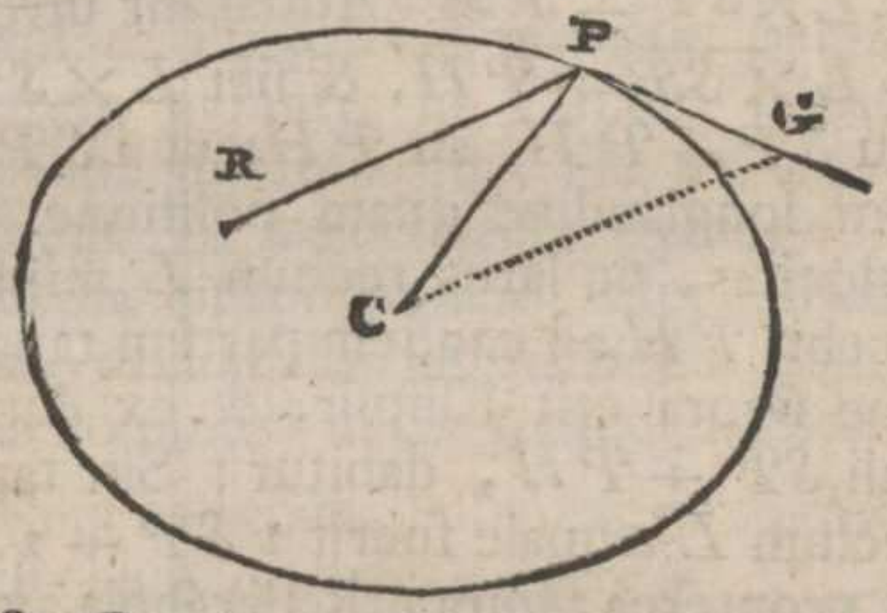
in casu hujus Corollarii, fit $\mathcal{D}S + \mathcal{D}H$ ad $\mathcal{D}H$ ut $4\mathcal{D}S$ ad L & divisim $\mathcal{D}S$ ad $\mathcal{D}H$ ut $4\mathcal{D}S - L$ ad L.

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali $\mathcal{D}$, invenietur Orbita expedite, capiendo scilicet latus rectum ejus, ad duplam distantiam $\mathcal{D}S$, in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in Circulo, ad distantiam $\mathcal{D}S$, gyrantis (per Corol. 3. Prop. XVI.) dein $\mathcal{D}H$ ad $\mathcal{D}S$ ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4\mathcal{D}S$.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in Sectione quacunque Conica, & ex Orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest Orbis in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliqua extrinsecus impressa continuo perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogia mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Scholium.



Si corpus $\mathcal{P}$ vi centripeta ad punctum quodcunque datum R tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque Sectionis conicæ cujus centrum sit C, & requiratur Lex vis centripetæ: ducatur CG radio $R\mathcal{P}$ parallela, & Orbis tangenti $\mathcal{P}G$ occurrens in G; & vis illa (per Corol. 1 & Schol. Prop. X, & Corol. 3. Prop. VII.) erit ut $\frac{CG\ cub.}{R\mathcal{P}\ quad.}$.

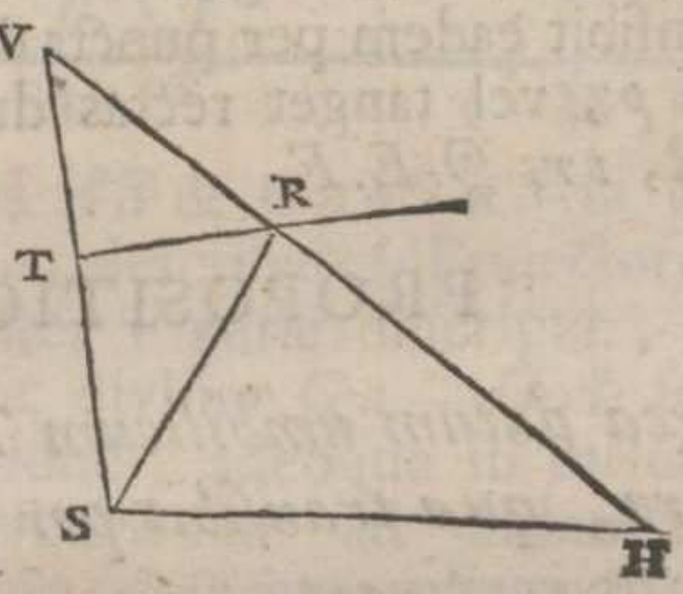
SECTIO

SECTIO IV.

De Inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex umbilico dato.

LEMMA XV.

Si ab Ellipſeos vel Hyperbolæ cujuſvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis ſit axi principali figuræ, altera* SV *a perpendiculo* TR *in ſe demiſſo biſecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *ſectionem Conicam alicubi tanget: & contra, ſi tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*



Secet enim perpendiculum *TR* rectam *HV* productam, ſi opus fuerit, in *R*, & jungatur *SR*. Ob æquales *TS*, *TV*, æquales erunt & rectæ *SR*, *VR* & anguli *TRS*, *TRV*. Unde punctum *R* erit ad Sectionem Conicam, & perpendiculum *TR* tanget eandem: & contra. *Q. E. D.*

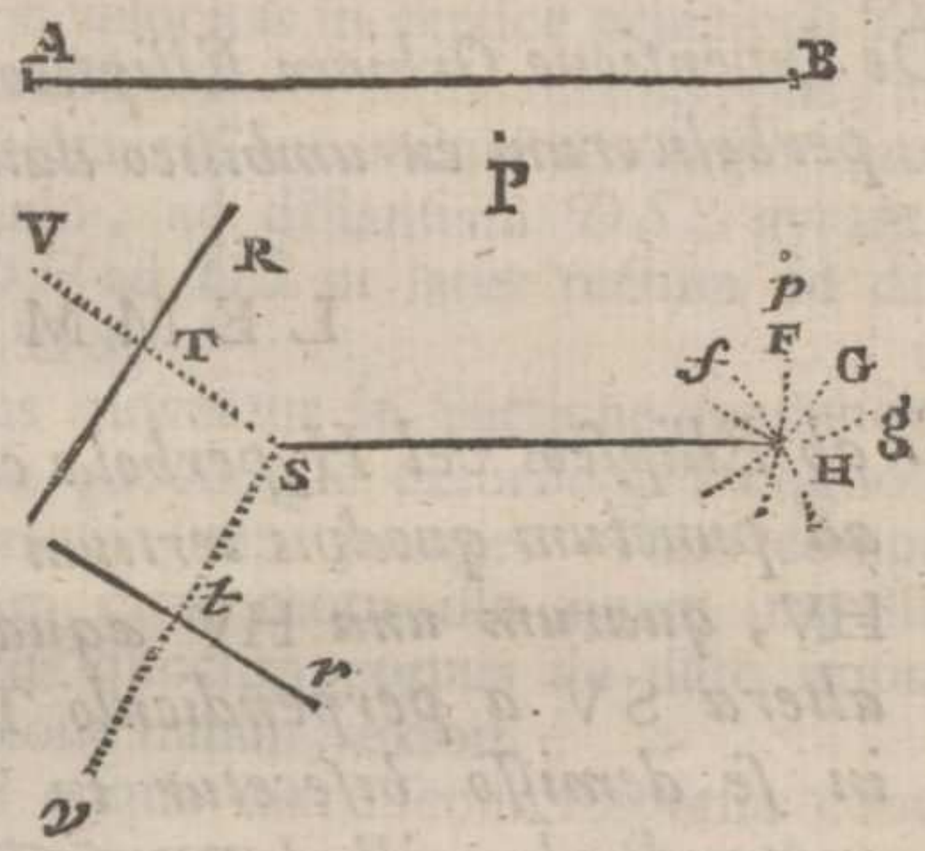
PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

Datis umbilico & axibus principalibus deſcribere Trajectorias Ellipticas & Hyperbolicas, quæ tranſibunt per puncta data, & rectas poſitione datas contingent.

Sit *S* communis umbilicus figurarum; *AB* longitudo axis principalis Trajectoriæ cujuſvis; *P* punctum per quod Trajectoria debet tranſire; & *TR* recta quam debet tangere. Centro *P* intervallo $AB - SP$, ſi orbita ſit ellipſis, vel $AB + SP$, ſi ea ſit Hyperbola, deſcribatur circulus *HG*. Ad tangentem *TR* demittatur perpendiculum *ST*, & producatur idem ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*; centroque *V* & intervallo *AB* deſcribatur circulus *FH*. Hac

De Motu Corporum

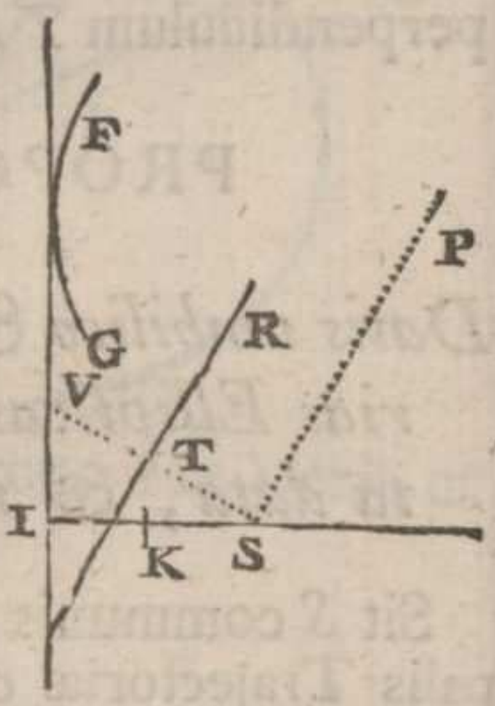
methodo ſive dentur duo puncta P, p, ſive duæ tangentes TR, tr, ſive punctum P & tangens TR, deſcribendi ſunt circuli duo. Sit H eorum interſectio communis, & umbilicis S, H, axe illo dato deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Nam Trajectoria deſcripta (eo quod $PH + SP$ in Ellipſi, & $PH - SP$ in Hyperbola æquatur axi) tranſibit per punctum P, & (per Lemma ſuperius) tanget rectam TR. Et eodem argumento vel tranſibit eadem per puncta duo P, p, vel tanget rectas duas TR, tr. *Q.E.F.*



PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

Circa datum umbilicum Trajectoriam Parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.

Sit S umbilicus, P punctum & TR tangens Trajectoriæ deſcribendæ. Centro P, intervallo PS deſcribe circulum FG. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem ST, & produc eam ad V, ut ſit TV æqualis ST. Eodem modo deſcribendus eſt alter circulus fg, ſi datur alterum punctum p; vel inveniendum alterum punctum v, ſi datur altera tangens tr; dein ducenda recta IF quæ tangat duos circulos FG, fg, ſi dantur duo puncta P, p, vel tranſeat per duo puncta V, v, ſi dantur duæ tangentes TR, tr, vel tangat circulum FG & tranſeat per punctum V, ſi datur punctum P & tangens TR. Ad FI demitte perpendicularem SI, eamque biſeca in K; & axe SK, vertice principali K deſcribatur Parabola. Dico factum. Nam Parabola, ob æquales SK & IK, SP & FP, tranſibit per punctum P; & (per Lemmatis XIV Corol. 3.) ob æquales ST & TV & angulum rectum STR, tanget rectam TR. *Q.E.F.*

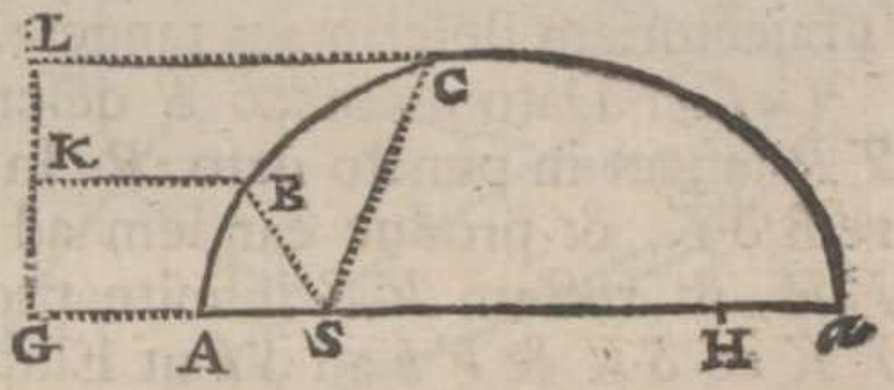


PRO-

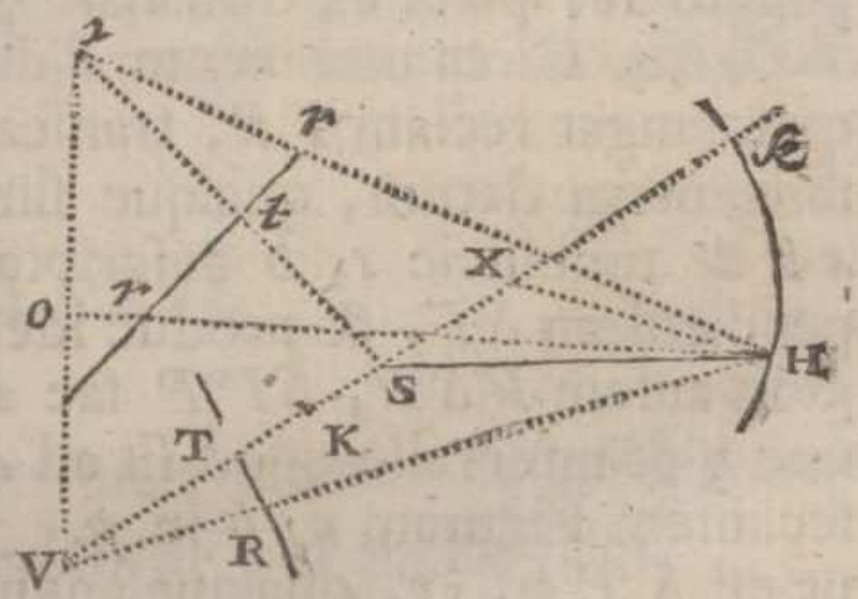
PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

Circa datum umbilicum Trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere, quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.

Caſ. 1. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit Trajectoria *ABC* per puncta duo *B*, *C*. Quoniam Trajectoria datur ſpecie, dabitur ratio axis principalis ad diſtantiam umbilicorum. In ea ratione cape *KB* ad *BS*, & *LC* ad *CS*. Centris *B*, *C*, intervallis *BK*, *CL*, deſcribe circulos duos & ad rectam *KL*, quæ tangat eoſdem in *K* & *L*, demitte perpendiculum *SG*, idemque ſeca in *A* & *a*, ita ut ſit *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut eſt *KB* ad *BS*, & axe *Aa*, verticibus *A*, *a*, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Sit enim *H* umbilicus alter Figuræ deſcriptæ, & cum ſit *GA* ad *AS* ut *Ga* ad *aS*, erit diviſim *Ga* — *GA* ſeu *Aa* ad *aS* — *AS* ſeu *SH* in eadem ratione, adeoque in ratione quam habet axis principalis Figuræ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus; & propterea Figura deſcripta eſt ejuſdem ſpeciei cum deſcribenda. Cumque ſint *KB* ad *BS* & *LC* ad *CS* in eadem ratione, tranſibit hæc Figura per puncta *B*, *C*, ut ex Conicis manifeſtum eſt.



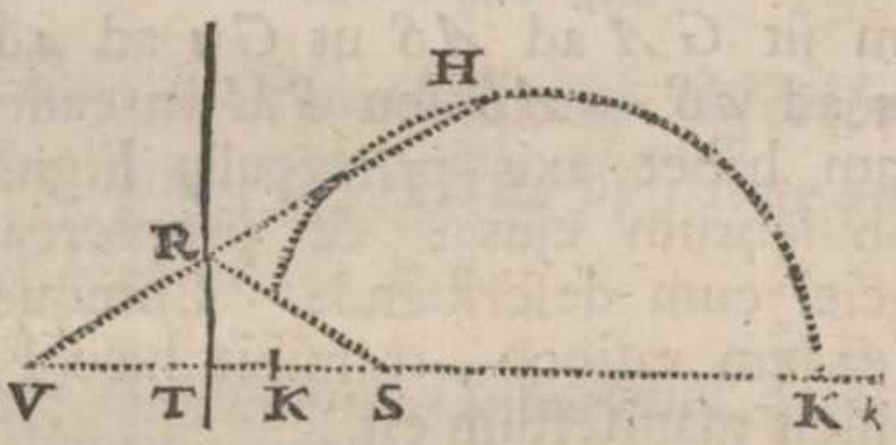
Caſ. 2. Dato umbilico *S*, deſcribenda ſit Trajectoria quæ rectas duas *TR*, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula *ST*, *St* & produc eadem ad *V*, *v*, ut ſint *TV*, *tv* æquales *TS*, *tS*. Biſeca *Vv* in *O*, & erige perpendiculum infinitum *OH*, rectamque *VS* infinite productam ſeca in *K* & *k* ita, ut ſit *VK* ad *KS* & *Vk* ad *kS* ut eſt Trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro *Kk* deſcribatur circulus ſecans *OH* in *H*; & umbilicis *S*, *H*, axe principali ipſam *VH* æquante, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Nam biſeca *Kk* in *X*, & junge *HX*, *HS*, *HV*, *Hv*. Quoniam eſt *VK* ad *KS* ut *Vk* ad *kS*; & compoſite ut *VK* + *Vk* ad *KS* + *kS*; diviſimque



De Motu Corporum

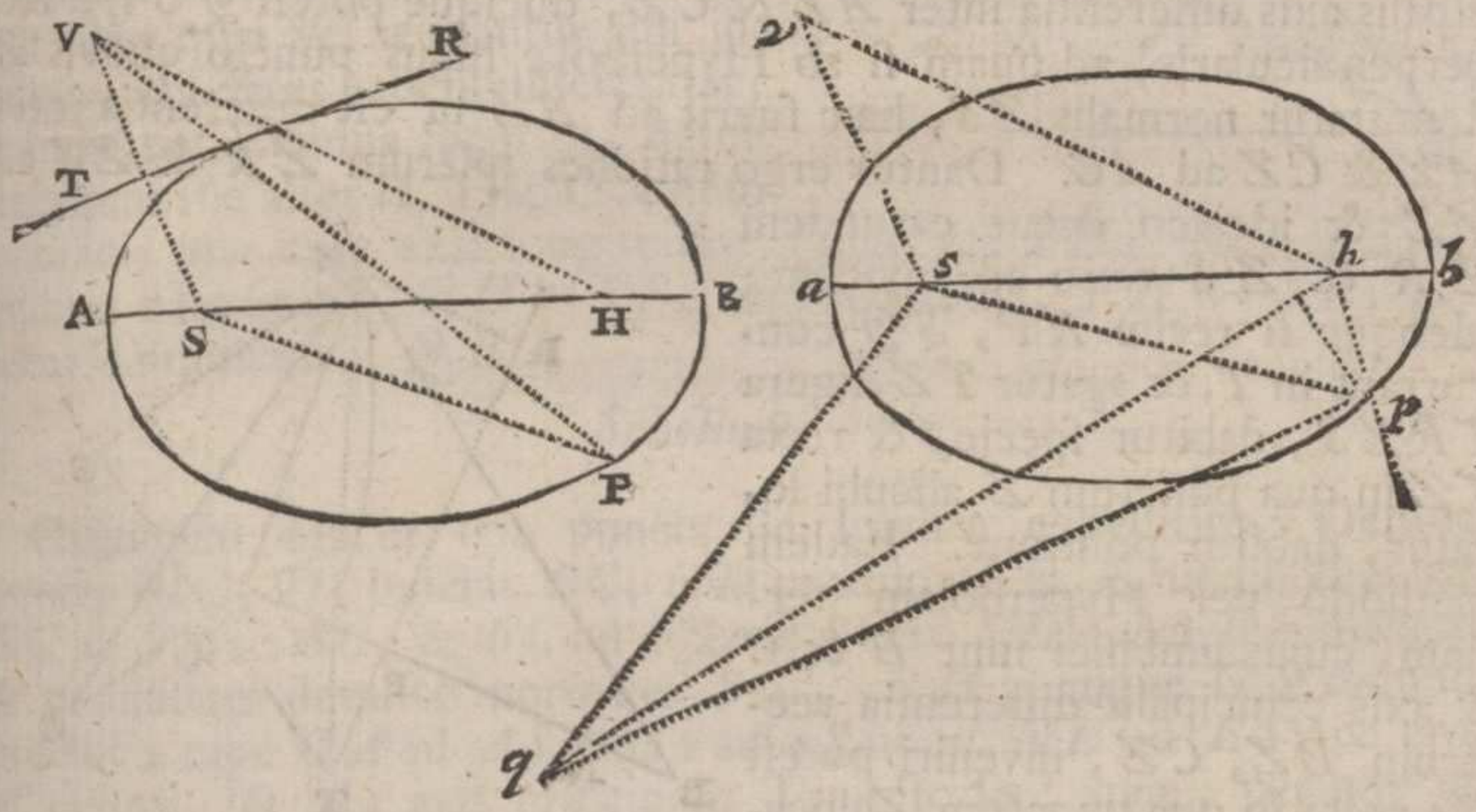
ut $Vk - VK$ ad $kS - KS$, id est ut $2VX$ ad $2KX$ & $2KX$ ad $2SX$, adeoque ut VX ad HX & HX ad SX, similia erunt triangula VXH, HXS, & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH, adeoque ut VK ad KS. Habet igitur Trajectoriæ descriptæ axis principalis VH eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam SH, quam habet Trajectoriæ describendæ axis principalis ad ipsius umbilicorum distantiam, & propterea ejusdem est speciei. Insuper cum VH, vH, æquentur axi principali, & VS, vS a rectis TR, tr perpendiculariter bisecentur, liquet, ex Lemmate XV, rectas illas Trajectoriam descriptam tangere. *Q. E. F.*

Cas. 3. Dato umbilico S describenda sit Trajectoria quæ rectam TR tanget in puncto dato R. In rectam TR demitte perpendicularem ST, & produc eandem ad V, ut sit TV æqualis ST. Junge VR, & rectam VS infinite productam seca in K & k, ita ut sit VK ad SK & Vk ad Sk ut Ellipseos describendæ axis principalis ad distantiam umbilicorum; circuloque super diametro Kk descripto, secetur producta recta VR in H, & umbilicis S, H, axe principali rectam VH æquante, describatur Trajectoria. Dico factum. Namque VH esse ad SH ut VK ad SK, atque adeo ut axis principalis Trajectoriæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, patet ex demonstratis in Casu secundo, & propterea Trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describenda; rectam vero TR qua angulus VRS bisecatur, tangere Trajectoriam in puncto R, patet ex Conicis. *Q. E. F.*



Cas. 4. Circa umbilicum S describenda jam sit Trajectoria APB, quæ tangat rectam TR, transeatque per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæque similis sit Figuræ apb, axe principali ab & umbilicic s, h descriptæ. In tangentem TR demitte perpendiculum ST, & produc idem ad V, ut sit TV æqualis ST. Angulis autem VSP, SVP fac angulos hsq, shq æquales; centroque q & intervallo quod sit ad ab ut SP ad VS describe circulum secantem Figuram apb in p. Junge sp & age SH quæ sit ad sh ut est SP ad sp, quæque angulum PSH angulo psh & angulum VSH angulo psq æquales constituat. Denique umbilicis S, H, & axe principali AB distantiam VH æquante, describatur sectio Conica Dico factum. Nam si agatur sv quæ sit ad sp ut est sh ad

ad *s q*, quæque conſtituat angulum *v s p* angulo *h s q* & angulum *v s h* angulo *p s q* æquales, triangula *s v h*, *s p q* erunt ſimilia & propterea *v h* erit ad *p q* ut eſt *s h* ad *s q*, id eſt (ob ſimilia triangula



V S P, *h s q*) ut eſt *V S* ad *S P* ſeu *a b* ad *p q*. Æquantur ergo *v h* & *a b*. Porro ob ſimilia triangula *V S H*. *v s h*, eſt *V H* ad *S H* ut *v h* ad *s h*, id eſt, axis Conicæ ſectionis jam deſcriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *a b* ad umbilicorum intervallum *s h*; & propterea Figura jam deſcripta ſimilis eſt Figuræ *a p b*. Tranſit autem hæc Figura per punctum *P*, eo quod triangulum *P S H* ſimile ſit triangulo *p s h*; & quia *V H* æquatur ipſius axi & *V S* biſecatur perpendiculariter a recta *T R*, tangit eadem rectam *T R*. *Q. E. F.*

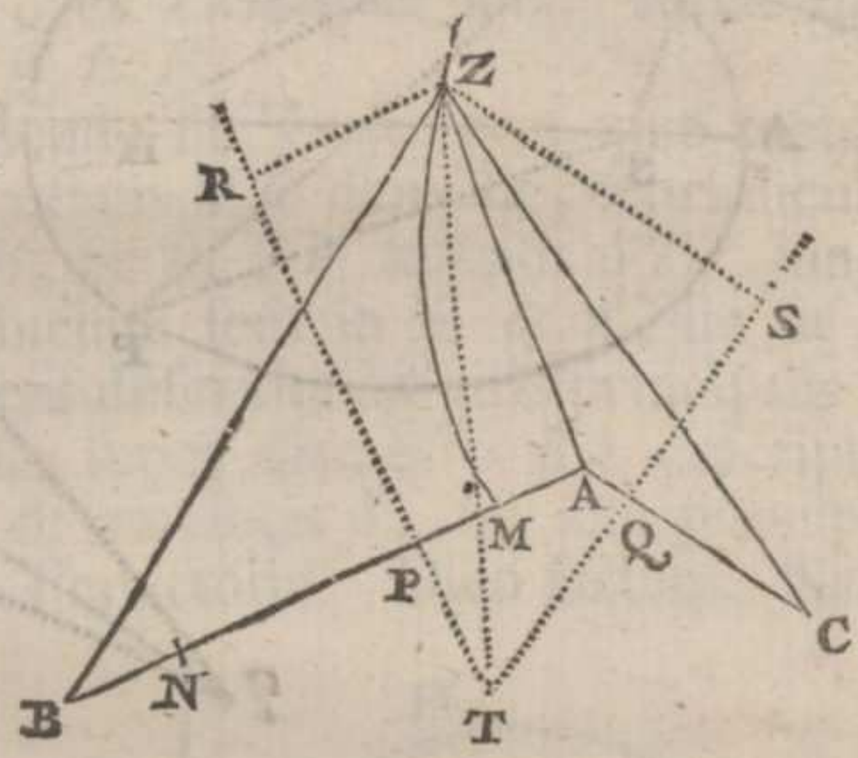
LEMMA XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ ſunt.

Caſ. 1. Sunto puncta illa data *A*, *B*, *C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet; Ob datam differentiam linearum *A Z*, *B Z*, locabitur punctum *Z* in Hyperbola cujus umbilici ſunt *A* & *B*, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille *M N*. Cape *P M*.

De Motu Corporum

ad MA ut est MN ad AB, & erecta PR perpendiculari ad AB, demissaque ZR perpendiculari ad PR; erit, ex natura hujus Hyperbolæ, ZR ad AZ ut est MN ad AB. Simili discursu punctum Z locabitur in alia Hyperbola, cujus umbilici sunt A, C & principalis axis differentia inter AZ & CZ, ducique potest QS ipsi AC perpendicularis, ad quam si ab Hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis ZS, hæc fuerit ad AZ ut est differentia inter AZ & CZ ad AC. Dantur ergo rationes ipsarum ZR & ZS ad AZ & idcirco datur earundem ZR & ZS ratio ad invicem; ideoque si rectæ RP, SQ concurrant in T, & agatur TZ, figura $TRZS$, dabitur specie, & recta TZ in qua punctum Z alicubi locatur, dabitur positione. Eadem methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici sunt B & C & axis principalis differentia rectarum BZ, CZ, inveniri potest alia recta in qua punctum Z locatur. Habitis autem duobus Locis rectilineis, habetur punctum quæsitum Z in eorum intersectione. *Q. E. I.*



Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta AZ & BZ æquantur, punctum Z locabitur in perpendiculo bisecante distantiam AB, & locus alius rectilineus invenietur ut supra. *Q. E. I.*

Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro Circuli per puncta A, B, C transeuntis. *Q. E. I.*

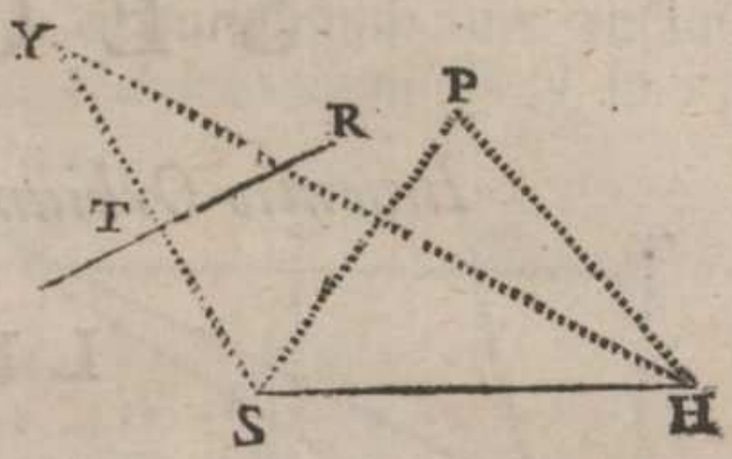
Solvitur etiam hoc Lemma problematicum per Librum Tactionum *Apollonii* a *Vieta* restitutum.

PROPOSITIO XXI. PROBLEMA XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.

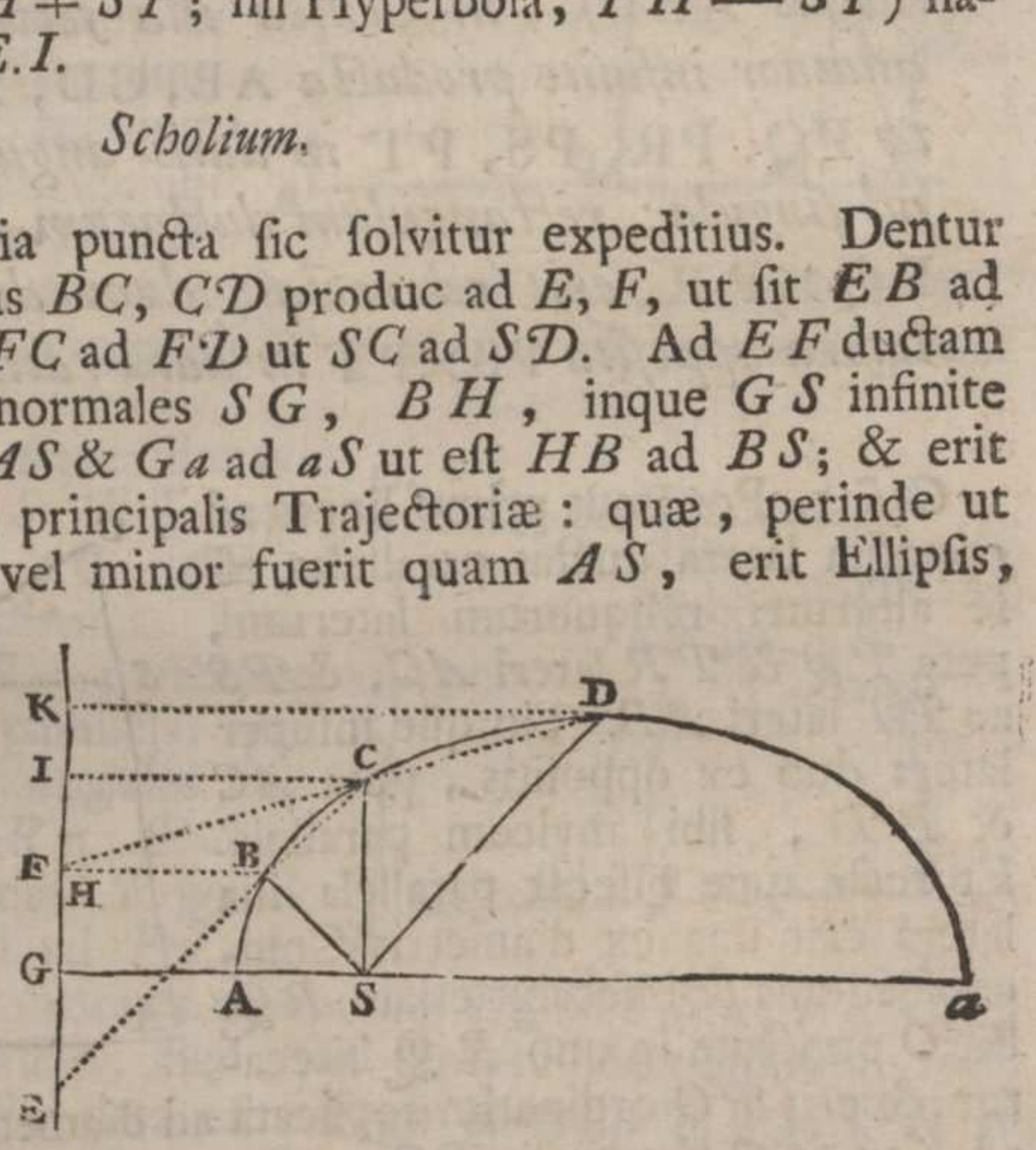
Detur umbilicus S, punctum P, & tangens TR, & inveniendus sit umbilicus alter H. Ad tangentem demitte perpendiculum ST, & produc idem ad Υ, ut sit $T\Upsilon$, æqualis ST, & erit ΥH æqualis axi principali. Junge SP, HP, & erit SP differentia inter HP & axem principalem. Hoc modo si dentur plures tangentes

tes TR vel plura puncta P, devenietur ſemper ad lineas totidem TH, vel PH, a dictis punctis T vel P ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus SP differunt ab iiſdem, atque adeo quæ vel æquantur ſibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per Lemma ſuperius, datur umbilicus ille alter H. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel TH; vel, ſi Trajectoria Ellipſis eſt, $PH + SP$; ſin Hyperbola, $PH - SP$) habetur Trajectoria. *Q. E. I.*



Scholium.

Caſus ubi dantur tria puncta ſic ſolvitur expeditius. Dentur puncta B, C, D. Junctas BC, CD produc ad E, F, ut ſit EB ad EC ut SB ad SC, & FC ad FD ut SC ad SD. Ad EF ductam & productam demitte normales SG, BH, inque GS infinite producta cape GA ad AS & Ga ad aS ut eſt HB ad BS; & erit A vertex, & Aa axis principalis Trajectoriæ: quæ, perinde ut GA major, æqualis, vel minor fuerit quam AS, erit Ellipſis, Parabola vel Hyperbola; puncto a in primo caſu cadente ad eandem partem lineæ GF cum puncto A; in ſecundo caſu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ GF. Nam ſi demittantur ad GF perpendicula CI, DK, erit IC ad HB ut EC ad EB, hoc eſt, ut SC ad SB; & viciſſim IC ad SC ut HB ad SB ſive ut GA ad SA. Et ſimili argumento probabitur eſſe KD ad SD in eadem ratione. Jacent ergo puncta B, C, D in Coni ſectione circa umbilicum S ita deſcripta, ut rectæ omnes ab umbilico S ad ſingula Sectionis puncta ductæ, ſint ad perpendicula a punctis iiſdem ad rectam GF demiſſa in data illa ratione.



Methodo haud multum diſſimili hujus problematis ſolutionem tradit Clariſſimus Geometra *de la Hire*, Conicorum ſuorum Lib. VIII. Prop. XXV.

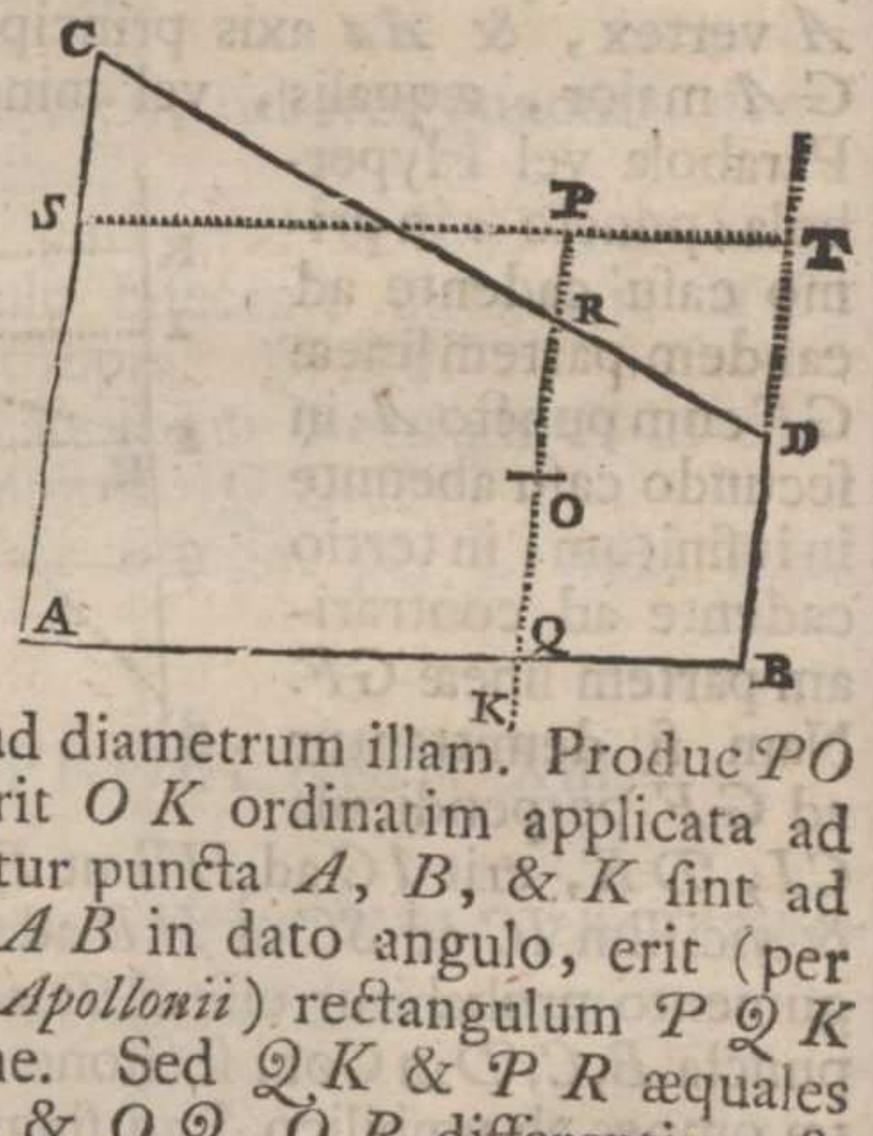
De Motu Corporum.

SECTIO V.

Inventio Orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

Si a datæ Conicæ Sectionis puncto quovis P, *ad Trapezii alicujus* ABDC, *in Conica illa sectione inscripti, latera quatuor infinite producta* AB, CD, AC, DB, *totidem rectæ* PQ, PR, PS, PT *in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera* PQ×PR, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita* PS×PT *in data ratione.*

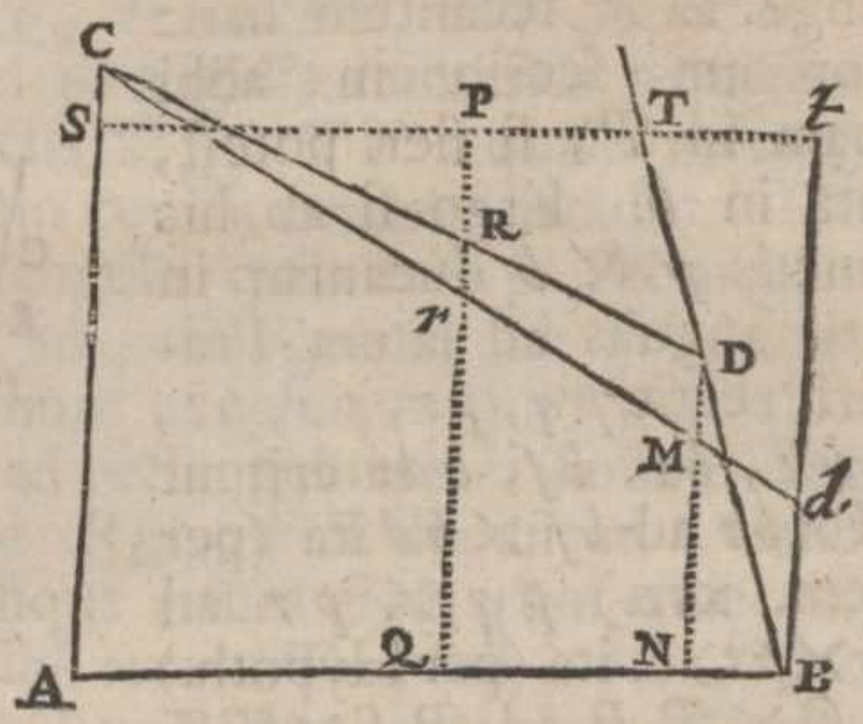


Cas. 1. Ponamus primo lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta PQ & PR lateri AC, & PS ac PT lateri AB. Sintque insuper latera duo ex oppositis, puta AC & BD, sibi invicem parallela. Et recta quæ bisecat parallela illa latera erit una ex diametris Conicæ sectionis & bisecabit etiam RQ. Sit O punctum in quo RQ bisecatur, & erit PO ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc PO ad K ut sit OK æqualis PO, & erit OK ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta A, B, & K sint ad Conicam sectionem, & PK secet AB in dato angulo, erit (per Prop. 17. & 18. Lib. III. Conicorum *Apollonii*) rectangulum PQK ad rectangulum AQB in data ratione. Sed QK & PR æquales sunt, utpote æqualium OK, OP, & OQ, OR differentiæ, & inde etiam rectangula PQK & $PQ \times PR$ æqualia sunt; atque adeo rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum AQB, hoc est ad rectangulum $PS \times PT$ in data ratione. *Q.E.D.*

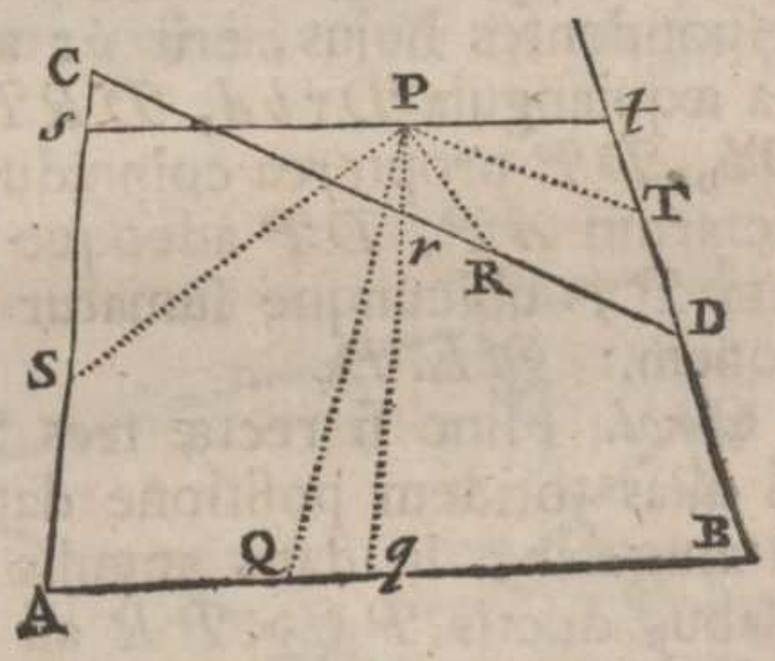
Cas.

Caſ. 2. Ponamus jam Trapezii latera oppoſita AC & BD non eſſe parallela. Age Bd parallelam AC & occurrentem tum rectæ ST in t, tum Conicæ ſectioni in d. Junge Cd ſecantem PQ in r, & ipſi PQ parallelam age DM ſecantem Cd in M & AB in N. Jam ob ſimilia triangula BTt, DBN; eſt Bt ſeu PQ ad Tt ut DN ad NB. Sic & Rr eſt ad AQ ſeu PS ut DM ad AN. Ergo, ducendo antecedentes in antecedentes & conſequentes in conſequentes, ut rectangulum PQ in Rr eſt ad rectangulum PS in Tt, ita rectangulum NDM eſt ad rectangulum ANB, & (per Caſ. 1.) ita rectangulum PQ in Pr eſt ad rectangulum PS in Pt, ac diviſim ita rectangulum $PQ \times PR$ eſt ad rectangulum $PS \times PT$. *Q. E. D.*

LIBER PRIMUS



Caſ. 3. Ponamus denique lineas quatuor PQ, PR, PS, PT non eſſe parallelas lateribus AC, AB, ſed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age Pq, Pr parallelas ipſi AC; & Ps, Pt parallelas ipſi AB; & propter datos angulos triangulorum PQq, PRr, PSs, PTt, dabuntur rationes PQ ad Pq, PR ad Pr, PS ad Ps, & PT ad Pt; atque adeo rationes compoſitæ $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$, & $PS \times PT$ ad $Ps \times Pt$. Sed, per ſuperius demonſtrata, ratio $Pq \times Pr$ ad $Ps \times Pt$ data eſt: Ergo & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. *Q. E. D.*

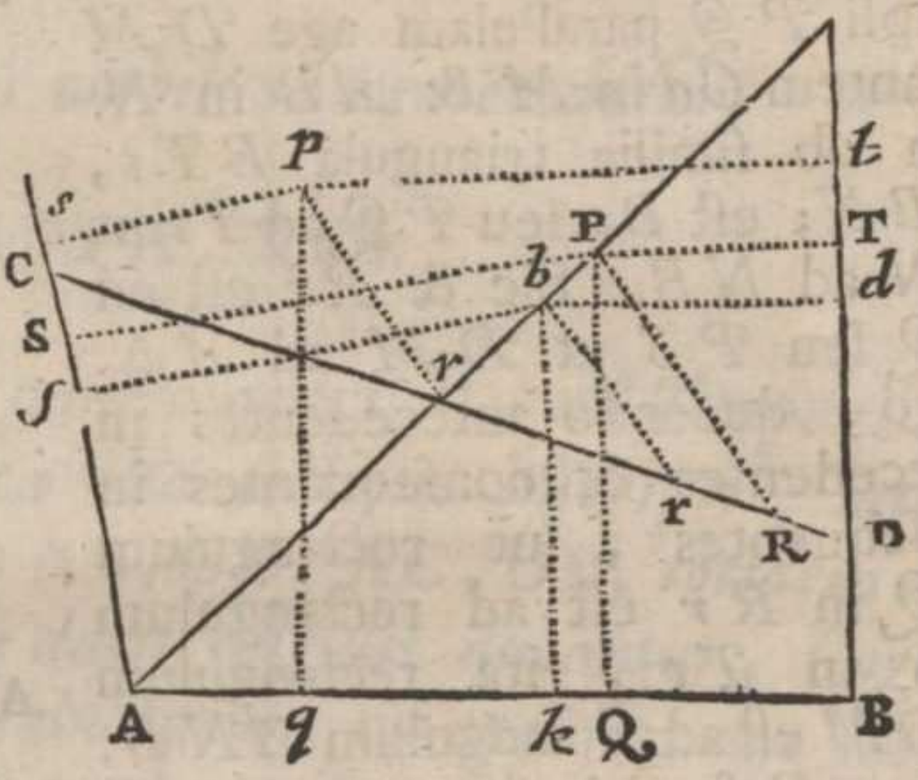


LEMMA XVIII.

Iiſdem poſitis, ſi rectangulum ductarum ad oppoſita duo latera Trapezii PQ×PR *ſit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* PS×PT *in data ratione; punctum* P, *a quo lineæ ducuntur, tanget Conicam ſectionem circa Trapezium deſcriptam.*

De Motu Corporum.

Per puncta *A*, *B*, *C*, *D* & aliquod infinitorum punctorum *P*, puta *p*, concipe Conicam sectionem describi: dico punctum *P* hanc semper tangere. Si negas, junge *AP* secantem hanc Conicam sectionem alibi quam in *P*, si fieri potest, puta in *b*. Ergo si ab his punctis *p* & *b* ducantur in datis angulis ad latera Trapezii rectæ *pq*, *pr*, *ps*, *pt*, & *bk*, *br*, *bf*, *bd*; erit ut *bk*×*br* ad *bf*×*bd* ita (per Lem. XVII) *pq*×*pr* ad *ps*×*pt*, & ita (per Hypoth.) *PQ*×*PR* ad *PS*×*PT*. Est & propter similitudinem Trapeziorum *bkAf*, *PQAS*, ut *bk* ad *bf* ita *PQ* ad *PS*. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit *br* ad *bd* ut *PR* ad *PT*. Ergo Trapezia æquiangula *Drbd*, *DRPT* similia sunt, & eorum diagonales *Db*, *DP* propterea coincidunt. Incidit itaque *b* in intersectionem rectarum *AP*, *DP* adeoque coincidit cum puncto *P*. Quare punctum *P*, ubicunque sumatur, incidit in assignatam Conicam sectionem. *Q.E.D.*



Corol. Hinc si rectæ tres *PQ*, *PR*, *PS* a puncto communi *P* ad alias totidem positione datas rectas *AB*, *CD*, *AC*, singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, fitque rectangulum sub duabus ductis *PQ*×*PR* ad quadratum tertiæ *PS quad.* in data ratione; punctum *P*, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione Conica quæ tangit lineas *AB*, *CD* in *A* & *C*; & contra. Nam coeat linea *BD* cum linea *AC* manente positione trium *AB*, *CD*, *AC*; dein coeat etiam linea *PT* cum linea *PS*: & rectangulum *PS*×*PT* evadet *PS quad.* rectæque *AB*, *CD* quæ curvam in punctis *A* & *B*, *C* & *D* secabant, jam Curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt sed tantum tangent.

Scholium.

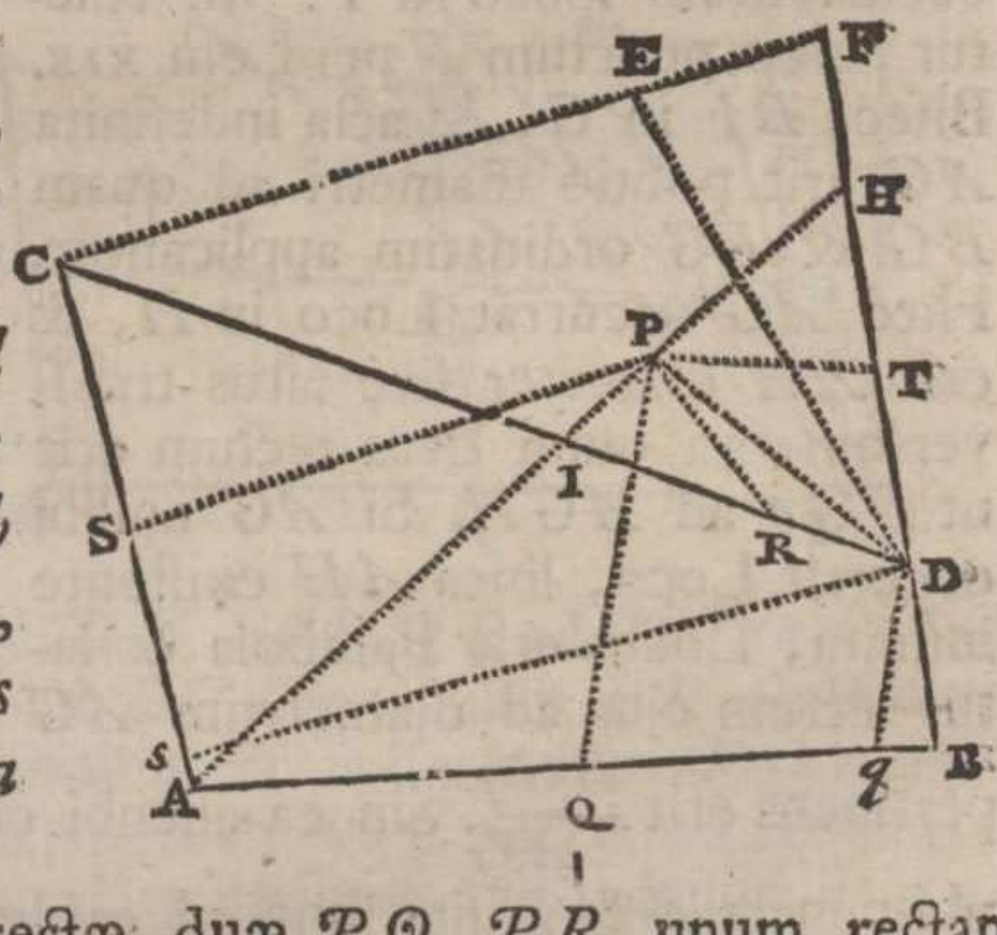
Nomen Conicæ sectionis in hoc Lemmate late sumitur, ita ut sectio tam Rectilinea per verticem Coni transiens, quam Circularis basi parallela includatur. Nam si punctum *p* incidit in rectam, qua quævis ex punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* junguntur, Conica sectio

verte-

vertetur in geminas Rectas, quarum una eſt recta illa in quam punctum p incidit, & altera eſt recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si Trapezii anguli duo oppoſiti ſimul ſumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor PQ, PR, PS, PT ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibuſvis æqualibus, ſitque rectangulum ſub duabus ductis $PQ \times PR$ æquale rectangulo ſub duabus aliis $PS \times PT$, Sectio conica evadet Circulus. Idem fiet ſi lineæ quatuor ducantur in angulis quibuſvis & rectangulum ſub duabus ductis $PQ \times PR$ ſit ad rectangulum ſub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum ſub ſinubus angulorum S, T, in quibus duæ ultimæ PS, PT ducuntur, ad rectangulum ſub ſinubus angulorum Q, R in quibus duæ primæ PQ, PR ducuntur. Cæteris in caſibus Locus puncti P erit aliqua trium figurarum quæ vulgo nominantur Sectiones Conicæ. Vice autem Trapezii $ABCD$ ſubſtitui poteſt Quadrilaterum cujus latera duo oppoſita ſe mutuo inſtar diagonalium decuſſant. Sed & e punctis quatuor A, B, C, D, poſſunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in caſu Sectio Conica tranſibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

LEMMA XIX.

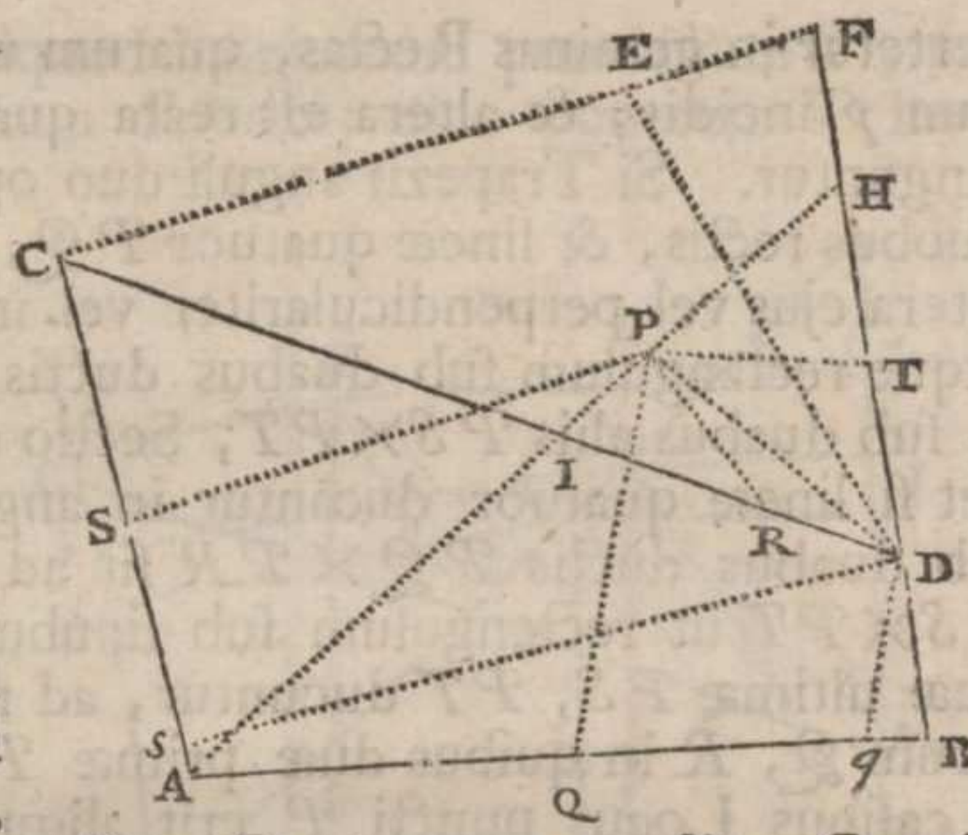
Invenire punctum P, *a quo ſi rectæ quatuor* PQ, PR, PS, PT, *ad alias totidem poſitione datas rectas* AB, CD, AC, BD, *ſingulæ ad ſingulas in datis angulis ducantur, rectangulum ſub duabus ductis,* PQ×PR, *ſit ad rectangulum ſub aliis duabus* PS×PT *in data ratione.*



Lineæ AB, CD, ad quas rectæ duæ PQ, PR, unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus poſitione datis lineis in punctis A, B, C, D. Ab eorum aliquo A age rectam quamlibet AH, in qua velis punctum P reperiri. Secet ea lineas oppoſitas BD, CD, nimirum BD in H, & CD in I, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes PQ ad PA & PA

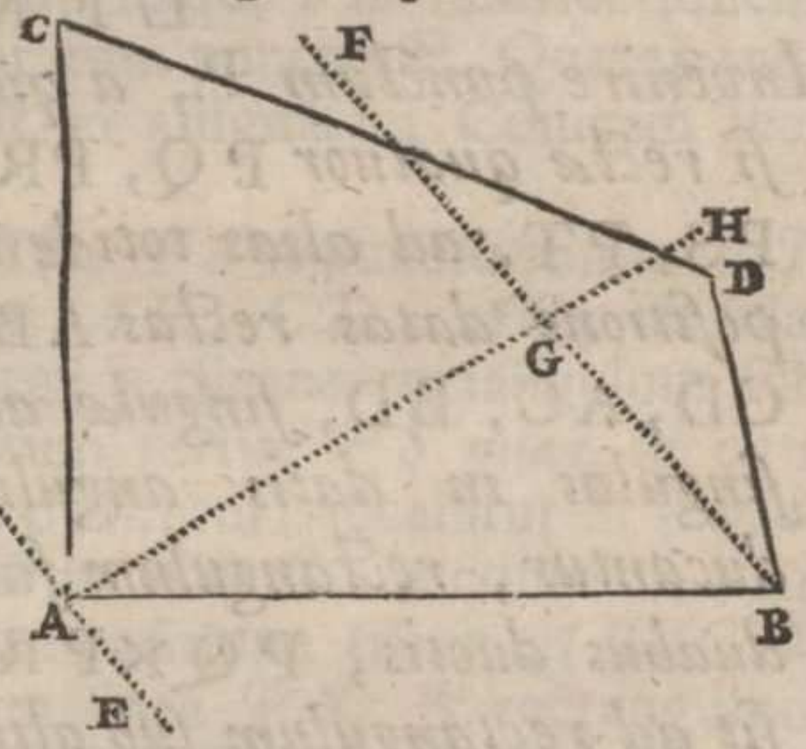
De Motu Corporum.

ad PS, adeoque ratio PQ ad PS. Auferendo hanc a data ratione $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$, dabitur ratio PR ad PT, & addendo datas rationes PI ad PR, & PT ad PH dabitur ratio PI ad PH atque adeo punctum P. $Q.E.I.$



Corol. 1. Hinc etiam ad Loci punctorum infinitorum P punctum quodvis D tangens duci potest. Nam chorda PD ubi puncta P ac D conveniunt, hoc est, ubi AH ducitur per punctum D, tangens evadit. Quo in casu ultima ratio evanescentium IP & PH invenietur. ut supra. Ipsi igitur AD duc parallelam CF, occurrentem BD in F, & in ea ultima ratione sectam in E, & DE tangens erit, propterea quod CF & evanescens IH parallelæ sunt, & in E & P similiter sectæ.

Corol. 2. Hinc etiam Locus punctorum omnium P definiri potest. Per quodvis punctorum A, B, C, D, puta A, duc Loci tangentem AE & per aliud quodvis punctum B duc tangenti parallelam BF occurrentem Loco in F. Invenietur autem punctum F per Lem. XIX. Bisecа BF in G, & acta indefinita AG erit positio diametri ad quam BG & FG ordinatim applicantur. Hæc AG occurrat Loco in H, & erit AH diameter sive latus transversum, ad quod latus rectum erit ut BGq ad AGH. Si AG nullibi occurrit Loco, linea AH existente infinita, Locus erit Parabola & latus rectum ejus ad diametrum AG pertinens erit $\frac{BGq.}{AG}$ Sin ea alicubi occurrit, Locus Hyperbola erit



ubi puncta A & H sita sunt ad easdem partes ipsius G: & Ellipsis, ubi G intermedium est, nisi forte angulus AGB rectus sit & insuper $BG\,quad.$ æquale rectangulo AGH, quo in casu Circulus habebitur.

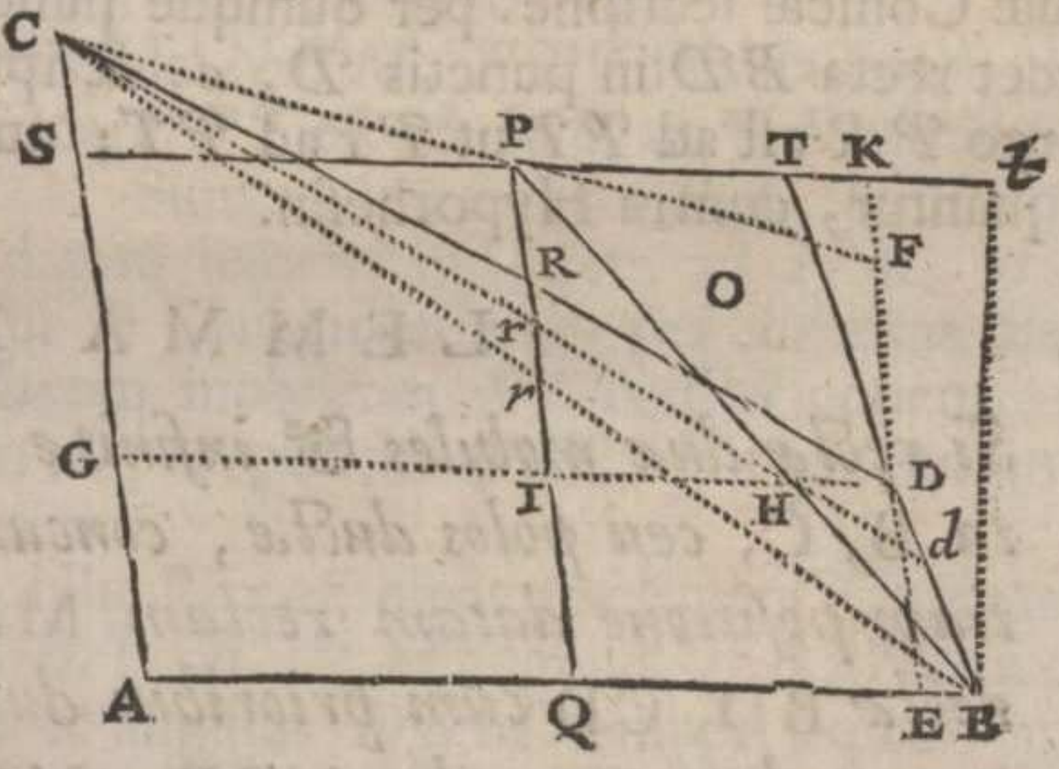
Atque ita Problematis Veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incepti & ab *Apollonio* continuati non calculus, sed compositio Geometrica, qualem Veteres quærebant, in hoc Corollario exhibetur.

LEM-

LEMMA XX.

Si Parallelogrammum quodvis ASPQ *angulis duobus oppositis* A & P *tangit sectionem quamvis Conicam in punctis* A & P; &, *lateribus unius angulorum illorum infinite productis* AQ, AS, *occurrit eidem sectioni Conicæ in* B & C; *a punctis autem occursuum* B & C *ad quintum quodvis sectionis Conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* BD, CD *occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus* PS, PQ *in* T & R: *erunt semper abscissæ laterum partes* PR & PT *ad invicem in data ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in data ratione, punctum* D *tanget Sectionem Conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *transeuntem.*

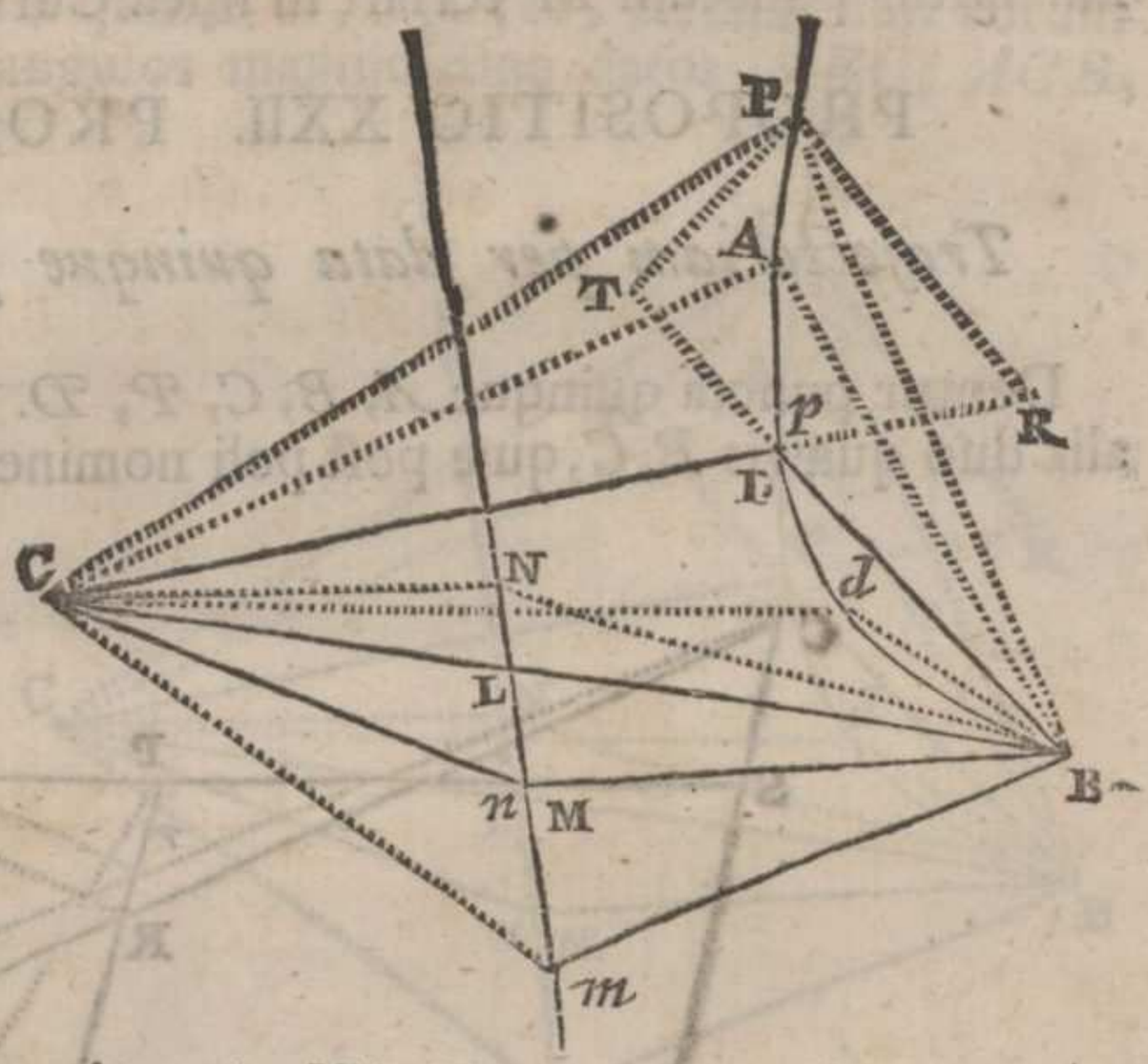
Cas. 1. Jungantur *BP*, *CP* & a puncto *D* agantur rectæ duæ *DG*, *DE*, quarum prior *DG* ipsi *AB* parallela sit & occurrat *PB*, *PQ*, *CA* in *H*, *I*, *G*; altera *DE* parallela sit ipsi *AC* & occurrat *PC*, *PS*, *AB* in *F*, *K*, *E*: & erit (per Lemma XVII.) rectangulum *DE*×*DF* ad rectangulum *DG*×*DH* in ratione data. Sed est *PQ*, ad *DE* (seu *IQ*,) ut *PB* ad *HB*, adeoque ut *PT* ad *DH*; & vicissim *PQ*, ad *PT* ut *DE* ad *DH*. Est & *PR* ad *DF* ut *RC* ad *DC*, adeoque ut (*IG* vel) *PS* ad *DG*, & vicissim *PR* ad *PS* ut *DF* ad *DG*; & conjunctis rationibus fit rectangulum *PQ*×*PR* ad rectangulum *PS*×*PT* ut rectangulum *DE*×*DF* ad rectangulum *DG*×*DH*, atque adeo in data ratione. Sed dantur *PQ* & *PS* & propterea ratio *PR* ad *PT* datur. *Q.E.D.*



Cas. 2. Quod si *PR* & *PT* ponatur in data ratione ad invicem, tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum *DE*×*DF* ad rectangulum *DG*×*DH*, in ratione data, adeoque punctum *D* (per Lemma XVIII.) contingere Conicam sectionem transeuntem per puncta *A*, *B*, *C*, *P*. *Q.E.D.*

Corol.

Nam si in recta MN detur punctum N, & ubi punctum mobile M incidit in immotum N, incidat punctum mobile D in immotum P. LIBER PRIMUS.



Junge CN, BN, CP, BP, & a puncto P age rectas PT, PR occurrentes ipsis BD, CD in T & R, & facientes angulum BPT æqualem angulo dato BNM, & angulum CPR æqualem angulo dato CNM. Cum ergo (ex Hypothesi) æquales sint anguli MBD, NBP, ut & anguli MCD, NCP; aufer communes NBD & NCD, & restabunt æquales NBM & PBT, NCM & PCR: adeoque triangula NBM, BPT similia sunt, ut & triangula NCM, PCR. Quare PT est ad NM ut PB ad NB, & PR ad NM ut PC ad NC. Sunt autem puncta B, C, N, P immobilia. Ergo PT & PR datam habent rationem ad NM, proindeque datam rationem inter se; atque adeo, per Lemma XX, punctum D (perpetuus rectarum mobilium BT & CR concursus) contingit sectionem Conicam, per puncta B, C, P transeuntem. Q. E. D.

Et contra, si punctum mobile D contingat sectionem Conicam transeuntem per data puncta B, C, A, & sit angulus DBM semper æqualis angulo dato ABC, & angulus DCM semper æqualis angulo dato ACB, & ubi punctum D incidit successive in duo quævis sectionis puncta immobilia p, P, punctum mobile M incidat successive in puncta duo immobilia n, N: per eadem n, N agatur recta nN, & hæc erit Locus perpetuus puncti illius mobilis M. Nam, si fieri potest, versetur punctum M in linea aliqua Curva. Tanget ergo punctum D sectionem Conicam per puncta quinque B, C, A, p, P, transeuntem, ubi punctum M perpetuo tangit lineam Curvam. Sed & ex jam demonstratis tanget etiam punctum D sectionem Conicam per eadem quinque puncta B, C, A, p, P transeuntem, ubi punc-

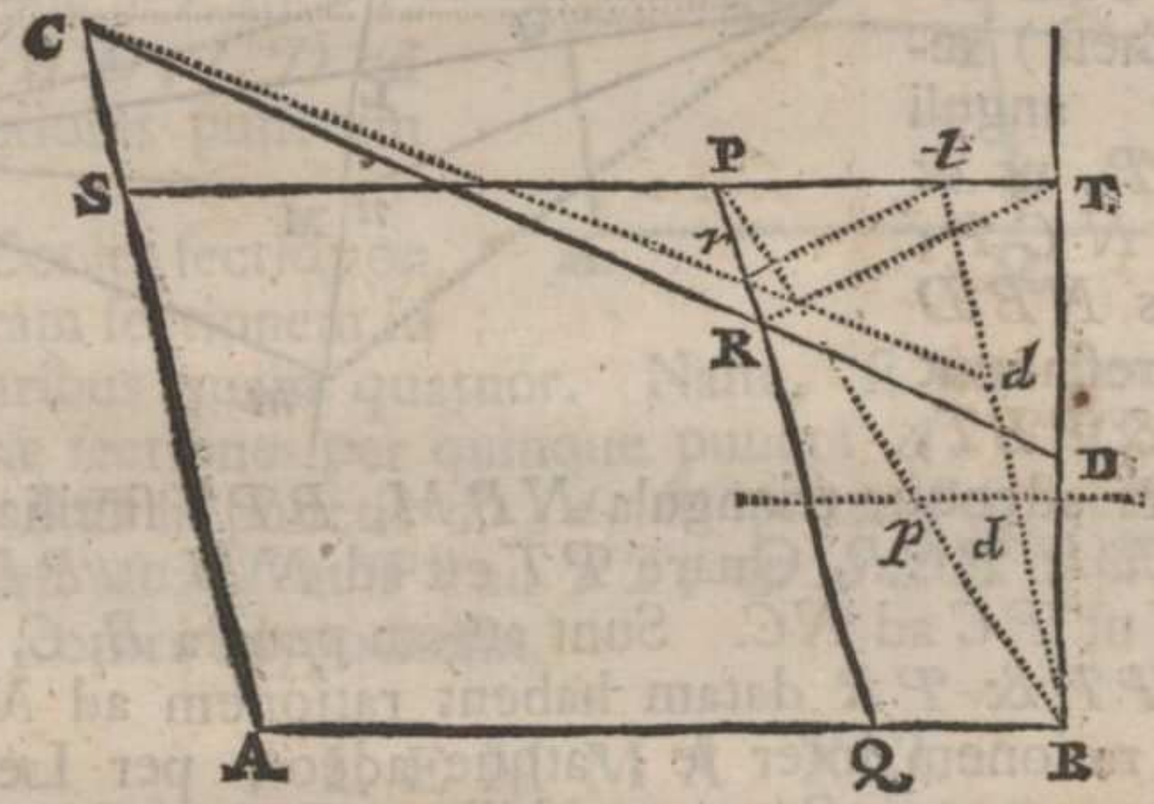
De Motu Corporum

tum *M* perpetuo tangit lineam Rectam. Ergo duæ ſectiones Conicæ tranſibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lem. XX. Igitur punctum *M* verſari in linea Curva abſurdum eſt. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta deſcribere.

Dentur puncta quinque *A, B, C, P, D.* Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B, C,* quæ poſt poli nominentur, age rectas *AB, AC,*

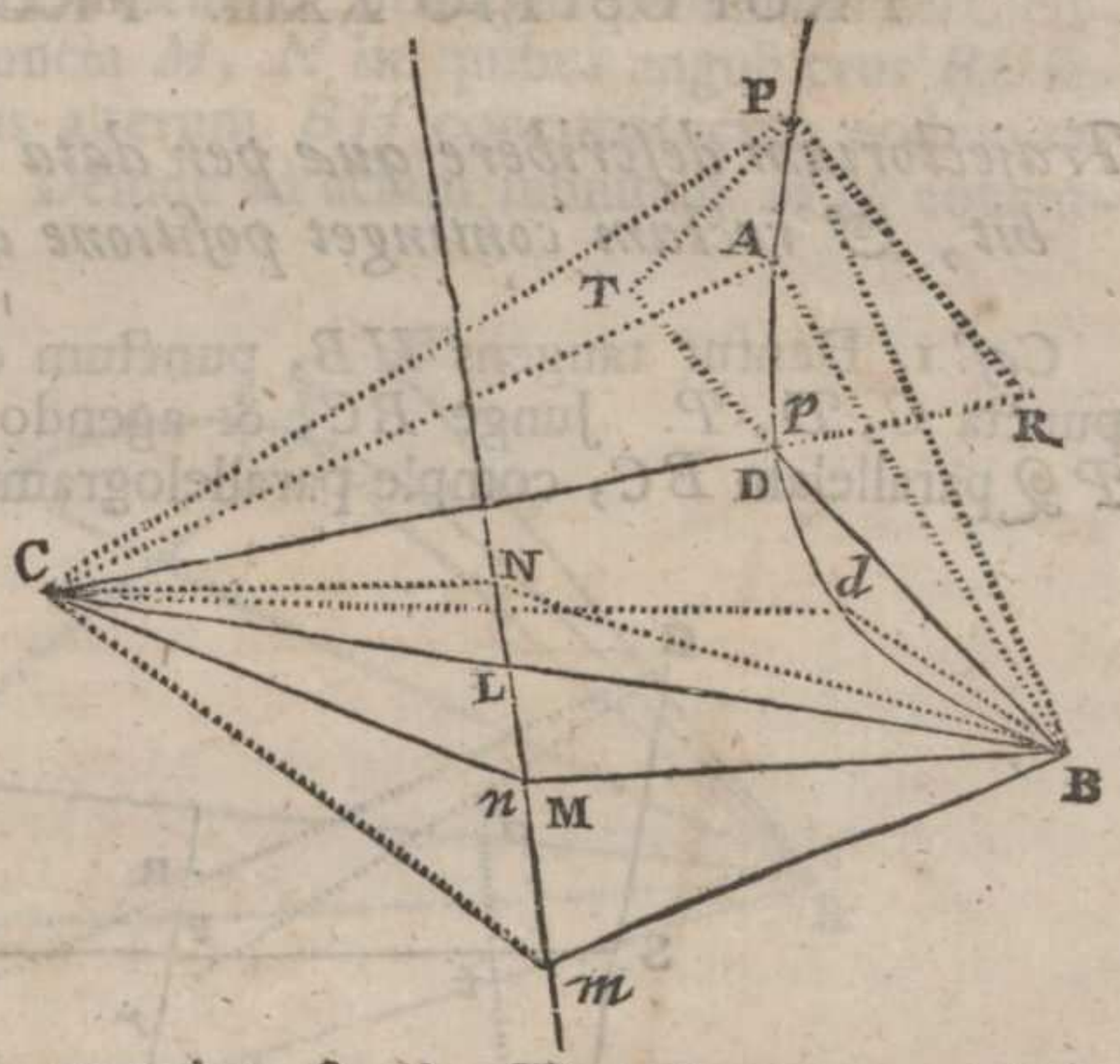


hisque paralle'as *TPS, PRQ* per punctum quartum *P*. Deinde a polis duobus *B, C* age per punctum quintum *D* infinitas duas *BDT, CRD,* noviſſime ductis *TPS, PRQ* (priorem priori & poſteriorem poſteriori) occurrentes in *T* & *R*. Denique de rectis *PT, PR,* acta recta *tr* ipſi *TR* parallela, abſcinde quasvis *Pt, Pr* ipſis *PT, PR* proportionales; & ſi per earum terminos *t, r* & polos *B, C* actæ *Bt, Cr* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in Trajectoria quæſita. Nam punctum illud *d* (per Lemma XX.) verſatur in Conica Sectione per puncta quatuor *A, B, C, P* transeunte; &, lineis *Rr, Tt* evaneſcentibus, coit punctum *d* cum puncto *D*. Tranſit ergo ſectio Conica per puncta quinque *A, B, C, P, D.* *Q. E. D.*

Idem

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis *A*, *B*, *C*; &, circum duo eorum *B*, *C* ceu polos, rotando angulos magnitudine datos *ABC*, *ACB*, applicentur crura *BA*, *CA* primo ad punctum *D*, deinde ad punctum *P*, & notentur puncta *M*, *N* in quibus altera crura *BL*, *CL* casu utroque se decussant. Agatur recta infinita *MN*, & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos *B*, *C*, ea lege ut crurum *BL*, *CL* vel *BM*, *CM* intersectio quæ jam sit *m*, incidat semper in rectam illam infinitam *MN* & crurum *BA*, *CA*, vel *BD*, *CD* intersectio, quæ jam sit *d*, Trajectoriam quæsitam *PADdB* delineabit. Nam punctum *d*, per Lem. XXI, continget sectionem Conicam per puncta *B*, *C* transeuntem; & ubi punctum *m* accedit ad puncta *L*, *M*, *N*, punctum *d* (per constructionem) accedet ad puncta *A*, *D*, *P*. Describetur itaque sectio Conica transiens per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q.E.F.*



Corol. 1. Hinc recta expedite duci potest, quæ Trajectoriam quæsitam, in puncto quovis dato *B*, continget. Accedat punctum *d* ad punctum *B*, & recta *Bd* evadet tangens quæsita.

Corol. 2. Unde etiam Trajectoriarum Centra, Diametri & Latera recta inveniri possunt, ut in Corollario secundo Lemmatis XIX.

Scholium.

Constructio prior evadet paulo simplicior jungendo *BP*, & in ea, si opus est, producta capiendo *Bp* ad *BP* ut est *PR* ad *PT*; & per *p* agendo rectam infinitam *p*d ipsi *SPT* parallelam, inque ea capiendo semper *p*d æqualem *Pr*; & agendo rectas *B*d, *Cr* concurrentes in *d*. Nam cum sint *Pr* ad *Pt*, *PR* ad *PT*, *pB* ad *PB*, *p*d ad *Pt* in eadem ratione; erunt *p*d & *Pr* semper æqua-

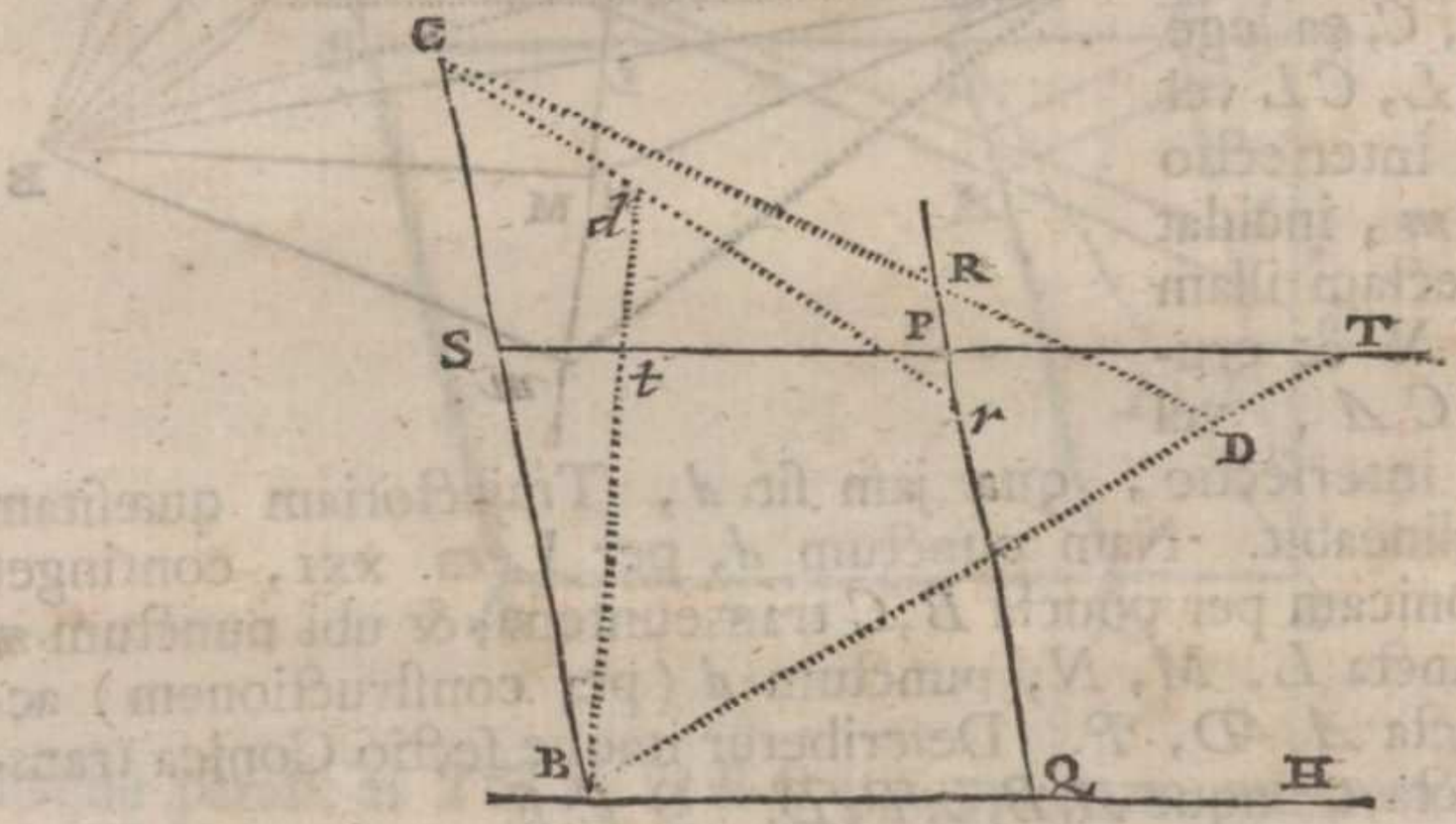
 les.

les. Hac methodo puncta Trajectoriæ inveniuntur expeditissime, nisi mavis Curvam, ut in constructione secunda, describere Mechanice.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

Trajectoriam describere quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.

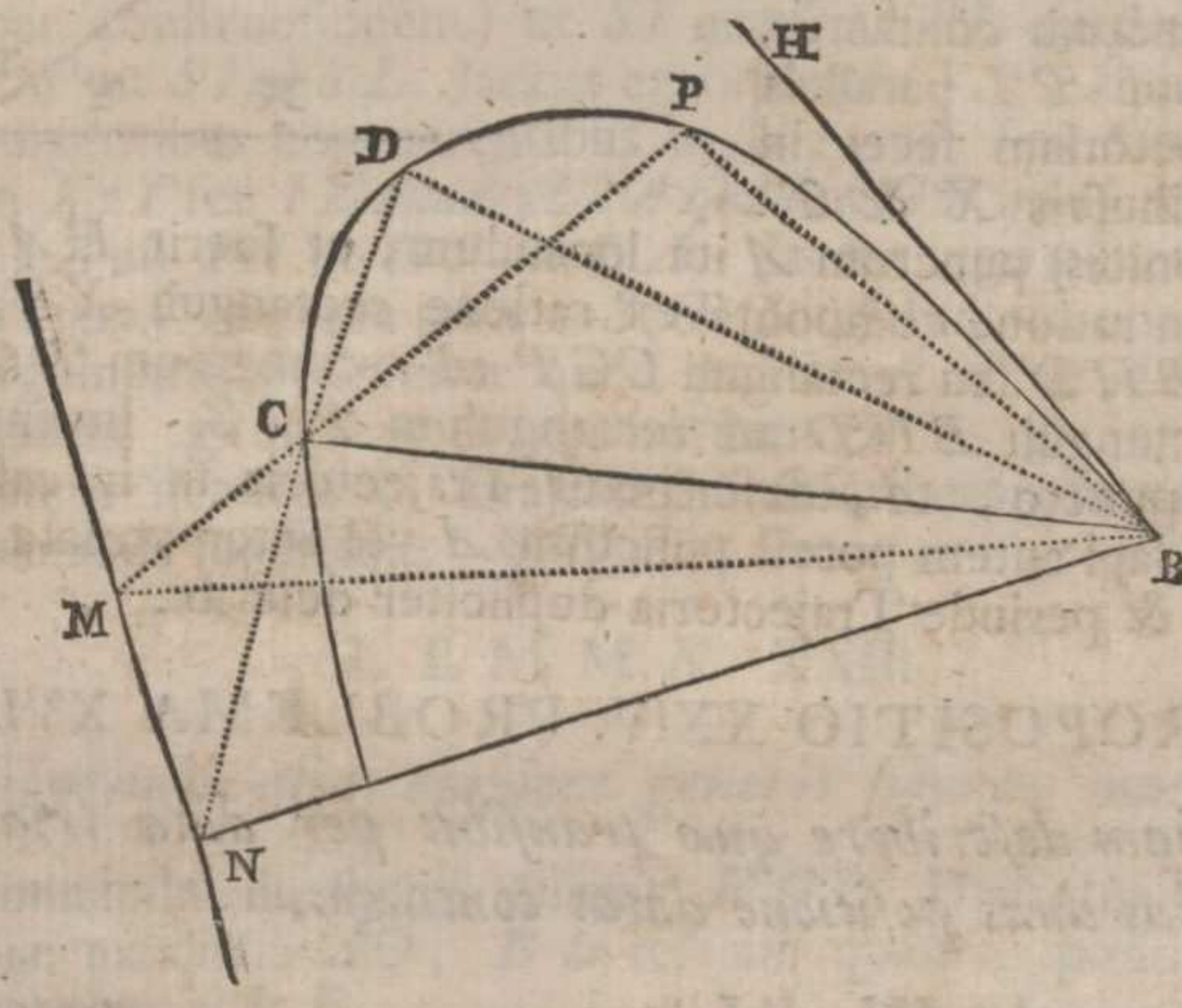
Cas. 1. Dentur tangens HB, punctum contactus B, & alia tria puncta C, D, P. Junge BC, & agendo PS parallelam BH, & PQ parallelam BC, comple parallelogrammum $BSPQ$.



Age BD secantem SP in T, & CD secantem PQ in R. Denique, agendo quamvis tr ipsi TR parallelam, de PQ, PS abscinde Pr, Pt ipsis PR, PT proportionales respective; & actarum Cr, Bt concursus d (per Lem. xx.) incidet semper in Trajectoriam describendam.

Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus CBH circa polum B, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus DC circa polum C. Notentur puncta M, N in quibus anguli crus BC secat radium illum ubi crus alterum BH concurrit cum eodem radio in punctis P & D. Deinde ad actam infinitam MN concur-



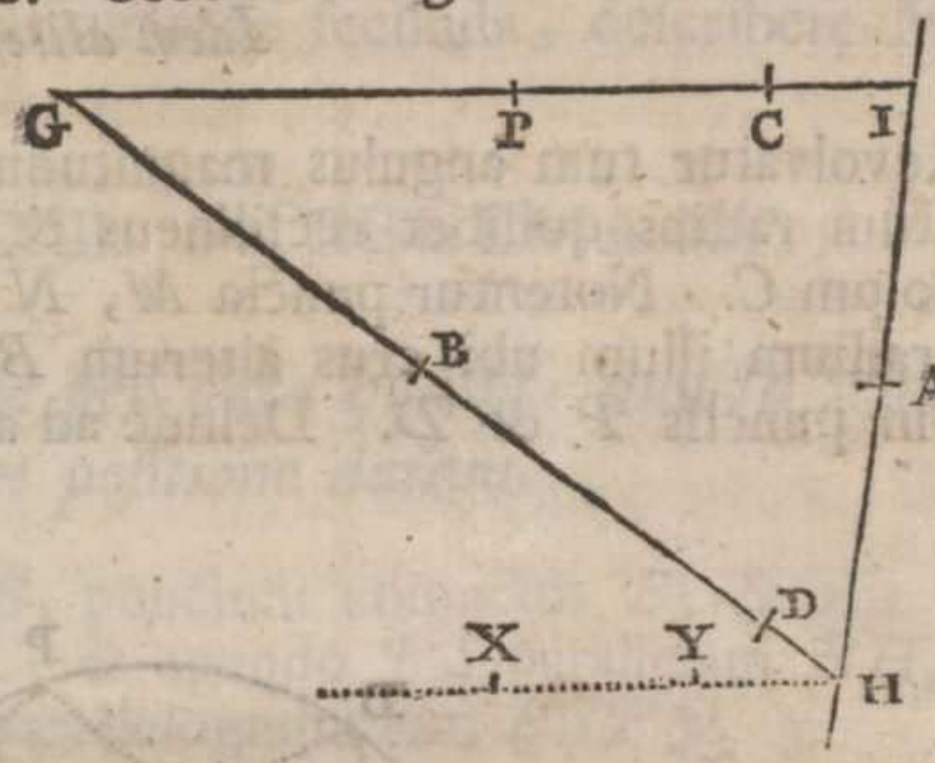
rant perpetuo radius ille CP vel CD & anguli crus BC, & cruris alterius BH concursus cum radio delineabit Trajectoriam quæsitam.

Nam si in constructionibus Problematis superioris accedat punctum A ad punctum B, lineæ CA & CB coincident, & linea AB in ultimo suo situ fiet tangens BH, atque adeo constructiones ibi positæ evadent eædem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris BH concursus cum radio sectionem Conicam per puncta C, D, P transeuntem, & rectam BH tangentem in punctо B. *Q. E. F.*

Cas. 2. Dentur puncta quatuor B, C, D, P extra tangentem HI sita. Junge bina lineis BD, CP concurrentibus in G, tangen-

De Motu Corporum

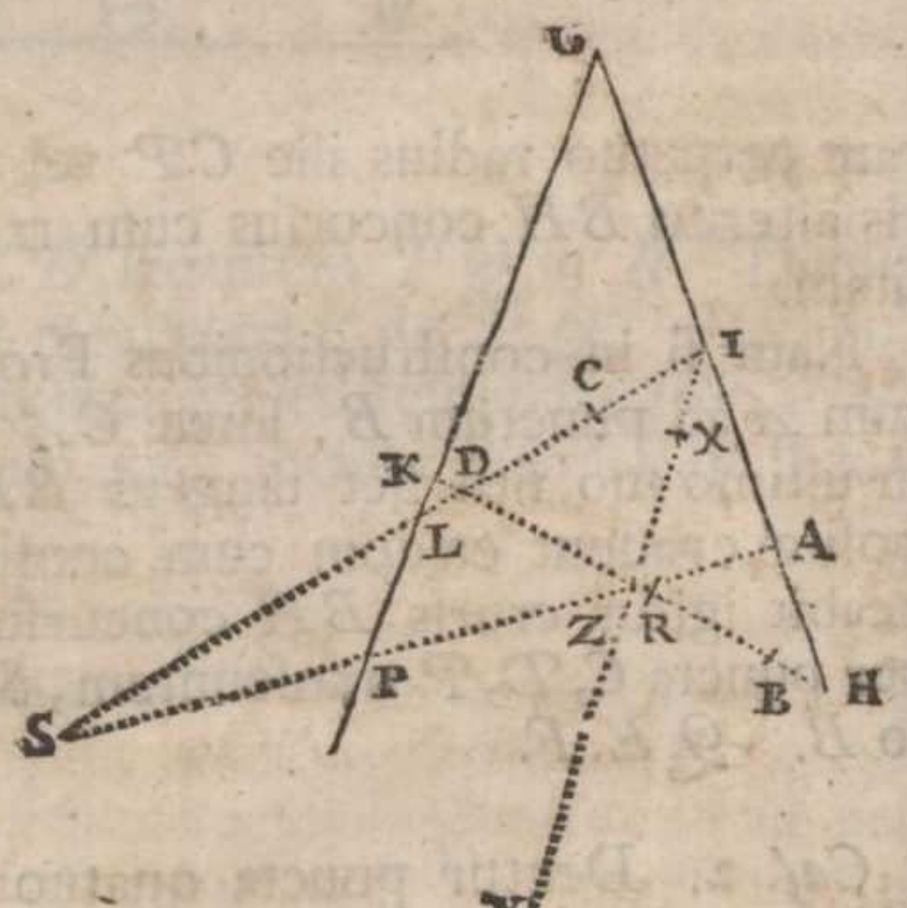
tique occurrentibus in H & I. Secetur tangens in A, ita ut sit HA ad AI, ut est rectangulum sub media proportionali inter CG & CP & media proportionali inter BH & HD, ad rectangulum sub media proportionali inter DG & GB & media proportionali inter PI & IC; & erit A punctum contactus. Nam si rectæ PI parallela HX Trajectoriam secet in punctis quibusvis X & Y: erit (ex Conicis) punctum A ita locandum, ut fuerit HA *quad.* ad AI *quad.* in ratione composita ex ratione rectanguli XHY ad rectangulum BHD seu rectanguli CGP ad rectangulum DGB & ex ratione rectanguli BHD ad rectangulum PIC. Invento autem contactus puncto, A, describetur Trajectoria ut in casu primo. *Q.E.F.* Capi autem potest punctum A vel inter puncta H & I, vel extra; & perinde Trajectoria dupliciter describi.



PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

Trajectoriam describere quæ transibit per data tria puncta & rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes HI, KL & puncta B, C, D. Per punctorum duo quævis B, D age rectam infinitam BD tangentibus occurrentem in punctis H, K. Deinde etiam per alia duo quævis C, D age infinitam CD tangentibus occurrentem in punctis I, L. Actas ita seca in R & S, ut sit HR ad KR ut est media proportionalis inter BH & HD ad mediam proportionalem inter BK & KD; & IS ad LS ut est media proportionalis inter CI & ID ad mediam proportionalem inter CL



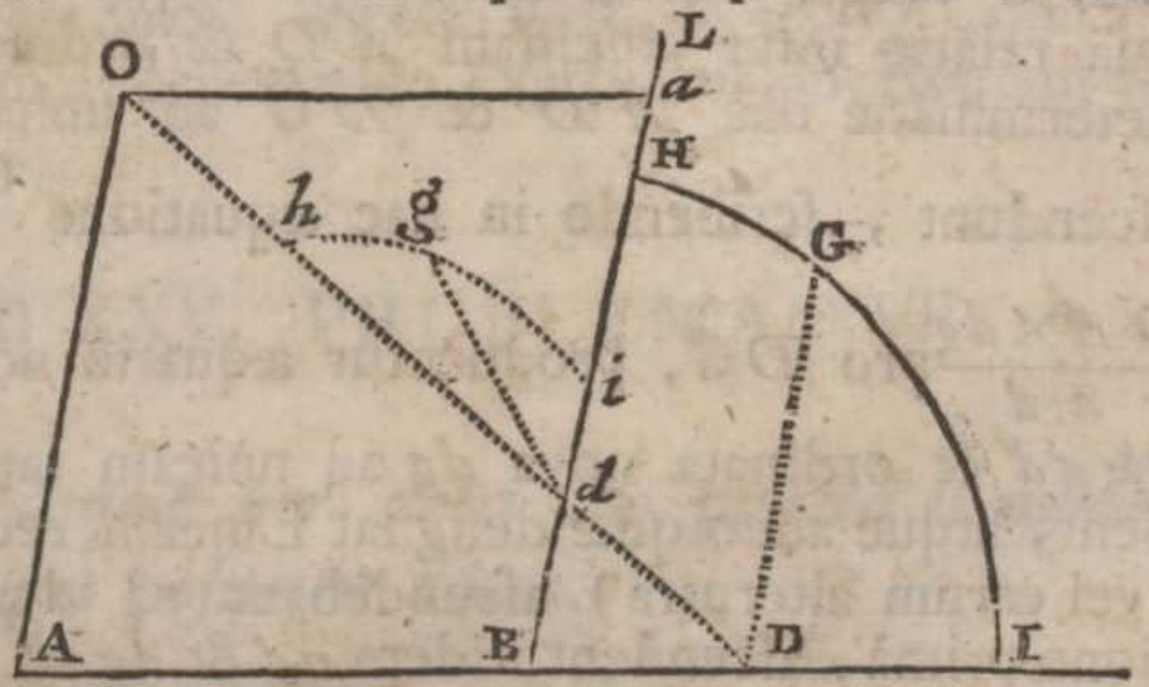
&

& *LD*. Seca autem pro lubitu vel inter puncta *K* & *H*, *I* & *L*, vel extra eadem: dein age *RS* secantem tangentes in *A* & *P*, & erunt *A* & *P* puncta contactuum. Nam si *A* & *P* supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; & per punctorum *H*, *I*, *K*, *L* quodvis *I*, in tangente alterutra *HI* situm, agatur recta *IY* tangenti alteri *KL* parallela, quæ occurrat curvæ in *X* & *Y*, & in ea sumatur *IZ* media proportionalis inter *IX* & *IY*: erit ex Conicis, rectangulum *XIY* seu *IZ quad.* ad *LP quad.* ut rectangulum *CID* ad rectangulum *CLD*, id est (per constructionem) ut *SI quad.* ad *SL quad.* atque adeo *IZ* ad *LP* ut *SI* ad *SL*. Jacent ergo puncta *S*, *P*, *Z* in una recta. Porro tangentibus concurrentibus in *G*, erit (ex Conicis) rectangulum *XIY* seu *IZ quad.* ad *IA quad.* ut *GP quad.* ad *GA quad.*: adeoque *IZ* ad *IA* ut *GP* ad *GA*. Jacent ergo puncta *P*, *Z* & *A* in una recta, adeoque puncta *S*, *P* & *A* sunt in una recta. Et eodem argumento probabitur quod puncta *R*, *P* & *A* sunt in una recta. Jacent igitur puncta contactuum *A* & *P* in recta *RS*. Hisce autem inventis, Trajectoria describetur ut in casu primo Problematis superioris. *Q.E.F.* LIBER PRIMUS.

LEMMA XXII.

Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.

Transmutanda sit figura quævis *HGI*. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ *AO*, *BL* tertiam quamvis positione datam *AB* secantes in *A* & *B*, & a figuræ puncto quovis *G*, ad rectam *AB* ducatur quævis *GD*, ipsi *OA* parallela. Deinde a puncto aliquo *O*, in linea *OA* dato, ad punctum *D* ducatur recta *OD*, ipsi *BL* occurrens in *d*, & a puncto occursus erigatur recta *dg* datum quemvis angulum cum recta *BL* continens, atque eam habens rationem ad *Od* quam habet *DG* ad *OD*; & erit *g* punctum in figura nova *hgi* puncto *G* respondens. Eadem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ.

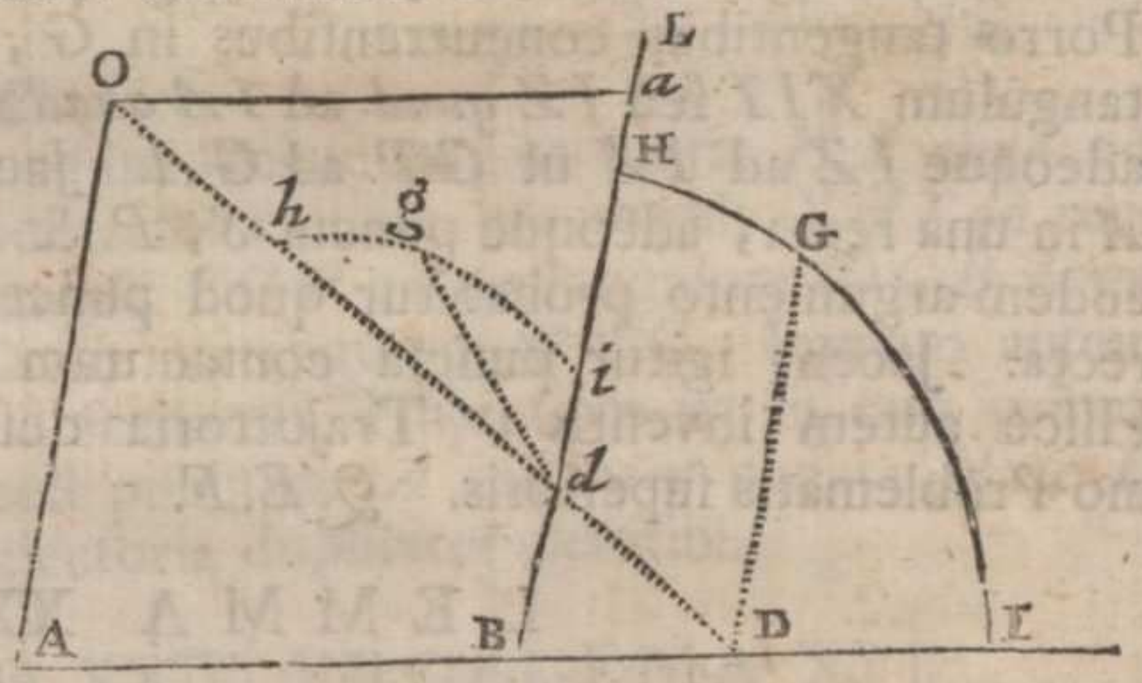


Concipe

De Motu Corporum

Concipe igitur punctum *G* motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum *g* motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem deſcribet. Diſtinctionis gratia nominemus $\mathcal{D}G$ ordinatam primam, *dg* ordinatam novam; $A\mathcal{D}$ abſciſſam primam, *ad* abſciſſam novam; *O* polum, $O\mathcal{D}$ radium abſcindentem, *OA* radium ordinatum primum, & *Oa* (quo parallelogrammum *OABa* completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quod, ſi punctum *G* tangit rectam Lineam poſitione datam, punctum *g* tanget etiam Lineam rectam poſitione datam. Si punctum *G* tangit Conicam ſectionem, punctum *g* tanget etiam Conicam ſectionem. Conicis ſectionibus hic Circulum annumero. Porro ſi punctum *G* tangit Lineam tertii ordinis Analytici, punctum *g* tanget Lineam tertii itidem ordinis; & ſic de curvis lineis ſuperiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejuſdem ſemper ordinis Analytici quas puncta *G*, *g* tangunt. Etenim ut eſt *ad* ad *OA* ita ſunt *Od* ad $O\mathcal{D}$, *dg* ad $\mathcal{D}G$, & *AB* ad $A\mathcal{D}$; ideoque $A\mathcal{D}$ æqualis eſt $\frac{OA \times AB}{ad}$, & $\mathcal{D}G$ æqualis eſt $\frac{OA \times dg.}{ad}$ Jam ſi punctum *G* tangit rectam Lineam, atque adeo in æquatione quavis, qua relatio inter abſciſſam $A\mathcal{D}$ & ordinatam $\mathcal{D}G$ habetur, indeterminatæ illæ $A\mathcal{D}$ & $\mathcal{D}G$ ad unicam tantum dimenſionem aſcendunt, ſcribendo in hac æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro $A\mathcal{D}$, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro $\mathcal{D}G$, producetur æquatio nova, in qua abſciſſa nova *ad* & ordinata nova *dg* ad unicam tantum dimenſionem aſcendent, atque adeo quæ deſignat Lineam rectam. Sin $A\mathcal{D}$ & $\mathcal{D}G$ (vel earum alterutra) aſcendebant ad duas dimenſiones in æquatione prima, aſcendent itidem *ad* & *dg* ad duas in æquatione ſecunda. Et ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus. Indeterminatæ *ab*, *dg* in æquatione ſecunda & $A\mathcal{D}$, $\mathcal{D}G$ in prima aſcendent ſemper ad eundem dimenſionum numerum & propterea Lineæ, quas puncta *G*, *g* tangunt, ſunt ejuſdem ordinis Analytici.



Dico

Dico præterea quod ſi recta aliqua tangat lineam curvam in figura prima, hæc recta eodem modo cum curva in figuram novam tranſlata tanget lineam illam curvam in figura nova: & contra. Nam ſi Curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem tranſlata accedent ad invicem & coibunt in figura nova, atque adeo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, ſimul evadent curvarum tangentes in figura utraque. Componi poſſent harum aſſertionum Demonſtrationes more magis Geometrico. Sed brevitati conſulo.

Igitur ſi figura rectilinea in aliam tranſmutanda eſt, ſufficit rectarum a quibus conflatur interſectiones transferre, & per eaſdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam tranſmutare oportet, transferenda ſunt puncta, tangentes & aliæ rectæ quarum ope curva linea definitur. Inſervit autem hoc Lemma ſolutioni difficiliorum Problematum, tranſmutando figuras propoſitas in ſimpliciores. Nam rectæ quævis convergentes tranſmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo, lineam quamvis rectam quæ per concurſum convergentium tranſit: id adeo quia concurſus ille hoc pacto abit in infinitum, lineæ autem parallelæ ſunt quæ ad punctum infinite diſtans tendunt. Poſtquam autem Problema ſolvitur in figura nova, ſi per inverſas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur ſolutio quæſita.

Utile eſt etiam hoc Lemma in ſolutione Solidorum Problematum. Nam quoties duæ ſectiones Conicæ obvenerint, quarum interſectione Problema ſolvi poteſt, transmutare licet earum alterutram, ſi Hyperbola ſit vel Parabola, in Ellipſin: deinde Ellipſis facile mutatur in Circulum. Recta item & ſectio Conica, in conſtructione Planorum Problematum, vertuntur in Rectam & Circulum.

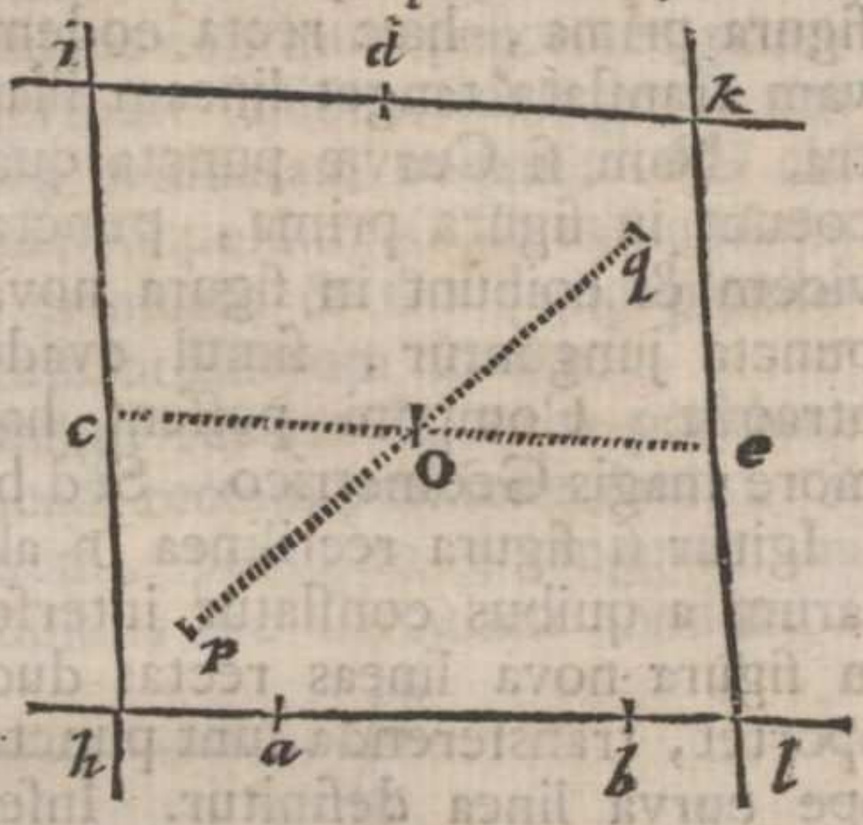
PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

Trajectoriam deſcribere quæ per data duo puncta tranſibit & rectas tres continget poſitione datas.

Per concurſum tangentium quarumvis duarum cum ſe invicem, & concurſum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data tranſit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per Lemma ſuperius, in figuram novam. In

De Motu Corporum.

hac figura tangentes illæ duæ evadent ſibi invicem parallelæ, & tangens tertia fiet parallela recta per puncta duo data tranſeunti. Sunto *h i*, *k l* tangentes illæ duæ parallelæ, *i k* tangens tertia, & *h l* recta huic parallela tranſiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ Conica ſectio in hac figura nova tranſire debet; & parallelogrammum *h i k l* complens. Secentur rectæ *h i*, *i k*, *k l* in *c*, *d*, *e*, ita ut ſit *h c* ad latus quadratum rectanguli *a h b*, *i c* ad *i d*, & *k e* ad *k d* ut eſt ſumma rectarum *h i* & *k l* ad ſummam trium linearum quarum prima eſt recta *i k*, & alteræ duæ ſunt latera quadrata rectangulorum *a h b* & *a l b*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuum. Etenim, ex Conicis, ſunt *h c* quadratum ad rectangulum *a h b*, & *i c* quadratum ad *i d* quadratum, & *k e* quadratum ad *k d* quadratum, & *e l* quadratum ad rectangulum *a l b* in eadem ratione; & propterea *h c* ad latus quadratum ipſius *a h b*, *i c* ad *i d*, *k e* ad *k d*, & *e l* ad latus quadratum ipſius *a l b* ſunt in ſubduplicata illa ratione, & compoſite, in data ratione omnium antecedentium *h i* & *k l* ad omnes conſequentes, quæ ſunt latus quadratum rectanguli *a h b* & recta *i k* & latus quadratum rectanguli *a l b*. Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactuum *c*, *d*, *e*, in figura nova. Per inverſas operationes Lemmatis noviſſimi transferantur hæc puncta in figuram primam & ibi, per Probl. XIV., deſcribetur Trajectoria. *Q. E. F.* Ceterum perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, Problema impoſſibile eſt.



PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

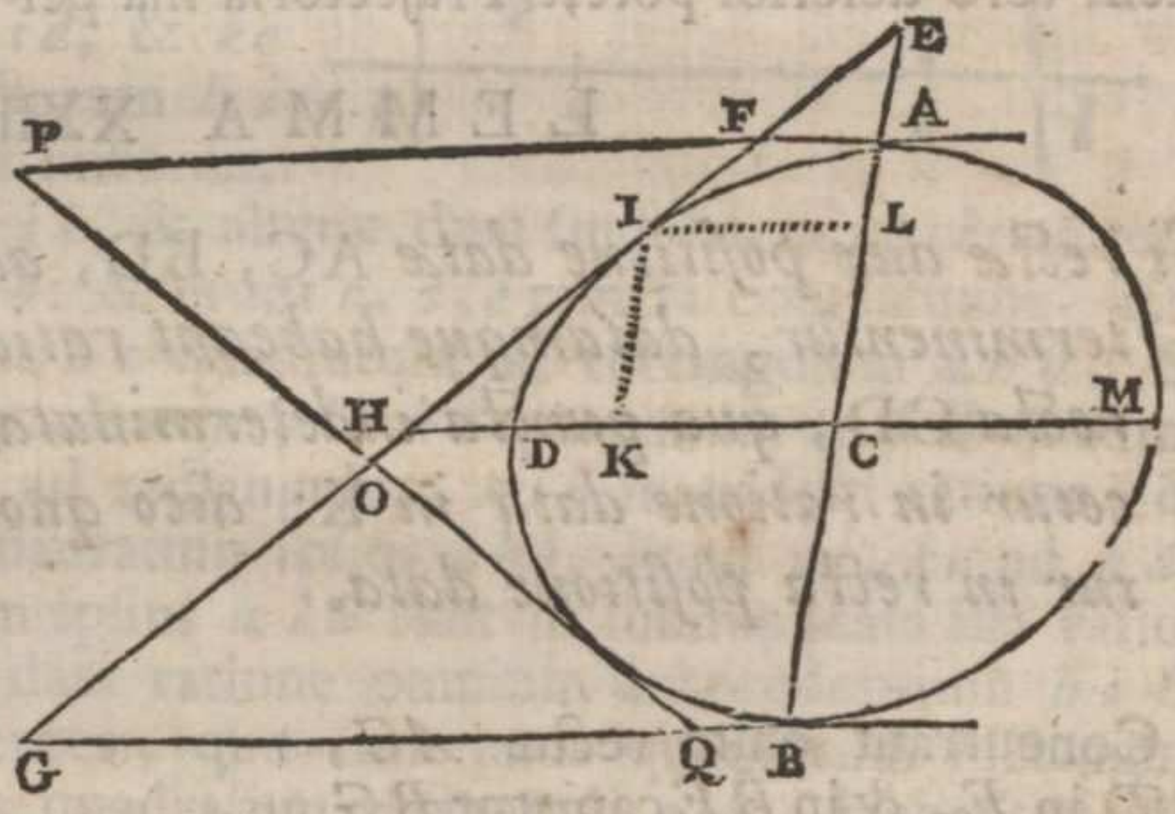
Trajectoriam deſcribere quæ tranſibit per punctum datum & rectas quatuor poſitione datas continget.

Ab interſectione communi duarum quarumlibet tangentium ad interſectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita,

De Motu Corporum.

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque Coniſectionem, quarum duæ parallelæ ſint ac dentur poſitione; dico quod Sectionis ſemidiameter hiſce duabus parallela, ſit media proportionalis inter harum ſegmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.



Sunto AF, GB parallelæ duæ Coniſectionem $A\mathcal{D}B$ tangentes in A & B; EF recta tertia Coniſectionem tangens in I, & occurrens prioribus tangentibus in F & G; ſitque $C\mathcal{D}$ ſemidiameter Figuræ tangentibus parallela: Dico quod AF, $C\mathcal{D}$, BG ſunt continue proportionales.

Nam ſi diametri conjugatæ AB, $\mathcal{D}M$ tangenti FG occurrant in E & H, ſeque mutuo ſecent in C, & compleatur parallelogrammum $IKCL$; erit, ex natura Sectionum Conicarum, ut EC ad CA ita CA ad CL, & ita diviſim $EC - CA$ ad $CA - CL$, ſeu EA ad AL, & compoſite EA ae $EA + AL$ ſeu EL ut EC ad $EC + CA$ ſeu EB; adeoque (ob ſimilitudinem triangulorum EAF, ELI, ECH, EBG) AF ad LI ut CH ad BG. Eſt itidem, ex natura Sectionum Conicarum, LI (ſeu CK) ad $C\mathcal{D}$ ut $C\mathcal{D}$ ad CH; atque, adeo ex æquo perturbate, AF ad $C\mathcal{D}$ ut $C\mathcal{D}$ ad BG. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc ſi tangentes duæ FG, $P\mathcal{Q}$ tangentibus parallelis AF, BG occurrant in F & G, P & $\mathcal{Q}$, ſeque mutuo ſecent in O; erit (ex æquo perturbate) AF ad $B\mathcal{Q}$ ut AP ad BG, & diviſim ut FP ad $G\mathcal{Q}$, atque adeo ut FO ad OG.

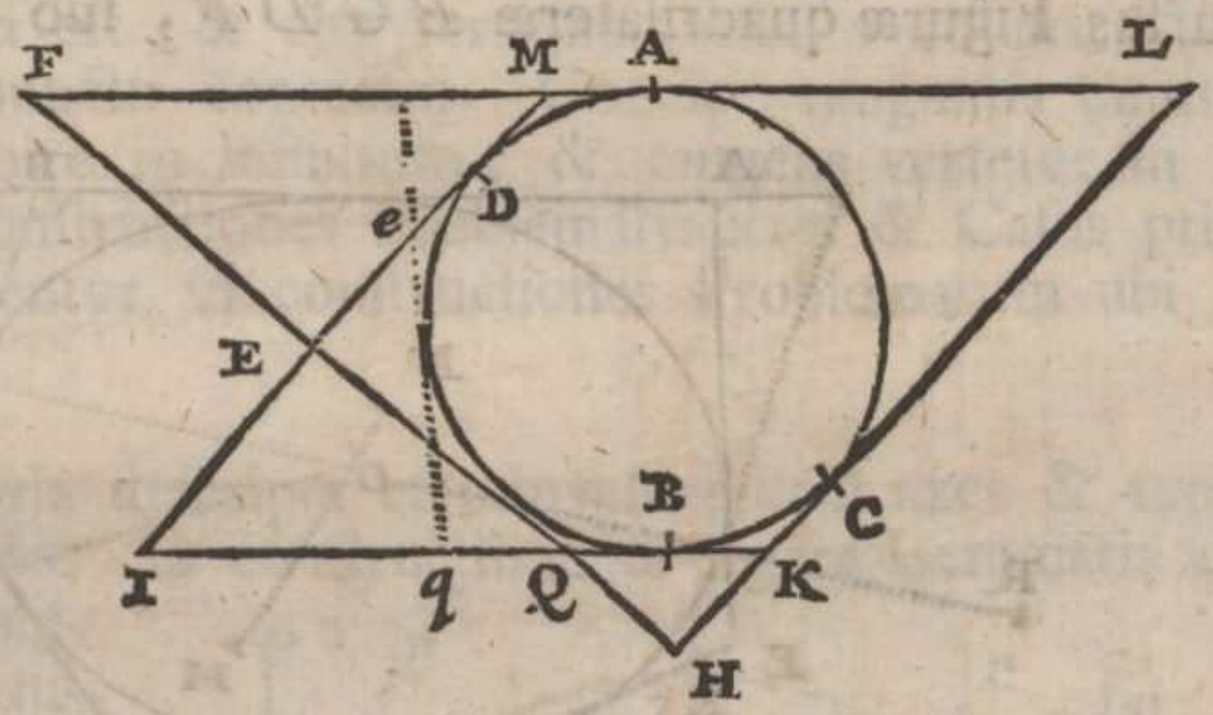
Corol. 2 Unde etiam rectæ duæ PG, $F\mathcal{Q}$ per puncta P & G, F & $\mathcal{Q}$ ductæ, concurrent ad rectam ACB per centrum Figuræ & puncta contactuum A, B tranſeuntem.

LEM-

LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant Sectionem quamcunque Conicam, & abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa alterutra sit ad latus illud a quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium, est ad abscissarum alteram.

Tangant parallelogrammi $MLIK$ latera quatuor ML, IK, KL, MI sectionem Conicam in A, B, C, D & secet tangens quinta FQ hæc latera in F, Q, H & E; sumantur autem laterum MI, KI abscissæ ME, KQ, vel laterum KL, ML abscissæ KH, MF: dico quod sit ME ad MI ut BK ad KQ & KH ad KL ut AM ad MF. Nam per Corollarium secundum



Lemmatis superioris, est ME ad EI ut (AM seu) BK ad BQ, & componendo ME ad MI ut BK ad KQ. Q.E.D. Item KH ad HL ut (BK seu) AM ad AF, & dividendo KH ad KL ut AM ad MF. Q.E.D.

Corol. 1. Hinc si datur parallelogrammum $IKLM$, circa datam Sectionem Conicam descriptum, dabitur rectangulum $KQ \times ME$, ut & huic æquale rectangulum $KH \times MF$.

Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens eq tangentibus KI, MI occurrens in q & e; rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque KQ ad Me ut Kq ad ME, & divisim ut Qq ad Ee.

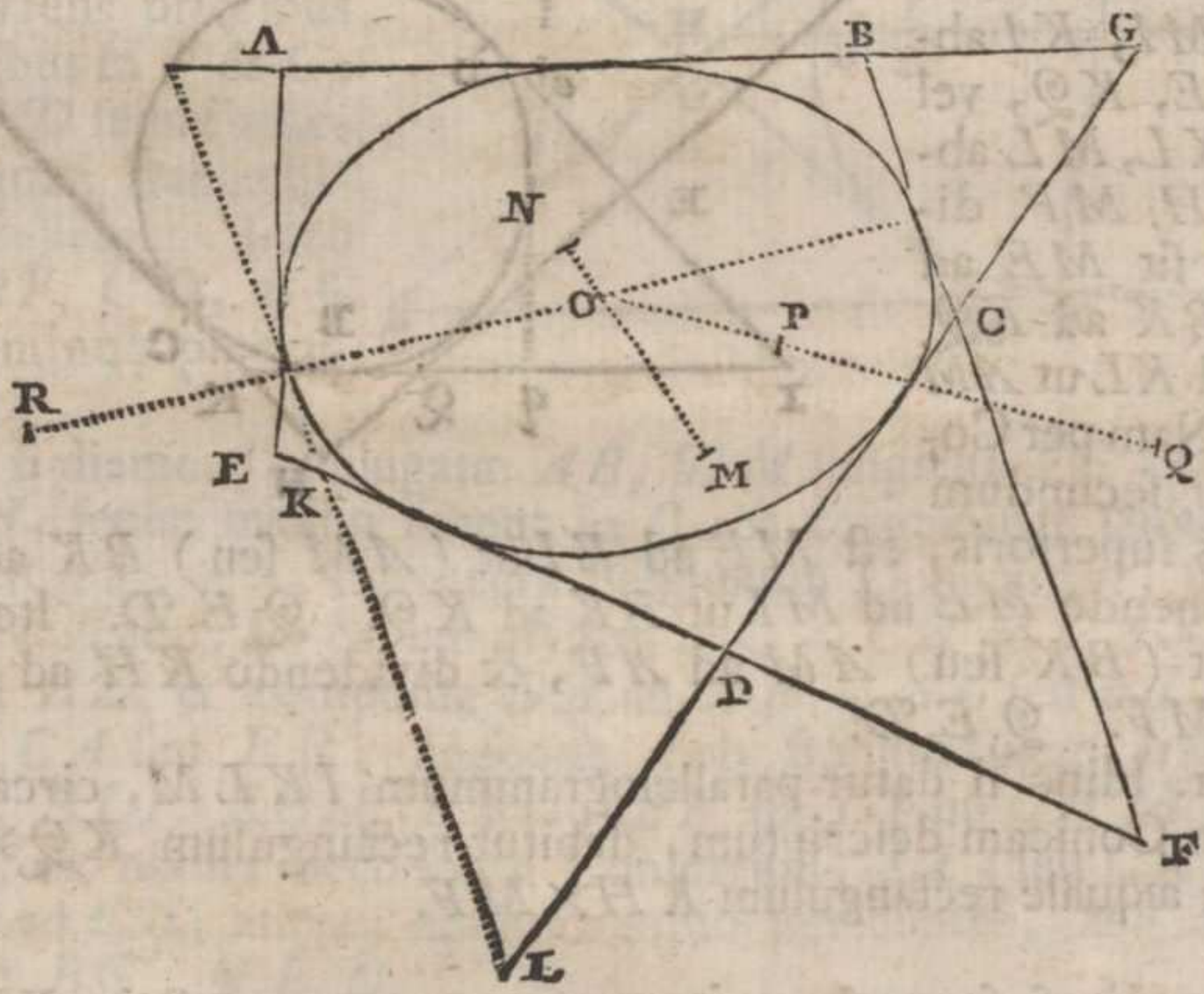
Corol. 3. Unde etiam si Eq, eQ jungantur & bisecentur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ. Nam cum sit Qq ad Ee ut KQ ad Me, transibit eadem

dem recta per medium omnium Eq, eQ, MK; (per Lem. XXIII) & medium rectæ MK est centrum Sectionis.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam describere quæ rectas quinque positione datas continget.

Dentur positione tangentes ABG, BCF, GCD, FDE, EA. Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ $ABFE$ diagonales AF, BE biseca in M & N, & (per Corol. 3. Lem. XXV) recta MN per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajectoriæ. Rursus Figuræ quadrilateræ $BGDF$, sub aliis quibusvis quatuor



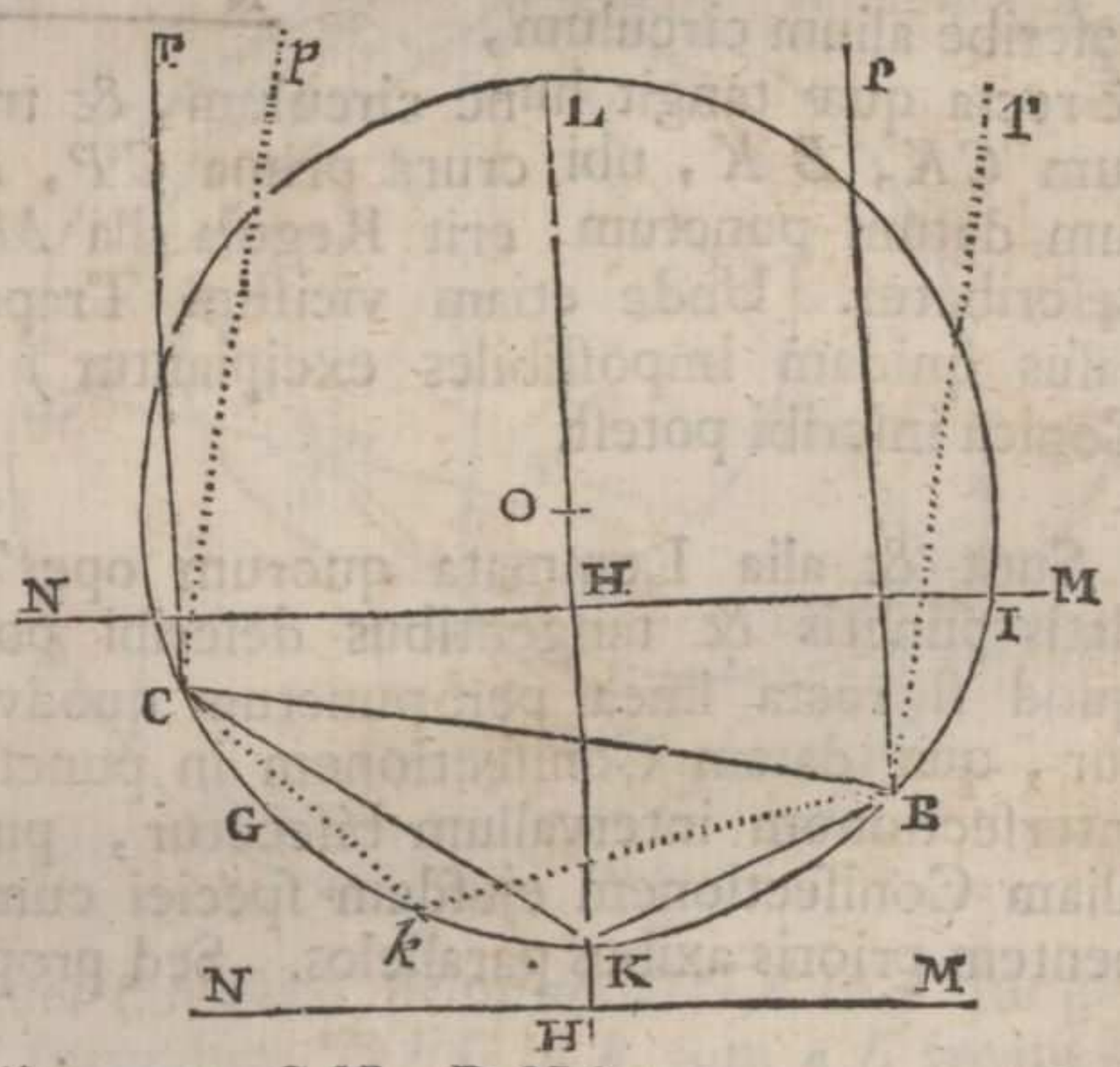
tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) BD, GF biseca in P & Q: & recta PQ per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concursu bisecantium. Sit illud O. Tangenti cuivis BC parallelam age KL, ad eam distantiam ut centrum O in medio inter parallelas locetur, & acta KL tanget Trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes

gentes alias quaſvis duas GCD, FDE in L & K. Per harum tangentium non parallelarum CL, FK cum parallelis CF, KL concurſus C & K, F & L age CK, FL concurrentes in R, & recta OR ducta & producta ſecabit tangentes parallelas CF, KL in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per Probl. XIV. Trajectoriam deſcribere. *Q. E. F.* LIBER PRIMUS.

Scholium.

Problemata, ubi dantur Trajectoriarum vel centra vel Aſymptoti, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes a centro ex altera ejus parte æqualiter diſtantes. Aſymptotos autem pro tangente habenda eſt, & ejus terminus infinite diſtans (ſi ita loqui fas ſit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Aſymptoton, atque conſtructiones Problematis XIV. & Caſus primi Problematis XV. vertentur in conſtructiones Problematum ubi Aſymptoti dantur.

Poſtquam Trajectoria deſcripta eſt, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In conſtructione & figura Lemmatis XXI, fac ut angulorum mobilium PBN, PCN crura BP, CP, quorum concurſu Trajectoria deſcribebatur, ſint ſibi invicem parallela, eumque ſervantia ſitum revolvantur circa polos ſuos B, C in figura illa. Interea vero deſcribant altera angulorum illorum crura CN, BN, concurſu ſuo K vel k, Circulum $IBKGC$. Sit Circuli hujus centrum O. Ab hoc centro ad Regulam MN, ad quam altera illa crura CN, BN interea concurrebant

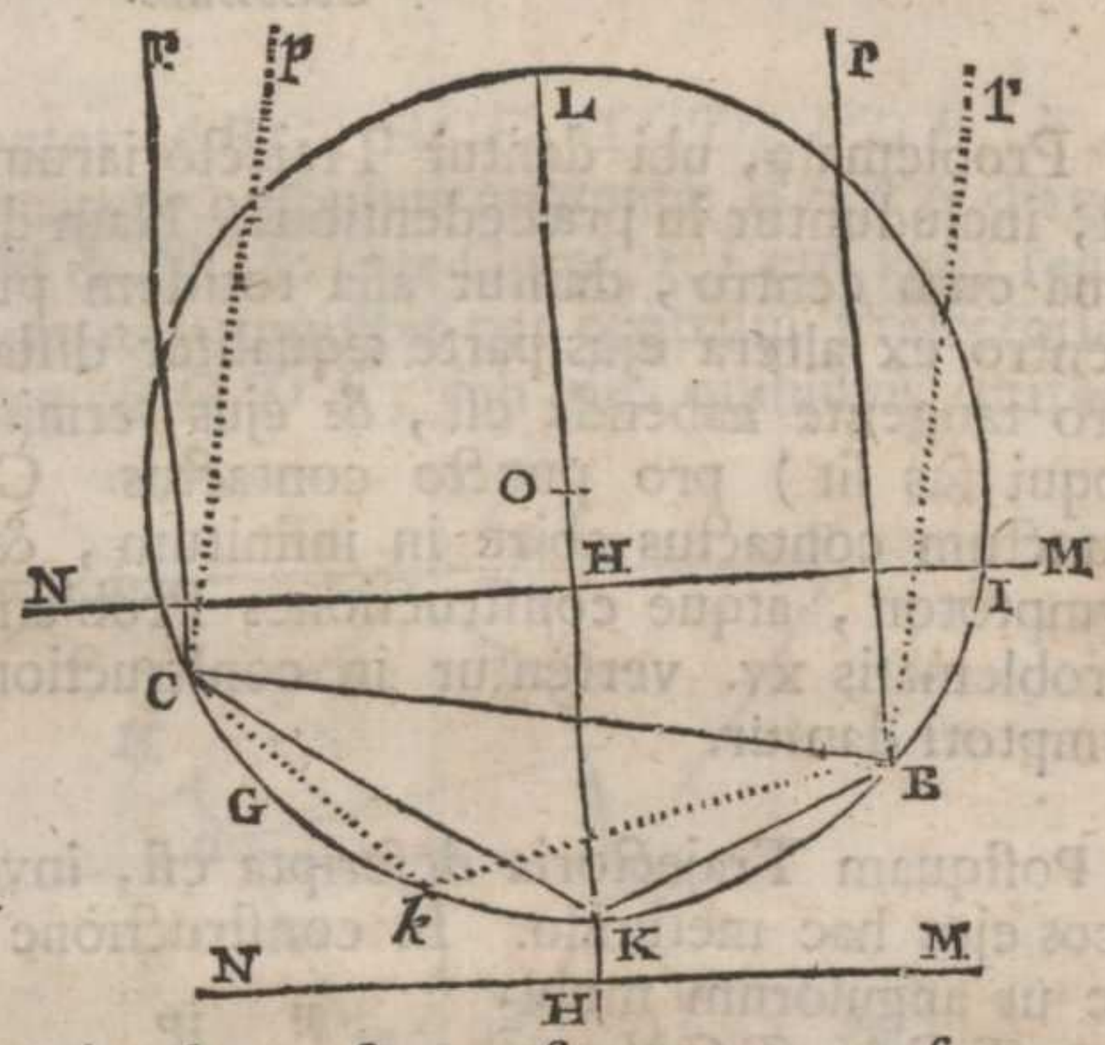


dum

De Motu Corporum

dum Trajectoria deſcribebatur, demitte normalem OH Circulo occurrentem in K & L. Et ubi crura illa altera CK, BK concurrunt ad punctum illud K quod Regulæ propius eſt, crura prima CP, BP parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet ſi crura eadem concurrunt ad punctum remotius L. Unde ſi detur Trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hiſce autem datis, umbilici ſunt in promptu.

Axium vero quadrata ſunt ad invicem ut KH ad LH, & inde facile eſt Trajectoriam ſpecie datam per data quatuor puncta deſcribere. Nam ſi duo ex punctis datis conſtituantur poli C, B, tertium dabit angulos mobiles PCK, PBK; his autem datis deſcribi poteſt Circulus $IBKGC$. Tum ob datam ſpecie Trajectoriam, dabitur ratio OH ad OK, adeoque ipſa OH. Centro O & intervallo OH deſcribe alium circulum,



& recta quæ tangit hunc circulum, & tranſit per concurſum crurum CK, BK, ubi crura prima CP, BP concurrunt ad quartum datum punctum, erit Regula illa MN cujus ope Trajectoria deſcribetur. Unde etiam viciſſim Trapezium ſpecie datum (ſi caſus quidam impoſſibiles excipiantur) in data quavis Sectione Conica inſcribi poteſt.

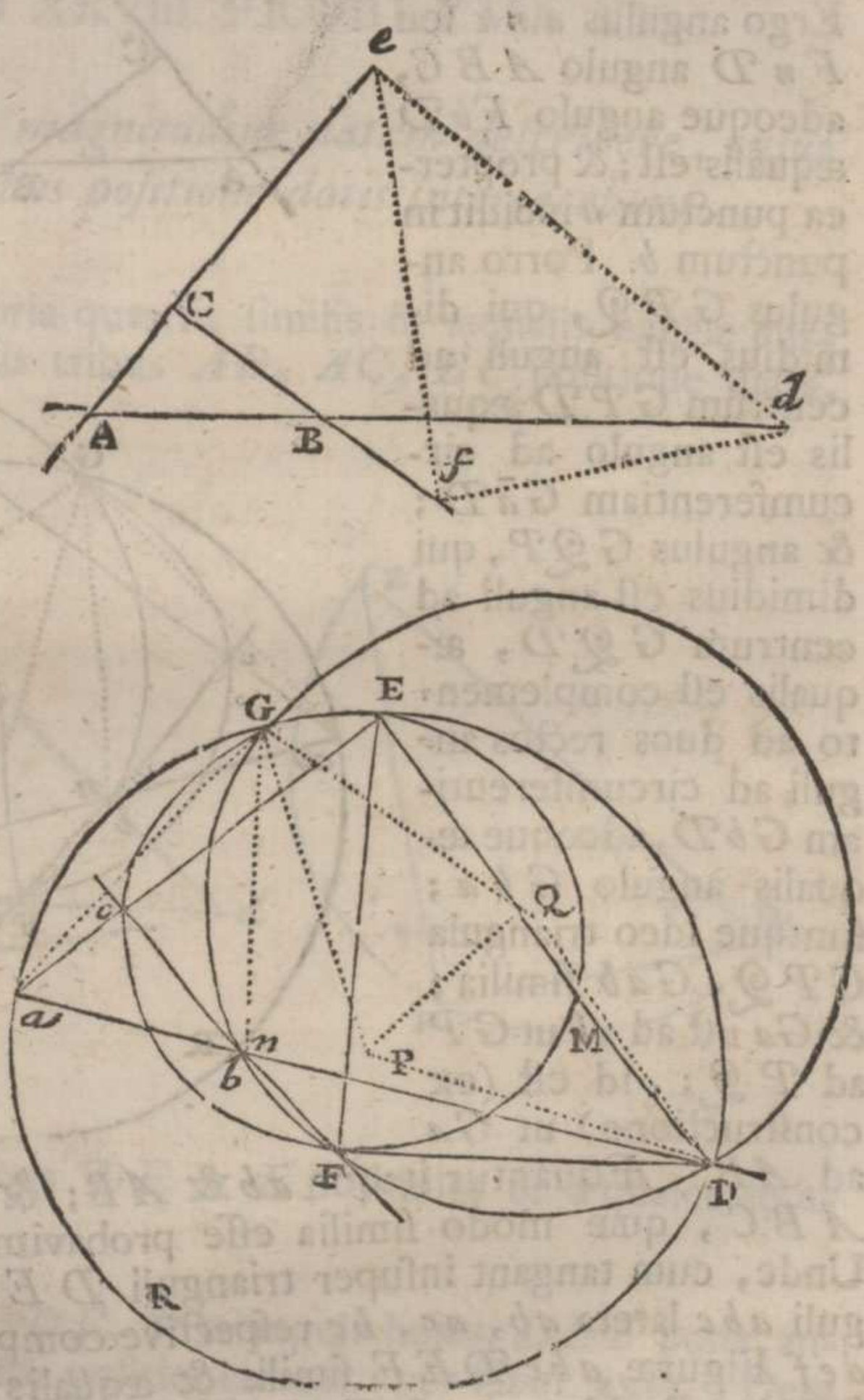
Sunt & alia Lemmata quorum ope Trajectoriæ ſpecie datæ, datis punctis & tangentibus deſcribi poſſunt. Ejus generis eſt, quod ſi recta linea per punctum quodvis poſitione datum ducatur, quæ datam Coniſectionem in punctis duobus interſecet, & interſectionum intervallum biſecetur, punctum biſectionis tanget aliam Coniſectionem ejuſdem ſpeciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

LEMMA

LEMMA XXVI.

Trianguli ſpecie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem poſitione datas, quæ non ſunt omnes parallelæ, ſingulos ad ſingulas ponere.

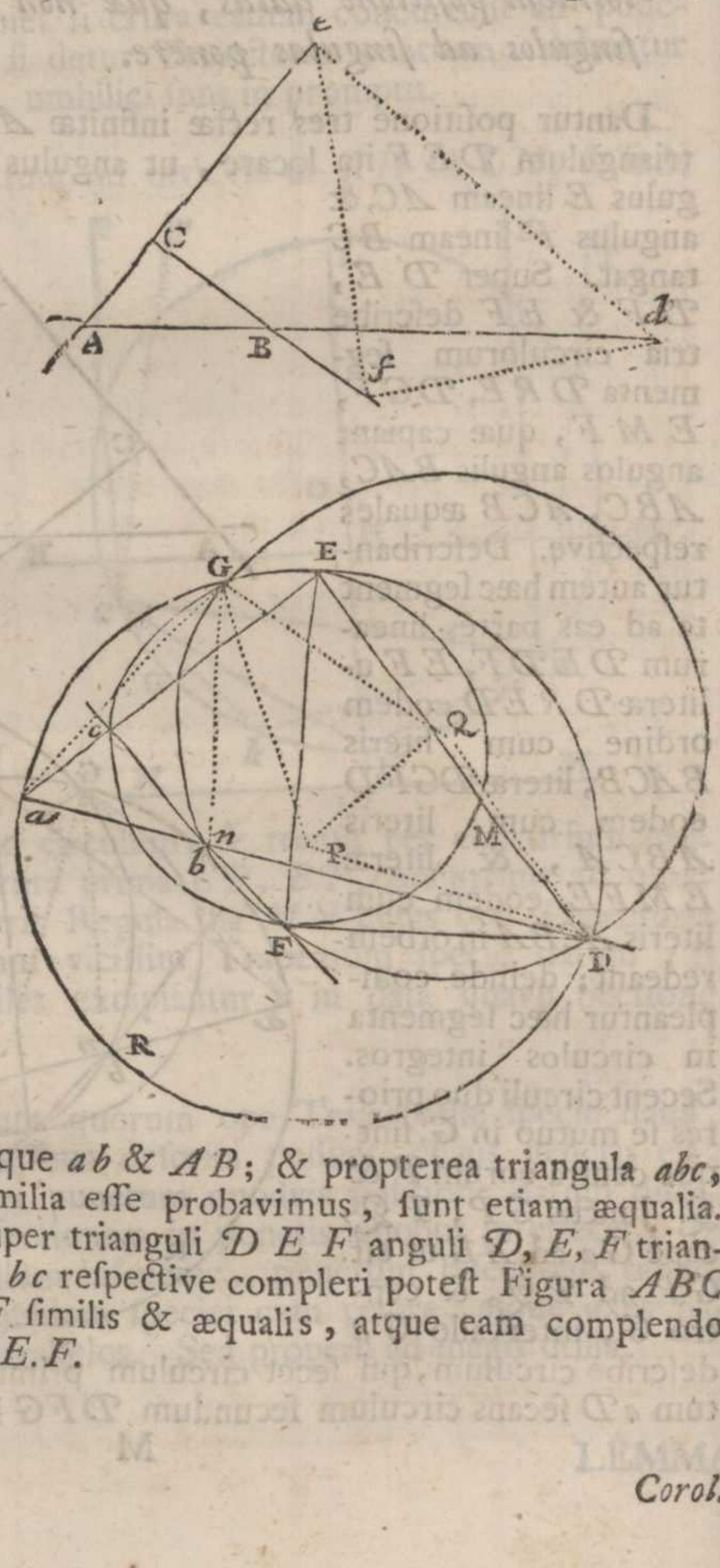
Dantur poſitione tres rectæ infinitæ AB, AC, BC, & oportet triangulum DEF ita locare, ut angulus ejus D lineam AB, angulus E lineam AC, & angulus F lineam BC tangat. Super DE, DF & EF deſcribe tria circulorum ſegmenta DRE, DGF, EMF, quæ capiant angulos angulis BAC, ABC, ACB æquales reſpective. Deſcribantur autem hæc ſegmenta ad eas partes linearum $DEDF$, EF uliteræ $DRED$ eodem ordine cum literis $BACB$, literæ $DGFD$ eodem cum literis $ABCA$, & literæ $EMFE$ eodem cum literis $ACBA$ in orbem redeant; deinde compleantur hæc ſegmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores ſe mutuo in G, ſintque centra eorum P & Q. Junctis GP, PQ, cape Ga ad AB ut eſt GP ad PQ, & centro G, intervallo Ga deſcribe circulum, qui ſecet circulum primum DGE in a. Jungatur tum aD ſecans circulum ſecundum DFG in b, tum aE ſecans circulum



De Motu Corporum

culum tertium EMF in c. Et compleatur Figura $ABCdef$ similis & æqualis Figuræ $abcDEF$. Dico factum.

Agatur enim Fc ipsi aD occurrens in n, & jungantur aG, bG, QG, QD, PD. Ex constructione est angulus EaD æqualis angulo CAB, & angulus acF æqualis angulo ACB, adeoque triangulum anc triangulo ABC æquiangulum. Ergo angulus anc seu FnD angulo ABC, adeoque angulo FbD æqualis est; & propterea punctum n incidit in punctum b. Porro angulus GPQ, qui dimidius est anguli ad centrum GPD æqualis est angulo ad circumferentiam GaD; & angulus GQP, qui dimidius est anguli ad centrum GQD, æqualis est complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam GbD, adeoque æqualis angulo Gba; suntque ideo triangula GPQ, Gab similia; & Ga est ad ab ut GP ad PQ; id est (ex constructione) ut Ga ad AB. Æquantur itaque ab & AB; & propterea triangula abc, ABC, quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde, cum tangant insuper trianguli DEF anguli D, E, F trianguli abc latera ab, ac, bc respective compleri potest Figura $ABCdef$ Figuræ $abcDEF$ similis & æqualis, atque eam complendo solvetur Problema. $Q.E.F.$



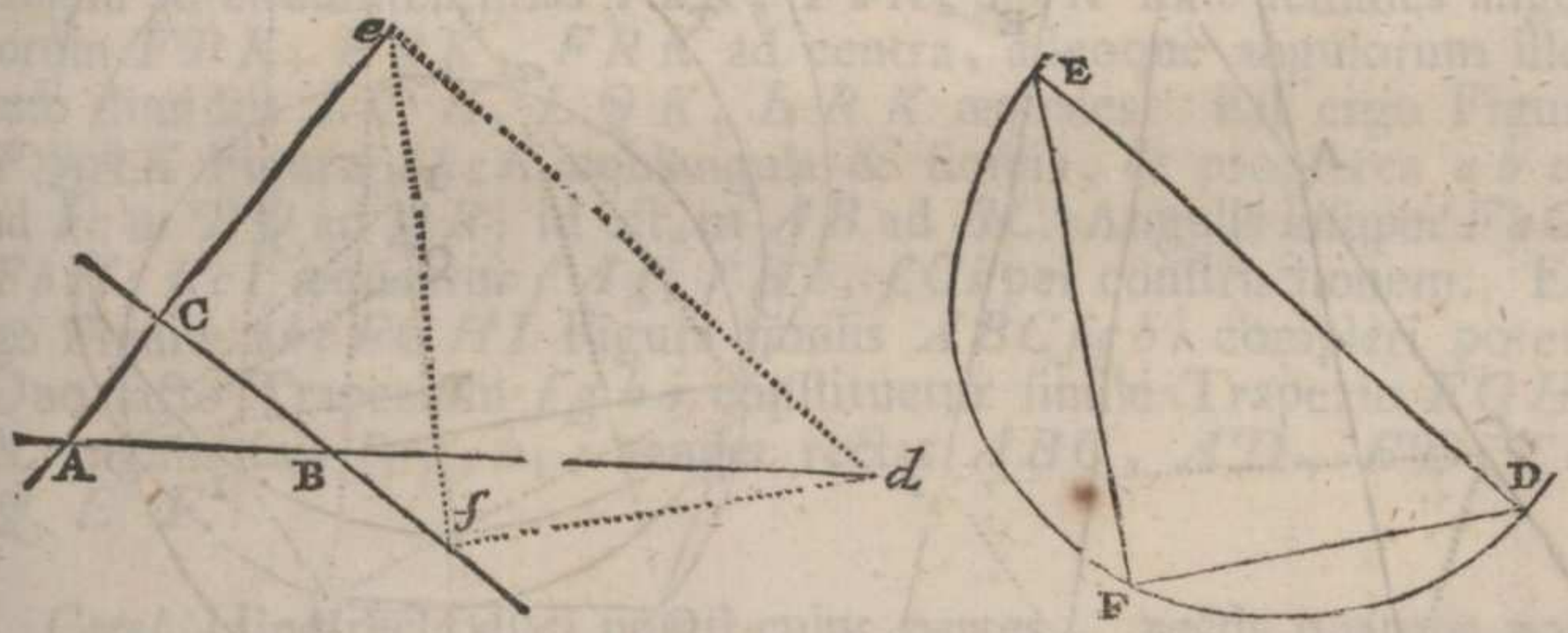
Corol.

Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes longitudine datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt. Concipe triangulum $\mathcal{D}EF$, puncto $\mathcal{D}$ ad latus EF accedente, & lateribus $\mathcal{D}E$, $\mathcal{D}F$ in directum poſitis, mutari in lineam rectam, cujus pars data $\mathcal{D}E$ rectis poſitione datis AB, AC, & pars data DF rectis poſitione datis AB, BC interponi debet; & applicando conſtructionem præcedentem ad hunc caſum ſolvetur Problema.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

Trajectoriam ſpecie & magnitudine datam deſcribere, cujus partes datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt.

Deſcribenda ſit Trajectoria quæ ſit ſimilis & æqualis Lineæ curvæ $\mathcal{D}EF$, quæque a rectis tribus AB, AC, BC poſitione datis,



in partes datis hujus partibus $\mathcal{D}E$ & EF ſimiles & æquales ſecabitur.

Age rectas $\mathcal{D}E$, EF, $\mathcal{D}F$, & trianguli hujus $\mathcal{D}EF$ pone angulos D, E, F ad rectas illas poſitione datas (per Lem. XXVI.) Dein circa triangulum deſcribe Trajectoriam Curvæ $\mathcal{D}EF$ ſimilem & æqualem. *Q. E. F.*

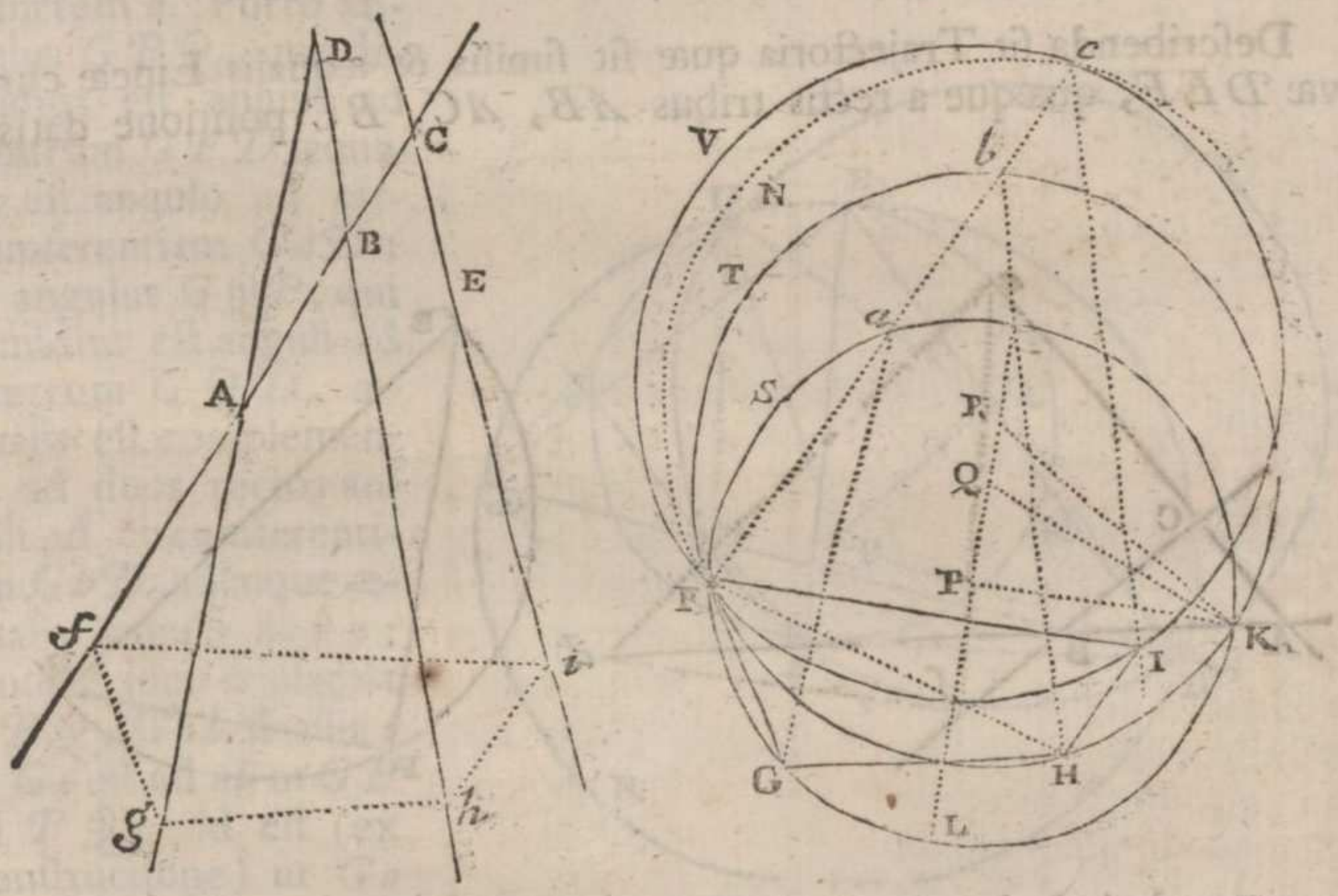
BIBLIOTECA PÚBLICA E ARQUIVO DISTRITAL DE ÉVORA

De Motu Corporum

LEMMA XXVII.

Trapezium ſpecie datum deſcribere cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas, quæ neque omnes parallelæ ſunt, neque ad commune punctum convergunt, ſinguli ad ſingulas conſiſtent.

Dentur poſitione rectæ quatuor ABC, AD, BD, CE, quarum prima ſecet ſecundam in A, tertiam in B, & quartam in C: & deſcribendum ſit Trapezium $fghi$ quod ſit Trapezio $FGHI$



ſimile, & cujus angulus f, angulo dato F æqualis, tangat rectam ABC, cæterique anguli g, h, i. cæteris angulis datis G, H, I æquales, tangant cæteras lineas AD, BD, CE reſpective. Jungatur FH & ſuper FG, FH, FI deſcribantur totidem circulorum ſegmenta FSG, FTH, FVI, quorum primum FSG capiat angulum

lum æqualem angulo BAD, ſecundum FTH capiat angulum æqualem angulo CBD, ac tertium FVI capiat angulum æqualem angulo ACE. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum FG, FH, FI, ut literarum $FSGF$ idem ſit ordo circularis qui literarum $BADB$, utque literæ $FTHF$ eodem ordine cum literis $CBDC$, & literæ $FVIF$ eodem cum literis $ACEA$ in orbem redeant. Compleantur ſegmenta in circulos integros, ſitque P centrum circuli primi FSG, & Q centrum ſecundi FTH. Jungatur & utrinque producatur PQ, & in ea capiatur QR in ea ratione ad PQ quam habet BC ad AB. Capiatur autem QR ad eas partes puncti Q ut literarum P, Q, R idem ſit ordo atque literarum A, B, C: centroque R & intervallo RF deſcribatur circulus quartus FNc ſecans circulum tertium FVI in c. Jungatur Fc ſecans circulum primum in a & ſecundum in b. Agantur aG, bH, cI, & Figuræ $abcFGHI$ ſimilis conſtituatur Figura $ABCfghi$: Eritque Trapezium $fghi$ illud ipſum quod conſtituere oportebat. LIBER PRIMUS.

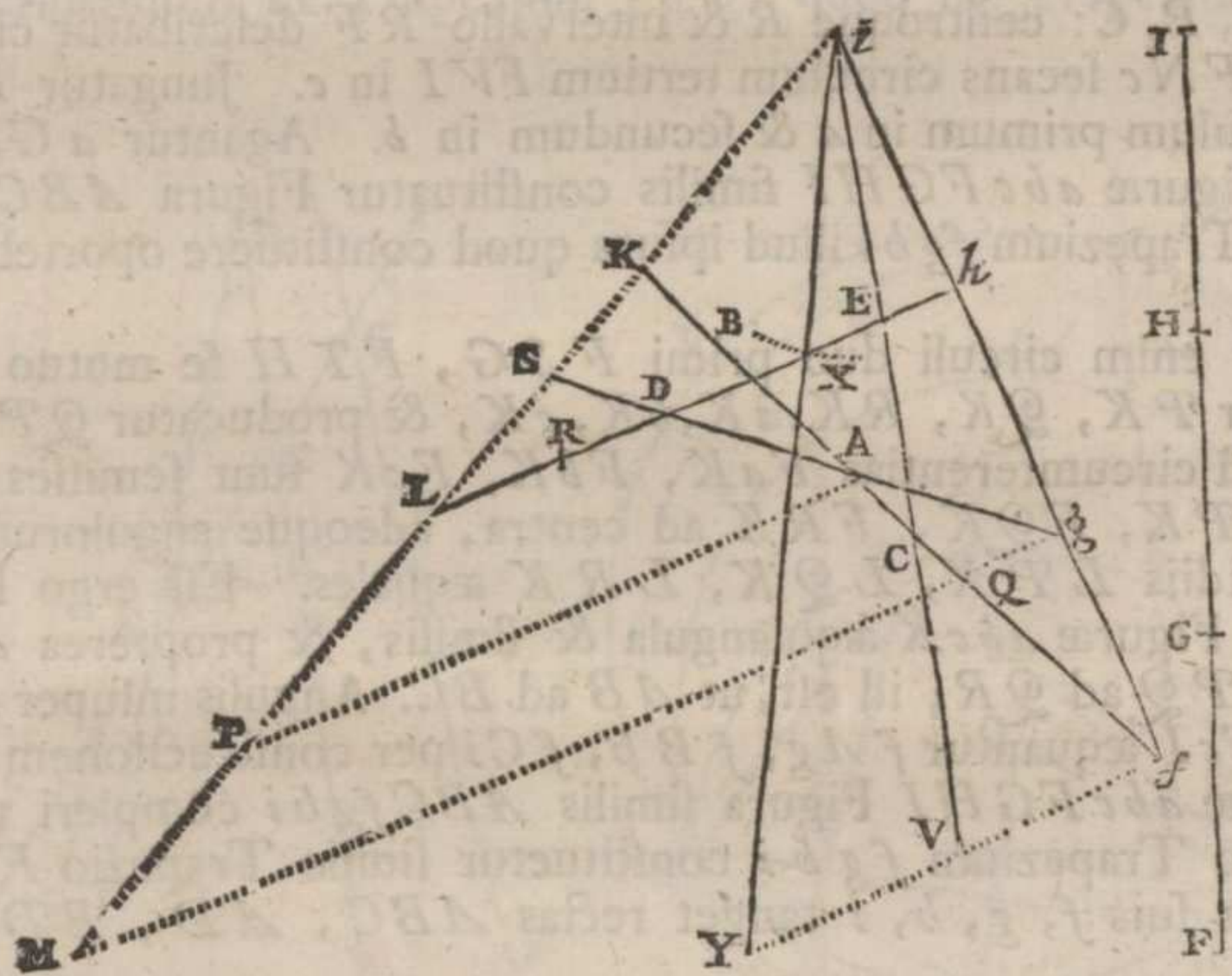
Secent enim circuli duo primi FSG, FTH ſe mutuo in K. Jungantur PK, QK, RK, aK, bK, cK, & producatur QP ad L. Anguli ad circumferentias FaK, FbK, FcK ſunt ſemiſſes angulorum FPK, FQK, FRK ad centra, adeoque angulorum illorum dimidiis LPK, LQK, LRK æquales. Eſt ergo Figura $PQRK$ Figuræ $abcK$ æquiangula & ſimilis, & propterea ab eſt ad bc ut PQ ad QR; id eſt, ut AB ad BC. Angulis inſuper FaG, FbH, FcI æquantur fAg, fBh, fCi per conſtructionem. Ergo Figuræ $abcFGHI$ Figura ſimilis $ABCfghi$ compleri poteſt. Quo facto Trapezium $fghi$ conſtituetur ſimile Trapezio $FGHI$ & angulis ſuis f, g, h, i tanget rectas ABC, AD, BD, CE. Q. E. F.

Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes, rectis quatuor poſitione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli FGH, GHI uſque eo, ut rectæ FG, GH, HI in directum jaceant; & in hoc caſu conſtruendo Problema, ducetur recta $fghi$ cujus partes fg, gh, hi, rectis quatuor poſitione datis AB & AD, AD & BD, BD & CE interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ FG, GH, HI, eundemque ſervabunt ordinem inter ſe. Idem vero ſic fit expeditius.

De Motu Corporum

Producantur AB ad K, & $B\mathcal{D}$ ad L, ut ſit BK ad AB ut HI ad GH; & $\mathcal{D}L$ ad $B\mathcal{D}$ ut GI ad FG; & jungatur KL occurrens rectæ CE in i. Producatur iL ad M, ut ſit LM ad iL ut GH ad HI, & agatur tum $M\mathcal{Q}$ ipſi LB parallela rectæque $A\mathcal{D}$ occurrens in g, tum gi ſecans AB, $B\mathcal{D}$ in f, h. Dico factum.

Secet enim Mg rectam AB in $\mathcal{Q}$, & $A\mathcal{D}$ rectam KL in S, & agatur $A\mathcal{P}$ quæ ſit ipſi $B\mathcal{D}$ parallela & occurrat iL in $\mathcal{P}$, & erunt gM ad Lh (gi ad hi, Mi ad Li, GI ad HI, AK ad BK) & $A\mathcal{P}$ ad BL in eadem ratione. Secetur $\mathcal{D}L$ in R



ut ſit $\mathcal{D}L$ ad RL in eadem illa ratione, & ob proportionales gS ad gM, AS ad $A\mathcal{P}$, & $\mathcal{D}S$ ad $\mathcal{D}L$; erit, ex æquo ut gS ad Lh ita AS ad BL & $\mathcal{D}S$ ad RL; & mixtim, $BL - RL$ ad $Lh - BL$ ut $AS - \mathcal{D}S$ ad $gS - AS$. Id eſt BR ad Bh ut $A\mathcal{D}$ ad Ag, adeoque ut $B\mathcal{D}$ ad $g\mathcal{Q}$. Et viciſſim BR ad $B\mathcal{D}$ ut Bh ad $g\mathcal{Q}$, ſeu fh ad fg. Sed ex conſtructione linea BL eadem ratione ſecta fuit in $\mathcal{D}$ & R atque linea FI in G & H: ideoque eſt BR ad $B\mathcal{D}$ ut FH ad FG. Ergo fh eſt ad fg ut FH ad FG. Cum igitur ſit etiam gi ad hi ut Mi ad Li, id eſt, ut GI ad HI, patet lineas FI, fi in g & h, G & H ſimiliter ſectas eſſe. *Q. E. F.*

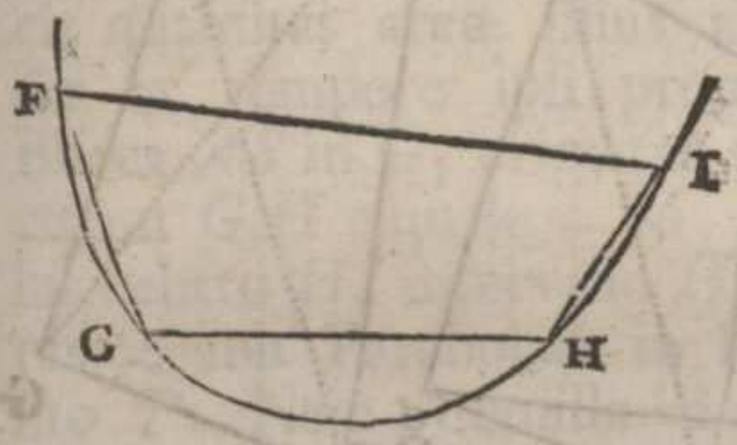
In

In conſtructione Corollarii huius poſtquam ducitur LK ſecans CE in i, producere licet iE ad V, ut ſit EV ad Ei ut FH ad HI, & agere Vf parallelam ipſi BD. Eodem recidit ſi centro i, intervallo IH, deſcribatur circulus ſecans BD in X, & producatur iX ad Υ, ut ſit $i\Upsilon$ æqualis IF, & agatur Υf ipſi BD parallela. LIBER PRIMUS.

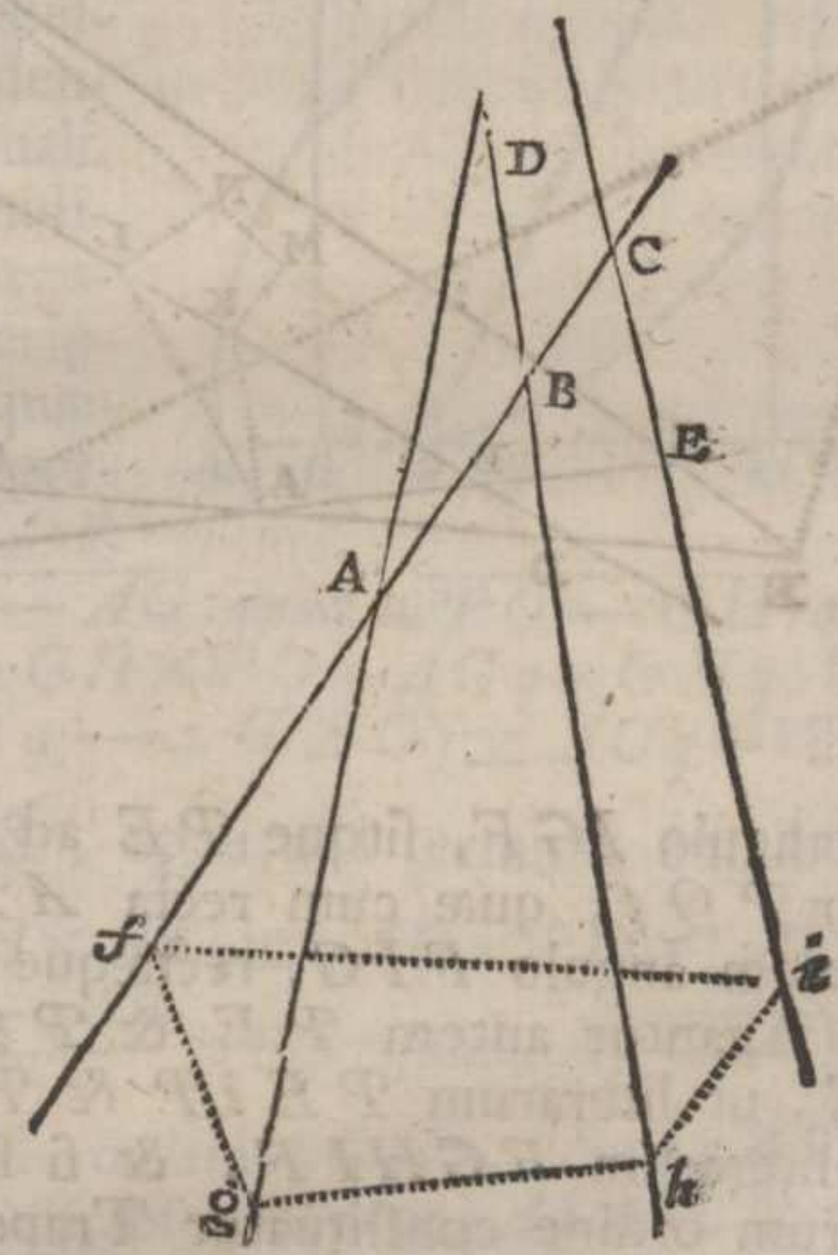
Problematis hujus ſolutiones alias *Wrennus* & *Walliſius* olim excogitarunt.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam ſpecie datam deſcribere, quæ a rectis quatuor poſitione datis in partes ſecabitur, ordine, ſpecie & proportione datas.



Deſcribenda ſit Trajectoria *fghi*, quæ ſimilis ſit Lineæ curvæ *FGHI*, & cujus partes *fg*, *gh*, *hi* illius partibus *FG*, *GH*, *HI* ſimiles & proportionales, rectis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* poſitione datis, prima primis, ſecunda ſecundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis *FG*, *GH*, *HI*, *FI*, deſcribatur (per Lem. XXVII.) Trapezium *fghi* quod ſit Trapezio *FGHI* ſimile & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas poſitione datas *AB*, *AD*, *BD*, *CE*, ſinguli ſingulas dicto ordine. Deinde circa hoc Trapezium deſcribatur Trajectoria curvæ Lineæ *FGHI* conſimilis.

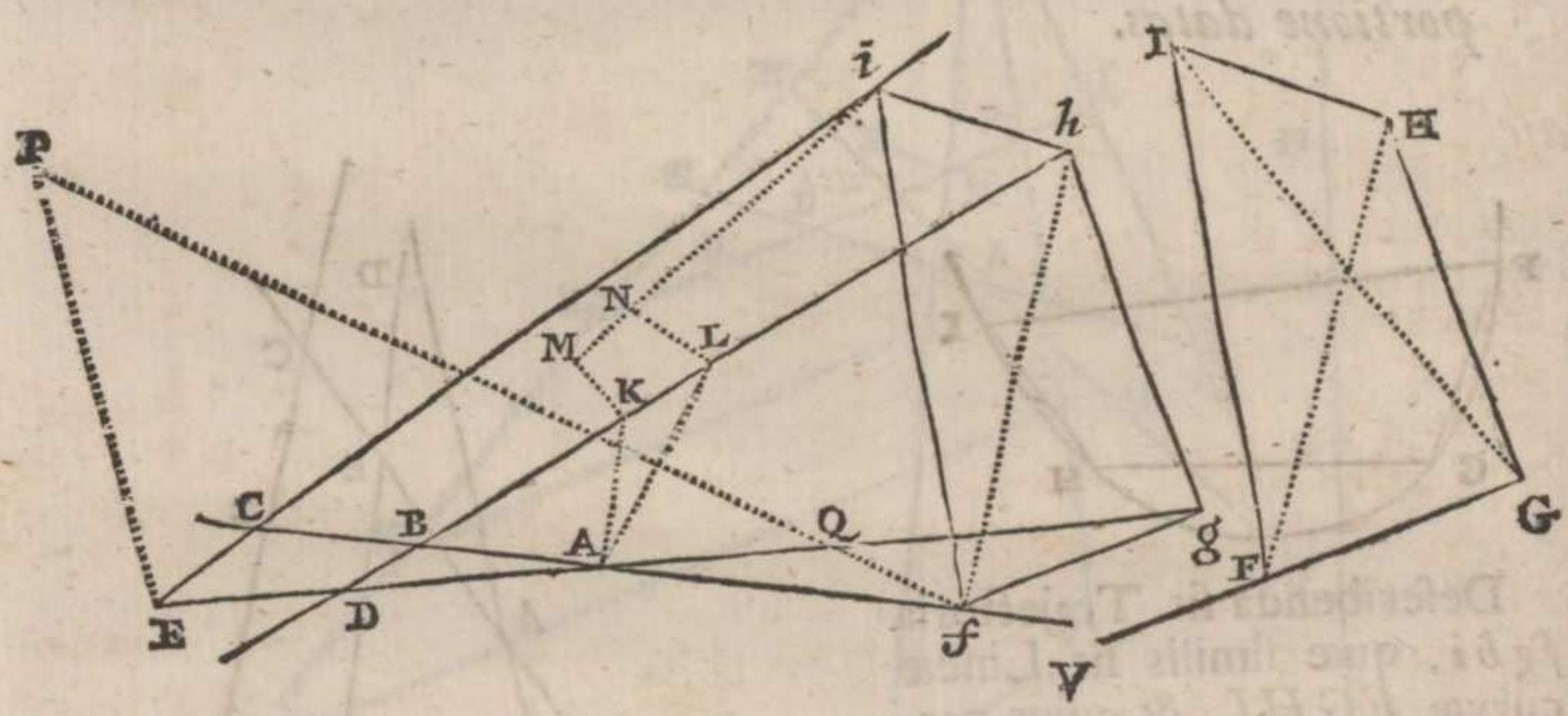


Scholium

De Motu Corporum.

Scholium.

Conſtrui etiam poteſt hoc Problema ut ſequitur. Junctis FG, GH, HI, FI produc GF ad V, jungeque FH, IG, & angulis FGH, VFH fac angulos CAK, DAL æquales. Concurrant AK, AL cum recta BD in K & L, & inde agantur KM, LN, quarum KM conſtituat angulum AKM æqualem angulo GHI, ſitque ad AK ut eſt HI ad GH; & LN conſtituat angulum ALN æqualem angulo FHI, ſitque ad AL ut HI ad FH. Ducantur autem AK, KM, AL, LN ad eas partes linearum AD, AK, AL, ut literæ $CAKMC$, $ALKA$, $DALND$ eodem ordine cum literis $FGHIF$ in orbem redeant; & acta MN occurrat rectæ CE in i. Fac angulum iEP æqua-



lem angulo IGF, ſitque PE ad Ei ut FG ad GI; & per P agatur PQf, quæ cum recta ADE contineat angulum PQE æqualem angulo FIG, rectæque AB occurrat in f, & jungatur fi. Agantur autem PE & PQ ad eas partes linearum CE, PE, ut literarum $PEiP$ & $PEQP$ idem ſit ordo circularis qui literarum $FGHIF$, & ſi ſuper linea fi eodem quoque literarum ordine conſtituatur Trapezium $fghi$ Trapezio $FGHI$ ſimile, & circumſcribatur Trajectoria ſpecie data ſolvetur Problema.

Hactenus de Orbibus inveniendis. Supereſt ut Motus corporum in Orbibus inventis determinemus.

SECTIO

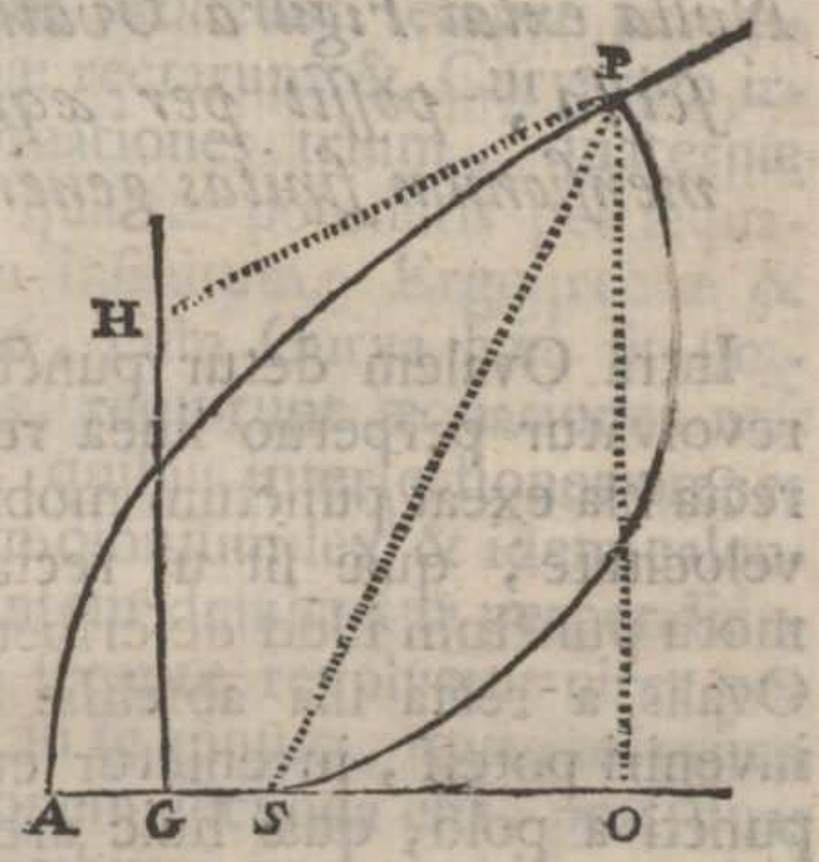
SECTIO VI.

De Inventione Motuum in Orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in data Trajectoria Parabolica moti invenire locum ad tempus assignatum.

Sit S umbilicus & A vertex principalis Parabolæ, sitque $4\,AS \times M$ æquale areæ Parabolicæ abscindendæ APS, quæ radio SP, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem describenda est. Innotescit quantitas areæ illius abscindendæ ex tempore ipsi proportionali. Biseca AS in G, erigeque perpendiculum GH æquale $3\,M$, & Circulus centro H, intervallo HS descriptus secabit Parabolam in loco quæsito P. Nam, demissa ad axem perpendiculari PO & ducta PH, est



$\overline{AG}q + GHq\,(= HPq = \overline{AO - AG}$: *quad.* $+ \overline{PO - GH}$: *quad.*$)$ $= AOq + POq - 2\,GA\,O - 2\,GH \times PO + AGq + GHq$. Unde $2\,GH \times PO\,(= AOq + P.Oq - 2\,GAO) = AOq + \frac{3}{4}POq$. Pro AOq scribe $AO \times \frac{POq}{4\,AS}$; &, applicatis terminis omnibus ad $3\,PO$ ductisque in $2\,AS$ fiet $\frac{4}{3}GH \times AS\,(= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3\,AS}{6} \times PO = \frac{4\,AO - 3\,SO}{6} \times PO =$ areæ $\overline{APO - SPO}$) $=$ areæ APS. Sed GH erat $3\,M$, & inde $\frac{4}{3}GH \times AS$ est $4\,AS \times M$. Ergo area abscissa APS æqualis est abscindendæ $4\,AS \times M$. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc GH est ad AS, ut tempus quo corpus descripsit arcum AP ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem A & perpendiculum ad axem ab umbilico S erectum.

Corol. 2. Et Circulo HSP per corpus motum P perpetuo transeunte, velocitas puncti H est ad velocitatem quam corpus habuit

DE MOTU CORPORUM

in vertice A, ut 3 ad 8; adeoque in ea etiam ratione eſt linea GH ad lineam rectam quam corpus tempore motus ſui ab A ad P, ea cum velocitate quam habuit in vertice A, deſcribere poſſet.

Corol. 3. Hinc etiam vice verſa inveniri poteſt tempus quo corpus deſcripſit arcum quemvis aſſignatum AP. Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ GH occurrens in H.

LEMMA XXVIII.

Nulla extat Figura Ovalis cujus area, rectis pro lubitu abſciſſa, poſſit per æquationes numero terminorum ac dimenſionum finitas generaliter inveniri.

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatque ſemper ea cum velocitate, quæ ſit ut rectæ illius intra Ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud deſcribet Spiralem gyris infinitis. Jam ſi areæ Ovalis a recta illa abſciſſæ incrementum per finitam æquationem inveniri poteſt, invenietur etiam per eandem æquationem diſtantia puncti a polo, quæ huic areæ proportionalis eſt, adeoque omnia Spiralis puncta per æquationem finitam inveniri poſſunt: & propterea rectæ cujusvis poſitione datæ interſectio cum Spirali inveniri etiam poteſt per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta Spiralem ſecat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua interſectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum interſectiones omnes radicibus totidem, adeoque aſcendit ad tot dimenſiones quot ſunt interſectiones. Quoniam Circuli duo ſe mutuo ſecant in punctis duobus, interſectio una non invenietur niſi per æquationem duarum dimenſionum, qua interſectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum ſectionum Conicarum quatuor eſſe poſſunt interſectiones, non poteſt aliqua earum generaliter inveniri niſi per æquationem quatuor dimenſionum, qua omnes ſimul inveniantur. Nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque & propterea eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere.

Unde

Unde etiam interſectiones Sectionum Conicarum & Curvarum tertiæ poteſtatis, eo quod ſex eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes ſex dimenſionum, & interſectiones duarum Curvarum tertiæ poteſtatis, quia novem eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes dimenſionum novem. Id niſi neceſſario fieret, reducere liceret Problemata omnia Solida ad Plana, & pluſquam Solida ad Solida. Loquor hic de Curvis poteſtate irreducibilibus. Nam ſi æquatio per quam Curva definitur, ad inferiorem poteſtatem reduci poſſit, Curva non erit unica, ſed ex duabus vel pluribus compoſita, quarum interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt. Ad eundem modum interſectiones binæ rectarum & ſectionum Conicarum prodeunt ſemper per æquationes duarum dimenſionum; ternæ rectarum & Curvarum irreducibilium tertiæ poteſtatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & Curvarum irreducibilium quartæ poteſtatis per æquationes dimenſionum quatuor, & ſic in infinitum. Ergo rectæ & Spiralis interſectiones numero infinitæ, cum Curva hæc ſit ſimplex & in Curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimenſionum & radicum infinitas, quibus interſectiones omnes poſſunt ſimul exhiberi. Eſt enim eadem omnium lex & idem calculus. Nam ſi a polo in rectam illam ſecantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum illud una cum ſecante revolvatur circa polum, interſectiones Spiralis tranſibunt in ſe mutuo, quæque prima erat ſeu proxima, poſt unam revolutionem ſecunda erit, poſt duas tertia, & ſic deinceps: nec interea mutabitur æquatio niſi pro mutata magnitudine quantitatum per quas poſitio ſecantis determinatur. Unde cum quantitates illæ poſt ſingulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, adeoque una eademque exhibebit interſectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi poſſunt. Nequit ergo interſectio rectæ & Spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat Ovalis cujus area, rectis imperatis abſciſſa, poſſit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, ſi intervallum poli & puncti, quo Spiralis deſcribitur, capiatur Ovalis perimetro abſciſſæ proportionale, probari poteſt quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. De Ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur a figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

De Motu Corporum.

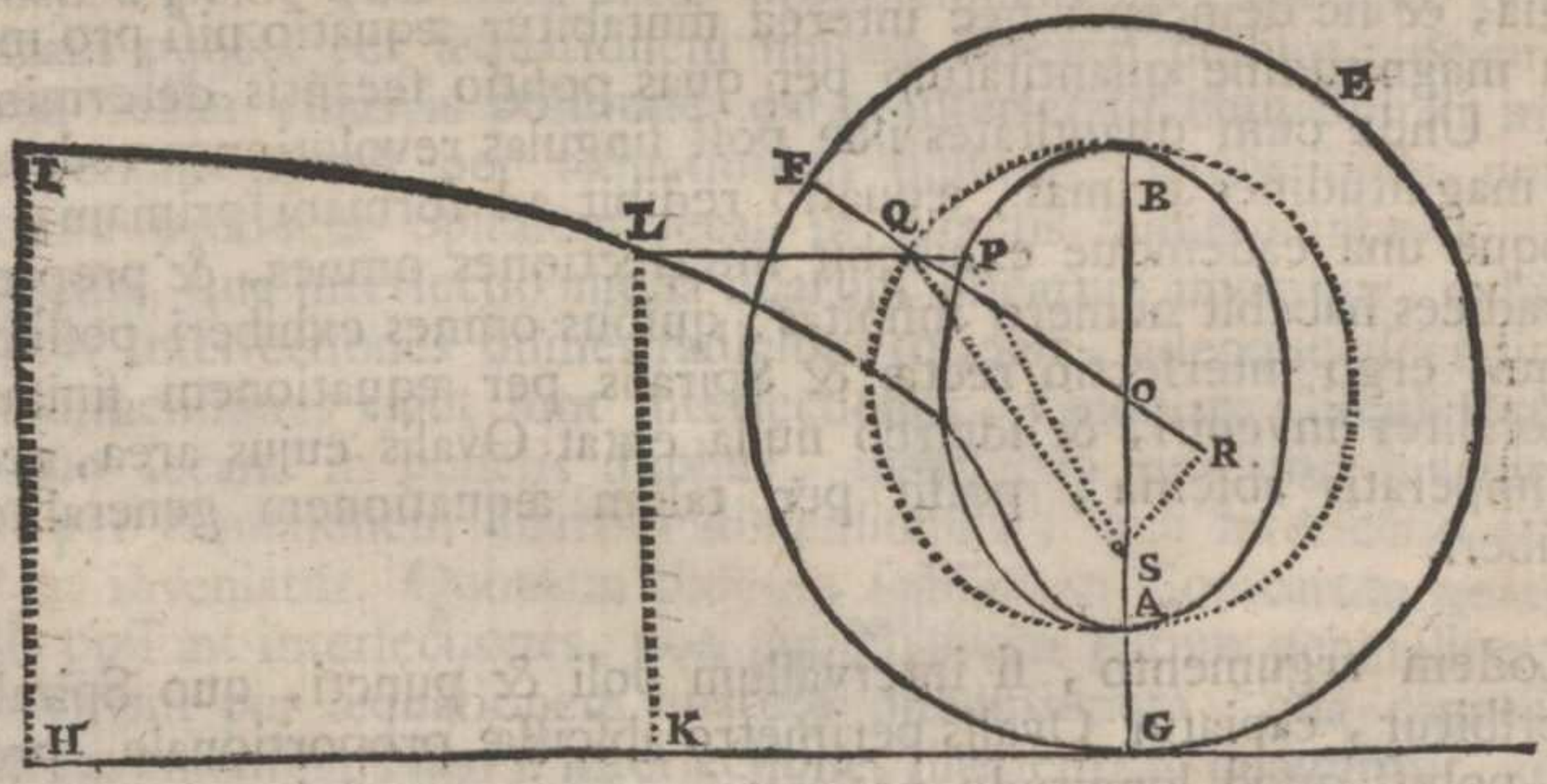
Corollarium.

Hinc area Ellipſeos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto deſcribitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per deſcriptionem Curvarum Geometrice rationalium determinari nequit. Curvas Geometrice rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id eſt, per longitudinum rationes complicatas, determinari poſſunt; cæteraſque (ut Spirales, Quadratrices, Trochoides) Geometrice irrationales. Nam longitudines quæ ſunt vel non ſunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) ſunt Arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur Ellipſeos tempori proportionalem abſcindo per Curvam Geometrice irrationalem ut ſequitur.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in data Trajectoria Elliptica moti invenire locum ad tempus aſſignatum.

Ellipſeos *A P B* ſit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, & *O* centrum, ſitque *P* corporis locus inveniendus. Produc *O A* ad *G*, ut ſit *O G* ad *O A* ut *O A* ad *O S*. Erige perpendiculum *G H*, cen-



troque *O* & intervallo *O G* deſcribe circulum *E F G*, & ſuper regula *G H*, ceu fundo, progrediatur Rota *G E F* revolvendo circa axem ſuum, & interea puncto ſuo *A* deſcribendo Trochoidem *A L I*.

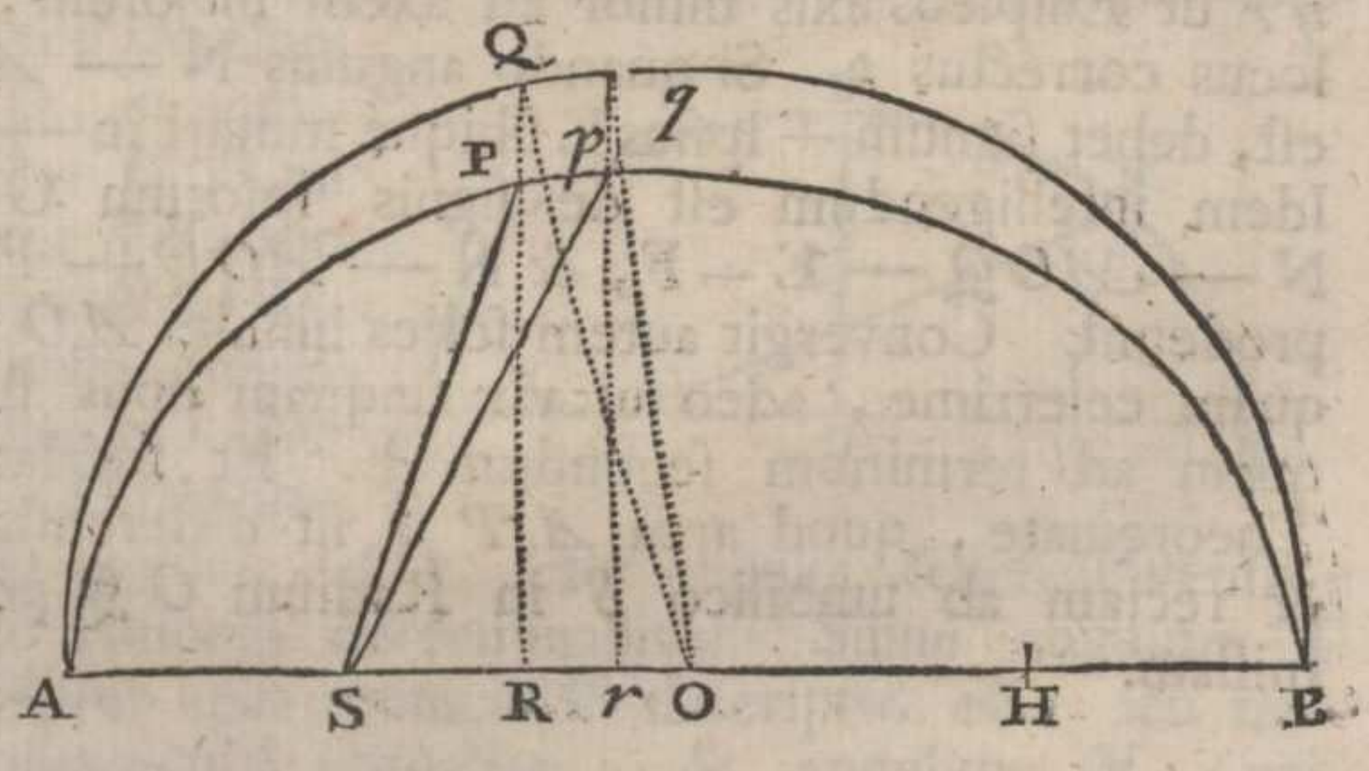
Quo

Quo facto, cape $G K$ in ratione ad Rotæ perimetrum $G E F G$, ut est tempus quo corpus progrediendo ab A descripsit arcum $A P$, ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Erigatur perpendiculum $K L$ occurrens Trochoidi in L, & acta $L P$ ipsi $K G$ parallela occurret Ellipsi in corporis loco quæsito P. LIBER PRIMUS.

Nam centro O, intervallo $O A$ describatur semicirculus $A Q B$, & arcui $A Q$ occurrat $L P$ producta in Q, junganturque $S Q$, $O Q$. Arcui $E F G$ occurrat $O Q$ in F, & in eandem $O Q$ demittatur perpendiculum $S R$. Area $A P S$ est ut area $A Q S$, id est, ut differentia inter sectorem $O Q A$ & triangulum $O Q S$, sive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2} O Q \times A Q$ & $\frac{1}{2} O Q \times S R$, hoc est, ob datam $\frac{1}{2} O Q$, ut differentia inter arcum $A Q$ & rectam $S R$, adeoque (ob æqualitatem datarum rationum $S R$ ad sinum arcus $A Q$, $O S$ ad $O A$, $O A$ ad $O G$, $A Q$ ad $G F$, & divisim $A Q - S R$ ad $G F$ — sin. arc. $A Q$,) ut $G K$ differentia inter arcum $G F$ & sinum arcus $A Q$. Q. E. D.

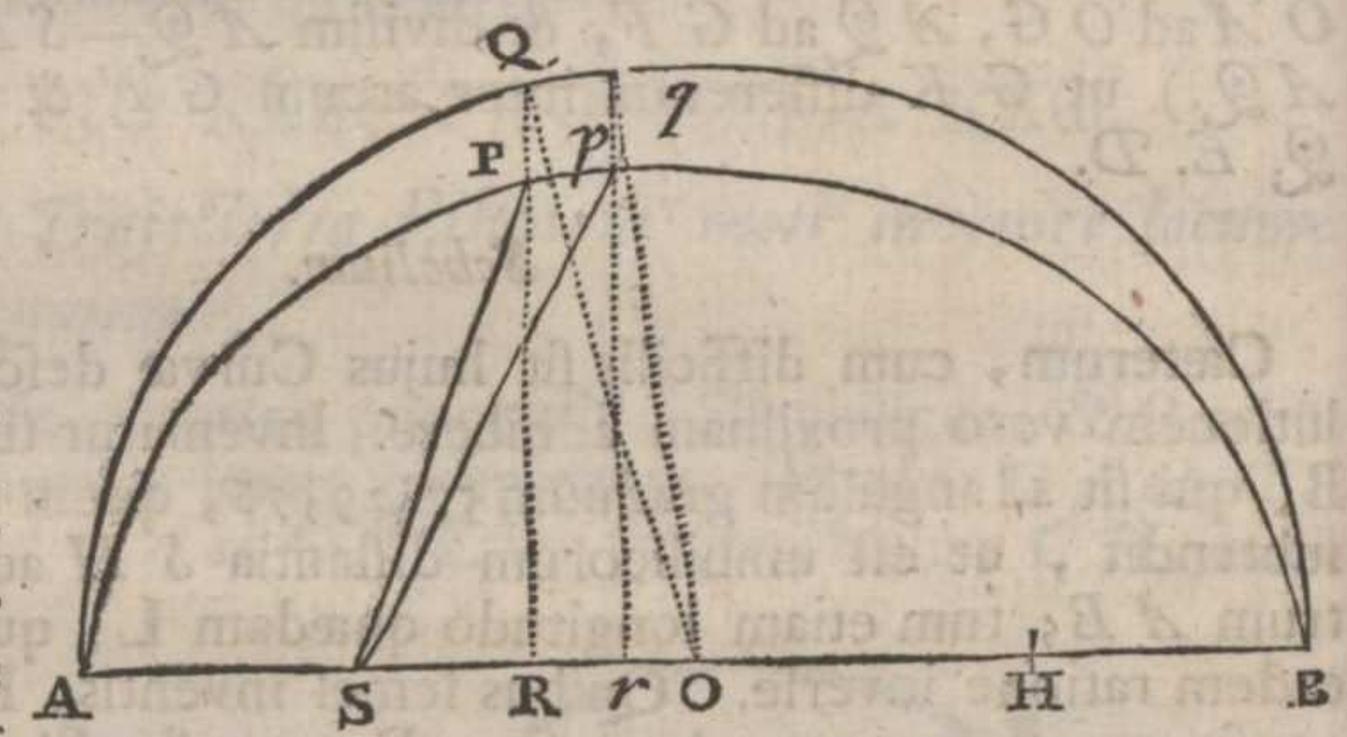
Scholium.

Cæterum, cum difficilis sit hujus Curvæ descriptio, præstat solutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui sit ad angulum graduum 57,29578, quem arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia $S H$ ad Ellipseos diametrum $A B$; tum etiam longitudo quædam L, quæ sit ad radium in eadem ratione inverse. Quibus semel inventis, Problema deinceps confit per sequentem Analysin. Per constructionem quamvis (vel utcunque conjecturam faciendo) cognoscatur corporis locus P proximus vero ejus loco p. Demissaque ad axem Ellipseos ordinatim applicata $P R$, ex proportione diametrorum Ellipseos, dabitur Circuli circumscripti $A Q B$ ordinatim applicata $R Q$, quæ sinus est anguli $A O Q$ existente $A O$ radio. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoscatur etiam angulus tempori proportionalis,



De Motu Corporum.

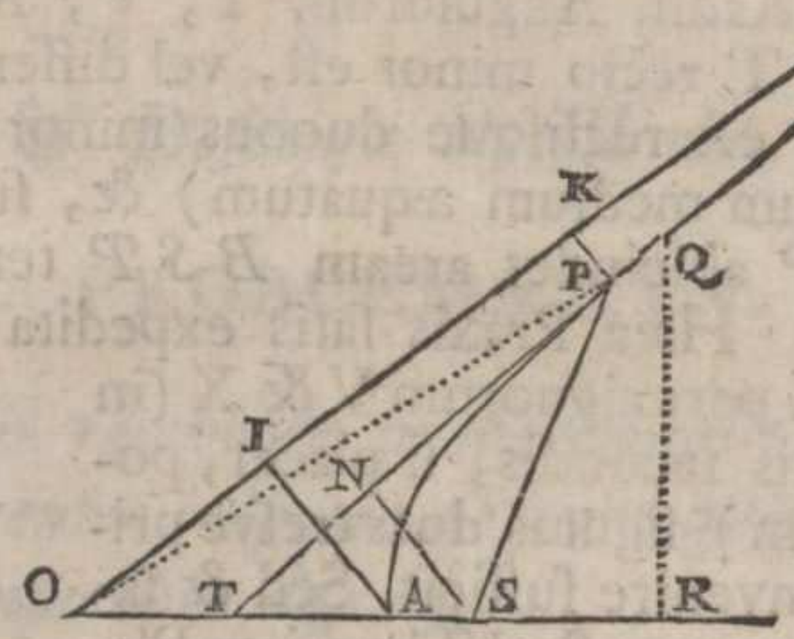
tionalis, id est, qui sit ad quatuor rectos, ut est tempus quo corpus descripsit arcum Ap, ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Sit angulus iste N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut est sinus iste anguli AOQ ad radium, & angulus E ad angulum N — AOQ + D, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut est sinus anguli AOQ + E ad radium, tum angulus G ad angulum N — AOQ — E + F ut est longitudo L ad longitudinem eandem cosinu anguli AOQ + E diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli AOQ + E + G ad radium; & angulus I ad angulum N — AOQ — E — G + H, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli AOQ + E + G diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus AOq æqualis angulo AOQ + E + G + I + &c. & ex cosinu ejus Or & ordinata pr, quæ est ad sinum ejus qr ut Ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus p. Si quando angulus N — AOQ + D negativus est, debet signum + ipsius E ubique mutari in —, & signum — in +. Idem intelligendum est de signis ipsorum G & I, ubi anguli N — AOQ — E + F, & N — AOQ — E — G + H negativi prodeunt. Convergit autem series infinita AOQ + E + G + I &c. quam celerrime, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum E. Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quod area APS sit differentia inter arcum AQ & rectam ab umbilico S in Radium OQ perpendiculariter demissam.



