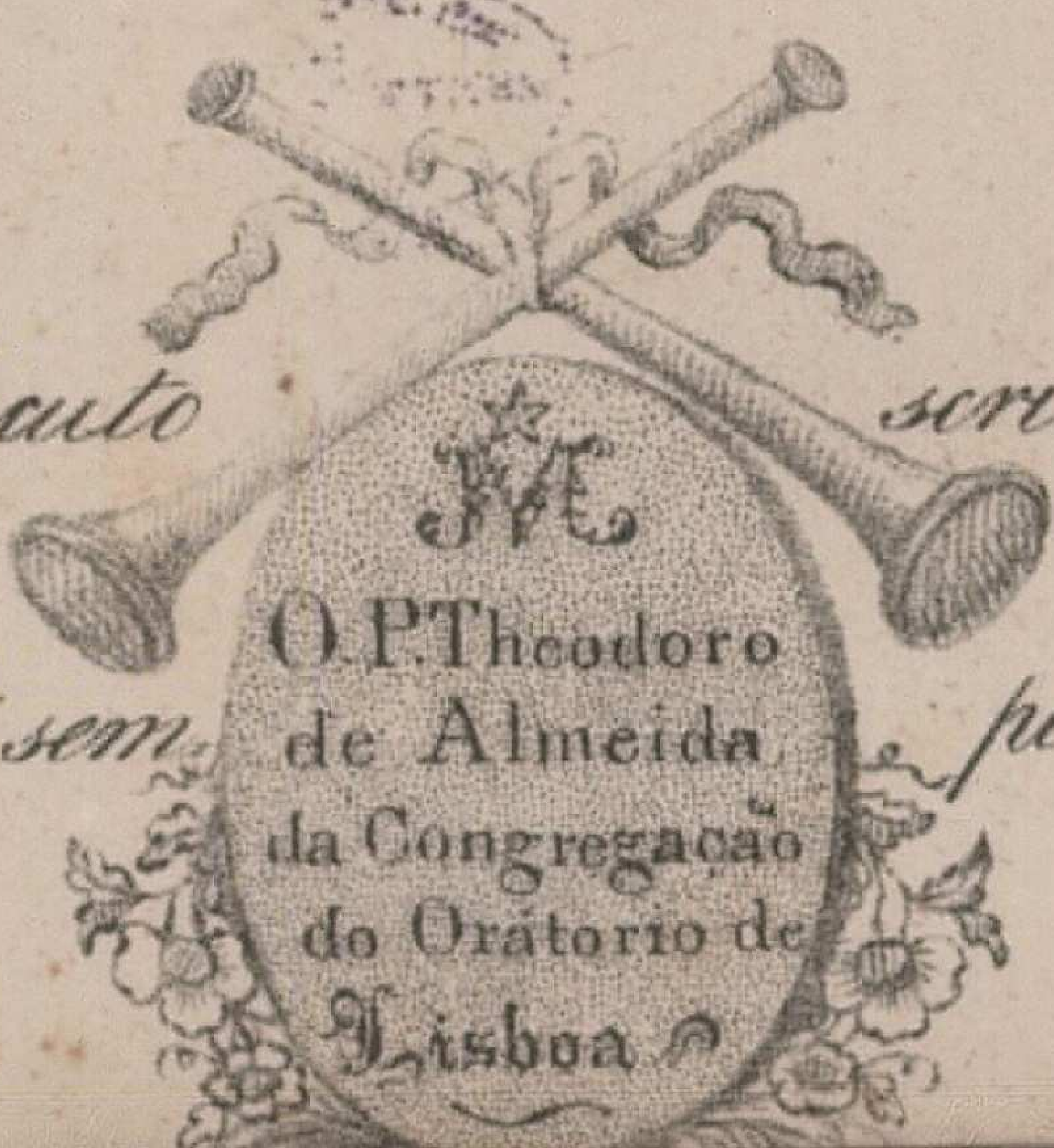
Te Fama sacto scribit in aureo:
Tu grato mi semper eris in animo.



CARTAS
FISICO-MATHEMATICAS
DE
THEODOZIO A EUGENIO.

Para ſervir de Complemento á Recreação Philoſofica.

TOM. I.

Sobre os Elementos de Geometria.

POR
DOROTHEO DE ALMEIDA.

LISBOA
Na Offic. de Antonio Rodrigues Galhardo, Impreſſor da Real Meza Cenſoria.
Anno MDCCLXXXIV.
Com licença da meſma Real Meza.

INDEX
DAS
CARTAS
DO I. TOMO.

CAR-

INDEX
DAS
CARTAS
DO TOMO I.

CARTAS
FISICO-MATHEMATICAS
DE
THEODOZIO A EUGENIO.

CARTA PRELIMINAR.

Que ſerve de Prefacçaõ ás outras Cartas.

AMIGO Eugenio, tenho recebido as voſſas Cartas, em que amoroza, e polidamente me condenais de que vos deixaſſe ignorar na Fiſica muitas materias, em que agora vos achais embaraçado. Dizeis que lêdes muitos livros de Fiſica na Lingua Franceza, que já depois diſſo aprendeſtes, e que naõ os entendeis. Confeſſovos, que nenhuma das voſſas Cartas me fez mais goſtoza impreſſaõ, do que eſta ultima de 9 de Janeiro, em que mais ſentidamente vos queixais. Sim ; eu goſto de vos ver ſequiozo , e agora conheço , que o tempo , as adverſidades , os cuidados , e ſuſtos , naõ tem extincto em vós o dezejo de ſaber ; e ſe as ſementes lançadas nas Praias tanto tem fructificado , devo prometer-me abundantes fructos deſſas plantas viçozas dos ardentes dezejos , que em vós agora vejo. Mas ſabei , que o meu ſilencio ſobre algumas materias quando em companhia de Silvio converſavamos , foi precizo , e foi prudente. Se eu vos houveſſe de tratar de tudo o que a eſſas materias pertence , o eſtomago do voſſo entendimento , naõ podendo entaõ digerir materias taõ fortes , padeceria indigeſtoens , com muitas dores , anguſtias , e enjo-o. Aſſentai , que nem ſempre a Ordem natural das materias he a Ordem natural do enſino. Queſtoens ha , que pertencem ás materias , que ſe trataõ na Fiſica logo ao principio , as quaes naõ ſaõ para a capacidade de principiantes ; como agora por experiencia vereis. Além de que o voſſo Entendimento era hum pano limpo, em que eu queria debuxar a Imagem da Natureza, imprimindo nella, ou pintando as ideias mais claras, e justas das maravilhas de Deos, na producçaõ, e conservaçaõ do mundo; e julguei, que devia fazer primeiro hum debuxo de lapis em grosso das partes mais principaes, e importantes; e depois hir metendo as côres, ou retocando as miudezas para aperfeiçoar a Imagem. Ridiculo sem duvida sería o Pintor, que fazendo hum Retrato, naõ delineasse o nariz, boca, hombros, braços, e corpo, antes de acabar os ultimos tóques dos olhos, ou cabellos, firmando-se na regra de que pela ordem natural saõ os que tem o primeiro lugar na cabeça. Assim faria eu, se naõ largasse huma materia, sem dizer logo tudo o que se podia dizer ácêrca della, para hir a outras mais sustanciaes. Por isso naõ esperei, que ficasse evacuada toda a Mecanica em Leis de movimento, antes de entrar a tratar das côres, som, fogo, &c. coizas que vos haviaõ de meter curiozidade desde o principio? Eu sigo, que no methodo de ensinar, se hade attender muito principalmente á maior facilidade, que ha na intelligencia das materias, e á dependencia dellas; podendo-se reservar para a segunda demaõ, ou retoque da Pintura muitas coizas, que se as tratassem da primeira vez, poderiaõ enfastiar, ou cançar os principiantes. Porém quando se escreve para os instruidos, se pode observar com todo o rigor, a ordem das materias. Além de que, na particular instrucçaõ, que eu vos dei a vós, e por vós a outros, se devia ter diante dos olhos o dar huma taõ gostoza ideia do estudo da Fisica, que com gosto todos se applicassem a ella; e por isso convinha afastar tudo o que podesse ser mais espinhozo e difficil. Agora porém com gosto vos dou a instrucçaõ que me pedis, porque já será facil; e poderá servir de Supplemento á primeira instrucçaõ, que vos tinha dado.

