

que desde Cauchy e Weierstrass não haviam sido sensivelmente aperfeiçoados, a transformação e o progresso dos conhecimentos foram verdadeiramente prodigiosos depois da guerra.

E' principalmente o estudo da função uniforme à volta dum ponto singular essencial isolado, ou num círculo de holomorfia, que foi aprofundado ao ponto de fornecer em muitos casos a margem numérica exacta da variação possível duma função analítica verificando condições dadas. Num dominio em que muitos dos melhores analistas do tempo presente deram o seu melhor esforço, seria temerário pretender citar nomes sem nos expormos a graves omissões. Parece no entanto justo citar entre os novos poderosos métodos aos quais foram devidos os principais progressos realizados: a introdução da função característica de *R. Nevanlinna*, o emprêgo com *P. Montel* das famílias normais depois dum regresso à função modular de que *M. Picard* tinha tirado o germen de tôdas estas teorias, e enfin a representação conforme tão eficazmente utilizada por *Karlmann* e *Ahlfors*.

O estudo conjugado dos valores tomados pelas funções das espécies indicadas, e no conjunto dos pontos em que estas funções tomam estes valores, é, propriamente falando, o exame de função inversa. Sabe-se por um teorema célebre de Poincaré, que a função analítica mais geral é uma função uniforme duma função inversa duma função uniforme.

As pesquisas de *Painlevé* sobre as equações diferenciais de pontos criticos fixos, esbarravam com grandes dificuldades que provinham da insuficiência, nessa época, da teoria geral das singularidades das funções uniformes. Seria interessante que esta última teoria realizasse, no caso mais geral, progressos comparáveis áqueles que effectuou nos dois casos restrictos principalmente estudados até aqui. O problema de *Painlevé* oferece à teoria das funções de variável complexa uma das mais belas applicações que ela pode encarar. Convinha, a exemplo de *M. Garnier*, e mais recuadamente de *M. Chazy* continuar nesta direcção a obra do glorioso homem de ciência que honrou tão altamente a Faculdade de Ciências de Paris. As series trigonométricas estão na origem das noções precisas modernas sobre a convergência das successões, a continuidade das funções, a sua derivabilidade distinta de continuidade, a integração. A Análise teve que mudar de carácter, destacar sob o nome de Teoria das funções de variáveis reais um dos mais importantes ramos, para poder envolver o pleno desenvolvimento dos fenómenos sumários apresentados pelas séries trigonométricas. Estas oferecem ainda o interesse de definir uma função harmónica no interior dum círculo pelos seus valores limites nas extremidades dos diversos raios, e as séries trigonométricas podem pretender beneficiar por esta razão da importância ligada às funções harmónicas na Análise.

Seria em todo o caso permitido duvidar que a imensa produção consagrada nestes últimos anos a esta forma de desenvolvimento numérico ultrapassasse nitidamente o conjunto dos ensinamentos gerais que poderíamos esperar dos resultados obtidos se as séries trigonométricas não servissem de introdução às séries de funções ortogonais cujo interesse não deixa hoje de aumentar.

O estudo das funções de *Baire*, dos conjuntos borelianos e analíticos e mesmo das funções e conjuntos mais gerais, foi levado pela escola polaca e

por certos membros da escola de Moscovo, a um grau de profundidade e generalidade que confunde o espirito de admiração. E' agradável pensar que se esta classe de trabalhos viesse a ser bruscamente suspensa, os resultados já adquiridos permitiriam durante um século responder por sim ou por não a tôdas as questões que, nos diversos ramos das matemáticas, se propriam tocando a distinção do possível e do impossível na natureza das funções introduzidas pelos problemas da Análise.

Uma outra secção, que pelo seu enorme desenvolvimento de há vinte anos enfileira entre as ciências quasi novas, é a Topologia. A dos espaços Euclidianos existia já nalgumas das suas idéias fundamentais. A sua intervenção é indispensável, e sê-lo-á sempre cada vez mais, no estudo qualitativo das trajectórias reais e das superficies integrais definidas pelas equações diferenciais ou pelas derivadas parciais. A mecânica analítica de *Birkhoff* que, com os seus problemas sobre a transitividade, os caracteres dos sistemas ergóticos, occupa tantos investigadores, é evidentemente tributária da topologia euclidiana cujos progressos não poderiam ser excessivamente favorecidos.

A topologia geral, de criação mais recente que a primeira e acerca da qual é supérfluo lembrar a parte relativa a *M. Fréchet*, presta já serviços à Análise quanto mais não seja nas questões em que intervêm uma infinidade de variáveis. Enfin o cálculo das probabilidades conheceu também um afluxo de concepções e de métodos novos que modificaram grandemente e acrescentaram a extensão desta doutrina.

As rubricas citadas, teoria das funções de variáveis complexas, séries trigonométricas, funções de Baire e conjuntos cartesianos, topologia, cálculo das probabilidades, não compreendem mais do que uma pequena parte dos assuntos abordados há vinte anos pelos matemáticos. Assinalei-os porque definem, se me não engano, as principais zonas onde os esforços concorrentes, sem serem necessariamente concertados, de matemáticos pertencendo muitas vezes a países diversos, foram maciçamente applicados.

Na maior parte dos dominios da nossa ciência, a investigação manteve o seu carácter individualista, sendo inspirada à maneira romântica, pela necessidade de encontrar uma explicação e uma causa para factos observados pelo espirito, e não conduzida para obedecer à emulação do exemplo.

*

Em matemáticas, e também para o conjunto das ciências cujo crescimento desde há um século parece amplificar-se num ritmo de representação exponencial, o espirito sente-se ameaçado de submersão por esta maré crescente de factos, de resultados e de noções. A sôma das imagens que um