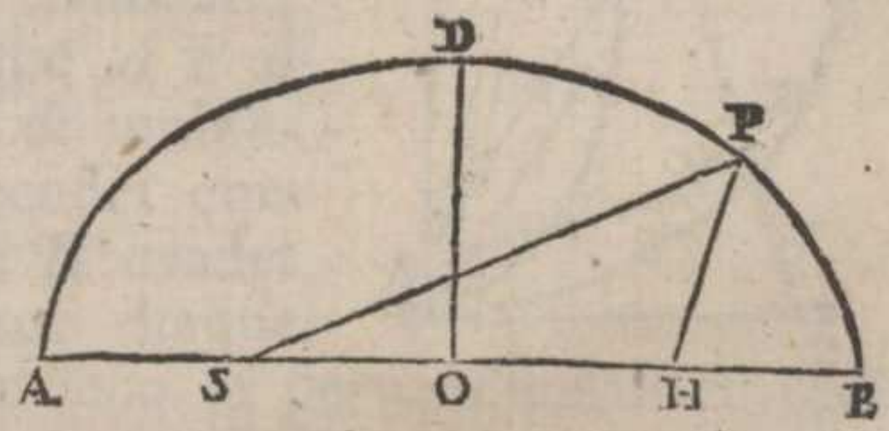
Non dissimili calculo conficitur Problema in Hyperbola. Sit ejus Centrum O, Vertex A, Umbilicus S & Asymptotos OK. Cognoscatur

noſcatur quantitas areæ abſcindendæ tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de poſitione rectæ SP, quæ aream APS abſcindat veræ proximam. Jungatur OP, & ab A & P ad Aſymptoton agantur AI, PK Aſymptoto alteri parallelæ, & per Tabulam Logarithmorum dabitur Area $AIKP$, eique æqualis area OPA, quæ ſubducta de triangulo OPS relinquet aream abſciſſam APS. Applicando areæ abſcindendæ A & abſciſſæ APS differentiam duplam $2APS - 2A$ vel $2A - 2APS$ ad lineam SN, quæ ab umbilico S in tangentem PT perpendicularis eſt, orietur longitudo chordæ PQ. Inſcribatur autem chorda illa PQ inter A & P, ſi area abſciſſa APS major ſit area abſcindenda A, ſecus ad puncti P contrarias partes: & punctum Q erit locus corporis accuratior. Et computatione repetita invenietur idem accuratior in perpetuum.

LIBER PRIMUS.



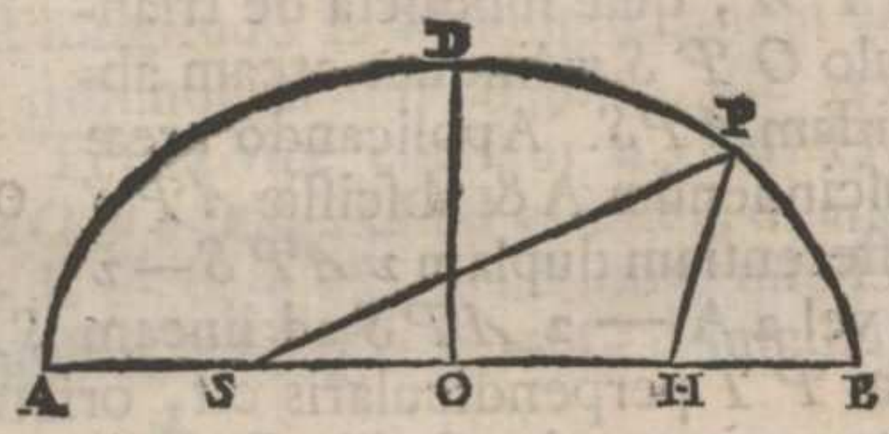
Atque his calculis Problema generaliter confit Analytice. Verum uſibus Aſtronomicis accommodatior eſt calculus particularis qui ſequitur. Exiſtentibus AO, OB, OD ſemiaxibus Ellipſeos, & L ipſius latere recto, ac D differentia inter ſemiaxem minorem OD & lateris recti ſemiſſem $\frac{1}{2}$ L; quære tum angulum Y, cujus ſinus ſit ad Radium ut eſt rectangulum ſub differentia illa D, & ſemiſumma axium $AO + OD$ ad quadratum axis majoris AB; tum angulum Z, cujus ſinus ſit ad Radium ut eſt duplum rectangulum ſub umbilicorum diſtantia SH & differentia illa D ad triplum quadratum ſemiaxis majoris AO. His angulis ſemel inventis; locus corporis ſic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus BP deſcriptus eſt, ſeu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V (primam medii motus æquationem) ad angulum Y (æquationem maximam primam) ut eſt ſinus dupli anguli T ad Radium:



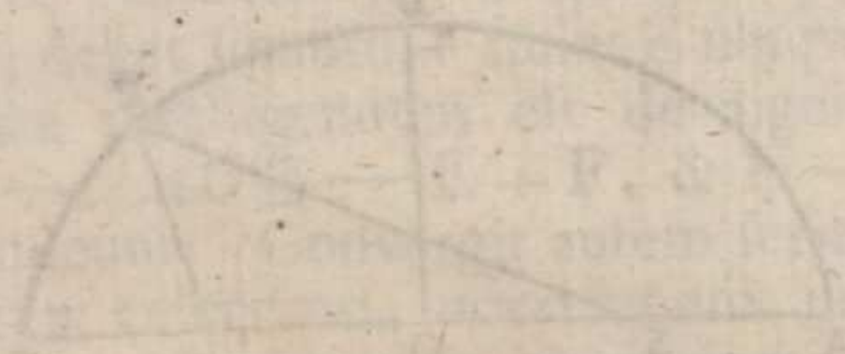
atque

De Motu Corporum.

atque angulum X (æquationem ſecundam) ad angulum Z (æquationem maximam ſecundam) ut eſt cubus ſinus anguli T ad cubum Radii. Angulorum T, V, X vel ſummæ T + X + V, ſi angulus T recto minor eſt, vel differentiæ T + X — V, ſi is recto major eſt rectiſque duobus minor, æqualem cape angulum BHP (motum medium æquatum) &, ſi HP occurrat Ellipſi in P, acta SP abſcindet aream BSP tempori proportionalem quamproxime. Hæc Praxis ſatis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X (in minutis ſecundis, ſi placet, poſitorum) figuras duas treſve primas invenire ſufficit. Sed & ſatis accurata eſt ad Theoriam Planetarum. Nam in Orbe vel Martis ipſius, cujus Æquatio centri maxima eſt graduum decem, error vix ſuperabit minutum unum ſecundum. Invento autem angulo motus medii æquati BHP, angulus veri motus BSP & diſtantia SP in promptu ſunt per *Wardi* methodum notiſſimam.



Hactenus de motu corporum in lineis Curvis. Fieri autem poteſt ut mobile recta deſcendat vel recta aſcendat, & quæ ad iſtiuſmodi Motus ſpectant, pergo jam exponere.



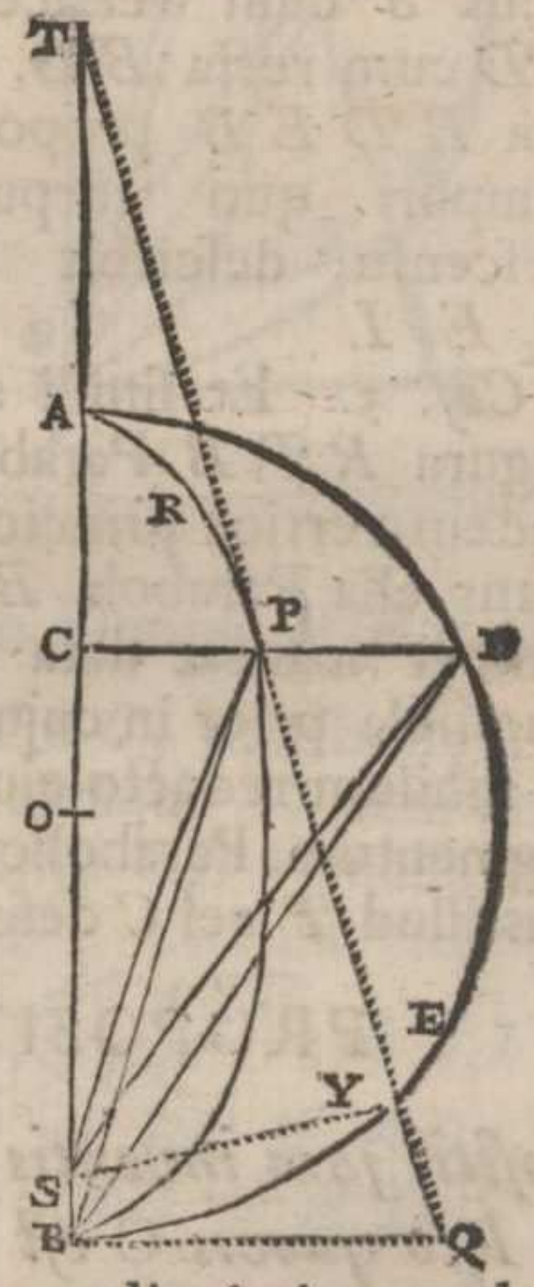
SECTIO

SECTIO VII.

De Corporum Aſcenſu & Deſcenſu Rectilineo.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

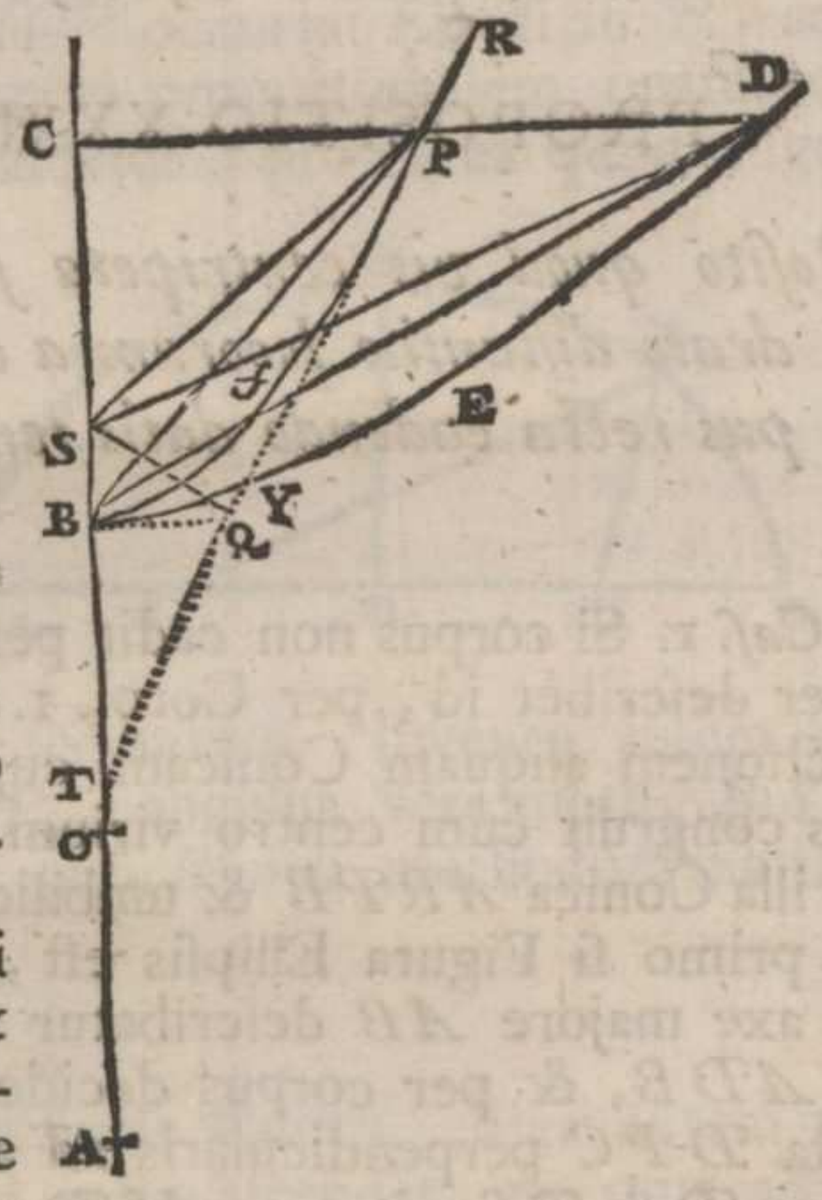
Poſito quod vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, Spatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus deſcribit.



Caſ. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter deſcribet id, per Corol. 1. Prop. XIII, Sectionem aliquam Conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit Sectio illa Conica *ARPB* & umbilicus ejus *S*. Et primo ſi Figura Ellipſis eſt, ſuper hujus axe majore *AB* deſcribatur Semicirculus *ADB*, & per corpus decidens tranſeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actiſque *DS*, *PS* erit area *ASD* areæ *ASP* atque adeo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo Ellipſeos; & ſemper manebit area *ASD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum, &, Orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico *S* cum axis termino *B*, deſcendet corpus in recta *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque Spatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato deſcribit, ſi modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & a puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC*. *Q. E. I.*

De Motu Corporum

Caſ. 2. Si Figura illa *RPB* Hyperbola eſt, deſcribatur ad eandem diametrum principalem *AB* Hyperbola rectangula *BED*: & quoniam areæ *CSP*, *CBfP*, *SPfB* ſunt ad areas *CSD*, *CBED*, *SDEB*, ſingulæ ad ſingulas, in data ratione altitudinum *CP*, *CD*; & area *SPfB* proportionalis eſt tempori quo corpus *P* movebitur per arcum *PfB*; erit etiam area *SDEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum Hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere tranſverſo, & coibit arcus *PB* cum recta *CB* & umbilicus *S* cum vertice *B* & recta *SD* cum recta *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto deſcenſu deſcribit lineam *CB*. *Q. E. I.*



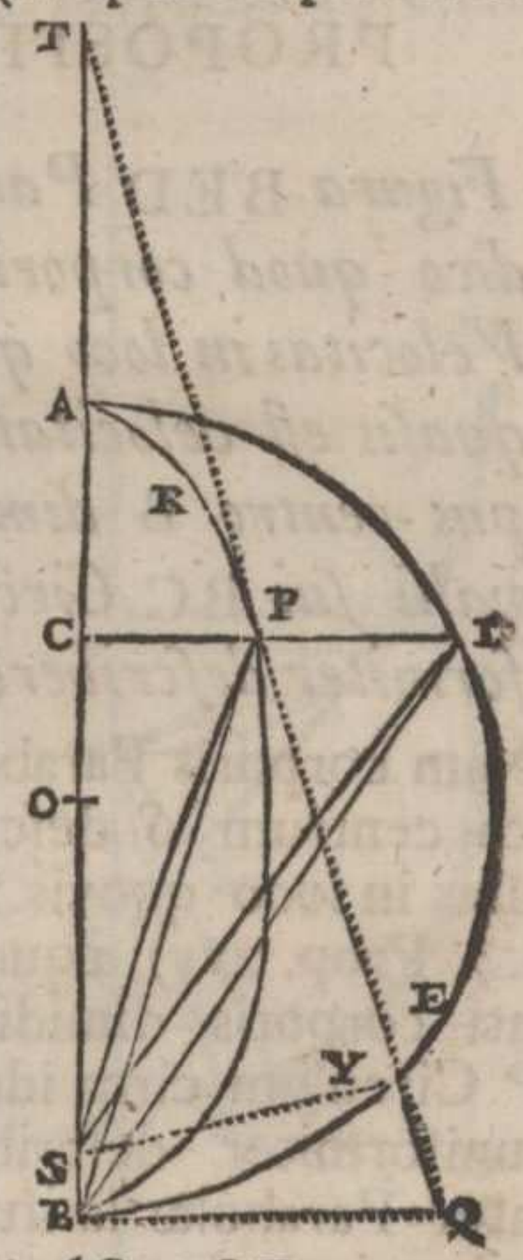
Caſ. 3. Et ſimili argumento ſi Figura *RPB* Parabola eſt, & eodem vertice principali *B* deſcribatur alia Parabola *BED*, quæ ſemper maneat data interea dum Parabola prior in cujus perimetro corpus *P* movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum linea *CB*; fiet ſegmentum Parabolicum *BDEB* proportionale tempori quo corpus illud *P* vel *C* deſcendet ad centrum *S* vel *B*. *Q.E.I.*

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

Poſitis jam inventis, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis C *eſt ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *Circulum deſcribentis, in ſubduplicata ratione quam* AC, *diſtantia corporis a Circuli vel Hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad Figuræ ſemidiametrum principalem* $\frac{1}{2}$ AB.

Biſecetur *AB*, communis utriuſque Figuræ *RPB*, *DEB* diameter, in *O*; & agatur recta *PT* quæ tangat Figuram *RPB* in *P*, atque etiam

etiam ſecet communem illam diametrum AB (ſi opus eſt productam) in T, ſitque ST ad hanc rectam, & BQ ad hanc diametrum perpendicularis, atque Figuræ RPB latus rectum ponatur L. Conſtat per Cor. 9. Prop. XVI, quod corporis in linea RPB circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P ſit ad velocitatem corporis intervallo SP circa idem centrum Circulum deſcribentis in ſubduplicata ratione rectanguli $\frac{1}{2}L \times SP$ ad ST quadratum. Eſt autem ex Conicis ACB ad CPq ut $2AO$ ad L, adeoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ ſunt ad invicem in ſubduplicata ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad ST *quad.* Porro ex Conicis eſt CO ad BO ut BO ad TO, & compoſite vel diviſim ut CB ad BT. Unde vel dividendo vel componendo fit $BO -$ vel $+ CO$ ad BO ut CT ad BT, id eſt AC ad AO ut CP ad BQ; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale eſt $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Minuatur jam in infinitum Figuræ RPB latitudo CP, ſic ut punctum P coeat cum puncto C, punctumque S cum puncto B, & linea SP cum linea BC, lineaque ST cum linea BQ; & corporis jam recta deſcendentis in linea CB velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo BC Circulum deſcribentis, in ſubduplicata ratione ipſius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad STq, hoc eſt (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & BQq ad STq.) in ſubduplicata ratione AC ad AO ſive $\frac{1}{2}AB$. *Q.E.D.*



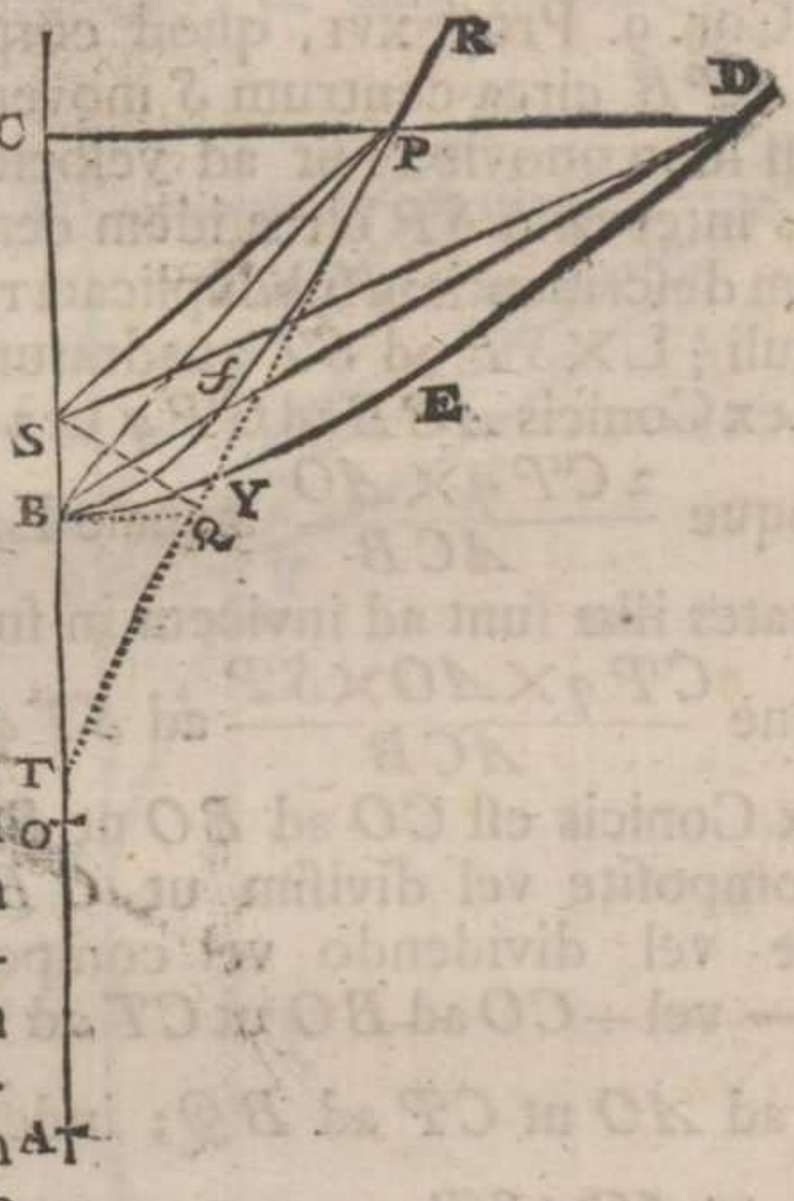
Corol. 1. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad TS ut AC ad AO.

Corol. 2. Corpus ad datam a centro diſtantiam in Circulo quovis revolvens, motu ſuo ſurſum verſo aſcendet ad duplam ſuam a centro diſtantiam.

De Motu Corporum

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

Si Figura BED *Parabola eſt, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis* C *æqualis eſt velocitati qua corpus centro* B *dimidio intervalli ſui* BC *Circulum uniformiter deſcribere poteſt.*



Nam corporis Parabolam *RPB* circa centrum *S* deſcribentis velocitas in loco quovis *P* (per Corol. 7. Prop. XVI) æqualis eſt velocitati corporis dimidio intervalli *SP* Circulum circa idem centrum *S* uniformiter deſcribentis. Minuatur Parabolæ latitudo *CP* in infinitum eo, ut arcus Parabolicus *PfB* cum recta *CB*, centrum *S* cum vertice *B*, & intervallum *SP* cum intervallo *BC* coincidat, & conſtabit Propoſitio. *Q. E. D.*

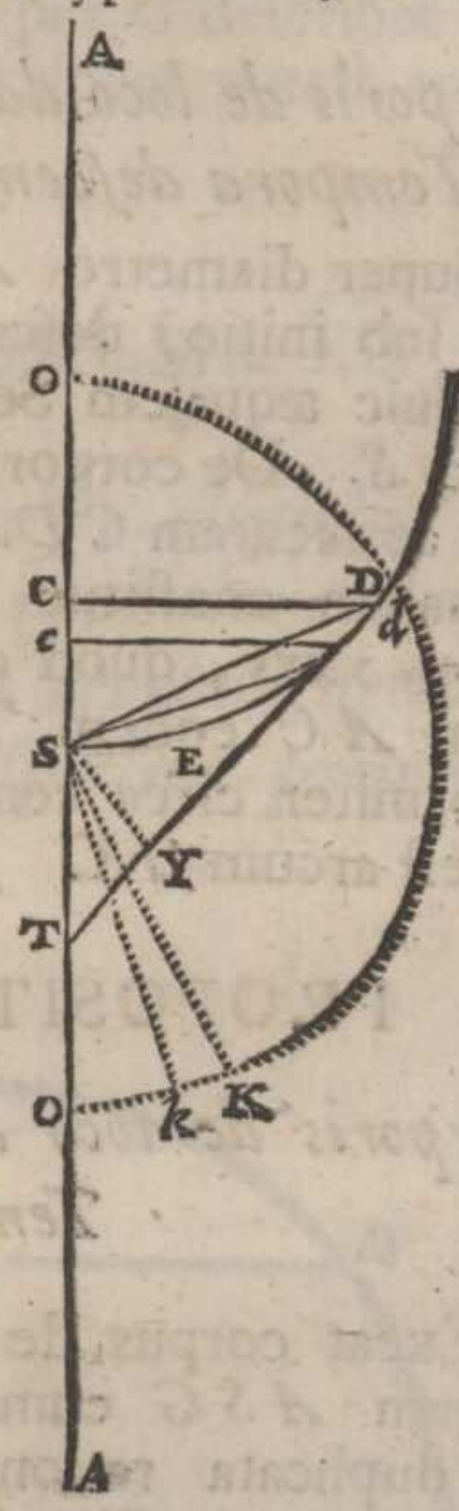
PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

Iiſdem poſitis, dico quod area Figuræ DES, *radio indefinito* SD *deſcripta, æqualis ſit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti Figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore deſcribere poteſt.*

Nam concipe corpus *C* quam minima temporis particula lineolam *Cc* cadendo deſcribere, & interea corpus aliud *K* uniformiter in Circulo *OKk* circa centrum *S* gyrando, arcum *Kk* deſcribere. Erigantur perpendicula *CD*, *cd* occurrentia Figuræ *DES* in *D*, *d*. Jungantur *SD*, *Sd*, *SK*, *Sk* & ducatur *Dd* axi *AS* occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum *SY*.

Caſ.

Caſ. 1. Jam ſi Figura DES Circulus eſt vel Hyperbola, biſecetur ejus transverſa diameter AS in O, & erit SO dimidium lateris recti. Et quoniam eſt TC ad TD ut Cc ad Dd, & TD ad TS ut CD ad SY, erit ex æquo TC ad TS ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Sed per Corol. 1 Prop. XXXIII, eſt TC ad TS ut AC ad AO, puta ſi in coitu punctorum D, d, capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo AC eſt ad (AO ſeu) SK ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Porro corporis deſcendentis velocitas in C eſt ad velocitatem corporis Circulum intervallo SC circa centrum S deſcribentis in ſubduplicata ratione AC ad (AO vel) SK (per Prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis deſcribentis Circulum OKk in ſubduplicata ratione SK ad SC per Cor. 6. Prop. IV, & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc eſt lineola Cc ad arcum Kk in ſubduplicata ratione AC ad SC, id eſt in ratione AC ad CD. Quare eſt $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & propterea AC ad SK ut $AC \times Kk$ ad $SY \times Dd$, indeque $SK \times Kk$ æquale $SY \times Dd$, & $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$, id eſt area KSk æqualis areæ SDd. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ KSk & SDd, quæ, ſi magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis IV) areæ totæ ſimul genitæ ſunt ſemper æquales *Q. E. D.*

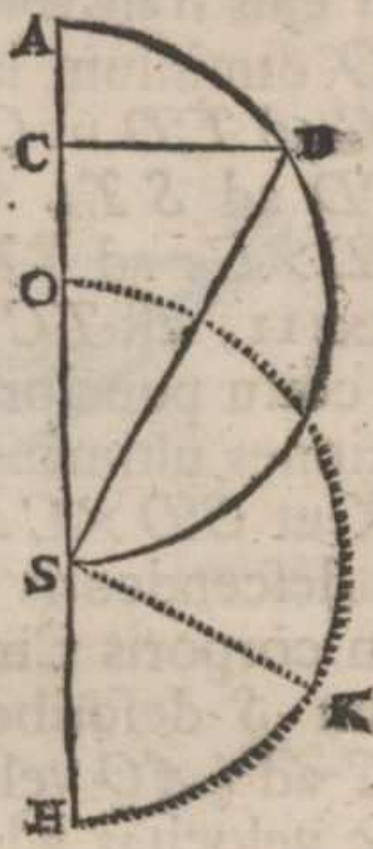


Caſ. 2. Quod ſi Figura DES Parabola ſit, invenietur eſſe ut ſupra $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$ ut TC ad TS, hoc eſt ut 2 ad 1, adeoque $\frac{1}{4} CD \times Cc$ æquale eſſe $\frac{1}{2} SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in C æqualis eſt velocitati qua Circulus intervallo $\frac{1}{2} SC$ uniformiter deſcribi poſſit (per Prop. XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem qua Circulus radio SK deſcribi poſſit, hoc eſt, lineola Cc ad arcum Kk (per Corol. 6. Prop. IV) eſt in ſubduplicata ratione SK ad $\frac{1}{2} SC$, id eſt, in ratione SK ad $\frac{1}{2} CD$. Quare eſt $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4} CD \times Cc$, adeoque æquale $\frac{1}{2} SY \times Dd$, hoc eſt, area KSk æqualis areæ SDd, ut ſupra. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

De Motu Corporum

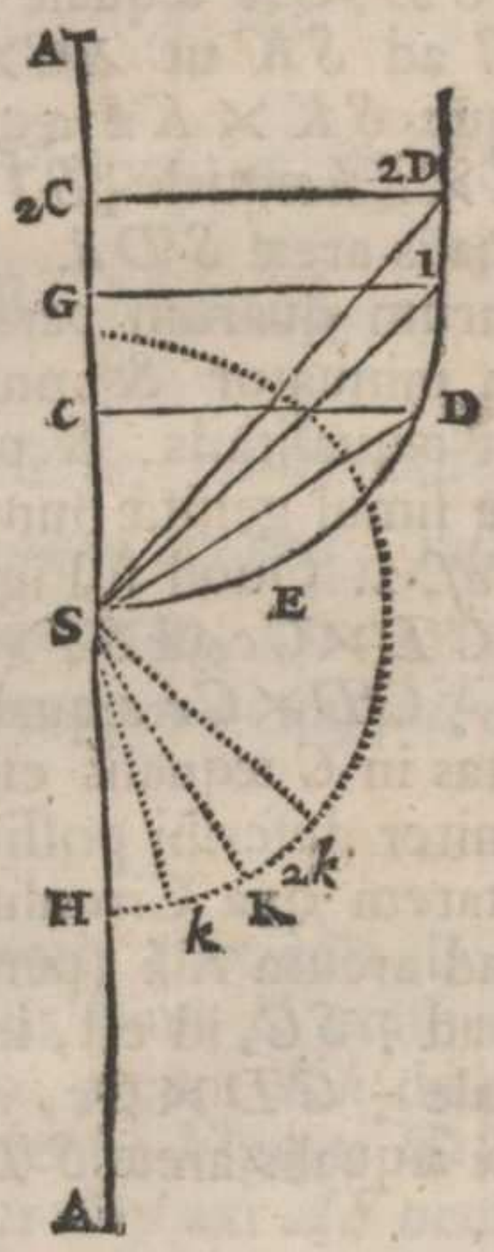
Corporis de loco dato A *cadentis determinare Tempora descensus.*



Super diametro *AS* (distantia corporis a centro sub initio) describe Semicirculum *ADS*, ut & huic æqualem Semicirculum *OKH* circa centrum *S*. De corporis loco quovis *C* erige ordinatim applicatam *CD*. Junge *SD*, & areæ *ASD* æqualem constitue sectorem *OSK*. Patet per Prop. xxxv, quod corpus cadendo describet spatium *AC* eodem Tempore quo corpus aliud uniformiter circa centrum *S* gyrando, describere potest arcum *OK*. *Q.E.F.*

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire Tempora ascensus vel descensus.



Exeat corpus de loco dato *G* secundum lineam *ASG* cum velocitate quacunque. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in Circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi posset, cape *GA* ad $\frac{1}{2}$ *AS*. Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum *A* infinite distat, quo casu parabola vertice *S*, axe *SC*, latere quovis recto describenda est. Patet hoc per Prop. xxxiv. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu Circulus, posteriore Hyperbola rectangula super diametro *SA* describi debet. Patet per Prop xxxiii. Tum centro *S*, intervallo æquante dimidium lateris recti, describatur Circulus *HKk*, & ad corporis ascendentis vel descendentis loca duo quævis *G*, *C*, erigantur perpendicula *GI*, *CD* occurrentia Conicæ Sectioni vel Circulo in *I* ac *D*.

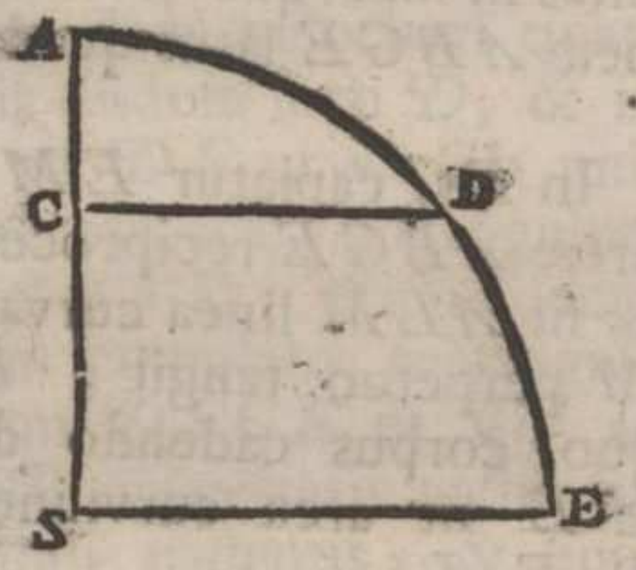
Dein

Dein junctis *SI*, *SD*, fiant segmentis *SEIS*, *SEDS*, sectores *HSK*, *HSk* æquales, & per Prop. xxxv. corpus *G* describet spatium *GC* eodem Tempore quo corpus *K* describere potest arcum *Kk*. *Q. E. F.* LIBER PRIMUS.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Posito quod Vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantiæ locorum a centro, dico quod cadentium Tempora, Velocitates & Spatia descripta sunt arcubus, arcuumque sinibus rectis & sinibus versis respective proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis *A* secundum rectam *AS*; & centro virium *S*, intervallo *AS*, describatur Circuli quadrans *AE*, sitque *CD* sinus rectus arcus cujusvis *AD*; & corpus *A*, Tempore *AD*, cadendo describet Spatium *AC*, inque loco *C* acquiret Velocitatem *CD*.



Demonstratur eodem modo ex Propositione x, quo Propositio xxxii, ex Propositione xi demonstrata fuit.

Corol. 1. Hinc æqualia sunt Tempora quibus corpus unum de loco *A* cadendo pervenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem *ADE*.

Corol. 2. Proinde æqualia sunt Tempora omnia quibus corpora de locis quibusvis ad usque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. iv.) æquantur.

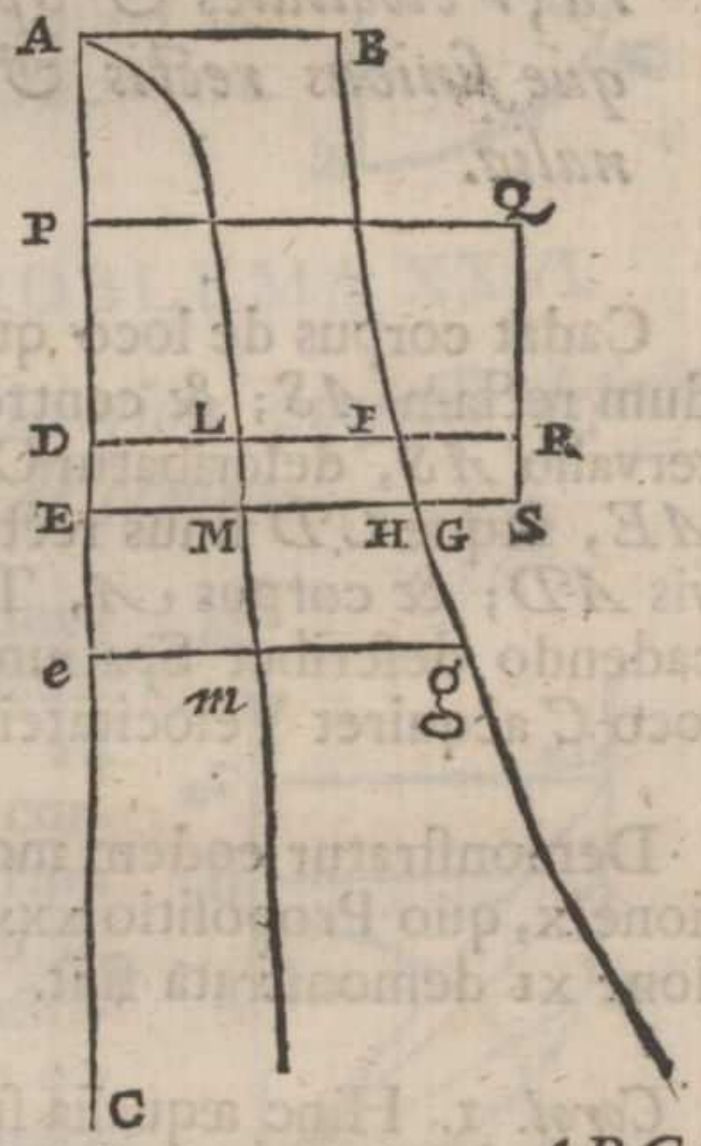
PROPO-

De Motu Corporum

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

Posita cujuscunque generis Vi centripeta, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta ascendentis vel descendentis tum Velocitas in locis singulis, tum Tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis A in recta $ADEC$ cadat corpus E, deque loco ejus E erigatur semper perpendicularis EG, vi centripetæ in loco illo ad centrum C tendenti proportionalis: Sitque BFG linea curva quam punctum G perpetuo tangit. Coincidat autem EG ipso motus initio cum perpendiculari AB, & erit corporis Velocitas in loco quovis E ut areæ curvilineæ $ABGE$ latus quadratum. *Q. E. I.*



In EG capiatur EM lateri quadrato areæ $ABGE$ reciproce proportionalis, & sit ALM linea curva quam punctum M perpetuo tangit, & erit Tempus quo corpus cadendo describit lineam AE ut area curvilinea $ALME$. *Q. E. I.*

Etenim in recta AE capiatur linea quam minima DE datæ longitudinis, sitque DLF locus lineæ EMG ubi corpus versabatur in D; & si ea sit vis centripeta, ut areæ $ABGE$ latus quadratum sit ut descendentis velocitas, erit area ipsa in duplicata ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in D & E scribantur V & V + I erit area $ABFD$ ut VV, & area $ABGE$ ut VV + 2 VI + II, & divisim area $DFGE$ ut 2 VI + II, adeoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2\,VI+II}{DE}$, id est, si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2\,VI}{DE}$, adeoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Est autem tempus quo corpus

corpus cadendo describit lineolam $\mathcal{D}E$, ut lineola illa directe & velocitas V inverse, estque vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverse, adeoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{I \times V}{\mathcal{D}E}$, hoc est, ut longitudo $\mathcal{D}F$. Ergo vis ipsi $\mathcal{D}F$ vel EG proportionalis facit ut corpus ea cum Velocitate descendat, quæ fit ut areæ $ABGE$ latus quadratum. $\mathcal{Q}.E.\mathcal{D}.$

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola $\mathcal{D}E$ describitur, sit ut velocitas inverse adeoque ut areæ $ABF\mathcal{D}$ latus quadratum inverse; sitque $\mathcal{D}L$, atque adeo area nascens $\mathcal{D}LME$, ut idem latus quadratum inverse: erit tempus ut area $\mathcal{D}LME$, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per Corol. Lem. IV.) Tempus totum quo linea AE describitur ut area tota AME. $\mathcal{Q}.E.\mathcal{D}.$

Corol. 1. Si P sit locus de quo corpus cadere debet, ut, urgente aliqua uniformi vi centripeta nota (qualis vulgo supponitur Gravitas) velocitatem acquirat in loco $\mathcal{D}$ æqualem velocitati quam corpus aliud vi quacunque cadens acquisivit eodem loco $\mathcal{D}$, & in perpendiculari $\mathcal{D}F$ capiatur $\mathcal{D}R$, quæ sit ad $\mathcal{D}F$ ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco $\mathcal{D}$, & compleatur rectangulum $P\mathcal{D}R\mathcal{Q}$, eique æqualis abscindatur area $ABF\mathcal{D}$; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo $\mathcal{D}RSE$, cum sit area $ABF\mathcal{D}$ ad aream $\mathcal{D}FGE$ ut VV ad 2 VI, adeoque ut $\frac{1}{2}$ V ad I, id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & similiter area $P\mathcal{Q}R\mathcal{D}$ ad aream $\mathcal{D}RSE$, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ $\mathcal{D}F$, $\mathcal{D}R$, adeoque ut areæ nascentes $\mathcal{D}FGE$, $\mathcal{D}RSE$; erunt (ex æquo) areæ totæ $ABF\mathcal{D}$, $P\mathcal{Q}R\mathcal{D}$ ad invicem ut semisses totarum velocitatum, & propterea (ob æqualitatem velocitatum) æquantur.

Corol. 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque $\mathcal{D}$ data cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco e, erigendo ordinatam eg, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco $\mathcal{D}$ ut est latus quadratum rectanguli $P\mathcal{Q}R\mathcal{D}$ area curvilinea $\mathcal{D}Fge$ vel aucti, si locus e est loco $\mathcal{D}$ inferior, vel diminuti, si iis superior est, ad latus quadratum rectanguli solius $P\mathcal{Q}R\mathcal{D}$, id est, ut $\sqrt{P\mathcal{Q}R\mathcal{D} \pm \text{vel} - \mathcal{D}Fge}$ ad $\sqrt{P\mathcal{Q}R\mathcal{D}}$.

Corol.

De Motu Corporum.

Corol. 3. Tempus quoque innoteſcet erigendo ordinatam em reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD +$ vel $- DFge$, & capiendo tempus quo corpus deſcripſit lineam De ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a P & cadendo pervenit ad D, ut area curvilinea $DLme$ ad rectangulum $2PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi deſcendens deſcripſit lineam PD eſt ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineam PE in ſubduplicata ratione PD ad PE, id eſt (lineola DE jamjam naſcente) in ratione PD ad $PD + \frac{1}{2}DE$ ſeu $2PD$ ad $2PD + DE$ & diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam DE ut $2PD$ ad DE, adeoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLME$; eſtque tempus quo corpus utrumque deſcripſit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam De ut area $DLME$ ad aream $DLme$, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLme$.

SECTIO VIII.

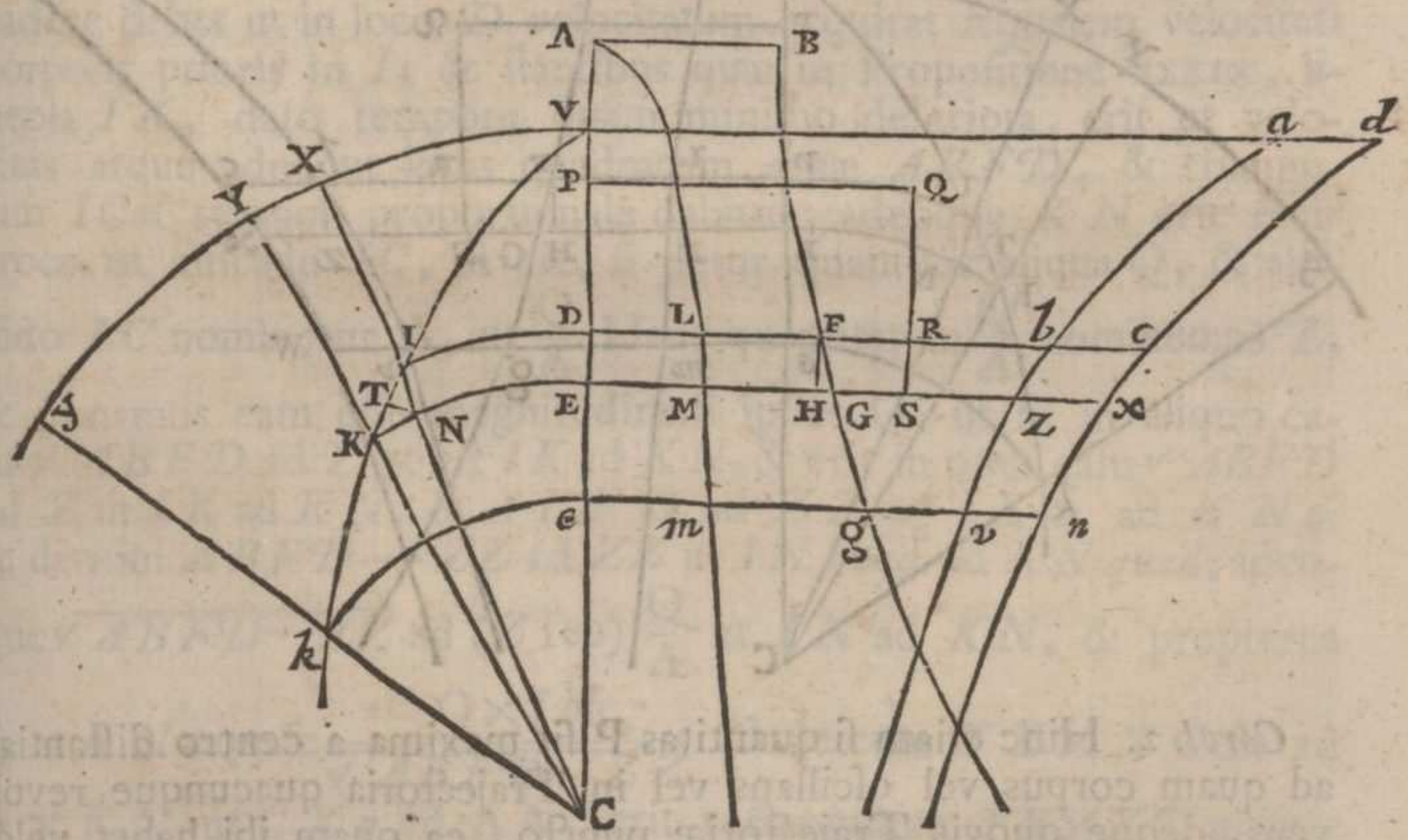
De inventione Orbium in quibus corpora Viribus quibuſcunque centripetis agitata revolvuntur

PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

Si corpus, cogente Vi quacunque centripeta, moveatur utcunque, & corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintque eorum Velocitates in aliquo æqualium altitudinum caſu æquales, Velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Deſcendat corpus aliquod ab A per D, E, ad centrum C, & moveatur corpus aliud a V in linea curva $VIKk$, Centro C intervallis quibuſvis deſcribantur circuli concentrici DI, EK rectæ AC in D & E, curvæque VIK in I & K occurrentes. Jungatur IC occurrens ipſi KE in N; & in IK demittatur perpendiculum NT; ſitque circumferentiarum circulorum intervallum DE vel IN quam minimum, & habeant corpora in D & I velocitates

tes æquales. Quoniam diſtantiæ CD, CI æquantur, erunt vires centripetæ in D & I æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas DE, IN; & ſi vis una IN (per Legum Corol. 2.) reſolvatur in duas NT & IT, vis NT, agendo ſecundum lineam NT corporis curſui ITK perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in curſu illo, ſed retrahet ſolummodo corpus a curſu rectilineo, facietque ipſum de Orbis tangente perpetuo deflectere, inque via curvilinea $ITKk$ progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota conſumetur: vis autem altera IT, ſecundum corporis curſum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit ſibi ipſi proportionalem. Proinde corporum in D & I accelerationes æqualibus temporibus factæ (ſi ſumantur linearum naſcentium DE, IN, IK, IT, NT rationes primæ) ſunt ut lineæ DE, IT: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus DE & IK deſcribuntur, ob æqualitatem velocita-



tum ſunt ut viæ deſcriptæ DE & IK, adeoque accelerationes, in curſu corporum per lineas DE & IK, ſunt ut DE & IT, DE & IK conjunctim, id eſt ut DE *quad.* & $IT \times IK$ *rectangulum.* Sed *rectangulum* $IT \times IK$ æquale eſt IN *quadrato*, hoc eſt, æquale DE *quadrato*; & propterea accelerationes in tranſitu corporum a D & I ad E & K æquales generantur. Æquales igitur ſunt cor-

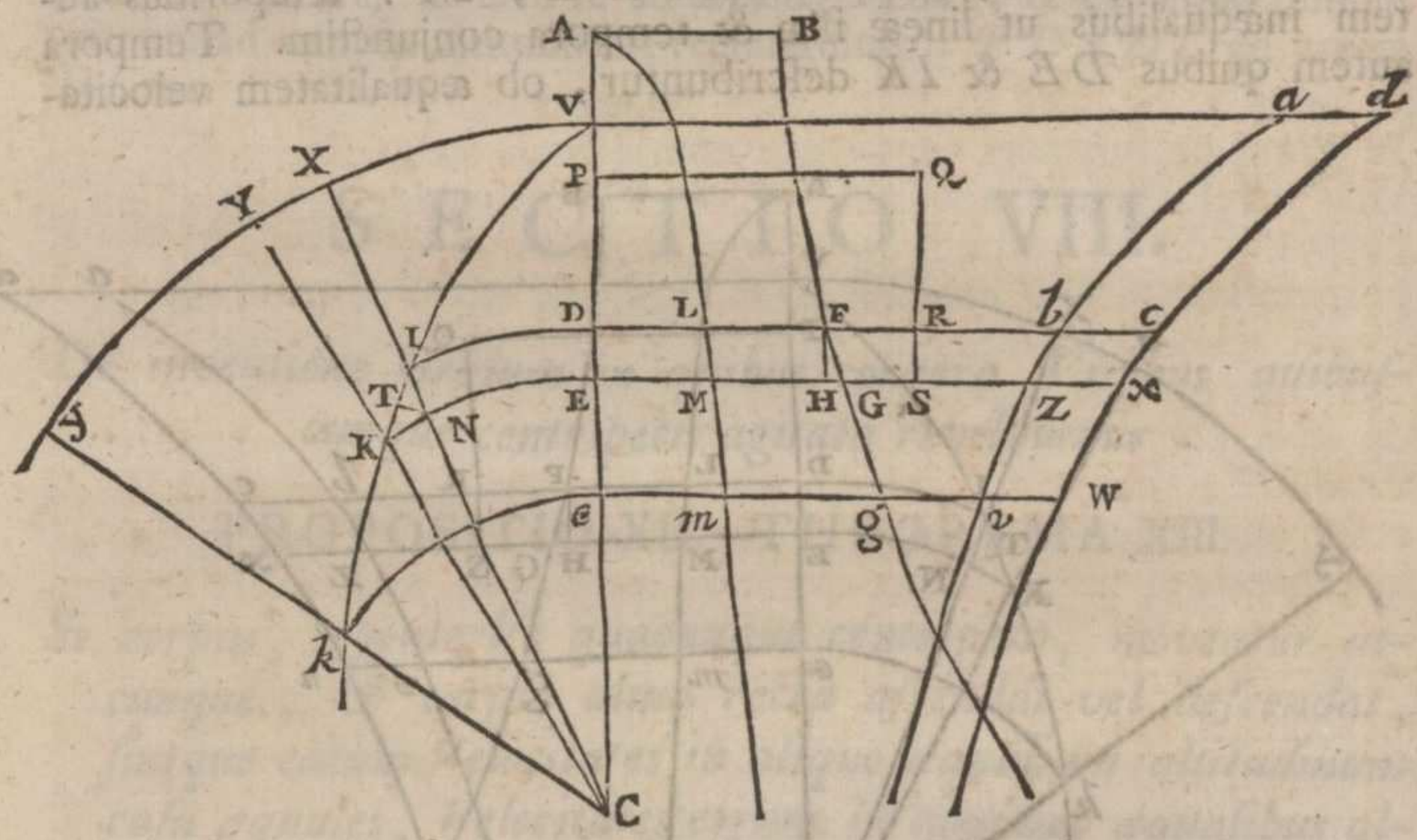
 porum

De Motu Corporum

porum velocitates in *E* & *K* & eodem argumento ſemper reperiuntur æquales in ſubſequentibus æqualibus diſtantiis. *Q.E.D.*

Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro diſtantia, in aſcenſu ad æquales diſtantias æqualiter retardabuntur. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus vel funipendulum oſcilletur, vel impedimento quovis politiſſimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintque velocitates eorum in eadem quacunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuſcunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque impedimento vaſis abſolute lubric idem præſtatur quod vi tranſverſa *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, ſed tantum cogitur de curſu rectilineo diſcedere.



Corol. 2. Hinc etiam ſi quantitas P ſit maxima a centro diſtantia, ad quam corpus vel oſcillans vel in Trajectoria quacunque revolvens, deque quovis Trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate ſurſum projectum aſcendere poſſit; ſitque quantitas A diſtantia corporis a centro in alio quovis Orbitæ puncto, & vis centripeta ſemper ſit ut ipſius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus Index $n-1$ eſt numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque adeo datur. Namque velocitas recta aſcendentis ac deſcendentis (per Prop. XXXIX.) eſt in hac ipſa ratione.

PROPO-

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

Posita cujuscunque generis Vi centripeta & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum Trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum Tempora motuum in Trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum *C* & invenienda sit Trajectoria *VITKk*. Detur Circulus *VXϒ* centro *C* intervallo quovis *CV* descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli *ID*, *KE* Trajectoriam secantes in *I* & *K* rectamque *Cϒ* in *D* & *E*. Age tum rectam *CNIX* secantem circulos *KE*, *Vϒ* in *N* & *X*, tum rectam *CKϒ* occurrentem circulo *VXϒ* in *ϒ*. Sint autem puncta *I* & *K* sibi invicem viciniſſima, & pergat corpus ab *V* per *I*, *T* & *K* ad *k*; sitque punctum *A* locus ille de quo corpus aliud cadere debet ut in loco *D* velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in *I*; & stantibus quæ in Propositione XXXIX, lineola *IK*, dato tempore quam minimo descripta, erit ut velocitas atque adeo ut latus quadratum areæ *ABFD*, & triangulum *ICK* tempori proportionale dabitur; adeoque *KN* erit reciproce ut altitudo *IC*, id est, si detur quantitas aliqua Q, & altitudo *IC* nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam esse magnitudinem ipsius Q, ut sit in aliquo casu $\surd ABFD$ ad Z ut est *IK* ad *KN*, & erit in omni casu $\surd ABFD$ ad *Z* ut *IK* ad *KN*, & *ABFD* ad *ZZ* ut *IK q.* ad *KN q.* & divisim *ABFD* — *ZZ* ad *ZZ* ut *IN quad.* ad *KN quad*; adeoque $\surd\overline{ABFD-ZZ}$ ad (*Z* seu) $\frac{Q}{A}$ ut *IN* ad *KN*, & propterea A × *KN* æquale $\frac{Q\times IN}{\surd ABFD-ZZ}$. Unde cum *ϒX* × *XC* sit ad A × *KN* ut *CX q* ad AA, erit rectangulum *ϒX*×*XC* æquale $\frac{Q\times IN\times CX\ quad.}{AA\surd ABFD-ZZ}$. Igitur si in perpendiculo *DF* capiantur semper *Db*, *Dc* ipsis $\frac{Q}{2\surd ABFD-ZZ}$ & $\frac{Q\times CX\ quad.}{2AA\surd ABFD-ZZ}$ æquales respective, & describantur curvæ lineæ *ab*, *cd*, quas

De Motu Corporum.

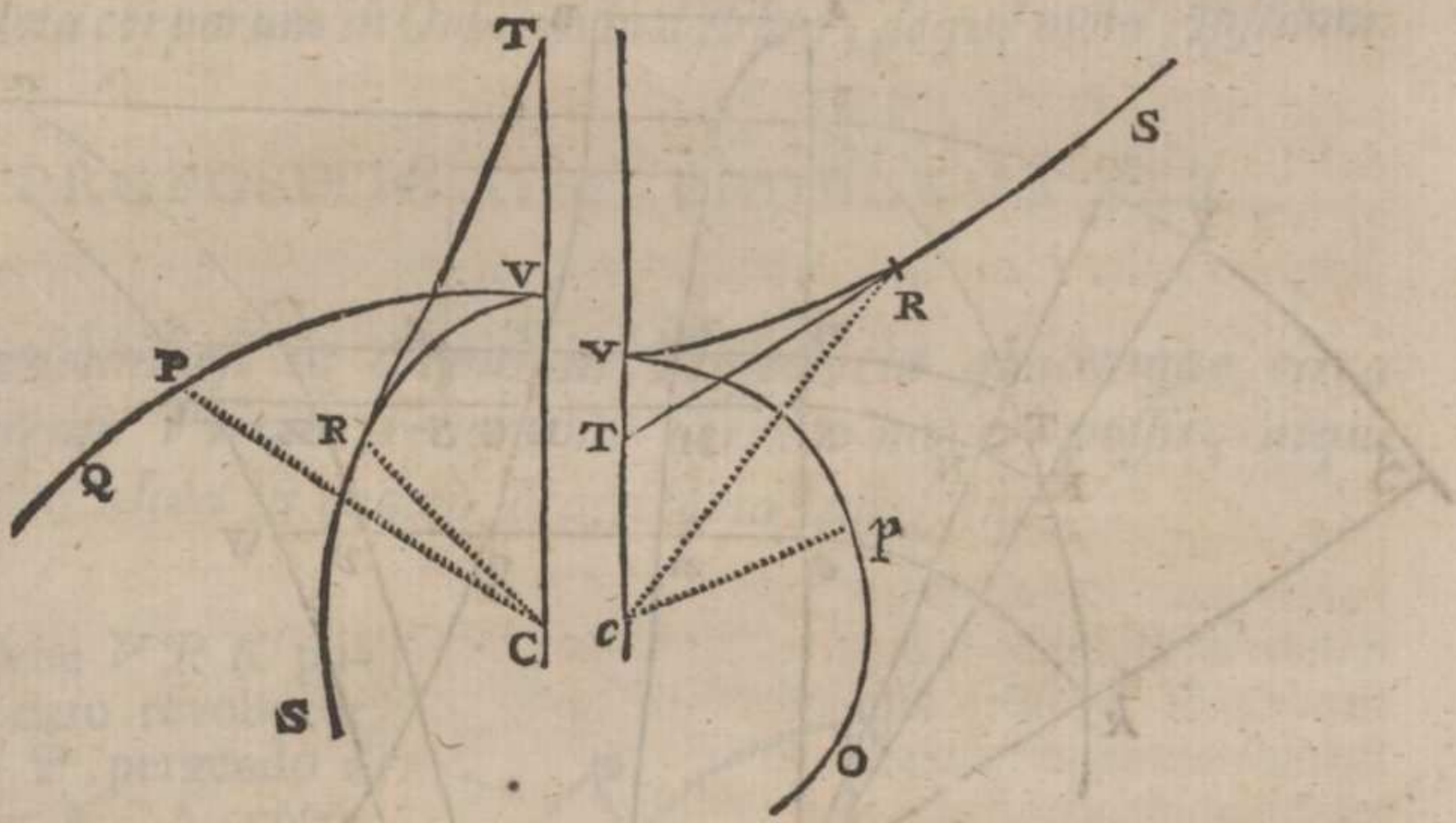
puncta b, c perpetuo tangunt; deque puncto V ad lineam AC, erigatur perpendiculum $V\,a\,d$ abscindens areas curvilineas $V\,D\,b\,a$, $V\,D\,c\,d$, & erigantur etiam ordinatæ $E\,z$, $E\,x$: quoniam rectangulum $D\,b \times I\,N$ seu $D\,b\,z\,E$ æquale est dimidio rectanguli $A \times K\,N$, seu triangulo $I\,C\,K$; & rectangulum $D\,c \times I\,N$ seu $D\,c\,x\,E$ æquale est dimidio rectanguli $\Upsilon X \times XC$, seu triangulo $XC\Upsilon$; hoc est, quoniam arearum $V\,D\,b\,a$, $V\,I\,C$ æquales semper sunt nascentes particulæ $D\,b\,z\,E$, $I\,C\,K$, & arearum $V\,D\,c\,d$, $V\,C\,X$ æquales semper sunt nascentes particulæ $D\,c\,x\,E$, $X\,C\,\Upsilon$, erit area genita $V\,D\,b\,a$ æqualis areæ genitæ $V\,I\,C$, adeoque tempori proportionalis, & area genita $V\,D\,c\,d$ æqualis Sectori genito $V\,C\,X$. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco V, dabitur area ipsi proportionalis $V\,D\,b\,a$, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI; & area $V\,D\,c\,d$, eique æqualis Sector $V\,C\,X$ una cum ejus angulo $V\,C\,I$. Datis autem angulo $V\,C\,I$ & altitudine CI datur locus I, in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est Apsides Trajectoriarum expedite inveniri possunt. Sunt enim Apsides puncta illa in quibus recta $I\,C$ per centrum ducta incidit perpendiculariter in Trajectoriam $V\,I\,K$: id quod fit ubi rectæ $I\,K$ & $N\,K$ æquantur, adeoque ubi area $A\,B\,F\,D$ æqualis est $Z\,Z$.

Corol. 2. Sed & angulus $K\,I\,N$, in quo Trajectoria alibi secat lineam illam $I\,C$, ex data corporis altitudine $I\,C$ expedite invenitur; nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut $K\,N$ ad $I\,K$, id est, ut Z ad latus quadratum areæ $A\,B\,F\,D$.

Corol. 3. Si centro C & vertice principali V describatur Sectio quælibet Conica $V\,R\,S$, & a quovis ejus puncto R agatur Tangens $R\,T$ occurrens axi infinite producto $C\,V$ in puncto T; dein juncta $C\,R$ ducatur recta $C\,P$, quæ æqualis sit abscissæ $C\,T$, angulumque $V\,C\,P$ Sectori $V\,C\,R$ proportionalem constituat; tendat autem ad centrum C Vis centripeta Cubo distantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco V justa cum Velocitate secundum lineam rectæ $C\,V$ perpendicularem: progredietur corpus illud in Trajectoria quam punctum P perpetuo tangit; adeoque si Conica sectio $C\,V\,R\,S$ Hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea Ellipsis sit, ascendet illud perpetuo & abibit in infinitum. Et contra, si corpus quacunque cum Velocitate exeat de loco V, & perinde ut incœperit vel oblique descendere ad centrum, vel ab eo oblique

lique ascendere, Figura *CVRS* vel Hyperbola sit vel Ellipsis, in- LIBER veniri potest Trajectoria augendo vel minuendo angulum *VCP* PRIMUS. in data aliqua ratione. Sed &, Vi centripeta in centrifugam versa,



ascendet corpus oblique in Trajectoria *VPQ*, quæ invenitur capiendo angulum *VCP* Sectori Elliptico *CVRC* proportionalem, & longitudinem *CP* longitudini *CT* æqualem ut supra. Consequuntur hæc omnia ex Propositione præcedente, per Curvæ cujusdam quadraturam, cujus inventionem, ut satis facilem, brevitatis gratia missam facio.

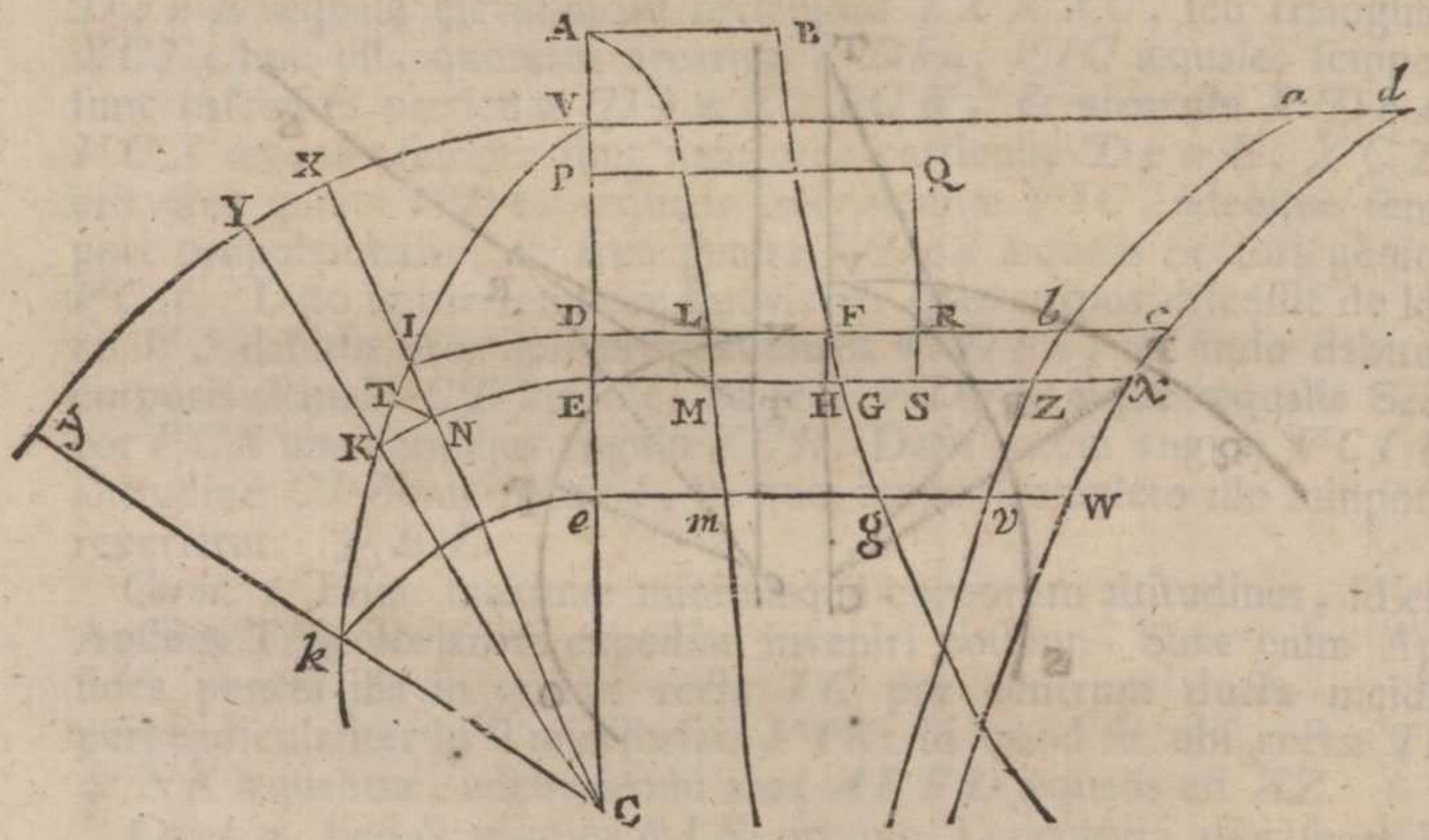
PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

Data lege Vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato cum Velocitate secundum datam rectam egressi.

Stantibus quæ in tribus Propositionibus præcedentibus : exeat corpus de loco *I* secundum lineolam *IT*, ea cum Velocitate quam corpus aliud, vi aliqua uniformi centripeta, de loco *P* cadendo acquirere posset in *D*: sitque hæc vis uniformis ad vim qua corpus

primum

De Motu Corporum primum urgetur in I, ut DR ad DF. Pergat autem corpus versus k; centroque C & intervallo Ck describatur circulus ke occurrens rectæ PD in e, & erigantur curvarum $ALMm$, $BFGg$, $abzv$, $dcxw$,



ordinatim applicatæ em, eg, ev, ew. Ex dato rectangulo $PDRQ$, dataque lege vis centripetæ qua corpus primum agitatur, dantur curvæ lineæ $BFGg$, $ALMm$, per constructionem Problematis XXVII, & ejus Corol. 1. Deinde ex dato angulo CIT datur proportio nascentium IK, KN, & inde, per constructionem Prob. XXVIII, datur quantitas Q, una cum curvis lineis $abzv$, $dcxw$: adeoque completo tempore quovis $Dbve$, datur tum corporis altitudo Ce vel Ck, tum area $Dcwe$, eique æqualis Sector XCy, angulusque ICk & locus k in quo corpus tunc versabatur. *Q. E. I.*

Supponimus autem in his Propositionibus Vim centripetam in recessu quidem a centro variari secundum legem quamcunque quam quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantiis esse undeque eandem. Atque hactenus Motum corporum in Orbibus immobilibus consideravimus. Supereſt ut de Motu eorum in Orbibus qui circa centrum virium revolvuntur adjiciamus pauca.

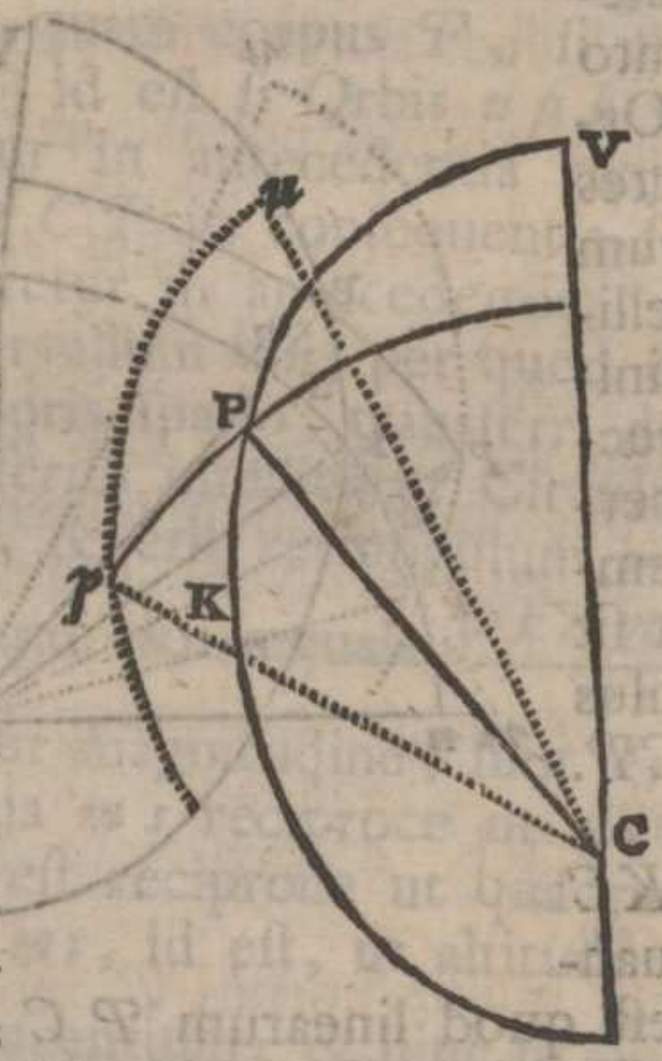
SECTIO

SECTIO IX.

De Motu corporum in Orbibus mobilibus, deque motu Apſidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

Efficiendum eſt ut corpus in Trajectoria quacunque circa centrum Virium revolvente perinde moveri poſſit, atque corpus aliud in eadem Trajectoria quieſcente.



In Orbe *V P K* poſitione dato revolvatur corpus *P* pergendo a *V* verſus *K*. A centro *C* agatur ſemper *C p*, quæ ſit ipſi *C P* æqualis, angulumque *V C p* angulo *V C P* proportionalem conſtituat; & area quam linea *C p* deſcribit erit ad aream *V C P* quam linea *C P* ſimul deſcribit, ut velocitas lineæ deſcribentis *C P* ad velocitatem lineæ deſcribentis *C P*; hoc eſt, ut angulus *V C p* ad angulum *V C P*, adeoque in data ratione, & propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis ſit quam linea *C p* in plano immobili deſcribit; manifeſtum eſt quod corpus, cogente juſtæ quantitatis Vi centripeta, revolvi poſſit una cum puncto *p* in Curva illa linea quam punctum idem *p* ratione jam expoſita deſcribit in plano immobili. Fiat angulus *V C u* angulo *P C p*, & linea *C u* lineæ *C V*, atque Figura *u C p* Figuræ *V C P* æqualis, & corpus in *p* ſemper exiſtens movebitur in

De Motu Corporum

ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rk\,q}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc eſt, ſi capiantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCp, ut GG—FF ad FF. Et propterea, ſi centro C intervallo quovis CP vel Cp deſcribatur Sector circularis æqualis areæ toti VPC, quam corpus P tempore quovis in Orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto deſcripſit: differentia virium, quibus corpus P in Orbe immobili & corpus p in Orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam qua corpus aliquod radio ad centrum ducto Sectorem illum, eodem tempore quo deſcripta ſit area VPC uniformiter deſcribere potuiſſet, ut GG—FF ad FF. Namque Sector ille & area pCk ſunt ad invicem ut tempora quibus deſcribuntur.

Corol. 2. Si Orbis VPK Ellipſis ſit umbilicum habens C & Apſidem ſummam V; eique ſimilis & æqualis ponatur Ellipſis upk, ita ut ſit ſemper pC æqualis PC, & angulus VCp ſit ad angulum VCP in data ratione G ad F; pro altitudine autem PC vel pC ſcribatur A, & pro Ellipſeos latere recto ponatur 2 R: erit vis qua corpus in Ellipſi mobili revolvi poteſt, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$ & contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota Ellipſi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in V erit $\frac{FF}{CV\,quad.}$. Vis autem qua corpus in Circulo ad diſtantiam CV ea cum velocitate revolvi poſſet quam corpus in Ellipſi revolvens habet in V, eſt ad vim qua corpus in Ellipſi revolvens urgetur in Apſide V, ut dimidium lateris recti Ellipſeos ad Circuli ſemidiametrum CV, adeoque valet $\frac{RFF}{CV\,cub.}$: & vis quæ ſit ad hanc ut GG—FF ad FF, valet $\frac{RGG-RFF}{CV\,cub.}$: eſtque hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium in V quibus corpus P in Ellipſi immota VPK, & corpus p in Ellipſi mobili upk revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A ſit ad ſeipſam in altitudine CV ut $\frac{1}{A\,cub.}$ ad $\frac{1}{CV\,cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$ qua corpus revolvi poteſt in Ellipſi immobili VPK, addatur exceſſus $\frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$ & componetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$ qua

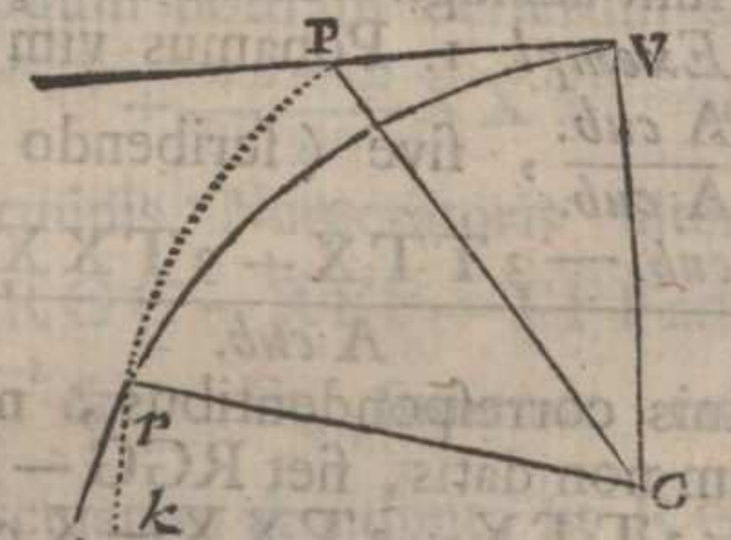
qua corpus in Ellipſi mobili *u p k* iiſdem temporibus revolvi poſſit.

Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, ſi Orbis immobilis *V P K* Ellipſis ſit centrum habens in virium centro *C*; eique ſimilis, æqualis & concentrica ponatur Ellipſis mobilis *u p k*; ſitque 2 R Ellipſeos hujus latus rectum principale, & 2 T latus tranſverſum ſive axis major, atque angulus *V C p* ſemper ſit ad angulum *V C P* ut G ad F; vires quibus corpora in Ellipſi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi poſſunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\,cub.}$ & $\frac{FFA}{T\,cub.} + \frac{RGG - RFF}{A\,cub.}$ reſpective.

Corol. 4. Et univerſaliter, ſi corporis altitudo maxima *C V* nominetur T, & radius curvaturæ quam Orbis *V P K* habet in *V*, id eſt radius Circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta qua corpus in Trajectoria quacunque immobili *V P K* revolvi poteſt, in loco *V* dicatur $\frac{VFF}{TT}$ atque aliis in locis *P* indefinite dicatur X, altitudine *C P* nominata A, & capiatur G ad F in data ratione anguli *V C p* ad angulum *V C P*: erit vis centripeta qua corpus idem eoſdem motus in eadem Trajectoria *u p k* circulariter mota temporibus iiſdem peragere poteſt, ut ſumma virium $X + \frac{VRGG - VRFF}{A\,cub.}$.

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunque immobili, augeri vel minui poteſt ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi Orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur ſi ad rectam *C V* poſitione datam erigatur perpendiculum *V P* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *C P*, & ipſi æqualis agatur *C p*, conſtituens angulum *V C p*, qui ſit ad angulum *V C P* in data ratione; vis qua corpus gyrari poteſt in Curva illa *V p k* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis *C p*. Nam corpus *P*, per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi poteſt in recta *V P*. Addatur vis in centrum *C*, cubo altitudinis *C P* vel *C p* reciproce proportionalis, & (per jam demonſtrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam



DE MOTU CORPORUM

curvam $V p k$. Est autem hæc Curva $V p k$ eadem cum Curva illa $V P Q$ in Corol. 3. Prop. XLI inventa, in qua ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta oblique ascendere.

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

Orbium qui sunt Circulis maxime finitimi requiruntur motus Apsidum.

Problema solvitur Arithmetice faciendo ut Orbis, quem corpus in Ellipsi mobili (ut in Propositionis superioris Corol. 2. vel 3.) revolvens describit in plano immobili, accedat ad formam Orbis cujus Apsides requiruntur, & quærendo Apsides Orbis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem acquirent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum V Apsis summa, & scribantur T pro altitudine maxima CV, A pro altitudine quavis alia CP vel Cp, & X pro altitudinum differentia $CV - CP$; & vis qua corpus in Ellipsi circa umbilicum suum C (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæque in Corollario 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$, id est ut $\frac{FFA + RGG - RFF}{A\ cub.}$, substituendo $T - X$ pro A, erit ut $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A\ cub.}$. Reducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit A *cub.*, & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res Exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, adeoque ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$, sive (scribendo $T - X$ pro A in Numeratore) ut $\frac{T\ cub. - 3TTX + 3TXX - X\ cub.}{A\ cub.}$; & collatis Numeratorum terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $T\ cub.$ ut $-FFX$ ad $-3TTX + 3TXX - X\ cub.$ sive ut $-FF$ ad $-3TT + 3TX - XX$. Jam cum Orbis ponatur Circulo quam maxime finitimus, coeat Orbis cum Circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum

infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut — FF ad — 3 TT, ſeu GG ad T T ut FF ad 3 TT & viciſſim GG ad FF ut TT ad 3 TT id eſt, ut 1 ad 3; adeoque G ad F, hoc eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in Ellipſi immobili, ab Apſide ſumma ad Apſidem imam deſcendendo conficiat angulum VCP (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in Ellipſi mobili, atque adeo in Orbe immobili de quo agimus, ab Apſide ſumma ad Apſidem imam deſcendendo conficiet angulum VCp graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id adeo ob ſimilitudinem Orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta deſcribit, & Orbis illius quem corpus in Ellipſi revolvente gyros peragens deſcribit in plano quieſcente. Per ſuperiorem terminorum collationem ſimiles redduntur hi Orbes, non univerſaliter, ſed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in Orbe propemodum circulari revolvens, inter Apſidem ſummam & Apſidem imam conficiet ſemper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, ſeu 103 *gr.* 55 *m.* 23. *ſec.* ad centrum; perveniens ab Apſide ſumma ad Apſidem imam ubi ſemel confecit hunc angulum, & inde ad Apſidem ſummam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & ſic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam eſſe ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} ſeu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n ſignificant dignitatum indices quoſcunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n ſeu $\overline{T-X}^n$ in ſeriem indeterminatam per Methodum noſtram Serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis Numeratoris alterius RGG — RFF + TFF — FFX, fit RGG — RFF + TFF ad T^n ut — FF ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut — FF ad $-nT^{n-1}$, ſeu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1} & viciſſim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1}, id eſt ut 1 ad n; adeoque G ad F, id eſt angulus VCp ad angulum VCP; ut

De Motu Corporum

ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam, in Ellipsi confectus, sit graduum 180; conficietur angulus VCp, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam, in Orbe propemodum Circulari quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab Apside ima ad Apsidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis a centro, id est, ut A seu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{n}$ æqualis 2; adeoque angulus inter Apsidem summam & Apsidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* seu 90. *gr.* Completa igitur quarta parte revolutionis unius, corpus perveniet ad Apsidem imam, & completa alia quarta parte ad Apsidem summam, & sic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propositione x. manifestum est. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in Ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciproce ut distantia, id est directe ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2. adeoque inter Apsidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127 *gr.* 16. *m.* 45. *sec.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab Apside summa ad imam & ab ima ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciproce ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciproce ut $A^{\frac{11}{4}}$, adeoque directe ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ seu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$, erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de Apside summa discedens & subinde perpetuo descendens, perveniet ad Apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad Apsidem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum Altitudinis, & b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$, id est, ut $\frac{b\text{in}\,T-X^m + c\text{in}\,T-X^n}{A\ cub.}$ seu (per eandem Methodum nostram Serierum convergentium) ut

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2}\ \&c.}{A\ cub.}$$

&

& collatis numeratorum terminis, fiet RGG — RFF + TFF ab $b\,T^m + c\,T^n$, ut — F F ad $-m\,b\,T^{m-1} - n\,c\,T^{n-1} + \frac{mm-m}{2} b X T^{m-2} + \frac{nn-n}{2} c X T^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $b\,T^{m-1} + c\,T^{n-1}$, ut FF ad $m\,b\,T^{m-1} + n\,c\,T^{n-1}$, & viciſſim GG ad FF ut $b\,T^{m-1} + c\,T^{n-1}$ ad $m\,b\,T^{m-1} + n\,c\,T^{n-1}$ Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam *CV* ſeu T arithmetice per Unitatem, fit GG ad FF ut $b + c$ ad $mb + nc$, adeoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde eſt G ad F, id eſt angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum Angulus *VCP* inter Apſidem ſummam & Apſidem imam in Ellipſi immobili ſit 180. *gr.* erit angulus *VCp* inter eaſdem Apſides, in Orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{b\,A^m + c\,A^n}{A\ cub.}$ proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento ſi vis centripeta ſit ut $\frac{b\,A^m - c\,A^n}{A\ cub.}$, angulus inter Apſides invenietur graduum $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec ſecus reſolvetur Problema in caſibus difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis eſt, reſolvi ſemper debet in Series convergentes denominatorem habentes A *cub.* Dein pars data numeratoris qui ex illa operatione provenit, ad ipſius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus R G G — R F F + T F F — F F X ad ipſius partem alteram non datam in eadem ratione ponendæ ſunt : Et quantitates ſuperfluas delendo, ſcribendoque Unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

LIBER I PRIMUS.

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta ſit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri poteſt dignitas illa ex motu Apſidum ; & contra. Nimirum ſi motus totus angularis, quo corpus redit ad Apſidem eandem, ſit ad motum angularem revolutionis unius, ſeu graduum 360, ut numerus aliquis *m* ad numerum alium *n*, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus In-

De Motu Corporum

dex eſt $\frac{nn}{mm} - 3$. Id quod per exempla ſecunda manifeſtum eſt. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione, in receſſu a centro, decreſcere non poſſe: Corpus tali vi revolvens deque Apſide diſcedens, ſi cœperit deſcendere nunquam perveniet ad Apſidem imam ſeu altitudinem minimam, ſed deſcendet uſque ad centrum, deſcribens Curvam illam lineam de qua egimus in Cor. 3. Prop. XLI. Sin cœperit illud, de Apſide diſcedens, vel minimum aſcendere, aſcendet in infinitum, neque unquam perveniet ad Apſidem ſummam. Deſcribet enim Curvam illam lineam de qua actum eſt in eodem Corol. & in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic & ubi vis, in receſſu a centro, decreſcit in majore quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apſide diſcedens, perinde ut cœperit deſcendere vel aſcendere, vel deſcendet ad centrum uſque vel aſcendet in infinitum. At ſi vis, in receſſu a centro, vel decreſcat in minore quam triplicata ratione altitudinis, vel creſcat in altitudinis ratione quacunque; corpus nunquam deſcendet ad centrum uſque, ſed ad Apſidem imam aliquando perveniet: & contra, ſi corpus de Apſide ad Apſidem alternis vicibus deſcendens & aſcendens nunquam appellat ad centrum; vis in receſſu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decreſcet: & quo citius corpus de Apſide ad Apſidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut ſi corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de Apſide ſumma ad Apſidem ſummam alterno deſcenſu & aſcenſu redierit; hoc eſt, ſi fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, adeoque $\frac{nn}{mm} - 3$ valeat $\frac{1}{64} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64}} - 3$ vel $A^{\frac{1}{16}} - 3$ vel $A^{\frac{1}{4}} - 3$ vel $A^{\frac{4}{9}} - 3$, id eſt, reciproce ut $A^3 - \frac{1}{64}$ vel $A^3 - \frac{1}{16}$ vel $A^3 - \frac{1}{4}$ vel $A^3 - \frac{4}{9}$. Si corpus ſingulis revolutionibus redierit ad Apſidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}} - 3$ æqualis $A - 2$ ſeu $\frac{1}{AA}$, & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonſtratum eſt. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apſidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}} - 3$ æqualis $A^{\frac{16}{9}} - 3$ vel $A^{\frac{9}{4}} - 3$ vel A^{9-3} vel A^{16-3}; & propterea vis aut reciproce ut

$A^{\frac{11}{9}}$

A^{11}_{9} vel A^{3}_{4}, aut directe ut A^{6} vel A^{13}. Denique si corpus pergendo ab Apside summa ad Apsidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, adeoque Apsis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit *m* ad *n* ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* sive ut 121 ad 120, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}} - 3$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ seu reciproce ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proxime. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. LIBER PRIMUS.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus vi centripeta, quæ sit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per Exempla tertia) motus Apsidum qui ex vi illa extranea orietur, & contra. Ut si vis qua corpus revolvitur in Ellipsi sit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut cA, adeoque vis reliqua ut $\frac{A - cA^4}{A\ cub.}$; erit (in Exemplis tertiis) *b* æqualis 1, *m* æqualis 1, *n* æqualis 4, adeoque angulus revolutionis inter Apsides æqualis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponatur vim illam extraneam esse $357,^{45}$ partibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipsi, id est *c* esse $\frac{100}{35745}$, existente A vel T æquali 1; & $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180 \sqrt{\frac{35645}{35345}}$ seu 180, 7623, id est, 180 *gr.* 45. *m.* 44. *s.* Igitur corpus de Apside summa discedens, motu angulari 180 *gr.* 45. *m.* 44. *s.* perveniet ad Apsidem imam, & hoc motu duplicato ad Apsidem summam redibit: adeoque Apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31 *m.* 28 *sec.*

Hactenus de Motu Corporum in Orbibus quorum plana per centrum Virium transeunt. Superest ut Motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui Motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares: & pari jure Motus corporum Viribus quibuscunque centra

De Motu Corporum. tra petentium, & planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & Orbitas movendo describunt. Et eadem lege Motus corporum in superficiebus Curvis peractos subinde determinamus.

SECTIO X.

De Motu Corporum in Superficiebus datis, deque Funipendulorum Motu reciproco.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Posita cujuscunque generis Vi centripeta, datoque tum Virium centro tum Plano quocunque in quo corpus revolvitur, & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur Motus corporis de loco dato, data cum Velocitate, secundum rectam in Plano illo datam egressi.

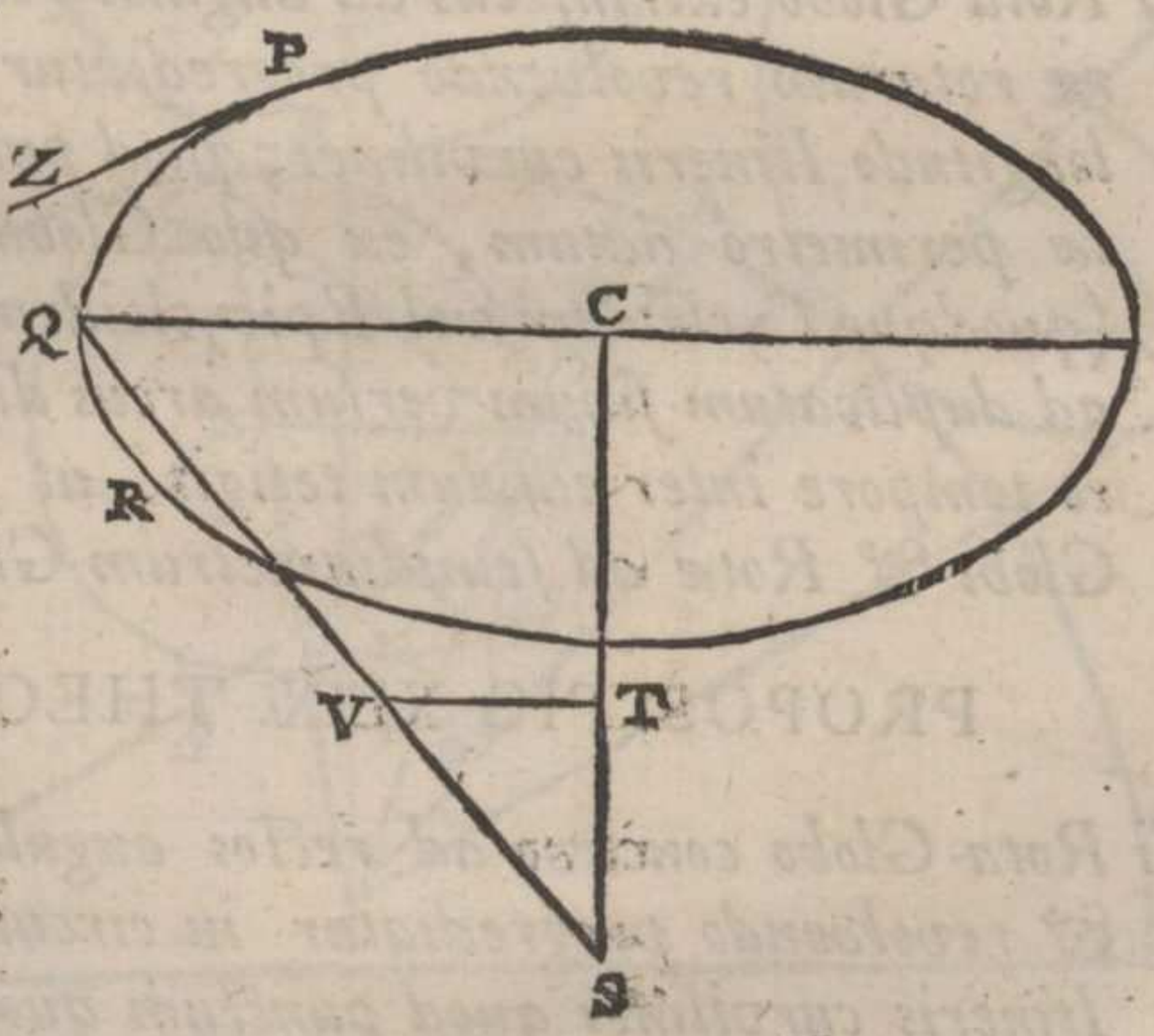
Sit S centrum Virium, SC distantia minima centri hujus a Plano dato, P corpus de loco P, secundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in Trajectoria sua revolvens, & PQR Trajectoria illa, in Plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ, QS, & si in QS capiatur SV proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur versus centrum S, & agatur VT quæ sit parallela CQ & occurrat SC in T: Vis SV resolvetur (per Legum Corol. 2.) in vires ST, TV; quarum ST trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV, agendo secundum positionem plani, trahit corpus directe versus punctum C in plano datum, adeoque facit illud in hoc plano perinde moveri ac si vis ST tolleretur, & corpus vi sola TV revolveretur circa centrum C in spatio libero. Data autem

vi

vi centripeta TV qua corpus Q in ſpatio libero circa centrum da- LIBER
tum C revolvitur, datur per Prop. XLII, tum Trajectoria PQR PRIMUS
quam corpus deſcribit, tum locus Q in quo corpus ad datum quod-
vis tempus verſabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo
Q; & contra. *Q.E.I.*

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

Poſito quod Vis centripeta proportionalis ſit diſtantiæ corporis a centro; corpora omnia in planis quibuſcunque revolventia deſcribent Ellipſes, & revolutiones Temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultro citroque diſcurrendo, ſingulas eundi & redeundi periodos iiſdem Temporibus abſolvent.



Nam, ſtantibus quæ in ſuperiori Propoſitione, vis SV qua corpus Q in plano quovis PQR revolvens trahitur verſus centrum S eſt ut diſtantia SQ; atque adeo ob proportionales SV & SQ, TV & CQ, vis TV qua corpus trahitur verſus punctum C in Orbis plano datum, eſt ut diſtantia CQ. Vires igitur, quibus corpora in plano PQR verſantia trahuntur verſus punctum C, ſunt pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur verſus centrum S; & propterea corpora movebuntur iiſdem temporibus, in iiſdem Figuris, in plano quovis PQR circa punctum C, atque in ſpatiis liberis circa centrum S; adeoque (per Corol. 2. Prop. X, & Corol 2. Prop. XXXVIII) Temporibus ſemper

DE MOTU CORPORUM

æqualibus, vel deſcribent Ellipſes in plano illo circa centrum *C*, vel periodos movendi ultro citroque in lineis rectis per centrum *C* in plano illo ductis, complebunt. *Q. E. D.*

Scholium.

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circa axes quoſvis datos per centrum Virium tranſeuntes revolvi, & ea revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique aſcendendo & deſcendendo currant ultro citroque peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atque adeo in lineis curvis quarum revolutione curvæ illæ ſuperficies genitæ ſunt. Iſtis igitur in caſibus ſufficit motum in his lineis curvis conſiderare.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

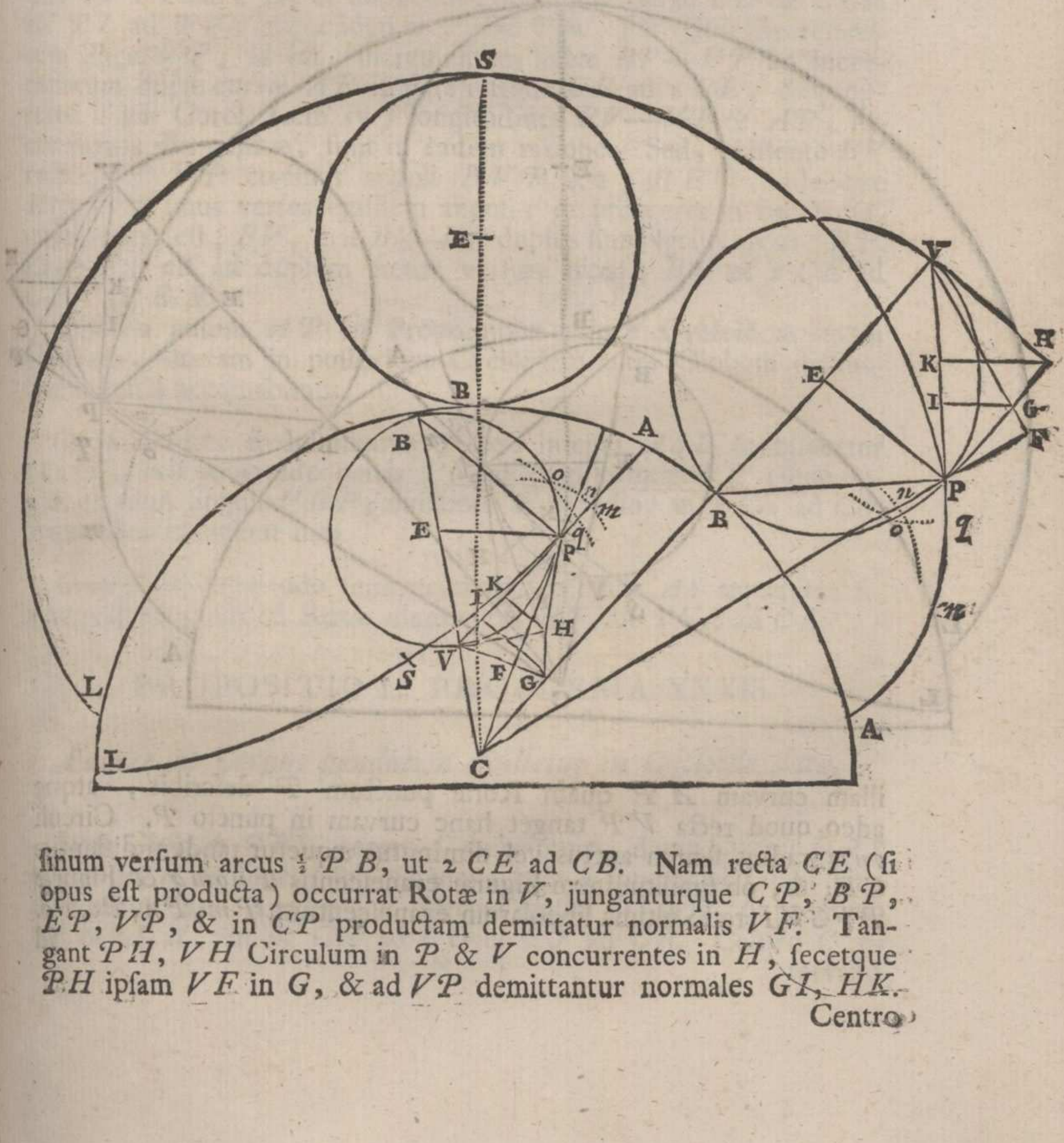
Si Rota Globo extrinſecus ad angulos rectos inſiſtat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo Itineris curvilinei, quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, (quodque Cycloidem vel Epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui Globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut ſumma diametrorum Globi & Rotæ ad ſemidiametrum Globi.

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

Si Rota Globo concavo ad rectos angulos intrinſecus inſiſtat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo Itineris curvilinei quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui Globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum Globi & Rotæ ad ſemidiametrum Globi.

Sit

Sit *ABL* Globus, *C* centrum ejus, *BPV* Rota ei inſiſtens, *E* centrum Rotæ, *B* punctum contactus, & *P* punctum datum in perimetro Rotæ. Concipe hanc Rotam pergere in circulo maximo *ABL* ab *A* per *B* verſus *L*, & inter eundum ita revolvi ut arcus *AB*, *PB* ſibi invicem ſemper æquentur, atque punctum illud *P* in perimetro Rotæ datum interea deſcribere Viam curvilineam *AP*. Sit autem *AP* Via tota curvilinea deſcripta ex quo Rota Globum tetigit in *A*, & erit Viæ hujus longitudo *AP* ad duplum



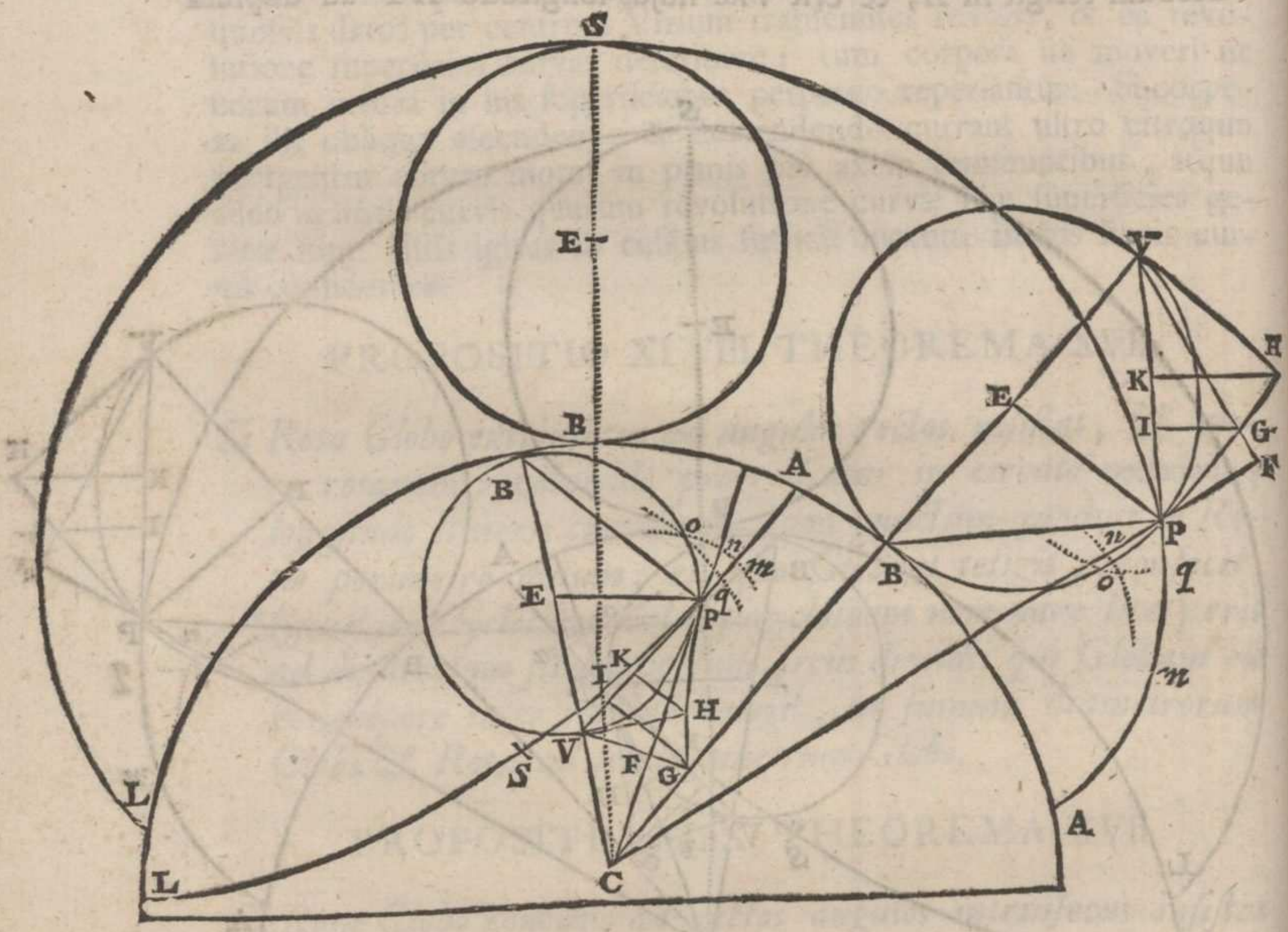
ſinum verſum arcus ½ *PB*, ut 2 *CE* ad *CB*. Nam recta *CE* (ſi opus eſt producta) occurrat Rotæ in *V*, junganturque *CP*, *BP*, *EP*, *VP*, & in *CP* productam demittatur normalis *VF*. Tangant *PH*, *VH* Circulum in *P* & *V* concurrentes in *H*, ſecetque *PH* ipſam *VF* in *G*, & ad *VP* demittantur normales *GI*, *HK*.

Centro-

De Motu Corporum

Centro item C & intervallo quovis describatur circulus onm, secans rectam CP in n, Rotæ perimetrum BP in o, & Viam curvilineam AP in m; centroque V & intervallo Vo describatur circulus secans VP productam in q.

Quoniam Rota eundo semper revolvitur circa punctum contactus B, manifestum est quod recta BP perpendicularis est ad lineam



illam curvam AP quam Rotæ punctum P describit, atque adeo quod recta VP tanget hanc curvam in puncto P. Circuli onm radius sensim auctus vel diminutus æquetur tandem distantiæ CP; &, ob similitudinem Figuræ evanescentis $Pnomq$ & Figuræ $PFGVI$, ratio ultima lineolarum evanescentium Pm, Pn, Po, Pq.

id

id est ratio mutationum momentanearum curvæ AP, rectæ CP, arcus circularis BP, ac rectæ VP, eadem erit quæ linearum PV, PF, PG, PI, respective. Cum autem VF ad CF & VH ad CV perpendiculares sunt, angulique HVG, VCF propterea æquales; & angulus VHG (ob angulos quadrilateri $HVEP$ ad V & P rectos) angulo CEP æqualis est, similia erunt triangula VHG, CEP; & inde fiet ut EP ad CE ita HG ad HV seu HP & ita KI ad KP, & composite vel divisim ut CB ad CE ita PI ad PK, & duplicatis consequentibus ut CB ad 2 CE ita PI ad PV, atque ideo ut Pq ad Pm. Est igitur decrementum lineæ VP, id est, incrementum lineæ $BV—VP$ ad incrementum lineæ curvæ AP in data ratione CB ad 2 CE; & propterea (per Corol. Lem. IV.) longitudines $BV—VP$ & AP, incrementis illis genitæ, sunt in eadem ratione. Sed, existente BV radio, est VP co-sinus anguli BVP seu $\frac{1}{2}$ BEP, adeoque $BV—VP$ sinus versus ejusdem anguli; & propterea in hac Rota, cujus radius est $\frac{1}{2}$ BV, erit $BV—VP$ duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2}$ BP. Ergo AP est ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}$ BP ut 2 CE ad CB. *Q. E. D.*

Lineam autem AP in Propositione priore Cycloidem extra Globum, alteram in posteriore Cycloidem intra Globum distinctionis gratia nominabimus.

Corol. 1. Hinc si describatur Cyclois integra ASL & bisecetur ea in S, erit longitudo partis PS ad longitudinem VP (quæ duplus est sinus anguli VBP, existente EB radio) ut 2 CE ad CB, atque adeo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo semiperimetri Cycloidis AS æquabitur lineæ rectæ quæ est ad Rotæ diametrum BV, ut 2 CE ad CB.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

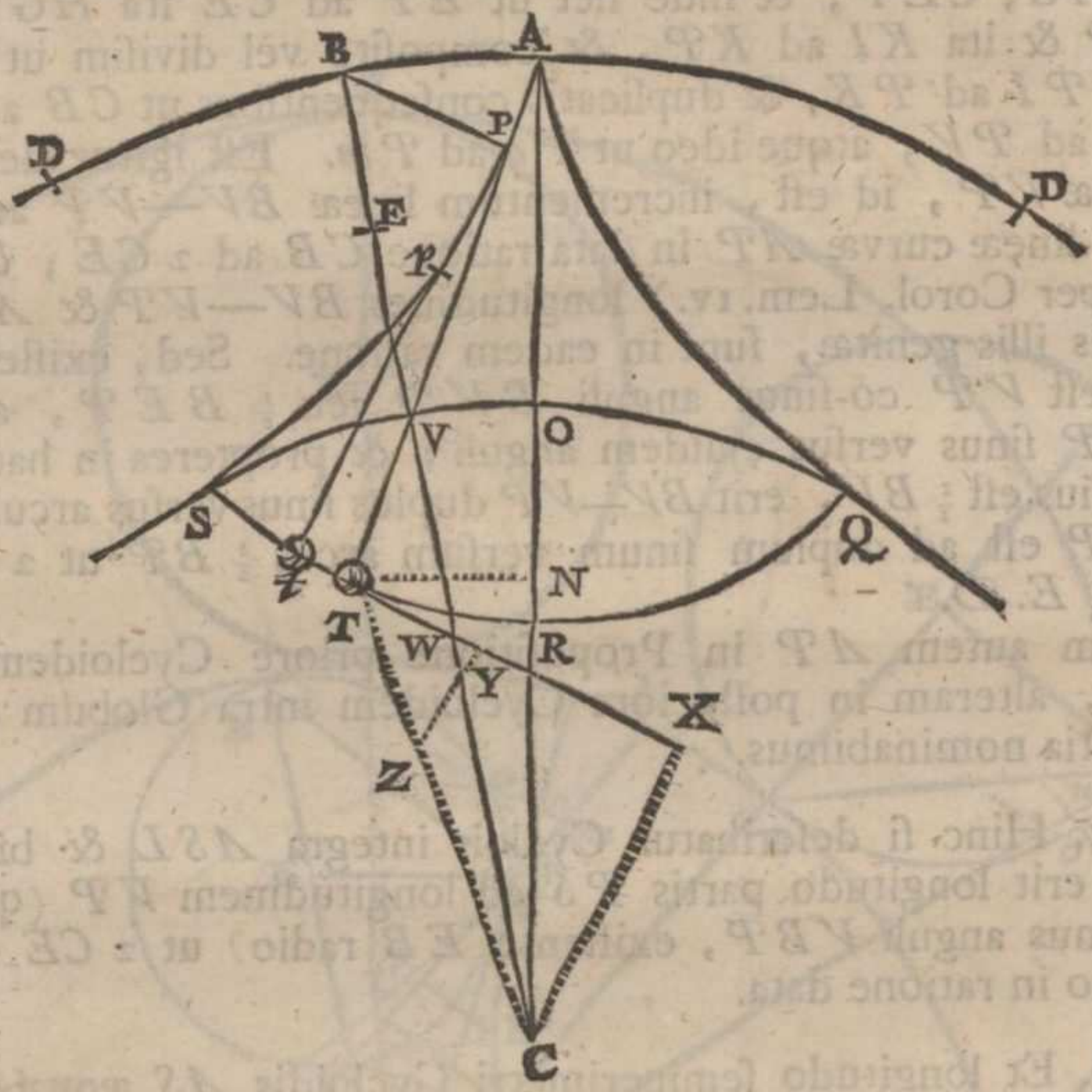
Facere ut Corpus pendulum oscilletur in Cycloide data.

Intra Globum QVS, centro C descriptum, detur Cyclois QRS bisecta in R & punctis suis extremis Q & S superficiei Globi hinc inde occurrens. Agatur CR bisecans arcum QS in O, & producatur ea ad A, ut sit CA ad CO ut CO ad CR. Centro C in-

tervallo

De Motu Corporum

tervallo CA describatur Globus exterior ABD, & intra hunc Globum a Rota, cujus diameter sit AO, describantur duæ Semicycloides AQ, AS, quæ Globum interiorem tangant in Q & S & Globo exteriori occurrant in A. A puncto illo A, Filo APT longitudinem AR æquante, pendeat corpus T, & ita intra Semicycloides AQ. AS oscilletur, ut quoties pendulum digreditur a



perpendiculo AR, Filum parte sui superiore AP applicetur ad Semicycloidem illam APS versus quam peragitur motus, & circum eam ceu obstaculum flectatur, parteque reliqua PT cui Semicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus T oscillabitur in Cycloide data QRS. $Q.E.F.$

Occurrat enim Filum PT tum Cycloidi QRS in T, tum circulo QOS in V, agaturque CV; & ad Fili partem rectam PT, e punctis extremis P ac T, erigantur perpendicula PB, TW, occurrentia rectæ CV in B & W. Patet, ex constructione & genesi similium Figurarum AS, SR, perpendicula illa PB, TW abscindere de CV longitudines VB, VW Rotarum diametris OA, OR æquales. Est igitur TP ad VP (duplum sinum anguli VBP existente $\frac{1}{2}BV$ radio)

dio) ut BW ad BV, seu $AO+OR$ ad AO, id est (cum sint CA ad CO, CO ad CR & divisim AO ad OR proportionales,) ut $CA+CO$ ad CA, vel, si bisecetur BV in E, ut $2CE$ ad CB. Proinde, (per Corol. 1. Prop. XLIX.) longitudo partis rectæ Fili PT æquatur semper Cycloidis arcui PS, & Filum totum APT æquatur semper Cycloidis arcui dimidio APS, hoc est (per Corol. 2. Prop. XLIX.) longitudini AR. Et propterea vicissim, si Filum manet semper æquale longitudini AR, movebitur punctum T in Cycloide data QRS. Q. E. D. LIBER PRIMUS.

Corol. Filum AR æquatur Semicycloidi AS, adeoque ad semidiametrum AC eandem habet rationem quam similis illi Semicycloris SR habet ad semidiametrum CO.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad Globi centrum C *sit in locis singulis ut distantia loci cujusque a centro, & hac sola Vi agente corpus* T *oscilletur (modo jam descripto) in perimetro Cycloidis* QRS*: dico quod oscillationum utcunque inæqualium æqualia erunt Tempora.*

Nam in Cycloidis tangentem TW infinite productam cadat perpendiculum CX & jungatur CT. Quoniam vis centripeta qua corpus T impellitur versus C est ut distantia CT, atque hæc (per Legum Corol. 2.) resolvitur in partes CX, TX; quarum CX impellendo corpus directe a P distendit filum PT & per ejus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera TX, urgendo corpus transversim seu versus X, directe accelerat motum ejus in Cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo TX, id est, (ob datas CV, WV iisque proportionales VX, TW,) ut longitudo TW, hoc est (per Corol. 1. Prop. XLIX.) ut longitudo arcus Cycloidis TR. Pendulis igitur duobus APT, Apt de perpendiculo AR inæqualiter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi TR, tR. Sunt autem partes sub initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describen-

De Motu Corporum

dæ & accelerationes ſubſequentes, his partibus proportionales, ſunt etiam ut totæ; & ſic deinceps. Sunt igitur accelerationes atque adeo velocitates genitæ & partes his velocitatibus deſcriptæ parteſque deſcribendæ, ſemper ut totæ; & propterea partes deſcribendæ datam ſervantes rationem ad invicem ſimul evaneſcent, id eſt, corpora duo oſcillantia ſimul pervenient ad perpendiculum *AR*. Cumque viciſſim aſcenſus perpendiculorum de loco infimo *R*, per eoſdem arcus Cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis ſingulis a viribus iiſdem a quibus deſcenſus accelerabantur, patet velocitates aſcenſuum ac deſcenſuum per eoſdem arcus factorum æquales eſſe, atque adeo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum Cycloidis partes duæ *RS* & *RQ* ad utrumque perpendiculi latus jacentes ſint ſimiles & æquales, pendula duo oſcillationes ſuas tam totas quam dimidias iiſdem temporibus ſemper peragent. *Q. E. D.*

Corol. Vis qua corpus *T* in loco quovis *T* acceleratur vel retardatur in Cycloide, eſt ad totum corporis ejusdem Pondus in loco altiſſimo *S* vel *Q*, ut Cycloidis arcus *TR* ad ejuſdem arcum *SR* vel *QR*.

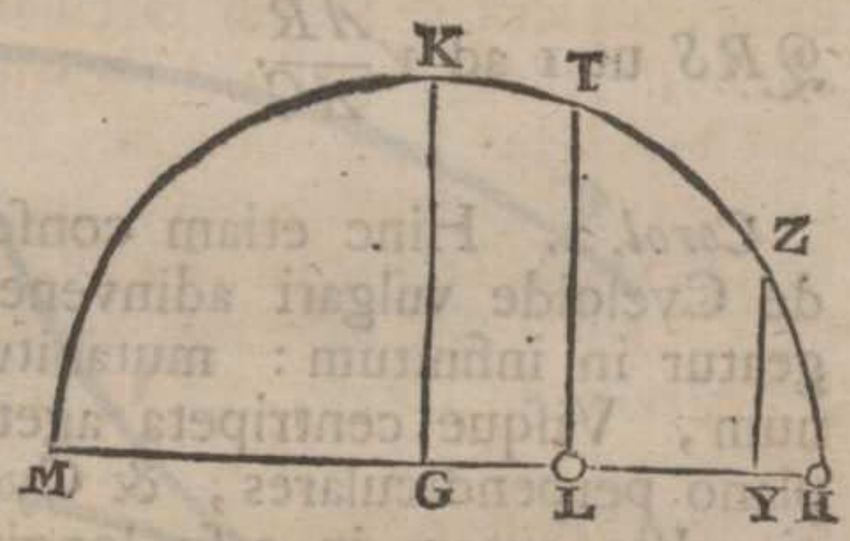
PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

Definire & Velocitates Pendulorum in locis ſingulis, & Tempora quibus tum oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur.

Centro quovis *G*, intervallo *GH* Cycloidis arcum *RS* æquante; deſcribe ſemicirculum *HKMG* ſemidiametro *GK* biſectum. Et ſi vis centripeta, diſtantiis locorum a centro proportionalis, tendat ad centrum *G*, ſitque ea in perimetro *HIK* æqualis vi centripetæ in perimetro Globi *QOS* (*Vide Fig. Prop.* L.) ad ipſius centrum tendenti; & eodem tempore quo pendulum *T* dimittitur e loco ſupremo *S*, cadat corpus aliquod *L* ab *H* ad *G*: quoniam vires quibus corpora urgentur ſunt æquales ſub initio & ſpatiis deſcribendis *TR*, *LG* ſemper proportionales, atque adeo, ſi æquantur *TR* & *LG*, æquales in locis *T* & *L*; patet corpora illa deſcribere ſpatia *ST*, *HL* æqualia ſub initio, adeoque ſubinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia ſpatia deſcribere. Quare, per Prop. XXXVIII, tempus quo corpus deſcribit arcum *ST* eſt ad tempus oſcil-

oſcillationis unius, ut arcus HI (tempus quo corpus H perveniet ad L) ad ſemiperipheriam HKM (tempus quo corpus H perveniet ad M.) Et velocitas corporis penduli in loco T eſt ad velocitatem ipſius in loco infimo R, (hoc eſt, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G, ſeu incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG, arcubus HI, HK æquabili fluxu creſcentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK, ſive ut $\sqrt{SRq - TRq.}$ ad SR. Unde cum, in oſcillationibus inæqualibus, deſcribantur æqualibus temporibus arcus totis oſcillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus deſcripti in oſcillationibus univerſis. Quæ erant primo invenienda.

Oſcillentur jam Funipendula corpora in Cycloidibus diverſis intra Globos diverſos, quorum diverſæ ſunt etiam Vires abſolutæ, deſcriptis: &, ſi Vis abſoluta Globi cujuſvis QOS dicatur V, Vis acceleratrix qua Pendulum urgetur in circumferentia hujus Globi, ubi incipit directe verſus centrum ejus moveri, erit ut diſtantia Corporis penduli a centro illo & Vis abſoluta Globi conjunctim, hoc eſt, ut $CO \times V$. Itaque lineola HY, quæ ſit ut hæc Vis acceleratrix $CO \times V$, deſcribetur dato tempore; &, ſi erigatur normalis YZ circumferentiæ occurrens in Z, arcus naſcens HZ denotabit datum illud tempus. Eſt autem arcus hic naſcens HZ in ſubduplicata ratione rectanguli GHY, adeoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde Tempus oſcillationis integræ in Cycloide QRS (cum ſit ut ſemiperipheria HKM, quæ oſcillationem illam integram denotat, directe, utque arcus HZ, qui datum tempus ſimiliter denotat, inverſe) fiet ut GH directe & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inverſe, hoc eſt, ob æquales GH & SR, ut $\frac{SR}{\sqrt{CO \times V}}$, ſive (per Corol. Prop. L) ut $\frac{AR}{\sqrt{AC \times V}}$. Itaque Oſcillationes in Globis & Cycloidibus omnibus, quibuſcunque cum Viribus abſolutis factæ, ſunt in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione longitudinis Fili directe, & ſubduplicata ratione diſtantiæ inter punctum ſuſpenſionis & centrum



De Motu Corporum.

Globi inverſe, & ſubduplicata ratione Vis abſolutæ Globi etiam inverſe. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc etiam Oſcillantium, Cadentium & Revolventium corporum tempora poſſunt inter ſe conferri. Nam ſi Rotæ, qua Cyclois intra globum deſcribitur, diameter conſtituatur æqualis ſemidiametro globi, Cyclois evadet Linea recta per centrum globi tranſiens, & Oſcillatio jam erit deſcenſus & ſubſequens aſcenſus in hac recta. Unde datur tum tempus deſcenſus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad diſtantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem deſcribit. Eſt enim hoc tempus (per Caſum ſecundum) ad tempus ſemioſcillationis in Cycloide quavis QRS ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Corol. 2. Hinc etiam conſectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam ſi Globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus ſuperficies ſphærica in planum, Viſque centripeta aget uniformiter ſecundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois noſtra abibit in Cycloidem vulgi. Iſto autem in caſu longitudo arcus Cycloidis, inter planum illud & punctum deſcribens, æqualis evadet quadruplicato ſinui verſo dimidii arcus Rotæ inter idem planum & punctum deſcribens; ut invenit *Wrennus*: Et Pendulum inter duas ejuſmodi Cycloides in ſimili & æquali Cycloide temporibus æqualibus oſcillabitur, ut demonſtravit *Hugenius*. Sed & Deſcenſus gravium, tempore Oſcillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

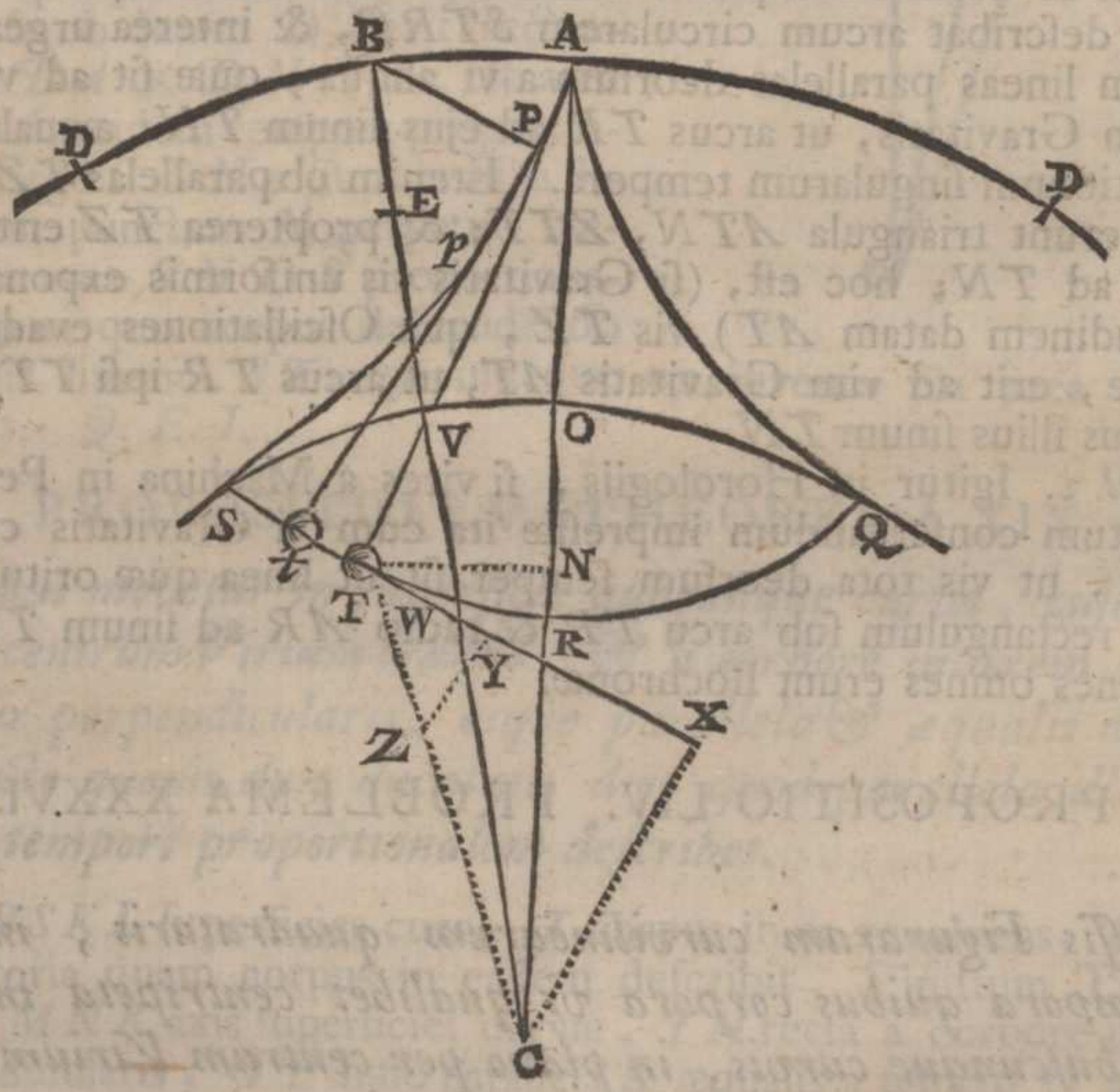
Aptantur autem Propoſitiones a nobis demonſtratæ ad veram conſtitutionem Terræ, quatenus Rotæ eundo in ejus circulis maximis deſcribunt motu Clavorum, perimetris ſuis infixorum, Cycloides extra globum; & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terræ ſuſpenſa, in Cycloidibus intra globos oſcillari debent, ut Oſcillationes omnes evadant Iſochronæ. Nam Gravitas (ut in Libro tertio docebitur) decreſcit in progreſſu a ſuperficie Terræ, ſurſum quidem in duplicata ratione diſtantiarum a centro ejus, deorſum vero in ratione ſimplici.

PROPO-

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

Conceſſis Figurarum curvilinearum quadraturis, invenire Vires quibus corpora in datis curvis lineis Oſcillationes ſemper Iſochronas peragent.

Oſcilletur Corpus T in curva quavis linea $STRQ$, cujus axis ſit OR tranſiens per virium centrum C. Agatur TX quæ curvam illam in corporis loco quovis T contingat, inque hac tan-



gente TX capiatur Tt æqualis arcui TR. Nam longitudo arcus illius ex Figurarum quadraturis (per Methodos vulgares) innoteſcit. De puncto T educatur recta TZ tangenti perpendicularis. Agatur CT perpendiculari illi occurrens in Z, & erit Vis centripeta proportionalis rectæ TZ. *Q. E. I.*

Nam

De Motu Corporum

Nam si vis, quâ corpus trahitur de T versus C, exponatur per rectam TZ captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires TY, YZ; quarum YZ trahendo corpus secundum longitudinem Fili PT, motum ejus nil mutat, vis autem altera TY motum ejus in curva $STRQ$ directe accelerat, vel directe retardat. Proinde cum hæc sit ut via describenda TR, accelerationes corporis vel retardationes in Oscillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus describendis, erunt semper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ simul describantur. Corpora autem quæ partes totis semper proportionales simul describunt, simul describent totas. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus T Filo rectilineo AT a centro A pendens, describat arcum circularem $STRQ$, & interea urgeatur secundum lineas parallelas deorsum a vi aliqua, quæ sit ad vim uniformem Gravitatis, ut arcus TR ad ejus sinum TN: æqualia erunt Oscillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas TZ, AR, similia erunt triangula ATN, ZTY; & propterea TZ erit ad AT ut TY ad TN; hoc est, (si Gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam AT) vis TZ, qua Oscillationes evadent Isochronæ, erit ad vim Gravitatis AT, ut arcus TR ipsi TY æqualis ad arcus illius sinum TN.

Corol. 2. Igitur in Horologiis, si vires a Machina in Pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi Gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu TR & radio AR ad sinum TN, Oscillationes omnes erunt Isochronæ.

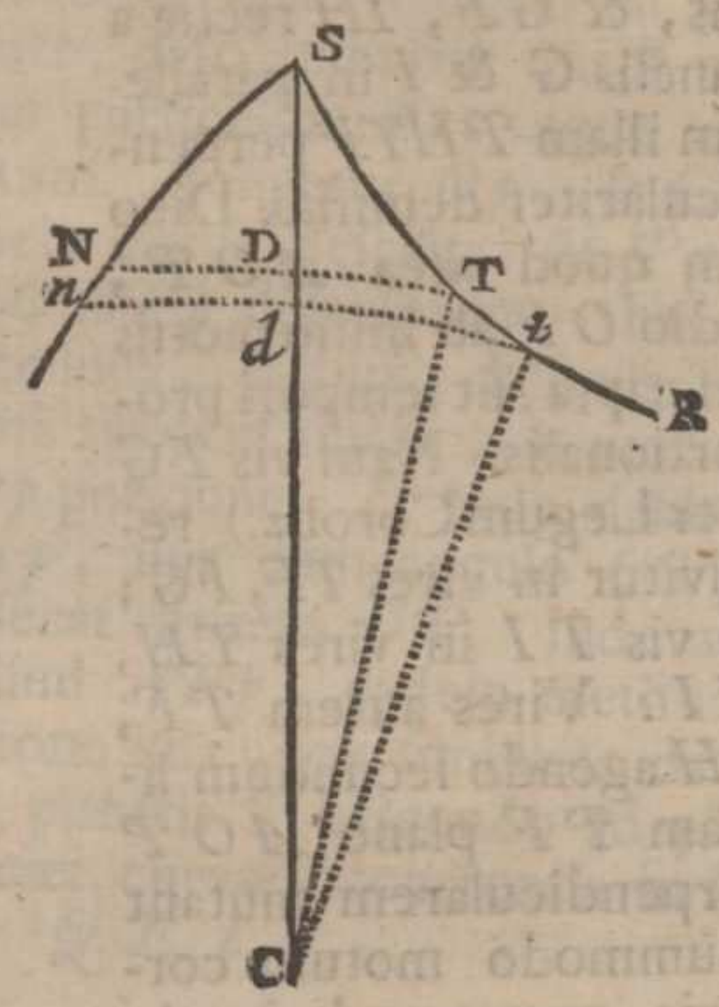
PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

Concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, invenire Tempora quibus corpora vi qualibet centripeta in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum Virium transeunte descriptis, descendent & ascendent.

Descendat corpus de loco quovis S per lineam quamvis curvam $STtR$, in plano per virium centrum C transeunte datam. Jungatur CS & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque Dd

partium

partium illarum aliqua. Centro C, intervallis CD, Cd describantur circuli DT, dt, lineæ curvæ $STtR$ occurrentes in T & t. Et ex data tum lege vis centripetæ tum altitudine CS de qua corpus cecidit, dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine CT, per Prop. XXXIX. Tempus autem, quo corpus describit lineolam Tt, est ut lineolæ hujus longitudo (id est ut secans anguli tTC) directe, & velocitas inverse. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata DN ad rectam CS per punctum D perpendicularis, & ob datam Dd erit rectangulum $Dd \times DN$, hoc est area $DNnd$, eidem tempori proportionale. Ergo si SNn sit curva illa linea quam punctum N perpetuo tangit, erit area $SNDS$ proportionalis tempori quo corpus descendendo descripsit lineam ST; proindeque ex inventa illa area dabitur Tempus. *Q. E. I.*

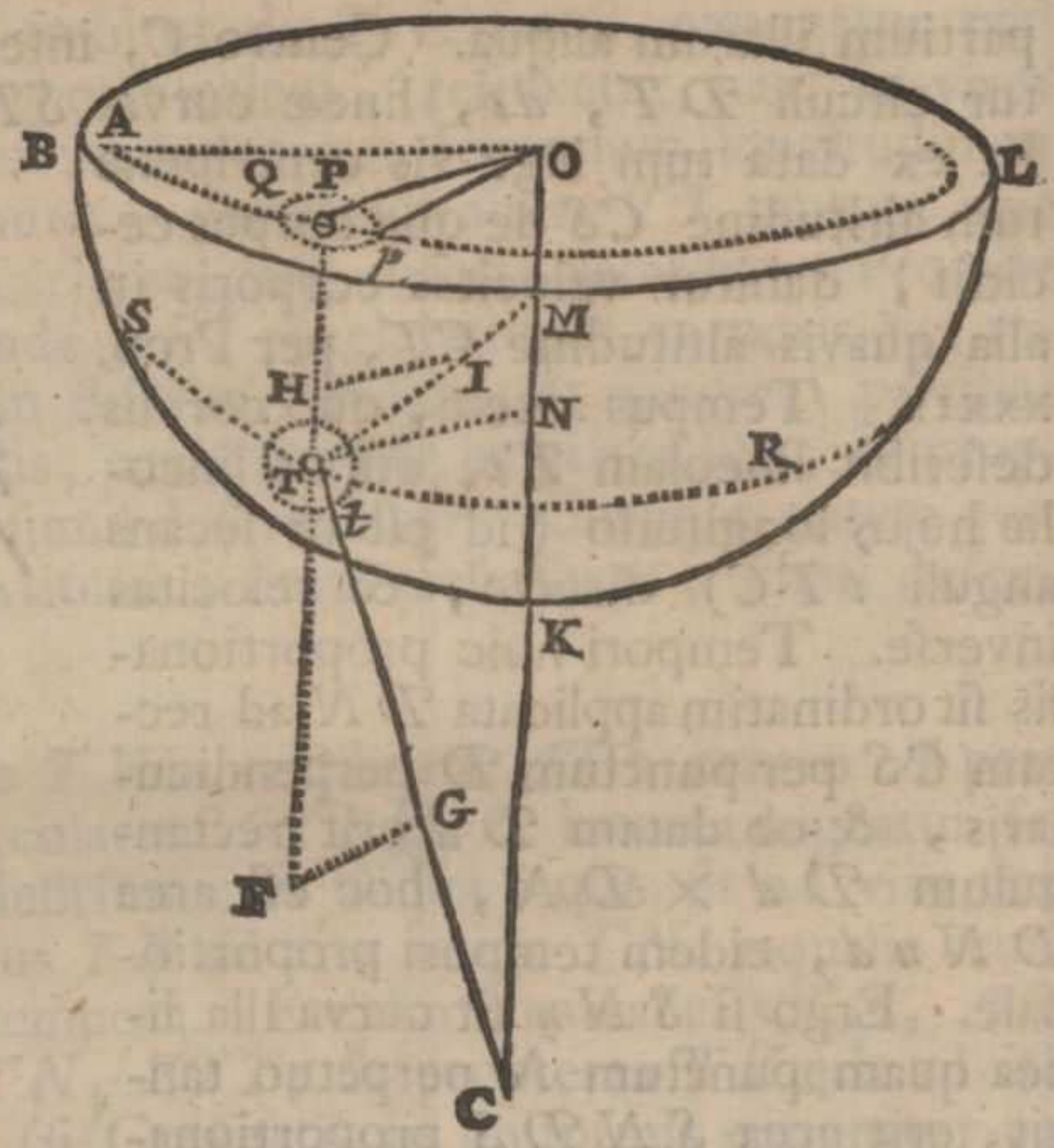


PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

Si corpus movetur in superficie quacunque curva, cujus axis per centrum Virium transit, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.

Sit $BSKL$ superficies curva, T corpus in ea revolvens, $STtR$ Trajectoria quam corpus in eadem describit, S initium Trajectoriæ, $OMNK$ axis superficiei curvæ, TN recta a corpore in axem perpendicularis, OP huic parallela & æqualis a puncto O quod in axe datur educta, AP vestigium Trajectoriæ a puncto P in lineæ volubilis OP plano AOP descriptum, A vestigii initium puncto S respondens, TC recta a corpore ad centrum ducta; TG pars ejus vi centripetæ qua corpus urgetur in centrum C proportionalis; TM recta ad superficiem curvam perpendicularis, TI pars ejus vi pressionis, qua corpus urget superficiem viciſſimque urgetur versus M

De Motu Corporum



a superficie, proportionalis; *PHTF* recta axi parallela per corpus transiens, & *GF*, *IH* rectæ a punctis *G* & *I* in parallelam illam *PHTF* perpendiculariter demissæ. Dico jam quod area *AOP*, radio *OP* ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis *TG* (per Legum Corol. 2.) resolvitur in vires *TF*, *FG*; & vis *TI* in vires *TH*, *HI*: Vires autem *TF*, *TH* agendo secundum lineam *PF* plano *AOP* perpendicularem mutant solummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quatenus secundum positionem plani factus, hoc est, motus puncti *P* quo Trajectoriæ vestigium *AP* in hoc plano describitur, idem est ac si vires *TF*, *TH* tollerentur, & corpus solis viribus *FG*, *HI* agitaretur; hoc est, idem ac si corpus in plano *AOP*, vi centripeta ad centrum *O* tendente & summam virium *FG* & *HI* æquante, describeret curvam *AP*. Sed vi tali describitur area *AOP* (per Prop. 1.) tempori proportionalis. *Q. E. D.*

Corol. Eodem argumento si corpus a viribus agitatum ad centra duo vel plura in eadem quavis recta *CO* data tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam *ST*; foret area *AOP* tempori semper proportionalis.

PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

Concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege Vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curva cujus axis per centrum illud transit; invenienda est Trajectoria quam corpus in eadem superficie describet, de loco dato, data cum Velocitate, versus plagam in superficie illa datam egressum.

Stan-

Stantibus quæ in ſuperiore Propoſitione conſtructa ſunt, exeat corpus de loco S in Trajectoriam inveniendam $STtR$; &, ex data ejus velocitate in altitudine SC, dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine TC. Ea cum velocitate, dato tempore quam minimo, deſcribat corpus Trajectoriæ ſuæ particulam Tt, ſitque Pp veſtigium ejus in plano AOP deſcriptum. Jungatur Op, & Circelli centro T intervallo Tt in ſuperficie curva deſcripti ſit PpQ veſtigium Ellipticum in eodem plano $OAPp$ deſcriptum. Et ob datum magnitudine & poſitione Circellum, dabitur Ellipſis illa PpQ. Cumque area POp ſit tempori proportionalis, atque adeo ex dato tempore detur, dabitur Op poſitione, & inde dabitur communis ejus & Ellipſeos interſectio p, una cum angulo OPp, in quo Trajectoriæ veſtigium APp ſecat lineam OP. Inde autem invenietur Trajectoriæ veſtigium illud APp, eadem methodo qua curva linea $VIKk$ in Propoſitione XLI, ex ſimilibus datis inventa fuit. Tum ex ſingulis veſtigii punctis P erigendo ad planum AOP perpendicula PT ſuperficiei curvæ occurrentia in T, dabuntur ſingula Trajectoriæ puncta T. *Q. E. I.* LIBER PRIMUS.

SECTIO XI.

De Motu Corporum Viribus centripetis ſe mutuo petentium.

Hactenus expoſui Motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri ſolent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones ſemper mutuæ ſunt æquales, per Legem tertiam: adeo ut neque attrahens poſſit quieſcere neque attractum, ſi duo ſint corpora, ſed ambo (per Legum Corollarium quartum) quaſi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur; & ſi plura ſint corpora (quæ vel ab unico attrahantur vel omnia ſe mutuo attrahant) hæc ita inter ſe moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quieſcat vel uniformiter moveatur in directum. Qua de cauſa jam pergo Motum exponere corporum ſe mutuo trahentium, conſiderando Vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortaſſe, ſi phyſice loquamur, verius dicantur Impulſus. In Mathematicis enim jam verſamur, & propterea miſſis diſputationibus Phyſicis, familiari utimur ſermone, quo poſſimus a Lectoribus Mathematicis facilius intelligi.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

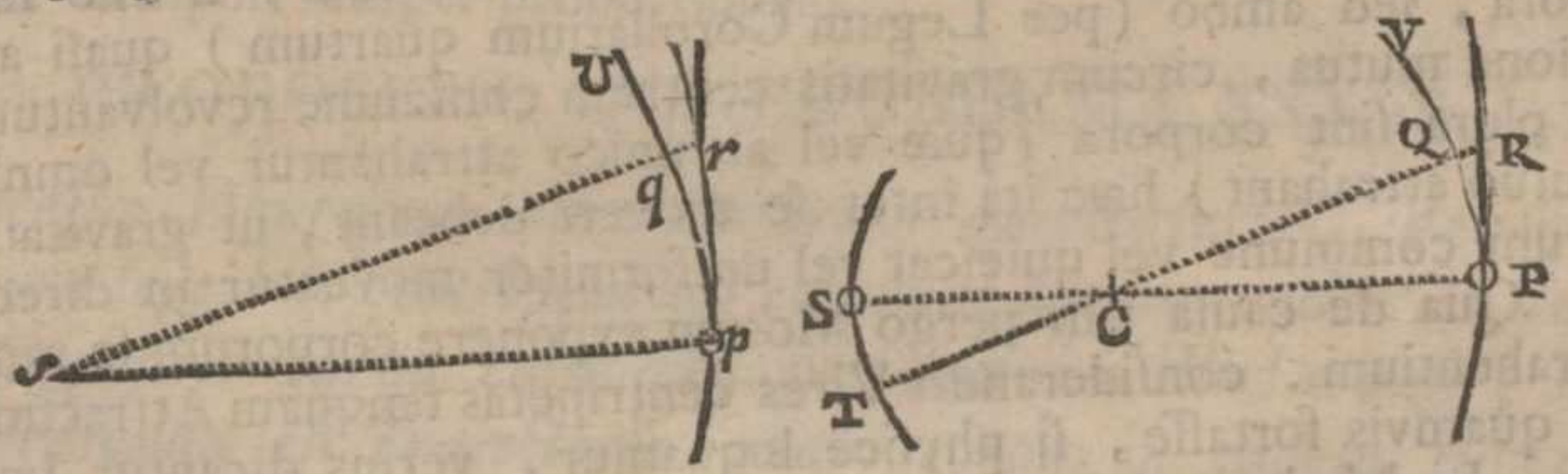
Corpora duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo, Figuras similes.

Sunt enim distantiæ a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus, atque adeo in data ratione ad invicem, & componendo in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminos suos communi motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, Figuras circum eosdem terminos (in planis quæ una cum his terminis vel quiescunt vel motu quovis non angulari moventur) describunt omnino similes. Proinde similes sunt Figuræ quæ his distantiis circumactis describuntur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo Viribus quibusvis se mutuo trahunt, & interea volvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest Figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, Viribus iisdem describi.

Revolvantur corpora S, P circa commune gravitatis centrum C, pergendo de S ad T deque P ad Q. A dato puncto s ipsis



SP, TQ æquales & parallelæ ducantur semper sp, sq; & Curva pqv quam punctum p, revolvendo circum punctum immotum s, describit,

deſcribit, erit ſimilis & æqualis Curvis quas corpora S, P deſcribunt circum ſe mutuo : proindeque (per Theor. xx.) ſimilis Curvis ST & PQV, quas eadem corpora deſcribunt circum commune gravitatis centrum C: id adeo quia proportiones linearum SC, CP & SP vel sp ad invicem dantur.

Caſ. 1. Commune illud Gravitatis centrum C, per Legum Corollarium quartum, vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo quod id quieſcit, inque s & p locentur corpora duo, immobile in s, mobile in p, corporibus S & P ſimilia & æqualia. Dein tangant rectæ PR & pr Curvas PQ & pq in P & p, & producantur CQ & sq ad R & r. Et, ob ſimilitudinem Figurarum $CPRQ$, $sprq$, erit RQ ad rq ut CP ad sp, adeoque in data ratione. Proinde ſi vis qua corpus P verſus corpus S, atque adeo verſus centrum intermedium C attrahitur, eſſet ad vim qua corpus p verſus centrum s attrahitur in eadem illa ratione data; hæ vires æqualibus temporibus attraherent ſemper corpora de tangentibus PR, pr ad arcus PQ, pq, per intervalla ipſis proportionalia RQ, rq; adeoque vis poſterior efficeret ut corpus p gyraretur in Curva pqv, quæ ſimilis eſſet Curvæ PQV, in qua vis prior efficit ut corpus P gyretur, & revolutiones iiſdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non ſunt ad invicem in ratione CP ad sp, ſed (ob ſimilitudinem & æqualitatem corporum S & s, P & p, & æqualitatem diſtantiarum SP, sp) ſibi mutuo æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus poſterius p trahatur per intervallum majus rq, requiritur tempus majus, idque in ſubduplicata ratione intervallorum; propterea quod (per Lemma decimum) ſpatia, ipſo motus initio deſcripta, ſunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis p eſſe ad velocitatem corporis P in ſubduplicata ratione diſtantiæ sp ad diſtantiam CP, eo ut temporibus, quæ ſint in eadem ſubduplicata ratione, deſcribantur arcus pq, PQ, qui ſunt in ratione integra: Et corpora P, p viribus æqualibus ſemper attracta deſcribent circum centra quieſcentia C & s Figuras ſimiles PQV, pqv, quarum poſterior pqv ſimilis eſt & æqualis Figuræ quam corpus P circum corpus mobile S deſcribit. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum ſpatio in quo corpora moventur inter ſe, progreditur uniformiter in directum; &, per Legum Corollarium ſextum, motus omnes in hoc ſpatio peragentur ut prius, adeoque corpora deſcri-

De Motu Corporum

bent circum ſe mutuo Figuras eaſdem ac prius, & propterea Figuræ *pqv* ſimiles & æquales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc corpora duo Viribus diſtantiæ ſuæ proportionalibus ſe mutuo trahentia, deſcribunt (per Prop. x,) & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo, Ellipſes concentricas: & vice verſa, ſi tales Figuræ deſcribuntur, ſunt Vires diſtantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo Viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus deſcribunt (per Prop. XI, XII, XIII.) & circum commune gravitatis centrum, & circum ſe mutuo, Sectiones conicas umbilicum habentes in centro circum quod Figuræ deſcribuntur. Et vice verſa, ſi tales Figuræ deſcribuntur, Vires centripetæ ſunt quadrato diſtantiæ reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad ſe mutuo ductis, deſcribunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

Corporum duorum S & P *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium Tempus periodicum eſſe ad Tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis & Figuris quæ corpora circum ſe mutuo deſcribunt Figuram ſimilem & æqualem deſcribentis, in ſubduplicata ratione corporis alterius* S, *ad ſummam corporum* S + P.

Namque, ex demonſtratione ſuperioris Propoſitionis, tempora quibus arcus quivis ſimiles *PQ* & *pq* deſcribuntur, ſunt in ſubduplicata ratione diſtantiarum *CP* & *SP* vel *sp*, hoc eſt, in ſubduplicata ratione corporis *S* ad ſummam corporum *S* + *P*. Et componendo, ſummæ temporum quibus arcus omnes ſimiles *PQ* & *pq* deſcribuntur, hoc eſt, tempora tota quibus Figuræ totæ ſimiles deſcribuntur, ſunt in eadem ſubduplicata ratione. *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

Si corpora duo S & P, *Viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Ellipseos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *describit, Axis principalis erit ad Axem principalem Ellipseos, quam corpus idem* P *circa alterum quiescens* S *eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum* S + P *ad primam duarum medie proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum* S.

Nam si descriptæ Ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica (per Theorema superius) forent in subduplicata ratione corporis S ad summam corporum $S+P$. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia; Ellipseos autem axis principalis (per Prop. xv.) minuetur in ratione cujus hæc est sesquiplicata, id est in ratione, cujus ratio S ad $S+P$ est triplicata; adeoque erit ad axem principalem Ellipseos alterius, ut prima duarum medie proportionalium inter $S+P$ & S ad $S+P$. Et inverse, axis principalis Ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut $S+P$ ad primam duarum medie proportionalium inter $S+P$ & S. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo Viribus quibusvis se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde se habebunt ac si non traherent se mutuo, sed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto Viribus iisdem traheretur: Et Virium trahentium eadem erit Lex respectu distantiæ corporum a centro illo communi atque respectu distantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium,

De Motu Corporum

dium, adeoque eædem ſunt ac ſi a corpore intermedio manarent. *Q. E. D.*

Et quoniam data eſt ratio diſtantiæ corporis utriuſvis a centro illo communi ad diſtantiam corporis ejuſdem a corpore altero, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex una diſtantia & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera diſtantia & quantitatibus totidem datis datamque illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, qua corpus unum ab altero trahitur, ſit directe vel inverſe ut diſtantia corporum ad invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ poteſtas; vel denique ut quantitas quævis ex hac diſtantia & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverſe ut corporis attracti diſtantia a centro illo communi, vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas, vel denique ut quantitas ex hac diſtantia & analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. Hoc eſt, Vis trahentis eadem erit Lex reſpectu diſtantiæ utriuſque. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum quæ Viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare Motus.

Corpora (per Theorema noviſſimum) perinde movebuntur ac ſi a corpore tertio, in communi gravitatis centro conſtituto, traherentur; & centrum illud ipſo motus initio quieſcet per Hypotheſin; & propterea (per Legum Corol. 4.) ſemper quieſcet. Determinandi ſunt igitur motus corporum (per Prob. xxv,) perinde ac ſi a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum ſe mutuo trahentium. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ Viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, deque locis datis, ſecundum datas rectas, datis cum Velocitatibus exeunt, determinare Motus.

Ex

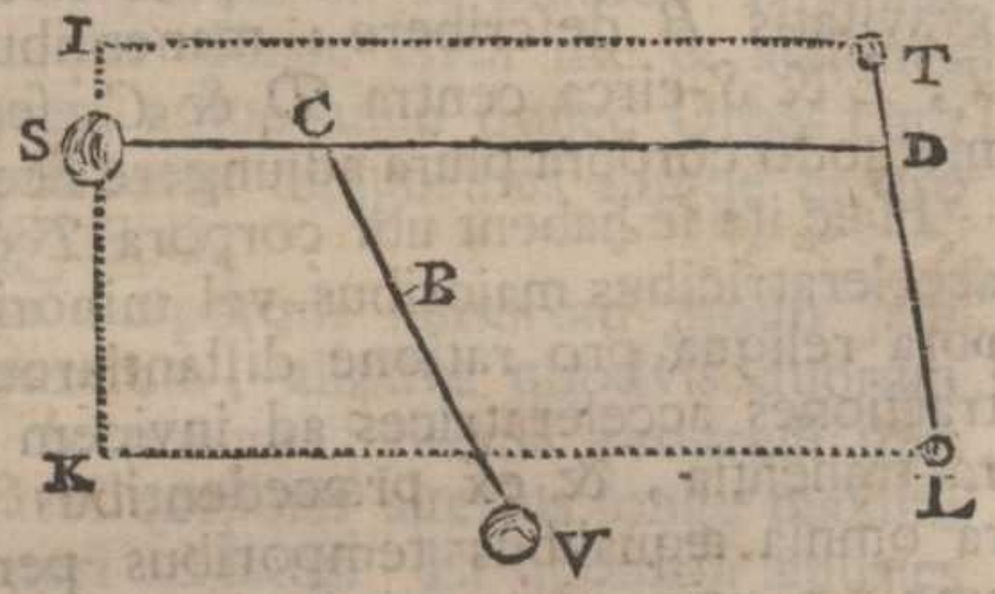
Ex datis corporum motibus ſub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus ſpatii quod una cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales reſpectu hujus ſpatii. Motus autem ſubſequentes (per Legum Corollarium quintum, & Theorema noviſſimum) perinde fiunt in hoc ſpatio, ac ſi ſpatium ipſum una cum communi illo gravitatis centro quieſceret, & corpora non traherent ſe mutuo, ſed a corpore tertio ſito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc ſpatio mobili, de loco dato ſecundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus eſt motus per Problema nonum & viceſimum ſextum: & habebitur ſimul motus corporis alterius e regione. Cum hoc motu componendus eſt uniformis ille Syſtematis ſpatii & corporum in eo gyrantium motus progreſſivus ſupra inventus, & habebitur motus abſolutus corporum in ſpatio immobili. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

Viribus quibus Corpora ſe mutuo trahunt creſcentibus in ſimplici ratione diſtantiarum a centris: requiruntur Motus plurium Corporum inter ſe.

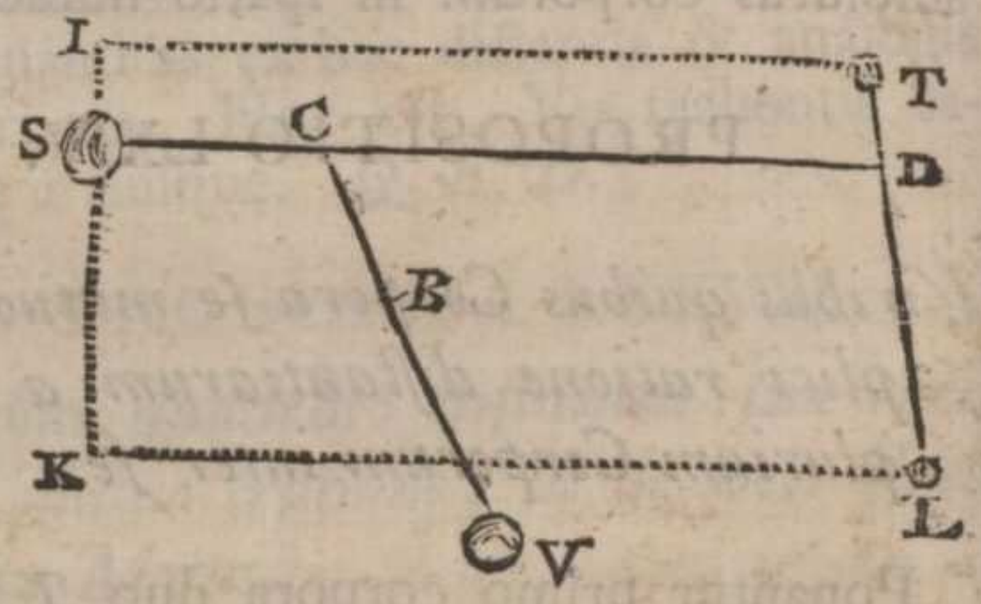
Ponantur primo corpora duo T & L commune habentia gravitatis centrum D. Deſcribent hæc (per Corollarium primum Theorematis XXI) Ellipſes centra habentes in D, quarum magnitudo, ex Problemate V, innoteſcit.

Trahat jam corpus tertium S priora duo T & L viribus acceleratricibus ST, SL, & ab ipſis viciſſim trahatur. Vis ST (per Legum Cor. 2.) reſolvitur in vires SD, DT; & vis SL in vires SD, DL. Vires autem DT, DL, quæ ſunt ut ipſarum ſumma TL, atque adeo ut vires acceleratrices quibus corpora T & L ſe mutuo trahunt, additæ his viribus corporum T & L, prior priori & poſterior poſteriori, componunt vires diſtantiis DT ac DL proportionales, ut prius, ſed



De Motu Corporum.

viribus prioribus majores; adeoque (per Corol. 1. Prop. x. & Corol. 1 & 8. Prop. iv) efficiunt ut corpora illa deſcribant Ellipſes ut prius, ſed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices SD & SD, actionibus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, quæ ſunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & ſecundum lineas TI, LK, ipſi DS parallelas, nil mutant ſitus eorum ad invicem, ſed faciunt ut ipſa æqualiter accedant ad lineam IK; quam ductam concipe per medium corporis S, & lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam IK acceſſus faciendo ut Syſtema corporum T & L ex una parte, & corpus S ex altera, juſtis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C. Tali motu corpus S (eo quod ſumma virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, diſtantiæ CS proportionalium, tendit verſus centrum C) deſcribit Ellipſin circa idem C; & punctum D, ob proportionales CS, CD, deſcribet Ellipſin conſimilem e regione. Corpora autem T & L viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, (prius priore, poſterius poſteriore) æqualiter & ſecundum lineas parallelas TI & LK (ut dictum eſt) attracta, pergent (per Legum Corollarium quintum & ſextum) circa centrum mobile D Ellipſes ſuas deſcribere, ut prius. *Q. E. I.*



Addatur jam corpus quartum V, & ſimili argumento concludetur hoc & punctum C Ellipſes circa omnium commune centrum gravitatis B deſcribere; manentibus motibus priorum corporum T, L & S circa centra D & C, ſed paulo acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. *Q. E. I.*

Hæc ita ſe habent ubi corpora T & L trahunt ſe mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione diſtantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut diſtantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipſes varias, circa omnium commune gravitatis centrum B, in plano immobili deſcribunt. *Q. E. I.*

PROPO-

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum Vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum ab eorundem centris, moveri poſſe inter ſe in Ellipſibus; & radiis ad umbilicos ductis areas deſcribere temporibus proportionales quam proxime.

In Propoſitione ſuperiore demonſtratus eſt caſus ubi motus plures peraguntur in Ellipſibus accurate. Quo magis recedit Lex virium a Lege ibi poſita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri poteſt ut corpora, ſecundum Legem hic poſitam ſe mutuo trahentia, moveantur in Ellipſibus accurate, niſi ſervando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multum ab Ellipſibus errabitur.

Caſ. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo diſtantias revolvi, tendantque ad ſingula vires abſolutæ proportionales iiſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per Legum Corol. quartum) vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum, abſque errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipſibus, atque radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; niſi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro; vel per actiones minorum corporum in ſe mutuo. Diminui autem poſſunt corpora minora uſque donec error iſte & actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores, atque adeo donec Orbes cum Ellipſibus quadrent, & areæ reſpondeant temporibus abſque errore qui non ſit minor quovis dato. *Q. E. O.*

Caſ. 2. Fingamus jam Syſtema corporum minorum modo jam deſcripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum ſe mutuo revolventium corporum Syſtema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam diſtantiam ſiti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora ſecundum lineas parallelas urgentur, non mutant ſitus corporum ad invicem, ſed ut Syſtema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur efficiunt: manifeſtum eſt quod, ex attractionibus in corpus maximum,

De Motu Corporum

nulla prorsus orietur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciproce ut quadrata distantiarum; &, augendo corporis maximi distantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ, respectu earum longitudinis, & inclinationes ad invicem minores sint quam datæ quævis, perseverabunt motus partium Systematis inter se absque erroribus qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, Systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc est, centro suo gravitatis describet circa corpus maximum Sectionem aliquam Conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languida, Ellipsin fortiore,) & Radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, absque aliis erroribus, nisi quas partium distantiæ (perexiguæ sane & pro lubitu minuendæ) valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. In casu secundo; quo propius accedit corpus omnium maximum ad Systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium Systematis inter se; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium Systematis versus corpus omnium maximum, non sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum a corpore illo maximo; præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum a corpore maximo: Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter se, necesse est ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessario mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, addita perturbationi quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si Systematis hujus partes in Ellipsibus vel Circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod

eædem

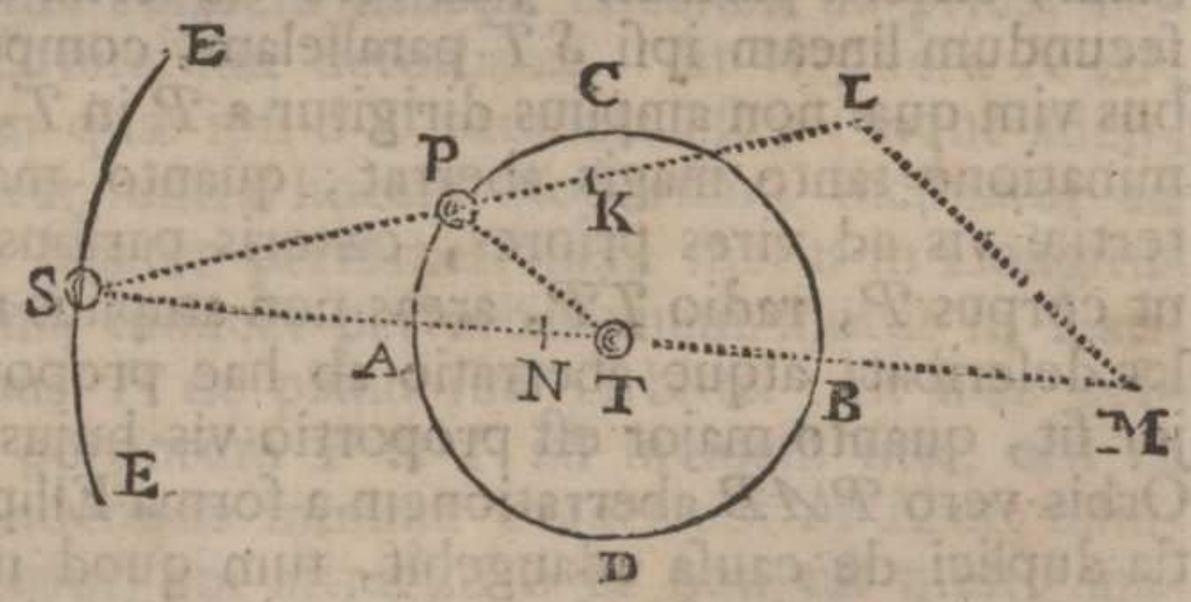
eædem a viribus acceleratricibus ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur niſi leviſſime, aut urgentur æqualiter ſecundum lineas parallelas quamproxime. LIBER PRIMUS.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

Si corpora tria, quorum Vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum, ſe mutuo trahant, & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: Dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipſum ductis, deſcribet areas temporibus magis proportionales, & Figuram ad formam Ellipſeos umbilicum in concurſu radiorum habentis magis accedentem, ſi corpus maximum his attractionibus agitetur, quam ſi maximum illud vel a minoribus non attractum quieſcat, vel multo minus vel multo magis attractum aut multo minus aut multo magis agitetur.

Liquet fere ex demonſtratione Corollarii ſecundi Propoſitionis præcedentis; ſed argumento magis diſtincto & latius cogente ſic evincitur.

Caſ. 1. Revolvantur corpora minora P & S in eodem plano circa maximum T, quorum P deſcribat Orbem interiorem PAB, & S exteriorem SE. Sit SK mediocris diſtantia corporum P & S; & corporis P verſus S attractio acceleratrix in mediocri illa diſtantia exponatur per eandem. In duplicata ratione SK ad SP capiatur SL ad SK, & erit SL attractio acceleratrix corporis P verſus S in diſtantia quavis SP. Junge PT, eique parallelam age LM occurrentem ST in M, & attractio SL reſolvetur (per Legum Corol. 2.) in attractiones SM, LM. Et ſic urgebitur corpus P vi acceleratrice triplici:



Exponatur corporis T attractio acceleratrix verſus S per lineam SN; & ſi attractiones acceleratrices SM, SN æquales eſſent; hæ, trahendo corpora T & P æqualiter & ſecundum lineas parallelas, nil mutarent ſitum eorum ad invicem. Iſidem jam forent corporum illorum motus inter ſe (per Legum Corol. 6.) ac ſi hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione ſi attractio SN minor eſſet attractione SM, tolleret ipſa attractionis SM partem SN, & maneret pars ſola MN, qua temporum & arearum proportionalitas & Orbitæ forma illa Elliptica perturbaretur. Et ſimiliter ſi attractio SN major eſſet attractione SM, oriretur ex differentia ſola MN perturbatio proportionalitatis & Orbitæ. Sic per attractionem SN reducitur ſemper attractio tertia ſuperior SM ad attractionem MN, attractione prima & ſecunda manentibus prorſus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & Orbita PAB ad formam præfatam Ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio MN vel nulla eſt, vel quam fieri poſſit minima; hoc eſt, ubi corporum P & T attractiones acceleratrices, factæ verſus corpus S, accedunt quantum fieri poteſt ad æqualitatem; id eſt, ubi attractio SN non eſt nulla, neque minor minima attractionum omnium SM, ſed inter attractionum omnium SM maximam & minimam quaſi mediocris, hoc eſt, non multo major neque multo minor attractione SK. *Q. E. D.*

Caſ 2. Revolvantur jam corpora minora P, S circa maximum T in planis diverſis; & vis LM, agendo ſecundum lineam PT in plano Orbitæ PAB ſitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus P de plano Orbitæ ſuæ deturbabit. At vis altera NM, agendo ſecundum lineam quæ ipſi ST parallela eſt, (atque adeo, quando corpus S verſatur extra lineam Nodorum, inclinatur ad planum Orbitæ PAB;) præter perturbationem motus in Longitudinem jam ante expoſitam, inducet perturbationem motus in Latitudinem, trahendo corpus P de plano ſuæ Orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum P & T ad invicem ſitu, erit ut vis illa generans MN, adeoque minima evadet ubi MN eſt minima, hoc eſt (uti jam expoſui) ubi attractio SN non eſt multo major, neque multo minor attractione SK. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ex his facile colligitur quod, ſi corpora plura minora P, S, R, &c. revolvantur circa maximum T, motus corporis intimi P minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum T pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur atque cætera a ſe mutuo.

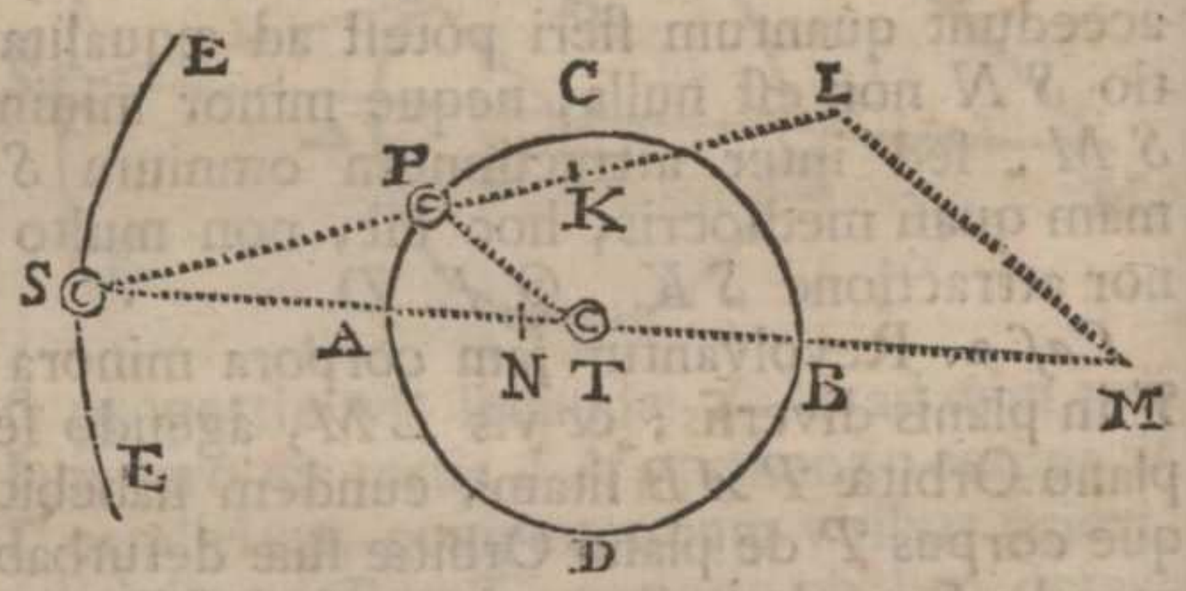
Corol.

DE MOTU CORPORUM

Corol. 2. In Syſtemate vero trium corporum T, P, S, ſi attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint ad invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum; corpus P, radio PT, ream circa corpus T velocius deſcribet prope conjunctionem A & Oppoſitionem B, quam prope Quadraturas C, D. Namque vis omnis qua corpus P urgetur & corpus T non urgetur, quæque non agit ſecundum lineam PT accelerat vel retardat deſcriptionem areæ, perinde ut ipſa in conſequentia vel in antecedentia dirigitur. Talis eſt vis NM. Hæc in tranſitu corporis P a C ad A tendit in conſequentia, motumque accelerat; dein uſque ad D in antecedentia, & motum retardat; tum in conſequentia uſque ad B, & ultimo in antecedentia tranſeundo a B ad C.

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus P, cæteris paribus, velocius movetur in Conjunctione & Oppoſitione quam in Quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis P, cæteris paribus, curvior eſt in Quadraturis quam in Conjunctione & Oppoſitione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis KL vel NM, in Conjunctione & Oppoſitione, contraria eſt vi qua corpus T trahit corpus P, adeoque vim illam minuit; corpus autem P minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus T.



Corol. 5. Unde corpus P, cæteris paribus, longius recedet a corpore T in Quadraturis, quam in Conjunctione & Oppoſitione. Hæc ita ſe habent excluſo motu Excentricitatis. Nam ſi Orbita corporis P excentrica ſit: Excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. oſtendetur) evadet maxima ubi Apſides ſunt in Syzygiis; indeque fieri poteſt ut corpus P, ad Apſidem ſummam appellens, abſit longius a corpore T in Syzygiis quam in Quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis T, qua corpus P retinetur in Orbe ſuo, augetur in Quadraturis per additionem vis LM, ac diminuitur in Syzygiis per ablationem vis KL, & ob magnitudinem vis KL, magis diminuitur quam augetur; eſt autem vis illa centripeta (per Corol. 2. Prop. IV.) in ratione compoſita ex ratione ſimplici radii TP directe & ratione duplicata tempo-

ris

ris periodici inverſe: patet hanc rationem compoſitam diminui per actionem vis KL, adeoque tempus periodicum, ſi maneat Orbis radius TP, augeri, idque in ſubduplicata ratione qua vis illa centripeta diminuitur: auctoque adeo vel diminuto hoc Radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in Radii hujus ratione ſeſquiplicata, per Corol. 6. Prop. IV. Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus P minus ſemper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro T; & contra, ſi vis illa augeretur, accederet propius. Ergo ſi actio corporis longinqui S, qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices; augebitur ſimul ac diminuetur Radius TP per vices, & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſita ex ratione ſeſquiplicata Radii & ratione ſubduplicata qua vis illa centripeta corporis centralis T, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S, diminuitur vel augetur.

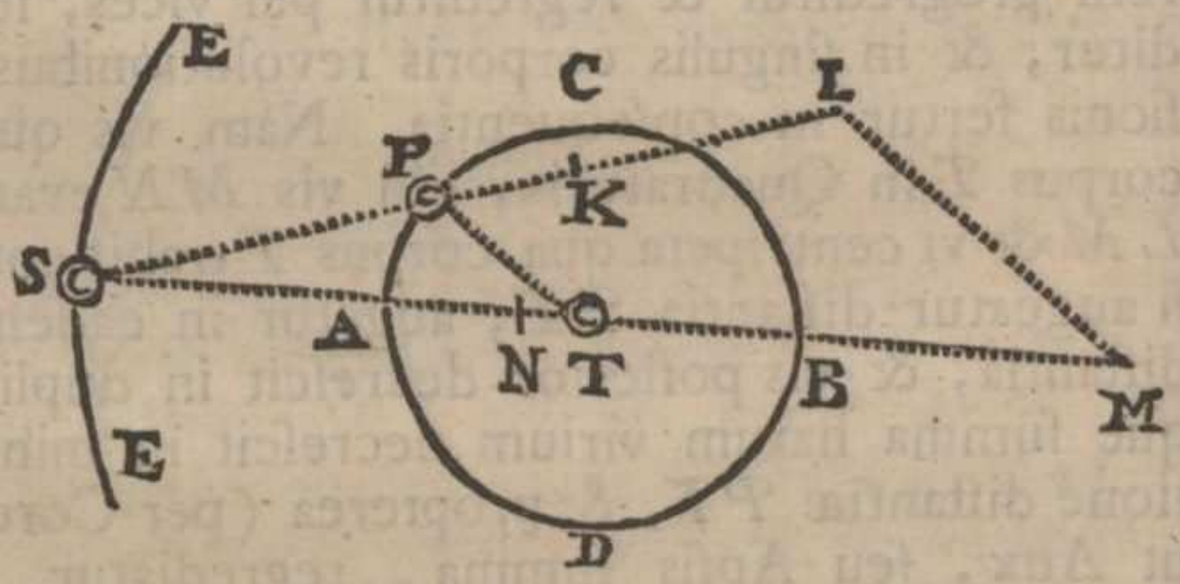
Corol. 7. Ex præmiſſis conſequitur etiam quod Ellipſeos a corpore P deſcriptæ Axis, ſeu Apſidum linea, quoad motum angularem progreditur & regreditur per vices, ſed magis tamen progreditur, & in ſingulis corporis revolutionibus per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia. Nam vis qua corpus P urgetur in corpus T in Quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi centripeta qua corpus T trahit corpus P. Vis prior LM, ſi augeatur diſtantia PT, augetur in eadem fere ratione cum hac diſtantia, & vis poſterior decreſcit in duplicata illa ratione, adeoque ſumma harum virium decreſcit in minore quam duplicata ratione diſtantiæ PT, & propterea (per Corol. 1. Prop. XLV.) efficit ut Aux, ſeu Apſis ſumma, regrediatur. In Conjunctione vero & Oppoſitione, vis qua corpus P urgetur in corpus T differentia eſt inter vim qua corpus T trahit corpus P & vim KL; & differentia illa, propterea quod vis KL augetur quamproxime in ratione diſtantiæ PT, decreſcit in majore quam duplicata ratione diſtantiæ PT, adeoque (per Corol. 1. Prop. XLV.) efficit ut Aux progrediatur. In locis inter Syzygias & Quadraturas pendet motus Augis ex cauſa utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius exceſſu progrediatur ipſa vel regrediatur. Unde cum vis KL in Syzygiis ſit quaſi duplo major quam vis LM in Quadraturis, exceſſus in tota revolutione erit penes vim KL, transferetque Augem ſingulis revolutionibus in conſequentia. Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii facilius intelligetur concipiendo Syſtema corporum duorum T, P corporibus pluribus S, S, S, &c. in Orbe ESE conſiſtentibus, undique cingi. Namque horum actioni

DE MOTU CORPORUM

bus actio ipsius T minuetur undique, decrescetque in ratione plusquam duplicata distantiæ.

Corol. 8. Cum autem pendeat Apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicata ratione distantiæ TP, in transitu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam; ut & a simili incremento in reditu ad Apsidem imam; atque adeo maximus sit ubi proportio vis in Apside summa ad vim in Apside ima maxime recedit a duplicata ratione distantiarum inversa: manifestum est quod Apsides in Syzygiis suis, per vim ablatitiam KL seu $NM - LM$, progredientur velocius, inque Quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam LM. Ob diuturnitatem vero temporis quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.

Corol. 9. Si corpus aliquod vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipsi, & mox, in descensu ab Apside summa seu Auge ad Apsidem imam, vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicata distantiæ diminutæ: manifestum est quod corpus, perpetuo accessu vis illius novæ impulsum semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam si urgeretur vi sola crescente in duplicata ratione distantiæ diminutæ, adeoque Orbem describeret Orbe Elliptico interiorem, & in Apside ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in recessu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad distantiam priorem, adeoque si vis decresçat in majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem & sic Orbis Excentricitas adhuc magis augebitur. Igitur si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper Excentricitas; & e contra, diminuetur eadem si ratio illa decrescat. Jam vero in Systemate corporum T, P, S, ubi Apsides Orbis PAB sunt in Quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est,



&

& maxima fit ubi Apſides ſunt in Syzygiis. Si Apſides conſtituantur in Quadraturis, ratio prope Apſides minor eſt & prope Syzygias major quam duplicata diſtantiarum, & ex ratione illa majori oritur Augis motus velociſſimus, uti jam dictum eſt. At ſi conſideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progreſſu inter Apſides, hæc minor eſt quam duplicata diſtantiarum. Vis in Apſide ima eſt ad vim in Apſide ſumma in minore quam duplicata ratione diſtantiæ Apſidis ſummæ ab umbilico Ellipſeos ad diſtantiam Apſidis imæ ab eodem umbilico: & e contra, ubi Apſides conſtituuntur in Syzygiis, vis in Apſide ima eſt ad vim in Apſide ſumma in majore quam duplicata ratione diſtantiarum. Nam vires LM in Quadraturis additæ viribus corporis T componunt vires in ratione minore, & vires KL in Syzygiis ſubductæ viribus corporis T relinquunt vires in ratione majore. Eſt igitur ratio decrementi & incrementi totius, in tranſitu inter Apſides, minima in Quadraturis, maxima in Syzygiis: & propterea in tranſitu Apſidum a Quadraturis ad Syzygias perpetuo augetur, augetque Excentricitatem Ellipſeos; inque tranſitu a Syzygiis ad Quadraturas perpetuo diminuitur, & Excentricitatem diminuit. LIBER PRIMUS.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in Latitudinem, fingamus planum Orbis EST immobile manere; & ex errorum expoſita cauſa manifeſtum eſt, quod, ex viribus NM, ML, quæ ſunt cauſa illa tota, vis ML agendo ſemper ſecundum planum Orbis PAB, nunquam perturbat motus in Latitudinem; quodque vis NM, ubi Nodi ſunt in Syzygiis, agendo etiam ſecundum idem Orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero ſunt in Quadraturis eos maxime perturbat, corpuſque P de plano Orbis ſui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in tranſitu corporis a Quadraturis ad Syzygias, augetque viciſſim eandem in tranſitu a Syzygiis ad Quadraturas. Unde fit ut corpore in Syzygiis exiſtente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad Nodum proximum accedit. At ſi Nodi conſtituantur in Octantibus poſt Quadraturas, id eſt, inter C & A, D & B, intelligetur ex modo expoſitis quod, in tranſitu corporis P a Nodo alterutro ad gradum inde nonageſimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in tranſitu per proximos 45 gradus, uſque ad Quadraturam proximam, inclinatio augetur, & poſtea denuo in tranſitu per alios 45 gradus, uſque ad Nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor eſt ſemper in Nodo ſubſequente quam in præcedente.

De Motu Corporum

dente. Et ſimili ratiocinio, inclinatio magis augetur quam diminuitur ubi Nodi ſunt in Octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. Inclinatio igitur ubi Nodi ſunt in Syzygiis eſt omnium maxima. In tranſitu eorum a Syzygiis ad Quadraturas, in ſingulis corporis ad Nodos appulſibus, diminuitur, fitque omnium minima ubi Nodi ſunt in Quadraturis & corpus in Syzygiis: dein creſcit iiſdem gradibus quibus antea decreverat, Nodiſque ad Syzygias proximas appulſis ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus *P* ubi Nodi ſunt in Quadraturis perpetuo trahitur de plano Orbis ſui, idque in partem verſus *S*, in tranſitu ſuo a Nodo *C* per Conjunctionem *A* ad Nodum *D*; & in contrariam partem in tranſitu a Nodo *D* per Oppoſitionem *B* ad Nodum *C*; manifeſtum eſt quod in motu ſuo a Nodo *C*, corpus perpetuo recedit ab Orbis ſui plano primo *CD*, uſque dum perventum eſt ad Nodum proximum; adeoque in hoc Nodo, longiſſime diſtans a plano illo primo *CD*, tranſit per planum Orbis *EST* non in plani illius Nodo altero *D*, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *S*, quodque proinde novus eſt Nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent Nodi recedere in tranſitu corporis de hoc Nodo in Nodum proximum. Nodi igitur in Quadraturis conſtituti perpetuo recedunt: in Syzygiis (ubi motus in Latitudinem nil perturbatur) quieſcunt; in locis intermediis, conditionis utriuſque participes, recedunt tardius; adeoque, ſemper vel retrogradi vel ſtationarii, ſingulis revolutionibus ferun-
tur in antecedentia.

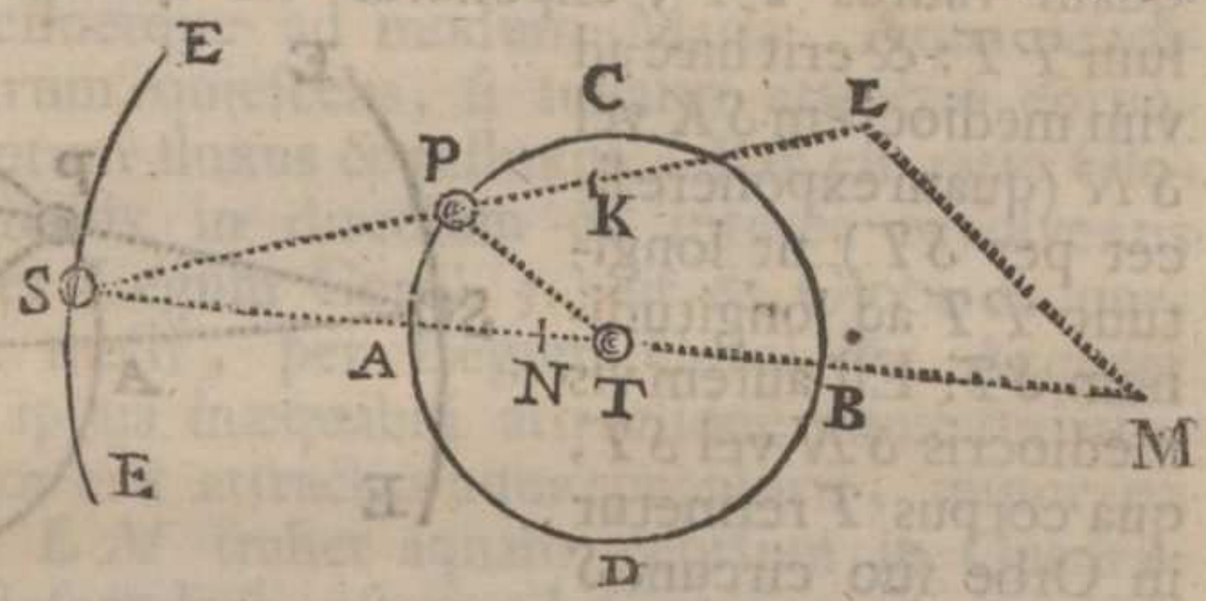
Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis deſcripti Errores ſunt paulo majores in Conjunctione corporum *P*, *S* quam in eorum Oppoſitione, idque ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

Corol. 13. Cumque rationes horum Corollariorum non pendeant a magnitudine corporis *S*, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis *S* tanta ſtatuitur magnitudo ut circa ipſum revolvatur corporum duorum *T* & *P* Syſtema. Et ex aucto corpore *S* auctaque adeo ipſius vi centripeta, a qua errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes (paribus diſtantiis) majores in hoc caſu quam in altero, ubi corpus *S* circum Syſtema corporum *P* & *T* revolvitur.

Corol. 14. Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *S* longinquum eſt, ſint quamproxime ut vis *SK* & ratio *PT* ad *ST* conjunctim, hoc eſt, ſi detur tum diſtantia *PT*, tum corporis *S* vis abſoluta, ut *ST cub.* reciproce; ſint autem vires illæ *NM*, *ML* cauſæ errorum & effectuum omnium de quibus actum eſt in præce-
dentibus

dentibus Corollariis: manifeſtum eſt quod effectus illi omnes, ſtante corporum *T* & *P* Syſtemate, & mutatis tantum diſtantia *ST* & vi abſoluta corporis *S*, ſint quamproxime in ratione compoſita ex ratione directa vis abſolutæ corporis *S* & ratione triplicata inverſa diſtantiæ *ST*. Unde ſi Syſtema corporum *T* & *P* revolvatur circa corpus longinquum *S*, vires illæ *NM*, *ML* & earum effectus erunt, (per Corol. 2. & 6. Prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, ſi magnitudo corporis *S* proportionalis ſit ipſius vi abſolutæ, erunt vires illæ *NM*, *ML* & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis *S* e corpore *T* ſpectati, & vice verſa. Namque hæ rationes eædem ſunt atque ratio ſuperior compoſita.

Corol. 15. Et quoniam ſi, manentibus Orbium *ESE* & *PAB* forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & ſi corporum *S* & *T* vel maneant vel mutentur vires in data quavis ratione, hæ vires (hoc eſt, vis corporis *T* qua corpus *P* de recto tramite in Orbitam *PAB* deflectere, & vis corporis *S* qua corpus idem *P* de Orbita illa deviare cogitur) agunt ſemper eodem modo & eadem proportione: neceſſe eſt ut ſimiles & proportionales ſint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora; hoc eſt, ut errores omnes lineares ſint ut Orbium diametri, angulares vero iidem qui prius, & errorum linearium ſimilium vel angularium æqualium tempora ut Orbium tempora periodica.

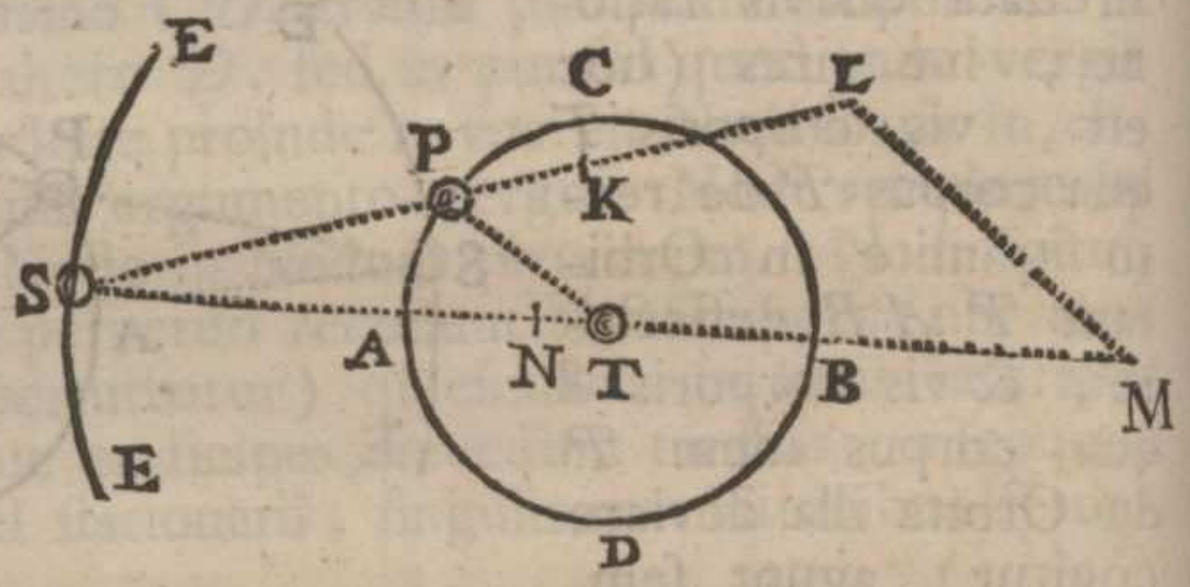


Corol. 16. Unde, ſi dentur Orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & diſtantiæ, ex datis erroribus & errorum temporibus in uno Caſu, colligi poſſunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime: Sed brevius hac Methodo. Vires *NM*, *ML*, cæteris ſtantibus, ſunt ut Radius *TP*, & harum effectus periodici (per Cor. 2. Lem. X.) ut vires & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi ſunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares e centro *T* ſpectati (id eſt, tam motus Augis & Nodorum, quam omnes in Longitudinem & Latitudinem errores apparentes) ſunt, in qualibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis

De Motu Corporum.

revolutionis quam proxime. Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14, & in quolibet corporum T, P, S Syſtemate, ubi P circum T ſibi propinquum, & T circum S longinquum revolvitur, errores angulares corporis P, de centro T apparentes, erunt, in ſingulis revolutionibus corporis illius P, ut quadratum temporis periodici corporis P directe & quadratum temporis periodici corporis T inverſe. Et inde motus medius Augis erit in data ratione ad motum medium Nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis P directe & quadratum temporis periodici corporis T inverſe. Augendo vel minuendo Excentricitatem & inclinationem Orbis PAB non mutantur motus Augis & Nodorum ſenſibiliter, niſi ubi eædem ſunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea LM nunc major ſit nunc minor quam radius PT, exponatur vis mediocris LM per radium illum PT: & erit hæc ad vim mediocrem SK vel SN (quam exponere licet per ST) ut longitudo PT ad longitudinem ST. Eſt autem vis mediocris SN vel ST, qua corpus T retinetur in Orbe ſuo circum S ad vim qua corpus P retinetur in Orbe ſuo circum T, in ratione compoſita ex ratione radii ST ad radium PT, & ratione duplicata temporis periodici corporis P circum T ad tempus periodicum corporis T circum S. Et ex æquo, vis mediocris LM, ad vim qua corpus P retinetur in Orbe ſuo circum T (quave corpus idem P, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile T ad diſtantiam PT revolvi poſſet) eſt in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum diſtantia PT, datur vis mediocris LM; & ea data, datur etiam vis MN quamproxime per analogiam linearum PT, MN.



Corol. 18. Iiſdem legibus quibus corpus P circum corpus T revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem T ad æquales ab ipſo diſtantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari Annulum fluidum, rotundum ac corpori T concentricum; & ſingulæ Annuli partes, motus ſuos omnes ad legem corporis P peragendo,

agendo, propius accedent ad corpus T, & celerius movebuntur in Conjunctione & Oppositione ipsarum & corporis S, quam in Quadraturis. Et Nodi Annuli hujus seu intersectiones ejus cum plano Orbitæ corporis S vel T, quiescent in Syzygiis, extra Syzygias vero movebuntur in antecedentia, & velocissime quidem in Quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completaque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quatenus per præcessionem Nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam Globum corporis T, ex materia non fluida constantem, ampliari & extendi usque ad hunc Annulum, & alveo per circuitum excavato continere Aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore Corollario) in Syzygiis velocior erit, in Quadraturis tardior quam superficies Globi, & sic fluet in alveo refluetque ad modum Maris. Aqua revolvendo circa Globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis S nullum acquiret motum fluxus & refluxus. Par est ratio Globi uniformiter progredientis in directum & interea revolventis circa centrum suum (per Legum Corol. 5.) ut & Globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, per Legum Corol. 6. Accedat autem corpus S, & ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur Aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem $L M$ trahet aquam deorsum in Quadraturis, facietque ipsam descendere usque ad Syzygias; & vis $K L$ trahet eandem sursum in Syzygiis, sistetque descensum ejus & faciet ipsam ascendere usque ad Quadraturas.

Corol. 20. Si Annulus jam rigeat & minuatur Globus, cessabit motus fluendi & refluendi: sed Oscillatorius ille inclinationis motus & præcessio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum Annulo, gyrosque compleat iisdem temporibus, & superficie sua contingat ipsum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriusque oscillabitur & Nodi regredientur. Nam Globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli Globo orbati maximus inclinationis angulus est ubi Nodi sunt in Syzygiis. Inde in progressu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, & isto conatu motum imprimit Globo toti. Retinet Globus motum impressum usque dum Annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque hac

ratione

De Motu Corporum.

ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in Quadraturis Nodorum, & minimus inclinationis angulus in Octantibus poſt Quadraturas; dein maximus reclinationis motus in Syzygiis, & maximus angulus in Octantibus proximis. Et eadem eſt ratio Globi Annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulo quam juxta polos, vel conſtat ex materia paulo denſiore. Supplet enim vicem Annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, aucta utcunque Globi hujus vi centripeta, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen Phænomena hujus & præcedentis Corollarii vix inde mutabuntur.

Corol. 21. Eadem ratione qua materia Globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi regrediantur, atque adeo per hujus incrementum augetur iſte regreſſus, per diminutionem vero diminuitur & per ablationem tollitur; ſi materia pluſquam redundans tollatur, hoc eſt, ſi Globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur vel rarior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in conſequentia.

Corol. 22. Et inde viciſſim, ex motu Nodorum innoteſcit conſtitutio Globi. Nimirum ſi Globus polos eoſdem conſtanter ſervat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; ſi in conſequentia, deficit. Pone Globum uniformem & perfecte circinatum in ſpatiis liberis primo quieſcere; dein impetu quocunque oblique in ſuperficiem ſuam facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Globus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter ſe habet, neque propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum, quam in alium quemvis; perſpicuum eſt quod is axem ſuum axisque inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique, in eadem illa ſuperficiei parte qua prius, impulſu quocunque novo; & cum citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt quod hi duo impulſus ſucceſſive impreſſi eundem producent motum ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent, hoc eſt, eundem ac ſi Globus vi ſimplici ex utroque (per Legum Corol. 2.) compoſita impulſus fuiſſet, atque adeo ſimplicem, circa axem inclinatione datum. Et par eſt ratio impulſus ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulſus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulſus ſecundus abſque primo generaret; atque adeo impulſuum amborum factorum in loca quæcunque; Generabunt hi eundem motum circularem

cularem ac ſi ſimul & ſemel in locum interſectionis æquatorum motuum illorum, quos ſeorſim generarent, fuiſſent impreſſi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures diſtinctos, ſed impreſſos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in ſe eſt, gyratur ſemper motu ſimplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione ſemper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare poteſt. Si Globus plano quocunque, per centrum ſuum & centrum in quod vis dirigitur tranſeunte, dividi intelligatur in duo hemiſphæria; urgebit ſemper vis illa utrumque hemiſphærium æqualiter, & propterea Globum, quoad motum rotationis, nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro ſui motus, turbabit motum Globi, facietque polos ejus errare per ipſius ſuperficiem, & circulos circum ſe punctumque ſibi oppoſitum perpetuo deſcribere. Neque corrigetur iſta vagationis enormitas, niſi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in Caſu (per Corol. 21.) Nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione (per Corol. 20.) Nodi regredientur; vel denique ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur, & hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia ſunt vel polo vel æquatori propiores.

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

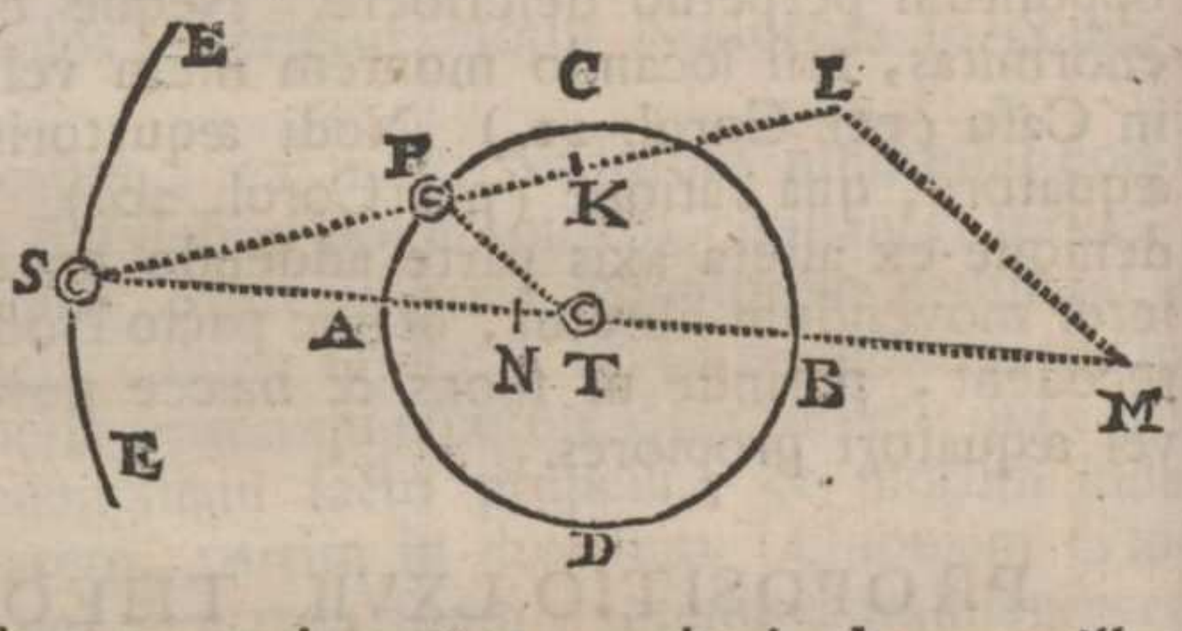
Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* C, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales & Orbem ad formam Ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipſum ductis, deſcribere poteſt.*

Nam corporis S attractiones verſus T & P componunt ipſius attractionem abſolutam, quæ magis dirigitur in corporum T & P commune gravitatis centrum C, quam in corpus maximum T, quæque quadrato diſtantiæ SC magis eſt proportionalis reciproce, quam quadrato diſtantiæ ST: ut rem perpendenti facile conſtabit.

De Motu Corporum,

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P & T *commune gravitatis centrum* C, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.*



Demonstratur eodem fere modo cum Prop. LXVI, sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficerit rem sic æstimare. Ex demonstratione Propositionis novissimæ liquet centrum in quod corpus *S* conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus *S* ex una parte, & commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescens, Ellipses accuratas. Liquet hoc per Corollarium secundum Propositionis LVIII collatum cum demonstratis in Proposit. LXIV & LXV. Perturbatur iste motus Ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio ubi commune trium centrum quiescit, hoc est, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cæterorum attrahitur: fitque major semper ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *T*, moveri incipit & magis deinceps magisque agitatur.

Corol.

Corol. Et hinc, ſi corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod Orbitæ deſcriptæ propius accedent ad Ellipticas, & arearum deſcriptiones fient magis æquabiles, ſi corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ ſunt ut eorum vires abſolutæ directe & quadrata diſtantiarum inverſe, ſe mutuo trahant agitentque, & Orbitæ cujuſque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus Orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille Orbitæ ſecundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iſte tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & ſic deinceps) quam ſi corpus intimum quieſcat & ſtatuatur communis umbilicus Orbitarum omnium.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In Syſtemate corporum plurium A, B, C, D, &c. *ſi corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, &c. *viribus acceleratricibus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, &c. *viribus quæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a trahente: erunt Abſolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora* A, B, *quorum ſunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* verſus *A*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur ex Hypotheſi; & ſimiliter attractiones acceleratrices corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis, ſibi invicem æquantur. Eſt autem abſoluta vis attractiva corporis *A* ad vim abſolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium verſus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium verſus *B*, paribus diſtantiis; & ita eſt attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* verſus *A* eſt ad attractionem acceleratricem corporis *A* verſus *B*, ut maſſa corporis *A* ad maſſam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per Definitionem ſecundam, ſeptimam & octavam) ex viribus acceleratricibus in corpora attracta ductis oriuntur, ſunt (per motus Legem tertiam) ſibi invicem æqua-

De Motu Corporum,

les. Ergo absoluta vis attractiva corporis *A* est ad absolutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si singula Systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula Systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt vel reciproce vel directe in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum a trahente, quæve secundum Letagem quamcunque communem ex distantiis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In Systemate corporum, quorum vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum, si minora circa maximum in Ellipsibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus quam fieri potest accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime in ratione corporum; & contra. Patet per Corol. Prop. LXVIII. collatum cum hujus Corol. 1.

Scholium.

His Propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in Magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem Attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem; sive cōnatus iste fiat ab actione corporum, vel se mutuo petentium, vel per Spiritus emissos se invicem agitantium, sive is ab actione Ætheris, aut Aeris, Mediive cujuscunque seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem Impulsus, non species virium

&

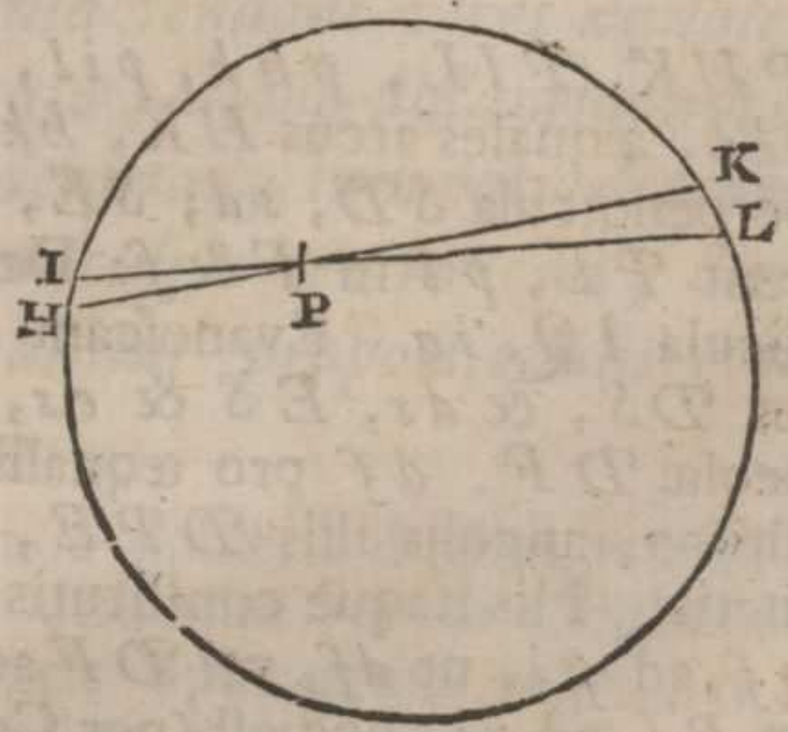
& qualitates Phyſicas, ſed quantitates & proportiones Mathematicas in hoc Tractatu expendens, ut in Definitionibus explicui. In Matheſi inveſtigandæ ſunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuſcunque poſitis conſequentur: deinde, ubi in Phyſicam deſcenditur, conferendæ ſunt hæ rationes cum Phænomenis, ut innoteſcat quænam virium conditiones ſingulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium ſpeciebus, cauſis & rationibus Phyſicis tutius diſputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam expoſito attractivis conſtantia, debeant in ſe mutuo agere, & quales motus inde conſequantur. LIBER PRIMUS.

SECTIO XII.

De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad Sphæricæ ſuperficiei puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: dico quod corpuſculum intra ſuperficiem conſtitutum his viribus nullam in partem attrahitur.