A primeira coiza que vós me pedis he huma instrucçaõ sobre a

Geometria, ſó o que baſte para bem poder diſcorrer nas materias mais vulgares da Fiſica; e particularmente para a Mecanica, ou Sciencia do movimento que he a baſe de toda ella; e accreſcentais, que a pezar da grande difficuldade, e trabalho que tereis na intelligencia deſta Sciencia eſpinhoza, e abſtracta, quereis a voſſa inſtrucçaõ: Vejo-vos com muito medo ao que ſó vos cauzará goſto e conſolaçaõ. Naõ tenhais medo, meu amigo, que he taõ vaõ na Geometria eſte medo, como o foi na Fiſica, em que a experiencia vos moſtrou, que foi materia de Recreaçaõ o que vós temieis que ſómente o foſſe de applicaçaõ cuſtoza e dificil. Crede-me, haveis de goſtar tanto della, como da Fiſica, ainda que ao principio naõ ſentireis o meſmo ſabor; pois ſómente o conhecereis depois que entrardes hum pouco mais dentro deſta admiravel Sciencia, chave de muitas outras. Os primeiros paſſos ſaõ os mais eſcuros; mas cada verdade geometrica he huma luz, ou huma tocha que ſe accengras que lhes naõ ſeráõ penozas, do que lhes ſeja precizo tornar muitas vezes atraz para lerem o que já

comme-
a que
as ver-
as vaõ
ntendi-
ochas,
mais,
te vai,
narcha

cer os primeiros principios,
chamaõ *Axiomas*, ou primeira
dades; mas depois, como eſt
declarando outras, vai o E
mento alumiado por muitas t
que cada vez ſe multiplicaõ
de fórma que quanto mais adian
mais claro he o caminho, e

e o methodo Sinthetico, ou de Dou-
trina, deſcendo ſempre dos princi-

perar.

Naõ he o meu intento eſcrever neſtas Cartas os Elementos de Geometria para os que haõ-de ſeguir e profundar os eſtudos da Mathematica; mas ſómente preparar os que como vós, ſó dezejaõ profundar os eſtudos da Fiſica que nos tempos precedentes ſe naõ pode bem entender ſem eſta inſtrucçaõ previa. Os apaixonados do Grande Euclides pertendem, que ſómente nelle, ou no ſeu methodo de tratar as Verdades

rigia, davaõ toda a attençaõ ás pro-

po-

Geometricas, ſe acha a genuina Evidencia Mathematica. Creio que naõ teráõ diſputa comigo, porque cêdo della: contento-me com a evidencia que ſe acha nos innumeraveis Tratados Modernos, em que Geometras muito habeis, afaſtando-ſe do methodo de Euclides, ſeguiraõ o que lhes pareceo mais accommodado ás materias que tratavaõ, ſeguindo nellas a ordem que lhes pareceo mais natural. Aſſaz honra teria eu ſe podeſſe entrar no Catalogo immenſo em que ſe lem os nomes de Arnaudo, La-my, Clairaut, La-Chapelle, Beſſout, e outros muitos que levaraõ a mira na facilidade de introduzir na mente dos diſcipulos as verdades que lhes queriaõ enſinar. O meſmo M.r de Mont-Luca hiſtoriador da Mathematica ſendo famozo partidiſta de Eucides, diz aſſim: *Porém ſe eu houveſſe de enſinar, naõ duvidaria de adoptar o methodo dos Modernos.*

Talvez que tambem me façaõ crime de naõ adoptar algum dos excelentes tratados de Geometria já impeſſos, que ſempre ſeria milhor

que

que o meu : naõ o duvido ; porém a liberdade que todos tem de pensar como milhor lhes parece, em tudo o que naõ he materia de Fé, ou de costumes , dá hum direito a cadaqual , para expôr os seus pensamentos , sem que seja acuzado de vã prezumpçaõ de os achar milhores que os dos outros. Esta liberdade tem sido utilissima em todas as Sciencias naturaes , e nas Mathematicas. Posto que naõ se conceda sobre as verdades sustanciaes em que todos concordaõ , nunca se negou no modo de as encadear e deduzir humas das outras , e no modo de as manifestar ao entendimento. Aliás naõ haveria senaõ hum só curso de Geometria ; porque todos em tudo seriaõ obrigados a seguir os vestigios do primeiro.

Algumas circunstancias talvez seráõ o objecto da Critica , huns censuraráõ que seja diffuzo na explicaçaõ , ou nimiamente abundante nas figuras: respondo que antes quero que entendendo bem huma proposiçaõ leiaõ mais hum par de regas poziçoens que eu hia lembrando, e depois de lhes ter offerecido ao entendimento as verdades já ſabidas, num inſtante as juntavaõ; e viaõ ſahir dellas o Theorema que na minha mente tinha intentado moſtrar-lhes. Pelo contrario quando lhes annunciava o Theorema a cuja demonſtraçaõ me preparava, via que muitas vezes tinhaõ trabalho em comprehender bem o que eu lhes queria provar; por quanto a cada verdade que hia dizendo obſervava eu, que o ſeu entendimento repartia a attençaõ para duas partes, metade para a verdade que lhes dizia, e a outra rezervavaõ para o Theorema cuja verdade queriaõ provar, eſtando com impaciencia eſperando a ver quando lhes apparecia a connexaõ que eſperavaõ deſcobrir; e deſta attençaõ repartida, naſciaõ muitas equivocaçoens; e da impaciencia com que eſtavaõ eſperando quando lhes luzia a connexaõ com a nova verdade, tambem naſciaõ outras: e iſto ſuccedia naõ raramente. Naõ he aſſim pelo methodo que ſigo, porque vai o entendimento dos diſcipulos ſoccegado ſem ſe poder diſtrahir com coiza alguma, por quanto ſó pode attender ao que ſe lhes diz; pois ignoraõ o fim que leva o diſcurço.

Naõ quero por eſte que agora faço condemnar a ninguem: quero dar a razaõ de ſeguir eſte caminho, que a experiencia me moſtrou que era util. Lembrando-me que muitas vezes acontece, que o dezacerto de hum autor temerario dá occaziaõ e abre a porta aos felices acertos dos que lhe ſobrevem. A multiplicidade immenſa de autores que tem eſcrito, e cada dia eſcrevem dando Elementos de Geometria prova que alguma coiza lhes falta ainda, que ſe dezeja conſeguir, na facilidade de fazer notorias a todos eſtas verdades.

Até no modo de eſcrever as verdades e ſuas provas, ſeparando-as totalmente, e pondo-as ſoltas, e deſcarnadas das provas, poderei ſer criticado: ſe a experiencia me naõ tiveſſe enſinado, que até a mais clara, e dezembaraçada impreſſaõ na

viſ-

vista conduz para a facil e clara impressaõ na alma, eu o naõ fizera; porém sigo o que conheço que he mais util á clareza, e intelligencia. A maior clareza, e a maior facilidade nesta instrucçaõ he a que eu me propuz, naõ a maior profundidade de doutrina, que naõ he nem das minhas forças, nem propria de huma simples preparaçaõ para a Fisica, como já disse.