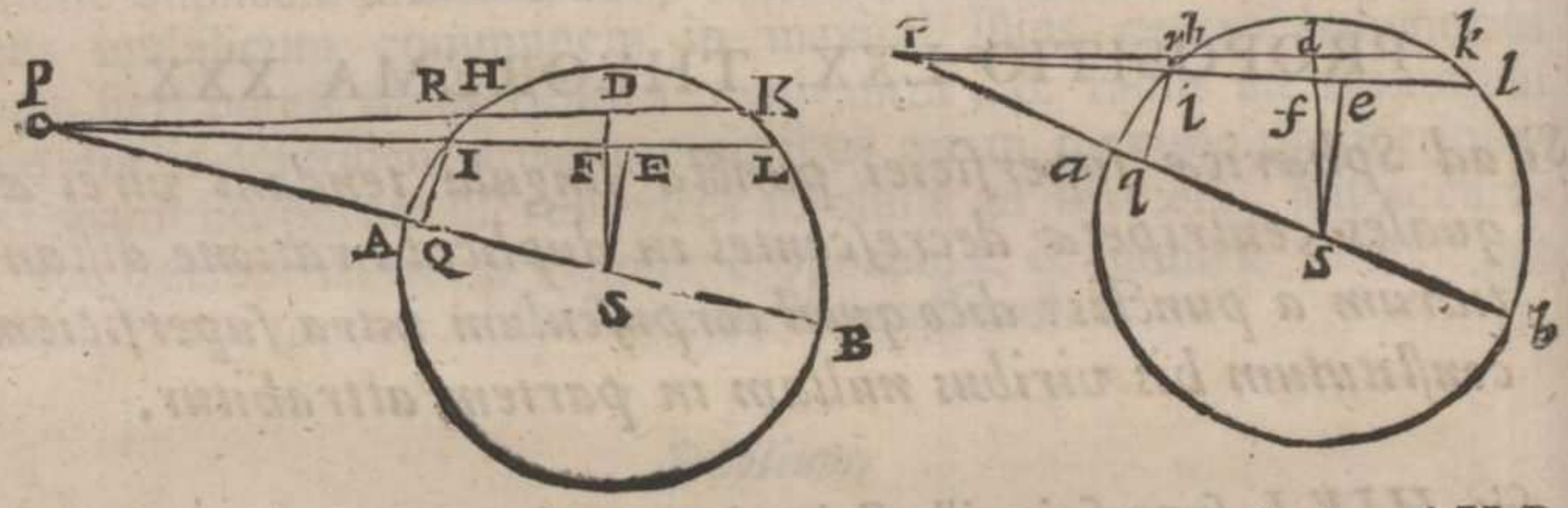
Sit $HIKL$ ſuperficies illa Sphærica, & P corpuſculum intus conſtitutum. Per P agantur ad hanc ſuperficiem lineæ duæ HK, IL, arcus quam minimos HI, KL intercipientes; &, ob triangula HPI, LPK (per Corol. 3. Lem. VII.) ſimilia, arcus illi erunt diſtantiis HP, LP proportionales; & ſuperficiei Sphæricæ particulæ quævis ad HI & KL, rectis per punctum P tranſeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus P exercitæ ſunt inter ſe æquales. Sunt enim ut particulæ directe & quadrata diſtantiarum inverſe. Et hæ duæ rationes componunt rationem

De Motu Corporum, æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo deſtruunt. Et ſimili argumento, attractiones omnes per totam Sphæricam ſuperficiem a contrariis attractionibus deſtruuntur. Proinde corpus P nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra Sphæricam ſuperficiem conſtitutum, attrahitur ad centrum Sphæræ vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.

Sint $AHKB$, $ahkb$ æquales duæ ſuperficies Sphæricæ, centris S, s, diametris AB, ab deſcriptæ, & P, p corpuſcula ſita extrinſecus in diametris illis productis. Agantur a corpuſculis lineæ



PHK, PIL, phk, pil, auferentes a circulis maximis AHB, ahb, æquales arcus HK, hk & IL, il: Et ad eas demittantur perpendicula SD, sd; SE, se; IR, ir; quorum SD, sd ſecent PL, pl in F & f: Demittantur etiam ad diametros perpendicula IQ, iq. Evaneſcant anguli DPE, dpe: & (ob æquales DS, & ds, ES & es,) lineæ PE, PF & pe, pf & lineolæ DF, df pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE, dpe ſimul evaneſcentibus, eſt æqualitatis. His itaque conſtitutis, erit PI, ad PF, ut RI ad DF, & pf, ad pi, ut df, vel DF ad ri, & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut RI, ad ri, hoc eſt (per Corol. 4. Lem. VII,) ut arcus IH ad arcum ih. Rurſus PI, ad PS ut IQ ad SE, & ps ad pi ut se vel IQ ad iq. Et SE ad iq; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut IQ ad iq. Et conjunctis rationibus PI *quad.* $\times pf \times ps$ ad pi *quad.* $\times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc eſt, ut ſuperficies circularis, quam

arcus

arcus IH convolutione ſemicirculi AKB circa diametrum AB deſcribet, ad ſuperficiem circularem, quam arcus ib convolutione ſemicirculi akb circa diametrum ab deſcribet. Et vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuſcula P & p, ſunt (per Hypotheſin) ut ipſæ ſuperficies applicatæ ad quadrata diſtantiarum ſuarum a corporibus, hoc eſt, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipſarum partes obliquas quæ (facta per Legum Corol. 2. reſolutione virium) ſecundum lineas PS, ps ad centra tendunt, ut PI ad PQ, & pi ad pq; id eſt (ob ſimilia triangula PIQ & PSF, piq & psf) ut PS ad PF & ps ad pf. Unde, ex æquo, fit attractio corpuſculi hujus P verſus S ad attractionem corpuſculi p verſus s, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc eſt, ut ps *quad.* ad PS *quad.* Et ſimili argumento vires, quibus ſuperficies convolutione arcuum KL, kl deſcriptæ trahunt corpuſcula, erunt ut ps *quad.* ad PS *quad.*; inque eadem ratione erunt vires ſuperficierum omnium circularium in quas utraque ſuperficies Sphærica, capiendo ſemper sd æqualem SD & se æqualem SE, diſtingui poteſt. Et, per compoſitionem, vires totarum ſuperficierum Sphæricarum in corpuſcula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad Sphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis, ac detur tum Sphæræ denſitas, tum ratio diametri Sphæræ ad diſtantiam corpuſculi a centro ejus; dico quod vis qua corpuſculum attrahitur proportionalis erit ſemidiametro Sphæræ.

Nam concipe corpuſcula duo ſeorſim a Sphæris duabus attrahi, unum ab una & alterum ab altera, & diſtantias eorum a Sphærarum centris proportionales eſſe diametris Sphærarum reſpective, Sphæras autem reſolvi in particulas ſimiles & ſimiliter poſitas ad corpuſcula. Et attractiones corpuſculi unius, factæ verſus ſingulas particulas Sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius verſus analogas totidem particulas Sphæræ alterius, in ratione compoſita ex ratione particularum directe & ratione duplicata diſtantiarum inverſe

De Motu Corporum, verſe. Sed particulæ ſunt ut Sphæræ, hoc eſt, in ratione triplicata diametrorum, & diſtantiæ ſunt ut diametri, & ratio prior directe una cum ratione poſteriore bis inverſe eſt ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

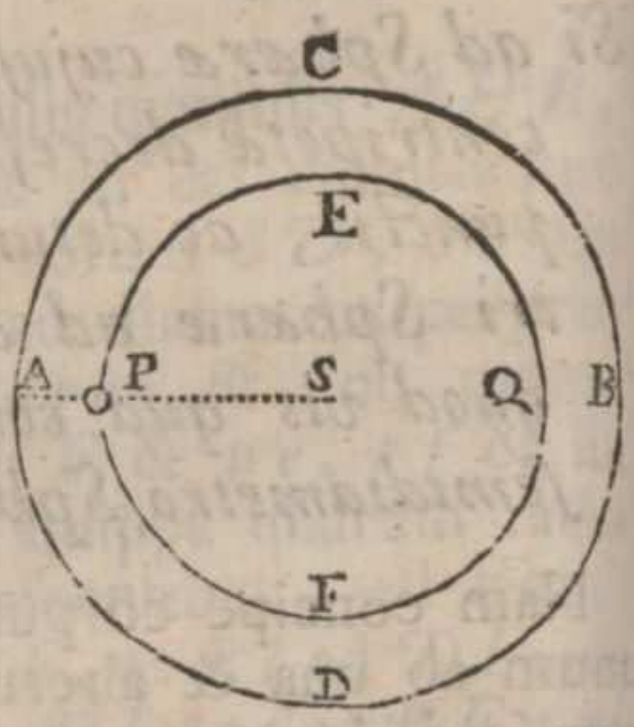
Corol. 1. Hinc ſi corpuſcula in Circulis, circa Sphæras ex materia æqualiter attractiva conſtantes, revolvantur; ſintque diſtantiæ a centris Sphærarum proportionales earundem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice verſa, ſi Tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per Corol. 3. Prop. IV.

Corol. 3. Si ad Solidorum duorum quorumvis ſimilium & æqualiter denſorum puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: vires quibus corpuſcula, ad Solida illa duo ſimiliter ſita, attrahentur ab iiſdem, erunt ad invicem ut diametri Solidorum.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

Si ad Sphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: dico quod corpuſculum intra Sphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.



In Sphæra *ABCD*, centro *S* deſcripta, locetur corpuſculum *P*; & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe Sphæram interiorem *PEQF* deſcribi. Manifeſtum eſt, per Prop. LXX. quod Sphæricæ ſuperficies concentricæ ex quibus Sphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus *P*. Reſtat ſola attractio Sphæræ interioris *PEQF*. Et per Prop. LXXII. hæc eſt ut diſtantia *PS*. *Q. E. D.*

Scholium.

Superficies ex quibus ſolida componuntur, hic non ſunt pure Mathematicæ, ſed Orbes adeo tenues ut eorum craſſitudo inſtar nihili

nihili fit; nimirum Orbes evaneſcentes ex quibus Sphæra ultimo conſtat, ubi Orbium illorum numerus augetur & craſſitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta ex quibus lineæ, ſuperficies & ſolida componi dicuntur, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra Sphæram conſtitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

Nam diſtinguatur Sphæra in ſuperficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpuſculi a ſingulis ſuperficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato diſtantiæ corpuſculi a centro, per Prop. LXXI. Et componendo, fiet ſumma attractionum, hoc eſt attractio corpuſculi in Sphæram totam, in eadem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in æqualibus diſtantiis a centris homogenearum Sphærarum, attractiones ſunt ut Sphæræ. Nam per Prop. LXXII, ſi diſtantiæ ſunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur diſtantia major in illa ratione; &, diſtantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc eſt, in ratione Sphærarum.

Corol. 2. In diſtantiis quibuſvis attractiones ſunt ut Sphæræ applicatæ ad quadrata diſtantiarum.

Corol. 3. Si corpuſculum, extra Sphæram homogeneam poſitum, trahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro, conſtet autem Sphæra ex particulis attractivis; decreſcet vis particulæ cujuſque in duplicata ratione diſtantiæ a particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad ſphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis; dico quod Sphæra quævis alia ſimilaris ab eadem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.

Nam particulæ cujuſvis attractio eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ſuæ a centro Sphæræ trahentis, (per Prop. LXXIV.) & propterea

De Motu Corporum, terea eadem eſt ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico ſito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta eſt quanta foret viciſſim attractio corpuſculi ejuſdem, ſi modo illud a ſingulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipſas attrahit. Foret autem illa corpuſculi attractio (per Prop. LXXIV.) reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ ſuæ a centro Sphæræ; adeoque huic æqualis attractio Sphæræ eſt in eadem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Attractiones Sphærarum, verſus alias Sphæras homogeneas, ſunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum centrorum ſuorum a centris earum quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta ſingula trahent ſingula alterius, eadem vi qua ab ipſis viciſſim trahuntur, adeoque cum in omni attractione urgeatur (per Legem III.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conſervatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

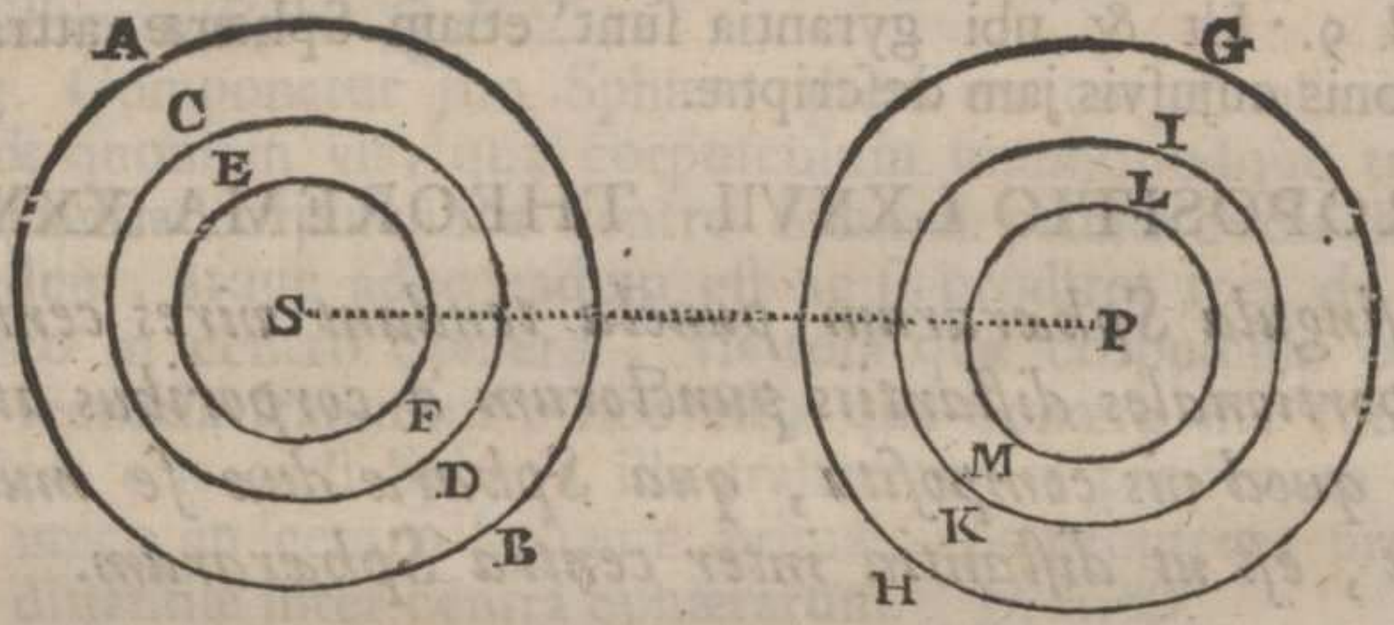
Corol. 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonſtrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si Sphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſunt undique ſimilares, & vis attractiva puncti cujuſque decreſcit in duplicata ratione diſtantiæ corporis attracti: dico quod vis tota qua hujuſmodi Sphæra una attrahit aliam ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.

Sunto Sphæræ quotcunque concentricæ ſimilares AB, CD, EF, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem

denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per Prop. LXXV.) trahent Sphæras alias quotcunque concentricas ſimilares *GH*, *IK*, *LM*, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato diſtantiæ *SP*. Et componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias, hoc eſt, vis qua Sphæra tota ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſitam *GH*, erit in eadem ratione. Augeatur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas una cum vi attractiva, in progreſſu a circumferentia ad centrum, ſecundum Legem quamcunque creſcat vel decreſcat: &, addita materia LIBER PRIMUS.



non attractiva, compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut Sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum ſuperius) in eadem illa diſtantiæ quadratæ ratione inverſa. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi Sphæræ complures, ſibi invicem per omnia ſimiles, ſe mutuo trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt, in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis, ut Sphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut Sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum intra centra.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, ſeu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut Sphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub Sphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata diſtantiarum inter centra.

De Motu Corporum,

Corol. 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphæræ utriuſque virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione ſervata.

Corol. 6. Si hujuſmodi Sphæræ aliquæ circa alias quieſcentes revolvantur, ſingulæ circa ſingulas, ſintque diſtantiæ inter centra revolventium & quieſcentium proportionales quieſcentium diametris; æqualia erunt Tempora periodica.

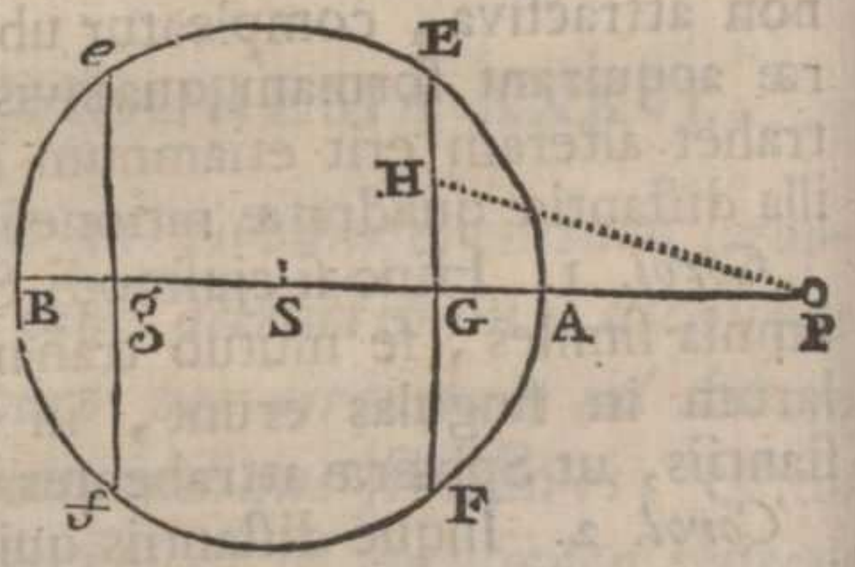
Corol. 7. Et viciſſim, ſi Tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujuſvis jam deſcriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia ſunt etiam Sphæræ attrahentes, conditionis cujuſvis jam deſcriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad ſingula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ, proportionales diſtantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis compoſita, qua Sphæræ duæ ſe mutuo trahent, eſt ut diſtantia inter centra Sphærarum.



Caſ. 1. Sit *AEBF* Sphæra, *S* centrum ejus, *P* corpusculum attractum, *PASB* axis Sphæræ per centrum corpuſculi tranſiens, *EF*, *ef* plana duo quibus Sphæra ſecatur, huic axi perpendicularia & hinc inde æqualiter diſtantia a centro Sphæræ; *G*, *g* interſectiones planorum & axis, & *H* punctum quodvis in plano *EF*. Puncti *H* vis centripeta in corpuſculum *P*, ſecundum lineam *PH* exercita, eſt ut diſtantia *PH*; & (per Legum Corol. 2.) ſecundum lineam *PG*, ſeu verſus centrum *S*, ut longitudo *PG*. Igitur punctorum omnium in plano *EF*, hoc eſt plani totius vis, qua corpuſculum *P* trahitur verſus centrum *S*, eſt ut numerus punctorum ductus in diſtantiam *PG*: id eſt, ut contentum ſub plano ipſo *EF* & diſtantia illa *PG*. Et ſimiliter vis plani *ef*, qua corpuſculum *P* trahitur

trahitur verſus centrum S, eſt ut planum illud ductum in diſtantiam ſuam Pg, ſive ut huic æquale planum EF ductum in diſtantiam illam Pg; & ſumma virium plani utriuſque ut planum EF ductum in ſummam diſtantiarum $PG + Pg$, id eſt, ut planum illud ductum in duplam centri & corpuſculi diſtantiam PS, hoc eſt, ut duplum planum EF ductum in diſtantiam PS, vel ut ſumma æqualium planorum $EF + ef$ ducta in diſtantiam eandem. Et ſimili argumento, vires omnium planorum in Sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro Sphæræ diſtantium, ſunt ut ſumma planorum ducta in diſtantiam PS, hoc eſt, ut Sphæra tota ducta in diſtantiam centri ſui S a corpuſculo P. *Q. E. D.* LIBER PRIMUS.

Caſ. 2. Trahat jam corpuſculum P Sphæram $AEBF$. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphæra illa trahitur, erit ut diſtantia PS. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Componatur jam Sphæra altera ex corpuſculis innumeris P; & quoniam vis, qua corpuſculum unumquodque trahitur, eſt ut diſtantia corpuſculi a centro Sphæræ primæ ducta in Sphæram eandem, atque adeo eadem eſt ac ſi prodiret tota de corpuſculo unico in centro Sphæræ; vis tota qua corpuſcula omnia in Sphæra ſecunda trahuntur, hoc eſt, qua Sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac ſi Sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpuſculo unico in centro Sphæræ primæ, & propterea proportionalis eſt diſtantiæ inter centra Sphærarum. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Trahant Sphæræ ſe mutuo, & vis geminata proportionem priorem ſervabit. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Locetur jam corpuſculum p intra Sphæram $AEBF$; & quoniam vis plani ef in corpuſculum eſt ut contentum ſub plano illo & diſtantia pg; & vis contraria plani EF ut contentum ſub plano illo & diſtantia pG; erit vis ex utraque compoſita ut differentia contentorum, hoc eſt, ut ſumma æqualium planorum ducta in ſemiſſem differentiæ diſtantiarum, id eſt, ut ſumma illa ducta in pS diſtantiam corpuſculi a centro Sphæræ. Et ſimili argumento, attractio planorum omnium EF, ef in Sphæra tota, hoc eſt, attractio Sphæræ totius, eſt ut ſumma planorum omnium, ſeu Sphæra tota, ducta in pS diſtantiam corpuſculi a centro Sphæræ. *Q. E. D.*

Caſ. 6. Et ſi ex corpuſculis innumeris p componatur Sphæra nova, intra Sphæram priorem $AEBF$ ſita; probabitur ut prius quod attractio, ſive ſimplex Sphæræ unius in alteram, ſive mutua utriuſque in ſe invicem, erit ut diſtantia centrorum pS. *Q. E. D.*

De Motu Corporum,

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

Si Sphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares & inæquabiles, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſint undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujuſmodi Sphæræ duæ ſe mutuo trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra Sphærarum.

Demonſtratur ex Propoſitione præcedente, eodem modo quo Propoſitio LXXVI ex Propoſitione LXXV demonſtrata fuit.

Corol. Quæ ſuperius in Propoſitionibus X & LXIV de motu corporum circa centra Conicarum Sectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi Corporum Sphæræ conditionis ejuſdem.

Scholium.

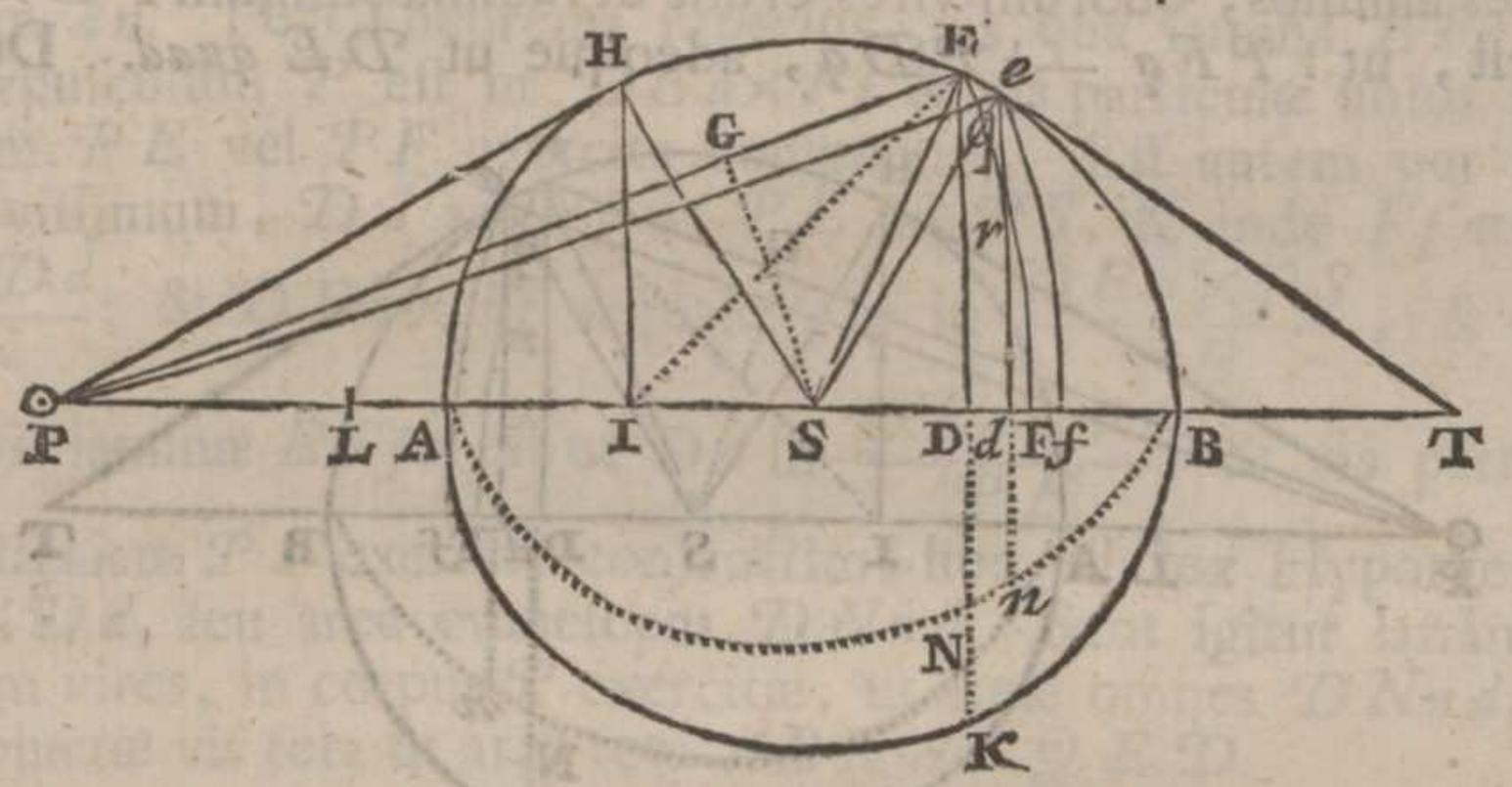
Attractionum Caſus duos inſigniores jam dedi expoſitos; nimirum ubi Vires centripetæ decreſcunt in duplicata diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici; efficientes in utroque Caſu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, & componentes corporum Sphæricorum Vires centripetas eadem Lege, in receſſu a centro, decreſcentes vel creſcentes cum ſeipſis: Quod eſt notatu dignum. Caſus cæteros, qui concluſiones minus elegantes exhibent, ſigillatim percurrere longum eſſet. Malim cunctos methodo generali ſimul comprehendere ac determinare, ut ſequitur.

LEMMA XXIX.

Si deſcribantur centro S *circulus quilibet* AEB, *& centro* P *circuli duo* EF, ef, *ſecantes priorem in* E, e, *lineamque* PS *in* F, f; *& ad* PS *demittantur perpendicula* ED, ed: *dico quod, ſi diſtantia arcuum* EF, ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evaneſcentis* Dd *ad lineam evaneſcentem* Ff *ea ſit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam

Nam ſi linea $\mathcal{P}e$ ſecet arcum EF in q; & recta Ee, quæ cum arcu evaneſcente Ee coincidit, producta occurrat rectæ $\mathcal{P}S$ in $\mathcal{T}$; & ab S demittatur in $\mathcal{P}E$ normalis SG: ob ſimilia triangula $\mathcal{D}\mathcal{T}E$, $d\mathcal{T}e$, $\mathcal{D}ES$; erit $\mathcal{D}d$ ad Ee, ut $\mathcal{D}\mathcal{T}$ ad $\mathcal{T}E$, ſeu $\mathcal{D}E$ ad ES; LIBER PRIMUS.



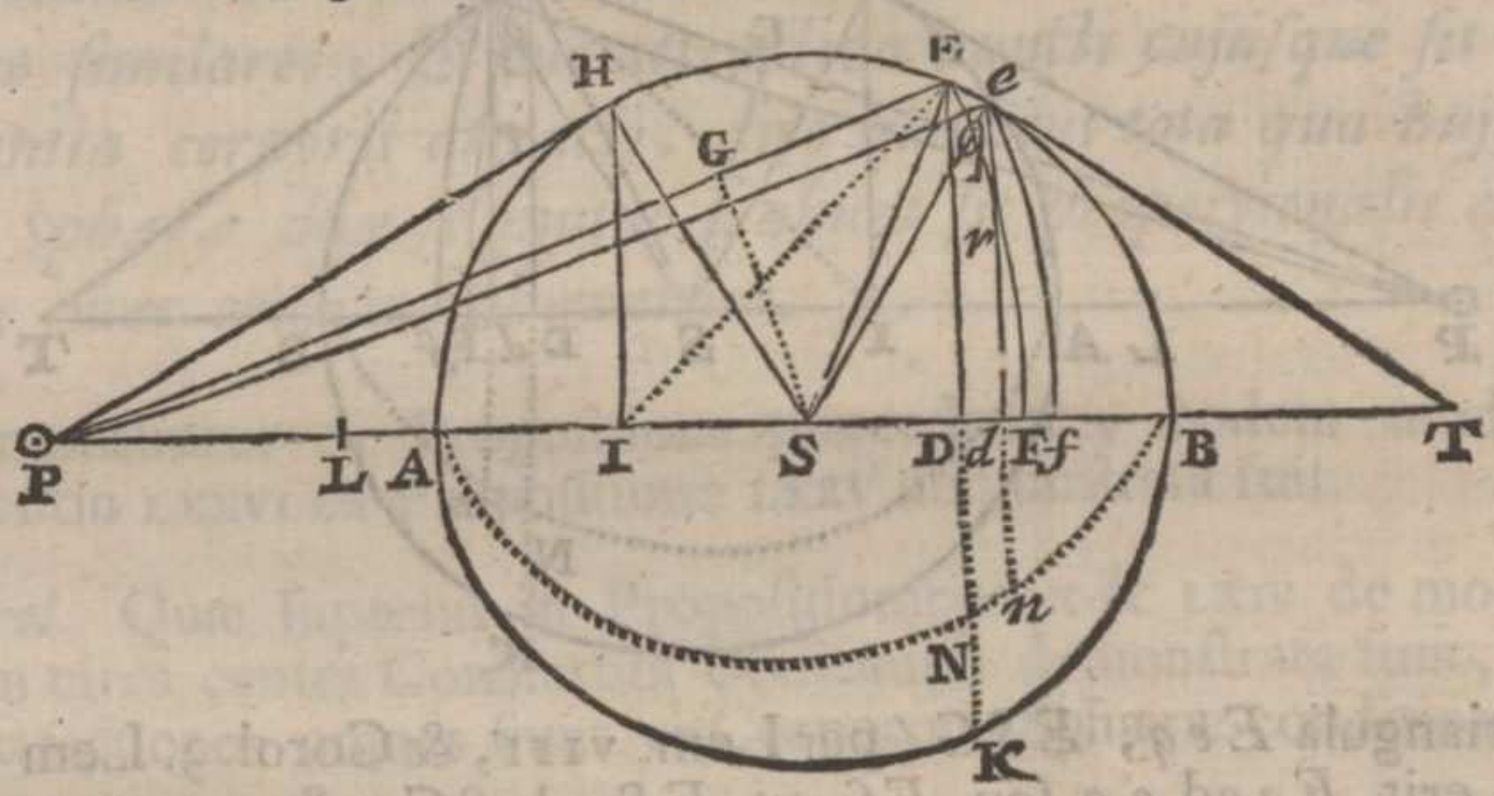
& ob triangula Eeq, ESG (per Lem. VIII, & Corol. 3. Lem VII.) ſimilia, erit Ee ad eq ſeu Ff, ut ES ad SG; & ex æquo, $\mathcal{D}d$ ad Ff ut $\mathcal{D}E$ ad SG; hoc eſt (ob ſimilia triangula $\mathcal{P}\mathcal{D}E$, $\mathcal{P}GS$) ut $\mathcal{P}E$ ad $\mathcal{P}S$. *Q.E.D.*

PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

Si ſuperficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evaneſcens EFfe, *convolutione ſui circa axem* PS, *deſcribat ſolidum Sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod Vis, qua ſolidum illud trahit corpuſculum ſitum in* P, *eſt in ratione compoſita ex ratione ſolidi* DE*q* × Ff *& ratione vis qua particula data in loco* Ff *traheret idem corpuſculum.*

Nam ſi primo conſideremus vim ſuperficiei Sphæricæ FE, quæ convolutione arcus FE generatur, & a linea *de* ubivis ſecatur in r; erit ſuperficiei pars annularis, convolutione arcus rE genita, ut lineola $\mathcal{D}d$, manente Sphæræ radio $\mathcal{P}E$, (uti demonſtravit *Archimedes* in Lib. de *Sphæra & Cylindro.*) Et hujus vis ſecundum lineas $\mathcal{P}E$ vel $\mathcal{P}r$ undique in ſuperficie conica ſitas exercita, ut hæc ipſa ſuperficiei pars annularis; hoc eſt, ut lineola $\mathcal{D}d$ vel, quod perinde eſt, ut rectangulum ſub dato Sphæræ radio $\mathcal{P}E$ & lineola

De Motu Corporum lineola illa $\mathcal{D}d$: at ſecundum lineam $\mathcal{P}S$ ad centrum S tendentem minor, in ratione $\mathcal{P}\mathcal{D}$ ad $\mathcal{P}E$, adeoque ut $\mathcal{P}\mathcal{D}\times\mathcal{D}d$. Dividi jam intelligatur linea $\mathcal{D}F$ in particulas innumeras æquales, quæ ſingulæ nominentur $\mathcal{D}d$; & ſuperficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut ſumma omnium $\mathcal{P}\mathcal{D}\times\mathcal{D}d$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}\mathcal{P}Fq - \frac{1}{2}\mathcal{P}\mathcal{D}q$, adeoque ut $\mathcal{D}E$ *quad.* Ducatur



jam ſuperficies FE in altitudinem Ff & fiet ſolidi $EFfe$ vis exercita in corpuſculum $\mathcal{P}$ ut $\mathcal{D}Eq\times Ff$: puta ſi detur vis quam particula aliqua data Ff in diſtantia $\mathcal{P}F$ exercet in corpuſculum $\mathcal{P}$. At ſi vis illa non detur, fiet vis ſolidi $EFfe$ ut ſolidum $\mathcal{D}Eq\times Ff$ & vis illa non data conjunctim. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

Si ad Sphæræ alicujus ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem* AB, *in quo corpuſculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis ſingulis* D *perpendicula* DE, *Sphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitas* $\frac{DEq\times PS}{PE}$ *& vis quam Sphæræ particula ſita in axe ad diſtantiam* PE *exercet in corpuſculum* P *conjunctim: dico quod vis tota, qua corpuſculum* P *trahitur verſus Sphæram, eſt ut area comprehenſa ſub axe Sphæræ* AB *& linea curva* ANB, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*

Etenim

BIBLIOTECA PÚBLICA E ARQUIVO DISTRITAL DE ÉVORA

Etenim ſtantibus quæ in Lemmate & Theoremate noviſſimo conſtructa ſunt, concipe axem Sphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales $\mathcal{D}d$, & Sphæram totam dividi in totidem laminas Sphæricas concavo-convexas $EFfe$, & erigatur perpendiculum dn. Per Theorema ſuperius, vis qua lamina $EFfe$ trahit corpuſculum $\mathcal{P}$ eſt ut $\mathcal{D}Eq \times Ff$ & vis particulæ unius ad diſtantiam $\mathcal{P}E$ vel $\mathcal{P}F$ exercita conjunctim. Eſt autem per Lemma noviſſimum, $\mathcal{D}d$ ad Ff ut $\mathcal{P}E$ ad $\mathcal{P}S$, & inde Ff æqualis $\frac{\mathcal{P}S \times \mathcal{D}d}{\mathcal{P}E}$; & $\mathcal{D}Eq \times Ff$ æquale $\mathcal{D}d$ in $\frac{\mathcal{D}Eq \times \mathcal{P}S}{\mathcal{P}E}$, & proptерea vis laminæ $EFfe$ eſt ut $\mathcal{D}d$ in $\frac{\mathcal{D}Eq \times \mathcal{P}S}{\mathcal{P}E}$ & vis particulæ ad diſtantiam $\mathcal{P}F$ exercita conjunctim, hoc eſt (ex Hypotheſi) ut $\mathcal{D}N \times \mathcal{D}d$, ſeu area evaneſcens $\mathcal{D}Nnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus $\mathcal{P}$ exercitæ, ut areæ omnes $\mathcal{D}Nnd$, hoc eſt, Sphæræ vis tota ut area tota $ABNA$. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta, ad particulas ſingulas tendens, eadem ſemper maneat in omnibus diſtantiis, & fiat $\mathcal{D}N$ ut $\frac{\mathcal{D}Eq \times \mathcal{P}S}{\mathcal{P}E}$: erit vis tota qua corpuſculum a Sphæra attrahitur, ut area $ABNA$.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia corpuſculi a ſe attracti, & fiat $\mathcal{D}N$ ut $\frac{\mathcal{D}Eq \times \mathcal{P}S}{\mathcal{P}Eq}$: erit vis qua corpuſculum $\mathcal{P}$ a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut cubus diſtantiæ corpuſculi a ſe attracti, & fiat $\mathcal{D}N$ ut $\frac{\mathcal{D}Eq \times \mathcal{P}S}{\mathcal{P}Eqq}$: erit vis qua corpuſculum a tota Sphæra attrahitur ut area $ABNA$.

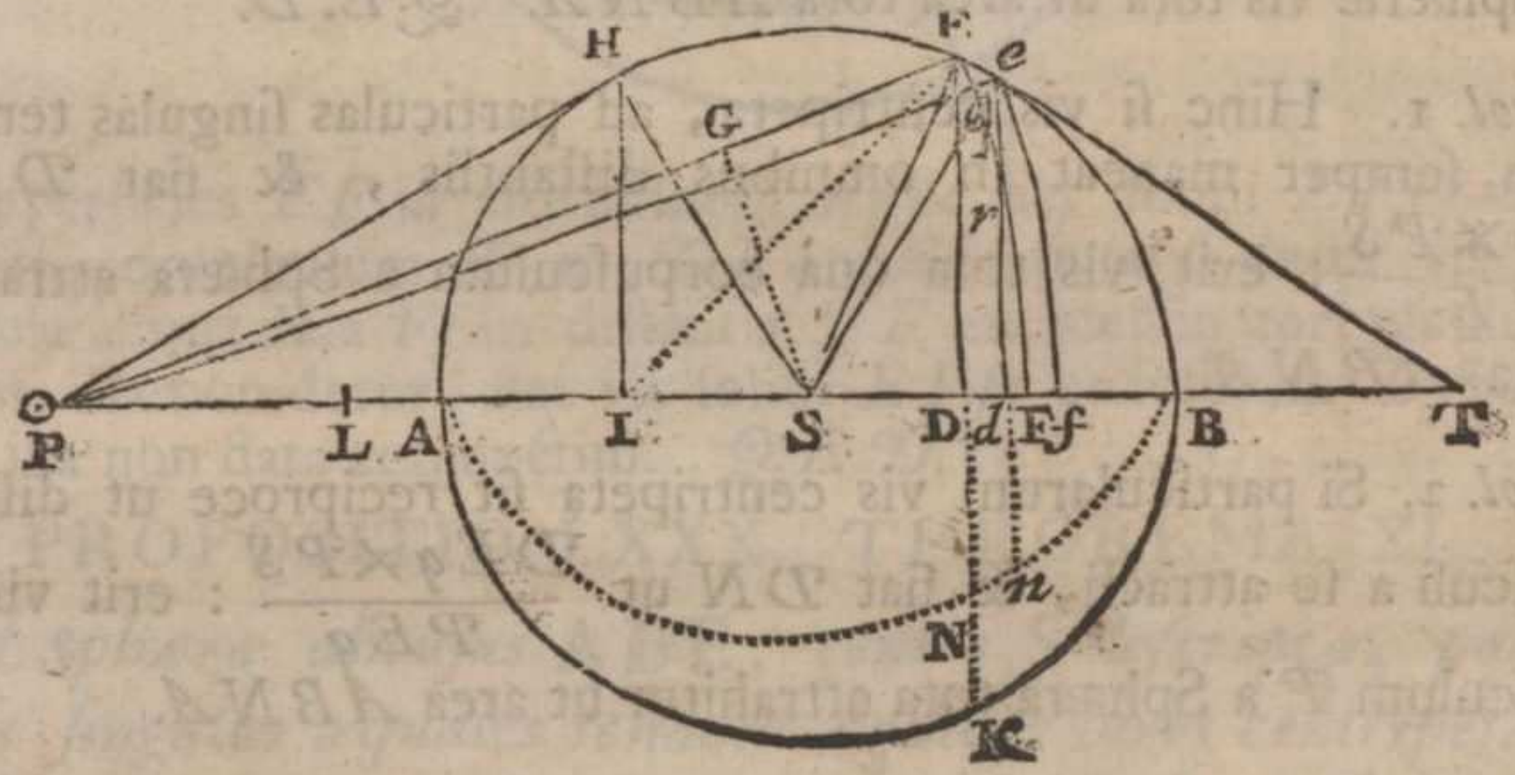
Corol. 4. Et univerſaliter ſi vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ponatur eſſe reciproce ut quantitas V, fiat autem $\mathcal{D}N$ ut $\frac{\mathcal{D}Eq \times \mathcal{P}S}{\mathcal{P}E \times V}$; erit vis qua corpuſculum a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

De Motu Corporum,

PROPOSITIO LXXXI. PROBLEMA XLI.

Stantibus jam positis, mensuranda est Area ABNA.

A puncto P ducatur recta PH Sphæram tangens in H, & ad axem PAB demissa normali HI, bisecetur PI in L; & erit (per Prop. 12. Lib. 2. Elem.) PEq æquale $PSq + SEq + 2PSD$. Est autem SEq seu SHq (ob similitudinem triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo PSI. Ergo PEq æquale est contento sub PS & $PS + SI + 2SD$, hoc est, sub PS & $2LS + 2SD$, id est, sub PS & $2LD$. Porro DE *quad.* æquale est $SEq - SDq$, seu $SEq - LSq + 2SLD - LDq$, id est, $2SLD - LDq - ALB$. Nam $LSq - SEq$ seu $LSq - SAq$

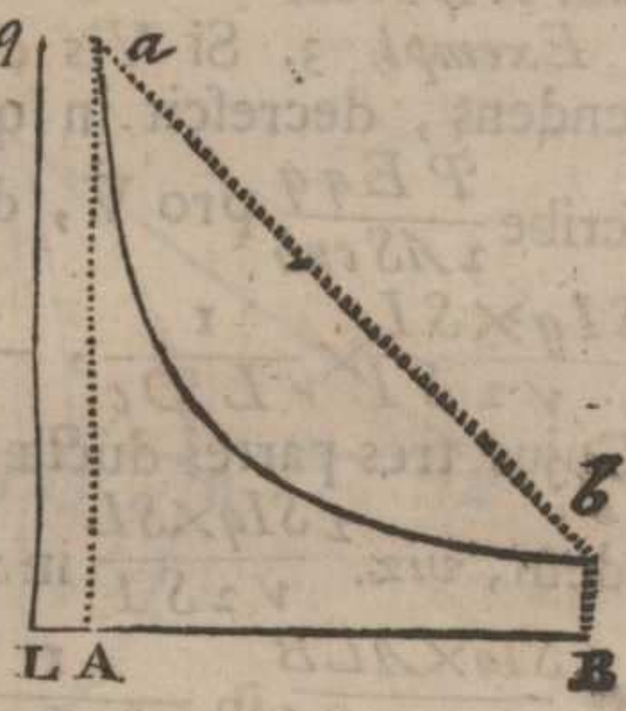


(per Prop. 6. Lib. 2. Elem.) æquatur rectangulo ALB. Scribatur itaque $2SLD - LDq - ALB$ pro DEq; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ secundum Corollarium quartum Propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ DN, resolvet sese in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi si pro V scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale inter PS & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per Methodos vulgatas innotescunt. *Q.E.F.*

Ex-

Exempl. 1. Si vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ſit reciproce ut diſtantia; pro V ſcribe diſtantiam PE; dein $2PS \times LD$ pro PEq, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB.}{2LD}$

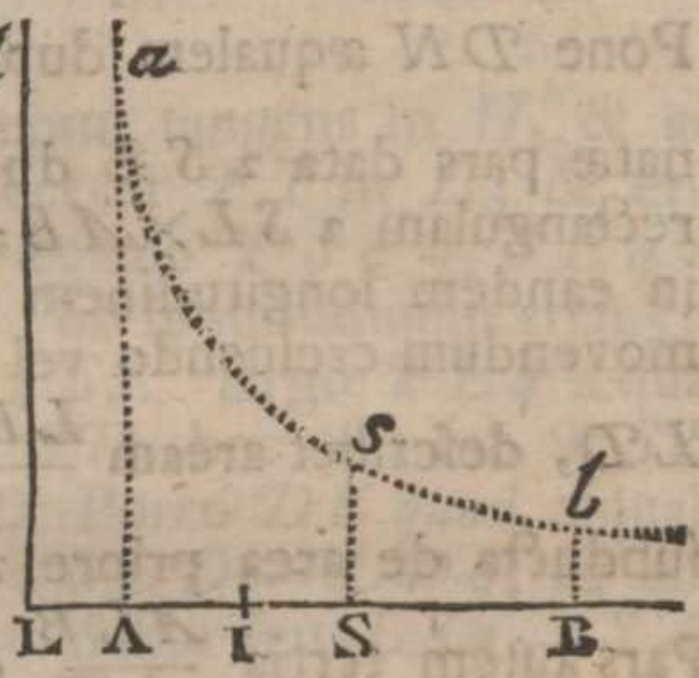
Pone DN æqualem duplo eius $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB deſcribet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum creſcendo vel decreſcendo æquetur ſemper longitudini LD, deſcribet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, id eſt, aream $SL \times AB$; quæ ſubducta de area priore $2SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$ ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, deſcribet aream Hyperbolicam; quæ ſubducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæſitam $ABNA$. Unde talis emergit Problematis conſtructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipſi LB, & Bb ipſi LA æquetur. Aſymptotis Ll, LB, per puncta a, b deſcribatur Hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæſitæ $ABNA$ æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ſit reciproce ut cubus diſtantiæ, vel (quod perinde eſt) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; ſcribe $\frac{PE\,cub.}{2ASq}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro PEq; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id eſt (ob continue proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream Hyperboli-

De Motu Corporum

cam; secunda $\frac{1}{2} SI$ aream $\frac{1}{2} AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id est $\frac{1}{2} AB \times SI$. De prima subducatur summa secundæ & tertiæ, & manebit area quæsita $ABNA$. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendicula Ll, Aa, Ss, Bb, quorum Ss ipsi SI æquetur, perque punctum s Asymptotis Ll, LB describatur Hyperbola asb occurrens perpendiculis Aa, Bb in a & b; & rectangulum $2ASI$ subductum de area Hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæsitam $ABNA$.



Exempl. 3. Si Vis centripeta, ad singulas Sphæræ particulas tendens, decrescit in quadruplicata ratione distantiæ a particulis; scribe $\frac{PEqq}{2AScub}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE, & fiet DN ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2}SI} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}}$, $-\frac{SIq}{2\sqrt{2}SI} \times \frac{1}{\sqrt{LD}}$, $-\frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2}SI} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$ Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB, producunt areas totidem, *viz.* $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2}SI}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2}SI}$ in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$; & $\frac{SIq \times ALB}{3\sqrt{2}SI}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}cub.} - \frac{1}{\sqrt{LB}cub.}$ Et hæ post debitam reductionem fiunt $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, SIq, & $SIq + \frac{2SIcub.}{3LI}$ Hæ vero subductis posterioribus de priore, evadunt $\frac{4SIcub.}{3LI}$. Igitur vis tota, qua corpusculum P in Sphæræ centrum trahitur, est ut $\frac{SIcub.}{PI}$ id est, reciproce ut $PScub. \times PI.$ *Q.E.I.*

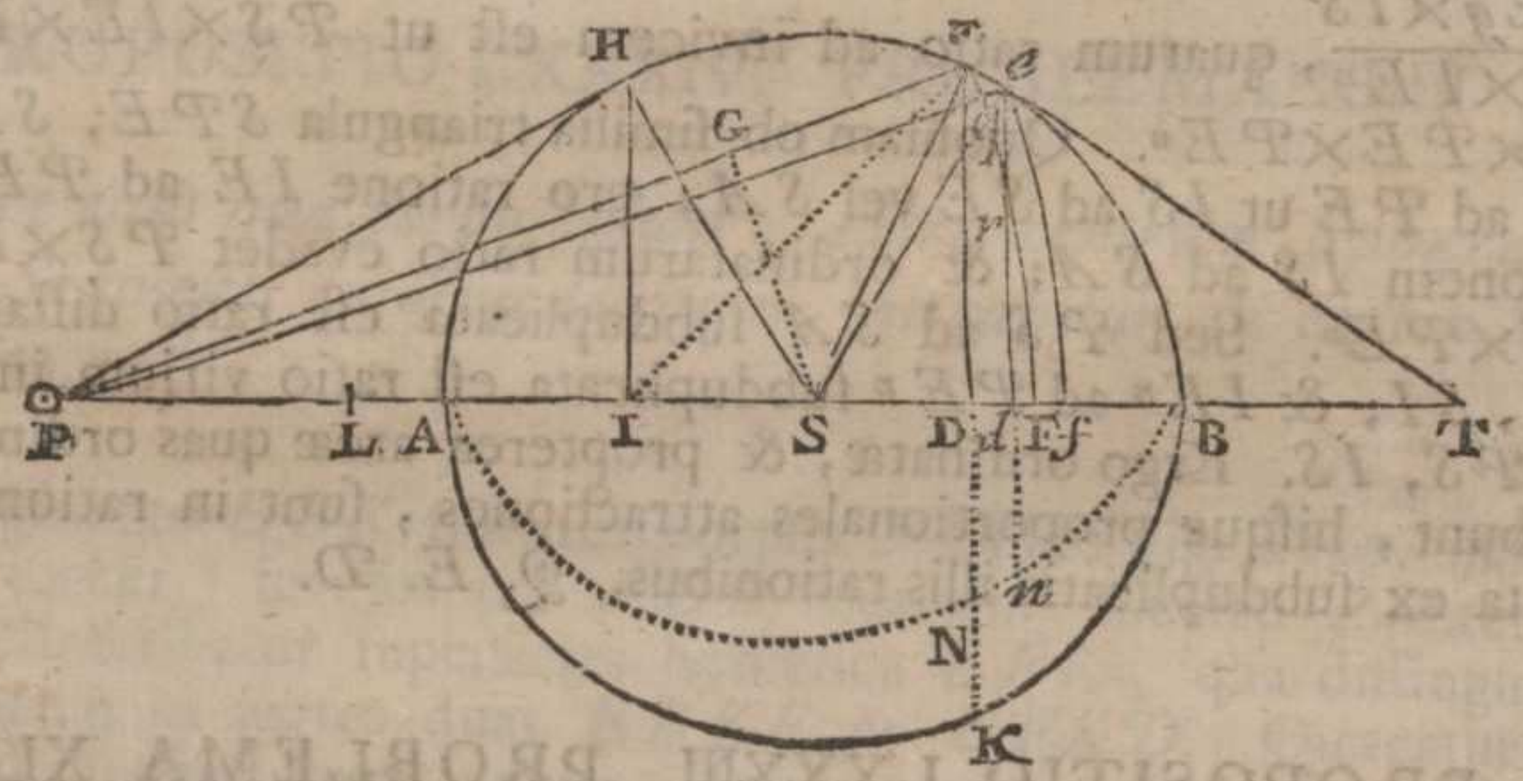
Eadem Methodo determinari potest Attractio corpusculi siti intra Sphæram, sed expeditius per Theorema sequens.

PRO-

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In Sphæra centro S *intervallo* SA *descripta, si capiantur* SI, SA, SP *continue proportionales: dico quod corpusculi intra Sphæram in loco quovis* I *attractio est ad attractionem ipsius extra Sphæram in loco* P, *in ratione composita ex subduplicata ratione distantiarum a centro* IS, PS *& subduplicata ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

Ut si vires centripetæ particularum Sphæræ sint reciproce ut distantiæ corpusculi a se attracti; vis, qua corpusculum situm in *I* trahitur a Sphæra tota, erit ad vim qua trahitur in *P*, in ratione



composita ex subduplicata ratione distantiæ *SI* ad distantiam *SP* & ratione subduplicata vis centripetæ in loco *I*, a particula aliqua in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eadem in centro particula oriundam, id est, ratione subduplicata distantiarum *SI*, *SP* ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* a Sphæra tota factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum Sphæræ sunt reciproce in duplicata ratione distantiarum, colligetur quod attractio in *I* sit ad attractionem in *P*, ut distantia *SP* ad Sphæræ semidiametrum *SA*: Si vires illæ sunt reciproce in triplicata ratione distantiarum, attractiones in *I* & *P* erunt ad invi-

De Motu Corporum, cem ut SP *quad.* ad SA *quad.* Si in quadruplicata, ut SP *cub.* ad SA *cub.* Unde cum attractio in P, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciproce ut PS *cub.* $\times PI$, attractio in I erit reciproce ut SA *cub.* $\times PI$, id est (ob datum SA *cub.*) reciproce ut PI. Et similis est progressus in infinitum. Theorema vero sic demonstratur.

Stantibus jam ante constructis, & existente corpore in loco quovis P, ordinatim applicata DN inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo si agatur IE, ordinata illa ad alium quemvis locum I, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, e Sphæræ puncto quovis E manantes, esse ad invicem in distantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n, (ubi numerus n designet indicem potestatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob similia triangula SPE, SEI, fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE scribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed PS ad SA subduplicata est ratio distantiarum PS, SI; & IE^n ad PE^n subduplicata est ratio virium in distantiis PS, IS. Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ describunt, hisque proportionales attractiones, sunt in ratione composita ex subduplicatis illis rationibus. *Q. E. D.*

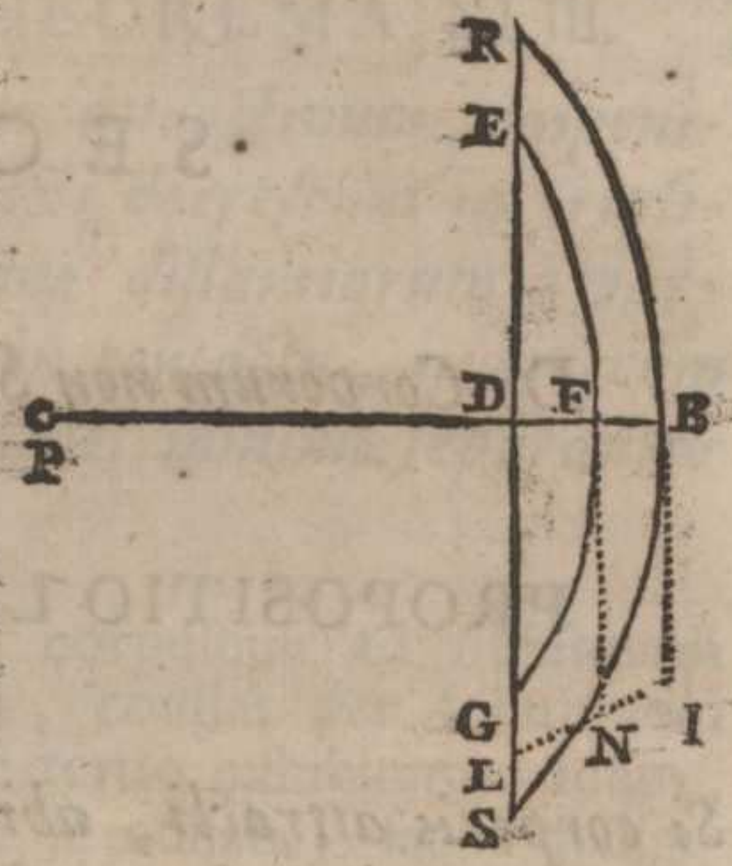
PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

Invenire vim qua corpusculum in centro Sphæræ locatum ad ejus Segmentum quodcunque attrahitur.

Sit P corpus in centro Sphæræ, & $RBSD$ Segmentum ejus plano RDS & superficie Sphærica RBS contentum. Superficie Sphærica EFG centro P descripta secetur DB in F, ac distinguatur Segmentum in partes $BREFGS$, $FEDG$. Sit autem superficies illa non pure Mathematica, sed Physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profundi-

tas O,

tas O, & erit hæc ſuperficies (per demonſtrata *Archimedis*) ut $\mathcal{P}F \times \mathcal{D}F \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum Sphæræ eſſe reciproce ut diſtantiarum dignitas illa cujus Index eſt n; & vis qua ſuperficies FE trahit corpus $\mathcal{P}$ erit ut $\frac{\mathcal{D}F \times O}{\mathcal{P}Fn-1} - \frac{\mathcal{D}Fq \times O}{2\,pFn}$. Huic proportionale ſit perpendiculum FN ductum in O; & area curvilinea $B\mathcal{D}LIB$, quam ordinatim applicata FN in longitudinem $\mathcal{D}B$ per motum continuum ducta deſcribit, erit ut vis tota qua Segmentum totum $RBS\mathcal{D}$ trahit corpus $\mathcal{P}$. *Q. E. I.*



PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

Invenire vim qua corpuſculum, extra centrum Sphæræ in axe Segmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem Segmento.

A Segmento EBK trahatur corpus $\mathcal{P}$ (Vide Fig. Prop. LXXIX, LXXX, LXXXI.) in ejus axe $A\mathcal{D}B$ locatum. Centro $\mathcal{P}$ intervallo $\mathcal{P}E$ deſcribatur ſuperficies Sphærica EFK, qua diſtinguatur Segmentum in partes duas $EBKF$ & $EFK\mathcal{D}$. Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI, & vis partis poſterioris per Prop. LXXXIII; & ſumma virium erit vis Segmenti totius $EBK\mathcal{D}$. *Q. E. I.*

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum Sphæricorum, jam pergere liceret ad Leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis ſimiliter conſtantium corporum; ſed iſta particulatim tractare minus ad inſtitutum ſpectat. Suffecerit Propoſitiones quaſdam generaliores de viribus hujuſmodi corporum, deque motibus inde oriundis, ob earum in rebus Philoſophicis aliqualem uſum, ſubjungere.

SECTIO

De Motu Corporum,

SECTIO XIII.

De Corporum non Sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longe fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicata distantiarum a particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum a particulis; attractio versus corpus Sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV.) sit reciproce ut quadratum distantiæ attracti corporis a centro Sphæræ, haud sensibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur Propositio de Sphæris attractivis. Et par est ratio Orbium Sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in Orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per Orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoque vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si Sphæris hisce Orbibusque Sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum qui ex contactu oritur. Constat igitur propositio de corporibus Figurarum omnium. *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicata vel plusquam triplicata ratione distantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujusmodi Sphæram trahentem augeri in infinitum, constat per solutionem Problematis XLI, in Exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per Exempla illa & Theorema XLI. inter se collata, facile colligitur de attractionibus corporum versus Orbes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra Orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his Sphæris & Orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit Propositio de corporibus universis. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similia, & ex materia æqualiter attractiva constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia, & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales & in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum secundum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis

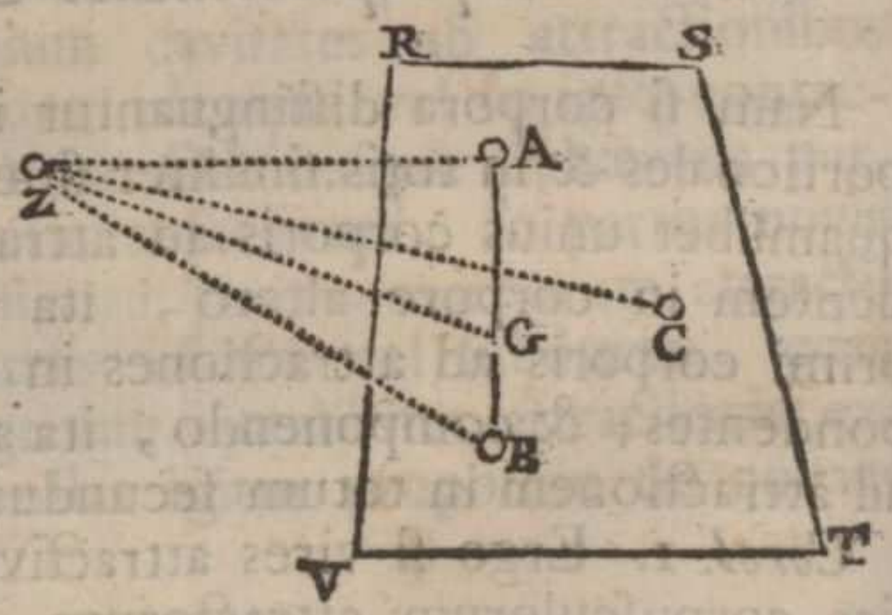
De Motu Corporum, cujusvis distantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe & distantiarum dignitates illæ inverse. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicata distantiarum a corpusculis attractis, corpora autem sint ut *A cub.* & *B cub.* adeoque tum corporum latera cubica tum corpusculorum attractorum distantiæ a corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ quad.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ quad.}$ id est, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decrescant in ratione triplicata distantiarum a corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ cub.}$ id est, æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplicata; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ qq.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ qq.}$ id est, reciproce ut latera cubica *A* & *B*. Et sic in cæteris.

Corol. 2. Unde vicissim, ex viribus quibus corpora similia trahunt corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti: si modo decrementum illud sit directe vel inverse in ratione aliqua distantiarum.

PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

Si particularum æqualium Corporis cujuscunque vires attractivæ sint ut distantiæ locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi Globi ex materia consimili & æquali constantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpusculum aliquod *Z* viribus quæ, si particulæ æquantur inter se, sint ut distantiæ *AZ*, *BZ*; sin particulæ statuantur inæquales, sint ut hæ particulæ in distantias suas *AZ*, *BZ* respective ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur *AB*, & secetur ea in *G* ut sit *AG* ad *BG* ut particula *B* ad particulam *A*;



&

& erit G commune centrum gravitatis particularum A & B. Vis $A \times AZ$ (per Legum Corol. 2.) reſolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$, & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG, æquantur; adeoque cum dirigantur in partes contrarias, ſe mutuo deſtruunt. Reſtant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z verſus centrum G, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc eſt, vim eandem ac ſi particulæ attractivæ A & B conſiſterent in eorum communi gravitatis centro G, Globum ibi componentes. LIBER PRIMUS.

Eodem argumento, ſi adjungatur particula tertia C, & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum G; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; & eadem erit ac ſi Globus & particula C conſiſterent in centro illo communi, Globum majorem ibi componentes. Et ſic pergitur in infinitum. Eadem eſt igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque $RSTV$ ac ſi corpus illud, ſervato gravitatis centro, figuram Globi indueret. *Q. E. D.*

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit ac ſi corpus attrahens $RSTV$ eſſet Sphæricum; & propterea ſi corpus illud attrahens vel quieſcat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum movebitur in Ellipſi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si Corpora ſint plura ex particulis æqualibus conſtantia, quarum vires ſunt ut diſtantiæ locorum a ſingulis: vis ex omnium viribus compoſita, qua corpuſculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis, & eadem erit ac ſi trahentia illa, ſervato gravitatis centro communi, coirent & in Globum formarentur.

Demonſtratur eodem modo, atque Propoſitio ſuperior.

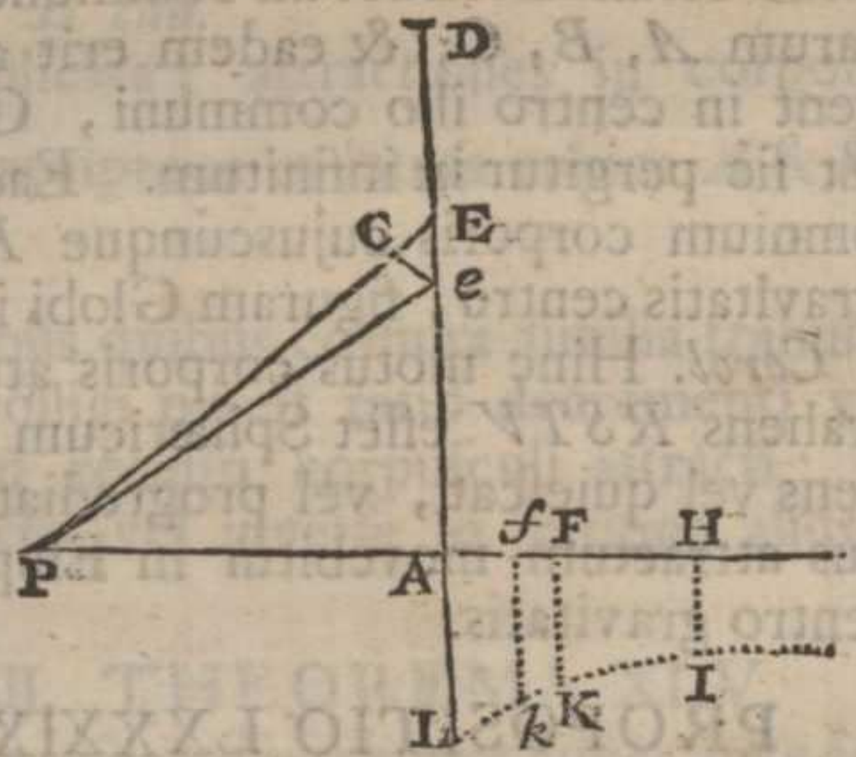
Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit ac ſi corpora trahentia, ſervato communi gravitatis centro, coirent & in Globum formarentur. Ideoque ſi corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quieſcit, vel progreditur uniformiter in linea recta: corpus attractum movebitur in Ellipſi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

De Motu Corporum,

Si ad ſingula Circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in quacunque diſtantiarum ratione: invenire vim qua corpuſculum attrahitur ubivis poſitum in recta quæ plano Circuli ad centrum ejus perpendiculariter inſiſtit.

Centro A intervallo quovis AD, in plano cui recta AP perpendicularis eſt, deſcribi intelligatur Circulus; & ſinvenienda ſit vis qua corpuſculum quodvis P in eundem attrahitur. A Circuli puncto quovis E ad corpuſculum attractum P agatur recta PE: In recta PA capiatur PF ipſi PE æqualis, & erigatur normalis FK, quæ ſit ut vis qua punctum E trahit corpuſculum P. Sitque IKL curva linea quam punctum K perpetuo tangit. Occurrat eadem Circuli plano in L. In PA capiatur PH æqualis PD, & erigatur perpendiculum HI curvæ prædictæ occurrens in I; & erit corpuſculi P attractio in Circulum ut area $AHIL$ ducta in altitudinem AP. *Q.E.I.*



Etenim in AE capiatur linea quam minima Ee. Jungatur Pe; & in PE, PA capiantur PC, Pf ipſi Pe æquales. Et quoniam vis, qua annuli centro A intervallo AE in plano prædicto deſcripti punctum quodvis E trahit ad ſe corpus P, ponitur eſſe ut FK, & inde vis qua punctum illud trahit corpus P verſus A eſt ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis qua annulus totus trahit corpus P verſus A, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iſte eſt ut rectangulum ſub radio AE & latitudine Ee, & hoc rectangulum (ob proportionales PE & AE, Ee & CE) æquatur rectangulo $PE \times CE$ ſeu $PE \times Ff$; erit vis qua annulus iſte trahit corpus P verſus A, ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id eſt, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, ſive ut area $FK\,kf$ ducta in AP. Et propterea ſumma virium, quibus annuli omnes in Circulo, qui centro A & intervallo

tervallo AD describitur, trahunt corpus P versus A, est ut area tota $AHIKL$ ducta in AP. *Q. E. D.* LIBER PRIMUS.

Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicata distantiarum ratione, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{PF\,quad.}$, atque adeo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpusculi P in Circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id est, ut $\frac{AH}{PH}$.

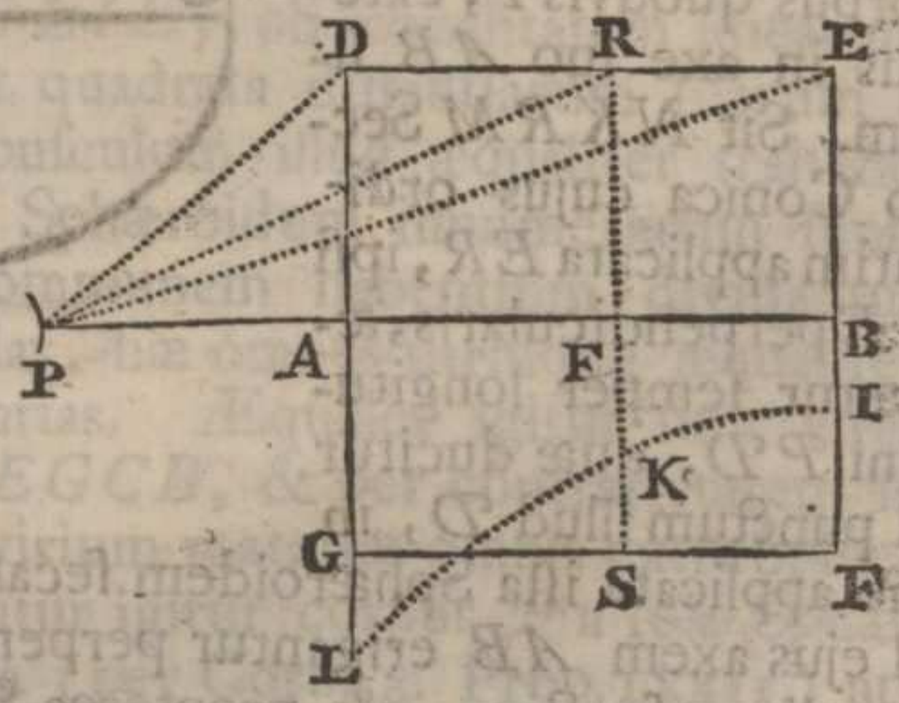
Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciproce ut distantiarum dignitas quælibet D^n, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{D^n}$, adeoque area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpusculi P in Circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Corol. 3. Et si diameter Circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-2}, propterea quod terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evanescet.

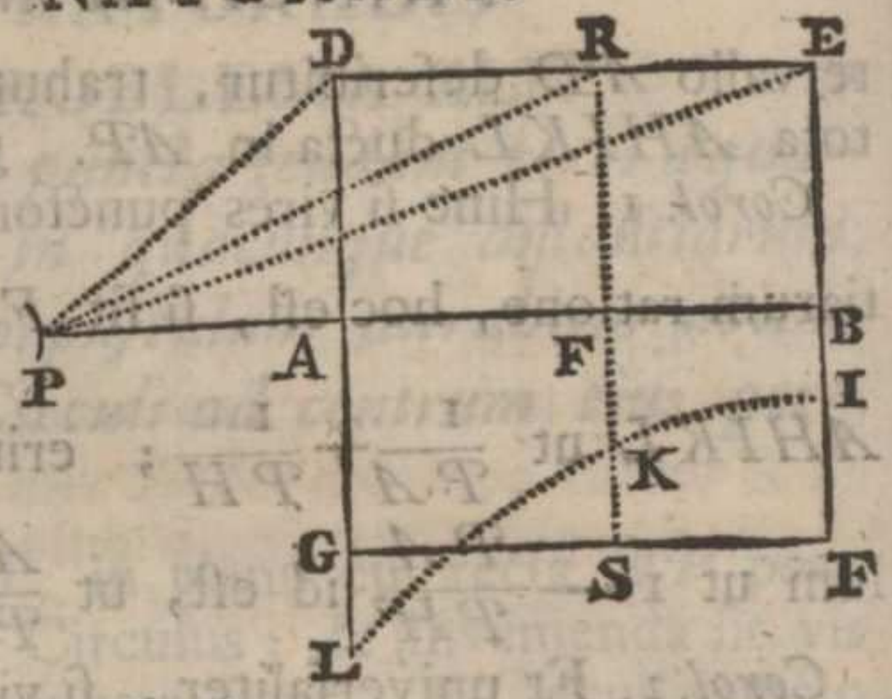
PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe Solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quacunque distantiarum ratione decrescentes.

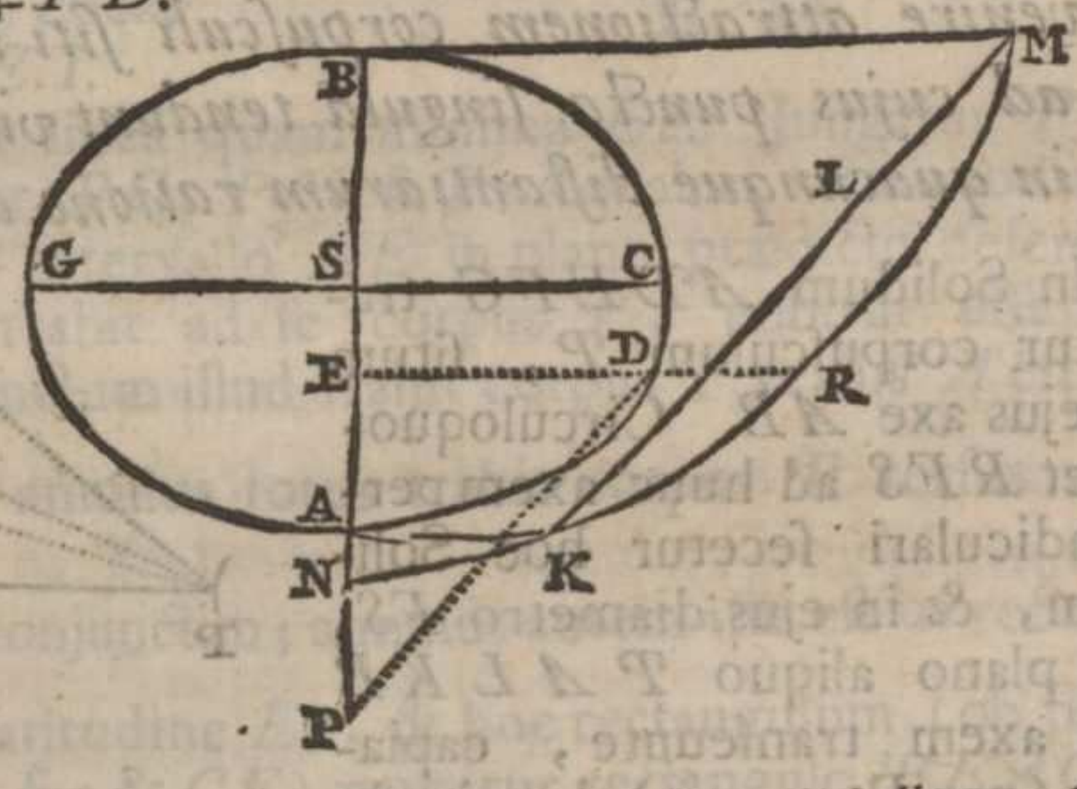
In Solidum $ADEFG$ trahatur corpusculum P, situm in ejus axe AB. Circuloquolibet RFS ad hunc axem perpendiculari secetur hoc Solidum, & in ejus diametro FS, in plano aliquo $PALKB$ per axem transeunte, capiatur (per Prop. xc.) longitudo FK vi qua corpusculum P in circulum illum attrahitur proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam LKI, planis extimorum circulorum AL & BI occurrentem in L & I; & erit attractio corpusculi P in Solidum ut area $LABI$. *Q. E. I.*



De Motu Corporum,



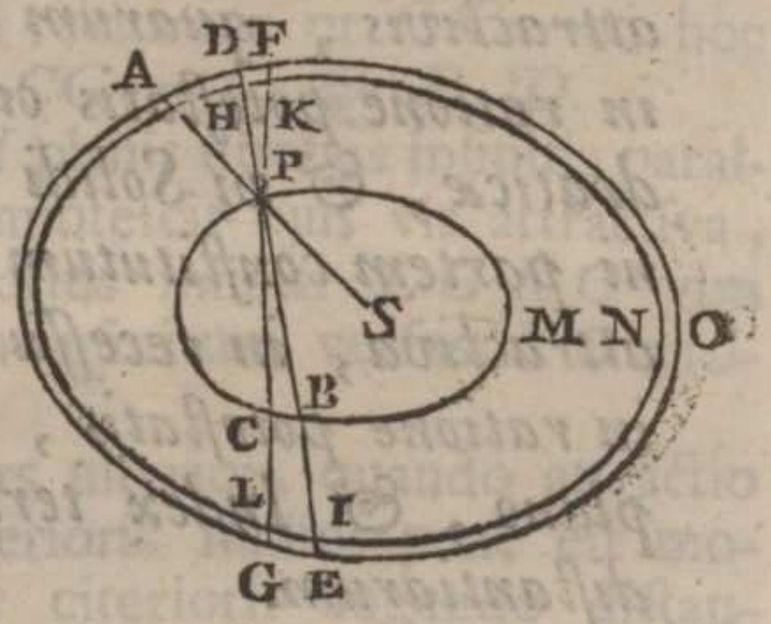
Corol. 1. Unde si Solidum Cylyndrus sit, parallelogrammo $ADEB$ circa axem AB revoluto descriptus, & vires centripetæ in singula ejus puncta tendentes sint reciproce ut quadrata distantiarum a punctis: erit attractio corpusculi P in hunc Cylindrum ut $AB - PE + PD$. Nam ordinatim applicata FK (per Corol. 1. Prop. xc.) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem AB, describit aream $1 \times AB$; & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem PB, describit aream 1 in $\overline{PE - AD}$ (id quod ex curvæ LIK quadratura facile ostendi potest:) & similiter pars eadem ducta in longitudinem PA describit aream 1 in $\overline{PD - AD}$, ductaque in ipsarum PB, PA differentiam AB, describit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum postremum 1 in $\overline{PE - PD}$, & restabit area $LABI$ æqualis 1 in $\overline{AB - PE + PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, est ut $AB - PE + PD$.



Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit qua Sphæroidis $AGBCD$ attrahit corpus quodvis P, exterius in axe suo AB situm. Sit $NKRM$ Sectio Conica cujus ordinatim applicata ER, ipsi PE perpendicularis, æquetur semper longitudini PD, quæ ducitur ad punctum illud D, in quo applicata ista Sphæroidem secat. A Sphæroidis verticibus A, B ad ejus axem AB erigantur perpendicula AK, BM ipsis AP, BP æqualia respective, & propterea Sectioni Conicæ occurrentia in K & M; & jungatur KM auferens ab eadem segmentum $KMRK$. Sit autem Sphæroidis centrum S & semidiameter maxima SC: & vis qua

qua Sphærois trahit corpus $\mathcal{P}$ erit ad vim qua Sphæra, diametro AB descripta, trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - \mathcal{P}S \times KMRK}{\mathcal{P}Sq + CSq - ASq}$ ad $\frac{AS\ cub.}{3\mathcal{P}S\ quad}$. Et eodem computandi fundamento invenire licet vires segmentorum Sphæroidis. LIBER PRIMUS.

Corol. 3. Quod si corpusculum intra Sphæroidem, in data quavis ejusdem diametro, collocetur; attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius colligetur hoc argumento. Sit $AGOF$ Sphærois attrahens, S centrum ejus & $\mathcal{P}$ corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum semidiameter SPA, tum rectæ duæ quævis DE, FG Sphæroidi hinc inde occurrentes in D & E, F & G: Sintque $\mathcal{P}CM$, HLN superficies Sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per corpus $\mathcal{P}$ & secet rectas DE & FG in B & C, posterior secet easdem rectas in H, I & K, L. Habeant autem Sphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ $D\mathcal{P}$ & BE, $F\mathcal{P}$ & CG, DH & IE, FK & LG sibi mutuo æquales; propterea quod rectæ DE, $\mathcal{P}B$ & HI bisecantur in eodem puncto, ut & rectæ FG, $\mathcal{P}C$ & KL. Concipe jam $D\mathcal{P}F$, $E\mathcal{P}G$ designare Conos oppositos, angulis verticalibus $D\mathcal{P}F$, $E\mathcal{P}G$ infinite parvis descriptos, & lineas etiam DH, EI infinite parvas esse; & Conorum particulæ Sphæroidum superficiebus abscissæ $DHKF$, $GLIE$, ob æqualitatem linearum DH, EI, erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum a corpusculo $\mathcal{P}$, & propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus Sphæroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia $D\mathcal{P}F$, $EGCB$ in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus $\mathcal{P}$ in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires Coni $D\mathcal{P}F$ & segmenti Conici $EGCB$, & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra Sphæroidem intimam $\mathcal{P}CBM$. Trahitur igitur corpus $\mathcal{P}$ a sola Sphæroide intima $\mathcal{P}CBM$, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, qua corpus A trahitur a Sphæroide tota $AGOD$, ut distantia $\mathcal{P}S$ ad distantiam AS. *Q. E. D.*



PRO-

De Motu Corporum,

PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

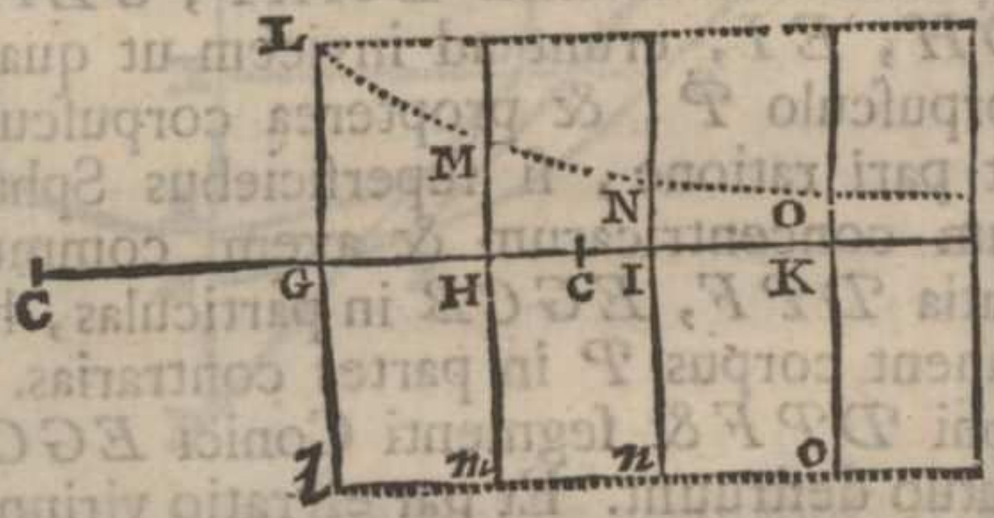
Dato Corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

E Corpore dato formanda est Sphæra vel Cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX, LXXXI, & XCI.) inveniri potest. Deinde factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis distantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si Solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a Solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi Solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod Solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie plana, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, & Index ternario minor quam Index potestatis distantiarum.

Cas. 1. Sit *LGl* planum quo Solidum terminatur. Jaceat Solidum autem ex parte plani hujus versus *I*, inque plana innumera *mHM*, *nIN*, &c. ipsi *GL* parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum *C* extra Solidum. Agatur autem *CGHI* planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum Solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus *n* ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC.)



vis

vis qua planum quodvis mHM trahit punctum C eſt reciproce ut CH^{n-2}. In plano mHM capiatur longitudo HM ipſi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut HM. Similiter in planis ſingulis lGL, nIN, oKO, &c. capiantur longitudines GL, IN, KO, &c. ipſis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, adeoque ſumma virium ut ſumma longitudinum, hoc eſt, vis Solidi totius ut area $GLOK$ in infinitum verſus OK producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) eſt reciproce ut CG^{n-3}, & propterea vis Solidi totius eſt reciproce ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Collocetur jam corpuſculum C ex parte plani lGL intra Solidum, & capiatur diſtantia CK æqualis diſtantiæ CG. Et Solidi pars $LGloKO$, planis parallelis lGL, oKO terminata, corpuſculum C in medio ſitum nullam in partem trahet, contrariis oppoſitorum punctorum actionibus ſe mutuo per æqualitatem tollentibus. Proinde corpuſculum C ſola vi Solidi ultra planum OK ſiti trahitur. Hæc autem vis (per Caſum primum) eſt reciproce ut CK^{n-3}, hoc eſt (ob æquales CG, CK) reciproce ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

Coröl. 1. Hinc ſi Solidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinque terminetur; innoteſcit ejus vis attractiva, ſubducendo de vi attractiva Solidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NIKO$, in infinitum verſus KO productæ.

Corol. 2. Si Solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene eſt momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo diſtantiam decreſcet quam proxime in ratione poteſtatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc ſi corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpuſculum e regione medii illius plani, & diſtantia inter corpuſculum & planum collata cum dimenſionibus corporis attrahentis perexigua ſit, conſtet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis pluſquam quadruplicatæ diſtantiarum; vis attractiva corporis totius decreſcet quamproxime in ratione poteſtatis, cujus latus ſit diſtantia illa perexigua, & Index ternario minor quam Index poteſtatis prioris. De corpore ex particulis conſtante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis triplicatæ diſtantiarum, aſſertio non valet; propterea quod, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario ſecundo, ſemper eſt infinite major quam attractio partis citerioris.

DE MOTU CORPORUM,

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quæratur motus corporis: Solvetur Problema quærendo (per Prop. XXXIX.) motum corporis recta deſcendentis ad hoc planum, & (per Legum Corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, ſecundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, ſi quæratur Lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunque curva linea moveatur, ſolvetur Problema operando ad exemplum Problematis tertii.

Operationes autem contrahi ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in Series convergentes. Ut ſi ad baſem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ ſit ut baſis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis qua corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ, vel in baſem attractum vel a baſi fugatum, moveri poſſit in curva linea quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit: Suppono baſem augeri parte quam minima O, & ordinatim applicatam $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ reſolvo in Seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} OA^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo O duarum eſt dimenſionum, id eſt, termino $\frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem eſſe ſuppono. Eſt igitur vis quæſita ut $\frac{mm-mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde eſt, ut $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut ſi ordinatim applicata Parabolam attingat, exiſtente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^0$, adeoque dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galilæus* demonſtravit. Quod ſi ordinatim applicata Hyperbolam attingat, exiſtente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A^{-3}$ ſeu $2B^3$: adeoque vi, quæ ſit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbola. Sed miſſis hujuſmodi Propoſitionibus, pergo ad alias quaſdam de Motu, quas nondum attigi.

SECTIO

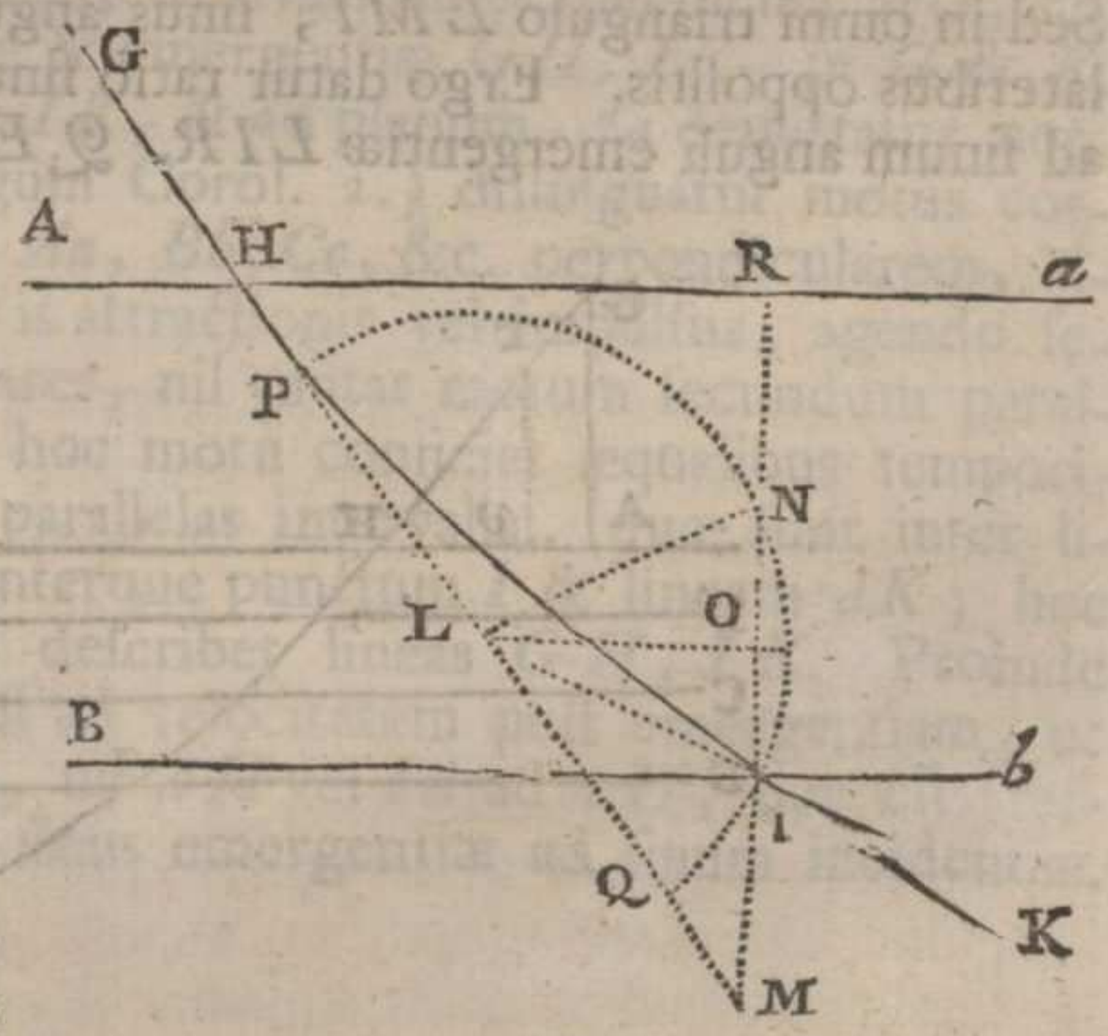
SECTIO XIV.

De Motu corporum minimorum, quæ Viribus centripetis ad ſingulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

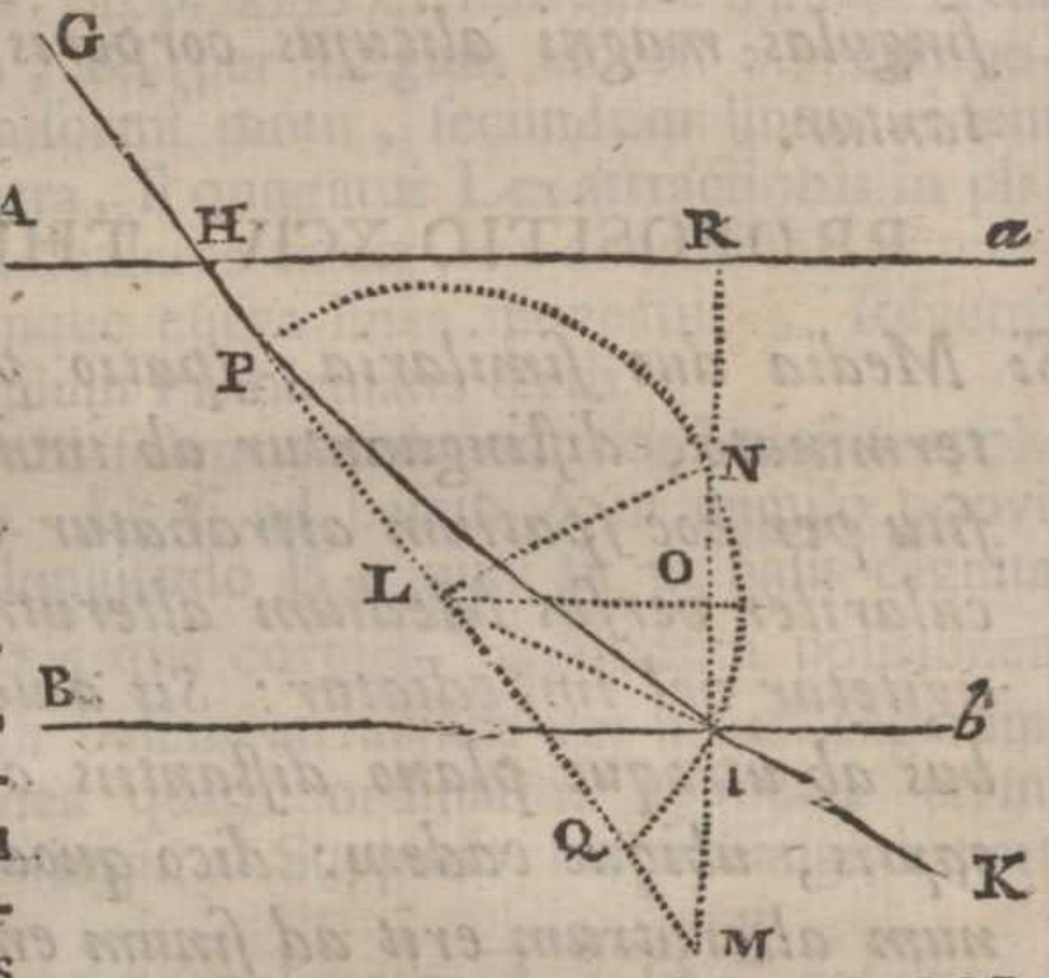
Si Media duo ſimilaria, ſpatio planis parallelis utrinque terminato, diſtinguantur ab invicem, & corpus in tranſitu per hoc ſpatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter verſus Medium alterutrum, neque ulla alia vi agitetur vel impediatur: Sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano diſtantiis ad eandem ipſius partem captis, ubique eadem: dico quod ſinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad ſinum emergentiæ ex plano altero in ratione data.

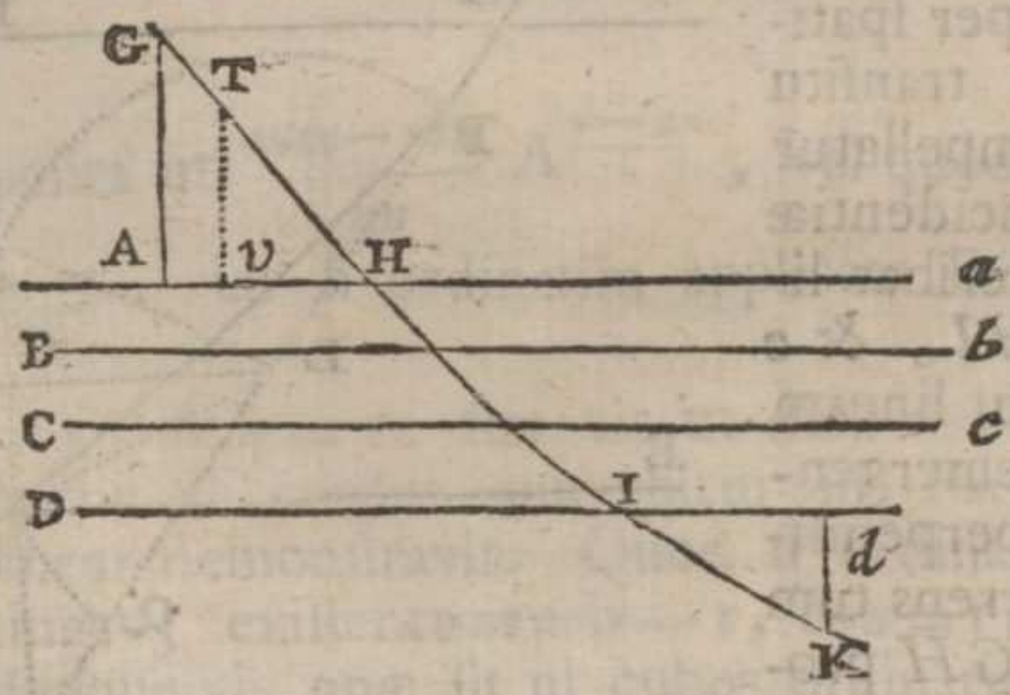
Caſ. 1. Sunto *Aa*, *Bb* plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius *Aa* ſecundum lineam *GH*, ac toto ſuo per ſpatium intermedium tranſitu attrahatur vel impellatur verſus Medium incidentiæ eaque actione deſcribat lineam curvam *HI*, & emergat ſecundum lineam *IK*. Ad planum emergentiæ *Bb* erigatur perpendiculum *IM*, occurrens tum lineæ incidentiæ *GH* productæ in *M*, tum plano incidentiæ *Aa* in *R*; & linea emergentiæ *KI* producta occurrat *HM* in *L*. Centro *L* intervallo *LI* deſcribatur Circulus,



De Motu Corporum,

secans tam HM in P & Q, quam MI productam in N, & primo si attractio vel impulsus ponatur uniformis, erit (ex demonstratis *Galilæi*) curva HI Parabola, cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto & linea IM æquale sit HM quadrato; sed & linea HM bisecabitur in L. Unde si ad MI demittatur perpendiculum LO, æquales erunt MO, OR; & additis æqualibus ON, OI, fient totæ æquales MN, IR. Proinde cum IR detur, datur etiam MN; estque rectangulum NMI ad rectangulum sub latere recto & IM, hoc est, ad HMq, in data ratione. Sed rectangulum NMI æquale est rectangulo PMQ, id est, differentiæ quadratorum MLq, & PLq seu LIq; & HMq datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem MLq: ergo datur ratio $MLq - LIq$ ad MLq, & divisim, ratio LIq ad MLq, & ratio dimidiata LI ad ML. Sed in omni triangulo LMI, sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ LMR ad sinum anguli emergentiæ LIR. Q.E.D.





Cas. 2. Transeat jam corpus successive per spatia plura parallelis planis terminata, $AabB$, $BbcC$, &c. & agitetur vi quæ sit in singulis

ſingulis ſeparatim uniformis, ac in diverſis diverſa; & Per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum *Aa* erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo *Bb*, in data ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum *Bb*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio *Cc*, in data ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto *Dd*, in data ratione, & ſic in infinitum: & ex æquo, ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuantur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulſus actio, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & ratio ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.* LIBER PRIMUS.

PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

Iiſdem poſitis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.

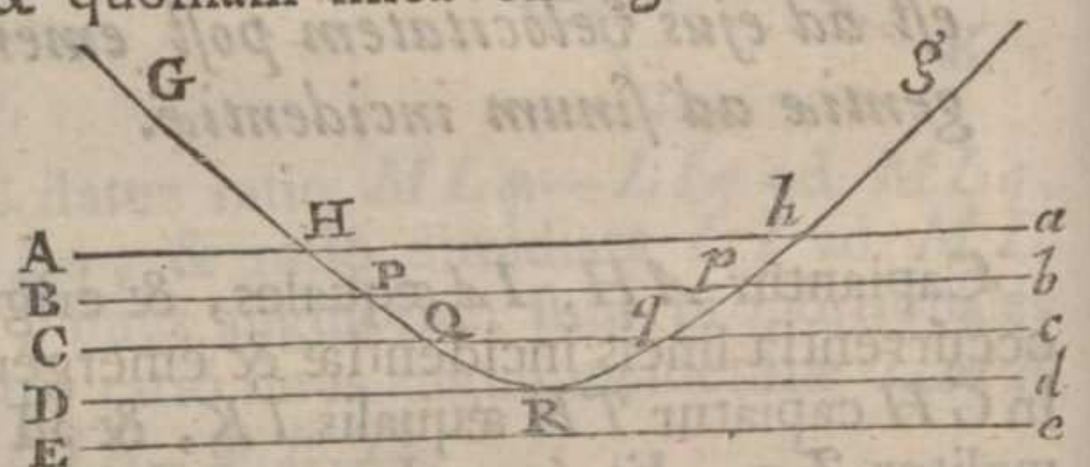
Capiantur *AH*, *Id* æquales, & erigantur perpendicula *AG*, *dK* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *GH*, *IK*, in *G* & *K*. In *GH* capiatur *TH* æqualis *IK*, & ad planum *Aa* demittatur normaliter *Tv*. Et (per Legum Corol. 2.) diſtinguatur motus corporis in duos, unum planis *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. perpendicularem, alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſus, agendo ſecundum lineas perpendiculares, nil mutat motum ſecundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam *AG* & punctum *H*, interque punctum *I* & lineam *dK*; hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas *GH*, *IK*. Proinde velocitas ante incidentiam eſt ad velocitatem poſt emergentiam, ut *GH* ad *IK* vel *TH*, id eſt, ut *AH* vel *Id* ad *vH*, hoc eſt (reſpectu radii *TH* vel *IK*) ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ. *Q. E. D.*

De Motu Corporum,

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iisdem positis & quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

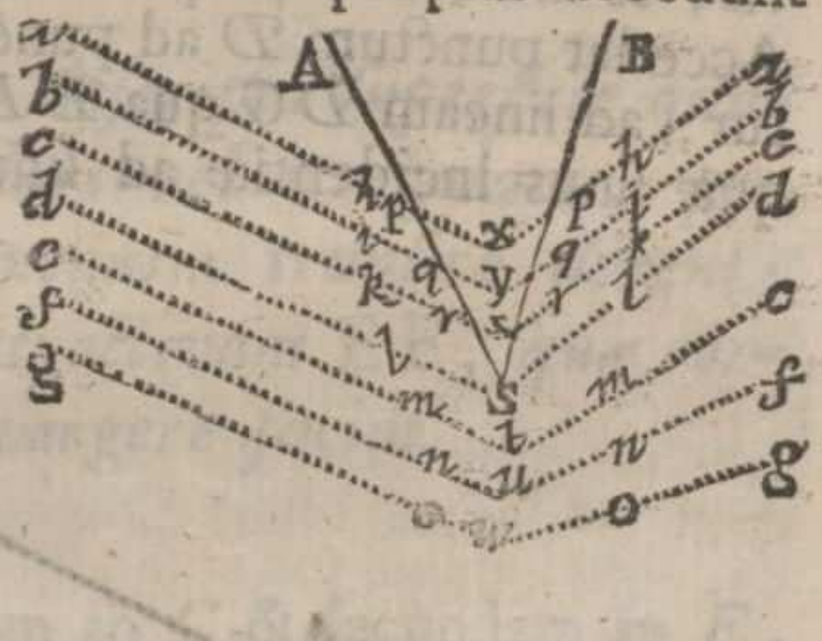
Nam concipe corpus inter parallela plana *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. describere arcus Parabolicos, ut supra; sintque arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*, &c. Et sit ea lineæ incidentiæ *GH* obliquitas ad planum primum *Aa*, ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in ea ratione quam habet idem sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano *Dd*, in spatium *DdeE*: & ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, adeoque linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum *Ee*. Sed nec potest idem pergere in linea emergentiæ *Rd*, propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur versus Medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana *Cc*, *Dd*, describendo arcum Parabolæ *QRq*, cujus vertex principalis (juxta demonstrata *Galilæi*) est in *R*; secabit planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus prioribus *QP*, *PH* similibus & æqualibus secabit reliqua plana in iisdem angulis in *p*, *h*, &c. ac prius in *P*, *H*, &c. emergetque tandem eadem obliquitate in *h*, qua incidit in *H*. Concipe jam planorum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*



Scholium.

Scholium.

Harum attractionum haud multum diſſimiles ſunt Lucis reflexiones & refractiones, factæ ſecundum datam Secantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per conſequens ſecundum datam Sinuum rationem, ut expoſuit *Carteſius*. Namque Lucem ſucceſſive propagari & ſpatio quaſi ſeptem vel octo minutorum primorum a Sole ad Terram venire, jam conſtat per Phænomena Satellitum *Jovis*, Obſervationibus diverſorum Aſtronomorum confirmata. Radii autem in aere exiſtentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebroſum cubiculum admiſſa, invenit, & ipſe quoque expertus ſum) in tranſitu ſuo prope corporum vel opacorum vel perſpicuorum angulos (quales ſunt nummorum ex auro, argento & ære cuſorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quaſi attracti in eadem: & ex his radiis, qui in tranſitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quaſi magis attracti, ut ipſe etiam diligenter obſervavi. In figura deſignat *s* aciem cultri vel cunei cujuſvis *AsB*; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld*, ſunt radii, arcubus *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl* verſus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro diſtantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par eſt ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, ſed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, poſtquam illud ingreſſi ſunt: uti in radiis *ckzkc*, *biyib*, *ahxha* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x* incurvatis, delineatum eſt. Igitur ob analogiam quæ eſt inter propagationem radiorum lucis & progreſſum corporum, viſum eſt Propoſitiones ſequentes in uſus Opticos ſubjungere; interea de natura radiorum (utrum ſint corpora necne) nihil omnino diſputans, ſed Trajectorias corporum Trajectoriis radiorum perſimiles ſolummodo determinans.



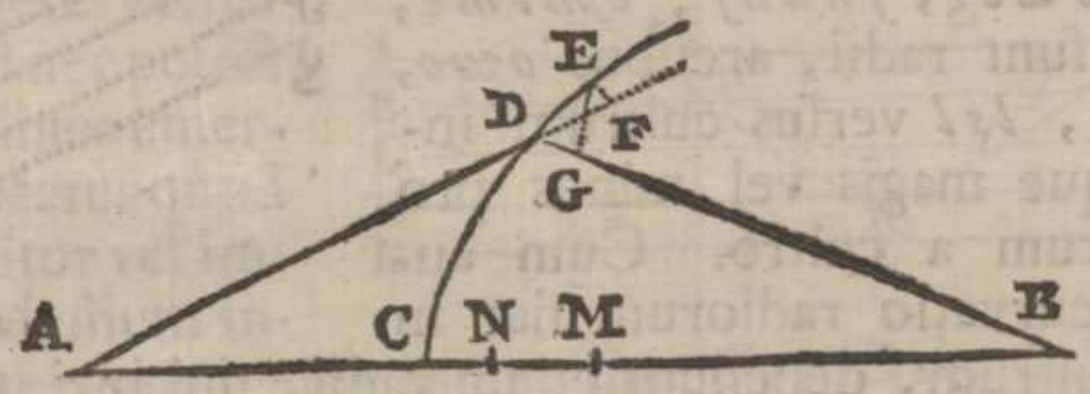
PROPO-

De Motu Corporum,

PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in data ratione, quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit; determinare superficiem quæ corpuscula omnia de loco dato successive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit A locus a quo corpuscula divergunt; B locus in quem convergere debent; CDE curva linea quæ circa axem AB revoluta describat superficiem quæsitam; D, E curvæ illius puncta duo quævis; & EF, EG perpendicula in corporis vias AD, DB demissa. Accedat punctum D ad punctum E; & lineæ DF qua AD augetur, ad lineam DG qua DB diminuitur, ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio in-

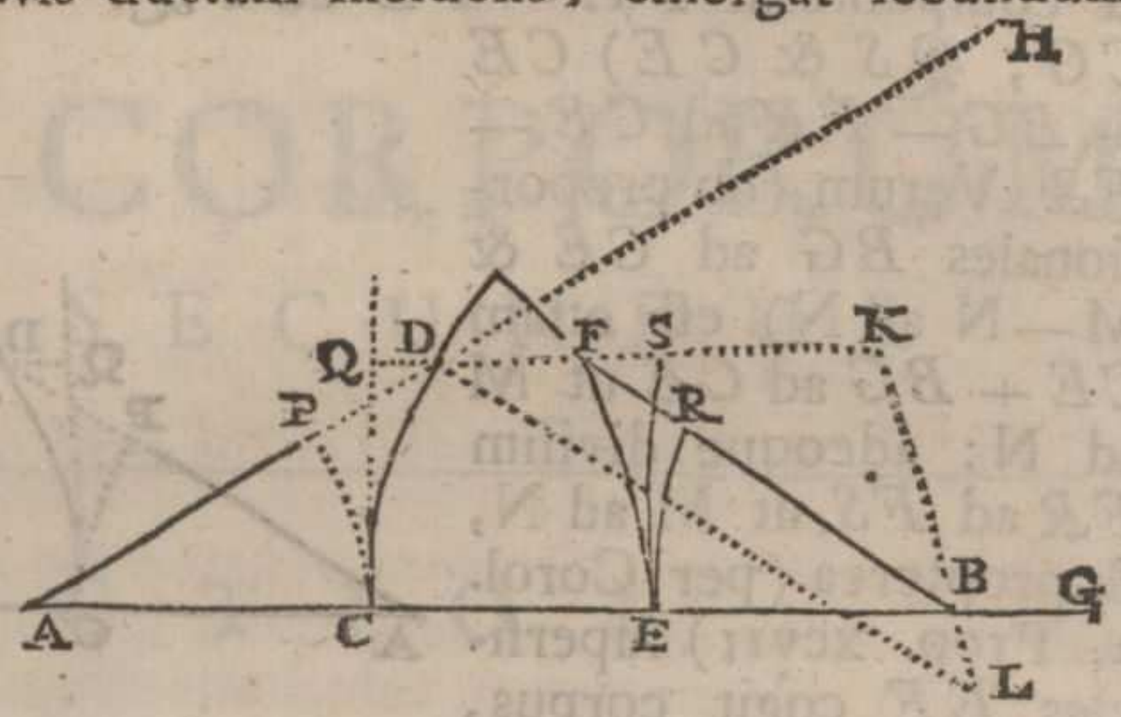


crementi lineæ AD ad decrementum lineæ DB; & propterea si in axe AB sumatur ubivis punctum C, per quod curva CDE transire debet, & capiatur ipsius AC incrementum CM, ad ipsius BC decrementum CN in data illa ratione; centrisque A, B, & intervallis AM, BN describantur circuli duo se mutuo secantes in D: punctum illud D tanget curvam quæsitam CDE, eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*

Corol. 1. Faciendo autem ut punctum A vel B nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti C, habebuntur Figuræ illæ omnes quas *Cartesius* in Optica & Geometria ad Refractiones exposuit. Quarum inventionem cum *Cartesius* maximi fecerit & studiose celaverit, visum fuit hac propositione exponere.

Corol.

Corol. 2. Si corpus in ſuperficiem quamvis *CD*, ſecundum lineam rectam *AD* lege quavis ductam incidens, emergat ſecundum aliam quamvis rectam *DK*, & a puncto *C* duci intelligantur Lineæ curvæ *CP*, *CQ* ipſis *AD* *DK* ſemper perpendiculares: erunt incrementa linearum *PD*, *QD*, atque adeo lineæ ipſæ *PD*, *QD*, incrementis iſtis genitæ, ut ſinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.



PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

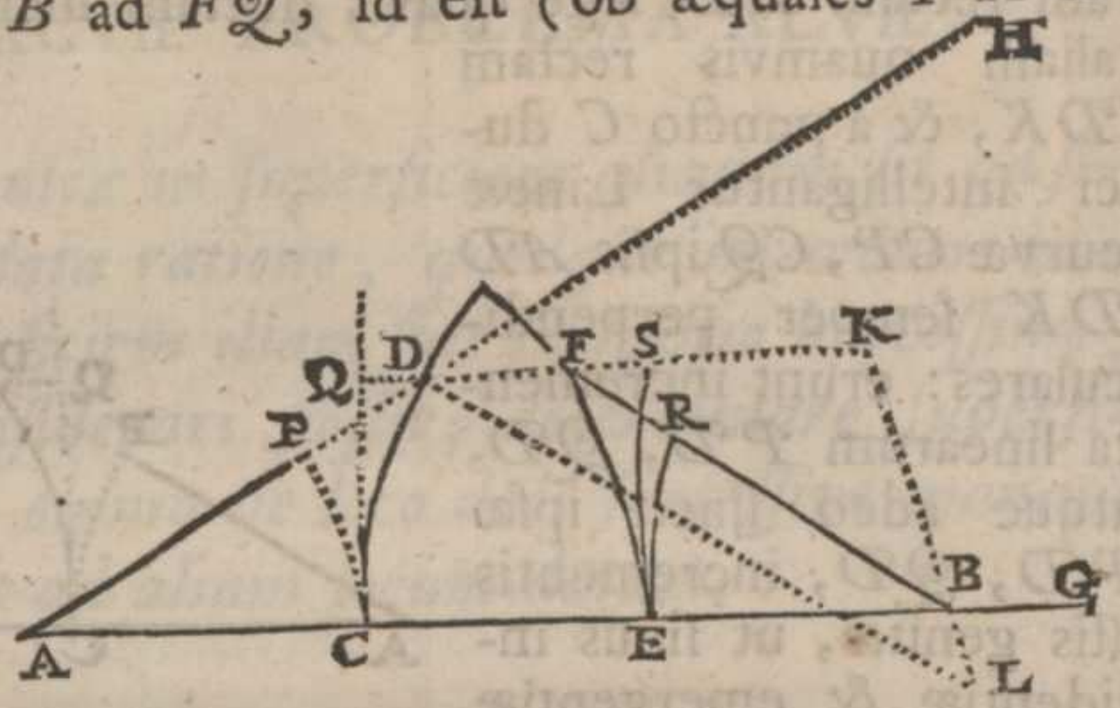
Iiſdem poſitis, & circa axem AB *deſcripta ſuperficie quacunque attractiva* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia tranſire debent; invenire ſuperficiem ſecundam attractivam* EF, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta *AB* ſecet ſuperficiem primam in *C* & ſecundam in *E*, puncto *D* utcunque aſſumpto. Et poſito ſinu incidentiæ in ſuperficiem primam ad ſinum emergentiæ ex eadem, & ſinu emergentiæ e ſuperficie ſecunda ad ſinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N; produc tum *AB* ad *G* ut ſit *BG* ad *CE* ut M—N ad N, tum *AD* ad *H* ut ſit *AH* æqualis *AG*, tum etiam *DF* ad *K* ut ſit *DK* ad *DH* ut N ad M. Junge *KB*, & centro *D* intervallo *DH* deſcribe circulum occurrentem *KB*, productæ in *L*, ipſique *DL* parallelam age *BF*: & punctum *F* tanget lineam *EF*, quæ circa axem *AB* revoluta deſcribet ſuperficiem quæſitam. *Q. E. F.*

Nam concipe Lineas *CP*, *CQ* ipſis *AD*, *DF* reſpective, & Lineas *ER*, *ES* ipſis *FB*, *FD* ubique perpendiculares eſſe, adeoque *QS* ipſi *CE* ſemper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) *PD* ad *QD* ut M ad N, adeoque ut *DL* ad *DK* vel *FB* ad *FK*;

De Motu Corporum

& divisim ut $DL - FB$ seu $PH - PD - FB$ ad FD seu $FQ - QD$; & composite ut $PH - FB$ ad FQ, id est (ob æquales PH & CG, QS & CE) $CE + BG - FR$ ad $CE - FS$. Verum (ob proportionales BG ad CE & $M - N$ ad N) est etiam $CE + BG$ ad CE ut M ad N: adeoque divisim FR ad FS ut M ad N, & propterea (per Corol. 2. Prop. XCVII) superficies EF cogit corpus, in ipsam secundum lineam DF incidens, pergere in linea FR ad locum B. $Q. E. D.$



Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem Opticos maxime accommodatæ sunt figuræ Sphæricæ. Si Perspicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus sphærice figuratis & Aquam inter se claudentibus conflentur; fieri potest ut a refractionibus Aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accurate corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius & accuratius formari possint, sed etiam quod Penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Verum tamen diversa diversorum radiorum Refrangibilitas impedimento est, quo minus Optica per Figuras vel Sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur.

LIBER SECUNDUS.

DE

MOTU CORPORUM

LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

De Motu Corporum quibus reſiſtitur in ratione Velocitatis.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui reſiſtitur in ratione velocitatis, motus ex reſiſtentia amiſſus eſt ut ſpatium movendo confectum.

NAm cum motus ſingulis temporis particulis æqualibus amiſſus ſit ut velocitas, hoc eſt, ut itineris confecti particula: erit, componendo, motus toto tempore amiſſus ut iter totum. *Q. E. D.*

Corol. Igitur ſi corpus, gravitate omni deſtitutum, in ſpatiis liberis ſola vi inſita moveatur; ac detur tum motus totus ſub initio, tum etiam motus reliquus poſt ſpatium aliquod confectum: dabitur ſpatium totum quod corpus infinito tempore deſcribere poteſt. Erit enim ſpatium illud ad ſpatium jam deſcriptum, ut motus totus ſub initio ad motus illius partem amiſſam.

LEMMA I.

Quantitatis differentiis ſuis proportionales, ſunt continue proportionales.

Sit A ad A—B ut B ad B—C & C ad C—D, &c. & dividendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q. E. D.*

De Motu Corporum,

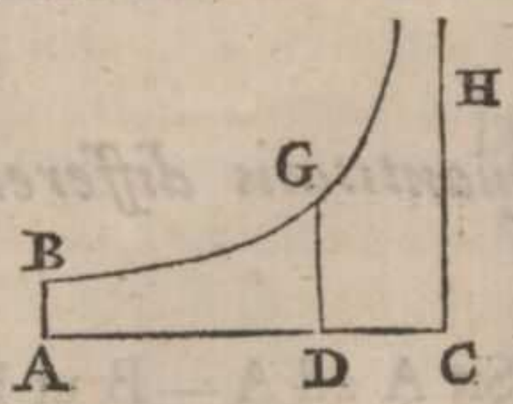
PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si Corpori reſiſtitur in ratione velocitatis, & idem ſola vi inſita per Medium ſimilare moveatur, ſumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis ſingulorum temporum ſunt in progreſſione Geometrica, & ſpatia ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates.

Caſ. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & ſi ipſis particularum initiis agat vis reſiſtentiæ impulſo unico, quæ ſit ut velocitas: erit decrementum velocitatis ſingulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis ſuis proportionales, & propterea (per Lem. 1. Lib. 11.) continue proportionales. Proinde ſi ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipſis temporum initiis, ut termini in progreſſione continua, qui per ſaltum capiuntur, omiſſo paſſim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea ſunt æquales. Igitur velocitates, his terminis proportionales, ſunt in progreſſione Geometrica. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut reſiſtentiæ impulſus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, ſemper continue proportionales, erunt in hoc etiam caſu continue proportionales. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Et diviſim velocitatum differentiæ, hoc eſt, earum partes ſingulis temporibus amiſſæ, ſunt ut totæ: Spatia autem ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitatum partes amiſſæ, (per Prop. 1. Lib. 11.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi Aſymptotis rectangulis *ADC*, *CH* deſcribatur Hyperbola *BG*, ſintque *AB*, *DG* ad Aſymptoton *AC* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum reſiſtentia Medii, ipſo motus initio, per lineam quamvis datam *AC*, elapſo autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi poteſt tempus per aream *ABGD*, & ſpatium eo tempore deſcriptum per lineam *AD*. Nam ſi area illa per motum punct *D* augeatur uniformiter ad modum tempo-



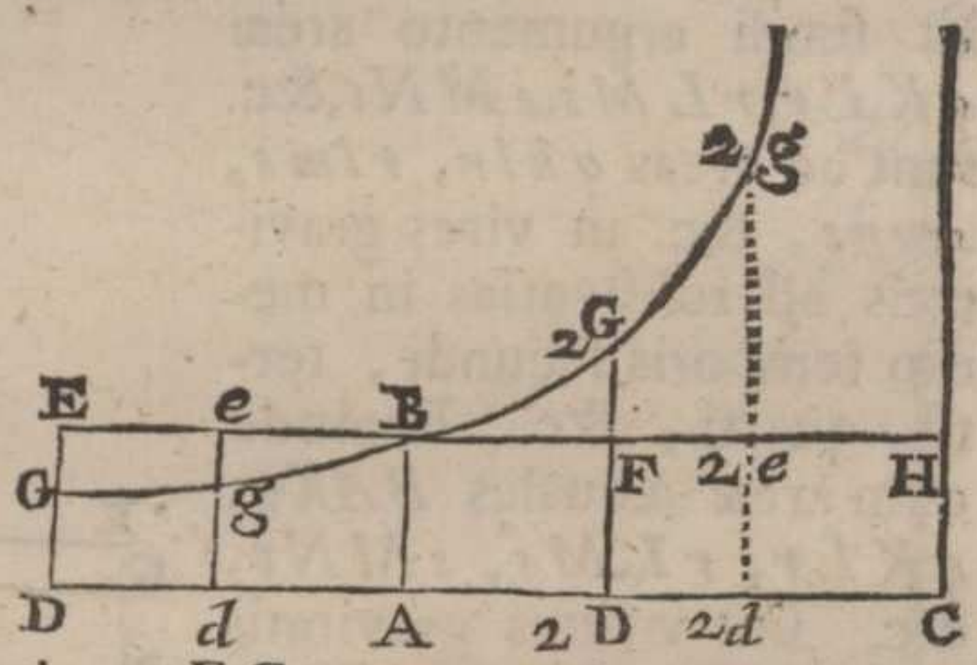
ris,

ris, decreſcet recta DC in ratione Geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ AC æqualibus temporibus deſcriptæ decreſcent in eadem ratione. LIBER SECUNDUS.

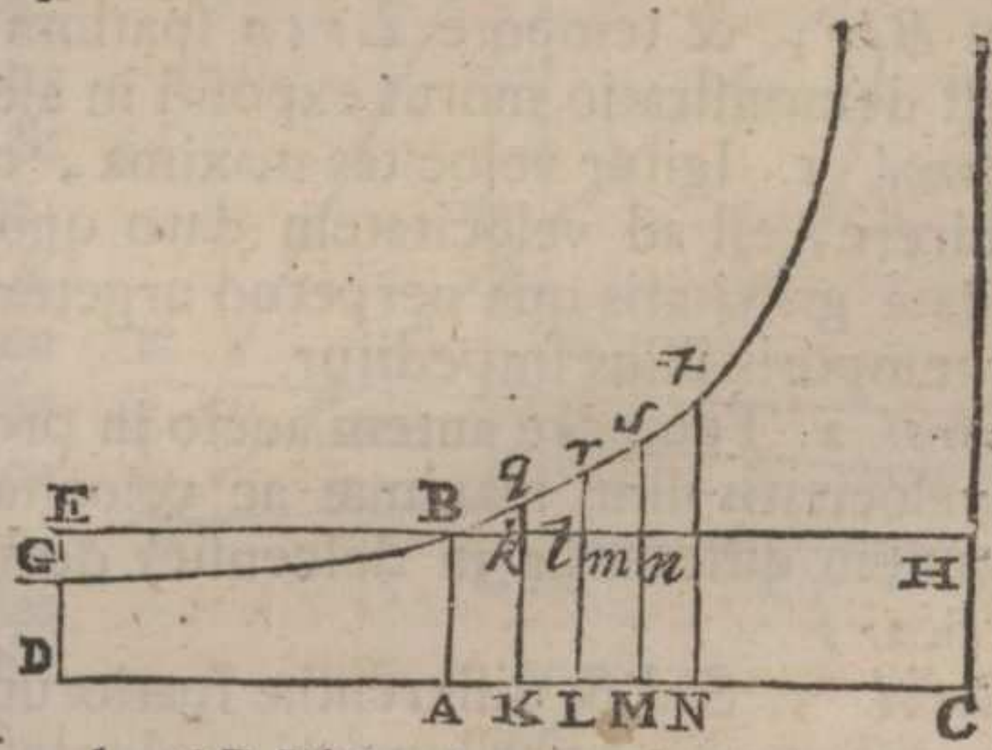
PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

Corporis, cui dum in Medio ſimilari recta aſcendit vel deſcendit, reſiſtitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

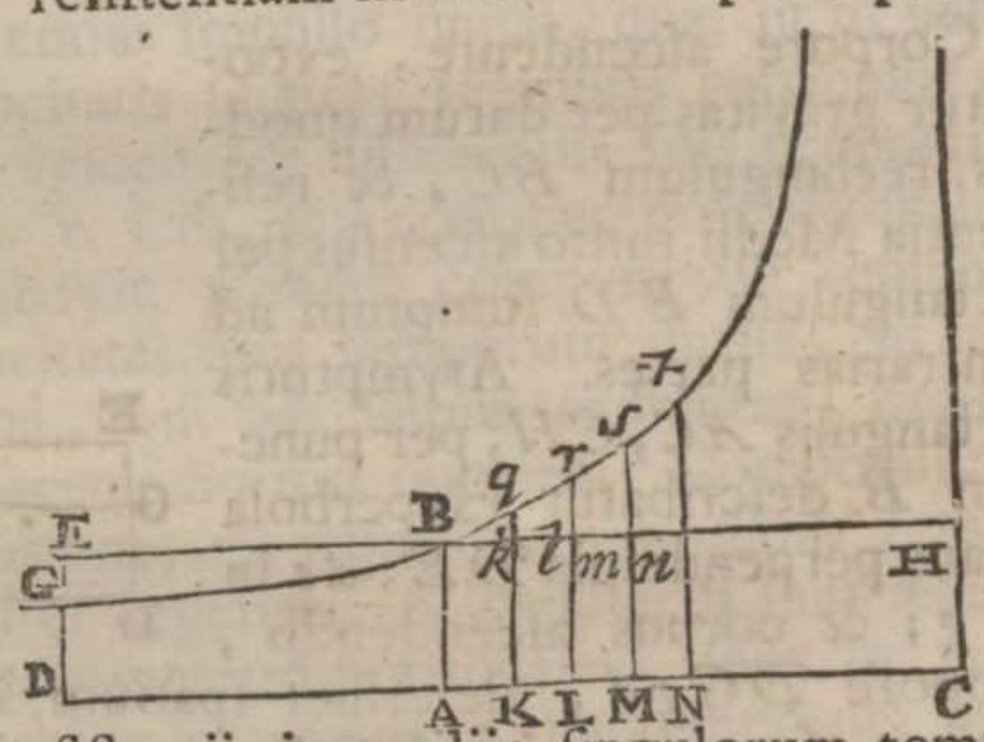
Corpore aſcendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum BC, & reſiſtentia Medii initio aſcenſus per rectangulum BD ſumptum ad contrarias partes. Aſymptotis rectangulis AC, CH, per punctum B deſcribatur Hyperbola ſecans perpendicula DE, de in G, g; & corpus aſcendendo, tempore $DGgd$, deſcribet ſpatium $EGge$, tempore $DGBA$ ſpatium aſcenſus totius EGB; tempore $ABzGzD$ ſpatium deſcenſus $BFzG$, atque tempore $zDzGzgzd$ ſpatium deſcenſus $zGFzezg$: & velocitates corporis (reſiſtentiæ Medii proportionales) in horum temporum periodis erunt $ABED$, $ABed$, nulla, $ABFzD$, $ABzezd$ reſpective; atque maxima velocitas, quam corpus deſcendendo poteſt acquirere, erit BC.



Reſolvatur enim rectangulum AH in rectangula innumera Ak, Kl, Lm, Mn, &c. quæ ſint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, Ak, Al, Am, An, &c. ut velocitates totæ, atque adeo (per Hypotheſin) ut reſiſtentiæ Medii principio ſingulorum temporum æqualium. Fiat AC ad AK vel $ABHC$ ad $ABkK$, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in principio temporis ſecundi, deque vi gravi-



De Motu Corporum, tatis ſubducantur reſiſtentiæ, & manebunt *ABHC*, *KkHC*, *LlHC*, *NnHC*, &c. ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum urgetur, atque adeo (per motus Legem II) ut incrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c; & propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progreſſione Geometrica. Quare ſi rectæ *Kk*, *Ll*, *Mm*, *Nn*, &c. productæ occurrant Hyperbolæ in *q*, *r*, *s*, *t*, &c. erunt areæ *ABqK*, *KqrL*, *LrsM*, *MstN*, &c. æquales, adeoque tum temporibus tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ. Eſt autem area *ABqK* (per Corol. 3 Lem. VII & Lem. VIII. Lib. I.) ad aream *Bkq* ut *Kq* ad ½ *kq* ſeu *AC* ad ½ *AK*, hoc eſt, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in medio temporis primi. Et ſimili argumento areæ *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſunt ad areas *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio temporis ſecundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt (per Hypotheſin) velocitatibus, atque adeo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis *ABrL*, deſcribit ſpatium *Blr*, & tempore *Lrtn* ſpatium *rlnt*. *Q. E. D.* Et ſimilis eſt demonſtratio motus expoſiti in aſcenſu. *Q. E. D.*



Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo poteſt acquirere, eſt ad velocitatem dato quovis tempore acquiſitam, ut vis data gravitatis qua perpetuo urgetur, ad vim reſiſtentiæ qua in fine temporis illius impeditur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progreſſione Arithmetica, ſumma velocitatis illius maximæ ac velocitatis in aſcenſu (atque etiam earundem differentia in deſcenſu) decreſcit in progreſſione Geometrica.

Corol. 3. Sed & differentiæ ſpatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis deſcribuntur, decreſcunt in eadem progreſſione Geometrica.

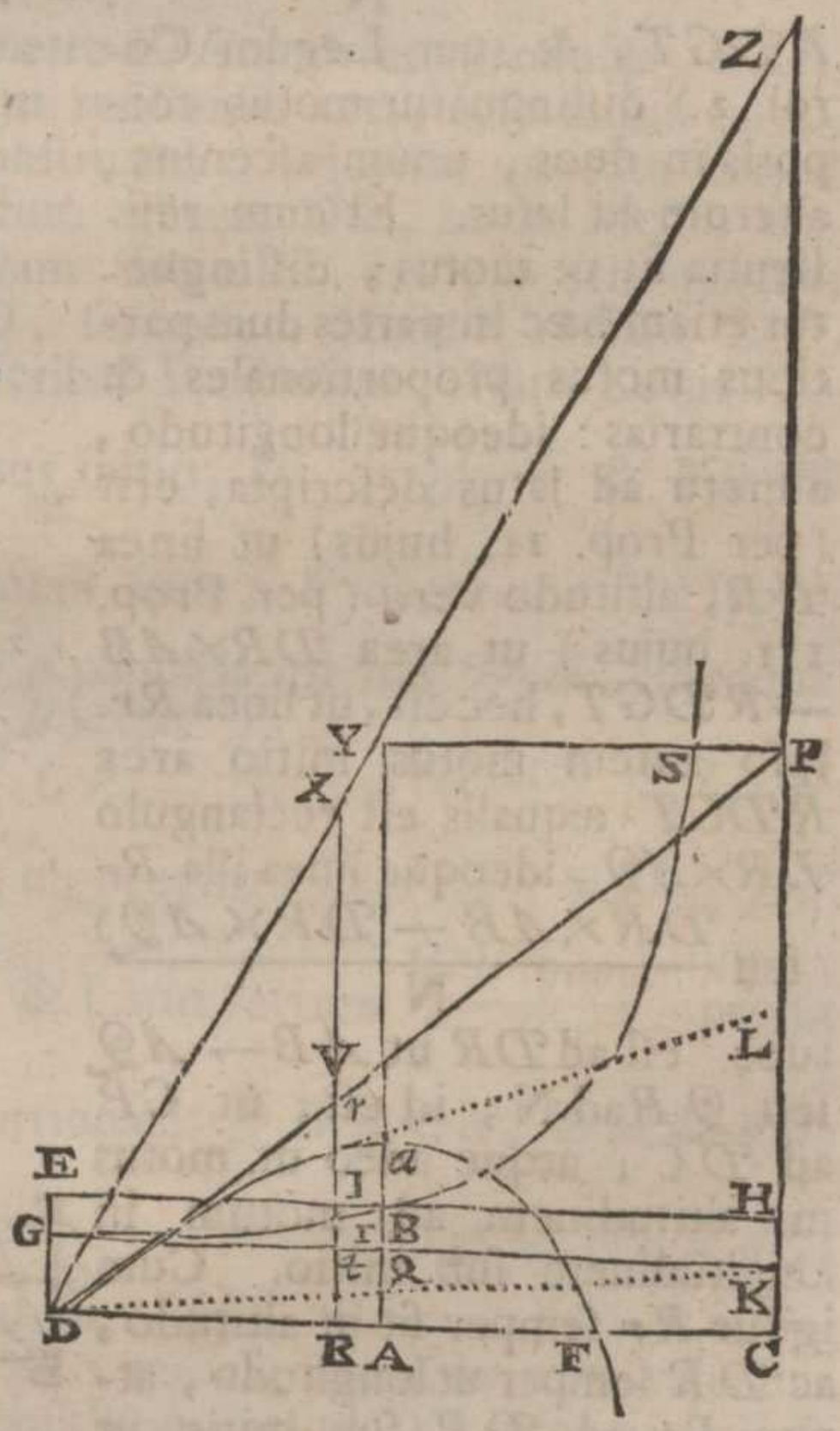
Corol.

Corol. 4. Spatium vero a corpore descriptum differentia est duorum spatiorum, quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipso descensus initio æquantur inter se. LIBER SECUNDUS.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Posito quod vis gravitatis in Medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum Horizontis; definire motum Projectilis in eodem, resistentiam velocitati proportionalem patientis.

E loco quovis D egrediatur Projectile secundum lineam quamvis rectam DP, & per longitudinem DP exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto P ad lineam Horizontalem DC demittatur perpendiculum PC, & secetur DC in A ut sit DA ad AC ut resistentia Medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde est) ut sit rectangulum sub DA & DP ad rectangulum sub AC & CP ut resistentia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis DC, CP, describatur Hyperbola quævis $GTBS$ secans perpendicula DG, AB in G & B; & compleatur parallelogrammum $DGKC$, cujus latus GK secet AB in Q. Capiatur linea N in ratione ad QB qua DC sit ad CP; & ad rectæ DC punctum quodvis R erecto perpendiculo RT, quod Hyperbolæ in T, & rectis EH, GK, DP

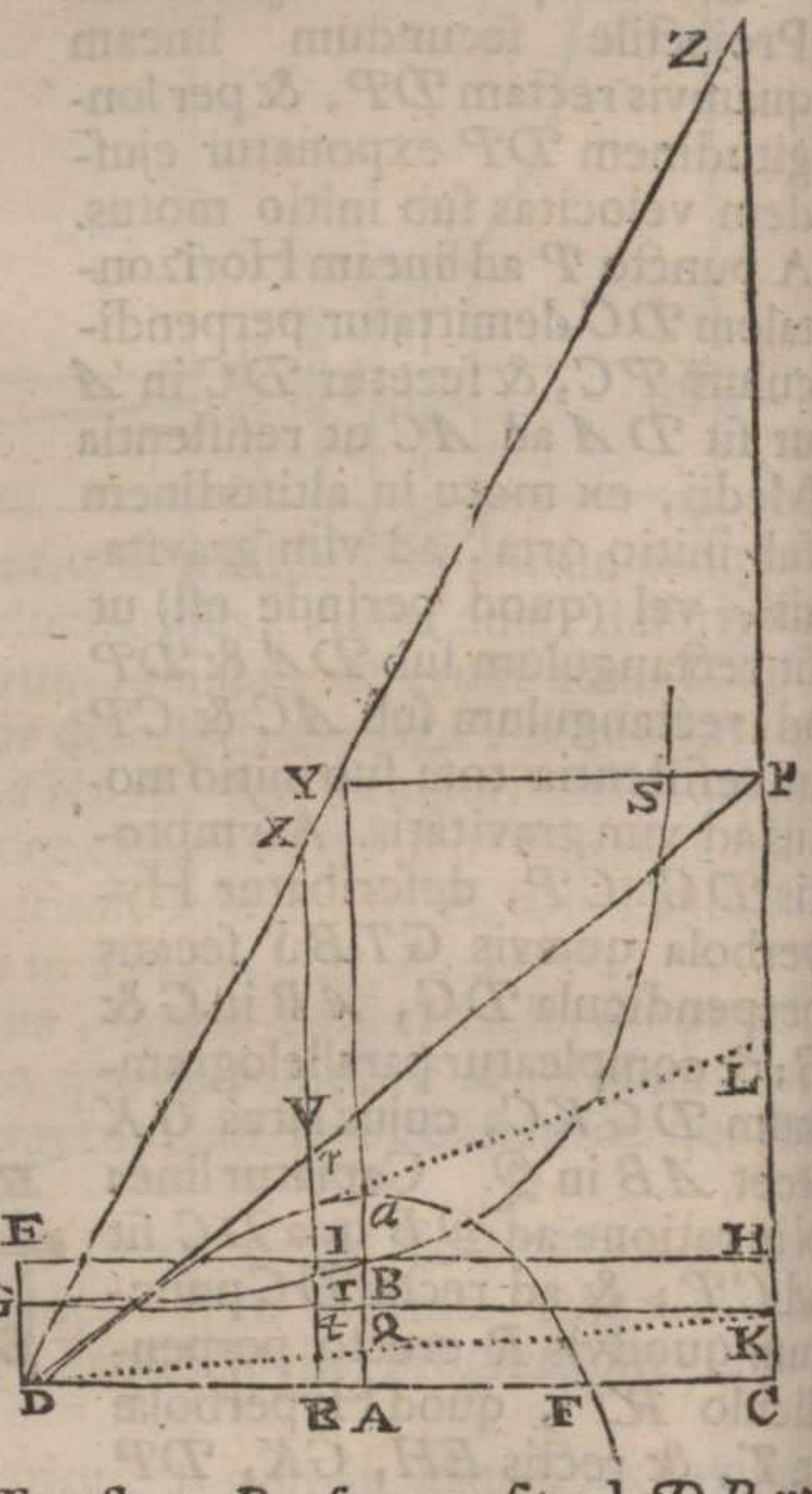


in I, t & V occurrat; in eo cape Vr æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel quod perinde

De Motu Corporum,

inde est, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{N}$; & Projectile tempore $DRTG$ perveniet ad punctum r, describens curvam lineam $DraF$, quam punctum r semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo AB, & postea semper appropinquans ad Asymptoton PLC. Estque velocitas ejus in puncto quovis r ut Curvæ Tangens rL. *Q.E.I.*

Est enim N ad QB ut DC ad CP seu DR ad RV, adeoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id est $RV - Vr$ seu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (per Legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cum resistentia sit ut motus, distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, a motu ad latus descripta, erit (per Prop. 11. hujus) ut linea DR, altitudo vero (per Prop. 111. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc est, ut linea Rr. Ipso autem motus initio area $RDGT$ æqualis est rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa Rr (seu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc est ad DR ut $AB - AQ$ seu QB ad N, id est, ut CP ad DC; atque adeo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cum igitur Rr semper sit ut altitudo, ac DR semper ut longitudo, atque Rr ad DR sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est ut Rr semper sit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea $DraF$, quam punctum r perpetuo tangit. *Q. E. D.*



Corol.

Corol. 1. Eſt igitur Rr æqualis $\frac{\mathcal{D}R \times AB}{N} - \frac{R\mathcal{D}GT}{N}$, ideoque ſi producatur RT ad X ut ſit RX æqualis $\frac{\mathcal{D}R \times AB}{N}$, (id eſt, ſi compleatur parallelogrammum $ACP\Upsilon$, jungatur $\mathcal{D}\Upsilon$ ſecans CP in Z, & producatur RT donec occurrat $\mathcal{D}\Upsilon$ in X;) erit Xr æqualis $\frac{R\mathcal{D}GT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

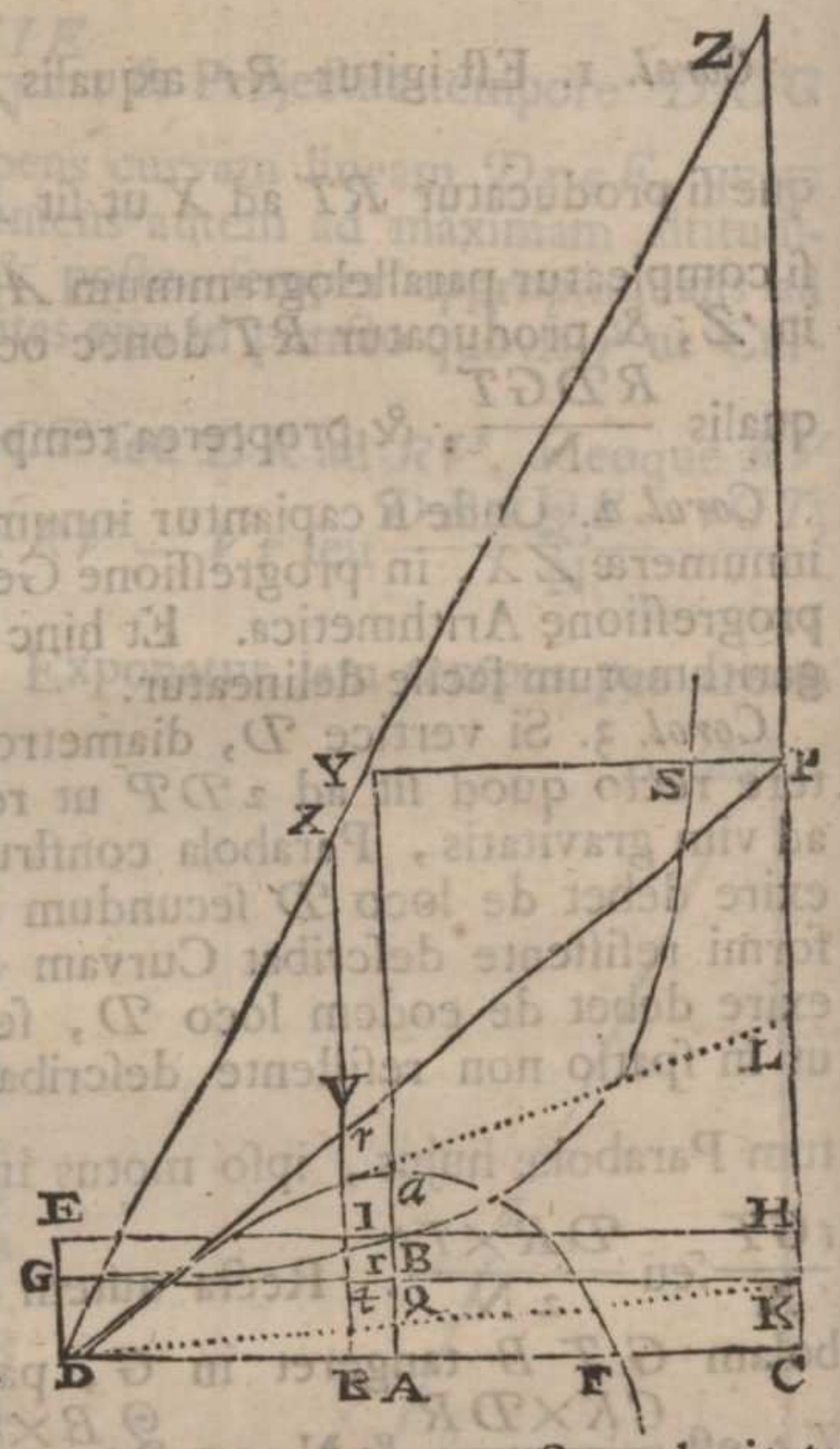
Corol. 2. Unde ſi capiantur innumeræ CR vel, quod perinde eſt, innumeræ ZX, in progreſſione Geometrica; erunt totidem Xr in progreſſione Arithmetica. Et hinc Curva $\mathcal{D}r\,a\,F$ per tabulam Logarithmorum facile delineatur.

Corol. 3. Si vertice $\mathcal{D}$, diametro $\mathcal{D}E$ deorſum producta, & Latere recto quod ſit ad $2\mathcal{D}P$ ut reſiſtentia tota, ipſo motus initio, ad vim gravitatis, Parabola conſtruatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco $\mathcal{D}$ ſecundum rectam $\mathcal{D}P$, ut in Medio uniformi reſiſtente deſcribat Curvam $\mathcal{D}r\,a\,F$, ea ipſa erit quacum exire debet de eodem loco $\mathcal{D}$, ſecundum eandem rectam $\mathcal{D}P$, ut in ſpatio non reſiſtente deſcribat Parabolam. Nam Latus rectum Parabolæ hujus, ipſo motus initio, eſt $\frac{\mathcal{D}V\ quad.}{Vr}$ & Vr eſt $\frac{tGT}{N}$ ſeu $\frac{\mathcal{D}R \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, ſi duceretur, Hyperbolam GTB tangeret in G, parallela eſt ipſi $\mathcal{D}K$, ideoque Tt eſt $\frac{CK \times DR}{\mathcal{D}C}$ & N erat $\frac{\mathcal{Q}B \times \mathcal{D}C}{CP}$. Et propterea Vr eſt $\frac{\mathcal{D}Rq \times CK \times CP}{2\mathcal{D}Cq \times \mathcal{Q}B}$, id eſt, (ob proportionales $\mathcal{D}R$ & $\mathcal{D}C$, $\mathcal{D}V$ & $\mathcal{D}P$) $\frac{\mathcal{D}Vq \times CK \times CP}{2\mathcal{D}Pq \times \mathcal{Q}B}$, & Latus rectum $\frac{\mathcal{D}V\ quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2\mathcal{D}Pq \times \mathcal{Q}B}{CK \times CP}$, id eſt (ob proportionales $\mathcal{Q}B$ & CK, $\mathcal{D}A$ & AC) $\frac{2\mathcal{D}Pq \times \mathcal{D}A}{AC \times CP}$, adeoque ad $2\mathcal{D}P$, ut $\mathcal{D}P \times \mathcal{D}A$ ad $CP \times AC$; hoc eſt, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 4. Unde ſi corpus de loco quovis $\mathcal{D}$, data cum velocitate, ſecundum rectam quamvis poſitione datam $\mathcal{D}P$ projiciatur; & reſiſtentia Medii ipſo motus initio detur: inveniri poteſt Curva $\mathcal{D}r\,a\,F$, quam corpus idem deſcribet. Nam ex data velocitate

De Motu Corporum,

datur latus rectum Parabolæ, ut notum est. Et sumendo 2 DP ad latus illud rectum, ut est vis gravitatis ad vim resistentiæ, datur DP. Dein secando DC in A, ut sit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eadem illa ratione gravitatis ad resistentiam, dabitur punctum A. Et inde datur Curva $DraF$.

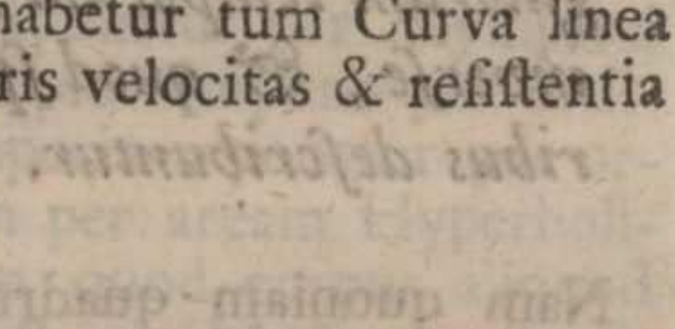


Corol. 5. Et contra, si datur Curva $DraF$, dabitur & velocitas corporis & resistentia Medii in locis singulis r. Nam ex data ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum resistentia Medii sub initio motus, tum latus rectum Parabolæ: & inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis rL, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis resistentia in loco quovis r.

Corol. 6. Cum autem longitudo 2 DP sit ad latus rectum Parabolæ ut gravitas ad resistentiam in D; & ex aucta velocitate augeatur resistentia in eadem ratione, at latus rectum Parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem 2 DP augeri in ratione illa simplici, adeoque velocitati semper proportionalem esse, neque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi Curvam $DraF$ ex Phænomenis quamproxime, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eadem cum velocitate, de loco D, secundum angulos diversos CDP, cDP (minuscularum literarum locis subintellectis) & cognoscantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum, assumpta quacunque longitudine pro DP vel Dp, fingatur quod resistentia in D sit ad gravitatem in ratione

tione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis SM. Deinde per computationem, ex longitudine illa assumpta $\mathcal{D}P$, inveniantur longitudines $\mathcal{D}F$, $\mathcal{D}f$, ac de ratione $\frac{Ff}{\mathcal{D}F}$ per calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum MN. Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem SM, & colligendo novam differentiam MN. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ SM, & negativæ ad alteram; & per puncta N, N, N agatur curva regularis NNN secans rectam $SMMM$ in X, & erit SX vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda est longitudo $\mathcal{D}F$ per calculum; & longitudo quæ sit ad assumptam longitudinem $\mathcal{D}P$, ut longitudo $\mathcal{D}F$ per experimentum cognita ad longitudinem $\mathcal{D}F$ modo inventam, erit vera longitudo $\mathcal{D}P$. Qua inventa, habetur tum Curva linea $\mathcal{D}raF$ quam corpus describit, tum corporis velocitas & resistentia in locis singulis.



Scholium.

Cæterum resistentiam corporum esse in ratione velocitatis, Hypothesis est magis Mathematica quam Naturalis. Obtinet hæc ratio quamproxime ubi corpora in Mediis rigore aliquo præditis tardissime moventur. In Mediis autem quæ rigore omni vacant resistentiæ corporum sunt in duplicata ratione velocitatum. Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem Medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; adeoque tempore æquali (ob majorem Medii quantitatem perturbatam) communicatur motus in duplicata ratione major; estque resistentia (per motus Legem II & III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege Resistentiæ.

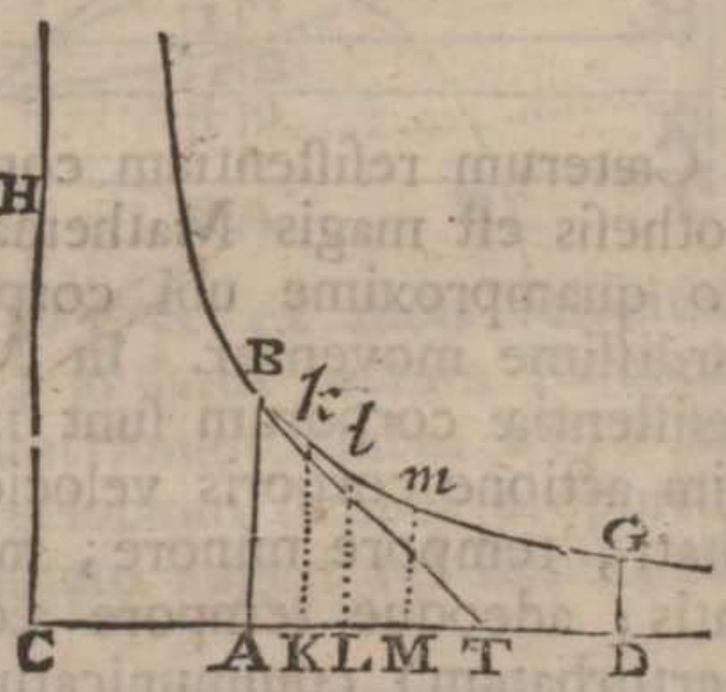
De Motu Corporum

SECTIO II.

De motu Corporum quibus reſiſtitur in duplicata ratione Velocitatum.

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

Si Corpori reſiſtitur in velocitatis ratione duplicata, & idem ſola vi inſita per Medium ſimilare movetur; tempora vero ſumantur in progreſſione Geometrica a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio ſingulorum temporum ſunt in eadem progreſſione Geometrica inverſe, & quod ſpatia ſunt æqualia quæ ſingulis temporibus deſcribuntur.



Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis eſt reſiſtentia Medii, & reſiſtentiæ proportionale eſt decrementum velocitatis; ſi tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum ſingulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ *AK*, *KL*, *LM* &c. in recta *CD* ſumptæ, & erigantur perpendicula *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm*, &c. Hyperbolæ *BklmG*, centro *C* Aſymptotis rectangulis *CD*, *CH* deſcriptæ, occurrentia in *B*, *k*, *l*, *m*, &c. & erit *AB* ad *Kk* ut *CK* ad *CA*, & diviſim *AB*—*Kk* ad *Kk* ut *AK* ad *CA*, & viciſſim *AB*—*Kk* ad *AK* ut *Kk* ad *CA*, adeoque ut *AB*×*Kk* ad *AB*×*CA*. Unde, cum *AK* & *AB*×*CA* dentur, erit *AB*—*Kk* ut *AB*×*Kk*; & ultimo, ubi coeunt *AB* & *Kk* ut *ABq*. Et ſimili argumento erunt *Kk*—*Ll*, *Ll*—*Mm*, &c. ut *Kkq*, *Llq*, &c. Linearum igitur *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm* qua-

quadrata ſunt ut earundem differentiæ; & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipſarum differentiæ, ſimilis erit ambarum progreſſio. Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ his lineis deſcriptæ ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis AK exponatur per lineam AB, & velocitas initio ſecundi KL per lineam Kk, & longitudo primo tempore deſcripta per aream $AKkB$; velocitates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes Ll, Mm, &c. & longitudines deſcriptæ per areas Kl, Lm, &c. Et compoſite, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum AM, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum $AMmB$. Concipe jam tempus AM ita dividi in partes AK, KL, LM, &c. ut ſint CA, CK, CL, CM, &c. in progreſſione Geometrica; & erunt partes illæ in eadem progreſſione, & velocitates AB, Kk, Ll, Mm, &c. in progreſſione eadem inverſa, atque ſpatia deſcripta Ak, Kl, Lm, &c. æqualia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Patet ergo quod, ſi tempus exponatur per Aſymptoti partem quamvis AD, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam AB, velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam DG, & ſpatium totum deſcriptum per aream Hyperbolicam adjacentem $ABGD$; necnon ſpatium quod corpus aliquod eodem tempore AD, velocitate prima AB, in Medio non reſiſtente deſcribere poſſet, per rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 2. Unde datur ſpatium in Medio reſiſtente deſcriptum, capiendo illud ad ſpatium quod velocitate uniformi AB in medio non reſiſtente ſimul deſcribi poſſet, ut eſt area Hyperbolica $ABGD$ ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 3. Datur etiam reſiſtentia Medii, ſtatuendo eam ipſo motus initio æqualem eſſe vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore AC, in Medio non reſiſtente, generare poſſet velocitatem AB. Nam ſi ducatur BT quæ tangat Hyperbolam in B, & occurrat Aſymptoto in T; recta AT æqualis erit ipſi AC, & tempus exponet quo reſiſtentia prima uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem totam AB.

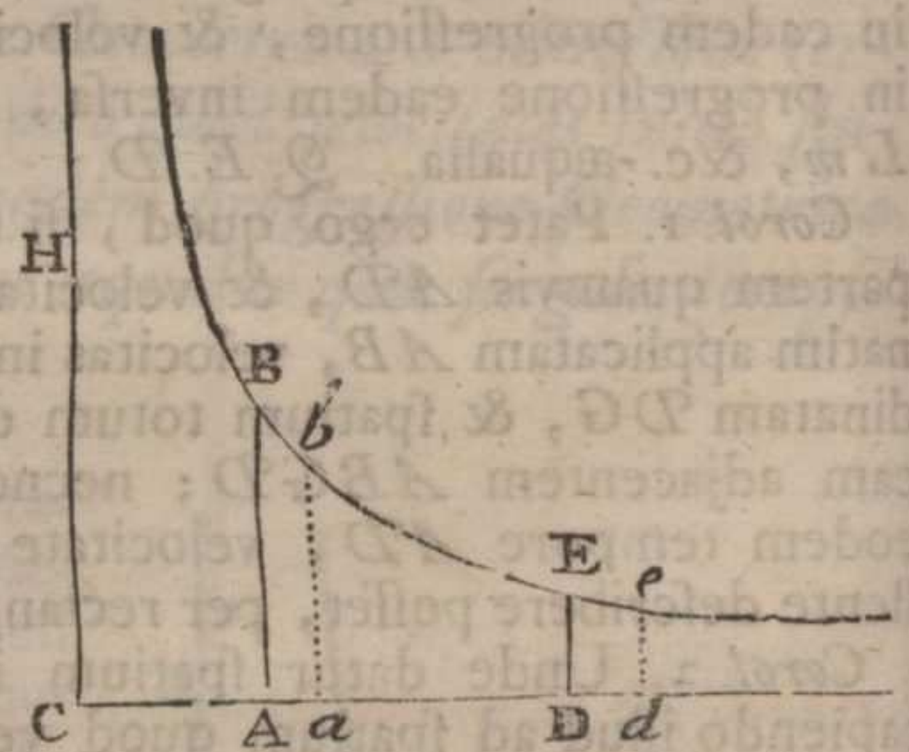
Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus reſiſtentiæ ad vim gravitatis aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et viceverſa, ſi datur proportio reſiſtentiæ ad datam quamvis vim centripetam, datur tempus AC, quo vis centripeta reſiſtentiæ æqualis generare poſſit velocitatem quamvis AB; & in-

De Motu Corporum, de datur punctum *B* per quod Hyperbola, Asymptotis *CH*, *CD*, describi debet; ut & spatium *ABGD*, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illa *AB*, tempore quovis *AD*, in Medio similari resistente describere potest.

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora Sphærica homogenea & æqualia, resistentiis in duplicata ratione velocitatum impedita, & solis viribus insitis incitata, temporibus quæ sunt reciproce ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.



Asymptotis rectangulis *CD*, *CH* descripta Hyperbola quavis *BbEe* secante perpendicula *AB*, *ab*, *DE*, *de*, in *B*, *b*, *E*, *e*, exponantur velocitates initiales per perpendicula *AB*, *DE*, & tempora per lineas *Aa*, *Dd*. Est ergo ut *Aa* ad *Dd* ita (per Hypothesin) *DE* ad *AB*, & ita (ex natura Hyperbolæ) *CA* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. Ergo areæ *AB* *ba*, *DEed*, hoc est, spatia descripta æquantur inter se, & velocitates primæ *AB*, *DE* sunt ultimis *ab*, *de*, & propterea (dividendo) partibus etiam suis amissis *AB*—*ab*, *DE*—*de* proportionales. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora Sphærica quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus quæ sunt ut motus primi directe & resistentiæ primæ inverse, amittent partes motuum proportionales totis, & spatia describent temporibus istis in velocitates primas ductis proportionalia.

Namque motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ & tempora con-

conjunctim. Igitur ut partes illæ ſint totis proportionales, debebit reſiſtentia & tempus conjunctim eſſe ut motus. Proinde tempus erit ut motus directe & reſiſtentia inverſe. Quare temporum particulis in ea ratione ſumptis, corpora amittent ſemper particulas motuum proportionales totis, adeoque retinebunt velocitates in ratione prima. Et ob datam velocitatum rationem, deſcribent ſemper ſpatia quæ ſunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in duplicata ratione diametrorum: Globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia diametris ſuis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim Globi cujuſque erit ut ejus velocitas & Maſſa conjunctim, id eſt, ut velocitas & cubus diametri; reſiſtentia (per Hypotheſin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc Propoſitionem) eſt in ratione priore directe & ratione poſteriore inverſe, id eſt, ut diameter directe & velocitas inverſe; adeoque ſpatium (tempori & velocitati proportionale) eſt ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione ſeſquialtera diametrorum: Globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia in ſeſquialtera ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione dignitatis cujuſcunque diametrorum: ſpatia quibus Globi homogenei, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E: & ſi reſiſtentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, ſint ut D^n & E^n: ſpatia quibus Globi, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis; erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Igitur deſcribendo ſpatia ipſis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac ſub initio.

Corol. 4. Quod ſi Globi non ſint homogenei, ſpatium a Globo denſiore deſcriptum augeri debet in ratione denſitatis. Motus enim, ſub pari velocitate, major eſt in ratione denſitatis, & tempus (per hanc propoſitionem) augetur in ratione motus directe, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

Corol.

De Motu Corporum,

Corol. 5. Et ſi Globi moveantur in Mediis diverſis; ſpatium in Medio, quod cæteris paribus magis reſiſtit, diminuendum erit in ratione majoris reſiſtentiæ. Tempus enim (per hanc Propoſitionem) diminuetur in ratione reſiſtentiæ auctæ, & ſpatium in ratione temporis.

LEMMA II.

Momentum Genitæ æquatur Momentis laterum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem quæ ex lateribus vel terminis quibuſcunque, in Arithmetica per multiplicationem, diviſionem, & extractionem radicum; in Geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, abſque additione & ſubductione generatur. Ejuſmodi quantitates ſunt Facti, Quoti, Radices, Rectangula, Quadrata, Cubi, Latera quadrata, Latera cubica, & ſimiles. Has quantitates ut indeterminatas & inſtabiles, & quaſi motu fluxuve perpetuo creſcentes vel decreſcentes, hic conſidero; & earum incrementa vel decrementa momentanea ſub nomine Momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis additititiis ſeu affirmativis, ac decrementa pro ſubductitiis ſeu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non ſunt momenta, ſed quantitates ipſæ ex momentis genitæ. Intelligenda ſunt principia jamjam naſcentia finitarum magnitudinum. Neque enim ſpectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, ſed prima naſcentium proportio. Eodem recidit ſi loco momentorum uſurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum, (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hiſce proportionales. Lateris autem cujuſque generantis Coefficiens eſt quantitas, quæ oritur applicando Genitam ad hoc latus.

Igitur ſenſus Lemmatis eſt, ut, ſi quantitatum quarumcunque perpetuo motu creſcentium vel decreſcentium A, B, C, &c. momenta, vel mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB+bA$, & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC+bAC+cAB$: & genitarum digni-

dignitatum $A^2, A^3, A^4, A^{\frac{1}{2}}, A^{\frac{3}{2}}, A^{\frac{1}{3}}, A^{\frac{2}{3}}, A^{-1}, A^{-}$, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$, respective. Et generaliter, ut dignitatis cujuſcunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut Genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB+bA^2$; & Genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2+4bA^3B^3C^2+2cA^3B^4C$; & Genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ ſive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2}-2bA^3B^{-3}$: & ſic in cæteris. Demonſtratur vero Lemma in hunc modum.

Caſ. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A-\frac{1}{2}a$ in $B-\frac{1}{2}b$, ſeu $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta ſunt, evadit $A+\frac{1}{2}a$ in $B+\frac{1}{2}b$ ſeu $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo ſubducatur rectangulum prius, & manebit exceſſus $aB+bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB+bA$. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Ponatur AB ſemper æquale G, & contenti ABC ſeu GC momentum (per Caſ. 1.) erit $gC+cG$, id eſt (ſi pro G & g ſcribantur AB & $aB+bA$) $aBC+bAC+cAB$. Et par eſt ratio contenti ſub lateribus quotcunque. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Ponantur latera A, B, C ſibi mutuo ſemper æqualia; & ipſius A^2, id eſt rectanguli AB, momentum $aB+bA$ erit $2aA$, ipſius autem A^3, id eſt contenti ABC, momentum $aBC+bAC+cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuſcunque A^n eſt naA^{n-1}. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ductum in A, una cum $\frac{1}{A}$ ducto in a erit momentum ipſius 1, id eſt, nihil. Proinde momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ſeu ipſius A^{-1} eſt $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n,

De Motu Corporum.

una cum $\frac{1}{A^n}$ in $na\ A^{n-1}$ erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. *Q.E.D.*

Cas. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A, momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2\ A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per Cas. 3: ideoque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2\ A^{\frac{1}{2}}}$ sive $\frac{1}{2}\ a\ A^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque $m\ a\ A^{m-1}$ æquale $n\ b\ B^{n-1}$, & $m\ a\ A^{-1}$ æquale $n\ b B^{-1}$ seu $n\ b A^{-\frac{m}{n}}$, adeoque $\frac{m}{n}\ a\ A^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id est, æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q.E.D.*

Cas. 6. Igitur Genitæ cujuscunque $A^m\ B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n, una cum momento ipsius B^n ducto in A^m, id est $m\ a\ A^{m-1}\ B^n + n\ b\ B^{n-1}\ A^m$; idque sive dignitatum indices m & n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F, continue proportionales; & si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut — 2 A, — B, D, 2 E, 3 F.

Corol. 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

In Literis quæ mihi cum Geometra peritissimo *G. G. Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, & literis transpositis hanc sententiam involven-

tibus

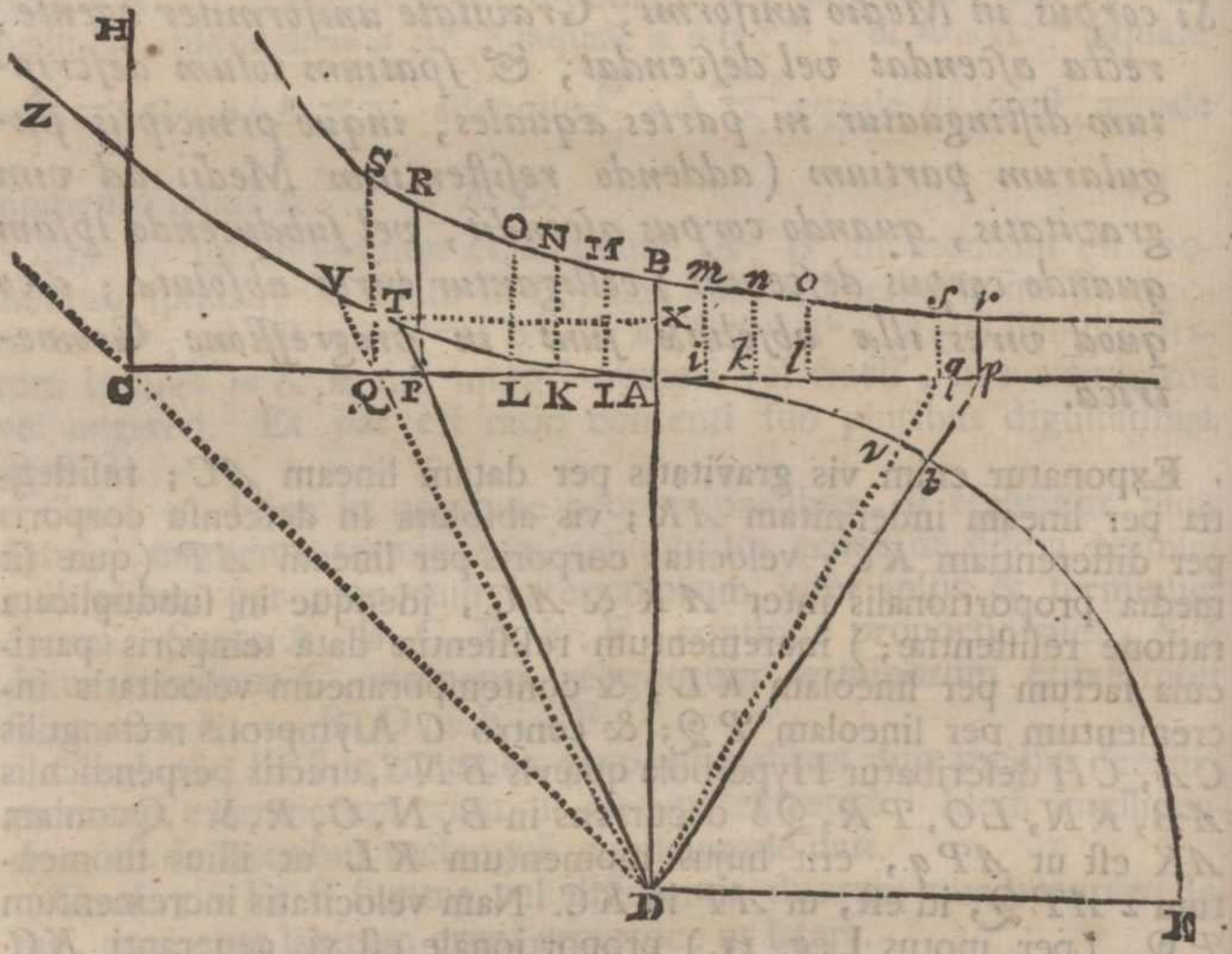
tibus [*Data Æquatione quotcunque Fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire, & vice versa*] eandem celarem : rescripsit Vir Clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, & methodum suam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum & notarum formulis, & Idea generationis quantitatum. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate. LIBER SECUNDUS.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in Medio uniformi, Gravitate uniformiter agente, recta ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistentiam Medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) colligantur vires absolutæ; dico quod vires illæ absolutæ sunt in progressione Geometrica.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; resistentia per lineam indefinitam AK; vis absoluta in descensu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP (quæ sit media proportionalis inter AK & AC, ideoque in subduplicata ratione resistentiæ;) incrementum resistentiæ data temporis particula factum per lineolam KL, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ; & centro C Asymptotis rectangulis CA, CH describatur Hyperbola quævis BNS, erectis perpendiculis AB, KN, LO, PR, QS occurrens in B, N, O, R, S. Quoniam AK est ut APq, erit hujus momentum KL ut illius momentum 2 APQ, id est, ut AP in KC. Nam velocitatis incrementum PQ, (per motus Leg. 11.) proportionale est vi generanti KC. Componatur ratio ipsius KL, cum ratione ipsius KN, & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$, hoc est, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut AP. Atqui areæ Hyperbolicæ $KNOL$ ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta K & L, est æqualitatis. Ergo area illa Hyperbolica evanescens est ut AP. Componitur igitur area tota Hyperbolica $ABOL$ ex particulis $KNOL$ velocitati AP semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate ista descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales $ABMI$, $IMNK$, $KNOL$, &c. & vi-

De Motu Corporum, res absolutæ *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt in progressione Geometrica. *Q. E. D.* Et simili argumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *ABmi*, *imnk*, *knol*, &c. constabit quod vires absolutæ *AC*, *iC*, *kC*, *lC*, &c. sunt continue proportionales. Ideoque si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ *lC*, *kC*, *iC*, *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt continue proportionales. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream Hyperbolicam *ABNK*; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia Medii per lineas *AC*, *AP* & *AK* respective; & vice versa.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, exponens est linea *AC*.

Corol. 3. Igitur si in data aliqua velocitate cognoscatur resistentia Medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem

tatem illam datam in ſubduplicata ratione, quam habet vis Gravitatis ad Medii reſiſtentiam illam cognitam.

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

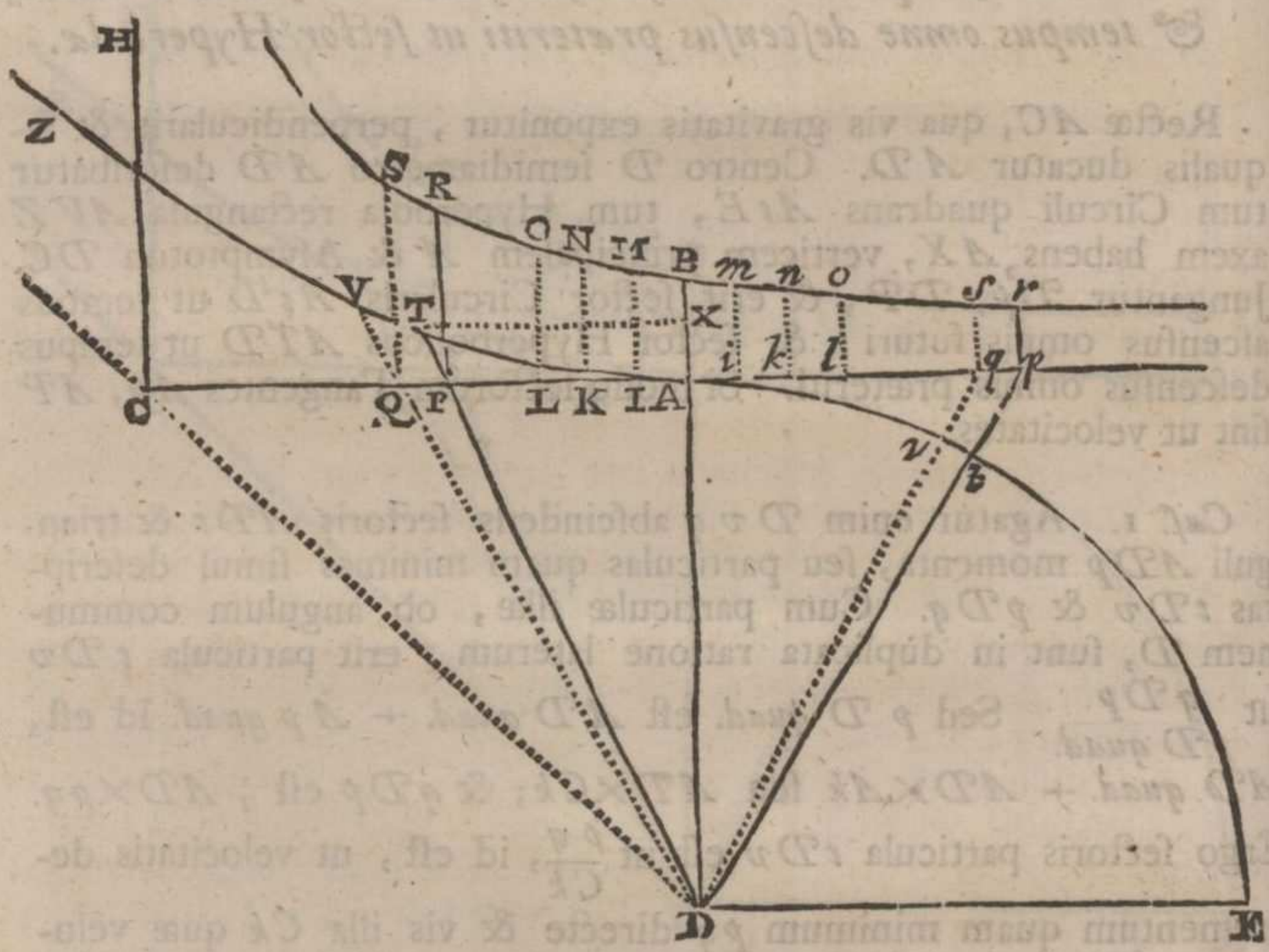
Poſitis jam demonſtratis, dico quod ſi Tangentes angulorum ſectoris Circularis & ſectoris Hyperbolici ſumantur velocitatibus proportionales, exiſtente radio juſtæ magnitudinis: erit tempus omne aſcenſus futuri ut ſector Circuli, & tempus omne deſcenſus præteriti ut ſector Hyperbolæ.

Rectæ AC, qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur AD. Centro D ſemidiametro AD deſcribatur tum Circuli quadrans AtE, tum Hyperbola rectangula AVZ axem habens AX, verticem principalem A & Aſymptoton DC. Jungantur Dp, DP, & erit ſector Circularis AtD ut tempus aſcenſus omnis futuri; & ſector Hyperbolicus ATD ut tempus deſcenſus omnis præteriti. Si modo ſectorum Tangentes Ap, AP ſint ut velocitates.

Caſ. 1. Agatur enim Dvq abſcindens ſectoris ADt & trianguli ADp momenta, ſeu particulas quam minimas ſimul deſcriptas tDv & pDq. Cum particulæ illæ, ob angulum communem D, ſunt in duplicata ratione laterum, erit particula tDv ut $\frac{qDp}{pD\ quad.}$ Sed $pD\ quad.$ eſt $AD\ quad. + Ap\ quad.$ id eſt, $AD\ quad. + AD \times Ak$ ſeu $AD \times Ck$; & qDp eſt $\frac{1}{2} AD \times pq$. Ergo ſectoris particula tDv eſt ut $\frac{pq}{Ck}$, id eſt, ut velocitatis decrementum quam minimum pq directe & vis illa Ck quæ velocitatem diminuit inverſe, atque adeo ut particula temporis decremento reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum omnium tDv in ſectore ADt, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocitatis decreſcentis Ap particulis amiſſis pq reſpondentium, uſque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc eſt, ſector totus ADt eſt ut aſcenſus totius futuri tempus. *Q. E. D.*

De Motu Corporum,

Caſ. 2. Agatur DQV abſcindens tum ſectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quam minimas TDV & PDQ; & erunt hæ particulæ ad invicem ut DTq. ad DPq. id eſt (ſi TX & AP parallelæ ſint) ut DXq. ad DAq. vel TXq. ad APq. & diviſim ut $DXq - TXq$ ad $DAq - APq$. Sed ex natura Hyperbolæ $DXq - TXq$ eſt ADq, & per Hypotheſin APq eſt $AD \times AK$. Ergo particulæ ſunt ad invicem ut ADq ad



$ADq - AD \times AK$; id eſt, ut AD ad $AD - AK$ ſeu AC ad CK: ideoque ſectoris particula TDV eſt $\frac{PDQ \times AC}{CK}$, atque adeo ob datas AC & AD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id eſt, ut incrementum velocitatis directe utque vis generans incrementum inverſe, atque adeo ut particula temporis incremento reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particulæ

PQ generantur, ut ſumma particularum ſectoris ATD, id eſt, tempus totum ut ſector totus. *Q. E. D.* LIBER SECUNDUS.

Corol. 1. Hinc ſi AB æquetur quartæ parti ipſius AC, ſpatium quod corpus tempore quovis cadendo deſcribit, erit ad ſpatium quod corpus velocitate maxima AC, eodem tempore uniformiter progrediendo deſcribere poteſt, ut area $ABNK$, qua ſpatium cadendo deſcriptum exponitur, ad aream ATD qua tempus exponitur. Nam cum ſit AC ad AP ut AP ad AK, erit (per Corol. 1. Lem. 11. hujus) LK ad PQ ut 2 AK ad AP, hoc eſt, ut 2 AP ad AC, & inde LK ad $\frac{1}{2}PQ$ ut AP ad ($\frac{1}{4}AC$ vel) AB; eſt & KN ad (AC vel) AD ut AB ad CK; itaque ex æquo LKN ad DPQ ut AP ad CK. Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC. Ergo rurſus ex æquo LKN eſt ad DTV ut AP ad AC; hoc eſt, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo poteſt acquirere. Cum igitur arearum $ABNK$ & ATD momenta LKN & DTV ſunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ ut ſpatia ſimul deſcripta, ideoque areæ totæ ab initio genitæ $ABNK$ & ATD ut ſpatia tota ab initio deſcenſus deſcripta. *Q. E. D.*

Corol. 2. Idem conſequitur etiam de ſpatio quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quod ſpatium illud omne ſit ad ſpatium, uniformi cum velocitate AC eodem tempore deſcriptum, ut eſt area $ABnk$ ad ſectorem ADt.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore ATD cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum APD ad ſectorem Hyperbolicum ATD. Nam velocitas in Medio non reſiſtente foret ut tempus ATD, & in Medio reſiſtente eſt ut AP, id eſt, ut triangulum APD. Et velocitates illæ initio deſcenſus æquantur inter ſe, perinde ut areæ illæ ATD, APD.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in aſcenſu eſt ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente omnem ſuum aſcendendi motum amittere poſſet, ut triangulum ApD ad ſectorem Circularem AtD; ſive ut recta Ap ad arcum At.

Corol. 5. Eſt igitur tempus quo corpus in Medio reſiſtente cadendo velocitatem AP acquirit, ad tempus quo velocitatem maximam AC in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirere poſſet, ut ſector ADT ad triangulum ADC: & tempus, quo velocitatem Ap in Medio

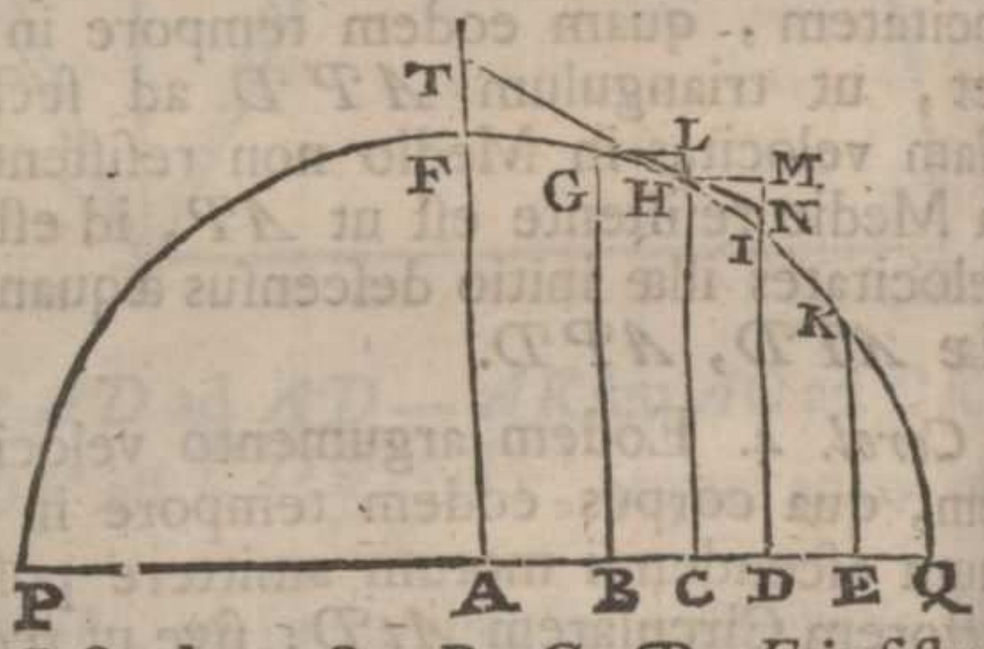
De Motu Corporum, Medio reſiſtente aſcendendo poſſit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in ſpatio non reſiſtente aſcendendo poſſet amittere, ut arcus *At* ad ejus tangentem *Ap*.

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum. Nam corporis in infinitum deſcendentis datur velocitas maxima, per Corol. 2, & 3, Theor. VI, Lib II; indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in ſpatio non reſiſtente cadendo poſſet acquirere. Et ſumendo Sectorem *ADT* vel *ADt* ad triangulum *ADC* in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; dabitur tum velocitas *AP* vel *Ap*, tum area *ABNK* vel *ABnk*, quæ eſt ad ſectorem *ADT* vel *ADt* ut ſpatium quæſitum ad ſpatium quod tempore dato, cum velocitate illa maxima jam ante inventa, uniformiter deſcribi poteſt.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato aſcenſus vel deſcenſus ſpatio *ABnk* vel *ABNK*, dabitur tempus *ADt* vel *ADT*.

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum Horizontis, ſitque reſiſtentia ut Medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum Medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas & Medii reſiſtentia in locis ſingulis.



Sit *PQ* planum illud plano Schematis perpendiculare; *PFHQ* linea curva plano huic occurrens in punctis *P* & *Q*; *G*, *H*, *I*, *K* loca quatuor corporis in hac curva ab *F* ad *Q* pergentis; & *GB*, *HC*, *ID*, *KE* ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem *PQ* demiſſæ & lineæ horizontali tes; & ſint *BC*, *CD*, *DE* diſtantiæ Ordinatarum inter ſe æquales. A punctis *G* & *H* ducantur rectæ *GL*, *HN* curvam tangentes in *G* & *H*, & Ordinatis *CH*, *DI* ſurſum productis occurrentes in *L* & *N*, & compleatur parallelogrammum *HCDM*.

Et

Et tempora quibus corpus deſcribit arcus GH, HI, erunt in ſubduplicata ratione altitudinum LH, NI quas corpus temporibus illis deſcribere poſſet, a tangentibus cadendo: & velocitates erunt ut longitudines deſcriptæ GH, HI directe & tempora inverſe. Exponantur tempora per T & t, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$: & decrementum velocitatis tempore t factum exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a reſiſtentia corpus retardante & gravitate corpus accelerante. Gravitas in corpore cadente & ſpatium NI cadendo deſcribente, generat velocitatem qua duplum illud ſpatium eodem tempore deſcribi potuiſſet (ut *Galilæus* demonſtravit) id eſt, velocitatem $\frac{2NI}{t}$: at in corpore arcum HI deſcribente, auget arcum illum ſola longitudine $HI - HN$ ſeu $\frac{MI \times NI}{HI}$, ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentia ſola oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; Reſiſtentia erit ad Gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, ſive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abſciſſis CB, CD, CE ſcribantur $-o, o, 2o$. Pro Ordinata CH ſcribatur P, & pro MI ſcribatur ſeries quælibet $Qo + Roo + So^3 +$ &c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo + So^3 +$ &c. erunt NI, & Ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c, $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c, & $P + Qo - Roo + So^3 -$ &c. reſpective. Et quadrando differentias Ordinatarum $BG - CH$ & $CH - DI$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 +$ &c; & $oo + QQoo + 2QRo^3 +$ &c. Quorum radices $o\sqrt{1 + QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, &

$o\sqrt{1 +}$

De Motu Corporum $o\sqrt{1\times QQ}+\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ sunt arcus GH & HI. Præterea si ab Ordinata CH subducatur semisumma Ordinatarum BG ac $\mathcal{D}I$, & ab Ordinata $\mathcal{D}I$ subducatur semisumma Ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK sagittæ Roo & $Roo+3So^3$. Et hæ sunt lineolis LH & NI proportionales, adeoque in duplicata ratione temporum infinite parvorum T & t, & inde ratio $\frac{t}{T}$ est $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$ seu $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$: & $\frac{t\times GH}{T}-HI+\frac{2MI\times NI}{HI}$, subsstituendo ipsorum $\frac{t}{T}$ GH, HI, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cum $2NI$ sit $2Roo$, Resistentia jam erit ad Gravitatem ut $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2Roo$, id est, ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$.

Velocitas autem ea est quacum corpus de loco quovis H, secundum tangentem HN egrediens, in Parabola diametrum HC & latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ seu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, deinceps in vacuo moveri potest.

Et resistentia est ut Medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea Medii densitas est ut resistentia directe & quadratum velocitatis inverse, id est, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directe & $\frac{1+QQ}{R}$ inverse, hoc est, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. *Q. E. I.*

Corol. 1. Si tangens HN producatur utrinque donec occurrat Ordinatæ cuilibet AF in T: erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+QQ}$, adeoque in superioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ scribi potest. Qua ratione Resistentia erit ad Gravitatem ut $3S\times HT$ ad $4RR\times AC$; Velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & Medii densitas erit ut $\frac{S\times AC}{R\times HT}$.

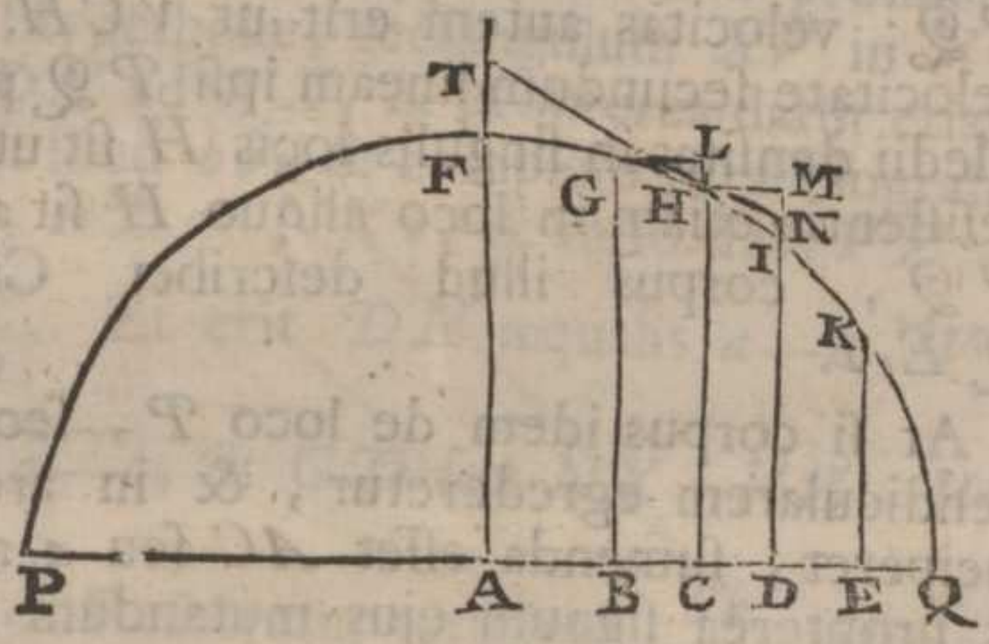
Corol. 2. Et hinc, si curva linea $PFHQ$ definiatur per relationem inter basem seu abscissam AC & ordinatim applicatam CH,

CH, (ut moris eſt) & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem? Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur, ut in exemplis ſequentibus.

Exempl. 1. Sit Linea $PFHQ$ Semicirculus ſuper diametro PQ deſcriptus, & requiratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Biſecetur diameter PQ in A, dic $AQ\,n$, $AC\,a$, $CH\,e$, & $CD\,o$: & erit $DI\,q$ ſeu $AQ\,q - AD\,q = nn - aa - 2ao - oo$, ſeu $ee - 2ao - oo$, & radice per methodum noſtram extracta, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5}$ &c. Hic ſcribatur nn pro $ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{annoo^3}{2e^5} -$ &c.

Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva o non extat; ſecundum in quo quantitas illa eſt unius dimenſionis, tertium in quo extat duarum, quartum in quo trium eſt, & ſic in infinitum. Et primus terminus qui hic eſt e, denotabit ſemper longitudinem Ordinatæ CH inſiſtentis ad initium indefinitæ quantitatis o; ſecundus terminus qui hic eſt $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam



inter CH & DN, id eſt, lineolam MN quæ abſcinditur complendo parallelogrammum $HCDM$, atque adeo poſitionem tangentis HN ſemper determinat; ut in hoc caſu capiendo MN ad HM ut eſt $\frac{ao}{e}$ ad o, ſeu a ad e. Terminus tertius qui hic eſt $\frac{nnoo}{2e^3}$ deſignabit lineolam IN quæ jacet inter tangentem & curvam, adeoque determinat angulum contactus IHN ſeu curvaturam quam curva linea habet in H. Si lineola illa IN finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium una cum ſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum,

De Motu Corporum, termini ſubſequentes evadent infinite minores tertio, ideoque negligi poſſunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum Serierum in Solutione Problematum quæ pendent a tangentibus & curvatura curvarum.

Conferatur jam ſeries $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{annno^3}{2e^5} -$ &c, cum ſerie $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. & perinde pro P, Q, R & S ſcribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$ & $\frac{ann}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribatur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ ſeu $\frac{n}{e}$, & prodibit Medii denſitas ut $\frac{a}{ne}$ hoc eſt, (ob datam n,) ut $\frac{a}{e}$, ſeu $\frac{AC}{CH}$, id eſt, ut tangentis longitudo illa HT quæ ad ſemidiametrum AF ipſi PQ normaliter inſiſtentem terminatur: & reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3a$ ad $2n$, id eſt, ut $3AC$ ad Circuli diametrum PQ: velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare ſi corpus juſta cum velocitate ſecundum lineam ipſi PQ parallelam exeat de loco F, & Medii denſitas in ſingulis locis H ſit ut longitudo tangentis HT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo H ſit ad vim gravitatis ut $3AC$ ad PQ, corpus illud deſcribet Circuli quadrantem FHQ. Q. E. I.

At ſi corpus idem de loco P, ſecundum lineam ipſi PQ perpendicularem egrederetur, & in arcu ſemicirculi PFQ moveri inciperet, ſumenda eſſet AC ſeu a ad contrarias partes centri A, & propterea ſignum ejus mutandum eſſet & ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret Medii denſitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem denſitatem, hoc eſt, quæ motus corporum accelerat, Natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non poteſt, ut corpus aſcendendo a P deſcribat Circuli quadrantem PF. Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a reſiſtente impediri.

Exempl. 2. Sit linea $PFHQ$ Parabola, axem habens AF horizonti PQ perpendicularem, & requiratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile in ipſa moveatur.

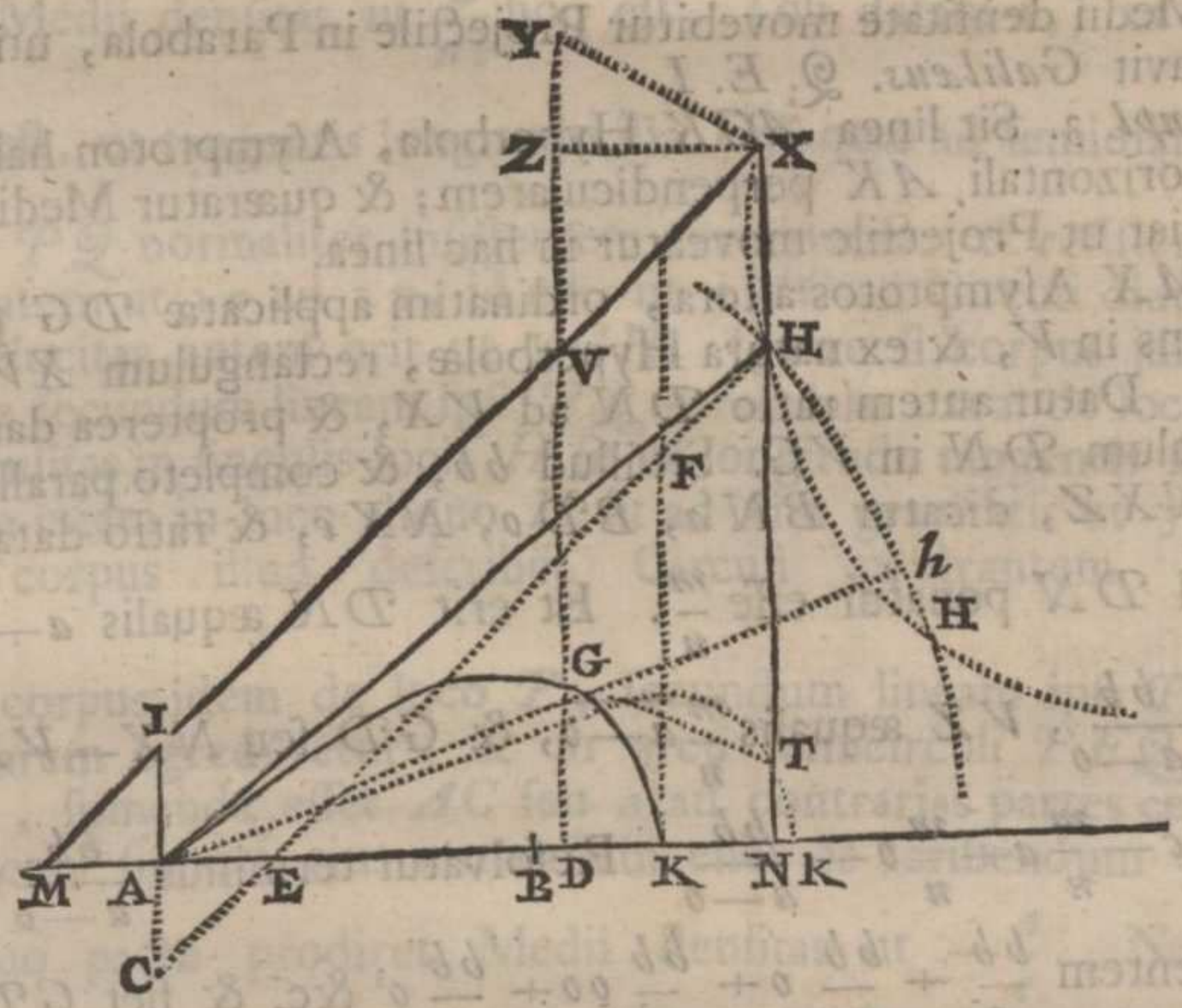
Ex natura Parabolæ, rectangulum PDQ æquale eſt rectangulo ſub ordinata DI & recta aliqua data; hoc eſt, ſi dicantur recta

recta illa b, $PC\,a$, $PQ\,c$, $CH\,e$ & $CD\,o$; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ seu $ac-aa-2ao+co-oo$ æquale est rectangulo b in DI, adeoque DI æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Qo, tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo. Cum vero plures non sint termini, debebit quarti coefficiens S evanescere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ cui Medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nulla igitur Medii densitate movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonstravit *Galilæus*. *Q. E. I.*

Exempl. 3. Sit linea AGK Hyperbola, Asymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea.

Sit MX Asymptotos altera, ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V, & ex natura Hyperbolæ, rectangulum XV in VG dabitur. Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb; & completo parallelogrammo $DNXZ$, dicatur $BN\,a$, $BD\,o$, $NX\,c$, & ratio data VZ ad ZX vel DN ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $\frac{bb}{a-o}$, VZ æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & GD seu $NX-VZ-VG$ æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in seriem convergentem $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet GD æqualis $c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o$ usurpandus est pro Qo, tertius cum signo mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum signo etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro So^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n}-\frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ scribendæ sunt in Regula superiore pro Q, R & S. Quo facto prodit medii densitas

ut $\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$ seu $\frac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$ id est, si in VZ sumatur $V\Upsilon$ æqualis EG, ut $\frac{1}{XT}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ sunt ipsarum XZ & $Z\Upsilon$ quadrata. Resistentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3X\Upsilon$ ad



$2\Upsilon G$, & velocitas ea est quacum corpus in Parabola pergeret verticem G, diametrum $\mathcal{D}G$, & latus rectum $\frac{X\Upsilon\ quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod Medii densitates in locis singulis G sint reciproce ut distantiæ $X\Upsilon$, quodque resistentia in loco aliquo G sit ad gravitatem ut $3X\Upsilon$ ad $2\Upsilon G$, & corpus de loco A, justa cum velocitate emissum, describet Hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*

Exempl. 4. Ponatur indefinite, quod linea AGK Hyperbola sit, centro X Asymptotis MX, NX ea lege descripta, ut constructo rectangulo $XZDN$ cujus latus ZD secet Hyperbolam in G &

Asymp.

Asymptoton ejus in V, fuerit VG reciproce ut ipsius ZX vel $\mathcal{D}N$ dignitas aliqua $\mathcal{D}N^n$, cujus index est numerus n: & quæratur Medii densitas, qua Projectile progrediatur in hac curva. LIBER SECUNDUS.

Pro BN, $B\mathcal{D}$, NX scribantur A, O, C respective, sitque VZ ad XZ vel $\mathcal{D}N$ ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{\mathcal{D}N}$, & erit $\mathcal{D}N$ æqualis $A-O$, $VG = \frac{bb}{\overline{A-O}^n}$, $VZ = \frac{d}{e}\overline{A-O}$, & $G\mathcal{D}$ seu $NX-VZ-VG$ æqualis $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{\overline{A-O}^n}$. Resolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$ in seriem infinitam $\frac{bb}{A^n} + \frac{nbb}{A^{n+1}}O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. ac fiet $G\mathcal{D}$ æqualis $C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 - \frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$ usurpandus est pro Qo, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro Ro^2, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro So^3. Et inde Medii densitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in loco quovis G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2 + \frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, adeoque si in VZ capiatur $V\Upsilon$ æqualis $n \times VG$, densitas illa est reciproce ut $X\Upsilon$. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ ipsarum XZ & $Z\Upsilon$ quadrata. Resistentia autem in eodem loco G fit ad gravitatem ut $3S$ in $\frac{X\Upsilon}{A}$ ad $4RR$, id est, $X\Upsilon$ ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipsa est quacum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem G, diametrum $G\mathcal{D}$ & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2X\Upsilon\ quad.}{nn+n \text{ in } VG}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

De Motu Corporum,

Scholium.

Eadem ratione qua prodiit denſitas Medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in Corollario primo, ſi reſiſtentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet V^n prodibit denſitas Medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$.

Et propterea ſi Curva inveniri poteſt ea lege ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}\Big|^{n-1}$, vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}\Big|^{n-1}$: corpus movebitur in hac Curva in uniformi Medio cum reſiſtentia quæ ſit ut velocitatis dignitas V^n. Sed redeamus ad Curvas ſimpliciores.

Quoniam motus non fit in Parabola niſi in Medio non reſiſtente, in Hyperbolis vero hic deſcriptis fit per reſiſtentiam perpetuam; perſpicuum eſt quod Linea, quam projectile in Medio uniformiter reſiſtente deſcribit, propius accedit ad Hyperbolas haſce quam ad Parabolam. Eſt utique linea illa Hyperbolici generis, ſed quæ circa verticem magis diſtat ab Aſymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipſas accedit quam pro ratione Hyperbolarum quas hic deſcripſi. Tanta vero non eſt inter has & illam differentia, quin illius loco poſſint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forſan futuræ ſunt hæ, quam Hyperbola magis accurata & ſimul magis compoſita. Ipſæ vero in uſum ſic deducentur.

Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & recta GT tanget Hyperbolam in G, ideoque denſitas Medii in G eſt reciproce ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $v \frac{GTq}{GV}$, reſiſtentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2} GV$.

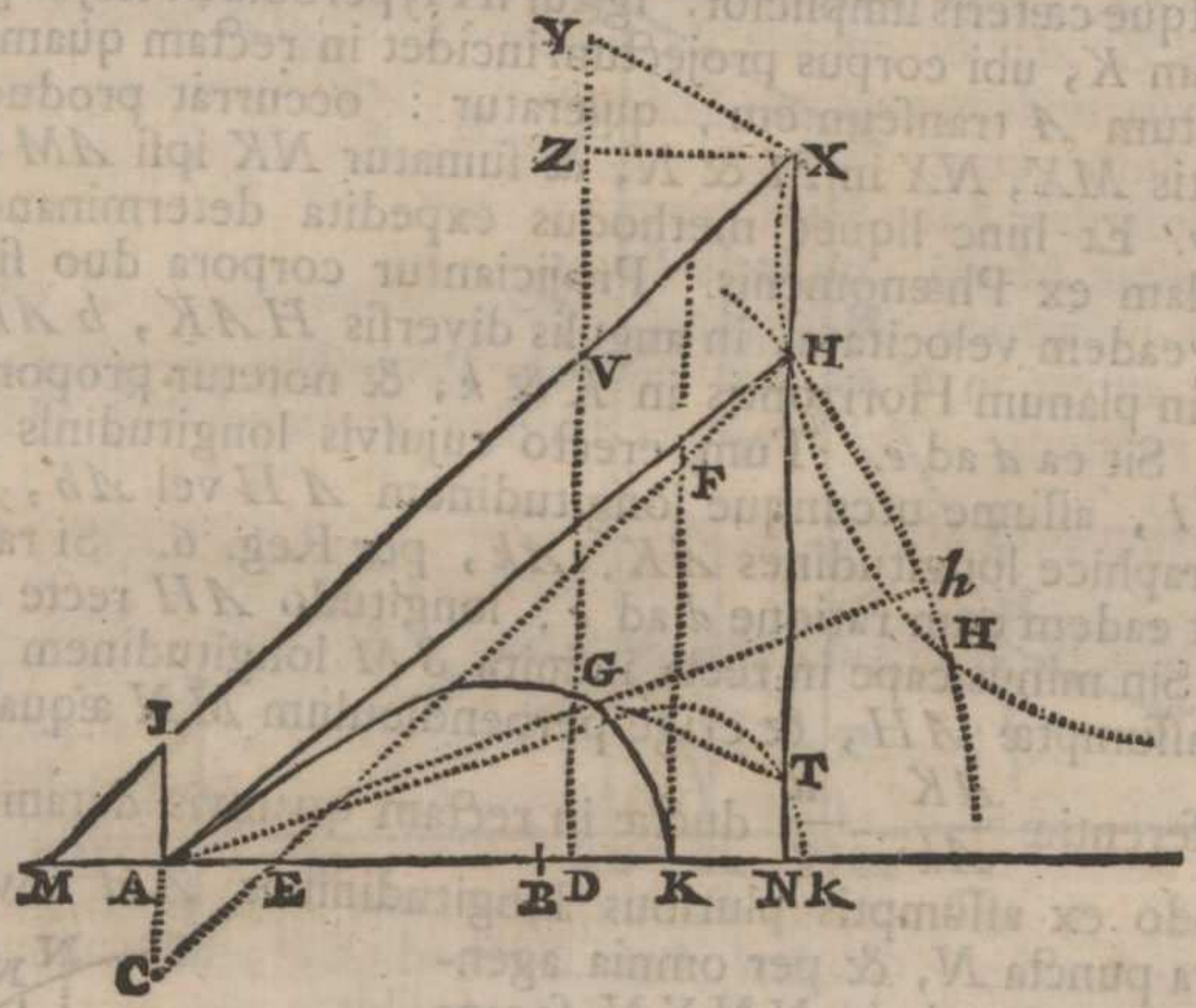
Proinde ſi corpus de loco A ſecundum rectam AH projectum deſcribat Hyperbolam AGK, & AH producta occurrat Aſymptoto NX in H, actaque AI eidem parallela occurrat alteri Aſymptoto MX in I; erit Medii denſitas in A reciproce ut AH, & corporis velocitas ut $v \frac{AHq}{AI}$, ac reſiſtentia ibidem ad gravitatem ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in AI. Unde prodeunt ſequentes Regulæ.

Reg. 1.

Reg. 1. Si ſervetur tum Medii denſitas in *A*, tum velocitas quacum corpus projicitur, & mutetur angulus *NAH*; manebunt longitudines *AH*, *AI*, *HX*. Ideoque ſi longitudines illæ in aliquo caſu inveniantur, Hyperbola deinceps ex dato quovis angulo *NAH* expedite determinari poteſt.

Reg. 2. Si ſervetur tum angulus *NAH*, tum Medii denſitas in *A*, & mutetur velocitas quacum corpus projicitur; ſervabitur longitudo *AH*, & mutabitur *AI* in duplicata ratione velocitatis reciproce.

Reg. 3. Si tam angulus *NAH* quam corporis velocitas in *A*, gravitaſque acceleratrix ſervetur, & proportio reſiſtentiæ in *A* ad



gravitatem motricem augeatur in ratione quacunque: augebitur proportio *AH* ad *AI* in eadem ratione, manente Parabolæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$; & propterea minuetur *AH* in eadem ratione, & *AI* minuetur in ratione illa duplicata. Augetur vero proportio reſiſtentiæ ad pondus, ubi vel gravitas ſpecifica ſub æquali magnitudine fit minor, vel Medii denſitas major, vel reſiſtentia, ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

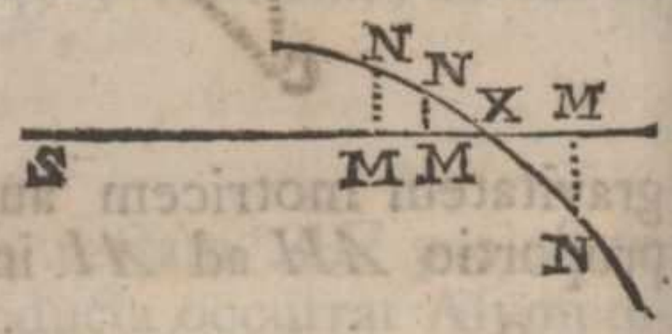
De Motu Corporum,

Reg. 4. Quoniam denſitas Medii prope verticem Hyperbolæ major eſt quam in loco *A*, ut habeatur denſitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium *GT* ad tangentem *AH* inveniri, & denſitas in *A* augeri in ratione paulo majore quam ſemiſummæ harum tangentium ad minimam tangentium *GT*.

Reg. 5. Si dantur longitudines *AH*, *AI*, & deſcribenda ſit Figura *AGK*: produc *HN* ad *X*, ut ſit *HX* æqualis facto ſub $n + 1$ & *AI*; centroque *X* & Aſymptotis *MX*, *NX* per punctum *A* deſcribatur Hyperbola, ea lege, ut ſit *AI* ad quamvis *VG* ut XV^n ad XI^n.

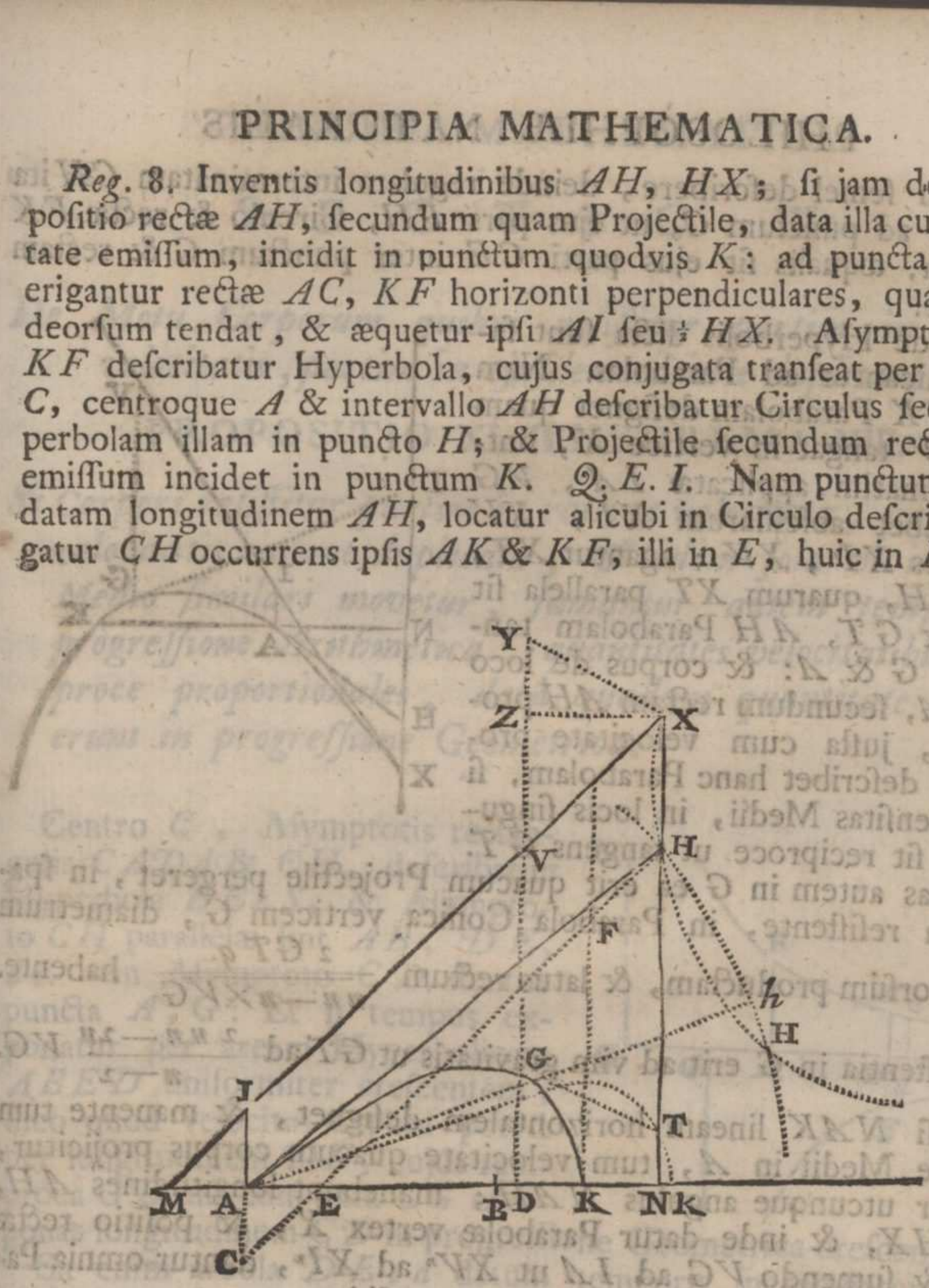
Reg. 6. Quo major eſt numerus *n*, eo magis accuratæ ſunt hæ Hyperbolæ in aſcenſu corporis ab *A*, & minus accuratæ in ejus deſcenſu ad *K*; & contra. Hyperbola Conica mediocrem rationem tenet, eſtque cæteris ſimplicior. Igitur ſi Hyperbola ſit hujus generis, & punctum *K*, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis *AN* per punctum *A* tranſeuntem, quæratur: occurrat producta *AN* Aſymptotis *MX*, *NX* in *M* & *N*, & ſumatur *NK* ipſi *AM* æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc Hyperbolam ex Phænomenis. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia, eadem velocitate, in angulis diverſis *HAK*, *bAk*, inciantque in planum Horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujuſvis longitudinis perpendiculo *AI*, aſſume utcunque longitudinem *AH* vel *Ab*, & inde collige graphice longitudines *AK*, *Ak*, per Reg. 6. Si ratio *AK* ad *Ak* ſit eadem cum ratione *d* ad *e*, longitudo *AH* recte aſſumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita *SM* longitudinem *SM* æqualem aſſumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex aſſumptis pluribus longitudinibus *AH* invenienda ſunt plura puncta *N*, & per omnia agenda Curva linea regularis *NNXN*, ſecans rectam *S M M M* in *X*. Aſſumatur demum *AH* æqualis abſciſſæ *SX* & inde denuo inveniatur longitudo *AK*; & longitudines, quæ ſint ad aſſumptam longitudinem *AI* & hanc ultimam *AH* ut longitudo *AK* per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem *AK*, erunt veræ illæ longitudines *AI* & *AH*, quas invenire oportuit. Hiſce vero datis dabitur & reſiſtentia Medii in loco *A*, quippe quæ ſit ad vim gravitatis ut *AH* ad 2 *AI*. Augenda eſt autem denſitas Medii per Reg. 4. & reſiſtentia modo inventa, ſi in eadem ratione augeatur, fiet accuratior.



Reg.

Reg. 8. Inventis longitudinibus *AH*, *HX*; ſi jam deſideretur poſitio rectæ *AH*, ſecundum quam Projectile, data illa cum velocitate emiſſum, incidit in punctum quodvis *K*: ad puncta *A* & *K* erigantur rectæ *AC*, *KF* horizonti perpendiculares, quarum *AC* deorſum tendat, & æquetur ipſi *AI* ſeu ½ *HX*. Aſymptotis *AK*, *KF* deſcribatur Hyperbola, cujus conjugata tranſeat per punctum *C*, centroque *A* & intervallo *AH* deſcribatur Circulus ſecans Hyperbolam illam in puncto *H*; & Projectile ſecundum rectam *AH* emiſſum incidet in punctum *K*. *Q. E. I.* Nam punctum *H*, ob datam longitudinem *AH*, locatur alicubi in Circulo deſcripto. Agatur *CH* occurrens ipſis *AK* & *KF*, illi in *E*, huic in *F*; & ob



parallelas *CH*, *MX* & æquales *AC*, *AI*, erit *AE* æqualis *AM*, & propterea etiam æqualis *KN*. Sed *CE* eſt ad *AE* ut *FH* ad *KN*, & propterea *CE* & *FH* æquantur. Incidit ergo punctum *H* in Hyperbolam Aſymptotis *AK*, *KF* deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum *C* atque adeo reperitur in communi interſectione Hyperbolæ hujus & Circuli deſcripti. *Q. E. D.* Notandum eſt autem quod hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta *AKN* horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodque ex duabus interſectionibus *H*, *H* duo prodeunt anguli *NAH*, *NAH*; & quod in Praxi mechanica ſufficit

De Motu Corporum, Circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam *CH* ita applicare ad punctum *C*, ut ejus pars *FH*, Circulo & rectæ *FK* interjecta, æqualis ſit ejus parti *CE* inter punctum *C* & rectam *AK* ſitæ.

Quæ de Hyperbolis dicta ſunt facile applicantur ad Parabolas. Nam ſi *XAGK* Parabolam deſignet quam recta *XV* tangat in vertice *X*, ſintque ordinatim applicatæ *IA*, *VG* ut quælibet abſciſſarum *XI*, *XV* dignitates XI^n, XV^n; agantur *XT*, *GT*, *AH*, quarum *XT* parallela ſit *VG*, & *GT*, *AH* Parabolam tangant in *G* & *A*: & corpus de loco quovis *A*, ſecundum rectam *AH* productam, juſta cum velocitate projectum, deſcribet hanc Parabolam, ſi modo denſitas Medii, in locis ſingulis *G*, ſit reciproce ut tangens *GT*.



Velocitas autem in *G* ea erit quacum Projectile pergeret, in ſpatio non reſiſtente, in Parabola Conica verticem *G*, diametrum *VG* deorſum productam, & latus rectum $\frac{2\,GT\,q.}{nn-n\times VG}$ habente.

Et reſiſtentia in *G* erit ad vim gravitatis ut *GT* ad $\frac{2\,nn-2n}{n-2}\,VG$.

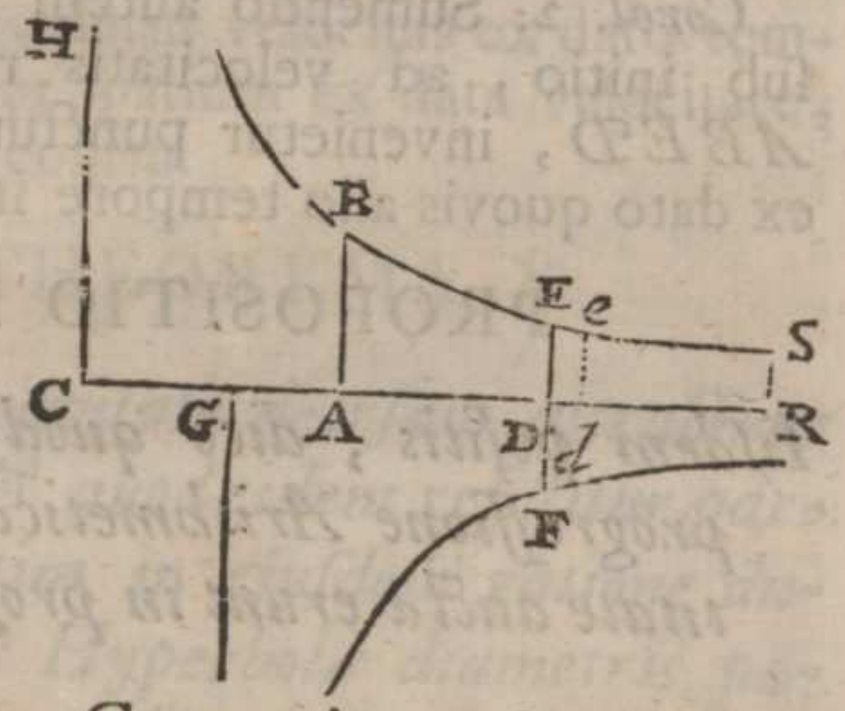
Unde ſi *NAK* lineam horizontalem deſignet, & manente tum denſitae Medii in *A*, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus *NAH*; manebunt longitudines *AH*, *AI*, *HX*, & inde datur Parabolæ vertex *X*, & poſitio rectæ *XI*, & ſumendo *VG* ad *IA* ut XV^n ad XI^n, dantur omnia Parabolæ puncta *G*, per quæ Projectile tranſibit.

SECTIO III.

De Motu Corporum quibus reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

Si Corpori reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicata, & idem ſola vi inſita in Medio ſimilari movetur, ſumantur autem tempora in progreſſione Arithmetica: quantitates velocitatibus reciproce proportionales, datâ quadam quantitate auctæ, erunt in progreſſione Geometrica.



Centro C, Aſymptotis rectangulis $CADd$ & CH, deſcribatur Hyperbola $BEeS$, & Aſymptoto CH parallelæ ſint AB, DE, de. In Aſymptoto CD dentur puncta A, G: Et ſi tempus exponatur per aream Hyperbolicam $ABED$ uniformiter creſcentem; dico quod velocitas exponi poteſt per longitudinem DF, cujus reciproca GD una cum data CG componat longitudinem CD in progreſſione Geometrica creſcentem.

Sit enim areola $DEed$ datum temporis incrementum quam minimum, & erit Dd reciproce ut DE, adeoque directe ut CD. Ipſius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (per hujus Lem. 11.) eſt $\frac{Dd}{GDq}$ erit ut $\frac{CD}{GDq}$ ſeu $\frac{CG+GD}{GDq}$, id eſt, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore $ABED$ per additionem datarum particularum $EDde$ uniformiter creſcente, decreſcit $\frac{1}{GD}$ in eadem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis eſt ut reſiſtentia, hoc eſt (per Hypotheſin) ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velo-

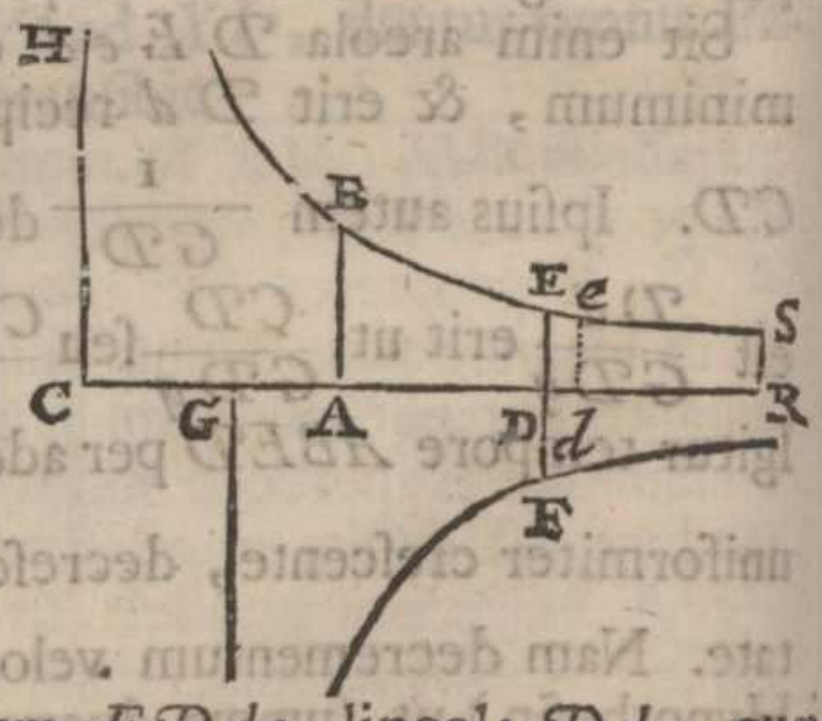
De Motu Corporum, velocitas, altera ut quadratum velocitatis: & ipſius $\frac{1}{GD}$ decrementum eſt ut ſumma quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior eſt ipſa $\frac{1}{GD}$, & poſterior $\frac{CG}{GDq}$ eſt ut $\frac{1}{GDq}$. Proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, eſt ut velocitas. Et ſi quantitas GD, ipſi $\frac{1}{GD}$ reciproce proportionalis, quantitate data CG augeatur, ſumma CD, tempore $ABED$ uniformiter creſcente, creſcet in progreſſione Geometrica. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi, datis punctis *A*, *G*, exponatur tempus per aream Hyperbolicam *ABED*; exponi poteſt velocitas per ipſius GD reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Corol. 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca ſub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujuſvis *ABED*, invenietur punctum *G*. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri poteſt.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iiſdem poſitis, dico quod ſi ſpatia deſcripta ſumantur in progreſſione Arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progreſſione Geometrica.



In Aſymptoto *CD* detur punctum *R*, & erecto perpendiculo *RS*, quod occurrat Hyperbolæ in *S*, exponatur deſcriptum ſpatium per aream Hyperbolicam *RSED*; & velocitas erit ut longitudo *GD*, quæ cum data *CG* componit longitudinem *CD*, in progreſſione Geometrica decreſcentem, interea dum ſpatium *RSED* augetur in Arithmetica.

Etenim ob datum ſpatii incrementum *EDde*, lineola *Dd*, quæ decre-

decrementum eſt ipſius GD, erit reciproce ut ED, adeoque directe ut CD, hoc eſt, ut ſumma ejuſdem GD & longitudinis datæ CG. Sed velocitatis decrementum, tempore ſibi reciproce proportionali, quo data ſpatii particula $DdeE$ deſcribitur, eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim, id eſt, directe ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverſe ut velocitas; adeoque directe ut ſumma duarum quantitatum, quarum una datur, altera eſt ut velocitas. Igitur decrementum tam velocitatis quam lineæ GD, eſt ut quantitas data & quantitas decreſcens conjunctim, & propter analoga decrementa, analogæ ſemper erunt quantitates decreſcentes: nimirum velocitas & linea GD. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi velocitas exponatur per longitudinem GD, ſpatium deſcriptum erit ut area Hyperbolica $DESR$.

Corol. 2. Et ſi utcunque aſſumatur punctum R, invenietur punctum G, capiendo GR ad GD, ut eſt velocitas ſub initio ad velocitatem poſt ſpatium quodvis $RSED$ deſcriptum. Invento autem puncto G, datur ſpatium ex data velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cum, per Prop. XI, detur velocitas ex dato tempore, & per hanc Propoſitionem detur ſpatium ex data velocitate; dabitur ſpatium ex dato tempore, & contra.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

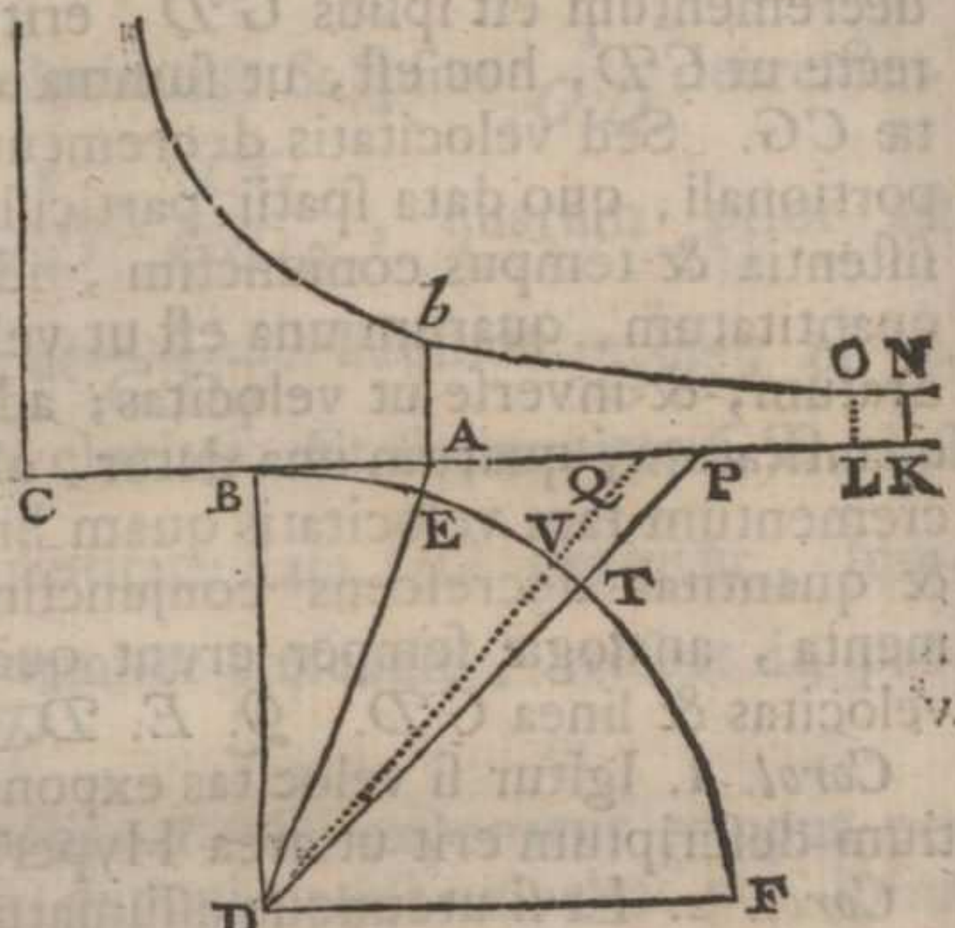
Poſito quod Corpus ab uniformi gravitate deorſum attractum recta aſcendit vel deſcendit, & quod eidem reſiſtitur partim in ratione velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicata: dico quod ſi Circuli & Hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates ſint ut ſegmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta, Tempora erunt ut arearum Sectores, rectis a centro ad ſegmentorum terminos ductis abſciſſi: & contra.

Caſ. 1. Ponamus primo quod corpus aſcendit, centroque D & ſemidiametro quovis DB deſcribatur Circuli quadrans $BETF$, & per ſemidiametri DB terminum B agatur infinita BAP, ſemidiametro DF parallela. In ea detur punctum A, & capiatur ſegmentum AP velocitati proportionale. Et cum reſiſtentiæ pars aliqua ſit

ut

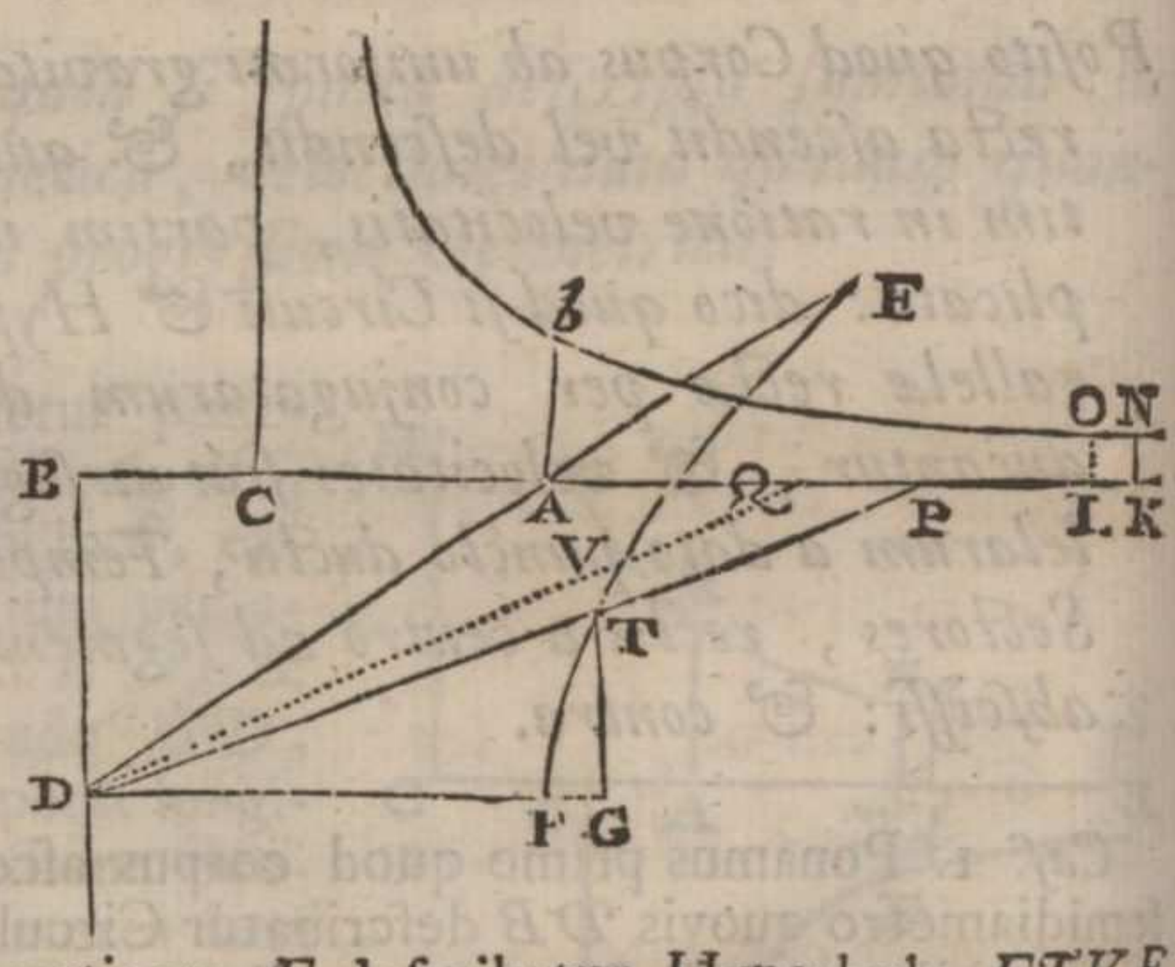
De Motu Corporum.

ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum, fit resistentia tota in P ut AP *quad.* $+ 2BAP$. Jungantur DA, DP Circulum secantes in E ac T, & exponatur gravitas per DA *quad.* ita ut sit gravitas ad resistentiam in P ut DAq ad $APq + 2BAP$: & tempus ascensus omnis futuri erit ut Circuli sector $EDTE$.



Agatur enim DVQ, abscindens & velocitatis AP momentum PQ, & Sectoris DET momentum DTV dato temporis momento respondens: & velocitas decrementum illud PQ erit ut summa virium gravitatis DAq & resistentiæ $APq + 2BAP$, id est (per Prop. 12. Lib. 2. Elem.) ut DP *quad.* Proinde area DPQ, ipsi PQ proportionalis, est ut DP *quad*; & area DTV, (quæ est ad aream DPQ ut DTq ad DPq) est ut datum DTq. Decrescit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri per subductionem datarum particularum DTV, & propterea tempori ascensus futuri proportionalis est. *Q. E. D.*

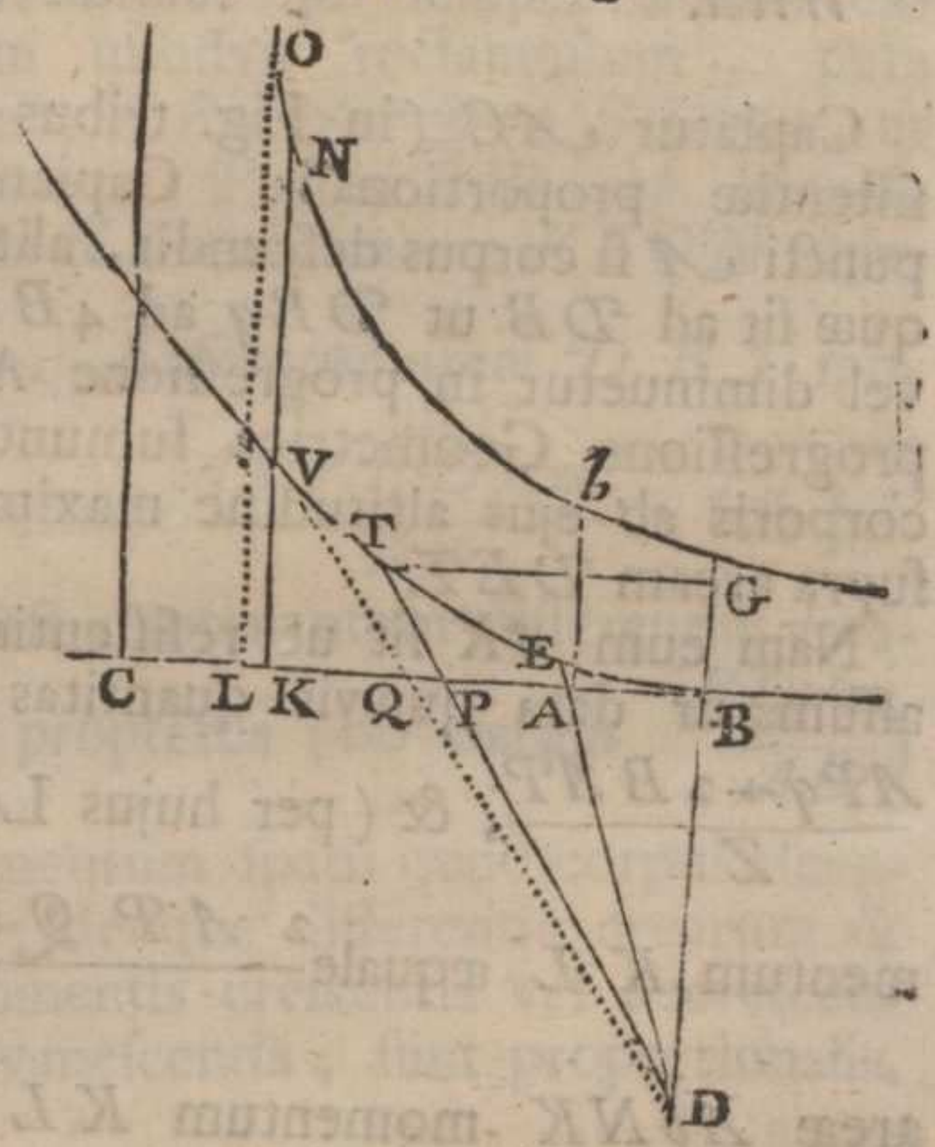
Cas. 2. Si velocitas in ascensu corporis exponatur per longitudinem AP ut prius, & resistentia ponatur esse ut $APq + 2BAP$, & si vis gravitatis minor sit quam quæ per DAq exponi possit; capiatur BD ejus longitudinis ut sit $ABq - BDq$ gravitati proportionale, sitque DF ipsi DB perpendicularis & æqualis, & per verticem F describatur Hyperbola $FTVE$ cujus semidiametri conjugatæ sint DB & DF, quæque secet DA in E, & DP, DQ in T & V; & erit tempus ascensus futuri ut Hyperbolæ sector TDE.



Nam

Nam velocitatis decrementum PQ, in data temporis particula factum, eſt ut ſumma reſiſtentiæ $APq + 2BAP$ & gravitatis $ABq - BDq$, id eſt, ut $BPq - BDq$. Eſt autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq adeoque, ſi ad DF demittatur perpendiculum GT, ut GTq ſeu $GDq - DFq$ ad BDq utque GDq ad BPq, & diviſim ut DFq ad $BPq - BDq$. Quare cum area DPQ ſit ut PQ, id eſt, ut $BPq - BDq$; erit area DTV ut datum DFq. Decreſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per ſubductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis eſt. *Q. E. D.* LIBER SECUNDUS.

Caſ. 3. Sit AP velocitas in deſcenſu corporis, & $APq + 2BAP$ reſiſtentia, & $BDq - ABq$ vis gravitatis, exiſtente angulo DBA recto. Et ſi centro D, vertice principali B, deſcribatur Hyperbola rectangula $BETV$ ſecans productas DA, DP, & DQ in E, T & V; erit Hyperbolæ hujus ſector DET ut tempus deſcenſus.



Nam velocitatis incrementum PQ, eique proportionalis area DPQ, eſt ut exceſſus gravitatis ſupra reſiſtentiam, id eſt, ut $BDq - ABq - 2BAP - APq$ ſeu $BDq - BPq$. Et area DTV eſt ad aream DPQ ut DTq ad DPq, adeoque ut GTq ſeu $GDq - BDq$ ad BPq utque GDq ad BDq & diviſim ut BDq ad $BDq - BPq$. Quare cum area DPQ ſit ut $BDq - BPq$, erit area DTV ut datum BDq. Creſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori deſcenſus proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Corol. Igitur velocitas AP eſt ad velocitatem quam corpus tempore EDT, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli DAP ad aream ſectoris centro D, radio DA, angulo ADT deſcripti; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas, in Medio non reſiſtente, tem-

De Motu Corporum,

pori atque adeo sectori huic proportionalis est; in Medio resistente est ut triangulum; & in Medio utroque, ubi quam minima est, accedit ad rationem æqualitatis, pro more sectoris & trianguli.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu describitur, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione Arithmetica; si vires ex resistentia & gravitate compositæ sumantur in progressione Geometrica.

Capiatur AC (in Fig. tribus ultimis,) gravitati, & AK resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti A si corpus descendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab quæ sit ad DB ut DBq ad $4BAC$: & area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progressione Arithmetica, dum vires CK in progressione Geometrica sumuntur. Dico igitur quod distantia corporis ab ejus altitudine maxima sit ut excessus areæ $AbNK$ supra aream DET.

Nam cum AK sit ut resistentia, id est, ut $APq+2BAP$; assumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq+2BAP}{Z}$; & (per hujus Lemma 11.) erit ipsius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ+2BA\times PQ}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ\times LO}{Z}$ seu $\frac{BPQ\times BD\,cub.}{2Z\times CK\times AB}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut $ABq+BDq$ existente BET Circulo, (in Fig. Cas. 1. Prop. XIII.) linea AC, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq+BDq}{Z}$, & DPq seu $APq+2BAP+ABq+BDq$ erit $AK\times Z+AC\times Z$ seu $CK\times Z$; ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad $CK\times Z$.

Cas.

Caſ. 2. Sin corpus aſcendit, & gravitas ſit ut $ABq - BDq$, linea AC (Fig. Caſ. 2. Prop. XIII) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & DTq erit ad DPq ut DFq ſeu DBq ad $BPq - BDq$ ſeu $APq + 2BAP + ABq - BDq$, id eſt, ad $AK \times Z + AC \times Z$ ſeu $CK \times Z$. Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Caſ. 3. Et eodem argumento, ſi corpus deſcendit, & propterea gravitas ſit ut $BDq - ABq$, & linea AC (Fig. Caſ. 3. Prop. præced.) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$, erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$: ut ſupra.

Cum igitur areæ illæ ſemper ſint in hac ratione, ſi pro area DTV, qua momentum temporis ſibimet ipſi ſemper æquale exponitur, ſcribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, erit area DPQ, id eſt, $\frac{1}{2} BD \times PQ$ ad $BD \times m$, ut $CK \times Z$ ad BDq. Atque inde fit $PQ \times BD$ *cub.* æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ ſuperius inventum, fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ DET momentum DTV ſeu $BD \times m$, & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea (ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$) ut velocitas AP, id eſt, ut momentum ſpatii quod corpus aſcendendo vel deſcendendo deſcribit. Ideoque differentia arearum & ſpatium illud, proportionalibus momentis creſcentia vel decreſcentia & ſimul incipientia vel ſimul evaneſcentia, ſunt proportionalia. *Q. E. D.*

Corol. Igitur ſi longitudo aliqua V ſumatur in ea ratione ad duplum longitudinis M, quæ oritur applicando aream DET ad BD, quam habet linea DA ad lineam DE; ſpatium quod corpus aſcenſu vel deſcenſu toto in Medio reſiſtente deſcribit, erit ad ſpatium quod in Medio non reſiſtente eodem tempore deſcribere poſſet, ut arearum illarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{4AB}$, ideoque ex dato tempore datur. Nam ſpatium in Medio non reſiſtente eſt in duplicata ratione temporis, ſive ut V^2, & ob datas BD & AB, ut

De Motu Corporum, $\frac{BD \times V^2}{4AB}$. Momentum hujus areæ ſive huic æqualis $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$ eſt ad momentum differentiæ arearum DET & $AbNK$, ut $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$ ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, hoc eſt, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2} BD \times AP$, ſive ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET ad DAP; adeoque ubi areæ DET & DAP quam minimæ ſunt, in ratione æqualitatis. Æqualis igitur eſt area quam minima $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ differentiæ quam minimæ arearum DET & $AbNK$. Unde cum ſpatia in Medio utroque, in principio deſcenſus vel fine aſcenſus ſimul deſcripta accedunt ad æqualitatem, adeoque tunc ſunt ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AbNK$ differentia; ob eorum analoga incrementa neceſſe eſt ut in æqualibus quibuſcunque temporibus ſint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AbNK$ differentia. *Q. E. D.*

SECTIO

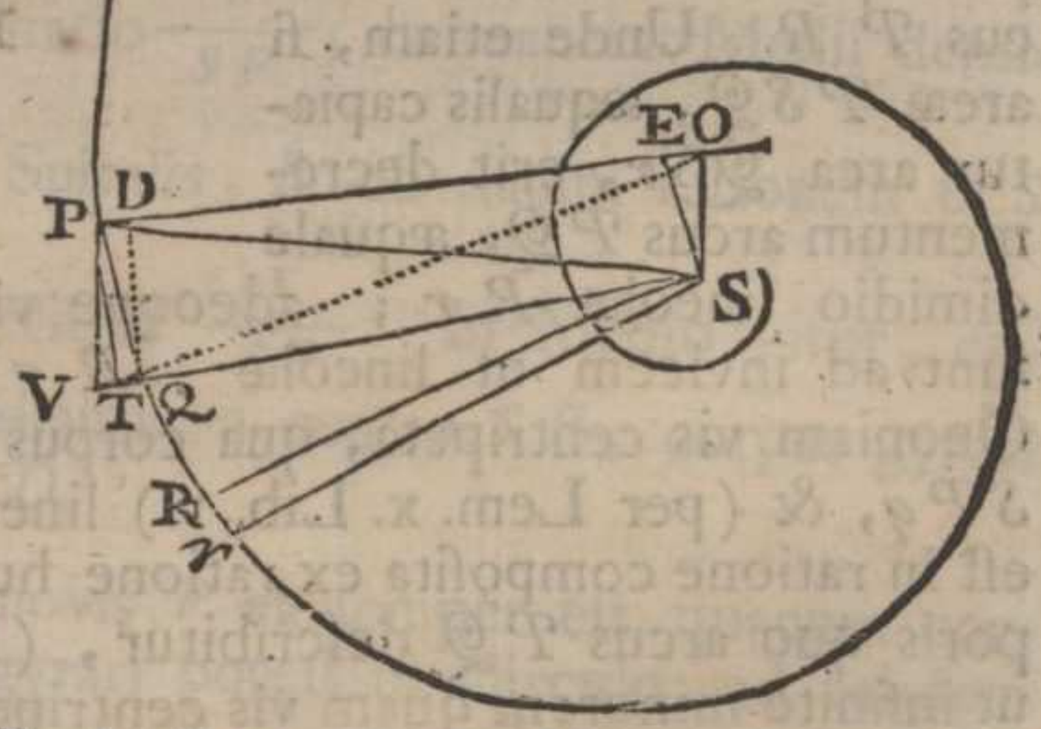
SECTIO IV.

De Corporum Circulari Motu in Mediis reſiſtentibus.

LEMMA III.

Sit PQRr *Spiralis quæ ſecet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *ſecetque radium* SQ *in* T; *& ad Spiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* O, *jungatur* SO. *Dico quod ſi puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ×2PS *ad* PQ *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *OPQ*, *OQR* ſubducantur anguli æquales *SPQ*, *SQR*, & manebunt anguli æquales *OPS*, *OQS*. Ergo Circulus qui tranſit per puncta *O*, *S*, *P* tranſibit etiam per punctum *Q*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic Circulus in loco coitus *PQ* tanget Spiralem, adeoque perpendiculariter ſecabit rectam *OP*. Fiet igitur *OP* diameter Circuli hujus, & angulus *OSP* in ſemicirculo rectus. *Q. E. D.*



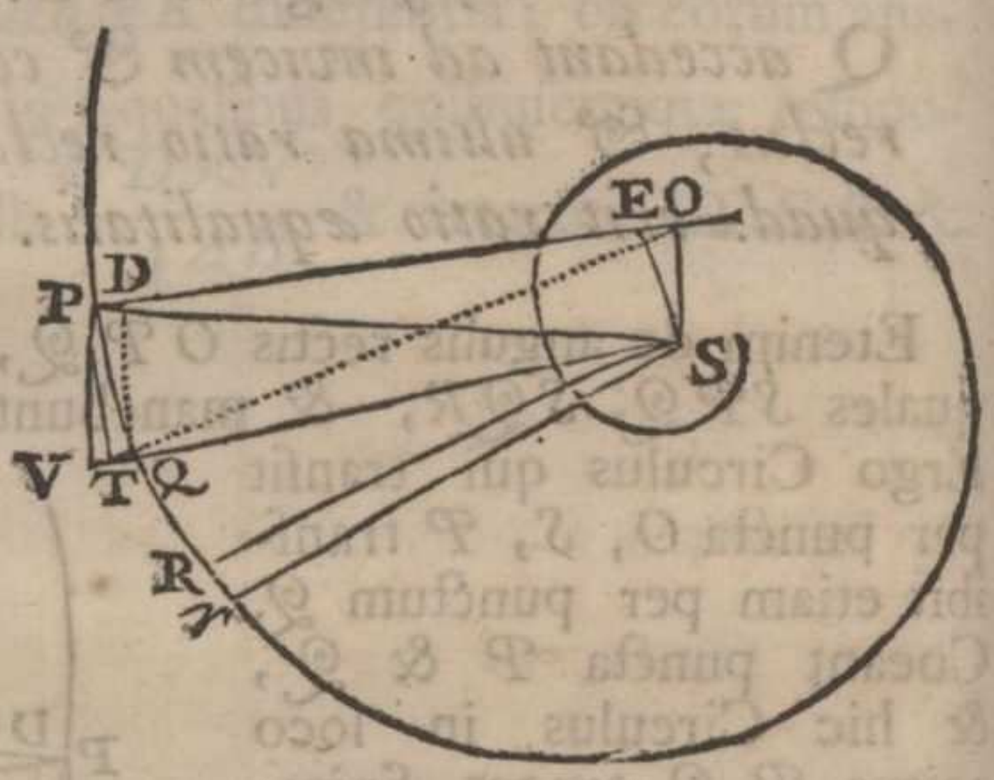
Ad *OP* demittantur perpendicula *QD*, *SE*, & linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi : *TQ* ad *PD* ut *TS* vel *PS* ad *PE*, ſeu 2 *PO* ad 2 *PS*. Item *PD* ad *PQ* ut *PQ* ad 2 *PO*. Et ex æquo perturbate *TQ* ad *PQ* ut *PQ* ad 2 *PS*. Unde fit *PQq* æquale *TQ*×2*PS*. *Q. E. D.*

De Motu Corporum,

PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicata ratione denſitatis : dico quod corpus gyrari poteſt in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Ponantur quæ in ſuperiore Lemmate', & producatur SQ ad V, ut ſit SV æqualis SP. Tempore quovis, in medio reſiſtente, deſcribat corpus arcum quam minimum PQ, & tempore duplo arcum quam minimum PR; & decrementa horum arcuum ex reſiſtentia oriunda, ſive defectus ab arcubus qui in Medio non reſiſtente iiſdem temporibus deſcriberentur, erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Eſt itaque decrementum arcus PQ pars quarta decrementi arcus PR. Unde etiam, ſi areæ PSQ, æqualis capiatur area QSr, erit decrementum arcus PQ, æquale dimidio lineolæ Rr; adeoque vis reſiſtentiæ & vis centripeta ſunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2} Rr$ & TQ quas ſimul generant. Quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P, eſt reciproce ut SPq, & (per Lem. x. Lib. 1.) lineola TQ, quæ vi illa generatur, eſt in ratione compoſita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus PQ deſcribitur, (Nam reſiſtentiam in hoc caſu, ut infinite minorem quam vis centripeta, negligo) erit $TQ \times SPq$ id eſt (per Lemma noviſſimum) $\frac{1}{2} PQq \times SP$, in ratione duplicata temporis, adeoque tempus eſt ut $PQ \times \sqrt{SP}$; & corporis velocitas, qua arcus PQ illo tempore deſcribitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc eſt, in ſubduplicata ratione ipſius SP reciproce. Et ſimili argumento, velocitas qua arcus QR deſcribitur, eſt in ſubduplicata



duplicata ratione ipsius SQ reciproce. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates descriptrices ad invicem, id est, in subduplicata ratione SQ ad SP, sive ut SQ ad $\sqrt{SP \times SQ}$; & ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, est arcus PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. Sumantur proportionalium consequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, seu $\frac{1}{2}VQ$; nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ ad $\frac{1}{2}VQ$ fit æqualitatis. Quoniam decrementum arcus PQ, ex resistentia oriundum, sive hujus duplum Rr, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim; erit resistentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad $\frac{1}{2}VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ sive ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & ob similia triangula PVQ, PSO, fit PQ ad $\frac{1}{2}VQ$, ut OP ad $\frac{1}{2}OS$. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut resistentia, id est, in ratione densitatis Medii in P & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit Medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur Spiralis, & ob datam rationem OS ad OP, densitas Medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In Medio igitur, cujus densitas est reciproce ut distantia a centro SP, corpus gyrari potest in hac Spirali. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea semper est quacum corpus in Medio non resistente gyrari potest in Circulo, ad eandem a centro distantiam SP.

Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia SP, est ut $\frac{OS}{OP}$; sin distantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde Spiralis ad quamlibet Medii densitatem aptari potest.

Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis P, est ad vim centripetam

De Motu Corporum, tam in eodem loco ut $\frac{1}{2} OS$ ad OP. Nam vires illæ ſunt ad invicem ut $\frac{1}{2} Rr$ & TQ ſive ut $\frac{\frac{1}{2}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQq}{SP}$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2} VQ$ & PQ, ſeu $\frac{1}{2} OS$ & OP. Data igitur Spirali datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam, & viceverſa ex data illa proportione datur Spiralis.

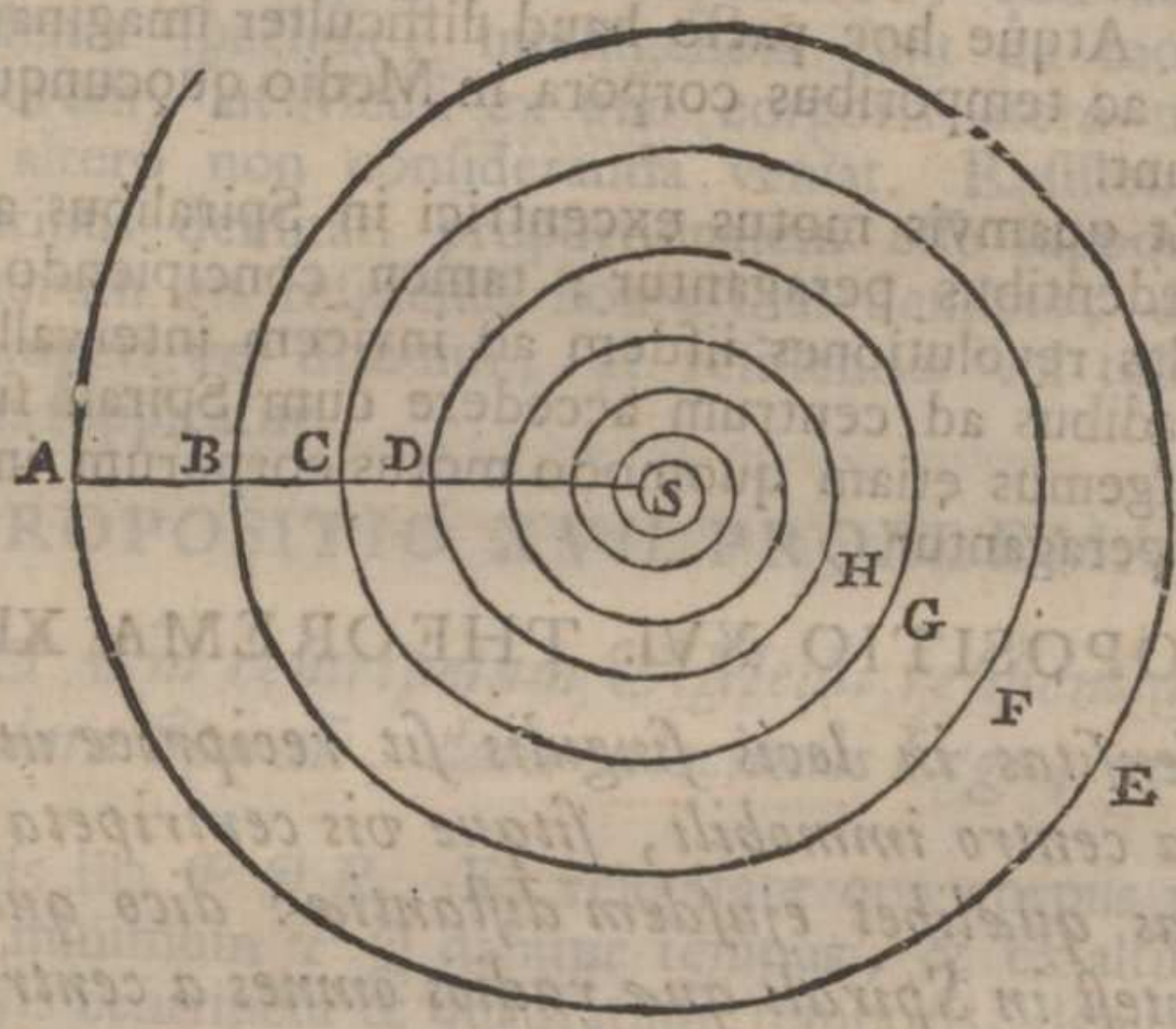
Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac Spirali, niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quam dimidium vis centripetæ. Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ & Spiralis conveniet cum linea recta PS, inque hac recta corpus deſcendet ad centrum, ea cum velocitate quæ ſit ad velocitatem, qua probavimus in ſuperioribus in caſu Parabolæ (Theor. x. Lib. 1,) deſcenſum in Medio non reſiſtente fieri, in ſubduplicata ratione unitatis ad numerum binarium. Et tempora deſcenſus hic erunt reciproce ut velocitates, atque adeo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro diſtantiis velocitas eadem eſt in Spirali PQR atque in recta SP, & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ PS eſt in data ratione, nempe in ratione OP ad OS; tempus deſcenſus in Spirali erit ad tempus deſcenſus in recta SP in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuſcunque datis deſcribantur duo Circuli; & manentibus hiſce Circulis, mutetur utcunque angulus quem Spiralis continet cum radio PS: numerus revolutionum quas corpus intra Circulorum circumferentias, pergendo in Spirali a circumferentia ad circumferentiam, complere poteſt, eſt ut $\frac{PS}{OS}$, ſive ut Tangens anguli illius quem Spiralis continet cum radio PS; tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt, ut Secans anguli ejuſdem, vel etiam reciproce ut Medii denſitas.

Corol. 7. Si corpus, in Medio cujus denſitas eſt reciproce ut diſtantia locorum a centro, revolutionem in curva quacunque AEB circa centrum illud fecerit, & Radium primum AS in eodem angulo ſecuerit in B quo prius in A, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem ſuam primam in A reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum a centro (id eſt, ut AS ad mediam proportionalem inter AS & BS) corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones BFC, CGD &c. facere, & interſectionibus

rationibus distinguet Radium AS in partes AS, BS, CS, DS, &c. continue proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut



perimetri Orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directe, & velocitates in principiis A, B, C, inverse; id est, ut $AS^{\frac{1}{2}}$, $BS^{\frac{1}{2}}$, $CS^{\frac{1}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continue proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$, id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, sive ut $\frac{2}{3}AS$ ad AB quam proxime. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in Mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro S, intervallis continue proportionalibus SA, SB, SC, &c. describe Circulos quotcunque, & statue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his Circulis, in Medio de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in Medio proposito, ut Medii propositi densitas mediocris inter hos Circulos ad Medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proxime: Sed & in eadem quoque ratione esse Secantem anguli quo Spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, secat radium AS, ad Secantem anguli

De Motu Corporum, quo Spiralis nova ſecat radium eundem in Medio propoſito: Atque etiam ut ſunt eorundem angulorum Tangentes ita eſſe numeros revolutionum omnium inter Circulos eoſdem duos quam proxime. Si hæc fiant paſſim inter Circulos binos, continuabitur motus per Circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari poſſimus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiralium illarum ſingulas revolutiones iiſdem ab invicem intervallis diſtare, iiſdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali ſuperius deſcripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujuſmodi Spiralibus peragantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si Medii denſitas in locis ſingulis ſit reciproce ut diſtantia locorum a centro immobili, ſitque vis centripeta reciproce ut dignitas quælibet ejuſdem diſtantiæ: dico quod corpus gyrari poteſt in Spirali quæ radios omnes a centro illo ductos interſecat in angulo dato.

Demonſtratur eadem methodo cum Propoſitione ſuperiore. Nam ſi vis centripeta in P ſit reciproce ut diſtantiæ SP dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index eſt $n+1$; colligetur ut ſupra, quod tempus quo corpus deſcribit arcum quemvis PQ erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, & reſiſtentia in P ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^{n}}$, ſive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^{n} \times SQ}$ adeoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc eſt, ob datum $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$, reciproce ut SP^{n+1}. Et propterea, cum velocitas ſit reciproce ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, denſitas in P erit reciproce ut SP.

Corol. 1. Reſiſtentia eſt ad vim centripetam, ut $\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS$ ad OP.

Corol. 2. Si vis centripeta ſit reciproce ut SP *cub.*, erit $1-\frac{1}{2}n=0$; adeoque reſiſtentia & denſitas Medii nulla erit, ut in Propoſitione nona Libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta ſit reciproce ut dignitas aliqua radii SP cujus index eſt major numero 3, reſiſtentia affirmativa in negativam mutabitur.

Scho-

Scholium.

Cæterum hæc Propoſitio & ſuperiores, quæ ad Media inæqualiter denſa ſpectant, intelligendæ ſunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major denſitas quam ex altero non conſideranda veniat. Reſiſtentiam quoque cæteris paribus denſitati proportionalem eſſe ſuppono. Unde in Mediis quorum vis reſiſtendi non eſt ut denſitas, debet denſitas eo uſque augeri vel diminui, ut reſiſtentiæ vel tollatur exceſſus vel defectus ſuppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IV.

Invenire & vim centripetam & Medii reſiſtentiam qua corpus in data Spirali, data velocitatis Lege, revolvi poteſt.

Sit Spiralis illa PQR. Ex velocitate qua corpus percurrit arcum quam minimum PQ dabitur tempus, & ex altitudine TQ, quæ eſt ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum PSQ & QSR, differentia RSr, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur reſiſtentia ac denſitas Medii.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Data Lege vis centripetæ, invenire Medii denſitatem in locis ſingulis, qua corpus datam Spiralem deſcribet.

Ex vi centripeta invenienda eſt velocitas in locis ſingulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda Medii denſitas: ut in Propoſitione ſuperiore.

Methodum vero tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propoſitione decima, & Lemmate ſecundo; & Lectorem in hujuſmodi perplexis diſquiſitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam ſunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque denſitate & reſiſtentia Mediorum, in quibus motus hactenus expoſiti & his affines peraguntur.

De Motu Corporum,

SECTIO V.

De Denſitate & Compreſſione Fluidorum, deque Hydroſtatica.

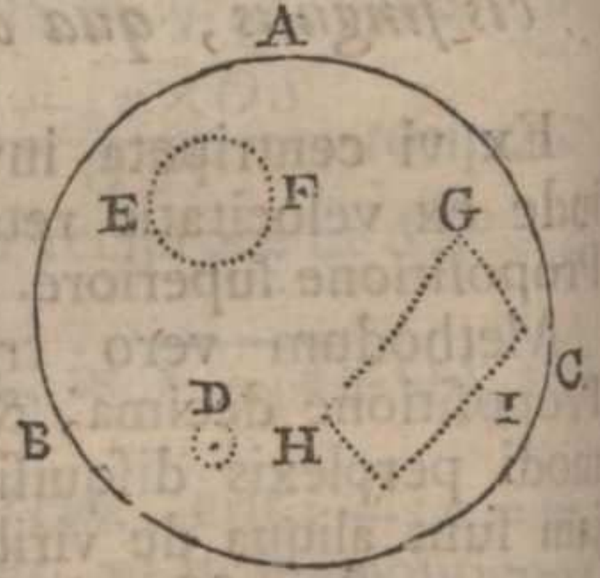
Definitio Fluidi.

Fluidum eſt corpus omne cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile moventur inter ſe.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vaſe quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſita condenſationis, gravitatis & virium omnium centripetarum conſideratione) æqualiter premuntur undique, & abſque omni motu a preſſione illa orto permanent in locis ſuis.

Caſ. 1. In vaſe Sphærico *A B C* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejuſdem pars nulla ex illa preſſione movebitur. Nam ſi pars aliqua *D* moveatur, neceſſe eſt ut omnes hujuſmodi partes, ad eandem a centro diſtantiam undique conſiſtentes, ſimili motu ſimul moveantur; atque hoc adeo quia ſimilis & æqualis eſt omnium preſſio, & motus omnis excluſus ſupponitur, niſi qui a preſſione illa oriatur. Atqui non poſſunt omnes ad centrum propius accedere, niſi fluidum ad centrum condenſetur; contra Hypotheſin. Non poſſunt longius ab eo recedere, niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur; etiam contra Hypotheſin. Non poſſunt ſervata ſua a centro diſtantia moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non poteſt



pars

pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco ſuo movebitur. *Q. E. D.* LIBER SECUNDUS

Caſ. 2. Dico jam quod fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqualiter premuntur undique: ſit enim *E F* pars ſphærica fluidi, & ſi hæc undique non premitur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſque dum ipſa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per Caſum primum, permanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſſionem permanebunt in locis ſuis, per Caſum eundem primum, & additione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis, per definitionem Fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falſo dicebatur quod Sphæra *E F* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Dico præterea quod diverſarum partium ſphæricarum æqualis ſit preſſio. Nam partes ſphæricæ contiguæ ſe mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motus Legem III. Sed &, per Caſum ſecundum, undique premuntur eadem vi. Partes igitur duæ quævis ſphæricæ non contiguæ, quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque, prementur eadem vi. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi poſſunt a partibus Sphæricis in punctis quibuſcunque; & ibi partes illas Sphæricas æqualiter premunt, per Caſum 3. & viciſſim ab illis æqualiter premuntur, per Motus Legem tertiam. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet *G H I* in fluido reliquo tanquam in vaſe claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus ſe mutuo æqualiter premant & quieſcant inter ſe; manifeſtum eſt quod Fluidi cujuſcunque *G H I*, quod undique premitur æqualiter, partes omnes ſe mutuo premunt æqualiter, & quieſcunt inter ſe. *Q. E. D.*

Caſ. 6. Igitur ſi Fluidum illud in vaſe non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter, cedet idem preſſioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

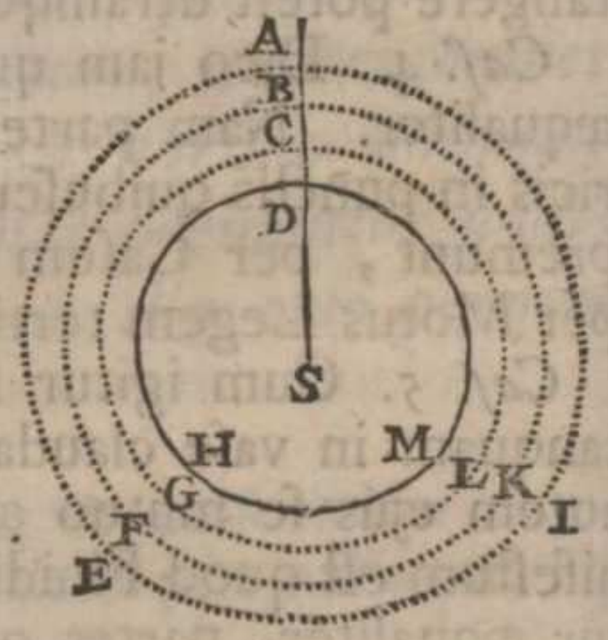
Caſ. 7. Ideoque in vaſe rigido Fluidum non ſuſtinebit preſſionem fortiorem ex uno latere quam ex alio, ſed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum, & ſic preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam Fluidum, quam primum a parte magis preſſa recedere conatur, inhibetur per reſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum; reducetur preſſio undique ad æqualitatem, in momento temporis, abſque motu locali: & ſubinde partes fluidi, per Caſum quintum, ſe mutuo prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. *Q. E. D.*

De Motu Corporum.

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter ſe, per preſſionem fluido ubivis in externa ſuperficie illatam, mutari poſſunt, niſi quatenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intenſius vel remiſſius ſeſe premendo difficilius vel facilius labuntur inter ſe.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

Si Fluidi Sphærici, & in æqualibus a centro diſtantiis homogenei, fundo Sphærico concentrico incumbentis partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus Cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ Fluidi incumbentis.



Sit *D H M* ſuperficies fundi, & *AEI* ſuperficies ſuperior fluidi. Superficiebus ſphæricis innumeris *B F K*, *C G L* diſtinguatur fluidum in Orbes concentricos æqualiter craſſos; & concipe vim gravitatis agere ſolummodo in ſuperficiem ſuperiorem Orbis cujuſque, & æquales eſſe actiones in æquales partes ſuperficierum omnium. Premitur ergo ſuperficies ſuprema *AEI* vi ſimplici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis ſupremi partes & ſuperficies ſecunda *B F K* (per Prop. XIX.) pro menſura ſua æqualiter premuntur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda *B F K* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit preſſionem duplam. Hac preſſione, pro menſura ſua, & inſuper vi propriæ gravitatis, id eſt preſſione tripla, urgetur ſuperficies tertia *C G L*. Et ſimiliter preſſione quadrupla urgetur ſuperficies quarta, quintupla quinta, & ſic deinceps. Preſſio igitur qua ſuperficies unaquæque urgetur, non eſt ut quantitas ſolida fluidi incumbentis, ſed ut numerus Orbium ad uſque ſummitatem fluidi; & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum Orbium: hoc eſt, gravitati ſolidi cujus ultima ratio ad Cylindrum præfinitum (ſi modo Orbium augeatur numerus & minuatur craſſitudo in infinitum, ſic ut actio gravitatis a ſuperficie infima ad ſupremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Suſtinet ergo ſuperficies infima pondus Cylindri præfi-

præfiniti. *Q. E. D.* Et ſimili argumentatione patet Propoſitio, ubi gravitas decreſcit in ratione quavis aſſignata diſtantiæ a centro, ut & ubi Fluidum ſurſum rarius eſt, deorſum denſius. *Q. E. D.* LIBER SECUNDUS.

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, ſed eam ſolummodo ponderis partem ſuſtinet quæ in propoſitione deſcribitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata ſuſtentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive ſuperficies preſſa ſit Horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; ſive fluidum, a ſuperficie preſſa ſurſum continuatum, ſurgat perpendiculariter ſecundum lineam rectam, vel ſerpat oblique per tortas cavitates & canales, eaſque regulares vel maxime irregulares, amplas vel anguſtiſſimas. Hiſce circumſtantiis preſſionem nil mutari colligitur, applicando demonſtrationem Theorematis hujus ad Caſus ſingulos Fluidorum.

Corol. 3. Eadem Demonſtratione colligitur etiam (per Prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex preſſione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter ſe, ſi modo excludatur motus qui ex condenſatione oritur.

Corol. 4. Et propterea ſi aliud ejuſdem gravitatis ſpecificæ corpus, quod ſit condenſationis expers, ſubmergatur in hoc fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si ſphæricum eſt manebit ſphæricum, non obſtante preſſione; ſi quadratum eſt manebit quadratum: idque ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive fluido libere innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magnitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret & indueret formam fluidi; hoc, ſi prius aſcenderet vel deſcenderet vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet vel deſcenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum cauſæ permanent. Atqui, per Caſ. 5. Prop. XIX. jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod ſpecifice gravius eſt quam Fluidum ſibi contiguum ſubſidebit, & quod ſpecifice levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſus, quo corpus alias in æquili-

De Motu Corporum, æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis conſtitutorum duplex eſt Gravitas: altera vera & abſoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas abſoluta eſt vis tota qua corpus deorſum tendit: relativa & vulgaris eſt exceſſus gravitatis quo corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens. Prioris generis Gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis Gravitate corpora non gravitant in locis ſuis, id eſt, inter ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia non eſſent. Quæ in Aere ſunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quam exceſſus verorum ponderum ſupra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ ſunt minus gravia, Aerique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparative levia ſunt, non vere, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in Aqua corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ vel ab ea ſuperatur. Quæ vero nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt, etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in ſenſu vulgi non gravitant in aqua. Nam ſimilis eſt horum Caſuum Demonſtratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonſtrantur, obtinent in aliis quibuſcunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde ſi Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunque vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius: differentia virium eſt vis illa motrix, quam in præcedentibus Propoſitionibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

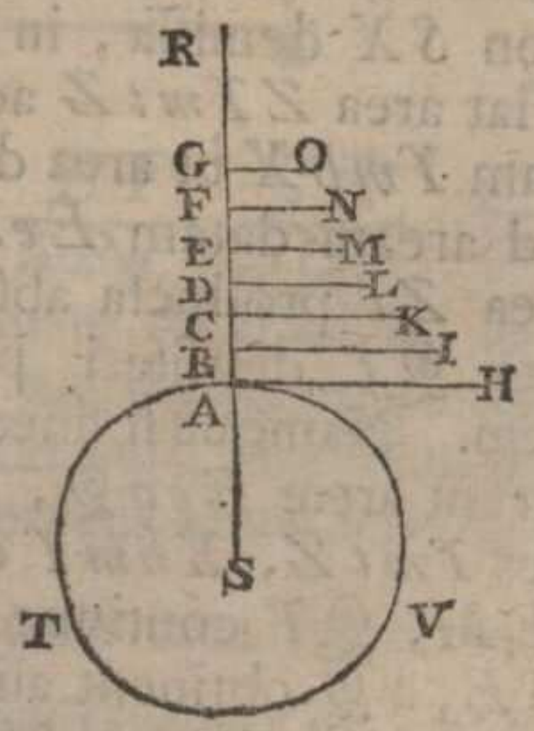
Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora incluſa non mutent eorum Figuras externas, patet inſuper, per Corollarium Prop.

Prop. xix., quod non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe: proindeque, ſi Animalia immergantur, & ſenſatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corpora immerſa, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quatenus hæc corpora a compreſſione condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum Syſtematis fluido comprimente circundati. Syſtematis partes omnes iiſdem agitabuntur motibus, ac ſi in vacuo conſtituerentur, ac ſolam retinerent gravitatem ſuam comparativam, niſi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil reſiſtat, vel ad eaſdem compreſſione conglutinandas requiratur.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

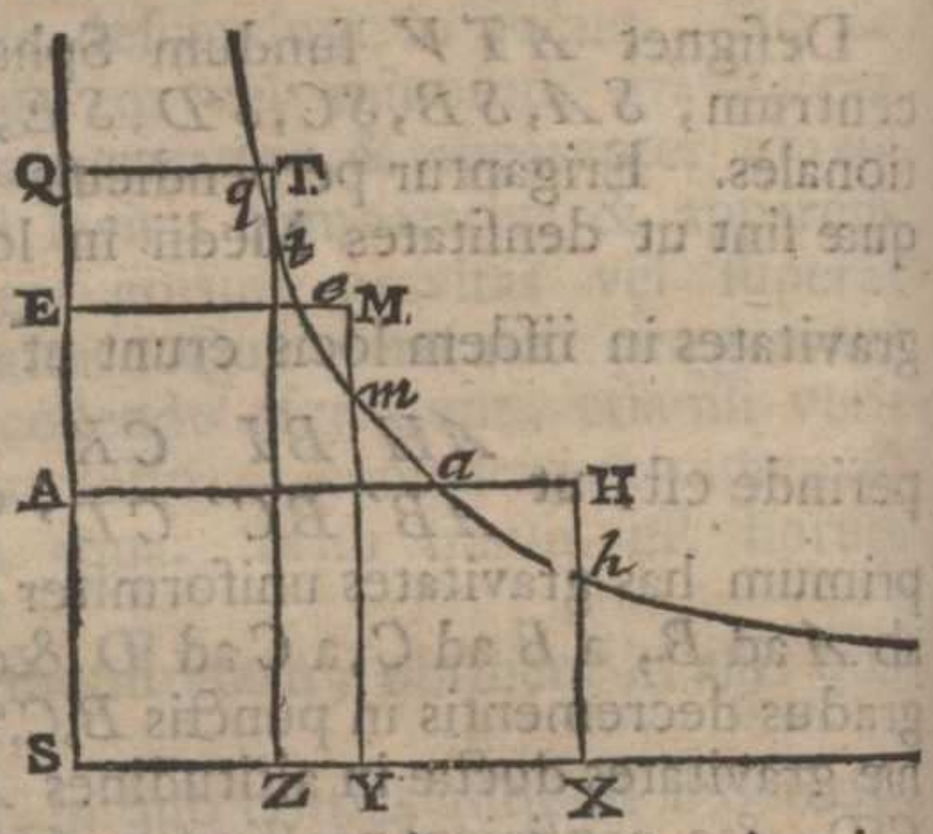
Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta diſtantiis ſuis a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod, ſi diſtantiæ illæ ſumantur continue proportionales, denſitates Fluidi in iiſdem diſtantiis erunt etiam continue proportionales.

Deſignet ATV fundum Sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, SD, SE, &c. diſtantias continue proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, DL, EM, &c. quæ ſint ut denſitates Medii in locis A, B, C, D, E; & ſpecificæ gravitates in iiſdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}, \frac{BI}{BS}, \frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde eſt, ut $\frac{AH}{AB}, \frac{BI}{BC}, \frac{CK}{CD}$, &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, a B ad C, a C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D, &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines AB, BC, CD, &c. conficient preſſiones AH, BI, CK, quibus fundum ATV (juxta Theorema xv.) urgetur. Suſtinet ergo particula A preſſiones omnes AH, BI, CK, DL, pergendo in infinitum; & particula B preſſiones omnes præter primam AH; & particula C omnes præter duas primas AH, BI; & ſic deinceps: adeoque particulæ primæ A denſitas AH eſt ad particulæ ſecundæ B denſitatem



De Motu Corporum, tatem BI ut ſumma omnium $AH+BI+CK+\mathcal{D}L$, in infinitum, ad ſummam omnium $BI+CK+\mathcal{D}L$, &c. Et BI denſitas ſecundæ B, eſt ad CK denſitatem tertiæ C, ut ſumma omnium $BI+CK+\mathcal{D}L$, &c. ad ſummam omnium $CK+\mathcal{D}L$, &c. Sunt igitur ſummæ illæ differentiis ſuis AH, BI, CK, &c. proportionales, atque adeo continue proportionales, per hujus Lem. 1. proindeque differentiæ AH, BI, CK, &c. ſummis proportionales, ſunt etiam continue proportionales. Quare cum denſitates in locis A, B, C, &c. ſint ut AH, BI, CK, &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per ſaltum, & (ex æquo) in diſtantiis SA, SC, SE continue proportionalibus, erunt denſitates AH, CK, EM continue proportionales. Et eodem argumento, in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus SA, SD, SG, denſitates AH, $\mathcal{D}L$, GO erunt continue proportionales. Coeant jam puncta A, B, C, $\mathcal{D}$, E, &c. eo ut progreſſio gravitatum ſpecificarum a fundo A ad ſummitatem Fluidi continua reddatur, & in diſtantiis quibuſvis continue proportionalibus SA, SD, SG, denſitates AH, $\mathcal{D}L$, GO, ſemper exiſtentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi detur denſitas Fluidi in duobus locis, puta A & E, colligi poteſt ejus denſitas in alio quovis loco $\mathcal{Q}$. Centro S, Aſymptotis rectangulis $S\mathcal{Q}$, SX, deſcribatur Hyperbola ſecans perpendicula AH, EM, $\mathcal{Q}T$ in a, e, q, ut & perpendicula HX, $M\Upsilon$, TZ, ad Aſymptoton SX demiſſa, in h, m & t. Fiat area $Z\Upsilon mtZ$ ad aream datam ΥmhX ut area data $Eeq\mathcal{Q}$ ad aream datam $EeaA$; & linea Zt producta abſcindet lineam $\mathcal{Q}t$ denſitati proportionalem. Namque ſi lineæ SA, SE, $S\mathcal{Q}$ ſunt continue proportionales, erunt areæ $Eeq\mathcal{Q}$, $EeaA$ æquales, & inde areæ his proportionales ΥmtZ, $XhmY$ etiam æquales, & lineæ SX, $S\Upsilon$, SZ, id eſt AH, EM, $\mathcal{Q}T$ continue proportionales, ut oportet. Et ſi lineæ SA, SE, $S\mathcal{Q}$ obtinent alium quemvis ordinem in ſerie continue proportionalium, lineæ AH, EM, $\mathcal{Q}T$, ob proportionales areas Hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia ſerie quantitatum continue proportionalium.

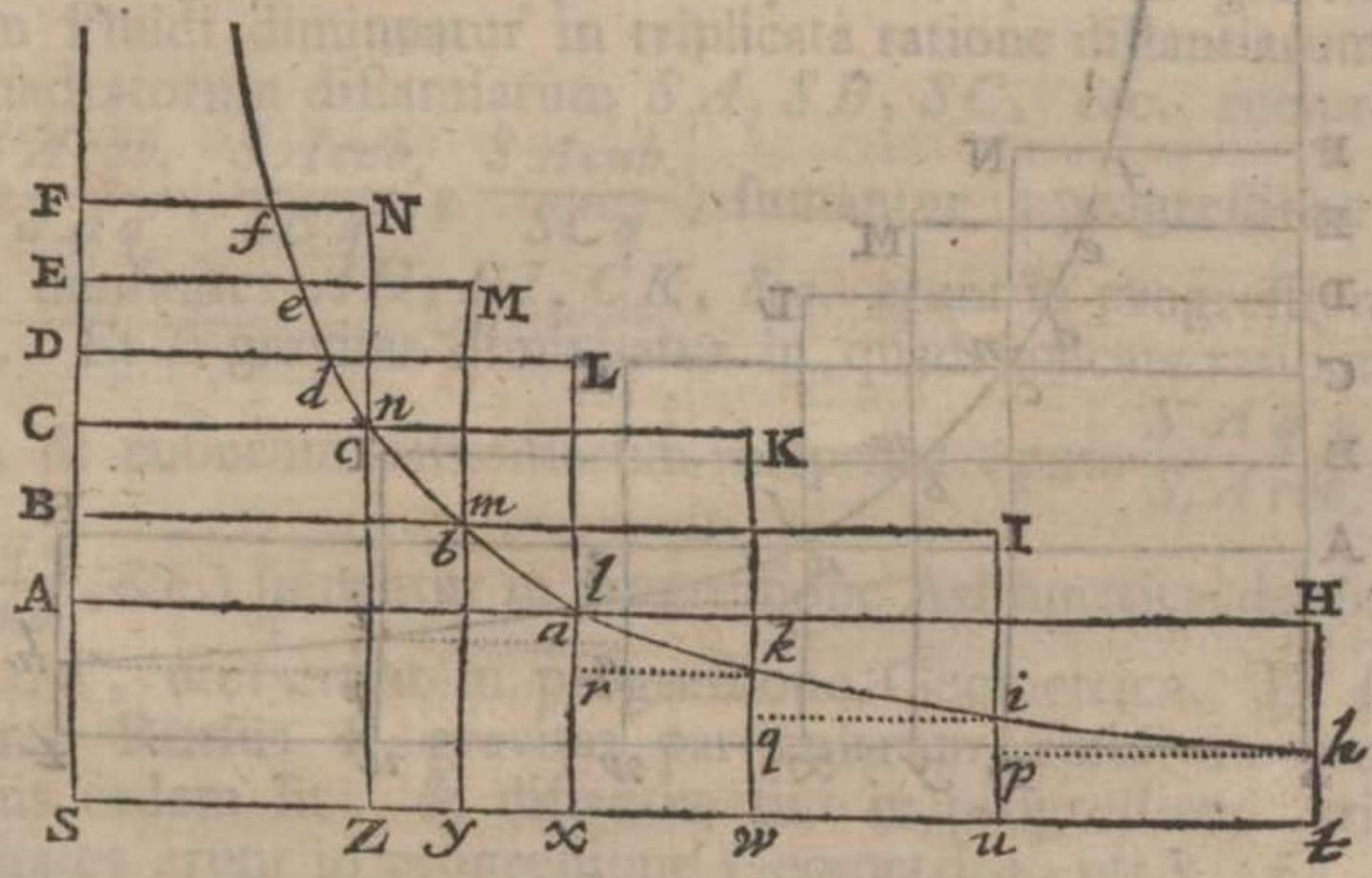


PROPO-

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

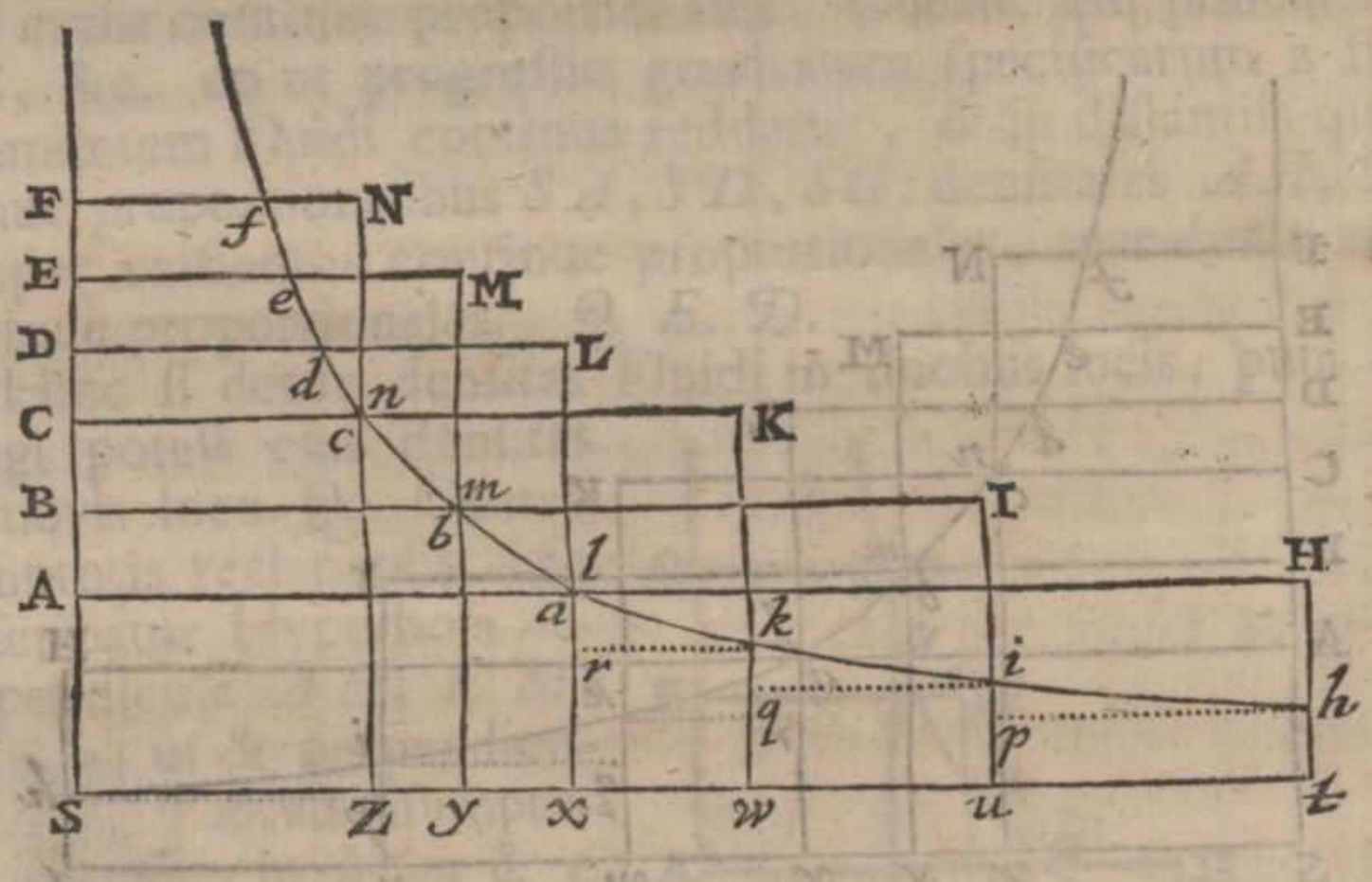
Sit Fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum a centro reciproce proportionali deorſum trahantur: dico quod, ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione Muſica, denſitates Fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione Geometrica.

Deſignet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE diſtantias in progreſſione Geometrica. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, &c. quæ ſint ut Fluidi denſitates in locis A, B, C, D, E, &c. & ipſius



gravitates ſpecificæ in iiſdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, ſecundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE, &c. vel, quod perinde eſt, in diſtantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales conficient exponentes preſſionum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum denſitates ſint ut harum preſſionum ſummæ, differentiæ denſitatum $AH-BI$, $BI-CK$, &c. erunt ut ſummarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c.

De Motu Corporum, Centro S, Asymptotis SA, Sx, describatur Hyperbola quævis, quæ secet perpendicula AH, BI, CK, &c. in a, b, c, &c. ut & perpendicula ad Asymptoton Sx demissa Ht, Iu, Kw in b, i, k; & densitatum differentiæ tu, uw, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. seu tp, uq, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id est, ut Aa, Bb, &c. Est enim, ex natura Hyperbolæ, SA ad AH vel St, ut th ad Aa, adeoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale Aa.



Et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale Bb, &c. Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. continue proportionales, & propterea differentiis suis $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula tp, uq, &c. ut & summis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ summæ rectangulorum $tp + uq$ vel $tp + uq + wr$. Sunto ejusmodi termini quam plurimi; & summa omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit summæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ Hyperbolicæ $zthn$, adeoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa - Ff$. Sumantur

tur jam differentiæ quælibet, puta SA, SD, SF in progreſſione Muſica, & differentiæ $Aa—Dd$, $Dd—Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hiſce proportionales areæ $thlx$, $xlnz$ æquales erunt inter ſe, & denſitates St, Sx, Sz, id eſt, AH, DL, FN, continue proportionales. *Q. E. D.* LIBER SECUNDUS.

Corol. Hinc ſi dentur Fluidi denſitates duæ quævis, puta AH & CK, dabitur area $thkw$ harum differentiæ tw reſpondens; & inde invenietur denſitas FN in altitudine quacunque SF, fumendo aream $thnz$ ad aream illam datam $thkw$ ut eſt differentia $Aa—Ff$ ad differentiam $Aa—Cc$.

Scholium.

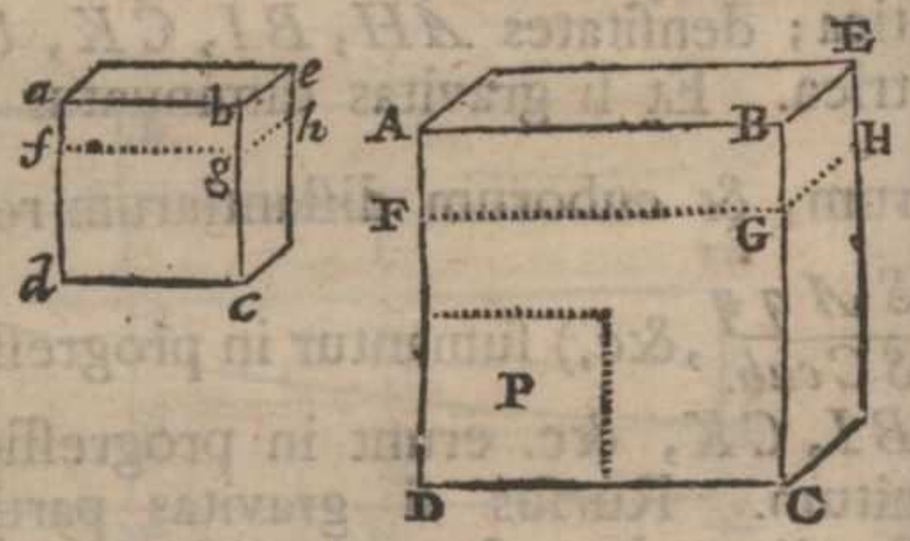
Simili argumentatione probari poteſt, quod ſi gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicata ratione diſtantiarum a centro; & quadratorum diſtantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SAcub.}{SAq}$, $\frac{SAcub.}{SBq}$, $\frac{SAcub.}{SCq}$) ſumantur in progreſſione Arithmetica; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt in progreſſione Geometrica. Et ſi gravitas diminuatur in quadruplicata ratione diſtantiarum, & cuborum diſtantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SAcub.}$, $\frac{SAqq}{SBcub.}$, $\frac{SAqq}{SCcub.}$, &c,) ſumantur in progreſſione Arithmetica; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt in progreſſione Geometrica. Et ſic in infinitum. Rurſus ſi gravitas particularum Fluidi in omnibus diſtantiis eadem ſit, & diſtantiæ ſint in progreſſione Arithmetica, denſitates erunt in progreſſione Geometrica, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas ſit ut diſtantia, & quadrata diſtantiarum ſint in progreſſione Arithmetica, denſitates erunt in progreſſione Geometrica. Et ſic in infinitum. Hæc ita ſe habent ubi Fluidi compreſſione condenſati denſitas eſt ut vis compreſſionis, vel, quod perinde eſt, ſpatium a Fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi poſſunt aliæ condenſationis Leges, ut quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-quadratum denſitatis, ſed triplicata ratio Vis æqualis quadruplicatæ rationi denſitatis. Quo in caſu, ſi gravitas eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro, denſitas erit reciproce ut cubus diſtantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, & ſi gravitas eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ, denſitas erit reciproce in ſeſquiplicata ratione

De Motu Corporum, tione distantiæ. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicata ratione densitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata distantiæ, & densitas erit reciproce ut distantia. Casus omnes percurrere longum esset.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si Fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciproce proportionales distantiis centrorum suorum. Et vice versa, particulæ viribus quæ sunt reciproce proportionales distantiis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt Fluidum Elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.

Includi intelligatur Fluidum in spatio cubico *ACE*, dein compressione redigi in spatium cubicum minus *ace*; & particularum, similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, distantiæ erunt ut cuborum latera *AB*, *ab*; & Medii densitates reciproce ut spatia continentia *AB cub.* & *ab cub.* In latere cubi majoris *ABCD* capiatur quadratum *DP* æquale lateri cubi minoris *db*; & ex Hypothesi, pressio qua quadratum *DP* urget Fluidum inclusum, erit ad pressionem qua latus illud quadratum *db* urget Fluidum inclusum ut Medii densitates ad invicem, hoc est, ut *ab cub.* ad *AB cub.* Sed pressio qua quadratum *DB* urget Fluidum inclusum, est ad pressionem qua quadratum *DP* urget idem Fluidum, ut quadratum *DB*, ad quadratum *DP*, hoc est, ut *AB*, *quad.* ad *ab quad.* Ergo, ex æquo, pressio qua latus *DB* urget Fluidum, est ad pressionem qua latus *db* urget Fluidum, ut *ab* ad *AB*. Planis *FGH*, *fgh*, per media cuborum ductis, distinguatur Fluidum in duas partes, & hæ se mutuo prement iisdem viribus, quibus premuntur a planis *AC*, *ac*, hoc est, in proportione *ab* ad *AB*: adeoque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustinentur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires quas particulæ omnes secundum plana *FGH*, *fgh* exercent in omnes,



nes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum *F G H* in cubo majore, ſunt ad vires quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum *fgh* in cubo minore ut *ab* ad *AB*, hoc eſt, reciproce ut diſtantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.* LIBER SECUNDUS.

Et vice verſa, ſi vires particularum ſingularum ſunt reciproce ut diſtantiæ, id eſt, reciproce ut cuborum latera *AB*, *ab*; ſummæ virium erunt in eadem ratione, & preſſiones laterum *D B*, *d b* ut ſummæ virium; & preſſio quadrati *D P* ad preſſionem lateris *D B* ut *ab quad.* ad *AB quad.* Et, ex æquo, preſſio quadrati *D P* ad preſſionem lateris *db* ut *ab cub.* ad *AB cub.* id eſt, vis compreſſionis ad vim compreſſionis ut denſitas ad denſitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento, ſi particularum vires centrifugæ ſint reciproce in duplicata ratione diſtantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata denſitatum. Si vires centrifugæ ſint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione diſtantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi denſitatum. Et univerſaliter, ſi D ponatur pro diſtantia, & E pro denſitate Fluidi compreſſi, & vires centrifugæ ſint reciproce ut diſtantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index eſt numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index eſt numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero ſunt hæc omnia de particularum Viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum Virtus attractiva terminatur fere in ſui generis corporibus ſibi proximis. Magnetis virtus per interpoſitam laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a Magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugiant alias ſui generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur Fluida de quibus actum eſt in hac Propoſitione. Quod ſi particulæ cujuſque virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condenſationem majoris quantitatis Fluidi. An vero Fluida Elaſtica ex particulis ſe mutuo fugantibus conſtent, Quæſtio Phyſica eſt. Nos proprietatem Fluidorum ex ejuſmodi particulis conſtantium Mathematice demonſtravimus, ut Philoſophis anſam præbeamus Quæſtionem illam tractandi.

SECTIO

De Motu Corporum,

SECTIO VI.

De Motu & Reſiſtentia Corporum Funependulorum.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum a centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oſcillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia dato tempore generare poteſt, eſt ut vis & tempus directe, & materia inverſe. Quo major eſt vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem ſecundam manifeſtum eſt. Jam vero ſi Pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter diſtantibus ſunt ut pondera: ideoque ſi corpora duo oſcillando deſcribant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora deſcribunt ſingulas arcuum partes correſpondentes, ſint ut tempora oſcillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correſpondentibus oſcillationum partibus, ut vires motrices & tota oſcillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: adeoque quantitates materiæ ut vires & oſcillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce ſunt ut tempora, atque adeo tempora directe & velocitates reciproce ſunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ ſunt ut vires motrices & quadrata temporum, id eſt, ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ideoque ſi tempora ſunt æqualia, quantitates materiæ in ſingulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera ſunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum, cæteris paribus, ſint ut longitudines pendulorum; ſi & tempora & quantitates materiæ æqualia ſunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

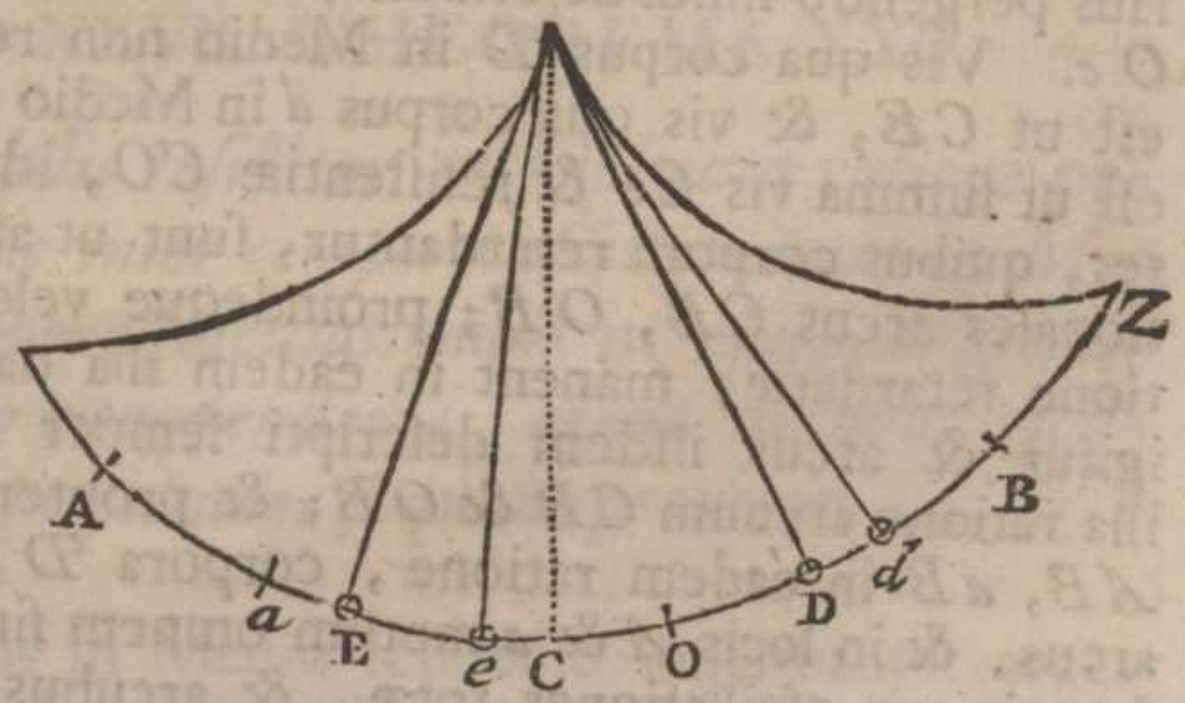
Corol. 5. Et univerſaliter, quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverſe.

Corol. 6. Sed & in Medio non reſiſtente quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverſe. Nam pondus comparativum eſt vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut ſupra explicui; adeoque idem præſtat in tali Medio non reſiſtente atque pondus abſolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter ſe, quoad quantitatem materiæ in ſingulis; tum comparandi pondera ejuſdem corporis in diverſis locis, ad cognoſcendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratiſſimis inveni ſemper quantitatem materiæ in corporibus ſingulis eorum ponderi proportionalem eſſe.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

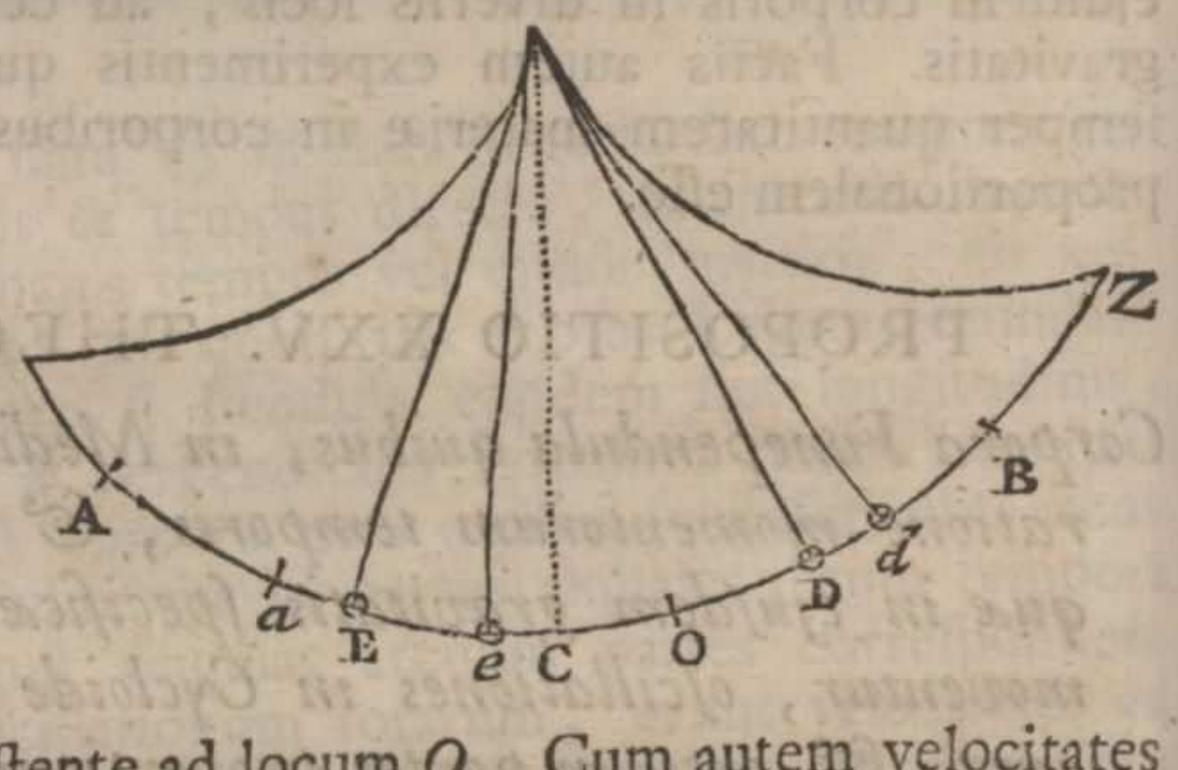
Corpora Funependula quibus, in Medio quovis, reſiſtitur in ratione momentorum temporis, & corpora Funependula quæ in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente moventur, oſcillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales ſimul deſcribunt.



Sit *A B* Cycloidis arcus, quem corpus *D* tempore quovis in Medio non reſiſtente oſcillando deſcribit. Biſecetur idem in *C*, ita ut *C* ſit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis *D* vel *d* vel *E* ut longitudo arcus *C D* vel *C d* vel *C E*. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum reſiſtentia ſit ut momentum temporis, adeoque detur, exponatur

De Motu Corporum,

tur eadem per datam arcus Cycloidis partem CO, & ſumatur arcus Od in ratione ad arcum CD quam habet arcus OB ad arcum CB: & vis qua corpus in d urgetur in Medio reſiſtente, cum ſit exceſſus vis Cd ſupra reſiſtentiam CO, exponetur per arcum Od, adeoque erit ad vim qua corpus D urgetur in Medio non reſiſtente, in loco D, ut arcus Od ad arcum CD; & propterea etiam in loco B ut arcus OB ad arcum CB. Proinde ſi corpora duo, D, d exeant de loco B, & his viribus urgeantur: cum vires ſub initio ſint ut arcus CB & OB, erunt velocitates primæ & arcus primo deſcripti in eadem ratione. Sunto arcus illi BD & Bd, & arcus reliqui CD, Od erunt in eadem ratione. Proinde vires, ipſis CD, Od proportionales, manebunt in eadem ratione ac ſub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione ſimul deſcribere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui CD, Od ſemper erunt ut arcus toti CB, OB, & propterea arcus illi reliqui ſimul deſcribentur. Quare corpora duo D, d ſimul pervenient ad loca C & O, alterum quidem in Medio non reſiſtente ad locum C, & alterum in Medio reſiſtente ad locum O. Cum autem velocitates in C & O ſint ut arcus CB, OB; erunt arcus quos corpora ulterius pergendo ſimul deſcribunt, in eadem ratione. Sunto illi CE & Oe. Vis qua corpus D in Medio non reſiſtente retardatur in E eſt ut CE, & vis qua corpus d in Medio reſiſtente retardatur in e eſt ut ſumma vis Ce & reſiſtentiæ CO, id eſt ut Oe; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus CE, Oe proportionales arcus CB, OB; proindeque velocitates, in data illa ratione retardatæ, manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iiſdem deſcripti ſemper ſunt ad invicem in data illa ratione arcuum CB & OB; & propterea ſi ſumantur arcus toti AB, aB in eadem ratione, corpora D, d ſimul deſcribent hos arcus, & in locis A & a motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis BA, Ba proportionales ſunt arcuum partes quælibet BD, Bd vel BE, Be quæ ſimul deſcribuntur. *Q. E. D.*



Corol.

Corol. Igitur motus velociſſimus in Medio reſiſtente non incidit in punctum infimum *C*, ſed reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus deſcriptus *aB* biſecatur. Et corpus ſubinde pergendo ad *a*, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſcenſu ſuo a *B* ad *O*.

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

Corporum Funependulorum quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in Cycloide ſunt Iſochronæ.

Nam ſi corpora duo, a centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut arcus toti: reſiſtentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eadem arcuum ratione, cumque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cum ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si Corporibus Funependulis reſiſtitur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oſcillationum in Medio reſiſtente ac tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente, erunt arcubus oſcillando deſcriptis proportionales, quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in Medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales, A, B; & reſiſtentia corporis in arcu A, erit ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcus B, in duplicata ratione velocitatum, id eſt, ut AA ad BB, quam proxime. Si reſi-

De Motu Corporum, ſtentia in arcu B eſſet ad reſiſtentiam in arcu A ut AB ad AA; tempora in arcubus A & B forent æqualia, per Propoſitionem ſuperiorem. Ideoque reſiſtentia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit exceſſum temporis in arcu A ſupra tempus in Medio non reſiſtente: & reſiſtentia BB efficit exceſſum temporis in arcu B ſupra tempus in Medio non reſiſtente. Sunt autem exceſſus illi ut vires efficientes AB & BB quam proxime, id eſt, ut arcus A & B. *Q. E. D.*

Corol 1. Hinc ex oſcillationum temporibus, in Medio reſiſtente, in arcubus inæqualibus factarum, cognoſci poſſunt tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente. Nam differentia temporum erit ad exceſſum temporis in arcu minore ſupra tempus in Medio non reſiſtente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oſcillationes breviores ſunt magis Iſochronæ, & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in Medio non reſiſtente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora ſunt paulo majora, propterea quod reſiſtentia in deſcenſu corporis qua tempus producitur, major ſit pro ratione longitudinis in deſcenſu deſcriptæ, quam reſiſtentia in aſcenſu ſubſequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oſcillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corporibus tardeſcentibus paulo minus reſiſtitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediuntur: id adeo quia Medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore caſu magis agitatur; in poſteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conſpirat. Pendulis igitur in deſcenſu magis reſiſtit, in aſcenſu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque cauſa tempus producitur.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

Si Corpori Funependulo in Cycloide oſcillanti reſiſtitur in ratione momentorum temporis, erit ejus reſiſtentia ad vim gravitatis ut exceſſus arcus deſcenſu toto deſcripti ſupra arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

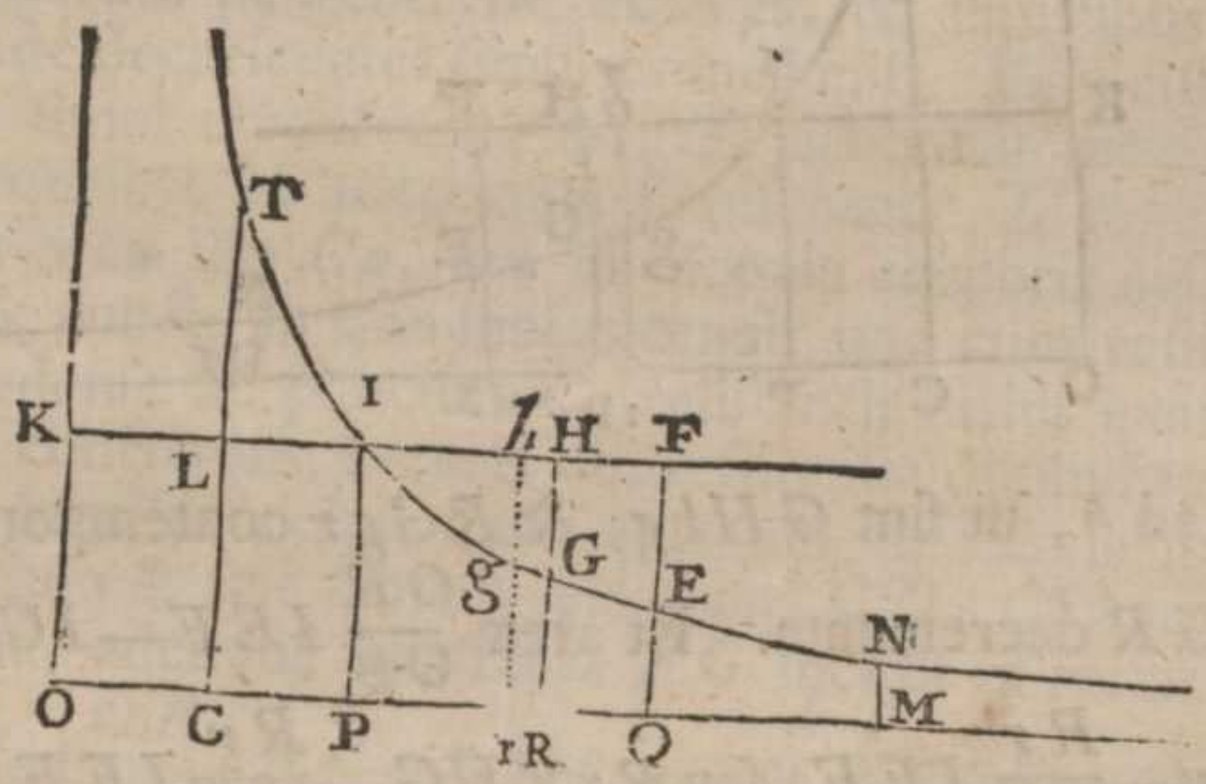
Deſignet *BC* arcum deſcenſu deſcriptum, *Ca* arcum aſcenſu deſcriptum, & *Aa* differentiam arcuum: & ſtantibus quæ in Propoſitione

ſitione XXV. conſtructa & demonſtrata ſunt, erit vis qua corpus oſcillans urgetur in loco quovis $\mathcal{D}$, ad vim reſiſtentiæ ut arcus CD ad arcum CO, qui ſemiſſis eſt differentiæ illius Aa. Ideoque vis qua corpus oſcillans urgetur in Cycloidis principio ſeu puncto altiſſimo, id eſt, vis gravitatis, erit ad reſiſtentiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud ſupremum & punctum infimum C ad arcum CO; id eſt (ſi arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, ſeu dupla penduli longitudo, ad arcum Aa. $Q.\ E.\ D.$

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Poſito quod Corpori in Cycloide oſcillanti reſiſtitur in duplicata ratione velocitatis: invenire reſiſtentiam in locis ſingulis.

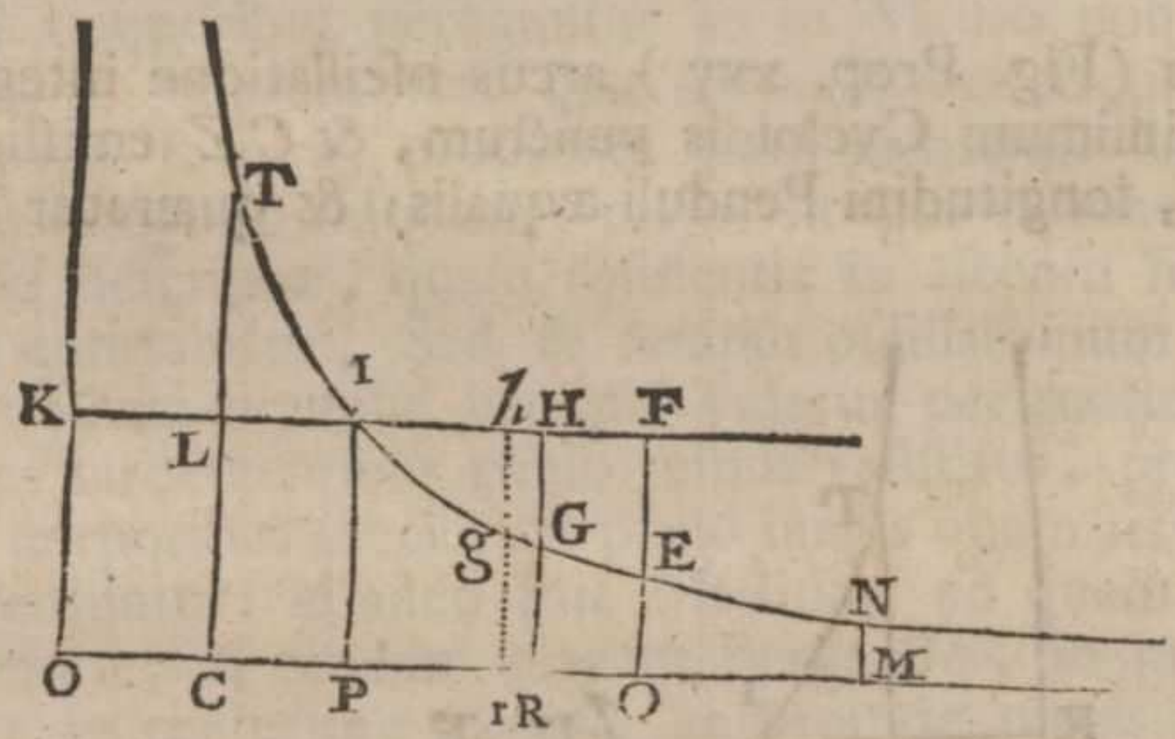
Sit Ba (Fig. Prop. XXV.) arcus oſcillatione integra deſcriptus, ſitque C infimum Cycloidis punctum, & CZ ſemiſſis arcus Cycloidis totius, longitudini Penduli æqualis; & quæratur reſiſtentia cor-



poris in loco quovis $\mathcal{D}$. Secetur recta infinita OQ in punctis O, C, P, Q, ea lege ut (ſi erigantur perpendicula OK, CT, PI, QE, centroque O & Aſymptotis OK, OQ deſcribatur Hyperbola $TIGE$ ſecans perpendicula CT, PI, QE in T, I & E, & per punctum I agatur KF parallela Aſymptoto OQ occurrens Aſymptoto OK in K, & perpendiculis CT & QE in L & F) fuerit area Hyperbolica $PIEQ$ ad aream Hyperbolicam $PITC$ ut arcus BC deſcenſu corporis deſcriptus ad arcum Ca aſcenſu deſcriptum, & area IEF ad

De Motu Corporum, aream ILT ut OQ ad OC. Dein perpendiculo MN abscindatur area Hyperbolica $PINM$ quæ sit ad aream Hyperbolicam $PIEQ$ ut arcus CZ ad arcum BC descensu descriptum. Et si perpendiculo RG abscindatur area Hyperbolica $PIGR$, quæ sit ad aream $PIEQ$ ut arcus quilibet CD ad arcum BC descensu toto descriptum: erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ ad aream $PIENM$.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis Z, B, D, a urgetur, sint ut arcus CZ, CB, CD, Ca, & arcus illi sint ut areæ $PINM$, $PIEQ$, $PIGR$, $PITC$; exponantur tum arcus tum vires per has areas respective. Sit insuper Dd spatium quam minimum a corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam $RGgr$ parallelis RG, rg comprehensam; & pro-



ducatur rg ad h, ut sint $GHhg$, & $RGgr$ contemporanea arearum IGH, $PIGR$ decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ incrementum $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, seu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ seu $Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$ ad RG; adeoque ut $OR \times HG - \frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR \times GR$ seu $OP \times PI$, hoc est (ob æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, $PIHR$ & $PIGR + IGH$) ut $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OPIK$. Igitur si area $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$

dicatur

dicatur Y, atque areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ detur, erit incrementum areæ Y ut $PIGR - Y$. LIBER SECUNDUS.

Quod ſi V deſignet vim a gravitate oriundam, arcui deſcribendo CD proportionalem, qua corpus urgetur in D: & R pro reſiſtentia ponatur: erit $V - R$ vis tota qua corpus urgetur in D. Eſt itaque incrementum velocitatis ut $V - R$ & particula illa temporis in qua factum eſt conjunctim: Sed & velocitas ipſa eſt ut incrementum contemporaneum ſpatii deſcripti directe & particula eadem temporis inverſe. Unde, cum reſiſtentia (per Hypotheſin) ſit ut quadratum velocitatis, incrementum reſiſtentiæ (per Lem. II.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id eſt, ut momentum ſpatii & $V - R$ conjunctim; atque adeo, ſi momentum ſpatii detur, ut $V - R$; id eſt, ſi pro vi V ſcribatur ejus exponens $PIGR$, & reſiſtentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut $PIGR - Z$.

Igitur area $PIGR$ per datorum momentorum ſubductionem uniformiter decreſcente, creſcunt area Y in ratione $PIGR - Y$, & area Z in ratione $PIGR - Z$. Et propterea ſi areæ Y & Z ſimul incipiant & ſub initio æquales ſint, hæ per additionem æqualium momentorum pergent eſſe æquales, & æqualibus itidem momentis ſubinde decreſcentes ſimul evaneſcent. Et viciſſim, ſi ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, æqualia habebunt momenta & ſemper erunt æquales: id adeo quia ſi reſiſtentia Z augeatur, velocitas una cum arcu illo Ca, qui in aſcenſu corporis deſcribitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum reſiſtentia ceſſat propius accedente ad punctum C, reſiſtentia citius evaneſcet quam area Y. Et contrarium eveniet ubi reſiſtentia diminuitur.

Jam vero area Z incipit deſinitque ubi reſiſtentia nulla eſt, hoc eſt, in principio & fine motus, ubi arcus CD, CD arcubus CB & Ca æquantur, adeoque ubi recta RG incidit in rectas QE & CT. Et area Y ſeu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incipit deſinitque ubi nulla eſt, adeoque ubi $\frac{OR}{OQ} IEF$ & IGH æqualia ſunt: hoc eſt (per conſtructionem) ubi recta RG incidit in rectas QE & CT. Proindeque areæ illæ ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, & propterea ſemper ſunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ æqualis eſt areæ Z, per quam reſiſtentia exponitur, & propterea eſt ad aream $PINM$ per quam gravitas exponitur, ut reſiſtentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol.

De Motu Corporum,

Corol. 1. Eſt igitur reſiſtentia in loco infimo *C* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}IEF$ ad aream $PINM$.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area $PIHR$ eſt ad aream IEF ut OR ad OQ. Eo enim in caſu momentum ejus (nimirum $PIGR$—Y) evadit nullum.

Corol. 3. Hinc etiam innoteſcit velocitas in locis ſingulis: quippe quæ eſt in ſubduplicata ratione reſiſtentiæ, & ipſo motus initio æquatur velocitati corporis in eadem Cycloide abſque omni reſiſtentia oſcillantis.

Cæterum ob difficilem calculum quo reſiſtentia & velocitas per hanc Propoſitionem inveniendæ ſunt, viſum eſt Propoſitionem ſequentem ſubjungere, quæ & generalior ſit & ad uſus Philoſophicos abunde ſatis accurata.

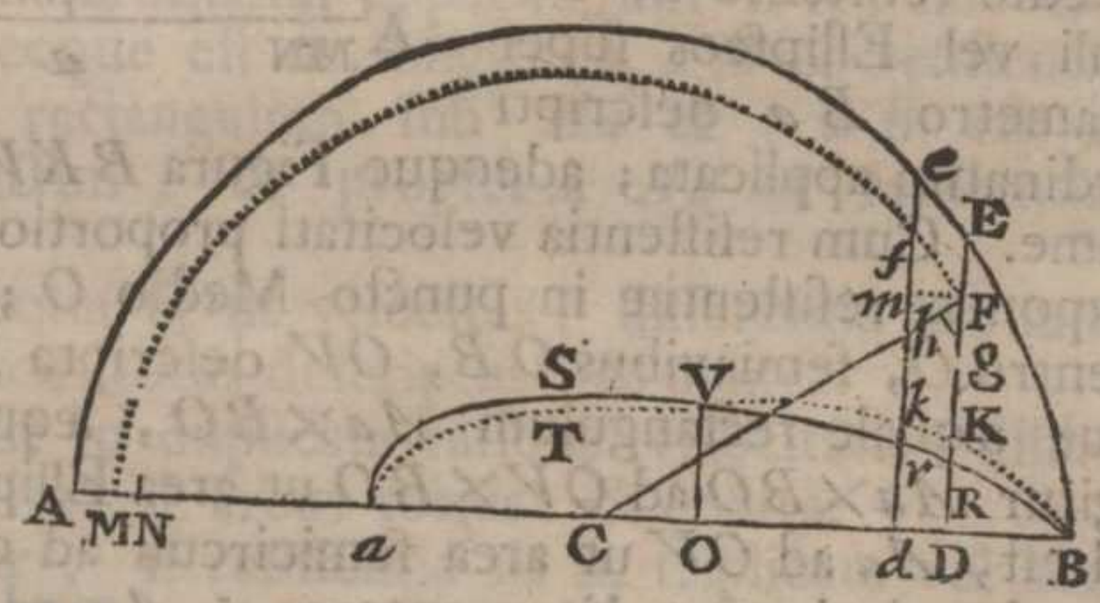
PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta aB *æqualis ſit Cycloidis arcui quem corpus oſcillando deſcribit, & ad ſingula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ ſint ad longitudinem Penduli ut reſiſtentia corporis in arcus punctis correſpondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum deſcenſu toto deſcriptum, & arcum aſcenſu toto ſubſequente deſcriptum, ducta in arcuum eorundem ſemiſummam, æqualis erit areæ* BKaB *a perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.*

Exponatur enim tum Cycloidis arcus, oſcillatione integra deſcriptus, per rectam illam ſibi æqualem *aB*, tum arcus qui deſcriberetur in vacuo per longitudinem *AB*. Biſecetur *AB* in *C*, & punctum *C* repræſentabit infimum Cycloidis punctum, & erit *CD* ut vis a gravitate oriunda, qua corpus in *D* ſecundum tangentem Cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli quam habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem *CD*, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & ſi in *DE* capiatur *DK* in ea ratione ad longitudinem

penduli

penduli quam habet reſiſtentia ad gravitatem, erit $\mathcal{D}K$ exponens reſiſtentiæ. Centro C & intervallo CA vel CB conſtruatur Semicirculus $BEeA$. Deſcribat autem corpus tempore quam minimo ſpatium $\mathcal{D}d$, & erectis perpendiculis $\mathcal{D}E$, de circumferentiæ occurrentibus in E & e, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, deſcendendo a puncto B, acquireret in locis $\mathcal{D}$ & d. Patet hoc per Prop. LII. Lib. I. Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa $\mathcal{D}E$, de; ſitque $\mathcal{D}F$ velocitas quam acquirit in $\mathcal{D}$ cadendo de B in Medio reſiſtente. Et ſi centro C & intervallo CF deſcribatur Circulus FfM occurrens rectis de & AB in f & M, erit M locus ad quem deinceps abſque ulteriore reſiſtentia aſcenderet, & df velocitas quam acquireret in d. Unde etiam ſi Fg deſignet velocitatis momentum quod corpus $\mathcal{D}$, deſcribendo ſpatium quam minimum $\mathcal{D}d$, ex reſiſtentia Medii amittit; & ſumatur CN æqualis Cg: erit N locus ad quem corpus deinceps abſque ulteriore reſiſtentia aſcenderet, & MN erit decrementum aſcenſus ex velocitatis illius amiſſione oriundum. Ad df demittatur perpendiculum Fm, & velocitatis $\mathcal{D}F$ decrementum Fg a reſiſtentia $\mathcal{D}K$ genitum, erit ad velocitatis ejuſdem incrementum fm a vi $C\mathcal{D}$ genitum, ut vis generans $\mathcal{D}K$ ad vim generantem $C\mathcal{D}$. Sed & ob ſimilia triangula Fmf, Fhg, $F\mathcal{D}C$, eſt fm ad Fm ſeu $\mathcal{D}d$, ut $C\mathcal{D}$ ad $\mathcal{D}F$; & ex æquo Fg ad $\mathcal{D}d$ ut $\mathcal{D}K$ ad $\mathcal{D}F$. Item Fh ad Fg ut $\mathcal{D}F$ ad CF; & ex æquo perturbate, Fh ſeu MN ad $\mathcal{D}d$ ut $\mathcal{D}K$ ad CF ſeu CM; ideoque ſumma omnium $MN \times CM$ æqualis erit ſummæ omnium $\mathcal{D}d \times \mathcal{D}K$. Ad punctum mobile $\mathcal{M}$ erigi ſemper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ CM, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem Aa; & trapezium ex illo motu deſcriptum ſive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2}aB$ æquabitur ſummæ omnium $MN \times CM$, adeoque ſummæ omnium $\mathcal{D}d \times \mathcal{D}K$, id eſt, areæ $BKkVTa$. Q. E. D.

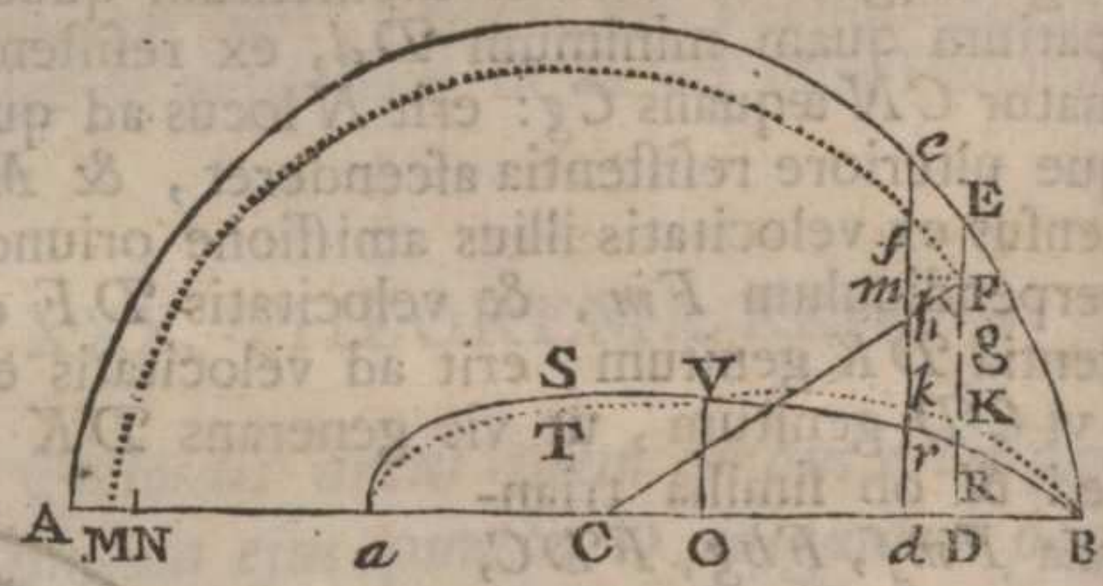


Corol. Hinc ex lege reſiſtentiæ & arcuum Ca, CB differentia Aa, colligi poteſt proportio reſiſtentiæ ad gravitatem quam proxime.

De Motu Corproum

Nam ſi uniformis ſit reſiſtentia $\mathcal{D}K$, Figura $aBKkT$ rectangulum erit ſub Ba & $\mathcal{D}K$; & inde rectangulum ſub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa erit æquale rectangulo ſub Ba & $\mathcal{D}K$, & $\mathcal{D}K$ æqualis erit $\frac{1}{2}Aa$. Quare cum $\mathcal{D}K$ ſit exponens reſiſtentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}Aa$ ad longitudinem Penduli; omnino ut in Prop. XXVIII. demonſtratum eſt.

Si reſiſtentia ſit ut velocitas, Figura $aBKkT$ Ellipſis erit quam proxime. Nam ſi corpus, in Medio non reſiſtente, oſcillatione integra deſcriberet longitudinem BA, velocitas in loco quovis $\mathcal{D}$ foret ut Circuli diametro AB deſcripti ordinatim applicata $\mathcal{D}E$. Proinde cum Ba in Medio reſiſtente, & BA in Medio non reſiſtente, æqualibus circiter temporibus deſcribantur; adeoque velocitates in ſingulis ipſius Ba punctis, ſint quam proxime ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis BA, ut eſt Ba ad BA; erit velocitas $\mathcal{D}K$ in Medio reſiſtente ut Circuli vel Ellipſeos ſuper diametro Ba deſcripti ordinatim applicata; adeoque Figura $BKVTa$ Ellipſis, quam proxime. Cum reſiſtentia velocitati proportionalis ſupponatur, ſit OV exponens reſiſtentiæ in puncto Medio O; & Ellipſis $aBRVS$, centro O, ſemiaxibus OB, OV deſcripta, Figuram $aBKVT$, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproxime. Eſt igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area Ellipſeos hujus ad $OV \times BO$: id eſt, Aa ad OV ut area ſemicirculi ad quadratum radii, ſive ut 11 ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{11}Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ejuſdem gravitatem.



Quod ſi reſiſtentia $\mathcal{D}K$ ſit in duplicata ratione velocitatis, Figura $BKVTa$ Parabola erit verticem habens V & axem OV, ideoque æqualis erit rectangulo ſub $\frac{2}{3}Ba$ & OV quam proxime. Eſt igitur rectangulum ſub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa æquale rectangulo ſub $\frac{2}{3}Ba$ & OV, adeoque OV æqualis $\frac{3}{4}Aa$: & propterea corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ipſius gravitatem ut $\frac{3}{4}Aa$ ad longitudinem Penduli.

Atque has concluſiones in rebus practicis abunde ſatis accuratas eſſe cenſeo. Nam cum Ellipſis vel Parabola $BRVSa$ congruat cum

cum Figura *BKVTa* in puncto medio *V*, hæc si ad partem alter- utram *BRV* vel *VSa* excedit Figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & sic eidem æquabitur proxime. LIBER SECUNDUS.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si Corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per resistentiam Medii, adeoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia retardans. In superiore Propositione rectangulum sub recta $\frac{1}{2}$ *aB* & arcuum illorum *CB*, *Ca* differentia *Aa*, æqualis erat areæ *BKT*. Et area illa, si maneat longitudo *aB*, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum *DK*; hoc est, in ratione resistentiæ, adeoque est ut longitudo *aB* & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub *Aa* & $\frac{1}{2}$ *aB* est ut *aB* & resistentia conjunctim, & propterea *Aa* ut resistentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius: & contra.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius: & contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata: & contra. Eadem erit lex & ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque si, pendulo inæquales arcus successive describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcus descripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

De Motu Corporum,

Scholium Generale.

Ex his Propoſitionibus, per oſcillationes Pendulorum in Mediis quibuſcunque, invenire licet reſiſtentiam Mediorum. Aeris vero reſiſtentiam inveſtigavi per Experimenta ſequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{12}$, diametro digitorum *Londinenſium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco ſatis firmo ſuſpendi, ita ut inter uncum & centrum oſcillationis Globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro ſuſpenſionis diſtans; & e regione puncti illius collocavi Regulam in digitos diſtinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a Pendulo deſcriptas. Deinde numeravi oſcillationes quibus Globus octavam motus ſui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totaque oſcillatione prima, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſita, arcum digitorum fere quatuor: idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motus ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 121, ita ut aſcenſu ultimo deſcriberet arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, reſpective. Igitur differentia inter arcus deſcenſu primo & aſcenſu ultimo deſcriptos, erat in caſu primo, ſecundo, tertio, quarto, quinto, ſexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 reſpective. Dividantur eæ differentiæ per numerum oſcillationum in caſu unoquoque, & in oſcillatione una mediocri, qua arcus digitorum $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 deſcriptus fuit, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum, erit $\frac{1}{656}, \frac{1}{242}, \frac{1}{69}, \frac{4}{71}, \frac{8}{37}, \frac{24}{29}$ partes digiti reſpective. Hæ autem in majoribus oſcillationibus ſunt in duplicata ratione arcuum deſcriptorum quam proxime, in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione: & propterea (per Corol. 2. Prop. XXXI Libri hujus) reſiſtentia Globi, ubi celerius movetur, eſt in duplicata ratione velocitatis quam proxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione.

Deſignet

BIBLIOTECA PÚBLICA E ARQUIVO DISTRITAL DE ÉVORA

Defignet jam V velocitatem maximam in oſcillatione quavis, ſintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum ſit $AV+BV^{\frac{1}{2}}+CV^{2}$. Cum velocitates maximæ ſint in Cycloide ut ſemiſſes arcuum oſcillando deſcriptorum, in Circulo vero ut ſemiſſium arcuum illorum chordæ, adeoque paribus arcubus majores ſint in Cycloide quam in Circulo, in ratione ſemiſſium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in Circulo ſint majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciproca; patet arcuum differentias (quæ ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim) eaſdem fore, quamproxime, in utraque Curva: deberent enim differentiæ illæ in Cycloide augeri, una cum reſiſtentia, in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa ſimplici auctam; & diminui, una cum quadrato temporis, in eadem duplicata ratione. Itaque ut reductio fiat ad Cycloidem, eædem ſumendæ ſunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in Circulo obſervatæ, velocitates vero maximæ ponendæ ſunt arcubus dimidiatis vel integris, hoc eſt, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in caſu ſecundo, quarto & ſexto numeros 1, 4 & 16 pro V, & prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121}=A+B+C$ in caſu ſecundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}}=4A+8B+16C$ in caſu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}}=16A+64B+256C$ in caſu ſexto. Et ex his æquationibus, per debitam collationem & reductionem Analyticam, fit A=0,0000916, B=0,0010847, & C=0,0029558. Eſt igitur differentia arcuum ut $0,0000916V+0,0010847V^{\frac{3}{2}}+0,0029558V^{2}$: & propterea cum (per Corollarium Propoſitionis xxx) reſiſtentia Globi in medio arcus oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, ſit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11}AV+\frac{16}{23}BV^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}CV^{2}$ ad longitudinem Penduli; ſi pro A, B & C ſcribantur numeri inventi, fiet reſiſtentia Globi ad ejus pondus, ut $0,0000583V+0,0007546V^{\frac{3}{2}}+0,0022169V^{2}$ ad longitudinem Penduli inter centrum ſuſpenſionis & Regulam, id eſt, ad 121 digitos. Unde cum V in caſu ſecundo deſignet 1, in quarto 4, in ſexto 16: erit reſiſtentia ad pondus Globi in caſu ſecundo ut 0,0030298 ad 121, in quarto ut 0,0417402 ad 121, in ſexto ut 0,61675 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in caſu ſexto deſcripſit, erat $120-\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ ſeu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cum radius eſſet 121 digitorum, & longitudo Penduli inter punctum ſuſpenſionis

De Motu Corporum, & centrum Globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum Globi descripsit erat 124 $\frac{1}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistentiam Aeris, non incidit in punctum infimum arcus descripti, sed in medio fere loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si Globus descensu suo toto in Medio non resistente describeret arcus illius partem dimidiam digitorum 62 $\frac{1}{62}$, idque in Cycloide, ad quam motum Penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam Globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in Cycloide ad arcum istum 62 $\frac{1}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15, 278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo & casu suo spatium 15, 278 digitorum describendo acquirere posset. Tali igitur cum velocitate Globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0, 61675 ad 121, vel (si resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicata) ut 0, 56752 ad 121.

Experimento autem Hydrostatico inveni quod pondus Globi hujus lignei esset ad pondus Globi aquei magnitudinis ejusdem, ut 55 ad 97: & propterea cum 121 sit ad 213, 4 in eadem ratione, erit resistentia Globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipsius pondus, ut 0, 56752 ad 213, 4 id est, ut 1 ad 376 $\frac{1}{10}$. Unde cum pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuata describat longitudinem digitorum 30, 556 velocitatem illam omnem in Globo cadente generare posset, manifestum est quod vis resistentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad 376 $\frac{1}{10}$, hoc est, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{10}}$. Et propterea quo tempore Globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem semidiametri suæ, seu digitorum 3 $\frac{7}{10}$, describere posset, eodem amitteret motus sui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam oscillationes quibus Pendulum quartam motus sui partem amisit. In sequente Tabula numeri supremi denotant longitudinem arcus descensu primo descripti, in digitis & partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcus ascensu ultimo descripti; & loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripsi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculum tentet qui volet.

Descen-

Descensus primus	2	4	8	16	32	64	
Ascensus ultimus	1 ½	3	6	12	24	48	
Numerus Oscillat.	374	272	162 ½	83 ⅓	41 ⅔	22 ⅔	

Postea Globum plumbeum, diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* 26¼, suspendi filo eodem, sic ut inter centrum Globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum 10½, & numerabam oscillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum subsequentium prior exhibet numerum oscillationum quibus pars octava motus totius cessavit; secunda numerum oscillationum quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	⅞	1¾	3 ½	7	14	28	56
Numerus Oscillat.	226	228	193	140	90 ½	53	30
Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	¾	1 ½	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	510	518	420	318	204	121	70

In Tabula priore seligendo ex observationibus tertiam, quintam & septimam, & exponendo velocitates maximas in his observationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 respective, & generaliter per quantitatem V ut supra: emerget in observatione tertia $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quinta $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, in septima $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ vero æquationes reductæ dant $A = 0,001414$, $B = 0,000297$, $C = 0,000879$. Et inde prodit resistentia Globi cum velocitate V moti, in ea ratione ad pondus suum unciarum 26¼, quam habet $0,0009V + 0,000207V^{\frac{3}{2}} + 0,000659V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et si spectemus eam solummodo resistentiæ partem quæ est in duplicata ratione velocitatis, hæc erit ad pondus Globi ut $0,000659V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars resistentiæ in experimento primo ad pondus Globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$, ut $0,002217V^2$ ad 121: & inde fit resistentia Globi lignei ad resistentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$, in 0,002217 ad $26\frac{1}{4}$ in 0,000659, id est, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri Globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata sunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, seu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproxime. Ergo resistentiæ Globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum considera vimus resi-

stentiam

De Motu Corporum, ſtentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa reſiſtentia ſubduci debet. Hanc accurate definire non potui, ſed majorem tamen inveni quam partem tertiam reſiſtentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod reſiſtentiæ Globorum, dempta fili reſiſtentia, ſunt quam proxime in duplicata ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, ſeu $10\frac{1}{2}$ ad 1, non longe abeſt a diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cum reſiſtentia fili in Globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo cujus diameter erat $18\frac{1}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$ inter punctum ſuſpenſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu a nodo deſcriptus, 32 dig. Arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus, 28. dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus, 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcillatione mediocri $\frac{2}{7}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri a nodo deſcriptus, ad arcum totum $67\frac{1}{2}$ dig. oſcillatione mediocri a centro Globi deſcriptum: & ita differentia $\frac{2}{7}$ ad differentiam novam 0, 4475. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus deſcripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oſcillationis augeretur & velocitas penduli diminueretur in ratione illa ſubduplicata, maneret vero arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum differentia 0, 4475. Deinde ſi arcus deſcriptus augeretur in ratione $124\frac{1}{11}$ ad $67\frac{1}{2}$, differentia iſta 0,4475 augeretur in duplicata illa ratione, adeoque evaderet 1, 5295. Hæc ita ſe haberent, ex hypotheſi quod reſiſtentia Penduli eſſet in duplicata illa ratione velocitatis. Ergo ſi pendulum deſcriberet arcum totum $124\frac{1}{11}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis eſſet 126 digitorum, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum foret 1,5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318, 136. Rurſus ubi pendulum ſuperius ex Globo ligneo conſtructum, centro oſcillationis, quod a puncto ſuſpenſionis digitos 126 diſtabat, deſcribebat arcum totum $124\frac{1}{11}$ digitorum, differentia arcuum deſcenſu & aſcenſu deſcriptum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{1}{2}}$, quæ ducta in pondus Globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{11}$, producit 49, 396. Duxi autem differentias haſce in pondera Globorum ut invenirem eorum reſiſtentias. Nam differentiæ oriuntur

untur ex reſiſtentiis, ſuntque ut reſiſtentiæ directe & pondera inverſe. Sunt igitur reſiſtentiæ ut numeri 318, 136 & 49, 396. Pars autem reſiſtentiæ Globi minoris, quæ eſt in duplicata ratione velocitatis, erat ad reſiſtentiam totam, ut 0,56752 ad 0,61675, id eſt, ut 45, 453 ad 49, 396; & pars reſiſtentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipſius reſiſtentiæ toti; adeoque partes illæ ſunt ut 318, 136 & 45,453 quamproxime, id eſt, ut 7 & 1. Sunt autem Globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ ſunt ut 7, 438 & 1, id eſt, ut Globorum reſiſtentiæ 7 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major eſt quam quæ ex fili reſiſtentia oriri potuit. Igitur reſiſtentiarum partes illæ quæ ſunt, paribus Globis, ut quadrata velocitatum; ſunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum Globorum.

Cæterum Globorum, quibus uſus ſum in his experimentis, maximus non erat perfecte Sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quaſdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non ſatis accurato minime ſollicitus. Optarim itaque (cum demonſtratio Vacui ex his dependeat) ut experimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi ſumantur in proportione Geometrica, puta quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo reſiſtentias diverſorum Fluidorum inter ſe tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immerſa pendula in medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{2}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum, movebatur ut in Tabula ſequente deſcripſimus, exiſtente videlicet longitudine penduli a puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Arcus deſcenſu primo a puncto in filo notato deſcriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{16}$
Arcuum differentia motui amiſſo proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{16}$
Numerus Oſcillationum in aqua			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{2}$	2	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oſcillationum in aere	$85\frac{1}{2}$		287	535					

De Motu Corporum

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oſcillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{7}$ in aqua amiſſi ſunt. Erant quidem oſcillationes in aere paulo celeriores quam in aqua. At ſi oſcillationes in aqua in ea ratione acceleraretur ut motus pendulorum in Medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oſcillationum $1\frac{1}{7}$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur; ob reſiſtentiam auctam & ſimul quadratum temporis diminutum in eadem ratione illa duplicata. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oſcillationibus 535 & in aqua oſcillationibus $1\frac{1}{7}$ amiſſi ſunt; ideoque reſiſtentia penduli in aqua eſt ad ejus reſiſtentiam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{7}$. Hæc eſt proportio reſiſtentiarum totarum in caſu columnæ quartæ.

Deſignet jam $AV+CV^2$ differentiam arcuum in deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum a Globo, in Aere cum velocitate maxima V moto; & cum velocitas maxima, in caſu columnæ quartæ, ſit ad velocitatem maximam in caſu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum, in caſu columnæ quartæ, ad differentiam in caſu columnæ primæ ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, ſeu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: ſcribamus in his caſibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A+C=85\frac{1}{2}$ & $8A+64C=4280$ ſeu $A+8C=535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C=449\frac{1}{2}$ & $C=64\frac{3}{14}$ & $A=21\frac{3}{7}$: atque adeo reſiſtentia, cum ſit ut $\frac{7}{11}AV+\frac{3}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V+48\frac{9}{56}V^2$. Quare in caſu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, reſiſtentia tota eſt ad partem ſuam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11}+48\frac{9}{56}$ ſeu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco reſiſtentia penduli in aqua eſt ad reſiſtentiæ partem illam in aere quæ quadrato velocitatis proportionalis eſt, quæque ſola in motibus velocioribus conſideranda venit, ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{7}$ conjunctim, id eſt, ut 571 ad 1. Si penduli in aqua oſcillantis filum totum fuiſſet immerſum, reſiſtentia ejus fuiſſet adhuc major; adeo ut penduli in aere oſcillantis reſiſtentia illa quæ velocitatis quadrato proportionalis eſt, quæque ſola in corporibus velocioribus conſideranda venit, ſit ad reſiſtentiam ejuſdem penduli totius, eadem cum velocitate, in aqua oſcillantis, ut 800 vel 900 ad 1 circiter, hoc eſt, ut denſitas aquæ ad denſitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo ſumi quoque deberet pars illa reſiſtentiæ penduli in aqua, quæ eſſet ut quadratum velocitatis, ſed (quod mirum forte videatur) reſiſtentia in aqua augebatur in ratione velocitatis pluſ-

pluſquam duplicata. Ejus rei cauſam inveſtigando, in hanc incidi, quod Arca nimis anguſta eſſet pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis præ anguſtia ſua nimis impediebat. Nam ſi Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; reſiſtentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quamproxime. Id tentabam conſtruendo pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oſcillaretur in aqua, ſuperior & major proxime ſupra aquam filo affixus eſſet, & in Aere oſcillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo inſtituta ſe habebant ut in Tabula ſequente deſcribitur. LIBER SECUNDUS.

Arcus deſcenſu primo deſcriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus aſcenſu ultimo deſcriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amiſſo proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oſcillationum	$3\frac{3}{1}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{11}$	$21\frac{1}{7}$	34	53	$62\frac{1}{6}$

Conferendo reſiſtentias Mediorum inter ſe, effeci etiam ut pendula ferrea oſcillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quaſi trium, & diameter Globi penduli quaſi tertia pars digiti. Ad filum autem proxime ſupra Mercurium affixus erat Globus alius plumbeus ſatis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vaſculum, quod capiebat quaſi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in Fluido utroque ſucceſſive oſcillante, invenirem proportionem reſiſtentiarum: & prodiit reſiſtentia argenti vivi ad reſiſtentiam aquæ, ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id eſt, ut denſitas argenti vivi ad denſitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter eſſet quaſi $\frac{1}{2}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat reſiſtentia argenti vivi in ea ratione ad reſiſtentiam aquæ quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum eſt, propterea quod in his ultimis Vas nimis anguſtum fuit pro magnitudine Globi immerſi. Ampliato Globo, deberet etiam Vas ampliari. Conſtitueram quidem hujuſmodi experimenta in vaſis majoribus & in liquoribus tum Metallorum fuſorum, tum aliis quibuſdam tam calidis quam frigidis repetere: ſed omnia experiri non vacat, & ex jam deſcriptis ſatis liquet reſiſtentiam corporum celeriter motorum denſitati Fluidorum in quibus moventur proportionalem eſſe quam proxime.

Non dico accurate. Nam Fluida tenaciora, pari denſitate, procul-

De Motu Corporum, dubio magis reſiſtunt quam liquidiora, ut Oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam Spiritus Vini. Verum in liquoribus qui ad ſenſum ſatis fluidi ſunt, ut in Aere, in Aqua ſeu dulci ſeu ſalſa, in Spiritibus Vini, Terebinthi & Salium, in Oleo a fæcibus per deſtillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & ſiqui ſint alii, qui tam fluidi ſunt ut in vaſis agitati motum impreſſum diutius conſervent, effuſique liberrime in guttas decurrendo reſolvantur, nullus dubito quin regula allata ſatis accurate obtineat: præſertim ſi experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis inſtituantur.

Denique cum receptiſſima Philoſophorum ætatis hujus opinio ſit, Medium quoddam æthereum & longe ſubtiliſſimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem Medio per corporum poros fluente reſiſtentia oriri debeat: ut tentarem an reſiſtentia, quam in motis corporibus experimur, tota ſit in eorum externa ſuperficie, an vero partes etiam internæ in ſuperficiebus propriis reſiſtentiam notabilem ſentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo ſatis firmo, mediante annulo chalybeo, ſuſpendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad conſtituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus ſurſum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu ſuo ſuperiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita conſtitutum deducebam a perpendiculo ad diſtantiam quaſi pedum ſex, idque ſecundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oſcillante pendulo, ſupra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum ſuſpenſionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demiſſo notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oſcillationis primæ, ſecundæ ac tertiæ. Hoc repetebam ſæpius, ut loca illa quam potui accuratiſſime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. (Nam filum tenſum dimidio ponderis ſui pendulum a perpendiculo digreſſum ſemper urget.) Huic ponderi addebam pondus Aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat qua pars ſeptuageſima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum

tallorum plena, pondere ſuo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oſcillantis eadem eſſet longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimiſſo, numerabam oſcillationes quaſi ſeptuaginta & ſeptem, donec pyxis ad locum ſecundo notatum rediret, totidemque ſubinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rurſus totidem donec pyxis reditu ſuo attingeret locum quartum. Unde concludo quod reſiſtentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad reſiſtentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam ſi æquales eſſent ambarum reſiſtentiæ, pyxis plena ob vim ſuam inſitam ſeptuagies & octies majorem vi inſita pyxidis vacuæ, motum ſuum oſcillatorium tanto diutius conſervare deberet, atque adeo completis ſemper oſcillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oſcillationibus 77. LIBER SECUNDUS.

Deſignet igitur A reſiſtentiam pyxidis in ipſius ſuperficie externa, & B reſiſtentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & ſi reſiſtentiæ corporum æquivelocium in partibus internis ſint ut materia, ſeu numerus particularum quibus reſiſtitur: erit 78 B reſiſtentia pyxidis plenæ in ipſius partibus internis: adeoque pyxidis vacuæ reſiſtentia tota A + B erit ad pyxidis plenæ reſiſtentiam totam A + 78 B ut 77 ad 78, & diviſim A + B ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque A + B ad B ut 77 × 77 ad 1, & diviſim A ad B ut 5928 ad 1. Eſt igitur reſiſtentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejuſdem reſiſtentia in externa ſuperficie, & amplius. Sic vero diſputamus ex Hypotheſi quod major illa reſiſtentia pyxidis plenæ, non ab alia aliqua cauſa latente oriatur, ſed ab actione ſola Fluidi alicujus ſubtilis in metallum incluſum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando deſcripſeram, intercidit. Unde fractas quaſdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulſus ſum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum uncо infirmo uſus eſſem, pyxis plena citius retardabatur. Cauſam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oſcillationibus obſequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum ſuſpenſionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti ſupra deſcripſimus.

De Motu Corporum,

SECTIO VII.

De Motu Fluidorum & Resistentia Projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum Systemata duo similia ex æquali particularum numero constent, & particulæ correspondentes similes sint & proportionales, singulæ in uno Systemate singulis in altero, & similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, (eæ inter se quæ in uno sunt Systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt Systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugent se mutuo, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe: dico quod Systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri.

Corpora similia & similiter sita temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: puta si particulæ unius Systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales Figurarum similium partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi Systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem inceptorum motuum, pergent similiter moveri usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus Leg. 1. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe; quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur, ex viribus singulis agitantibus (per Legum Corollarium

secun-

ſecundum) compoſitæ, ſimiles habebunt determinationes, perinde ac ſi centra inter particulas ſimiliter ſita reſpicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires ſingulæ componentes, hoc eſt, ut correſpondentium particularum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe: & propterea efficient ut correſpondentes particulæ figuras ſimiles deſcribere pergant. Hæc ita ſe habebunt per Corol. 1, & 8. Prop. IV. Lib. 1. ſi modo centra illa quieſcant. Sin moveantur, quoniam ob tranſlationum ſimilitudinem, ſimiles manent eorum ſitus inter Syſtematum particulas; ſimiles inducentur mutationes in figuris quas particulæ deſcribunt. Similes igitur erunt correſpondentium & ſimilium particularum motus uſque ad occurſus ſuos primos, & propterea ſimiles occurſus, & ſimiles reflexiones, & ſubinde (per jam oſtenſa) ſimiles motus inter ſe, donec iterum in ſe mutuo inciderint, & ſic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpora duo quævis, quæ ſimilia ſint & ad Syſtematum particulas correſpondentes ſimiliter ſita, inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, ſintque eorum magnitudines ac denſitates ad invicem ut magnitudines ac denſitates correſpondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Eſt enim eadem ratio partium majorum Syſtematis utriuſque atque particularum.

Corol. 2. Et ſi ſimiles & ſimiliter poſitæ Syſtematum partes omnes quieſcant inter ſe: & earum duæ, quæ cæteris majores ſint, & ſibi mutuo in utroque Syſtemate correſpondeant, ſecundum lineas ſimiliter ſitas ſimili cum motu utcunque moveri incipiant: hæ ſimiles in reliquis Syſtematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri; atque adeo ſpatia diametris ſuis proportionalia deſcribere.

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iiſdem poſitis, dico quod Syſtematum partes majores, reſiſtunt in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum ſuarum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis partium Syſtematum.

Nam reſiſtentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ Syſtematum ſe mutuo agitant, partim ex occurſibus & reflexionibus particularum & partium majorum.

Prioris

De Motu Corporum, Prioris autem generis reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id eſt, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus; hoc eſt (per Hypotheſin) ut quadrata velocitatum directe & diſtantiæ particularum correſpondentium inverſe & quantitates materiæ in partibus correſpondentibus directe: ideoque (cum diſtantiæ particularum Syſtematis unius ſint ad diſtantias correſpondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in Syſtemate priore ad diametrum particulæ vel partis correſpondentis in altero, & quantitates materiæ ſint ut denſitates partium & cubi diametrorum) reſiſtentiæ ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium Syſtematum. *Q. E. D.*

Poſterioris generis reſiſtentiæ ſunt ut reflexionum correſpondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directe, & ſpatia inter earum reflexiones inverſe. Et vires reflexionum ſunt ut velocitates & magnitudines & denſitates partium correſpondentium conjunctim; id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, reſiſtentiæ partium correſpondentium ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi Syſtemata illa ſint Fluida duo Elaſtica ad modum Aeris, & partes eorum quieſcant inter ſe: corpora autem duo ſimilia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & denſitatem proportionalia, & inter partes illas ſimiliter poſita, ſecundum lineas ſimiliter poſitas utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ Fluidorum ſe mutuo agitant, ſint ut corporum projectorum diametri inverſe, & quadrata velocitatum directe: corpora illa temporibus proportionalibus ſimiles extitabunt motus in Fluidis, & ſpatia ſimilia ac diametris ſuis proportionalia deſcribent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido projectile velox reſiſtentiam patitur quæ eſt in duplicata ratione velocitatis quamproxime. Nam ſi vires, quibus particulæ diſtantes ſe mutuo agitant, augerentur in duplicata ratione velocitatis, reſiſtentia foret in eadem ratione duplicata accurate: ideoque in Medio, cujus partes ab invicem diſtantes ſeſe viribus nullis agitant, reſiſtentia eſt in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunto igitur Media tria *A*, *B*, *C* ex partibus ſimilibus & æqualibus & ſecundum diſtantias æquales regulariter diſpo-

diſpoſitis conſtantia. Partes Mediorum *A* & *B* fugiant ſe mutuo viribus quæ ſint ad invicem ut *T* & *V*, illæ Medii *C* ejuſmodi viribus omnino deſtituantur. Et ſi corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his Mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; ſitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G*, in ſubduplicata ratione virium *T* ad vires *V*: reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *E*, & reſiſtentia corporis *F* ad reſiſtentiam corporis *G*, in velocitatum ratione duplicata; & propterea reſiſtentia corporis *D* erit ad reſiſtentiam corporis *F* ut reſiſtentia corporis *E* ad reſiſtentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum Medii *B* in eadem ratione duplicata, accedet Medium *B* ad formam & conditionem Medii *C* pro lubitu, & idcirco reſiſtentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his Mediis, perpetuo accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum reſiſtentiæ corporum *D* & *F* ſint ad invicem ut reſiſtentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ ſimiliter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velociſſime moventur, reſiſtentiæ ſunt æquales quam proxime: & propterea cum reſiſtentia corporis *F* ſit in duplicata ratione velocitatis, erit reſiſtentia corporis *D* in eadem ratione quam proxime.

Corol. 3. Igitur corporis in Fluido quovis Elaſtico velociſſime moti eadem fere eſt reſiſtentia ac ſi partes Fluidi viribus ſuis centrifugis deſtituerentur, ſeque mutuo non fugerent: ſi modo Fluidi vis Elaſtica ex particularum viribus centrifugis oriatur & velocitas adeo magna ſit ut vires non habeant ſatis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cum reſiſtentiæ ſimilium & æquivelocium corporum in Medio cujus partes diſtantes ſe mutuo non fugiunt, ſint ut quadrata diametrorum; ſunt etiam æquivelocium & celerrime motorum corporum reſiſtentiæ in Fluido Elaſtico ut quadrata diametrorum quam proxime.

Corol. 5. Et cum corpora ſimilia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejuſdem denſitatis, quorum particulæ ſe mutuo non fugiunt, ſive particulæ illæ ſint plures & minores, ſive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & vi-

 ciſſim

De Motu Corporum.

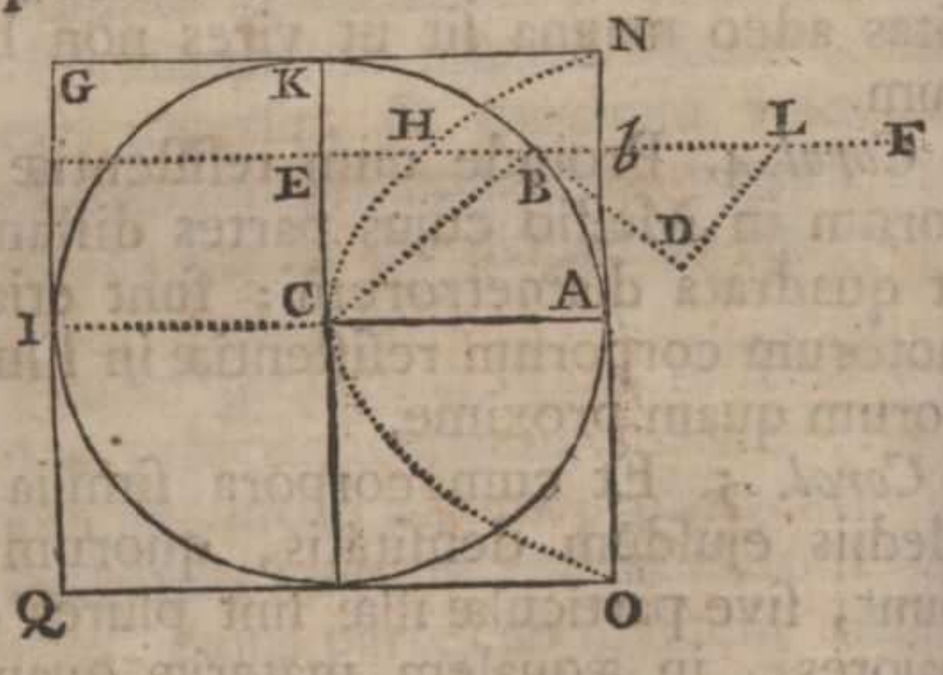
ciſſim (per motus Legem tertiam) æqualem ab eadem reactionem patiantur, hoc eſt, æqualiter reſiſtantur: manifeſtum eſt etiam quod in ejuſdem denſitatis Fluidis Elaſticis, ubi velociſſime moventur, æquales ſint eorum reſiſtentiæ quam proxime; ſive Fluida illa ex particulis craſſioribus conſtent, ſive ex omnium ſubtiliſſimis conſtituantur. Ex Medii ſubtilitate reſiſtentia projectilium celerrime motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita ſe habent in Fluidis, quorum vis Elaſtica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod ſi vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expanſione ad inſtar Lanæ vel ramorum Arborum, aut ex alia quavis cauſa, qua motus particularum inter ſe redduntur minus liberi: reſiſtentia, ob minorem Medii fluiditatem, erit major quam in ſuperioribus Corollariis.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

Si Globus, & Cylindrus æqualibus diametris deſcripti, in Medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias libere diſpoſitis conſtante, ſecundum plagam axis Cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit reſiſtentia Globi duplo minor quam reſiſtentia Cylindri.

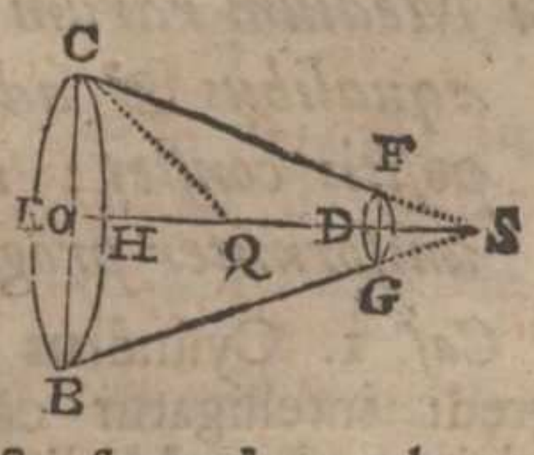
Nam quoniam actio Medii in corpus eadem eſt (per Legum Corol. 5.) ſive corpus in Medio quieſcente moveatur, ſive Medii particulæ eadem cum velocitate impingant in corpus quieſcens: conſideremus corpus tanquam quieſcens, & videamus quo impetu urgebitur a Medio movente. Deſignet igitur *ABKI* corpus Sphæricum centro *C* ſemidiametro *CA* deſcriptum, & incidant particulæ Medii data cum velocitate in corpus illud Sphæricum, ſecundum rectas ipſi *AC* parallelas: Sitque *FB* ejuſmodi recta. In ea capiatur *LB* ſemidiametro *CB* æqualis, & ducatur *BD* quæ Sphæram tangat in *B*. In *KC* & *BD* demittantur



mittantur perpendiculares BE, DL, & vis qua particula Medii, ſecundum rectam FB oblique incidendo, Globum ferit in B, erit ad vim qua particula eadem Cylindrum $ONGQ$ axe ACI circa Globum deſcriptum perpendiculariter feriret in b, ut LD ad LB vel BE ad BC. Rurſus efficacia hujus vis ad movendum Globum ſecundum incidentiæ ſuæ plagam FB vel AC, eſt ad ejuſdem efficaciam ad movendum Globum ſecundum plagam determinationis ſuæ, id eſt, ſecundum plagam rectæ BC qua Globum directe urget, ut BE ad BC. Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ, in Globum ſecundum rectam FB oblique incidentis, ad movendum eundem ſecundum plagam incidentiæ ſuæ, eſt ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in Cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipſum movendum in plagam eandem, ut BE quadratum ad BC quadratum. Quare ſi ad Cylindri baſem circularem NAO erigatur perpendiculum bHE, & ſit bE æqualis radio AC, & bH æqualis $\frac{BE\ quad.}{CB}$: erit bH ad bE ut effectus particulæ in Globum ad effectum particulæ in Cylindrum. Et propterea ſolidum quod a rectis omnibus bH occupatur erit ad ſolidum quod a rectis omnibus bE occupatur, ut effectus particularum omnium in Globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. Sed ſolidum prius eſt parabolois vertice C, axe CA & latere recto CA deſcriptum, & ſolidum poſterius eſt Cylindrus Paraboloidi circumſcriptus: & notum eſt quod Parabolois ſit ſemiſſis Cylindri circumſcripti. Ergo vis tota Medii in Globum eſt duplo minor quam ejuſdem vis tota in Cylindrum. Et propterea ſi particulæ Medii quieſcerent, & Cylindrus ac Globus æquali cum velocitate moverentur, foret reſiſtentia Globi duplo minor quam reſiſtentia Cylindri. *Q. E. D.*

Scholium.

Eadem methodo Figuræ aliæ inter ſe quoad reſiſtentiam comparari poſſunt, eæque inveniri quæ ad motus ſuos in Mediis reſiſtentibus continuandos aptiores ſunt. Ut ſi baſe circulari $CEBH$, quæ centro O, radio OC deſcribitur, & altitudine OD, conſtruendum ſit fruſtum Coni $CBGF$, quod omnium eadem baſi & altitudine conſtructorum & ſecundum plagam

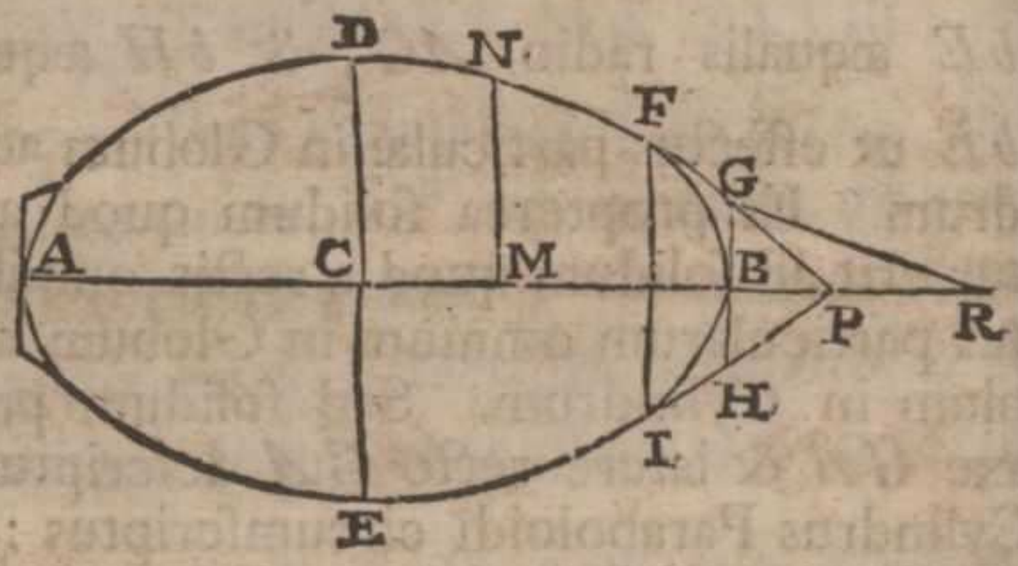


De Motu Corporum,

axis ſui verſus D progredientium fruſtorum minime reſiſtatur: biſeca altitudinem OD in Q & produc OQ ad S ut ſit QS æqualis QC, & erit S vertex Coni cujus fruſtum quæritur.

Unde obiter, cum angulus CSB ſemper ſit acutus, conſequens eſt, quod ſi ſolidum $ADBE$ convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis $ADBE$ circa axem AB facta generetur, & tangatur figura generans a rectis tribus FG, GH, HI in punctis F, B & I, ea lege ut GH ſit perpendicularis ad axem in puncto contactus B, & FG, HI cum eadem GH contineant angulos FGB, BHI graduum 135: ſolidum, quod convolutione figuræ $ADFGHIE$ circa axem eundem CB generatur, minus reſiſtitur quam ſolidum prius; ſi modo utrumque ſecundum plagam axis ſui AB progrediatur, & utriuſque terminus B præcedat. Quam quidem propoſitionem in conſtruendis Navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.

Quod ſi Figura $DNFG$ ejuſmodi ſit curva ut, ſi ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, & a puncto dato G ducatur recta GR quæ parallela ſit rectæ figuram tangenti in N, & axem productum ſecet in R; fuerit MN ad GR ut GR *cub.* ad $4\,BR \times GBq$: Solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem AB facta deſcribitur, in Medio raro prædicto ab A verſus B movendo, minus reſiſtetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine deſcriptum Solidum circulare.



PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si Medium rarum ex particulis quam minimis quieſcentibus æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias libere diſpoſitis conſtet: invenire reſiſtentiam Globi in hoc Medio uniformiter progredientis.

Caſ. 1. Cylindrus eadem diametro & altitudine deſcriptus progredi intelligatur eadem velocitate ſecundum longitudinem axis ſui in eodem Medio. Et ponamus quod particulæ Medii in quas

Glo-

Globus vel Cylindrus incidit, vi reflexionis quam maxima reſiliant. Et cum reſiſtentia Globi (per Propoſitionem noviſſimam) ſit duplo minor quam reſiſtentia Cylindri, & Globus ſit ad Cylindrum ut duo ad tria, & Cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ipſaſque quam maxime reflectendo, duplam ſui ipſius velocitatem ipſis communicet: Cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis ſui deſcribit communicabit motum particulis qui ſit ad totum Cylindri motum ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri; & Globus quo tempore totam longitudinem diametri ſuæ deſcribit, communicabit motum eundem particulis; & quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit communicabit motum particulis qui ſit ad totum Globi motum ut denſitas Medii ad denſitatem Globi. Et propterea Globus reſiſtentiam patitur quæ ſit ad vim qua totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi.

Caſ. 2. Ponamus quod particulæ Medii in Globum vel Cylindrum incidentes non reflectantur; & Cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ſimplicem ſuam velocitatem ipſis communicabit, ideoque reſiſtentiam patitur duplo minorem quam in priore caſu, & reſiſtentia Globi erit etiam duplo minor quam prius.

Caſ. 3. Ponamus quod particulæ Medii vi reflexionis neque maxima neque nulla, ſed mediocri aliqua reſiliant a Globo; & reſiſtentia Globi erit in eadem ratione mediocri inter reſiſtentiam in primo caſu & reſiſtentiam in ſecundo. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc ſi Globus & particulæ ſint infinite duræ, & vi omni elaſtica & propterea etiam vi omni reflexionis deſtituta: reſiſtentia Globi erit ad vim qua totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari, quo tempore Globus quatuor tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi.

Corol. 2. Reſiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt in duplicata ratione velocitatis.

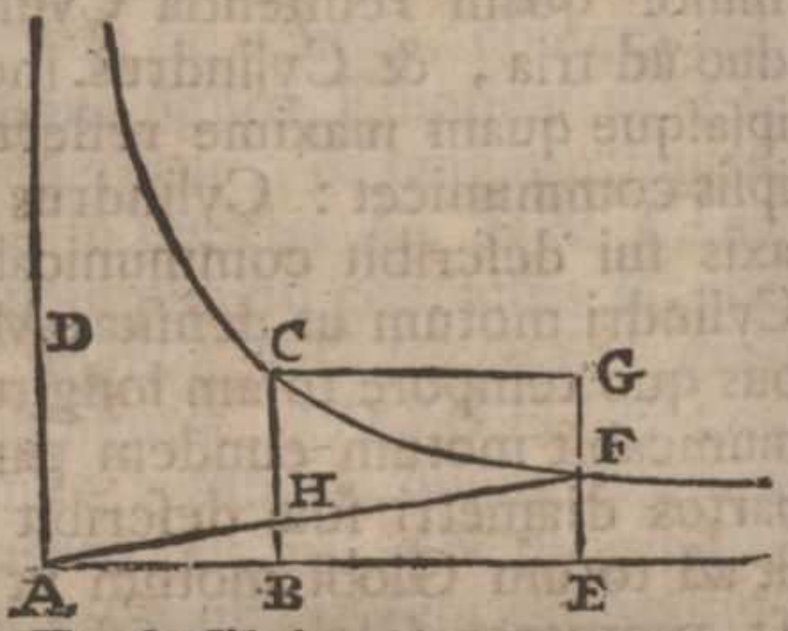
Corol. 3. Reſiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt in duplicata ratione diametri.

Corol. 4. Reſiſtentia Globi, cæteris paribus, eſt ut denſitas Medii.

Corol. 5. Reſiſtentia Globi eſt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis & duplicata ratione diametri & ratione denſitatis Medii.

De Motu Corporum,

Corol. 6. Et motus Globi cum ejus resistentia sic exponi potest. Sit AB tempus quo Globus per resistentiam suam uniformiter continuatam totum suum motum amittere potest. Ad AB erigantur perpendicula AD, BC. Sitque BC motus ille totus, & per punctum C Asymptotis AD, AB describatur Hyperbola CF. Producatur AB ad punctum quodvis E. Erigatur perpendiculum EF Hyperbolæ occurrens in F. Compleatur parallelogrammum $CBEG$, & agatur AF ipsi BC occurrens in H. Et si Globus tempore quovis BE, motu suo primo BC uniformiter continuato, in Medio non resistente describat spatium $CBEG$ per aream parallelogrammi expositum, idem in Medio resistente describet spatium $CBEF$ per aream Hyperbolæ expositum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per Hyperbolæ ordinatam EF, amissa motus ejus parte FG. Et resistentia ejus in fine temporis ejusdem exponetur per longitudinem BH, amissa resistentiæ parte CH. Patent hæc omnia per Corol. 1. Prop. v. Lib. II.



Corol. 7. Hinc si Globus tempore T per resistentiam R uniformiter continuatam amittat motum suum totum M: idem Globus tempore t in Medio resistente, per resistentiam R in duplicata velocitatis ratione decrescentem, amittet motus sui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente parte $\frac{TM}{T+t}$, & describet spatium quod sit ad spatium motu uniformi M eodem tempore t descriptum, ut Logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 est ad numerum $\frac{t}{T}$. Nam area Hyperbolica $BCFE$ est ad rectangulum $BCGE$ in hac proportione.

Scholium.

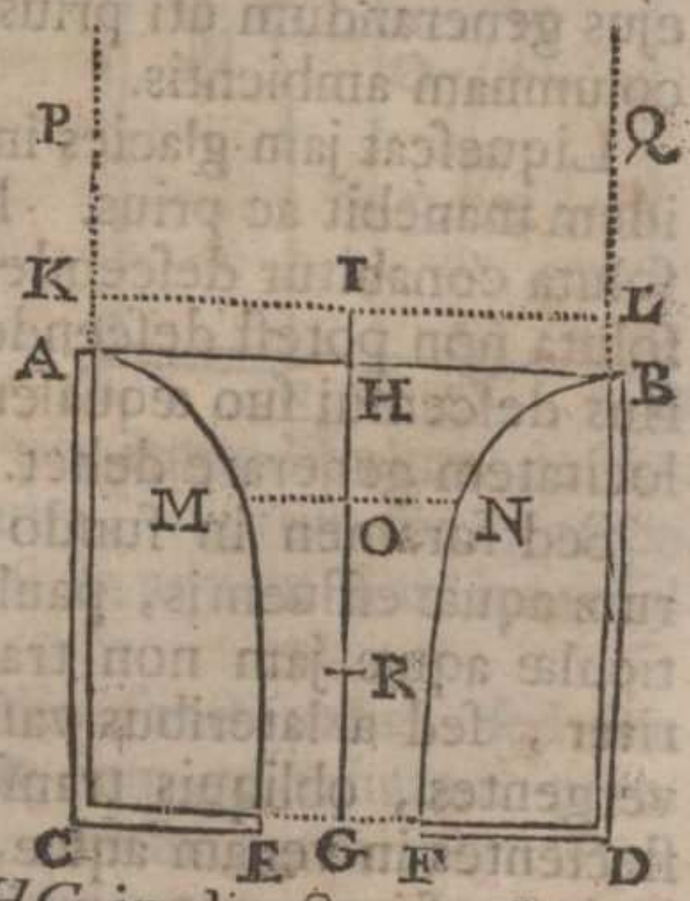
In hac Propositione exposui resistentiam & retardationem Projectilium Sphæricorum in Mediis non continuis, & ostendi quod hæc resistentia sit ad vim qua totus Globi motus vel tolli possit vel generari

generari quo tempore Globus duas tertias diametri ſuæ partes, velocitate uniformiter continuata deſcribat, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi, ſi modo Globus & particulæ Medii ſint ſumme elaſtica & vi maxima reflectendi polleant: quodque hæc vis ſit duplo minor ubi Globus & particulæ Medii ſunt infinite dura & vi reflectendi prorſus deſtituta. In Mediis autem continuis qualia ſunt Aqua, Oleum calidum, & Argentum vivum, in quibus Globus non incidit immediate in omnes fluidi particulas reſiſtentiam generantes, ſed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias & hæ alias, reſiſtentia eſt adhuc duplo minor. Globus utique in hujuſmodi Mediis fluidiſſimis reſiſtentiam patitur quæ eſt ad vim qua totus ejus motus vel tolli poſſit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri ſuæ deſcribat, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi. Id quod in ſequentibus conabimur oſtendere.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vaſe Cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit *ACDB* vas cylindricum, *AB* ejus orificium ſuperius, *CD* fundum horizonti parallelum, *EF* foramen circulare in medio fundi, *G* centrum foraminis, & *GH* axis cylindri horizonti perpendicularis. Et concipe cylindrum glaciei *APQB* ejuſdem eſſe latitudinis cum cavitate vaſis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuo deſcendere, & partes ejus quam primum attingunt ſuperficiem *AB* liqueſcere, & in aquam converſas gravitate ſua defluere in vas, & cataractam vel columnam aquæ *ABNFEM* cadendo formare, & per foramen *EF* tranſire, idemque adæquate implere. Ea vero ſit uniformis velocitas glaciei deſcendentis ut & aquæ contiguæ in circulo *AB*, quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IH* acquirere poteſt; & jaceant *IH* & *HG* in directum, & per punctum *I* ducatur recta *KL* horizonti parallela lateribus glaciei,



De Motu Corporum, ciei occurrens in *K* & *L*. Et velocitas aquæ effluentis per foramen *EF* ea erit quam aqua cadendo ab *I* & casu suo describendo altitudinem *IG* acquirere potest. Ideoque per Theoremata *Galilæi* erit *IG* ad *IH* in duplicata ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo *AB*, hoc est, in duplicata ratione circuli *AB* ad circulum *EF*; nam hi circuli sunt reciproce ut velocitates aquarum quæ per ipsos, eodem tempore & æquali quantitate, adæquate transeunt. De velocitate aquæ horizontem versus hic agitur. Et motus horizonti parallelus quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cum non oriatur a gravitate, nec motum horizonti perpendicularem a gravitate oriundum mutet, hic non consideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohæreant, & per cohæsionem suam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur: sed motum horizonti parallelum, a cohæsione illa oriundum, hic non consideramus.

Cas. 1. Concipe jam cavitatem totam in vase, in circuitu aquæ cadentis *ABNFEM*, glacie plenam esse, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum transeat. Et si aqua glaciem tantum non tangat vel, quod perinde est, si tangat & per glaciem propter summam ejus polituram quam liberrime & sine omni resistentia labatur; hæc defluet per foramen *EF* eadem velocitate ac prius, & pondus totum columnæ aquæ *ABNFEM* impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, & fundum vasis sustinebit pondus glaciei columnam ambientis.

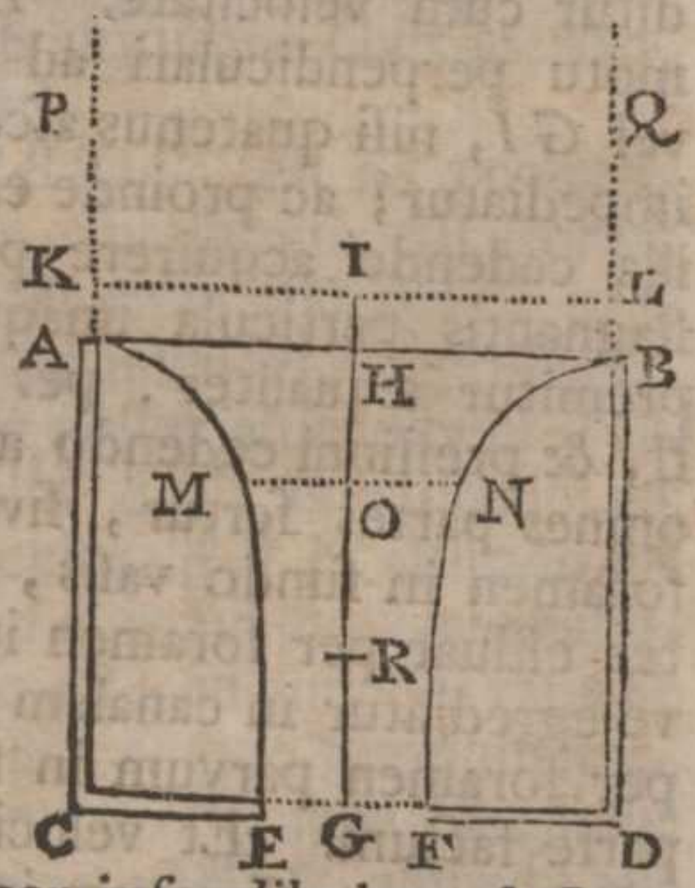
Liquescat jam glacies in vase; & effluxus aquæ quoad velocitatem, idem manebit ac prius. Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere: non major, quia glacies in aquam resoluta non potest descendere nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vasis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus esse debet quam prius. Nam particulæ aquæ jam non transeunt omnes per foramen perpendiculariter, sed a lateribus vasis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis transeunt motibus; & cursum suum deorsum flectentes in venam aquæ exilientis conspirant, quæ exilior est paulo infra foramen quam in ipso foramine, existente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel 5½ ad 6½ quam proxime, si

modo

modo diametros recte dimensus sum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, existente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis cadendo acceleraretur & acceleratione redderetur angustior, hanc laminam non fundo sed lateri vasis affixi sic, ut vena illa egrederetur secundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquæ plenum esset, aperui foramen ut aqua effluueret; & venæ diameter, ad distantiam quasi dimidii digiti a foramine quam accuratissime mensurata, prodiit partium viginti & unius quadragesimarum digiti. Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproxime. Per experimenta vero constat quod quantitas aquæ quæ per foramen circulare in fundo vasis factum effluit, ea est quæ, pro diametro venæ, cum velocitate prædicta effluere debet.

In sequentibus igitur, plano foraminis parallelum duci intelligatur planum aliud superius ad distantiam diametro foraminis æqualem vel paulo majorem & foramine majore pertusum, per quod utique vena cadat quæ adæquate impleat foramen inferius EF, atque adeo cujus diameter sit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter transibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam solutio Problematis postulat quamproxime. Spatium vero quod planis duobus & vena cadente clauditur, pro fundo vasis haberi potest. Sed ut solutio Problematis simplicior sit & magis Mathematica, præstat adhibere planum solum inferius pro fundo vasis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & e vase per foramen EF egrediebatur, motum suum perpetuo servet & glacies quietem suam, etiamsi in aquam fluidam resolvatur.



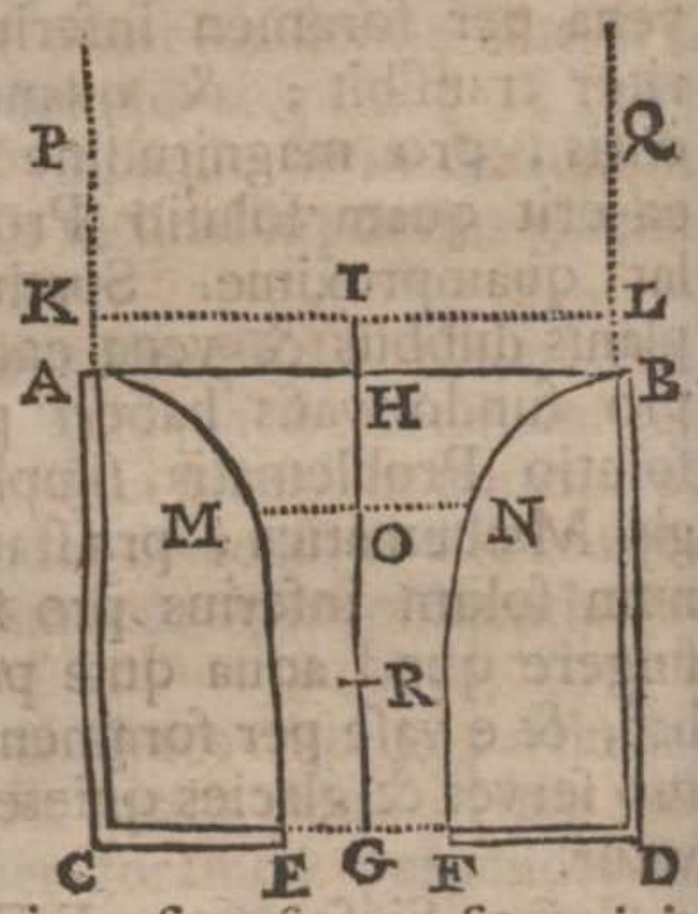
Cas. 2. Si foramen EF non sit in medio fundi vasis, sed fundum alibi perforetur: aqua effluet eadem cum velocitate ac prius, si modo eadem sit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore descendit ad eandem profunditatem per lineam obliquam quam per lineam perpendicularem, sed descendendo eandem

De Motu Corporum,

dem velocitatem acquirit in utroque casu, ut *Galilæus* demonstravit.

Cas. 3. Eadem est aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vasis. Nam si foramen parvum sit, ut intervallum inter superficies *AB* & *KL* quoad sensum evanescat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram Parabolicam efformet: ex latere recto hujus Parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea sit quam corpus ab aquæ in vase stagnantis altitudine *HG* vel *IG* cadendo acquirere potuisset. Facto utique experimento inveni quod, si altitudo aquæ stagnantis supra foramen esset viginti digitorum & altitudo foraminis supra planum horizonti parallelum esset quoque viginti digitorum, vena aquæ prosilientis incideret in planum illud ad distantiam digitorum 37 circiter a perpendiculo quod in planum illud a foramine demittebatur captam. Nam sine resistentia vena incidere debuisset in planum illud ad distantiam digitorum 40, existente venæ Paraboli latere recto digitorum 80.

Cas. 4. Quinetiam aqua effluens, si sursum feratur, eadem egreditur cum velocitate. Ascendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vase stagnantis altitudinem *GH* vel *GI*, nisi quatenus ascensus ejus ab aeris resistentia aliquantulum impediatur; ac proinde ea effluit cum velocitate quam ab altitudine illa cadendo acquirere potuisset. Aquæ stagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter, per Prop. XIX. Lib. II, & pressioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, sive descendat per foramen in fundo vasis, sive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, sive egrediatur in canalem & inde ascendat per foramen parvum in superiore canalis parte factum. Et velocitatem qua aqua effluit, eam esse quam in hac Propositione assignavimus, non solum ratione colligitur, sed etiam per experimenta notissima jam descripta manifestum est.



Cas. 5. Eadem est aquæ effluentis velocitas sive figura foraminis sit circularis sive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet a figura foraminis sed ab ejus altitudine infra planum *KL*.

Cas. 6. Si vasis *ABDC* pars inferior in aquam stagnantem immergatur,

mergatur, & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit GR: velocitas quacum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen EF in aquam ſtagnantem, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IR acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſuſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minime accelerabit. Patebit etiam & hic Caſus per Experimenta, menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit. LIBER SECUNDUS.

Corol. 1. Hinc ſi aquæ altitudo CA producatur ad K, ut ſit AK ad CK in duplicata ratione areæ foraminis in quavis fundi parte facti, ad aream circuli AB: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem KC acquirere poteſt.

Corol. 2. Et vis qua totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi Cylindricæ columnæ aquæ cujus baſis eſt foramen EF, & altitudo 2 GI vel 2 CK. Nam aqua exiliens quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine GI cadendo, velocitatem ſuam qua exilit, acquirere poteſt.

Corol. 3. Pondus aquæ totius in vaſe $ABDC$, eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut ſumma circulorum AB & EF, ad duplum circulum EF. Sit enim IO media proportionalis inter IH & IG; & aqua per foramen EF egrediens, quo tempore gutta cadendo ab I deſcribere poſſet altitudinem IG, æqualis erit Cylindro cujus baſis eſt circulus EF, & altitudo eſt 2 IG, id eſt, Cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo eſt 2 IO, nam circulus EF eſt ad circulum AB in ſubduplicata ratione altitudinis IH ad altitudinem IG, hoc eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis IO ad altitudinem IG: & quo tempore gutta cadendo ab I deſcribere poteſt altitudinem IH, aqua egrediens æqualis erit Cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo eſt 2 IH: & quo tempore gutta cadendo ab I per H ad G deſcribit altitudinum differentiam HG, aqua egrediens, id eſt, aqua tota in ſolido $ABNFEM$ æqualis erit differentiæ Cylindrorum, id eſt, Cylindro cujus baſis eſt AB & altitudo 2 HO. Et propterea aqua tota in vaſe $ABDC$ eſt ad aquam totam cadentem in ſolido $ABNFEM$ ut HG ad 2 HO, id eſt, ut $HO+OG$ ad 2 HO, ſeu $IH+IO$ ad 2 IH. Sed pondus aquæ totius in ſolido $ABNFEM$ in aquæ defluxum impenditur: ac proinde pon-

De Motu Corporum,

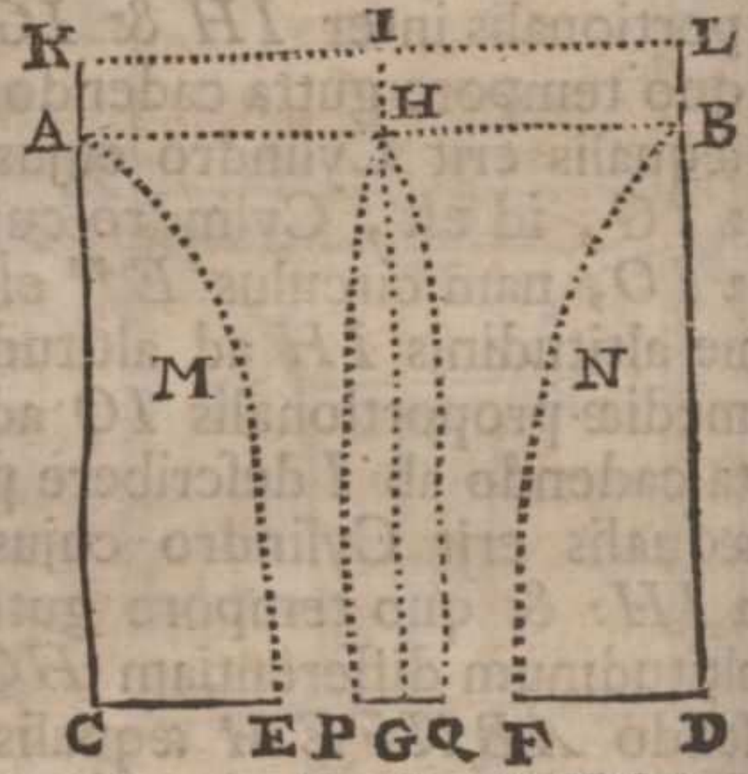
dus aquæ totius in vaſe eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut $IH+IO$ ad $2\,IH$, atque adeo ut ſumma circulorum EF & AB ad duplum circulum EF.

Corol. 4. Et hinc pondus aquæ totius in vaſe $ABDC$, eſt ad ponderis partem alteram quam fundum vaſis ſuſtinet, ut ſumma circulorum AB & EF, ad differentiam eorundem circulorum.

Corol. 5. Et ponderis pars quam fundum vaſis ſuſtinet, eſt ad ponderis partem alteram quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum AB & EF, ad duplum circulum minorem EF, ſive ut area fundi ad duplum foramen.

Corol. 6. Ponderis autem pars qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad ſummam circulorum AB & EF, ſive ut circulus AB ad exceſſum dupli circuli AB ſupra fundum. Nam ponderis pars qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius in vaſe, ut differentia circulorum AB & EF, ad ſummam eorundem circulorum, per Cor. 4; & pondus aquæ totius in vaſe eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad differentiam circulorum AB & EF. Itaque ex æquo perturbate, ponderis pars qua ſola fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad ſummam circulorum AB & EF vel exceſſum dupli circuli AB ſupra fundum.

Corol. 7. Si in medio foraminis EF locetur Circellus PQ centro G deſcriptus & horizonti parallelus; pondus aquæ quam circellus ille ſuſtinet, majus eſt pondere tertiæ partis Cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt GH. Sit enim $ABNFEM$ cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens GH ut ſupra, & congelari intelligatur aqua omnis in vaſe, tam in circuitu cataractæ quam ſupra circellum, cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ deſcenſum non requiritur. Et ſit PHQ columna aquæ ſupra circellum congelata, verticem habens H & altitudinem GH. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata $AMEC$, $BNFD$ convexa eſt in ſuperficie interna AME, BNF verſus cataractam cadentem, ſic etiam hæc columna PHQ con-



convexa erit versus cataractam, & propterea major Cono cujus basis est circellus ille $P Q$ & altitudo GH, id est, major tertia parte Cylindri eadem base & altitudine descripti. Sustinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id est, pondus quod pondere Coni seu tertiæ partis Cylindri illius majus est.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus $P Q$ sustinet, minor est pondere duarum tertiarum partium Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est HG. Nam stantibus jam positis, describi intelligatur dimidium Sphæroidis cujus basis est circellus ille & semiaxis sive altitudo est HG. Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus Cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ PHQ cujus pondus circellus ille sustinet. Nam ut motus aquæ sit maxime directus, columnæ illius superficies externa concurret cum basi $P Q$ in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua cadendo perpetuo acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cum angulus ille sit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes jacebit intra dimidium Sphæroidis. Eadem vero sursum acuta erit seu cuspidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem Sphæroidis sit infinite velocior quam ejus motus horizontem versus. Et quo minor est circellus $P Q$, eo acutior erit vertex columnæ; & circello in infinitum diminuto, angulus PHQ in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium Sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio Sphæroidis, seu duabus tertiis partibus Cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo GH. Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cum pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus $P Q$ sustinet, æquale est ponderi Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2} GH$ quamproxime. Nam pondus hocce est medium Arithmeticum inter pondera Coni & Hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valde parvus, sed augeatur donec æquet foramen EF: hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est GH.

Corol. 10. Et (quantum sentio) pondus quod circellus sustinet, est semper ad pondus Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2} GH$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2} PQq$, sive ut circulus EF ad excessum circuli hujus supra semissem circelli $P Q$ quamproxime.

De Motu Corporum.

LEMMA IV.

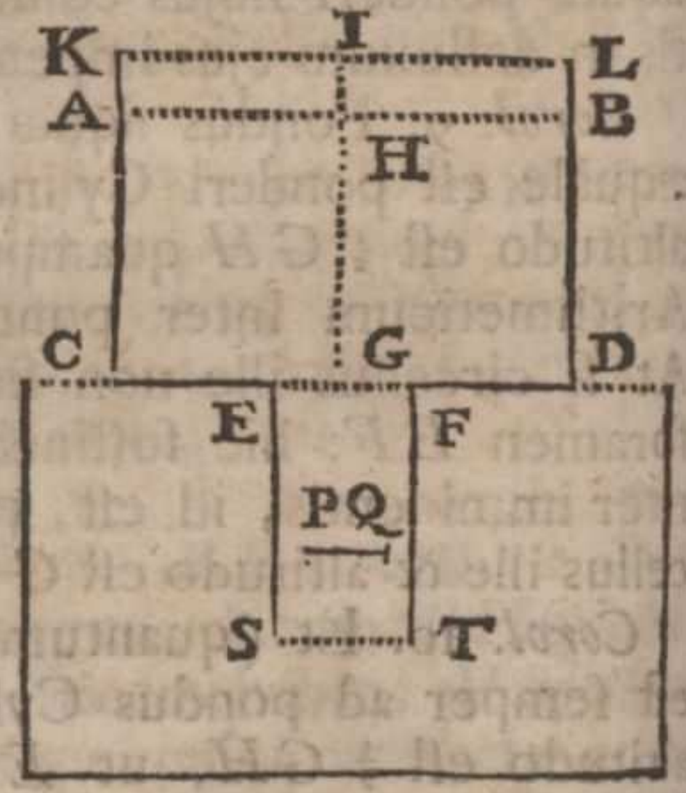
Cylindri, qui ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progreditur, reſiſtentia ex aucta vel diminuta ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem eſt cum reſiſtentia Circuli eadem diametro deſcripti & eadem velocitate ſecundum lineam rectam plano ipſius perpendicularem progredientis.

Nam latera Cylindri motui ejus minime opponuntur: & Cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminuta, in Circulum vertitur.

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compreſſo infinito & non elaſtico ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progeditur, reſiſtentia quæ oritur a magnitudine ſectionis tranſverſæ, eſt ad vim qua totus ejus motus interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri quamproxime.

Nam ſi vas *ABDC* fundo ſuo *CD* ſuperficiem aquæ ſtagnantis tangat, & aqua ex hoc vaſe per canalem Cylindricum *EFTS* horizonti perpendicularem in aquam ſtagnantem effluat, locetur autem Circellus *PQ* horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur *CA* ad *K*, ut ſit *AK* ad *CK* in duplicata ratione quam habet exceſſus orificii canalis *EF* ſupra circellum *PQ* ad circulum *AB*: manifeſtum eſt (per Caſ. 5, Caſ. 6, & Cor. 1. Prop. XXXVI.) quod velocitas aquæ tranſeuntis per ſpatium annulare inter circellum & latera vaſis, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *KC* vel *IG* acquirere poteſt.



Et

Et (per Cor. 10. Prop. xxxvi.) ſi vaſis latitudo ſit infinita, ut lineola HI evaneſcat & altitudines IG, HG æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus Cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2} IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2} PQq$ quam proxime. Nam vis aquæ, uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum PQ in quacunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia EF, ST, & aſcendat circellus in fluido undique compreſſo & aſcenſu ſuo cogat aquam ſuperiorem deſcendere per ſpatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli aſcendentis erit ad velocitatem aquæ deſcendentis ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ, & velocitas circelli aſcendentis ad ſummam velocitatum, hoc eſt, ad velocitatem relativam aquæ deſcendentis qua præterfluit circellum aſcendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF, ſive ut $EFq - PQq$ ad EFq. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati qua ſupra oſtenſum eſt aquam tranſire per idem ſpatium annulare dum circellus interea immotus manet, id eſt, velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirere poteſt: & vis aquæ in circellum aſcendentem eadem erit ac prius, per Legum Cor. 5. id eſt, Reſiſtentia circelli aſcendentis erit ad pondus Cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2} IG$ ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2} PQq$ quam proxime. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirit, ut $EFq - PQq$ ad EFq.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter $EFq - PQq$ & EFq, interque EFq & $EFq - \frac{1}{2} PQq$ accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea Velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirere poteſt, Reſiſtentia vero ejus æqualis evadet ponderi Cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo dimidium eſt altitudinis IG, a qua Cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli aſcendentis acquirat; & hac velocitate Cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis ſuæ deſcribet. Reſiſtentia autem Cylindri, hac velocitate ſecundum longitudinem ſuam progredientis, eadem eſt cum reſiſtentia circelli per Lemma iv; ideoque æqualis eſt Vi qua motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari poteſt quamproxime.

De Motu Corporum, Si longitudo Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augebitur vel minuetur in eadem ratione; adeoque vis illa qua motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ Cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per Lemma IV.

Si denſitas Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & Vis qua motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eadem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque Cylindri cujuſcunque erit ad Vim qua totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri quamproxime. *Q. E. D.*

Fluidum autem comprimi debet ut ſit continuum, continuum vero eſſe & non elaſticum ut preſſio omnis quæ ab ejus compreſſione oritur propagetur in inſtanti &, in omnes moti corporis partes æqualiter agendo, reſiſtentiam non mutet. Preſſio utique quæ a motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & Reſiſtentiam creat. Preſſio autem quæ oritur a compreſſione fluidi, utcunque fortis ſit, ſi propagetur in inſtanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque reſiſtentiam nec auget nec minuit. Certe Actio fluidi, quæ ab ejus compreſſione oritur, fortior eſſe non poteſt in partes poſticas corporis moti quam in ejus partes anticas, ideoque reſiſtentiam in hac Propoſitione deſcriptam minuere non poteſt: & fortior non erit in partes anticas quam in poſticas, ſi modo propagatio ejus infinite velocior ſit quam motus corporis preſſi. Infinite autem velocior erit & propagabitur in inſtanti, ſi modo fluidum ſit continuum & non elaſticum.