Vós que pela amizade que professais comigo, e grande confiança que tendes no meu methodo de ensinar, me prometeis estar por tudo o que eu achar conducente, tanto á vossa instrucçaõ, como á facilidade della; me dais animo a que eu attenda sómente a estes dois fins: hum he o instruir-vos nas verdades mais uteis que se ensinaõ na Geometria, e de que temos precizaõ commummente no estudo da Fisica; o outro he poupar-vos trabalho, e augmentar-vos a clareza na vossa percepçaõ e intelligencia. Com esta licença pois começarei na Carta seguinte.

CAR-

CARTA I.

Sobre as Linhas e Angulos.

§ I.

Da Formaçaõ das Linhas, Recta e Curva.

IMAGINAI Eugenio que hum ponto ſe move: de qualquer modo que ſeja, ſempre ſeguirá algum caminho; a eſte caminho he que nós chamamos *Linha*, como *AB* (*Fig.* 1.) Eſt. 1. fig. 1.

Ora ſe o ponto ſe mover buſcando ſempre outro determinado ponto, a *Linha* ſe chamará *Recta*, como ſucede ao ponto *A*, o qual ſe ſuppoem que no ſeu movimento vai ſempre buſcando o ponto *B*.

Porém ſe o ponto que ſe move, em cada paſſo for mudando de direcçaõ, (*Fig.* 2.) a *linha* que elle deſcrever ſe chamará *Curva*; como ſuccede ao ponto *E* na linha *E I*. Fig. 2.

Eu vos explico iſto mais. Se juntaſſemos muitas rectas inclinadas mu-

mutuamente era claro que o ponto *O* ſeguindo eſſas linhas ora buſcaria o ponto *A*, ora *B*, ora *C*, ora ultimamente *D*; vós naõ duvidais diſto: pois o meſmo faz na Curva o ponto movel *E*, porque a cada movimento infinitamente pequeno muda de direcçaõ.

Poriſſo quando o ponto movel caminhar por huma linha recta chegará mais depreſſa ao ſeu termo, do que ſe antes de lá chegar foſſe deſcrevendo huma curva. Daqui tiro huma conſequencia, que vós ireis á parte eſcrevendo em hum caderno, para as conſervar-des milhor na memoria.

Logo.

N.º 1.º *A Linha Recta he menor que a Curva, ſaindo ambas de hum ponto, e terminando-ſe ambas ellas em outro.*

§ II.

§ II.

Da Linha Circular.

SE a recta *AB*, Amigo Eugenio, (*Fig.* 3.) se for movendo á roda, firmando-se sobre huma extremidade *A*, a outra extremidade *B*, descreverá huma curva; a qual virá a finalizar no seu principio, quando a recta tornar ao seu lugar antigo. Fig. 3.

Esta linha recta que se move, se chama *Raio*; como *AB*: o ponto *A*, ou a extremidade fixa se chama *Centro*.

A Curva que foi formada pela extremidade movel, se chama *Circunferencia* ou *Periferia*, como *B*, *C*, *D*, *E*, *F*.

Qualquer porçaõ desta Circunferencia se chama *Arco*, como *DC*, ou *DE*, &c.

O Espaço comprehendido dentro da Circunferencia, se chama *Circulo*.

A recta que de hum ponto da Circunferencia (*Fig.* 4.) for até Fig. 4.

ou-

outro, passando pelo centro, se chama *Diametro*.

A recta que naõ passar pelo centro, e se terminar de ambas as partes na Circunferencia, chama-se *Corda*, como *O I*.

A recta que sahir fóra do circulo, chama-se *Secante*, como *E F*.

Ora meu Amigo, da formaçaõ do Circulo se seguem varias Consequencias.

I.

Fig. 3. OS differentes raios de hum circulo (*Fig*. 3.) naõ saõ outra coiza se naõ a mesma linha *A B* que se moveo; a qual posta em diversas situaçoens faz diversos raios.

Logo.

N.° 2. *Todos os Raios de hum Circulo saõ iguaes entre si.*

II.

Os Raios de hum Circulo saõ a medida das distancias entre o centro, e os pontos da Circunferencia;

cia; e como os raios ſaõ iguaes ſegue-ſe:

Logo.

N.º 3. *Todos os pontos da Circunferencia eſtaõ igualmente diſtantes do Centro.*

III.

DObrado hum Circulo pelo centro (*Fig. 5.*) ſe algum ponto de huma ametade ſahiſſe mais para fóra, ou entraſſe mais para dentro do que os da outra ametade, já eſſe ponto diſtaria mais, ou menos do centro do que os outros, o que he impoſſivel. (n.º 3.) Fig. 5.

Logo.

N.º 4. *Dobrado qualquer Circulo pelo centro, as duas meias Circunferencias ſe ajuſtaõ perfeitamente.*

IV.

SE dois arcos num Circulo forem iguaes (*Fig. 6.*) poderemos dobrar o circulo pelo centro de modo, Fig. 6.

que naõ ſó as duas meias circunfe-
rencias ſe ajuſtem, mas tambem os dois arcos iguaes que ſaõ partes della. Neſſe cazo eſtando as extremidades de hum arco, ſobre as extremidades do outro, a diſtancia entre eſſas extremidades, ou as cordas que a medirem ſe ajuſtaráõ perfeitamente.

Logo.

N.° 5. *No meſmo Circulo, os arcos iguaes tem cordas iguaes.*

⁂

Do meſmo modo, ſe no meſmo circulo as cordas ſaõ iguaes, as extremidades dos arcos que ellas ataõ ſeraõ igualmente diſtantes: e como a curvatura delles he igual, por ſerem formados pelo movimento do meſmo raio, podem ajuſtar-ſe e coincidir.

Logo.

N.° 6. *No meſmo Circulo cordas iguaes pedem arcos iguaes.*

§ III.

§ III.

Dos Angulos em commum.

MEu Amigo Eugenio, antes que falemos dos *Angulos* convém explicar-vos alguns termos que podem ser estranhos aos principiantes.

Quando duas linhas conservaõ sempre entre si igual distancia chamaõ-se *parallelas*, e dellas trataremos adiante.

Quando a distancia entre as linhas vai crescendo, chamaõ-se *divergentes*: como v. g. (*Fig.* 6.) as linhas *MI*, *NE*, quando vem de sima para baixo, que cada vez distaõ mais entre si.

Quando as linhas cada vez distaõ menos entre si, chamaõ-se *convergentes*, como essas mesmas linhas tomadas debaixo para sima. Isto supposto. Sabei que

N.° 7. *Angulo he a Divergencia de dois Raios, ou de duas linhas que* *se considerem como taes* (*) *Fig.* 7.) o ponto *A* da uniaõ se chama *Vertice*, as duas linhas se chamaõ *Lados*.

Desta noçaõ se seguem as consequencias seguintes.

I.

N.º 8. O *Angulo maior ou menor he a maior ou menor divergencia das linhas*; e naõ tem connexaõ a grandeza do angulo com a grandeza das linhas. Por
Est. 1. fig. 8. isso (*Fig.* 8.) o angulo *E*, naõ muda

(*) Confeço, que duas Linhas fóra do Circulo podem fazer angulo se se unirem em hum ponto; comtudo, como para se medir a quantidade desse angulo se considera sempre o ponto do compaço no seu vertice, e se descreve hum Circulo que corte os seus lados em igual distancia para dar a conhecer o valor do arco que comprehendem, nisso se consideraõ como raios. Tambem advirto, que ás vezes se nota o angulo com trez letras. E nesse cazo sempre se deve pôr no meio das duas a letra que está no vertice do angulo.

da de quantidade ſe as linhas ſe cortarem em *I*, ou pararem em *A*, ou continuarem até *O*.