Corol. 1. Cylindrorum, qui ſecundum longitudines ſuas in Mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis Mediorum.

Corol. 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, ſed Cylindrus in Medio quieſcente incluſo ſecundum longitudinem ſuam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: Reſiſtentia ejus erit ad vim qua totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$

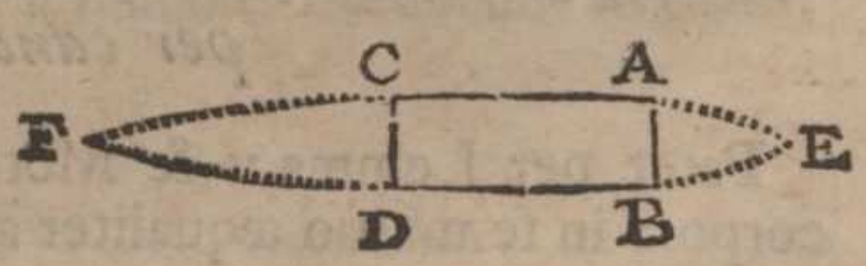
ſemel

ſemel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis, & ratione denſitatis Medii ad denſitatem Cylindri.

Corol. 3. liſdem poſitis, & quod longitudo L ſit ad quadruplum longitudinis Cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ad EFq ſemel, & ratione $EFq - PQq$ ad EFq bis: reſiſtentia Cylindri erit ad vim qua totus ejus motus, interea dum longitudinem L deſcribit, vel tolli poſſit vel generari, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri.

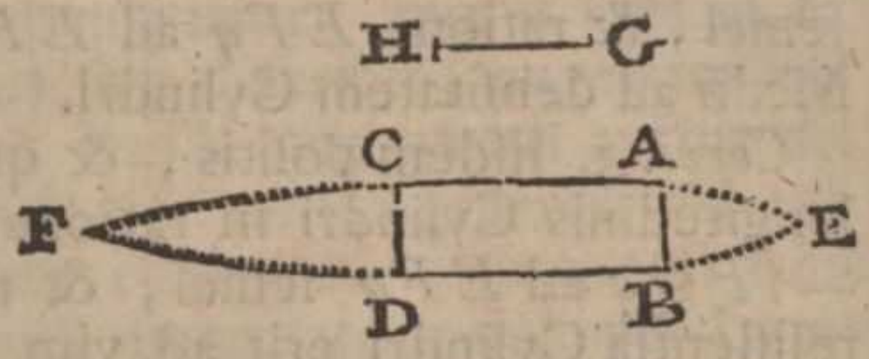
Scholium.

In hac Propoſitione reſiſtentiam inveſtigavimus quæ oritur a ſola magnitudine tranſverſæ ſectionis Cylindri, neglecta reſiſtentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri poſſit. Nam quemadmodum in caſu primo Propoſitionis XXXVI. obliquitas motuum quibus partes aquæ in vaſe, undique convergebant in foramen EF, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: ſic in hac Propoſitione, obliquitas motuum quibus partes aquæ ab anteriore Cylindri termino preſſæ, cedunt preſſioni & undique divergunt, retardat eorum tranſitum per loca in circuitu termini illius antecedentis verſus poſteriores partes Cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem diſtantiam commoveatur & reſiſtentiam auget, idque in ea fere ratione qua effluxum aquæ e vaſe diminuit, id eſt, in ratione duplicata 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in Propoſitionis illius caſu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maxima copia tranſirent per foramen EF, ponendo quod aqua omnis in vaſe quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret ſine motu: ſic in hac Propoſitione, ut obliquitas motuum tollatur, & partes aquæ motu maxime directo & breviſſimo cedentes facillimum præbeant tranſitum Cylindro, & ſola maneat reſiſtentia quæ oritur a magnitudine ſectionis tranſverſæ, quæque diminui non poteſt niſi diminuendo diametrum Cylindri, concipiendum eſt quod partes fluidi quarum motus ſunt obliqui & inutiles & reſiſtentiam creant, quieſcant inter ſe ad utrumque Cylindri terminum, & cohæreant & Cylindro jungantur. Sit $ABCD$ rectangulum, & ſint AE & BE arcus duo Parabolici axe AB deſcripti, latere autem recto quod ſit ad ſpa-



tium

De Motu Corporum.



tium HG, describendum à Cylindro cadente dum velocitatem suam acquirit, ut HG ad $\frac{1}{2}$ AB. Sint etiam CF & DF arcus alii duo Parabolici, axe CD & latere recto quod sit prioris lateris recti quadruplum descripti; & convolutione figuræ circum axem EF genere-tur solidum cujus media pars $ABDC$ sit Cylindrus de quo agimus, & partes extremæ ABE & CDF contineant partes fluidi inter se quiescentes & in corpora duo rigida concretas, quæ Cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant. Et solidi $EACFDB$, secundum longitudinem axis sui FE in partes versus E progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hac Propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim qua totus Cylindri motus, interea dum longitudo 4 AC motu illo uniformiter continuato describatur, vel tolli possit vel generari, quam densitas Fluidi habet ad densitatem Cylindri quamproxime. Et hac vi Resistentia minor esse non potest quam in ratione 2 ad 3, per Corol. 7. Prop. XXXVI.

LEMMA V.

Si Cylindrus, Sphæra & Sphærois, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis Cylindrici ita locentur successive ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

Nam spatia inter Canalem & Cylindrum, Sphæram, & Sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia: & aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

LEMMA VI.

Iisdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aqua per canalem fluente.

Patet per Lemma V & Motus Legem tertiam. Aqua utique & corpora in se mutuo æqualiter agunt.

LEMMA

LEMMA VII.

Si aqua quieſcat in canali, & corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum reſiſtentiæ inter ſe.

Conſtat ex Lemmate ſuperiore, nam motus relativi iidem inter ſe manent.

Scholium.

Eadem eſt ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri poteſt; ſed in his Lemmatis corpora eſſe politiſſima ſupponimus, & Medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus ſuis obliquis & ſuperfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare poſſunt, quieſcant inter ſe tanquam gelu conſtrictæ, & corporibus ad ipſorum partes anticas & poſticas adhæreant, perinde ut in Scholio Propoſitionis præcedentis expoſui. Agitur enim in ſequentibus de reſiſtentia omnium minima quam corpora rotunda, datis maximis ſectionibus tranſverſis deſcripta, habere poſſunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam aſcendat, ad poſticam ſubſidat, præſertim ſi figura ſint obtuſa; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & cauda ſint acutis. Et corpora in fluidis elaſticis mota, ſi ante & poſt obtuſa ſint, fluidum paulo magis condenſant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad poſticam; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & cauda ſint acutis. Sed nos in his Lemmatis & Propoſitionibus non agimus de fluidis elaſticis, ſed de non elaſticis; non de inſidentibus fluido, ſed de alte immerſis. Et ubi reſiſtentia corporum in fluidis non elaſticis innoteſcit, augenda erit hæc reſiſtentia aliquantulum tam in fluidis elaſticis, qualis eſt Aer, quam in ſuperficiebus fluidorum ſtagnantium, qualia ſunt maria & paludes.

Corol. 4. Globus in fluido compreſſo quieſcente ejuſdem ſecum denſitatis movendo, dimidiam motus ſui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipſius diametrorum deſcripſerit, per idem Corol. 7.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per Fluidum in canali Cylindrico clauſum & compreſſum uniformiter progredientis, reſiſtentia eſt ad vim qua totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra dimidium circuli maximi Globi, & ratione duplicata orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſupra circulum maximum Globi, & ratione denſitatis Fluidi ad denſitatem Globi quamproxime.

Patet per Corol. 2. Prop. XXXVII; procedit vero demonſtratio quemadmodum in Propoſitione præcedente.

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi in Medio fluidiſſimo compreſſo progredientis, invenire reſiſtentiam per Phænomena.

Sit A pondus Globi in vacuo, B pondus ejus in Medio reſiſtente, D diameter Globi, F ſpatium quod ſit ad $\frac{4}{3}$ D ut denſitas Globi ad denſitatem Medii, id eſt, ut A ad A—B, G tempus quo Globus pondere B abſque reſiſtentia cadendo deſcribit ſpatium F, & H velocitas quam Globus hocce caſu ſuo acquirit. Et erit H velocitas maxima quacum Globus, pondere ſuo B, in Medio reſiſtente poteſt deſcendere, per Corol. 2. Prop. XXXVIII; & reſiſtentia quam Globus ea cum velocitate deſcendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: reſiſtentia vero quam patitur in alia quacunque velocitate, erit ad pondus B in duplicata ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, per Corol. 1. Prop. XXXVIII.

De Motu Corporum.

Hæc eſt reſiſtentia quæ oritur ab inertia materiæ Fluidi. Ea vero quæ oritur ab elaſticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, ſic inveſtigabitur.

Demittatur Globus ut pondere ſuo B in Fluido deſcendat; & ſit P tempus cadendi, idque in minutis ſecundis ſi tempus G in minutis ſecundis habeatur. Inveniatur numerus abſolutus N qui congruit Logarithmo 0,4342944819 $\frac{2P}{G}$, ſitque L Logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquiſita erit $\frac{N-1}{N+1}$ H, altitudo autem deſcripta erit $\frac{2PF}{G}$ — 1,3862943611 F + 4,6051701 86 LF. Si Fluidum ſatis profundum ſit, negligi poteſt terminus 4,6051701 86 LF; & erit $\frac{2PF}{G}$ — 1,3862943611 F altitudo deſcripta quamproxime. Patent hæc per Libri ſecundi Propoſitionem nonam & ejus Corollaria, ex Hypotheſi quod Globus nullam aliam patiatur reſiſtentiam niſi quæ oritur ab inertia materiæ. Si vero aliam inſuper reſiſtentiam patiatur, deſcenſus erit tardior, & ex retardatione innoteſcet quantitas hujus reſiſtentiæ.

Ut corporis in Fluido cadentis velocitas & deſcenſus facilius innoteſcant, compoſui Tabulam ſequentem, cujus columna prima denotat tempora deſcenſus, ſecunda exhibet velocitates cadendo acquiſitas exiſtente velocitate maxima 100000000, tertia exhibet ſpatia temporibus illis cadendo deſcripta, exiſtente 2 F ſpatio quod corpus tempore G cum velocitate maxima deſcribit, & quarta exhibet ſpatia iiſdem temporibus cum velocitate maxima deſcripta. Numeri in quarta columna ſunt $\frac{2P}{G}$, & ſubducendo numerum 1,3862944 — 4,6051702 L, inveniuntur numeri in tertia columna, & multiplicandi ſunt hi numeri per ſpatium F ut habeantur ſpatia cadendo deſcripta. Quinta his inſuper adjecta eſt columna, quæ continet ſpatia deſcripta iiſdem temporibus a corpore, vi ponderis ſui comparativi B, in vacuo cadente.

Tempora P	*Velocitates cadentis in fluido.*	*Spatia cadendo descripta in fluido.*	*Spatia motu maximo descripta.*	*Spatia cadendo descripta in vacuo.*
0,001G	99999$\frac{29}{30}$	0,0000001F	0,002F	0,0000001F
0,01G	999967	0,0001F	0,02F	0,0001F
0,1G	9966799	1,0099834F	0,2F	0,01F
0,2G	19737532	0,0397361F	0,4F	0,04F
0,3G	29131261	0,0886815F	0,6F	0,09F
0,4G	37994896	0,1559070F	0,8F	0,16F
0,5G	46211716	0,2402290F	1,0F	0,25F
0,6G	53704957	0,3402706F	1,2F	0,36F
0,7G	60436778	0,4545405F	1,4F	0,49F
0,8G	66403677	0,5815071F	1,6F	0,64F
0,9G	71629787	0,7196609F	1,8F	0,81F
1G	76159416	0,8675617F	2F	1F
2G	96402758	2,6500055F	4F	4F
3G	99505475	4,6186570F	6F	9F
4G	99932930	6,6143765F	8F	16F
5G	99990920	8,6137964F	10F	25F
6G	99998771	10,6137179F	12F	36F
7G	99999834	12,6137073F	14F	49F
8G	99999980	14,6137059F	16F	64F
9G	99999997	16,6137057F	18F	81F
10G	99999999$\frac{1}{7}$	18,6137056F	20F	100F

Scholium.

Ut resistentias Fluidorum investigarem per Experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine interna digitorum novem pedis *Londinensis*, profunditate pedum novem cum semisse, idemque implevi aqua pluviali; & globis ex cera & plumbo incluso formatis, notavi tempora descensus globorum, existente descensus altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus *Londinensis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus solidus continet $\frac{19}{38}$ uncias libræ hujus seu grana 253$\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius descriptus continet grana 132,645

De Motu Corporum, 132,645 in Medio aeris, vel grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet alius eſt ut exceſſus ponderis ejus in vacuo ſupra pondus ejus in aqua.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat 156¼ granorum in aere & 77 granorum in aqua, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcripſit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor ſecundorum.

Pondus globi in vacuo eſt 156 $\frac{13}{18}$ *gran.*, & exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aqua eſt 72 $\frac{13}{18}$ *gran.* Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Eſt autem ut exceſſus ille ad pondus globi in vacuo, ita denſitas aquæ ad denſitatem globi, & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad ſpatium 2*F*, quod proinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius ſecundi, toto ſuo pondere granorum 156$\frac{13}{18}$, cadendo in vacuo deſcribet digitos 193$\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore, abſque reſiſtentia cadendo in aqua deſcribet digitos 95,219; & tempore G, quod ſit ad minutum unum ſecundum in ſubduplicata ratione ſpatii *F* ſeu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig.* deſcribet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quacum poteſt in aqua deſcendere. Eſt igitur tempus G 0″,15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illa maxima H, globus deſcribet ſpatium 2*F* digitorum 4,4256; ideoque tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet ſpatium digitorum 116,1245. Subducatur ſpatium 1,3862944*F* ſeu 3,0676 *dig.* & manebit ſpatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aqua, in vaſe ampliſſimo, tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcribet. Hoc ſpatium, ob anguſtiam vaſis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex ſubduplicata ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi, id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod Globus cadendo in aqua in hoc vaſe ligneo tempore minutorum quatuor ſecundorum per Theoriam deſcribere debuit quamproxime. Deſcripſit vero digitos 112 per Experimentum.

Exper. 2. Tres Globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant 76½ granorum in aere & 5$\frac{1}{18}$ granorum in aqua, ſucceſſive demittebantur; & unuſquiſque cecidit in aqua tempore minutorum ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112.

Com-

Computum ineundo prodeunt pondus globi in vacuo 76$\frac{5}{12}$ *gran.*, excessus hujus ponderis supra pondus in aqua 71$\frac{17}{18}$ *gran.*, diameter globi 0, 81296 *dig.*, octo tertiæ partes hujus diametri 2, 16789 *dig.*, spatium 2 F 2, 3217 *dig.*, spatium quod globus pondere 5$\frac{1}{18}$ *gran.*, tempore 1″, absque resistentia cadendo describat 12, 808 *dig.*, & tempus G 0″, 301056. Globus igitur, velocitate maxima quacum potest in aqua vi ponderis 5$\frac{1}{18}$ *gran.* descendere, tempore 0″, 301056 describet spatium 2, 3217 *dig.* & tempore 15″ spatium 115, 678 *dig.* Subducatur spatium 1, 3862944 F seu 1, 609 *dig.* & manebit spatium 114, 069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore in vase latissimo cadendo describere debet. Propter angustiam vasis nostri detrahi debet spatium 0, 895 *dig.* circiter. Et sic manebit spatium 113, 174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vase, tempore 15″ describere debuit per Theoriam quamproxime. Descripsit vero digitos 112. per Experimentum. Differentia est insensibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera seorsim erant 121 *gran.* in aere & 1 *gran.* in aqua, successive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, & 50″, describentes altitudinem digitorum 112.

Per Theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter. Quod tardius ceciderunt, vel bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempestatis vel manus globum demittentis, vel erroribus insensibilibus in ponderandis globis in aqua, vel denique minori proportioni resistentiæ quæ a vi inertiæ in tardis motibus oritur ad resistentiam quæ oritur ab aliis causis, tribuendum esse puto. Ideoque pondus globi in aqua debet esse plurium granorum ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus descripta cæpi ut investigarem resistentias fluidorum antequam Theoria, in propositionibus proxime præcedentibus exposita, mihi innotescceret. Postea, ut Theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine interna digitorum 8$\frac{1}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cera & plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pondere 139$\frac{1}{4}$ granorum in aere & 7$\frac{1}{4}$ granorum in aqua. Et hos demisi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad semi-minuta secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur & postea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manserant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua, & cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per

DE MOTU CORPORUM,

frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aqua extantis descensus eorum sub initio acceleraretur. Et ubi penitus immersi quiescebant, demittebantur quam cautissime, ne impulsum aliquem a manu demittente acciperent. Ceciderunt autem successive temporibus oscillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempestas jam paulo frigidior erat quam cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oscillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento sæpius capto, Globi ceciderunt maxima ex parte temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, suspicor eosdem retardatos fuisse impingendo in latera vasis.

Jam computum per Theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{7}$ granorum. Excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2 F 2,8066 *dig.* Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{3}$ granorum, tempore minuti unius secundi absque resistentia cadendo describit 9,88164 *dig.* Et tempus 0″,376843. Globus igitur, velocitate maxima quacum potest in aqua vi ponderis $7\frac{1}{3}$ granorum descendere, tempore 0″,376843 describit spatium 2,8066 digitorum, & tempore 1″ spatium 7,44766 digitorum, & tempore 25″ seu oscillationum 50 spatium 186,1915 *dig.* Subducatur spatium 1,386294 F, seu 1,9454 *dig.* & manebit spatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vase latissimo describet. Ob angustiam vasis nostri, minuatur hoc spatium in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione orificii vasis ad excessum hujus orificii supra semicirculum maximum globi, & simplici ratione ejusdem orificii ad excessum ejus supra circulum maximum globi; & habebitur spatium 181, 86 digitorum, quod globus in hoc vase tempore oscillationum 50 describere debuit per Theoriam quamproxime. Descripsit vero spatium 182. digitorum tempore oscillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per Experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{1}{2}$ *gran.* in aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in aqua, sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 29 quamproxime.

Exper.

Exper. 6. Globi quinque pondere 212¼ *gran.* in aere & 79½ in aqua, ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum 15, 15½, 16, 17 & 18, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 15 quamproxime.

Exper. 7. Globi quatuor pondere 293¼ *gran.* in aere & 35⅞ *gran.* in aqua ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum 29½, 30, 30½, 31, 32 & 33, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum ſemiſſe.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 28 quamproxime.

Cauſam inveſtigando cur globorum, ejuſdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oſcillarent circum centra, latere illo quod forte gravius eſſet, primum deſcendente, & motum oſcillatorium generante. Nam per oſcillationes ſuas, globus majorem motum communicat aquæ, quam ſi ſine oſcillationibus deſcenderet; & communicando, amittit partem motus proprii quo deſcendere deberet, & pro majore vel minore oſcillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recedit ſemper a latere ſuo quod per oſcillationem deſcendit, & recedendo appropinquat lateribus vaſis & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oſcillatio in globis gravioribus fortior eſt, & in majoribus aquam magis agitat. Quapropter, ut oſcillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cera & plumbo conſtruxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope ſuperficiem ejus; & globum ita demiſi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, eſſet infimum ab initio deſcenſus. Sic oſcillationes factæ ſunt multo minores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis ſequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor pondere granorum 139 in aere & 6½ in aqua, ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, & maxima ex parte tempore oſcillationum 51 circiter, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor pondere granorum 273¼ in aere & 140¾ in aqua, ſæpius demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum

De Motu Corporum, non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, describentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam vero hi globi cadere debuerunt tempore oscillationum $11\frac{1}{5}$ quamproxime.

Exper. 10. Globi quatuor pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, cadebant temporibus oscillationum $17\frac{1}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, describentes altitudinem digitorum $181\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oscillationum 19, nonnunquam audivi impulsum eorum in latera vasis antequam ad fundum pervenerunt.

Per Theoriam vero cadere debuerunt tempore oscillationum $15\frac{4}{9}$ quamproxime.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{10}{12}$ in aqua, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maxima ex parte 44 & 45, describentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $46\frac{5}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{1}{8}$ in aqua, aliquoties demissi, ceciderunt temporibus oscillationum 61, 62, 63, 64 & 65, describentes altitudinem digitorum 182.

Et per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $64\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per hæc Experimenta manifestum est quod, ubi globi tarde ceciderunt, ut in experimentis secundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi recte exhibentur per Theoriam: at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis sextis, nonis ac decimis, resistentia paulo major extitit quam in duplicata ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oscillant aliquantulum; & hæc oscillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motus languorem cito cessat; in gravioribus autem & majoribus, ob motus fortitudinem diutius durat, & non nisi post plures oscillationes ab aqua ambiente cohiberi potest. Quinetiam globi, quo velociores sunt, eo minus premuntur a fluido ad posticas suas partes; & si velocitas perpetuo augeatur, spatium vacuum tandem a tergo relinquent, nisi compressio fluidi simul augeatur. Debet autem compressio fluidi (per Prop. XXXII & XXXIII) augeri in duplicata ratione velocitatis, ut resistentia sit in eadem duplicata ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulo minus premuntur a tergo, & defectu pressionis, resistentia eorum fit paulo major quam in duplicata ratione velocitatis.

Con-

Congruit igitur Theoria cum phænomenis corporum cadentium in Aqua, reliquum eſt ut examinemus phænomena cadentium in Aere.

Exper. 13. A culmine Eccleſiæ *Sti. Pauli*, in urbe *Londini*, globi duo vitrei ſimul demittebantur, unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo deſcribebant altitudinem pedum *Londinenſium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis ſuſpendebatur, ad alterum peſſulo ligneo incumbebat; & globi duo huic Tabulæ impoſiti ſimul demittebantur, ſubtrahendo peſſulum, ut Tabula polis ferreis ſolummodo innixa ſuper iiſdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta ſecunda oſcillans, per filum ferreum a peſſulo ad imam Eccleſiæ partem tendens, demitteretur & oſcillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in Tabula ſequente.

Globorum mercurio plenorum.			*Globorum aere plenorum.*		
Pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi.*	*Pondera*	*Diametri*	*Tempora cadendi.*
908 *gran.*	0,8 *digit.*	4″	510 *gran.*	5,1 *digit.*	8″½
983	0,8	4—	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4+	515	5,0	8¼
808	0,75	4	483	5,0	8½
784	0,75	4+	641	5,2	8

Cæterum tempora obſervata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per Theoriam *Galilæi*) minutis quatuor ſecundis deſcribent pedes *Londinenſes* 257, & pedes 220 minutis tantum 3″ 42‴. Tabula lignea utique, detracto peſſulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tarda ſua devolutione impediebat deſcenſum globorum ſub initio. Nam globi incumbebant Tabulæ prope medium ejus, & paulo quidem propiores erant axi ejus quam peſſulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præſertim in globis majoribus qui Tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto, tempora quibus globi ſex majores cecidere, evadent 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴, & 7″ 42‴.

De Motu Corporum.

Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 conſtructus cecidit, tempore 8″ 12‴, deſcribendo altitudinem pedum 220. Pondus aquæ huic globo æqualis, eſt 16600 granorum; & pondus aëris eidem æqualis eſt $\frac{16600}{860}$ *gran.* ſeu $19\frac{3}{10}$ *gran.*; ideoque pondus globi in vacuo eſt $502\frac{3}{10}$ *gran.* & hoc pondus eſt ad pondus aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita ſunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id eſt, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in vacuo, toto ſuo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi deſcribit digitos $193\frac{1}{3}$ ut ſupra, & pondere 483 *gran.* deſcribit digitos 185, 905, & eodem pondere 483 *gran.* etiam in vacuo deſcribit ſpatium F ſeu 14 *ped.* $5\frac{1}{2}$ *dig.* tempore 57‴ 58⁗, & velocitatem maximam acquirit quacum poſſit in aere deſcendere. Hac velocitate globus, tempore 8″ 12‴, deſcribit ſpatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1, 3863 F ſeu 20 *ped.* $0\frac{1}{2}$ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc ſpatium igitur globus, tempore 8″ 12‴, cadendo deſcribere debuit per Theoriam. Deſcripſit vero ſpatium 220 pedum per experimentum. Differentia inſenſibilis eſt.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci Tabulam ſequentem.

Globorum ponderi.	*Diametri*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 220.*	*Spatia deſcribenda per Theoriam,*	*Exceſſus.*
510 *gran.*	5,1 *dig.*	8″ 12‴	226 *ped.* 11 *dig.*	6 *ped.* 11 *dig.*
642	5,2	7 42	230 9	10 9
599	5,1	7 42	227 10	7 10
515	5	7 57	224 5	4 5
483	5	8 12	225 5	5 5
641	5,2	7 42	230 7	10 7

Globorum igitur tam in Aere quam in Aqua motorum reſiſtentia prope omnis per Theoriam noſtram recte exhibetur, ac denſitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus proportionalis eſt.

In

In Scholio quod Sectioni ſextæ ſubjunctum eſt, oſtendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in Aere, Aqua, & Argento vivo motorum reſiſtentiæ ſunt ut fluidorum denſitates. Idem hic oſtendimus magis accurate per experimenta corporum cadentium in Aere & Aqua. Nam pendula ſingulis oſcillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis ſemper contrarium, & reſiſtentia ab hoc motu oriunda, ut & reſiſtentia fili quo pendulum ſuſpendebatur, totam Penduli reſiſtentiam majorem reddiderunt quam reſiſtentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in Scholio illo expoſita, globus ejuſdem denſitatis cum Aqua, deſcribendo longitudinem ſemidiametri ſuæ in Aere, amittere deberet motus ſui partem $\frac{1}{3342}$. At per Theoriam in hac ſeptima Sectione expoſitam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem deſcribendo longitudinem eandem, amittere deberet motus ſui partem tantum $\frac{1}{4586}$, poſito quod denſitas Aquæ ſit ad denſitatem Aeris ut 860 ad 1. Reſiſtentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob cauſas jam deſcriptas) quam per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cum pendulorum in Aere, Aqua, & Argento vivo oſcillantium reſiſtentiæ a cauſis ſimilibus ſimiliter augeantur, proportio reſiſtentiarum in his Mediis, tam per experimenta pendulorum, quam per experimenta corporum cadentium, ſatis recte exhibebitur. Et inde concludi poteſt quod corporum in fluidis quibuſcunque fluidiſſimis motorum reſiſtentiæ, cæteris paribus, ſunt ut denſitates fluidorum.

His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motus ſui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproxime. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus ſub initio motus, & T tempus quo globus velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}$ D ut denſitas globi ad denſitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t, amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & deſcribet ſpatium quod ſit ad ſpatium uniformi velocitate V eodem tempore deſcriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, per

Corol.

De Motu Corporum.

Corol. 7. Prop. xxxv. In motibus tardis reſiſtentia poteſt eſſe paulo minor, propterea quod figura Globi paulo aptior ſit ad motum quam figura Cylindri eadem diametro deſcripti. In motibus velocibus reſiſtentia poteſt eſſe paulo major, propterea quod elaſticitas & compreſſio fluidi non augeantur in duplicata ratione velocitatis. Sed hujuſmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis Aer, Aqua, Argentum vivum & ſimilia fluida, per diviſionem partium in infinitum, ſubtiliarentur & fierent Media infinite fluida; tamen globis projectis haud minus reſiſterent. Nam reſiſtentia, de qua agitur in Propoſitionibus præcedentibus, oritur ab inertia materiæ; & inertia materiæ corporibus eſſentialis eſt & quantitati materiæ ſemper proportionalis. Per diviſionem partium fluidi, reſiſtentia quæ oritur a tenacitate & fri&tione partium, diminui quidem poteſt: ſed quantitas materiæ per diviſionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ cui reſiſtentia, de qua hic agitur, ſemper proportionalis eſt. Ut hæc reſiſtentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in ſpatiis per quæ corpora moventur. Et propterea ſpatia Cœleſtia, per quæ globi Planetarum & Cometarum in omnes partes liberrime & abſque omni motus diminutione ſenſibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo deſtituuntur, ſi forte vapores longe tenuiſſimos & traje&os lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab exceſſu preſſionis fluidi ad projectilis partes anticas ſupra preſſionem ad ejus partes poſticas, & non minor eſſe poteſt in Mediis infinite fluidis quam in Aere, Aqua, & Argento vivo pro denſitate materiæ in ſingulis. Hic autem preſſionis exceſſus, pro quantitate ſua, non tantum motum ciet in fluido, ſed etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea reſiſtentia in omni fluido, eſt motus in fluido a projectili excitatus, nec minor eſſe poteſt in Æthere ſubtiliſſimo pro denſitate Ætheris, quam in Aere, Aqua, & Argento vivo pro denſitatibus horum fluidorum.

SECTIO

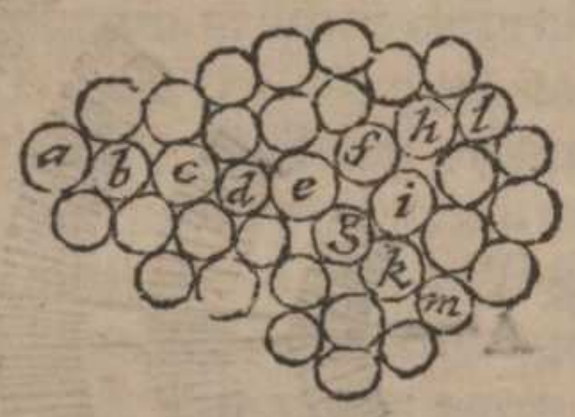
SECTIO VIII.

De Motu per Fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

Preſſio non propagatur per Fluidum ſecundum lineas rectas, niſi ubi particulæ Fluidi in directum jacent.

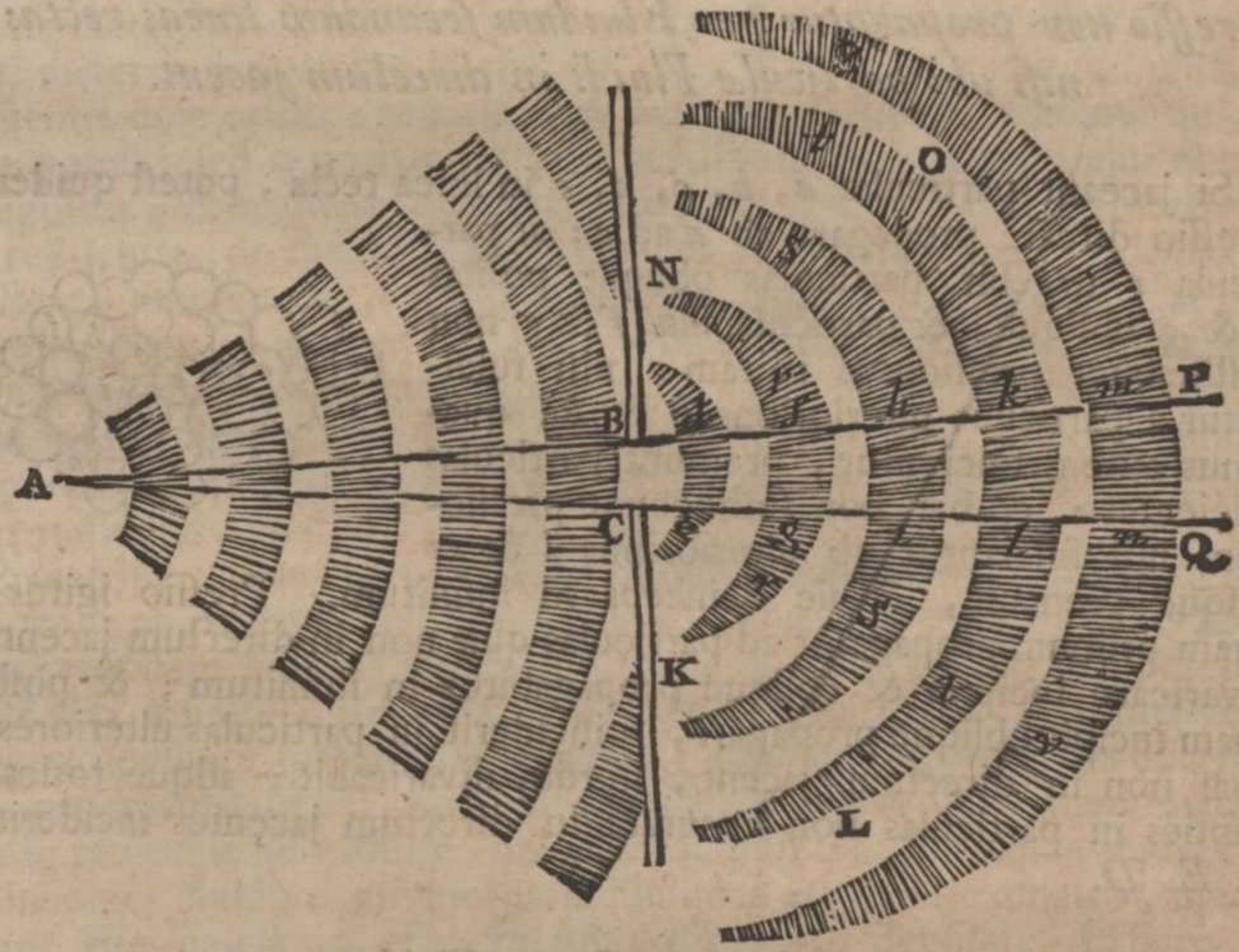
Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in linea recta, poteſt quidem preſſio directe propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas oblique poſitas *f* & *g* oblique, & particulæ illæ *f* & *g* non ſuſtinebunt preſſionem illatam, niſi fulciantur a particulis ulterioribus *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non ſuſtinebunt preſſionem niſi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* eaſque premant, & ſic deinceps in infinitum. Preſſio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & poſtquam incipit oblique propagari, ſi inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*



Corol. Si preſſionis, a dato puncto per Fluidum propagatæ, pars aliqua obſtaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in ſpatia pone obſtaculum. Id quod ſic etiam demonſtrari poteſt. A puncto *A* propagetur preſſio quaquaverſum, idque ſi fieri poteſt ſecundum lineas rectas & obſtaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem Coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* tranſit. Planis tranſverſis *de*, *fg*, *hi* diſtinguatur conus *APQ* in fruſta; & interea dum conus *ABC*, preſſionem propagando, urget fru-

De Motu Corporum,

ſtum conicum ulterius *defg* in ſuperficie *de*, & hoc fruſtum urget fruſtum proximum *fgih* in ſuperficie *fg*, & fruſtum illud urget fruſtum tertium, & ſic deinceps in infinitum; manifeſtum eſt (per motus Legem tertiam) quod fruſtum primum *defg*, reactione fruſti ſecundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie *fg*, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur *degf* inter conum *Ade* & fruſtum *fhig* comprimitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eadem comprimatur undique.



Eodem igitur impetu quo premitur in ſuperficiebus *de*, *fg*, conabitur cedere ad latera *af*, *eg*; ibique (cum rigidum non ſit, ſed omnimodo Fluidum) excurret ac dilatabitur, niſi Fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam Fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quam fruſtum *fghi* eodem impetu; & propterea preſſio non minus propagabitur a lateribus *df*, *eg* in ſpatia *NO*, *KL* hinc inde, quam propagatur a ſuperficie *fg* verſus *P*. *Q*. *Q*. *E*. *D*.

PRO-

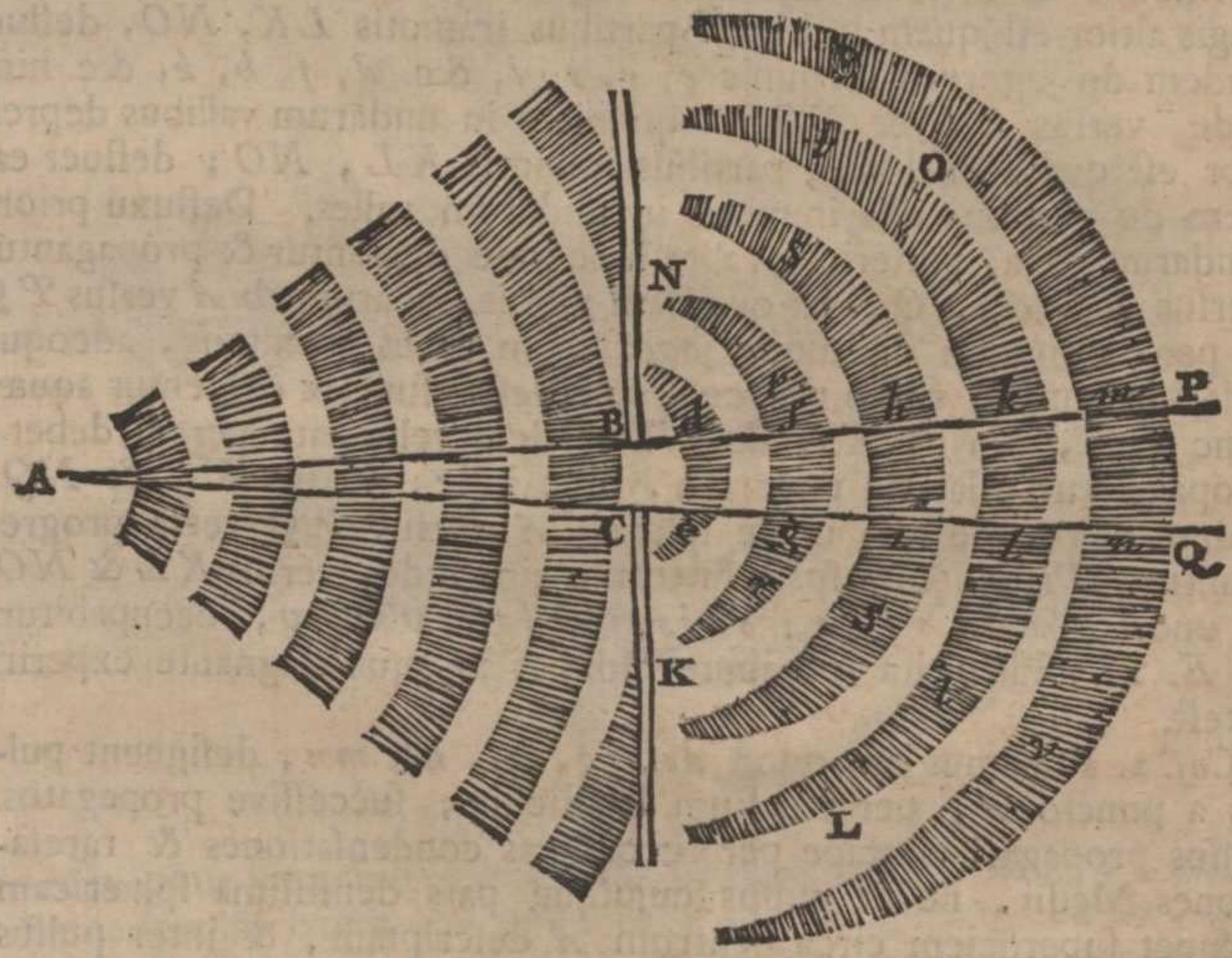
PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

Motus omnis per Fluidum propagatus divergit a recto tramite in ſpatia immota.

Caſ. 1. Propagetur motus a puncto *A* per foramen *BC* pergatque (ſi fieri poteſt) in ſpatio conico *BCQP* ſecundum lineas rectas divergentes a puncto *C*. Et ponamus primo quod motus iſte ſit undarum in ſuperficie ſtagnantis aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. undarum ſingularum partes altiſſimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem diſtinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior eſt quam in Fluidi partibus immotis *LK*, *NO*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde, verſus *KL* & *NO*: & quoniam in undarum vallibus depreſſior eſt quam in Fluidi partibus immotis *KL*, *NO*; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, poſteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur verſus *KL* & *NO*. Et quoniam motus undarum ab *A* verſus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, adeoque celerior non eſt quam pro celeritate deſcenſus; & deſcenſus aquæ, hinc inde, verſus *KL* & *NO* eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum, hinc inde, verſus *KL* & *NO*, eadem velocitate qua undæ ipſæ ab *A* verſus *PQ* recta progrediuntur. Proindeque ſpatium totum hinc inde, verſus *KL* & *NO*, ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita ſe habere quilibet in aqua ſtagnante experiri poteſt.

Caſ. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn*, deſignent pulſus a puncto *A*, per Medium Elaſticum, ſucceſſive propagatos. Pulſus propagari concipe per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones Medii, ſic ut pulſus cujuſque pars denſiſſima ſphæricam occupet ſuperficiem circa centrum *A* deſcriptam, & inter pulſus ſucceſſivos æqualia intercedant intervalla. Deſignent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. denſiſſimas pulſuum partes, per foramen *BC* propagatas. Et quoniam Medium ibi denſius eſt quam in ſpatiis hinc inde verſus *KL* & *NO*, dilatabit ſeſe tam verſus ſpatia illa *KL*, *NO* utrinque ſita, quam verſus pulſuum rariora intervalla;

De Motu Corporum. eoque pacto rarius ſemper evadens e regione intervallorum ac denſius e regione pulſuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulſuum progreſſivus motus oritur a perpetua relaxatione partium denſiorum verſus antecedentia intervalla rariora; & pulſus eadem fere celeritate ſeſe in Medii partes quieſcentes KL, NO hinc inde relaxare debent; pulſus illi eadem fere celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota KL, NO, qua propagantur directe a centro A; adeoque ſpatium totum $KLON$ occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in Sonis, qui vel monte interpoſito audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi a parietibus oppoſitis, quam a feneſtra directe propagati, quantum ex ſenſu judicare licet.



Caſ. 3. Ponamus denique quod motus cujuſcunque generis propagetur ab A per foramen BC: & quoniam propagatio iſta non fit, niſi quatenus partes Medii centro A propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ ſunt, ideoque recedunt quaquaverſum in regiones ubi minus premuntur: recedent

cedent eædem verſus Medii partes omnes quieſcentes, tam laterales *KL* & *NO*, quam anteriores *P Q*, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* tranſiit, dilatari incipiet & abinde, tanquam a principio & centro, in partes omnes directe propagari. *Q. E. D.* LIBER SECUNDUS.

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in Medio Elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum, in Medio vero non Elaſtico motum circularem excitabit.

Caſ. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu ſuo urgebunt & propellent partes Medii ſibi proximas, & urgendo compriment eaſdem & condenſabunt, dein reditu ſuo ſinent partes compreſſas recedere & ſeſe expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad inſtar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant haſce Medii partes, hæ ſimilibus tremoribus agitatæ agitabunt partes ſibi proximas, eæque ſimiliter agitatæ agitabunt ulteriores, & ſic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condenſantur & redeundo relaxantur: ſic partes reliquæ quoties eunt condenſabuntur, & quoties redeunt ſeſe expandent. Et propterea non omnes ibunt & ſimul redibunt (ſic enim determinatas ab invicem diſtantias ſervando, non rarefierent & condenſarentur per vices) ſed accedendo ad invicem ubi condenſantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt, idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condenſatæ, ob motum ſuum progreſſivum quo feriunt obſtacula, ſunt pulſus; & propterea pulſus ſucceſſivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem diſtantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus ſuis ſingulis ſingulos pulſus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant ſecundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulſus inde per Medium propagati ſeſe dilatabunt ad latera, per Propoſitionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centro communi, ſecundum ſuperficies propemodum ſphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in

De Motu Corporum, in Undis, quæ ſi digito tremulo excitentur, non ſolum pergent hinc inde ſecundum plagam motus digiti, ſed, in modum circulorum concentricorum, digitum ſtatim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas Undarum ſupplet locum vis Elaſticæ.

Caſ. 2. Quod ſi Medium non ſit Elaſticum: quoniam ejus partes a corporis tremuli partibus vibratis preſſæ condenſari nequeunt, propagabitur motus in inſtanti ad partes ubi Medium facillime cedit, hoc eſt, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem eſt caſus cum caſu corporis in Medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; ſed in circulum eundo, pergit ad ſpatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur & ad locum ſuum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non ſit firmum, ſed modis omnibus flexile, ſi tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus ſuis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem ſimul cedat; efficiet ut Medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat ſemper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. *Q. E. D.*

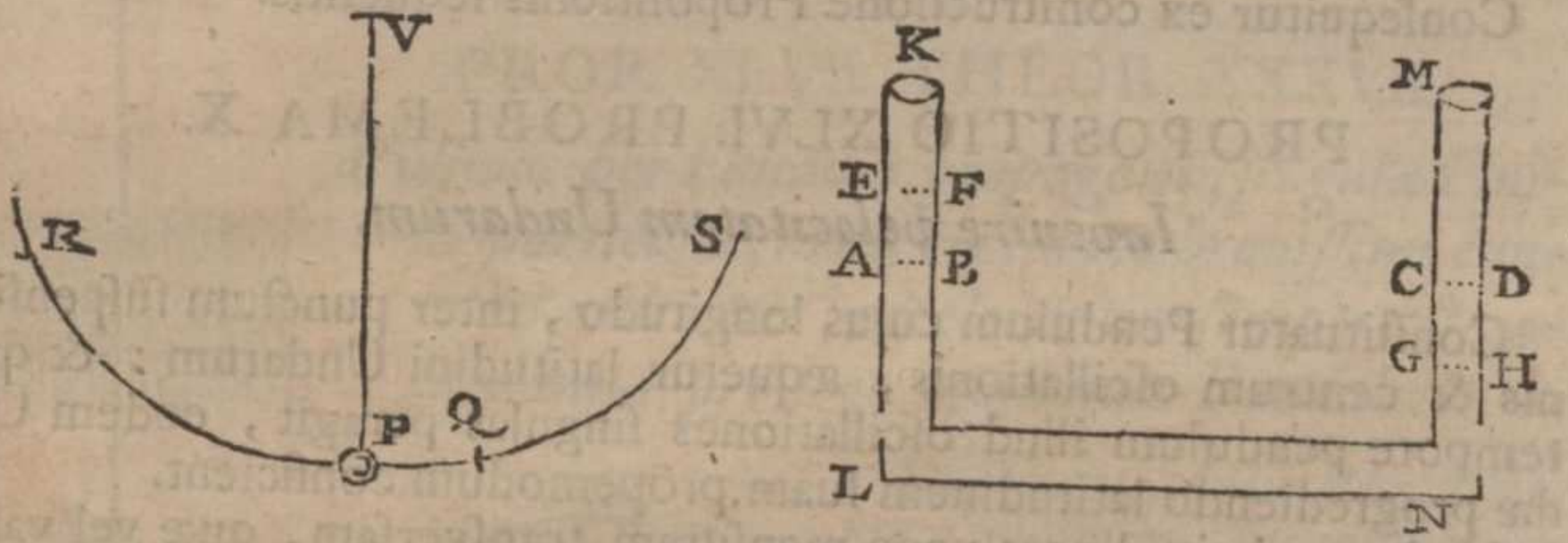
Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium Flammæ ad preſſionem, per Medium ambiens, ſecundum lineas rectas propagandam conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſola partium Flammæ, ſed a totius dilatatione derivari.

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

Si aqua in Canalis cruribus erectis KL, MN *vicibus alternis aſcendat & deſcendat; conſtruatur autem Pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in Canali: dico quod aqua aſcendet & deſcendet iiſdem temporibus quibus Pendulum oſcillatur.*

Longitudinem aquæ menſuro ſecundum axes canalis & crurum, eandem ſummæ horum axium æquando; & reſiſtentiam aquæ quæ oritur

oritur ab attritu canalis, hic non conſidero. Deſignent igitur AB, CD mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; & ubi aqua in crure KL aſcendit ad altitudinem EF deſcenderit aqua in crure MN ad altitudinem GH. Sit autem P corpus pendulum, VP filum, V punctum ſuſpenſionis, $SPQR$ Cyclois quam Pendulum deſcribat, P ejus punctum infimum, PQ arcus altitudini AE æqualis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus acceleratur



& retardatur, eſt exceſſus ponderis aquæ in alterutro crure ſupra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure KL aſcendit ad EF, & in crure altero deſcendit ad GH, vis illa eſt pondus duplicatum aquæ $EABF$, & propterea eſt ad pondus aquæ totius ut AE ſeu PQ ad VP ſeu PR. Vis etiam, qua pondus P in loco quovis Q acceleratur & retardatur in Cycloide, (per Corol. Prop. LI.) eſt ad ejus pondus totum, ut ejus diſtantia PQ a loco infimo P, ad Cycloidis longitudinem PR. Quare aquæ & penduli, æqualia ſpatia AE, PQ deſcribentium, vires motrices ſunt ut pondera movenda; ideoque, ſi aqua & pendulum in principio quieſcunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco ſimul eant & redeant. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur aquæ aſcendentis & deſcendentis, ſive motus intenſior ſit ſive remiſſior, vices omnes ſunt Iſochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali ſit pedum *Pariſienſium* $6\frac{1}{9}$; aqua tempore minuti unius ſecundi deſcendet, & tempore minuti alterius ſecundi aſcendet; & ſic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis, tempore minuti unius ſecundi oſcillatur.

De Motu Corporum.

Corol. 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione ſubduplicata.

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas eſt in ſubduplicata ratione latitudinum.

Conſequitur ex conſtructione Propoſitionis ſequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem Undarum.

Conſtituatur Pendulum cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur latitudini Undarum: & quo tempore pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam, quæ vel vallibus imis, vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet *ABCDEF* ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcendentem ac deſcendentem; ſintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc altiſſimæ ſunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, qua partes altiſſimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt pondus aquæ elevatæ; alternus ille aſcenſus & deſcenſus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, eaſdemque temporis leges obſervabit: & propterea (per Prop. XLIV.) ſi diſtantiæ inter undarum loca altiſſima *A*, *C*, *E* & infima *B*, *D*, *F* æquentur duplæ penduli longitudini; partes altiſſimæ *A*, *C*, *E*, tempore oſcillationis unius evadent infimæ, & tempore oſcillationis alterius denuo aſcendent. Igitur inter tranſitum Undarum ſingularum tempus erit oſcillationum duarum; hoc eſt, Unda deſcribet latitudinem ſuam, quo tempore pendulum illud bis oſcillatur, ſed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla eſt, adeoque æquat undarum latitudinem, oſcillabitur ſemel. *Q. E. I.*

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Pariſienſes* $3\frac{1}{18}$ latæ ſunt, tempore minuti unius ſecundi progrediendo latitudinem ſuam conficient; adeoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ ſpatio pedes 11000 quamproxime.

Corol. 2.

Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in ſubduplicata ratione latitudinis.

Hæc ita ſe habent ex Hypotheſi quod partes aquæ recta aſcendunt vel recta deſcendunt; ſed aſcenſus & deſcenſus ille verius fit per circulum, ideoque tempus hac Propoſitione non niſi quamproxime definitum eſſe affirmo.

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

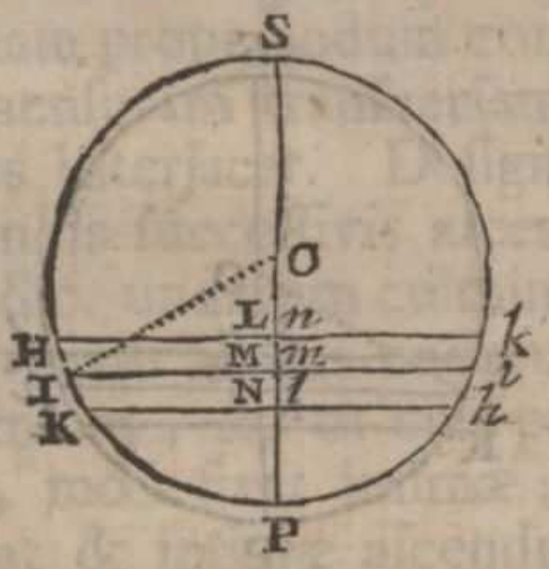
Pulſibus per Fluidum propagatis, ſingulæ Fluidi particulæ, motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes, accelerantur ſemper & retardantur pro lege oſcillantis Penduli.

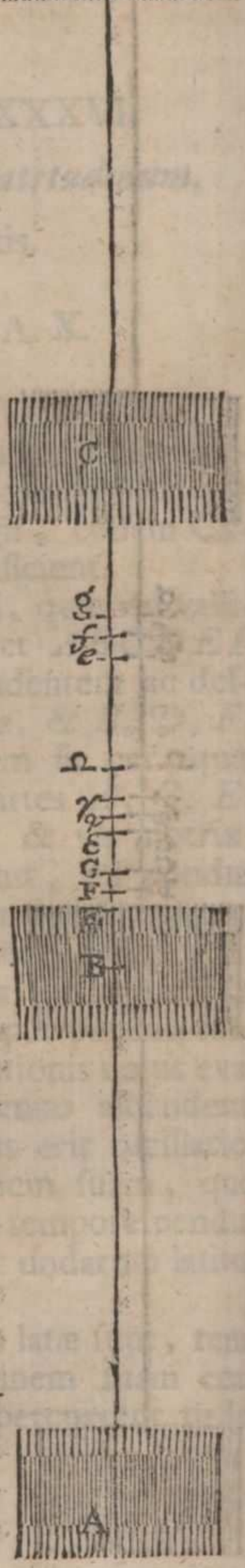
Deſignent *AB*, *BC*, *CD*, &c. pulſuum ſucceſſivorum æquales diſtantias; *ABC* plagam motus pulſuum ab *A* verſus *B* propagati; *E*, *F*, *G* puncta tria Phyſica Medii quieſcentis, in recta *AC* ad æquales ab invicem diſtantias ſita; *Ee*, *Ff*, *Gg*, ſpatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco ſingulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *EF*, *FG* lineolas Phyſicas ſeu Medii partes lineares punctis illis interjectas, & ſucceſſive tranſlatas in loca εφ, φγ & *ef*, *fg*. Rectæ *Ee* æqualis ducatur recta *PS*. Biſecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *OP* deſcribatur circulus *SIPi*. Per hujus circumferentiam totam cum partibus ſuis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipſius partibus proportionalibus; ſic ut completo tempore quovis *PH* vel *PHSh*, ſi demittatur ad *PS* perpendiculum *HL* vel *hl*, & capiatur *E*ε æqualis *PL* vel *Pl*, punctum Phyſicum *E* reperiatur

De Motu Corporum,

in ε. Hac lege punctum quodvis *E*, eundo ab *E* per ε ad *e*, & inde redeundo per ε ad *E*, iisdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes singulas peraget cum oscillante Pendulo. Probandum est quod singula Medii puncta Physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu a causa quacunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In circumferentia $PHSh$ capiantur æquales arcus HI, IK vel hi, ik, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulsuum intervallum totum BC. Et demissis perpendiculis IM, KN vel im, kn; quoniam puncta E, F, G motibus similibus successive agitantur, & vibrationes suas integras ex itu & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur a B ad C; si PH vel $PHSh$ sit tempus ab initio motus puncti E, erit PI vel $PHSi$ tempus ab initio motus puncti F, & PK vel $PHSk$ tempus ab initio motus puncti G; & propterea $E\varepsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ erunt ipsis PL, PM, PN in itu punctorum, vel ipsis Pl, Pm, Pn in punctorum reditu, æquales respective. Unde $\varepsilon\gamma$ seu $EG+G\gamma-E\varepsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG-LN$, in reditu autem æqualis $EG+ln$. Sed $\varepsilon\gamma$ latitudo est seu expansio partis Medii EG in loco $\varepsilon\gamma$; & propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem, ut $EG-LN$ ad EG; in reditu autem ut $EG+ln$ seu $EG+LN$ ad EG. Quare cum sit LN ad KH ut IM ad radium OP, & KH ad EG ut circumferentia $PHShP$ ad BC, id est (si ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulsuum BC) ut OP ad V; & ex æquo LN ad EG, ut IM ad V: erit expansio partis EG punctive Physici F in loco $\varepsilon\gamma$, ad expansionem



panſionem mediocrem quam pars illa habet in loco ſuo primo EG, ut $V-IM$ ad V in itu, utque $V+im$ ad V in reditu. Unde vis elaſtica puncti F in loco $\varepsilon\gamma$, eſt ad vim ejus elaſticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu vero ut $\frac{1}{V+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elaſticæ punctorum Phyſicorum E & G in itu, ſunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$; & virium differentia ad Medii vim elaſticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc eſt, ut $\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, ſive ut $HL-KN$ ad V, ſi modo (ob anguſtos limites vibrationum) ſupponamus HL & KN indefinite minores eſſe quantitate V. Quare cum quantitas V detur, differentia virium eſt ut $HL-KN$, hoc eſt (ob proportionales $HL-KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, dataſque HK & OP) ut OM; id eſt, ſi Ff biſecetur in Ω, ut $\Omega\phi$. Et eodem argumento differentia virium elaſticarum punctorum Phyſicorum ε & γ, in reditu lineolæ Phyſicæ $\varepsilon\gamma$ eſt ut $\Omega\phi$. Sed differentia illa (id eſt, exceſſus vis elaſticæ puncti ε ſupra vim elaſticam puncti γ,) eſt vis qua interjecta Medii lineola Phyſica $\varepsilon\gamma$ acceleratur; & propterea vis acceleratrix lineolæ Phyſicæ $\varepsilon\gamma$, eſt ut ipſius diſtantia a medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.) recte exponitur per arcum PI; & Medii pars linearis $\varepsilon\gamma$ lege præſcripta movetur, id eſt, lege oſcillantis Penduli: eſtque par ratio partium omnium linearium ex quibus Medium totum componitur. *Q. E. D.*

Corol. Hinc patet quod numerus pulſuum propagatorum idem ſit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progreſſu. Nam lineola Phyſica $\varepsilon\gamma$, quamprimum ad locum ſuum primum redierit, quieſcet; neque deinceps movebitur, niſi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulſuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quieſcet igitur quamprimum pulſus a corpore tremulo propagari deſinunt.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

De Motu Corporum,

Pulſuum in Fluido Elaſtico propagatorum velocitates, ſunt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione vis Elaſticæ directe & ſubduplicata ratione denſitatis inverſe; ſi modo Fluidi vis Elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.

Caſ. 1. Si Media ſint homogenea, & pulſuum diſtantiæ in his Mediis æquentur inter ſe, ſed motus in uno Medio intenſior ſit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non eſt hæc proportio. Verum tamen niſi contractiones & dilatationes ſint valde intenſæ, non errabit ſenſibiliter, ideoque pro Phyſice accurata haberi poteſt. Sunt autem vires Elaſticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires. Ideoque æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes, itus & reditus ſuos per ſpatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia, ſimul peragent: & propterea pulſus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem ſuam progrediendo conficiunt, & in loca pulſuum proxime præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

Caſ. 2. Sin pulſuum diſtantiæ ſeu longitudines ſint majores in uno Medio quam in altero; ponamus quod partes correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia ſingulis vicibus eundo & redeundo deſcribant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque ſi Media ſint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ Elaſticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda, eſt ut pulſuum latitudo; & in eadem ratione eſt ſpatium per quod ſingulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Eſtque tempus itus & reditus unius in ratione compoſita ex ratione ſubduplicata materiæ & ratione ſubduplicata ſpatii, atque adeo ut ſpatium. Pulſus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines ſuas conficiunt, hoc eſt, ſpatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea ſunt æquiveloces.

Caſ. 3. In Mediis igitur denſitate & vi Elaſtica paribus, pulſus omnes ſunt æquiveloces. Quod ſi Medii vel denſitas vel vis Elaſtica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis Elaſticæ, & materia movenda in ratione denſitatis augetur; tempus quo motus

tus iidem peragantur ac prius, augebitur in ſubduplicata ratione denſitatis, ac diminuetur in ſubduplicata ratione vis Elaſticæ. Et propterea velocitas pulſuum erit in ratione compoſita ex ratione ſubduplicata denſitatis Medii inverſe & ratione ſubduplicata vis Elaſticæ directe. *Q. E. D.* LIBER SECUNDUS.

Hæc Propoſitio ulterius patebit ex conſtructione ſequentis.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis Medii denſitate & vi Elaſtica, invenire velocitatem pulſuum.

Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aeris noſtri comprimi; ſitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate Medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis ſit A: & quo tempore Pendulum illud oſcillationem integram ex itu & reditu compoſitam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli radio A deſcripti æquale.

Nam ſtantibus quæ in Propoſitione XLVII conſtructa ſunt, ſi linea quævis Phyſica EF, ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium PS, urgeatur in extremis itus & reditus cujuſque locis P & S, a vi Elaſtica quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in Cycloide, cujus perimeter tota longitudini PS æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo quia vires æquales æqualia corpuſcula per æqualia ſpatia ſimul impellent. Quare cum oſcillationum tempora ſint in ſubduplicata ratione longitudinis Pendulorum, & longitudo Penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt A, in ſubduplicata ratione longitudinis $\frac{1}{2}PS$ ſeu PO ad longitudinem A. Sed vis Elaſtica qua lineola Phyſica EG, in locis ſuis extremis P, S exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione Propoſitionis XLVII.) ad ejus vim totam Elaſticam ut $HL-KN$ ad V, hoc eſt (cum punctum K jam incidat in P) ut HK ad V: & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola EG comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem EG; adeoque ex æquo, vis qua lineola EG in locis ſuis P & S urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$, ſive ut $PO \times A$ ad VV, nam HK erat ad EG ut PO ad V. Quare cum tem-

De Motu Corporum, pora, quibus æqualia corpora per æqualia ſpatia impelluntur, ſint reciproce in ſubduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa Elaſtica, ad tempus vibrationis urgente vi ponderis, in ſubduplicata ratione VV ad $PO \times A$, atque adeo ad tempus oſcillationis Penduli cujus longitudo eſt A, in ſubduplicata ratione VV ad $PO \times A$, & ſubduplicata ratione PO ad A conjunctim: id eſt, in ratione integra V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam BC. Ergo tempus quo pulſus percurrit ſpatium BC, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut V ad A, id eſt, ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium BC, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas pulſuum ea eſt quam acquirunt Gravia, æqualiter accelerato motu cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidium altitudinis A. Nam tempore caſus hujus, cum velocitate cadendo acquiſita, pulſus percurret ſpatium quod erit æquale toti altitudini A, adeoque tempore oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, percurret ſpatium æquale circumferentiæ circuli radio A deſcripti: eſt enim tempus caſus ad tempus oſcillationis ut radius circuli ad ejuſdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A ſit ut Fluidi vis Elaſtica directe & denſitas ejuſdem inverſe; velocitas pulſuum erit in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione denſitatis inverſe & ſubduplicata ratione vis Elaſticæ directe.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulſuum diſtantias.

Corporis, cujus tremore pulſus excitantur, inveniatur numerus Vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur ſpatium quod pulſus eodem tempore percurrere poſſit, & pars inventa erit pulſus unius latitudo. *Q. E. I.*

Scholium.

Spectant propoſitiones noviſſimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cum propagetur ſecundum lineas rectas, in actione ſola

(per

(per Prop. XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quam aeris pulsus propagati, per Prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint & graves, quales sunt soni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cum pondera specifica Aquæ pluvialis & Argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad $13\frac{6}{7}$ circiter, & ubi Mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus specificum Aeris & aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: erunt pondera specifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis cujus pondus aerem nostrum subjectum comprimere posset, erit 356700 digitorum, seu pedum *Anglicorum* 29725. Estque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris Problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum descripti circumferentia est pedum 186768. Et cum Pendulum digitos $39\frac{1}{7}$ longum, oscillationem ex itu & reditu compositam, tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, absolvat; Pendulum pedes 29725, seu digitos 356700 longum, oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum $190\frac{1}{4}$ absolvere debebit. Eo igitur tempore sonus progrediendo conficiet pedes 186768, adeoque tempore minuti unius secundi pedes 979. LIBER SECUNDUS.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio crassitudinis solidarum particularum aeris per quam sonus utique propagatur in instanti. Cum pondus aeris sit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, & sales sint fere duplo densiores quam aqua; si particulæ aeris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, & raritas aeris oriatur ab intervallis particularum: diameter particulæ aeris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979 quos sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{272}{9}$ seu 109 circiter, ob crassitudinem particularum aeris: & sic sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aere latentes, cum sint alterius elateris & alterius toni, vix aut ne vix quidem participant motum aeris veri quo soni propagantur. His autem quiescentibus, motus

De Motu Corporum, tus ille celerius propagabitur per ſolum aerem verum ; idque in ſubduplicata ratione minoris materiæ. Ut ſi Atmoſphæra conſtet ex decem partibus aeris veri & una parte vaporum , motus ſonorum celerior erit in ſubduplicata ratione 11 ad 10 , vel in integra circiter ratione 21 ad 20, quam ſi propagaretur per undecim partes aeris veri: ideoque motus ſonorum ſupra inventus, augendus erit in hac ratione. Quo pacto ſonus , tempore minuti unius ſecundi , conficiet pedes 1142.

Hæc ita ſe habere debent tempore verno & autumnali , ubi aer per calorem temperatum rareſcit & ejus vis elaſtica nonnihil intenditur. At hyberno tempore , ubi aer per frigus condenſatur , & ejus vis elaſtica remittitur, motus ſonorum tardior eſſe debet in ſubduplicata ratione denſitatis ; & viciſſim æſtivo tempore debet eſſe velocior.

Conſtat autem per experimenta quod ſoni tempore minuti unius ſecundi eundo, conficiunt pedes *Londinenſes* plus minus 1142 , *Pariſienſes* vero 1070.

Cognita ſonorum velocitate innoteſcunt etiam intervalla pulſuum. Invenit utique *D. Sauveur* (factis a ſe experimentis) quod fiſtula aperta, cujus longitudo eſt pedum *Pariſienſium* plus minus quinque, ſonum edit ejuſdem toni cum ſono chordæ quæ tempore minuti unius ſecundi centies recurrit. Sunt igitur pulſus plus minus centum in ſpatio pedum *Pariſienſium* 1070 , quos ſonus tempore minuti unius ſecundi percurrit ; adeoque pulſus unus occupat ſpatium pedum *Pariſienſium* quaſi $10\frac{7}{10}$, id eſt , duplam circiter longitudinem fiſtulæ. Unde veriſimile eſt quod latitudines pulſuum, in omnium apertarum fiſtularum ſonis , æquentur duplis longitudinibus fiſtularum.

Porro cur ſoni ceſſante motu corporis ſonori ſtatim ceſſant, neque diutius audiuntur ubi longiſſime diſtamus a corporibus ſonoris, quam cum proxime abſumus , patet ex Corollario Propoſitionis XLVII Libri hujus. Sed & cur ſoni in Tubis ſtenterophonicis valde augentur , ex allatis principiis manifeſtum eſt. Motus enim omnis reciprocus ſingulis recurſibus a cauſa generante augeri ſolet. Motus autem in Tubis dilatationem ſonorum impedientibus , tardius mittitur & fortius recurrit, & propterea a motu novo ſingulis recurſibus impreſſo, magis augetur. Et hæc ſunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECTIO

SECTIO IX.

De Motu Circulari Fluidorum.

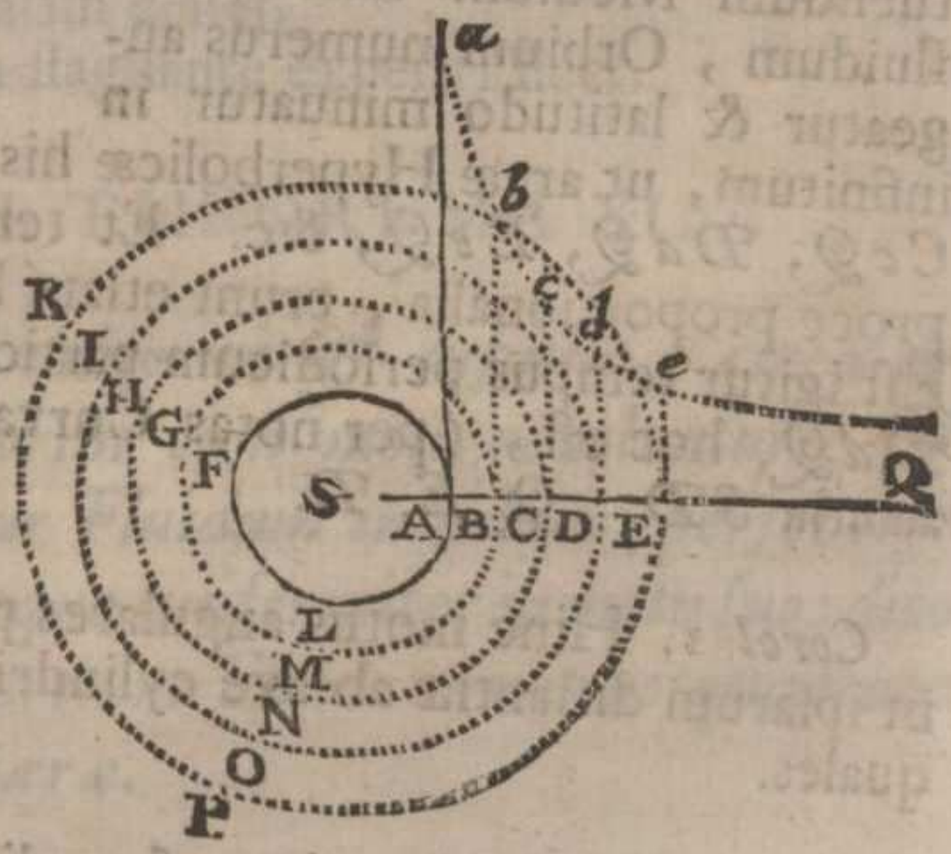
HYPOTHESIS.

REſiſtentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem eſſe velocitati, qua partes Fluidi ſeparantur ab invicem.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

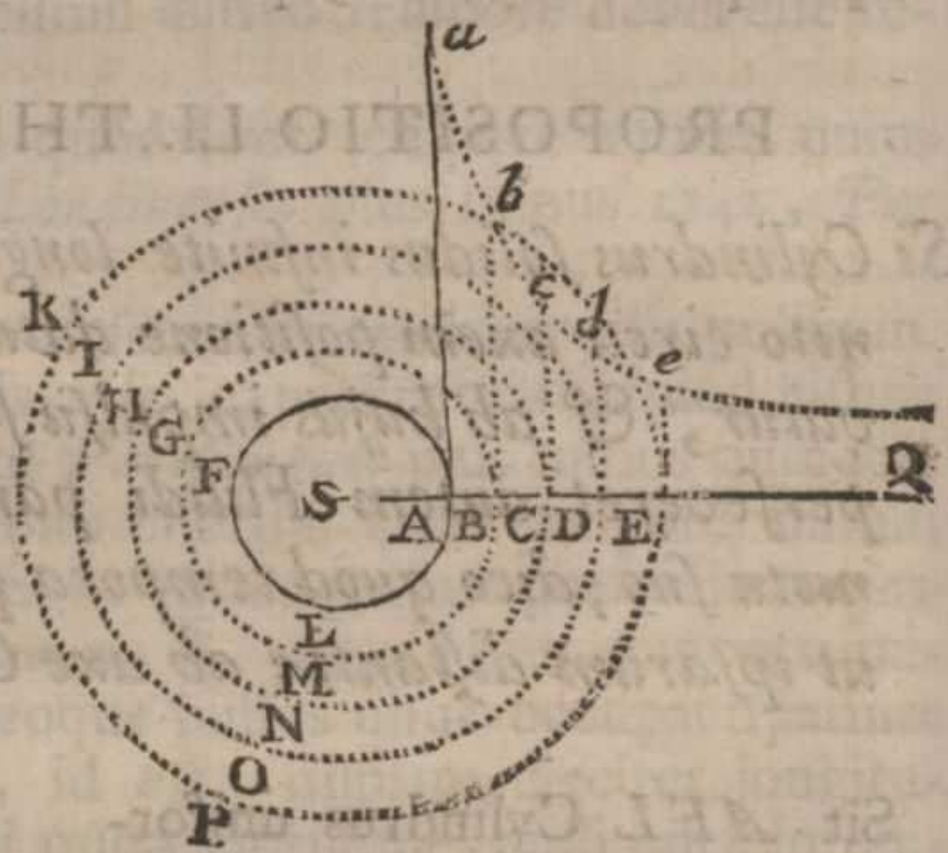
Si Cylindrus ſolidus infinite longus in Fluido uniformi & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur Fluidum in orbem, perſeveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; dico quod tempora periodica partium Fluidi ſunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe Cylindri.

Sit *AFL* Cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur Fluidum in Orbes Cylindricos innumeros concentricos ſolidos ejuſdem craſſitudinis. Et quoniam homogeneum eſt Fluidum, impreſſiones contiguorum Orbium in ſe mutuo factæ, erunt (per Hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in Orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concava quam ex



De Motu Corporum,

parte convexa ; prævalebit impreſſio fortior, & motum Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte utraque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impreſſiones ſunt ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem, erunt tranſlationes inverſe ut ſuperficies, hoc eſt, inverſe ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directe & diſtantiæ inverſe; hoc eſt (conjunctis rationibus) ut quadrata diſtantiarum inverſe. Quare ſi ad infinitæ rectæ $SABCDEQ$ partes ſingulas erigantur perpendicula Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. ipſarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. quadratis reciproce proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur linea curva Hyperbolica; erunt ſummæ differentiarum, hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee: id eſt, ſi ad conſtituendum Medium uniformiter fluidum, Orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ Hyperbolicæ his ſummis analogæ AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ, &c. Et tempora motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum particulæ cujuſvis D reciproce ut area DdQ, hoc eſt, (per notas Curvarum quadraturas) directe ut diſtantia SD. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi ſunt reciproce ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri, & velocitates abſolutæ ſunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vaſe cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, ſintque revolutionum

tionum tempora ut ipſorum ſemidiametri, & perſeveret fluidi pars unaquæque in motu ſuo; erunt partium ſingularum tempora periodica ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quam retardatur.

Corol. 4. Unde ſi toti cylindrorum & fluidi Syſtemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.

Corol. 5. Igitur ſi fluido & cylindro exteriore quieſcentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius deſinet augeri quam fluidi partes ſingulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum ſuum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior niſi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad uſque tempora periodica cylindri utriuſque æquentur inter ſe. Quod ſi cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & niſi cylindrus interior vi aliqua extrinſecus impreſſa motum illum conſervet, efficiet ut idem paulatim ceſſet.

Quæ omnia in Aqua profunda ſtagnante experiri licet.

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si Sphæra ſolida, in Fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur Fluidum in orbem; perſeveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo: dico quod tempora periodica partium Fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum à centro Sphæræ.

Caſ. 1. Sit *AFL* Sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c.

De Motu Corporum, distinguatur Fluidum in Orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem Orbes illos esse solidos; & quoniam homogeneum est Fluidum, impressiones contiguorum Orbium in se mutuo factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in Orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impressio fortior, & velocitatem Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inverse ut superficies, hoc est, inverse ut quadrata distantiarum superficierum a centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directe & distantiæ inverse; hoc est (conjunctis rationibus) ut cubi distantiarum inverse. Quare si ad rectæ infinitæ $SABCDE\mathcal{Q}$, partes singulas erigantur perpendicula Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. ipsarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. cubis reciproce proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee: id est (si ad constituendum Medium uniformiter fluidum, numerus Orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ Hyperbolicæ his summis analogæ $Aa\mathcal{Q}$, $Bb\mathcal{Q}$, $Cc\mathcal{Q}$, $Dd\mathcal{Q}$, $Ee\mathcal{Q}$, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Est igitur tempus periodicum Orbis cujusvis DIO reciproce ut area $Dd\mathcal{Q}$, hoc est, (per notas Curvarum quadraturas) directe ut quadratum distantiæ SD. Id quod volui primo demonstrare.

Cas. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuo superantes, & his rectis circa axem revolutis concipe Orbes in annulos innumeros secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet a

Globo

Globo in infinitum recta pergens, movebitur pro lege casus primi, nisi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto, attritus annulorum ad latera nullus est; neque adeo motum, quo minus hac lege fiat, impediet. Si annuli, qui a centro æqualiter distant, vel citius revolverentur vel tardius juxta polos quam juxta æquatorem; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc est, annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum a centro Globi. Quod volui secundo demonstrare.

Cas. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolute & uniformiter fluidam, & quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motus circularis, sed ad constitutionem Fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut prius. His sectionibus annuli omnes quam minimi asperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportione manebit effectuum proportio, hoc est, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cum motus circularis, & abinde orta vis centrifuga, major sit ad Eclipticam quam ad Polos; debebit causa aliqua adesse qua particulæ singulæ in circulis suis retineantur; ne materia quæ ad Eclipticam est, recedat semper a centro & per exteriora Vorticis migret ad Polos, indeque per axem ad Eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro globi, & velocitates absolutæ reciproce ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente similari & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem Vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum a centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores ob majorem suam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis ea actio-

De Motu Corporum,

ne perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eaque actione servant quantitatem motus sui plane invariatam; patet quod motus perpetuo transfertur a centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphæricas duas quasvis superficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quod motum omnem a materia interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem Vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum, a quo globus eandem semper quantitatem motus accipiat, quam imprimit in materiam Vorticis. Absque tali principio necesse est ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua constanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in Vorticem; & primo revolveretur hic Vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latius serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum Vorticis primi. Et eadem ratione qua hujus globus raperetur motu Vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuo ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus Mechanicis permitterentur, languescceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. & 4. assignatam) & Vortices tandem conquiescerent.

Corol. 9. Si globi plures datis in locis circum axes positione datos certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent Vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli, eadem ratione qua unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde Vortices non definientur certis limitibus, sed in se mutuo paulatim excurrent; globique per actiones Vorticum in se mutuo, perpetuo movebuntur de locis suis, uti in Corollario superiore expositum est; neque certam quamvis inter se positionem

positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis quæ in globos constanter impressæ conservant hosce motus, materia ob rationem in Corollario tertio & quarto assignatam, paulatim requiescet & in Vortices agi definet.

Corol. 7. Si fluidum similare claudatur in vase sphærico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agatur in Vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, sintque eorum tempora periodica ut quadrata semidiametrorum: partes fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine acceleratione & retardatione, quam sint eorum tempora periodica ut quadrata distantiarum a centro Vorticis. Alia nulla Vorticis constitutio potest esse permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum inclusum & globus servent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in se invicem, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium inter se pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde si vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum transire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone summam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi respectu plani hujus, erunt ut quadrata distantiarum suarum a centro globi.

Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem, data cum velocitate quacunque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si Systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per Corol. 8. Et motus isti per Corol. 9. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quiescant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas nisi violenter detentum, neque prius desinent fluidum & vas accelerari, quam sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod si vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis constanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad statum motus in Corollariis 8. 9. & 10. definiti, nec in alio unquam statu quocunque perseverabit. Deinde vero si, viribus illis cessantibus quibus vas & globus certis

motibus

Vortices explicari poſſint. Nam Phænomenon eſt, quod Planetarum circa Jovem revolventium tempora periodica ſunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum a centro Jovis; & eadem Regula obtinet in Planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ Regulæ in Planetis utriſque quam accuratiſſime, quatenus obſervationes Aſtronomicæ hactenus prodidere. Ideoque ſi Planetæ illi a Vorticibus circa Jovem & Solem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi Vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicata diſtantiarum a centro motus; neque poteſt ratio illa diminui & ad rationem ſeſquiplicatam reduci, niſi vel materia Vorticis eo fluidior ſit quo longius diſtat a centro, vel reſiſtentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi ſeparantur ab invicem, augeatur in majori ratione quam ea eſt in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi conſentaneum videtur. Partes craſſiores & minus fluidæ (niſi graves ſint in centrum) circumferentiam petent; & veriſimile eſt quod, etiamſi Demonſtrationum gratia Hypotheſin talem initio Sectionis hujus poſuerim ut Reſiſtentia velocitati proportionalis eſſet, tamen Reſiſtentia in minori ſit ratione quam ea velocitatis eſt. Quo conceſſo, tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quam duplicata ratione diſtantiarum ab ipſius centro: Quod ſi Vortices (uti aliquorum eſt opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius uſque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio ſeſquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere poteſt. Viderint itaque Philoſophi quo pacto Phænomenon illud rationis ſeſquiplicatæ per Vortices explicari poſſit.

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora quæ in Vortice delata in orbem redeunt, ejuſdem ſunt denſitatis cum Vortice, & eadem lege cum ipſius partibus (quoad velocitatem & curſus determinationem) moventur.

Nam ſi Vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ ſeu puncta phyſica datum ſervant ſitum inter ſe, congelari ſupponatur: hæc, quoniam neque quoad denſitatem ſuam, neque quoad vim inſitam aut figuram ſuam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: &

contra,

De Motu Corporum, contra, ſi Vorticis pars congelata & ſolida ejuſdem ſit denſitatis cum reliquo Vortice, & reſolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, niſi quatenus ipſius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter ſe. Negligatur igitur motus particularum inter ſe, tanquam ad totius motum progreſſivum nil ſpectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium a centro æqualiter diſtantium, propterea quod ſolidum in Fluidum reſolutum fit pars Vorticis cæteris partibus conſimilis. Ergo ſolidum, ſi ſit ejuſdem denſitatis cum materia Vorticis, eodem motu cum ipſius partibus movebitur, in materia proxime ambiente relative quieſcens. Sin denſius ſit, jam magis conabitur recedere a centro Vorticis quam prius; adeoque Vorticis vim illam, qua prius in Orbita ſua tanquam in æquilibrio conſtitutum retinebatur, jam ſuperans, recedet a centro & revolvendo deſcribet Spiralem, non amplius in eundem Orbem rediens. Et eodem argumento ſi rarius ſit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem Orbem niſi ſit ejuſdem denſitatis cum fluido. Eo autem in caſu oſtenſum eſt, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi a centro Vorticis æqualiter diſtantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo ſolidum quod in Vortice revolvitur & in eundem Orbem ſemper redit, relative quieſcit in fluido cui innatat.

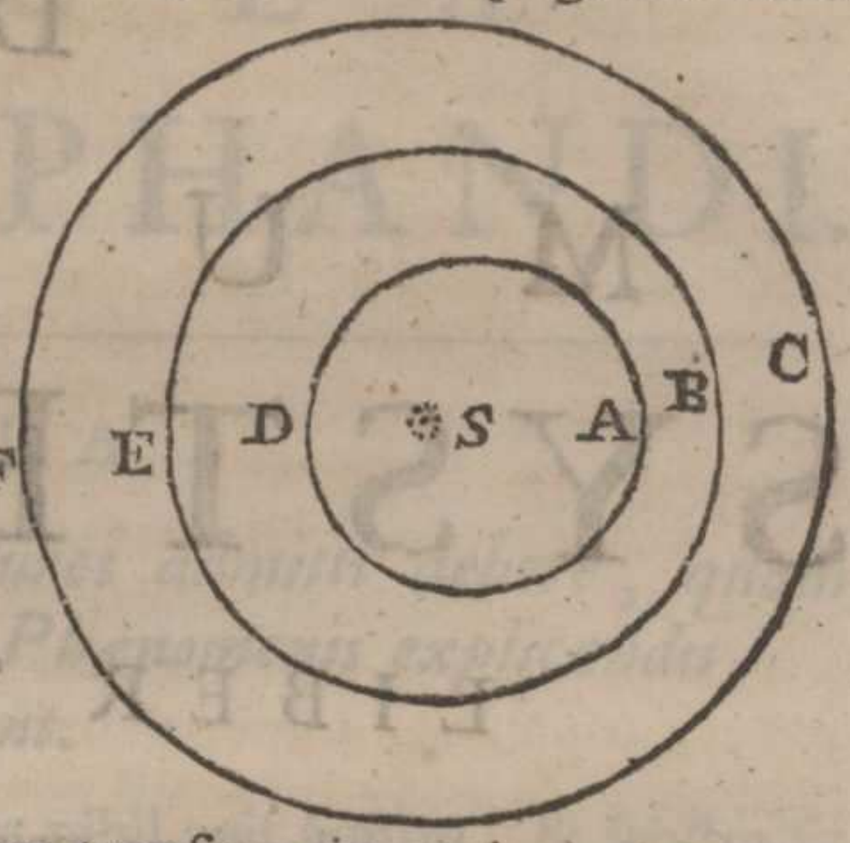
Corol. 2. Et ſi Vortex ſit quoad denſitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet a centro Vorticis diſtantiam revolvi poteſt.

Scholium.

Hinc liquet Planetas a Vorticibus corporeis non deferri. Nam Planetæ ſecundum Hypotheſin *Copernicæam* circa Solem delati revolvuntur in Ellipſibus umbilicum habentibus in Sole, & radiis ad Solem ductis areas deſcribunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Deſignent AD, BE, CF, Orbes tres circa Solem S deſcriptos, quorum extimus CF circulus ſit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia ſint A, B & Perihelia D, E. Ergo corpus quod revolvitur in Orbe CF, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales deſcribendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe BE, tardius movebitur in Aphelio B & velocius in Perihelio E, ſecundum leges Aſtronomicas; cum tamen ſecundum leges Mechanicas materia Vorticis in ſpatio anguſtiore inter A & C

velocius

velocius moveri debeat quam in ſpatio latiore inter *D* & *F*; id eſt, in Aphelio velocius quam in Perihelio. Quæ duo repugnant inter ſe. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad diſtantiam eorundem orbium in principio Signi Piſcium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piſcium debet eſſe velocior quam in principio Virginis in ratione trium ad duo. Nam quo anguſtius eſt ſpatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi Terra in hac Materia cœleſti relative quieſcens ab ea deferretur, & una circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piſcium ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis in ratione ſeſquialtera. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quam minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio Piſcium minor quam minutorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teſte) apparens iſte Solis motus major ſit in principio Piſcium quam in principio Virginis, & propterea Terra velocior in Principio Virginis quam in Principio Piſcium. Itaque Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quam ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo vero motus iſti in ſpatiis liberis abſque Vorticibus peragantur intelligi poteſt ex Libro primo, & in Mundi Syſtemate plenius docebitur.



De Mundi Systemate,

DE MUNDI SYSTEMATE

LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus principia Philoſophiæ tradidi, non tamen Philoſophica ſed Mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus Philoſophicis diſputari poſſit. Hæc ſunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philoſophiam maxime ſpectant. Eadem tamen, ne ſterilia videantur, illuſtravi Scholiis quibuſdam Philoſophicis, ea tractans quæ generalia ſunt, & in quibus Philoſophia maxime fundari videtur, uti corporum denſitatem & reſiſtentiam, ſpatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Supereſt ut ex iiſdem principiis doceamus conſtitutionem Syſtematis Mundani. De hoc argumento compoſueram Librum tertium methodo populari, ut a pluribus legeretur. Sed quibus Principia poſita ſatis intellecta non fuerint, ii vim conſequentiarum minime percipient, neque præjudicia deponent quibus a multis retro annis inſueverunt: & propterea ne res in diſputationes trahatur, ſummam libri illius tranſtuli in Propoſitiones, more Mathematico, ut ab iis ſolis legantur qui Principia prius evolverint. Veruntamen quoniam Propoſitiones ibi quam plurimæ occurrunt, quæ Lectoribus etiam Mathematice doctis moram nimiam injicere poſſint, auctor eſſe nolo ut quiſquam eas omnes evolvat; ſuffecerit ſiquis Definitiones, Leges motuum & ſectiones tres priores Libri primi ſedulo legat, dein tranſeat ad hunc Librum de Mundi Syſtemate, & reliquas Librorum priorum Propoſitiones hic citatas pro lubitu conſulat.

REGULÆ

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I.

Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ sint & earum Phænomenis explicandis sufficiant.

Dicunt utique Philosophi: Natura nihil agit frustra, & frustra fit per plura quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideoque Effectuum naturalium ejusdem generis eædem sunt Causæ.

Uti respirationis in Homine & in Bestia; descensus lapidum in *Europa* & in *America*; Lucis in Igne culinari & in Sole; reflexionis Lucis in Terra & in Planetis.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universorum habendæ sunt.

Nam qualitates corporum non nisi per experimenta innotescunt, ideoque generales statuendæ sunt quotquot cum experimentis generaliter quadrant; & quæ minui non possunt, non possunt auferri. Certe contra experimentorum tenorem somnia temere confingenda non sunt, nec a Naturæ analogia recedendum est, cum

De Mundi Systemate,

ea ſimplex eſſe ſoleat & ſibi ſemper conſona. Extenſio corporum non niſi per ſenſus innoteſcit, nec in omnibus ſentitur: ſed quia ſenſibilibus omnibus competit, de univerſis affirmatur, Corpora plura dura eſſe experimur. Oritur autem durities totius a duritie partium, & inde non horum tantum corporum quæ ſentiuntur, ſed aliorum etiam omnium particulas indiviſas eſſe duras merito concludimus. Corpora omnia impenetrabilia eſſe non ratione ſed ſenſu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem eſſe proprietatem corporum univerſorum. Corpora omnia mobilia eſſe, & viribus quibuſdam (quas vires inertiæ vocamus) perſeverare in motu vel quiete, ex hiſce corporum viſorum proprietatibus colligimus. Extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius, oritur ab extenſione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium; & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras eſſe & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiæ prædita. Et hoc eſt fundamentum Philoſophiæ totius. Porro corporum partes diviſas & ſibi mutuo contiguas ab invicem ſeparari poſſe, ex Phænomenis novimus, & partes indiviſas in partes minores ratione diſtingui poſſe ex Mathematica certum eſt. Utrum vero partes illæ diſtinctæ & nondum diviſæ per vires Naturæ dividi & ab invicem ſeparari poſſint, incertum eſt. At ſi vel unico conſtaret experimento quod particula aliqua indiviſa, frangendo corpus durum & ſolidum, diviſionem pateretur: concluderemus vi hujus Regulæ, quod non ſolum partes diviſæ ſeparabiles eſſent, ſed etiam quod indiviſæ in infinitum dividi poſſent.

Denique ſi corpora omnia in circuitu Terræ gravia eſſe in Terram, idque pro quantitate materiæ in ſingulis, & Lunam gravem eſſe in Terram pro quantitate materiæ ſuæ, & viciſſim mare noſtrum grave eſſe in Lunam, & Planetas omnes graves eſſe in ſe mutuo, & Cometarum ſimilem eſſe gravitatem, per experimenta & obſervationes Aſtronomicas univerſaliter conſtet: dicendum erit per hanc Regulam quod corpora omnia in ſe mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex Phænomenis de gravitate univerſali, quam de corporum impenetrabilitate: de qua utique in corporibus Cœleſtibus nullum experimentum, nullam prorſus obſervationem habemus.

PHÆNO-

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON I.

Planetas Circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiplicata distantiarum ab ipsius centro.

CONstat ex observationibus Astronomicis. Orbes horum Planetarum non differunt sensibiliter a circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora vero periodica esse in sesquiplicata ratione semidiametrorum Orbium consentiunt Astronomi; & idem ex Tabula sequente manifestum est.

Satellitum Jovialium tempora periodica.

$1^d. 18^h. 27'. 34''.$ $3^d. 13^h. 13'. 42''.$ $7^d. 3^h. 42'. 36''.$ $16^d. 16^h. 32'. 9''.$

Distantiæ Satellitum a centro Jovis.

	1	2	3	4	
Ex observationibus					
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis.
Townlei *per Microm.*	5, 52	8. 78	13, 47	24, 72	
Cassini *per Telescop.*	5	8	13	23	
Cassini *per Eclips. Satell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
Ex temporibus periodicis.	5,667	9,017	14,384	25,299	

PHÆNOMENON II.

Planetas Circumsaturnios, radiis ad Saturnum ductis, areas describere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica esse in ratione sesquiplicata distantiarum ab ipsius centro.

Cassinus utique ex observationibus suis distantias eorum a centro Saturni & periodica tempora hujusmodi esse statuit.

Satelli-

De Mundi Systemate,

Satellitum Saturniorum tempora periodica.

$1^d. 21^h. 19'.$ $2^d. 17^h. 41'.$ $4^d. 13^h. 47'.$ $15^d. 22^h. 41'.$ $79^d. 22^h. 4'.$

Distantiæ Satellitum a centro Saturni in semidiametris Annuli.

Ex observationibus	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis	1,95.	2,5.	3,52.	8,09.	23.71.

PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum Orbibus suis Solem cingere.

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plena facie lucentes ultra Solem siti sunt, dimidiata e regione Solis, falcata cis Solem; per discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex Martis quoque plena facie prope Solis conjunctionem, & gibbosa in quadraturis, certum est quod is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur.

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, & (vel Solis circa Terram vel) Terræ circa Solem tempora periodica esse in ratione sesquiplicata mediocrium distantiarum à Sole.

Hæc a *Keplero* inventa ratio in confesso est apud omnes. Eadem utique sunt tempora periodica, eædemque orbium dimensiones, sive Sol circa Terram, sive Terra circa Solem revolvatur. Ac de mensura quidem temporum periodicorum convenit inter Astronomos universos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentissime ex Observationibus determinaverunt: & distantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis respondent, non differunt sensibiliter a distantiis quas illi invenerunt, suntque inter ipsas ut plurimum intermediæ; uti in Tabula sequente videre licet.

Plane-

Planetarum ac Telluris diſtantiæ mediocres à Sole.

	♄	♃	♂	☿	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	953806.	520116.	152399.	100000.	72333.	38710.

De diſtantiis Mercurii & Veneris a Sole diſputandi non eſt locus, cum hæ per eorum Elongationes à Sole determinentur. De diſtantiis etiam ſuperiorum Planetarum à Sole tollitur omnis diſputatio per Eclipſes Satellitum Jovis. Etenim per Eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentrica. Ex longitudinibus autem Heliocentrica & Geocentrica inter ſe collatis determinatur diſtantia Jovis.

PHÆNOMENON V.

Planetas primarios, radiis ad Terram ductis, areas deſcribere temporibus minime proportionales; at radiis ad Solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam reſpectu Terræ nunc progrediuntur, nunc ſtationarii ſunt, nunc etiam regrediuntur: At Solis reſpectu ſemper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, ſed paulo celerius tamen in Periheliis ac tardius in Apheliis, ſic ut arearum æquabilis ſit deſcriptio. Propoſitio eſt Aſtronomis notiſſima, & in Jove apprime demonſtratur per Eclipſes Satellitum, quibus Eclipſibus Heliocentricas Planetæ hujus longitudines & diſtantias à Sole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum Terræ ducto, aream tempori proportionalem deſcribere.

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipſius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus Lunaris aliquantulum à vi Solis, ſed errorum inſenſibiles minutias in hiſce Phænomenis negligo.

De Mundi Systemate,

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus Planetæ Circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in Orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum Jovis, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.

Patet pars prior Propoſitionis per Phænomenon primum, & Propoſitionem ſecundam vel tertiam Libri primi: & pars poſterior per Phænomenon primum, & Corollarium ſextum Propoſitionis quartæ ejuſdem Libri.

Idem intellige de Planetis qui Saturnum comitantur, per Phænomenon ſecundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Vires, quibus Planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in Orbibus ſuis retinentur, reſpicere Solem, & eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.

Patet pars prior Propoſitionis per Phænomenon quintum, & Propoſitionem ſecundam Libri primi: & pars poſterior per Phænomenon quartum, & Propoſitionem quartam ejuſdem Libri. Accuratiſſime autem demonſtratur hæc pars Propoſitionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicata (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) motum Apſidum in ſingulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

PROPOSITIO III. PROBLEMA III.

Vim qua Luna retinetur in Orbe ſuo reſpicere Terram, & eſſe reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Patet aſſertionis pars prior per Phænomenon ſextum, & Propoſitionem ſecundam vel tertiam Libri primi: & pars poſterior per motum tardiſſimum Lunaris Apogæi. Nam motus ille, qui ſingulis revolutionibus eſt graduum tantum trium & minutorum trium in conſequentia, contemni poteſt. Patet enim (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) quod ſi diſtantia Lunæ a centro Terræ ſit ad ſemidiametrum Terræ ut D ad 1; vis a qua motus talis oriatur ſit reciproce ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id eſt, reciproce ut ea ipſius D dignitas cujus index eſt $2\frac{4}{243}$, hoc eſt, in ratione diſtantiæ paulo majore quam duplicata inverſe, ſed quæ partibus $59\frac{1}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Oritur vero ab actione Solis (uti poſthac dicetur) & propterea hic negligendus eſt. Actio Solis quatenus Lunam diſtrahit a Terra, eſt ut diſtantia Lunæ a Terra quamproxime; ideoque (per ea quæ dicuntur in Corol. 2. Prop. XLV. Lib. I.) eſt ad Lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, ſeu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglecta Solis vi tantilla, vis reliqua qua Luna retinetur in Orbe erit reciproce ut D^2. Id quod etiam plenius conſtabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propoſitione ſequente.

Corol. Si vis centripeta mediocris qua Luna retinetur in Orbe, augeatur primo in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicata ſemidiametri Terræ ad mediocrem diſtantiam centri Lunæ a centro Terræ: habebitur vis centripeta Lunaris ad ſuperficiem Terræ, poſito quod vis illa deſcendendo ad ſuperficiem Terræ, perpetuo augeatur in reciproca altitudinis ratione duplicata.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Lunam gravitare in Terram, & vi gravitatis retrahi ſemper a motu rectilineo, & in Orbe ſuo retineri.

Lunæ diſtantia mediocris a Terra in Syzygiis eſt ſemidiametrorum terreſtrium, ſecundum pleroſque Aſtronomorum 59, ſecundum *Vendelinum* 60, ſecundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, & ſecundum *Ty-*

De Mundi Systemate,

chonem $56\frac{1}{2}$. Aſt *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum ſequuntur, conſtituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quam Fixarum, idque ſcrupulis quaſi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin Lunæ ſcrupulis totidem, hoc eſt, quaſi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & diſtantia evadet quaſi $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium, fere ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum; & Lunarem periodum reſpectu Fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Aſtronomis ſtatuitur; atque ambitum Terræ eſſe pedum Pariſienſium 123249600, uti a *Gallis* menſurantibus definitum eſt: Et ſi Luna motu omni privari fingatur ac dimitti ut, urgente vi illa omni qua in Orbe ſuo retinetur, deſcendat in Terram; hæc ſpatio minuti unius primi cadendo deſcribet pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$. Colligitur hoc ex calculo vel per Propoſitionem XXXVI. Libri primi, vel (quod eodem recidit) per Corollarium nonum Propoſitionis quartæ ejuſdem Libri, confecto. Nam arcus illius quem Luna tempore minuti unius primi, medio ſuo motu, ad diſtantiam ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium deſcribat, ſinus verſus eſt pedum Pariſienſium $15\frac{1}{12}$ circiter. Unde cum vis illa accedendo ad Terram augeatur in duplicata diſtantiæ ratione inverſa, adeoque ad ſuperficiem Terræ major ſit partibus 60×60 quam ad Lunam; corpus vi illa in regionibus noſtris cadendo, deſcribere deberet ſpatio minuti unius primi pedes Pariſienſes $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, & ſpatio minuti unius ſecundi pedes $15\frac{1}{12}$. Atqui corpora in regionibus noſtris vi gravitatis cadendo, deſcribunt tempore minuti unius ſecundi pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$, uti *Hugenius* factis pendulorum experimentis & computo inde inito, demonſtravit: & propterea (per Reg. I. & II.) vis qua Luna in orbe ſuo retinetur, illa ipſa eſt quam nos Gravitatem dicere ſolemus. Nam ſi Gravitas ab ea diverſa eſt, corpora viribus utriſque conjunctis Terram petendo, duplo velocius deſcendent, & ſpatio minuti unius ſecundi cadendo deſcribent pedes Pariſienſes $30\frac{1}{6}$: omnino contra Experientiam.

Calculus hic fundatur in hypotheſi quod Terra quieſcit. Nam ſi Terra & Luna circum Solem moveantur, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: diſtantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium; uti computationem (per Prop. LX. Lib. I.) ineunti patebit.

PRO-

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Planetas Circumjoviales gravitare in Jovem, Circumſaturnios in Saturnum, & Circumſolares in Solem, & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper à motibus rectilineis, & in Orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones Planetarum Circumjovialium circa Jovem, Circumſaturniorum circa Saturnum, & Mercurii ac Veneris reliquorumque Circumſolarium circa Solem ſunt Phænomena ejuſdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea per Reg. II. à cauſis ejuſdem generis dependent: præſertim cum demonſtratum ſit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, reſpiciant centra Jovis, Saturni ac Solis, & recedendo à Jove, Saturno & Sole decreſcant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decreſcit in receſſu à Terra.

Corol. 1. Gravitas igitur datur in Planetas univerſos. Nam Venerem, Mercurium, cæteroſque eſſe corpora ejuſdem generis cum Jove & Saturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis (per motus Legem tertiam) mutua ſit, Jupiter in Satellites ſuos omnes, Saturnus in ſuos, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem, quæ Planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Corol. 3. Graves ſunt Planetæ omnes in ſe mutuo per Corol. 1. & 2. Et hinc Jupiter & Saturnus prope conjunctionem ſe invicem attrahendo, ſenſibiliter perturbant motus mutuos, Sol perturbat motus Lunares, Sol & Luna perturbant Mare noſtrum, ut in ſequentibus explicabitur.

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

Corpora omnia in Planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus diſtantiis à centro Planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.

Deſcenſus gravium omnium in Terram (dempta ſaltem inæquali retardatione quæ ex Aeris perexigua reſiſtentia oritur) æqualibus

De Mundi Systemate,

temporibus fieri, jamdudum obſervarunt alii ; & accuratiſſime quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in Auro, Argento, Plumbo, Vitro, Arena, Sale communi, Ligno, Aqua, Tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam Ligno, & idem Auri pondus ſuſpendebam (quam potui exacte) in alterius centro oſcillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, conſtituebant Pendula, quoad pondus, figuram, & aeris reſiſtentiam omnino paria: Et paribus oſcillationibus, juxta poſitæ, ibant una & redibant diutiſſime. Proinde copia materiæ in Auro (per Corol. 1. & 6. Prop. XXIV. Lib. II.) erat ad copiam materiæ in Ligno, ut vis motricis actio in totum Aurum ad ejuſdem actionem in totum Lignum ; hoc eſt, ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quam pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſto deprehendi potuit. Jam vero naturam gravitatis in Planetas eandem eſſe atque in Terram, non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc Terreſtria ad uſque Orbem Lunæ, & una cum Luna motu omni privata demitti, ut in Terram ſimul cadant ; & per jam ante oſtenſa certum eſt quod temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum Luna, adeoque quod ſunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam Satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum à centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciproce ut quadrata diſtantiarum à centro Jovis ; & propterea in æqualibus a Jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia ; perinde ut fit in gravibus, in hac Terra noſtra. Et eodem argumento Planetæ circumſolares ab æqualibus à Sole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in Solem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora ; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porro Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari ; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. I. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ ſuæ, quam cæteri : motus Satellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si (paribus à Sole diſtantiis) Satelles aliquis gravior eſſet in Solem pro quantitate

titate materiæ ſuæ, quam Jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quacunque data, puta *d* ad *e*: diſtantia inter centrum Solis & centrum Orbis Satellitis, major ſemper foret quam diſtantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione ſubduplicata quam proxime; uti calculis quibuſdam initis inveni. Et ſi Satelles minus gravis eſſet in Solem in ratione illa *d* ad *e*, diſtantia centri Orbis Satellitis à Sole minor foret quam diſtantia centri Jovis à Sole in ratione illa ſubduplicata. Igitur ſi in æqualibus à Sole diſtantiis, gravitas acceleratrix Satellitis cujuſvis in Solem major eſſet vel minor quam gravitas acceleratrix Jovis in Solem, parte tantum milleſima gravitatis totius; foret diſtantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quam diſtantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius, id eſt, parte quinta diſtantiæ Satellitis extimi à centro Jovis: Quæ quidem Orbis eccentricitas foret valde ſenſibilis. Sed Orbes Satellitum ſunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondere Saturni & Comitum ejus in Solem, in æqualibus à Sole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis: Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla ſunt, vel earum maſſis accurate proportionalia. Aliqua autem ſunt per Corol. 1. & 3. Prop. v.

Quinetiam pondera partium ſingularum Planetæ cujuſque in alium quemcunque, ſunt inter ſe ut materia in partibus ſingulis. Nam ſi partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quam pro quantitate materiæ: Planeta totus, pro genere partium quibus maxime abundet, gravitaret magis vel minus quam pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ ſint vel internæ. Nam ſi verbi gratia corpora Terreſtria, quæ apud nos ſunt, in Orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore Lunæ: Si horum pondera eſſent ad pondera partium externarum Lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera vero partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam ſupra oſtenſum eſt.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materia: omnino contra Experientiam.

Corol.

De Mundi Systemate.

Corol. 2. Corpora universa quæ circa Terram sunt, gravia sunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ distant, sunt ut quantitates materiæ in iisdem. Hæc est qualitas omnium in quibus experimenta instituere licet, & propterea per Reg. III. de universis affirmanda est. Si Æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino destitueretur, vel pro quantitate materiæ suæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Aristotelis*, *Cartesii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus nisi in forma materiæ, posset idem per mutationem formæ gradatim transmutari in corpus ejusdem conditionis cum iis quæ, pro quantitate materiæ, quam maxime gravitant, & vicissim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, possent gravitatem suam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, possentque cum formis variari, contra quam probatum est in Corollario superiore.

Corol. 3. Spatia omnia non sunt æqualiter plena. Nam si spatia omnia æqualiter plena essent, gravitas specifica fluidi quo regio aeris impleretur, ob summam densitatem materiæ, nil cederet gravitati specificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuscunque densissimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aere descendere posset. Nam corpora in fluidis, nisi specifice graviora sint, minime descendunt. Quod si quantitas materiæ in spatio dato per rarefactionem quamcunque diminui possit, quidni diminui possit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ solidæ sint ejusdem densitatis, neque absque poris rarefieri possint, Vacuum datur. Ejusdem densitatis esse dico, quarum vires inertiæ sunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis gravitatis diversi est generis à vi magnetica. Nam attractio magnetica non est ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi potest & remitti, estque nonnunquam longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis, & in recessu à Magnete decrescit in ratione distantiæ non duplicata, sed fere triplicata, quantum ex crassis quibusdam observationibus animadvertere potui.

PRO-

De Mundi Systemate,

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

Si Globorum duorum in ſe mutuo gravitantium materia undique, in regionibus quæ a centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciproce ut quadratum diſtantiæ inter centra.

Poſtquam inveniſſem gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & eſſe in partes ſingulas reciproce proportionalem quadratis diſtantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accurate in vi tota ex viribus pluribus compoſita, an vero quam proxime. Nam fieri poſſet ut proportio, quæ in majoribus diſtantiis ſatis accurate obtineret, prope ſuperficiem Planetæ ob inæquales particularum diſtantias & ſitus diſſimiles, notabiliter erraret. Tandem vero, per Prop. LXXV. & LXXVI. Libri primi & ipſarum Corollaria, intellexi veritatem Propoſitionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter ſe comparari poſſunt pondera corporum in diverſos Planetas. Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium ſunt (per Corol. 2. Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directe & quadrata temporum periodicorum inverſe; & pondera ad ſuperficies Planetarum, aliasve quasvis à centro diſtantias, majora ſunt vel minora (per hanc Propoſitionem) in duplicata ratione diſtantiarum inverſa. Sic ex temporibus periodicis Veneris circum Solem dierum 224 & horarum $16\frac{1}{4}$, Satellitis extimi circumjovialis circum Jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, Satellitis Hugeniani circum Saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{5}{7}$, & Lunæ circum Terram dierum 27, hor. 7. min. 43, collatis cum diſtantia mediocri Veneris a Sole & cum elongationibus maximis heliocentricis Satellitis extimi circumjovialis a centro Jovis 8′. 21 $\frac{1}{2}$″, Satellitis Hugeniani a centro Saturni 3′. 20″, & Lunæ a Terra 10′, computum ineundo inveni quod corporum æqualium & a Sole, Jove, Saturno ac Terra æqualiter diſtantium pondera in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram forent ad invicem ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ reſpective. Eſt enim parallaxis Solis ex obſervationibus noviſſimis quaſi 10″, & *Halleius* noſter per emerſiones Jovis & Satellitum e parte obſcura Lunæ,

Lunæ, determinavit quod elongatio maxima heliocentrica Satellitis extimi Jovialis a centro Jovis in mediocri Jovis a Sole distantia sit 8′. 21½″, & diameter Jovis 41″. Ex duratione Eclipseon Satellitum in umbram Jovis incidentium prodit hæc diameter quasi 40″, atque adeo semidiameter 20″. Mensuravit autem *Hugenius* elongationem maximam heliocentricam Satellitis a se detecti 3′. 20″ a centro Saturni, & hujus elongationis pars quarta, nempe 50″, est diameter annuli Saturni e Sole visi, & diameter Saturni est ad diametrum annuli ut 4 ad 9, ideoque semidiameter Saturni e Sole visi est 11″. Subducatur lux erratica quæ haud minor esse solet quam 2″. vel 3″: Et manebit semidiameter Saturni quasi 9″. Ex hisce autem & Solis semidiametro mediocri 16′. 6″ computum ineundo prodeunt veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ semidiametri ad invicem ut 10000, 1077, 889 & 104. Unde, cum pondera æqualium corporum a centris Solis, Jovis, Saturni ac Terræ æqualiter distantium, sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram, ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$ & $\frac{1}{227512}$ respective, & auctis vel diminutis distantiis pondera diminuantur vel augeantur in duplicata ratione: pondera æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram in distantiis 10000, 1077, 889, & 104 ab eorum centris, atque adeo in eorum superficiebus, erunt ut 10000, 835, 525, & 410 respective. Quanta sint pondera corporum in superficie Lunæ dicemus in sequentibus.

Corol. 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in Planetis singulis. Nam quantitates materiæ in Planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantiis ab eorum centris, id est, in Sole, Jove, Saturno ac Terra sunt ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ respective. Si parallaxis Solis statuatur major vel minor quam 10″, debebit quantitas materiæ in Terra augeri vel diminui in triplicata ratione.

Corol. 3. Innotescunt etiam densitates Planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in Sphæras homogeneas sunt in superficiebus Sphærarum ut Sphærarum diametri, per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque Sphærarum heterogenearum densitates sunt ut pondera illa applicata ad Sphærarum diametros. Erant autem veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 1077, 889, & 104, & pondera in eosdem ut 10000, 835, 525, & 410, & propterea densitates sunt ut 100, 78, 59, & 396. Densitas Terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet a parallaxi Solis, sed determinatur per parallaxin Lunæ, & propterea

rent. Eaque de Cauſa Globus terreus aquis undique coopertus, ſi rarior eſſet quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppoſita. Et par eſt ratio Terræ noſtræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc ſi denſior non eſſet, emergeret ex maribus, & parte ſui pro gradu levitatis extaret ex Aqua, maribus omnibus in regionem oppoſitam confluentibus. Eodem argumento maculæ Solares leviores ſunt quam materia lucida Solaris cui ſupernatant. Et in formatione qualicumque Planetarum, materia omnis gravior, quo tempore maſſa tota fluida erat, centrum petebat. Unde cum Terra communis ſuprema quaſi duplo gravior ſit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quaſi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: veriſimile eſt quod copia materiæ totius in Terra quaſi quintuplo vel ſextuplo major ſit quam ſi tota ex aqua conſtaret; præſertim cum Terram quaſi quintuplo denſiorem eſſe quam Jovem jam ante oſtenſum ſit. Igitur ſi Jupiter paulo denſior ſit quam aqua, hic ſpatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 ſemidiametrorum ſuarum deſcribit, amitteret in Medio ejuſdem denſitatis cum Aere noſtro motus ſui partem fere decimam. Verum cum reſiſtentia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac denſitatis, ſic ut aqua, quæ partibus $13\frac{3}{4}$ levior eſt quam argentum vivum, minus reſiſtat in eadem ratione; & aer, qui partibus 850 levior eſt quam aqua, minus reſiſtat in eadem ratione: ſi aſcendatur in cœlos ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſiſtentia prope ceſſabit.

HYPOTHESIS I.

Centrum Syſtematis Mundani quieſcere.

Hoc ab omnibus conceſſum eſt, dum aliqui Terram alii Solem in centro Syſtematis quieſcere contendant. Videamus quid inde ſequatur.

PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

Commune centrum gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quieſcere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quieſcet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo ſemper

De Mundi Systemate,

progrediente, centrum Mundi quoque movebitur contra Hypotheſin.

PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

Solem motu perpetuo agitari, ſed nunquam longe recedere a communi gravitatis centro Planetarum omnium.

Nam cum (per Corol. 2. Prop. VIII.) materia in Sole ſit ad materiam in Jove ut 1033 ad 1, & diſtantia Jovis a Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo majore; incidet commune centrum gravitatis Jovis & Solis in punctum paulo ſupra ſuperficiem Solis. Eodem argumento cum materia in Sole ſit ad materiam in Saturno ut 2411 ad 1, & diſtantia Saturni a Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo minore; incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra ſuperficiem Solis. Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo ſi Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte conſiſterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis diametro a centro Solis diſtaret. Aliis in caſibus diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quieſcit, Sol pro vario Planetarum ſitu in omnes partes movebitur, ſed à centro illo nunquam longe recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum eſt. Nam cum Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in ſe mutuo, & propterea, pro vi gravitatis ſuæ, ſecundum leges motus perpetuo agitentur: perſpicuum eſt quod horum centra mobilia pro Mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet in quod corpora omnia maxime gravitant (uti vulgi eſt opinio) privilegium iſtud concedendum eſſet Soli. Cum autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, a quo centrum Solis quam minime diſcedit; & a quo idem adhuc minus diſcederet, ſi modo Sol denſior eſſet & major, ut minus moveretur.

PRO-

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetæ moventur in Ellipſibus umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales.

Diſputavimus ſupra de his motibus ex Phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes a priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro Solis; ſi Sol quieſceret & Planetæ reliqui non agerent in ſe mutuo, forent orbes eorum Elliptici, Solem in umbilico communi habentes, & areæ deſcriberentur temporibus proportionales (per Prop. I. & XI, & Corol. I. Prop. XIII. Lib. I.) Actiones autem Planetarum in ſe mutuo perexiguæ ſunt (ut poſſint contemni) & motus Planetarum in Ellipſibus circa Solem mobilem minus perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quam ſi motus iſti circa Solem quieſcentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non eſt omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem eſt ad gravitatem in Solem (paribus diſtantiis) ut 1 ad 1033; adeoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam diſtantia Saturni a Jove eſt ad diſtantiam Saturni a Sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16 × 1033 ſeu 1 ad 204 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis Saturni in ſingulis Planetæ hujus cum Jove conjunctionibus adeo ſenſibilis ut ad eandem Aſtronomi hæreant. Pro vario ſitu Planetæ in his conjunctionibus, Eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminuitur, Aphelium nunc promovetur nunc forte retrahitur, & medius motus per vices acceleratur & retardatur. Error tamen omnis in motu ejus circum Solem a tanta vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere poteſt conſtituendo umbilicum inferiorem Orbis ejus in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) & propterea ubi maximus eſt, vix ſuperat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix ſuperat minuta duo prima annuatim. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem ſunt fere ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 2411}{25}$ ſeu 124986, adeoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum eſt ad gravitatem

Jovis

De Mundi Systemate, Jovis in Solem ut 65 ad 124986 seu 1 ad 1923. Huic autem differentiæ proportionalis est maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis Jovialis longe minor est quam ea Saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longe minores, præterquam quod Orbis Terræ sensibiliter perturbatur a Luna. Commune centrum gravitatis Terræ & Lunæ, Ellipsin circum Solem in umbilico positum percurrit, & radio ad Solem ducto areas in eadem temporibus proportionales describit, Terra vero circum hoc centrum commune motu menstruo revolvitur.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

Orbium Aphelia & Nodi quiescunt.

Aphelia quiescunt, per Prop. XI. Lib. I. ut & Orbium plana, per ejusdem Libri Prop. I. & quiescentibus planis quiescunt Nodi. Attamen a Planetarum revolventium & Cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem hic contemni possunt.

Corol. 1. Quiescunt etiam Stellæ fixæ, propterea quod datas ad Aphelia Nodosque positiones servant.

Corol. 2. Ideoque cum nulla sit earum parallaxis sensibilis ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immensam corporum distantiam nullos edent sensibiles effectus in regione Systematis nostri. Quinimo Fixæ in cœli partes æqualiter dispersæ contrariis attractionibus vires mutuas destruunt, per Prop. LXX. Lib. I.

Scholium.

Cum Planetæ Soli propiores (nempe Mercurius, Venus, Terra, & Mars) ob corporum parvitatem parum agant in se invicem: horum Aphelia & Nodi quiescent, nisi quatenus a viribus Jovis, Saturni, & corporum superiorum turbentur. Et inde colligi potest per theoriam gravitatis, quod horum Aphelia moventur aliquantulum in consequentia respectu fixarum, idque in proportione sesquiplicata distantiarum horum Planetarum a Sole. Ut si Aphelium Martis in annis centum conficiat 35′ in consequentia respectu fixarum; Aphelia Terræ, Veneris, & Mercurii in annis centum conficient 18′, 36″, 11′. 27″, & 4′. 29″ respective. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hac Propositione.

PRO-

PROPOSITIO XV. PROBLEMA I.

Invenire Orbium principales diametros.

Capiendæ ſunt hæ in ratione ſubſeſquiplicata temporum periodicorum, per Prop. xv. Lib. I. deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum Solis & Planetæ cujuſque revolventis ad primam duarum medie proportionalium inter ſummam illam & Solem, per Prop. LX. Lib. I.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA II.

Invenire Orbium Eccentricitates & Aphelia.

Problema confit per Prop. XVIII. Lib. I.

PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

Planetarum motus diurnos uniformes eſſe, & librationem Lunæ ex ipſius motu diurno oriri.

Patet per motus Legem I. & Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. I. Quoniam vero Lunæ, circa axem ſuum uniformiter revolventis, dies menſtruus eſt; hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ipſius ſemper reſpiciet, & propterea pro ſitu umbilici illius deviabit hinc inde a Terra. Hæc eſt libratio in longitudinem. Nam libratio in latitudinem orta eſt ex inclinatione axis Lunaris ad planum orbis. Porro hæc ita ſe habere, ex Phænomenis manifeſtum eſt.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

Axes Planetarum diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores eſſe.

Planetæ ſublato omni motu circulari diurno figuram Sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem aſcendere conentur. Ideoque materia ſi fluida ſit

De Mundi Systemate,

aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem vero deſcenſu ſuo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (conſentientibus Aſtronomorum obſervationibus) brevior deprehenditur inter polos quam ab oriente in occidentem. Eodem argumento, niſi Terra noſtra paulo altior eſſet ſub æquatore quam ad polos, Maria ad polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo, ibi omnia inundarent.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

Invenire proportionem axis Planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Picartus menſurando arcum gradus unius & 22′. 55″ inter *Ambianum* & *Malvoiſinam*, invenit arcum gradus unius eſſe hexapedarum Pariſienſium 57060. Unde ambitus Terræ eſt pedum Pariſienſium 123249600, ut ſupra. Sed cum error quadringenteſimæ partis digiti, tam in fabrica inſtrumentorum quam in applicatione eorum ad obſervationes capiendas, ſit inſenſibilis, & in Sectore decempedali quo *Galli* obſervarunt Latitudines locorum reſpondeat minutis quatuor ſecundis, & in ſingulis obſervationibus incidere poſſit tam ad centrum Sectoris quam ad ejus circumferentiam, & errores in minoribus arcubus ſint majoris momenti: * ideo *Caſſinus* juſſu Regio menſuram Terræ per majora locorum intervalla aggreſſus eſt, & ſubinde per diſtantiam inter Obſervatorium Regium *Pariſienſe* & villam *Colioure* in *Rouſſillon* & Latitudinum differentiam 6gr. 18′, ſupponendo quod figura Terræ ſit Sphærica, invenit gradum unum eſſe hexapedarum 57292, prope ut *Norwoodus* noſter antea invenerat. Hic enim circa annum 1635, menſurando diſtantiam pedum Londinenſium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, & obſervando differentiam Latitudinum 2gr. 28′, collegit menſuram gradus unius eſſe pedum Londinenſium 367196, id eſt, hexapedarum Pariſienſium 57300. Ob magnitudinem intervalli a *Caſſino* menſurati, pro menſura gradus unius in medio intervalli illius, id eſt, inter Latitudines 45gr. & 46gr. uſurpabo hexapedas 57292. Unde, ſi Terra ſit Sphærica, ſemidiameter ejus erit pedum Pariſienſium 19695539.

* Vide Hiſtoriam Academiæ Regiæ ſcientiarum anno 1700.

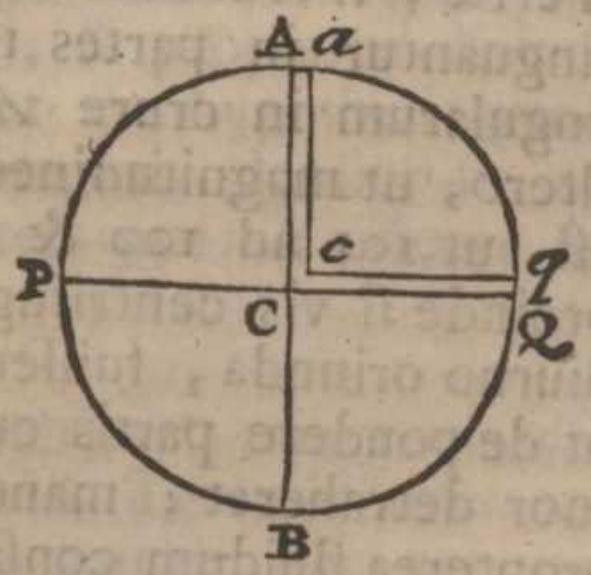
Penduli-

Penduli in Latitudine *Lutetiæ Parisiorum* ad minuta secunda oscillantis longitudo est pedum trium Parisiensium & linearum $8\frac{5}{9}$. Et longitudo quod grave tempore minuti unius secundi cadendo describit, est ad dimidiam longitudinem penduli hujus, in duplicata ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit *Hugenius*) ideoque est pedum Parisiensium 15, dig. 1, lin. $2\frac{1}{13}$, seu linearum $2174\frac{1}{13}$.

Corpus in circulo, ad distantiam pedum 19695539 a centro, singulis diebus sidereis horarum 23. 56′. 4″ uniformiter revolvens, tempore minuti unius secundi describit arcum pedum 1436, 223, cujus sinus versus est pedum 0,05236558, seu linearum 7,54064. Ideoque vis qua gravia descendunt in Latitudine *Lutetiæ*, est ad vim centrifugam corporum in Æquatore, a Terræ motu diurno oriundam, ut $2174\frac{1}{13}$ ad 7,54064.

Vis centrifuga corporum in Æquatore, est ad vim centrifugam qua corpora directe tendunt a Terra in Latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50′, in duplicata ratione Radii ad sinum complementi Latitudinis illius, id est, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim qua gravia descendunt in Latitudine *Lutetiæ*, & corpus in Latitudine *Lutetiæ* vi tota gravitatis cadendo, tempore minuti unius secundi describeret lineas 2177, 32, seu pedes Parisienses 15, dig. 1, & lin. 5,32. Et vis tota gravitatis in Latitudine illa, erit ad vim centrifugam corporum in Æquatore Terræ, ut 2177,32 ad 7,54064, seu 289 ad 1.

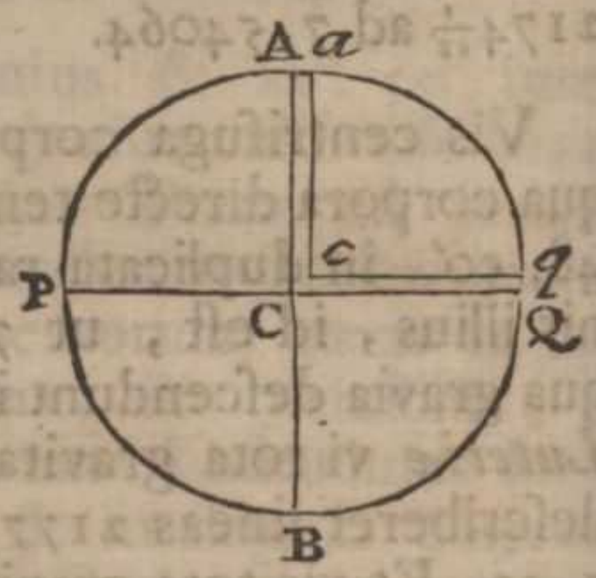
Unde si $APBQ$ figuram Terræ designet jam non amplius Sphæricam sed revolutione Ellipseos circum axem minorem PQ genitam, sitque $ACQqca$ canalis aquæ plena, a polo Qq ad centrum Cc, & inde ad Æquatorem Aa pergens: debebit pondus aquæ in canalis crure $ACca$, esse ad pondus aquæ in crure altero $QCcq$ ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam e ponderis partibus 289 sustinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure sustinebit reliquas. Porro (ex Propositionis XCI. Corollario secundo, Lib. I.) computationem ineundo, invenio quod si Terra constaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & esset ejus axis PQ



ad

De Mundi Systemate,

ad diametrum AB ut 100 ad 101 : gravitas in loco Q in Terram, foret ad gravitatem in eodem loco Q in Sphæram centro C radio PC vel QC descriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco A in Sphæroidem, convolutione Ellipseos $APBQ$ circa axem AB descriptam, est ad gravitatem in eodem loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ut 125 ad 126. Est autem gravitas in loco A in Terram, media proportionalis inter gravitates in dictam Sphæroidem & Sphæram : propterea quod Sphæra, diminuendo diametrum PQ in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus AB, PQ perpendicularis est, vertitur in dictam Sphæroidem, & gravitas in A, in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proxime. Est igitur gravitas in A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ad gravitatem in A in Terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco Q in Sphæram centro C radio QC descriptam, est ad gravitatem in loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id est, ut 100 ad 101. Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101 : & fiet gravitas in loco Q in Terram, ad gravitatem in loco A in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, seu ut 501 ad 500.



Jam cum (per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I.) gravitas in canalis crure utrovis $ACca$ vel $QCcq$ sit ut distantia locorum a centro Terræ ; si crura illa superficiebus transversis & æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure $ACca$ ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim ; id est, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est, ut 505 ad 501. Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure $ACca$ ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujusque, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret ; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 289, hoc est, vis centrifuga quæ deberet esse ponderis pars $\frac{4}{505}$, est tantum pars $\frac{1}{289}$.

Et

Et propterea dico, ſecundum Regulam auream, quod ſi vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *ACca* ſuperet altitudinem aquæ in crure *QCcq* parte centeſima totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut exceſſus altitudinis in crure *ACca* ſit altitudinis in crure altero *QCcq* pars tantum $\frac{1}{229}$. Eſt igitur diameter Terræ ſecundum æquatorem ad ipſius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum Terræ ſemidiameter mediocris, juxta menſuram *Caſſini*, ſit pedum Pariſienſium 19695539, ſeu milliarium 3939 (poſito quod milliare ſit menſura pedum 5000) Terra altior erit ad Æquatorem quam ad Polos exceſſu pedum 85820, ſeu milliarium $17\frac{1}{6}$.

Si Planeta major ſit vel minor quam Terra manente ejus denſitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum ſecundum æquatorem. At ſi motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eadem duplicata ratione quamproxime. Et ſi denſitas Planetæ augeatur vel minuatur in ratione quavis, gravitas etiam in ipſum tendens augebitur vel minuetur in eadem ratione, & differentia diametrorum viciſſim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cum Terra reſpectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, Jupiter autem horis 9. 56′, ſintque temporum quadrata ut 29 ad 5, & denſitates ut 5 ad 1: differentia diametrorum Jovis erit ad ipſius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{5}{1} \times \frac{1}{229}$ ad 1, ſeu 1 ad 8 quamproxime. Eſt igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut 9 ad 8 quamproxime, & propterea diameter inter polos eſt $35\frac{1}{2}''$. Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quod uniformis ſit Planetarum materia. Nam ſi materia denſior ſit ad centrum quam ad circumferentiam; diameter quæ ab oriente in occidentem ducitur, erit adhuc major.

Jovis vero diametrum quæ polis ejus interjacet minorem eſſe diametro altera *Caſſinus* dudum obſervavit, & Terræ diametrum inter polos minorem eſſe diametro altera patebit per ea quæ dicentur in Propoſitione ſequente.

De Mundi Systemate,

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

Invenire & inter se comparare Pondera corporum in Terræ hujus regionibus diversis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum, cruribus similiter sitarum partium reciproce ut crura, id est, reciproce ut 230 ad 229. Et par est ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus similiter sitorum corporum. Horum pondera sunt reciproce ut crura, id est, reciproce ut distantiæ corporum a centro Terræ. Proinde si corpora in supremis canalium partibus, sive in superficie Terræ consistant; erunt pondera eorum ad invicem reciproce ut distantiæ eorum a centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam Terræ superficiem regionibus, sunt reciproce ut distantiæ locorum a centro; & propterea, ex Hypothesi quod Terra Sphærois sit, dantur proportione.

Unde tale confit Theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab Æquatore ad Polos, sit quam proxime ut sinus versus Latitudinis duplicatæ, vel, quod perinde est, ut quadratum sinus recti Latitudinis. Et in eadem circiter ratione augentur arcus graduum Latitudinis in Meridiano Ideoque cum Latitudo *Lutetiæ Parisiorum* sit $48^{gr.}\ 50'$, ea locorum sub Æquatore $00^{gr.}\ 00'$, & ea locorum ad Polos $90^{gr.}$ & duplorum sinus versi sint 11334, 00000 & 20000, existente Radio 10000, & gravitas ad Polum sit ad gravitatem sub Æquatore ut 230 ad 229, & excessus gravitatis ad Polum ad gravitatem sub Æquatore ut 1 ad 229: erit excessus gravitatis in Latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem sub Æquatore, ut $1 \times \frac{11334}{20000}$ ad 229, seu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. Quare cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, & in Latitudine *Lutetiæ Parisiorum* longitudo penduli singulis minutis secundis oscillantis sit pedum trium Parisiensium & linearum $8\frac{5}{9}$: longitudo penduli sub Æquatore superabitur a longitudine synchroni penduli *Parisiensis*, excessu lineæ unius & 87 partium millesimarum lineæ. Et simili computo confit Tabula sequens.

Latitudo

Latitudo Loci	*Longitudo Penduli*	*Mensura Gradus unius in Meridiano*
Gr.	Ped. Lin.	Hexaped.
0	3 . 7,468	56909
5	3 . 7,482	56914
10	3 . 7,526	56931
15	3 . 7,596	56959
20	3 . 7,692	56996
25	3 . 7,811	57042
30	3 . 7,948	57096
35	3 . 8,099	57155
40	3 . 8,261	57218
1	3 . 8,294	57231
2	3 . 8,327	57244
3	3 . 8,361	57257
4	3 . 8,394	57270
45	3 . 8,428	57283
6	3 . 8,461	57296
7	3 . 8,494	57309
8	3 . 8,528	57322
9	3 . 8,561	57335
50	3 . 8,594	57348
55	3 . 8,756	57411
60	3 . 8,907	57470
65	3 . 9,044	57524
70	3 . 9,162	57570
75	3 . 9,258	57607
80	3 . 9,329	57635
85	3 . 9,372	57652
90	3 . 9,387	57657

Constat autem per hanc Tabulam, quod graduum inæqualitas tam parva sit, ut in rebus Geographicis figura Terræ pro Sphærica haberi possit, quodque inæqualitas diametrorum Terræ facilius & certius per experimenta pendulorum deprehendi possit vel etiam per Eclipses Lunæ, quam per arcus Geographice mensuratos in Meridiano.

Hæc

BIBLIOTECA PUBLICA E ARQUIVO DISTRITAL DE ÉVORA

De Mundi Systemate, Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quod Terra ex uniformi materia conſtat. Nam ſi materia ad centrum paulo denſior ſit quam ad ſuperficiem, differentiæ pendulorum & graduum Meridiani paulo majores erunt quam pro Tabula præcedente, propterea quod ſi materia ad centrum redundans qua denſitas ibi major redditur, ſubducatur & ſeorſim ſpectetur, gravitas in Terram reliquam uniformiter denſam, erit reciproce ut diſtantia ponderis a centro; in materiam vero redundantem reciproce ut quadratum diſtantiæ a materia illa quamproxime. Gravitas igitur ſub æquatore minor eſt in materiam illam redundantem quam pro computo ſuperiore: & propterea Terra ibi, propter defectum gravitatis, paulo altius aſcendet, & exceſſus longitudinum Pendulorum & graduum ad polos paulo majores erunt quam in præcedentibus definitum eſt.

Jam vero Aſtronomi aliqui in longinquas regiones ad obſervationes Aſtronomicas faciendas miſſi, invenerunt quod horologia oſcillatoria tardius moverentur prope Æquatorem quam in regionibus noſtris. Et primo quidem *D. Richer* hoc obſervavit anno 1672 in inſula *Cayennæ*. Nam dum obſervaret tranſitum Fixarum per meridianum menſe *Auguſto*, reperit horologium ſuum tardius moveri quam pro medio motu Solis, exiſtente differentia 2′. 28″ ſingulis diebus. Deinde faciendo ut Pendulum ſimplex ad minuta ſingula ſecunda per horologium optimum menſurata oſcillaret, notavit longitudinem Penduli ſimplicis, & hoc fecit ſæpius ſingulis ſeptimanis per menſes decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus Penduli cum longitudine Penduli *Pariſienſis* (quæ erat trium pedum Pariſienſium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem eſſe, exiſtente differentia lineæ unius cum quadrante. At ex tarditate horologii oſcillatorii in *Cayenna*, differentia Pendulorum colligitur eſſe lineæ unius cum ſemiſſe.

Poſtea *Halleius* noſter circa annum 1677 ad inſulam *Stæ Helenæ* navigans, reperit horologium ſuum oſcillatorium ibi tardius moveri quam *Londini*, ſed differentiam non notavit. Pendulum vero brevius reddidit pluſquam octava parte digiti, ſeu linea una cum ſemiſſe. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in ima parte penduli non ſufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interpoſuit.

Deinde anno 1682 *D. Varin* & *D. Des Hayes* invenerunt longitudinem Penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis in Obſervatorio

BIBLIOTECA PÚBLICA E ARQUIVO DISTRITAL DE ÉVORA

vatorio Regio *Parisiensi* esse ped. 3. lin. $8\frac{5}{7}$. Et in insula *Gorea* eadem methodo longitudinem Penduli synchroni invenerunt esse ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$, existente longitudinum differentia lin. 2. Et eodem anno ad insulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem Penduli synchroni in his insulis esse ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Posthac *D. Couplet* filius anno 1697 mense *Julio*, horologium suum oscillatorium ad motum Solis medium in Observatorio Regio *Parisiensi* sic aptavit, ut tempore satis longo horologium cum motu Solis congrueret. Deinde *Ulyssipponem* navigans invenit quod mense *Novembri* proximo horologium tardius iret quam prius, existente differentia $2' 13''$ in horis 24. Et mense *Martio* sequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium suum tardius ire quam *Parisiis*, existente differentia $4' 12''$ in horis 24. Et affirmat Pendulum ad minuta secunda oscillans brevius fuisse *Ulyssipponi* lineis $2\frac{1}{2}$ & *Paraibæ* lineis $3\frac{3}{5}$ quam *Parisiis*. Rectius posuisset differentias esse $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{1}{5}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum $2'. 13''$, & $4'. 12''$ respondent. Crassioribus hujus Observationibus minus fidendum est.

Annis proximis (1699 & 1700) *D. Des Hayes* ad *Americam* denuo navigans, determinavit quod in insulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo Penduli ad minuta secunda oscillantis, esset paulo minor quam ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quodque in insula *S. Christophori* longitudo illa esset ped. 3. lin. $6\frac{1}{4}$, & quod in insula *S. Dominici* eadem esset ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuelleus* invenit in *Porto-belo* in *America* longitudinem Penduli ad minuta secunda oscillantis, esse pedum trium Parisiensium & linearum tantum $5\frac{7}{12}$, id est tribus fere lineis breviorem quam *Lutetiæ Parisiorum*, sed errante Observatione. Nam deinde ad insulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem Penduli isochroni esse pedum tantum trium Parisiensium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* est $6^{gr.}\ 38'$ ad austrum, & ea *Portobeli* $9^{gr.}\ 33'$ ad boream, & Latitudines insularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *S^ti. Christophori*, *S^ti. Dominici* sunt respective $4^{gr.}\ 55'$, $14^{gr.}\ 40'$, $14^{gr.}\ 00'$, $14^{gr.}\ 44'$, $12^{gr.}\ 6'$, $17^{gr.}\ 19'$, & $19^{gr.}\ 48'$ ad boream. Et excessus longitudinis Penduli *Parisiensis* supra longitudines Pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas, sunt paulo majores quam pro Tabula longitudinum Penduli superius computata. Et propterea Terra aliquanto altior est sub Æquatore quam pro superiore cal-

De Mundi Systemate, culo, & denſior ad centrum quam in fodinis prope ſuperficiem, niſi forte calores in Zona torrida longitudinem Pendulorum aliquantulum auxerint.

Obſervavit utique *D. Picartus* quod virga ferrea, quæ tempore hyberno ubi gelabant frigora erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evaſit pedis unius cum quarta parte lineæ. Deinde *D. de la Hire* obſervavit quod virga ferrea quæ tempore conſimili hyberno ſex erat pedum longitudinis, ubi Soli æſtivo exponebatur evaſit ſex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore caſu calor major fuit quam in poſteriore, in hoc vero major fuit quam calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad Solem æſtivum valde incalefcunt. At virga penduli in horologio oſcillatorio nunquam exponi ſolet calori Solis æſtivi, nunquam calorem concipit calori externæ ſuperficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga Penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æſtivo quam hyberno, ſed exceſſu quartam partem lineæ unius vix ſuperante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diverſis regionibus iſochrona ſunt, diverſo calori attribui non poteſt. Sed neque erroribus Aſtronomorum è *Gallia* miſſorum tribuenda eſt hæc differentia. Nam quamvis eorum obſervationes non perfecte congruant inter ſe, tamen errores ſunt adeo parvi ut contemni poſſint. Et in hoc concordant omnes, quod iſochrona pendula ſunt breviora ſub Æquatore quam in Obſervatorio Regio *Pariſienſi*, exiſtente differentia duarum circiter linearum ſeu ſextæ partis digiti. Per obſervationes *D. Richer* in *Cayenna* factas, differentia fuit lineæ unius cum ſemiſſe. Error ſemiſſis lineæ facile committitur. Et *D. des Hayes* poſtea per obſervationes ſuas in eadem inſula factas errorem correxit, inventa differentia linearum $2\frac{1}{18}$. Sed & per obſervationes in inſulis *Gorea*, *Guadaloupa*, *Martinica*, *Granada*, *S. Chriſtophori*, & *S. Dominici* factas & ad Æquatorem reductas, differentia illa prodiit haud minor quam $1\frac{19}{20}$ lineæ, haud major quam $2\frac{1}{2}$ linearum. Et inter hos limites quantitas mediocris eſt $2\frac{9}{40}$ linearum. Propter calores locorum in Zona torrida negligamus $\frac{9}{40}$ partes lineæ, & manebit differentia duarum linearum.

Quare cum differentia illa per Tabulam præcedentem, ex hypotheſi quod Terra ex materia uniformiter denſa conſtat, ſit tantum $1\frac{87}{100}$ lineæ: exceſſus altitudinis Terræ ad æquatorem ſupra altitudinem ejus ad polos, qui erat milliarium $17\frac{1}{6}$, jam auctus in ratione

ratione differentiarum, fiet milliarium $31\frac{7}{12}$. Nam tarditas Penduli sub Æquatore defectum gravitatis arguit; & quo levior est materia eo major esse debet altitudo ejus, ut pondere suo materiam sub Polis in æquilibrio sustineat.

Hinc figura umbræ Terræ per Eclipses Lunæ determinanda, non erit omnino circularis, sed diameter ejus ab oriente in occidentem ducta major erit quam diameter ejus ab austro in boream ducta, excessu 55″ circiter. Et parallaxis maxima Lunæ in Longitudinem paulo major erit quam ejus parallaxis maxima in Latitudinem. Ac Terræ semidiameter maxima erit pedum Parisiensium 19767630, minima pedum 19609820 & mediocris pedum 19688725 quamproxime.

Cum gradus unus mensurante *Picarto* sit hexapedarum 57060, mensurante vero *Cassino* sit hexapedarum 57292: suspicantur aliqui gradum unumquemque, pergendo per *Gallias* austrum versus majorem esse gradu præcedente hexapedis plus minus 72, seu parte octingentesima gradus unius; existente Terra Sphæroide oblonga cujus partes ad polos sunt altissimæ. Quo posito, corpora omnia ad Polos Terræ leviora forent quam ad Æquatorem, & altitudo Terræ ad polos superaret altitudinem ejus ad æquatorem milliaribus fere 95, & pendula isochrona longiora forent ad Æquatorem quam in Observatorio Regio *Parisiensi* excessu semissis digiti circiter; ut conferenti proportiones hic positas cum proportionibus in Tabula præcedente positis, facile constabit. Sed & diameter umbræ Terræ quæ ab austro in boream ducitur, major foret quam diameter ejus quæ ab oriente in occidentem ducitur, excessu 2′. 46″, seu parte duodecima diametri Lunæ. Quibus omnibus Experientia contrariatur. Certe *Cassinus*, definiendo gradum unum esse hexapedarum 57292, medium inter mensuras suas omnes, ex hypothesi de æqualitate graduum assumpsit. Et quamvis *Picartus* in *Galliæ* limite boreali invenit gradum paulo minorem esse, tamen *Norwoodus* noster in Regionibus magis borealibus, mensurando majus intervallum, invenit gradum paulo majorem esse quam *Cassinus* invenerat. Et *Cassinus* ipse mensuram *Picarti*, ob parvitatem intervalli mensurati, non satis certam & exactam esse judicavit ubi mensuram gradus unius per intervallum longe majus definire aggressus est. Differentiæ vero inter mensuras *Cassini*, *Picarti*, & *Norwoodi* sunt prope insensibiles, & ab insensibilibus observationum erroribus facile oriri potuere, ut Nutationem axis Terræ præteream.

De Mundi Systemate,

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

Puncta Æquinoctialia regredi, & axem Terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinari in Ecliptican & bis redire ad positionem priorem.

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iste nutandi perexiguus esse debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

Motus omnes Lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis Principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes Planetas deferre, & minores illos in Ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimode, iisque adficientur inæqualitatibus quæ in Luna nostra notantur. Hæc utique (per Corol. 2, 3, 4, & 5. Prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram ducto describit aream pro tempore majorem, Orbemque habet minus curvum, atque adeo propius accedit ad Terram, in Syzygiis quam in Quadraturis, nisi quatenus impedit motus Eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Apogæum Lunæ in Syzygiis versatur, & minima ubi idem in Quadraturis consistit; & inde Luna in Perigæo velocior est & nobis propior, in Apogæo autem tardior & remotior in Syzygiis quam in Quadraturis. Progreditur insuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, sed motu inæquabili. Et Apogæum quidem (per Corol. 7. & 8. Prop. LXVI.) velocius progreditur in Syzygiis suis, tardius regreditur in Quadraturis, & excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per Corol. 11. Prop. LXVI.) quiescunt in Syzygiis suis, & velocissime regrediuntur in Quadraturis. Sed & major est Lunæ latitudo maxima in ipsius Quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quam in Syzygiis: & motus medius tardior in Perihelio Terræ (per Corol. 6. Prop.

Prop. LXVI.) quam in ipſius Aphelio. Atque hæ ſunt inæqualitates inſigniores ab Aſtronomis notatæ. LIBER TERTIUS.

Sunt etiam aliæ quædam nondum obſervatæ inæqualitates, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nulla hactenus lege ad Regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim ſeu motus horarii Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter Eccentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in Quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis Solaris. Et Variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proxime (per Corol. 1. & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo Aſtronomico, ad Proſthaphæreſin Lunæ referri ſolet, & cum ea confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ noſtræ motus analogi Lunarum ſeu Satellitum Jovis ſic derivantur. Motus medius Nodorum Satellitis extimi Jovialis, eſt ad motum medium Nodorum Lunæ noſtræ, in ratione compoſita ex ratione duplicata temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione ſimplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram: (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iſte $8^{gr.}$ 24′. in antecedentia. Motus medii Nodorum Satellitum interiorum ſunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus, per idem Corollarium, & inde dantur. Motus autem Augis Satellitis cujuſque in conſequentia, eſt ad motum Nodorum ipſius in antecedentia, ut motus Apogæi Lunæ noſtræ ad hujus motum Nodorum, (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus Augis ſic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob cauſam quam hic exponere non vacat. Æquationes maximæ Nodorum & Augis Satellitis cujuſque fere ſunt ad æquationes maximas Nodorum & Augis Lunæ reſpective, ut motus Nodorum & Augis Satellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum,

De Mundi Systemate,

rum, ad motus Nodorum & Apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio Satellitis è Jove spectati, est ad Variationem Lunæ, ut sunt ad invicem toti motus Nodorum temporibus quibus Satelles & Luna ad Solem revolvuntur, per idem Corollarium; adeoque in Satellite extimo non superat 5″. 12‴.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.

Mare singulis diebus tam Lunaribus quam Solaribus bis intumescere debere ac bis defluere, patet per Corol. 19. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum Luminarium ad Meridianum loci, minori quam sex horarum spatio sequi, uti fit in Maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & Promontorium *Bonæ Spei*, ut & in Maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter tertiam incidit, nisi ubi motus per loca vadosa propagatus aliquantulum retardatur. Horas numero ab appulsu Luminaris utriusque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quam supra, & per horas diei Lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad Meridianum loci revolvitur.

Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur distincte, sed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium Conjunctione vel Oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In Quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Sol attollit; & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teste, major est effectus Lunæ quam Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra Syzygias & Quadraturas, æstus maximus qui sola vi Lunari incidere semper deberet in horam tertiam Lunarem, & sola Solari in tertiam Solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ Lunari propinquius est, adeoque in transitu Lunæ a Syzygiis ad Quadraturas, ubi hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam

tertiam

tertiam Lunarem, idque maximo intervallo paulo poſt Octantes Lunæ; & paribus intervallis æſtus maximus ſequetur horam tertiam Lunarem in tranſitu Lunæ a Quadraturis ad Syzygias. Hæc ita ſunt in Mari aperto. Nam in oſtiis Fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus Luminarium ex eorum diſtantiis a Terra. In minoribus enim diſtantiis majores ſunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in Perigæo exiſtens, majores edit effectus, efficitque ut æſtus in Syzygiis paulo majores ſint, & in Quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æſtivo; & Luna in Perigæo ſingulis menſibus majores ciet æſtus quam ante vel poſt dies quindecim, ubi in Apogæo verſatur. Unde fit ut æſtus duo omnino maximi in Syzygiis continuis ſe mutuo non ſequantur.

Pendet etiam effectus utriuſque Luminaris ex ipſius Declinatione ſeu diſtantia ab Æquatore. Nam ſi Luminare in polo conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, abſque actionis intenſione & remiſſione, adeoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur Luminaria recedendo ab Æquatore polum verſus, effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus in Syzygiis Solſtitialibus quam in Æquinoctialibus. In Quadraturis autem Solſtitialibus majores ciebunt æſtus quam in Quadraturis Æquinoctialibus; eo quod Lunæ jam in Æquatore conſtitutæ effectus maxime ſuperat effectum Solis. Incidunt igitur æſtus maximi in Syzygias & minimi in Quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriuſque. Et æſtum maximum in Syzygiis comitatur ſemper minimus in Quadraturis, ut experientia compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam Solis a Terra, tempore hyberno quam tempore æſtivo, fit ut æſtus maximi & minimi ſæpius præcedant Æquinoctium vernum quam ſequantur, & ſæpius ſequantur autumnale quam præcedant.

Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine. Deſignet *A p E P* Tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* Centrum ejus; *P*, *p* polos; *AE* Æquatorem; *F* locum quemvis extra Æquatorem; *Ff* parallelum loci; *D d* parallelum ei reſpondentem ex altera parte Æquatoris; *L* locum quem Luna tribus ante horis occupabat; *H* locum Telluris ei perpendiculariter ſubjectum

De Mundi Systemate,

subjectum ; *h* locum huic oppositum ; *K*, *k* loca inde gradibus 90 distantia, *CH*, *Ch* Maris altitudines maximas mensuratas a centro Telluris; & *CK*, *Ck* altitudines minimas: & si axibus *Hh*, *Kk* describatur Ellipsis, deinde Ellipseos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* describatur Sphærois *HPKhpk*; designabit hæc figuram Maris quam proxime, & erunt *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* altitudines Maris in locis *F*, *f*, *D*, *d*. Quinetiam si in præfata Ellipseos revolutione punctum quodvis *N* describat circulum *NM*, secantem parallelos *Ff*, *Dd* in locis quibusvis *R*, *T*, & æquatorem *AE* in *S*; erit *CN* altitudo Maris in locis omnibus *R*, *S*, *T*, sitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurna loci cujusvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia post appulsum Lunæ ad Meridianum supra Horizontem; postea defluxus maximus in *Q* hora tertia post occasum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia post appulsum Lunæ ad Meridianum infra Horizontem; ultimo defluxus maximus in *Q* hora tertia post ortum Lunæ; & affluxus posterior in *f* erit minor quam affluxus prior in *F*. Distinguitur enim Mare totum in duos omnino fluctus Hemisphæricos, unum in Hemisphærio *KHkC* ad Boream vergentem, alterum in Hemisphærio opposito *KhkC*; quos igitur fluctum Borealem & fluctum Australem nominare licet. Hi fluctus semper sibi mutuo oppositi, veniunt per vices ad Meridianos locorum singulorum, interposito intervallo horarum Lunarium duodecim. Cumque regiones Boreales magis participant fluctum Borealem, & Australes magis Australem, inde oriuntur æstus alternis vicibus majores & minores, in locis singulis extra Æquatorem, in quibus Luminaria oriuntur & occidunt. Æstus autem major, Luna in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam post appulsum Lunæ ad Meridianum supra Horizontem, & Luna declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora Solstitiorum; præsertim si Lunæ Nodus ascendens versatur in principio Arietis. Sic experientia compertum est, quod æstus matutini tempore hyberno superent vespertinos & vespertini tem-



pore

pore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* vero altitudine quindecim digitorum: obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*. LIBER TERTIUS.

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua Maris æſtus, etiam ceſſantibus Luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motus impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proxime poſt Syzygias majores reddit, eoſque proxime poſt Quadraturas minuit. Unde fit ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multo magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus, non ſint primi a Syzygiis, ſed tertii. Retardantur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeo ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam & Fluviorum oſtiis, ſint quarti vel etiam quinti a Syzygiis.

Porro fieri poteſt ut æſtus propagetur ab Oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citius tranſeat per aliqua freta quam per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſive advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtus duos æquales a diverſis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu Lunæ ad Meridianum portus. Si Luna in hocce ſuo ad Meridianum appulſu verſabatur in Æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eoſdem affluxibus æquabunt, & ſic ſpatio diei illius efficient ut aqua tranquille ſtagnet. Si Luna tunc declinabat ab Æquatore, fient æſtus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum eſt; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in Medio ipſorum, & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantum perveniet ad maximam altitudinem & ſemel ad minimam; & altitudo maxima, ſi Luna declinat in polum ſupra Horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu Lunæ ad Meridianum, atque Luna declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum, in portu regni *Tunquini* ad *Batsham* ſub latitudine

De Mundi Systemate.

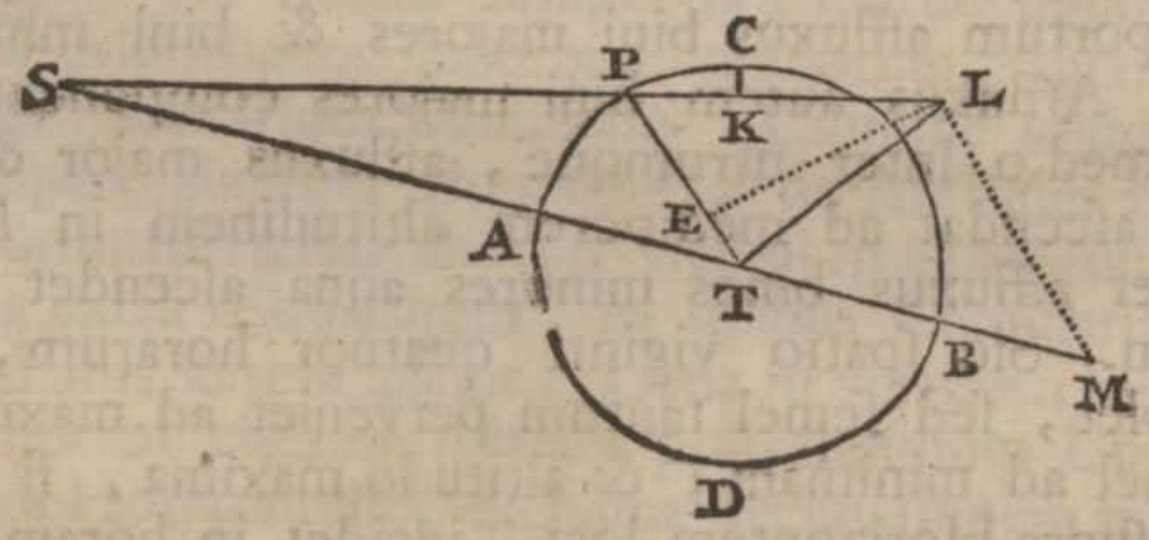
Boreali 20gr. 50′. *Halleius* ex Nautarum Obſervationibus patefecit. Ibi aqua die tranſitum Lunæ per Æquatorem ſequente ſtagnat, dein Luna ad Boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus, & æſtus incidit in occaſum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimum vel octavum, dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & Luna declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab Oceano *Sinenſi* inter Continentem & Inſulam *Luconiam*, alter a Mari *Indico* inter Continentem & Inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim a Mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex a Mari *Sinenſi* per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia Marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus cauſas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

Deſignet S Solem, T Terram, P Lunam, $PADB$ orbem Lunæ. In SP capiatur SK æqualis ST; ſitque SL ad SK



in duplicata ratione SK ad SP, & ipſi PT agatur parallela LM; & ſi gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per diſtantiam ST vel SK, erit SL gravitas acceleratrix Lunæ in Solem.

Solem. Ea componitur ex partibus SM, LM, quarum LM & ipſius SM pars TM perturbat motum Lunæ, ut in Libri primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expoſitum eſt. Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud a viribus conſimilibus; ſed ſummas tam virium quam motuum referre licet ad Lunam, & ſummas virium per lineas ipſis analogas TM & ML deſignare. Vis ML (in mediocri ſua quantitate) eſt ad vim centripetam, qua Luna in Orbe ſuo circa Terram quieſcentem ad diſtantiam PT revolvi poſſet, in duplicata ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem, (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc eſt, in duplicata ratione dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. ad dies 365. *hor.* 6. *min.* 9. id eſt, ut 1000. ad 178725, ſeu 1 ad $178\frac{22}{40}$. Invenimus autem in Propoſitione quarta quod, ſi Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum diſtantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum mediocrium Terræ quamproxime. Et vis qua Luna in Orbe circa Terram quieſcentem, ad diſtantiam PT ſemidiametrorum terreſtrium $60\frac{1}{2}$ revolvi poſſet, eſt ad vim, qua eodem tempore ad diſtantiam ſemidiametrorum 60 revolvi poſſet, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproxime. Ideoque vis mediocris ML eſt ad vim gravitatis in ſuperficie Terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 178\frac{22}{40}$, ſeu 1 ad 638092,6. Unde ex proportione linearum TM, ML, datur etiam vis TM: & hæ ſunt vires Solis quibus Lunæ motus perturbantur. *Q. E. I.* LIBER TERTIUS.

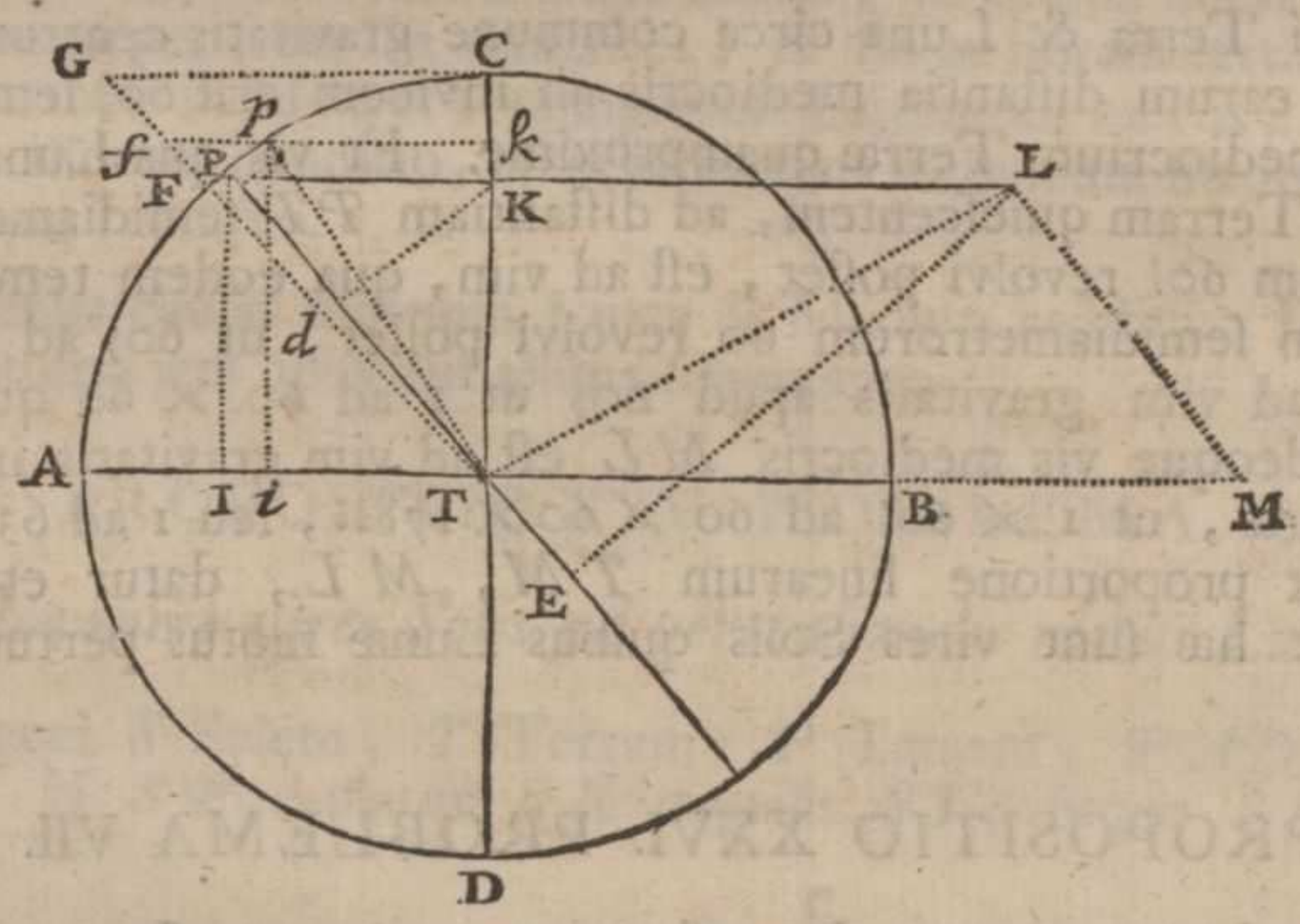
PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, in Orbe circulari deſcribit.

Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto deſcribit, eſſe tempori proportionalem, niſi quatenus motus Lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti (vel incrementi horarii) hic inveſtigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem eſſe, & inæqualitates omnes negligamus, ea ſola excepta, de qua hic agitur. Ob ingentem vero Solis diſtantiam, ponamus etiam lineas SP, ST ſibi invicem parallelas eſſe. Hoc pacto vis LM reducetur ſemper ad

De Mundi Systemate.

mediocrem ſuam quantitatem TP, ut & vis TM ad mediocrem ſuam quantitatem $3PK$. Hæ vires, per Legum Corol. 2. componunt vim TL; & hæc vis, ſi in radium TP demittatur perpendiculum LE, reſolvitur in vires TE, EL, quarum TE, agendo ſemper ſecundum radium TP, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ TPC radio illo TP factam; & EL agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantum accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in tranſitu ipſius a Quadratura C ad Conjunctionem A, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut ipſa vis accelerans EL, hoc eſt, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Exponatur tempus per motum medium Lunarem, vel (quod eodem fere recidit) per angulum CTP, vel



etiam per arcum CP. Ad CT erigatur normalis CG ipſi CT æqualis. Et diviſo arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi poſſunt, ductaque pk perpendiculari ad CT, jungatur TG ipſis KP, kp productis occurrens in F & f; & erit Kk ad PK ut Pp ad Tp, hoc eſt in data ratione, adeoque $FK \times Kk$ ſeu area $FKkf$, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id eſt, ut EL; & compoſite, area tota $GCKF$ ut ſumma omnium virium EL tempore toto CP impreſſarum in Lunam, atque adeo etiam ut velocitas hac

ſumma

ſumma genita, id eſt, ut acceleratio deſcriptionis areæ CTP, ſeu incrementum momenti. Vis qua Luna circa Terram quieſcentem ad diſtantiam TP, tempore ſuo periodico $CADBC$ dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. revolvi poſſet, efficeret ut corpus, tempore CT cadendo, deſcriberet longitudinem $\frac{1}{2}CT$, & velocitatem ſimul acquireret æqualem velocitati, qua Luna in Orbe ſuo movetur. Patet hoc per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I. Cum autem perpendiculum Kd in TP demiſſum ſit ipſius EL pars tertia, & ipſius TP ſeu ML in Octantibus pars dimidia, vis EL in Octantibus, ubi maxima eſt, ſuperabit vim ML in ratione 3 ad 2, adeoque erit ad vim illam, qua Luna tempore ſuo periodico circa Terram quieſcentem revolvi poſſet, ut 100 ad $\frac{4}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ ſeu 11915, & tempore CT velocitatem generare deberet quæ eſſet pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunaris, tempore autem CPA velocitatem majorem generaret in ratione CA ad CT ſeu TP. Exponatur vis maxima EL in Octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo $\frac{1}{2}TP \times Pp$ æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare poſſet, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CP$ ad aream $KCGF$; tempore autem toto CPA, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}TP \times CA$ & triangulum TCG, ſive ut arcus quadrantalis CA & radius TP. Ideoque (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) velocitas poſterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga eſt, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & ſi momentum mediocre exponatur per numerum 11915, ſumma $11915 + 50$, ſeu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in Syzygia A, ac differentia $11915 - 50$ ſeu 11865 ejuſdem momentum minimum in Quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in Syzygiis & Quadraturis deſcriptæ, ſunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod ſit ad momentorum differentiam 100 ut Trapezium $FKCG$ ad triangulum TCG (vel quod perinde eſt, ut quadratum Sinus PK ad quadratum Radii TP, id eſt, ut Pd ad TP) & ſumma exhibebit momentum areæ, ubi Luna eſt in loco quovis intermedio P.

Hæc omnia ita ſe habent, ex Hypotheſi quod Sol & Terra quieſcunt, & Luna tempore Synodico dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. revolvitur. Cum autem periodus Synodica Lunaris vere ſit die-

De Mundi Systemate,

rum 29. *hor.* 12. & *min.* 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id est, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in Quadratura Lunæ erit ad ejus momentum in Syzygia ut $11023-50$ ad $11023+50$, seu 10973 ad 11073, & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio P versatur, ut 10973 ad $10973+Pd$, existente videlicet TP æquali 100.

Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proxime ut summa numeri 219, 46 & sinus versi duplicatæ distantiæ Lunæ a Quadratura proxima, in circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi Variatio in Octantibus est magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui Sinus ille versus in eadem ratione.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam a Terra.

Area, quam Luna radio ad Terram ducto, singulis temporis momentis, describit, est ut motus horarius Lunæ & quadratum distantiæ Lunæ a Terra conjunctim; & propterea distantia Lunæ a Terra est in ratione composita ex subduplicata ratione Areæ directe & subduplicata ratione motus horarii inverse. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciproce ut ipsius distantia a Terra. Tentent Astronomi quam probe hæc Regula cum Phænomenis congruat.

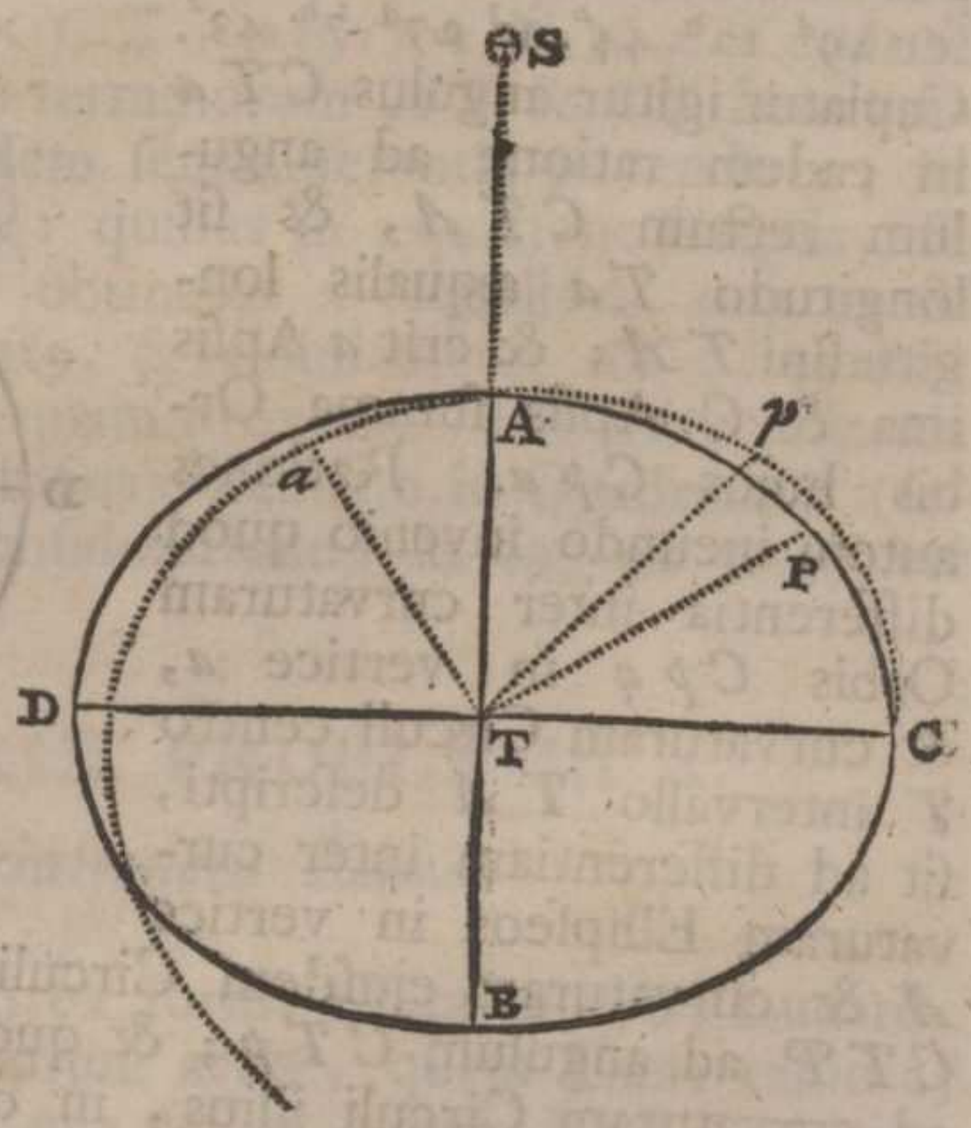
Corol. 2. Hinc etiam Orbis Lunaris accuratius ex Phænomenis quam antehac definiri potest.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA IX.

Invenire diametros Orbis in quo Luna, absque eccentricitate, moveri deberet.

Curvatura Trajectoriæ, quam mobile, si secundum Trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, describit, est ut attractio directe & quadratum velocitatis inverse. Curvaturas linearum pono esse inter

ter se in ultima proportione Sinuum vel Tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem Lunæ in Terram in Syzygiis est excessus gravitatis ipsius in Terram supra vim Solarem 2 *PK* (Vide *Figur. pag.* 394.) qua gravitas acceleratrix Lunæ in Solem superat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem. In Quadraturis autem attractio illa est summa gravitatis Lunæ in Terram & vis Solaris *KT*, qua Luna in Terram trahitur. Et hæ attractiones, si $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, sunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{CTq} \times \frac{1000}{AT \times N}$ quam proxime; seu ut $178725\ N \times CTq - 2000\ ATq \times CT$ & $178725\ N \times ATq + 1000\ CTq \times AT$. Nam si gravitas acceleratrix Lunæ in Terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris *ML*, quæ in Quadraturis est *PT* vel *TK*, & Lunam trahit in Terram, erit 1000, & vis mediocris *TM* in Syzygiis erit 3000; de qua, si vis mediocris *ML* subducatur, manebit vis 2000 qua Luna in Syzygiis distrahitur a Terra, quamque jam ante nominavi 2 *PK*. Velocitas autem Lunæ in Syzygiis *A* & *B* est ad ipsius velocitatem in Quadraturis *C* & *D*, ut *CT* ad *AT* & momentum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit in Syzygiis ad momentum ejusdem areæ in Quadraturis conjunctim; id est, ut 11073 *CT* ad 10973 *AT*. Sumatur hæc ratio bis inverse & ratio prior semel directe, & fiet curvatura Orbis Lunaris in Syzygiis ad ejusdem curvaturam in Quadraturis ut $120406729 \times 178725\ ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000\ ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725\ ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000\ CTqq \times AT$, *i.e.* ut $2151969\ AT \times CT \times N - 24081\ AT\ cub.$ ad $2191371\ AT \times CT \times N + 12261\ CT\ cub.$

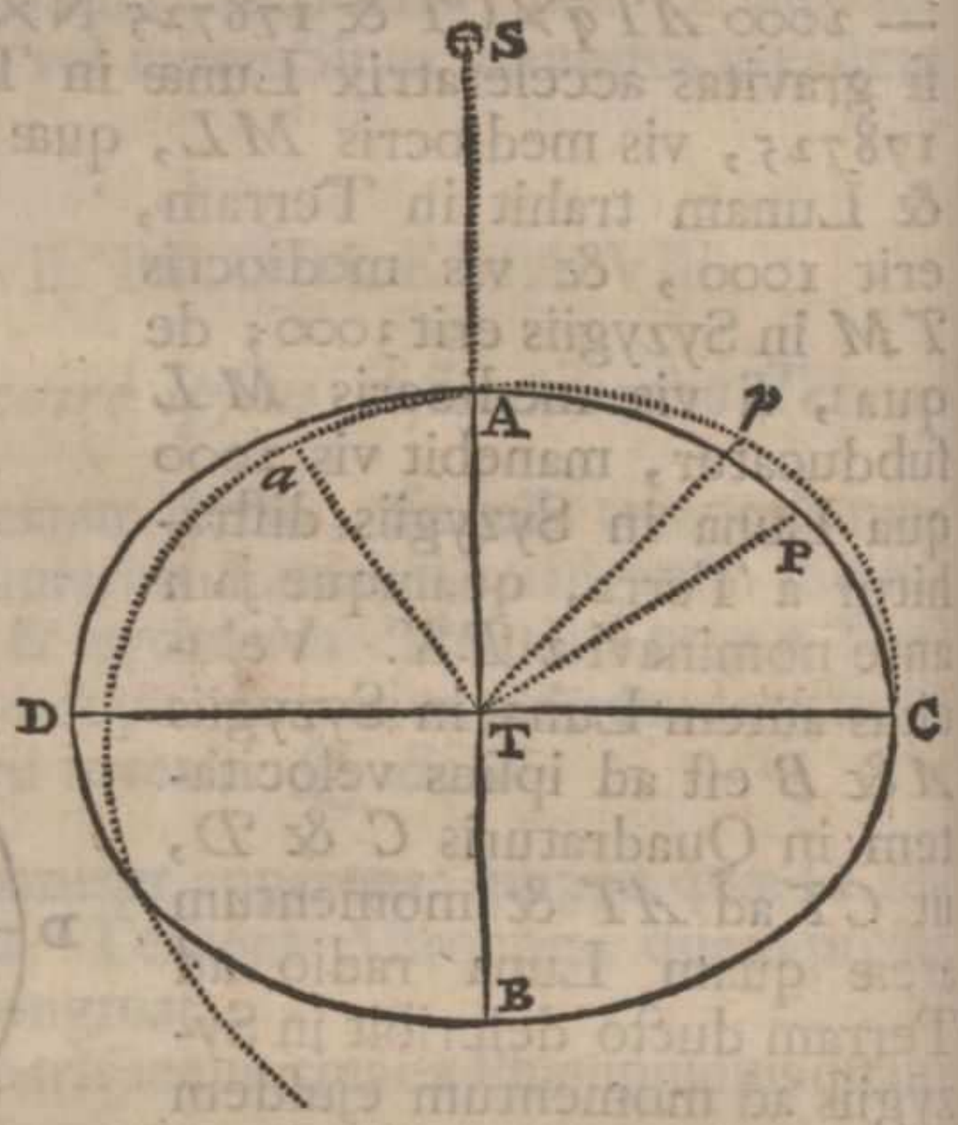


LIBER TERTIUS.

Quoniam

De Mundi Systemate,

Quoniam Figura Orbis Lunaris ignoratur, hujus vice assumamus Ellipsin $DBCA$, in cujus centro T Terra collocetur, & cujus axis major DC Quadraturis, minor AB Syzygiis interjaceat. Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, & Trajectoria cujus curvaturam consideramus, describi debeat in plano quod omni motu angulari omnino destituitur: consideranda erit Figura, quam Luna in Ellipsi illa revolvendo describit in hoc plano, hoc est Figura Cpa, cujus puncta singula p inveniuntur capiendo punctum quodvis P in Ellipsi, quod locum Lunæ repræsentet, & ducendo Tp æqualem TP, ea lege ut angulus PTp æqualis sit motui apparenti Solis a tempore Quadraturæ C confecto; vel (quod eodem fere recidit) ut angulus CTp sit ad angulum CTP ut tempus revolutionis Synodicæ Lunaris ad tempus revolutionis Periodicæ seu $29^{d.}\ 12^{h.}\ 44'$, ad $27^{d.}\ 7^{h.}\ 43'$. Capiatur igitur angulus CTa in eadem ratione ad angulum rectum CTA, & sit longitudo Ta æqualis longitudini TA; & erit a Apsis ima & C Apsis summa Orbis hujus Cpa. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam Orbis Cpa in vertice a, & curvaturam Circuli centro T intervallo TA descripti, sit ad differentiam inter curvaturam Ellipseos in vertice A & curvaturam ejusdem Circuli, in duplicata ratione anguli CTP ad angulum CTp; & quod curvatura Ellipseos in A sit ad curvaturam Circuli illius, in duplicata ratione TA ad TC; & curvatura Circuli illius ad curvaturam Circuli centro T intervallo TC descripti, ut TC ad TA; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipseos in C, in duplicata ratione TA ad TC; & differentia inter curvaturam Ellipseos in vertice C & curvaturam Circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam Figuræ Tpa in vertice C & curvaturam ejusdem Circuli, in duplicata ratione anguli



anguli CTp ad angulum CTP. Quæ quidem rationes ex ſinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. His autem inter ſe collatis, prodit curvatura Figuræ Cpa in a ad ipſius curvaturam in C, ut $AT\ cub. + \frac{16824}{100000} CTq \times AT$ ad $CT\ cub. + \frac{16824}{100000} ATq \times CT$. ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ deſignat differentiam quadratorum angulorum CTP & CTp applicatam ad quadratum anguli minoris CTP ſeu (quod perinde eſt) differentiam quadratorum temporum $27^{d.}\ 7^{h.}\ 43'$, & $29^{d.}\ 12^{h.}\ 44'$ applicatam ad quadratum temporis $27^{d.}\ 7^{h.}\ 43'$. LIBER TERTIUS.

Igitur cum a deſignet Syzygiam Lunæ, & C ipſius Quadraturam, proportio jam inventa eadem eſſe debet cum proportione curvaturæ Orbis Lunæ in Syzygiis ad ejuſdem curvaturam in Quadraturis, quam ſupra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio CT ad AT, duco extrema & media in ſe invicem. Et termini prodeuntes ad $AT \times CT$ applicati, fiunt $2062,79\ CTqq - 2151969\ N \times CT\ cub. + 368676\ N \times AT \times CTq + 36342\ ATq \times CTq - 362047\ N \times ATq \times CT + 2191371\ N \times AT\ cub. \times 4051,4\ ATqq = 0$. Hic pro terminorum AT & CT ſemiſumma N ſcribo 1, & pro eorundem ſemidifferentia ponendo x, fit $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: quibus in æquatione ſcriptis, & æquatione prodeunte reſoluta, obtinetur x æqualis 0, 00719, & inde ſemidiameter CT fit 1, 00719, & ſemidiameter AT 0, 99281, qui numeri ſunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quam proxime. Eſt igitur diſtantia Lunæ a Terra in Syzygiis ad ipſius diſtantiam in Quadraturis (ſepoſita ſcilicet Eccentricitatis conſideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

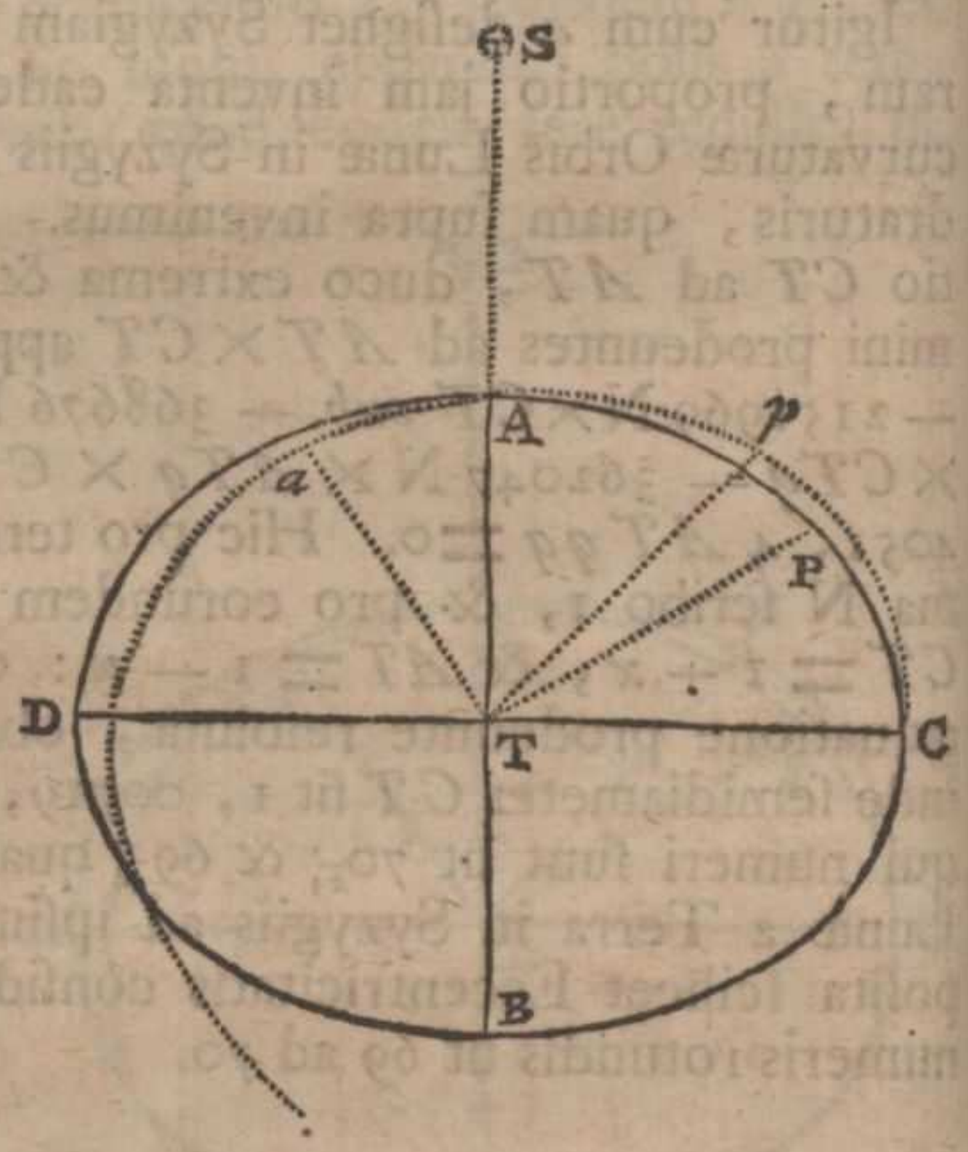
PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire Variationem Lunæ.

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma Elliptica orbis Lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad Terram ducto deſcribit. Si Luna P in Ellipſi $DBCA$ circa Terram in centro Ellipſeos quieſcentem moveretur, & radio TP ad Terram ducto deſcriberet aream CTP tempori proportionalem; eſſet autem Ellipſeos ſemidiameter maxima CT ad ſemidiametrum minimam TA ut 70 ad 69: foret tangens anguli CTP ad tangentem anguli motus medii a Quadratura C computati, ut Ellipſeos ſemidiameter TA ad ejuſdem ſemidiametrum

De Mundi Systemate,

TC seu 69 ad 70. Debet autem descriptio areæ CTP, in progressu Lunæ a Quadratura ad Syzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in Syzygia Lunæ sit ad ejus momentum in Quadratura ut 11073 ad 10973, utque excessus momenti in loco quovis intermedio P supra momentum in Quadratura sit ut quadratum sinus anguli CTP. Id quod satis accurate fiet, si tangens anguli CTP diminuatur in subduplicata ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id est, in ratione numeri 68, 6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli CTP jam erit ad tangentem motus medii ut 68, 6877 ad 70, & angulus CTP in Octantibus, ubi motus medius est $45^{gr.}$ invenietur $44.^{gr.}$ $27'.$ $28''.$ qui subductus de angulo motus medii $45.^{gr.}$ relinquit Variationem maximam $32'.$ $32''.$ Hæc ita se haberent si Luna, pergendo a Quadratura ad Syzygiam, describeret angulum CTA graduum tantum nonaginta. Verum ob motum Terræ, quo Sol in consequentia motu apparente transfertur, Luna, priusquam Solem assequitur, describit angulum CTa angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis Lunaris Synodicæ ad tempus revolutionis Periodicæ, id est, in ratione $29^{d.}$ $12^{h.}$ $44'.$ ad $27^{d.}$ $7^{h.}$ $43'.$ Et hoc pacto anguli omnes circa centrum T dilatantur in eadem ratione, & Variatio maxima quæ secus esset $32'.$ $32''$, jam aucta in eadem ratione fit $35'.$ $10''.$



Hæc est ejus magnitudo in mediocri distantia Solis a Terra, neglectis differentiis quæ a curvatura Orbis magni majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in gibbosam & plenam, oriri possint. In aliis distantiis Solis a Terra, Variatio maxima est in ratione quæ componitur ex duplicata ratione temporis revolutionis Synodicæ Lunaris (dato anni tempore) directe, & triplicata ratione distantiæ Solis a Terra inverse. Ideoque in

Apogæo

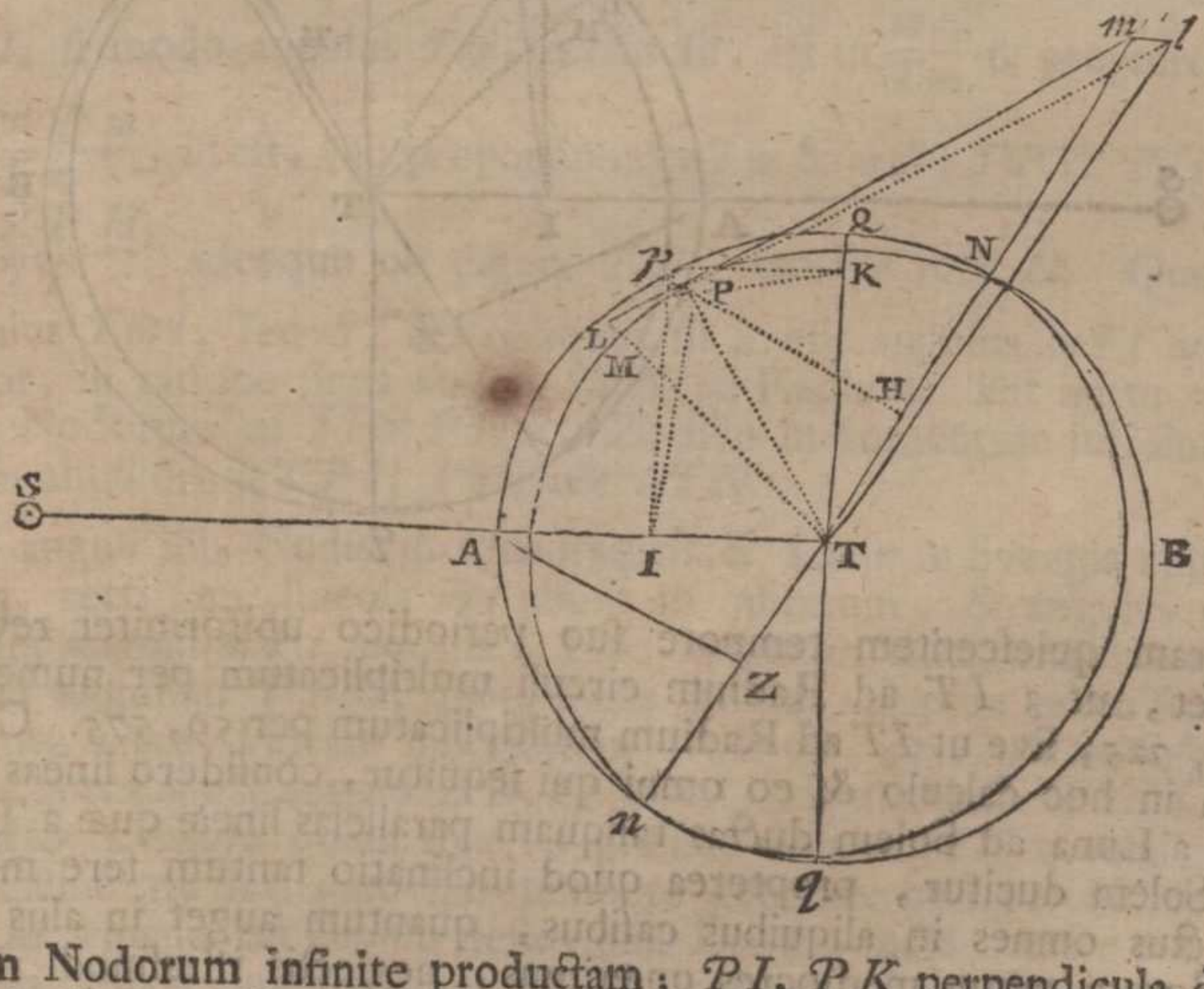
Apogæo Solis, Variatio maxima eſt 33′. 14″, & in ejus Perigæo 37′. 11″, ſi modo Eccentricitas Solis ſit ad Orbis magni ſemidiametrum tranſverſam ut $16\frac{1}{16}$ ad 1000. LIBER TERTIUS.

Hactenus Variationem inveſtigavimus in Orbe non eccentrico, in quo utique Luna in Octantibus ſuis ſemper eſt in mediocri ſua diſtantia a Terra. Si Luna propter eccentricitatem ſuam, magis vel minus diſtat a Terra quam ſi locaretur in hoc Orbe, Variatio paulo major eſſe poteſt vel paulo minor quam pro Regula hic allata: ſed exceſſum vel defectum ab Aſtronomis per Phænomena determinandum relinquo.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe circulari.

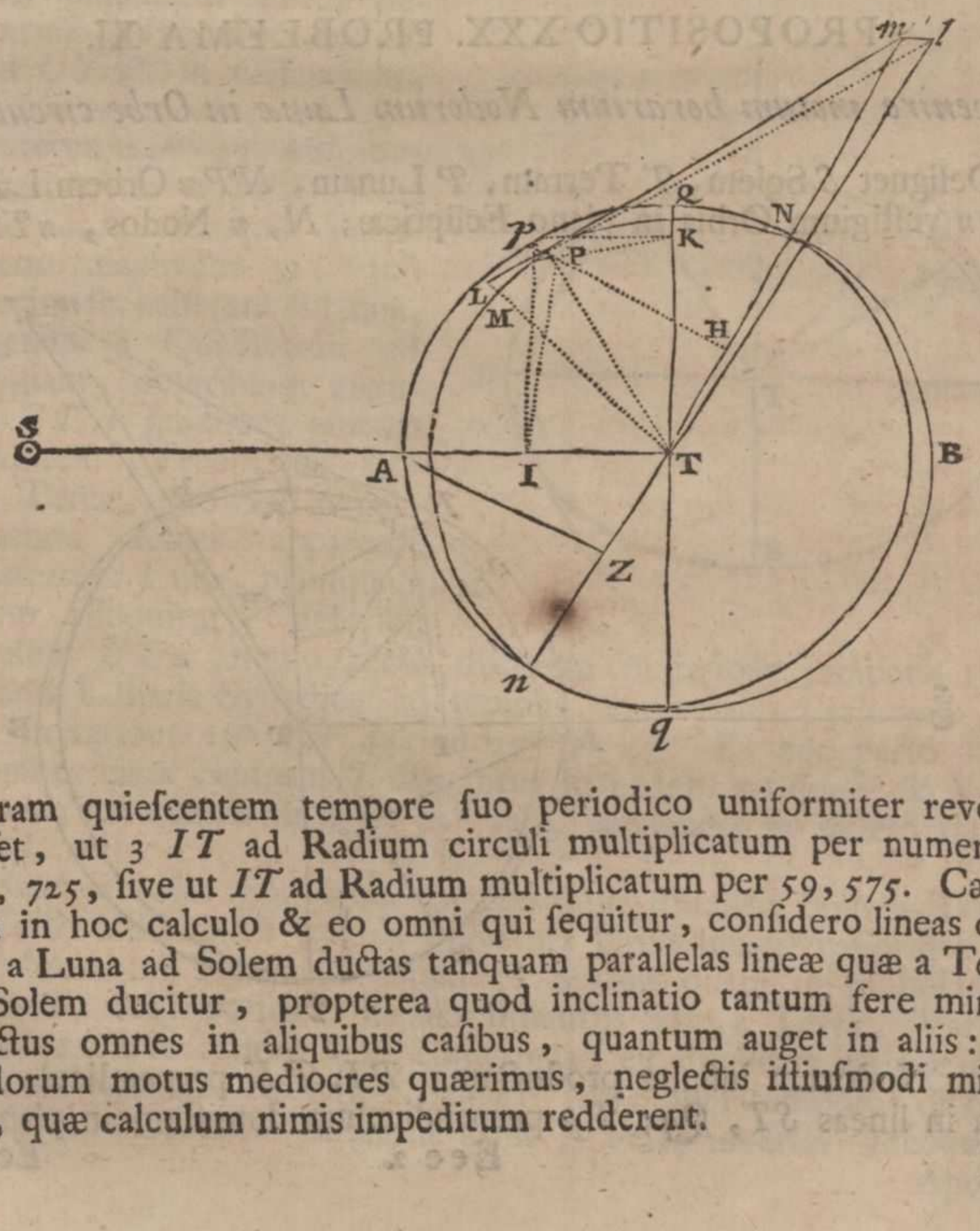
Deſignet *S* Solem, *T* Terram, *P* Lunam, *NPn* Orbem Lunæ, *Npn* veſtigium Orbis in plano Eclipticæ; *N*, *n* Nodos, *nTNm*



lineam Nodorum infinite productam; *PI*, *PK* perpendicula demiſſa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demiſſum in planum

De Mundi Systemate.

Eclipticæ; Q, q Quadraturas Lunæ in plano Eclipticæ, & pK perpendiculum in lineam Qq Quadraturis interjacentem. Vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. xxv.) duplex eſt, altera lineæ LM, altera lineæ MT proportionalis. Et Luna vi priore in Terram, poſteriore in Solem ſecundum lineam rectæ ST a Terra ad Solem ductæ parallelam trahitur. Vis prior LM agit ſecundum planum orbis Lunaris, & propterea ſitum plani nil mutat. Hæc igitur negligenda eſt. Vis poſterior MT qua planum Orbis Lunaris perturbatur eadem eſt cum vi $3PK$ vel $3IT$. Et hæc vis (per Prop. xxv.) eſt ad vim qua Luna in circulo circa



Terram quieſcentem tempore ſuo periodico uniformiter revolvi poſſet, ut $3IT$ ad Radium circuli multiplicatum per numerum 178, 725, ſive ut IT ad Radium multiplicatum per 59, 575. Cæterum in hoc calculo & eo omni qui ſequitur, conſidero lineas omnes a Luna ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ a Terra ad Solem ducitur, propterea quod inclinatio tantum fere minuit effectus omnes in aliquibus caſibus, quantum auget in aliis: & Nodorum motus mediocres quærimus, neglectis iſtiuſmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

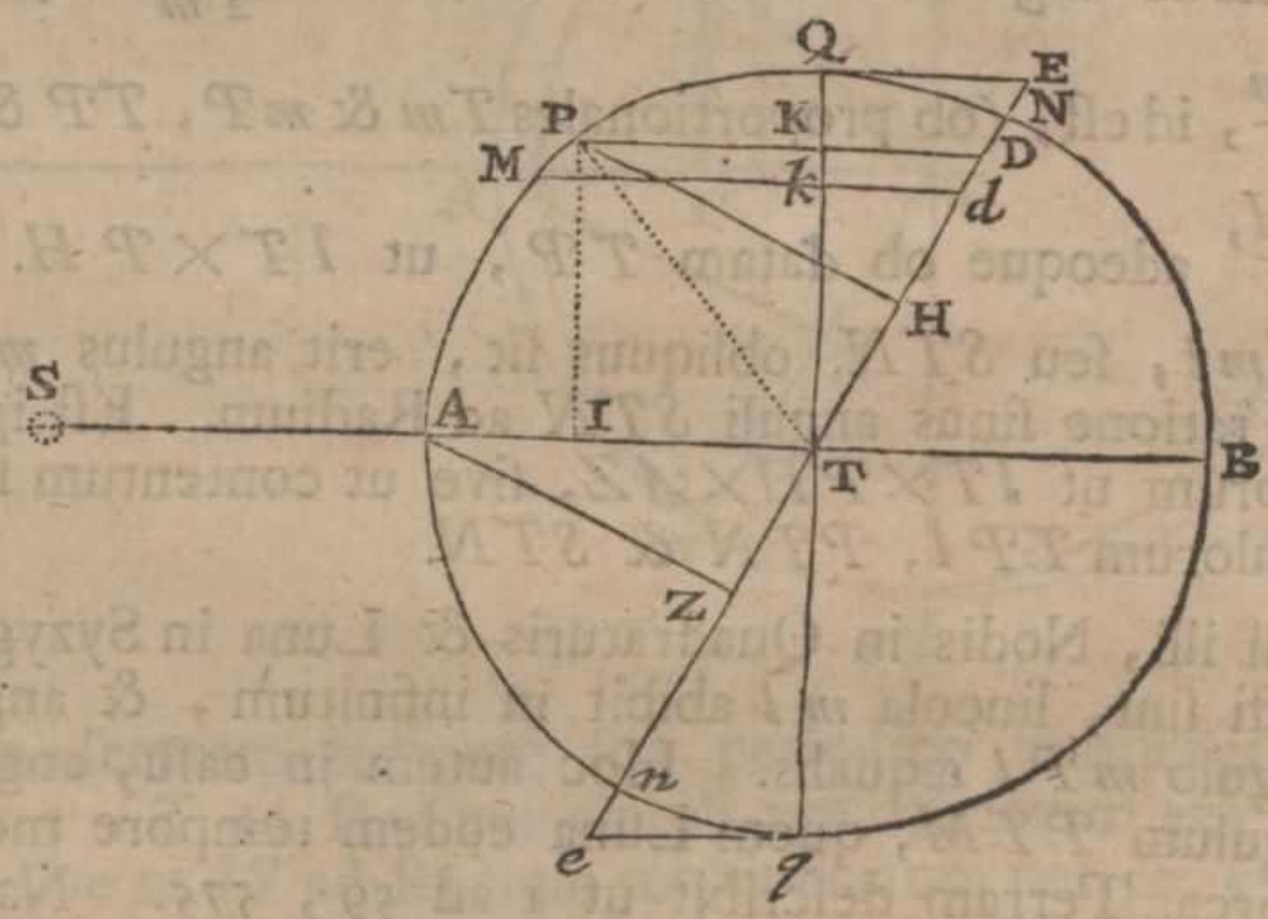
Defignet jam $\mathcal{P}M$ arcum, quem Luna dato tempore quam minimo defcribit, & ML lineolam quam Luna, impellente vi præfata $3\,IT$, eodem tempore defcribere poffet. Jungantur $\mathcal{P}L$, $M\mathcal{P}$, & producantur eæ ad m & l, ubi fecent planum Eclipticæ; inque $\mathcal{T}m$ demittatur perpendiculum $\mathcal{P}H$. Et quoniam recta ML parallela eft plano Eclipticæ, ideoque cum recta ml quæ in plano illo jacet concurrere non poteft, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi $LM\mathcal{P}ml$; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea fimilia erunt triangula $LM\mathcal{P}$, Lmp. Jam cum $M\mathcal{P}m$ fit in plano Orbis, in quo Luna in loco $\mathcal{P}$ movebatur, incidet punctum m in lineam Nn per Orbis illius Nodos N, n ductam. Et quoniam vis qua lineola LM generatur, fi tota fimul & femel in loco $\mathcal{P}$ impreffa effet, efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus chorda effet $L\mathcal{P}$, atque adeo transferret Lunam de plano $M\mathcal{P}m\mathcal{T}$ in planum $L\mathcal{P}l\mathcal{T}$; motus angularis Nodorum a vi illa genitus, æqualis erit angulo $m\mathcal{T}l$. Eft autem ml ad $m\mathcal{P}$ ut ML ad $M\mathcal{P}$, adeoque cum $M\mathcal{P}$ ob datum tempus data fit, eft ml ut rectangulum $ML \times m\mathcal{P}$, id eft, ut rectangulum $IT \times m\mathcal{P}$. Et angulus $m\mathcal{T}l$, fi modo angulus $\mathcal{T}ml$ rectus fit, eft ut $\frac{ml}{\mathcal{T}m}$ & propterea ut $\frac{IT \times \mathcal{P}m}{\mathcal{T}m}$, id eft, (ob proportionales $\mathcal{T}m$ & $m\mathcal{P}$, $\mathcal{T}\mathcal{P}$ & $\mathcal{P}H$) ut $\frac{IT \times \mathcal{P}H}{\mathcal{T}\mathcal{P}}$, adeoque ob datam $\mathcal{T}\mathcal{P}$, ut $IT \times \mathcal{P}H$. Quod fi angulus $\mathcal{T}ml$, feu STN obliquus fit, erit angulus $m\mathcal{T}l$ adhuc minor, in ratione finus anguli STN ad Radium. Eft igitur velocitas Nodorum ut $IT \times \mathcal{P}H \times AZ$, five ut contentum fub finubus trium angulorum $\mathcal{T}\mathcal{P}I$, $\mathcal{P}TN$ & STN.

Si anguli illi, Nodis in Quadraturis & Luna in Syzygia exiftentibus, recti fint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus $m\mathcal{T}l$ evadet angulo $m\mathcal{P}l$ æqualis. Hoc autem in cafu, angulus $m\mathcal{P}l$ eft ad angulum $\mathcal{P}TM$, quem Luna eodem tempore motu fuo apparente circa Terram defcribit ut 1 ad 59, 575. Nam angulus $m\mathcal{P}l$ æqualis eft angulo $L\mathcal{P}M$, id eft, angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem fola vis præfata Solaris $3\,IT$ fi tum ceffaret Lunæ gravitas dato illo tempore generare poffet; & angulus $\mathcal{P}TM$ æqualis eft angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem vis illa, qua Luna in Orbe fuo retinetur, fi tum ceffaret vis Solaris $3\,IT$ eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut fupra dixi-

De Mundi Systemate,

mus, ſunt ad invicem ut 1 ad 59, 575. Ergo cum motus medius horarius Lunæ (reſpectu fixarum) ſit $32'. 56''. 27'''. 12^{iv}\frac{1}{2}$, motus horarius Nodi in hoc caſu erit $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$. Aliis autem in caſibus motus iſte horarius erit ad $33''. 10'''. 33^{iv}. 12^{v}$. ut contentum ſub ſinubus angulorum trium *TPI*, *PTN*, & *STN* (ſeu diſtantiarum Lunæ a Quadratura, Lunæ a Nodo, & Nodi a Sole) ad cubum Radii. Et quoties ſignum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regreſſivus in progreſſivum & progreſſivus in regreſſivum mutari. Unde fit ut Nodi progrediantur quoties Luna inter Quadraturam alterutram & Nodum Quadraturæ proximum verſatur. Aliis in caſibus regrediuntur, & per exceſſum regreſſus ſupra progreſſum, ſingulis menſibus feruntur in antecedentia.

Corol. 1. Hinc ſi a dati arcus quam minimi *P M* terminis *P* & *M* ad lineam Quadraturas jungentem *Qq* demittantur perpendicula *PK*, *Mk*, eademque producantur donec ſecent lineam Nodorum *Nn* in *D* & *d*; erit motus horarius Nodorum ut area *MPDd* & quadratum lineæ *AZ* conjunctim. Sunto enim



PK, *PH* & *AZ* prædicti tres ſinus. Nempe *PK* ſinus diſtantiæ Lunæ a Quadratura, *PH* ſinus diſtantiæ Lunæ a Nodo, & *AZ* ſinus diſtantiæ Nodi a Sole: & erit velocitas Nodi ut contentum $PK \times PH \times AZ$. Eſt autem *PT* ad *PK* ut *PM* ad *Kk*, adeoque ob datas *PT* & *PM* eſt *Kk* ipſi *PK* proportionalis. Eſt & *AT* ad *PD* ut *AZ* ad *PH*, & propterea *PH* rectangulo

$PD \times AZ$

$PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus, $PK \times PH$ est ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ *qu.* id est, ut area $PDdM$ & AZ *qu.* conjunctim. *Q. E. D.* LIBER TERTIUS.

Corol. 2. In data quavis Nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motus horarii in Syzygiis Lunæ, ideoque est ad $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}.$ ut quadratum sinus distantiæ Nodorum a Syzygiis ad quadratum Radii, sive ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Nam si Luna uniformi cum motu perambulet semicirculum QAq, summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna pergit a Q ad M, erit area $QMdE$ quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum n, summa illa erit area tota $EQAn$ quam linea PD describit, dein Luna pergente ab n ad q, linea PD cadet extra circulum, & aream nqe ad circuli tangentem qe terminatam describet; quæ, quoniam Nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, subduci debet de area priore, & cum æqualis sit areæ QEN, relinquet semicirculum $NQAn$. Igitur summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna semicirculum describit, est area semicirculi; & summa omnium quo tempore Luna circulum describit est area circuli totius. At area $PDdM$, ubi Luna versatur in Syzygiis, est rectangulum sub arcu PM & radio MT; & summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum sit æquale duobus circulis, duplo majus est quam rectangulum prius. Proinde Nodi, ea cum velocitate uniformiter continuata quam habent in Syzygiis Lunaribus, spatium duplo majus describerent quam revera describunt; & propterea motus mediocris quocum, si uniformiter continuaretur, spatium a se inæquabili cum motu revera confectum describere possent, est semissis motus quem habent in Syzygiis Lunæ. Unde cum motus horarius maximus, si Nodi in Quadraturis versantur, sit $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$, motus mediocris horarius in hoc casu erit $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}$. Et cum motus horarius Nodorum semper sit ut AZ *qu.* & area $PDdM$ conjunctim, & propterea motus horarius Nodorum in Syzygiis Lunæ ut AZ *qu.* & area $PDdM$ conjunctim, id est (ob datam aream $PDdM$ in Syzygiis descriptam) ut AZ *qu.* erit etiam motus mediocris ut AZ *qu.* atque adeo hic motus, ubi Nodi extra Quadraturas versantur, erit ad $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}.$ ut AZ *qu.* ad AT *qu.* *Q. E. D.*

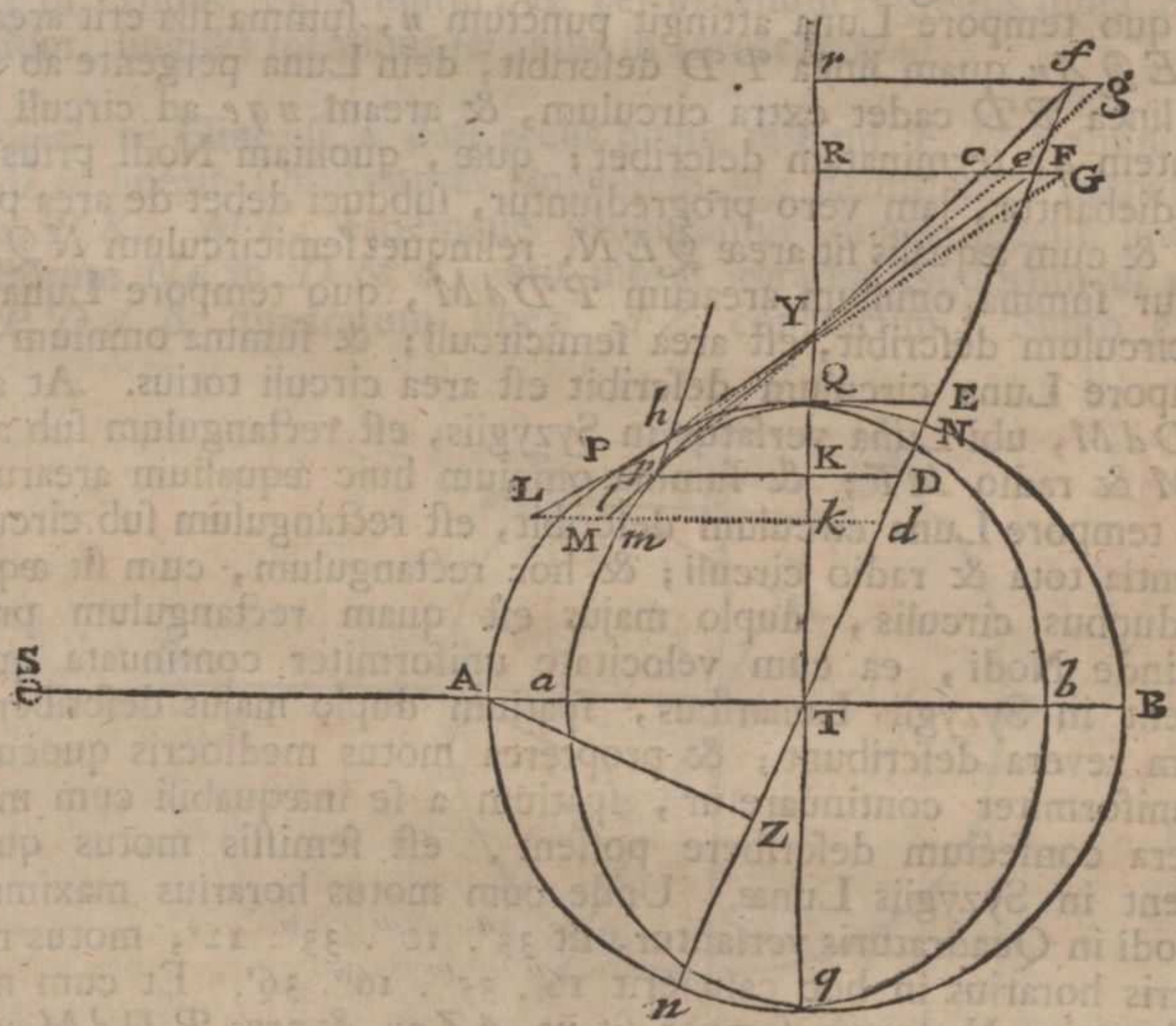
PRO-

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe Elliptico.

Defignet $Qpmaq$ Ellipfin, axe majore Qq, minore ab defcriptam, QAq Circulum circumfcriptum, T Terram in utriufque centro communi, S Solem, p Lunam in Ellipfi motam, & pm arcum quem data temporis particula quam minima defcribit, N & n Nodos linea Nn junctos, pK & mk perpendicula in axem Qq demiffa & hinc inde producta, donec occurrant Circulo in P & M,



& lineæ Nodorum in D & d. Et fi Luna, radio ad Terram ducto, aream defcribat tempori proportionalem, erit motus Nodi in Ellipfi ut area $pDdm$.

Nam fi PF tangat Circulum in P, & producta occurrat TN in F, & pf tangat Ellipfin in p & producta occurrat eidem TN in

in f, conveniant autem hæ tangentes in axe TQ ad Υ; & si ML designet spatium quod Luna in Circulo revolvens, interea dum describit arcum PM, urgente & impellente vi prædicta $3IT$, motu transverso describere posset, & ml designet spatium quod Luna in Ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$, describere posset; & producantur LP & lp donec occurrant plano Ecliptícæ in G & g; & jungantur FG & fg, quarum FG producta secet pf, pg & TQ in c, e & R respective, & fg producta secet TQ in r: Quoniam vis $3IT$ seu $3PK$ in Circulo est ad vim $3IT$ seu $3pK$ in Ellipsi, ut PK ad pK, seu AT ad aT; erit spatium ML vi priore genitum, ad spatium ml vi posteriore genitum, ut PK ad pK, id est, ob similes figuras $P\Upsilon Kp$ & $F\Upsilon Rc$, ut FR ad cR. Est autem ML ad FG (ob similia triangula PLM, PGF) ut PL ad PG, hoc est (ob parallelas Lk, PK, GR) ut pl ad pe, id est, (ob similia triangula plm, cpe) ut lm ad ce; & inverse ut LM est ad lm, seu FR ad cR, ita est FG ad ce. Et propterea si fg esset ad ce ut $f\Upsilon$ ad $c\Upsilon$, id est, ut fr ad cR (hoc est, ut fr ad FR & FR ad cR conjunctim, id est, ut $f\Upsilon$ ad $F\Upsilon$ & FG ad ce conjunctim,) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & $f\Upsilon$ ad $F\Upsilon$, foret fg ad FG ut $f\Upsilon$ ad $F\Upsilon$; atque adeo anguli, quos FG & fg subtenderent ad Terram T, æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propositione exposuimus) sunt motus Nodorum, quo tempore Luna in Circulo arcum PM, in Ellipsi arcum pm percurrit: & propterea motus Nodorum in Circulo & Ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modo fg esset ad ce ut $f\Upsilon$ ad $c\Upsilon$, id est, si gf æqualis esset $\frac{ce \times f\Upsilon}{c\Upsilon}$. Verum ob similia triangula fgp, cep, est fg ad ce ut fp ad cp; ideoque fg æqualis est $\frac{ce \times fp}{cp}$; & propterea angulus, quem fg revera subtendit, est ad angulum priorem, quem FG subtendit, hoc est, motus Nodorum in Ellipsi ad modum Nodorum in Circulo, ut hæc fg seu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg seu $\frac{ce \times f\Upsilon}{c\Upsilon}$, id est, ut $fp \times c\Upsilon$ ad $f\Upsilon \times cp$, seu fp ad $f\Upsilon$ & $c\Upsilon$ ad cp, hoc est, si ph ipsi TN parallela occurrat FP in h, ut Fh ad $F\Upsilon$ & $F\Upsilon$ ad FP; hoc est, ut Fh ad FP seu Dp ad DP, adeoque

LIBER TERTIUS.

De Mundi Systemate

ut area *Dpmd* ad aream *DPMd*. Et propterea, cum area posterior proportionalis sit motui Nodorum in Circulo, erit area prior proportionalis motui Nodorum in Ellipsi. *Q. E. D.*

Corol. Igitur cum, in data Nodorum positione, summa omnium arearum *pDdm*, quo tempore Luna pergit a Quadratura ad locum quemvis *m*, sit area *mpQEd*, quæ ad Ellipseos tangentem *QE* terminatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integra, sit area Ellipseos totius: motus mediocris Nodorum in Ellipsi erit ad motum mediocrem Nodorum in Circulo, ut Ellipsis ad Circulum; id est, ut *Ta* ad *TA*, seu 69 ad 70. Et propterea, cum motus mediocris horarius Nodorum in Circulo sit ad $16''.35'''.16^{iv}.36^{v}$. ut *AZqu.* ad *ATqu.* si capiatur angulus $16''.21'''.3^{iv}.30^{v}$. ad angulum $16''.35'''.16^{iv},36^{v}$. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius Nodorum in Ellipsi ad $16''.21'''.3^{iv}.30^{v}$. ut *AZq* ad *ATq*; hoc est, ut quadratum sinus distantiæ Nodi a Sole ad quadratum Radii.

Cæterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius describit in Syzygiis quam in Quadraturis, & eo nomine tempus in Syzygiis contrahitur, in Quadraturis producitur; & una cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in Quadraturis Lunæ ad ejus momentum in Syzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in Octantibus est ad excessum in Syzygiis, defectumque in Quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50. Unde cum tempus Lunæ in singulis Orbis particulis æqualibus sit reciproce ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in Octantibus ad excessum temporis in Quadraturis, ac defectum in Syzygiis, ab hac causa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem a Quadraturis ad Syzygias, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in Quadraturis, sit ut quadratum sinus distantiæ Lunæ a Quadraturis quam proxime; & propterea differentia inter momentum in loco quocumque & momentum mediocre in Octantibus, est ut differentia inter quadratum sinus distantiæ Lunæ a Quadraturis & quadratum sinus graduum 45, seu semissem quadrati Radii; & incrementum temporis in locis singulis inter Octantes & Quadraturas, & decrementum ejus inter Octantes & Syzygias, est in eadem ratione. Motus autem Nodorum, quo tempore Luna percurrit singulas Orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Est enim motus iste, dum Luna per-

percurrit PM, (cæteris paribus) ut ML, & ML eſt in duplicata ratione temporis. Quare motus Nodorum in Syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas Orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; eſtque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut 100 ad 11073 quam proxime. Decrementum autem in locis inter Octantes & Syzygias, & incrementum in locis inter Octantes & Quadraturas, eſt quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in Syzygiis & differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ Lunæ a Quadratura & ſemiſſem quadrati Radii ad ſemiſſem quadrati Radii, conjunctim. Unde ſi Nodi in Quadraturis verſentur, & capiantur loca duo æqualiter ab Octante hinc inde diſtantia, & alia duo a Syzygia & Quadratura iiſdem intervallis diſtantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter Syzygiam & Octantem, ſubducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ ſunt inter Octantem & Quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in Syzygia: uti rationem ineunti facile conſtabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de Nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in Syzygia. Motus totus horarius Nodorum in Syzygiis (ubi Luna radio ad Terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur) erat $32''.\ 42'''.\ 7^{iv}$. Et decrementum motus Nodorum, quo tempore Luna jam velocior deſcribit idem ſpatium, diximus eſſe ad hunc motum ut 100 ad 11073; adeoque decrementum illud eſt $17'''.\ 43^{iv}.\ 11^{v}$, cujus pars quarta $4'''.\ 25^{iv}.\ 48^{v}$, motui horario mediocri ſuperius invento $16''.\ 21'''.\ 3^{iv}.\ 30^{v}$. ſubducta, relinquit $16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

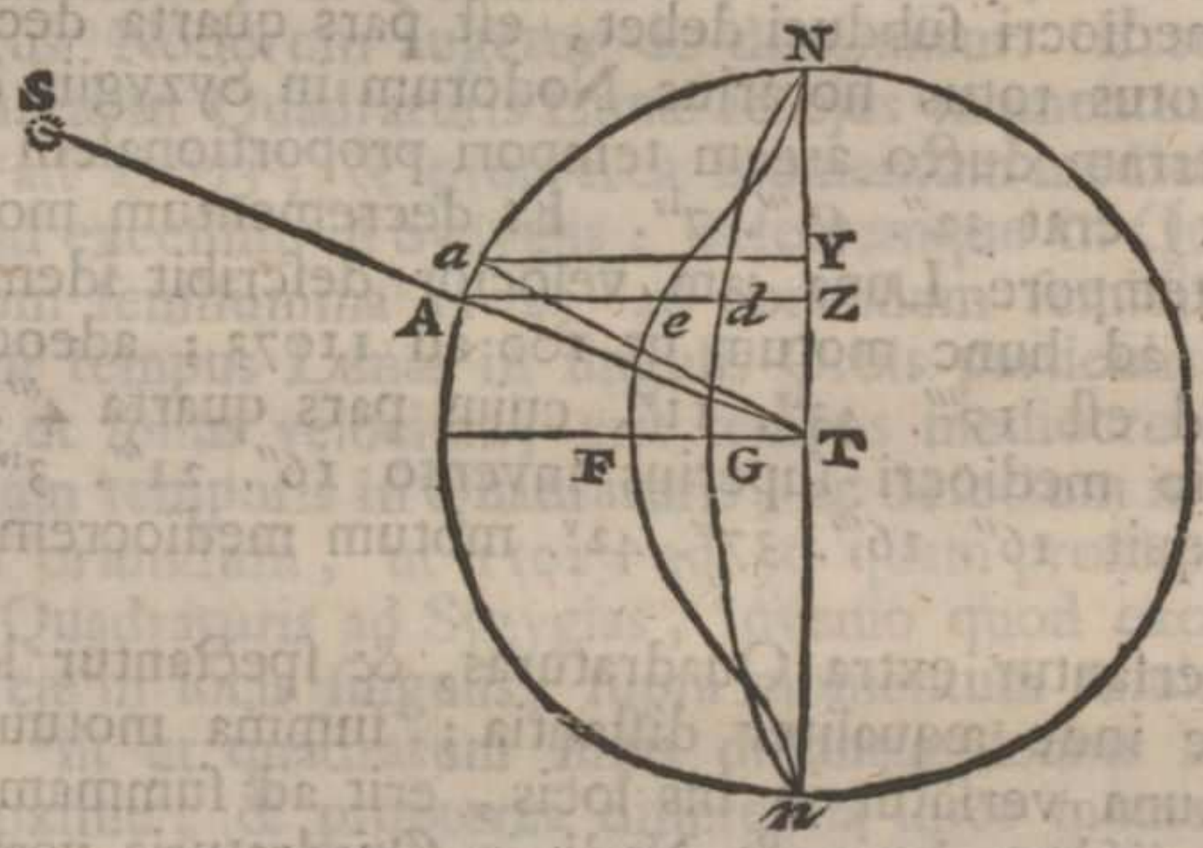
Si Nodi verſantur extra Quadraturas, & ſpectantur loca bina a Syzygiis hinc inde æqualiter diſtantia; ſumma motuum Nodorum, ubi Luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi Luna in iiſdem locis & Nodi in Quadraturis verſantur, ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ Et decrementa motuum, a cauſis jam expoſitis oriunda, erunt ad invicem ut ipſi motus, adeoque motus reliqui erunt ad invicem ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ & motus mediocres ut motus reliqui. Eſt itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque Nodorum ſitu, ad $16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}.$ ut $AZqu.$ ad $ATqu$; id eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ Nodorum a Syzygiis ad quadratum Radii.

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

Invenire motum medium Nodorum Lunæ.

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe Nodum verſari in N, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad Stellas Fixas. Interea vero Solem S, per motum Terræ, progredi a Nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem Aa arcus datus quam minimus, quem recta TS ad Solem ſemper ducta, interſectione ſui & circuli NAn, dato tempore quam minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut AZq, id eſt (ob proportionales AZ, ZY) ut rectangulum ſub AZ & ZY, hoc eſt ut area $AZYa$. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut ſumma omnium arearum $aYZA$, id eſt, ut area NAZ. Eſt autem maxima



$AZYa$ æqualis rectangulo ſub arcu Aa & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentia tota & radio; id eſt, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo reſpondens, erat $16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}$. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. *hor.* 6. *min.* 9. fit $39^{gr.}\ 38'.\ 7''.\ 50'''$. Ideoque hujus dimidium $19^{gr.}\ 49'\ 3''.\ 55'''$. eſt motus

tus medius Nodorum circulo toti respondens. Et motus Nodorum, quo tempore Sol pergit ab *N* ad *A*, est ad 19gr. 49′. 3″. 55‴. ut area *NAZ* ad circulum totum.

Hæc ita se habent, ex Hypothesi quod Nodus horis singulis in locum priorem retrahitur, sic ut Sol anno toto completo ad Nodum eundem redeat a quo sub initio digressus fuerat. Verum per motum Nodi fit ut Sol citius ad Nodum revertatur, & computanda jam est abbreviatio temporis. Cum Sol anno toto conficiat 360 gradus, & Nodus motu maximo eodem tempore conficeret 39gr. 38′. 7″. 50‴, seu 39,6355 gradus; & motus mediocris Nodi in loco quovis *N* sit ad ipsius motum mediocrem in Quadraturis suis, ut *AZq* ad *ATq*: erit motus Solis ad motum Nodi in *N*, ut 360 *ATq* ad 39,6355 *AZq*; id est, ut 9,0827646 *ATq* ad *AZq*: Unde si circuli totius circumferentia *NAn* dividatur in particulas æquales *Aa*, tempus quo Sol percurrat particulam *Aa*, si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus una cum Nodis circa centrum *T* revolvatur, reciproce ut 9,0827646 *ATq* ad 9,0827646 *ATq* + *ZAq*. Nam tempus est reciproce ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum Solis & Nodi. Igitur si tempus, quo Sol absque motu Nodi percurreret arcum *NA*, exponatur per Sectorem *NTA*, & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum *Aa*, exponatur per Sectoris particulam *ATa*; & (perpendiculo *aT* in *Nn* demisso) si in *AZ* capiatur *dZ*, ejus longitudinis ut sit rectangulum *dZ* in *ZT* ad Sectoris particulam *ATa* ut *AZq* ad 9,0827646 *ATq* + *AZq*, id est, ut sit *dZ* ad ½ *AZ* ut *ATq* ad 9,0827646 *ATq* + *AZq*; rectangulum *dZ* in *ZT* designabit decrementum temporis ex motu Nodi oriundum, tempore toto quo arcus *Aa* percurritur. Et si punctum *d* tangit Curvam *NdGn*, area curvilinea *NdZ* erit decrementum totum, quo tempore arcus totus *NA* percurritur; & propterea excessus Sectoris *NAT* supra aream *NdZ* erit tempus illud totum. Et quoniam motus Nodi tempore minore minor est in ratione temporis, debebit etiam area *AaTZ* diminui in eadem ratione. Id quod fiet si capiatur in *AZ* longitudo *eZ*, quæ sit ad longitudinem *AZ* ut *AZq* ad 9,0827646 *ATq* + *AZq*. Sic enim rectangulum *eZ* in *ZT* erit ad aream *AZTa* ut decrementum temporis quo arcus *Aa* percurritur, ad tempus totum quo percurreretur si Nodus quiesceret: Et propterea rectangulum illud respondebit decremento motus Nodi. Et si punctum *e* tangat

De Mundi Systemate

Curvam $NeFn$, area tota NeZ, quæ ſumma eſt omnium decrementorum, reſpondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NAe reſpondebit motui reliquo, qui verus eſt Nodi motus quo tempore arcus totus NA, per Solis & Nodi conjunctos motus, percurritur. Jam vero area ſemicirculi eſt ad aream Figuræ $NeFnT$, per methodum Serierum infinitarum quæſitam, ut 793 ad 60 quamproxime. Motus autem qui reſpondet Circulo toti erat $19^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''$; & propterea motus qui Figuræ $NeFnT$ duplicatæ reſpondet, eſt $1^{gr.}\ 29'.\ 58''.\ 2'''$. Qui de motu priore ſubductus relinquit $18^{gr.}\ 19'.\ 5''.\ 53'''$. motum totum Nodi inter ſui ipſius Conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 ſubductus, relinquit $341^{gr.}\ 40'.\ 54''.\ 7'''$. motum Solis inter eaſdem Conjunctiones. Iſte autem motus eſt ad motum annuum $360^{gr.}$ ut Nodi motus jam inventus $18^{gr.}\ 19'.\ 5''.\ 53''$. ad ipſius motum annuum, qui propterea erit $19^{gr.}\ 18.\ 1''.\ 23'''$. Hic eſt motus medius Nodorum in anno Sidereo. Idem per Tabulas Aſtronomicas eſt $19^{gr.}\ 21'.\ 21''.\ 50'''$. Differentia minor eſt parte trecenteſima motus totius, & ab Orbis Lunaris Eccentricitate & Inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per Eccentricitatem Orbis motus Nodorum nimis acceleratur, & per ejus Inclinationem viciſſim retardatur aliquantulum, & ad juſtam velocitatem reducitur.

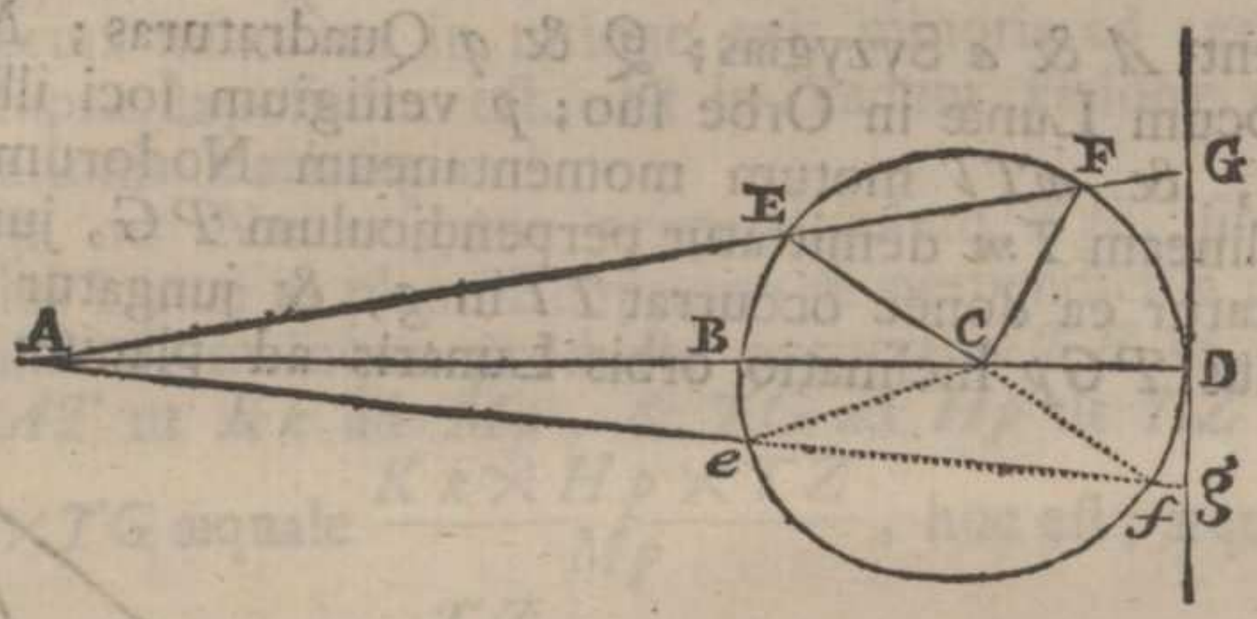
PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

Invenire motum verum Nodorum Lunæ.

In tempore quod eſt ut area $NTA - NdZ$, (*in Fig. præced.*) motus iſte eſt ut area $NAeN$, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præſtat ſequentem Problematis conſtructionem adhibere. Centro C, intervallo quovis CD, deſcribatur circulus $BEFD$. Producatur DC ad A, ut ſit AB ad AC ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris, ubi Nodi ſunt in Quadraturis, (id eſt, ut $19^{gr.}\ 18'.\ 1'.\ 23'''$. ad $19^{gr.}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''$, atque adeo BC ad AC ut motuum differentia $0^{gr.}\ 31'.\ 2''.\ 32'''$, ad motum poſteriorem $19^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''$) hoc eſt, ut 1 ad $38\frac{3}{10}$, dein per punctum D ducatur infinita Gg, quæ tangat circulum in D; & ſi capiatur angulus BCE vel BCF æqualis duplæ diſtantiæ Solis a loco Nodi, per motum medium invento;

&

& agatur AE vel AF ſecans perpendiculum DG in G; & capiatur angulus qui ſit ad motum totum Nodi inter ipſius Syzygias (id eſt, ad $9^{gr.}$ $11'.$ $3''.$) ut tangens DG ad circuli BED circumferentiam totam; atque angulus iſte (pro quo angulus DAG uſurpari poteſt) ad motum medium Nodorum addatur ubi Nodi



tranſeunt a Quadraturis ad Syzygias, & ab eodem motu medio ſubducatur ubi tranſeunt a Syzygiis ad Quadraturas, habebitur eorum motus verus. Nam motus verus ſic inventus congruet quam proxime cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream $NTA - NdZ$, & motum Nodi per aream $NAeN$; ut rem perpendenti & computationes inſtituenti conſtabit. Hæc eſt æquatio ſemeſtris motus Nodorum. Eſt & æquatio menſtrua, ſed quæ ad inventionem Latitudinis Lunæ minime neceſſaria eſt. Nam cum Variatio Inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia ſit, alteri ſemeſtri, alteri autem menſtruæ; hujus menſtrua inæqualitas & æquatio menſtrua Nodorum ita ſe mutuo contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda Latitudine Lunæ negligi poſſint.

Corol. Ex hac & præcedente Propoſitione liquet quod Nodi in Syzygiis ſuis quieſcunt, in Quadraturis autem regrediuntur motu horario $16''.$ $19'''.$ $26^{iv}.$ Et quod æquatio motus Nodorum in Octantibus ſit $1^{gr.}$ $30'.$ Quæ omnia cum Phænomenis cœleſtibus probe quadrant.

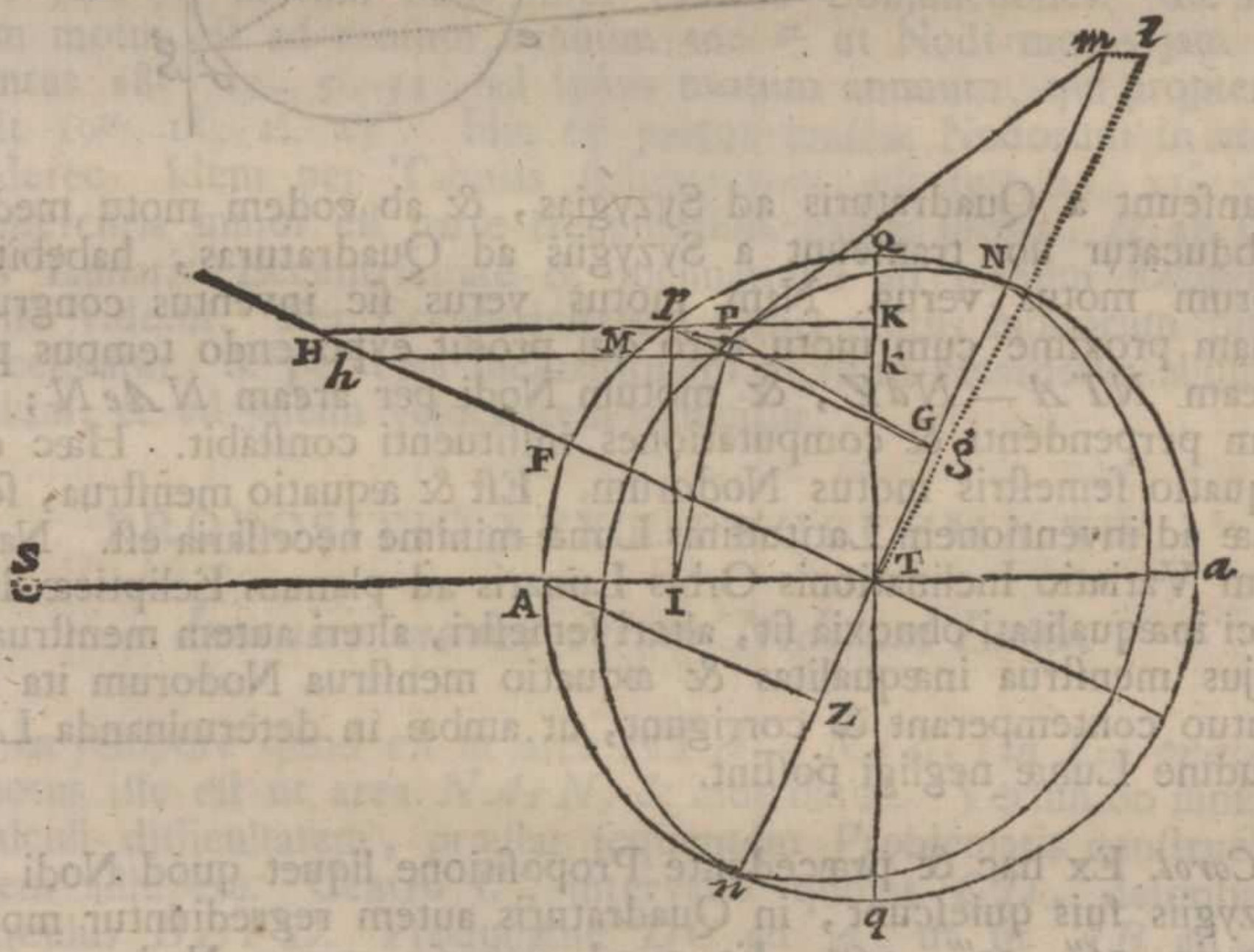
PRO-

De Mundi Systemate,

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire Variationem horariam Inclinationis Orbis Lunaris ad planum Ecliptícæ.

Designent *A* & *a* Syzygias; *Q* & *q* Quadraturas; *N* & *n* Nodos; *P* locum Lunæ in Orbe suo; *p* vestigium loci illius in plano Ecliptícæ, & *mTl* motum momentaneum Nodorum ut supra. Et si ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, jungatur *pG*, & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* Inclinatio orbis Lunaris ad planum Ecliptícæ,



ubi Luna versatur in *P*; & angulus *Pgp* Inclinatio ejusdem post momentum temporis completum; adeoque angulus *GPg* Variatio momentanea Inclinationis. Est autem hic angulus *GPg* ad angulum *GTg*, ut *TG* ad *PG* & *Pp* ad *PG* conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cum angulus *GTg* (per Propositi. xxx.) sit ad angulum 33″. 10‴, 33ᵛ. ut

IT×

$IT \times PG \times AZ$ ad $AT\ cub$, erit angulus GPg (seu Inclinationis horaria Variatio) ad angulum $33''\ 10'''.\ 33^{iv}$, ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT\ cub$. *Q. E. I.* LIBER TERTIUS.

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod Luna in Orbe Circulari uniformiter gyratur. Quod si Orbis ille Ellipticus sit, motus mediocris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. Et in eadem ratione minuetur etiam Inclinationis Variatio.

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendiculum TF, sitque pM motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendicula pK, Mk in QT demissa & utrinque producta occurrant TF in H & h: erit IT ad AT ut Kk ad Mp, & TG ad Hp ut TZ ad AT, ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc est, æquale areæ $Hp\,Mh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea Inclinationis Variatio horaria ad $33''$, $10'''$, 33^{iv}, ut $Hp\,Mh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT\ cub$.

Corol. 2. Ideoque si Terra & Nodi singulis horis completis retraherentur à locis suis novis, & in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinationis Variatio tempore mensis illius foret ad $33''\ 10'''$, 33^{iv}, ut aggregatum omnium arearum $Hp\,Mh$, in revolutione puncti p genitarum, & sub signis propriis + & — conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT\ cub$: id est, ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT\ cub$. hoc est, ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,Mp \times AT\ quad$.

Corol. 3. Proinde in dato Nodorum situ, Variatio mediocris horaria, ex qua per mensem uniformiter continuata Variatio illa menstrua generari posset, est ad $33''.\ 10''.\ 33^{iv}$, ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\,ATq$, sive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4\,AT$, id

est (cum Pp sit ad PG ut sinus Inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ sit ad 4 AT ut sinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut Inclinationis ejusdem sinus ductus in sinum duplicatæ distantiæ Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol. 4. Quoniam Inclinationis horaria Variatio, ubi Nodi in Quadraturis versantur, est (per hanc Propositionem) ad angulum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ac $AT\,cub.$ id est, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad 2 AT, hoc est, ut sinus duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: summa omnium Variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc situ Nodorum transit à Quadratura ad Syzygiam, (id est, spatio horarum $177\frac{1}{8}$,) erit ad summam totidem angulorum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$, seu $5878''.$, ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$, ad summam totidem diametrorum; hoc est, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam: id est, si Inclinatio sit $5^{gr.}\ 1'$, ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22, seu 278 ad 10000. Proindeque Variatio tota, ex summa omnium horariarum Variationum tempore prædicto conflata, est $163''$, seu $2'.\ 43''$.

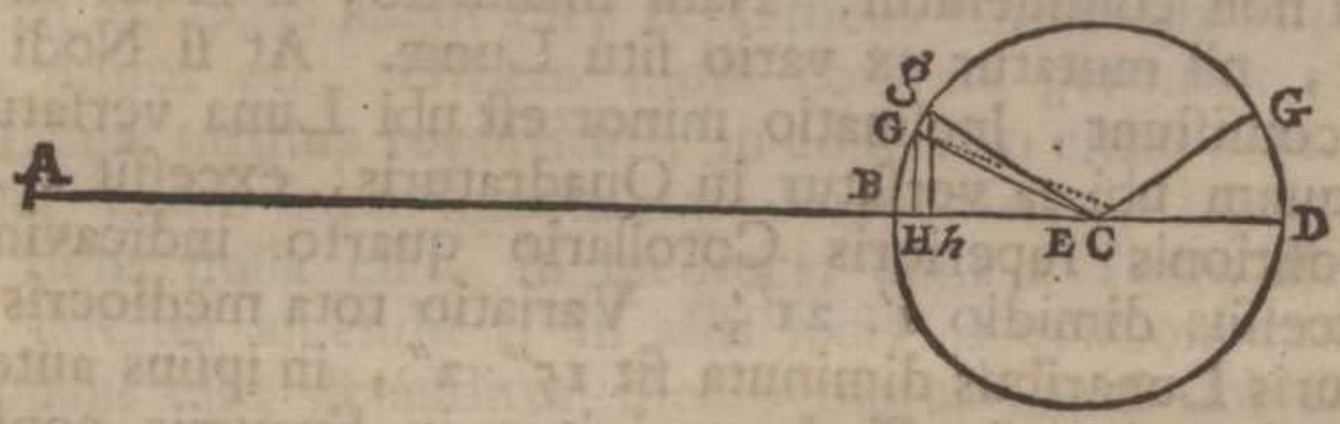
PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

Dato tempore invenire Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Ecliptica.

Sit AD sinus Inclinationis maximæ, & AB sinus Inclinationis minimæ. Bisecetur BD in C, & centro C, intervallo BC, describatur Circulus BGD. In AC capiatur CE in ea ratione ad EB quam EB habet ad $2BA$; Et si dato tempore constituatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantiæ Nodorum à Qua-

Quadraturis, & ad AD demittatur perpendiculum GH: erit AH ſinus Inclinationis quæſitæ. LIBER TERTIUS.

Nam GEq æquale eſt $GHq + HEq = BH\mathcal{D} + HEq = HB\mathcal{D} + HEq - BHq = HB\mathcal{D} + BEq - 2BH \times BE = BEq + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Ideoque cum $2EC$ detur, eſt GEq ut AH. Deſignet jam AEg duplicatam diſtantiam Nodorum à Quadraturis poſt datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg, ob datum



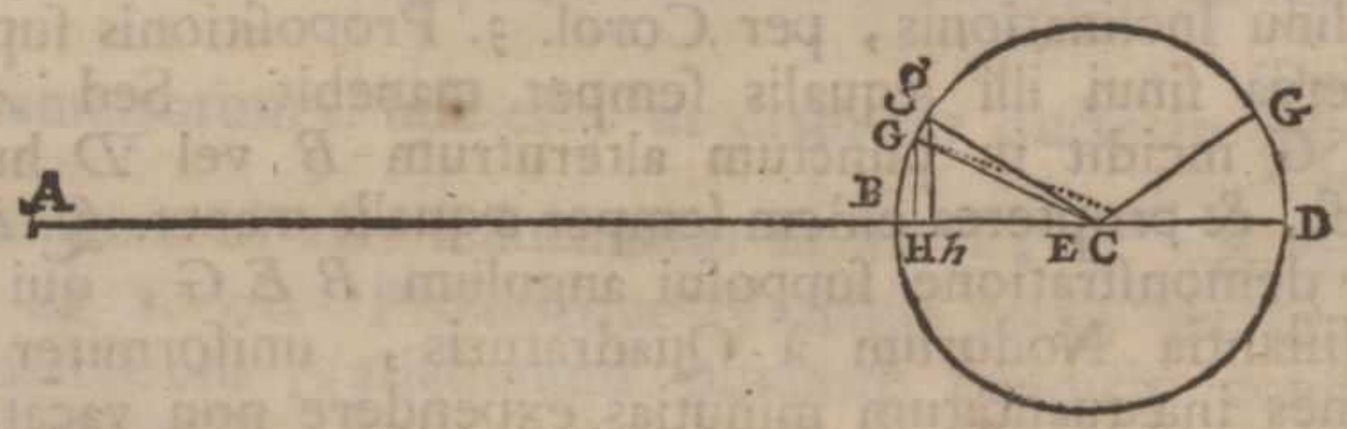
angulum GEg, erit ut diſtantia GE. Eſt autem Hh ad Gg ut GH ad GC, & propterea Hh eſt ut contentum $GH \times Gg$ ſeu $GH \times GE$; id eſt, ut $\frac{GH}{GE} \times GEq$ ſeu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id eſt, ut AH & ſinus anguli AEG conjunctim. Igitur ſi AH in caſu aliquo ſit ſinus Inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu Inclinationis, per Corol. 3. Propoſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed AH ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel $\mathcal{D}$ huic ſinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. *Q. E. D.*

In hac demonſtratione ſuppoſui angulum BEG, qui eſt duplicata diſtantia Nodorum à Quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum eſſe, & in hoc caſu Gg eſſe augmentum horarium duplæ diſtantiæ Nodorum & Solis ab invicem; & Inclinationis Variatio horaria in eodem caſu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33''.\ 12'''.\ 33^{iv}.$ ut contentum ſub Inclinationis ſinu AH & ſinu anguli recti BEG, qui eſt duplicata diſtantia Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris Inclinationis ſinus AH ad radium quadruplicatum; hoc eſt (cum Inclinatio illa mediocris ſit quaſi $5^{gr.}\ 8'\frac{1}{2}$) ut ejus ſinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem Variatio tota, ſinuum differentiæ $B\mathcal{D}$ reſpondens, ad Variationem illam horariam ut diameter $B\mathcal{D}$ ad

De Mundi Systemate,

arcum Gg; id est, ut diameter BD ad semicircumferentiam BGD & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$, quo Nodus pergit à Quadraturis ad Syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc est, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare si rationes omnes conjungantur, fiet Variatio tota BD ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id est, ut 29645 ad 1000, & inde Variatio illa BD prodibit $16'.\ 23''\frac{1}{2}$.

Hæc est Inclinationis Variatio maxima quatenus locus Lunæ in Orbe suo non consideratur. Nam Inclinatio, si Nodi in Syzygiis versantur, nil mutatur ex vario situ Lunæ. At si Nodi in Quadraturis consistunt, Inclinatio minor est ubi Luna versatur in Syzygiis, quam ubi ea versatur in Quadraturis, excessu $2'.43''$; uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessus dimidio $1'.\ 21''\frac{1}{2}$. Variatio tota mediocris BD in Quadraturis Lunaribus diminuta fit $15''.\ 2''$, in ipsius autem Syzygiis aucta fit $17'.\ 45''$. Si Luna igitur in Syzygiis constituatur, Variatio tota, in transitu Nodorum à Quadraturis ad Syzygias, erit $17'.\ 45''$: adeoque si Inclinatio, ubi Nodi in Syzygiis versantur, sit $5^{gr.}\ 17'.\ 20''$; eadem, ubi Nodi sunt in Quadraturis, & Luna in Syzygiis, erit $4^{gr.}\ 59'\ 35''$. Atque hæc ita se habere confirmatur ex Observationibus.



Si jam desideretur Orbis Inclinatio illa, ubi Luna in Syzygiis & Nodi ubivis versantur; fiat AB ad AD ut sinus graduum $4.\ 59'.\ 35''.$ ad sinum graduum $5.\ 17'.\ 20''$, & capiatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantiæ Nodorum à Quadraturis; & erit AH sinus Inclinationis quæsitæ. Huic Orbis Inclinationi æqualis est ejusdem Inclinatio, ubi Luna distat $90^{gr.}$ à Nodis. In aliis Lunæ locis inæqualitas menstrua, quam inclinationis variatio admittit, in calculo Latitudinis Lunæ compensatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motus Nodorum, (ut supra diximus) adeoque in calculo Latitudinis illius negligi potest.

Scho-

Scholium.

Hiſce motuum Lunarium computationibus oſtendere volui, quod motus Lunares, per Theoriam Gravitatis, a cauſis ſuis computari poſſint. Per eandem Theoriam inveni præterea quod Æquatio Annua medii motus Lunæ oriatur a varia dilatatione Orbis Lunæ per vim Solis, juxta Corol. 6. Prop. LXVI. Lib. I. Hæc vis in Perigæo Solis major eſt, & Orbem Lunæ dilatat; in Apogæo ejus minor eſt, Orbem illum contrahi permittit. In Orbe dilatato Luna tardius revolvitur, in contracto citius; & Æquatio Annua per quam hæc inæqualitas compenſatur, in Apogæo & Perigæo Solis nulla eſt, in mediocri Solis a Terra diſtantia ad 11′. 50″. circiter aſcendit, in aliis locis Æquationi centri Solis proportionalis eſt; & additur medio motui Lunæ ubi Terra pergit ab Aphelio ſuo ad Perihelium, & in oppoſita Orbis parte ſubducitur. Aſſumendo radium Orbis magni 1000 & Eccentricitatem Terræ $16\frac{7}{8}$, hæc Æquatio ubi maxima eſt, per Theoriam Gravitatis prodiit 11′. 49″. Sed Eccentricitas Terræ paulo major eſſe videtur, & aucta Eccentricitate hæc Æquatio augeri debet in eadem ratione. Sit Eccentricitas $16\frac{1}{16}$, & Æquatio maxima erit 11′. 52″.

Inveni etiam quod in Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, Apogæum & Nodi Lunæ velocius moventur quam in Aphelio ejus, idque in triplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe. Et inde oriuntur Æquationes Annuæ horum motuum Æquationi centri Solis proportionales. Motus autem Solis eſt in duplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe, & maxima centri Æquatio quam hæc inæqualitas generat, eſt 1gr. 56′. 26″ prædictæ Solis Eccentricitati $16\frac{1}{16}$ congruens. Quod ſi motus Solis eſſet in triplicata ratione diſtantiæ inverſe, hæc inæqualitas generaret Æquationem maximam 2gr. 56′. 9″. Et propterea Æquationes maximæ quas inæqualitates motuum Apogæi & Nodorum Lunæ generant, ſunt ad 2gr. 56. 9″, ut motus medius diurnus Apogæi & motus medius diurnus Nodorum Lunæ ſunt ad motum medium diurnum Solis. Unde prodit Æquatio maxima medii motus Apogæi 19′. 52″: & Æquatio maxima medii motus Nodorum 9′. 27″. Additur vero Æquatio prior & ſubducitur poſterior, ubi Terra pergit a Perihelio ſuo ad Aphelium: & contrarium fit in oppoſita Orbis parte.

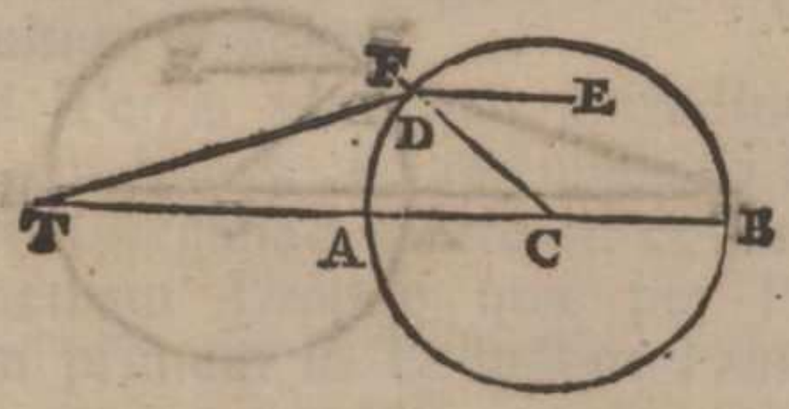
De Mundi Systemate,

Per Theoriam Gravitatis conſtitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major ſit ubi tranſverſa diameter Orbis Lunaris tranſit per Solem, quam ubi eadem ad rectos eſt angulos cum linea Terram & Solem jungente: & propterea Orbis Lunaris paulo major eſt in priore caſu quam in poſteriore. Et hinc oritur alia Æquatio motus medii Lunaris, pendens a ſitu Apogæi Lunæ ad Solem, quæ quidem maxima eſt cum Apogæum Lunæ verſatur in Octante cum Sole; & nulla cum illud ad Quadraturas vel Syzygias pervenit: & motui medio additur in tranſitu Apogæi Lunæ a Solis Quadratura ad Syzygiam, & ſubducitur in tranſitu Apogæi a Syzygia ad Quadraturam. Hæc Æquatio quam Semeſtrem vocabo, in Octantibus Apogæi quando maxima eſt, aſcendit ad $3'.\ 45''$ circiter, quantum ex Phænomenis colligere potui. Hæc eſt ejus quantitas in mediocri Solis diſtantia a Terra. Augetur vero ac diminuitur in triplicata ratione diſtantiæ Solis inverſe, adeoque in maxima Solis diſtantia eſt $3'.\ 34''$, & in minima $3'.\ 56''$ quamproxime: ubi vero Apogæum Lunæ ſitum eſt extra Octantes, evadit minor; eſtque ad Æquationem maximam, ut ſinus duplæ diſtantiæ Apogæi Lunæ a proxima Syzygia vel Quadratura ad radium.

Per eandem Gravitatis Theoriam actio Solis in Lunam paulo major eſt ubi linea recta per Nodos Lunæ ducta tranſit per Solem, quam ubi linea ad rectos eſt angulos cum recta Solem ac Terram jungente. Et inde oritur alia medii motus Lunaris Æquatio, quam Semeſtrem ſecundam vocabo, quæque maxima eſt ubi Nodi in Solis Octantibus verſantur, & evaneſcit ubi ſunt in Syzygiis vel Quadraturis, & in aliis Nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ Nodi alterutrius a proxima Syzygia aut Quadratura: additur vero medio motui Lunæ dum Nodi tranſeunt a Solis Quadraturis ad proximas Syzygias, & ſubducitur in eorum tranſitu a Syzygiis ad Quadraturas; & in Octantibus ubi maxima eſt, aſcendit ad $47''$ in mediocri Solis diſtantia a Terra, uti ex Theoria Gravitatis colligo. In aliis Solis diſtantiis hæc Æquatio, in Octantibus Nodorum, eſt reciproce ut cubus diſtantiæ Solis a Terra, ideoque in Perigæo Solis ad $45''$ in Apogæo ejus ad $49''$ circiter aſcendit.

Per eandem Gravitatis Theoriam Apogæum Lunæ progreditur quam maxime ubi vel cum Sole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum Sole Quadraturam facit. Et Eccentricitas fit maxima in priore caſu & minima in poſteriore, per Corol. 7, 8 & 9

7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ ſunt, & Æquationem principalem Apogæi generant, quam Semeſtrem vocabo. Et Æquatio maxima Semeſtris eſt 12gr. 18′ circiter, quantum ex Obſervationibus colligere potui. *Horroxius* noſter Lunam in Ellipſi circum Terram, in ejus umbilico inferiore conſtitutam, revolvi primus ſtatuit. *Halleius* centrum Ellipſeos in Epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum Terram. Et ex motu in Epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progreſſu & regreſſu Apogæi & quantitate Eccentricitatis. Dividi intelligatur diſtantia mediocris Lunæ a Terra in partes 100000, & referat *T* Terram & *TC* Eccentricitatem mediocrem Lunæ partium 5505. Producatur *TC* ad *B*, ut ſit *CB* ſinus Æquationis maximæ Semeſtris 12gr. 18′ ad radium *TC*, & circulus *BDA* centro *C* intervallo *CB* deſcriptus, erit Epicyclus ille in quo centrum Orbis Lunaris locatur & ſecundum ordinem literarum *BDA* revolvitur. Capiatur angulus *BCD* æqualis duplo Argumento annuo, ſeu duplæ diſtantiæ veri loci Solis ab Apogæo Lunæ ſemel æquato, & erit *CTD* Æquatio



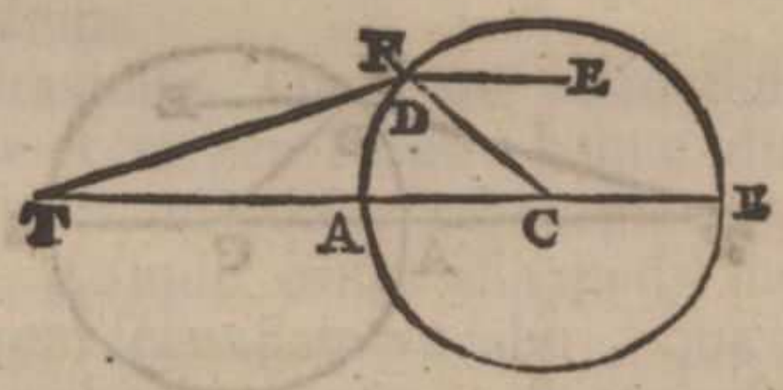
Semeſtris Apogæi Lunæ & *TD* Eccentricitas Orbis ejus in Apogæum ſecundo æquatum tendens. Habitis autem Lunæ motu medio & Apogæo & Eccentricitate, ut & Orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus Lunæ locus in Orbe & diſtantia ejus a Terra, idque per Methodos notiſſimas.

In Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, centrum Orbis Lunæ velocius movetur circum centrum *C* quam in Aphelio, idque in triplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe. Ob Æquationem centri Solis in Argumento annuo comprehenſam, centrum Orbis Lunæ velocius movetur in Epicyclo *BDA* in duplicata ratione diſtantiæ Terræ a Sole inverſe. Ut idem adhuc velocius moveatur in ratione ſimplici diſtantiæ inverſe; ab Orbis centro *D* agatur recta *DE* verſus Apogæum Lunæ, ſeu rectæ *TC* parallela, & capiatur angulus *EDG* æqualis exceſſui Argumenti

De Mundi Systemate.

menti annui prædicti ſupra diſtantiam Apogæi Lunæ a Perigæo Solis in conſequentia; vel quod perinde eſt, capiatur angulus CDF æqualis complemento Anomaliæ veræ Solis ad gradus 360. Et ſit DF ad DC ut dupla Eccentricitas Orbis magni ad diſtantiam mediocrem Solis a Terra, & motus medius diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum medium diurnum Solis ab Apogæo proprio conjunctim, id eſt, ut $33\frac{1}{3}$ ad 1000 & $52'.27''.16'''$ ad $59'\ 8''.10'''$ conjunctim, ſive ut 3 ad 100. Et concipe centrum Orbis Lunæ locari in puncto F, & in Epicyclo cujus centrum eſt D & radius DF interea revolvi dum punctum D progreditur in circumferentia circuli $DABD$. Hac enim ratione velocitas qua centrum Orbis Lunæ in linea quadam curva circum centrum C deſcripta movebitur, erit reciproce ut cubus diſtantiæ Solis a Terra quamproxime, ut oportet.

Computatio motus hujus difficilis eſt, ſed facilior reddetur per approximationem ſequentem. Si diſtantia mediocris Lunæ a Terra ſit partium 100000, & Eccentricitas TC ſit partium 5505 ut ſupra: recta CB vel CD invenietur partium $1172\frac{1}{4}$, & recta DF



partium $35\frac{1}{4}$. Et hæc recta ad diſtantiam TC ſubtendit angulum ad Terram quem tranſlatio centri Orbis a loco D ad locum F generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata in ſitu parallelo ad diſtantiam ſuperioris umbilici Orbis Lunæ a Terra, ſubtendit eundem angulum, quem utique tranſlatio illa generat in motu umbilici, & ad diſtantiam Lunæ a Terra ſubtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu Lunæ, quique propterea Æquatio centri Secunda dici poteſt. Et hæc Æquatio in mediocri Lunæ diſtantia a Terra, eſt ut ſinus anguli quem recta illa DF cum recta a puncto F ad Lunam ducta continet quamproxime, & ubi maxima eſt evadit $2'.25''$. Angulus autem quem recta DF & recta a puncto F ad Lunam ducta comprehendunt, invenitur vel ſubducendo angulum EDF ab Anomalia media Lunæ, vel addendo diſtantiam Lunæ a Sole ad diſtantiam Apogæi Lunæ ab Apogæo Solis

Solis. Et ut radius eſt ad ſinum anguli ſic inventi, ita 2′. 25″ ſunt ad Æquationem centri Secundam, addendam ſi ſumma illa ſit minor ſemicirculo, ſubducendam ſi major. Sic habebitur ejus Longitudo in ipſis Luminarium Syzygiis. LIBER TERTIUS.

Si computatio accuratior deſideretur, corrigendus eſt locus Lunæ in Orbe ut ſupra inventus per Variationem duplicem. De Variatione Prima & principali diximus ſupra, hæc maxima eſt in Octantibus Lunæ. Variatio altera maxima eſt in Quadrantibus, & oritur a varia Solis actione in Orbem Lunæ pro varia poſitione Apogæi Lunæ ad Solem, computatur vero in hunc modum. Ut radius ad ſinum verſum diſtantiæ Apogæi Lunæ a Perigæo Solis in conſequentia, ita angulus quidam P ad quartum proportionalem. Et ut radius ad ſinum diſtantiæ Lunæ a Sole, ita ſumma hujus quarti proportionalis & anguli cujuſdam alterius Q ad Variationem Secundam, ſubducendam ſi Lunæ lumen augetur, addendam ſi diminuitur. Sic habebitur locus verus Lunæ in Orbe, & per Reductionem loci hujus ad Eclipticam habebitur Longitudo Lunæ. Anguli vero P & Q ex Obſervationibus determinandi ſunt. Et interea ſi pro angulo P uſurpentur 2′, & pro angulo Q 1′, non multum errabitur.

Cum Atmoſphæra Terræ ad uſque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem Solis, & refringendo ſpargat eandem in Umbram Terræ, & ſpargendo lucem in confinio Umbræ dilatat Umbram: ad diametrum Umbræ quæ per Parallaxim prodit, addo minutum unum primum in Eclipſibus Lunæ, vel minutum unum cum triente.

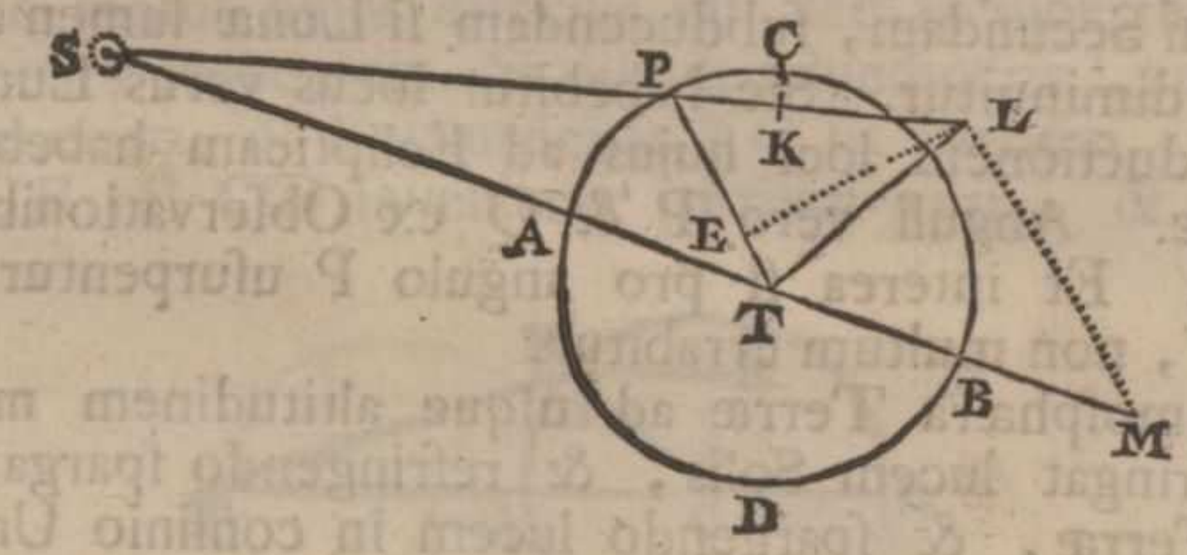
Theoria vero Lunæ primo in Syzygiis, deinde in Quadraturis, & ultimo in Octantibus per Phænomena examinari & ſtabiliri debet. Et opus hocce aggreſſurus motus medios Solis & Lunæ ad tempus meridianum in Obſervatorio Regio *Grenovicenſi*, die ultimo menſis *Decembris* anni 1700. ſt. vet. non incommode ſequentes adhibebit: nempe motum medium Solis ♑ 20gr. 43′. 40″, & Apogæi ejus ♋ 7gr. 44′. 30″, & motum medium Lunæ ♒ 15gr. 20′. 00″, & Apogæi ejus ♓ 8gr. 20′. 00″, & Nodi aſcendentis ☊ 27 r. 24′. 20″; & differentiam meridianorum Obſervatorii hujus & Obſervatorii Regii *Pariſienſis* 0 hor. 9 min. 20 ſec.

De Mundi Systemate,

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.

Solis vis ML seu PT, in Quadraturis Lunaribus, ad perturbandos motus Lunares, erat (per Prop. xxv. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1 ad 638092,6. Et vis $TM - LM$ seu $2PK$ in Syzygiis Lunaribus, est duplo major. Hæ autem vires, si descendatur ad superficiem Terræ, diminuuntur in ratione distantiarum a centro Terræ, id est, in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; adeoque vis prior in superficie Terræ, est ad vim gravitatis, ut 1 ad 38604600. Hac vi Mare deprimitur in locis quæ 90 gradibus distant



a Sole. Vi altera quæ dupla major est, Mare elevatur & sub Sole & in regione Soli oppositа. Summa virium est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, sive ea deprimat Aquam in regionibus quæ 90 gradibus distant à Sole, sive elevet eandem in regionibus sub Sole & Soli oppositis, hæc summa erit tota Solis vis ad Mare agitandum; & eundem habebit effectum ac si tota in regionibus sub Sole & Soli oppositis Mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus distant a Sole nil ageret.

Hæc est vis Solis ad Mare ciendum in loco quovis dato, ubi Sol tam in vertice loci versatur quam in mediocri sua distantia a Terra. In aliis Solis positionibus vis ad Mare attollendum, est ut sinus versus duplæ altitudinis Solis supra horizontem loci directe & cubus distantiæ Solis a Terra inverse.

Corol. Cum vis centrifuga partium Terræ à diurno Terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo

tudo Aquæ ſub Æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub Polis menſura pedum Pariſienſium 85820; vis Solaris de qua egimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque adeo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 ſeu 1 ad 44527, efficiet ut altitudo Aquæ in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis, ſuperet altitudinem ejus in locis quæ 90 gradibus diſtant a Sole, menſura tantum pedis unius Pariſienſis & digitorum undecim cum octava parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85820 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad Mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim Solis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum Maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtoliam*, tempore verno & autumnali totus Aquæ aſcenſus in Conjunctione & Oppoſitione Luminarium (obſervante *Samuele Sturmio*) eſt pedum plus minus 45, in Quadraturis autem eſt pedum tantum 25. Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & Lunæ in Æquatore verſantium & mediocriter a Terra diſtantium ſunto vires S & L, & erit L + S ad L — S ut 45 ad 25, ſeu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* Æſtus maris (ex obſervatione *Samuelis Colepreſſi*) ad pedes plus minus ſexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo Æſtus in Syzygiis ſuperare poteſt altitudinem ejus in Quadraturis, pedibus plus ſeptem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia ſit pedum novem, erit L + S ad L — S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ ſeu 41 ad 23. Quæ proportio ſatis congruit cum priore. Ob magnitudinem Æſtus in portu *Briſtoliæ*, obſervationibus *Sturmii* magis fidendum eſſe videtur, ideoque donec aliquid certius conſtiterit, proportionem 9 ad 5 uſurpabimus.

Cæterum ob aquarum reciprocos motus, Æſtus maximi non incidunt in ipſas Luminarium Syzygias, ſed ſunt tertii a Syzygiis ut dictum fuit, ſeu proxime ſequuntur tertium Lunæ poſt Syzygias appulſum ad meridianum loci, vel potius (ut a *Sturmio* notatur) ſunt tertii poſt diem novilunii vel plenilunii, ſeu poſt ho-

De Mundi Systemate

ram a novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, adeoque incidunt in horam a novilunio vel plenilunio plus minus quadragesimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam septimam circiter ab appulsu Lunæ ad meridianum loci; ideoque proxime sequuntur appulsum Lunæ ad meridianum, ubi Luna distat a Sole vel ab oppositione Solis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in consequentia. Æstas & Hyems maxime vigent, non in ipsis Solstitiis, sed ubi Sol distat a Solstitiis decima circiter parte totius circuitus, seu gradibus plus minus 36 vel 37. Et similiter maximus Æstus maris oritur ab appulsu Lunæ ad meridianum loci, ubi Luna distat a Sole decima circiter parte motus totius ab Æstu ad Æstum. Sit distantia illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et vis Solis in hac distantia Lunæ a Syzygiis & Quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum maris a vi Lunæ oriundum, quam in ipsis Syzygiis & Quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantiæ hujus duplicatæ seu anguli graduum 37, hoc est, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia superiore pro S scribi debet 0,7986355 S.

Sed & vis Lunæ in Quadraturis, ob declinationem Lunæ ab Æquatore, diminui debet. Nam Luna in Quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ post Quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ versatur. Et Luminaris ab Æquatore declinantis vis ad Mare movendum diminuitur in duplicata ratione sinus complementi declinationis quamproxime. Et propterea vis Lunæ in his Quadraturis est tantum 0,8570327 L. Est igitur L + 0,7986355 S ad 0,8570327 L — 0,7986355 S ut 9 ad 5.

Præterea diametri Orbis in quo Luna absque Eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque distantia Lunæ a Terra in Syzygiis est ad distantiam ejus in Quadraturis, ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et distantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ a Syzygiis ubi Æstus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ a Quadraturis ubi Æstus minimus generatur, sunt ad mediocrem ejus distantiam, ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. Vires autem Lunæ ad Mare movendum sunt in triplicata ratione distantiarum inverse, ideoque vires in maxima & minima harum distantiarum sunt ad vim in mediocri distantia, ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. Unde fit 1,017522 L + 0,7986355 S ad 0,9830427 × 0,8570327 L — 0,7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis Solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol.

Corol. 1. Cum Aqua vi Solis agitata aſcendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum octava parte digiti, eadem vi Lunæ aſcendet ad altitudinem octo pedum & digitorum octo, & vi utraque ad altitudinem pedum decem cum ſemiſſe, & ubi Luna eſt in Perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum ſemiſſe & ultra, præſertim ubi *Æſtus* ventis ſpirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes Maris motus excitandos abunde ſufficit, & quantitati motuum probe reſpondet. Nam in maribus quæ ab Oriente in Occidentem late patent, uti in Mari *Pacifico*, & Maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra Tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum ſex, novem, duodecim vel quindecim. In Mari autem *Pacifico*, quod profundius eſt & latius patet, *Æſtus* dicuntur eſſe majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus ſit *Æſtus*, latitudo Maris ab Oriente in Occidentem non minor eſſe debet quàm graduum nonaginta. In Mari *Æthiopico*, aſcenſus aquæ intra Tropicos minor eſt quam in Zonis temperatis, propter anguſtiam Maris inter *Africam* & Auſtralem partem *Americæ*. In medio Mari aqua nequit aſcendere, niſi ad littus utrumque & orientale & occidentale ſimul deſcendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in Maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Ea de cauſa fluxus & refluxus in Inſulis, quæ à littoribus longiſſime abſunt, perexiguus eſſe ſolet. In Portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad Sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent eſſe ſolito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Anglia*; ad montes S. *Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Avranches*) in *Normania*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. *Æſtus* in hujuſmodi portubus & fretis, per impetum curſus & recurſus ſupra modum augetur. Ad littora vero quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo *Æſtus* reſpondet viribus Solis & Lunæ.

De Mundi Systemate,

Corol. 2. Cum vis Lunæ ad Mare movendum, ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perſpicuum eſt quod vis illa ſit longe minor quam quæ vel in experimentis Pendulorum, vel in Staticis aut Hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. In Æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis Lunæ ad Mare movendum, eſt ad Solis vim conſimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per Corol. 14. Prop. LXVI. Lib. I.) ſunt ut denſitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas Lunæ erit ad denſitatem Solis, ut 4,4815 ad 1 directe & cubus diametri Lunæ ad cubum diametri Solis inverſe: id eſt (cum diametri mediocres apparentes Lunæ & Solis ſint 31′. 16½″ & 32′. 12″) ut 4891 ad 1000. Denſitas autem Solis erat ad denſitatem Terræ, ut 100 ad 396; & propterea denſitas Lunæ eſt ad denſitatem Terræ, ut 4891 ad 3960 ſeu 21 ad 17. Eſt igitur corpus Lunæ denſius & magis terreſtre quam Terra noſtra.

Corol. 4. Et cum vera diameter Lunæ (ex Obſervationibus Aſtronomicis) ſit ad veram diametrum Terræ, ut 100 ad 365; erit maſſa Lunæ ad maſſam Terræ, ut 1 ad 39,371.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in ſuperficie Lunæ, erit quaſi triplo minor quam gravitas acceleratrix in ſuperficie Terræ.

Corol. 6. Et diſtantia centri Lunæ a centro Terræ, erit ad diſtantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,371 ad 39,371.

Corol. 7. Et mediocris diſtantia centri Lunæ a centro Terræ, erit ſemidiametrorum maximarum Terræ 60¼ quamproxime. Nam ſemidiameter maxima Terræ fuit pedum Pariſienſium 19767630, & mediocris diſtantia centrorum Terræ & Lunæ ex hujuſmodi ſemidiametris 60¼ conſtans, æqualis eſt pedibus 1190999707. Et hæc diſtantia (per Corollarium ſuperius) eſt ad diſtantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,371 ad 39,371, quæ proinde eſt pedum 1161498340. Et cum Luna revolvatur reſpectu Fixarum, diebus 27, horis 7 & minutis primis 43⅓, ſinus verſus anguli quem Luna, tempore minuti unius primi motu ſuo medio, circa commune gravitatis centrum Terræ & Lunæ deſcribit, eſt 1275235, exiſtente radio 100, 000000, 000000. Et ut radius eſt ad hunc ſinum verſum, ita ſunt pedes 1161498340 ad pedes 14,811833. Luna igitur vi illa qua retinetur in Orbe, cadendo in Terram, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,811833. Et ſi hæc vis augeatur in ratione 177$\frac{20}{40}$ ad 178$\frac{20}{40}$, habebitur

bebitur vis tota gravitatis in Orbe Lunæ, per Corol. Prop. III. Et hac vi Luna cadendo, tempore minuti unius primi deſcribere deberet pedes 14,89517. Et ad ſexageſimam partem hujus diſtantiæ, id eſt, ad diſtantiam pedum 19849995 a centro Terræ, corpus grave cadendo, tempore minuti unius ſecundi deſcribere deberet etiam pedes 14,89517. Diminuatur hæc diſtantia in ſubduplicata ratione pedum 14,89517 ad pedes 15,12028, & habebitur diſtantia pedum 19701678 a qua grave cadendo, eodem tempore minuti unius ſecundi deſcribet pedes 15,12028, id eſt, pedes 15, dig. 1, lin. 5,32. Et hac vi gravia cadunt in ſuperficie Terræ, in Latitudine urbis *Lutetiæ Pariſiorum*, ut ſupra oſtenſum eſt. Eſt autem diſtantia pedum 19701678 paulo minor quam ſemidiameter globi huic Terræ æqualis, & paulo major quam Terræ hujus ſemidiameter mediocris, ut oportet. Sed differentiæ ſunt inſenſibiles. Et propterea vis qua Luna retinetur in Orbe ſuo, ad diſtantiam maximarum Terræ ſemidiametrorum $60\frac{1}{4}$, ea eſt quam vis Gravitatis in ſuperficie Terræ requirit. LIBER TERTIUS.

Corol. 8. Diſtantia mediocris centrorum Terræ & Lunæ, eſt mediocrium Terræ ſemidiametrorum $60\frac{1}{2}$ quamproxime. Nam ſemidiameter mediocris, quæ erat pedum 19688725, eſt ad ſemidiametrum maximam pedum 19767630, ut $60\frac{1}{4}$ ad $60\frac{1}{2}$ quamproxime.

In his computationibus Attractionem magneticam Terræ non conſideravimus, cujus utique quantitas perparva eſt & ignoratur. Siquando vero hæc Attractio inveſtigari poterit, & menſuræ graduum in Meridiano, ac longitudines Pendulorum iſochronorum in diverſis parallelis, legeſque motuum Maris, & parallaxis Lunæ cum diametris apparentibus Solis & Lunæ ex Phænomenis accuratius determinatæ fuerint: licebit calculum hunc omnem accuratius repetere.

PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

Invenire Figuram corporis Lunæ.

Si corpus Lunare fluidum eſſet ad inſtar Maris noſtri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, eſſet ad vim Lunæ, quæ Mare noſtrum in partibus & ſub Luna & Lunæ oppoſitis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diame-

De Mundi Systemate,

diametrum Terræ conjunctim; id eſt, ut 39,371 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, ſeu 1079 ad 100. Unde cum Mare noſtrum vi Lunæ attollatur ad pedes $8\frac{2}{7}$, fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes $93\frac{1}{2}$. Eaque de cauſa Figura Lunæ Sphærois eſſet, cujus maxima diameter producta tranſiret per centrum Terræ, & ſuperaret diametros perpendiculares exceſſu pedum 187. Talem igitur Figuram Luna affectat, eamque ſub initio induere debuit. *Q. E. I.*

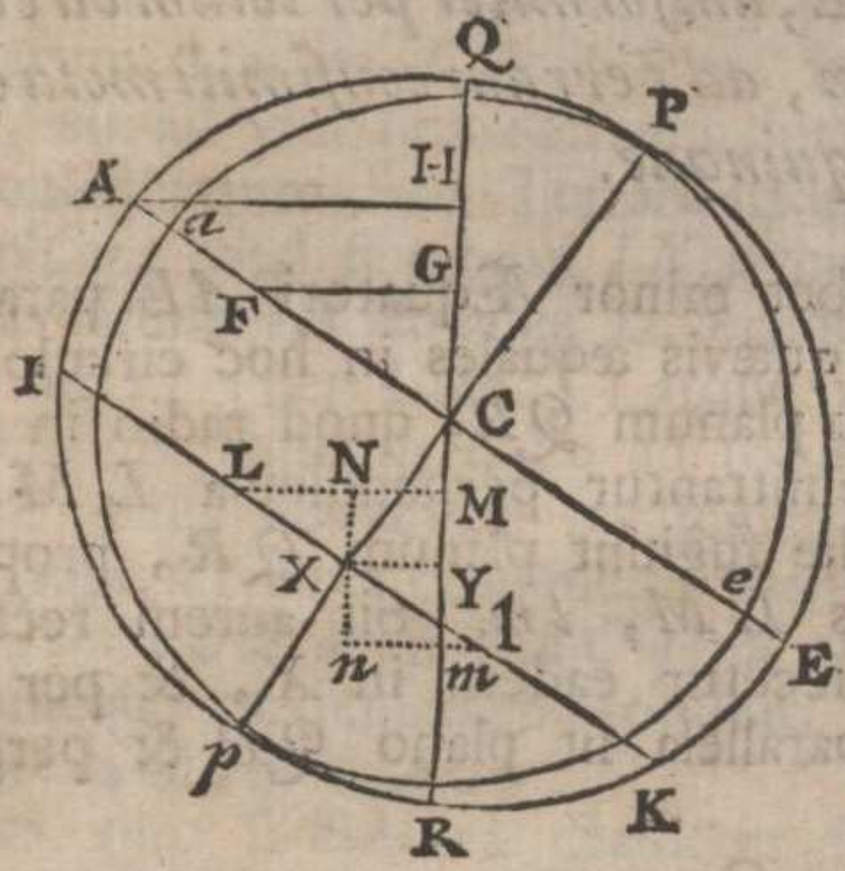
Corol. Inde vero fit ut eadem ſemper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim ſitu corpus Lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes, ob parvitatem virium agitantium, eſſent longè tardiſſimæ: adeo ut facies illa, quæ Terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis Lunaris umbilicum, ob rationem in Prop. XVII. allatam reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi & in Terram converti.

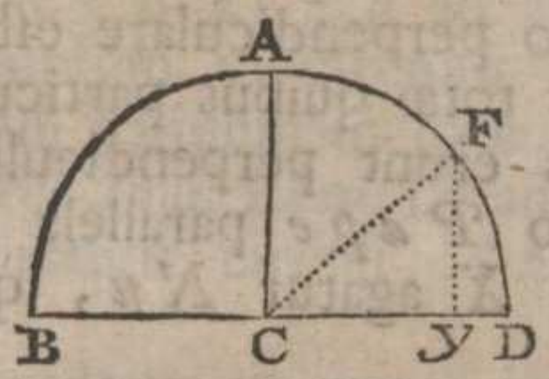
LEMMA I.

Si APEp *Terram deſignet uniformiter denſam, centroque* C *& Polis* P, p *& Æquatore* AE *delineatam; & ſi centro* C *radio* CP *deſcribi intelligatur Sphæra* P a p e; *ſit autem* QR *planum, cui recta a centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter inſiſtit; & Terræ totius exterioris* P a p A P e p E, *quæ Sphæra modo deſcripta altior eſt, particulæ ſingulæ conentur recedere hinc inde a plano* QR, *ſitque conatus particulæ cujuſque ut ejusdem diſtantia a plano: Dico primo, quod tota particularum omnium, in Æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli diſpoſitarum, vis & efficacia ad Terram circum centrum ejus rotandam, ſit ad totam particularum totidem in Æquatoris puncto* A, *quod a plano* QR *maxime diſtat, conſiſtentium vim & efficaciam, ad Terram conſimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iſte circularis circum axem, in communi ſectione Æquatoris & plani* QR *jacentem, peragetur.*

Nam centro *C* diametro *B D* deſcribatur ſemicirculus *B A F D C*. Dividi intelligatur ſemicircumferentia *B A D* in partes

partes innumeras æquales, & a partibus ſingulis F ad diametrum BD demittantur ſinus FY. Et ſumma quadratorum ex ſinibus omnibus FY æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus omnibus CY, & ſumma utraque æqualis erit ſummæ quadratorum ex totidem ſemidiametris CF; adeoque ſumma quadratorum ex omnibus FY, erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris CF. LIBER TERTIUS.





Jam dividatur perimeter circuli AE in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque F ad planum QR demittatur perpendiculum FG, ut & a puncto A perpendiculum AH. Et vis qua particula F recedit a plano QR, erit ut perpendiculum illud FG per hypotheſin, & hæc vis ducta in diſtantiam CG, erit efficacia particulæ F ad Terram circum centrum ejus convertendam. Adeoque efficacia particulæ in loco F, erit ad efficaciam particulæ in loco A, ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$, hoc eſt, ut FCq ad ACq; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis ſuis F, erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut ſumma omnium FCq ad ſummam totidem ACq, hoc eſt, (per jam demonſtrata) ut unum ad duo. *Q. E. D.*

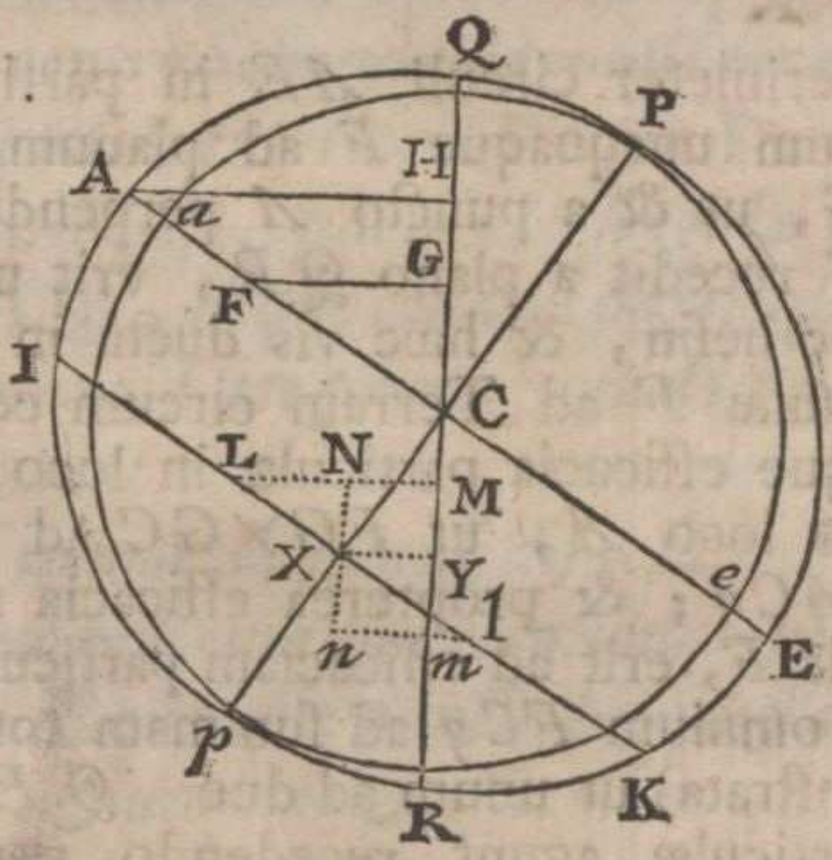
Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter a plano QR, idque æqualiter ab utraque parte hujus plani: eædem convertent circumferentiam circuli Æquatoris, eique inhærentem Terram, circum axem tam in plano illo QR quam in plano Æquatoris jacentem.

De Mundi Systemate,

LEMMA II.

Iisdem positis: Dico secundo quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad Terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in Æquatoris circulo AE, *uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.*

Sit enim *IK* circulus quilibet minor Æquatori *AE* parallelus, sintque *L*, *l* particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum *P a p e* sitæ. Et si in planum *QR*, quod radio in Solem ducto perpendiculare est, demittantur perpendicula *LM*, *lm*: vires totæ quibus particulæ illæ fugiunt planum *QR*, proportionales erunt perpendiculis illis *LM*, *lm*. Sit autem recta *Ll* plano *P a p e* parallela & bisecetur eadem in *X*, & per punctum *X* agatur *Nn*, quæ parallela sit plano *QR* & perpendi-



culis *LM*, *lm* occurrat in *N* ac *n*, & in planum *QR* demittatur perpendiculum *XY*. Et particularum *L* & *l* vires contrariæ, ad Terram in contrarias partes rotandam, sunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc est, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mC - nm \times mC$, seu $LN \times MC + NM \times MC$ & $LN \times mC - NM$

$-NM\times mC$: & harum differentia $LN\times Mm-NM\times\overline{MC+mC}$, est vis particularum ambarum simul sumptarum ad Terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $LN\times Mm$ seu $2LN\times NX$, est ad particularum duarum ejusdem magnitudinis in A consistentium vim $2AH\times HC$, ut LXq ad ACq. Et pars negativa $NM\times\overline{MC+mC}$ seu $2XY\times CY$, ad particularum earundem in A consistentium vim $2AH\times HC$, ut CXq ad ACq. Ac proinde partium differentia, id est, particularum duarum L & l simul sumptarum vis ad Terram rotandam, est ad vim particularum duarum iisdem æqualium & in loco A consistentium, ad Terram itidem rotandam, ut $LXq-CXq$ ad ACq. Sed si circuli IK circumferentia IK dividatur in particulas innumeras æquales L, erunt omnes LXq ad totidem IXq ut 1 ad 2, (per Lem. I.) atque ad totidem ACq, ut IXq ad $2ACq$; & totidem CXq ad totidem ACq ut $2CXq$ ad $2ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK, sunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A, ut $IXq-2CXq$ ad $2ACq$: & propterea (per Lem. I.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE, ut $IXq-2CXq$ ad ACq. LIBER TERTIUS.

Jam vero si Sphæræ diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus insistant circuli totidem IK; materia in perimetro circuli cujusque IK erit ut IXq: ideoque vis materiæ illius ad Terram rotandam, erit ut IXq in $IXq-2CXq$. Et vis materiæ ejusdem, si in circuli AE perimetro consisteret, esset ut IXq in ACq. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi AE consistentis, ut omnia IXq in $IXq-2CXq$ ad totidem IXq in ACq, hoc est, ut omnia $ACq-CXq$ in $ACq-3CXq$ ad totidem $ACq-CXq$ in ACq, id est, ut omnia $ACqq-4ACq\times CXq+3CXqq$ ad totidem $ACqq-ACq\times CXq$, hoc est, ut tota quantitas fluens cujus fluxio est $ACqq-4ACq\times CXq+3CXqq$, ad totam quantitatem fluentem cujus fluxio est $ACqq-ACq\times CXq$; ac proinde per Methodum Fluxionum, ut $ACqq\times CX-\frac{4}{3}ACq\times CX\ cub.+\frac{3}{5}CXqc$ ad $ACqq\times CX-\frac{1}{3}ACq\times CX\ cub.$, id est, si pro CX scribatur tota Cp vel AC, ut $\frac{4}{11}ACqc$ ad $\frac{2}{3}ACqc$, hoc est, ut duo ad quinque. *Q. E. D.*

De Mundi Systemate,

LEMMA III.

Iisdem positis: Dico tertio quod motus Terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione quæ componitur ex ratione materiæ in Terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro; id est, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 *ad numerum* 1000000.

Est enim motus Cylindri circum axem suum immotum revolventis, ad motum Sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: & motus Cylindri ad motum annuli tenuissimi, Sphæram & Cylindrum ad communem eorum contractum ambientis, ut duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iste circum axem Cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus Terra omni reliqua sublata, solus in Orbe Terræ, motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem suum, ad planum Ecliptice in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ *inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Æquinoctialium sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materia rigida & firma constaret.*

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

Invenire Præceſſionem Æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in Orbe circulari, ubi Nodi ſunt in Quadraturis, erat 16′. 35‴. 16iv. 36v. & hujus dimidium 8″. 17‴. 38iv. 18v. (ob rationes ſupra explicatas) eſt motus medius horarius Nodorum in tali Orbe; fitque anno toto ſidereo 20gr. 11′. 46″. Quoniam igitur Nodi Lunæ in tali Orbe conficerent annuatim 20gr. 11′. 46″. in antecedentia; & ſi plures eſſent Lunæ motus Nodorum cujuſque, per Corollar. 16. Prop. LXVI. Lib. I. forent ut tempora periodica; ſi Luna ſpatio diei ſiderei juxta ſuperficiem Terræ revolveretur, motus annuus Nodorum foret ad 20gr. 11′ 46″. ut dies ſidereus horarum 23. 56′. ad tempus periodicum Lunæ dierum 27. 7 hor. 43′; id eſt, ut 1436 ad 39343. Et par eſt ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; ſive Lunæ illæ ſe mutuo non contingant, ſive liqueſcant & in annulum continuum formentur, ſive denique annulus ille rigeſcat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iſte, quoad quantitatem materiæ, æqualis ſit Terræ omni *PapAPepE* quæ globo *Pape* ſuperior eſt; (*Vid. Fig. pag.* 434.) & quoniam globus iſte eſt ad Terram illam ſuperiorem ut *aCqu.* ad *ACqu.* — *aCqu.* id eſt (cum Terræ diameter minor *PC* vel *aC* ſit ad diametrum majorem *AC* ut 229 ad 230,) ut 52441 ad 459; ſi annulus iſte Terram ſecundum Æquatorem cingeret & uterque ſimul circa diametrum annuli revolveretur; motus annuli eſſet ad motum globi interioris (per hujus Lem. III.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc eſt, ut 4590 ad 485223; ideoque motus annuli eſſet ad ſummam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde ſi annulus globo adhæreat, & motum ſuum quo ipſius Nodi ſeu puncta Æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus qui reſtabit in annulo erit ad ipſius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum Æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum Æquinoctialium corporis ex annulo & globo compoſiti, ad motum

De Mundi Systemate,

20gr. 11′. 46″, ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus Nodi Lunarum (ut supra explicui) atque adeo quibus puncta Æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires 3*IT*, *in Fig. pag.* 403 & 404.) sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum à plano *QR*, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. II.) si materia annuli per totam globi superficiem, in morem figuræ *PapAPepE*, ad superiorem illam Terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis Æquatoris diametrum rotandam, atque adeo ad movenda puncta Æquinoctialia, evaderet minor quam prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus Æquinoctiorum regressus jam esset ad 20gr. 11′. 46″, ut 10 ad 73092: ac proinde fieret 9″. 56‴. 50iv.

Cæterum hic motus, ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Eclipticæ, minuendus est, idque in ratione sinus 91706 (qui sinus est complementi graduum 23½) ad Radium 100000. Qua ratione motus iste jam fiet 9″. 7‴. 20iv. Hæc est annua Præcessio Æquinoctiorum a vi Solis oriunda.

Vis autem Lunæ ad Mare movendum erat ad vim Solis, ut 4, 4815 ad 1 circiter. Et vis Lunæ ad Æquinoctia movenda, est ad vim Solis in eadem proportione. Indeque prodit annua Æquinoctiorum Præcessio a vi Lunæ oriunda 40″. 52‴. 52iv; ac tota Præcessio annua a vi utraque oriunda 50″. 00‴. 12iv. Et hic motus cum Phænomenis congruit. Nam Præcessio Æquinoctiorum ex Observationibus Astronomicis est minutorum secundorum plus minus quinquaginta.

Si altitudo Terræ ad Æquatorem superet altitudinem ejus ad Polos, milliaribus pluribus quam 17½, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quam ad centrum: & Præcessio Æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

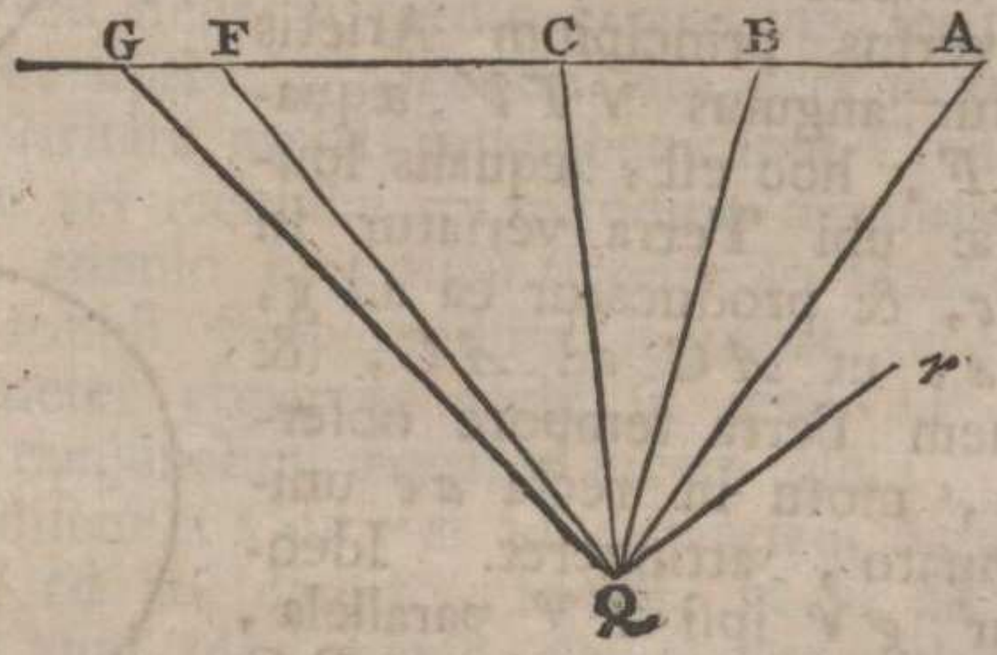
Descripsimus jam Systema Solis, Terræ, Lunæ, & Planetarum: supereſt ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

LEMMA

LEMMA IV.

Cometas esse Luna superiores & in regione Planetarum versari.

Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas supra regiones sublunares, sic ex Parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur secundum ordinem signorum sunt omnes, sub exitu apparitionis, aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem; at justo celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et e contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem; & justo tardiores vel retrogradi si Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maxime ex motu Terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conspirante vel contrario, nunc retrogradi sunt, nunc tardius progredi videntur, nunc vero celerius. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometa, & motu angulari circa Solem tanto celerius fertur, ut recta per Terram & Cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra Cometam, Cometa e Terra spectatus, ob motum suum tardiorem, apparet esse retrogradus; sin Terra tardius fertur, motus Cometæ,

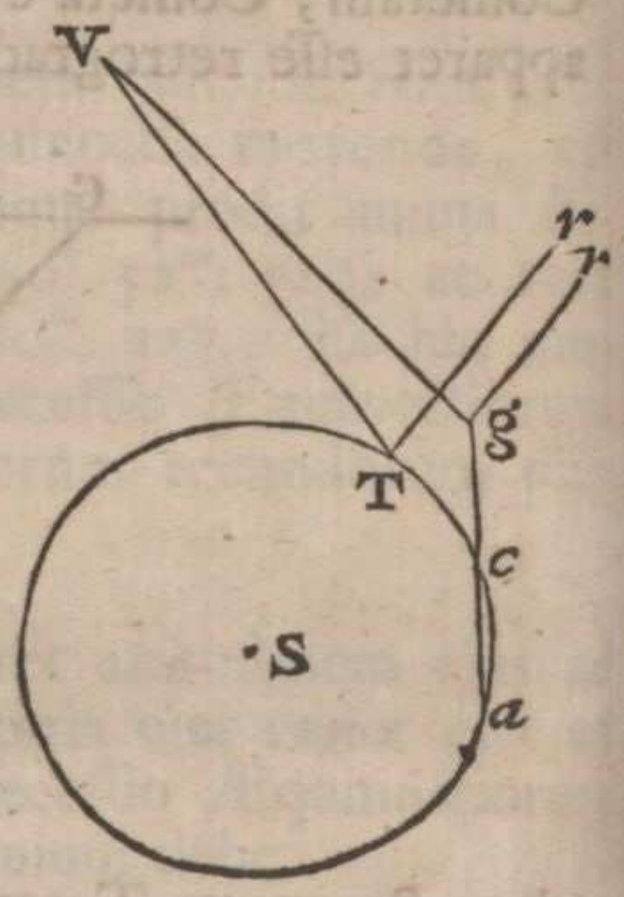


(detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia Cometæ in hunc modum colligitur. Sunto $\Upsilon Q A$, $\Upsilon Q B$, $\Upsilon Q C$ observatæ tres longitudines Cometæ, sub initio motus, sitque $\Upsilon Q F$ longitudo ultimo observata, ubi Cometa videri desinit.

Agatur

De Mundi Systemate.

Agatur recta ABC, cujus partes AB, BC rectis $\mathcal{Q}A$ & $\mathcal{Q}B$, $\mathcal{Q}B$ & $\mathcal{Q}C$ interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producatur AC ad G, ut sit AG ad AB ut tempus inter observationem primam & ultimam, ad tempus inter observationem primam & secundam, & jungatur $\mathcal{Q}G$. Et si Cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque Terra vel quiesceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, progrederetur; foret angulus $\curlyvee\mathcal{Q}G$ longitudo Cometæ tempore Observationis ultimæ. Angulus igitur $F\mathcal{Q}G$, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, si Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo $\curlyvee\mathcal{Q}G$, & sic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergit in easdem partes cum Terra, eidem subducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum, uti modo exposui. Oritur igitur hic angulus præcipue ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ merito habendus est, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod a Cometæ motu inæquabili in Orbe proprio oriri possit. Distantia vero Cometæ ex hac parallaxi sic colligitur. Designet S Solem, $a\,c\,T$ Orbem magnum, a locum Terræ in observatione prima, c locum Terræ in observatione tertia, T locum Terræ in observatione ultima, & $T\curlyvee$ lineam rectam versus principium Arietis ductam. Sumatur angulus $\curlyvee TV$ æqualis angulo $\curlyvee\mathcal{Q}F$, hoc est, æqualis longitudini Cometæ ubi Terra versatur in T. Jungatur $a\,c$, & producatur ea ad g, ut sit ag ad ac ut AG ad AC, & erit g locus quem Terra tempore observationis ultimæ, motu in recta $a\,c$ uniformiter continuato, attingeret. Ideoque si ducatur $g\curlyvee$ ipsi $T\curlyvee$ parallela, & capiatur angulus $\curlyvee gV$ angulo $\curlyvee\mathcal{Q}G$ æqualis, erit hic angulus $\curlyvee gV$ æqualis longitudini Cometæ e loco g spectati; & angulus TVg parallaxis erit, quæ oritur a translatione Terræ de loco g in locum T: ac proinde V locus erit Cometæ in plano Ecliptica. Hic autem locus V Orbe Jovis inferior esse solet.



Idem

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine curſus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex Parallaxi, propterea quod reſpondet motui Terræ; & inſignis ejus quantitas, meo computo, collocavit diſparentes Cometas ſatis longe infra Jovem. Unde conſequens eſt quod in Perigæis & Periheliis, ubi propius adſunt, deſcendunt ſæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis a Sole illuſtrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur ſplendor in quadruplicata ratione diſtantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis diſtantiam a Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde ſi detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur diſtantia, dicendo quod diſtantia ſit ad diſtantiam Planetæ, in ratione diametri ad diametrum directe & ratione ſubduplicata lucis ad lucem inverſe. Sic minima capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum ſexdecim pedum a *Flamſtedio* obſervata & Micrometro menſurata, æquabat 2′. 0″. Nucleus autem ſeu ſtella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce vero & claritate capitis ſuperabat caput Cometæ anni 1680, ſtellaſque primæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo ſuo quaſi quadruplo lucidiorem fuiſſe: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi ſit quaſi 21″, adeoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter eſſet 30″: erit diſtantia Cometæ ad diſtantiam Saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inverſe, & 12″ ad 30″ directe, id eſt, ut 24 ad 30 ſeu 4 ad 5. Rurſus Cometa anni 1665 menſe *Aprili*, ut author eſt *Hevelius*, claritate ſua pene Fixas omnes ſuperabat, quinetiam ipſum Saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat & cum ſtellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6′, at nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat Jove, & nunc minor corpore interme-

De Mundi Systemate, dio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porro cum diameter capillitii Cometarum raro superet 8′ vel 12′, diameter vero nuclei seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas hasce ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux earum cum luce Saturni non raro conferri possit, eamque aliquando superet; manifestum est quod Cometæ omnes in Perihelиis vel infra Saturnum collocandi sint, vel non longe supra. Errant igitur toto cœlo qui Cometas in regionem Fixarum prope ablegant: qua certe ratione non magis illustrari deberent a Sole nostro, quam Planetæ, qui hic sunt, illustrantur a Stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem Cometarum per fumum illum maxime copiosum & crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtuse semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat necesse est, ut copia lucis a se reflexa Planetas æmuletur. Inde verisimile fit Cometas longe infra sphæram Saturni descendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem vero quam maxime confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per Æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia Cometarum, ne fumus a capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur si concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra discum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, Jovem ipsum splendore suo multum superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illustrabitur a Sole, adeoque erit Soli multo propior. Quinetiam capita sub Sole delitescentia, & caudas cum maximas tum fulgentissimas instar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu Cometarum a Terra Solem versus, ac decrescente in eorum recessu a Sole versus Terram. Sic enim Cometa posterior Anni 1665 (observante *Hevelio*,) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de

de motu ſuo apparente, adeoque præterierat Perigæum; Splendor vero capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum Cometa radiis Solaribus obtectus deſiit apparere. Cometa Anni 1683, obſervante eodem *Hevelio*, in fine Menſis *Julii* ubi primum conſpectus eſt, tardiſſime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in Orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur uſque ad *Sept.* 4. quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis Micrometro menſurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. eſſe tantum 6′. 5″. incluſa coma, at *Sept.* 2. eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius a Sole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa medium Menſis *Decembris*, & iſte Anni 1680 circa finem ejuſdem Menſis, celerrime movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum ſplendor maximus capitum contigit ante duas fere ſeptimanas, ubi modo exierant de radiis Solaribus; & ſplendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decemb.* 1. majus videbatur ſtellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16. (jam in Perigæo exiſtens) magnitudine parum, ſplendore ſeu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Die 12 menſis *Decemb.* conſpectum & a *Flamſtedio* obſervatum eſt caput Cometæ poſterioris, in diſtantia novem graduum a Sole; id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore Nubium juxta Solem occidentem. *Decemb.* 26. velociſſime motus, inque Perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori Pegaſi, Stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut Stella quartæ, *Jan.* 9. ut Stella quintæ, *Jan.* 13. ob ſplendorem Lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25. vix æquabat Stellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia a Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales a Terra diſtantias, æqualiter lucere debuiſſent, in plaga Solis maxime ſplenduere, ex altera Perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque ſitu differentia, concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux Cometarum

De Mundi Systemate, regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissime moventur, atque adeo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis a se reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longe ultra Saturnum, deberent sæpius apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ viciniores qui in his partibus versarentur, & Sol interpositus obscuraret cæteros. Verum percurrendo historias Cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in Hemisphærio Solem versus, quam in Hemisphærio oppositio, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur a Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quam sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longe major sita est a latere Terræ quod Solem respicit; inque parte illa majore Cometæ, Soli ut plurimum viciniores, magis illuminari solent.

Corol. 3. Hinc etiam manifestum est, quod Cœli resistentia destituuntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrime, & motus suos etiam contra cursum Planetarum, diutissime conservant. Fallor ni genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum a capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur; & Atmosphæræ inferne densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si e Planetis spectaretur, luce nubium suarum procul dubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus prope delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata sunt, quæ situm mutant inter se, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora Cometarum sub Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere.

Patet per Corol. 1. Propos. XIII. Libri primi, collatum cum Prop. VIII, XII & XIII. Libri tertii.

Corol. 1. Hinc si Cometæ in orbem redeunt: Orbes erunt Ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in axium principalium ratione sesquiplicata. Ideoque Cometæ maxima ex parte supra Planetas versantes, & eo nomine Orbes axibus majoribus describentes, tardius revolventur. Ut si axis Orbis Cometæ sit quadruplo major axe Orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est, ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (seu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ, absque erroribus sensibilibus, adhiberi possint.

Corol. 3. Et propterea, per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I. velocitas Cometæ omnis, erit semper ad velocitatem Planetæ cujusvis circa Solem in circulo revolventis, in subduplicata ratione duplæ distantiæ Planetæ a centro Solis, ad distantiam Cometæ a centro Solis quamproxime. Ponamus radium Orbis magni, seu Ellipseos in qua Terra revolvitur semidiametrum maximam, esse partium 100000000: & Terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque Cometa in eadem Telluris a Sole distantia mediocri, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem Telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus distantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in subduplicata ratione distantiarum reciproce, ideoque datur.

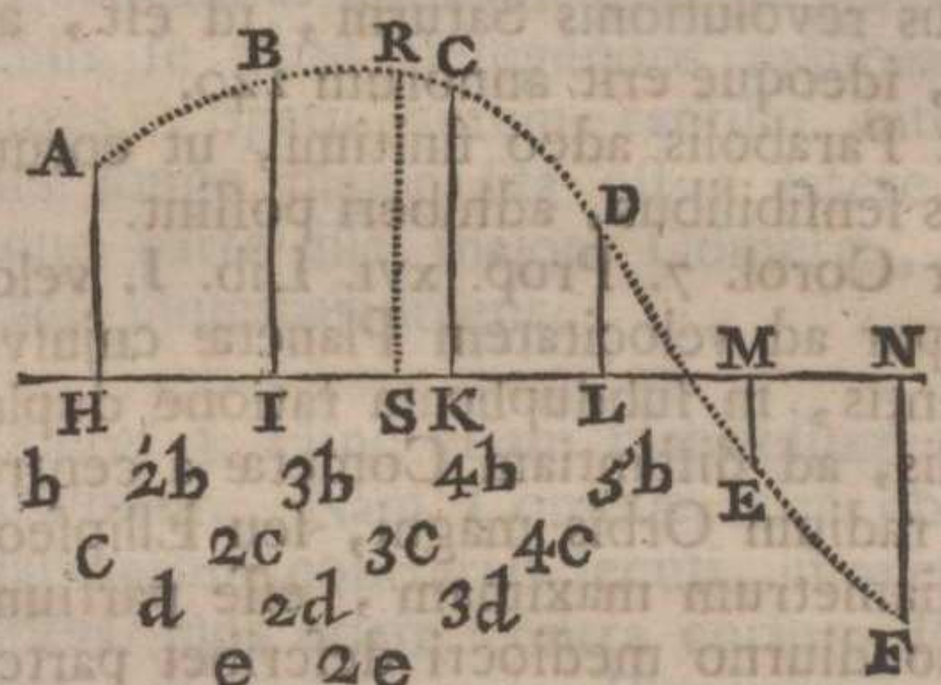
Corol. 4. Unde si Latus rectum Parabolæ quadruplo majus sit radio Orbis magni, & quadratum radii illius ponatur esse partium 100000000: area quam Cometa radio ad Solem ducto singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. Sin latus rectum majus sit vel minus in ratione quavis, erit area diurna & horaria major vel minor in eadem ratione subduplicata.

LEMMA V.

Invenire lineam curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta transibit.

Sunto puncta illa *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam *HN* demitte perpendicula quotcunque *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, *FN*.

Cas. 1. Si punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* æqualia sunt intervalla *HI*, *IK*, *KL*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK*, &c. differentias primas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*, &c. secundas *c*, 2*c*, 3*c*, 4*c*, &c. tertias *d*, 2*d*, 3*d*, &c. id est, ita ut sit $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, &c. dein $b - 2b = c$, &c. & sic pergatur ad differentiam ultimam quæ hic est *f*. Deinde erecta quacunque perpendiculari *RS*, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæsitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla *HI*, *IK*, *KL*, *LM*, &c. unitates esse, & dic $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS = q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK = r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL = s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM = t$; pergendo videlicet ad usque penultimum perpendiculum *ME*, & præponendo signa negativa terminis *HS*, *IS*, &c. qui jacent ad partes puncti *S* versus *A*, & signa affirmativa terminis *SK*, *SL*, &c. qui jacent ad alteras partes puncti *S*. Et signis probe observatis, erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.



Cas. 2. Quod si punctorum *H*, *I*, *K*, *L* &c. inæqualia sint intervalla *HI*, *IK*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK*, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*; secundas per intervalla bina divisas *c*, 2*c*, 3*c*, 4*c*, &c. tertias per intervalla terna divisas *d*, 2*d*, 3*d*, &c. quartas per inter-

intervalla quaterna diviſas e, $2e$, &c. & ſic deinceps; id eſt, ita ut ſit $b=\frac{AH-BI}{HI}$, $2b=\frac{BI-CK}{IK}$, $3b=\frac{CK-DL}{KL}$, &c. dein $c=\frac{b-2b}{HK}$, $2c=\frac{2b-3b}{IL}$, $3c=\frac{3b-4b}{KM}$, &c. Poſtea $d=\frac{c-2c}{HL}$ $2d=\frac{2c-3c}{IM}$, &c. Inventis differentiis, dic $AH=a$, $-HS=p$, p in $-IS=q$, q in $+SK=r$, r in $+SL=s$, s in $+SM=t$; pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS=a+bp+cq+dr+es+ft$, &c. LIBER TERTIUS.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri poſſunt quamproxime. Nam ſi curvæ cujuſvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ hujus eadem quam proxime cum area curvæ illius quadrandæ. Poteſt autem Parabola, per Methodos notiſſimas, ſemper quadrari Geometrice.

LEMMA VI.

Ex obſervatis aliquot locis Cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Deſignent HI, IK, KL, LM tempora inter obſervationes, (*in Fig. præced.*) HA, IB, KC, LD, ME obſervatas quinque longitudines Cometæ, HS tempus datum inter obſervationem primam & longitudinem quæſitam. Et ſi per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur curva regularis $ABCDE$; & per Lemma ſuperius inveniatur ejus ordinatim applicata RS, erit RS longitudo quæſita.

Eadem methodo ex obſervatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum obſervatarum parvæ ſint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; ſuffecerint obſervationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores ſint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt obſervationes quinque adhiberi.

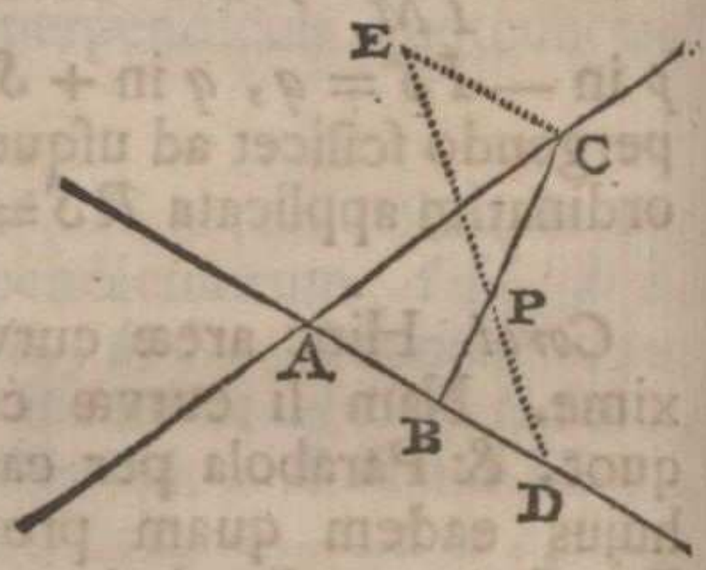
LEMMA

De Mundi Systemate,

LEMMA VII.

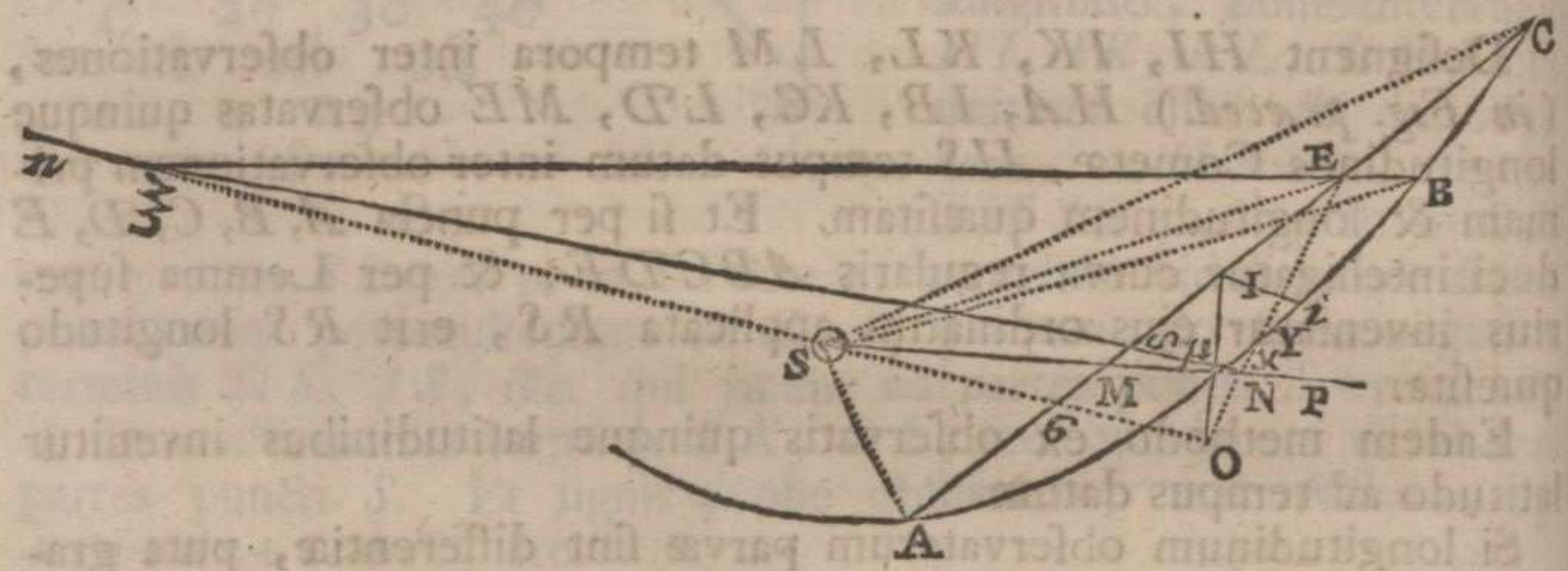
Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, BC, *rectis duabus positione datis* AB, AC *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*

A puncto illo P ad rectarum alterutram AB ducatur recta quævis PD, & producatur eadem versus rectam alteram AC usque ad E, ut sit PE ad PD in data illa ratione. Ipsi AD parallela sit EC; & si agatur CPB, erit PC ad PB ut PE ad PD. *Q. E. F*



LEMMA VIII.

Sit ABC *Parabola umbilicum habens* S. *Chorda* AC *bisecta in* I *abscindatur segmentum* ABCI, *cujus diameter sit* Iμ & *vertex* μ. *In* Iμ *producta capiatur* μO *æqualis dimidio ipsius*



Iμ. *Jungatur* OS, & *producatur ea ad* ξ, *ut sit* Sξ *æqualis* 2SO. *Et si Cometa* B *moveatur in arcu* CBA, & *agatur* ξB *secans* AC *in* E: *dico quod punctum* E *abscindet de chorda* AC *segmentum* AE *tempori proportionale quamproxime.*

Junga.

Jungatur enim EO secans arcum Parabolicum ABC in Υ, & agatur μX quæ tangat eundem arcum in vertice μ & actæ EO occurrat in X; & erit area curvilinea $AEX\mu A$ ad aream curvilineam $AC\Upsilon\mu A$ ut AE ad AC. Ideoque cum triangulum ASE sit ad triangulum ASC in eadem ratione, erit area tota $ASEX\mu A$ ad aream totam $ASC\Upsilon\mu A$ ut AE ad AC. Cum autem ξO sit ad SO ut 3 ad 1, & EO ad XO in eadem ratione, erit SX ipsi EB parallela: & propterea si jungatur BX, erit triangulum SEB triangulo XEB æquale. Unde si ad aream $ASEX\mu A$ addatur triangulum EXB, & de summa auferatur triangulum SEB, manebit area $ASBX\mu A$ areæ $ASEX\mu A$ æqualis, atque adeo ad aream $ASC\Upsilon\mu A$ ut AE ad AC. Sed areæ $ASBX\mu A$ æqualis est area $ASB\Upsilon\mu A$, quamproxime, & hæc area $ASB\Upsilon\mu A$ est ad aream $ASC\Upsilon\mu A$, ut tempus descripti arcus AB, ad tempus descripti arcus totius AC. Ideoque AE est ad AC in ratione temporum quamproxime. *Q. E. D.*

Corol. Ubi punctum B incidit in Parabolæ verticem μ, est AE ad AC in ratione temporum accurate.

Scholium.

Si jungatur $\mu\xi$ secans AC in δ, & in ea capiatur ξn quæ sit ad μB ut 27 MI ad 16 $M\mu$: acta Bn secabit chordam AC in ratione temporum magis accurate quam prius. Jaceat autem punctum n ultra punctum ξ, si punctum B magis distat a vertice principali Parabolæ quam punctum μ; & citra, si minus distat ab eodem vertice.

LEMMA IX.

Rectæ Iμ *&* μM *&* *longitudo* $\frac{AIC}{4S\mu}$ *æquantur inter se.*

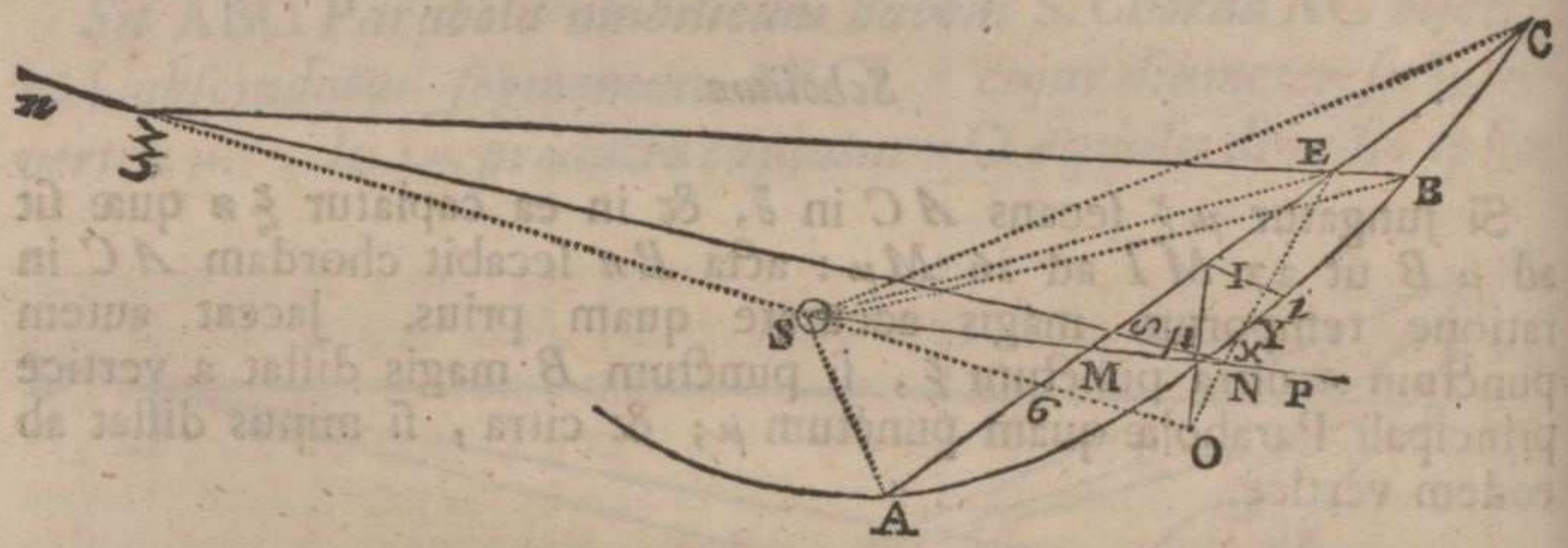
Nam $4S\mu$ est latus rectum Parabolæ pertinens ad verticem μ.

De Mundi Systemate.

LEMMA X.

Si producatur Sμ *ad* N *&* P, *ut* μN *ſit pars tertia ipſius* μI, *&* SP *ſit ad* SN *ut* SN *ad* Sμ. *Cometa, quo tempore deſcribit arcum* AμC, *ſi progrederetur ea ſemper cum velocitate quam habet in altitudine ipſi* SP *æquali, deſcriberet longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam ſi Cometa velocitate quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in recta quæ Parabolam tangit in μ; area quam radio ad punctum *S* ducto deſcriberet, æqualis eſſet areæ Parabolicæ *ASC*μ. Ideoque contentum ſub longitudine in tangente deſcripta & longitudine *S*μ, eſſet ad contentum ſub longitudinibus *AC* & *SM*, ut area *ASC*μ ad triangulum *ASCM*, id eſt, ut *SN* ad *SM*. Quare *AC* eſt ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut *S*μ ad *SN*. Cum autem velocitas



Cometæ in altitudine *SP* ſit (per Corol. 6. Prop. XVI. Lib. I.) ad velocitatem in altitudine *S*μ, in ſubduplicata ratione *SP* ad *S*μ inverſe, id eſt, in ratione *S*μ ad *SN*; longitudo hac velocitate eodem tempore deſcripta, erit ad longitudinem in tangente deſcriptam, ut *S*μ ad *SN*. Igitur *AC* & longitudo hac nova velocitate deſcripta, cum ſint ad longitudinem in tangente deſcriptam iam in eadem ratione, æquantur inter ſe. *Q.E.D.*

Corol. Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{1}{3}I\mu$, eodem tempore deſcriberet chordam *AC* quamproxime.

LEMMA

LEMMA XI.

Si Cometa motu omni privatus de altitudine S N *ſeu* $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$ *demitteretur, ut caderet in Solem, & ea ſemper vi uniformiter continuata urgeretur in Solem, qua urgetur ſub initio; idem ſemiſſe temporis quo in Orbe ſuo deſcribat arcum* A C, *deſcenſu ſuo deſcriberet ſpatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

Nam Cometa quo tempore deſcribat arcum Parabolicum *AC*, eodem tempore ea cum velocitate quam habet in altitudine *SP* (per Lemma noviſſimum) deſcribet chordam *AC*, adeoque (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I.) eodem tempore in Circulo cujus ſemidiameter eſſet *SP*, vi gravitatis ſuæ revolvendo, deſcriberet arcum cujus longitudo eſſet ad arcus Parabolici chordam *AC*, in ſubduplicata ratione unius ad duo. Et propterea eo cum pondere quod habet in Solem in altitudine *SP*, cadendo de altitudine illa in Solem, deſcriberet ſemiſſe temporis illius (per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I.) ſpatium æquale quadrato ſemiſſis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis *SP*, id eſt, ſpatium $\frac{AIq}{4SP}$. Unde cum pondus Cometæ in Solem in altitudine *SN*, ſit ad ipſius pondus in Solem in altitudine *SP*, ut *SP* ad $S\mu$: Cometa pondere quod habet in altitudine *SN* eodem tempore, in Solem cadendo, deſcribet ſpatium $\frac{AIq}{4S\mu}$, id eſt, ſpatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

Cometæ in Parabola moti Trajectoriam ex datis tribus Obſervationibus determinare.

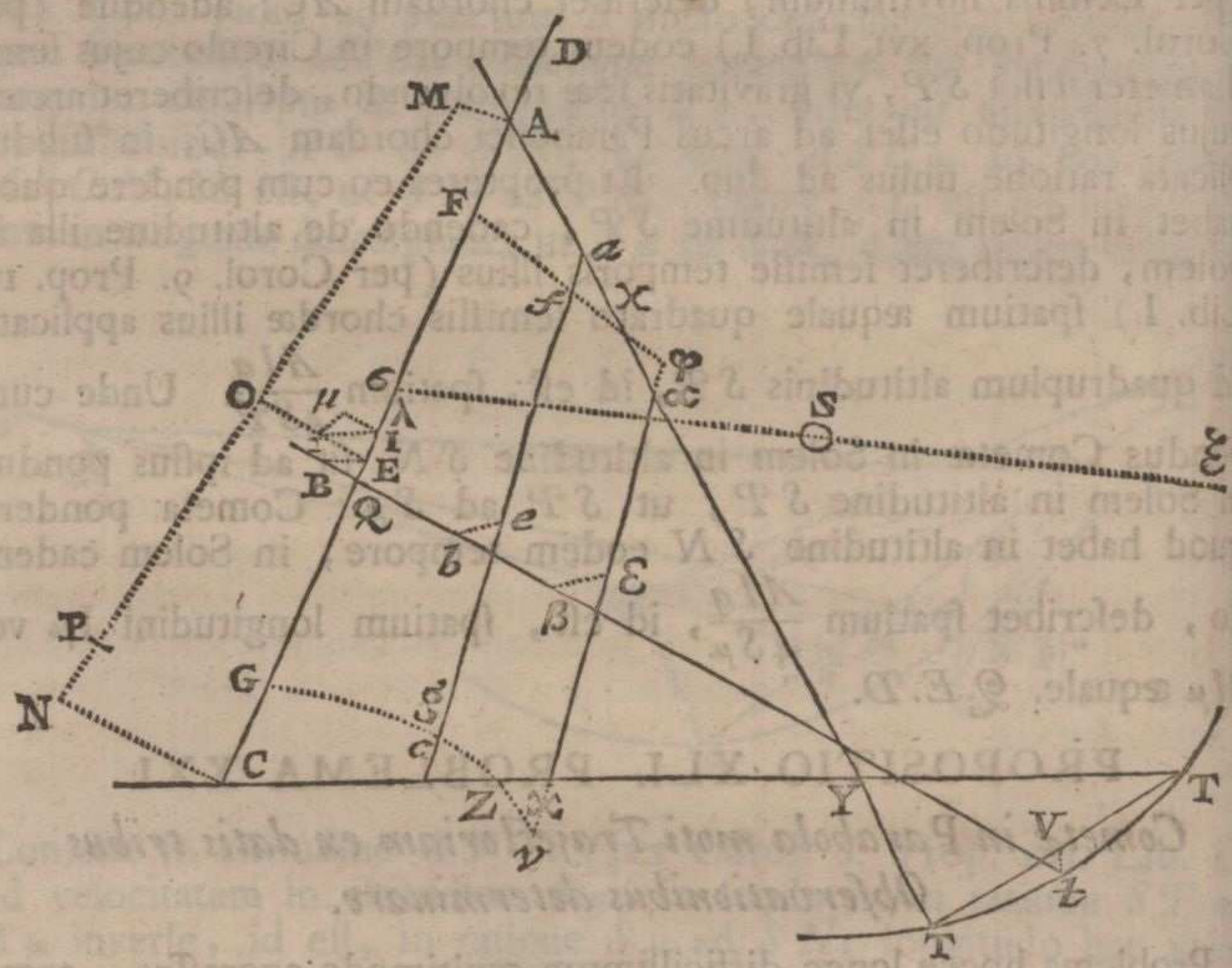
Problema hocce longe difficillimum multimode aggreſſus, compoſui Problemata quædam in Libro Primo quæ ad ejus ſolutionem ſpectant. Poſtea ſolutionem ſequentem paulo ſimpliciorem excogitavi.

Seligantur tres obſervationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproxime diſtantes. Sit autem temporis intervallum illud ubi Cometa tardius movetur paulo majus altero, ita videlicet

De Mundi Systemate,

ut temporum differentia ſit ad ſummam temporum, ut ſumma temporum ad dies plus minus ſexcentos; vel ut punctum *E* incidat in punctum *M* quamproxime, & inde aberret verſus *I* potius quam verſus *A*. Si tales obſervationes non præſto ſint, inveniendus eſt novus Cometæ locus per Lemma ſextum.

Deſignent *S* Solem $\mathcal{T}$, *t*, τ tria loca Terræ in Orbe magno, $\mathcal{T}A$, *tB*, τC obſervatas tres longitudines Cometæ, V tempus inter obſervationem primam & ſecundam, W tempus inter ſecundam ac tertiam, X longitudinem quam Cometa toto illo tempore, ea cum velocitate quam habet in mediocri Telluris à Sole diſtantia, deſcribere poſſet, quæque per Corol. 3. Prop. XL. Lib. III. invenienda eſt, & *tV* perpendiculum in chordam $\mathcal{T}\tau$. In longi-



tudine media *tB* ſumatur utcunque punctum *B* pro loco Cometæ in plano Eclipticæ, & inde verſus Solem *S* ducatur linea *BE*, quæ ſit ad ſagittam *tV*, ut contentum ſub *SB* & *St quad.* ad cubum hypotenuſæ trianguli rectanguli, cujus latera ſunt *SB* & tangens latitudinis Cometæ in obſervatione ſecunda ad radium *tB*.

Et

Et per punctum E agatur (per hujus Lem. VII.) recta AEC, cujus partes AE, EC ad rectas TA & τC terminatæ, ſint ad invicem ut tempora V & W: & erunt A & C loca Cometæ in plano Eclipticæ in obſervatione prima ac tertia quamproxime, ſi modo B ſit locus ejus recte aſſumptus in obſervatione ſecunda. LIBER TERTIUS.

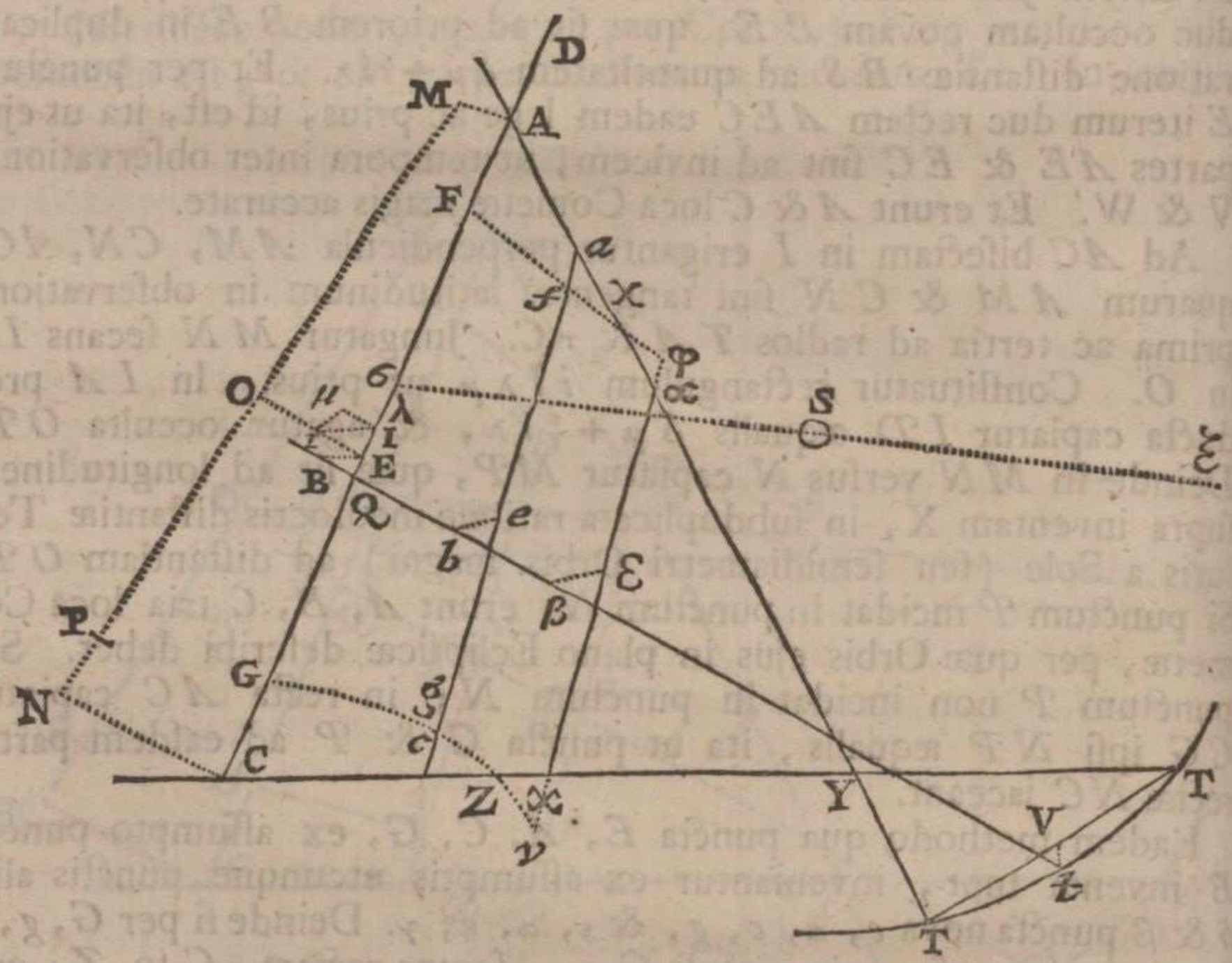
Ad AC biſectam in I erige perpendiculum Ii. Per punctum B age occultam Bi ipſi AC parallelam. Junge occultam Si ſecantem AC in λ, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per Solem S age occultam $\sigma\xi$ æqualem $3S\sigma + 3i\lambda$. Et deletis jam literis A, E, C, I, a puncto B verſus punctum ξ duc occultam novam BE, quæ ſit ad priorem BE in duplicata ratione diſtantiæ BS ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eadem lege ac prius, id eſt, ita ut ejus partes AE & EC ſint ad invicem, ut tempora inter obſervationes V & W. Et erunt A & C loca Cometæ magis accurate.

Ad AC biſectam in I erigantur perpendicula AM, CN, IO, quarum AM & CN ſint tangentes latitudinum in obſervatione prima ac tertia ad radios TA & τC. Jungatur MN ſecans IO in O. Conſtituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In IA producta capiatur ID æqualis $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$, & agatur occulta OD. Deinde in MN verſus N capiatur MP, quæ ſit ad longitudinem ſupra inventam X, in ſubduplicata ratione mediocris diſtantiæ Telluris a Sole (ſeu ſemidiametri Orbis magni) ad diſtantiam OD. Si punctum P incidat in punctum N; erunt A, B, C tria loca Cometæ, per quæ Orbis ejus in plano Eclipticæ deſcribi debet. Sin punctum P non incidat in punctum N; in recta AC capiatur CG ipſi NP æqualis, ita ut puncta G & P ad eaſdem partes rectæ NC jaceant.

Eadem methodo qua puncta E, A, C, G, ex aſſumpto puncto B inventa ſunt, inveniantur ex aſſumptis utcunque punctis aliis b & β puncta nova e, a, c, g, & ε, α, $\varkappa$, γ. Deinde ſi per G, g, γ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$, ſecans rectam τC in Z: erit Z locus Cometæ in plano Eclipticæ. Et ſi in AC, ac, $\alpha\varkappa$ capiantur AF, af, $\alpha\phi$ ipſis CG, cg, $\varkappa\gamma$ reſpective æquales, & per puncta F, f, ϕ ducatur circumferentia circuli $Ff\phi$, ſecans rectam AT in X; erit punctum X alius Cometæ locus in plano Eclipticæ. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum Cometæ ad radios TX & τZ; & habebuntur loca duo Cometæ in Orbe proprio. Denique (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico S, per loca illa duo deſcribatur Parabola, & hæc erit Trajectoria Cometæ. *Q. E. I.*

De Mundi Systemate,

Conſtructionis hujus demonſtratio ex Lemmatibus conſequitur: quippe cum recta AC ſecetur in E in ratione temporum, per Lemma VII, ut oportet per Lem. VIII: & BE per Lem. XI. ſit pars rectæ BS vel $B\xi$ in plano Eclipticæ arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per Corol. Lem. X.) longitudo ſit chordæ arcus, quem Cometa in Orbe proprio inter obſervationem primam ac tertiam deſcribere debet, ideoque ipſi MN æqualis fuerit, ſi modo B ſit verus Cometæ locus in plano Eclipticæ.



Cæterum puncta B, b, β non quælibet, ſed vero proxima eligere convenit. Si angulus AQt, in quo veſtigium Orbis in plano Eclipticæ deſcriptum ſecat rectam tB, præterpropter inoteſcat; in angulo illo ducenda erit recta occulta AC, quæ ſit ad $\frac{4}{3}T\tau$ in ſubduplicata ratione SQ ad St. Et agendo rectam SEB cujus pars EB æquetur longitudini Vt, determinabitur punctum B quod prima vice uſurpare licet. Tum recta AC deleta & ſecundum præcedentem conſtructionem iterum ducta, & inventa

inventa insuper longitudine MP; in τB capiatur punctum b, ea lege, ut si TA, τC se mutuo secuerint in Υ, sit distantia Υb ad distantiam ΥB, in ratione composita ex ratione MP ad MN & ratione subduplicata SB ad Sb. Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium β, si modo operationem tertio repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum sufficerint. Nam si distantia Bb perexigua obvenerit; postquam inventa sunt puncta F, f & G, g, actæ rectæ Ff & Gg secabunt TA & τC in punctis quæsitis X & Z.

Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum a *Flamstedio* observatum Tabula sequens exhibet.

		Tem. appar.	Temp.verum	Long. Solis	Long. Cometæ	Lat. Cometæ
		h. ′	h. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″
1680 *Dec.*	12	4.46	4.46. 0	♑ 1.51.23	♑ 6.31.21	8.26. 0
	21	6.32½	6.36.59	11. 6.44	♒ 5. 7.38	21.45.30
	24	6.12	6.17.52	14. 9.26	18.49.10	25.23.24
	26	5.14	5.20.44	16. 9.22	28.24. 6	27. 0.57
	29	7.55	8. 3. 2	19.19.43	♓ 13.11.45	28.10. 5
	30	8. 2	8.10.26	20.21. 9	17.39. 5	28.11.12
1681 *Jan.*	5	5.51	6. 1.38	26.22.18	♈ 8.49.10	26.15.26
	9	6.49	7. 0.53	♒ 0.29. 2	18.43.18	24.12.42
	10	5.54	6. 6.10	1.27.43	20.40.57	23.44. 0
	13	6.56	7. 8.55	4.33.20	25.59.34	22.17.36
	25	7.44	7.58.42	16.45.36	♉ 9.35.48	17.56.54
	30	8. 7	8.21.53	21.49.58	13.19.36	16.40.57
Feb.	2	6.20	6.34.51	24.46.59	15.13.48	16. 2. 2
	5	6.50	7. 4.41	27.49.51	16.59.52	15.27.23

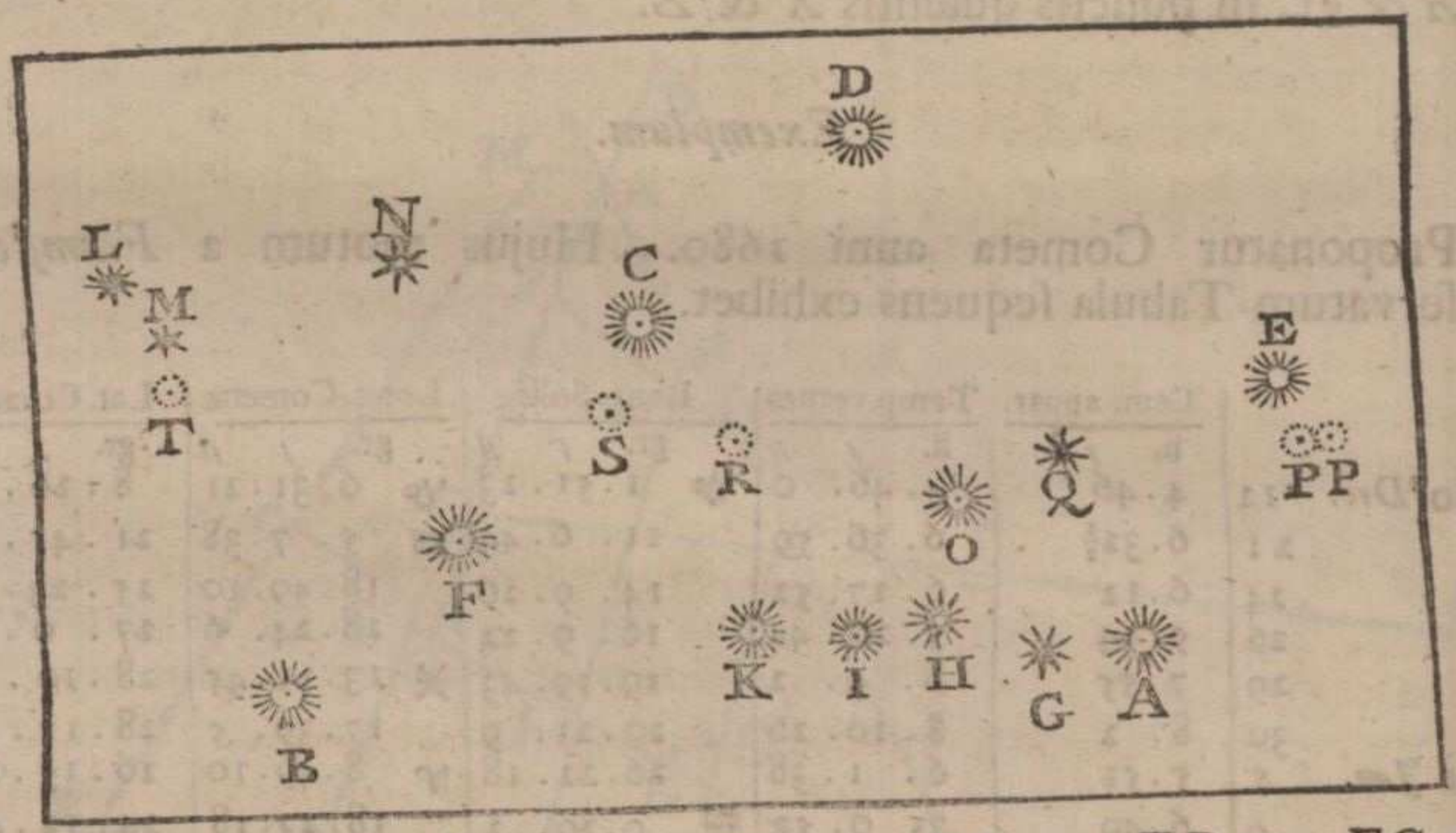
His adde Observationes quasdam e nostris.

		Temp. appar.	Cometæ Longit.	Com. Lat.
Febr.	25	8h. 30′	♉ 26gr. 18′. 17″	12gr. 46′⅞
	27	8. 15	27. 4. 24	12. 36⅕
Mart.	1	11. 0	27. 53. 6	12. 24⅔
	2	8. 0	28. 12. 27	11. 20
	5	11. 30	29. 20. 51	12. 3½
	9	8. 30	♊ 0. 43. 4	11. 45⅞

Hæ Observationes Telescopio septupedali, & Micrometro filisque in foco Telescopii locatis peractæ sunt: quibus instrumentis

&

De Mundi Systemate, & positiones fixarum inter se & positiones Cometæ ad fixas determinavimus. Designet *A* stellam in sinistro calcaneo Persei (*Bayero* o) *B* stellam sequentem in sinistro pede (*Bayero* ζ) & *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O* stellas alias minores in eodem pede. Sintque *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* loca Cometæ in observationibus supra descriptis: & existente distantia *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{5}{7}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$, *CD* $23\frac{3}{4}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AI* $27\frac{7}{12}$, *BI* $52\frac{1}{6}$, *CI* $36\frac{7}{12}$,



DI $53\frac{5}{11}$, *AK* $38\frac{2}{3}$, *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{5}{7}$, *DH* $50\frac{7}{8}$, *BN* $46\frac{5}{11}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *HO* erat ad *HI* ut 7 ad 6 & producta transibat inter stellas *D* & *E*, sic ut distantia stellæ *D* ab hac recta esset $\frac{1}{5}$ *CD*. *LM* erat ad *LB* ut 2 ad 9 & producta transibat per stellam *H*. His determinabantur positiones fixarum inter se.

Die Veneris *Feb.* 25. St. vet. Hor. $8\frac{1}{2}$ P. M. Cometæ in *p* existentis distantia a stella *E* erat minor quam $\frac{1}{13}$ *AE*, major quam $\frac{1}{14}$ *AE*, adeoque æqualis $\frac{1}{14}$ *AE* proxime; & angulus *ApE* nonnihil obtusus erat, sed fere rectus. Nempe si demitteretur ad *pE* perpendiculum ab *A*, distantia Cometæ a perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$ *pE*.

Eadem nocte, hora $9\frac{1}{2}$, Cometæ in *P* existentis distantia a stella *E* erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ *AE*, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ *AE*, adeoque æqua-

lis

lis $\frac{x}{4\frac{7}{8}}AE$, ſeu $\frac{8}{39}AE$ quamproxime. A perpendiculo autem a ſtella A ad rectam PE demiſſo, diſtantia Cometæ erat $\frac{4}{9}PE$.

Die ☉is, *Feb.* 27. hor. $8\frac{1}{4}$ P. M. Cometæ in Q exiſtentis diſtantia a ſtella O æquabat diſtantiam ſtellarum O & H, & recta QO producta tranſibat inter ſtellas K & B. Poſitionem hujus rectæ ob nubes intervenientes, magis accurate definire non potui.

Die ♂tis, *Mart.* 1, hor. 11. P. M. Cometa in R exiſtens, ſtellis K & C accurate interjacebat, & rectæ CRK pars CR paulo major erat quam $\frac{1}{3}CK$, & paulo minor quam $\frac{1}{3}CK + \frac{1}{8}CR$, adeoque æqualis $\frac{1}{3}CK + \frac{1}{16}CR$ ſeu $\frac{16}{45}CK$.

Die ☿ii, *Mart.* 2. hor. 8. P. M. Cometæ exiſtentis in S, diſtantia a ſtella C erat $\frac{4}{9}FC$ quamproxime. Diſtantia ſtellæ F a recta CS producta erat $\frac{1}{24}FC$; & diſtantia ſtellæ B ab eadem recta, erat quintuplo major quam diſtantia ſtellæ F. Item recta NS producta tranſibat inter ſtellas H & I, quintuplo vel ſextuplo propior exiſtens ſtellæ H quam ſtellæ I.

Die ♄ni, *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$. P. M. Cometa exiſtente in T, recta MT æqualis erat $\frac{1}{2}ML$, & recta LT producta tranſibat inter B & F, quadruplo vel quintuplo propior F quam B, auferens a BF quintam vel ſextam ejus partem verſus F. Et MT producta tranſibat extra ſpatium BF ad partes ſtellæ B, quadruplo propior exiſtens ſtellæ B quam ſtellæ F. Erat M ſtella perexigua quæ per Teleſcopium videri vix potuit, & L ſtella major quaſi magnitudinis octavæ.

Ex hujuſmodi obſervationibus per conſtructiones figurarum & computationes (poſito quod ſtellarum A & B diſtantia eſſet $2^{gr.}\ 6'.\ 46''$, & ſtellæ A longitudo ♉ $26^{gr.}\ 41'.\ 50''$ & latitudo borealis $12_{gr.}\ 8\frac{1}{2}$, ſtellæque B longitudo ♉ $28^{gr.}\ 40'.\ 24''$ & latitudo borealis $11^{gr.}\ 17'\frac{2}{10}$;) derivabam longitudines & latitudines Cometæ. Micrometro parum affabre conſtructo uſus ſum, ſed longitudinum tamen & latitudinum errores (quatenus ab obſervationibus noſtris oriantur) dimidium minuti unius primi vix ſuperant, præterquam in obſervatione ultima *Mart.* 9. ubi poſitiones ſtellarum minus accurate determinare potui. *Caſſinus* qui aſcenſionem rectam Cometæ eodem tempore obſervavit, declinationem ejus tanquam invariatam manentem parum diligenter definivit. Nam Cometa (juxta obſervationes noſtras) in fine

De Mundi Sistemate,

motus sui notabiliter deflectere cœpit boream versus, a parallelo quem in fine Mensis *Februarii* tenuerat.

Jam ad Orbem Cometæ determinandum; selegi ex observationibus hactenus descriptis tres, quas *Flamstedius* habuit *Dec.* 21, *Jan.* 5, & *Jan.* 25. Ex his inveni *St* partium 9842, 1 & *Vt* partium 455, quales 10000 sunt semidiameter Orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo *tB* partium 5657, inveni *SB* 9747, *BE* prima vice 412, *Sμ* 9503, *iλ* 413: *BE* secunda vice 421, *OD* 10186, X 8528, 4, *MP* 8450, *MN* 8475, *NP* 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam *tb* 5640. Et per hanc operationem inveni tandem distantias *TX* 4775 & *τZ* 11322. Ex quibus Orbem definiendo, inveni Nodos ejus descendentem in ☋ & ascendentem in ♈ 1 gr. 53′; Inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ 61 gr. 20′⅓; verticem ejus (seu Perihelium Cometæ) distare a Nodo 8 gr. 38′, & esse in ♐ 27 gr. 43′ cum latitudine australi 7 gr. 34′; & ejus latus rectum esse 236,8, areamque radio ad Solem ducto singulis diebus descriptam 93585, quadrato semidiametri Orbis magni posito 100000000; Cometam vero in hoc Orbe secundum seriem signorum processisse, & *Decemb.* 8d. 0h. 4′ P. M. in vertice Orbis seu Perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium & chordas angulorum ex Tabula sinuum naturalium collectas, determinavi Graphice: construendo Schema satis amplum, in quo videlicet semidiameter Orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis 16½ pedis Anglicani.

Tandem ut constaret an Cometa in Orbe sic invento vere moveretur, collegi per operationes partim Arithmeticas partim Graphicas, loca Cometæ in hoc Orbe ad observationum quarundam tempora: uti in Tabula sequente videre licet.

	Distant. Cometæ a Sole.	Long. Collect.	Lat. Collect	Long. Obs.	Lat. Obs.	Differ. Long.	Differ. Lat.
		gr. ′	gr. ′	gr. ′	gr. ′	′	′
Dec. 12	2792	♒ 6 . 32	8 . 18½	♒ 6 . 31⅓	8 . 26	+ 1	− 7½
29	8403	♓ 13 . 13⅔	28 . 0	♓ 13 . 11¾	28 . 10 1/12	+ 2	− 10 1/12
Febr. 5	16669	♉ 17 . 0	15 . 29⅔	♉ 16 . 59⅞	15 . 27⅔	+ 0	+ 2¼
Mar. 5	21737	29 . 19¼	12 . 4	29 . 20⅚	12 . 3½	− 1	+ ½

Postea vero *Halleius* notter Orbitam, per calculum Arithmeticum, accuratius determinavit quam per descriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum Nodorum in ☋ & ♈ 1 gr. 53′, & Inclinationem plani Orbitæ ad Eclipticam 61 gr. 20′⅓, ut & tempus Perihelii Cometæ *Decemb.* 8d. 0h. 4′: distantiam vero Perihelii

helii a Nodo ascendente, in Orbita Cometæ mensuratam, invenit esse 9 gr. 20′, & Latus rectum Parabolæ esse 243 partium, existente mediocri Solis a Terra distantia partium 10000. Et ex his datis, calculo itidem Arithmetico accurate instituto, loca Cometæ ad observationum tempora computavit, ut sequitur.

	Tempus verum	Distantia Cometæ a ☉	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
	d. h. ′ ″		gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec.	12 . 4 . 46 . 0	28028	♑ 6 . 29 . 25	8 . 26 . 0 Bor.	— 1 . 56	+ 0 . 0
	21 . 6 . 36 . 59	61076	♒ 5 . 6 . 30	21 . 43 . 20	— 1 . 8	— 2 . 10
	24 . 6 . 17 . 52	70008	18 . 48 . 20	25 . 22 . 40	— 0 . 50	— 0 . 44
	26 . 5 . 20 . 44	75576	28 . 22 . 45	27 . 1 . 36	— 1 . 21	+ 0 . 35
	29 . 8 . 3 . 2	84021	♓ 13 . 12 . 40	28 . 10 . 10	+ 0 . 55	+ 0 . 5
	30 . 8 . 10 . 26	86661	17 . 40 . 5	28 . 11 . 20	+ 1 . 0	+ 0 . 8
Jan.	5 . 6 . 1 . 38	101440	♈ 8 . 49 . 49	26 . 15 . 15	+ 0 . 39	— 0 . 1
	9 . 7 . 0 . 53	110959	18 . 44 . 36	24 . 12 . 54	+ 1 . 18	+ 0 . 12
	10 . 6 . 6 . 10	113162	20 . 41 . 0	23 . 44 . 10	+ 0 . 3	+ 0 . 10
	13 . 7 . 8 . 55	120000	26 . 0 . 21	22 . 17 . 30	+ 0 . 47	— 0 . 6
	25 . 7 . 58 . 42	145370	♉ 9 . 33 . 40	17 . 57 . 55	— 2 . 8	+ 1 . 1
	30 . 8 . 21 . 53	155303	13 . 17 . 41	16 . 42 . 7	— 1 . 55	+ 1 . 10
Feb.	2 . 6 . 34 . 51	160951	15 . 11 . 11	16 . 4 . 15	— 2 . 37	+ 2 . 13
	5 . 7 . 4 . 41	166686	16 . 58 . 25	15 . 29 . 13	— 1 . 27	+ 1 . 50
	25 . 8 . 19 . 0	202570	26 . 15 . 46	12 . 48 . 0	— 2 . 31	+ 1 . 8
Mar.	5 . 11 . 21 . 0	216205	29 . 18 . 25	12 . 5 . 40	— 2 . 16	+ 2 . 10

Apparuit etiam hic Cometa mense *Novembri* præcedente, & die undecimo hujus mensis stylo veteri, ad horam quintam matutinam, *Cantuariæ* in *Anglia*, visus fuit in ♍ 12½ cum latitudine boreali 2 gr. circiter. Crassissima fuit hæc Observatio: meliores sunt quæ sequuntur.

Nov. 17, st. vet. *Ponthæus* & socii hora sexta matutina *Romæ* (id est, hora 5, 10′ *Londini*) filis ad fixas applicatis Cometam observarunt in ♎ 8. 30′, cum latitudine australi 0 gr. 40′. Extant eorum Observationes in tractatu quem *Ponthæus*, de hoc Cometa, in lucem edidit. *Cellius* qui aderat & observationes suas in Epistola ad *D. Cassinum* misit, Cometam eadem hora vidit in ♎ 8 gr. 30′ cum latitudine australi 0 gr. 30′. Eadem hora *Galletius* etiam Cometam vidit in ♎ 8 gr. sine latitudine.

Nov. 18. hora matutina 6. 30′ *Romæ* (id est, hora 5, 40′ *Londini*) *Ponthæus* Cometam vidit in ♎ 13 gr. 30′ cum latitudine australi 1 gr. 20′. *Cellius* in ♎ 13 gr. 00′, cum latitudine australi 1 gr. 00′. *Galletius* autem hora matutina 5. 30′ *Romæ*, Cometam vidit in ♎ 13 gr. 00′, cum latitudine australi 1 gr. 00′. Et *R. P. Ango* in Academia *Flexiensi* apud *Gallos*, hora quinta matutina (id est, hora 5, 9′ *Londini*) Cometam vidit in medio inter stellas

DE MUNDI SYSTEMATE,

duas parvas, quarum una media est trium in recta linea in Virginis australi manu, & altera est extrema alæ. Unde Cometa tunc fuit in ♎ 12. 46′, cum latitudine australi 50′. Eodem die *Bostoniæ* in *Nova-Anglia* in Latitudine 42½ graduum, hora quinta matutina, (id est *Londini* hora matutina 9. 44′) Cometa visus est prope ♎ 14, cum latitudine australi 1 gr. 30′, uti a *Cl. Halleio* accepi.

Nov. 19. hora mat. 4½ *Cantabrigiæ*, Cometa (observante juvene quodam) distabat a Spica ♍ quasi 2 gr. Boreazephyrum versus. Eodem die hor. 5. mat. *Bostoniæ* in *Nova-Anglia*, Cometa distabat a Spica ♍ gradu uno, differentia latitudinum existente 40′. Eodem die in Insula *Jamaica*, Cometa distabat a Spica intervallo quasi gradus unius. Et ex his observationibus inter se collatis colligo, quod hora 9. 44′. *Londini*, Cometa erat in ♎ 18 gr. 40′, cum latitudine australi 1 gr. 18′ circiter. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Mary-Land*, in confinio *Virginiæ* in Lat. 38½ gr. hora quinta matutina (id est, hora 10ª *Londini*) Cometam vidit supra Spicam ♍, & cum Spica propemodum conjunctum, existente distantia inter eosdem quasi ¾ gr. Observator idem, eadem hora diei sequentis, Cometam vidit quasi 2 gr. inferiorem Spica. Congruent hæ observationes cum observationibus in *Nova-Anglia* & *Jamaica* factis, si modo distantiæ (pro motu diurno Cometæ) nonnihil augeantur, ita ut Cometa die priore superior esset Spica ♍, altitudine 1 gr. circiter, ac die posteriore inferior eadem stella, altitudine perpendiculari 3 gr. 40′.

Nov. 20. D. *Montenarus* Astronomiæ Professor *Paduensis*, hora sexta matutina *Venetiis* (id est, hora 5. 10′ *Londini*) Cometam vidit in ♎ 23 gr., cum latitudine australi 1 gr. 30′. Eodem die *Bostoniæ*, distabat Cometa a Spica ♍, 4 gr. longitudinis in orientem, adeoque erat in ♎ 23 gr. 24′ circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & socii hor. mat. 7¼ Cometam observarunt in ♎ 27 gr. 50′, cum latitudine australi 1 gr. 16′; *Ango* hora quinta matutina in ♎ 27 gr. 45′, *Montenarus* in ♎ 27 gr. 51′. Eodem die in Insula *Jamaica*, Cometa visus est prope principium Scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spica Virginis, id est, 2 gr. 2′.

Nov. 22. Cometa visus est a *Montenaro* in ♏ 2. 33′. *Bostoniæ* autem in *Nova-Anglia* apparuit in ♏ 3 gr. circiter, eadem fere cum latitudine ac prius, id est, 1 gr. 30′. Eodem die *Londini*,

hora

hora mat. 6½ *Hookius* noſter Cometam vidit in ♏ 3 gr. 30′ circiter, idque in linea recta quæ tranſit per Spicam Virginis & Cor Leonis, non exacte quidem, ſed a linea illa paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea a Cometa per Spicam ducta, hoc die & ſequentibus tranſibat per auſtrale latus Cordis Leonis, interpoſito perparvo intervallo inter Cor Leonis & hanc lineam. Linea recta per Cor Leonis & Spicam Virginis tranſiens, Eclipticam ſecuit in ♍ 3 gr. 46′, in angulo 2 gr. 51′. Et ſi Cometa locatus fuiſſet in hac linea in ♏ 3 gr., ejus latitudo fuiſſet 2 gr. 26′. Sed cum Cometa conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil diſtaret ab hac linea boream verſus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex obſervatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem Spicæ ♍, eratque 1 gr. 30′ circiter, & conſentientibus *Hookio*, *Montenaro*, & *Angone* perpetuo augebatur, ideoque jam ſenſibiliter major erat quam 1 gr. 30′. Inter limites autem jam conſtitutos 2 gr. 26′ & 1 gr. 30′, magnitudine mediocri latitudo erit 1 gr. 58′ circiter. Cauda Cometæ, conſentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad Spicam ♍, declinans aliquantulum a Stella iſta, juxta *Hookium* in auſtrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit ſenſibilis, & Cauda Æquatori fere parallela exiſtens, aliquantulum deflectebatur ab oppoſitione Solis boream verſus. LIBER TERTIUS.

Nov. 24. Ante ortum Solis Cometa viſus eſt a *Montenaro* in ♏ 12 gr. 52′, ad boreale latus rectæ quæ per Cor Leonis & Spicam Virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quam 2 gr. 38′. Hæc latitudo, uti diximus, ex obſervationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuo augebatur; ideoque jam paulo major erat quam 1 gr. 58′; & magnitudine mediocri, abſque notabili errore, ſtatui poteſt 2 gr. 18′. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam decreviſſe volunt, & *Cellius* & Obſervator in *Nova-Anglia* eandem fere magnitudinem retinuiſſe, ſcilicet gradus unius vel unius cum ſemiſſe. Craſſiores ſunt obſervationes *Ponthæi* & *Cellii*, eæ præſertim quæ per Azimuthos & Altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores ſunt eæ quæ per poſitiones Cometæ ad fixas a *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & Obſervatore in *Nova-Anglia*, & nonnunquam a *Ponthæo* & *Cellio* ſunt factæ.

Jam collatis Obſervationibus inter ſe, colligere videor quod Cometa hoc menſe circulum fere maximum deſcripſit, ſecantem Eclipticam in ♍ 25. 12′, idque in angulo 3 gr. 12′ quamproxime. Nam & *Montenarus* Orbitam ab Ecliptica in auſtrum, tribus ſal-

De Mundi Systemate.

tem gradibus declinasse dicit. Et cognita cursus positione, longitudines Cometæ ex observationibus collectæ, ad incudem jam revocari possunt & melius nonnunquam determinari, ut fit in sequentibus. *Cellius* Novemb. 17. observavit distantiam Cometæ a Spica ♍, æqualem esse distantiæ ejus a stella lucida in dextra ala Corvi: & hinc locandus est Cometa in intersectione hujus circuli quem Cometa motu apparente descripsit, cum circulo maximo qui a fixis illis duabus æqualiter distat, atque adeo in ♎ 7 gr. 54′, cum latitudine australi 43′. Præterea *Montenarus*, *Novemb.* 20. hora sexta matutina *Venetiis*, Cometam vidit non totis quatuor gradibus distantem a Spica; dicitque hanc distantiam, vix æquasse distantiam stellarum duarum lucidarum in alis Corvi, vel duarum in juba Leonis, hoc est 3 gr. & 30′ vel 32′. Sit igitur distantia Cometæ a Spica 3 gr. 30′, & Cometa locabitur in ♎ 22 gr. 48′, cum latitudine australi 1 gr. 30′. Adhæc *Montenarus*, *Novemb.* 21, 22, 24 & 25 ante ortum Solis, Sextante æneo quintupedali ad minuta prima & semiminuta diviso & vitris Telescopicis armato, distantias mensuravit Cometæ a Spica 8 gr. 28′, 13 gr. 10′, 23 gr. 30′, & 28 gr. 13′: & has distantias, per refractionem nondum correctas, addendo longitudini Spicæ, collegit Cometam his temporibus fuisse in ♎ 27 gr. 51′. ♏ 2 gr. 33′, ♏ 12 gr. 52′ & ♏ 17 gr. 45′. Si distantiæ illæ per refractiones corrigantur, & ex distantiis correctis differentiæ longitudinum inter Spicam & Cometam probe deriventur, locabitur Cometa his temporibus in ♎ 27 gr. 52′. ♏ 2 gr. 36′, ♏ 12 gr. 58′ & ♏ 17 gr. 53′ circiter. Latitudines autem ad has longitudines in via Cometæ captas, prodeunt 1 gr. 45′, 1 gr. 58′, 2 gr. 22′ & 2 gr. 31′. Harum quatuor observationum horas matutinas *Montenarus* non posuit. Priores duæ ante horam sextam, posteriores (ob viciniam Solis) post sextam factæ videntur. Die 22, ubi Cometa ex observatione *Montenari* locatur in ♏ 2 gr. 36′, *Hookius* noster eundem locavit in ♏ 3 gr. 30′ ut supra. *Montenarus* in defectu, *Hookius* in excessu errasse videntur. Nam Cometa, ex serie observationum, jam fuit in ♏ 2 gr. 56′ vel ♏ 3 gr. circiter.

Observationum suarum ultimam inter vapores & diluculum captam, *Montenarus* suspectam habebat. Et *Cellius* eodem tempore (id est, *Novem.* 25.) Cometam per ejus Altitudinem & Azimuthum locavit in ♏ 15 gr. 47′, cum latitudine australi quasi gradus unius. Sed *Cellius* observavit etiam eodem tempore, quod Cometa erat in linea recta cum stella lucida in dextro femore Vir-

Virginis & cum Lance auſtrali Libræ, & hæc linea ſecat viam Cometæ in ♏ 18gr. 36′. *Ponthæus* etiam eodem tempore obſervavit, quod Cometa erat in recta tranſeunte per Chelam auſtrinam Scorpii & per ſtellam quæ Lancem borealem ſequitur: & hæc recta ſecat viam Cometæ in ♏ 16gr. 34′. Obſervavit etiam, quod Cometa erat in recta tranſeunte per ſtellam ſupra Lancem auſtralem Libræ & ſtellam in principio pedis ſecundi Scorpii: & hæc recta ſecat viam Cometæ in ♏ 17gr. 55′. Et inter longitudines ex his tribus Obſervationibus ſic derivatas, longitudo mediocris eſt ♏ 17gr. 42′, quæ cum obſervatione *Montenari* ſatis congruit.

Erravit igitur *Cellius* jam locando Cometam in ♏ 15gr. 47′, per ejus Azimuthum & Altitudinem. Et ſimilibus Azimuthorum & Altitudinum obſervationibus, *Cellius* & *Ponthæus* non minus erraverunt locando Cometam in ♏ 20 & ♏ 24 diebus duobus ſequentibus, ubi ſtellæ fixæ ob diluculum vix aut ne vix quidem apparuere. Et corrigendæ ſunt hæ obſervationes per additionem duorum graduum, vel duorum cum ſemiſſe.

Ex omnibus autem Obſervationibus inter ſe collatis & ad meridianum *Londini* reductis, colligo Cometam hujuſmodi curſum quamproxime deſcripſiſſe.

Temp. med. ſt. vet.			Long. Cometæ		Lat. Cometæ	
d.	h.	′	gr.	′	gr.	′
Nov. 16.	17.	10	♎ 8.	0	0.	44 Auſt.
17.	17.	10	12.	52	1.	0
18.	21.	44	18.	40	1.	18
19.	17.	10	22.	48	1.	30
20.	17	fere	27.	52	1.	45
21.	17	fere	♏ 2.	56	1.	58
23.	17¼	fere	12.	58	2.	20
24.	17½	fere	17.	53	2.	29
26.	18.	00	26 vel 27 gr.		2.	42

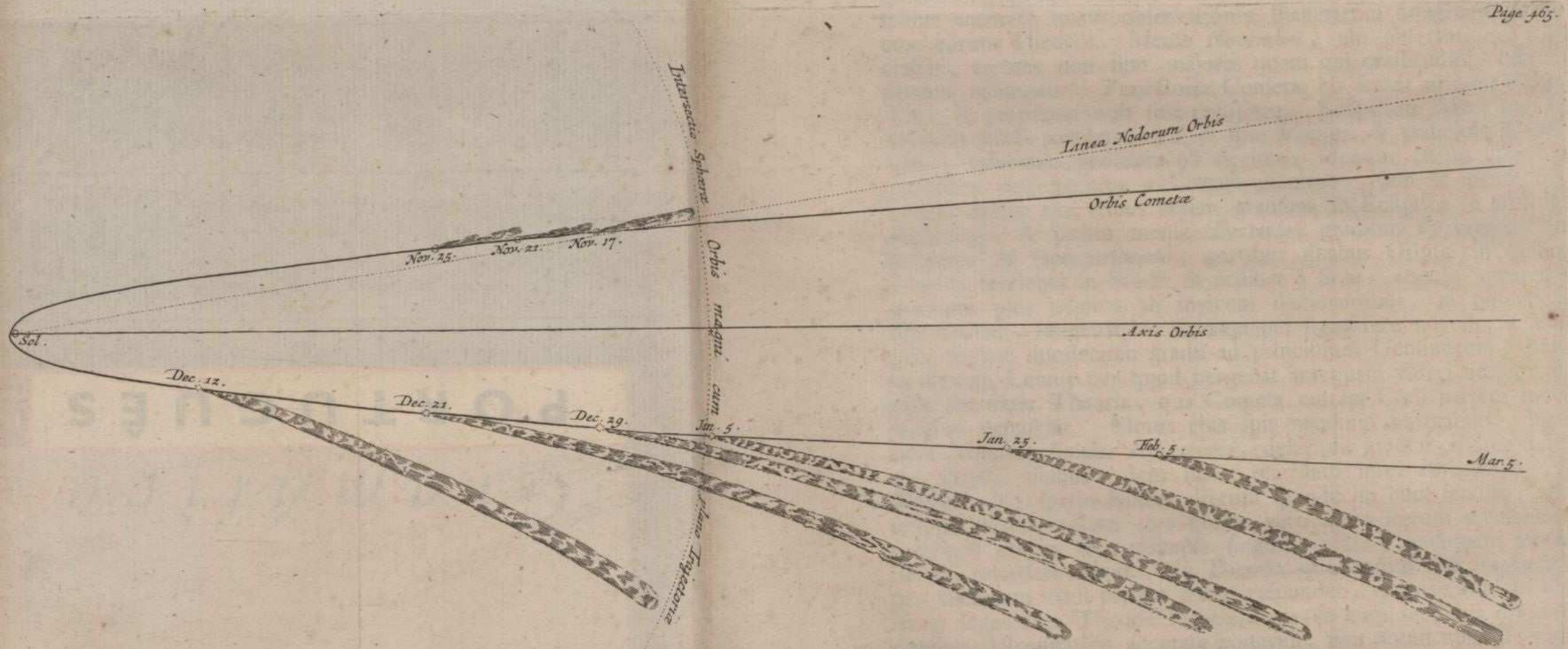
Loca autem Cometæ in Orbe Parabolico computata, ita ſe habent.

Temp. verum		Diſt. Com. a ☉	Long. comp.			Lat. comp.		
d.	h.		gr.	′	″	gr.	′	″
Nov. 16.	17. 0	83920	♎ 8.	0.	25	0.	43.	20 Auſt.
18.	21. 34	78020	18.	41.	50	1.	17.	30
20.	16. 50	73012	27.	59.	40	1.	44.	25
23.	17. 5	64206	♏ 13.	19.	15	2.	21.	8
26.	17. 0	54799	26.	46.	30	2.	42.	30

Com-

De Mundi Systemate,

Congruunt inter Obſervationes Aſtronomicæ, tam menſe *Novembri* quam menſibus quatuor ſequentibus, cum motu Cometæ circum Solem in Trajectoria hacce Parabolica, atque adeo unum & eundem Cometam fuiſſe, qui menſe *Novembri* ad Solem deſcendit, & menſibus ſequentibus ab eodem aſcendit, abunde confirmant, ut & hunc Cometam in Trajectoria hacce Parabolica delatum fuiſſe quamproxime. Menſibus *Decembri*, *Januario*, *Februario* & *Martio*, ubi Obſervationes hujus Cometæ ſunt ſatis accuratæ, congruunt eædem cum motu ejus in hac Trajectoria, non minus accurate quam obſervationes Planetarum congruere ſolent cum eorum Theoriis. Menſe *Novembri*, ubi obſervationes ſunt craſſæ, errores non ſunt majores quam qui craſſitudini obſervationum tribuantur. Trajectoria Cometæ bis ſecuit planum Ecliptícæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam ſecuit non in oppoſitis cœli partibus, ſed in fine Virginis & principio Capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque curſus Cometæ plurimum deflectebatur a Circulo maximo. Nam & menſe *Novembri* curſus ejus tribus ſaltem gradibus ab Ecliptica in auſtrum declinabat, & poſtea menſe *Decembri* gradibus 29 vergebat ab Ecliptica in ſeptentrionem, partibus duabus Orbitæ in quibus Cometa tendebat in Solem & redibat a Sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut obſervavit *Montenarus*. Pergebat hic Cometa per ſigna fere novem, a Virginis ſcilicet duodecimo gradu ad principium Geminorum, præter ſignum Leonis per quod pergebat antequam videri cœpit: & nulla alia extat Theoria, qua Cometa tantam Cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maxime inæquabilis. Nam circa diem vigeſimum *Novembris*, deſcripſit gradus circiter quinque ſingulis diebus; dein motu retardato inter *Novemb.* 26. & *Decemb.* 12, ſpatio ſcilicet dierum quindecim cum ſemiſſe, deſcripſit gradus tantum 40; poſtea vero motu iterum accelerato, deſcripſit gradus fere quinque ſingulis diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et Theoria quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probe reſpondet, quæque eaſdem obſervat leges cum Theoria Planetarum, & cum accuratis obſervationibus Aſtronomicis accurate congruit, non poteſt non eſſe vera. Cometa tamen ſub finem motus deviabat aliquantulum ab hac Trajectoria Parabolica verſus axem Parabolæ, ut ex erroribus minuti unius primi duorumve in latitudinem menſe *Februario* & *Martio* conſpirantibus, colligere videor; & propterea in Orbe Elliptico



BIBLIOTECA PÚBLICA E
ARQUIVO DISTRITAL
DE
ÉVORA

liptico circum Solem movebatur, ſpatio annorum pluſquam quingentorum, quantum ex erroribus illis judicare licuit, revolutionem peragens. LIBER TERTIUS.

Cæterum Trajectoriam quam Cometa deſcripſit, & Caudam veram quam ſingulis in locis projecit, viſum eſt annexo ſchemate in plano Trajectoriæ optice delineatas exhibere: Obſervationibus ſequentibus in Cauda definienda adhibitis.

Nov. 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18. Cauda 30 gr. longa, Solique directe oppoſita in *Nova-Anglia* cernebatur, & protendebatur uſque ad ſtellam ♂, quæ tunc erat in ♏ 9 gr. 54′. *Nov.* 19. in *Mary-Land* cauda viſa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. Cauda (obſervante *Flamſtedio*) tranſibat per medium diſtantiæ inter caudam ſerpentis Ophiuchi & ſtellam δ in Aquilæ auſtrali ala, & deſinebat prope ſtellas *A*, ω, *b* in Tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♑ 19½ gr. cum latitudine boreali 33¼ gr. circiter. *Dec.* 11. ſurgebat ad uſque caput Sagittæ (*Bayero*, α, β,) deſinens in ♑ 26 gr. 43′, cum latitudine boreali 38 gr. 34′. *Dec.* 12. tranſibat per medium Sagittæ „ nec longe ultra protendebatur, deſinens in ♒ 4 gr., cum latitudine boreali 42½ gr. circiter. Intelligenda ſunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obſcuriore, in cœlo forſan magis ſereno, cauda *Dec.* 12, hora 5, 40′ *Romæ* (obſervante *Ponthæo*) ſupra Cygni Uropygium ad gradus 10 ſeſe extulit; atque ab hac ſtella ejus latus ad occaſum & boream min. 45. deſtitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum ſuperiorem, ideoque medium ejus diſtabat a Stella illa 2 gr. 15′. auſtrum verſus, & terminus ſuperior erat in ♓ 22 gr. cum latitudine boreali 61 gr. *Dec.* 21. ſurgebat fere ad cathedram *Caſſiopeiæ*, æqualiter diſtans a β & *Schedir*, & diſtantiam ab utraque diſtantiæ earum ab invicem æqualem habens, adeoque deſinens in ♓ 24 gr. cum latitudine 47½ gr. *Dec.* 29. tangebat *Scheat* ſitam ad ſiniſtram, & intervallum ſtellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accurate complebat, & longa erat 54 gr. adeoque deſinebat in ♉ 19 gr. cum latitudine 35 gr. *Jan.* 5. tetigit ſtellam π in pectore *Andromedæ*, ad latus ſuum dextrum, & ſtellam μ in ejus cingulo, ad latus ſiniſtrum; & (juxta Obſervationes noſtras) longa erat 40 gr.; curva autem erat & convexo latere ſpectabat ad auſtrum. Cum circulo per Solem & caput Cometæ tranſeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput Cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum

De Mundi Systemate,

octo. *Jan.* 13. Cauda luce satis sensibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuissima desinebat e regione stellæ *x* in latere *Persei.* Distantia termini caudæ a circulo Solem & Cometam jungente erat 3 gr. 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}$ gr. *Jan.* 25 & 26 luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissima & ægerrime sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad Lucidam in humero orientali Aurigæ accurate, adeoque declinabat ab oppositione Solis boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. Caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7. se caudam ad longitudinem graduum 12 vidisse scribit.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua Cometæ hujus Phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit quod corpora Cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum Planetarum. Nam si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa hicce in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est, reciproce ut quadratum distantiæ locorum a Sole. Ideoque cum distantia Cometæ a centro Solis *Decemb.* 8. ubi in Perihelio versabatur, esset ad distantiam Terræ a centro Solis ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æstivum Solem, ut expertus sum: & calor ferri candentis (si recte conjector) quasi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; adeoque calor quem terra arida apud Cometam in Perihelio versantem ex radiis Solaribus concipere posset, quasi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in Perihelio suo calorem immensum ad Solem concepit, & calorem illum diutissime conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aere consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aeris ambi-

entis

entis refrigeratur) in illa ratione minor eſt pro quantitate materiæ ſuæ calidæ incluſæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id eſt, pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigeſceret. Suſpicor tamen quod duratio Caloris, ob cauſas latentes, augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarim rationem veram per experimenta inveſtigari. LIBER TERTIUS.

Porro notandum eſt quod Cometa Menſe *Decembri*, ubi ad Solem modo incaluerat, caudam emittebat longe majorem & ſplendidiorem quam antea menſe *Novembri*, ubi Perihelium nondum attigerat. Et univerſaliter caudæ omnes maximæ & fulgentiſſimæ e Cometis oriuntur, ſtatim poſt tranſitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud ſit quam vapor longe tenuiſſimus, quem caput ſeu nucleus Cometæ per calorem ſuum emittit.

Cæterum de Cometarum caudis triplex eſt opinio; eas vel jubar eſſe Solis per tranſlucida Cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progreſſu ipſius a capite Cometæ in Terram, vel denique nubem eſſe ſeu vaporem a capite Cometæ jugiter ſurgentem & abeuntem in partes a Sole averſas. Opinio prima eorum eſt qui nondum imbuti ſunt ſcientia rerum Opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroſo non cernitur, niſi quatenus lux reflectitur e pulverum & fumorum particulis per aerem ſemper volitantibus: adeoque in aere fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum fortius ferit; in aere clariore tenuius eſt, & ægrius ſentitur: in cœlis autem abſque materia reflectente nullum eſſe poteſt. Lux non cernitur quatenus in jubare eſt, ſed quatenus inde reflectitur ad oculos noſtros. Nam viſio non fit niſi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum luce Solis illuſtratum uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ numquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux Fixarum & Planetarum diſtincte ad nos tranſmiſſa, demonſtrat medium cœleſte nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur Fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam viſas fuiſſe, id quoniam rariſſime contingit, adſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum Oculorum tum Aeris tremuli referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo Teleſcopiis

De Mundi Systemate,

evaneſcunt. Aeris & aſcendentium vaporum tremore fit ut radii facile de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde eſt quod ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos abſque omni refractione ſenſibili. Nequis contendat quod caudæ non ſoleant videri in Cometis cum eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas Fixarum non cerni: ſciendum eſt quod lux Fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus Teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ vero nullæ: Cometæ autem ſæpe caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valde obtuſa: ſic enim Cometa Anni 1680, Menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſua vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat ſplendore notabili uſque ad gradus 40, 50, 60 longitudinis & ultra: poſtea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantum magnitudinis, cauda vero luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſima, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulo ultra: ut ſupra dictum eſt. Sed & *Feb.* 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per Teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur & refractione materiæ cœleſtis, & pro figura cœlorum deflecteretur de Solis oppoſitione, deberet deflexio illa in iiſdem cœli regionibus in eandem ſemper partem fieri. Atqui Cometa Anni 1680 *Decemb.* 28. hora $8\frac{1}{2}$ P. M. *Londini*, verſabatur in ♓ 8 gr. 41′ cum latitudine boreali 28 gr. 6′, Sole exiſtente in ♑ 18 gr. 26′. Et Cometa Anni 1577, *Dec.* 29. verſabatur in ♓ 8 gr. 41′ cum latitudine boreali 28 gr. 40′, Sole etiam exiſtente in ♑ 18 gr. 26′ circiter. Utroque in caſu Terra verſabatur in eodem loco, & Cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen caſu cauda Cometæ (ex meis & aliorum Obſervationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione Solis aquilonem verſus; in poſteriore vero (ex Obſervationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur repudiata cœlorum refractione, ſupereſt ut Phænomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriventur.

Caudas autem a capitibus oriri & in regiones a Sole averſas aſcendere confirmatur ex legibus quas obſervant. Ut quod in planis

planis Orbium Cometarum per Solem tranſeuntibus jacentes, deviant ab oppoſitione Solis in eas ſemper partes, quas capita in Orbibus illis progredientia relinquunt. Quod ſpectatori in his planis conſtituto apparent in partibus a Sole directe averſis; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor eſt ubi cauda obliquior eſt ad Orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præſertim ſi ſpectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major eſt ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor eſt juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque adeo quod cauda convexo ſui latere partes reſpicit a quibus fit deviatio, quæque in recta ſunt linea a Sole per caput Cometæ in infinitum ducta. Et quod caudæ quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulo ſplendidiores & limite minus indiſtincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ a motu capitis, non autem a regione cœli in qua caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed a capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in Aere noſtro fumus corporis cujusvis igniti petit ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel oblique ſi corpus moveatur in latus: ita in Cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores aſcendere debent à Sole (uti jam dictum eſt) & ſuperiora vel recta petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel oblique, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit a quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſius reflectet, & limite minus indiſtincto terminabitur. De Caudarum agitationibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel a mutationibus Aeris noſtri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obſcurantium oriantur; vel forte a partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari.

De Mundi Systemate,

Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex Cometarum Atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate Aeris noſtri. Nam Aer juxta ſuperficiem Terræ ſpatium occupat quaſi 850 partibus majus quam Aqua ejuſdem ponderis, ideoque Aeris columna cylindrica pedes 850 alta, ejuſdem eſt ponderis cum Aquæ columna pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem Aeris ad ſummitatem Atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam Aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea ſi columnæ totius Aereæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam Aquæ altam pedes 32. Inde vero (ex Hypotheſi multis experimentis confirmata, quod compreſſio Aeris ſit ut pondus Atmoſphæræ incumbentis, quodque gravitas ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum a centro Terræ) computationem per Corol. Prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod Aer, ſi aſcendatur a ſuperficie Terræ ad altitudinem ſemidiametri unius terreſtris, rarior ſit quam apud nos in ratione longe majori, quam ſpatii omnis infra Orbem Saturni ad globum diametro digiti unius deſcriptum. Ideoque globus Aeris noſtri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine ſemidiametri unius terreſtris, impleret omnes Planetarum regiones ad uſque ſphæram Saturni & longe ultra. Proinde cum Aer adhuc altior in immenſum rareſcat; & coma ſeu Atmoſphæra Cometæ, aſcendendo ab illius centro, quaſi decuplo altior ſit quam ſuperficies nuclei, deinde cauda adhuc altius aſcendat, debebit cauda eſſe quam rariſſima. Et quamvis, ob longe craſſiorem Cometarum Atmoſphæram, magnamque corporum gravitationem Solem verſus, & gravitationem particularum Aeris & vaporum in ſe mutuo, fieri poſſit ut Aer in ſpatiis cœleſtibus inque Cometarum caudis non adeo rareſcat; perexiguam tamen quantitatem Aeris & vaporum, ad omnia illa caudarum Phænomena abunde ſufficere, ex hac computatione perſpicuum eſt. Nam & caudarum inſignis raritas colligitur ex aſtris per eas tranſlucentibus. Atmoſphæra terreſtris luce Solis ſplendens, craſſitudine ſua paucorum milliarium, & aſtra omnia & ipſam Lunam obſcurat & extinguit penitus: per immenſam vero caudarum craſſitudinem, luce pariter Solari illuſtratam, aſtra minima abſque claritatis detrimento tranſlucere noſcuntur. Neque major eſſe ſolet caudarum plurimarum ſplendor, quam Aeris noſtri in tenebroſo cubiculo latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo

Quo temporis ſpatio vapor a capite ad terminum caudæ aſcendit, cognoſci fere poteſt ducendo rectam a termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi recta aſcendat a Sole, aſcendere cœpit a capite quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non recta aſcendit à Sole, ſed motum Cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſus ſui eundem componendo, aſcendit oblique. Unde verior erit Problematis ſolutio, ut recta illa quæ Orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem a linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor qui erat in termino caudæ *Jan.* 25, aſcendere cœperat a capite ante *Dec.* 11, adeoque aſcenſu ſuo toto dies plus 45 conſumpſerat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10. apparuit, aſcenderat ſpatio dierum illorum duorum, qui a tempore Perihelii Cometæ elapſi fuerant. Vapor igitur ſub initio in vicinia Solis celerrime aſcendebat, & poſtea cum motu per gravitatem ſuam ſemper retardato aſcendere pergebat; & aſcendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere omni conſtabat qui a tempore Perihelii aſcenderat; & vapor, qui primus aſcendit, & terminum caudæ compoſuit, non prius evanuit quam ob nimiam ſuam tam a Sole illuſtrante quam ab oculis noſtris diſtantiam videri deſiit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves ſunt, non aſcendunt motu celeri & perpetuo à capitibus & mox evaneſcunt, ſed ſunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, a capitibus lentiſſimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere ſub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rurſus colligitur ſpatia cœleſtia vi reſiſtendi deſtitui; utpote in quibus non ſolum ſolida Planetarum & Cometarum corpora, ſed etiam rariſſimi caudarum vapores motus ſuos velociſſimos liberrime peragunt ac diutiſſime conſervant. LIBER TERTIUS.

Aſcenſum caudarum ex Atmoſphæris capitum & progreſſum in partes a Sole averſas *Keplerus* adſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longe tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non eſt a ratione prorſus alienum, non obſtante quod ſubſtantiæ craſſæ, impediti ſſimis in regionibus noſtris, a radiis Solis ſenſibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam a Sole aſcendere.

De Mundi Systemate,

dere. Cum autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, ideoque ſervata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu Aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum aſcenderit a Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore ſibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem ſuam ſpecificam qua prius tendebat in Solem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad aſcenſum vaporum conducit etiam quod hi gyrantur circa Solem & ea actione conantur a Sole recedere, at Solis Atmoſphæra & materia cœlorum vel plane quieſcit, vel motu ſolo quem a Solis rotatione acceperint, tardius gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſus caudarum in vicinia Solis, ubi Orbes curviores ſunt, & Cometæ intra denſiorem & ea ratione graviorem Solis Atmoſphæram conſiſtunt, & caudas quam longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur & iis liberrime adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ poſtea decidant a capitibus Solem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit ut hæc decidant a caudis. Communi gravitate vel ſimul in Solem cadunt, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur; adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem a cauſis jam deſcriptis, aut aliis quibuſcunque, facillime accipiant & poſtea liberrime ſervent.

Caudæ igitur quæ in Cometarum Periheliis naſcuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde poſt longam annorum ſeriem cum iiſdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefactæ paulatim evaneſcent. Nam poſtea in deſcenſu capitum ad Solem caudæ novæ breviuſculæ lento motu a capitibus propagari debebunt, & ſubinde, in Periheliis Cometarum illorum qui aduſque Atmoſphæram Solis deſcendunt, in immenſum augeri. Vapor enim in ſpatiis illis liberrimis perpetuo rareſcit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem ſuperiorem

riorem latior ſit quam juxta caput Cometæ. Eâ autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & ſpargi per cœlos univerſos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem ſuam attrahi & cum eorum Atmoſphæris miſceri, rationi conſentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad conſtitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copioſe ſatis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condenſati (ut aliqui cum ratione philoſophantur) decurrant in fontes & flumina: ſic ad conſervationem marium & humorum in Planetis, requiri videntur Cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condenſatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem conſumitur & in terram aridam convertitur, continuo ſuppleri & refici poſſit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino creſcunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuo decidit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, niſi aliunde augmentum ſumerent, perpetuo decreſcere deberent, ac tandem deficere. Porro ſuſpicor Spiritum illum, qui Aeris noſtri pars minima eſt ſed ſubtiliſſima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmoſphæræ Cometarum in deſcenſu eorum in Solem, excurrendo in caudas, diminuuntur, & (ea certe in parte quæ Solem reſpicit) anguſtiores redduntur: & viciſſim in receſſu eorum a Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur ſi modo Phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentiſſimas abiere, & nuclei fumo forſan craſſiore & nigriore in Atmoſphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus, craſſior & nigrior eſſe ſolet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus a Sole ac Terra diſtantiis, obſcurius apparuit poſt Perihelium ſuum quam antea. Menſe enim *Decembri* cum ſtellis tertiæ magnitudinis conferri ſolebat, at Menſe *Novembri* cum ſtellis primæ & ſecundæ. Et qui utrumque viderant, majorem deſcribunt Cometam priorem. Nam Juveni cuidam *Cantabrigienſi*, *Novemb.* 19, Cometa hicce luce ſua quantumvis plumbea & obtuſa, æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quam poſtea. Et *D. Storer* literis quæ in manus noſtras incidere, ſcripſit caput ejus Menſe *Decembri*, ubi caudam

De Mundi Systemate, maximam & fulgentiſſimam emittebat, parvum eſſe & magnitudine viſibili longe cedere Cometæ, qui Menſe *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem eſſe conjectabatur, quod materia capitis ſub initio copioſior eſſet, & paulatim conſumeretur.

Eodem ſpectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentiſſimas emiſerunt, apparuerint ſubobſcura & exigua. Nam Anno 1668. *Mart.* 5. St. nov. hora ſeptima veſpertina *R. P. Valentinus Eſtancius*, *Braſiliæ* agens, Cometam vidit Horizonti proximum ad occaſum Solis brumalem, capite minimo & vix conſpicuo, cauda vero ſupra modum fulgente, ut ſtantes in littore ſpeciem ejus e mari reflexam facile cernerent. Speciem utique habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in auſtrum vergens, & Horizonti fere parallela. Tantus autem ſplendor tres ſolum dies durabat, ſubinde notabiliter decreſcens; & interea decreſcente ſplendore aucta eſt magnitudine cauda. Unde etiam in *Portugallia* quartam fere cœli partem (id eſt, gradus 45) occupaſſe dicitur, ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenſa; nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infra Horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ & decremento ſplendoris manifeſtum eſt quod caput a Sole receſſit, eique proximum fuit ſub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et ſimilis legitur Cometa anni 1106, *cujus Stella erat parva & obſcura* (ut ille anni 1680) *ſed ſplendor qui ex ea exivit valde clarus & quaſi ingens trabs ad Orientem & Aquilonem tendebat*, ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi* Monacho. Apparuit initio Menſis *Februarii*, circa veſperam, ad occaſum Solis brumalem. Inde vero & ex ſitu caudæ colligitur caput fuiſſe Soli vicinum. *A Sole*, inquit Matthæus Pariſienſis, *diſtabat quaſi cubito uno, ab hora tertia* [rectius ſexta] *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens.* Talis etiam erat ardentiſſimus ille Cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus Lib. I. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quod ante Solem vel ſaltem ſub radiis ſolaribus occidiſſet, ſequente vero die quantum potuit viſum eſt. Nam quam minima fieri poteſt diſtantia Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ ſcilicet] *nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed procedente tempore* (ait Ariſtoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita eſt* [capiti] *Cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem* [id eſt, ad 60 gr.] *extendit. Apparuit autem*

tempore

tempore hyberno, & aſcendens uſque ad cingulum Orionis ibi evanuit. Cometa ille anni 1618, qui e radiis Solaribus caudatiſſimus emerſit, ſtellas primæ magnitudinis æquare vel paulo ſuperare videbatur, ſed majores apparuere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem vel etiam Lunam æquaſſe traduntur. LIBER TERTIUS.

Diximus Cometas eſſe genus Planetarum in Orbibus valde eccentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum e Planetis non caudatis, minores eſſe ſolent qui in Orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur, ſic etiam Cometas, qui in Periheliis ſuis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores eſſe, ne Solem attractione ſua nimis agitent, rationi conſentaneum videtur. Orbium vero tranſverſas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione Cometarum in iiſdem Orbibus poſt longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio Propoſitio ſequens lumen accendere poteſt.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Trajectoriam Cometæ Graphice inventam corrigere.

Oper. 1. Aſſumatur poſitio plani Trajectoriæ, per Propoſitionem ſuperiorem Graphice inventa; & ſeligantur tria loca Cometæ obſervationibus accuratiſſimis definita, & ab invicem quam maxime diſtantia; ſitque A tempus inter primam & ſecundam, ac B tempus inter ſecundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo verſari convenit, vel ſaltem non longe a Perigæo abeſſe. Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes Trigonometricas, loca tria vera Cometæ in aſſumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. inſtitutas, deſcribatur Sectio Conica: & ejus areæ, radiis a Sole ad loca inventa ductis terminatæ, ſunto D & E; nempe D area inter obſervationem primam & ſecundam, & E area inter ſecundam ac tertiam. Sitque T tempus totum quo area tota D+E, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa, deſcribi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum Plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & ſervetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex

De Mundi Systemate,

prædictis tribus Cometæ locis obſervatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera (ut ſupra:) deinde etiam Orbis per loca illa tranſiens, & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint d & e, nec non tempus totum t quo area tota $d+e$ deſcribi debeat.

Oper. 3. Servetur Longitudo Nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio Plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex obſervatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus, inveniantur in hoc novo Plano loca tria vera, Orbiſque per loca illa tranſiens, ut & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint δ & ε, & tempus totum τ quo area tota $\delta+\varepsilon$ deſcribi debeat.

Jam ſit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ε; ſitque S tempus verum inter obſervationem primam ac tertiam; & ſignis + & — probe obſervatis quærantur numeri m & n, ea lege, ut ſit $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S$ æquale $mT-mt+nT-n\tau$. Et ſi, in operatione prima, I deſignet inclinationem plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & K longitudinem Nodi alterutrius, erit $I+nQ$ vera inclinatio Plani Trajectoriæ ad Planum Eclipticæ, & $K+mP$ vera longitudo Nodi. Ac denique ſi in operatione prima, ſecunda ac tertia, quantitates R, r & ϱ deſignent Latera recta Trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejuſdem Latera tranſverſa reſpective: erit $R+mr-mR+n\varrho-nR$ verum Latus rectum, & $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$ verum Latus tranſverſum Trajectoriæ quam Cometa deſcribit. Dato autem Latere tranſverſo datur etiam tempus periodicum Cometæ. *Q. E. I.*

Cæterum Cometarum revolventium tempora periodica, & Orbium latera tranſverſa, haud ſatis accurate determinabuntur, niſi per collationem Cometarum inter ſe, qui diverſis temporibus apparent. Si plures Cometæ, poſt æqualia temporum intervalla, eundem Orbem deſcripſiſſe reperiantur, concludendum erit hos omnes eſſe unum & eundem Cometam, in eodem Orbe revolventem. Et tum demum ex revolutionum temporibus, dabuntur Orbium latera tranſverſa, & ex his lateribus determinabuntur Orbes Elliptici.

In

In hunc finem computandæ ſunt igitur Cometarum plurium Trajectoriæ, ex hypotheſi quod ſint Parabolicæ. Nam hujuſmodi Trajectoriæ cum Phænomenis ſemper congruent quamproxime. Id liquet, non tantum ex Trajectoria Parabolica Cometæ anni 1680, quam cum obſervationibus ſupra contuli, ſed etiam ex ea Cometæ illius inſignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio* obſervatus fuit. Is ex obſervationibus ſuis longitudines & latitudines hujus Cometæ computavit, ſed minus accurate. Ex iiſdem obſervationibus, *Halleius* noſter loca Cometæ hujus denuo computavit, & tum demum ex locis ſic inventis Trajectoriam Cometæ determinavit. Invenit autem ejus Nodum aſcendentem in ♊ 21 gr. 13′. 55″, Inclinationem Orbitæ ad planum Eclipticæ 21 gr. 18′ 40″, diſtantiam Perihelii a Nodo in Orbita 49 gr. 27′. 30″. Perihelium in ☊ 8 gr. 40′. 30″ cum Latitudine auſtrina heliocentrica 16 gr. 1′. 45″. Cometam in Perihelio *Novemb.* 24 d. 11 h. 52′ P. M. tempore æquato *Londini*, vel 13 h. 8′ *Gedani*, ſtylo veteri, & Latus rectum Parabolæ 410286, exiſtente mediocri Terræ a Sole diſtantia 100000. Quam probe loca Cometæ in hoc Orbe computata, congruunt cum obſervationibus, patebit ex Tabula ſequente ab *Halleio* ſupputata.

Temp. Appar. *Gedani*	Obſervata Cometæ diſtantia		Loca obſervata.		Loca computata in Orbe.
		gr. / //		gr. / //	gr. / //
Decemb.	a Corde Leonis	46 . 24 . 20	Long.	♎ 7 . 1 . 0	♎ 7 . 1 . 29
3 d . 18 h . 29′½	a Spica Virginis	22 . 52 . 10	Lat. auſt.	21 . 39 . 0	21 . 38 . 50
	a Corde Leonis	46 . 2 . 45	Long.	♎ 6 . 15 . 0	♎ 6 . 16 . 5
4 . 18 . 1½	a Spica Virginis	23 . 52 . 40	Lat. a.	22 . 24 . 0	22 . 24 . 0
	a Corde Leonis	44 . 48 . 0	Long.	♎ 3 . 6 . 0	♎ 3 . 7 . 33
7 . 17 . 48	a Spica Virginis	27 . 56 . 40	Lat. a.	25 . 22 . 0	25 . 21 . 40
	a Corde Leonis	53 . 15 . 15	Long.	☊ 2 . 56 . 0	☊ 2 . 56 . 0
17 . 14 . 43	ab Humero Orionis dext.	45 . 43 . 30	Lat. a.	49 . 25 . 0	49 . 25 . 0
	a Procyone	35 . 13 . 50	Long.	♊ 28 . 40 . 30	♊ 28 . 43 . 0
19 . 9 . 25	a Lucid. Mandib. Ceti	52 . 56 . 0	Lat. a.	45 . 48 . 0	45 . 46 . 0
	a Procyone	40 . 49 . 0	Long.	♊ 13 . 3 . 0	♊ 13 . 5 . 0
20 . 9 . 53½	a Lucid. Mandib. Ceti	40 . 4 . 0	Lat. a.	39 . 54 . 0	39 . 53 . 0
	ab Hum. dext. Orionis	26 . 21 . 25	Long.	♊ 2 . 16 . 0	♊ 2 . 18 . 30
21 . 9 . 9½	a Lucid. Mandib. Ceti	29 . 28 . 0	Lat. a.	33 . 41 . 0	33 . 39 . 40
	ab Hum. dext. Orionis	29 . 47 . 0	Long.	♉ 24 . 24 . 0	♉ 24 . 27 . 0
22 . 9 . 0	a Lucid. Mandib Ceti	20 . 29 . 30	Lat. a.	27 . 45 . 0	27 . 46 . 0
	a Lucida Arietis	23 . 20 . 0	Long.	♉ 9 . 0 . 0	♉ 9 . 2 . 28
26 . 7 . 58	ab Aldebaran	26 . 44 . 0	Lat. a.	12 . 36 . 0	12 . 34 . 13

Temp. Appar. *Gedani*	Observata Cometæ distantia		Loca observata		Loca computata in Orbe.	
d. h. /		gr. / //		gr. / //		gr. / //
27 . 6 . 45	a Lucida Arietis	20 . 45 . 0	Long.	♌ 7 . 5 . 40	♌	7 . 8 . 54
	ab Aldebaran	28 . 10 . 0	Lat a.	10 . 23 . 0		10 . 23 . 13
28 . 7 . 39	a Lucida Arietis	18 . 29 . 0	Long.	♍ 5 . 24 . 45	♍	5 . 27 . 52
	a Palilicio	29 . 37 . 0	Lat. a.	8 . 22 . 50		8 . 23 . 37
31 . 6 . 45	a Cing Androm.	30 . 48 . 10	Long.	♎ 2 . 7 . 40	♎	2 . 8 . 20
	a Palilicio	32 . 53 . 30	Lat. a.	4 . 13 , 0		4 : 16 . 25
Jan. 7 . 7 . 37½	a Cing. Androm.	25 . 11 . 0	Long.	♈ 28 . 24 . 47	♈	28 . 24 . 0
	a Palilicio	37 . 12 . 25	L t. bor.	0 . 54 . 0		0 . 53 . 0
24 . 7 . 29	a Palilicio	40 . 5 . 0	Long.	♈ 26 . 29 . 15	♈	26 . 28 . 50
	a Cing. Androm.	20 . 32 . 15	Lat. bor.	5 . 25 . 50		5 . 26 . 0
Mar. 1 . 8 . 6	Cometa ab *Hookio* prope secundam Arietis observabatur, *Mar.* 1d. 7h. 0′ *Londini*, cum		Long. Lat. bor.	♈ 29 . 17 . 20 8 . 37 . 10	♈	29 . 18 . 20 8 . 36 . 12

Apparuit hic Cometa per menses tres, signaque fere sex descripsit, & uno die gradus fere viginti confecit. Cursus ejus a circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus sub finem ex retrogrado factus est directus. Et non obstante cursu tam insolito, Theoria a principio ad finem cum observationibus non minus accurate congruit, quam Theoriæ Planetarum cum eorum observationibus congruere solent, ut inspicienti Tabulam patebit. Subducenda tamen sunt minuta duo prima circiter, ubi Cometa velocissimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta secunda ab angulo inter Nodum ascendentem & Perihelium, seu constituendo angulum illum 49gr. 27′. 18″. Cometæ utriusque (& hujus & superioris) parallaxis annua insignis fuit, & inde demonstratur motus annuus Terræ in Orbe magno.