II.

N.º 9. A medida do angulo he a medida da divergencia, iſto he o arco comprehendido entre os dois raios que o formaõ, deſcrito do vertice como do centro.

A Circunferencia de qualquer Circulo grande ou pequeno ſe divide em 360 partes iguaes, a que chamaõ *gráos*; os circulos grandes tem gráos grandes, os pequenos, os tem pequenos. Cada gráo ſe pode dividir em 60 partes iguaes, que ſe chamaõ *minutos*, e cada minuto em 60 partes iguaes, que ſe chamaõ *ſegundos* &c.

N.º 10. Quando o arco comprehendido entre os lados do angulo for a quarta parte do circulo, ou 90 gráos, o angulo ſe chama *Recto*; como *A*, (*Fig.* 9.) Eſt. 1. fig. 9.

Quando o arco for menos da quarta parte, ou de 90 gráos, o angu-

Est. 1. fig. 10. gulo se chama *Agudo*, como *B* (*Fig.* 10.)

Quando o arco comprehender mais da quarta parte do circulo, o angulo se chama *Obtuzo*, como *D*

Fig. 11. (*Fig.* 11.)

Destas trez definiçoens se tiraõ varias consequencias.

I.

N.° 11. Logo *sómente os angulos rectos tem medida constante, e numero de gráos sabido; e todos saõ entre si iguaes.*

II.

N.° 12. Logo *meia circunferencia he medida de dois angulos rectos, ou dos que tiverem o valor delles* (*Fig.*

Fig. 12. 12.) porque he igual a duas quartas partes do circulo, ou a 180 gráos.

III.

N.° 13. Logo *a circunferencia total*

tal he medida de quatro angulos re- Est. 1.
ctos (Fig. 8.) ; ou dos que tiverem fig. 8.
o valor delles (Fig. 13.) porque tem Fig.13.
por medida quatro quartas partes do circulo.

IV.

N.º 14. Logo *todos os angulos que se poderem formar sobre huma recta e em hum ponto (Fig. 12.) tem o va-* Fig.12.
lor de dois rectos; porque se podem medir por meio circulo.

V.

N.º 15. Logo *todos os angulos que se podem formar á roda de hum ponto (Fig. 13.) saõ iguaes a 4 rectos*;
porque se podem medir por huma Fig.13.
circunferencia inteira.

⁂

Chama-se *Supplemento* de hum angulo o que lhe falta para inteirar
a meia circunferencia, (*Fig.* 14.) Fig.14.
Assim o angulo *A* tem por supplemento a porçaõ da circunferencia *MN*. E chamamos *Complemento* de hum angulo, o que lhe falta para
o quarto do circulo, como *B* (*Fig.* 15.) Fig.15.
on-

onde o angulo *B* tem por complemento o arco *AC*.

Desta definiçaõ se seguem as consequencias seguintes.

I.

N.º 16. LOgo *quando dois angulos tiverem o mesmo complemento, ou o mesmo supplemento, saõ entre si iguaes*, porque se a ambos falta o mesmo numero de gráos para 90, ou para 180, ambos tem igual numero de gráos.

⁂

Quando duas rectas se cruzaõ
Est. 1. fig. 16. (*Fig.* 16.) temos quatro angulos *A*, *M*, *O*, *N*: aquelles angulos que naõ tem lado algum commum como v. g. *A*, *O*; ou tambem *M*, *N* se chamaõ *oppostos pelo vertice*, ou como alguns dizem verticalmente oppostos; e advirto que como disse devem ser formados por duas rectas que se cruzem.

Se nós tomarmos juntamente *M* com *A*, ambos se medem por hum

hum semicirculo; e por conseguinte *A* he o supplemento de *M*. Do mesmo modo se tomarmos juntamente *N* com *A*, se medem por hum meio circulo; e por conseguinte *A* he supplemento de *N*. Tem logo *M*, e *N* o mesmo supplemento *A*: Ora isto se pode provar dos angulos *A*, e *O*.

II.

N.º 17. Logo *os angulos oppostos pelo vertice saõ iguaes.*

§ IV.

Da Linha Perpendicular e da Obliqua.

CHama-se Linha Perpendicular a recta que cahindo sobre outra, naõ inclina mais para hum que para outro lado (*Fig.* 17.) Est. 1. fig. 17.

Des-

Desta definiçaõ se tiraõ varias consequencias.

I.

N.° 18. L*Ogo quando a Perpendicular faz dois angulos com a outra linha sobre que cahe, elles saõ entre si iguaes.*

Est. 1. fig. 17. Aliás inclinaria mais para hum que para outro lado. (*Fig.* 17.)

II.

N.° 19. Logo *os angulos que faz a Perpendicular saõ rectos.* Porque valendo ambos elles 2 rectos (n.° 12.) e sendo iguaes entre si, cada qual será hum recto; e por conseguinte. *A linha que fizer com outra 2 angulos rectos lhe he perpendicular.* Pois naõ inclina mais para hum lado, que para o outro.

III.

N.° 20. Se duas linhas fizerem hum an-

angulo recto, (*Fig.* 18.) podemos pelo vertice *O* prolongar huma dellas, e logo apparecerá novo angulo, que tambem ſerá recto (n.° 14); por conſeguinte huma linha ſerá perpendicular á outra; e ſe prolongarmos as duas linhas que concorrem no angulo *O*, teremos quatro angulos rectos pela meſma razaõ, e todas ſeráõ mutuamente perpendiculares. Eſt. 1. fig. 18.

Logo.

N.° 21. *Toda a vez que huma recta faz com outra hum angulo recto lhe he perpendicular.*

IV.

Quando huma recta he perpendicular ſobre outra (*Fig.* 19.), faz com ella hum angulo recto, e entaõ tambem a ſegunda o faz com a primeira; e pelo n.° precedente (21) lhe ſerá perpendicular. Fig. 19.

Lo-

Logo.

N.° 22. *Quando huma linha for perpendicular á outra, tambem a segunda o será a respeito da primeira.*

V.

Est. 1. fig. 20. Posta huma recta (*MN Fig.* 20.) e levantada huma perpendicular *OA*, se desse mesmo ponto *O* quizermos levantar outra, ou hade passar sobre a primeira; e entaõ naõ he linha diversa; ou hade cahir a hum dos lados, e entaõ já naõ he perpendicular, porque inclina mais para hum que para outro lado.

Logo.

N.° 23. *Do mesmo ponto de huma linha naõ se podem levantar duas perpendiculares.*

VI.

Fig. 21. Do mesmo modo (*Fig.* 21.) se a perpendicular *AO* naõ inclina nem

pa-

para hum, nem para outro lado, qualquer outra linha que ſahir de *A*, ou hade vir ter a *O*, e entaõ naõ he linha diverſa, ou hade cahir a hum dos lados, e entaõ já inclina mais para o outro, e naõ he perpendicular.

Logo.

N.º 24. *De hum ponto naõ ſe podem tirar duas perpendiculares ſobre a meſma linha.*

§ V.

De outras Propriedades das Perpendiculares.

SUppoſto que a perpendicular naõ inclina mais para hum lado que para o outro, ſeguem-ſe tambem as ſeguintes.

Conſequencias.

I.