Confirmatur etiam Theoria per motum Cometæ qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in Orbe cujus planum cum plano Eclipticæ angulum fere rectum continebat. Hujus Nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in ♏ 23gr. 23′; Inclinatio Orbitæ ad Ecliptican 83gr. 11′; Perihelium in ♊ 25gr. 29′. 30″; Distantia perihelia a Sole 56020, existente radio Orbis magni 100000, & tempore Perihelii *Julii* 2d. 3h. 50′. Loca autem Cometæ in hoc Orbe ab *Halleio* computata, & cum locis a *Flamstedio* observatis collata, exhibentur in Tabula sequente.

1683 Temp. Æquat.	Locus Solis.	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſer.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13.12.55	☌ 1. 2.30	♋ 13. 5.42	29.28.13	♋ 13. 6.42	29.28.20	+1. 0	+0. 7
15.11.15	2.53.12	11.37.48	29.34. 0	11.39.43	29.34.50	+1.55	+0.50
17.10.20	4.45.45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8.40	29.34. 0	+1.34	+0.30
23.13.40	10.38.21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50 28	+1. 3	−1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24 47	3.27. 0	28.23.40	−0.53	−1. 7
31. 9.42	18. 9.22	♊ 27.55. 3	26.22.52	♊ 27.54.24	26.22.25	−0.39	−0.27
31.14.55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+0. 1	−2. 7
Aug. 2.14.56	20.17.16	25.29.32	25.16.19	25.28.46	25.17.28	−0.46	+1. 9
4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23.16.55	24.12.19	−1.25	+1.30
6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20.40.32	22.49. 5	−1.51	+2. 0
9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	−2. 2	−0.27
15.14. 1	♍ 2.47.13	3.30.48	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	−4.30	−5.32
16.15.10	3.48. 2	0.43. 7	9.34.16	0.41.55	9.34.13	−1.12	−0. 3
18.15.44	5.45.33	♉ 24.52.53	5.11.15 Auſtr.	♉ 2.49. 5	5. 9.11 Auſtr.	−3.48	−2. 4
22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.53	11. 7.12	5.16.50	−0. 2	−0. 3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	−1. 1	−0.38
26.16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16.38.20	−1.31	+0.20

Confirmatur etiam Theoria per motum Cometæ retrogradi qui apparuit anno 1682. Hujus Nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 21 gr. 16′. 30″. Inclinatio Orbitæ ad planum Eclipticæ 17 gr. 56′ 0″. Perihelium in ♒ 2 gr. 52′. 50″. Diſtantia perihelia a Sole 58328. Et tempus æquatum Perihelii *Sept.* 4 d. 7 h. 39′. Loca vero ex obſervationibus *Flamſtedii* computata, & cum locis per Theoriam computatis collata, exhibentur in Tabula ſequente.

1682 Temp. Apar.	Locus Solis.	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Como	Cometæ Long. Obſ.	Lat. Bor. Obſerv.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug. 19.16.38	♍ 7. 0. 7	☌ 18.14.28	25.50. 7	☌ 18.14.40	25.49.55	−0.12	+0.12
20 15.38	7 55.52	24.46.23	26.14.42	24.46.22	26.12.52	+0. 1	+1.50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29.38. 2	26.17.37	−0.47	+2.26
22. 8. 8	9.33.55	♍ 6.29.53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	−0.10	+1.30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12.37.54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+0 5	+3.42
30. 7.45	17.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+0.43	−0.34
Sept. 1. 7.33	19 16. 9	20.30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+3.49	+3.11
4. 7.22	22.11.28	25.42. 0	12.23.48	25.40.58	12.22. 0	+1. 2	+1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33. 8	26.59.24	11.33.51	+1.22	−0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29.58.45	9.26.43	−0. 1	+0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0.44.10	8.49.10	♏ 0.44. 4	8.48.25	+0. 6	+0.45

His exemplis abunde ſatis manifeſtum eſt, quod motus Cometarum per Theoriam a nobis expoſitam non minus accurate exhibentur,

De Mundi Systemate,

hibentur, quam ſolent motus Planetarum per eorum Theorias. Et propterea Orbes Cometarum per hanc Theoriam enumerari poſſunt, & tempus periodicum Cometæ in quolibet Orbe revolventis tandem ſciri, & tum demum Orbium Ellipticorum latera tranſverſa & Apheliorum altitudines innoteſcent.

Cometa retrogradus qui apparuit anno 1607, deſcripſit Orbem cujus Nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20 gr. 21′. Inclinatio plani Orbis ad planum Eclipticæ erat 17 gr. 2′. Perihelium erat in ♒ 2 gr. 16′, & diſtantia perihelia a Sole erat 58680, exiſtente radio Orbis magni 100000. Et Cometa erat in Perihelio *Octob.* 16 d. 3 h. 50′. Congruit hic Orbis quamproxime cum Orbe Cometæ qui apparuit anno 1682. Si Cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic Cometa ſpatio annorum 75, & axis major Orbis ejus erit ad axem majorem Orbis magni, ut $\sqrt{c} : 75 \times 75$ ad 1, ſeu 1778 ad 100 circiter. Et diſtantia aphelia Cometæ hujus a Sole, erit ad diſtantiam mediocrem Terræ a Sole, ut 35 ad 1 circiter. Quibus cognitis, haud difficile fuerit Orbem Ellipticum Cometæ hujus determinare. Atque hæc ita ſe habebunt ſi Cometa ſpatio annorum ſeptuaginta quinque, in hoc Orbe poſthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altius aſcendere.

Cæterum Cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam Apheliorum a Sole diſtantiam, & longam moram in Apheliis, per gravitates in ſe mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proinde non eſt expectandum ut Cometa idem, in eodem Orbe & iiſdem temporibus periodicis, accurate redeat. Sufficit ſi mutationes non majores obvenerint, quam quæ a cauſis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur cur Cometæ non comprehendantur Zodiaco (more Planetarum) ſed inde migrent & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in Apheliis ſuis ubi tardiſſime moventur, quam longiſſime diſtent ab invicem & ſe mutuo quam minime trahant. Qua de cauſa Cometæ qui altius deſcendunt, adeoque tardiſſime moventur in Apheliis, debent altius aſcendere.

Cometa qui anno 1680 apparuit, minus diſtabat a Sole in Perihelio ſuo quam parte ſexta diametri Solis; & propter ſummam velocitatem in vicinia illa, & denſitatem aliquam Atmoſphæræ Solis, reſiſtentiam nonnullam ſentire debuit, & aliquantulum retardari,

dari & propius ad Solem accedere : & ſingulis revolutionibus accedendo ad Solem, incidet is tandem in corpus Solis. Sed & in Aphelio ubi tardiſſime movetur, aliquando per attractionem aliorum Cometarum retardari poteſt & ſubinde in Solem incidere. Sic etiam Stellæ fixæ quæ paulatim expirant in lucem & vapores, Cometis in ipſas incidentibus refici poſſunt, & novo alimento accenſæ pro Stellis Novis haberi. Vapores autem qui ex Sole & Stellis fixis & caudis Cometarum oriuntur, incidere poſſunt per gravitatem ſuam in Atmoſphæras Planetarum, & ibi condenſari & converti in aquam & ſpiritus humidos, & ſubinde per lentum calorem in ſales, & ſulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & ſubſtantias alias terreſtres paulatim migrare. Decreſcente autem corpore Solis motus medii Planetarum circum Solem paulatim tardeſcent, & creſcente Terra motus medius Lunæ circum Terram paulatim augebitur. Et collatis quidem obſervationibus Eclipſium *Babylonicis* cum iis *Albategnii* & cum hodiernis, *Halleius* noſter motum medium Lunæ cum motu diurno Terræ collatum, paulatim accelerari, primus omnium quod ſciam deprehendit.

SCHOLIUM GENERALE.

Hypotheſis Vorticum multis premitur difficultatibus. Ut Planeta unuſquiſque radio ad Solem ducto areas deſcribat tempori proportionales, tempora periodica partium Vorticis deberent eſſe in duplicata ratione diſtantiarum a Sole. Ut periodica Planetarum tempora ſint in proportione ſeſquiplicata diſtantiarum a Sole, tempora periodica partium Vorticis deberent eſſe in eadem diſtantiarum proportione. Ut Vortices minores circum Saturnum, Jovem & alios Planetas gyrati conſerventur & tranquille natent in Vortice Solis, tempora periodica partium Vorticis Solaris deberent eſſe æqualia. Revolutiones Solis & Planetarum circum axes ſuos ab omnibus hiſce proportionibus diſcrepant. Motus Cometarum ſunt ſumme regulares, & eaſdem leges cum Planetarum motibus obſervant, & per Vortices explicari nequeunt. Feruntur Cometæ motibus valde eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non poteſt niſi Vortices tollantur.

Projectilia, in aere noſtro, ſolam aeris reſiſtentiam ſentiunt. Sublato aere, ut fit in Vacuo *Boyliano*, reſiſtentia ceſſat, ſiquidem pluma tenuis & aurum ſolidum æquali cum velocitate in hoc

De Mundi Systemate,

Vacuo cadunt. Et par est ratio spatiorum cœlestium quæ sunt supra atmosphæram Terræ. Corpora omnia in istis spatiis liberrime moveri debent; & propterea Planetæ & Cometæ in orbibus specie & positione datis, secundum leges supra expositas, perpetuo revolvi. Persèverabunt quidem in orbibus suis per leges gravitatis, sed regularem orbium situm primitus acquirere per leges hasce minime potuerunt.

Planetæ sex principales revolvuntur circum Solem in circulis Soli concentricis, eadem motus directione, in eodem plano quamproxime. Lunæ decem revolvuntur circum Terram, Jovem & Saturnum in circulis concentricis, eadem motus directione, in planis orbium Planetarum quamproxime. Et hi omnes motus regulares originem non habent ex causis Mechanicis; siquidem Cometæ in Orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes libere feruntur. Quo motus genere Cometæ per Orbes Planetarum celerrime & facillime transeunt, & in Apheliis suis ubi tardiores sunt & diutius morantur, quam longissime distant ab invicem, & se mutuo quam minime trahunt. Elegantissima hæcce Solis, Planetarum & Cometarum compages non nisi consilio & dominio Entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et si Stellæ fixæ sint centra similium systematum; hæc omnia simili consilio constructa, suberunt *Unius* dominio: præsertim cum lux Fixarum sit ejusdem naturæ ac lux Solis, & systemata omnia lucem in omnia invicem immittant.

Hic omnia regit, non ut Anima mundi, sed ut universorum Dominus; & propter dominium suum Dominus Deus * παντοκράτωρ dici solet. Nam *Deus* est vox relativa & ad servos refertur: & *Deitas* est dominatio Dei non in corpus proprium, (uti sentiunt quibus Deus est Anima Mundi) sed in servos. *Deus summus* est Ens æternum, infinitum, absolute perfectum; sed Ens utcunque perfectum sine dominio, non est *Dominus Deus*. Dicimus enim *Deus meus*, *Deus vester*, *Deus Israelis*: sed non dicimus *Æternus meus*, *Æternus vester*, *Æternus Israelis*; non dicimus *Infinitus meus*, *Infinitus vester*, *Infinitus Israelis*; non dicimus *Perfectus meus*, *Perfectus vester*, *Perfectus Israelis*. Hæ appellationes relationem non habent ad servos. Vox *Deus* passim significat *Dominum*, sed omnis Dominus non est Deus. Dominatio Entis spiritualis *Deum* constituit, vera verum, summa summum, ficta fictum. Et ex dominatione vera sequitur, Deum verum esse vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus summum esse

* Id est, *Imperator universalis.*

esse vel summe perfectum. *Æternus* est & *Infinitus*, *Omnipotens* & *Omnisciens*, id est, durat ab æterno in æternum & adest ab infinito in infinitum, omnia regit & omnia cognoscit quæ fiunt aut sciri possunt. Non est æternitas vel infinitas, sed æternus & infinitus; non est duratio vel spatium, sed durat & adest. Durat semper & adest ubique, & existendo semper & ubique durationem & spatium, æternitatem & infinitatem constituit. Cum unaquæque spatii particula sit *semper*, & unumquodque durationis indivisibile momentum *ubique*; certe rerum omnium Fabricator ac Dominus non erit *nunquam nusquam*. Omnipræsens est non per *virtutem* solam, sed etiam per *substantiam*; nam virtus sine substantia subsistere non potest. In ipso * continentur & moventur universa, sed absque mutua *passione*. Deus nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam sentiunt resistentiam ex omnipræsentia Dei. Deum summum necessario existere in confesso est: Et eadem necessitate *semper* est & *ubique*. Unde etiam totus est sui similis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis sentiendi, intelligendi & agendi; sed more minime humano, more minime corporeo, more nobis prorsus incognito. Ut cæcus ideam non habet colorum, sic nos ideam non habemus modorum quibus Deus sapientissimus sentit & intelligit omnia. Corpore omni & figura corporea prorsus destituitur, ideoque videri non potest, nec audiri, nec tangi, nec sub specie rei alicujus corporeæ coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, sed quid sit rei alicujus Substantia minime cognoscimus. Videmus tantum corporum figuras & colores, audimus tantum sonos, tangimus tantum superficies externas, olfacimus odores solos, & gustamus sapores; Intimas substantias nullo sensu, nulla actione reflexa cognoscimus, & multo minus ideam habemus substantiæ Dei. Hunc cognoscimus solummodo per proprietates suas & attributa, & per sapientissimas & optimas rerum structuras, & causas finales; veneramur autem & colimus ob dominium. Deus enim sine dominio, providentia, & causis finalibus, nihil aliud est quam Fatum & Natura. Et hæc de Deo; de quo utique ex Phænomenis differere, ad *Philosophiam Experimentalem* pertinet.

* Ita sentiebant veteres, *Aratus* in Phænom. sub initio. *Paulus* in Act. 7. 27. 28. *Moses* Deut. 4. 39. & 10. 14. *David* Psal. 139. 7, 8. *Solomon* 1. Reg. 8. 27. *Job.* 22. 12. *Jeremias* Propheta 23. 23, 24.

Hactenus Phænomena cœlorum & maris nostri per Vim gravitatis exposui, sed causam Gravitatis nondum assignavi. Oritur utique hæc Vis a causa aliqua quæ penetrat ad usque centra Solis

De Mundi Systemate.

& Planetarum, ſine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *ſuperficierum* particularum in quas agit (ut ſolent cauſæ Mechanicæ,) ſed pro quantitate materiæ *ſolidæ*; & cujus actio in immenſas diſtantias undique extenditur, decreſcendo ſemper in duplicata ratione diſtantiarum. Gravitas in Solem componitur ex gravitatibus in ſingulas Solis particulas, & recedendo a Sole decreſcit accurate in duplicata ratione diſtantiarum ad uſque orbem Saturni, ut ex quiete Apheliorum Planetarum manifeſtum eſt, & ad uſque ultima Cometarum Aphelia, ſi modo Aphelia illa quiescant. Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex Phænomenis nondum potui deducere, & Hypotheſes non fingo. Quicquid enim ex Phænomenis non deducitur, *Hypotheſis* vocanda eſt; & Hypotheſes ſeu Metaphyſicæ, ſeu Phyſicæ, ſeu Qualitatum occultarum, ſeu Mechanicæ, in *Philoſophia Experimentali* locum non habent. In hac Philoſophia Propoſitiones deducuntur ex Phænomenis, & redduntur generales per Inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et ſatis eſt quod Gravitas revera exiſtat, & agat ſecundum leges a nobis expoſitas, & ad corporum cœleſtium & maris noſtri motus omnes ſufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de Spiritu quodam ſubtiliſſimo corpora craſſa pervadente, & in iiſdem latente, cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas diſtantias ſe mutuo attrahunt, & contiguæ factæ cohærent; & corpora Electrica agunt ad diſtantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuſcula vicina; & Lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & Senſatio omnis excitatur, & membra Animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus ſcilicet hujus Spiritus per ſolida nervorum capillamenta ab externis ſenſuum organis ad cerebrum & a cerebro in muſculos propagatis. Sed hæc paucis exponi non poſſunt; neque adeſt ſufficiens copia Experimentorum, quibus leges actionum hujus Spiritus accurate determinari & monſtrari debent.

F I N I S.

BIBLIOTECA PÚBLICA E ARQUIVO DISTRITAL DE ÉVORA

IN-

INDEX RERUM ALPHABETICUS.

N. B. *Citationes factæ sunt ad normam sequentis Exempli.* III, 10: 444, 20: 471, 28 *designant Libri tertii Propositionem decimam: Paginæ* 444^ta *lineam* 20^am: *Paginæ* 471^ma *lineam* 28^am.

A.

ÆQuinoctiorum præcessio
causæ hujus motus indicantur III, 21
quantitas motus ex causis computatur III, 39
Aeris
densitas ad quamlibet altitudinem colligitur ex Prop. 22. Lib. II. quanta sit ad altitudinem unius semidiametri Terrestris ostenditur 470, 11
elastica vis quali causæ tribui possit II. 23.
gravitas cum Aquæ gravitate collata 470, 3
resistentia quanta sit, per Experimenta Pendulorum colligitur 286, 28; per Experimenta corporum cadentium & Theoriam accuratius invenitur 327, 13
Anguli contactus non sunt omnes ejusdem generis, sed alii aliis infinite minores p. 32.
Apsidum motus expenditur I, Sect. 9.
Areæ quas corpora in gyros acta, radiis ad centrum virium ductis, describunt, conferuntur cum temporibus descriptionum I, 1, 2, 3. 58, 65
Attractio corporum universorum demonstratur III, 7; qualis sit hujus demonstrationis certitudo ostenditur 358, 28: 484, 11
Attractionis causam vel modum nullibi definit Auctor 5, 17: 147, 32: 172, 31: 483, 34.

C.

Calore virga ferrea comperta est augeri longitudine 386, 4
Calor Solis quantus sit in diversis a Sole distantiis 466, 20
quantus apud Mercurium 372, 12
quantus apud Cometam anni 1680 in Perihelio versantem 466, 22
Centrum commune gravitatis corporum plurium, ab actionibus corporum inter se, non mutat statum suum vel motus vel quietis p. 17
Centrum commune gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quiescere III, 11; confirmatur ex Cor. 2. Prop. 14. Lib. III.
Centrum commune gravitatis Terræ & Lunæ motu annuo percurrit Orbem magnum 376, 6 quibus intervallis distat a Terra & Luna 430, 22
Centrum Virium quibus corpora revolventia in Orbibus retinentur
quali Arearum indicio invenitur 38, 14
qua ratione ex datis revolventium velocitatibus invenitur I, 5
Circuli circumferentia, qua lege vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum describi potest a corpore revolvente 1, 4, 7, 8
Cœli
resistentia destituuntur III, 10: 444. 20: 471, 28; & propterea Fluido omni corporeo 328, 18
transitum Luci præbent absque ulla refractione 467, 33
Cometæ
Genus sunt Planetarum, non Meteororum 444, 24: 466, 15
Luna superiores sunt, & in regione Planetarum versantur p. 439
Distantia eorum qua ratione per Observationes colligi potest quamproxime 439, 21
Plures observati sunt in hemisphærio Solem versus, quam in hemisphærio oppositio; & unde hoc fiat 444, 5
Splendent luce Solis à se reflexa 444, 4; Lux illa quanta esse solet 441, 12
Cinguntur Atmosphæris ingentibus 442, 12: 444, 27
Qui ad Solem propius accedunt ut plurimum minores esse existimantur 475, 7
Quo fine non comprehenduntur Zodiaco (more Planetarum) sed in omnes cœlorum regiones varie feruntur 480, 30
Possunt aliquando in Solem incidere & novum illi alimentum ignis præbere 480, 37.
Usus eorum suggeritur 473, 1: 481, 7

BIBLIOTECA PÚBLICA E ARQUIVO DISTRITAL DE ÉVORA

Cometarum caudæ
avertuntur a Sole 468, 39
maximæ sunt & fulgentissimæ statim post transitum per viciniam Solis 467. 8
insignis earum raritas 470, 32
origo & natura earundem 442, 19: 467, 13
quo temporis spatio a capite ascendunt 471, 1
Cometæ
Moventur in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus, & radiis ad Solem ductis describunt areas temporibus proportionales. Et quidem in Ellipsibus moventur si in Orbem redeunt, hæ tamen Parabolis erunt maxime finitimæ III, 40
Trajectoria Parabolica ex datis tribus Observationibus invenitur III, 41; Inventa corrigitur III, 42
Locus in Parabola invenitur ad tempus datum 445, 30: I, 30
Velocitas cum velocitate Planetarum confertur 445, 17
Cometa annorum 1664 & 1665
Hujus motus observatus expenditur, & cum Theoria accurate congruere deprehenditur p. 477.
Cometa annorum 1680 & 1681
Hujus motus observatus cum Theoria accurate congruere invenitur p. 455 & seqq.
Videbatur in Ellipsi revolvi spatio annorum plusquam quingentorum 464, 37
Trajectoria illius & Cauda singulis in locis delineantur p. 465
Cometa anni 1682
Hujus motus accurate respondet Theoriæ p. 479
Comparuisse visus est anno 1607, iterumque rediturus videtur periodo 75 annorum 480, 6
Cometa anni 1683
Hujus motus accurate respondet Theoriæ p. 478
Curvæ distinguuntur in Geometrice rationales & Geometrice irrationales 100, 5
Curvatura figurarum qua ratione æstimanda sit 235, 28: 398, 33
Cycloidis seu Epicycloidis
rectificatio I, 48, 49: 142, 18
Evoluta I, 50: 142, 22
Cylindri attractio ex particulis trahentibus compositi quarum vires sunt reciproce ut quadrata distantiarum 198, 1

D.

Dei Natura p. 482 & 483
Descensus gravium in vacuo quantus sit, ex longitudine Penduli colligitur 379, 1
Descensûs vel Ascensûs rectilinei spatia descripta, tempora descriptionum & velocitates acquisitæ conferuntur, posita cujuscunque generis vi centripeta I, Sect. 7.
Descensus & Ascensus corporum in Mediis resistentibus II, 3, 8, 9, 40, 13, 14.

E.

Ellipsis
qua lege vis centripetæ tendentis ad centrum figuræ describitur a corpore revolvente I, 10, 64
qua lege vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ describitur a corpore revolvente I, 11

F.

Fluidi definitio p. 260
Fluidorum densitas & compressio quas leges habent, ostenditur II, Sect. 5
Fluidorum per foramen in vase factum effluentium determinatur motus II, 36
Fumi in camino ascensus obiter explicatur 472, 4

G.

Graduum in Meridiano Terrestri mensura exhibetur, & quam sit exigua inæqualitas ostenditur ex Theoria III, 20
Gravitas
diversi est generis a vi Magnetica 368, 29
mutua est inter Terram & ejus partes 22, 18
ejus causa non assignatur 483, 34
datur in Planetas universos 365, 15, & pergendo a superficiebus Planetarum sursum decrescit in duplicata ratione distantiarum a centro III, 8, deorsum decrescit in simplici ratione quamproxime III, 9
datur in corpora omnia, & proportionalis est quantitati materiæ in singulis III, 7
Gravitatem esse vim illam qua Luna retinetur in Orbe III, 4, computo accuratiori comprobatur 430, 25
Gravitatem esse vim illam qua Planetæ primarii & Satellites Jovis & Saturni retinentur in Orbibus III,

H.

Hydrostaticæ principia traduntur II, Sect. 5.
Hyperbola
qua lege vis centrifugæ tendentis a figuræ centro describitur a corpore revolvente 47, 26
qua lege vis centrifugæ tendentis ab umbilico figuræ describitur a corpore revolvente 51, 6
qua lege vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ describitur a corpore revolvente I, 12
Hypotheses cujuscunque generis rejiciuntur ab hac Philosophia 484, 8

I.

Inertiæ vis definitur p. 2.
Jovis
distantia a Sole 361, 1
semidiameter apparens 371, 3
semidiameter vera 371, 14.
attractiva vis quanta sit 370, 33
pondus corporum in ejus superficie 371, 19
densitas 371, 37
quantitas materiæ 371, 27
perturbatio a Saturno quanta sit 375, 33
diametrorum proportio computo exhibetur 381, 27
conversio circum axem quo tempore absolvitur 381, 25
cingulæ causa subindicatur 444, 32.

L.

Locus definitur, & distinguitur in absolutum & relativum 6, 12
Loca corporum in Sectionibus conicis motorum inveniuntur ad tempus assignatum I, Sect. 6
Lucis
propagatio non est instantanea 207, 5; non fit per agitationem Medii alicujus Ætherei 342, 36
velocitas in diversis Mediis diversa I, 95
reflexio quædam explicatur I, 96
refractio explicatur I, 94; non fit in puncto solum incidentiæ 207, 29
incurvatio prope corporum terminos Experimentis observata 207, 8
Lunæ
corporis figura computo colligitur III, 38
inde causa patefacta, cur eandem semper faciem in Terram obvertat 432, 9
& librationes explicantur III, 17
diameter mediocris apparens 430, 12
diameter vera 430, 17
pondus corporum in ejus superficie 430, 20
densitas 430, 15
quantitas materiæ 430, 19
distantia mediocris a Terra quot continet maximas Terræ semidiametros 430, 25, quot mediocres 431, 18
parallaxis maxima in longitudinem paulo major est quam parallaxis maxima in latitudinem 387, 8
vis ad Mare movendum quanta sit III, 37; non sentiri potest in Experimentis pendulorum, vel in Staticis aut Hydrostaticis quibuscunque 430, 1
tempus periodicum 430, 32
tempus revolutionis synodicæ 398, 1
motus medius cum diurno motu Terræ collatus paulatim accelerari deprehenditur ab *Halleio* 481, 16
Lunæ motus & motuum inæqualitates a causis suis derivantur III, 22: p. 421 & seqq.
tardius revolvitur Luna dilatato Orbe, in perihelio Terræ; citius in aphelio, contracto Orbe III, 22: 421, 6
tardius revolvitur, dilatato Orbe, in Apogæi Syzygiis cum Sole; citius in Quadraturis Apogæi, contracto Orbe 422, 1
tardius revolvitur, dilatato Orbe, in Syzygiis Nodi cum Sole; citius in Quadraturis Nodi, contracto Orbe 422, 21
tardius movetur in Quadraturis suis cum Sole, citius in Syzygiis; & radio ad Terram ducto describit aream pro tempore minorem in priore casu, majorem in posteriore III, 22: Inæqualitas harum Arearum computatur III, 26. Orbem insuper habet magis curvum & longius a Terra recedit in priore casu, minus curvum habet Orbem & propius ad Terram accedit in posteriore III, 22. Orbis hujus figura & proportio diametrorum ejus computo colligitur III, 28. Et subinde proponitur methodus inveniendi distantiam Lunæ a Terra ex motu ejus horario III, 27
Apogæum tardius movetur in Aphelio Terræ, velocius in Perihelio III, 22: 421, 21
Apogæum ubi est in Solis Syzygiis, maxime progreditur; in Quadraturis regreditur III, 22: 422, 37
Eccentricitas maxima est in Apogæi Syzygiis cum Sole, minima in Quadraturis III, 22: 422, 39
Nodi tardius moventur in Aphelio Terræ, velocius in Perihelio III, 22: 421, 21
Nodi quiescunt in Syzygiis suis cum Sole, & velocissime regrediuntur in Quadraturis III, 22. Nodorum motus & inæqualitates motuum computantur ex Theoria Gravitatis III, 30, 31, 32, 33
Inclinatio Orbis ad Eclipticam maxima est in Syzygiis Nodorum cum Sole, minima in Quadraturis I, 66 Cor. 10. Inclinationis variationes computantur ex Theoria Gravitatis III, 34, 35
Lunarium motuum Æquationes ad usus Astronomicos p. 421 & seqq.
Motus medii Lunæ
Æquatio annua 421, 4
Æquatio semestris prima 422, 1
Æquatio semestris secunda 422, 21
Æquatio centri prima 423, 20: p. 101 & seqq.
Æquatio centri secunda 424, 15
Variatio prima III, 29
Variatio secunda 425, 5

Motus medii Apogæi
Æquatio annua 421, 21
Æquatio semestris 422, 37
Eccentricitatis
Æquatio semestris 422, 37
Motus medii Nodorum
Æquatio annua 421, 21
Æquatio semestris III, 33
Inclinationis Orbitæ ad Eclipticam
Æquatio semestris 420, 22
Lunarium motuum Theoria, qua Methodo stabilienda sit per Observationes 425, 33.

M.

Magnetica vis 22, 13: 271, 25: 368, 29: 431, 23
Maris æstus a causis suis derivatur III, 24, 36, 37
Martis
distantia a Sole 361, 1
Aphelii motus 376, 33
Materiæ
quantitas definitur p. 1
vis insita seu vis inertiæ definitur p. 2
vis impressa definitur p. 2
extensio, durities, impenetrabilitas, mobilitas, vis inertiæ, gravitas, qua ratione innotescunt 357, 16: 484, 10
divisibilitas nondum constat 358, 18
Materia subtilis *Cartesianorum* ad examen quoddam revocatur 292, 12
Materia vel subtilissima Gravitate non destituitur 368, 1
Mechanicæ, quæ dicuntur, Potentiæ explicantur & demonstrantur p. 14 & 15: p. 23
Mercurii
distantia a Sole 361, 1
Aphelii motus 376, 33
Methodus
Rationum primarum & ultimarum I. Sect. 1
Transmutandi figuras in alias quæ sunt ejusdem Ordinis Analytici I, Lem. 22. pag. 79
Fluxionum II, Lem. 2. p. 224
Differentialis III, Lemm. 5 & 6. pagg. 446 & 447
Inveniendi Curvarum omnium quadraturas proxime veras 447, 8
Serierum convergentium adhibetur ad solutionem Problematum difficiliorum p. 127, 128: 202: 235: 414
Motus quantitas definitur p. 1
Motus absolutus & relativus p. 6: 7: 8: 9 ab invicem secerni possunt, exemplo demonstratur p. 10
Motus Leges pag. 12. & seqq.
Motuum compositio & resolutio p. 14
Motus corporum congredientium post reflexionem, quali Experimento recte colligi possunt, ostenditur 19, 21
Motus corporum
in Conicis sectionibus eccentricis I, Sect. 3
in Orbibus mobilibus I, Sect. 9
in Superficiebus datis & Funependulorum motus reciprocus I, Sect. 10.
Motus corporum viribus centripetis se mutuo petentium I, Sect. 11
Motus corporum Minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas Magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur I, Sect. 14
Motus corporum quibus resistitur
in ratione velocitatis II, Sect. 1
in duplicata ratione velocitatis II, Sect. 2
partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata II, Sect. 3
Motus
corporum sola vi insita progredientium in Mediis resistentibus II, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12: 302, 1
corporum recta ascendentium vel descendentium in Mediis resistentibus, agente vi Gravitatis uniformi II, 3, 8, 9, 40, 13, 14
corporum projectorum in Mediis resistentibus, agente vi Gravitatis uniformi II, 4, 10
corporum circumgyrantium in Mediis resistentibus II, Sect. 4
corporum Funependulorum in Mediis resistentibus II, Sect. 6
Motus & resistentia Fluidorum II, Sect. 7
Motus per Fluida propagatus II, Sect. 8
Motus circularis seu Vorticosus Fluidorum II, Sect. 9
Mundus originem non habet ex causis Mechanicis p. 482, 12.

N.

Navium constructioni Propositio non inutilis 300, 4

O.

Opticarum ovalium inventio quam *Cartesius* celaverat I, 97. *Cartesiani* Problematis generalior solutio I, 98
Orbitarum inventio
quas corpora describunt, de loco dato data cum velocitate, secundum datam rectam egressa; ubi vis centripeta est reciproce ut quadratum distantiæ & vis illius quantitas absoluta cognoscitur I, 17
quas corpora describunt ubi vires centripetæ sunt reciproce ut cubi distantiarum 45, 18: 118, 27: 125, 25
quas corpora viribus quibuscunque centripetis agitata describunt I, Sect. 8.

P.

Parabola, qua lege vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ, deſcribitur a corpore revolvente I, 13
Pendulorum affectiones explicantur I, 50, 51, 52, 53: II, Sect. 6.
Pendulorum iſochronorum longitudines diverſæ in diverſis locorum Latitudinibus inter ſe conferuntur, tum per Obſervationes, tum per Theoriam Gravitatis III, 20
Philoſophandi Regulæ p. 357.
Planetæ
non deferuntur a Vorticibus corporeis 352, 37: 354, 25: 481, 21
Primarii
Solem cingunt 360, 7
moventur in Ellipſibus umbilicum habentibus in centro Solis III, 13
radiis ad Solem ductis deſcribunt areas temporibus proportionales 361, 15: III, 13
temporibus periodicis revolvuntur quæ ſunt in ſeſquiplicata ratione diſtantiarum a Sole 360, 17: III, 13 & I, 15
retinentur in Orbibus ſuis a vi Gravitatis qua reſpicit Solem, & eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ab ipſius centro III, 2, 5
Secundarii
moventur in Ellipſibus umbilicum habentibus in centro Primariorum III, 22
radiis ad Primarios ſuos ductis deſcribunt areas temporibus proportionales 359, 3, 22: 361, 27: III, 22
temporibus periodicis revolvuntur quæ ſunt in ſeſquiplicata ratione diſtantiarum a Primariis ſuis 359, 3, 22: III, 22, & I, 15
retinentur in Orbibus ſuis a vi Gravitatis quæ reſpicit Primarios, & eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ab eorum centris III, 1, 3, 4, 5
Planetarum
diſtantiæ a Sole 361, 1
Orbium Aphelia & Nodi prope quieſcunt III, 14
Orbes determinantur III, 15, 16
loca in Orbibus inveniuntur I, 31
denſitas calori quem a Sole recipiunt, accommodatur 372, 7
converſionis diurnæ ſunt æquabiles III, 17
axes ſunt minores diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur III, 18
Pondera corporum
in Terram vel Solem vel Planetam quemvis, paribus diſtantiis ab eorum centris ſunt ut quantitates materiæ in corporibus III, 6
non pendent ab eorum formis & texturis 367: 35
in diverſis Terræ regionibus inveniuntur & inter ſe comparantur III, 20
Problematis
Kepleriani ſolutio per Trochoidem & per Approximationes I, 31
Veterum de quatuor lineis, a *Pappo* memorati, a *Carteſio* per calculum Analyticum tentati, compoſitio Geometrica 70, 19
Projectilia, ſepoſita Medii reſiſtentia, moveri in Parabola colligitur 47, 23: 202, 23: 236, 29
Projectilium motus in Mediis reſiſtentibus II, 4, 10
Pulſuum Aeris, quibus Soni propagantur, determinantur intervalla ſeu latitudines II, 50: 344, 18. Hæc intervalla in apertarum Fiſtularum Sonis æquari duplis longitudinibus Fiſtularum veroſimile eſt 344, 26

Q.

Quadratura generalis Ovalium dari non poteſt per finitos terminos I, Lem. 28. p. 98
Qualitates corporum qua ratione innoteſcunt & admittuntur 357, 16
Quies vera & relativa p. 6, 7, 8, 9.

R.

Reſiſtentiæ quantitas
in Mediis non continuis II, 35
in Mediis continuis II, 38
in Mediis cujuſcunque generis 302, 32
Reſiſtentiarum Theoria confirmatur
per Experimenta Pendulorum II, 30, 31, Sch. Gen. p. 284
per Experimenta corporum cadentium II, 40, Sch. p. 319
Reſiſtentia Mediorum
eſt ut eorundem denſitas, cæteris paribus 290, 29: 291, 35: II, 33, 35, 38: 327, 14
eſt in duplicata ratione velocitatis corporum quibus reſiſtitur, cæteris paribus 219, 24: 284, 33; II, 33, 35, 38: 324, 23
eſt in duplicata ratione diametri corporum Sphæricorum quibus reſiſtitur, cæteris paribus 288, 4: 289, 11: II, 33, 35, 38: Sch. p. 319
non minuitur ab actione Fluidi in partes poſticas corporis moti 312, 23
Reſiſtentia Fluidorum duplex eſt; oriturque vel ab Inertia materiæ fluidæ, vel ab Elaſticitate, Tenacitate & Frictione partium ejus 318, 1.
Reſiſtentia quæ ſentitur in Fluidis fere tota eſt prioris generis 326, 32, & minui non poteſt per ſubtilitatem partium Fluidi, manente denſitate 328, 7
Reſiſtentiæ Globi ad reſiſtentiam Cylindri proportio, in Mediis non continuis II, 34

Reſiſtentia quam patitur a Fluido fruſtum Conicum, qua ratione fiat minima 299, 30
Reſiſtentiæ minimæ ſolidum 300, 15.

S.

Satellitis
Jovialis extimi elongatio maxima heliocentrica a centro Jovis 370, 35
Hugeniani elongatio maxima heliocentrica a centro Saturni 371, 5
Satellitum
Jovialium tempora periodica & diſtantiæ a centro Jovis 359, 12
Saturniorum tempora periodica & diſtantiæ a centro Saturni 360, 1
Jovialium & Saturniorum inæquales motus a motibus Lunæ derivari poſſe oſtenditur III, 23
Saturni
diſtantia a Sole 361, 1
ſemidiameter apparens 371, 9
ſemidiameter vera 371, 14
vis attractiva quanta ſit 370, 33
pondus corporum in ejus ſuperficie 371, 19
denſitas 371, 37
quantitas materiæ 371, 27
perturbatio a Jove quanta ſit 375, 16
diameter apparens Annuli quo cingitur 371, 8
Sectiones Conicæ, qua lege vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum, deſcribuntur a corporibus revolventibus 58, 20
Sectionum Conicarum deſcriptio Geometrica
ubi dantur Umbilici I, Sect. 4.
ubi non dantur Umbilici I, Sect. 5. ubi dantur Centra vel Aſymptoti 87, 9
Seſquiplicata ratio definitur 31, 40
Sol
circum Planetarum omnium commune gravitatis centrum movetur III, 12
ſemidiameter ejus mediocris apparens 371, 12
ſemidiameter vera 371, 14
parallaxis ejus horizontalis 370, 33
parallaxis menſtrua 376, 4
vis ejus attractiva quanta ſit 370, 33
pondus corporum in ejus ſuperficie 371, 19
denſitas ejus 371, 27
quantitas materiæ 371, 27
vis ejus ad perturbandos motus Lunæ 363, 15: III, 25
vis ad Mare movendum III, 36
Sonorum
natura explicatur II, 43, 47, 48, 49, 50
propagatio divergit a recto tramite 332, 9;
fit per agitationem Aeris 343, 1
velocitas computo colligitur 343, 8, paululum major eſſe debet Æſtivo quam Hyberno tempore, per Theoriam 344, 11
ceſſatio fit ſtatim ubi ceſſat motus corporis ſonori 344, 29.
augmentatio per tubos ſtentorophonicos 344, 32.
Spatium
abſolutum & relativum p. 6, 7
non eſt æqualiter plenum 368, 16
Sphæroidis attractio, cujus particularum vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum 198, 21
Spiralis quæ ſecat radios ſuos omnes in angulo dato, qua lege vis centripetæ tendentis ad centrum Spiralis deſcribi poteſt a corpore revolvente, oſtenditur I, 9: II, 15, 16
Spiritum quendam corpora pervadentem & in corporibus latentem, ad plurima naturæ phænomena ſolvenda, requiri ſuggeritur 484, 17
Stellarum fixarum
quies demonſtratur 376, 18
radiatio & ſcintillatio quibus cauſis referendæ ſint 467, 38
Stellæ Novæ unde oriri poſſint 481, 5
Subſtantiæ rerum omnium occultæ ſunt 483, 22.

T.

Tempus abſolutum & relativum p. 5, 7
Temporis Æquatio Aſtronomica per Horologium oſcillatorium & Eclipſes Satellitum Jovis comprobatur 7, 15
Tempora periodica corporum revolventium in Ellipſibus, ubi vires centripetæ ad umbilicum tendunt I, 15
Terræ
dimenſio per *Picartum* 378, 11, per *Caſſinum* 378, 21, per *Norwoodum* 378, 28
figura invenitur, & proportio diametrorum, & menſura graduum in Meridiano III, 19, 20
altitudinis ad Æquatorem ſupra altitudinem ad Polos quantus ſit exceſſus 381, 7: 387, 1
ſemidiameter maxima, minima & mediocris 387, 10
globus denſior eſt quam ſi totus ex Aqua conſtaret 372, 31
globus denſior eſt ad centrum quam ad ſuperficiem 386, 1
molem indies augeri veroſimile eſt 473, 18: 481, 13
axis nutatio III, 21
motus annuus in Orbe magno demonſtratur III, 12, 13: 478, 26
Eccentricitas quanta ſit 421, 15
Aphelii motus quantus ſit 376, 33.

V.

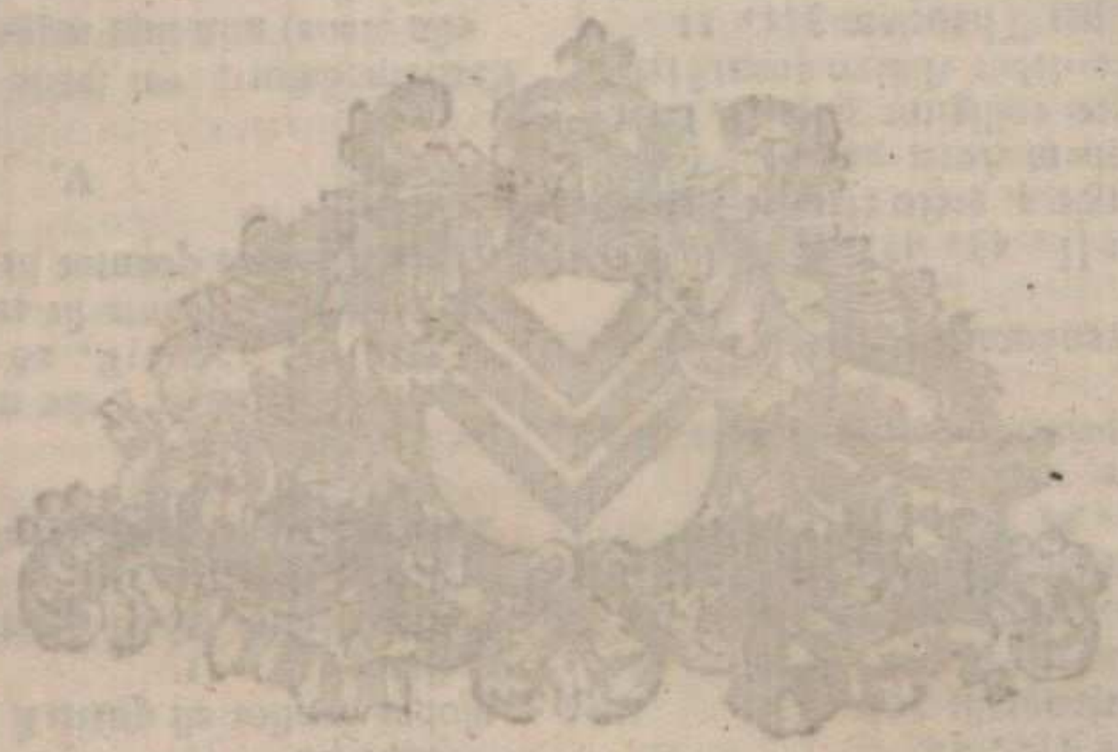
Vacuum datur, vel ſpatia omnia (ſi dicantur eſſe plena) non ſunt æqualiter plena 328, 18. 368, 25

Velocitas maxima quam Globus, in Medio resistente cadendo, potest acquirere II, 38, Cor. 2
Velocitates corporum in Sectionibus conicis motorum, ubi vires centripetæ ad umbilicum tendunt I, 16
Veneris
distantia a Sole 361, 1
tempus periodicum 370, 23
Aphelii motus 376, 33
Virium compositio & resolutio p. 14
Vires attractivæ corporum
sphæricorum ex particulis quacunque lege trahentibus compositorum, expenduntur I, Sect. 12
non sphæricorum ex particulis quacunque lege trahentibus compositorum, expenduntur I, Sect. 13
Vis centrifuga corporum in Æquatore Terræ quanta sit 379, 22
Vis centripeta definitur p. 2
quantitas ejus absoluta definitur p. 4
quantitas acceleratrix definitur p. 4
quantitas motrix definitur p. 4
proportio ejus ad vim quamlibet notam, qua ratione colligenda sit, ostenditur 40, 1
Virium centripetarum inventio, ubi corpus in spatio non resistente, circa centrum immobile, in Orbe quocunque revolvitur I, 6: I, Sect. 2 & 3
Viribus centripetis datis ad quodcunque punctum tendentibus, quibus Figura quævis a corpore revolvente describi potest; dantur vires centripetæ ad aliud quodvis punctum tendentes, quibus eadem Figura eodem tempore periodico describi potest 44, 3
Viribus centripetis datis quibus Figura quævis describitur a corpore revolvente; dantur vires quibus Figura nova describi potest, si Ordinatæ augeantur vel minuantur in ratione quacunque data, vel angulus Ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico 47, 28
Viribus centripetis in duplicata ratione distantiarum decrescentibus, quænam Figuræ describi possunt, ostenditur 53, 1: 150, 8
Vi centripeta
quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ tendentis ad centrum virium maxime longinquum, corpus movebitur in data quavis coni sectione 45, 1
quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ tendentis ad centrum virium maxime longinquum, corpus movebitur in Hyperbola 202, 26
Umbra Terrestris in Eclipsibus Lunæ augenda est, propter Atmosphæræ refractionem 425, 27
Umbræ Terrestris diametri non sunt æquales; quanta sit differentia ostenditur 387, 8
Undarum in aquæ stagnantis superficie propagatarum velocitas invenitur II, 46
Vorticum natura & constitutio ad examen revocatur II, Sect. 9: 481, 21
Ut. Hujus voculæ significatio Mathematica definitur 30, 19

FINIS.

SUMPTIBUS SOCIETATIS.

M. D. CCXXIII.



ANALYSIS

Per Quantitatum

SERIES, FLUXIONES,

AC

DIFFERENTIAS:

CUM

Enumeratione Linearum

TERTII ORDINIS.



AMSTÆLODAMI,

SUMPTIBUS SOCIETATIS.

M. D. CCXXIII.

PRÆFATIO EDITORIS.

TRactatus aliquot Mathematicos Viri Illustrissimi D. Newtoni *in lucem edimus, quorum primus & ultimus nunc primum prodeunt, reliqui vero vel à se vel ab aliis ante hac publici juris facti sunt. Hæc autem Editio casui, sed tamen non sine ipsius consensu prius impetrato, ortum acceptum refert.*

Etenim secundus jam agitur annus ex quo scrinia D. Collinsii (*qui, uti notum est, amplissimum cum sui seculi Mathematicis commercium habuit*) *meas in manus inciderunt; & in illis plurima reperi à cunctis fere totius* Europæ *eruditis ipsi communicata; & inter ea non pauca, quæ à Viro Cl.* D. Newtono *scripta fuerunt; quæ cum tantæ molis essent, ut simul Tractatum breviusculum possent conficere, cæpi de iis edendis cogitare. Quum autem animadvertissem scripta ejus quæ jam in lucem prodierunt ferme idem cum hisce argumentum habere, haud operæ pretium me facturum, si typis mandarem, existimavi.*

Unus tamen erat brevis de Curvarum Quadratura Tractatus adeo luculenter & concinne scriptus, atque ita accommodatus ad instituendos eos, qui nondum totam istam Metho-

dum perſpectam habeant, ut abſtinere non potuerim, quominus Auctoris licentiam eundem edendi peterem. Quam Ille non ſolum ſumma cum humanitate conceſſit; ſed & inſuper veniam dedit reliqua ipſius colligendi, quæ ad idem argumentum ſpectabant.

Hicce Tractatus, quem D. Collinſii *manu exaratum comperi, inſcriptus fuit* De Analyſi per Æquationes Infinitas, *& licet neque Auctoris nomen, neque tempus quo ſcriptus fuerat ullibi comparuerit; multa tamen continere ad D.* Newtoni *Methodos ſpectantia ſtatim agnovi, utpote Epiſtolarum autographo illi ad amuſſim reſpondentia, quod antea ipſe D.* Newtonus *ad D.* Oldenburgum *miſerat. Unde ſuſpicabar totum ex eodem fonte emanaſſe; nihilominus ſuſpenſo eram animo, uſque dum inventis, inter eaſdem chartas, Epiſtolis aliquot D.* Barrovii *ad D.* Collinſium *ſcriptis; tres reperi ad hunc Tractatum immediate ſpectantes; ex quibus facile intellexi quomodo D.* Collinſius *eum obtinuerat.*

In una Epiſtolarum e Collegio S. S. Tr. data 20 Julii 1669, *verſus finem D.* Barrovius *hæc ſcribit.*

* Amicus quidam apud nos commorans, qui eximio in „ his rebus pollet ingenio, nudiuſtertius chartas quaſ- „ dam mihi tradidit, in quibus Magnitudinum dimenſio- „ nes ſupputandi Methodos, *Mercatoris* methodo ſimi- „ les, maxime vero Generales, deſcripſit, ſimulque Æ- „ qua-

* A Friend of mine here, that hath an excellent Genius to theſe things, brought me the other Day, ſome Papers, wherein he hath ſet down Methods of Calculating the Dimenſions of Magnitudes, like that of Mr. *Mercator*, but very general, as alſo of Reſolving Equations, which I ſuppoſe will pleaſe you, and I ſhall ſend you them by the next.

„ quationes reſolvendi, quæ, ut opinor, tibi place-
„ bunt, quas una cum proximis literis ad te mittam.

In hac Epiſtola narrat argumentum chartarum Amici ſui fuiſſe Computationem dimenſionum Magnitudinum, & Æquationum reſolutionem, quod cum Tractatus hujus argumento quadrat.

Verſus finem alterius Epiſtolæ ad D. Collinſium *e Collegio S. S. Tr. datæ ult.* Julii 1669, *D.* Barrovius *ita ſcribit.*

† Mitto quas pollicitus eram Amici chartas, quæ uti
„ ſpero haud parum te oblectabunt. Remittas, quæſo,
„ quum eas quantum tibi viſum fuerit perlegeris; id enim
„ poſtulavit Amicus meus, cum primum eum rogavi, ut
„ eas tecum communicare mihi liceret. Quantocyus igi-
„ tur, obſecro, te eas recepiſſe fac me certiorem, quod
„ illis metuo, quippe qui eas per Veredarium publicum
„ ad te mittere non dubitaverim, quo tibi morem gere-
„ rem quam citiſſime.

Ex hac Epiſtola conſtat D. Barrovium *dictum Librum miſiſſe, ea lege, ut ſibi remitteretur. Unde manifeſtum eſt, quare Tractatus, quem inveni, D.* Collinſii *manu ſcriptus fuit, autographo nempe ipſi Auctori reſtituto.*

In tertia a D. Barrovio *ad D.* Collinſium *Epiſtola da-*

† I ſend you the Papers of my Friend I promis'd, which I preſume will give you much ſatisfaction; I pray, having peruſed them ſo much as you think good, remand them to me, according to his deſire when I ask'd him the liberty to impart them to you; I pray give me notice of your receiving them, with your ſooneſt convenience, that I may be ſatisfied of their reception; becauſe I am afraid of them, venturing them by the Poſt, that I may not longer delay to correſpond with your deſire.

ta 20 Auguſti 1669, *conſtat D.* Newtonum *fuiſſe*, *Amicum illum*, *de quo D.* Barrovius *in duabus prioribus Epiſtolis mentionem fecerat*, *quod his verbis conſignat.*

* Amici chartas tibi placuiſſe gaudeo; eſt illi nomen „ *Newtonus*, Collegii noſtri Socius, & juvenis, (ſecun-
„ dus enim, ex quo Artium Magiſtri gradum cepit, jam
„ agitur annus,) & qui, eximio quo eſt acumine, per-
„ magnos in hac re progreſſus fecit. Illas, ſi vis, cum
„ Nobili Domino Vicecomite *Brounkero* communica.

Perſpecto jam D. Newtonum *hujus Tractatus Auctorem eſſe; ab eo ſciſcitatus ſum num penes ſe adhuc eſſet autographum, quod quidem ille exquirens invenit, & mihi tradidit, cum exemplari* Collinſiano *ad verbum uſque conveniens.*

Etiamſi vero hic Tractatus ad D. Collinſium *miſſus fuiſſet menſe* Julii 1669, *quod aliquantulum erat poſteaquam D.* Mercator *Logarithmotechniam ſuam in lucem ediderat; manifeſtum eſt ex quibuſdam aliis Epiſtolis*, (*quæ itidem inter D.* Collinſii *chartas fuerunt*,) *quod antea ſcriptus eſſet*, *imo quod D.* Newtonus *inveniſſet Methodum inveſtigandi Magnitudinum Dimenſiones per Infinitas Series vel aliquot annos antequam D.* Mercator *Librum ſuum in vulgus edidit*; *ut liquet ex Epiſtola a* Collinſio *ad* D. Jacobum Gregorium *data* 25. Novemb. 1669, *ubi hæc ſunt verba:*

* *Bar-*

* I am glad my Friend's Paper gives you ſo much ſatisfaction, his Name is Mr. *Newton*, a Fellow of our College, and very young, (being but the ſecond Year Maſter of Arts,) but of an extraordinary Genius and Proficiency in theſe things; you may impart the Papers, if you pleaſe, to my Lord *Brounker*.

* *Barrovius* Provinciam ſuam Publice prælegendi remiſit cuidam nomine *Newtono Cantabrigienſi*, quem tanquam Virum acutiſſimi ingenii, in Præfatione Prælectionum Opticarum memorat, & qui, antequam ederetur *Mercatoris* Logarithmotechnia, Methodum invenerat eandem, eamque ad omnes Curvas generaliter, & ad Circulum diverſimode applicârat.

Quinetiam D. Collinſius *in Epiſtola ad D.* Strode, *data* 26. Julii 1672, *ſic ſcribit.*

† Menſe *Septembri* 1668, *Mercator* Logarithmotechniam edidit ſuam, quæ ſpecimen hujus Methodi (i. e. Serierum Infinitarum) in unica tantum Figura, nempe, Quadratura Hyperbolæ continet. Haud multo poſtquam in publicum prodiret liber, exemplar unum Cl. *Walliſio Oxoniam* miſi, qui ſuum de eo judicium in *Actis Philoſophicis* ſtatim fecit: alterum *Barrovio Cantabrigiam*, qui quaſdam *Newtoni* chartas, qui jam *Barrovium* in Mathematicis Prælectionibus publicis excipit, extemplo remiſit: Ex quibus & aliis, quæ olim ab Auc-

* Mr. *Barrow* hath reſign'd his Lecture's Place to one Mr. *Newton* of *Cambridge*, whom he mentions in his Optic Preface as a very ingenious Perſon; one who hath, before Mr. *Mercator*'s Logarithmotechnia was extant, invented the ſame Method, and applied it generally to all Curves, and divers ways to the Circle.

† In *September* 1668. Mr. *Mercator* publiſh'd his Logarithmotechnia, containing a Specimen of this Method, (that is, of Infinite Series) in one only Figure, to wit in the Quadrature of the Hyperbola. Not long after the Book came out, I ſent one of them to Dr. *Wallis* at *Oxford*, who forthwith gave his ſenſe of it in the Philoſ. Tranſactions: another of them I ſent to Dr. *Barrow* at *Cambridge*, who forthwith ſent me up ſome Papers of Mr. *Newton*, who is ſince become the Doctor's Succeſſor in the Mathematical Lectures there. By which, and former communications made thereof from the Author to the Doctor, it appears that the ſaid Method was invented ſome Years before by the ſaid Mr. *Newton*, and generally applied: ſo that thereby in any Curvilinear Figure propos'd, that is determin'd by one or more common Properties, by the ſame Method may be obtain'd the Quadrature or Area of the ſaid Figure, accurately when it can be done, but always infinitely near; the Evolution, or Length of the ſaid Curve Line; the Centre of the Figure; its round Solids made by Rotation, and their Surfaces; and all perform'd without any Extraction of Roots.

„ Auctore cum *Barrovio* communicata fuerant, patet il-
„ lam Methodum a dicto *Newtono* aliquot annis ante ex-
„ cogitatam, & modo generali applicatam fuiſſe: ita ut
„ ejus ope in quavis Figura Curvilinea propoſita, quæ
„ una vel pluribus Proprietatibus definitur, Quadratura
„ vel Area dictæ Figuræ, accurata ſi poſſibile ſit, ſin mi-
„ nus infinite propinqua; Evolutio vel Longitudo lineæ
„ Curvæ; Centrum gravitatis Figuræ; Solida ejus rota-
„ tione genita, & eorum Superficies; ſine ulla Radicum
„ Extractione obtineri queant.

Ubi obiter notemus in hac Collinſii *hiſtoriola, methodum argumentandi uſurpatam a D.* Newtono *in Tractatu ſuo* De Quadratura Curvarum, *quaſi digito monſtrari, dum dicit hanc Methodum exhibere Quadraturam Figurarum accuratam, ſi modo fieri poſſit, ſin minus in infinitum approximantem, atque iſta omnia fieri ſine ulla Extractione Radicum; Hæc enim ipſa eſt argumentatio in dicto Tractatu obſervata: & propterea hanc Methodum ſaltem Anno* 1672 *coætaneam extitiſſe non eſt dubitandum.*

Inveni etiam in exemplari Epiſtolæ, a D. Collinſio *ad D.* Davidem Gregorium *prædicti* Jacobi *fratrem, datæ* 11 Aug. 1676, *præter eadem fere quæ D.* Strode *ſcripſerat, etiam verba ſequentia.*

* „ Supradicta Serierum Infinitarum doctrina, a *Newtono*
„ biennium ante excogitata fuit, quam ederetur *Mercato-*
ris

* The ſaid Doctrine of Infinite Series was invented by Mr. *Newton*, about two Yéars before the Publication of Mr. *Mercator*'s Logarithmotechnia, and generally applied to all Curves.

„ *ris* Logarithmotechnia, & generaliter omnibus Figuris
„ applicata.

Simulque affirmat ſe olim cum quibuſdam Academicis Pariſienſibus *hæc eadem ſcripto communicaſſe.*

Quapropter, cum D. Mercator *Librum ſuum Anno* 1668 *in lucem ediderit, ſequitur eandem Doctrinam Infinitarum Serierum Figuris omnibus generaliter applicatam fuiſſe Anno* 1666.

Denique in Epiſtola, circa idem tempus ad D. Oldenburgum *ſcripta, aſſerit* Collinſius, *Jacobum Gregorium* non niſi conſpecta aliqua e Seriebus *Newtoni*, quam illi impertierat, in eandem Serierum Methodum incidiſſe.

Ex Newtoni *autem Schedis quibuſdam a me viſis intellexi, quod is Quadraturam Circuli, Hyperbolæ, & aliarum quarundam Curvarum per Series Infinitas ex* Walliſii *noſtri* Arithmetica Infinitorum, *per Interpolationem Serierum ejus, primo deduxit, idque Anno* 1665; *deinde Methodum excogitavit eaſdem Series per Diviſiones & Extractiones Radicum inveniendi, quam Anno ſequente generalem reddidit.*

Et cum ſcriptus fuerit hic Tractatus, quo tempore hæc recens inventa eſſent, ideo Cl. Auctor dignatus eſt multa in eo dilucidare, ad Reſolutionem Æquationum per Infinitas Series ſpectantia, quæ in aliis Libris fruſtra quæras.

His ſubjunximus diverſa Epiſtolarum Auctoris fragmenta, quæ ad eaſdem Doctrinas pertinent, quæque olim inter Cl.

Wallisii *Opera in lucem prodiere. Epistolas haud dedi integras, ut evitarem repetitionem non necessariam multarum rerum, quæ supra in Tractatu* De Analysi per Æquationes Infinitas *traditæ sunt: Quinimo Exempla quædam in iis Epistolis prætermisi ipsius Cl. Auctoris monitu, Regulas suas per se satis claras esse credentis, neque ullam dilucidationem desiderare.*

Inter D. Collinsii *schedas reperi autographum Epistolæ datæ* 8. Novemb. 1676, *cujus fragmentum sub finem adjeci, & dignum luce putavi; quoniam in eo memoratur solutio Problematis admodum generalis in Comparatione Curvarum usûs, quæ perficitur in Cor.* 2. *Prop.* 10. *Tract.* De Quadratura Curvarum: *Unde Lector intelligat solutionem illam Auctori jam tum innotuisse.*

Hisce Fragmentis annexus est ille ipse Tractatus De Quadratura Curvarum; *una cum altero* De Enumeratione Linearum Tertii Ordinis; *quorum uterque primum typis mandatus est Anno* 1704, *ad finem* Optices *eximiæ ejusdem Cl. Auctoris.*

Coronidis loco subjicitur Tractatulus, cui titulo est, Methodus Differentialis, *quem Cl. Auctoris permissu ex ejus autographo descripsi; Complectitur autem Doctrinam describendi Curvas ex datis Differentiis differentiarum Ordinatarum. Hæc* Methodus Differentialis *innititur Problemati ducendi Curvam Parabolici generis per data quotcunque puncta; de quo Cl. Auctor olim mentionem fecerat in Epistola sua ad D.* Oldenburgum 1676 *missa; & cujus solutionem dedit in Lem. 5. Lib.* 3. Princip. Philos. *non tamen prorsus eandem*

quoad

INDEX OPUSCULORUM

Quæ in hoc Libro continentur.

Pag.

DE Analyſi per Æquationes Infinitas 1

Fragmenta Epiſtolarum.
- *Ad D.* Oldenburgum 13 Jun. 1676. 23
- *Ad D.* Oldenburgum 24 Octob. 1676. 32
- *Ad D.* Walliſium *Anno* 1692. 35
- *Ad D.* Collinſium Nov. 8. 1676. 39

De Quadratura Curvarum. 41

Enumeratio Linearum Tertii Ordinis. 71

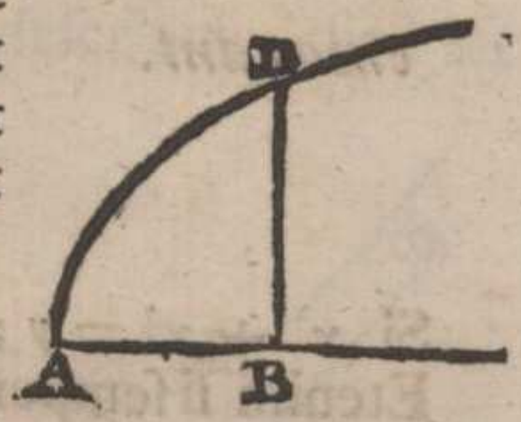
Methodus Differentialis. 99

DE ANALYSI

Per Æquationes Numero Terminorum INFINITAS.

METhodum generalem quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem menſuranda, olim excogitaveram, in ſequentibus breviter explicatam potius quam accuratè demonſtratam habes.

BASI *AB* Curvæ alicujus *AD*, ſit Applicata *BD* perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & ſint *a*, *b*, *c*, &c. Quantitates datæ, & *m*, *n*, Numeri Integri. Deinde,



Curvarum Simplicium Quadratura.

REGULA I.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *Erit* $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} =$ *Areæ ABD.*

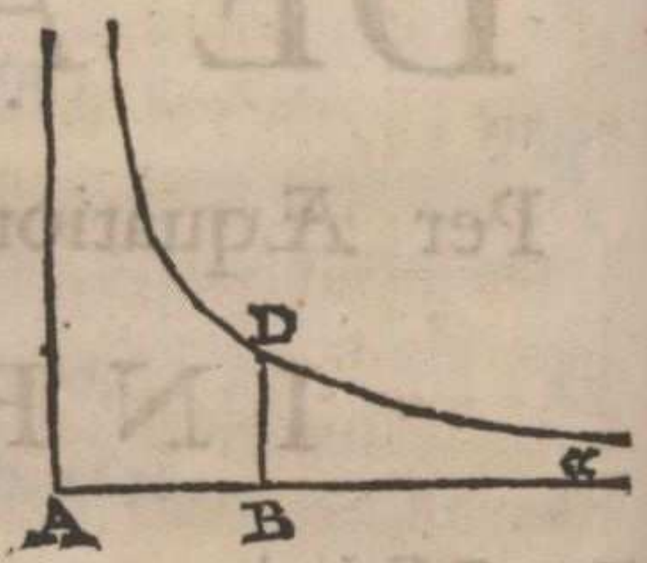
BIBLIOTECA PUBLICA E ARQUIVO DISTRITAL DE ÉVORA

Res Exemplo patebit.

1. Si $x^2 (= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc eſt, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3 =$ ABD.
2. Si $4\sqrt{x} . (= 4x^{\frac{1}{2}}) = y$; Erit $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} (= \frac{8}{3}\sqrt[2]{x^3}) =$ ABD.
3. Si $\sqrt[3]{x^5} (= x^{\frac{5}{3}}) = y$; Erit $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} (= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}) =$ ABD.
4. Si $\frac{1}{x^2} (= x^{-2}) = y$, id eſt, ſi $a = 1 = n$, & $m = -2$;

Erit $(-\frac{1}{1}x^{\frac{-1}{1}} =) -x^{-1} (= \frac{-1}{x}) = a$BD, infinite verſus a protenſæ, quam Calculus ponit negativam, propterea quod jacet ex altera parte Lineæ BD.

5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}} (= x^{\frac{-3}{2}}) = y$; Erit $(-\frac{2}{1}x^{\frac{-1}{2}} =) \frac{-2}{\sqrt{x}} =$ BDa.
6. Si $\frac{1}{x} (= x^{-1}) = y$; Erit $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}} = \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0} =$ Infinitæ, qualis eſt Area Hyperbolæ ex utraque parte Lineæ BD.



Compoſitarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

REGULA II.

Si valor ipſius y *ex pluribus iſtiuſmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis quæ a ſingulis Terminis emanant.*

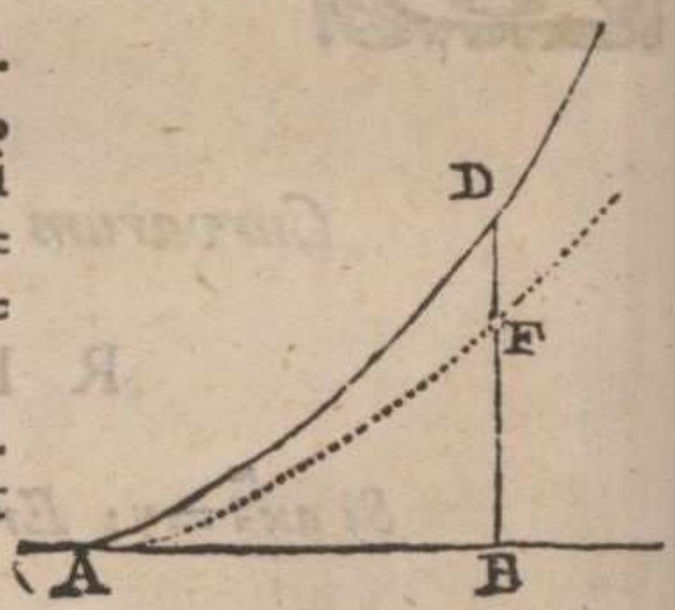
Exempla Prima.

Si $x^2 + x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ ABD.

Etenim ſi ſemper ſit $x^2 =$ BF, & $x^{\frac{3}{2}} =$ FD, erit, ex præcedente Regula, $\frac{1}{3}x^3 =$ ſuperficiei AFB deſcriptæ per Lineam BF, & $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ AFD deſcriptæ per DF; Quare $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ toti ABD.

Sic ſi $x^2 - x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ ABD.

Et ſi $3x - 2x^2 + x^3 - 5x^4 = y$; Erit $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - x^5 =$ ABD.

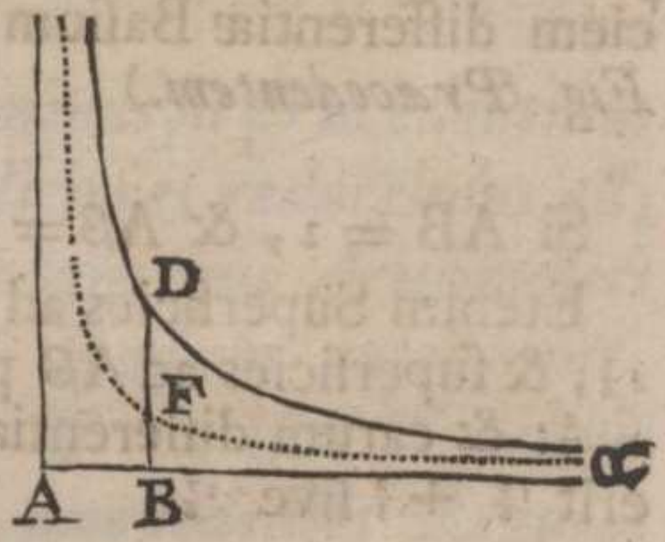


BIBLIOTECA PUBLICA DE EVORA

Ex-

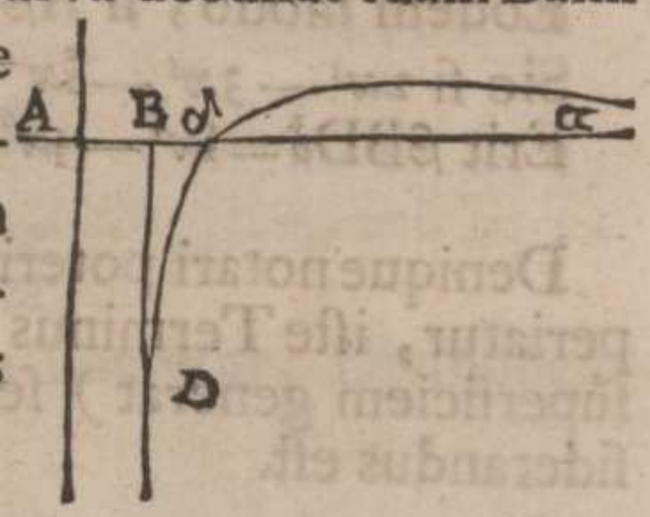
Exempla Secunda.

Si $x^{-2}+x^{-\frac{1}{2}}=y$; Erit $-x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}=\alpha$BD. Vel ſi $x^{-2}-x^{-\frac{1}{2}}=y$; Erit $-x^{-1}+2x^{-\frac{1}{2}}=\alpha$BD.



Quarum ſigna ſi mutaveris habebis Affirmativum valorem ($x^{-1}+2x^{-\frac{1}{2}}$ vel $x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}$) ſuperficiei αBD, modo tota cadat ſupra baſim ABα.

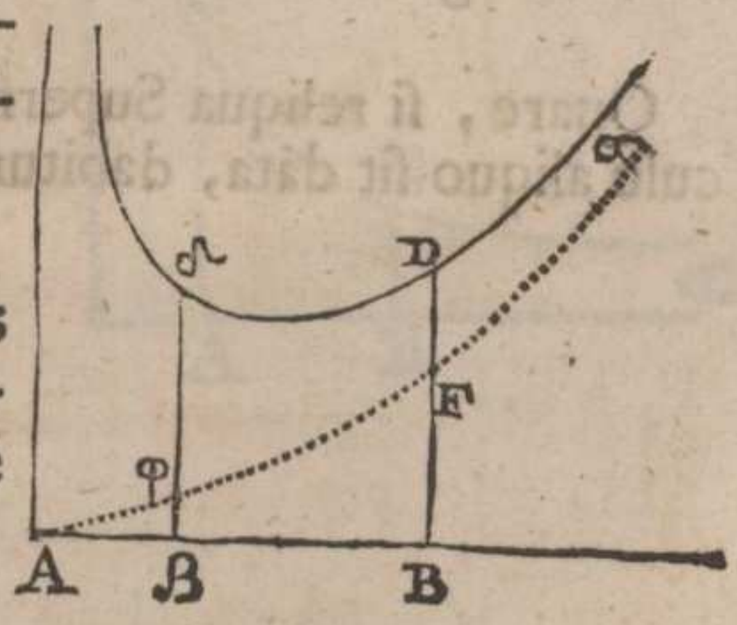
Sin aliqua pars cadat infra (quod fit cum Curva decuſſat ſuam Baſin inter B & α, ut hic vides in δ,) iſta parte a parte ſuperiori ſubducta, habebis valorem Differentiæ: Earum vero Summam ſi cupis, quære utramque Superficiem ſeorſim, & adde. Quod idem in reliquis hujus Regulæ exemplis notandum volo.



Exempla Tertia.

Si $x^2+x^{-2}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^3-x^{-1}=$ Superficiei deſcriptæ. Sed hic notandum eſt, quod dictæ Superficiei partes ſic inventæ jacent ex diverſo latere Lineæ BD.

Nempe, poſito $x^2=$BF, & $x^{-2}=$FD; Erit $\frac{1}{3}x^3=$ABF Superficiei per BF deſcriptæ, & $-x^{-1}=$DFα Superficiei deſcriptæ per DF.



Et hoc ſemper accidit cum Indices ($\frac{m+n}{n}$) rationum Baſis x in valore Superficiei quæſitæ, ſint variis Signis affecti. In hujuſmodi Caſibus;

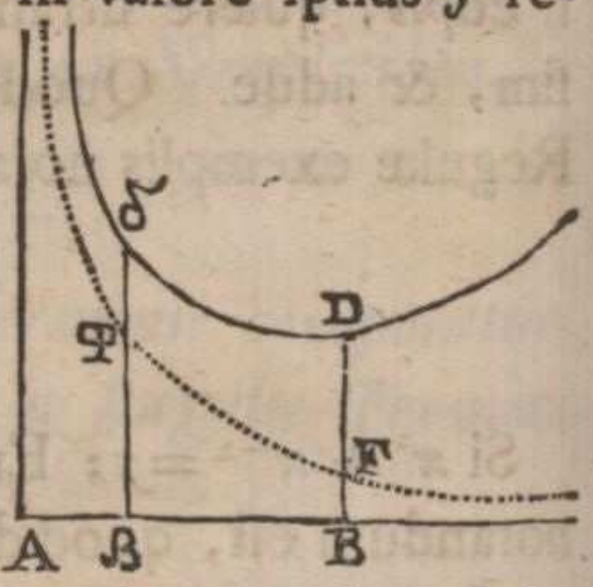
ſibus, pars aliqua BDδβ Superficiei media (quæ ſola dari poterit, cum Superficies ſit utrinque infinita) ſic invenitur.

Subtrahe Superficiem ad minorem Baſin Aβ pertinentem, a Superficie ad majorem Baſin AB pertinente, & habebis βBDδ Superficiem differentiæ Baſium inſiſtentem. Sic in hoc Exemplo. (*Vide Fig. Præcedentem.*)

Si AB = 2, & Aβ = 1; Erit βBDδ = $1\frac{7}{6}$:
Etenim Superficies ad AB pertinens (viz. ABF — DFα) erit $\frac{8}{3} - \frac{1}{2}$ ſive $1\frac{1}{6}$; & ſuperficies ad Aβ pertinens (viz. Aφβ — δφα) erit $\frac{1}{3} - 1$, ſive $-\frac{2}{3}$: & earum differentia (viz. ABF — DFα — Aφβ + δφα = βBDδ) erit $1\frac{3}{6} + \frac{2}{3}$ ſive $1\frac{7}{6}$.

Eodem modo, ſi Aβ = 1, AB = x; Erit βBDδ = $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$.
Sic ſi $2x^3 - 3x^5 - \frac{2}{3}x^{-4} + x^{-\frac{3}{2}} = y$, & Aβ = 1;
Erit βBDδ = $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{3}x^{-3} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{49}{132}$.

Denique notari poterit quod ſi quantitas x^{-1} in valore ipſius y reperiatur, iſte Terminus (cum Hyperbolicam ſuperficiem generat) ſeorſim a reliquis conſiderandus eſt.



Ut ſi $x^2 + x^{-3} + x^{-1} = y$; Sit x^{-1} = BF, & $x^2 + x^{-3}$ = FD, ac Aβ = 1; Et erit δφFD = $\frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^{-2}$, utpote quæ ex Terminis $x^2 + x^{-3}$ generatur.

Quare, ſi reliqua Superficies βφFB, quæ Hyperbolica eſt, ex Calculo aliquo ſit data, dabitur tota βBDδ.

Aliarum

Aliarum Omnium Quadratura.

REGULA III.

Sin valor ipſius y, *vel aliquis ejus Terminus ſit præcedentibus magis compoſitus, in Terminos Simpliciores reducendus eſt; operando in Literis ad eundem Modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes ſolvunt; & ex iſtis Terminis quæſitam Curvæ Superficiem. per præcedentes Regulas deinceps elicies.*

Exempla Dividendo.

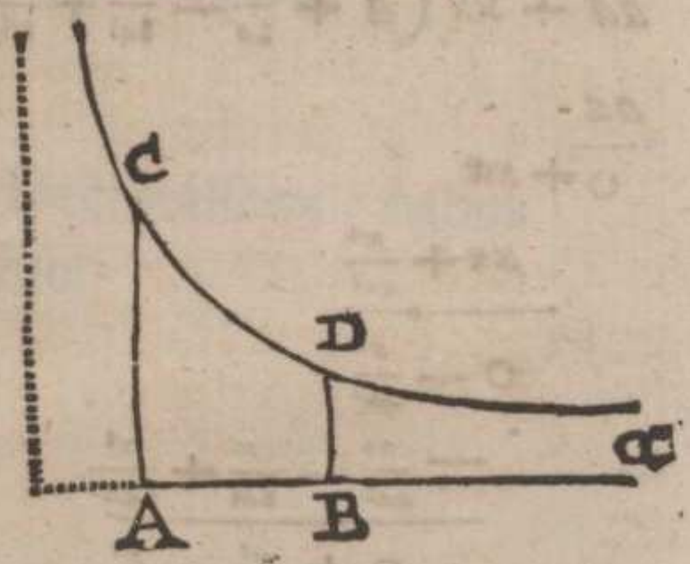
Sit $\frac{aa}{b+x} = y$; Curva nempe exiſtente Hyperbola.

Jam ut Æquatio iſta a Denominatore ſuo liberetur, Diviſionem ſic inſtituo.

$b+x) \; aa+0 (\frac{aa}{b} - \frac{aax}{b^2} + \frac{aax_2}{b^3} - \frac{aax^3}{b^4}$ &c.

$$\begin{array}{l} aa+\frac{aax}{b} \\ \hline 0-\frac{aax}{b}+0 \\ \quad -\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b_2} \\ \hline 0+\frac{aax^2}{b^2}+0 \\ \quad +\frac{aax_2}{b^2}+\frac{aax^3}{b^3} \\ \hline 0-\frac{aax^3}{b^3}+0 \\ \quad -\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4} \\ \hline 0+\frac{aax^4}{b^4} \end{array}$$

&c.



Et ſic vice hujus $y = \frac{aa}{b+x}$, nova prodit $y = \frac{a_2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x_2}{b^3} - \frac{a_2x^3}{b^4}$, &c. ſerie iſtac infinite continuata; Adeoque (per Regulam Secundam)

Area quæsita ABDC æqualis erit ipsi $\frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4}$ &c. infinitæ etiam seriei, cujus tamen Termini pauci initiales sunt in usum quemvis satis exacti, si modo x sit aliquoties minor quam b.

Eodem modo, si sit $\frac{1}{1+xx} = y$, Dividendo prodibit

$y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$ &c. Unde (per Regulam Secundam) erit ABDC $= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$ &c.

Vel si Terminus xx ponatur in divisore primus, hoc modo $xx + 1$), prodibit $x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8}$ &c. pro valore ipsius y; Unde (per Regulam Secundam)
erit BD$a = -x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{5}x^{-5} + \frac{1}{7}x^{-7}$ &c. Priori modo procede cum x est satis parva, posteriori cum satis magna supponitur.

Denique si $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x} = y$; Dividendo prodit

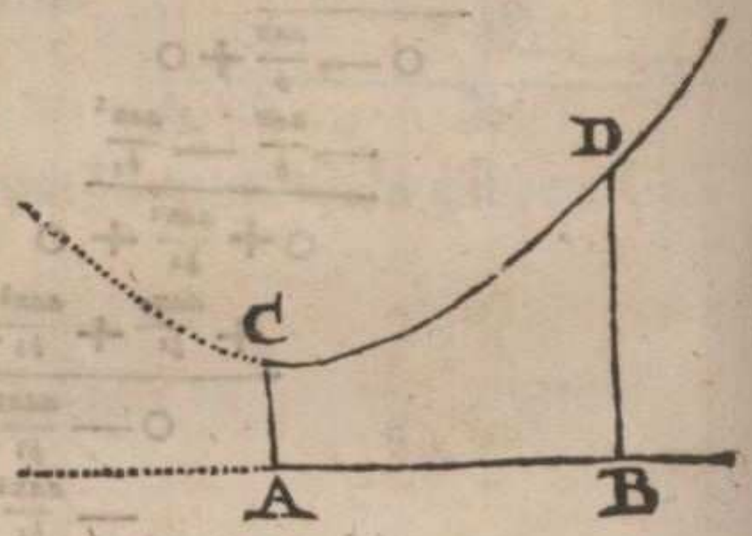
$2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13x^2 + 34x^{\frac{5}{2}}$ &c. unde erit
ABDC $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^2 + \frac{12}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{13}{3}x^3$ &c.

Exempla Radicem Extrahendo.

Si sit $\sqrt{aa + xx} = y$, Radicem sic extraho,

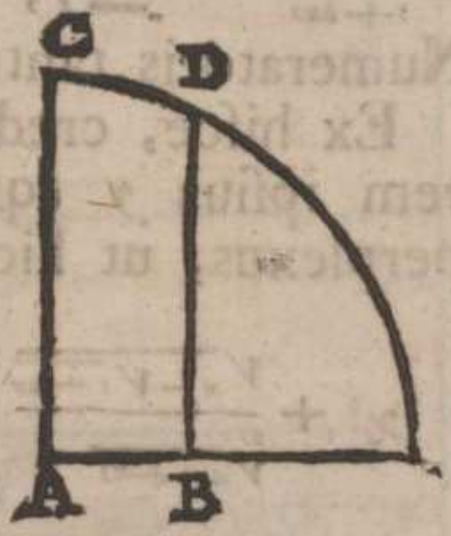
$$aa + xx \left(a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^2}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ &c.}\right.$$

$$\begin{array}{l}
aa \\
\hline
0 + xx \\
\quad xx + \frac{x^4}{4a^2} \\
\quad\hline
\quad 0 - \frac{x^4}{4a^2} \\
\quad\quad - \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6} \\
\quad\quad\hline
\quad\quad 0 + \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \\
\quad\quad\quad + \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\
\quad\quad\quad\hline
\quad\quad\quad 0 - \frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\
\quad\quad\quad\quad \text{&c.}
\end{array}$$



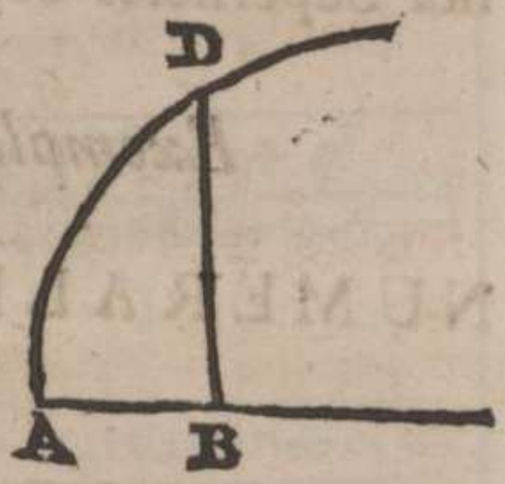
Unde

Unde, pro Æquatione $\sqrt{aa+xx} = y$, nova producitur, viz.
$y = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Et (per Reg. 2.) Area quæsita ABDC erit $= ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c. Et hæc est Quadratura Hyperbolæ.



Eodem modo, si sit $\sqrt{aa-xx} = y$, ejus Radix erit
$a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c.
Adeoque Area quæsita ABDC erit
æqualis $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^5}{112a^7} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c.
Et hæc est Quadratura Circuli.

Vel si ponas $\sqrt{x-xx} = y$; erit Radix æqualis infinitæ seriei.
$x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}}$ &c.
Et Area quæsita ABD æqualis erit
$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$ &c.
sive $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5$ &c.
Et hæc est Areæ Circuli Quadratura.



Si $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$, (Cujus Quadratura dat Longitudinem curvæ Ellipticæ;) Extrahendo radicem utramque prodit
$\frac{1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{8}a^2x^4 + \frac{1}{16}a^3x^6 - \frac{5}{128}a^4x^8}{1 - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{8}b^2x^4 - \frac{1}{16}b^3x^6 - \frac{5}{128}b^4x^8}$ &c.
Et Dividendo, sicut fit in Fractionibus Decimalibus, habes

$$\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{3}{8}b^2x^4 + \frac{5}{16}b^3x^6 + \frac{35}{128}b^4x^8 \text{ &c.} \\ \quad + \frac{1}{2}ba + \frac{1}{4}ab + \frac{3}{16}ab^2 + \frac{5}{32}ab^3 \\ \quad\quad - \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{16}a^2b - \frac{3}{64}a^2b^2 \\ \quad\quad\quad + \frac{1}{16}a^3 + \frac{1}{32}a^3b \\ \quad\quad\quad\quad - \frac{5}{128}a^4 \end{array}$$

Adeoque Aream quæsitam $x + \frac{1}{6}bx^3 + \frac{3}{40}b^2x^5$ &c.

$$\begin{array}{l} + \frac{1}{6}a + \frac{1}{20}ab \\ \quad - \frac{1}{40}a^2 \end{array}$$

Sed observandum est, quod Operatio non raro abbreviatur per debitam

bitam Æquationis præparationem, ut in allato Exemplo $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$ Si utramque partem fractionis per $\sqrt{1-bxx}$ multiplices prodibit $\frac{\sqrt{1+ax^2-abx^4}-b}{1+bx^2} = y$, & reliquum opus perficitur extrahendo Radicem Numeratoris tantum, & dividendo per Denominatorem.

Ex hiſce, credo, ſatis patebit modus reducendi quemlibet valorem ipſius y (quibuſcumque Radicibus vel Denominatoribus ſit perplexus, ut hic videre eſt;

$$x^3 + \frac{\sqrt[3]{x-\sqrt{1-xx}}}{\sqrt[3]{ax^3+x^3}} - \frac{\sqrt[5]{x^3+2x^5-x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x+x^2}-\sqrt[2]{2x-x^2}} = y)$$

in ſeries Infinitas ſimplicium Terminorum, ex quibus, per Regulam Secundam, quæſita Superficies cognoſcetur.

Exempla per Reſolutionem Æquationum.

NUMERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO

Quia tota difficultas in Reſolutione latet, modum quo ego utor in Æquatione Numerali primum illuſtrabo.

Sit $y^3 - 2y - 5 = 0$, reſolvenda: Et ſit 2, numerus qui minus quam decima ſui parte differt a Radice quæſita. Tum pono $2 + p = y$, & ſubſtituo hunc ipſi valorem in Æquationem, & inde nova prodit $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, cujus Radix p exquirenda eſt, ut quotienti addatur: Nempe (neglectis $p^3 + 6p^2$ ob parvitatem) $10p - 1 = 0$, ſive $p = 0$, 1 prope veritatem eſt; itaque ſcribo 0, 1 in quotiente, & ſuppono 0, $1 + q = p$, & hunc ejus valorem, ut prius ſubſtituo, unde prodit $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$.

Et cum $11{,}23q + 0{,}061$ veritati prope accedit, ſive fere ſit q æqualis $- 0{,}0054$ (dividendo nempe donec tot eliciantur Figuræ quot locis primæ Figuræ hujus & principalis quotientis excluſive diſtant) ſcribo $- 0{,}0054$ in inferiori parte quotientis, cum negativa ſit.

Et ſupponens $- 0{,}0054 + r = q$, hunc ut prius ſubſtituo, & operationem ſic produco quo uſque placuerit. Verum ſi ad bis tot figuras

figuras tantum quot in Quotiente jam reperiuntur una dempta, operam continuare cupiam, pro q ſubſtituo $-0,00544853+r$ in hanc $6,3q^2+11,23q+0,061$, ſcilicet primo ejus termino (q^3) propter exilitatem

$y^3-2y-5=0$		$+2,10000000$ $-0,00544853$ $+2,09455147=y$
$2+p=y$	$+y^3$	$+8+12p+6p^2+p^3$
	$+2y$	$-4-2p$
	-5	-5
	Summa	$-1+10p+6p^2+p^3$
$0,1+q=p$	$+p^3$	$+0,001+0,03q+0,3q^2+q^3$
	$+6p^2$	$+0,06+1,2+6,0$
	$+10p$	$+1,+10,$
	-1	$-1,$
	Summa	$+0,061+11,23q+6,3q^2+q^3$
$-0,00544853+r=q$	$+6,3q^2$	$+0,000183708-0,06804r+6,3r^2$
	$+11,23q$	$-0,060642+11,23$
	$+0,061$	$+0,061$
	Summa	$+0,000541708+11,16196r+6,3r^2$
$-0,00004853+s=r$		

ſuam neglecto, & prodit $6,3r^2+11,16196r+0,000541708=0$ fere, ſive (rejecto $6,3r^2$) $r=\frac{-0,000541708}{11,16196}=-0,00004853$ fere, quam ſcribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativa ſubducens habeo $2,09455147$ Quotientem quæſitam.

Æquationes plurium dimenſionum nihilo ſecius reſolvuntur, & operam ſub fine, ut hic factum fuit, levabis, ſi primos ejus terminos gradatim omiſeris.

Præterea notandum eſt quod in hoc exemplo, ſi dubitarem an $0,1=p$ veritati ſatis accederet, pro $10p-1=0$, finxiſſem $6p^2+10p-1=0$, & ejus radicis primam figuram in Quotiente ſcripſiſſem; & ſecundam vel tertiam Quotientis figuram ſic explorare convenit, ubi in Æquatione iſta ultimo reſultante quadratum coefficientis penultimi termini, non ſit decies majus quam factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi.

Imo laborem plerumque minues præſertim in Æquationibus plurimarum dimenſionum, ſi figuras omnes Quotienti addendas dicto modo (hoc eſt extrahendo minorem radicum, ex tribus ultimis terminis Æquationis noviſſime reſultantis) exquiras: Iſto enim modo figuras duplo plures qualibet vice Quotienti lucraberis.

Hæc Methodus reſolvendi Æquationes pervulgata an ſit neſcio, certe mihi videtur præ reliquis ſimplex, & uſui accommodata. Demonſtratio ejus ex ipſo modo operandi patet, unde cum opus ſit, in memoriam facile revocatur.

Æquationes in quibus vel aliqui vel nulli Termini deſint, eadem fere facilitate tractantur; & Æquatio ſemper relinquitur, cujus Radix una cum acquiſita Quotiente adæquat Radicem Æquationis primo propoſitæ. Unde Examinatio Operis hic æque poterit inſtitui ac in reliqua Arithmetica, auferendo nempe Quotientem a Radice primæ Æquationis (ſicut Analyſtis notum eſt) ut Æquatio ultima vel Termini ejus duo treſve ultimi producantur inde. Quicquid laboris hic eſt, iſtud in Operatione ſubſtituendi quantitates unas pro aliis reperietur: Id quod varie perficias, at ſequentem modum maxime expeditum puto, præſertim ubi Numeri Coefficientes conſtant ex pluribus Figuris.

Sit $p + 3$ ſubſtituenda pro y in hanc $y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12y + 17 = 0$. Et cum iſta poſſit reſolvi in hanc formam

$y - 4 \times y + 5 \times y - 12 \times y + 17 = 0$. Æquatio nova ſic generabitur $p - 1 \times p + 3 = p^2 + 2p - 3$. & $p^2 + 2p + 2$ in $p + 3 = p^3 + 5p^2 + 8p + 6$. & $p^3 + 5p^2 + 8p - 6$ in $p + 3 = p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 18p - 18$. & $p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 18p - 1 = 0$, quæ quærebatur.

LITERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO

His in numeris ſic oſtenſis: Sit Æquatio literalis $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$, reſolvenda.

Primum inquiro valorem ipſius y cum x ſit nulla, hoc eſt, elicio Radicem hujus Æquationis $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, & invenio eſſe $+a$. Itaque ſcribo $+a$ in Quotiente, & ſupponens $+a + p = y$, ſubſtituo pro y valorem ejus, & Terminos inde reſultantes ($p^3 + 3ap^2 + 4a^2p$, &c.) margini appono; Ex quibus aſſumo $+4a^2p + a^2x$ terminos utique ubi

ubi p & x ſeorſim ſunt minimarum dimenſionum, & eos nihilo fere æquales eſſe ſuppono, ſive $p = -\frac{1}{4}x$ fere, vel $p = -\frac{1}{4}x + q$. Et ſcribens $-\frac{1}{4}x$ in Quotiente, ſubſtituo $-\frac{1}{4}x + q$ pro p; Et terminos inde reſultantes iterum in margine ſcribo, ut vides in annexo ſchemate, & inde aſſumo Quantitates $+ 4a^2q - \frac{1}{16}ax^2$, in quibus utique q & x ſeorſim ſunt minimarum dimenſionum, & fingo $q = \frac{xx}{64a}$ fere, ſive $q = + \frac{xx}{64a} + r$; & adnectens $+ \frac{xx}{64a}$ Quotienti, ſubſtituo $\frac{xx}{64a} + r$ pro q; & ſic procedo quo uſque placuerit.

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$$

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} - \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} \text{ &c.}$$

$+a+p=y$	$+ y^3$	$+a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$
	$+a^2y$	$+a^3 + a^2p$
	$+axy$	$+a^2x + axp$
	$-2a^3$	$-2a^3$
	$- x^3$	$- x^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+ p^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3$
	$+3ap^2$	$+\frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{2}axq + 3aq^2$
	$+4a^2p$	$-a^2x + 4a^2q$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}ax^2 + axq$
	$+a^2x$	$+a^2x$
	$- x^3$	$- x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	$+3aq^2$	$+\frac{3x^4}{4096a} + \frac{3}{32}x^2r + 3ar^2$
	$+4a^2q$	$+\frac{1}{16}ax^2 + 4a^2r$
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{2}axr$
	$+\frac{3}{16}x^2q$	$-\frac{3x^4}{1024a} + \frac{3}{16}x^2r$
	$-\frac{1}{16}ax^2$	$-\frac{1}{16}ax^2$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$

$$+ 4a^2 - \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{9}{32}x^2) + \tfrac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a} \left(+ \frac{132x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} \right.$$

Sin duplo tantum plures Quotienti terminos, uno dempto, jungendos adhuc vellem: Primo termino (q^3) Æquationis noviſſime reſultantis miſſo, & iſta etiam parte ($-\frac{1}{4}q^2$) ſecundi, ubi x eſt tot dimenſionum quot in penultimo Quotientis; In reliquos terminos ($3aq^2 + 4a^2q$,

$+4a^2q$, &c.) margini adſcriptos ut vides, ſubſtituo $\frac{x^2}{64a}+r$ pro q; & ex ultimis duobus terminis $\left(\frac{15x^4}{4096a}-\frac{1}{1}\frac{3}{2}\frac{1}{3}x^3+\frac{9}{3}\frac{}{2}x^2r-\frac{1}{2}axr+4a^2r\right)$ Æquationis inde reſultantis, facta diviſione $4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{3}\frac{}{2}x^2)+\frac{1}{1}\frac{3}{2}\frac{1}{3}x^3-\frac{15x^4}{4096a}($ elicio $+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{1638443}$ Quotienti adnectendos.

Denique Quotiens iſta $(a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}$, &c.) per Regulam ſecundam, dabit $ax-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{192a}+\frac{131x^4}{2048a^2}+\frac{509x^5}{8192a3}$, &c. pro Area quæſita, quæ ad veritatem tanto magis accedit, quanto x ſit minor.

Alius modus eaſdem Reſolvendi.

Sin valor Areæ tanto magis ad veritatem accedere debet quanto x ſit major; Exemplum eſto $y^3+axy+x^2y-a^3-2x^3=0$. Itaque hanc reſoluturus excerpo terminos $y^3+x^2y-2x^3$ in quibus x & y vel ſeorſim, vel ſimul multiplicatæ, ſunt & plurimarum, & æqualium ubique dimenſionum; & ex iis quaſi nihilo æqualibus Radicem elicio. Hanc invenio eſſe x, & in Quotiente ſcribo. Vel quod eodem recidit, ex y^3+y-2 (unitate pro x ſubſtituta) Radicem extraho quæ hic prodit 1, & eam per x multiplico, & factum (x) in Quotiente ſcribo. Denique pono $x+p=y$, & ſic procedo ut in priori Exemplo, donec habeam Quotientem $x-\frac{a}{4}+\frac{aa}{64x}+\frac{131a3}{512x^2}+\frac{509a4}{16384x3}$, &c. adeoque Aream $\frac{x^2}{2}-\frac{ax}{4}+\overline{\left|\frac{aa}{64x}\right|}-\frac{131a3}{512x}-\frac{509a4}{32768x^2}$, de qua vide exempla tertia Regulæ ſecundæ. Lucis gratia dedi hoc exemplum in omnibus idem cum priori, modo x & a ſibi invicem ibi ſubſtituantur, ut non opus eſſet aliud Reſolutionis exemplum hic adjungere.

Area autem $\left(\frac{xx}{2}-\frac{ax}{4}+\overline{\left|\frac{aa}{64x}\right|}\right.$ &c. terminatur ad Curvam quæ juxta Aſymptoton aliquam in infinitum ſerpit; & Termini initiales $(x-\frac{1}{4}a)$ valoris extracti de y, in Aſymptoton iſtam ſemper terminantur; unde portionem Aſymptoti facile invenies. Idem ſemper notandum eſt cum Area deſignatur terminis plus pluſque diviſis per x continue, præterquam quod vice Aſymptoti rectæ quandoque habeatur Parabola Conica, vel alia magis compoſita.

Sed

Sed hunc modum miſſum faciens, utpote particularem, quia non applicabilem Curvis in orbem ad inſtar Ellipſium flexis; de altero modo per exemplum $y^3+a^2y+axy-2a^3-x^3=0$, ſupra oſtenſo (ſcilicet quo dimenſiones ipſius x in numeratoribus quotientis perpetuo augeantur) annotabo ſequentia.

1. Si quando accidit quod valor ipſius y, cum x nullum eſſe fingitur, fit quantitas ſurda vel penitus ignota, licebit illam litera aliqua deſignare. Ut in exemplo, $y^3+a^2y+axy-2a^3-x^3=0$, ſi radix hujus $y^3+a^2y-2a^3$ fuiſſet ſurda vel ignota, finxiſſem quamlibet (b) pro ea ponendam; & reſolutionem ut ſequitur perfeciſſem. Scribens b in Quotiente, ſuppono $b+p=y$, & iſtum pro y ſubſtituo, ut vides; unde nova p^3+3bp^2, &c. reſultat, rejectis terminis $b^3+a^2b-2a^3$, qui nihilo ſunt æquales, propterea quod b ſupponitur Radix hujus $y^3+a^2y-2a^3=0$. Deinde termini $3b^2p+a^2p+abx$ dant $-\frac{abx}{3b^2+a^2}$ quotienti apponendum, & $-\frac{abx}{3b^2+a^2}+q$ ſubſtituendum pro p, &c.

$y^3+aay+axy-2a^3-x^3=0$. Sit $cc=3b^2+a^2$.

$y=b-\frac{abx}{c^2}+\frac{a^4bx^2}{c^6}+\frac{x^3}{c^2}+\frac{a^3b^3x^3}{c^8}-\frac{a^5bx^3}{c^8}+\frac{a^5b^3x^3}{c^{10}}$ &c.

$b+p=y$	y^3	$+b^3+3b^2p+3bp^2+p^3$
	$+axy$	$+abx+axp$
	$+aay$	$+aab+aap$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$\frac{-abx}{cc}+q=p$	p^3	$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6}$ &c.
	$+3bp^2$	$+\frac{3a^2b^3x^2}{c^4}-\frac{6ab^2x}{c^2}q$ &c.
	$+axp$	$-\frac{a^2bx^2}{c^2}+axq$
	$+ccp$	$-abx+ccq$
	$-x^3$	$-x^3$
	$+abx$	$+abx$

$c^2+ax-\frac{6ab^2x}{cc}\Big)\frac{a^4bx^2}{c^4}+x^3+\frac{a^3b^3x^3}{c^6}\Big(\frac{a^4bx^2}{c^6}+\frac{x}{c^2}+\frac{a^3b^3x^3}{c^8}$ &c.

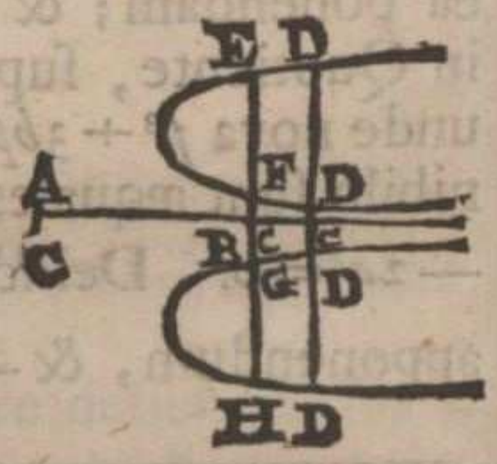
Completo opere, ſumo numerum aliquem pro a, & hanc $y^3+a^2y-2a^3=0$, ſicut de numerali æquatione oſtenſum ſupra reſolvo; & radicem ejus pro b ſubſtituo.

2. Si dictus valor ſit nihil, hoc eſt ſi in æquatione reſolvenda nul-

lus ſit terminus niſi qui per x vel y ſit multiplicatus, ut in hac $y^3 - axy + x^3 = 0$; tum terminos $(-axy + x^3)$ ſeligo in quibus x ſeorſim & y etiam ſeorſim ſi fieri poteſt, alias per x multiplicata, ſit minimarum dimenſionum. Et illi dant $+\frac{xx}{a}$ pro primo termino quotientis, & $\frac{xx}{a} + p$ pro y ſubſtituendum. In hac $y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0$, licebit primum terminum quotientis vel ex $-a^2y - x^3$, vel ex $y^3 - a^2y$ elicere.

3 Si valor iſte ſit imaginarius, ut in hac $y^4 + y^2 - 2y + 6 - x^2y^2 - 2x + x^2 + x^4 = 0$, augeo vel imminuo quantitatem x donec dictus valor evadit realis.

Sic in annexo ſchemate, cum AC (x) nulla eſt, tum CD (y) eſt imaginaria.



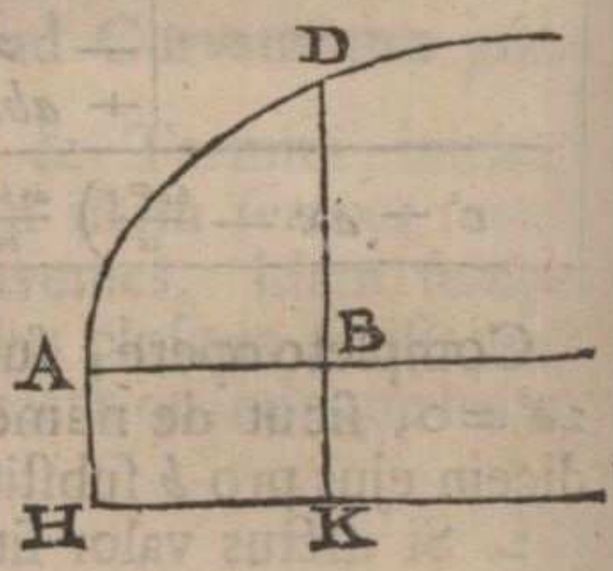
Sin minuatur AC per datam AB, ut BC fiat x, tum poſito quod BC (x) ſit nulla, CD (y) erit valore quadruplici (CE, CF, CG, vel CH) realis; quarum radicum (CE, CF, CG, vel CH) quælibet poteſt eſſe primus terminus quotientis, prout ſuperficies BEDC, BFDC, BGDC, vel BHDC deſideratur. In aliis etiam caſibus, ſi quando hæſitas, te hoc modo extricabis.

Denique ſi index poteſtatis ipſius x vel y ſit fractio, reduco ipſum ad integrum: ut in hoc exemplo $y^3 - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} = 0$. Poſito $y^{\frac{1}{2}} = v$, & $x^{\frac{1}{3}} = z$, reſultabit $v^6 - z^3v + z^4 = 0$, cujus radix eſt $v = z + z^3$, &c. ſive (reſtituendo valores) $y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} + x$, &c. & quadrando $y = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}}$, &c.

Et hæc de areis curvarum inveſtigandis dicta ſufficiant. Imo cum Problemata omnia de curvarum Longitudine, de quantitate & ſuperficie ſolidorum, deque Centro Gravitatis, poſſunt eo tandem reduci ut quæratur quantitas Superficiei planæ linea curva terminatæ, non opus eſt quicquam de iis adjungere. In iſtis autem quo ego operor modo dicam breviſſime.

Applicatio prædictorum ad reliqua iſtiuſmodi Problemata.

Sit ABD curva quævis, & AHKB rectangulum cujus latus AH vel BK eſt unitas. Et cogita rectam DBK uniformiter ab AH motam, areas ABD & AK deſcribere; & quod BK (1) ſit momentum quo AK (x) & BD (y) momentum quo ABD gradatim augetur; & quod ex momento BD perpetim dato, poſſis, per prædictas regulas, aream ABD ipſo deſcriptam inveſtigare, ſive cum AK (x) momento 1 deſcripta conferre.

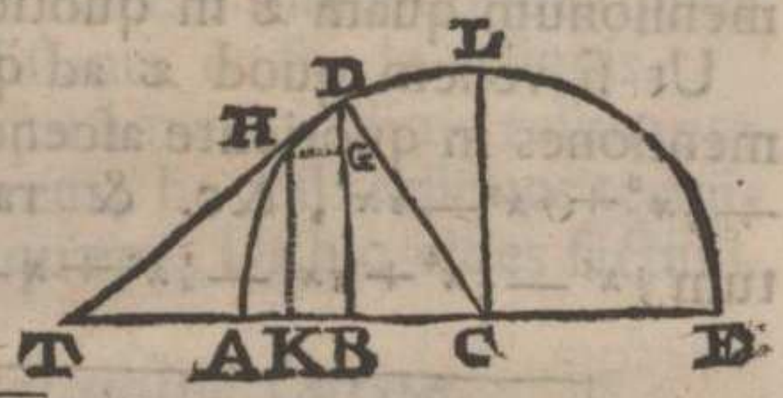


Jam

Jam qua ratione Superficies ABD ex momento ſuo perpetim dato, per præcedentes regulas elicitur, eadem quælibet alia quantitas ex momento ſuo ſic dato elicietur. Exemplo res fiet clarior.

Longitudines Curvarum invenire.

Sit ADLE circulus cujus arcus AD longitudo eſt indaganda. Ducto tangente DHT, & completo indefinite parvo rectangulo HGBK, & poſito AE=1=2AC. Erit ut BK ſive GH, momentum Baſis AB (x), ad HD momentum Arcus AD :: BT : DT :: BD ($\sqrt{x-xx}$) : DC ($\frac{1}{2}$) :: 1 (BK) :



$\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ (DH). Adeoque $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ ſive $\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$ eſt momentum Arcus AD.

Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}}+\frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}}+\frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

Quare, per regulam ſecundam, longitudo Arcus AD eſt

$x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}+\frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}}+\frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}$ &c.

ſive $x^{\frac{1}{2}}$ in $1+\frac{1}{6}x+\frac{3}{40}x^2+\frac{5}{112}x^3+\frac{35}{1152}x^4+\frac{63}{2816}x^5$, &c.

Non ſecus ponendo CB eſſe x, & radium CA eſſe 1, invenies Arcum LD eſſe $x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7$, &c.

Sed notandum eſt quod unitas iſta quæ pro momento ponitur eſt Superficies cum de Solidis, & linea cum de ſuperficiebus, & punctum cum de lineis (ut in hoc exemplo) agitur.

Nec vereor loqui de unitate in punctis, ſive lineis infinite parvis, ſi quidem proportiones ibi jam contemplantur Geometræ, dum utuntur methodis Indiviſibilium.

Ex his fiat conjectura de ſuperficiebus & quantitatibus ſolidorum, ac de Centris Gravitatum.

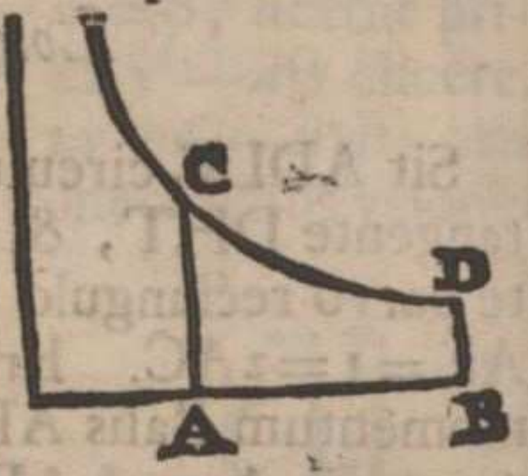
Invenire prædictorum converſum.

Verum ſi e contra ex area vel longitudine &c. Curvæ alicujus data longitudo Baſis AB deſideratur, ex æquationibus per præcedentes regulas inventis extrahatur radix de x.

Inven-

Inventio Baſis ex Area data.

Ut ſi ex area ABDC Hyperbolæ ($\frac{1}{1+x} = y$) data, cupiam baſim AB inveſtigare, area iſta z nominata, extraho radicem hujus z (ABCD) $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, &c. neglectis illis terminis in quibus x eſt plurium dimenſionum quam z in quotiente deſideratur.



Ut ſi vellem quod z ad quinque tantum dimenſiones in quotiente aſcendat, negligo omnes $-\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8$, &c. & radicem hujus tantum $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - z = 0$ extraho.

$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c.

$z + p = x$	$+ \frac{1}{5}x^5$	$+ \frac{1}{5}z^5$, &c.
	$- \frac{1}{4}x^4$	$- \frac{1}{4}z^4 - z^3p$, &c.
	$+ \frac{1}{3}x^3$	$+ \frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2$, &c.
	$- \frac{1}{2}x^2$	$- \frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$
	$+ x$	$+ z + p$
	$- z$	$- z$
$\frac{1}{2}z^2 + q = p$	$+ zp^2$	$+ \frac{1}{4}z^5$, &c.
	$- \frac{1}{2}p^2$	$- \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}z^2q$, &c.
	$- z^3p$	$- \frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+ z^2p$	$+ \frac{1}{2}z^4 + z^2q$
	$- z^2p$	$- \frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+ p$	$+ \frac{1}{2}z^2 + q$
	$+ \frac{1}{5}z^5$	$+ \frac{1}{5}z^5$
	$- \frac{1}{4}z^4$	$- \frac{1}{4}z^4$
	$+ \frac{1}{3}z^3$	$+ \frac{1}{3}z^3$
	$- \frac{1}{2}z^2$	$- \frac{1}{2}z^2$

$1 - z + \frac{1}{2}z^2) \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{10}z^5 (\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}z^5$

Analyſin ut vides exhibui propter adnotanda duo ſequentia.

1. Quod inter ſubſtituendum, iſtos terminos ſemper omitto quos nulli deinceps uſui fore prævideam. Cujus rei regula eſto, quod poſt primum terminum ex qualibet quantitate ſibi collaterali reſultantem

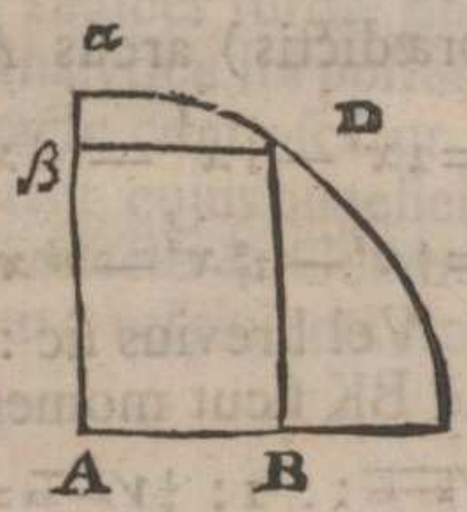
non

non addo plures terminos dextrorsum quam istius primi termini index dimensionis ab indice dimensionis maximæ unitatibus distat. Ut in hoc exemplo, ubi maxima dimensio est 5, omisi omnes terminos post z^5, post z^4 posui unicum, & duos tantum post z^3. Cum radix extrahenda (x) sit parium ubique, vel imparium dimensionum, hæc esto regula; Quod post primum terminum ex qualibet quantitate sibi collaterali resultantem non addo plures terminos dextrorsum, quam istius primi termini index dimensionis ab indice dimensionis maximæ binis unitatibus distat; vel ternis unitatibus, si indices dimensionum ipsius x unitatibus ubique ternis a se invicem distant, & sic de reliquis.

2. Cum video p, q, vel r, &c. in æquatione noviſſime resultante esse unius tantum dimensionis, ejus valorem, hoc est, reliquos terminos quotienti addendos, per divisionem quæro. Ut hic vides factum.

Inventio Basis ex data Longitudine Curvæ.

Si ex dato arcu αD Sinus AB desideratur; æquationis $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. supra inventæ, (posito nempe AB$=x$, αD$=z$, & A$\alpha=1$,) radix extracta erit $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$, &c.



Et præterea si Cosinum Aβ ex isto arcu dato cupis, fac Aβ $(=\sqrt{1-xx}) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}$, &c.

De Serie progressionum continuanda.

Hic obiter notetur, quod 5 vel 6 terminis istarum radicum cognitis, eas plerumque ex analogia observata poteris ad arbitrium producere.

Sic hanc $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c. produces dividendo ultimum terminum per hos ordine numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

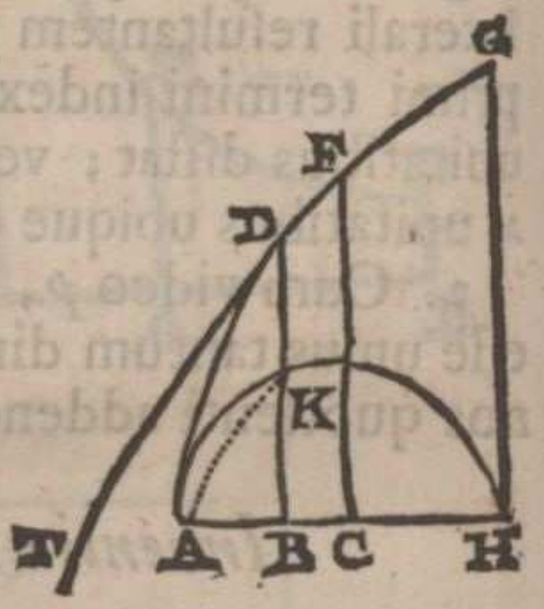
Et hanc $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7$, &c. per hos 2×3, 4×5, 6×7, 8×9, 10×11, &c.

Et hanc $x = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6$, &c. per hos 1×2, 3×4, 5×6, 7×8, 9×10, &c.

Et hanc $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. multiplicando per hos $\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{3\times3}{4\times5}, \frac{5\times5}{6\times7}, \frac{7\times7}{8\times8}$, &c. Et sic in reliquis.

Applicatio prædictorum ad Curvas Mechanicas.

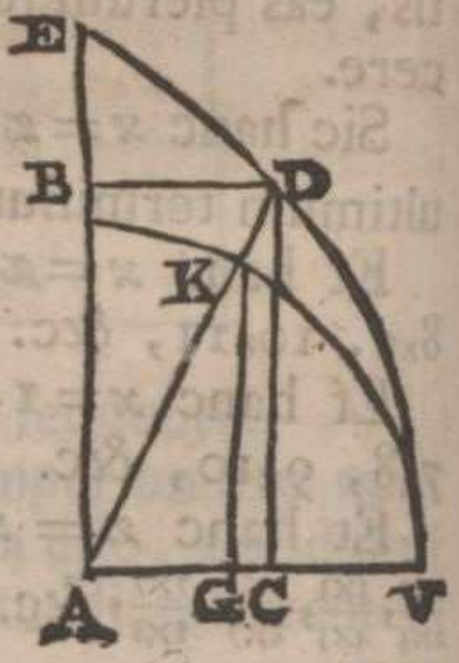
Et hæc de curvis Geometricis dicta sufficiant. Quinetiam curva etiamsi Mechanica sit, methodum tamen nostram nequaquam respuit.



Exemplo sit Trochoides, ADFG, cujus vertex A, & axis AH, & AKH rota qua describitur. Et quæratur Superficies ABD. Jam posito $AB=x$, $BD=y$, ut supra, & $AH=1$; primo quæro Longitudinem ipsius BD. Nempe ex natura Trochoidis est $KD=$ arcui AK. Quare tota $BD=BK+$ arc. AK. Sed est BK $(=\sqrt{x-xx})-x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c. & (ex prædictis) arcus $AK=x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{40}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{112}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Ergo tota BD $=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Et (per Reg. 2.) area ABD $=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}$, &c.

Vel brevius sic: Cum recta AK tangenti TD parallela sit, erit AB ad BK sicut momentum lineæ AB ad momentum lineæ BD, hoc est x: $\sqrt{x-xx}::1:\frac{1}{x}\sqrt{x-xx}=x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}}-\frac{5}{128}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Quare (per Reg. 2.) $BD=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}-\frac{5}{576}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Et superficies $ABD=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}-\frac{5}{3168}x^{\frac{11}{2}}$, &c.

Non dissimili modo (posito C centro circuli, & $CB=x$) obtinebis aream CBDF, &c.



Sit area ABDV Quadratricis VDE (cujus vertex est V, & A centrum circuli interioris VK cui aptatur) invenienda. Ducta qualibet AKD, demitto perpendiculares DB, DC, KG. Eritque KG: AG:: AB (x): BD (y), sive $\frac{x\times AG}{KG}=y$. Verum ex natura Quadratricis est BA $(=DC)=$ arcui VK, sive $VK=x$. Quare posito $AV=1$, erit $GK=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$, &c. ex supra ostensis, & $GA=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6$, &c.

Adeoque

Adeoque $y\,(=\frac{x \times AG}{KG})=\frac{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}x^4-\frac{1}{720}x^6}{1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{5040}x^6}$ &c, sive, divisione facta, $y=1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4-\frac{2}{945}x^6$, &c. & (per Reg. 2.) area AVDB $=x-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{225}x^5-\frac{2}{6615}x^7$, &c.

Sic longitudo Quadratricis VD, licet calculo difficiliori, determinabilis est.

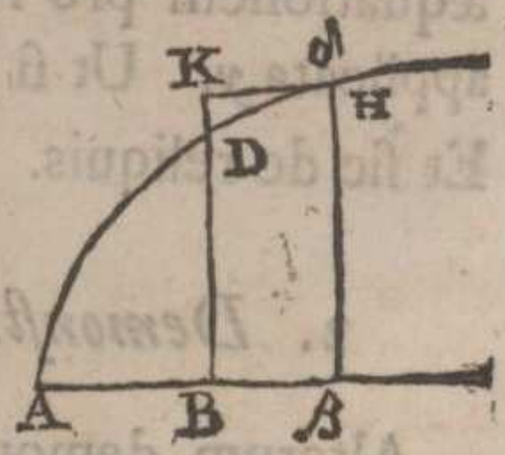
Nec quicquam hujusmodi scio ad quod hæc methodus idque variis modis, sese non extendit. Imo tangentes ad curvas Mechanicas (si quando id non alias fiat) hujus ope ducantur. Et quicquid vulgaris Analysis per æquationes ex finito terminorum numero constantes (quando id sit possibile) perficit, hæc per æquationes infinitas semper perficiat: Ut nil dubitaverim nomen Analysis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hac non minus certa sunt quam in illa, nec æquationes minus exactæ; licet omnes earum terminos, nos homines & rationis finitæ nec designare neque ita concipere possimus, ut quantitates inde desideratas exacte cognoscamus: Sicut radices surdæ finitarum æquationum nec numeris nec quavis arte Analytica ita possunt exhiberi ut alicujus quantitas a reliquis distincta exacte cognoscatur.

Denique ad Analyticam merito pertinere censeatur cujus beneficio curvarum areæ & longitudines &c. (id modo fiat) exacte & Geometrice determinentur. Sed ista narrandi non est locus, respicienti duo præ reliquis demonstranda occurrunt.

1. *Demonstratio quadraturæ curvarum simplicium in Regula prima.*

Præparatio pro Regula prima demonstranda.

Sit itaque curvæ alicujus ADδ Basis AB$=x$, perpendiculariter applicata BD$=y$, & area ABD$=z$, ut prius. Item sit B$\beta=o$, BK$=v$, & rectangulum BβHK (ov) æquale spatio B$\beta\delta$D.



Est ergo A$\beta=x+o$, & A$\delta\beta=z+ov$. His præmissis, ex relatione inter x & z ad arbitrium assumpta quæro y isto, quem sequentem vides, modo.

Pro lubitu sumatur $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$, sive $\frac{4}{9}x^3=zz$. Tum $x+o$ (Aβ) pro x, & $z+ov$ (A$\delta\beta$) pro z substitutis, prodi-

 bit

bit $\frac{4}{9}$ in $x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3 =$ (ex natura curvæ) $z^2 + 2zov + o^2v^2$. Et ſublatis ($\frac{4}{9}x^3$ & zz) æqualibus, reliquisque per o diviſis, reſtat $\frac{4}{9}$ in $3x^2 + 3xo + o^2 = 2zv + ov^2$. Si jam ſupponamus Bβ in infinitum diminui & evaneſcere, ſive o eſſe nihil, erunt v & y æquales, & termini per o multiplicati evaneſcent, quare reſtabit $\frac{4}{9} \times 3xx = 2zv$, ſive $\frac{2}{3}xx\,(=zy)$ $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, ſive $x^{\frac{1}{2}}\,(=\frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}})=y$. Quare e contra ſi $x^{\frac{1}{2}}=y$, erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$.

Demonſtratio.

Vel generaliter, ſi $\frac{n}{m+n} \times ax^{\frac{m+n}{n}} = z$; ſive, ponendo $\frac{na}{m+n} = c$, & $m + n = p$, ſi $cx^{\frac{p}{n}} = z$, ſive $c^n x^p = z^n$: tum $x+o$ pro x, & $z+ov$ (ſive, quod perinde eſt, $z+oy$) pro z, ſubſtitutis, prodit c^n in $x^p + pox^{p-1}$, &c. $= z^n + noyz^{n-1}$, &c. reliquis nempe terminis, qui tandem evaneſcerent, omiſſis. Jam ſublatis $c^n x^p$ & z^n æqualibus, reliquisque per o diviſis, reſtat $c^n p x^{p-1} = nyz^{n-1}$ $(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}}$ ſive, dividendo per $c^n x^p$, erit $px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$ ſive $pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$; vel reſtituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c, & $m+n$ pro p, hoc eſt, m pro $p-n$, & na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare e contra, ſi $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q. E. D.

Inventio curvarum quæ poſſunt quadrari.

Hinc in tranſitu notetur modus quo curvæ tot quot placuerit, quarum areæ ſunt cognitæ, poſſunt inveniri; ſumendo nempe quamlibet æquationem pro relatione inter aream z & baſin x ut inde quæratur applicata y. Ut ſi ſupponas $\sqrt{aa+xx} = z$, ex calculo invenies $\frac{x}{\sqrt{aa+xx}} = y$. Et ſic de reliquis.

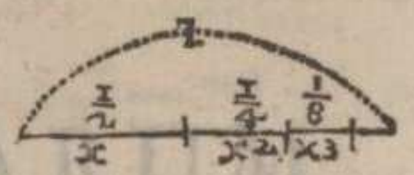
2. *Demonſtratio reſolutionis æquationum affectarum.*

Alterum demonſtrandum eſt literalis æquationum affectarum reſolutio. Nempe quod Quotiens, cum x ſit ſatis parva, quo magis produci-

ducitur eo magis ad veritatem accedit, ut defectus (p, q, vel r, &c.) quo distat ab exacto valore ipsius y, tandem evadat minor quavis data quantitate; & in infinitum producta sit ipsi y æqualis. Quod sic patebit.

1. Quoniam ex ultimo termino æquationum quarum p, q, r, &c. sunt radices, quantitas illa in qua x est minimæ dimensionis (hoc est, plusquam dimidium istius ultimi termini, si supponis x satis parvam esse) in qualibet operatione perpetuo tollitur: iste ultimus terminus (per 1. 10. *Elem.*) tandem evadet minor quavis data quantitate; & prorsus evanescet si opus infinite continuatur.

Nempe si $x = \frac{1}{2}$, erit x dimidium omnium $x + x^2 + x^3 + x^4$, &c. & x^2 dimidium omnium $x^2 + x^3 + x^4 + x^5$, &c. Itaque si $x \sqsupset \frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium $x + x^2 + x^3$, &c. & x^2 plusquam dimidium omnium $x^2 + x^3 + x^4$, &c. Sic si $\frac{x}{b} \sqsupset \frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium $x + \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{bb}$, &c. Et sic de reliquis. Et numeros coefficientes quod attinet, illi plerumque decrescunt perpetuo, vel si quando increscant, tantum opus est ut x aliquoties adhuc minor supponatur.



2. Si ultimus terminus alicujus æquationis continuo diminuatur donec tandem evanescat, una ex ejus radicibus etiam diminuetur donec cum ultimo termino simul evanescat.

3. Quare quantitatum p, q, r, &c. unus valor continuo decrescit donec tandem, cum opus in infinitum producitur, penitus evanescat.

4. Sed valores istarum p, q, vel r, &c. una cum quotiente eatenus extracta adæquant radices æquationis propositæ (Sic in resolutione æquationis $y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, supra ostensa, percipies $y = a + p = a - \frac{1}{4}x + q = a - \frac{1}{4}x + \frac{xx}{64a} + r$, &c.) Unde satis liquet propositum quod quotiens infinite producta est una ex valoribus de y.

Idem patebit substituendo quotientem pro y in æquationem propositam. Videbis enim terminos illos sese perpetuo destruere in quibus x est minimarum dimensionum.



CUM *in Epistolis* D. Newtoni, *vel in lucem jamdudum editis, vel quæ in manus nostras inciderunt, reperiantur aliqua quæ ad hanc Doctrinam pertinent, ea excerpere & huic Tractatui adjungere visum est.*

EXCERPTA

Ex Epiſtolis D. *NEWTONI*

Ad Methodum

FLUXIONUM,

ET

SERIERUM INFINITARUM

Spectantibus.

Fragmentum Epiſtolæ ad* D. Oldenburgium 13 Junii 1676 *miſſæ.*

FRactiones in Infinitas Series reducuntur per diviſionem; & quantitates radicales per extractionem radicum, perinde inſtituendo operationes iſtas in ſpeciebus ac inſtitui ſolent in decimalibus numeris. Hæc ſunt fundamenta harum reductionum; ſed extractiones radicum, multum abbreviantur per hoc *Theorema.*

$$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \tfrac{m}{n}AQ + \tfrac{m-n}{2n}BQ + \tfrac{m-2n}{3n}CQ + \tfrac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$$

Ubi $P+PQ$ ſignificat quantitatem cujus Radix, vel etiam dimenſio quævis, vel radix dimenſionis, inveſtiganda eſt. P, primum terminum quantitatis ejus; Q, reliquos terminos diviſos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem indicem dimenſionis ipſius $P+PQ$: Sive dimenſio illa integra ſit; ſive (ut ita loquar) fracta; ſive affirmativa, ſive negativa. Nam, ſicut Analyſtæ, pro *aa*, *aaa*, &c. ſcribere ſolent a^2, a^3, &c. ſic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c}$, a^5, ſcribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$, & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a3}$, ſcribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}.

Et

* *Extat Epiſtola in Tom.* 3. *Operum* Wallifii.

Et ſic pro $\frac{aa}{\sqrt{c:a3+b^2x}}$ ſcribo $aa\times\overline{a^3+b^2x}|^{-\frac{1}{3}}$; & pro $\frac{a^2b}{\sqrt{c:a3+b^2x\times a3+b^2x}}$ ſcribo $a^2b\times\overline{a^3+b^2x}|^{-\frac{2}{3}}$: In quo ultimo caſu, ſi $\overline{a^3+b^2x}|^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur eſſe $\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}}$ in Regula; erit $P=a^3$, $Q=\frac{b^2x}{a3}$, $m=-2$, & $n=3$. Denique, pro terminis inter operandum inventis in quoto, uſurpo A, B, C, D, &c. nempe A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$, B pro ſecundo $\frac{m}{n}$ AQ, & ſic deinceps. Cæterum uſus Regulæ patebit exemplis.

Exempl. 1. Eſt $\sqrt{\overline{c^2+x^2}}$ (ſeu $\overline{c^2+x^2}|^{\frac{1}{2}}$) $=c+\frac{x^2}{2c}-\frac{x^4}{8c3}+\frac{x^6}{16c5}-\frac{5x8}{128c7}+\frac{7x^{10}}{256c9}$ &c. Nam, in hoc caſu, eſt $P=c^2$, $Q=\frac{x^2}{c^2}$, $m=1$, $n=2$, $A(=P^{\frac{m}{n}}=\overline{cc}^{\frac{1}{2}})=c$, $B(=\frac{m}{n}AQ)=\frac{x2}{2c}$, $C(=\frac{m-n}{2n}BQ)=-\frac{x4}{8c3}$, & ſic deinceps.

Exempl. 2. Eſt $\sqrt{5:\overline{c5+c4x-x5}}$ (i. e. $\overline{c^5+-c^4x-x^5}|^{\frac{1}{5}}$) $=c+\frac{c4x-x5}{5c4}-\frac{2c8x^2+4c4x6-2x10}{25c9}$ + &c. Ut patebit ſubſtituendo in allatam Regulam, 1 pro m, 5 pro n, c^5 pro P, & $\frac{c4x-x5}{c5}$ pro Q. Poteſt etiam $-x^5$ ſubſtitui pro P, & $\frac{c4x+c5}{-x5}$ pro Q, & tunc evadet $\sqrt{5:\overline{c5+c4x-x5}}=-x+\frac{c4x+c5}{5x4}+\frac{2c8x^2+4c9x+c10}{25x9}$ + &c. Prior modus eligendus eſt, ſi x valde parvum ſit; poſterior, ſi valde magnum.

Exempl. 3. Eſt $\frac{N}{\sqrt{3:\overline{y^3-a^2y}}}$ (hoc eſt, $N\times\overline{y^3-a^2y}|^{-\frac{1}{3}}$) æqualis $N\times\frac{1}{y}+\frac{a2}{3y3}+\frac{2a4}{9y5}+\frac{14a6}{81y7}$ + &c. Nam $P=y^3$, $Q=\frac{-aa}{yy}$, $m=-1$, $n=3$. $A(=P^{\frac{m}{n}}=y^3\times^{-\frac{1}{3}})=y^{-1}$, hoc eſt $\frac{1}{y}$. $B(=\frac{m}{n}AQ=^{-\frac{1}{3}}\times\frac{1}{y}\times\frac{-aa}{yy^2})=\frac{aa}{3y3}$, &c.

Exempl. 4. Radix cubica ex quadrato-quadrato ipſius $d+e$, (hoc eſt, $\overline{d+e}|^{\frac{4}{3}}$) eſt $d^{\frac{4}{3}}+\frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3}+\frac{2e^2}{2d^{\frac{2}{3}}}-\frac{4e3}{81d^{\frac{5}{3}}}$ + &c. Nam $P=d$, $Q=\frac{e}{d}$, $m=4$, $n=3$, $A(=P^{\frac{m}{n}})=d^{\frac{4}{3}}$, &c.

Exempl. 5. Eodem modo ſimplices etiam poteſtates eliciuntur. Ut ſi quadrato-cubus ipſius $d+e$, (hoc eſt, $\overline{d+e}^5$, ſeu $\overline{d+e}|^{\frac{5}{1}}$) deſideretur: erit, juxta Regulam, $P=d$, $Q=\frac{e}{d}$, $m=5$, & $n=1$; adeoque $A(=P^{\frac{m}{n}})=d^5$, $B(=\frac{m}{n}AQ)=5d^4e$, & ſic $C=10d^3e^2$, $D=10d^2c^3$, $E=5de^4$, $F=e^5$, & $G(=\frac{m-5n}{6n}FQ)=0$. Hoc eſt, $\overline{d+e}^5=d^5+5d^4e+10d^3e^2+10d^2e^3+5de^4+e^5$.

Exem.

Exempl. 6. Quinetiam Diviſio, ſive ſimplex ſit, ſive repetita, per eandem Regulam perficitur. Ut ſi $\frac{1}{d+e}$ (hoc eſt $\overline{d+e}|^{-1}$ ſive $\overline{d+e}|^{-\frac{1}{1}}$) in ſeriem ſimplicium terminorum reſolvendum ſit: Erit juxta Regulam $P = d$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = -1$, $n = 1$, & A ($= P^{\frac{m}{n}} = d^{-\frac{1}{1}}$) $= d^{-1}$ ſeu $\frac{1}{d}$, B ($= \frac{m}{n} AQ = -1 \times \frac{1}{d} \times \frac{e}{d} = -\frac{e}{d^2}$, & ſic $C = \frac{ee}{d^3}$, $D = -\frac{e^3}{d^4}$, &c. Hoc eſt $\frac{1}{d+e} = \frac{1}{d} - \frac{e}{d^2} + \frac{e^2}{d^3} - \frac{e^3}{d^4} +$ &c.

Exempl. 7. Sic & $\overline{d+e}|^{-3}$ (hoc eſt unitas ter diviſa per $d+e$, vel ſemel per cubum ejus,) evadit $\frac{1}{d^3} - \frac{3e}{d^4} + \frac{6e^2}{d^5} - \frac{10e^3}{d^6} +$ &c.

Exempl. 8. Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{1}{3}}$, (hoc eſt N diviſum per radicem cubicam ipſius $d+e$,) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2e^2}{9d^{\frac{7}{3}}} - \frac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}} +$ &c.

Exempl. 9. Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{3}{5}}$ (hoc eſt N diviſum per radicem quadrato-cubicam ex cubo ipſius $d+e$, ſive $\frac{N}{\sqrt{5}:d^3+3d^2e+3de^2+e^3}$) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{3}{5}}} - \frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}} + \frac{12e^2}{25d^{\frac{13}{5}}} - \frac{52e^3}{125d^{\frac{18}{5}}} +$ &c.

Per eandem Regulam Geneſis Poteſtatum, Diviſiones per Poteſtates aut per quantitates radicales, & Extractiones radicum altiorum in numeris etiam commode inſtituuntur.

Extractiones Radicum affectarum in ſpeciebus imitantur earum extractiones in numeris, ſed methodus *Vietæ* & *Oughtredi* noſtri huic negotio minus idonea eſt: Quapropter aliam excogitare adactus ſum. [*Hujus ſpecimen exhibetur in Tractatu præcedente Pag.* 8.]

Quomodo ex æquationibus, ſic ad infinitas ſeries reductis, Areæ & Longitudines curvarum, Contenta & Superficies ſolidorum, vel quorumlibet ſegmentorum figurarum quarumvis, eorumque Centra gravitatis determinantur; & quomodo etiam Curvæ omnes Mechanicæ ad ejusmodi æquationes infinitarum ſerierum reduci poſſint, indeque Problemata circa illas reſolvi perinde ac ſi Geometricæ eſſent; nimis longum foret deſcribere, ſufficiat ſpecimina quædam talium Problematum recenſuiſſe: Inque iis, brevitatis gratia, literas A, B, C, D, &c. pro terminis ſeriei, ſicut ſub initio, nonnunquam uſurpabo.

1. *Si ex dato ſinu recto, vel ſinu verſo, Arcus deſideretur:* Sit ra-

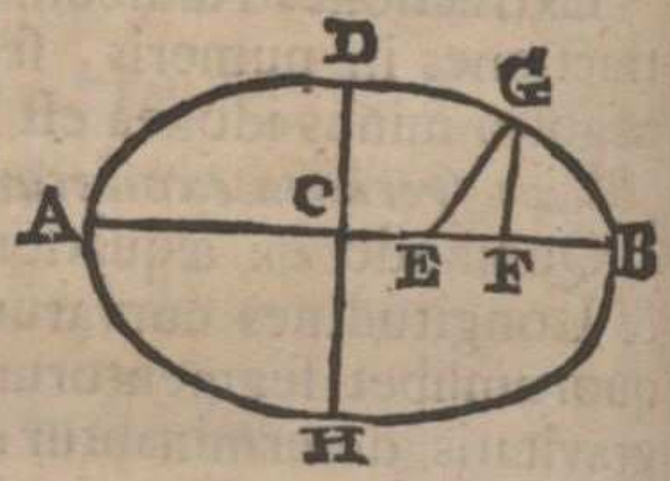
dius r, & ſinus rectus x: Eritque Arcus $= x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6}$ &c. hoc eſt, $= x + \frac{1\times1\times x^3}{2\times3\times r^2}A + \frac{3\times3\times x^5}{4\times5\times r^4}B + \frac{5\times5\times x^7}{6\times7\times r^6}C + \frac{7\times7\times x^9}{8\times9\times r^8}D +$ &c.

Vel, ſit d diameter, ac x ſinus verſus; & erit Arcus æqualis $d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} +$ &c. hoc eſt, $= \sqrt{dx}$ in $1 + \frac{x}{6d} + \frac{3x^2}{40d^2} + \frac{5x^3}{112d^3} +$ &c.

2. Si viciſſim, *ex dato Arcu deſideretur ſinus*: Sit radius r, & arcus z. Eritque ſinus rectus $= z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} -$ &c. hoc eſt, $= z - \frac{zz}{2\times3rr}A - \frac{zz}{4\times5rr}B - \frac{zz}{6\times7rr}C -$ &c. Et ſinus verſus $= \frac{z^2}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \frac{z^8}{40320r^7} +$ &c. hoc eſt, $= \frac{zz}{1\times2r} - \frac{zz}{3\times4rr}A - \frac{zz}{5\times6rr}B - \frac{zz}{7\times8rr}C -$ &c.

3. *Si Arcus capiendus ſit in ratione data ad alium Arcum*: Eſto diameter $= d$, chorda arcus dati $= x$, & arcus quæſitus ad arcum illum datum ut n ad 1; Eritque arcus quæſiti Chorda $= nx + \frac{1-nn}{2\times3dd}xxA + \frac{9-nn}{4\times5dd}xxB + \frac{25-nn}{6\times7dd}xxC + \frac{36-nn}{8\times9dd}xxD + \frac{49-nn}{10\times11dd}xxE +$ &c. Ubi nota, quod cum n eſt numerus impar, ſeries deſinet eſſe infinita, & evadet eadem quæ prodit per Vulgarem Algebram ad multiplicandum datum angulum per iſtum numerum n.

4. Si in Axe alterutro AB, Ellipſeos ABD (cujus centrum C, & axis alter DH) detur punctum aliquod E, circa quod recta EG occurrens Ellipſi in G, motu angulari feretur; & ex data area ſectoris Elliptici BEG, quæratur recta GF, quæ a puncto G ad axem AB normaliter demittitur: Eſto $BC = q$, $DC = r$, $EB = t$, ac duplum areæ $BEG = z$; & erit $GF = \frac{1}{t}z - \frac{q}{6r^2+t^2}z^3 + \frac{10q^2-9qt}{120r^4t^2}z^5 - \frac{280q^3+504q^2t-225qt^2}{5040r^6t^3}z^7 +$ &c. Sic itaque Aſtronomicum illud *Kepleri* Problema reſolvi poteſt.



5. In eadem Ellipſi, ſi ſtatuatur $CD = r$, $\frac{CB^2}{CD} = c$, & $CF = x$:

Erit

Erit arcus Ellipticus DG $= x + \frac{1}{6c^2}x^3 + \frac{1}{10rc^3}x^5 + \frac{1}{14r^2c^4}x^7 + \frac{8}{18r^3c^5}x^9 + \frac{1}{22r^4c^6}$

x'' + &c. $- \frac{1}{40c^4} - \frac{1}{28rc^5} - \frac{1}{24r^2c^6} - \frac{1}{22r^3c^7}$

$+ \frac{1}{112c^6} + \frac{1}{48rc^7} \pm \frac{3}{88r^2c^8}$

$- \frac{5}{1152c^8} - \frac{1}{352rc^9}$

$+ \frac{7}{2816c^{10}}$

Hic numerales Coefficientes ſupremorum terminorum ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$, &c.) ſunt in Muſica progreſſione: Et numerales Coefficientes omnium inferiorum in unaquaque columna prodeunt multiplicando continuo numeralem Coefficientem ſupremi termini per terminos hujus progreſſionis $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, $\frac{\frac{3}{4}n-3}{4}$, $\frac{\frac{5}{6}n-5}{6}$, $\frac{\frac{7}{8}n-7}{8}$, $\frac{\frac{9}{10}n-9}{10}$, &c. Ubi n ſignificat numerum dimenſionum ipſius c in denominatore iſtius ſupremi termini. E. *g.* ut terminorum infra $\frac{1}{22r^4c^6}$, numerales coefficientes inveniantur, pono $n = 6$, ducoque $\frac{1}{22}$ (numeralem coefficientem ipſius $\frac{1}{22r^4c^6}$) in $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, hoc eſt, in 1; & prodit $\frac{1}{22}$, numeralis coefficiens termini proxime inferioris: dein duco hunc $\frac{1}{22}$ in $\frac{\frac{3}{4}n-3}{4}$, ſive in $\frac{n-3}{4}$, hoc eſt, in $\frac{3}{4}$; & prodit $\frac{3}{88}$ numeralis coefficiens tertii termini in iſta columna. Atque iſta $\frac{3}{88} \times \frac{\frac{5}{6}n-5}{6}$ facit $\frac{5}{352}$ numeralem coefficientem quarti termini; & $\frac{5}{352} \times \frac{\frac{7}{8}n-7}{8}$ facit $\frac{7}{2816}$ numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis ad infinitum uſque columnis præſtari poteſt: Adeoque valor ipſius DG per hanc Regulam pro lubitu produci.

Adhæc, ſi BF dicatur x, ſitque r latus rectum Ellipſeos, & $e = \frac{r}{AB}$; Erit Arcus Ellipticus

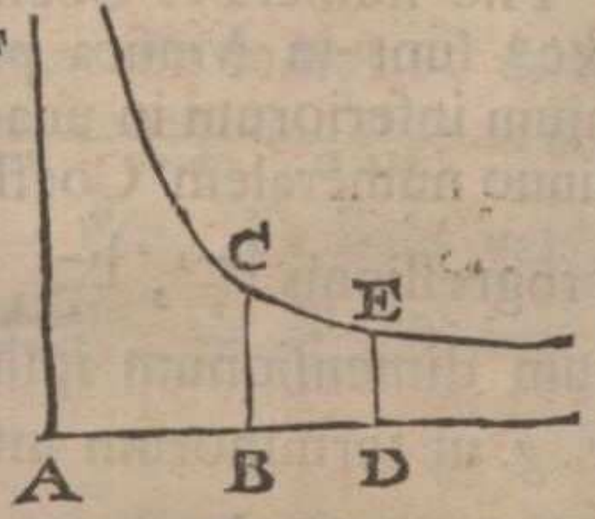
$$BG = \sqrt{rx} \text{ in } \overline{\begin{array}{l} 1 + \left.\begin{array}{l} 2 \\ -\frac{1}{2}e \end{array}\right\} x - \left.\begin{array}{l} 2 \\ +3e \\ -\frac{5}{8}e^2 \end{array}\right\} x^2 + \left.\begin{array}{l} 4 \\ -9e \\ +\frac{23}{4}e^2 \\ -\frac{7}{16}e^3 \end{array}\right\} x^3 - \left.\begin{array}{l} 10 \\ +30e \\ -\frac{123}{4}e^2 \\ +\frac{91}{8}e^3 \\ -\frac{45}{128}e^4 \end{array}\right\} x^4, + \&c. \\ \hline 3r \quad 5r^2 \quad 7r^3 \quad 9r^4 \end{array}}$$

Quare, ſi ambitus totius Ellipſeos deſideretur; Biſeca CB in F, & quære Arcum DG, per prius Theorema, & Arcum BG per poſterius.

6. Si, vice verſa, *ex dato arcu Elliptico* DG, *quæratur Sinus ejus* CF; tum dicto CD $=r$, $\frac{CB^2}{CD}=c$, & arcu illo DG $=z$; Erit

$$CF=z-\frac{1}{6c^2}z^3-\frac{1}{10rc3}z^5-\frac{1}{14r^2c4}z^7-\&c.$$
$$+\frac{13}{120c4}\quad+\frac{71}{420cr5}$$
$$-\frac{493}{5040c^6}$$

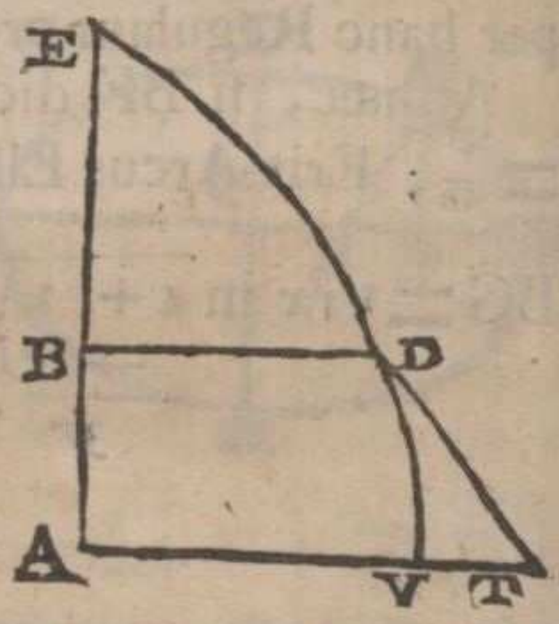
Quæ autem de Ellipſi dicta ſunt, omnia facile accommodantur ad Hyperbolam; mutatis tantum ſignis ipſorum *c* & *e* ubi ſunt imparium dimenſionum.



7. Præterea, ſi ſit CE Hyperbola, cujus Aſymptoti AD, AF rectum angulum FAD conſtituant; & ad AD erigantur utcunque perpendicula BC, DE occurrentia Hyperbolæ in C & E: & AB dicatur *a*, BC *b*, & area BCED *z*;

Erit BD $=\frac{z}{b}+\frac{z^2}{2ab^2}+\frac{z3}{6a^2b3}+\frac{z4}{24a3b4}+\frac{z^5}{120a4b5}+$ &c. Ubi coefficientes denominatorum prodeunt multiplicando terminos hujus Arithmeticæ progreſſionis, 1, 2, 3, 4, 5, &c. in ſe continuo. Et hinc ex Logarithmo dato poteſt numerus ei competens invenire.

8. Eſto VDE *Quadratrix*, cujus vertex eſt V, exiſtente A centro & AE ſemi-diametro Circuli ad quem aptatur, & angulo VAE recto: Demiſſoque ad AE perpendiculo quovis DB, & acta Quadratricis Tangente DT occurrente axi ejus AV in T:



Dic AV $=a$, & AB $=x$; Eritque DB $=a-\frac{x2}{3a}$ $-\frac{x4}{45a3}-\frac{2x^6}{945a5}-$ &c. Et VT $=\frac{x^2}{3a}+\frac{x4}{15a3}+\frac{2x^6}{189a5}$ +&c. Et Area AVDB $=ax-\frac{x3}{9a}-\frac{x5}{215a3}-\frac{2x7}{6615a5}$ —&c. Et Arcus VD $=x+\frac{2x3}{27a^2}+\frac{14x^5}{2025a4}+\frac{604x7}{893025a^6}$ +&c. Unde viciſſim, ex dato BD, vel VT, aut area AVDB, arcuve VD, per reſolutionem affectarum æquationum erui poteſt x ſeu AB.

9. Eſto denique AEB *Sphæroides*, revolutione Ellipſeos AEB circa axem AB genita, & ſecta planis quatuor, AB per axem tranſeunte, DG parallelo AB, CDE perpendiculariter biſecante axem, & FG parallelo CE: ſitque recta CB $=a$, CE $=c$, CF $=x$, & FG $=y$.

Et

Et Sphæroideos ſegmentum CDGF dictis quatuor planis comprehenſum, erit $+2cxy - \frac{x}{3c}y^3 - \frac{x}{20c^3}y^5 - \frac{x}{56c^5}y^7 - \frac{5x}{576c^7}y^9$ — &c.

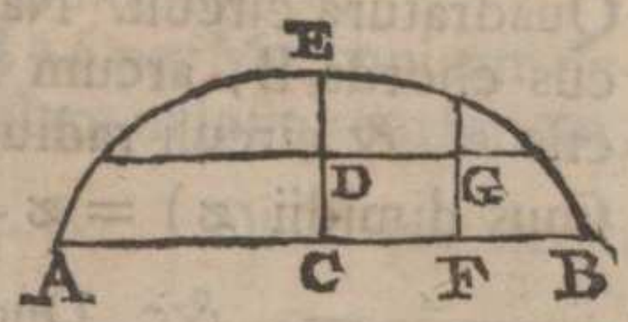
$$- \frac{cx^3}{3a^2} - \frac{x^3}{18ca^2} - \frac{x^3}{40c^3a^2} - \frac{5x^3}{336c^5a^2} - \text{\&c.}$$

$$- \frac{cx^5}{20a^4} - \frac{x}{40ca^4} - \frac{3x^5}{160c^3a^4} - \text{\&c.}$$

$$- \frac{cx^7}{56a^6} - \frac{5x^7}{336ca^6} - \text{\&c.}$$

$$- \frac{5cx^9}{576a^8} - \text{\&c.}$$

— &c.



Ubi numerales coefficientes ſupremorum terminorum ($2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{56} - \frac{5}{576}$, &c.) in infinitum producuntur multiplicando primum coefficientem 2 continuo per terminos hujus progreſſionis $-\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{1\times3}{4\times5}, \frac{3\times5}{6\times7}, \frac{5\times7}{8\times9}, \frac{7\times9}{10\times11}$, &c. Et numerales coefficientes terminorum in unaquaque columna deſcendentium in infinitum producuntur multiplicando continuo coefficientem ſupremi termini in prima columna per eandem progreſſionem, in ſecunda autem per terminos hujus $\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{3\times3}{4\times5}, \frac{5\times5}{6\times7}, \frac{7\times7}{8\times9}$, &c. in tertia per terminos hujus $\frac{3\times1}{2\times3}, \frac{5\times3}{4\times5}, \frac{7\times5}{6\times7}, \frac{9\times7}{8\times9}$, &c. in quarta per terminos hujus $\frac{5\times1}{2\times3}, \frac{7\times3}{4\times5}, \frac{9\times5}{6\times7}$, &c. in quinta per terminos hujus $\frac{7\times1}{2\times3}, \frac{9\times3}{4\times5}, \frac{11\times5}{6\times7}$, &c. Et ſic in infinitum.

Et eodem modo ſegmenta aliorum ſolidorum deſignari, & valores eorum aliquando commode per ſeries quaſdam numerales in infinitum produci poſſunt.

Ex his videre eſt, quantum fines Analyſeos per hujuſmodi infinitas æquationes ampliantur: Quippe quæ, earum beneficio, ad omnia pæne dixerim problemata (ſi numeralia *Diophanti* & ſimilia excipias) ſeſe extendit.

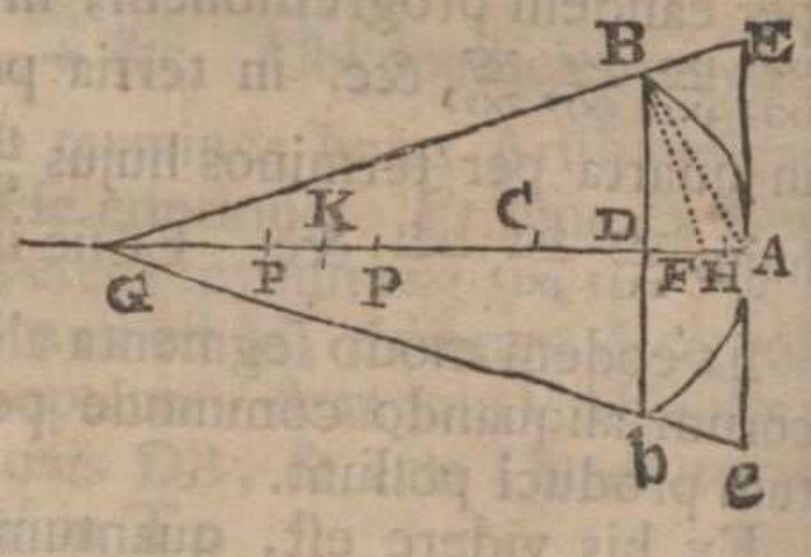
Non tamen omnino univerſalis evadit, niſi per ulteriores quaſdam methodos eliciendi ſeries infinitas. Sunt enim quædam Problemata in quibus non liceat ad ſeries infinitas per diviſionem vel extractionem radicum ſimplicium affectarumve, pervenire. Sed quomodo in iſtis caſibus procedendum ſit, jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere quæ circa reductionem infinitarum ſerierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parcius ſcribo, quod hæ ſpeculationes diu mihi faſtidio eſſe cœperint, adeo ut ab iiſdem jam per quinque fere annos abſtinuerim.

Unum tamen addam: quod poſtquam Problema aliquod ad infinitam æquationem deducitur, poſſint inde variæ approximationes

in uſum Mechanicæ, nullo fere negotio formari; quæ, per alias methodos quæſitæ, multo labore temporisque diſpendio conſtare ſolent.

Cujus rei exemplo eſſe poſſunt Tractatus *Hugenii* aliorumque de Quadratura circuli. Nam, ut ex data arcus chorda A, & dimidii arcus chorda B, arcum illum proxime aſſequaris; finge arcum illum eſſe z, & circuli radium r; juxtaque ſuperiora erit A (nempe duplum ſinus dimidii z) $= z - \frac{z^3}{4\times 6r^2} + \frac{z^5}{4\times 4\times 120r^4} -$ &c. Et B $= \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2\times 16\times 6r^2} + \frac{z^5}{2\times 16\times 16\times 120r^4} -$ &c. Duc jam B in numerum fictitium n, & a producto aufer A, & reſidui ſecundum terminum (nempe $-\frac{nz^3}{2\times 16\times 6r^2} + \frac{z^3}{4\times 6r^2}$) eo ut evaneſcat, pone $=0$; indeque emerget $n=8$, & erit $8B - A = 3z* - \frac{3z^5}{64\times 120r^4} +$ &c. hoc eſt $\frac{8B-A}{3} = z$; errore tantum exiſtente $\frac{z^5}{7680r^4} -$ &c. in exceſſu. Quod eſt Theorema *Hugenianum*.

Inſuper, ſi in Arcus B*b*, ſagitta AD indefinite producta, quæratur punctum G, a quo actæ rectæ GB, G*b* abſcindant Tangentem E*e* quam proxime æqualem Arcui iſti: Eſto circuli centrum C, diameter AK $= d$, & ſagitta AD $= x$: Et erit DB $(= \sqrt{dx - x^2})$



$= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}} -$ &c.

Et AE $(=$ AB$) = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} +$ &c.

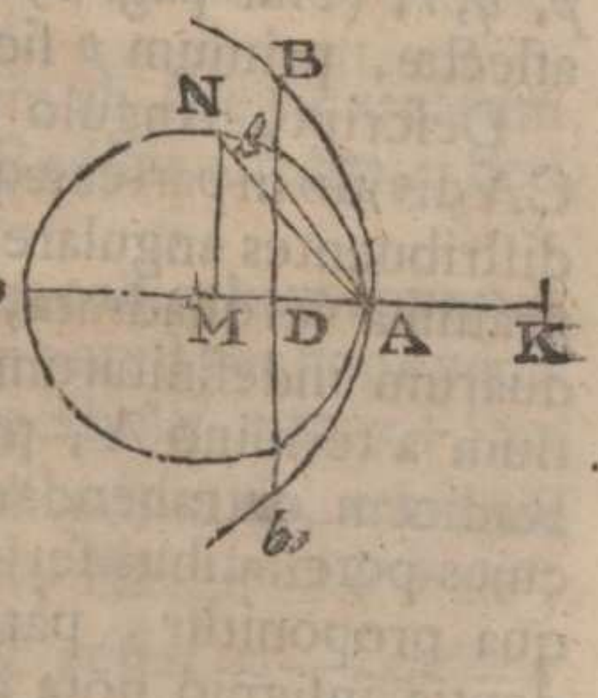
Et AE $-$ DB : AD :: AE : AG; Quare AG $= \frac{3}{2}d - \frac{1}{3}x - \frac{12x^2}{175d} -$ vel $+$ &c. Finge ergo AG $= \frac{3}{2}d - \frac{1}{3}x$; & viciſſim erit DG $(\frac{3}{2}d - \frac{2}{3}x)$: DB :: DA : AE $-$ DB. Quare AE $-$ DB $= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}} +$ &c. Adde DB; & prodit AE $= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}} +$ &c. Hoc aufer de valore ipſius AE ſupra habito, & reſtabit error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}} +$ vel $-$ &c. Quare in AG, cape AH quintam partem DA, & KG $=$ HC, & actæ GBE, G*be*

Gbe abſcindent Tangentem *Ee* quam proxime æqualem arcui BA*b*; errore tantum exiſtente $\frac{16x3}{525d3} \surd dx +$ vel $-$ &c. multo minore ſcilicet quam in Theoremate *Hugenii*. Quod ſi fiat 7AK : 3AH :: 3DH : *n*; & capiatur KG = CH $-$ *n*, erit error adhuc multo minor.

Atque ita, ſi Circuli ſegmentum aliquod B*A*b per Mechanicam deſignandum eſſet: Primo reducerem Aream iſtam in Infinitam ſeriem, puta hanc $B\beta A = \frac{4}{3} d\frac{1}{2} x\frac{1}{2} - \frac{2x\frac{5}{2}}{5d\frac{3}{2}} - \frac{x\frac{7}{2}}{14d\frac{3}{2}} - \frac{x\frac{9}{2}}{36d\frac{3}{2}}$ — &c. Dein quærerem conſtructiones Mechanicas quibus hanc ſeriem proxime aſſequerer; cujuſmodi ſunt hæ: Age rectam AB, & erit ſegmentum B*b*A $= \overline{\frac{2}{3}AB + BD} \times \frac{4}{5}AD$ proxime; exiſtente ſcilicet errore tantum $\frac{x3}{704d2} \surd dx +$ &c. in defectu: Vel proximius, erit ſegmentum illud (biſecto AD in F, & acta recta BF) $= \frac{4BF+AB}{15} \times 4AD$; exiſtente errore ſolummodo $\frac{x3}{560d2} \surd dx +$ &c. qui ſemper minor erit quam $\frac{1}{1500}$ totius ſegmenti, etiamſi ſegmentum illud ad uſque ſemicirculum augeatur.

Sic & in Ellipſi B*A*b, [*Vid. Fig. Præcedent.*] cujus vertex A, axis alteruter AK, & latus rectum AP; cape $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19AK-21AP}{10AK} \times AP$. In Hyperbola vero, cape $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19AK+21AP}{10AK} \times AP$. Et acta recta GBE abſcindet tangentem AE quam proxime æqualem arcui Elliptico vel Hyperbolico AB, dummodo Arcus ille non ſit nimis magnus.

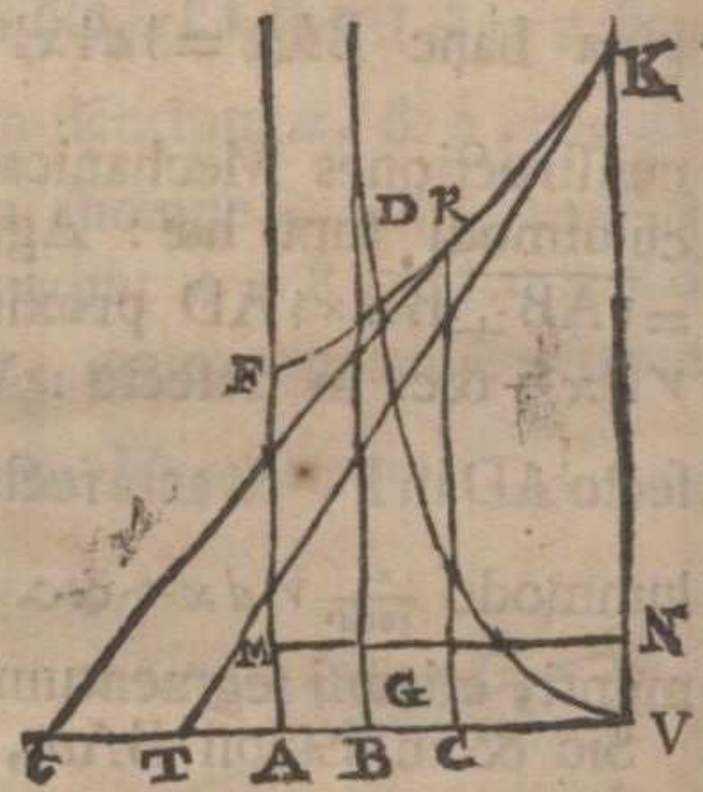
Et pro Area ſegmenti Hyperbolici B*b*A; in DP cape $MD = \frac{3AD^2}{4AK}$, & ad D & M erige perpendicula Dβ, MN occurrentia ſemicirculo ſuper Diametro AP deſcripto: Eritque $\frac{4AN+A\beta}{15} \times 4AD = B\beta A$ proxime: Vel proximius, erit $\frac{21AN+4A\beta}{75} \times 4AD = B\beta A$; ſi modo capiatur $DM = \frac{5AD^2}{7AK}$.



Frag-

Fragmentum Epistolæ D. Newtoni, *ad* D. Oldenburgium 24 Octob. 1676 *missæ.*

LOngitudo *Cissoidis* sic constructur. Sit VD *Cissois*, AV Diameter Circuli ad quem aptatur, V vertex, AF Asymptota ejus, ac DB perpendiculare quodvis ad AV demissum. Cum semi-axe AF = AV, & semi-parametro AG = ¼ AV, describatur Hyperbola F*k*K; & inter AB & AV sumpta AC media proportionali, erigantur ad C & V perpendicula C*k*, VK Hyperbolæ occurrentia in *k* & K; Et agantur rectæ KT, *kt* tangentes Hyperbolam in eisdem K & *k*, & occurrentes AV in T & *t*; Et ad AV constituatur rectangulum AVNM æquale spatio TK*kt*. Et *Cissoidis* VD longitudo erit Sextupla altitudinis VN. Demonstratio perbrevis est.



[Quæ sequuntur scripta sunt in explicationem Epistolæ præcedentis.]

Quod vero attinet ad Inventionem terminorum *p*, *q*, *r*, (*vide* pag. 25 & 8:) in extractione Radicis affectæ, primum *p* sic eruo.

Descripto Angulo recto BAC, latera ejus BA, CA divido in partes æquales; & inde normales erigo distribuentes angulare spatium in æqualia parallelogramma vel quadrata, quæ concipio denominata esse a dimensionibus duarum indefinitarum specierum, puta *x* & *y*, regulariter ascendentium a termino A; prout vides in Fig. 1. inscriptas. Ubi *y* denotat Radicem extrahendam; & *x* alteram indefinitam quantitatem, ex cujus potestatibus series conficienda est. Deinde, cum Æquatio aliqua proponitur, parallelogramma singulis ejus terminis correspondentia insignio nota aliqua: Et Regula ad duo vel forte plura ex insignitis parallelogrammis applicata; quorum unum sit humillimum in columna sinistra juxta AB, & alia ad Regulam dextrorsum sita, cæteraque omnia non contingentia Regulam supra eam jaceant; Seligo ter-

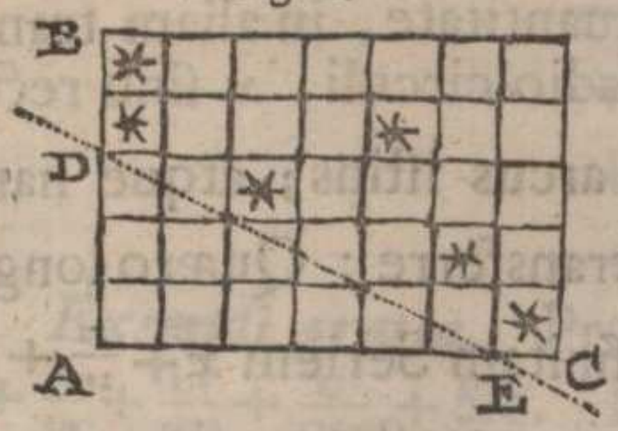
B Fig. 1.

x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4
x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4
x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4
0	y	y^2	y^3	y^4

A C

terminos Æquationis per parallelogramma contingentia Regulam designatos, & inde quæro quantitatem Quotienti addendam.

Fig. 2.



Sic ad extrahendam Radicem y, ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$; parallelogramma hujus terminis respondentia signo nota aliqua *; ut vides in Fig. 2. Dein applico Regulam DE ad inferiorem e locis signatis in sinistra columna; eamque ab inferioribus ad superiora dextrorsum gyrare facio, donec alium similiter vel forte plura e reliquis signatis locis cœperit attingere. Videoque loca sic attacta esse x^3, x^2y^2, & y^6. E terminis itaque, $y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^6$ tanquam nihilo æqualibus (& insuper si placet reductis ad $v^6 - 7v^2 + 6 = 0$, ponendo $y = v\sqrt{ax}$,) quæro valorem y, & invenio quadruplicem, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo termino Quotientis accipere licet, prout e radicibus quampiam extrahere decretum est.

Sic Æquatio $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, quam resolvebam in priori Epistola, dat $-2a^3 + aay + y^3 = 0$, & inde $y = a$ proxime: Cum itaque a sit primus terminus valoris y, pono p pro cæteris omnibus in infinitum, & substituo $a + p = y$. (Obvenient hic aliquando difficultates nonnullæ; sed ex iis, credo, lector se proprio marte extricabit.) Subsequentes vero termini q, r, s, &c. eodem modo ex æquationibus secundis, tertiis, cæterisque eruuntur, quo primus p e prima, sed cura leviori; quia cæteri valores y solent prodire dividendo terminum involventem infimam potestatem indefinitæ quantitatis x per Coefficientem radicis p, q, r, aut s.

Intellexti credo ex superioribus, regressionem ab Areis curvarum ad Lineas rectas, fieri per hanc extractionem Radicis affectæ. Sed duo alii sunt modi quibus idem perficio.

Eorum unus affinis est Computationibus quibus colligebam approximationes sub finem alterius Epistolæ, & intelligi potest per hoc exemplum. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ $z = x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$, &c. Et partibus ejus multiplicatis in se, emerget $z^2 = x^2 + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5$, &c. $z^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5$, &c. $z^4 = x^4 + 2x^5$, &c. $z^5 = x^5$, &c. Jam de z aufero $\frac{1}{2}zz$, & restat $z - \frac{1}{2}zz = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{13}{60}x^5$, &c. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$, & fit $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{40}x^5$, &c. Aufero $\frac{1}{24}z^4$, & restat $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 = x - \frac{1}{120}x^5$,

$-\frac{1}{120}x^5$, &c. Addo $\frac{1}{120}z^5$, & fit $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5=x$ quamproxime; ſive $x=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$, &c.

Eodem modo, Series de una indefinita quantitate, in aliam transferri poſſunt. Quemadmodum ſi poſito r radio circuli, x ſinu recto arcus z, & $x+\frac{x3}{6rr}+\frac{3x5}{40r4}+$&c. longitudine arcus iſtius; atque hanc Seriem a Sinu recto ad Tangentem vellem transferre: Quæro longitudinem Tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr-xx}}$, & reduco in infinitam Seriem $x+\frac{x3}{2rr}+\frac{3x5}{8r4}$ +&c. Vocetur hæc quantitas, t. Colligo poteſtates ejus $t^3=x^3+\frac{3x5}{2rr}$ &c. $t^5=x^5+$&c. Aufero autem t de z, & reſtat $z-t=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{10}x^5-$&c. Addo $\frac{1}{3}t^3$, & fit $z-t+\frac{1}{3}t^3=\frac{1}{5}x^5+$&c. Aufero $\frac{1}{5}t^5$, & reſtat $z-t+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5=0$ quamproxime. Quare eſt $z=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-$&c. Sed ſiquis in uſus Trigonometricos me juſſiſſet exhibere expreſſionem Arcus per Tangentem; eam non hoc circuitu, ſed directa methodo quæſiviſſem.

Per hoc genus Computi colliguntur etiam Series ex duabus vel pluribus indefinitis quantitatibus conſtantes; & Radices affectarum Æquationum magna ex parte extrahuntur. Sed ad hunc poſteriorem uſum adhibeo potius methodum in altera Epiſtola deſcriptam tanquam generaliorem, & (Regulis pro Eliſione ſuperfluorum terminorum habitis) paulo magis expeditam.

Pro Regreſſione vero ab Areis ad Lineas rectas, & ſimilibus, poſſunt hujuſmodi *Theoremata* adhiberi.

THEOREMA I. Sit $z=ay+by^2+cy^3+dy^4+ey^5$, &c.

Et viciſſim erit $y=$

$$\frac{z}{a}$$
$$-\frac{b}{a3}z^2$$
$$+\frac{2b^2-ac}{a5}z^3$$
$$+\frac{5abc-5b3-a2d}{a7}z^4$$
$$+\frac{3a^2c^2-21ab^2c+6a^2bd+14b4-a3e}{a9}z^5+\&c.$$

Exempli gratia. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ, $z=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. Et ſubſtitutis in Regula 1 pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d, & $\frac{1}{5}$ pro e; viciſſim exurgit, $y=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+$&c.

THEOREMA II. Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 + \&c.$
Et viciſſim erit $y =$

$$\frac{z}{a} - \frac{b}{a^4}z^3 + \frac{3b^2 - ac}{a^7}z^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}z^7 + \frac{55b^4 - 55ab^2c + 10a^2bd + 5c^2 - a^3e}{a^{13}}z^9 + \&c.$$

Exempli gratia. Proponatur Æquatio ad Arcum circuli, $z = y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \&c.$ Et ſubſtitutis in Regula 1 pro a, $\frac{1}{6r^2}$ pro b, $\frac{3}{40r^4}$ pro c, $\frac{5}{112r^6}$ pro d &c; orietur $y = z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \&c.$

Fragmentum * *Epiſtolæ* D. Newtoni, *ad* D. Walliſium *Anno* 1692, *miſſæ.*

SUb finem Epiſtolæ anni 1676 [*Hæc ſunt verba* Walliſii] ſcribit [*D. Newtonus*] etiam Problema determinandi Curvas per conditiones Tangentium in ſua poteſtate eſſe, una cum aliis difficilioribus; ad quæ ſolvenda ſe uſum eſſe dicit duplici methodo, una concinniore, altera generaliore; & utramque literis tranſpoſitis celat: quæ in ordinem redactæ hanc ſententiam exhibent. *Una methodus conſiſtit in Extractione fluentis quantitatis ex æquatione ſimul involvente fluxionem ejus. Altera tantum in aſſumptione ſeriei pro quantitate qualibet incognita ex qua cætera commode derivari poſſunt; & in collatione terminorum homologorum æquationis reſultantis ad eruendos terminos aſſumptæ Seriei.* Harum methodorum Secunda ex verbis jam recitatis abſque ulteriore explicatione intelligi poteſt; priorem ab Authore jam accepi ut ſequitur.

Hæc methodus, ait, ejuſdem eſt generis cum ea pro extrahendo radices ex æquationibus affectis ſuperius deſcripta. Pone quod Problema reſolvendum reducatur ad æquationem fluentes quantitates y & z una cum earum fluxionibus $\dot{y}$ & $\dot{z}$ involventem, & quod fluxio ipſius z uniformis ſit. Ut hæc fluxio ex æquatione evaneſcat, pro ea ponatur unitas, & manebit æquatio ſolas y, z & $\dot{y}$ involvens, *quam Reſolvendam* vocat. Proponitur, inventio ipſius y in Serie infinita convergente, quæ ſolam z involvet. Hoc in aliquibus æquationibus impoſſibile eſt, in aliis præparationem æquationum requirit, ubi vero directe confici poſſit reſolutio eſt hujuſmodi.

* *Extat Epiſtola in Tom.* 2. *Operum* Walliſii.

PROBLEMA.

Ex æquatione fluxionem radicis involvente radicem extrahere.

RESOLUTIO.

TErmini omnes, ex eodem æquationis latere consistentes, æquentur nihilo, & ipsarum y & $\dot{y}$ dignitates (si opus sit) exaltentur vel deprimantur, sic ut earum indices nec alicubi negativi sint, nec tamen altiores quam ad hunc effectum requiritur; & sit kz^{λ} terminus infimæ dignitatis eorum qui neque per y neque per ejus fluxionem $\dot{y}$ neque per earum dignitatem quamvis multiplicantur. Sit $lz^{\mu}y^{\alpha}\dot{y}^{\beta}$ terminus alius quilibet, & omnes ordine terminos percurrendo collige ex singulis seorsim numerum $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ sic, ut tot habeas ejusmodi numeros quot sunt termini. Horum numerorum maximus vocetur ν, & z^{ν} erit dignitas primi termini Seriei. Pro ejus coefficiente ponatur a, & in æquatione quæ *resolvenda* dicitur scribe az^{ν} pro y, & $\nu ax^{\nu-1}$ pro $\dot{y}$; ac termini omnes resultantes in quibus z ejusdem est dignitatis ac in termino kz^{λ}, sub propriis signis collecti, ponantur æquales nihilo. Nam hæc æquatio debite reducta dabit coefficientem a. Sic habes az^{ν} terminum primum Seriei.

OPERATIO SECUNDA.

Pro reliquis omnibus hujus Seriei terminis nondum inventis pone p, & habebis Æquationem $y=az^{\nu}+p$, & inde etiam Æquationem $\dot{y}=\nu az^{\nu-1}+\dot{p}$. In resolvenda, pro y & $\dot{y}$ scribe hos eorum valores & habebis Resolvendam novam, ubi p officium præstat ipsius y: & ex hac Resolvenda primum extrahes terminum Seriei p eodem modo atque terminum primum Seriei totius $y=az^{\nu}+p$ ex Resolvenda prima extraxisti.

OPE-

OPERATIO TERTIA ET SEQUENTES.

Dein tertiam Reſolvendam eadem ratione invenias atque ſecundam inveniſti, & ex ea terminum tertium Seriei totius extrahes. Et ſimiliter Reſolvendam quartam invenies, & ex ea quartum Seriei terminum, & ſic in infinitum. Series autem ſic inventa erit radix Æquationis quam extrahere oportuit.

EXEMPLUM.

Ex Æquatione $y^2\dot{z}^2 - z^2\ddot{z}y - d^2\dot{z}\dot{z} + dz\dot{z}^2 = 0$, extrahenda ſit radix y. Pone $\dot{z} = 1$, & Æquatio evadet $y^2 - z^2\dot{y} - dd + dz = 0$, quæ eſt Reſolvenda. Jam vero terminus infimus in quo nec y neque $\dot{y}$ reperitur, eſt dd, qui ipſi kz^λ æquatus dat $\lambda = 0$. Terminis reliquis y^2, $-z^2\dot{y}$ pone $lz^\mu y^\alpha \dot{y}^\beta$ æqualem ſucceſſive, & inde in primo caſu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$, in ſecundo $\mu = 2$, $\alpha = 0$, & $\beta = 1$. Et hinc $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ fit in primo caſu 0, in ſecundo -1. Unde ν eſt 0, & az^ν & $\nu az^{\nu-1}$ ſunt a & 0; quarum ultimæ duæ a & 0 in Reſolvenda pro y & $\dot{y}$ ſcriptæ, producunt $aa + 0z^2 - dd + dz$; & termini aa & $-dd$, in quibus index dignitatis z eſt λ ſeu 0, poſiti æquales nihilo dant $a = d$. Unde primus Seriei terminus az^ν evadit d.

OPERATIO SECUNDA.

Pro terminis reliquis pone p, & habebis æquationem $y = d + p$, & inde $\dot{y} = \dot{p}$; qui valores in Reſolvenda pro y & $\dot{y}$ ſubſtituti dant Reſolvendam novam $2dp + pp - zz\dot{p} + dz = 0$, ubi p & $\dot{p}$ vices ſubeunt ipſarum y & $\dot{y}$. Terminus unicus in quo nec p neque $\dot{p}$ reperitur eſt dz, qui cum termino kz^λ collatus dat $\lambda = 1$. Terminis reliquis $2dp$, pp & $-zz\dot{p}$ pone $lz^\mu p^\alpha \dot{p}^\beta$ æqualem ſucceſſive; & inde in primo caſu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 1$, & $\beta = 0$; in ſecundo $\mu = 0$, $\alpha = 2$, & $\beta = 0$; & in tertio $\mu = 2$, $\alpha = 0$, & $\beta = 1$. Et hinc $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ evadit primo caſu 1, in ſecundo $\frac{1}{2}$, in tertio 0. Unde ν eſt 1, & az^ν & $\nu az^{\nu-1}$ ſunt az & a. Termini duo ultimi az & a in Reſolvenda pro p & $\dot{p}$ reſpective ſcripti, producunt $2daz + a^2z^2 - az^2 + dz$. Et termini $2daz$

& dz in quibus index dignitatis z eſt λ ſeu 1, poſiti æquales nihilo, dant $a = -\frac{1}{2}$. Unde az^{ν} terminus primus Seriei p fit $-\frac{1}{2}z$.

OPERATIO TERTIA.

Pro terminis reliquis nondum inventis pone q & habebis æquationem $p = -\frac{1}{2}z + q$, & inde $\dot{p} = -\frac{1}{2} + \dot{q}$: Qui valores pro p & $\dot{p}$ in Reſolvenda noviſſima ſubſtituti producunt Reſolvendam novam $2dq - zq + qq + \frac{1}{4}zz - z\dot{z}q = 0$. Ubi q & $\dot{q}$ vices ſupplent ipſorum y & $\dot{y}$. Terminus unicus in quo neque q nec $\dot{q}$ reperitur eſt $\frac{1}{4}zz$, qui cum kz^{λ} collatus dat $\lambda = 2$. Terminis reliquis $2dq$, $-zq$, $+qq$, $-z\dot{z}q$ pone $lz^{\mu}q^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$ æqualem ſucceſſive; & inde in primo caſu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 1$, & $\beta = 0$; in ſecundo, $\mu = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$; in tertio, $\mu = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$: in quarto $\mu = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$: & inde $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ evadit in primo caſu 2, in ſecundo, tertio, & quarto 1. Et hinc ν eſt 2, vel az^{ν} & $\nu az^{\nu-1}$ ſunt az^2 & $2az$: qui valores in Reſolvenda pro q & $\dot{q}$ ſubſtituti dant $2daz^2 - az^3 + aaz^4 + \frac{3}{4}zz - 2az^3$; & termini $2dazz + \frac{3}{4}zz$ in quibus index dignitatis z eſt λ ſeu 2, poſiti æquales nihilo, dant $a = -\frac{3}{8d}$. Unde az^{ν} terminus primus Seriei q evadit $-\frac{3zz}{8d}$.

OPERATIO QUARTA.

Pro reliquis Seriei terminis nondum inventis pone r, & habebis æquationes $q = -\frac{3zz}{8d} + r$, & $\dot{q} = -\frac{3z}{4d} + \dot{r}$; & inde reſolvendam novam $2dr + \frac{9z^3}{8d} - zr + \frac{9z^4}{64dd} - \frac{3zzr}{4d} + rr - z\dot{z}r = 0$; & ex ea per Methodum ſuperiorem habebis $-\frac{9z^3}{16dd}$ terminum primum Seriei r. Et ſic pergitur in infinitum.

Eſt igitur radix extrahenda $y = d + p = d - \frac{1}{2}z + q = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} + r = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} - \frac{9z^3}{16dd}$ — &c. Et operationem continuando producere licet radicem ad terminos plures.

Et eadem methodo, dicit *Newtonus*, radices æquationum, fluxiones ſecundas, tertias, quartas, ($\ddot{y}$, $\dddot{y}$, $\ddddot{y}$,) aliaſque involventium, extrahi poſſe.

His utitur radicum extractionibus ubi aliæ Methodi nil proſunt.

Nam

Nam in Epiſtola prædicta anni 1676 docet, quod in Solutione problematum de Tangentibus inverſorum, caſus aliqui dantur in quibus hæc Methodus generalis non requiritur: & particulariter, ſi in triangulo rectangulo quod ab ordinata, tangente, & interjacente parte abſciſſæ conſtituitur, relatio duorum quorumlibet e lateribus tribus per æquationem quamvis definiatur; Problema abſque Methodo hacce generali ſolvi poterit.

Methodi autem hæ omnes tam particulares quam generales collectim ſumptæ, ſolutionem exhibent ſecundæ partis problematis, quod *Newtonus* ſub initio iſtius Epiſtolæ his verbis propoſuit. *Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, & vice verſa.* Nam tota fluxionum Methodus in hujus directa & inverſa ſolutione conſiſtit.

Part of a Letter from Sir *Iſ. Newton*, to Mr. *J. Collins*, *Novemb.* 8. 1676.

THere is no Curve-line expreſs'd by any Equation of three terms, tho' the unknown quantities affect one another in it, or the Indices of their Dignities be ſurd quantities (ſuppoſe $ax^{\lambda} + bx^{\mu}y^{\sigma} + cy^{\tau} = 0$, *where* x *ſignifies the Baſe,* y *the Ordinate,* λ, μ, σ, τ *the Indices of the dignities of* x *and* y, *and* a, b, c *known quantities with their ſigns* + *or* —,) *I ſay, there is no ſuch Curve-line, but I can, in leſs than half a quarter of an hour, tell whether it may be Squar'd, or what are the ſimpleſt Figures it may be compar'd with, be thoſe Figures Conic Sections, or others: And then by a direct and ſhort way, (I dare ſay the ſhorteſt the nature of the thing admits of, for a general one,) I can compare them. And ſo if any two Figures expreſs'd by ſuch Equations be propounded, I can, by the ſame Rule, compare them if they may be compar'd. This may ſeem a bold aſſertion, becauſe it's hard to ſay a Figure may, or may not, be Squar'd, or Compar'd with another; but it's plain to me by the fountain I draw it from, tho' I will not undertake to prove it to others. The ſame Method extends to Equations of four Terms, and others alſo, but not ſo generally.*

Fragmentum Epiſtolæ D. Newtoni *ad D.* Collinſium, Novemb. 8. 1676, *Latine redditum.*

NUlla extat Curva cujus Æquatio ex tribus conſtat terminis, in qua, licet quantitates incognitæ ſe mutuo afficiant, vel Indices dignitatum ſint ſurdæ quantitates (v. g. $ax^{\lambda} + bx^{\mu}y^{\sigma} + cy^{\tau} = 0$, ubi x deſignat Baſin, y Ordinatam λ, μ, σ, τ Indices dignitatum ipſius x & y, & a, b, c quantitates cognitas una cum ſignis ſuis + vel —) nulla inquam hujuſmodi eſt Curva, de qua, an Quadrari poſſit, necne, vel quænam ſint Figuræ ſimpliciſſimæ quibuſcum comparari poſſit, ſive ſint Conicæ ſectiones ſive aliæ magis complicatæ, intra horæ octantem reſpondere non poſſim. Deinde * methodo directa & brevi, imo methodorum omnium generalium breviſſima eas comparare queo. Quinetiam ſi duæ quævis Figuræ per hujuſmodi Æquationes expreſſæ proponantur, per eandem Regulam, eas, modo comparari poſſint, comparo.

Affirmatio quidem videri poteſt temeraria, propterea quod perdifficile ſit dictu an Figura Quadrari vel cum alia comparari poſſit, necne; mihi autem manifeſtum eſt, ex eo unde deduxi fonte, quanquam id aliis demonſtrare in me ſuſcipere nollem. Eadem methodus Æquationes quatuor terminorum aliaſque complectitur, haud tamen adeo generaliter.

TRAC.

* *Methodum habes in Coroll. 2. Prop. 10. Tract. ſequentis.*

INTRODUCTIO

AD

TRACTATUS DE Quadratura Curvarum.

INTRODUCTIO

AD

Quadraturam Curvarum.

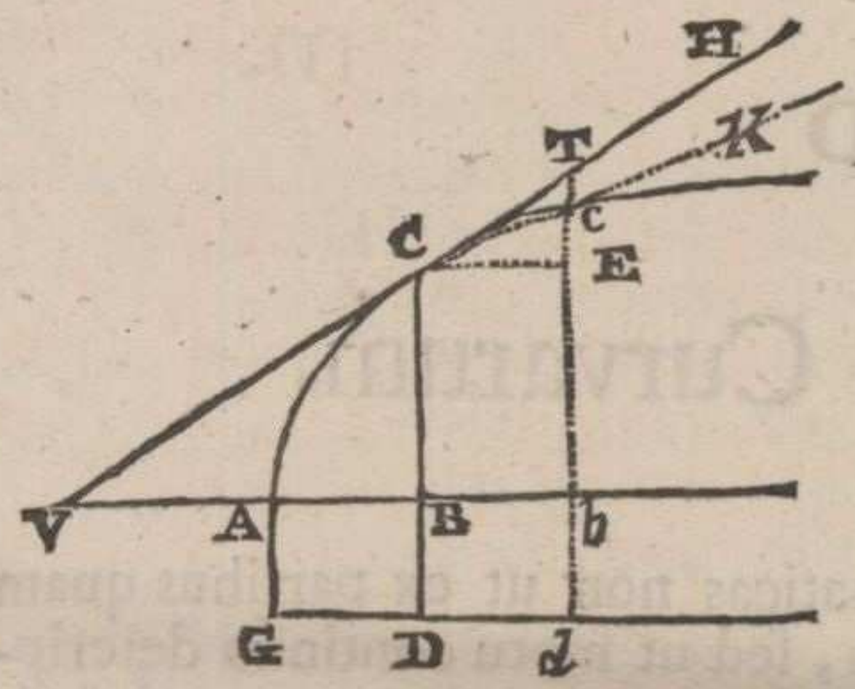
QUantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis conſtantes, ſed ut motu continuo deſcriptas hic conſidero. Lineæ deſcribuntur ac deſcribendo generantur non per appoſitionem partium ſed per motum continuum punctorum, ſuperficies per motum linearum, ſolida per motum ſuperficierum, anguli per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum, & ſic in cæteris. Hæ Geneſes in rerum natura locum vere habent & in motu corporum quotidie cernuntur. Et ad hunc modum Veteres ducendo rectas mobiles in longitudinem rectarum immobilium geneſin docuerunt rectangulorum.

Conſiderando igitur quod quantitates æqualibus temporibus creſcentes & creſcendo genitæ, pro velocitate majori vel minori qua creſcunt ac generantur, evadunt majores vel minores; methodum quærebam determinandi quantitates ex velocitatibus motuum vel incrementorum quibus generantur; & has motuum vel incrementorum velocitates nominando *Fluxiones* & quantitates genitas nominando *Fluentes*, incidi paulatim *Annis* 1665 & 1666 in Methodum Fluxionum qua hic uſus ſum in Quadratura Curvarum.

Fluxiones ſunt quam proxime ut Fluentium augmenta æqualibus temporis particulis quam minimis genita, &, ut accurate loquar, ſunt in prima ratione augmentorum naſcentium; exponi autem poſſunt per lineas quaſcunque quæ ſunt ipſis proportionales.

Ut ſi areæ ABC, ABDG Ordinatis BC, BD ſuper baſi AB uniformi cum motu progredientibus deſcribantur, harum arearum fluxiones erunt inter ſe ut Ordinatæ deſcribentes BC & BD, & per Ordi-

natas illas exponi poſſunt, propterea quod Ordinatæ illæ ſunt ut arearum augmenta naſcentia.



Progrediatur ordinata BC de loco ſuo BC in locum quemvis novum bc. Compleatur parallelogrammum BCEb, ac ducatur recta VTH quæ Curvam tangat in C ipſisque bc & BA productis occurrat in T & V: & Abſciſſæ AB, Ordinatæ BC, & Lineæ Curvæ ACc augmenta modo genita erunt Bb, Ec & Cc; & in horum augmentorum naſcentium ratione prima ſunt latera trianguli CET, ideoque fluxiones ipſarum AB, BC & AC ſunt ut trianguli illius CET latera CE, ET & CT & per eadem latera exponi poſſunt, vel quod perinde eſt per latera trianguli conſimilis VBC.

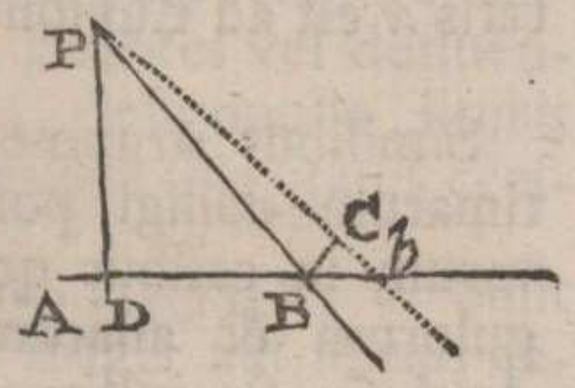
Eodem recidit ſi ſumantur fluxiones in ultima ratione partium evaneſcentium. Agatur recta Cc & producatur eadem ad K. Redeat Ordinata bc in locum ſuum priorem BC, & coeuntibus punctis C & c, recta CK coincidet cum tangente CH, & triangulum evaneſcens CEc in ultima ſua forma evadet ſimile triangulo CET, & ejus latera evaneſcentia CE, Ec & Cc erunt ultimo inter ſe ut ſunt trianguli alterius CET latera CE, ET & CT, & propterea in hac ratione ſunt fluxiones linearum AB, BC & AC. Si puncta C & c parvo quovis intervallo ab invicem diſtant recta CK parvo intervallo a tangente CH diſtabit. Ut recta CK cum tangente CH coincidat & rationes ultimæ linearum CE, Ec & Cc inveniantur, debent puncta C & c coire & omnino coincidere. Errores quam minimi in rebus Mathematicis non ſunt contemnendi.

Simili argumento ſi circulus centro B radio BC deſcriptus in longitudinem Abſciſſæ AB ad angulos rectos uniformi cum motu ducatur, fluxio ſolidi geniti ABC erit ut circulus ille generans, & fluxio ſuperficiei ejus erit ut perimeter Circuli illius & fluxio lineæ curvæ AC conjunctim. Nam quo tempore ſolidum ABC generatur ducendo circulum illum in longitudinem abſciſſæ AB, eodem ſuperficies ejus generatur ducendo perimetrum circuli illius in longi-

gitudinem Curvæ AC. Hujus methodi accipe etiam exempla quæ ſequuntur.

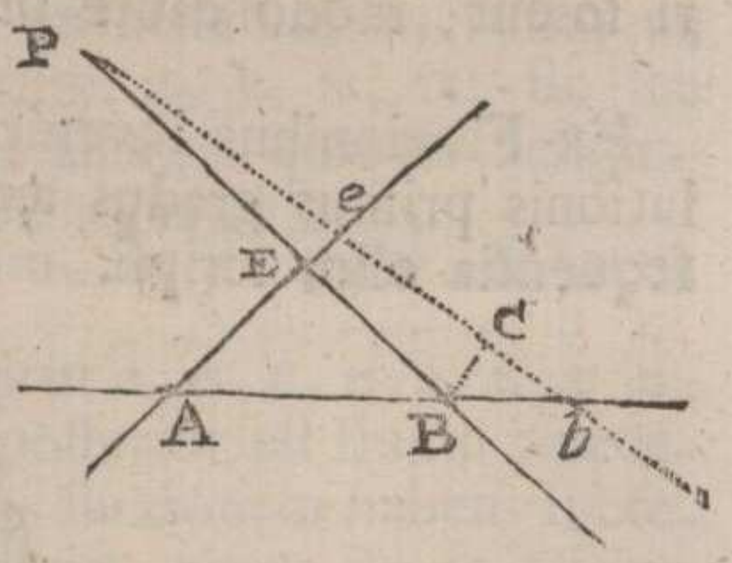
Recta PB circa polum datum P revolvens ſecet aliam poſitione datam rectam AB: quæritur proportio fluxionum rectarum illarum AB & PB.

Progrediatur recta PB de loco ſuo PB in locum novum Pb. In Pb capiatur PC ipſi PB æqualis, & ad AB ducatur PD ſic, ut angulus bPD æqualis ſit angulo bBC; & ob ſimilitudinem triangulorum bBC, bPD erit augmentum Bb ad augmentum Cb ut Pb ad Db. Redeat jam Pb in locum ſuum priorem PB ut augmenta illa evaneſcant, & evaneſcentium ratio ultima, id eſt ratio ultima Pb ad Db, ea erit quæ eſt PB ad DB, exiſtente angulo PDB recto, & propterea in hac ratione eſt fluxio ipſius AB ad fluxionem ipſius PB.



Recta PB circa datum Polum P revolvens ſecet alias duas poſitione datas rectas AB & AE in B & E: quæritur proportio fluxionum rectarum illarum AB & AE.

Progrediatur recta revolvens PB de loco ſuo PB in locum novum Pb rectas AB, AE in punctis b & e ſecantem, & rectæ AE parallela BC ducatur ipſi Pb occurrens in C, & erit Bb ad BC ut Ab ad Ae, & BC ad Ee ut PB ad PE, & conjunctis rationibus Bb ad Ee ut Ab×PB ad Ae×PE. Redeat jam linea Pb in locum ſuum priorem PB, & augmentum evaneſcens Bb erit ad augmentum evaneſcens Ee ut AB × PB ad AE×PE, ideoque in hac ratione eſt fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ AE.



Hinc ſi recta revolvens PB lineas quaſvis Curvas poſitione datas ſecet in punctis B & E, & rectæ jam mobiles AB, AE Curvas illas tangant in Sectionum punctis B & E: erit fluxio Curvæ quam recta AB tangit ad fluxionem Curvæ quam recta AE tangit ut AB×PB ad AE×PE. Id quod etiam eveniet ſi recta PB Curvam aliquam poſitione datam perpetuo tangat in mobili P.

Fluat quantitas x *uniformiter & invenienda ſit fluxio quantitatis* x^n. Quo tempore quantitas x fluendo evadit $x+o$, quantitas x^n evadet $\overline{x+o}|^n$, id eſt per methodum ſerierum infinitarum, $x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2}$ + &c. Et augmenta o & $nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2}$ + &c. ſunt ad invicem ut 1 & $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-2}$ + &c. Evaneſcant jam augmenta illa, & eorum ratio ultima erit 1 ad nx^{n-1} : ideoque fluxio quantitatis x eſt ad fluxionem quantitatis x^n ut 1 ad nx^{n-1}.

Similibus argumentis per methodum rationum primarum & ultimarum colligi poſſunt fluxiones linearum ſeu rectarum ſeu curvarum in caſibus quibuſcunque, ut & fluxiones ſuperficierum, angulorum & aliarum quantitatum. In finitis autem quantitatibus Analyſin ſic inſtituere, & finitarum naſcentium vel evaneſcentium rationes primas vel ultimas inveſtigare, conſonum eſt Geometriæ Veterum: & volui oſtendere quod in Methodo Fluxionum non opus ſit figuras infinite parvas in Geometriam introducere. Peragi tamen poteſt Analyſis in figuris quibuſcunque ſeu finitis ſeu infinite parvis quæ figuris evaneſcentibus finguntur ſimiles, ut & in figuris quæ per Methodos Indiviſibilium pro infinite parvis haberi ſolent, modo caute procedas.

Ex Fluxionibus invenire Fluentes Problema difficilius eſt, & ſolutionis primus gradus æquipollet Quadraturæ Curvarum; de qua ſequentia olim ſcripſi.

DE
Quadratura Curvarum.

QUantitates indeterminatas ut motu perpetuo crescentes vel decrescentes, id est ut fluentes vel defluentes in sequentibus considero, designoque literis z, y, x, v, & earum fluxiones seu celeritates crescendi noto iisdem literis punctatis $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$. Sunt & harum fluxionum fluxiones seu mutationes magis aut minus celeres quas ipsarum z, y, x, v, fluxiones secundas nominare licet & sic designare $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$, & harum fluxiones primas seu ipsarum $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$ fluxiones tertias sic $\ddddot{z}$, $\ddddot{y}$, $\ddddot{x}$, $\ddddot{v}$, & quartas sic $\dddddot{z}$, $\dddddot{y}$, $\dddddot{x}$, $\dddddot{v}$. Et quemadmodum $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$ sunt fluxiones quantitatum z, y, x, v, & hæ sunt fluxiones quantitatum $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$, & hæ sunt fluxiones quantitatum primarum z, y, x, v: sic hæ quantitates considerari possunt ut fluxiones aliarum quas sic designabo, $\acute{z}$, $\acute{y}$, $\acute{x}$, $\acute{v}$, & hæ ut fluxiones aliarum, $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$, & hæ ut fluxiones aliarum $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$. Designant igitur $\ddddot{z}, \dddddot{z}, \ddot{\dddot{z}}, \dddot{\dddot{z}}, \ddddot{\dddot{z}}, \dddddot{\dddot{z}}, \ddot{\ddddot{z}}, \dddot{\ddddot{z}}$, &c. seriem quantitatum quarum quælibet posterior est fluxio præcedentis & quælibet prior est fluens quantitas fluxionem habens subsequentem. Similis est series $\frac{\sqrt{-||-}}{az-zz}, \frac{\sqrt{-|-}}{az-zz}, \frac{\sqrt{\quad}}{az-zz}, \frac{\sqrt{-\cdot-}}{az-zz}, \frac{\sqrt{-\cdot\cdot-}}{az-zz}, \frac{\sqrt{-\cdot\cdot\cdot-}}{az-zz}$ ut & series $\frac{az+zz}{-||-}, \frac{az+zz}{-|-}, \frac{az+zz}{\cdot\quad}, \frac{az+zz}{-\cdot-}, \frac{az+zz}{-\cdot\cdot-}, \frac{az+zz}{-\cdot\cdot\cdot-}$ $a-z$ $a-z$ $a-z$ $a-z$ $a-z$ $a-z$.