N.º 25. *SE do meio de huma linha MN (Fig. 22.) ſe levantar huma perpendicular, a* Eſt. I. fig. 22.

ſua extremidade ſuperior (*O*) *hade diſtar igualmente de ambos os extremos da linha* (*M N*).

Aliás tendo a perpendicular a ſua extremidade inferior (*A*) igualmente diſtante dos extremos (*M N*), e a de ſima (*O*) mais chegada a hum que a outro , toda a linha inclinaria para eſſa parte.

II.

Ora nós podemos cortar eſſa perpendicular *O A* por qualquer ponto que quizermos ; e neſſe cazo eſſe ponto v. g. *E* ſeria a extremidade ſuperior ; por conſeguinte igualmente diſtante dos extremos *M N*.

Logo.

N.º 26. *Se do meio de huma linha ſe levantar huma perpendicular , todos os pontos della diſtaráõ igualmente dos extremos da linha* (*M N*).

III.

Diſſemos no n.º 25. que ſe do meio

meio da linha *M N* (*Fig.* 22.) ſe levantaſſe huma perpendicular, que havia de hir buſcar o ponto *O* igualmente diſtante das extremidades *M N*. Logo a linha que ſahir de *O* e vier ter a *A* ſerá perpendicular; e como deſſe ponto *O* naõ ſe podem tirar duas perpendiculares ſobre a meſma linha, (n.° 24.) ſegue-ſe que a linha que ſahir de *O* igualmente diſtante das extremidades, ſe for perpendicular, hade vir buſcar *A* tambem igualmente diſtante dellas.

Logo.

N.° 27. *Se a extremidade ſuperior da perpendicular diſta igualmente dos extremos da outra linha, tambem a extremidade inferior diſtará igualmente delles.*

IV.

Ora podendo-ſe cortar a perpendicular pelo ponto que quizermos v. g. por *E*, e fazer que elle ſeja a extremidade ſuperior, ſegue-ſe. Fig.22.

Lo-

Logo.

N.° 28. *Dando numa perpendicular qualquer ponto (E) que seja igualmente distante dos extremos da outra linha (MN) a perpendicular virá ferir o meio della* (n.° 27.)

V.

N.° 29. Logo geralmente falando, *dando na perpendicular qualquer ponto igualmente distante dos extremos MN*, ou seja infimo, ou superior, ou qualquer outro pelo meio, todos *os outros pontos da perpendicular teraõ de hum, e outro extremo* da outra linha *igual distancia* (n.° 26, 27, 28.)

VI.

Nós tambem podemos cortar a
Est. I. fig. 23. linha *MN* (*Fig.* 23.) por onde nos parecer, e de quaesquer pontos della faremos extremidades; e assim o que temos dito da perpendicular, que dista igualmente das extremidades da ou-

outra linha, podemos dizer da perpendicular que diſtar igualmente de quaeſquer pontos notados na outra linha.

Logo.

N.º 30. *A perpendicular que tiver (Fig. 23.) hum ponto, qualquer que ſeja, igualmente diſtante de dois (MN) notados na linha ſobre que cahe, terá todos os ſeus pontos diſtantes igualmente de ambos elles.*

✱

Ora ſe (*Fig.* 23.) todos os pontos da perpendicular *A E I O* ſe ſuppoem igualmente diſtantes de *MN* (n.º 30.) todos os outros pontos que ficarem aos lados deſſa perpendicular, ou haõ de ficar mais perto de *M* ou de *N*; e aſſim naõ he poſſivel que ponto algum ficando fóra da perpendicular, diſte igualmente dos dois pontos notados na linha ſobre que cahe. Eſt. 1. fig. 23.

Logo.

N.º 31. *Se hum ponto da perpendicular diſta igualmente de dois notados na linha ſobre que cahe, a perpen-*

 pen-

pendicular irá passar por todos os pontos que distarem igualmente delles.

§ VI.

Sinaes para conhecer as Perpendiculares, e modo de as formar.

ATé aqui (amigo Eugenio) da noçaõ da perpendicular vos ensinei a tirar as suas propriedades; agora ás avessas, pelas propriedades vos ensinarei a conhecer a Perpendicular.

I.

Est. I. fig. 24. N.º 32. Se huma linha (*Fig.* 24.) tiver dois pontos igualmente distantes de dois signalados em outra, isso basta para lhe ser perpendicular: v. g. se *A O*, tiver *A* igualmente distante de *M*, *N*; e tambem *O* igualmente distante delles, isso basta para ser perpendicular a *M N*.

Porque a perpendicular que passasse pelo ponto *O* igualmente distantante de *MN*, iria ter ao ponto *A* tambem igualmente diſtante delles (n.º 31.): Logo ſe eſta linha de que ſe trata vem de *O* até *A*, paſſa por onde paſſaria a perpendicular; e por conſeguinte o fica ſendo.

Logo.

N.º 33. *Para levantar huma perpendicular* (*Fig.* 25.) *ſobre hum ponto dado* (*O*), *baſtará primeiramente ſinalar neſſa linha dois pontos M, N, igualmente diſtantes de O; e depois deſcrever delles como de centros dois arcos com igual abertura de compaſſo, que ſe cruzem em A; e tirar a linha de A até O.* Eſt. 1. fig. 25.

Pois deſſe modo já temos que *O* e tambem *A* diſtaõ igualmente de *M*, e de *N*: e aſſim por elles podemos tirar a perpendicular, que dezejavamos, ſegundo o n.º precedente.

II.

N.º 34. Se o ponto dado para ſe levantar a perpendicular (*Fig.* 26.) Fig. 26.

 for

for *I*, extremidade da linha, podemos continua-la; e notando (como fizemos aſſima) os dois pontos *M*, *N*; e deſcrevendo delles os dois arcos, acharemos o ponto *E* do encruzamento, para dahi tirar a perpendicular até *I*.

III.

Se das duas extremidades de huma linha *M*, *N*, (*Fig.* 27.) deſcrevermos dois arcos iguaes para achar hum ponto (*A*) igualmente diſtante dellas, e repetirmos a operaçaõ com a meſma, ou outra abertura do compaſſo, para achar outro ponto de encruzamento (*O*), igualmente diſtante dellas, a linha tirada pelos dois pontos dos encruzamentos ſerá perpendicular á primeira (n.º 32.) e paſſará por todos os pontos que tiverem igual diſtancía das extremidades (n.º 31.); e aſſim tambem paſſará pelo meio da linha *I*.

Eſt. 1. fig. 27.

Lo-

Logo.

N.° 35. *Para cortar huma linha pelo meio (Fig. 27.), basta descrever das suas extremidades dois arcos iguaes que se cruzem em hum ponto (A), e outros dois que se cruzem em outro (O), e tirar huma linha pelos dois encruzamentos.* Est. 11. fig. 27.

IV.

Se de hum ponto *A* (*Fig.* 28.) descrevermos hum arco que corte huma linha em dois pontos *M*, *N*, e delles como de centros descreveremos dois arcos iguaes, que se cruzem em *O*, a linha *A O* terá dois pontos igualmente distantes de *M*, *N*; e por conseguinte lhe será perpendicular (n.° 32.) Fig. 28.

Logo.

N.° 36. *Por este modo de hum ponto dado se póde baixar huma perpendicular sobre outra linha.*

§ VII.

§. VII.

Da Linha Obliqua.

A Linha que ſobre outra inclina mais para huma parte do que para a outra, ſe chama *Obliqua.*

Eſt. 1. fig. 29. *Deſta noçaõ ſe tiraõ trez Conſequencias; e inferimos (fig. 29.)*

I.

Fig. 29. QUe de hum ponto dado *A* (*Fig.* 29.) podemos tirar ſobre huma linha muitas obliquas, dandolhe mais ou menos inclinaçaõ; ainda que ſe naõ poſſa tirar ſenaõ huma ſó perpendicular.

Se havendo tirado de *A* huma perpendicular, e muitas obliquas ſobre *M N*; (Fig. 29.) repetirmos a operaçaõ para baixo, e tirarmos outras linhas iguaes, e do meſmo modo que as ſuperiores, a linha *A I O*; ſerá recta, e perpendicular; porque pela conſtrucçaõ faz os quatro

tro angulos rectos (n.º 20.) e passa por onde passaria a perpendicular *A I* continuada. As outras linhas *AMO*, *ARO*, *ANO*, formadas de duas obliquas inclinadas seráõ maiores que a recta. Porque assim como se o ponto *A* viesse para *O*, naõ por huma recta, mas por huma curva, chegaria mais tarde (n.º 10.) e faria maior caminho; tambem lhe succederia o mesmo, indo primeiro a *R* ou *N*, para de lá vir ter a *O*. Logo metade dessas linhas compostas *ARO*, *ANO*, seráõ maiores que metade da recta *A I O*.

II.

N.º 37 Logo. *A perpendicular he a mais curta de todas as linhas, que se podem tirar de hum ponto para outra linha.*

III.

N.º 38. Logo. *A linha menor que se puder tirar de hum ponto, sobre huma linha, lhe fica sendo perpendicular.*

Por-

Porque a menor de todas he huma unica ; e a perpendicular he essa menor de todas (n.° 37.)

§. VIII.

Das Parallelas.

N.° 39. **S** E posta huma linha sobre outra (*Fig.* 30.), formos afastando igualmente as extremidades de huma dos lugares onde estavaõ ; estas linhas conservaráõ entre si igual distancia, pois o movimento foi igual : e isto se entende, quer o movimento seja por huma linha perpendicular ás outras como *MO* (*Fig.* 30.) quer por linha obliqua como *NE* (*Fig.* 31.)

Est. 1. fig. 30.

Fig. 31.

✠

N.° 40. Estas linhas que conservaõ entre si por toda a parte igual distancia, se chamaõ (como dissemos) *Parallelas*.

Des-

Desta simples noçaõ das Parallelas, se tiraõ as seguintes Consequencias.

I.

SE ajustarmos dois angulos iguaes Est. 1. (*Fig.* 32.) *E A M*; *I O N*; fig. 32. e depois fizermos mover a linha *O N* por sima da linha *A M*, daremos igual movimento a todos os pontos da linha *O I*; por conseguinte ficaráõ os seos pontos igualmente distantes dos pontos correspondentes na linha *A E*; e assim as duas linhas seráõ parallelas.

Ora toda a vez que dois angulos saõ iguaes, podemos muito bem ajustar hum com o outro; e depois separalos como acabámos de fazer agora.

Logo.

N.° 41. *Toda a vez que duas linhas cabindo sobre outra, fazem da mesma parte angulos iguaes, saõ parallelas.*

Lo-

Logo.

N.° 42. *Toda a vez que duas linhas cahindo sobre outra, forem perpendiculares, como fazem da mesma parte angulos rectos, ficaraõ entre si parallelas.*

Logo.

Est. 1. fig. 34. *Para tirar huma linha parallela á outra por hum ponto dado, N (Fig. 34.) basta levantar huma perpendicular A O que passe pelo ponto dado N, e depois desse ponto levantar outra perpendicular á primeira.*

⁂

Fig.32. Ora se duas linhas cahindo sobre outra, v. g. se *A E*, *O I* cahindo sobre *A N* saõ parallelas (*Fig.32.*) os pontos de huma distaráõ igualmente dos que lhes correspondem na outra; e assim fazendo mover *O N* sobre *A M*, as duas linhas parallelas se ajustaráõ, e ficaráõ os dois angulos tambem justos; o que naõ poderiaõ fazer, se em si naõ fossem iguaes. *Lo-*

Logo.

N.° 43. *Quando duas linhas saõ parallelas (Fig. 32.) faraõ da mes ma parte os angulos iguaes.* Eă. 1. fig. 35.

⁂

Nós considerando a *fig.* 33, vemos que se as duas parallelas cahem sobre huma terceira *AO*, tambem a linha *AO* vai encontrar as duas parallelas.

Logo.

N.° 44. *Quando huma recta cahe sobre duas parallelas faz angulos da mesma parte iguaes: e quando huma recta fizer com duas linhas angulos da mesma parte iguaes, ellas saõ parallelas.*

⁂

Supponhamos agora (*Fig.* 35.) que formamos dois angulos, cujos lados sejaõ respectivamente parallelos; e que prolongamos huma das linhas *AO*, até encontrar hum lado do outro angulo *E.* Nesse cazo o angulo *A* será igual a *O*, pois huma linha corta duas parallelas; (n.° 44) Fig. 35.

44.) : e além disso *O* será igual a *E*, porque duas parallelas cahem sobre huma linha (n.° 43.) Logo *A* he igual a *E*.

Logo.

N.° 45. *Todos os angulos feitos por parallelas saõ iguaes.*

※

Est. I. fig. 36. Quando huma recta cortar duas parallelas (*Fig.* 36.) os angulos contrapostos *A*, *O*, ou tambem *U*, *M* se chamaõ *alternos*, porquanto se hum fica debaixo da parallela, o outro fica por sima; e se hum fica á esquerda da linha que corta, o outro fica á direita. Tambem saõ *alternos* pela mesma razaõ *E*, *N*, e tambem *I*, *R*.

Ora nós já dissemos que *A* era igual a *I* verticalmente opposto (n.° 15.): dissemos tambem, que o angulo *I* era igual a *O* pelas parallelas (n.° 43.); assim *A* he igual a *O* seu alterno.

Lo-

Logo.

N.° 46. *Todos os angulos alternos ſaõ iguaes entre ſi.*

Logo.

Quando huma recta cortando duas fizer os angulos alternos iguaes, as duas linhas ſaõ parallelas.

Porque ſe *O* he igual a *A*, como *A* he igual a *I* verticalmente oppoſto, vem a ſer *O* igual a *I*; e entaõ pelo n.° 41. ſaõ parallelas as duas linhas.

⁂

Quando huma recta cortar duas parallelas (*Fig.* 36.) dizemos, que *M* junto com *I* valem dois rectos (n.° 11.) e que *I* he igual a *O*, pelas parallelas; logo *M* junto com *O* valem dois rectos. Eſt. 1. fig. 36.

Logo.

N.° 47. *Quando huma recta cortar duas parallelas, os dois angulos internos da meſma parte valem dois rectos.*

A

A meſma demonſtraçaõ ſe applica aos angulos externos da meſma parte.

Logo.

Quando huma recta corta duas parallelas, os angulos externos da meſma parte valem dois rectas.

Aſſim *I* mais *N* ſaõ iguaes a dois rectos; como tambem *E* mais *R*.

§ IX.

Das Tangentes dos Circulos.

N.° 48. QUando huma recta toca hum Circulo ſem o poder cortar, ainda que a prelonguem por ambas as partes, chama-ſe *Tangente*.

Ora a recta nunca pode coincidir com a curva, nem a Tangente com a circunferencia: logo a recta que toca na circunferencia, ſe a prolongarem, ou hade entrar para dentro, ou ſahir para fora della; ſe entra, he *Secante*; ſe ſahe, he *Tangente*.

Lo-

Logo.

N.° 49. *A Tangente naõ toca o circulo ſe naõ em hum ponto (O Eſt. 2. Fig.1.)* Eſt. 2. fig. 1.