Et notandum est quod quantitas quælibet prior in his seriebus est ut area figuræ curvilineæ cujus ordinatim applicata rectangula est quantitas posterior & abscissa est z: uti $\frac{-|-}{az-zz}$ area curvæ cujus ordinata est $\sqrt{az-zz}$ & abscissa z. Quo autem spectant hæc omnia patebit in Propositionibus quæ sequuntur.

PROP.

PROP. I. PROB. I.

Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, invenire fluxiones.

Solutio.

Multiplicetur omnis æquationis terminus per indicem dignitatis quantitatis cujuſque fluentis quam involvit, & in ſingulis multiplicationibus mutetur dignitatis latus in fluxionem ſuam, & aggregatum factorum omnium ſub *propriis ſignis* erit æquatio nova.

Explicatio.

Sunto a, b, c, d &c. quantitates determinatæ & immutabiles, & proponatur æquatio quævis quantitates fluentes z, y, x &c. involvens, uti $x^3 - xy^2 + a^2z - b^3 = 0$. Multiplicentur termini primo per indices dignitatum x, & in ſingulis multiplicationibus pro dignitatis latere, ſeu x unius dimenſionis, ſcribatur $\dot{x}$, & ſumma factorum erit $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2$. Idem fiat in y & prodibit $-2xy\dot{y}$. Idem fiat in z & prodibit $aa\dot{z}$. Ponatur ſumma factorum æqualis nihilo, & habebitur æquatio $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0$. Dico quod hac æquatione definitur ratio fluxionum.

Demonſtratio.

Nam ſit o quantitas admodum parva & ſunto $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$, quantitatum z, y, x momenta id eſt incrementa momentanea ſynchrona. Et ſi quantitates fluentes jam ſunt z, y & x hæ poſt momentum temporis incrementis ſuis $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$ auctæ, evadent $z + o\dot{z}$, $y + o\dot{y}$, $x + o\dot{x}$, quæ in æquatione prima pro z, y, & x ſcrip-

ſcriptæ dant æquationem $x^3 + 3x^2\dot{o}\dot{x} + 3x\dot{o}^2\dot{x}\dot{x} + \dot{o}^3\dot{x}^3 - xy^2 - \dot{o}\dot{x}y^2 - 2x\dot{o}yy - 2\dot{x}\dot{o}^2yy - x\dot{o}^2yy - \dot{x}\dot{o}^3yy + a^2z + a^2\dot{o}\dot{z} - b^3 = 0$.

Subducatur æquatio prior, & reſiduum diviſum per o erit $3x\dot{x}^2 + 3\dot{x}x\dot{o}\dot{x} + \dot{x}^3\dot{o}^2 - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}\dot{y} - 2x\dot{o}yy - x\dot{o}yy - \dot{x}\dot{o}^2yy + a^2\dot{z} = 0$. Minuatur quantitas o in infinitum, & neglectis terminis evaneſcentibus reſtabit $3x\dot{x}^2 - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}\dot{y} + a^2\dot{z} = 0$. Q. E. D.

Explicatio plenior.

Ad eundem modum ſi æquatio eſſet $x^3 - xy^2 + a^2\sqrt{ax - yy} - b^3 = 0$, produceretur $3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}\dot{y} + a^2\dot{\sqrt{ax - yy}} = 0$. Ubi ſi fluxionem $\dot{\sqrt{ax - yy}}$ tollere velis, pone $\sqrt{ax - yy} = z$, & erit $ax - y^2 = z^2$, & (per hanc Propoſitionem) $a\dot{x} - 2\dot{y}y = 2\dot{z}z$ ſeu $\frac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2z} = \dot{z}$, hoc eſt $\frac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2\sqrt{ax - yy}} = \dot{\sqrt{ax - yy}}$. Et inde $3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}\dot{y} + \frac{a^2\dot{x} - 2a^2\dot{y}y}{2\sqrt{ax - yy}} = 0$.

Et per operationem repetitam pergitur ad fluxiones ſecundas, tertias & ſequentes. Sit æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$, & fiet per operationem primam $\dot{z}y^3 + 3z\dot{y}y^2 - 4z\dot{z}^3 = 0$, per ſecundam $\ddot{z}y^3 + 6\dot{z}\dot{y}y^2 + 3z\ddot{y}y^2 + 6z\dot{y}^2y - 4z\dot{z}^3 - 12z^2\dot{z}^2 = 0$, per tertiam $\dddot{z}y^3 + 9\ddot{z}\dot{y}y^2 + 18\dot{z}\dot{y}^2y + 3\dot{z}\ddot{y}y^2 + 18\ddot{z}\dot{y}yy + 6z\dddot{y}y^2 + 18z\ddot{y}\dot{y}yy + 6z\dot{y}^3 - 4z\dot{z}^3 - 36z\dot{z}\ddot{z}^2 - 24z^3\dot{z} = 0$.

Ubi vero ſic pergitur ad fluxiones ſecundas, tertias & ſequentes, convenit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem conſiderare, & pro ejus fluxione prima unitatem ſcribere, pro ſecunda vero & ſequentibus nihil. Sit æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$, ut ſupra; & fluat z uniformiter, ſitque ejus fluxio unitas, & fiet per operationem primam $\dot{y}^3 + 3z\dot{y}\dot{y}^2 - 4z^3 = 0$, per ſecundam $6\dot{y}\dot{y}^2 + 3\ddot{z}\dot{y}\dot{y}^2 + 6z\dot{y}^2\dot{y} - 12z^2 = 0$, per tertiam $9\ddot{y}\dot{y}^2 + 18\dot{y}^2\dot{y} + 3z\ddot{y}\dot{y}^2 + 18z\dot{y}\dot{y}\dot{y} + 6z\dddot{y}^3 - 24z = 0$.

In hujus autem generis æquationibus concipiendum eſt quod fluxiones in ſingulis terminis ſint ejuſdem ordinis, id eſt vel omnes primi

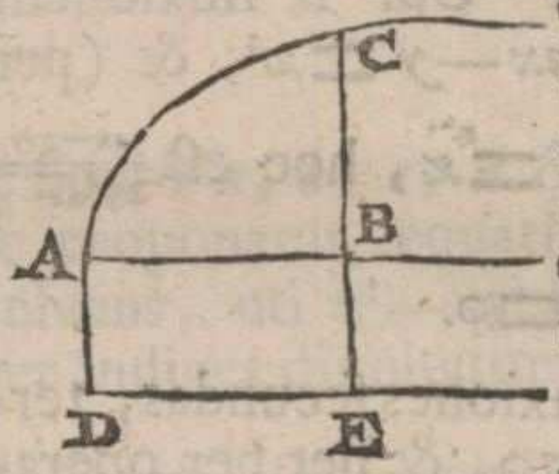
ordinis $\dot{y}$, $\dot{z}$, vel omnes ſecundi $\ddot{y}$, $\dot{y}^2$, $\dot{y}\dot{z}$, $\dot{z}^2$, vel omnes tertii $\dddot{y}$, $\ddot{y}\dot{y}$, $\ddot{y}\dot{z}$, $\dot{y}^3$, $\dot{y}^2\dot{z}$, $\dot{y}\dot{z}^2$, $\dot{z}^3$, &c. Et ubi res aliter ſe habet complendus eſt ordo per ſubintellectas fluxiones quantitatis uniformiter fluentis.

Sic æquatio noviſſima complendo ordinem tertium fit $9z\dddot{y}\dot{y}^2 + 18z\ddot{y}^2\dot{y} + 3\dot{z}\dddot{y}\dot{y}^2 + 18\dot{z}\ddot{y}\dot{y}\dot{y} + 6\dot{z}\dot{y}^3 - 24\ddot{z}\dot{z}^3 = 0$.

PROP. II. PROB. II.

Invenire Curvas quæ quadrari poſſunt.

Sit ABC figura invenienda, BC Ordinatim applicata rectangula, & AB abſciſſa. Producatur CB ad E ut ſit BE $= 1$, & compleatur parallelogrammum ABED, & arearum ABC, ABED fluxiones erunt ut BC & BE. Aſſumatur igitur æquatio quævis qua relatio arearum definiatur, & inde dabitur relatio ordinatarum BC & BE per Prop. 1. Q. E. I.



Hujus rei exempla habentur in Propoſitionibus duabus ſequentibus.

PROP. III. THEOR. I.

Si pro abſciſſa AB & area AE ſeu AB $\times 1$ promiſcue ſcribatur z, & ſi pro $e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n} +$ &c. ſcribatur R: ſit autem area Curvæ $z^\theta R^\lambda$, erit ordinatim applicata BC æqualis

$$\theta e + \theta \times fz^n + \theta \times gz^{2n} + \theta \times hz^{3n} + \text{\&c.} \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1}.$$
$$+\lambda\eta \qquad +2\lambda\eta \qquad +3\lambda\eta$$

Demonſtratio.

Nam ſi ſit $z^\theta R^\lambda = v$, erit (per Prop. 1) $\theta \dot{z} z^{\theta-1} R^\lambda + \lambda z^\theta \dot{R} R^{\lambda-1} = \dot{v}$. Pro R^λ in primo æquationis termino & z^θ in ſecundo ſcribe $RR^{\lambda-1}$ & $zz^{\theta-1}$, & fiet $\theta \dot{z} R + \lambda z \dot{R}$ in $z^{\theta-1} R^{\lambda-1} = \dot{v}$. Erat autem $R = e + fz^n + gz^{2n}$

$+gz^{2n}+hz^{3n}+$&c. & inde (per Prop. 1) fit $\dot{R}=\eta f z z^{n-1}+2\eta g z z^{2n-1}$ $+3\eta h z z^{3n-1}+$&c. quibus ſubſtitutis & ſcripta BE ſeu 1 pro z, fiet

$$\overline{\theta e+\theta \times fz^{n}+\theta \times gz^{2n}+\theta \times hz^{3n}+\&c.}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}=\dot{v}=BC.$$
$$+\lambda\eta \quad +2\lambda\eta \quad +3\lambda\eta$$

Q. E. D.

PROP. IV. THEOR. II.

Si Curvæ abſciſſa AB ſit z, & ſi pro $e+fz^{n}+gz^{2n}+$&c. ſcribatur R, & pro $k+lz^{n}+mz^{2n}+$&c. ſcribatur S; ſit autem area Curvæ $z_{\theta}R_{\lambda}S_{\mu}$: Erit ordinatim applicata BC æqualis

$$\left.\begin{array}{llll}
\theta ek+\theta\times fkz^{n}+\theta\times gkz^{2n} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
+\lambda\eta & +2\lambda\eta & & \\
+\theta\times elz_{n} & +\theta\times flz^{2n} & +\theta\times glz^{3n} & \ldots\ldots \\
+\mu\eta & +\lambda\eta & +2\lambda\eta & \\
 & +\mu\eta & +\mu\eta & \\
 & +\theta\times emz^{2n} & +\theta\times fmz^{3n} & +\theta\times gmz^{4n} \\
 & +2\mu\eta & +\lambda\eta & +2\lambda\eta \\
 & & +2\mu\eta & +2\mu\eta
\end{array}\right\}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$$

Demonſtratur ad modum Propoſitionis ſuperioris.

PROP. V. THEOR. III.

Si Curvæ abſciſſa AB ſit z, & pro $e+fz^{n}+gz^{2n}+hz^{3n}+$&c. ſcribatur R: ſit autem Ordinatim applicata $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}\times a+bz^{n}+cz^{2n}+dz^{3n}+$&c. & ponatur $\frac{\theta}{n}=r$, $r+\lambda=s$, $s+\lambda=t$, $t+\lambda=v$, &c.

Erit Area $=z^{\theta}R^{\lambda}$ in $+\frac{\frac{1}{n}a}{re}$

$$+\frac{\frac{1}{n}b-sfA}{\overline{r+1}\times e}z\eta$$
$$+\frac{\frac{1}{n}c-\overline{s+1}\times fB-tgA}{\overline{r+2}\times e}z^{2n}$$
$$+\frac{\frac{1}{n}d-\overline{s+2}\times fC-\overline{t+1}\times gB-vhA}{\overline{r+3}\times e}z^{3n}$$
$$+\frac{-\overline{s+3}\times fD-\overline{t+2}\times gC-\overline{v+1}\times hB}{\overline{r+4}\times e}z^{4n}$$
$$+\&c.$$

Ubi A, B, C, D, &c. denotant totas coefficientes datas terminorum ſingulorum in ſerie cum ſignis ſuis + & —, nempe.

A primi termini coefficientem $\frac{\frac{1}{n}a}{re}$

B ſecundi termini coefficientem $\frac{\frac{1}{n}b-sfA}{r+1\times e}$

C tertii termini coefficientem $\frac{\frac{1}{n}c-\overline{s+1}\times fB-tgA}{1+2\times e}$

Et ſic deinceps.

Demonſtratio.

Sunto juxta Propoſitionem tertiam.

CURVARUM ORDINATÆ				AREÆ
1 .	$\theta eA+\theta\times fAz^{n}+\theta\times gAz^{2n}+\theta\times bAz_{3n}$, &c.		$\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$	$Az^{\theta}R_{\lambda}$
	$+\lambda n$	$+2\lambda n$		
2 . . .	$+\theta+n\times eBz^{n}$	$+\theta+n\times fBz^{2n}+\theta+n\times gBz^{3n}$ &c.		$Bz^{\theta+n}R^{\lambda}$
		$+\lambda n$		
3		$+\theta+2n\times eCz^{2n}+\theta+2n\times fCz^{3n}$ &c.		$Cz^{\theta+2n}R^{\lambda}$
		$+\lambda n$		
4		$+\theta+3n\times eDz^{3n}$ &c.		$Dz^{\theta+3n}R_{\lambda}$

Et ſi ſumma Ordinatarum ponatur æqualis Ordinatæ $a+bz^{n}+cz^{2n}+dz^{3n}+$ &c. in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, ſumma arearum $z^{\theta}R^{\lambda}$ in $A+Bz^{n}+Cz^{2n}+Dz^{3n}+$ &c. æqualis erit areæ Curvæ cujus iſta eſt Ordinata. Æquentur igitur Ordinatarum termini correſpondentes,

& fiet $a=\theta eA$,

$b=\overline{\theta+\lambda n}\times fA+\overline{\theta+n}\times eB$,

$c=\overline{\theta+2\lambda n}\times gA+\overline{\theta+n+\lambda n}\times fB+\overline{\theta+2n}\times eC$,

&c.

& inde $A=\frac{a}{\theta e}$

$B=\frac{b-\overline{\theta+\lambda n}\times fA}{\overline{\theta+n}\times e}$

$C=\frac{c-\overline{\theta+2\lambda n}\times gA-\overline{\theta+n+\lambda n}\times fB}{\theta+2n\times e}$

Et ſic deinceps in infinitum.

Pone

Pone jam $\frac{\theta}{n}=r$, $r+\lambda=s$, $s+\lambda=t$, &c. & in area $z^\theta R^\lambda$ in $A+Bz^n+Cz^{2n}+Dz^{3n}+$ &c. ſcribe ipſorum A, B, C, &c. valores inventos, & prodibit ſeries propoſita. Q. E. D.

Et notandum eſt quod Ordinata omnis duobus modis in ſeriem reſolvitur. Nam index η vel affirmativus eſſe poteſt vel negativus.

Proponatur Ordinata $\frac{3k-lzz}{zz\sqrt{kz-lz^3+mz^4}}$: Hæc vel ſic ſcribi poteſt $z^{-\frac{5}{2}}\times\overline{3k-lz^2}\times\overline{k-lz^2+mz^3}\,|^{-\frac{1}{2}}$,

vel ſic $z^{-2}\times\overline{-l+3kz^{-2}}\times\overline{m-lz^{-1}+kz^{-3}}\,|^{-\frac{1}{2}}$.

In caſu priore eſt $a=3k$, $b=0$, $c=-l$, $e=k$, $f=0$, $g=-l$, $h=m$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\eta=1$, $\theta-1=-\frac{1}{2}$, $\theta=-\frac{3}{2}=r$, $s=-1$, $t=-\frac{1}{2}$, $v=0$.

In poſteriore eſt $a=-l$, $b=0$, $c=3k$, $e=m$, $f=-l$, $g=0$, $h=k$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\eta=-1$, $\theta-1=-2$, $\theta=-1$, $r=1$, $s=1\frac{1}{2}$, $t=2$, $v=2\frac{1}{2}$. Tentandus eſt caſus uterque. Et ſi ſerierum alterutra ob terminos tandem deficientes abrumpitur ac terminatur habebitur area Curvæ in terminis finitis. Sic in exempli hujus priore caſu ſcribendo in ſerie valores ipſorum a, b, c, e, f, g, h, λ, θ, r, s, t, v, termini omnes poſt primum evaneſcunt in infinitum & area Curvæ prodit $-2v\frac{k-lz^2+mz^3}{z^3}$. Et hæc area ob ſignum negativum adjacet abſciſſæ ultra ordinatam productæ. Nam area omnis affirmativa adjacet tam abſciſſæ quam ordinatæ, negativa vero cadit ad contrarias partes ordinatæ & adjacet abſciſſæ productæ, manente ſcilicet ſigno Ordinatæ. Hoc modo ſeries alterutra & nonnunquam utraque ſemper terminatur & finita evadit ſi Curva geometrice quadrari poteſt. At ſi Curva talem quadraturam non admittit, ſeries utraque continuabitur in infinitum, & earum altera converget & aream dabit approximando, præterquam ubi r (propter aream infinitam) vel nihil eſt vel numerus integer & negativus, vel ubi $\frac{zn}{e}$ æqualis eſt unitati. Si $\frac{zn}{e}$ minor eſt unitate, converget ſeries in qua index η affirmativus eſt: ſin $\frac{zn}{e}$ unitate major eſt, converget ſeries altera. Si in uno caſu area adjacet abſciſſæ ad uſque ordinatam ductæ, in altero adjacet abſciſſæ ultra ordinatam productæ.

Nota inſuper quod ſi Ordinata contentum eſt ſub factore rationali Q & factore ſurdo irreducibili R^π & factoris ſurdi latus R non dividit factorem rationalem Q; erit $\lambda-1\quad\pi$ & $R^{\lambda-1}=R^\pi$. Sin factoris ſur-

di latus R dividit factorem rationalem ſemel, erit $\lambda - 1 = \pi + 1$ & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+1}$: ſi dividit bis, erit $\lambda - 1 = \pi + 2$ & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+2}$: ſi ter, erit $\lambda - 1 = \pi + 3$, & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+3}$: & ſic deinceps.

Si Ordinata eſt fractio rationalis irreducibilis cum denominatore ex duobus vel pluribus terminis compoſito: reſolvendus eſt denominator in diviſores ſuos omnes primos. Et ſi diviſor ſit aliquis cui nullus alius eſt æqualis, Curva quadrari nequit: Sin duo vel plures ſint diviſores æquales, rejiciendus eſt eorum unus, & ſi adhuc alii duo vel plures ſint ſibi mutuo æquales & prioribus inæquales, rejiciendus eſt etiam eorum unus, & ſic in aliis omnibus æqualibus ſi adhuc plures ſint: deinde diviſor qui relinquitur vel contentum ſub diviſoribus omnibus qui relinquuntur, ſi plures ſunt, ponendum eſt pro R, & ejus quadrati reciprocum R^{-2} pro $R^{\lambda-1}$, præterquam ubi contentum illud eſt quadratum vel cubus vel quadrato quadratum, &c. quo caſu ejus latus ponendum eſt pro R & poteſtatis index 2 vel 3 vel 4 negative ſumptus pro λ. & Ordinata ad denominatorem R^2 vel R^3 vel R^4 vel R^5 &c. reducenda.

Ut ſi Ordinata ſit $\frac{z^5+z^4-8z^3}{z^5+z^4-5z^3-z^2+8z-4}$; quoniam hæc fractio irreducibilis eſt & denominatoris diviſores ſunt pares, nempe $z-1$, $z-1$, $z-1$ & $z+2$, $z+2$, rejicio magnitudinis utriuſque diviſorem unum, & reliquorum $z-1$, $z-1$, $z+2$ contentum z^3-3z+2 pono pro R & ejus quadrati reciprocum $\frac{1}{R^2}$ ſeu R^{-2} pro $R^{\lambda-1}$. Dein Ordinatam ad denominatorem R^2 ſeu $R^{1-\lambda}$ reduco, & fit $\frac{z^6-9z^4+8z^3}{z^3-3z+2}$, i. e. $z^3 \times \overline{8-9z+z^3} \times \overline{2-3z+z^3}^{-2}$ Et inde eſt $a=8$, $b=-9$, $c=0$, $d=1$, &c. $e=2$, $f=-3$, $g=0$, $h=1$, $\lambda-1=-2$, $\lambda=-1$, $\eta=1$, $\theta-1=3$, $\theta=4=r$, $s=3$, $t=2$, $v=1$. Et his in ſerie ſcriptis prodit area $\frac{z^4}{z^3-3z+2}$, terminis omnibus in tota ſerie poſt primum evaneſcentibus.

Si denique Ordinata eſt fractio irreducibilis & ejus denominator contentum eſt ſub factore rationali $\mathcal{Q}$ & factore ſurdo irreducibili R^π, inveniendi ſunt lateris R diviſores omnes primi, & rejiciendus eſt diviſor unus magnitudinis cujuſque & per diviſores qui reſtant, ſiqui ſint, multiplicandus eſt factor rationalis $\mathcal{Q}$: & ſi factum æquale eſt lateri R vel lateris illius poteſtati alicui cujus index eſt numerus integer, eſto index ille m, & erit $\lambda - 1 = -\pi - m$, & $R^{\lambda-1} = R^{-\pi-m}$.

Ut

Ut ſi Ordinata ſit $\frac{3q^5-q_4x+9q^2x^3-q_2x^3-6x^3}{q^2-x^2\times q^3+q^2x-qx^2-x^3|^{\frac{1}{3}}}$, quoniam factoris ſurdi latus R ſeu $q^3+q^2x-qx^2-x^3$ diviſores habet $q+x$, $q+x$, $q-x$ qui duarum ſunt magnitudinum, rejicio diviſorem unum magnitudinis utriusque & per diviſorem $q+x$ qui relinquitur, multiplico factorem rationalem q^2-x^2. Et quoniam factum $q^3+q^2x-qx^2-x^3$ æquale eſt lateri R, pono $m=1$, & inde, cum π ſit $\frac{1}{3}$, fit $\lambda-1=-\frac{4}{3}$. Ordinatam igitur reduco ad denominatorem $R^{-\frac{4}{3}}$, & fit

$$x^0\times\overline{3q^6+2q^5x+8q^4x^2+8q^3x^3-7q^2x^4-6qx^5\times q^3+q^2x-qx^2-x^3}\Big|^{-\frac{4}{3}}$$

Unde eſt $a=3q^6$, $b=2q^5$ &c. $e=q^3$, $f=q^2$ &c. $\theta-=0$, $\theta=1=\eta$, $\lambda=-\frac{1}{3}$, $r=1$, $s=\frac{2}{3}$, $t=\frac{1}{3}$, $v=0$. Et his in ſerie ſcriptis prodit area $\frac{3q^2x+3x^3}{q^3+q^2x-qx^2-x^3|^{\frac{1}{3}}}$, terminis omnibus in ſerie tota poſt tertium evaneſcentibus.

PROP. VI. THEOR. IV.

Si Curvæ abſciſſa AB ſit z, & ſcribantur R pro $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}+$&c. & S pro $k+lz^n+mz^{2n}+nz^{3n}+$&c. ſit autem Ordinatim applicata $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$ in $a+bz^n+cz^{2n}+dz^{3n}+$&c. & ſi terminorum e, f, g, h, &c. & k, l, m, n, &c. rectangula ſint

ek fk gk hk &c.
el fl gl hl &c.
em fm gm hm &c.
en fn gn hn &c.

Et ſi rectangulorum illorum coefficientes numerales ſint reſpective

$$\frac{\theta}{n}=r.\ r+\lambda=s.\ s+\lambda=t.\ t+\lambda=v.\ \&c.$$

$$r+\mu=\acute{s}.\ s+\mu=\acute{t}.\ t+\mu=\acute{v}.\ v+\mu=\acute{w}.\ \&c.$$

$$\acute{s}+\mu=\acute{\acute{t}}.\ \acute{t}+\mu=\acute{\acute{v}}.\ \acute{v}+\mu=\acute{\acute{w}}.\ \acute{w}+\mu=\acute{\acute{x}}.\ \&c.$$

$$\acute{\acute{t}}+\mu=\acute{\acute{\acute{v}}}.\ \acute{\acute{v}}+\mu=\acute{\acute{\acute{w}}}.\ \acute{\acute{w}}+\mu=\acute{\acute{\acute{x}}}.\ \acute{\acute{x}}+\mu=\acute{\acute{\acute{y}}}.\ \&c.$$

Area

Area Curvæ erit hæc

$$z^{\theta} R^{\lambda} S^{\mu} \text{in} + \frac{\frac{1}{n}a}{rek} + \frac{\frac{1}{n}b\,\overline{-sfk\,A}\,\overline{-s'el}}{\overline{r+1\times ek}}\,z^{\eta} + \frac{\frac{1}{n}c\,\overline{-s+1\times fkB}\,\overline{-i'fl}\,\overline{-tek\,A}\,\overline{-s'+1\times el}\,\overline{-i''em}}{r+2\times ek}\,z^{2\eta} + \frac{\frac{1}{n}d\,\overline{-s+2\times fkC}\,\overline{-i'+1\times fl}\,\overline{-t+1\times gkB}\,\overline{-v'gl}\,\overline{-v''fm}\,\overline{-s'+2\times el}\,\overline{-i''+1\times em}\,\overline{-v''en}\,\overline{-vhk\,A}}{r+3\times ek}\,z^{3\eta} + \&c.$$

Ubi *A* denotat termini primi coefficientem datam $\frac{1}{rek}a$ cum ſigno ſuo + vel —, *B* coefficientem datam ſecundi, *C* coefficientem datam tertii, & ſic deinceps. Terminorum vero, *a*, *b*, *c*, &c. *e*, *f*, *g*, &c. *k*, *l*, *m*, &c. unus vel plures deeſſe poſſunt.

Demonſtratur Propoſitio ad modum præcedentis, & quæ ibi notantur hic obtinent. Pergit autem ſeries talium Propoſitionum in infinitum, & progreſſio ſeriei manifeſta eſt.

PROP. VII. THEOR. V.

Si pro $e+fz^{n}+gz^{2n}+$&c. ſcribatur *R* ut ſupra, & in Curvæ alicujus Ordinata $z^{\theta\pm n\sigma} R^{\lambda\pm\tau}$ maneant quantitates datæ θ, η, λ, *e*, *f*, *g*, &c. & pro σ ac τ ſcribantur ſucceſſive numeri quicunque integri: & ſi detur Area unius ex Curvis quæ per Ordinatas innumeras ſic prodeuntes deſignantur ſi Ordinatæ ſunt duorum nominum in vinculo radicis, vel ſi dentur Areæ duarum ex Curvis ſi Ordinatæ ſunt trium nominum in vinculo radicis, vel Areæ trium ex Curvis ſi Ordinatæ ſunt quatuor nominum in vinculo radicis, & ſic deinceps in infinitum: dico quod dabuntur Areæ curvarum omnium. Pro nominibus hic habeo terminos omnes in vinculo radicis tam deficientes quam plenos quorum indices dignitatum ſunt in progreſſione arithmetica. Sic Ordinata $\sqrt{a^4-ax^3+x^4}$ ob terminos duos inter a^4 & $-ax^3$ deficientes pro quinquinomio haberi debet.

At

At $\sqrt{a^4+x^4}$ binomium eſt, & $\sqrt{a^4+x^4}-\frac{x^3}{a^4}$ trinomium, cum progreſſio jam per majores differentias procedat. Propoſitio vero ſic demonſtratur.

CASUS I.

Sunto Curvarum duarum Ordinatæ $pz^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ & $qz^{\theta+n-1}R^{\lambda-1}$, & Areæ pA & qB, exiſtente R quantitate trium nominum $e+fz^n+gz^{2n}$. Et cum per Prop. 3. ſit $z^\theta R^\lambda$ area Curvæ cujus Ordinata eſt $\theta e+\overline{\theta+\lambda\eta}\times fz^n+\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gz^{2n}$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, ſubduc Ordinatas & Areas priores de Area & Ordinata poſteriori, & manebit $\theta e-p+\overline{\theta\times f-q}\times z^n+\overset{+\lambda\eta}{\theta\times gz^{2n}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ Ordinata nova Curvæ, & $z^\theta R^\lambda-pA-\overset{+2\lambda\eta}{qB}$ ejuſdem Area. Pone $\theta e=p$, & $\theta f+\lambda\eta f=q$, & Ordinata evadet $\theta+2\lambda\eta\times gz^{2n}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, & Area $z^\theta R^\lambda-\theta eA-\theta fB-\lambda\eta fB$. Divide utramque per $\theta g+2\lambda\eta g$, & Aream prodeuntem dic C, & aſſumpta utcunque r, erit rC Area Curvæ cujus Ordinata eſt $rz^{\theta+2n-1}R^{\lambda-1}$. Et qua ratione ex Areis pA & qB Aream rC Ordinatæ $rz^{\theta+2n-1}R^{\lambda-1}$ congruentem invenimus, licebit ex Areis qB & rC Aream quartam puta sD, Ordinatæ $sz^{\theta+3n-1}R^{\lambda-1}$ congruentem invenire, & ſic deinceps in infinitum. Et par eſt ratio progreſſionis ab Areis B & A in partem contrariam pergentis. Si terminorum θ, $\theta+\lambda\eta$, & $\theta+2\lambda\eta$ aliquis deficit & ſeriem abrumpit, aſſumatur Area pA in principio progreſſionis unius & Area qB in principio alterius, & ex his duabus Areis dabuntur Areæ omnes in progreſſione utraque. Et contra, ex aliis duabus Areis aſſumptis fit regreſſus per Analyſin ad Areas A & B, adeo ut ex duabus datis cæteræ omnes dentur. Q. E. O.

Hic eſt caſus Curvarum ubi ipſius z index θ augetur vel diminuitur perpetua additione vel ſubductione quantitatis η. Caſus alter eſt Curvarum ubi index λ augetur vel diminuitur unitatibus.

CASUS II.

Ordinatæ $pz^{\theta-1}R^\lambda$ & $qz^{\theta+n-1}R^\lambda$, quibus Areæ pA & qB jam reſpondeant, ſi in R ſeu $e+fz^n+gz^{2n}$ ducantur ac deinde ad R viciſſim applicentur, evadunt $\overline{pe+pfz^n+pgz^{2n}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, & $\overline{qez^n+qfz^{2n}+qgz^{3n}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$.

Et (per Prop. 3.) eſt $az^{\theta} R^{\lambda}$ area Curvæ cujus Ordinata eſt $\theta ae + \overline{\theta+\lambda\eta} \times afz^{\eta} + \overline{\theta+2\lambda\eta} \times agz^{2\eta} \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$, & $bz^{\theta+\eta} R^{\lambda}$ area Curvæ cujus Ordinata eſt $\overline{\theta+\eta} \times bez^{\eta} + \overline{\theta+\eta+\lambda\eta} \times bfz^{2\eta} + \overline{\theta+\eta+2\lambda\eta} \times bgz^{3\eta} \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$.

Et harum quatuor Arearum ſumma eſt $pA+qB+az^{\theta} R^{\lambda}+bz^{\theta+\eta} R_{\lambda}$, & ſumma reſpondentium Ordinatarum

$$\begin{array}{llll} \theta ae + \overline{\theta+\lambda\eta} \times afz^{\eta} + \overline{\theta+2\lambda\eta} \times agz^{2\eta} + \theta+\eta+2\lambda\eta \times bgz^{3\eta} \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1}. \\ +pe + \overline{\theta+\eta} \times be & +\overline{\theta+\eta+\lambda\eta} \times bf & +1 \times qg \\ \quad +1 \times pf & +1 \times pg & \\ \quad +1 \times qe & +1 \times qf & \end{array}$$

Si terminus primus tertius & quartus ponantur ſeorſim æquales nihilo, per primum fiet $\theta ae+pe=0$, ſeu $-\theta a=p$, per quartum $-\theta b-\eta b-2\lambda\eta b=q$, & per tertium (eliminando p & q) $\frac{2ag}{f}=b$. Unde ſecundus fit $\frac{\lambda\eta aff-4\lambda\eta age}{f}$, adeoque ſumma quatuor Ordinatarum eſt $\frac{\lambda\eta aff-4\lambda\eta age}{f} z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1}$, & ſumma totidem reſpondentium Arearum eſt $az^{\theta} R^{\lambda} + \frac{2ag}{f} z^{\theta+\eta} R^{\lambda} - \theta aA + \frac{2\theta+2\eta+4\lambda\eta}{f} agB$. Dividantur hæ ſummæ per $\frac{\lambda\eta aff-4\lambda\eta age}{f}$, & ſi Quotum poſterius dicatur $\mathcal{D}$, erit $\mathcal{D}$ Area curvæ cujus Ordinata eſt Quotum prius $z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1}$. Et eadem ratione ponendo omnes Ordinatæ terminos præter primum æquales nihilo poteſt Area Curvæ inveniri cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$. Dicatur Area iſta C, & qua ratione ex Areis A & B inventæ ſunt Areæ C ac $\mathcal{D}$, ex his Areis C ac $\mathcal{D}$ inveniri poſſunt aliæ duæ E & F Ordinatis $z^{\theta-1} R^{\lambda-2}$ & $z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-2}$ congruentes, & ſic deinceps in infinitum. Et per Analyſin contrariam regredi licet ab Areis E & F ad Areas C ac $\mathcal{D}$, & inde ad Areas A & B, aliasque quæ in progreſſione ſequuntur. Igitur ſi index λ perpetua unitatum additione vel ſubductione augeatur vel minuatur, & ex Areis quæ Ordinatis ſic prodeuntibus reſpondent duæ ſimpliciſſimæ habentur; dantur aliæ omnes in infinitum. Q. E. O.

CAS. III.

Et per caſus hoſce duos conjunctos, ſi tam index θ perpetua additione vel ſubductione ipſius η, quam index λ perpetua additione vel ſub-

ſubductione unitatis, utcunque augeatur vel minuatur, dabuntur Areæ ſingulis prodeuntibus Ordinatis reſpondentes. Q. E. O.

CAS. IV.

Et ſimili argumento ſi Ordinata conſtat ex quatuor nominibus in vinculo radicali & dantur tres Arearum, vel ſi conſtat ex quinque nominibus & dantur quatuor Arearum, & ſic deinceps: dabuntur Areæ omnes quæ addendo vel ſubducendo numerum η indici θ vel unitatem indici λ generari poſſunt. Et par eſt ratio Curvarum ubi Ordinatæ ex binomiis conflantur, & Area una earum quæ non ſunt Geometrice quadrabiles datur. Q. E. O.

PROP. VIII. THEOR. VI.

Si pro $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+$ &c. & $k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+$ &c. ſcribantur R & S ut ſupra, & in Curvæ alicujus Ordinata $z^{\theta\pm\eta\sigma}R^{\lambda\pm\tau}S^{\mu\pm\upsilon}$ maneant quantitates datæ θ, η, λ, μ, e, f, g, k, l, m, &c. & pro σ, τ, & υ, ſcribantur ſucceſſive numeri quicunque integri: & ſi dentur Areæ duarum ex curvis quæ per Ordinatas ſic prodeuntes deſignantur ſi quantitates R & S ſunt binomia, vel ſi dentur Areæ trium ex curvis ſi R & S conjunctim ex quinque nominibus conſtant, vel Areæ quatuor ex curvis ſi R & S conjunctim ex ſex nominibus conſtant, & ſic deinceps in infinitum: dico quod dabuntur Areæ curvarum omnium.

Demonſtratur ad modum propoſitionis ſuperioris.

PROP. IX. THEOR. VII.

Æquantur Curvarum Areæ inter ſe quarum Ordinatæ ſunt reciproce ut fluxiones Abſciſſarum.

Nam contenta ſub Ordinatis & fluxionibus Abſciſſarum erunt æqualia, & fluxiones Arearum ſunt ut hæc contenta.

COROL. I.

Si aſſumatur relatio quævis inter Abſciſſas duarum Curvarum, & inde per Prop. 1. quæratur relatio fluxionum Abſciſſarum, &

ponantur Ordinatæ reciproce proportionales fluxionibus, invenirī poſſunt innumeræ Curvæ quarum Areæ ſibi mutuo æquales erunt.

COROL. II.

Si enim Curva omnis cujus hæc eſt Ordinata $z^{\theta-1} \times \overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda}$, aſſumendo quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{n}{\nu} = s$, & $z^{\nu} = x$, migrat in aliam ſibi æqualem cujus Ordinata eſt $\frac{\nu}{n} x^{\frac{\nu\theta-n}{n}} \times \overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}|^{\lambda}$.

COROL. III.

Et Curva omnis cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1} \times \overline{a+bz^{n}+cz^{2n}+\&c.} \times \overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda}$, aſſumendo quantitatem quamvis pro ν & ponendo $\frac{n}{\nu} = s$, & $z^{\nu} = x$, migrat in aliam ſibi æqualem cujus Ordinata eſt $\frac{\nu}{n} x^{\frac{\nu\theta-n}{n}} \times \overline{a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\&c.} \times \overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}|^{\lambda}$.

COROL. IV.

Et Curva omnis cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1} \times \overline{a+bz^{n}+cz^{2n}+\&c.} \times \overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda} \times \overline{k+lz^{n}+mz^{2n}+\&c.}|^{\mu}$, aſſumendo quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{n}{\nu} = s$, & $z^{\nu} = x$, migrat in aliam ſibi æqualem cujus Ordinata eſt $\frac{\nu}{n} x^{\frac{\nu\theta-n}{n}} \times \overline{a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\&c.} \times \overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}|^{\lambda} \times \overline{k+lx^{\nu}+mx^{2\nu}+\&c.}|^{\mu}$

COROL. V.

Et Curva omnis cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1} \times \overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda}$, ponendo $\frac{1}{z} = x$, migrat in aliam ſibi æqualem cujus Ordinata eſt $\frac{1}{x^{\theta+1}} \times \overline{e+fx^{-n}+gx^{-2n}+\&c.}|^{\lambda}$ id eſt $\frac{1}{x^{\theta+1+n\lambda}} \times \overline{f+ex^{n}}|^{\lambda}$ ſi duo ſunt nomina in vinculo radicis, vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2n\lambda}} \times \overline{g+fx^{n}+ex^{2n}}|^{\lambda}$ ſi tria ſunt nomina; & ſic deinceps.

COROL. VI.

Et Curva omnis cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1} \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}+\&c.}|^\lambda \times \overline{k+lz^n+mz^{2n}+\&c.}|^\mu$, ponendo $\frac{r}{z}=x^{\frac{1}{\theta}}$ migrat in aliam ſibi æqualem cujus Ordinata eſt

$$\frac{1}{x^{\theta+1}} \times \overline{e+fx^{-n}+gx^{-2n}+\&c.}|^\lambda \times \overline{k+lx^{-n}+mx^{-2n}+\&c.}|^\mu$$

id eſt $\frac{1}{x^{\theta+1+n\lambda+n\mu}} \times \overline{f+ex^n}|^\lambda \times \overline{l+kx^n}|^\mu$ ſi bina ſunt nomina in vinculis radicum, vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2n\lambda+n\mu}} \times \overline{g+fx^n+ex^{2n}}|^\lambda \times \overline{l+kx^n}|^\mu$ ſi tria ſunt nomina in vinculo radicis prioris ac duo in vinculo poſterioris: & ſic in aliis.

Et nota quod Areæ duæ æquales in noviſſimis hiſce duobus Corollariis jacent ad contrarias partes Ordinatarum. Si Area in alterutra Curva adjacet Abſciſſæ, Area huic æqualis in altera Curva adjacet Abſciſſæ productæ.

COROL. VII.

Si relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam y & Abſciſſam z definiatur per æquationem quamvis affectam hujus formæ,

$$y^\alpha \times \overline{e+fy^nz^\delta+gy^2z^{2\delta}+hy^{3n}z^{3\delta}+\&c.} = z^\beta \times \overline{k+ly^nz^\delta+my^{2n}z^{2\delta}+\&c.}$$

hæc Figura aſſumendo $s=\frac{n-\delta}{n}$, $x=\frac{1}{s}z^s$, & $\lambda=\frac{n-\delta}{\alpha\delta-\beta n}$, migrat in aliam ſibi æqualem cujus Abſciſſa x, ex data Ordinata v, determinatur per æquationem non affectam $\frac{1}{s}v^{\alpha\lambda} \times \overline{e+fv^n+gv^{2n}+\&c.}|^\xi \times \overline{k+lv^n+mv^{2n}+\&c.}|^{-\lambda}=x$.

COROL. VIII.

Si relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam y & Abſciſſam z definitur per æquationem quamvis affectam hujus formæ,

$$y^\alpha \times \overline{e+fy^nz^\delta+gy^{2n}z^{2\delta}+\&c.} = z^\beta \times \overline{k+ly^nz^\delta+my^{2n}z^{2\delta}+\&c.} + z^\gamma \times \overline{p+qy^nz^\delta+ry^{2n}z^{2\delta}+\&c.}$$

hæc Figura aſſumendo $s=\frac{n-\delta}{n}$, $x=\frac{1}{s}z^s$, $\mu=\frac{\alpha\delta+\beta n}{n-\delta}$, $\nu=\frac{\alpha\delta+\gamma n}{n-\delta}$, migrat

in aliam ſibi æqualem cujus Abſciſſa x ex data Ordinata v determinatur per æquationem minus affectam $v^{\alpha} \times \overline{e+fv^{\eta}+gv^{2\eta}+\&c.}$ $= s^{\mu}x^{\mu} \times \overline{k+lv^{\eta}+mv^{2\eta}+\&c.}$ $+ s^{\nu}x^{\nu} \times \overline{p+qv^{\eta}+rv^{2\eta}+\&c.}$

COROL. IX.

Curva omnis cujus Ordinata eſt $\overline{\pi z^{\theta-1} \times \nu e+\overline{\nu+\eta} fz^{\eta}+\overline{\nu+2\eta} gz^{2\eta}+\&c.} \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda-1}$ in $\overline{a+b \times ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+\&c.}|^{\tau}|^{\omega}$, ſi ſit $\theta = \lambda\nu$, & aſſumantur $x = \overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+\&c.}|^{\pi}$, $\sigma = \frac{\tau}{\pi}$, & $\vartheta = \frac{\lambda-\pi}{\pi}$, migrat in aliam ſibi æqualem cujus Ordinata eſt $x^{\vartheta} \times \overline{a+bx^{\sigma}}|^{\omega}$. Et nota quod Ordinata prior in hoc Corollario evadit ſimplicior ponendo $\lambda = 1$, vel ponendo $\tau = 1$, & efficiendo ut radix dignitatis extrahi poſſit cujus index eſt ω, vel etiam ponendo $\omega = -1$, & $\lambda = 1 = \tau = \sigma = \pi$, ut alios caſus præteream.

COROL. X.

Pro $ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+\&c.$ $\overline{\nu ez^{\nu-1}+\overline{\nu+\eta} fz^{\nu+\eta-1}+\overline{\nu+2\eta} gz^{\nu+2\eta-1}+\&c.}$ $\overline{k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\&c.}$ & $\overline{\eta lz^{\eta-1}+2\eta mz^{2\eta-1}+\&c.}$ ſcribantur R, $\dot{r}$, S & $\dot{s}$ reſpective, & Curva omnis cujus Ordinata eſt $\overline{\pi S\dot{r}+\varphi R\dot{s}} \times R^{\lambda-1}S^{\mu-1} \times \overline{aS^{\sigma}+bR^{\tau}}|^{\omega}$, ſi ſit $\frac{\mu-\nu\omega}{\lambda} = \frac{\upsilon}{\tau} = \frac{\varphi}{\pi}$, $\frac{\tau}{\pi} = \sigma$, $\frac{\lambda-\pi}{\pi} = \vartheta$, & $R^{\pi}S^{\varphi} = x$, migrat in aliam ſibi æqualem cujus Ordinata eſt $x^{\vartheta} \times \overline{a+bx^{\sigma}}|^{\omega}$. Et nota quod Ordinata prior evadit ſimplicior, ponendo unitates pro τ, υ, & λ vel μ, & faciendo ut radix dignitatis extrahi poſſit cujus index eſt ω, vel ponendo $\omega = -1$ vel $\mu = 0$.

PROP. X. PROB. III.

Invenire Figuras ſimpliciſſimas cum qüibus Curva quævis Geometrice comparari poteſt, cujus Ordinatim applicata y *per æquationem non affectam ex data Abſciſſa* z *determinatur.*

CAS. I.

Sit Ordinata $az^{\theta-1}$, & Area erit $\frac{1}{\theta}az^{\theta}$, ut ex Prop. 5. ponendo $b=0=c=d=f=g=h$, & $e=1$, facile colligitur.

CAS. II.

Sit Ordinata $az^{\theta-1}\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda-1}$, & ſi Curva cum Figuris rectilineis Geometrice comparari poteſt, quadrabitur per Prop. 5. ponendo $b=0=c=d$. Sin minus convertetur in aliam Curvam ſibi æqualem cujus Ordinata eſt $\frac{a}{n}x^{\frac{\theta-n}{n}}\times\overline{e+fx+gx^{2}+\&c.}|^{\lambda-1}$ per Corol. 2. Prop. 9. Deinde ſi de dignitatum indicibus $\frac{\theta-n}{n}$ & $\lambda-1$ per Prop. 7. rejiciantur unitates donec dignitates illæ fiant quam minimæ, devenietur ad Figuras ſimpliciſſimas quæ hac ratione colligi poſſunt. Dein harum unaquæque per Corol. 5. Prop. 9. dat aliam quæ nonnunquam ſimplicior eſt. Et ex his per Prop. 3. & Corol. 9. & 10. Prop. 9. inter ſe collatis, Figuræ adhuc ſimpliciores quandoque prodeunt. Denique ex Figuris ſimpliciſſimis aſſumptis facto regreſſu computabitur Area quæſita.

CAS. III.

Sit Ordinata $z^{\theta-1}\times\overline{a+bz^{n}+cz^{2n}+\&c.}\ \overline{\times e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda-1}$ & hæc Figura ſi quadrari poteſt, quadrabitur per Prop. 5. Sin minus,

diſ-

distinguenda est Ordinata in partes $z^{\theta-1} \times a \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda-1}$, $z^{\theta-1} \times bz^n \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda-1}$, &c. & per Cas. 2. inveniendæ sunt Figuræ simpliciſſimæ cum quibus Figuræ partibus illis respondentes comparari possunt.

Nam Areæ figurarum partibus illis respondentium sub signis suis + & — conjunctæ component Aream totam quæsitam.

CAS. IV.

Sit Ordinata $z^{\theta-1} \times \overline{a+bz^n+cz^{2n}+\&c.} \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda-1}$ in $\overline{k+lz^n+mz^{2n}+\&c.}|^{\mu-1}$, & si Curva quadrari potest, quadrabitur per Prop. 6. Sin minus, convertetur in simpliciorem per Corol. 4. Prop. 9. ac inde comparabitur cum Figuris simpliciſſimis per Prop. 8. & Corol. 6, 9 & 10. Prop. 9. ut fit in Casu 2 & 3.

CAS. V.

Si Ordinata ex variis partibus constat, partes singulæ pro Ordinatis curvarum totidem habendæ sunt, & Curvæ illæ quotquot quadrari possunt, sigillatim quadrandæ sunt, earumque Ordinatæ de Ordinata tota demendæ. Dein Curva quam Ordinatæ pars residua designat seorsim (ut in Casu 2, 3 & 4,) cum Figuris simpliciſſimis comparanda est cum quibus comparari potest. Et summa Arearum omnium pro Area Curvæ propositæ habenda est.

COROL. I.

Hinc etiam Curva omnis cujus Ordinata est radix quadratica affecta æquationis suæ, cum Figuris simpliciſſimis seu rectilineis seu curvilineis comparari potest. Nam radix illa ex duabus partibus semper constat quæ seorsim spectatæ non sunt æquationum radices affectæ.

Pro-

Proponatur æquatio $a^2y^2+z^2y^2=2a^3y+2z^3y-z^4$, & extracta radix erit $y=\frac{a^3+z^3+a\sqrt{a^4+2az^3-z^4}}{aa+zz}$, cujus pars rationalis $\frac{a^3+z^3}{aa+zz}$ & pars irrationalis $\frac{a\sqrt{a^4+2az^3-z^4}}{aa+zz}$ ſunt Ordinatæ curvarum quæ per hanc Propoſitionem vel quadrari poſſunt vel cum Figuris ſimpliciſſimis comparari cum quibus collationem Geometricam admittunt.

COROL. II.

Et Curva omnis cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam definitur quæ per Corol. 7. Prop. 9. in æquationem non affectam migrat, vel quadratur per hanc Propoſitionem ſi quadrari poteſt, vel comparatur cum Figuris ſimpliciſſimis cum quibus comparari poteſt. Et hac ratione Curva omnis quadratur cujus æquatio eſt trium terminorum. Nam æquatio illa ſi affecta ſit, tranſmutatur in non affectam per Corol. 7. Prop. 9. ac deinde per Corol. 2. & 5. Prop. 9. in ſimpliciſſimam migrando, dat vel quadraturam Figuræ ſi quadrari poteſt, vel Curvam ſimpliciſſimam quacum comparatur.

COROL. III.

Et Curva omnis cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam definitur quæ per Corol. 8. Prop. 9. in æquationem quadraticam affectam migrat; vel quadratur per hanc Propoſitionem & hujus Corol. 1. ſi quadrari poteſt, vel comparatur cum Figuris ſimpliciſſimis cum quibus collationem Geometricam admittit.

SCHOLIUM.

Ubi quadrandæ ſunt Figuræ; ad Regulas haſce generales ſemper recurrere nimis moleſtum eſſet: præſtat Figuras quæ ſimpliciores ſunt & magis uſui eſſe poſſunt ſemel quadrare & quadraturas in Ta-

bulam referre, deinde Tabulam conſulere quoties ejuſmodi Curvam aliquam quadrare oportet. Hujus autem generis ſunt Tabulæ duæ ſequentes, in quibus z denotat Abſciſſam, y Ordinatam rectangulam, & t Aream Curvæ quadrandæ, & d, e, f, g, h, η ſunt quantitates datæ cum ſignis ſuis + & —.

TABULA

CURVARUM SIMPLICIORUM QUÆ QUADRARI POSSUNT.

CURVARUM FORMÆ		CURVARUM-AREÆ
I	$dz^{\eta-1} = y$	$\frac{d}{\eta}z^{\eta} = t$
II	$\frac{dz^{\eta-1}}{e^2+2efz^{\eta}+f^2z^{2\eta}} = y$	$\frac{dz^{\eta}}{\eta e^2+\eta efz^{\eta}} = t$ vel $\frac{-d}{\eta ef+\eta f^2z^{\eta}} = t$
III 1	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{2d}{3\eta f}R^3 = t$. exiſtente $R = \sqrt{e+fz^{\eta}}$
III 2	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{-4e+6fz^{\eta}}{15\eta f^2}dR^3 = t$
III 3	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{16e^2-24efz^{\eta}+30f^2z^{2\eta}}{105\eta f^3}dR^3 = t$
III 4	$dz^{4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{-96e^3+144e^2fz^{\eta}-180ef^2z^{2\eta}+210f^3z^{3\eta}}{945\eta f^4}dR^3 = t$
IV 1	$\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{2d}{\eta f}R = t$
IV 2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-4e+2fz^{\eta}}{3\eta f^2}dR = t$
IV 3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{16e^2-8efz^{\eta}+6f^2z^{2\eta}}{15\eta f^3}dR = t$
IV 4	$\frac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-96e^3+48e^2fz^{\eta}-36ef^2z^{2\eta}+30f^3z^{3\eta}}{105\eta f^4}dR = t$

In Tabulis hiſce, ſeries Curvarum cujuſque formæ utrinque in infinitum continuari poteſt. Scilicet in Tabula prima, in numeratoribus Arearum formæ tertiæ & quartæ, numeri coefficientes initialium terminorum (2, — 4, 16, — 96, 868, &c.) generantur multiplicando numeros — 2, — 4, — 6, — 8, — 10, &c. in ſe continuo, & ſubſequentium terminorum coefficientes ex initialibus derivantur multi-

pli-

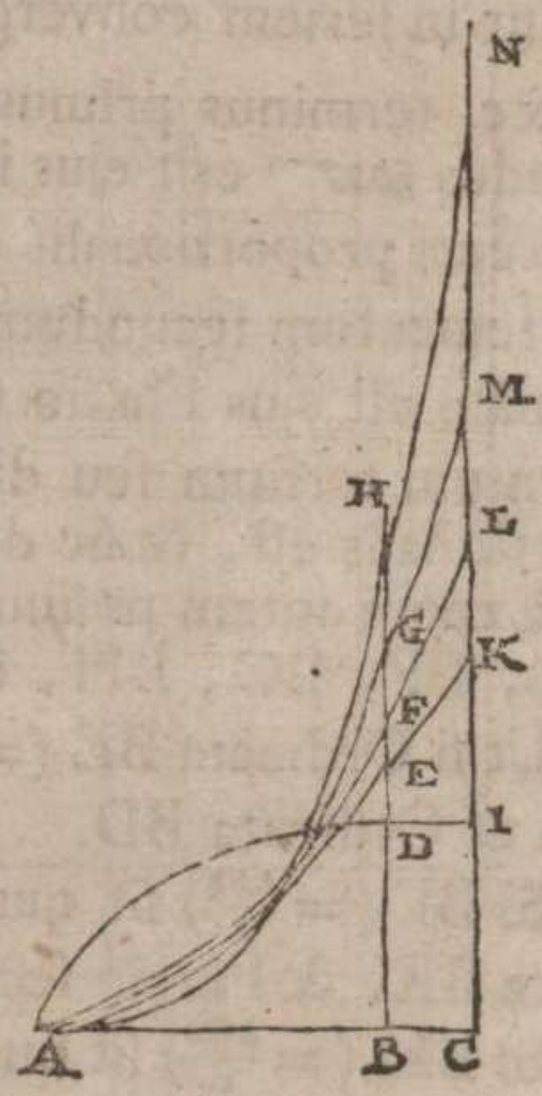
plicando ipſos gradatim, in Forma quidem tertia, per $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{10}$, &c. in quarta vero per $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{105}$, &c. Et Denominatorum coefficientes 3, 15, 105, &c. prodeunt multiplicando numeros 1, 3, 5, 7, 9, &c. in ſe continue.

In ſecunda vero Tabula, ſeries Curvarum formæ primæ, ſecundæ, quintæ, ſextæ, nonæ, & decimæ ope ſolius diviſionis, & formæ reliquæ ope Propoſitionis tertiæ & quartæ, utrinque producuntur in infinitum.

Quinetiam hæ ſeries mutando ſignum numeri η variari ſolent. Sic enim *e. g.* Curva $\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^n} = y$, evadit $\frac{d}{z^{\frac{1}{2}\eta+1}}\sqrt{f+ez^n} = y$.

PROP. XI. THEOR. VIII.

Sit ADIC Curva quævis Abſciſſam habens $AB = z$, & Ordinatam $BD = y$, & ſit AEKC Curva alia cujus Ordinata BE æqualis eſt prioris areæ ADB ad unitatem applicatæ, & AFLC Curva tertia cujus Ordinata BF æqualis eſt ſecundæ Areæ AEB ad unitatem applicatæ, & AGMC Curva quarta cujus Ordinata BG æqualis eſt tertiæ areæ AFB ad unitatem applicatæ, & AHNC Curva quinta cujus Ordinata BH æqualis eſt quartæ Areæ AGB ad unitatem applicatæ, & ſic deinceps in infinitum. Et ſunto *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. Areæ Curvarum Ordinatas habentium y, zy, z^2y, z^3y, z^4y, &c. & Abſciſſam communem z.



Detur Abſciſſa quævis $AC = t$, ſitque $BC = t - z = x$, & ſunto $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, R, S, T Areæ Curvarum Ordinatas habentium y, xy, x^2y, x^3y, x^4y &c. & Abſciſſam communem x.

Terminentur autem hæ Areæ omnes ad Abſciſſam totam datam AC, nec non ad Ordinatam poſitione datam & infinite productam CI:

Et erit Arearum ſub initio poſitarum

Prima ADIC $= A = \mathcal{P}$.

Secunda AEKC $= tA - B = \mathcal{Q}$.

Tertia AFLC $= \frac{t^2A - 2tB + 2C}{2} = \frac{1}{2}R.$

Quarta AGMC $= \frac{t^3A - 3t^2B + 3tC - D}{6} = \frac{1}{6}S.$

Quinta AHNC $= \frac{t^4A - 4t^3B + 6t^2C - 4tD + E}{24} = \frac{1}{24}T.$

COROL.

Unde ſi Curvæ quarum Ordinatæ ſunt y, zy, z^2y, z^3y, &c. vel y, xy, x^2y, x^3y, &c. quadrari poſſunt, quadrabuntur etiam Curvæ ADIC, AEKC, AFLC, AGMC, &c. & habebuntur Ordinatæ BE, BF, BG, BH, Areis Curvarum proportionales.

SCHOLIUM.

Quantitatum fluentium Fluxiones eſſe primas, ſecundas, tertias, quartas, aliasque diximus ſupra. Hæ Fluxiones ſunt ut termini ſerierum infinitarum convergentium.

Ut ſi z^n ſit quantitas fluens & fluendo evadat $\overline{z+o}^n$, deinde reſolvatur in ſeriem convergentem $z^n + noz^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}oo z^{n-2} + \frac{n-3n^2+2n}{6}o^3z^{n-3}$ + &c. terminus primus hujus ſeriei z^n erit quantitas illa fluens, ſecundus noz^{n-1} erit ejus incrementum primum ſeu differentia prima cui naſcenti proportionalis eſt ejus Fluxio prima, tertius $\frac{n^2-n}{2}oo z^{n-2}$ erit ejus incrementum ſecundum ſeu differentia ſecunda cui naſcenti proportionalis eſt ejus Fluxio ſecunda, quartus $\frac{n^3-3n^2+2n}{6}o^3z^{n-3}$ erit ejus incrementum tertium ſeu differentia tertia cui naſcenti Fluxio tertia proportionalis eſt, & ſic deinceps in infinitum.

Exponi autem poſſunt hæ Fluxiones per Curvarum Ordinatas BD, BE, BF, BG, BH, &c.

Ut ſi Ordinata BE $(= \frac{ADB}{1})$ ſit quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BD.

Si BF $(= \frac{AEB}{1})$ ſit quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BE, & Fluxio ſecunda ut Ordinata BD.

Si BH $(= \frac{AGB}{1})$ ſit quantitas fluens, erunt ejus Fluxiones prima, ſecunda, tertia & quarta, ut Ordinatæ BG, BF, BE, BD reſpective.

Et hinc in æquationibus quæ quantitates tantum duas incognitas involvunt, quarum una eſt quantitas uniformiter fluens & altera eſt Fluxio quælibet quantitatis alterius fluentis, inveniri poteſt fluens illa

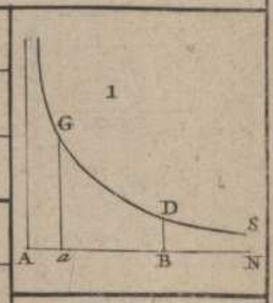
al-

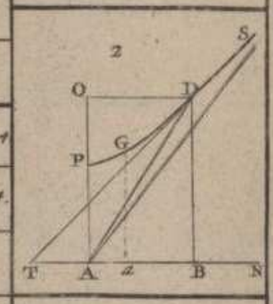
TABULA

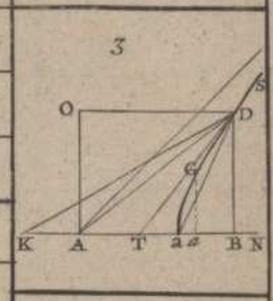
CURVARUM SIMPLICIORUM QUÆ CUM ELLIPSI ET HYPERBOLA COMPARARI POSSUNT.

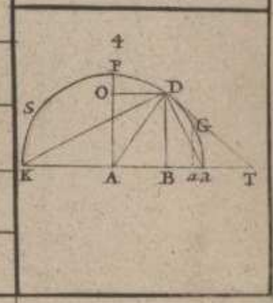
Sit jam aGD vel PGD vel GDS Sectio Conica cujus Area ad Quadraturam Curvæ propositæ requiritur, sitq; ejus Centrum A, Axis Ka, Vertex a, Semiaxis conjugatus AP datum Abscissæ principium A vel a vel *a*, abscissa AB vel aB vel *a*B = *x*, Ordinata rectangula BD = *v*, et Area ABDP vel aBDG vel *a*BDG = *s*, existente *a*G Ordinata ad punctum *a*, Jungantur KD, AD, aD, ducatur Tangens DT occurrens abscissæ AB in T, & compleatur parallelogrammum ABDO. Et siquando ad quadraturam Curvæ propositæ requiruntur Arcæ duarum Sectionum Conicarum, dicatur posterioris Abscissa z Ordinata x, et Area σ. Sit autem ÷ differentia duarum quantitatum ubi incertum est utrum posterior de priori an prior de posteriori subduci debeat. Et in Forma sexta scribatur p pro $\sqrt{fff - 4eg}$.

CURVARUM FORMÆ		SECTIONIS CONICÆ: Abscissa	SECTIONIS CONICÆ: Ordinata		CURVARUM AREÆ
I	1 $\frac{dz^{n-1}}{e+fz^n} = y$	$z^n = x$	$\frac{d}{e+fx} = v$		$\frac{1}{a}s = t = \frac{a\text{GDB}}{n}$ *Fig 1.*
	2 $\frac{dz^{2n-1}}{e+fz^n} = y$	$z^n = x$	$\frac{d}{e+fx} = v$		$\frac{d}{nf}z^n - \frac{e}{nf}s = t.$
	3 $\frac{dz^{3n-1}}{e+fz^n} = y$	$z^n = x$	$\frac{d}{e+fx} = v$		$\frac{d}{2nf}z^{2n} - \frac{de}{nf^2}z^n + \frac{e^2}{nf^2}s = t.$
II	1 $\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n} = y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f}x^2} = v$		$\frac{2xv+4s}{n} = t = \frac{4}{n}$ADGa *Fig. 3. 4.*
	2 $\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n} = y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f}x^2} = v$		$\frac{2de}{nf}z^{\frac{1}{2}n} + \frac{4es - 2exv}{nf} = t.$
	3 $\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n} = y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f}x^2} = v$		$\frac{2de}{3nf}z^{\frac{3}{2}n} - \frac{2dee}{nf^2}z^{\frac{1}{2}n} + \frac{2e^2xv - 4e^2s}{nf^2} = t.$
III	1 $\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^n} = y$ vel sic	$\frac{1}{z^n} = x^2$	$\sqrt{f+ex^2} = v$		$\frac{4de}{nf} \times \frac{v^2}{2ex} - s = t = \frac{4de}{vf}$ in aGDT *vel in* APDB ÷ TDB *Fig 2 3 4*
		$\frac{1}{z^n} = x$	$\sqrt{fx+ex^2} = v$		$\frac{8de^2}{nf^2} \times s - \frac{1}{2}xv - \frac{fv}{4e} + \frac{f^2v}{4e^2s} = t = \frac{8de^2}{nf^2}$ in aGDA $+ \frac{f^2v}{4e^2x}$ *Fig. 3.4.*
	2 $\frac{d}{z^{n+1}}\sqrt{e+fz^n} = y$	$\frac{1}{z^n} = x^2$	$\sqrt{f+ex^2} = v$		$-\frac{2d}{n}s = t = \frac{2d}{n}$APDB seu $\frac{2d}{n}$ aGDB. *Fig. 2. 3. 4.*
	vel sic	$\frac{1}{z^n} = x$	$\sqrt{fx+ex^2} = v$		$\frac{4de}{nf} \times s - \frac{1}{2}xv - \frac{fv}{2e} = t = \frac{de}{nf} \times$aGDK *Fig. 3. 4.*
	3 $\frac{d}{z^{2n+2}}\sqrt{e+fz^n} = y$	$\frac{1}{z^n} = x$	$\sqrt{fx+ex^2} = v$		$-\frac{d}{n}s = t = \frac{d}{n} \times$ - aGDB *vel* BDPK. *Fig. 4.*
	4 $\frac{d}{z^{3n+2}}\sqrt{e+fz^n} = y$	$\frac{1}{z^n} = x$	$\sqrt{fx+ex^2} = v$		$\frac{3dfs - 2dv^3}{6ne} = t.$
IV	1 $\frac{d}{z\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\frac{1}{z^n} = x^2$	$\sqrt{f+ex^2} = v$		$\frac{4d}{nf} \times \frac{1}{2}xv \div s = t = \frac{4d}{nf}$ in PAD *vel in* aGDA. *Fig 2.3.4.*
	vel sic	$\frac{1}{z^n} = x$	$\sqrt{fx+ex^2} = v$		$\frac{8de}{nf^2} \times s - \frac{1}{2}xv - \frac{fv}{4e} = t = \frac{2da}{nf^2}$ in aGDA. *Fig. 3. 4.*
	2 $\frac{d}{z^n\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\frac{1}{z^n} = x^2$	$\sqrt{f+ex^2} = v$		$\frac{2d}{ne} \times \overline{s - xv} = t = \frac{2d}{ne}$ in POD *vel in* AODGa *Fig. 2. 3. 4.*
	vel sic	$\frac{1}{z^n} = x$	$\sqrt{fx+ex^2} = v$		$\frac{4d}{nf} \frac{1}{2}xv \div s = t \quad \frac{4d}{nf}$ in aDGa *Fig. 3. 4.*
	3 $\frac{d}{z^{2n-1}\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\frac{1}{z^n} = x$	$\sqrt{fx+ex^2} = v$		$\frac{d}{ne} \times 3s \div 2xv = t = \frac{d}{ne}$ in 3aDGa ÷ △ aDB *Fig. 3. 4.*
	4 $\frac{d}{z^{3n+1}\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\frac{1}{z^n} = x$	$\sqrt{fx+ex^2} = v$		$\frac{10dfxv - 15dfs - 4dex^2v}{6ne^2} = t$





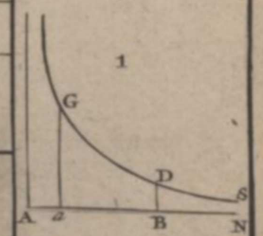


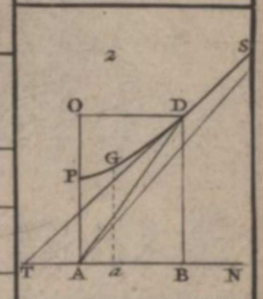


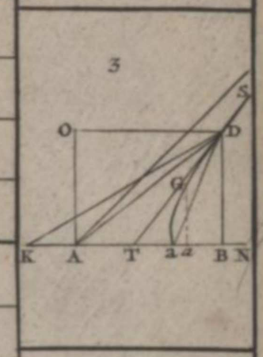
| RESIDUOS | | |

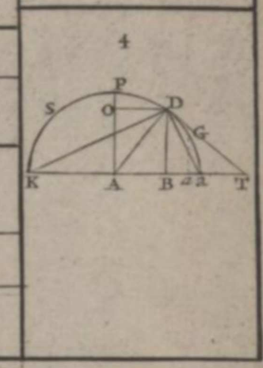
RESIDUUM TABULÆ CURVARUM SIMPLICIORUM QUÆ CUM ELLIPSI ET HYPERBOLA COMPARARI POSSUNT.

CURVARUM FORMÆ		SECTIONIS CONICÆ: Abscissa	SECTIONIS CONICÆ: Ordinata		CURVARUM AREÆ
V	1 $\frac{dz^{n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^n+gz^{2n}}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{g}+\frac{f^2-4eg}{4g^2}x^2} = v$		$\frac{xv}{n}\frac{25}{} = t$.
	vel sic	$\sqrt{\frac{dz^n}{e+fz+gz^2}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{e}+\frac{f^2-4eg}{4e^2}x^2} = v$		$\frac{25}{n}\frac{xv}{} = t$.
	2 $\frac{dz^{2n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$\begin{cases}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = x \\ fz^n+gz^{2n} = \zeta\end{cases}$	$\begin{cases}\sqrt{\frac{d}{g}+\frac{f^2-4eg}{4g^2}x^2} = v \\ z^2+\zeta = x\end{cases}$		$\frac{d\zeta+\zeta^2\zeta-f\zeta z}{2ng} = t$.
VI	1 $\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$\begin{cases}\sqrt{\frac{2d\zeta}{f-p+2gz^n}} = x \\ \sqrt{\frac{2d\zeta}{f+p+2gz^n}} = \zeta\end{cases}$	$\begin{cases}\sqrt{d+\frac{f-p}{2g}x^2} = v \\ \sqrt{d+\frac{f+p}{2g}\zeta^2} = x\end{cases}$		$\frac{2xv-4\zeta-2\zeta x+4\sigma}{np} = t$.
	2 $\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$\begin{cases}\sqrt{\frac{2de z^n}{fe^n+fz^n+2e}} = x \\ \sqrt{\frac{2de z^n}{fe^n+fz^n+2e}} = \zeta\end{cases}$	$\begin{cases}\sqrt{d+\frac{f-n}{2e}x^2} = v \\ \sqrt{d+\frac{f-n}{2e}\zeta^2} = x\end{cases}$		$\frac{4}{n}\frac{2xv-4\sigma+2\zeta x}{p} = t$.
VII	1 $\frac{d}{g}\sqrt{e+fz^n+gz} = y$	$\begin{cases}z^n = x \\ \frac{1}{n}\sigma = \zeta\end{cases}$	$\begin{cases}\sqrt{e+fx+gx^2} = v \\ \sqrt{g-f\zeta+e\zeta^2} = x\end{cases}$		$\frac{4de^2\zeta x+2defx-2dfgxv+\frac{1}{2}4dg^2d}{4neg}\frac{-8de^2\sigma+4dfg\zeta}{n^2} = t$.
	2 $dz^{n-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$		$\frac{d}{2n}s = t = \frac{d}{v} \times aGDB$. Fig. 2.3.
	3 $dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$		$\frac{d}{2n}v^3 - \frac{df}{2ng}s = t$.
	4 $dz^{3n-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$		$\frac{6dgx}{n^2g^2}\frac{5df}{}v^3 + \frac{5df^2}{16n^2g^2}\frac{4deg}{}s = t$
VIII	1 $\frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$		$\frac{8dgx-4dgxv}{4neg-nf^2}\frac{2df}{} = t = \frac{8dg}{4neg-nf^2} \times aGDB \pm \Delta DBA$. Fig. 2.4.
	2 $\frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$		$\frac{-4dfx+2df^2xv+4dev}{4neg-nf^2} = t$.
	3 $\frac{dz^{3n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$		$\frac{8df^2}{-8neg}s - \frac{2df^3}{+4neg}xv - 2dfgv = t$.
	4 $\frac{dz^{4n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} = y$	$z^n = x$	$\sqrt{e+fx+gx^2} = v$		$\frac{36df^2g}{-28nf^2}s + \frac{8dfeg}{-2nfg}x^2v + \frac{20df^3}{-28nfg}xv + \frac{10df^4}{16n^2g}v$ t.
IX	1 $\frac{dz^{n-1}\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh}{h}-\frac{fg}{h}x^2} = v$		$\frac{4fg}{4nh}s - \frac{2fg}{2nh}xv + 2df\frac{y}{x} = t$.
	2 $\frac{dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh}{h}-\frac{fg}{h}x^2} = v$		$\frac{-4ghs}{4hg} - \frac{2eh}{2hg}xv + \frac{2}{3}4h\frac{gx}{x} - 2dfg\frac{y}{x} = t$.
X	1 $\frac{dz^{n-1}}{g+hz^n\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh}{h}-\frac{fg}{h}x^2} = v$		$\frac{2xn}{nf}\frac{4s}{} = t = \frac{4}{nf}$ ADGa. Fig. 3.4.
	2 $\frac{dz^{2n-1}}{g+hz^n\sqrt{e+fz^n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}} = x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}x^2} = v$		$\frac{4gs}{nfh}\frac{2gxv+2d\frac{y}{x}}{} = t$.
XI	1 $dz^{-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}} = y$	$\begin{cases}\sqrt{g+hz^n} = x \\ \sqrt{h+gz^{-n}} = \zeta\end{cases}$	$\begin{cases}\sqrt{eh-fg}{h}+\frac{f}{h}x^2 = v \\ \sqrt{fg-eh}{g}+\frac{e}{g}\zeta^2 = x\end{cases}$		$\frac{2dxv^2z^{-n}-4dfs}{n^2fg}\frac{4des}{nch} = t$.
	2 $dz^{n-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}} = y$	$\sqrt{g+hz^n} = x$	$\sqrt{eh-fg}{h}+\frac{f}{h}x^2 = v$		$\frac{2d}{n^2h}s = t$.
	3 $dz^{2n-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}} = y$	$\sqrt{g+hz^n} = x$	$\sqrt{eh-fg}{h}+\frac{f}{h}x^2 = v$		$\frac{2hxv^3}{n^2f^2}\frac{-2df^2}{4deh}s = t$.









BIBLIOTECA PÚBLICA E
ARQUIVO DISTRITAL
DE
ÉVORA

altera per quadraturam Curvarum. Exponatur enim Fluxio ejus per Ordinatam BD, & ſi hæc ſit Fluxio prima, quæratur Area ADB $=BE\times 1$, ſi Fluxio ſecunda, quæratur Area AEB $=BF\times 1$, ſi Fluxio tertia, quæratur Area AFB $=BG\times 1$, &c. & Area inventa erit exponens fluentis quæſitæ.

Sed & in æquationibus quæ fluentem & ejus fluxionem primam ſine altera fluente, vel duas ejuſdem fluentis fluxiones, primam & ſecundam, vel ſecundam & tertiam, vel tertiam & quartam, &c. ſine alterutra fluente involvunt: inveniri poſſunt fluentes per quadraturam Curvarum. Sit æquatio $aa\dot{v}=a\dot{v}+v\dot{v}$, exiſtente $\dot{v}=BE$, $\dot{v}=BD$, $z=AB$, & $\dot{z}=1$, & æquatio illa complendo dimenſiones Fluxionum, evadet $aa\dot{v}=av\dot{z}+vv\dot{z}$, ſeu $\frac{aa\dot{v}}{av+vv}=\dot{z}$.



Jam fluat v uniformiter, & ſit ejus Fluxio $\dot{v}=1$, & erit $\frac{aa}{av+vv}=\dot{z}$, & quadrando Curvam cujus Ordinata eſt $\frac{aa}{av+vv}$ & Abſciſſa v, habebitur fluens z. Adhæc ſit æquatio $aa\ddot{v}=a\dot{v}+\dot{v}\dot{v}$, exiſtente $v=BF$, $\dot{v}=BE$, $\ddot{v}=BD$, & $z=AB$, & per relationem inter $\ddot{v}$ & $\dot{v}$ ſeu BD & BE invenietur relatio inter AB & BE, ut in exemplo ſuperiore. Deinde per hanc relationem invenietur relatio inter AB & BF quadrando Curvam AEB.

Æquationes quæ tres incognitas quantitates involvunt aliquando reduci poſſunt ad æquationes quæ duas tantum involvunt, & in his caſibus fluentes invenientur ex fluxionibus ut ſupra. Sit æquatio $a-bx^m=cxy^n\dot{y}+dy^{2n}\dot{y}\dot{y}$, ponatur $y^n\dot{y}=\dot{v}$, & erit $a-b\dot{x}^m=cx\dot{v}+d\dot{v}\dot{v}$. Hæc æquatio quadrando Curvam cujus Abſciſſa eſt x & Ordinata $\dot{v}$ dat Aream v; & æquatio altera $y^n\dot{y}=\dot{v}$, regrediendo ad fluentes, dat $\frac{1}{n+1}y^{n+1}=v$: Unde habetur fluens y.

Quinetiam in æquationibus, quæ tres incognitas involvunt, & ad æquationes quæ duas tantum involvunt, reduci non poſſunt, fluentes quandoque prodeunt per quadraturam Curvarum. Sit æquatio $\overline{ax^m+bx^n}|^p=rex^{r-1}y^s+sex^ryy^{s-1}-fy\dot{y}^t$, exiſtente $\dot{x}=1$; Et pars poſte-

rior $rex^{r-1}\dot{x}y^{s} + sex^{r}\dot{y}y^{s-1} - f\dot{y}y^{t}$, regrediendo ad fluentes, fit $ex^{r}y^{s} - \frac{f}{t+1}y^{t+1}$, quæ proinde eſt ut Area Curvæ cujus Abſciſſa eſt x & Ordinata $\overline{ax^{m}+bx^{n}}|^{p}$, & inde datur fluens y.

Sit æquatio $\dot{x} \times \overline{ax^{m}+bx^{n}}|^{p} = \frac{d\dot{y}y^{n-1}}{\sqrt{e+fy^{n}}}$, Et fluens cujus Fluxio eſt $\dot{x} \times \overline{ax^{m}+bx^{n}}|^{p}$ erit ut Area Curvæ cujus Abſciſſa eſt x & Ordinata eſt $\overline{ax^{m}+bx^{n}}|^{p}$. Item fluens cujus Fluxio eſt $\frac{d\dot{y}y^{n-1}}{\sqrt{e+fy^{n}}}$ erit ut Area Curvæ cujus Abſciſſa eſt y & Ordinata $\frac{dy^{n-1}}{\sqrt{e+fy^{n}}}$, id eſt (per Caſum 1. Formæ quartæ Tab. I.) ut Area $\frac{2d}{nf}\sqrt{e+fy^{n}}$. Pono ergo $\frac{2d}{nf}\sqrt{e+fy^{n}}$ æqualem Areæ Curvæ cujus Abſciſſa eſt x & Ordinata $\overline{ax^{m}+bx^{n}}|^{p}$, & habebitur fluens y.

Et nota quod fluens omnis, quæ ex Fluxione prima colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate quavis non fluente. Qua ex Fluxione ſecunda colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate quavis cujus Fluxio ſecunda nulla eſt. Quæ ex fluxione tertia colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate quavis cujus fluxio tertia nulla eſt. Et ſic deinceps in infinitum.

Poſtquam fluentes ex fluxionibus collectæ ſunt, ſi de veritate Concluſionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum viciſſim colligendæ ſunt, & cum Fluxionibus ſub initio propoſitis comparandæ. Nam ſi prodeunt æquales, Concluſio recte ſe habet: ſin minus, corrigendæ ſunt fluentes ſic, ut earum Fluxiones fluxionibus ſub initio propoſitis æquentur. Nam & fluens pro lubitu aſſumi poteſt, & aſſumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis aſſumptæ æqualem Fluxioni propoſitæ, & terminos homologos inter ſe comparando.

Et his principiis via ad majora ſternitur.

ENUMERATIO
LINEARUM
TERTII ORDINIS.

TITI LIVII

LIBER XXIII.

EDITIO VARIORUM

ENUMERATIO
LINEARUM
TERTII ORDINIS.

I. *Linearum Ordines.*

LIneæ Geometricæ ſecundum numerum dimenſionum æquationis qua relatio inter Ordinatas & Abſciſſas definitur, vel (quod perinde eſt) ſecundum numerum punctorum in quibus a linea recta ſecari poſſunt, optime diſtinguuntur in Ordines. Qua ratione linea primi Ordinis erit Recta ſola, eæ ſecundi ſive quadratici Ordinis erunt ſectiones Conicæ & Circulus, & eæ tertii ſive cubici Ordinis Parabola Cubica, Parabola *Neiliana*, Ciſſois veterum, & reliquæ quas hic enumerare ſuſcepimus. Curva autem primi Generis, (ſiquidem recta inter Curvas non eſt numeranda) eadem eſt cum Linea ſecundi Ordinis, & Curva ſecundi Generis eadem cum Linea Ordinis tertii. Et Linea Ordinis infiniteſimi ea eſt quam recta in punctis infinitis ſecare poteſt, qualis eſt Spiralis, Cyclois, Quadratrix, & linea omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

II. *Proprietates Sectionum Conicarum competunt Curvis ſuperiorum Generum.*

Sectionum Conicarum proprietates præcipuæ a Geometris paſſim traduntur. Et conſimiles ſunt proprietates Curvarum ſecundi Generis, & reliquarum, ut ex ſequenti proprietatum præcipuarum enumeratione conſtabit.

1. *De Curvarum ſecundi generis Ordinatis, Diametris, Verticibus, Centris, Axibus.*

Si rectæ plures parallelæ & ad Conicam ſectionem utrinque terminatæ ducantur, recta duas earum biſecans biſecabit alias omnes, ideoque dicitur *Diameter* figuræ & rectæ biſectæ dicuntur *Ordinatim applicatæ* ad Diametrum, & concurſus omnium Diametrorum eſt *Centrum* figuræ, & interſectio Curvæ & diametri *Vertex* nominatur, & diameter illa *Axis* eſt cui Ordinatim applicatæ inſiſtunt ad angulos rectos. Et ad eundem modum in Curvis ſecundi Generis, ſi rectæ duæ quævis parallelæ ducantur occurrentes Curvæ in tribus punctis: recta quæ ita ſecat has parallelas ut ſumma duarum partium ex uno ſecantis latere ad Curvam terminatarum æquetur parti tertiæ ex altero latere ad curvam terminatæ, eodem modo ſecabit omnes alias his parallelas curvæque in tribus punctis occurrentes rectas, hoc eſt, ita ut ſumma partium duarum ex uno ipſius latere ſemper æquetur parti tertiæ ex altero latere. Has itaque tres partes quæ hinc inde æquantur, *Ordinatim applicatas*, & rectam ſecantem cui Ordinatim applicantur *Diametrum*, & interſectionem diametri & Curvæ *Verticem*, & concurſum duarum Diametrorum *Centrum* nominare licet. Diameter autem ad Ordinatas rectangula ſi modo aliqua ſit, etiam *Axis* dici poteſt, & ubi omnes Diametri in eodem puncto concurrunt, iſtud erit *Centrum generale*.

2. *De Aſymptotis & earum proprietatibus.*

Hyperbola primi generis duas *Aſymptotos*, ea ſecundi tres, ea tertii quatuor & non plures habere poteſt, & ſic in reliquis. Et quemadmodum partes lineæ cujuſvis rectæ inter Hyperbolam Conicam & duas ejus Aſymptotos ſunt hinc inde æquales: ſic in Hyperbolis ſecundi Generis ſi ducatur recta quævis ſecans tam Curvam quam tres ejus Aſymptotos in tribus punctis, ſumma duarum partium iſtius rectæ quæ a duobus quibusvis Aſymptotis in eandem plagam ad duo puncta Curvæ extenduntur, æqualis erit parti tertiæ quæ a tertia Aſymptoto in plagam contrariam ad tertium Curvæ punctum extenditur.

3. *De Lateribus rectis & transversis.*

Et quemadmodum in Conicis sectionibus non Parabolicis quadratum Ordinatim applicatæ, hoc est, rectangulum Ordinatarum quæ ad contrarias partes Diametri ducuntur, est ad rectangulum partium Diametri quæ ad Vertices Ellipseos vel Hyperbolæ terminantur, ut data quædam linea quæ dicitur *Latus rectum*, ad partem Diametri quæ inter Vertices jacet & dicitur *Latus transversum*: sic in Curvis non Parabolicis secundi Generis parallelepipedum sub tribus Ordinatim applicatis est ad parallelepipedum sub partibus Diametri ad Ordinatas & tres Vertices figuræ absciílis, in ratione quadam data: in qua ratione si sumantur tres rectæ ad tres partes diametri inter vertices figuræ sitas, singulæ ad singulas, tunc illæ tres rectæ dici possunt *Latera recta* figuræ, & illæ partes Diametri inter Vertices *Latera transversa*. Et sicut in Parabola Conica quæ ad unam & eandem diametrum unicum tantum habet Verticem, rectangulum sub Ordinatis æquatur rectangulo sub parte Diametri quæ ad Ordinatas & Verticem absciditur & recta quadam data quæ *Latus rectum* dicitur: sic in Curvis secundi Generis quæ non nisi duos habent Vertices ad eandem Diametrum, parallelepipedum sub Ordinatis tribus æquatur parallelepipedo sub duabus partibus Diametri ad Ordinatas & Vertices illos duos absciíis & recta quadam data quæ proinde *Latus rectum* dici potest.

4. *De Ratione contentorum sub Parallelarum segmentis.*

Denique sicut in Conicis sectionibus ubi duæ parallelæ ad Curvam utrinque terminatæ secantur a duabus parallelis ad Curvam utrinque terminatis, prima a tertia, & secunda a quarta, rectangulum partium primæ est ad rectangulum partium tertiæ ut rectangulum partium secundæ ad rectangulum partium quartæ: sic ubi quatuor tales rectæ occurrunt Curvæ secundi Generis, singulæ in tribus punctis, parallelepipedum partium primæ rectæ erit ad parallelepipedum partium tertiæ, ut parallelepipedum partium secundæ ad parallelepipedum partium quartæ.

5. *De Cruribus Hyperbolicis & Parabolicis & eorum plagis.*

Curvarum secundi & superiorum Generum æque atque primi cru-

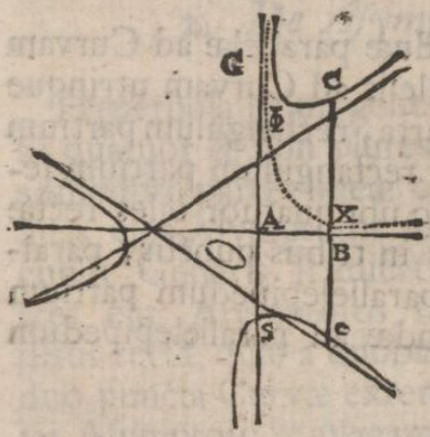
ra omnia in infinitum progredientia vel *Hyperbolici* ſunt generis vel *Parabolici*. Crus *Hyperbolicum* voco quod ad Aſymptoton aliquam in infinitum appropinquat; *Parabolicam* quod Aſymptoto deſtituitur. Hæc crura ex Tangentibus optime dignoſcuntur. Nam ſi punctum contactus in infinitum abeat, Tangens cruris Hyperbolici cum Aſymptoto coincidet, & Tangens cruris Parabolici in infinitum recedet, evaneſcet & nullibi reperietur. Invenitur igitur Aſymptotos cruris cujusvis quærendo Tangentem cruris illius ad punctum infinite diſtans. Plaga autem cruris infiniti invenitur quærendo poſitionem rectæ cujusvis quæ Tangenti parallela eſt ubi punctum contactus in infinitum abit. Nam hæc recta in eandem plagam cum crure infinito dirigitur.

III. *Reductio Curvarum omnium Generis Secundi ad æquationum caſus quatuor.*

Lineæ omnes Ordinis primi, tertii, quinti, ſeptimi & imparis cujusque duo habent ad minimum crura in infinitum verſus plagas oppoſitas progredientia. Et lineæ omnes tertii Ordinis duo habent ejusmodi crura in plagas oppoſitas progredientia in quas nulla alia earum crura infinita (præterquam in Parabola *Carteſiana*) tendunt.

CAS. I.

Si crura illa ſint Hyperbolici generis, ſit GAS eorum Aſymptotos, & huic parallela agatur recta quævis CBc ad Curvam utrinque (ſi fieri poteſt) terminata, eademque biſecetur in puncto X, & locus puncti illius X erit Hyperbola Conica (puta X Φ) cujus una Aſymptotos eſt AG. Sit ejus altera Aſymptotos AB, & æquatio qua relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AB definitur, ſi AB dicatur x, & BC y, ſemper induet hanc formam $xyy + ey = ax^3 + bxx + cx + d$. Ubi termini, e, a, b, c, d, deſignant quantitates datas ſignis ſuis + & — affectas, quarum quælibet deeſſe poſſunt modo ex earum defectu figura in ſectionem Conicam non vertatur. Poteſt autem Hyperbola illa Conica cum Aſymptotis ſuis coincidere, id eſt punctum X in recta AB locari: & tunc terminus + ey deeſt.

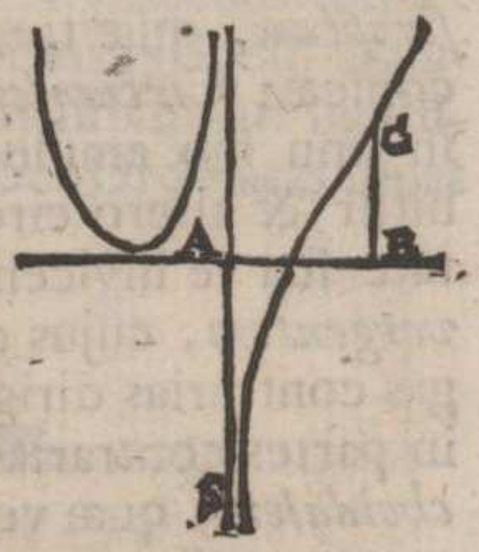


CAS.

CAS. II.

At ſi recta illa CBc non poteſt utrinque ad Curvam terminari, ſed Curvæ in unico tantum puncto occurrit: age quamvis poſitione datam rectam AB Aſymptoto AS occurrentem in A, ut & aliam quamvis BC Aſymptoto illi parallelam Curvæque occurrentem in puncto C, & æquatio qua relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AB definitur, ſemper induet hanc formam,

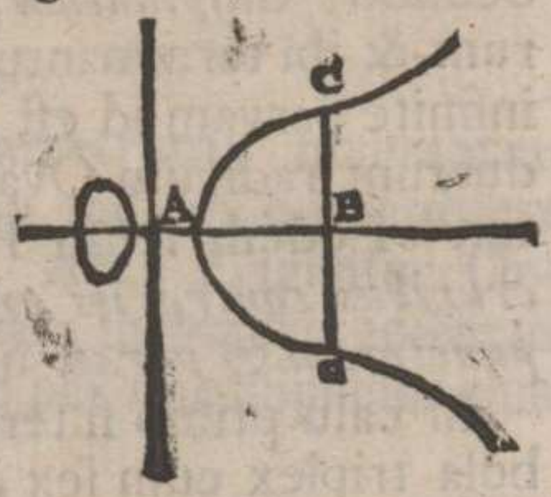
$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$



CAS. III.

Quod ſi crura illa oppoſita Parabolici ſint generis, recta CBc ad Curvam utrinque, ſi fieri poteſt, terminata in plagam crurum ducatur & biſecetur in B, & locus puncti B erit Linea recta. Sit iſta AB, terminata ad datum quodvis punctum A, & æquatio qua relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AB definitur, ſemper induet hanc formam,

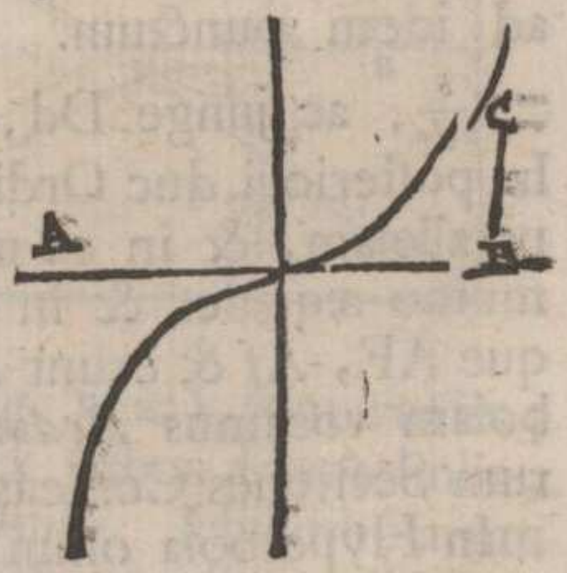
$$yy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$



CAS. IV.

At vero ſi recta illa CBc in unico tantum puncto occurrat Curvæ, ideoque ad Curvam utrinque terminari non poſſit: ſit punctum illud C, & incidat recta illa ad punctum B in rectam quamvis aliam poſitione datam & ad datum quodvis punctum A terminatam AB: & æquatio qua relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AC definitur, ſemper induet hanc formam,

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$



Nomina formarum.

Enumerando Curvas horum caſuum, Hyperbolam vocabimus, *Inſcriptam*, quæ tota jacet in Aſymptoton angulo ad inſtar Hyperbolæ conicæ; *Circumſcriptam*, quæ Aſymptotos ſecat & partes Abſciſſas in ſinu ſuo amplectitur; *Ambigenam*, quæ uno crure infinito inſcribitur & altero circumſcribitur; *Convergentem*, cujus crura concavitate ſua ſe invicem reſpiciunt & in plagam eandem diriguntur; *Divergentem*, cujus crura convexitate ſua ſe invicem reſpiciunt & in plagas contrarias diriguntur; *Cruribus Contrariis præditam*, cujus crura in partes contrarias convexa ſunt & in plagas contrarias infinita; *Conchoidalem*, quæ vertice concavo & cruribus divergentibus ad Aſymptoton applicatur; *Anguineam*, quæ flexibus contrariis Aſymptoton ſecat & utrinque in crura contraria producitur; *Cruciformem*, quæ conjugatam decuſſat; *Nodatam*, quæ ſeipſam decuſſat in orbem redeundo; *Cuſpidatam*, cujus partes duæ in angulo contactus concurrunt & ibi terminantur; *Punctatam*, quæ conjugatam habet Ovalem infinite paryam id eſt punctum; & *Puram*, quæ per impoſſibilitatem duarum radicum Ovali, Nodo, Cuſpide & Puncto conjugato privatur. Eodem ſenſu Parabolam quoque *convergentem*, *divergentem*, *cruribus contrariis præditam*, *cruciformem*, *nodatam*, *cuſpidatam*, *punctatam* & *puram* nominabimus.

In caſu primo ſi terminus ax^3 affirmativus eſt, Figura erit Hyperbola triplex cum ſex cruribus Hyperbolicis quæ juxta tres Aſymptotos quarum nullæ ſunt parallelæ, in infinitum progrediuntur, binæ juxta unamquamque in plagas contrarias. Et hæ Aſymptoti ſi terminus bx^2 non deeſt, ſe mutuo ſecabunt in tribus punctis triangulum (Ddδ) inter ſe continentes, ſin terminus bx^2 deeſt, convergent omnes ad idem punctum. In priori caſu cape AD $= \frac{-b}{2a}$, & Ad $=$ Aδ $= \frac{b}{2\sqrt{a}}$, ac junge Dd, Dδ, & erunt Ad, Dd, Dδ tres Aſymptoti. In poſteriori duc Ordinatam quamvis BC, Ordinatæ principali AG parallelam, & in ea utrinque producta cape hinc inde BF & Bf ſibi mutuo æquales & in ea ratione ad AB quam habet $\sqrt{a}$ ad 1, jungeque AF, Af & erunt AG, AF, Af tres Aſymptoti. Hanc Hyperbolam vocamus *Redundantem*, quia numero crurum Hyperbolicorum Sectiones Conicas ſuperat.

In Hyperbola omni Redundante, ſi neque terminus ey deſit, neque ſit $bb - 4ac$ æquale $+ ae\sqrt{a}$, Curva nullam habebit Diametrum,

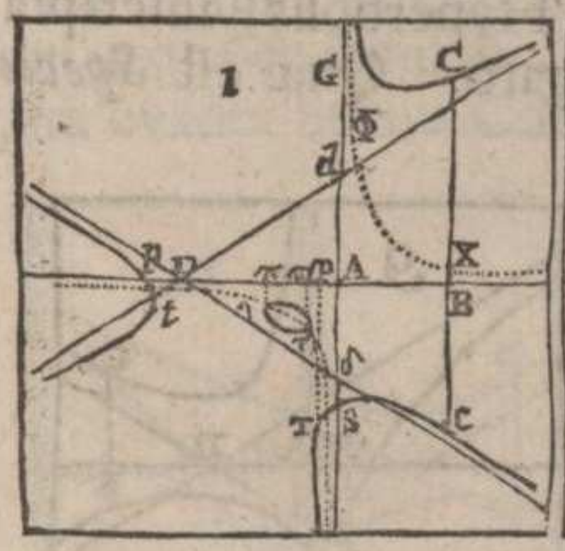
ſin

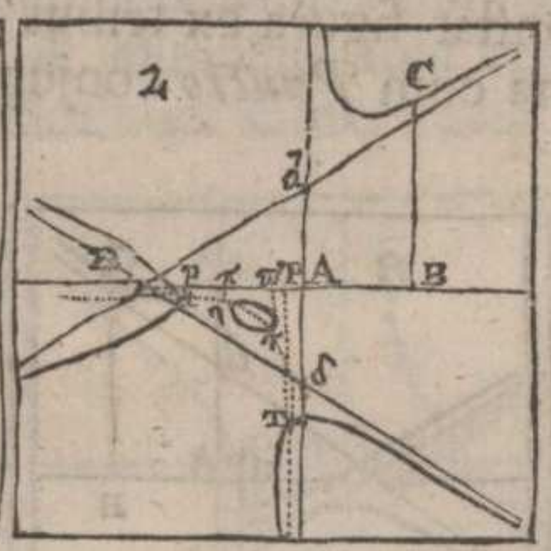
ſin eorum alterutrum accidit Curva habebit unicam Diametrum, & tres ſi utrumque. Diameter autem ſemper tranſit per interſectionem duarum Aſymptoton, & biſecat rectas omnes quæ ad Aſymptotos illas utrinque terminantur & parallelæ ſunt Aſymptoto tertiæ. Eſtque Abſciſſa AB diameter Figuræ quoties terminus *ey* deeſt. *Diametrum* vero abſolute dictam hic & in ſequentibus in vulgari ſignificatu uſurpo, nempe pro Abſciſſa quæ paſſim habet Ordinatas binas æquales ad idem punctum hinc inde inſiſtentes.

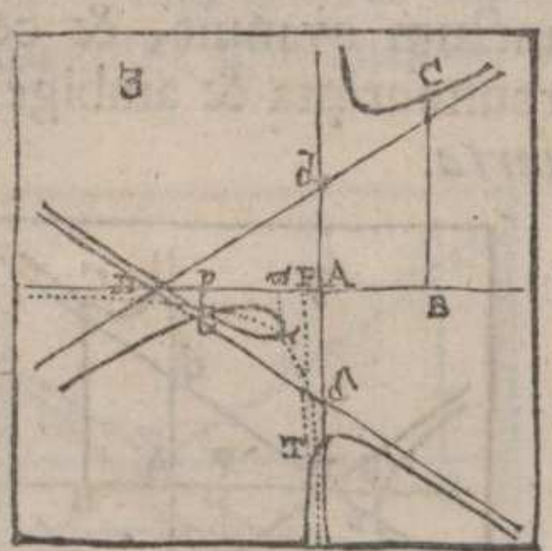
IV. *Enumeratio Curvarum.*

1. *De Hyperbolis novem redundantibus quæ diametro deſtituuntur & tres habent Aſymptotos triangulum capientes.*

Si Hyperbola redundans nullam habet diametrum, quærantur Æquationis hujus $ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$ radices quatuor ſeu valores ipſius x. Eæ ſunto AP, Aϖ, Aπ, Ap. Erigantur Ordinatæ PT, $\varpi\tau$, $\pi\gamma$, pt, & hæ tangent Curvam in punctis totidem T, τ, γ, t, & tangendo dabunt limites Curvæ per quos Species ejus innoteſcet.



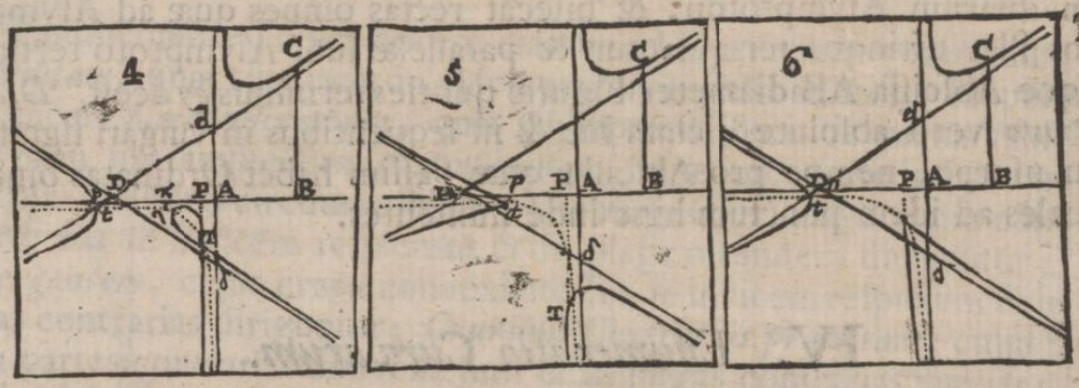




Nam ſi radices omnes AP, Aϖ, Ap, (*Fig.* 1, 2.) ſunt reales, ejuſdem ſigni & inæquales, Curva conſtat ex tribus Hyperbolis, (inſcripta, circumſcripta & ambigena) cum *Ovali*. Hyperbolarum una jacet verſus D, altera verſus d, tertia verſus δ, & Ovalis ſemper jacet intra Triangulum Ddδ, atque etiam inter medios limi-

tes

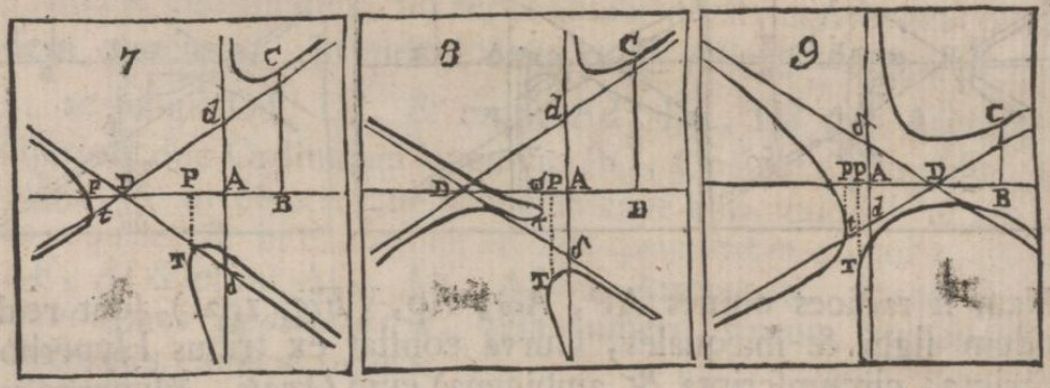
tes ϛ & τ, in quibus utique tangitur ab Ordinatis πϛ & ϖτ. Et hæc eſt *Species prima.*



Si e radicibus duæ maximæ Aπ, Ap, (*Fig.* 3.) vel duæ minimæ AP, Aϖ (*Fig.* 4.) æquantur inter ſe, & ejuſdem ſunt ſigni cum alteris duobus, Ovalis & Hyperbola circumſcripta ſibi invicem junguntur coeuntibus earum punctis contactus ϛ & t vel T & τ, & crura Hyperbolæ ſeſe decuſſando in Ovalem continuantur, figuram *Nodatam* efficientia. Quæ *Species* eſt *ſecunda.*

Si e radicibus tres maximæ Ap, Aπ, Aϖ, (*Fig.* 5.) vel tres minimæ Aπ, Aϖ, AP (*Fig.* 6.) æquentur inter ſe, Nodus in *Cuſpidem* acutiſſimum convertetur. Nam crura duo Hyperbolæ circumſcriptæ ibi in angulo contactus concurrent & non ultra producentur. Et hæc eſt *Species tertia.*

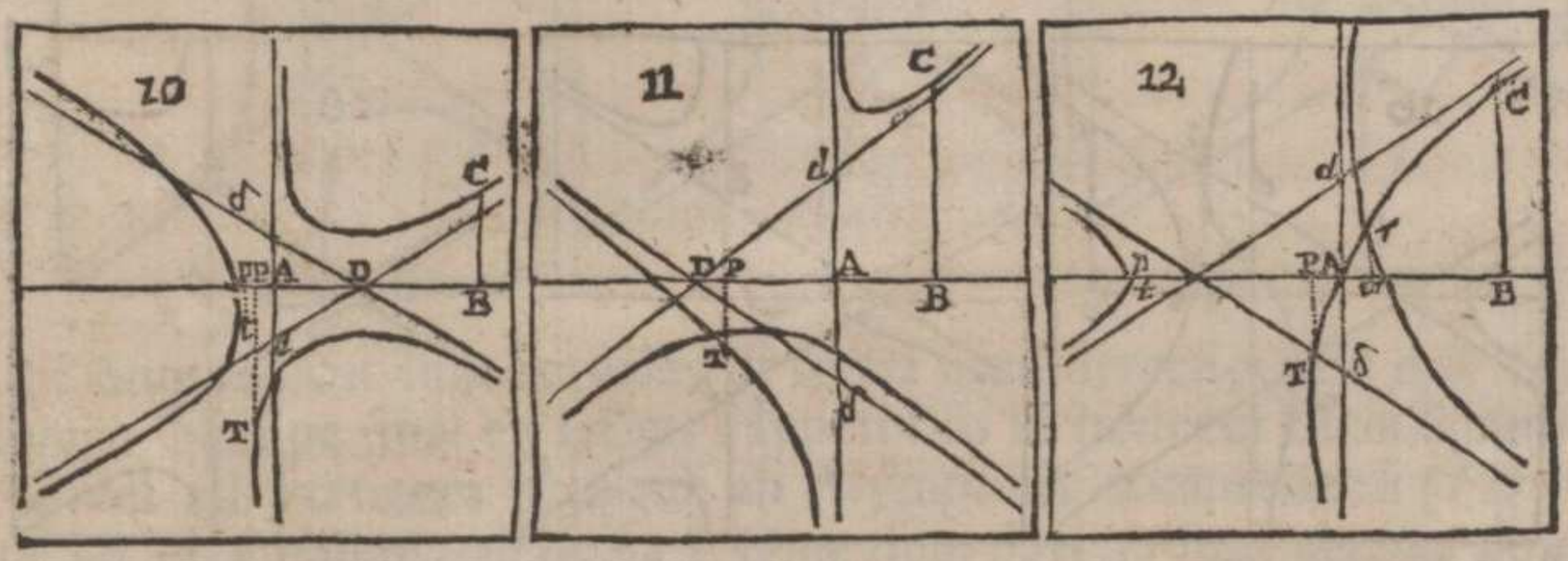
Si e radicibus duæ mediæ Aϖ & Aπ (*Fig.* 7.) æquentur inter ſe, puncta contactus τ & ϛ coincidunt, & propterea Ovalis interjecta in punctum evanuit, & conſtat figura ex tribus Hyperbolis, inſcripta, circumſcripta & ambigena cum *Puncto* conjugato. Quæ eſt *Species quarta.*



Si duæ ex radicibus ſunt impoſſibiles & reliquæ duæ inæquales & ejuſdem ſigni (nam ſigna contraria habere nequeunt,) *Puræ* habebuntur

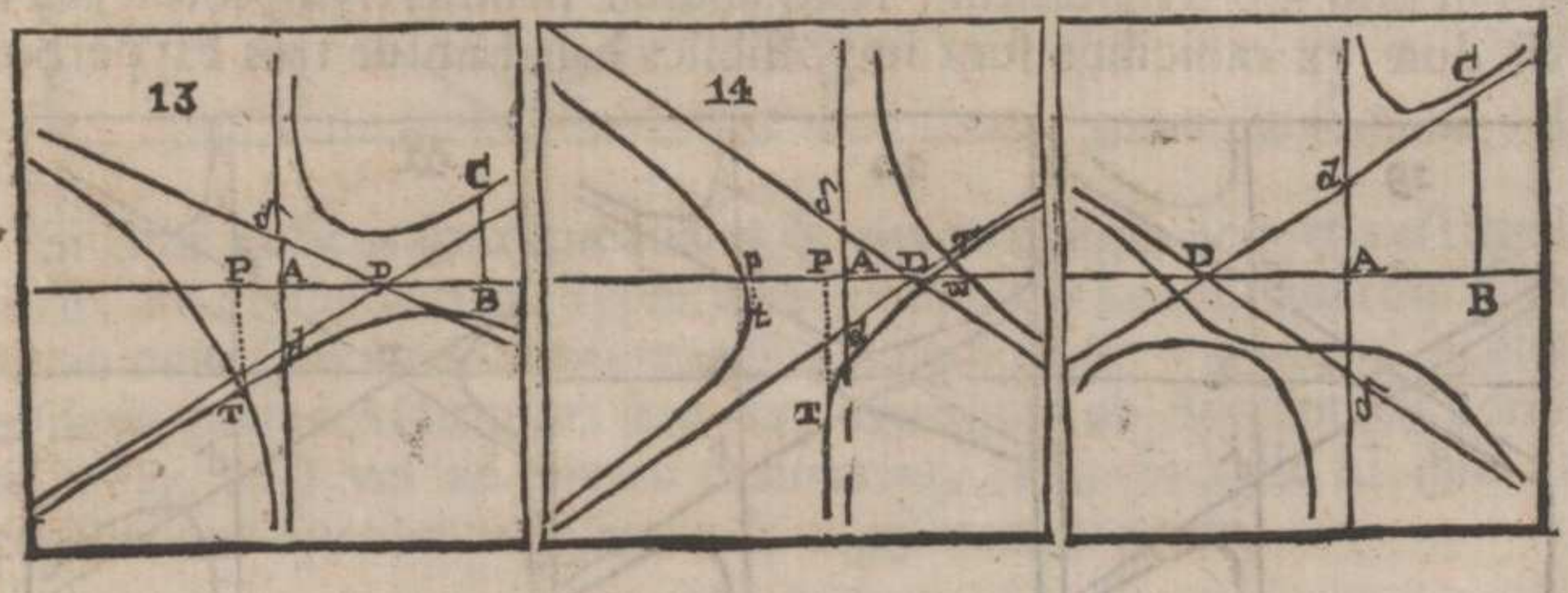
tur Hyperbolæ tres ſine Ovali vel Nodo vel Cuſpide vel Puncto conjugato, & hæ Hyperbolæ vel ad latera trianguli ab Aſymptotis comprehenſi vel ad angulos ejus jacebunt; & perinde *Speciem* vel *quintam* (*Fig.* 7. 8.) vel *ſextam* (*Fig.* 9, 10.) conſtituent.

Si e radicibus duæ ſunt æquales & alteræ duæ vel impoſſibiles ſunt (*Fig.* 11. 13.) vel reales (*Fig.* 12. 14.) cum ſignis quæ a ſignis æqualium radicum diverſa ſunt, figura *Cruciformis* habebitur, nempe duæ ex Hyperbolis ſe invicem decuſſabunt idque vel ad verticem trianguli ab Aſymptotis comprehenſi (*Fig.* 13, 14) vel ad ejus baſem (*Fig.* 11, 12.) Quæ duæ *Species* ſunt *ſeptima* & *octava.*



Si denique radices omnes ſunt impoſſibiles (*Fig.* 15.) vel ſi omnes ſunt reales & inæquales (*Fig.* 16.) & earum duæ ſunt affirmativæ & alteræ duæ negativæ, tunc duæ habebuntur Hyperbolæ ad angulos oppoſitos duarum Aſymptoton cum Hyperbola *Anguinea* circa Aſymptoton tertiam. Quæ *Species* eſt *nona.*

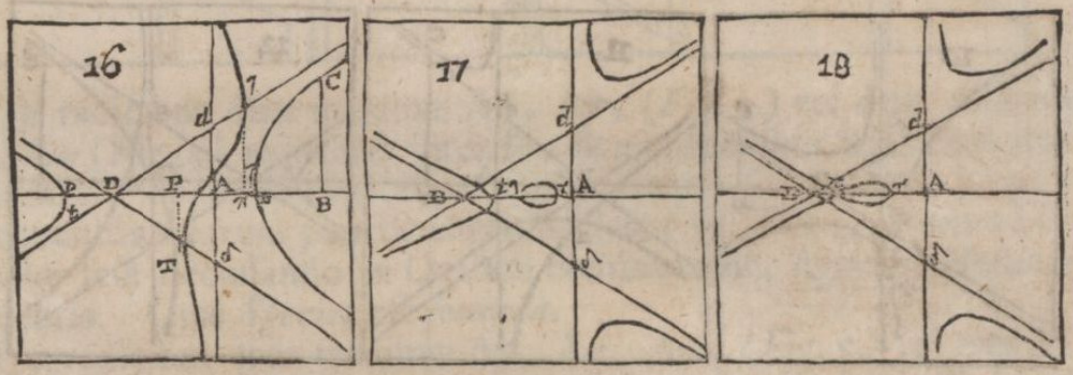
Et hi ſunt omnes radicum caſus poſſibiles. Nam ſi duæ radices ſunt æquales inter ſe, & aliæ duæ ſunt etiam inter ſe æquales, Figura evadet Sectio Conica cum Linea recta.



2. *De Hyperbolis duodecim redundantibus unicam tantum Diametrum habentibus.*

Si Hyperbola redundans habet unicam tantum Diametrum, ſit ejus Diameter Abſciſſa AB, & æquationis hujus $ax^3+bx^2+cx+d=0$ quære tres radices ſeu valores x.

Si radices illæ ſunt omnes reales & ejuſdem ſigni, Figura conſtabit ex *Ovali* intra triangulum Ddδ (*Fig.* 17.) jacente & tribus Hyperbolis ad angulos ejus, nempe Circumſcripta ad angulum D & Inſcriptis duabus ad angulos d & δ. Et hæc eſt *Species decima.*



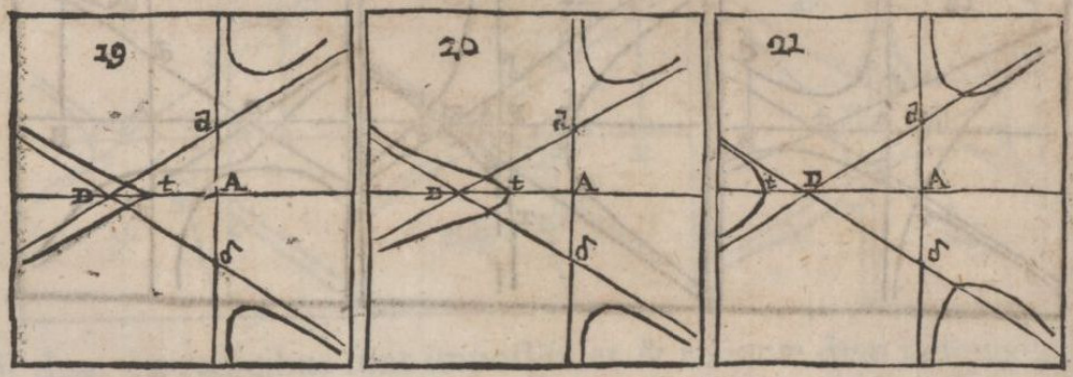
Si radices duæ majores ſunt æquales & tertia ejuſdem ſigni, crura Hyperbolæ jacentis verſus D (*Fig.* 18.) ſeſe decuſſabunt in forma *Nodi* propter contactum Ovalis. Quæ *Species* eſt *undecima.*

Si tres radices ſunt æquales, Hyperbola iſta fit *Cuſpidata* ſine Ovali, (*Fig.* 19.) Quæ *Species* eſt *duodecima.*

Si radices duæ minores ſunt æquales & tertia ejuſdem ſigni, Ovalis in *Punctum* evanuit, (*Fig.* 20.) Quæ *Species* eſt *decima tertia.*

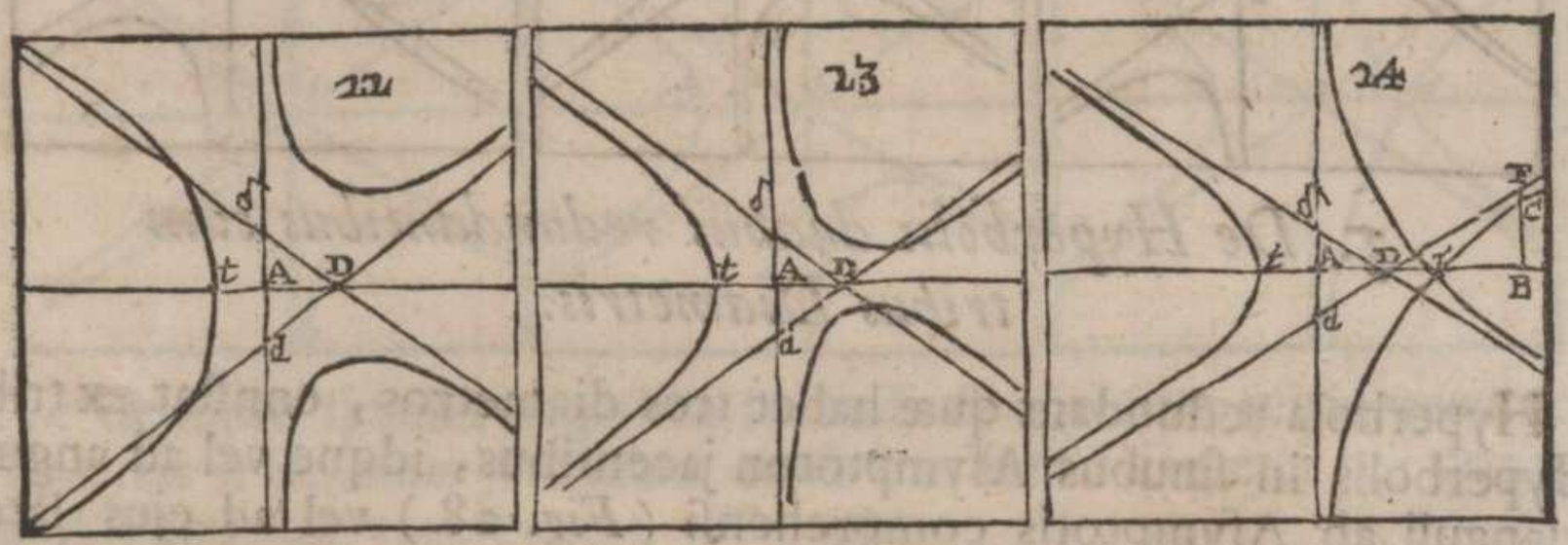
In ſpeciebus quatuor noviſſimis Hyperbola quæ jacet verſus D, Aſymptotos in ſinu ſuo amplectitur, reliquæ duæ in ſinu Aſymptoton jacent.

Si duæ ex radicibus ſunt impoſſibiles habebuntur tres Hyperbolæ

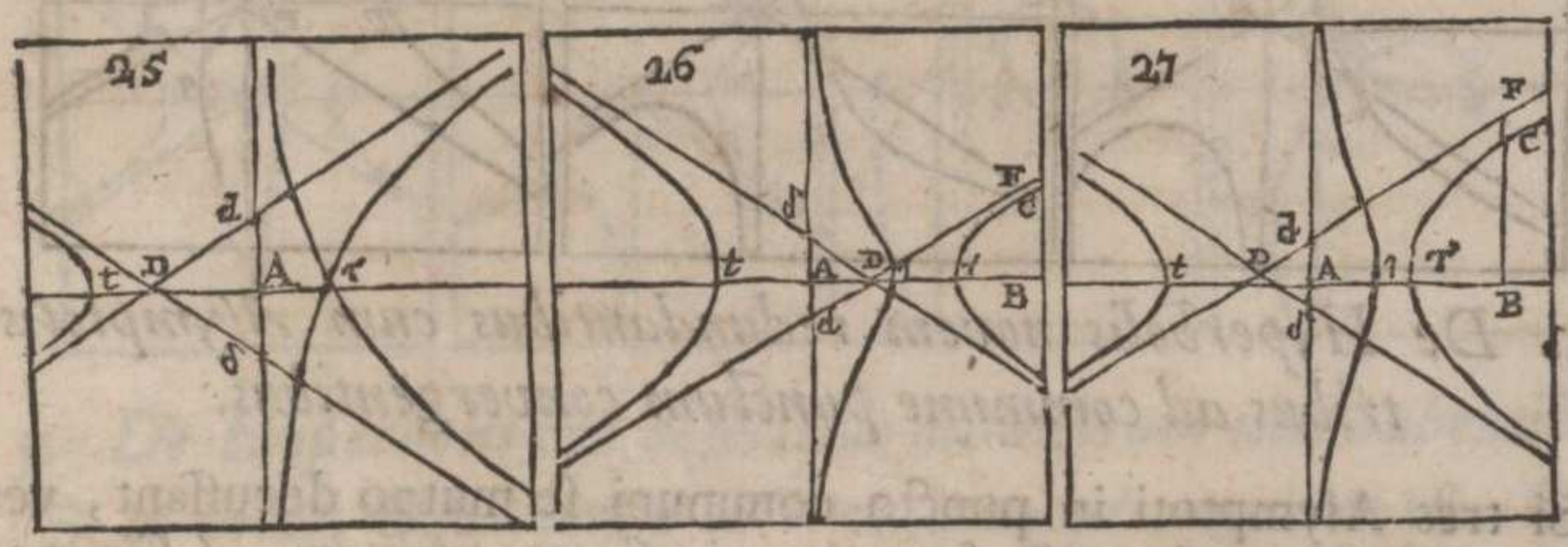


Puræ ſine Ovali decuſſatione vel cuſpide. Et hujus caſus *Species* ſunt qua-

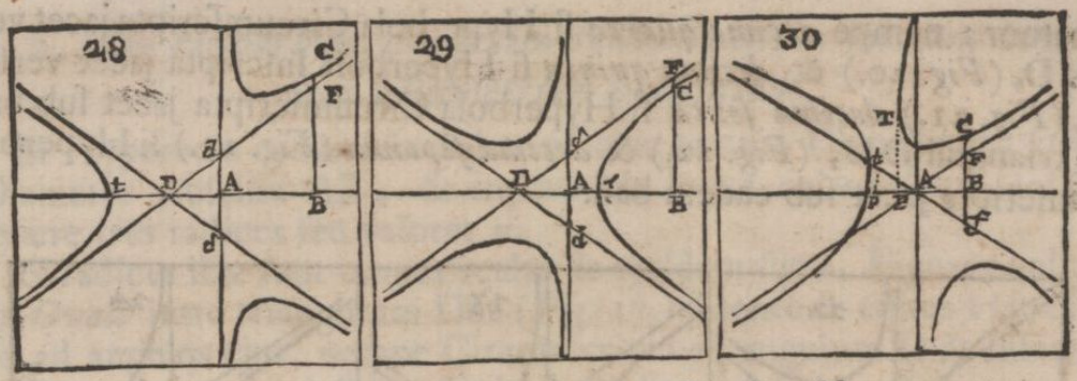
quatuor: nempe *decima quarta* ſi Hyperbola Circumſcripta jacet verſus D, (*Fig.* 20.) & *decima quinta* ſi Hyperbola Inſcripta jacet verſus D, (*Fig.* 21.) *decima ſexta* ſi Hyperbola Circumſcripta jacet ſub baſi dδ trianguli Ddδ, (*Fig.* 22.) & *decima ſeptima* (*Fig.* 23.) ſi Hyperbola inſcripta jacet ſub eadem baſi.



Si duæ radices ſunt æquales & tertia ſigni diverſi figura erit *Cruciformis*. Nempe duæ ex tribus Hyperbolis ſe invicem decuſſabunt idque vel ad verticem trianguli ab Aſymptotis comprehenſi (*Fig.* 24.) vel ad ejus baſem, (*Fig.* 25.) Quæ duæ *Species* ſunt *decima octava*, & *decima nona*.

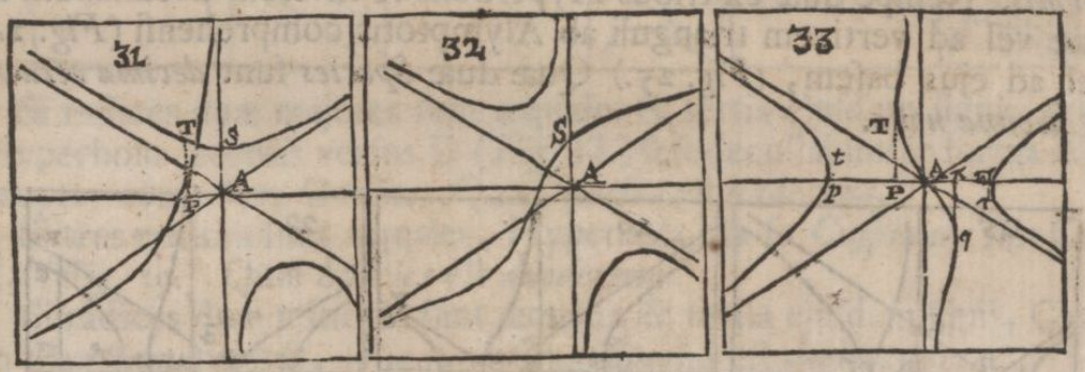


Si duæ radices ſunt inæquales & ejuſdem ſigni & tertia eſt ſigni diverſi, duæ habebuntur Hyperbolæ in oppoſitis angulis duarum Aſymptoton cum *Conchoidali* intermedia. *Conchoidalis* autem vel jacebit ad eaſdem partes Aſymptoti ſuæ cum triangulo ab Aſymptotis conſtituto, (*Fig.* 26.) vel ad partes contrarias, (*Fig.* 27.) Et hi duo caſus conſtituunt *Speciem vigeſimam* & *vigeſimam primam*.



3. *De Hyperbolis duabus redundantibus cum tribus Diametris.*

Hyperbola redundans quæ habet tres diametros, conſtat ex tribus Hyperbolis in ſinubus Aſymptoton jacentibus, idque vel ad angulos trianguli ab Aſymptotis comprehenſi (*Fig.* 28.) vel ad ejus latera (*Fig.* 29.) Caſus prior dat *Speciem vigeſimam ſecundam*, & poſterior *Speciem vigeſimam tertiam*.

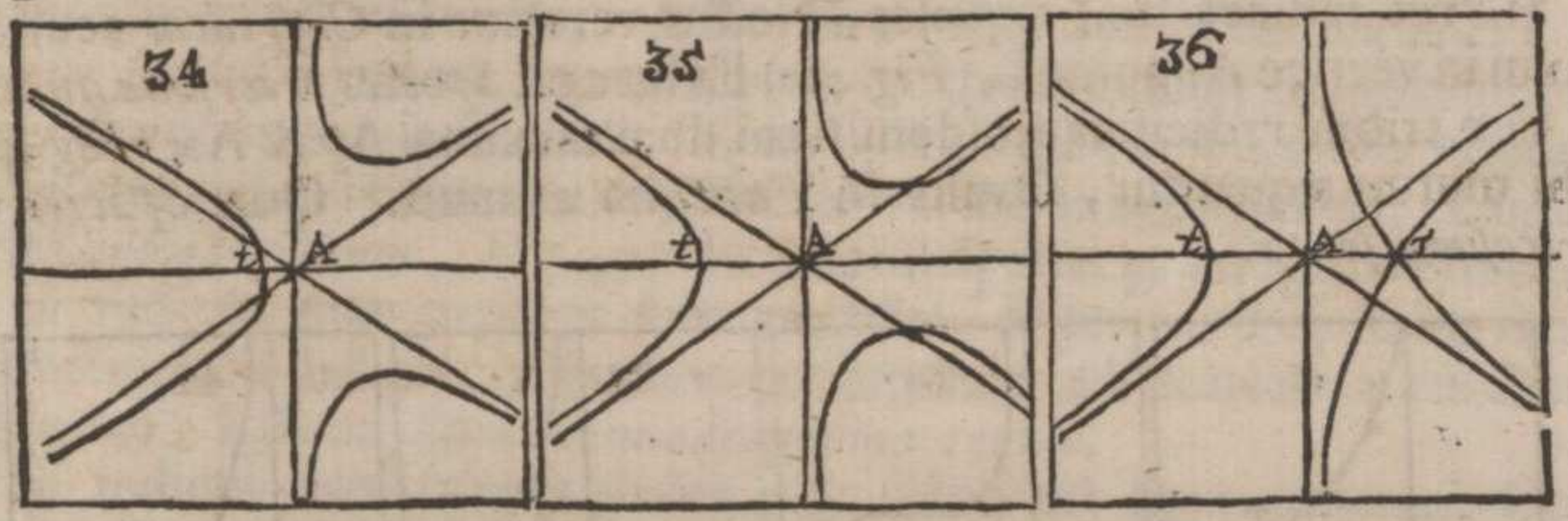


4. *De Hyperbolis novem redundantibus cum Aſymptotis tribus ad commune punctum convergentibus.*

Si tres Aſymptoti in puncto communi ſe mutuo decuſſant, vertuntur ſpecies quinta & ſexta in *vigeſimam quartam*, (*Fig.* 30.) ſeptima & octava in *vigeſimam quintam*, (*Fig.* 31.) & nona in *vigeſimam ſextam* (*Fig.* 32.) ubi Anguinea non tranſit per concurſum Aſymptoton, & in *vigeſimam ſeptimam* ubi tranſit per concurſum illum, (*Fig.* 33.) quo caſu termini *b* ac *d* deſunt, & concurſus Aſymptoton eſt Centrum figuræ ab omnibus ejus partibus oppoſitis æqualiter diſtans. Et hæ quatuor ſpecies diametrum non habent.

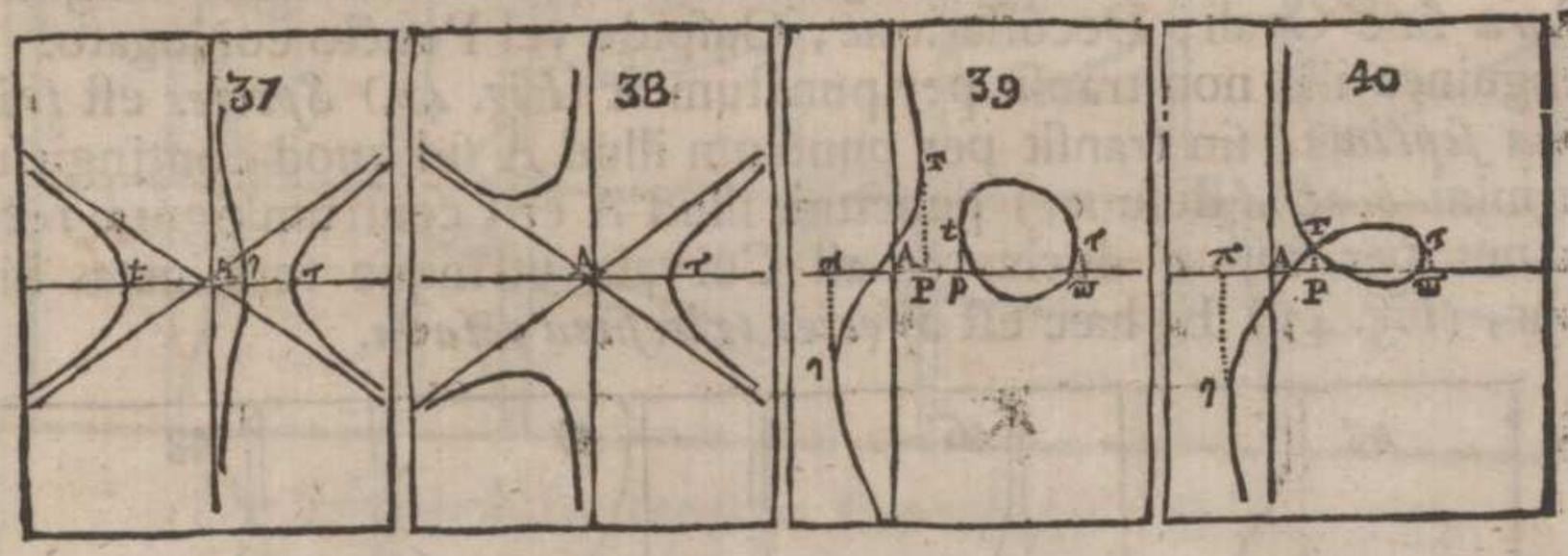
Vertuntur etiam *Species* decima quarta ac decima ſexta in *vigeſimam octavam*, (*Fig.* 34.) decima quinta ac decima ſeptima in *vigeſimam*

mam nonam, (*Fig.* 35.) decima octava & decima nona in *triceſimam*, (*Fig.* 36.) & vigeſima cum vigeſima prima in *triceſimam primam*, (*Fig.* 37.) Et hæ ſpecies unicam habent Diametrum.



Ac denique ſpecies vigeſima ſecunda & vigeſima tertia vertuntur in *Speciem triceſimam ſecundam* cujus tres ſunt Diametri per concurſum Aſymptoton tranſeuntes. (*Fig.* 38.)

Quæ omnes converſiones facillime intelliguntur faciendo ut triangulum ab Aſymptotis comprehenſum diminuatur donec in punctum evaneſcat.



5. *De Hyperbolis ſex defectivis diametrum non habentibus.*

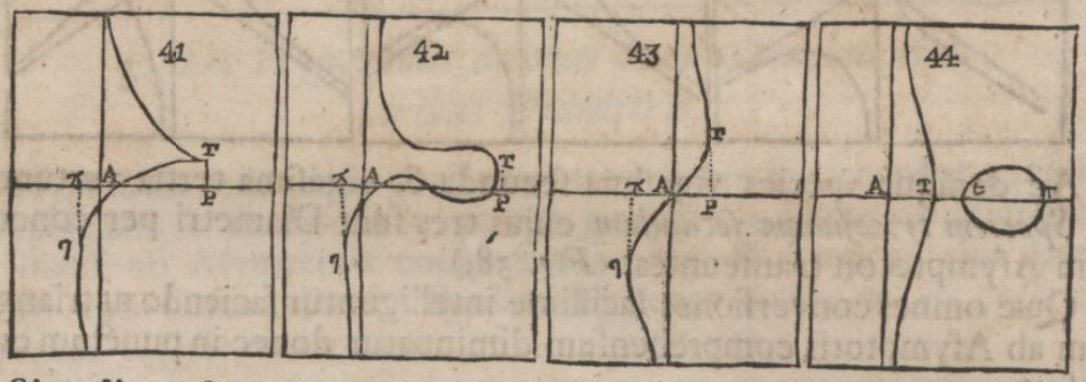
Si in primo æquationum caſu terminus ax^3 negativus eſt, Figura erit Hyperbola defectiva unicam habens Aſymptoton & duo tantum crura Hyperbolica juxta Aſymptoton illam in plagas contrarias infinite progredientia. Et Aſymptotos illa eſt Ordinata prima & principalis AG. Si terminus *ey* non deeſt figura nullam habebit Diametrum, ſi deeſt habebit unicam. In priori caſu ſpecies ſic enumerantur.

Si æquationis hujus $ax^4 = bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee$ radices omnes $A\pi$, AP, $A\rho$, $A\varpi$, (*Fig.* 39.) ſunt reales & inæquales, Figura erit Hyperbola Anguinea aſymptoton flexu contrario amplexa, cum *Ovali* conjugata. Quæ *Species* eſt *triceſima tertia.*

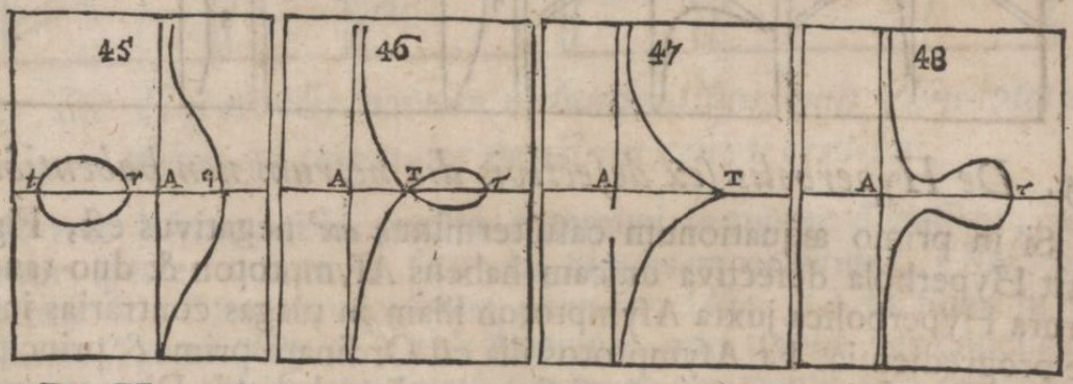
Si radices duæ mediæ AP & A*p* (*Fig.* 40.) æquentur inter ſe, Ovalis & Anguinea junguntur ſeſe decuſſantes in forma *Nodi*. Quæ eſt *Species triceſima quarta.*

Si tres radices ſunt æquales, Nodus vertetur in *Cuſpidem* acutiſſimum in vertice Anguineæ, (*Fig.* 41.) Et hæc eſt *Species triceſima quinta.*

Si e tribus radicibus ejuſdem ſigni duæ maximæ A*p* & Aϖ (*Fig.* 43.) ſibi mutuo æquantur, Ovalis in *Punctum* evanuit. Quæ *Species* eſt *triceſima ſexta.*



Si radices duæ quævis imaginariæ ſunt, ſola manebit Anguinea *Pura* ſine Ovali, Decuſſatione, Cuſpide vel Puncto conjugato. Si Anguinea illa non tranſit per punctum A (*Fig.* 42.) *Species* eſt *triceſima ſeptima*; ſin tranſit per punctum illud A (id quod contingit ubi termini *b* ac *d* deſunt,) punctum illud A erit centrum figuræ rectas omnes per ipſum ductas & ad Curvam utrinque terminatas biſecans, (*Fig.* 43.) Et hæc eſt *Species triceſima octava.*



6. *De Hyperbolis ſeptem defectivis diametrum habentibus.*

In altero caſu ubi terminus *ey* deeſt & propterea figura Diametrum habet, ſi æquationis hujus $ax^3 = bx^2 + cx + d$ radices omnes AT, At, Aτ, (*Fig.* 44.) ſunt reales, inæquales & ejuſdem ſigni, figura erit Hyperbola Conchoidalis cum *Ovali* ad convexitatem. Quæ eſt *Species triceſima nona.*

Si

Si duæ radices ſunt inæquales & ejuſdem ſigni & tertia eſt ſigni contrarii, *Ovalis* jacebit ad concavitatem Conchoidalis, (*Fig.* 45.) Eſtque *Species quadrageſima.*

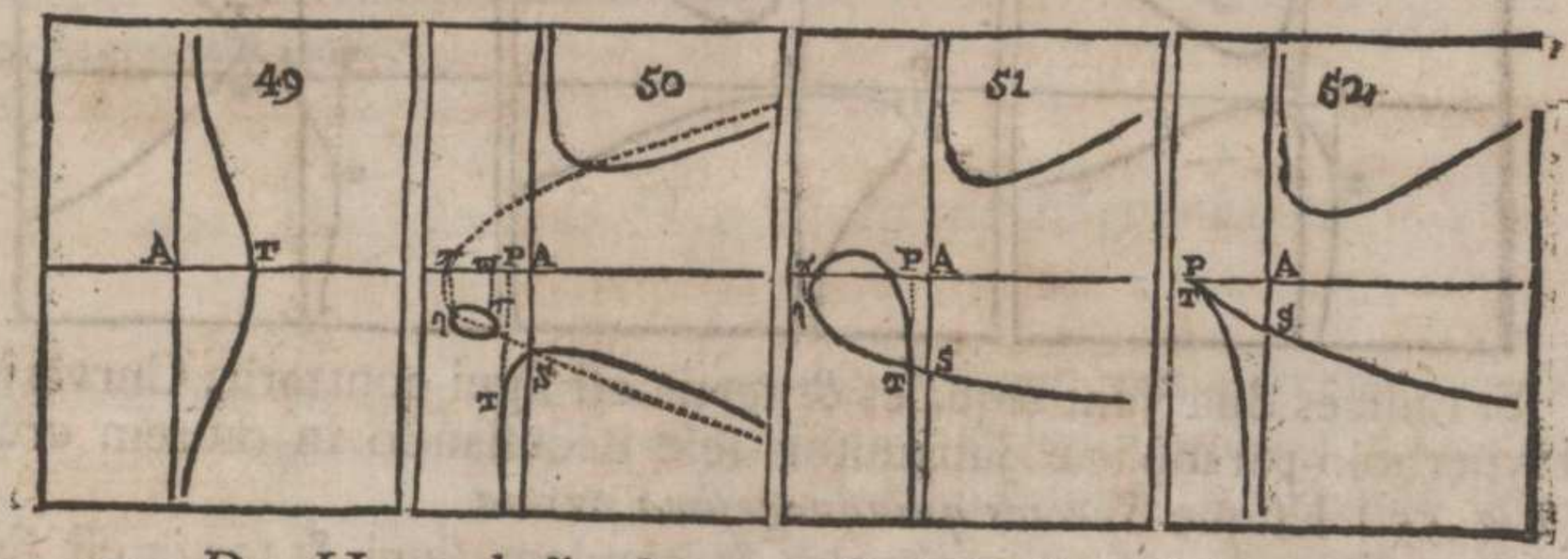
Si radices duæ minores AT, At, (*Fig.* 46.) ſunt æquales, & tertia Ar eſt ejuſdem ſigni, Ovalis & Conchoidalis jungentur ſeſe decuſſando in modum *Nodi.* Quæ *Species* eſt *quadrageſima prima.*

Si tres radices ſunt æquales, Nodus mutabitur in *Cuſpidem*, & figura erit *Ciſſois Veterum*, (*Fig.* 47.) Et hæc eſt *Species quadrageſima ſecunda.*

Si radices duæ majores ſunt æquales, & tertia eſt ejuſdem ſigni, Conchoidalis habebit *Punctum* conjugatum ad convexitatem ſuam, (*Fig.* 49.) Eſtque *Species quadrageſima tertia.*

Si radices duæ ſunt æquales, & tertia eſt ſigni contrarii Conchoidalis habebit *Punctum* conjugatum ad concavitatem ſuam, (*Fig.* 49.) Eſtque *Species quadrageſima quarta.*

Si radices duæ ſunt impoſſibiles habebitur Conchoidalis *Pura* ſine Ovali, Nodo, Cuſpide vel Puncto conjugato (*Fig.* 48. 49.) Quæ *Species* eſt *quadrageſima quinta.*



7. *De Hyperbolis ſeptem Parabolicis Diametrum non habentibus.*

Si quando in primo æquationum caſu terminus ax^3 deeſt & terminus bx^2 non deeſt, Figura erit Hyperbola Parabolica duo habens crura Hyperbolica ad unam Aſymptoton SAG & duo Parabolica in plagam unam & eandem convergentia. Si terminus ey non deeſt figura nullam habebit diametrum, ſin deeſt habebit unicam. In priori caſu Species ſunt hæ.

Si tres radices AP, Aϖ, Aπ (*Fig.* 50.) æquationis hujus $bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ ſunt inæquales & ejuſdem ſigni, figura conſtabit ex *Ovali* & aliis duabus Curvis quæ partim Hyperbolicæ ſunt & partim Parabolicæ. Nempe crura Parabolica continuo ductu junguntur

cru-

cruribus Hyperbolicis ſibi proximis. Et hæc eſt *Species quadrageſima ſexta.*

Si radices duæ minores ſunt æquales, & tertia eſt ejuſdem ſigni, Ovalis & una Curvarum illarum Hyperbolo-Parabolicarum junguntur & ſe decuſſant in formam *Nodi* (*Fig.* 51.) Quæ *Species* eſt *quadrageſima ſeptima.*

Si tres radices ſunt æquales, Nodus ille in Cuſpidem vertitur (*Fig.* 52.) Eſtque *Species quadrageſima octava.*

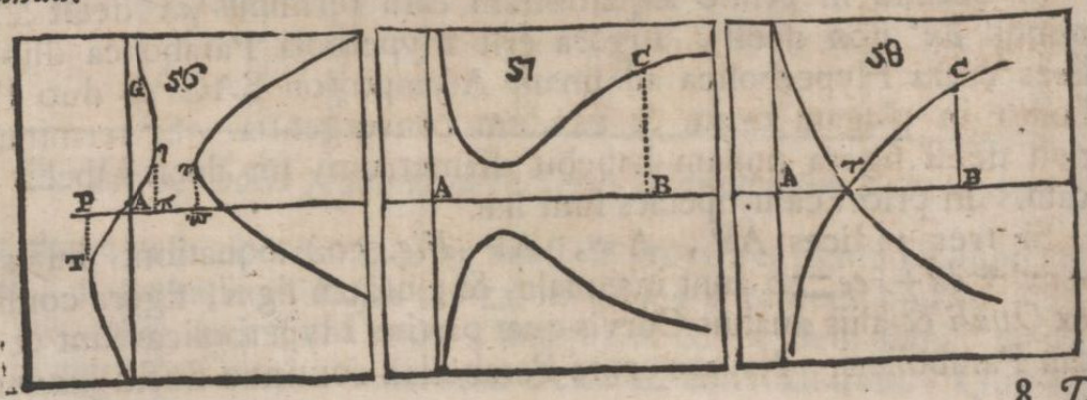
Si radices duæ majores ſunt æquales & tertia eſt ejuſdem ſigni, Ovalis in *Punctum* conjugatum evanuit (*Fig.* 53.) Quæ *Species* eſt *quadrageſima nona.*

Si duæ radices ſunt impoſſibiles, manebunt *Puræ* illæ duæ curvæ Hyperbolo-parabolicæ ſine Ovali, Decuſſatione, Cuſpide vel Puncto conjugato; & *Speciem quinquageſimam* conſtituent. (*Fig.* 53. 54.)



Si radices duæ ſunt æquales & tertia eſt ſigni contrarii, Curvæ illæ Hyperbolo-parabolicæ junguntur ſeſe decuſſando in morem crucis (*Fig.* 55.) Eſtque *Species quinquageſima prima.*

Si radices duæ ſunt inæquales & ejuſdem ſigni & tertia eſt ſigni contrarii, figura evadet Hyperbola Anguinea circa Aſymptoton AG, (*Fig.* 56.) cum Parabola conjugata. Et hæc eſt *Species quinquageſima ſecunda.*



8. *De*

8. *De Hyperbolis quatuor Parabolicis Diametrum habentibus.*

In altero casu ubi terminus *ey* deest & figura Diametrum habet, si duæ radices æquationis hujus $bx^2+cx+d=0$ sunt impossibiles, duæ habentur figuræ Hyperbolo-parabolicæ a Diametro AB (*Fig.* 57.) hinc inde æqualiter distantes. Quæ *Species* est *quinquagesima tertia.*

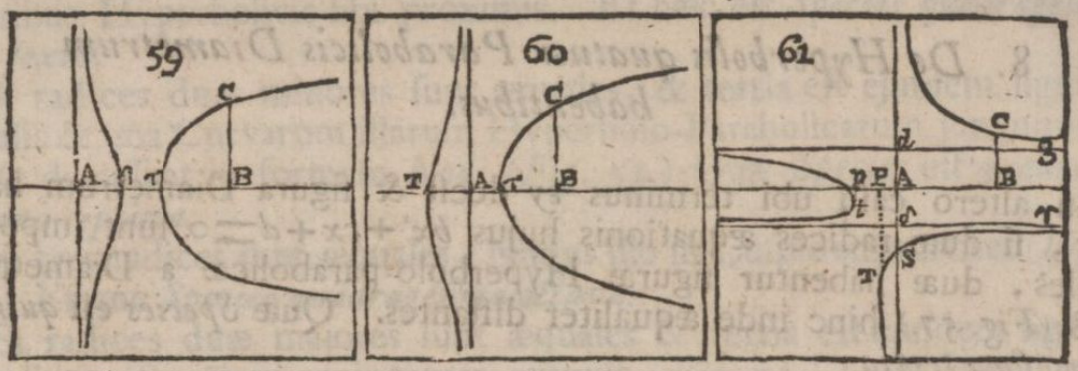
Si æquationis illius radices duæ sunt impossibiles, Figuræ Hyperbolo-parabolicæ junguntur sese decussantes in morem crucis; & *Speciem quinquagesimam quartam* constituunt. (*Fig.* 58.)

Si radices illæ sunt inæquales & ejusdem signi, habetur Hyperbola Conchoidalis cum Parabola ex eodem latere Asymptoti (*Fig.* 59.) Estque *Species quinquagesima quinta.*

Si radices illæ sunt signi contrarii, habetur Conchoidalis cum Parabola ad alteras partes Asymptoti (*Fig.* 60.) Quæ *Species* est *quinquagesima sexta.*

9. *De Quatuor Hyperbolismis Hyperbolæ.*

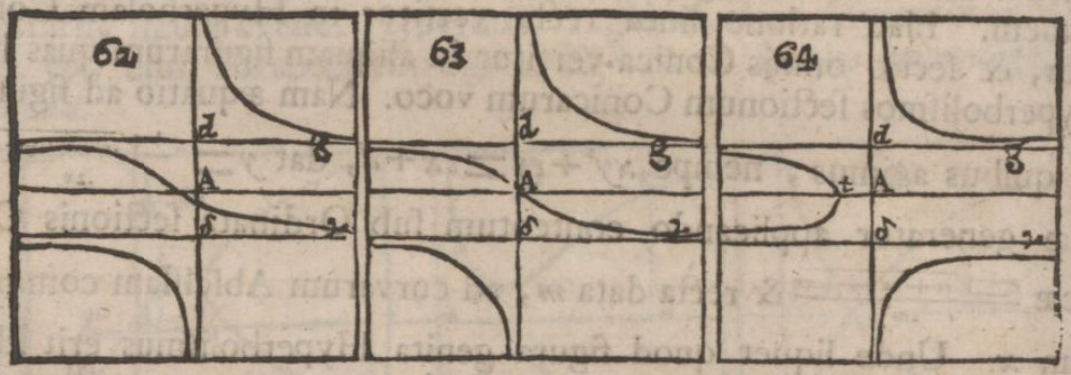
Si quando in primo æquationum casu terminus uterque ax^3 & bx^2 deest, figura erit Hyperbolismus sectionis alicujus Conicæ. Hyperbolismum figuræ voco cujus Ordinata prodit applicando contentum sub Ordinata figuræ illius & recta data ad Abscissam communem. Hac ratione linea recta vertitur in Hyperbolam Conicam, & sectio omnis Conica vertitur in aliquam figurarum quas hic Hyperbolismos sectionum Conicarum voco. Nam æquatio ad figuras de quibus agimus, nempe $xy^2+ey=cx+d$, dat $y=\frac{e\pm\sqrt{ee+4dx+4cxx}}{2x}$ quæ generatur applicando contentum sub Ordinata sectionis Conicæ $\frac{e\pm\sqrt{ee+4dx+4cxx}}{2m}$ & recta data m, ad curvarum Abscissam communem x. Unde liquet quod figura genita Hyperbolismus erit Hyperbolæ, Ellipseos vel Paraboiæ, perinde ut terminus cx affirmativus est vel negativus vel nullus.



Hyperboliſmus Hyperbolæ tres habet Aſymptotos, quarum una eſt Ordinata prima & principalis Ad, alteræ duæ ſunt parallelæ Abſciſſæ AB, ab eadem hinc inde æqualiter diſtant. In Ordinata principali Ad, cape Ad, Aδ hinc inde æquales quantitati $\sqrt{c}$; & per puncta d ac δ age dg, δγ Aſymptotos Abſciſſæ AB parallelas.

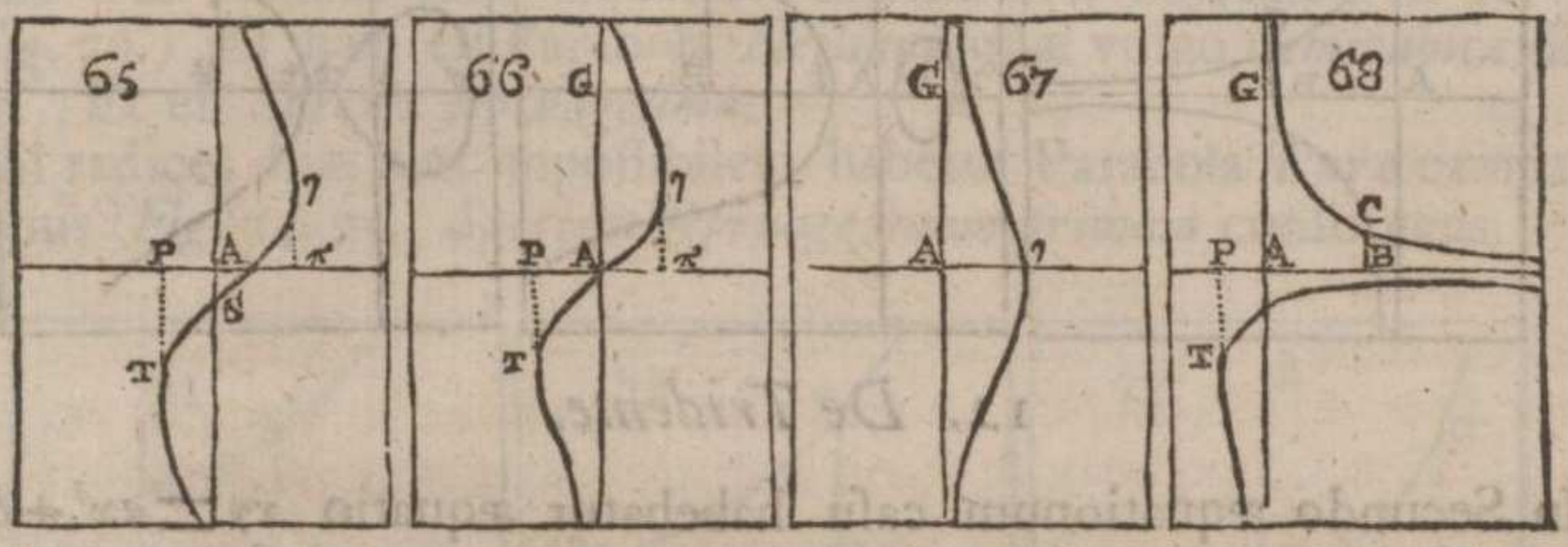
Ubi terminus *ey* non deeſt figura nullam habet diametrum. In hoc caſu, ſi æquationis hujus $cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = o$ radices duæ AP, Ap (*Fig.* 61.) ſunt reales & inæquales (nam æquales eſſe nequeunt niſi figura ſit Conica ſectio) figura conſtabit ex tribus Hyperbolis ſibi oppoſitis quarum una jacet inter Aſymptotos parallelas & alteræ duæ jacent extra. Et hæc eſt *Species quinquageſima ſeptima.*

Si radices illæ duæ ſunt impoſſibiles, habentur Hyperbolæ duæ oppoſitæ extra Aſymptotos parallelas & Anguinea Hyperbolica intra eaſdem. Hæc figura duarum eſt ſpecierum. Nam centrum non habet ubi terminus *d* non deeſt (*Fig.* 62.) ſed ſi terminus ille deeſt punctum A eſt ejus centrum (*Fig.* 63.) Prior *Species* eſt *quinquageſima octava*, poſterior *quinquageſima nona.*



Quod ſi terminus *ey* deeſt, figura conſtabit ex tribus Hyperbolis oppoſitis, quarum una jacet inter Aſymptotos parallelas & alteræ duæ jacent extra ut in ſpecie quinquageſima quarta, & præterea

terea diametrum habet quæ eſt Abſciſſa AB (*Fig.* 64.) Et hæc eſt *Species ſexageſima.*



10. *De tribus Hyperboliſmis Ellipſeos.*

Hyperboliſmus Ellipſeos per hanc æquationem definitur $xy^2+ey=cx+d$, & unicam habet Aſymptoton quæ eſt Ordinata principalis Ad (*Fig.* 65.) Si terminus *ey* non deeſt, figura eſt Hyperbola Anguinea ſine diametro, atque etiam ſine centro ſi terminus *d* non deeſt. Quæ *Species* eſt *ſexageſima prima.*

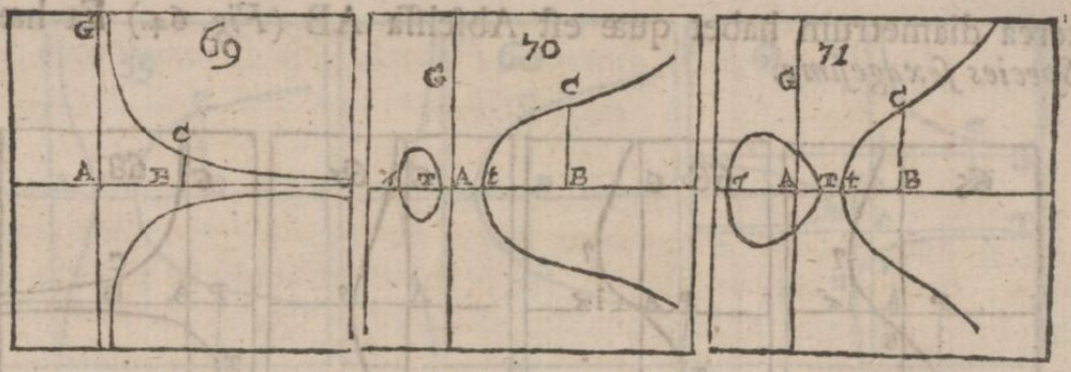
At ſi terminus *d* deeſt, figura habet centrum ſine diametro, & centrum ejus eſt punctum A (*Fig.* 66.) *Species* vero eſt *ſexageſima ſecunda.*

Et ſi terminus *ey* deeſt, & terminus *d* non deeſt, figura eſt Conchoidalis ad Aſymptoton AG (*Fig.* 67.) habetque diametrum ſine centro, & diameter ejus eſt Abſciſſa AB. Quæ *Species* eſt *ſexageſima tertia.*

11. *De duobus Hyperboliſmis Parabolæ.*

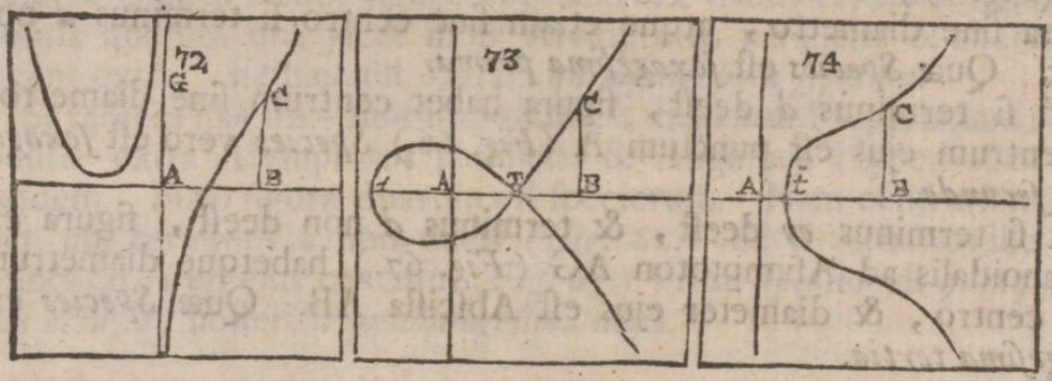
Hyperboliſmus Parabolæ per hanc æquationem definitur $xy^2+ey=d$; & duas habet Aſymptotos, Abſciſſam AB & Ordinatam primam & principalem AG. Hyperbolæ vero in hac figura ſunt duæ, non in Aſymptoton angulis oppoſitis ſed in angulis qui ſunt deinceps jacentes, idque ad utrumque latus abſciſſæ AB, & vel ſine diametro ſi terminus *ey* habetur, (*Fig.* 68.) vel cum diametro ſi terminus ille deeſt (*Fig.* 69.) Quæ duæ *Species* ſunt *ſexageſima quarta & ſexageſima quinta.*

BIBLIOTECA PÚBLICA E ARQUIVO DISTRITAL DE ÉVORA



12. *De Tridente.*

In Secundo æquationum caſu habebatur æquatio $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Et figura in hoc caſu habet quatuor crura infinita quorum duo ſunt Hyperbolica circa Aſymptoton AG (*Fig.* 72.) in contrarias partes tendentia & duo Parabolica convergentia & cum prioribus ſpeciem Tridentis fere efformantia. Eſtque hæc Figura Parabola illa per quam *Carteſius* æquationes ſex dimenſionum conſtruxit. Hæc eſt igitur *Species ſexageſima ſexta.*



13. *De Parabolis quinque divergentibus.*

In Tertio caſu æquatio erat $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, & Parabolam deſignat cujus crura divergunt ab invicem & in contrarias partes infinite progrediuntur. Abſciſſa AB eſt ejus diameter & Species ejus ſunt quinque ſequentes.

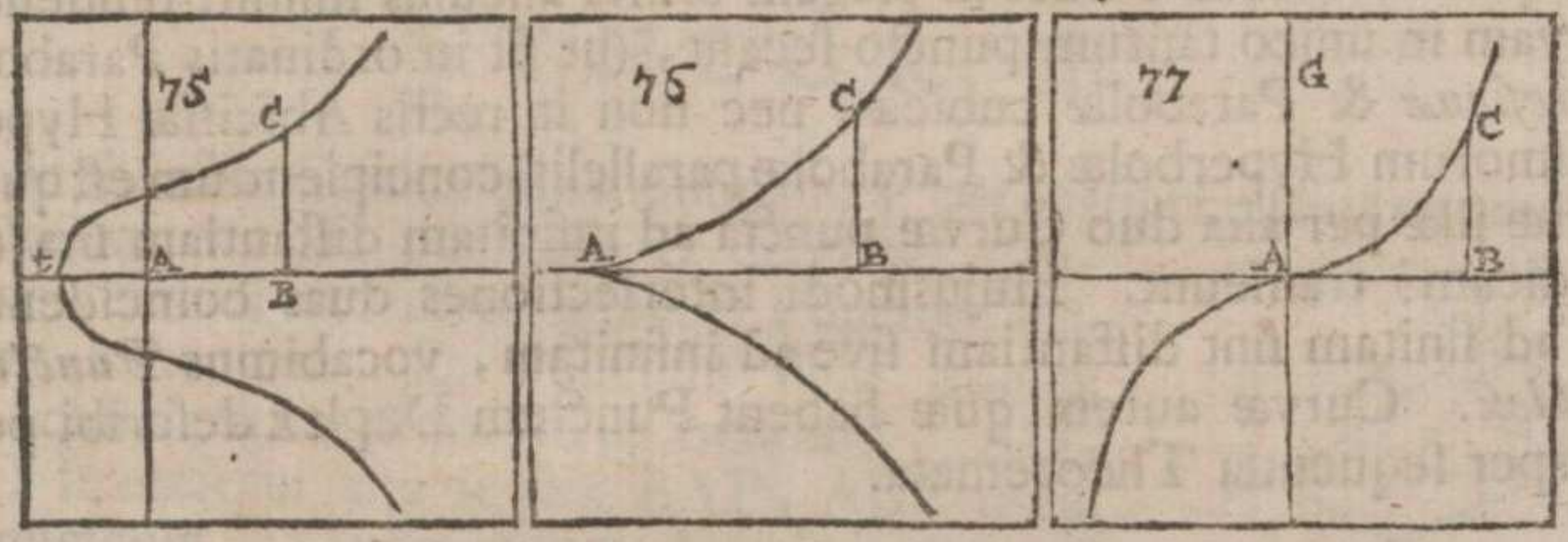
Si æquationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, radices omnes Aγ, AT, At ſunt reales & inæquales, figura eſt Parabola divergens Campaniformis cum *Ovali* ad verticem (*Fig.* 70. 71.) Et *Species* eſt *ſexageſima ſeptima.*

Si radices duæ ſunt æquales, Parabola prodit vel *Nodata* contingendo Ovalem (*Fig.* 73.) vel *Punctata* ob Ovalem infinite parvam

vam (*Fig.* 74.) Quæ duæ *Species* ſunt *ſexageſima octava* & *ſexageſima nona.*

Si tres radices ſunt æquales Parabola erit *Cuſpidata* in vertice (*Fig.* 76.) Et hæc eſt Parabola *Neiliana* quæ vulgo *Semicubica* dicitur. Et eſt *Species ſeptuageſima.*

Si radices duæ ſunt impoſſibiles, habetur Parabola *Pura* campaniformis (*Fig.* 74. 75.) *Speciem ſeptuageſimam primam* conſtituens.



14. *De Parabola Cubica.*

In Quarto caſu æquatio erat $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, & hæc æquatio Parabolam deſignat quæ crura habet contraria & *Cubica* dici ſolet (*Fig.* 77.) Et ſic *Species* omnino ſunt *ſeptuaginta duæ.*

V. *Geneſis Curvarum per Umbras.*

Si in planum infinitum a puncto lucido illuminatum umbræ figurarum projiciantur, umbræ Sectionum Conicarum ſemper erunt Sectiones Conicæ, eæ Curvarum ſecundi Generis ſemper erunt Curvæ ſecundi Generis, eæ Curvarum tertii Generis ſemper erunt Curvæ tertii Generis, & ſic deinceps in infinitum.

Et quemadmodum Circulus umbram projiciendo generat Sectiones omnes Conicas, ſic Parabolæ quinque divergentes umbris ſuis generant & exhibent alias omnes ſecundi Generis Curvas; & ſic Curvæ quædam ſimpliciores aliorum Generum inveniri poſſunt quæ alias omnes eorundem Generum Curvas umbris ſuis a puncto lucido in planum projectis formabunt.

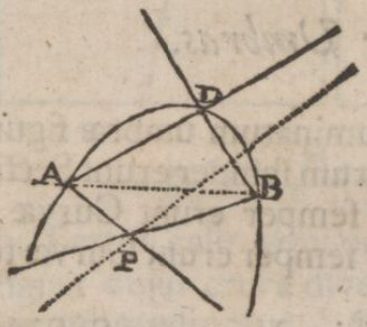
De Curvarum Punctis duplicibus.

Diximus Curvas ſecundi Generis a Linea recta in punctis tribus ſecari poſſe. Horum duo nonnunquam coincidunt. Ut cum Recta per Ovalem infinite parvam tranſit vel per concurſum duarum partium Curvæ ſe mutuo ſecantium vel in cuſpidem coeuntium ducitur. Et ſiquando Rectæ omnes in plagam cruris alicujus infiniti tendentes Curvam in unico tantum puncto ſecant, (ut fit in ordinatis Parabolæ *Carteſianæ* & Parabolæ cubicæ, nec non in rectis Abſciſſæ Hyperboliſmorum Hyperbolæ & Parabolæ parallelis) concipiendum eſt quod Rectæ illæ per alia duo Curvæ puncta ad infinitam diſtantiam ſita (ut ita dicam) tranſeunt. Hujusmodi interſectiones duas coincidentes ſive ad finitam ſint diſtantiam ſive ad infinitam, vocabimus *Punctum Duplex*. Curvæ autem quæ habent Punctum Duplex deſcribi poſſunt per ſequentia Theoremata.

VI. *De Curvarum deſcriptione Organica.*

THEOR. I.

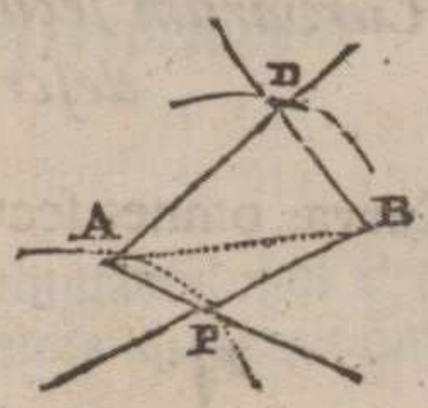
Si Anguli duo magnitudine dati PAD, PBD circa polos poſitione datos A, B rotentur, & eorum crura AP, BP concurſu ſuo P percurrant Lineam rectam; crura duo reliqua AD, BD concurſu ſuo D deſcribent Sectionem Conicam per polos A, B tranſeuntem: præterquam ubi Linea illa recta tranſit per polorum alterutrum A vel B, vel anguli BAD, ABD ſimul evaneſcunt, quibus in caſibus punctum D deſcribet Lineam rectam.



THEOR. II.

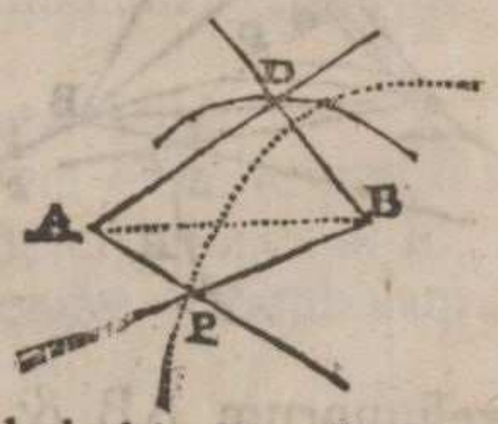
Si crura prima AP, BP concurſu ſuo P percurrant Sectionem Conicam per polum alterutrum A tranſeuntem, crura duo reliqua AD, BD

BD concurſu ſuo D deſcribent Curvam ſecundi Generis per polum alterum B tranſeuntem & Punctum duplex habentem in polo primo A, per quem ſectio Conica tranſit: præterquam ubi anguli BAD, ABD ſimul evaneſcunt, quo caſu punctum D deſcribet aliam ſectionem Conicam per polum A tranſeuntem.



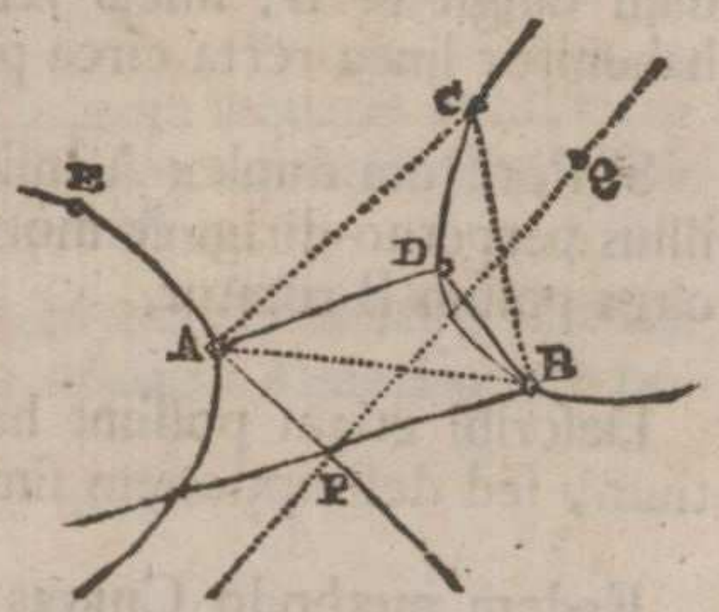
THEOR. III.

At ſi ſectio Conica quam punctum P percurrit tranſeat per neutrum polorum A, B, punctum D deſcribet Curvam ſecundi vel tertii generis Punctum duplex habentem. Et Punctum illud duplex in concurſu crurum deſcribentium, AD, BD invenietur ubi anguli BAP, ABP ſimul evaneſcunt. Curva autem deſcripta ſecundi erit Generis ſi anguli BAD, ABD ſimul evaneſcunt, alias erit tertii Generis & alia duo habebit Puncta duplicia in polis A & B.



Sectionum Conicarum deſcriptio per data quinque puncta.

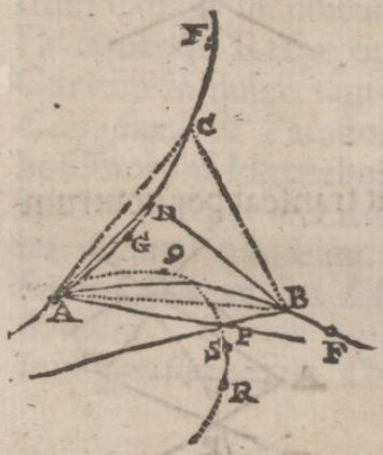
Jam ſectio Conica determinatur ex datis ejus punctis quinque & per eadem ſic deſcribi poteſt. Dentur ejus puncta quinque A, B, C, D, E. Jungantur eorum tria quævis A, B, C, & trianguli ABC rotentur anguli duo quivis CAB, CBA circa vertices ſuos A & B, & ubi crurum AC, BC interſectio C ſucceſſive applicatur ad puncta duo reliqua D, E, incidat interſectio crurum reliquorum AB & BA in puncta P & Q. Agatur & infinite producatur recta PQ, & anguli mobiles ita rotentur ut interſectio crurum AB, BA percurrat rectam PQ, & crurum reliquorum interſectio C deſcribet propoſitam ſectionem Conicam per *Theorema* primum.



Cur-

Curvarum ſecundi generis Punctum duplex habentium deſcriptio per data ſeptem puncta.

Curvæ omnes ſecundi generis Punctum Duplex habentes determinantur ex datis earum punctis ſeptem quorum unum eſt Punctum illud duplex, & per eadem puncta ſic deſcribi poſſunt. Dentur Curvæ deſcribendæ puncta quælibet ſeptem A, B, C, D, E, F, G, quorum A eſt Punctum Duplex. Jungantur punctum A & alia duo quævis e punctis puta B & C; & trianguli ABC rotetur tum angulus CAB circa verticem ſuum A, tum angulorum reliquorum alteruter ABC circa verticem ſuum B. Et ubi crurum AC, BC concurſus C ſucceſſive applicatur ad puncta quatuor reliqua D, E, F, G incidat concurſus crurum reliquorum AB & BA in puncta quatuor P, Q, R, S. Per puncta illa quatuor & quintum A deſcribatur ſectio Conica, & anguli præfati CAB, CBA ita rotentur ut crurum AB, BA concurſus percurrat ſectionem illam Conicam, & concurſus reliquorum crurum AC, BC deſcribet Curvam propoſitam per *Theorema* ſecundum.



Si vice puncti C datur poſitione recta BC quæ Curvam deſcribendam tangit in B, lineæ AD, AP coincident, & vice anguli DAP habebitur linea recta circa polum A rotanda.

Si Punctum duplex A infinite diſtat debebit Recta ad plagam puncti illius perpetuo dirigi & motu parallelo ferri interea dum angulus ABC circa polum B rotatur.

Deſcribi etiam poſſunt hæ Curvæ paulo aliter per *Theorema* tertium, ſed deſcriptionem ſimpliciorem poſuiſſe ſufficit.

Eadem methodo Curvas tertii, quarti & ſuperiorum Generum deſcribere licet, non omnes quidem ſed quotquot ratione aliqua commoda per motum localem deſcribi poſſunt. Nam Curvam aliquam ſecundi vel ſuperioris generis Punctum duplex non habentem commode deſcribere Problema eſt inter difficiliora numerandum.

VII. *Con-*

VII. *Conſtructio æquationum per deſcriptionem Curvarum.*

Curvarum uſus in Geometria eſt ut per earum interſectiones Problemata ſolvantur. Proponatur æquatio conſtruenda dimenſionum novem

$$x^{9} + bx^{7} + cx^{6} + dx^{5} + ex^{4} + fx^{3} + gx^{2} + hx + k \overset{+m}{=} 0.$$

Ubi b, c, d, &c. ſignificant quantitates quasvis datas ſignis ſuis + & — affectas. Aſſumatur æquatio ad Parabolam cubicam $x^{3} = y$, & æquatio prior, ſcribendo y pro x^{3}, evadet

$$y^{3} + bxy^{2} + cy^{2} + dx^{2}y + exy + my + fx^{3} + gx^{2} + hx + k = 0,$$

æquatio ad Curvam aliam ſecundi Generis. Ubi m vel f deeſſe poteſt vel pro lubitu aſſumi. Et per harum Curvarum deſcriptiones & interſectiones dabuntur radices æquationis conſtruendæ. Parabolam cubicam ſemel deſcribere ſufficit.

Si æquatio conſtruenda per defectum duorum terminorum ultimorum bx & k reducatur ad ſeptem dimenſiones, Curva altera delendo m, habebit Punctum Duplex in principio Abſciſſæ, & inde facile deſcribi poteſt ut ſupra.

Si æquatio conſtruenda per defectum terminorum trium ultimorum $gx^{2} + hx + k$ reducatur ad ſex dimenſiones, Curva altera delendo f evadet ſectio Conica.

Et ſi per defectum ſex ultimorum terminorum æquatio conſtruenda reducatur ad tres dimenſiones, incidetur in conſtructionem *Walliſianam* per Parabolam cubicam & Lineam rectam.

Conſtrui etiam poſſunt æquationes per Hyperboliſmum Parabolæ cum diametro. Ut ſi conſtruenda ſit hæc æquatio dimenſionum novem termino penultimo carens,

$$a + cx^{2} + dx^{3} + ex^{4} + fx^{5} + gx^{6} + hx^{7} + kx^{8} + lx^{9} \overset{+m}{=} 0;$$

Aſſumatur æquatio ad Hyperboliſmum illum $x^{2}y = 1$, & ſcribendo y pro $\frac{1}{xx}$, æquatio conſtruenda vertetur in hanc

$$ay^{3} + cy^{2} + dxy^{2} + ey + fxy + m\ y + g + hx + kx^{2} + lx^{3} = 0,$$

quæ curvam ſecundi Generis deſignat cujus deſcriptione Problema

ſolvetur. Et quantitatum m ac g alterutra hic deeſſe poteſt, vel pro lubitu aſſumi.

Per Parabolam cubicam & Curvas tertii Generis conſtruuntur etiam æquationes omnes dimenſionum non plusquam duodecim, & per eandem Parabolam & Curvas quarti Generis conſtruuntur omnes dimenſionum non plusquam quindecim; Et ſic deinceps in infinitum. Et Curvæ illæ tertii, quarti & ſuperiorum Generum deſcribi ſemper poſſunt inveniendo eorum puncta per Geometriam planam. Ut ſi conſtruenda ſit æquatio

$$x^{12} + ax^{10} + bx^{9} + cx^{8} + dx^{7} + ex^{6} + fx^{5} + gx^{4} + hx^{3} + ix^{2} + kx + l = 0,$$

& deſcripta habeatur Parabola Cubica; ſit æquatio ad Parabolam illam Cubicam $x^3 = y$, & ſcribendo y pro x^3, æquatio conſtruenda vertetur in hanc

$$\begin{array}{cccccc} y^4 & + axy^3 & + cx^2y^2 & + fx^2y & + ix^2 = 0, \\ & + b & + dx & + gx & + kx \\ & & + e & + h & + l \end{array}$$

quæ eſt æquatio ad Curvam tertii Generis cujus deſcriptione Problema ſolvetur. Deſcribi autem poteſt hæc Curva inveniendo ejus puncta per Geometriam planam, propterea quod indeterminata quantitas x non niſi ad duas dimenſiones aſcendit.



METHO-

METHODUS DIFFERENTIALIS.

PROP. I.

Si figuræ curvilineæ Abſciſſa componatur ex quantitate quavis data A, *& quantitate indeterminata* x, *& Ordinata conſtet ex datis quotcunque quantitatibus* b, c, d, e, *&c. in totidem terminos hujus progreſſionis Geometricæ* x, x^2, x^3, x^4, *&c. reſpective ductis, & ad Abſciſſæ puncta totidem data erigantur Ordinatim applicatæ: dico quod Ordinatarum differentiæ primæ dividi poſſint per earum intervalla, & differentiarum ſic diviſarum differentiæ dividi poſſint per Ordinatarum binarum intervalla, & harum differentiarum ſic diviſarum differentiæ dividi poſſint per Ordinatarum ternarum intervalla, & ſic deinceps in infinitum.*

Etenim ſi pro Abſciſſæ parte indeterminata x ponantur quantitates quævis datæ p, q, r, s, t, &c. ſucceſſive, & ad Abſciſſarum ſic datarum terminos erigantur Ordinatæ α, β, γ, δ, ε, &c. Hæ Abſciſſæ & Ordinatæ & Ordinatarum differentiæ diviſæ per Abſciſſarum differentias (quæ utique ſunt Ordinatarum intervalla) & quo-

torum differentiæ diviſæ per Ordinatarum alternarum differentias, & ſic deinceps, exhibentur per Tabulam ſequentem.

Abſciſſæ	Ordinatæ
$A+p$	$A+bp+cp^2+dp^3+ep^4=\alpha$
$A+q$	$A+bq+cq^2+dq^3+eq^4=\beta$
$A+r$	$A+br+cr^2+dr^3+er^4=\gamma$
$A+s$	$A+bs+cs^2+ds^3+es^4=\delta$
$A+t$	$A+bt+ct^2+dt^3+et^4=\varepsilon$
Diviſor. Diff. Ord.	Quoti per diviſionem prodeuntes
$p-q)\ \alpha-\beta$	$b+c\times\overline{p+q}+d\times\overline{pp+pq+qq}+e\times\overline{p^3+p^2q+pq^2+q^3}=\zeta$
$q-r)\ \beta-\gamma$	$b+c\times\overline{q+r}+d\times\overline{qq+qr+rr}+e\times\overline{q^3+q^2r+qr^2+r^3}=\eta$
$r-s)\ \gamma-\delta$	$b+c\times\overline{r+s}+d\times\overline{rr+rs+ss}+e\times\overline{r^3+r^2s+rs^2+s^3}=\theta$
$s-t)\ \delta-\varepsilon$	$b+c\times\overline{s+t}+d\times\overline{ss+st+tt}+e\times\overline{s^3+s^2t+st^2+t^3}=\varkappa$
$p-r)\ \zeta-\eta$	$c+d\times\overline{p+q+r}+e\times\overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}=\lambda$
$q-s)\ \eta-\theta$	$c+d\times\overline{q+r+s}+e\times\overline{qq+qr+rr+qs+rs+ss}=\mu$
$r-t)\ \theta-\varkappa$	$c+d\times\overline{r+s+t}+e\times\overline{rr+rs+ss+rt+st+tt}=\nu$
$p-s)\ \lambda-\mu$	$d+e\times\overline{p+q+r+s}=\xi.$
$q-t)\ \mu-\nu$	$d+e\times\overline{q+r+s+t}=\pi.$
$p-t)\ \xi-\pi$	$e=\sigma.$

PROP. II.

Iiſdem poſitis, & quod numerus terminorum b, c, d, e, *&c. ſit finitus, dico quod Quotorum ultimus æqualis erit ultimo terminorum* b, c, d, e, *&c. & quod per Quotos reliquos dabuntur termini reliqui* b, c, d, e, *&c. & his datis dabitur Linea Curva generis Parabolici quæ per Ordinatarum omnium terminos tranſibit.*

Etenim in Tabula ſuperiore Quotus ultimus σ æqualis erat termino ultimo *e*. Et hic terminus ductus in ſummam datam $\overline{p+q+r+s}$, & ablatus de Quoto ξ relinquit terminum penultimum *d*. Et quanti-

tates

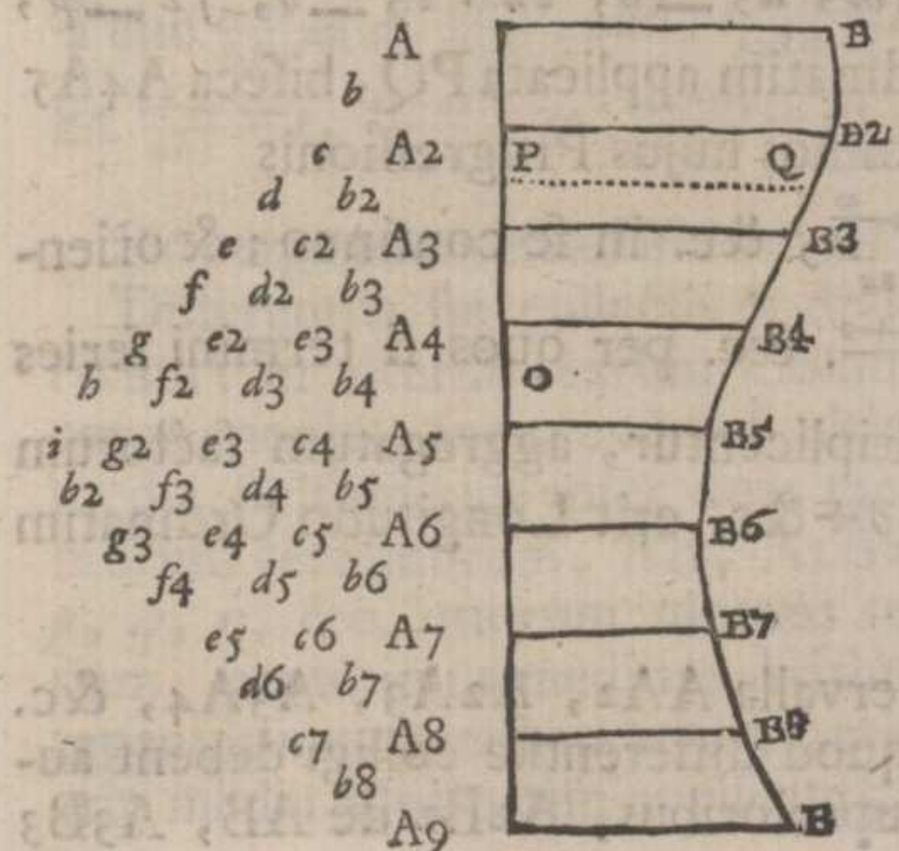
tates jam datæ $d \times \overline{p+q+r} + e \times \overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}$, ſi auferantur de Quoto λ, relinquunt terminorum antepenultimum c. Et quantitates jam datæ $c \times \overline{p+q} + d \times \overline{pp+pq+qq} + e \times \overline{p^3+ppq+pqq+q^3}$, ſi auferantur de Quoto ζ, relinquunt terminum b. Et ſimili compûto ſi plures eſſent termini, colligerentur omnes per Quotorum Ordines totidem. Deinde quantitates datæ $bp + cpp + dp^3 + ep^4$, ſi ſubducantur de Ordinata prima α, relinquunt Abſciſſæ terminum primum A. Et quantitas $A + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 +$ &c. eſt Ordinata Curvæ generis Parabolici quæ per Ordinatarum omnium datarum terminos tranſibit, exiſtente Abſciſſa $A + x$.

Ex his Propoſitionibus quæ ſequuntur facile colligi poſſunt.

PROP. III.

Si recta aliqua AA9 *in æquales quotcunque partes* AA2, A2A3, A3A4, A4A5, &c. *dividatur, & ad puncta diviſionum erigantur parallelæ* AB, A2B2, A3B3, &c. *Invenire curvam Geometricam generis Parabolici quæ per omnium erectarum terminos* B, B2, B3, &c. *tranſibit.*

Erectarum AB, A2B2, A3B3, &c. quære differentias Primas, b, $b2$, $b3$, &c. Secundas c, $c2$, $c3$, &c. Tertias d, $d2$, $d3$, &c. & ſic deinceps uſque dum veneris ad ultimam differentiam, quæ hic ſit i.



Tunc incipiendo ab ultima differentia excerpe medias differentias in alternis Columnis vel Ordinibus differentiarum, & Arithmetica media inter duas medias reliquarum, Ordine pergendo uſque ad Seriem primorum terminorum AB, A2B2, A3B3, &c. ſint hæc $k, l, m, n, o, p, q, r, s,$ &c. quorum ultimus ſignificet ultimam differentiam; penultimus medium Arithmeticum inter duas penultimas differentias; antepenultimus mediam trium antepenultimarum

differentiarum, & ſic deinceps uſque ad primum quod erit vel medius terminorum A, A2, A3, &c. vel Arithmeticus medius inter duos medios. Prius accidit ubi numerum terminorum A, A2, A3, &c. eſt impar; poſterius ubi par.

CAS. I.

In Caſu priori, ſit A_5B_5 iſte medius terminus, hoc eſt, $A_5B_5 = k$, $\frac{b_4+b_5}{2} = l$, $c_4 = m$, $\frac{d_3+d_4}{2} = n$, $e_3 = o$, $\frac{f_2+f_3}{2} = p$, $g_2 = q$, $\frac{h+h_2}{2} = r$, $i = s$. Et erecta Ordinatim applicata PQ, dic $A_5P = x$; & duc terminos hujus Progreſſionis

$$1 \times \frac{x}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{xx-1}{3x} \times \frac{x}{4} \times \frac{xx-4}{5x} \times \frac{x}{6} \times \frac{xx-9}{7x} \times \frac{x}{8} \times \frac{xx-16}{9x} \times \frac{x}{10} \times \frac{xx-25}{11x} \times \frac{x}{12} \times \frac{xx-36}{13x} \text{ &c.}$$

in ſe continuo; & orientur termini

$$1.x.\frac{xx}{2}.\frac{x^3-x}{6}.\frac{x^4-x^2}{24}.\frac{x^5-5x^3+4x}{120}.\frac{x^6-5x^4+4x^2}{720}.\frac{x^7-14x^5+49x^3-36x}{5040}. \text{ &c.}$$

per quos ſi termini ſeriei k, l, m, n, o, p, &c. reſpective multiplicentur, aggregatum factorum $k + xl + \frac{xx}{2}m + \frac{x^3-x}{6}n + \frac{x^4-x^2}{24}o + \frac{x^5-5x^3+4x}{120}p +$ &c. erit longitudo Ordinatim applicatæ PQ.

CAS. II.

In Caſu poſteriori, ſint A_4B_4, A_5B_5 duo medii termini, hoc eſt, ſit $\frac{A_4B_4+A_5B_5}{2} = k$, $b_4 = l$, $\frac{c_3+c_4}{2} = m$, $d_3 = n$, $e_2 + e_3 = o$, $f_2 = p$, $\frac{g+g_2}{2} = q$, & $h = r$. Et erecta Ordinatim applicata PQ, biſeca A_4A_5 in O, & dicto $OP = x$, duc Terminos hujus Progreſſionis

$$1 \times \frac{x}{1} \times \frac{xx-\frac{1}{4}}{2x} \times \frac{x}{3} \times \frac{xx-\frac{9}{4}}{4x} \times \frac{x}{5} \times \frac{xx-\frac{25}{4}}{6x} \times \frac{x}{7} \times \frac{xx-\frac{49}{4}}{8x}, \text{ &c.}$$

in ſe continuo; & orientur termini 1. x. $\frac{4xx-1}{8}$. $\frac{4x^3-x}{24}$. $\frac{16x^4-40x^2+9}{384}$. &c. per quos ſi termini ſeries k, l, m, n, o, p, q, &c. reſpective multiplicentur, aggregatum factorum $k + xl + \frac{4x^2-1}{8}m + \frac{4x^3-x}{24}n + \frac{16x^4-40x^2+9}{384}o +$ &c. erit Longitudo Ordinatim applicatæ PQ.

Sed hic notandum eſt quod intervalla AA_2, A_2A_3, A_3A_4, &c. hic ſupponantur eſſe unitates, & quod differentiæ colligi debent auferendo inferiores quantitates de ſuperioribus, A_2B_2 de AB, A_3B_3 de

de A_2B_2, b_2 de b, &c. & faciendo ut ſint $AB - A_2B_2 = b$, $A_2B_2 - A_3B_3 = b_2$, $b - b_2 = c$, &c. adeoque quando differentiæ illæ hoc modo prodeunt negativæ ſigna earum mutanda ſunt.

PROP. IV.

Si recta aliqua in partes quotcunque inæquales AA_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, *&c. dividatur, & ad puncta diviſionum erigantur parallelæ* AB, A_2B_2, A_3B_3, *&c. Invenire Curvam Geometricam generis Parabolici quæ per omnium erectarum terminos* B, B_2, B_3, *&c. tranſibit.*

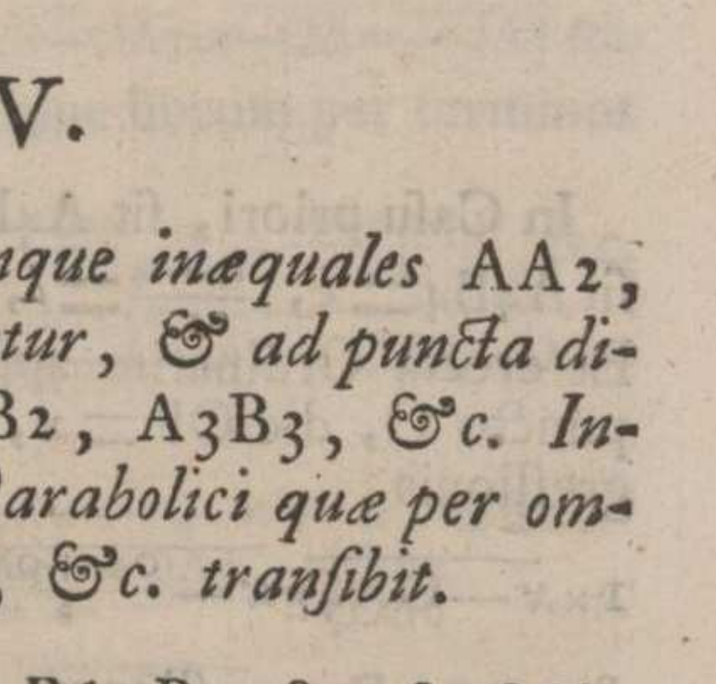
Sunto puncta data B, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, &c. & ad Abſciſſam quamvis AA_7 demitte Ordinatas perpendiculariter BA, B_2A_2, &c.

Et fac $\frac{AB-A_2B_2}{AA_2} = b$, $\frac{A_2B_2-A_3B_3}{A_2A_3} = b_2$,
$\frac{A_3B_3-A_4B_4}{A_3A_4} = b_3$, $\frac{A_4B_4-A_5B_5}{A_4A_5} = b_4$,
$\frac{A_5B_5-A_6B_6}{A_5A_6} = b_5$, $\frac{A_6B_6-A_7B_7}{A_6A_7} = b_6$,
$\frac{-A_7B_7-A_8B_8}{A_7A_8} = b_7$.

Deinde $\frac{b-b_2}{AA_3} = c$, $\frac{b_2-b_3}{A_2A_4} = c_2$, $\frac{b_3-b_4}{A_3A_5} = c_3$, &c.

Tunc $\frac{c-c_2}{AA_4} = d$, $\frac{c_2-c_3}{A_2A_5} = d_2$, $\frac{c_3-c_4}{A_3A_6} = d_3$, &c.

Et $\frac{d-d_2}{AA_5} = e$, $\frac{d_2-d_3}{A_2A_6} = e_2$, $\frac{d_3-d_4}{A_3A_7} = e_3$, &c.



Sic pergendum eſt ad ultimam differentiam.

Differentiis ſic collectis & diviſis per intervalla Ordinatim applicatarum; in alternis earum Columnis ſive Seriebus vel Ordinibus excerpe medias, incipiendo ab ultima, & in reliquis Columnis excerpe media Arithmetica inter duas medias, pergendo uſque ad ſeriem primorum terminorum, AB, A_2B_2, &c. Sunto hæc k, l, m, n, o, p, q, r, &c. quorum ultimus terminus ſignificet ultimam differentiam; penultimus medium Arithmeticum inter duas penultimas; antepenultimus mediam trium antepenultimarum; &c. Et primus k erit media Ordinatim applicata, ſi numerus datorum punctorum eſt im-

PROP. VI.

Figuram quamcunque Curvilineam quadrare quamproxime, cujus Ordinatæ aliquot inveniri poſſunt.

Per terminos Ordinatarum ducatur linea Curva generis Parabolici ope Propoſitionum præcedentium. Hæc enim figuram terminabit quæ ſemper quadrari poteſt, & cujus Area æquabitur Areæ figuræ propoſitæ quamproxime.

SCHOLIUM.

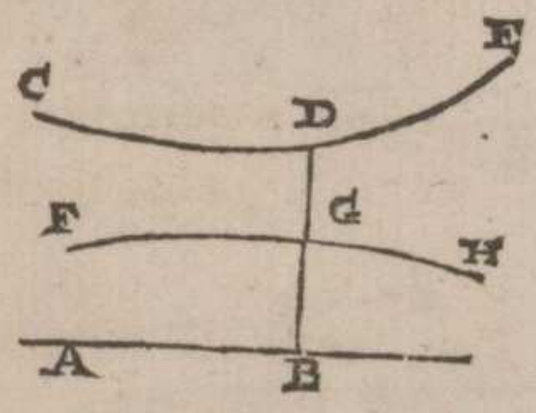
Utiles ſunt hæ Propoſitiones ad Tabulas conſtruendas per interpolationem Serierum, ut & ad ſolutiones Problematum quæ a quadraturis Curvarum dependent, præſertim ſi Ordinatarum intervalla & parva ſint & æqualia inter ſe, & Regulæ computentur, & in uſum reſerventur pro dato quocunque numero Ordinatarum. Ut ſi quatuor ſint Ordinatæ ad æqualia intervalla ſitæ, ſit A ſumma primæ & quartæ, B ſumma ſecundæ & tertiæ, & R intervallum inter primam & quartam, & Ordinata nova in medio omnium erit $\frac{9B-A}{16}$, & Area tota inter primam & quartam erit $\frac{A+3B}{8}R$.

Et nota quod ubi Ordinatæ ſtant ad æquales ab invicem diſtantias, ſumendo ſummas Ordinatarum quæ ab Ordinata media hinc inde æqualiter diſtant, & duplum Ordinatæ mediæ, componitur Curva nova cujus Area per pauciores Ordinatas determinatur, & æqualis eſt Areæ Curvæ prioris quam invenire oportuit. Quinetiam ſi pro Ordinatis novis ſumantur ſumma Ordinatæ primæ & ſecundæ, & ſumma tertiæ & quartæ, & ſumma quintæ & ſextæ, & ſic deinceps; vel ſi ſumantur ſumma trium primarum Ordinatarum, & ſumma trium proximarum, & ſumma trium quæ ſunt deinceps; vel ſi ſumantur ſummæ quaternarum Ordinatarum, vel ſummæ quinarum: Area Curvæ novæ æqualis erit Areæ Curvæ primo propoſitæ. Et ſic habitis Curvæ quadrandæ Ordinatis quotcunque quadratura ejus ad quadraturam Curvæ alterius per pauciores Ordinatas reducetur.

Per data vero puncta quotcunque non ſolum Curvæ lineæ generis

neris *Parabolici*, ſed etiam Curvæ aliæ innumeræ diverſorum generum duci poſſunt.

Sunto CDE, FGH Curvæ duæ Abſciſſam habentes communem AB, & Ordinatas in eadem recta jacentes BD, BG; & relatio inter has Ordinatas definiatur per æquationem quamcunque. Dentur puncta quotcunque per quæ Curva CDE tranſire debet, & per æquationem illam dabuntur puncta totidem nova per quæ Curva FGH tranſibit. Per propoſitiones ſuperiores deſcribatur Curva FGH generis *Parabolici* quæ per puncta illa omnia nova tranſeat, & per æquationem eandem dabitur Curva CDE quæ per puncta omnia primo data tranſibit.



F I N I S.

BIBLIOTECA PUBLICA E
ARQUIVO DISTRITAL
DE
EVORA