⁂

N.° 50. Se do centro de hum Circulo *A* (*Eſt.* 2. *Fig.* 2.) tirarmos huma linha ao ponto do contacto *O*, e alem diſſo muitas outras até tocarem na Tangente, ſómente a do contacto ficará ſem ſahir do circulo; pois todos os mais pontos da Tangente ficaõ fora delle. Fig. 2.

Logo.

N.° 51. *O Raio que vem ao ponto do contacto, he a menor linha que ſe pode tirar do centro á Tangente.*

Logo.

N.° 52. *O Raio do contacto he perpendicular ſobre a tangente; e a tangente ſobre o raio.* (n.° 38., e 22.)

Lo-

Logo.

Est. 2. fig. 3. N.° 53. *Naõ se podem tirar muitas tangentes ao mesmo ponto do circulo.* (*Fig.* 3.)

Porque entaõ haveria muitas perpendiculares sobre o mesmo ponto do raio *O* : o que he impossivel. (n.° 23.)

Logo.

Fig. 4. N.° 54. *Se muitos circulos se tocaõ em hum ponto commum* (*Fig.* 4.) *todos teraõ a mesma tangente nesse ponto.* Pois naõ pode haver muitas no mesmo ponto. (n.° 53.)

⁂

Ora quando muitos circulos se tocaõ num ponto commum, todos os raios que vem ter ao ponto do contacto, saõ perpendiculares á Tangente nesse ponto (n.° 52.); e naõ podendo haver muitas perpendiculares sobre hum só ponto (n.° 23) naõ podem estes raios deixar de fazer huma só linha.

Lo-

Logo.

N.º 55. *Quando muitos circulos se tocaõ num ponto, os raios fazem huma só linha.*

ж

Ora os centros desses circulos saõ as extremidades dos raios, os quaes ficaõ numa linha recta (n.º 55.)

Logo.

N.º 56. *Quando muitos circulos se tocaõ num só ponto, todos os seos centros ficaõ na mesma linha recta.*

Logo.

N.º 57. *Se nos derem hum circulo M (Fig. 5.) e nos pedirem o centro de quaesquer outros, que o toquem num ponto determinado (A), bastará para os achar tirar do centro I huma linha pelo ponto do contacto, e prolongala.* Est. 2. fig. 5.

Porquanto nessa linha prolongada se acharáõ os centros de todos os circulos imaginaveis, que possaõ tocar o circulo *M* no ponto dado *A* (n..º 56)

§ X.

Das Perpendiculares nos Circulos.

Est. 2. fig. 6. TIrada huma corda no Circulo (*Fig.* 6.), e ſobre ella elevada huma perpendicular, obſervamos, que a perpendicular ſe paſſa pelo centro, já tem hum ponto igualmente diſtante das extremidades da corda, porque eſtaõ na circumferencia; e aſſim (n.º 30.) a perpendicular hade enfiar todos os pontos que diſtaõ igualmente dellas; ora hum delles he o meio da corda.

Logo.

N.º 58. *A Perpendicular ſobre a corda, ſe paſſa pelo centro, a corta pelo meio.*

Logo.

N.º 59. *Se a perpendicular paſſa pe-*

pelo meio da corda, paſſa tambem pelo centro. (*Fig.* 6.) Eſt. 2. fig. 6.

Porque aqui val a meſma razaõ do n.º 30.

※

Do meſmo modo devemos diſcorrer á cerca do arco; porque o meio do arco diſta igualmente das extremidades da corda, pois eſſas metades do arco ſaõ arcos iguaes, que tem cordas iguaes; e eſtas cordas ſaõ as diſtancias das extremidades; e aſſim a perpendicular que deve enfiar todos os pontos igualmente diſtantes das extremidades da corda, deve paſſar tambem pelo meio do arco. (*Fig.* 6.) Fig. 6.

Logo.

N.º 60. *Se a perpendicular paſſa pelo centro, ou pelo meio da corda, paſſará tambem pelo meio do arco; como tambem ſe paſſar pelo meio do arco, deve paſſar tambem pelo meio da corda, e pelo centro, ſe a prolongarem.*

Pela meſma razaõ do n.º 30.

✠

Se n'um circulo houver duas cordas parallelas entre si (*Fig.* 7.)
Est. 2. fig. 7. e a huma tangente, a perpendicular que passar pelo centro hade dividir os arcos pelo meio ; e assim *ea*, *eo* seráõ iguaes, como tambem *em*, *en* ; por conseguinte tirando de cada arco grande o pequeno que nelle se inclue, os restos *ma*, *no*, seraõ iguaes.

Logo.

N.º 61. *Os arcos de hum circulo comprehendidos entre parallelas, saõ iguaes.*

✠

Dissemos que a perpendicular que passa pelo meio da corda, corta o arco pelo meio (n.º 60.) e que os arcos saõ as medidas dos angulos (n.º 8.).

Logo.

Se nos derem hum angulo A (Fig.

(*Fig.* 8.) *para dividir pelo meio, bastará descrever do seu vertice, como de centro, hum arco MN, e tirar-lhe a sua corda; e dividir esta pelo meio com a perpendicular AO.* Est. 2. fig. 8.

Pois dividida a corda pelo meio, se divide tambem o arco; o qual he a medida do angulo.

⁂

Dissemos que a perpendicular sobre o meio da corda, passa pelo centro do circulo que houver de passar pelas extremidades della. (n.º 59.)

Logo.

N.º 62. *Se derem trez pontos M, O, N,* (*Fig.* 9.) *que naõ estejaõ em linha recta, e pedirem hum circulo que passe por todos elles, rezolveremos o problema do modo seguinte.* Fig. 9.

1. Ataremos os trez pontos por meio de duas linhas *OM*, *ON*.

2. Elevarei do meio de cada huma dellas as perpendiculares, as quaes cruzando-se em *I* mostraráõ o centro do circulo dezejado.

Porquanto a perpendicular *AI* mostra que o centro do circulo que pas-

paſſa por *N*, *O* deve eſtar nella: A perpendicular *E I*, moſtra que o centro do circulo que paſſar por *M*, *O*, deve eſtar nella: Logo ambas juntas moſtraõ que o circulo que houver de paſſar pelos trez pontos *M*, *O*, *N*, deve ter o centro no ponto *I* commum a ambas.

Logo.

Eſt. 2. fig. 10. N.° 63. *Para ſe achar o centro de hum circulo* (*Fig.* 10.), *baſtará tirar duas cordas; e ſobre o meio de cada huma dellas levantar a ſua perpendicular, pois o ponto em que ſe cruzaõ, ſerá o centro dezejado.*

Pela razaõ do n.° precedente.

§ XI.

§ XI.

Problemas ſobre os Circulos, que tocaõ outros em pontos dados na periferia, e paſſaõ por pontos dados fora della.

I.

SE vos derem, Eugenio, hum circulo *A* (*Fig.* 11.), e nelle hum ponto *M* para o contacto de hum novo circulo, o qual deve paſſar por *B*, ſe fará o ſeguinte. Eſt. 2. fig. 11.

I. Pelo n.° 57. todo o circulo que houver de tocar em *M* hade ter o centro em huma linha, que paſſe por eſſe ponto, e pelo centro do circulo *A* : por conſeguinte eſtará o centro do novo circulo na linha indefinida *A M O*.

II. Além diſſo o circulo pedido naõ ſó hade paſſar por *M*, mas tambem por *B*; ora para iſſo tirada a linha *B M* ſe levantará no meio della a perpendicular *E I*, a qual (n.° 59.) deve paſſar pelo centro de qual-

qualquer circulo, cuja circunferencia haja de passar por esses pontos *M*, *B*.

Logo.

N.º 64. *O centro do novo circulo, que toque em M, e passe por B, deve estar no ponto R, em que as duas linhas se cruzaõ.*

II.

N.º 65. Se o ponto (*B*) dado fo-
Est. 2. fig. 12. ra do circulo (*Fig.* 12.) ficar para dentro da tangente que se tirasse pelo ponto do contacto (*M*), deve-se fazer a mesma operaçaõ; e acharse-ha que o centro (*R*) cahe no ponto em que as duas linhas se cruzaõ. E nesse cazo o novo circulo inclue o antigo.

⁂

Fig. 13. N.º 66. Se o ponto dado (*B. Fig.* 13.) para passar o novo circulo, cahir dentro do circulo antigo, sempre pela mesma operaçaõ se achará o centro no ponto *R*; e o novo circulo ficará incluido dentro do primeiro.

N.º 67.

※

N.º 67. Se vos derem huma linha recta (*Fig.* 14.), e nella hum ponto *M*, para que nelle toque hum circulo, o qual haja de passar pelo ponto dado *B*; farse-ha o seguinte. Est. 2. fig. 14.

Levante-se huma perpendicular em *M*, porque nella hade ficar o centro do circulo que se pede (n.º 52.): depois tire-se a linha *B M*; e sobre o meio della levante-se huma perpendicular, a qual hirá passar pelo centro do novo circulo, cuja circunferencia passará por *B* e por *M*; e segundo o que fica dito (n.º 59.) o ponto do encruzamento *R* será o centro.

Esta Carta, meu grande Amigo, tem sido muito mais dilatada do que eu tinha imaginado; porém a deducçaõ das verdades que hiaõ nascendo espontaneamente das que estavaõ ditas, me impedia o cortar o fio que as atava; perdoai, ainda que eu naõ prometa emenda.

Fim da primeira Carta.

CAR-

CARTA II.

Da medida dos Angulos.

§ I.

Da medida dos Angulos, que tem o vertice na circunferencia.

AMigo Eugenio, supposto o teres entendido tudo o que vos disse na Carta precedente; e o grande gosto que me significais de que continue nesta instrucçaõ, prosigo, e vos advirto que ainda que o Angulo, segundo a definiçaõ que demos, seja formado por dois raios, ou por duas quaesquer linhas que se considerem como taes; e se deva medir pondo o compasso no seu vertice, e descrevendo hum arco que corte os lados em igual distancia, para se conhecer o valor do angulo; comtudo muitas vezes naõ he preciza essa deligencia para se conhecer o seu valor; como acontece

nos

nos angulos que tiverem o vertice na circunferencia ; porquanto facilmente ſe conhece qual ſeja a ſua medida.

Mas de trez modos pode ſer o angulo que tem o vertice na circunferencia.

I. (*Fig.* 15.) Se hum dos lados passar pelo centro. Eſt. 2. fig. 15.

II. Se o centro ficar entre os lados (*Fig.* 16.) Fig.16.

III. Se o centro ficar fora do angulo (*Fig.* 17.) Fig.17.

Quanto ao primeiro cazo , (*Fig.* 15.) ſe pelo centro ſe tirar huma parallela ao lado *A R* , ficará o angulo central *I* igual ao da circunferencia *O*, por cauza das parallelas (n.º 45.) : Logo o arco *M N* ſerá medida de *I*, e mais de *O*.

Vejamos agora ſe o arco *M N* he metade do arco total *A N* comprehendido pelo angulo *O*. Os angulos *E*, *I*, verticalmente oppoſtos ſaõ iguaes , (n.º 17.) logo *M N* he igual a *R T* ; ora *R T* tambem he igual a *A M* ; por ſerem arcos comprehendidos entre parallelas (n.º 61.)

lo-

logo MN he igual a MA; e por conſeguinte MN, medida do angulo O, he metade do arco AN comprehendido por elle.

Logo.

N.º 68. *No primeiro cazo o angulo da circunferencia tem por medida metade do ſeu arco.*

✠

Eſt. 2. fig. 16. No ſegundo cazo (*Fig.* 16.) em que o centro fica comprehendido dentro do angulo.

Tire-ſe do vertice A hum diametro, o qual dividirá o angulo total em dois m, n, e cada hum delles ficará nos termos do cazo antecedente; e por iſſo terá por medida metade do ſeu arco parcial.

Logo.

N.º 69. *Neſte ſegundo cazo, o angulo da circunferencia A tem por medida metade do ſeu arco total.*

✠

fig. 17. No terceiro cazo (*Fig.* 17.) em que o centro fica fora do angulo A faça-ſe o ſeguinte.

N.º 70.

N.º 70. Tire-ſe do ponto *T* huma linha *T N* parallela ao primeiro lado *R M*: neſſe cazo os angulos *O*, *A* saõ alternos, e iguaes, e teráõ a meſma medida (n.º 46.): Ora o angulo *O* pelo cazo precedente, tem por medida metade do arco *M N*, ou do ſeu igual *R T* (n.º 61.) logo *A* ſeu alterno terá por medida metade do ſeu arco *R T*.

N.º 71. Se o novo angulo *O* ainda naõ comprehender o centro, co- Eſt. 2.
mo ſe vê na (*Fig.* 18), ſe iraõ ti- fig. 18.
rando ſucceſſivamente parallelas ao primeiro lado *E A*, e depois ao ſegundo, e dahi ao terceiro &c. até que hum angulo comprehenda o centro, ou paſſe por elle: e entaõ ſe diſcorre como aſſima; pois todos os angulos ſendo alternos ficaõ iguaes, (n.º 46.) e todos os arcos ſendo entre parallelas tambem o ſaõ (n.º 61.)

Logo.

N.º 72. *Em todos os cazos poſſiveis o angulo que tem o vertice na circunferencia tem por medida metade do ſeu arco.*

Con-

Consequencias.

I.

Est. 2. fig. 19. N.° 73. Logo (*Fig.* 19.) *todos os angulos que tem o vertice na circunferencia, e estaõ firmados sobre o mesmo arco saõ iguaes.*

Pois tem a mesma medida : e por isso os angulos *A*, *B*, *C*, saõ iguaes.

II.

N.° 74. Logo *o angulo na circunferencia* (*Fig.* 20.) *firmado sobre to-* Fig.20. *do o diametro, he recto.*

Pois tem por medida metade do semicirculo.

III.

Se se der a recta *OR* (*Fig.* Fig.21. 21.) a qual se naõ possa produzir ; e quizerem levantar da sua extremidade *O* huma perpendicular, se fará o seguinte.

Ponha-se o compasso num ponto arbitrario, e o abriremos até que che-

chegue ao ponto dado *O*; e defcreveremos hum circulo, o qual cortará a recta dada em *R*; dahi tirefe huma linha pelo centro, a qual hirá ter a *S*; e deffe ponto baixaremos huma linha até *O*.

Efta linha fará com a dada hum angulo (*O*) que tem o vertice na circunferencia, e eftá firmado no diametro inteiro *S R*: por confeguinte he recto; e affim huma linha he perpendicular á outra.

Logo.

N.° 75. *Pelo angulo na circunferencia podemos levantar huma perpendicular na extremidade de huma linha dada.*

※

Se dado hum circulo *A* (*Fig* 22.) fe quizer achar o ponto em que huma tangente tirada do ponto *B* toca o circulo dado, acharfe-ha da maneira feguinte. Eft. 2. fig. 22.

Tire-fe de *M* centro do circulo *A* huma linha até *B*; fobre efta linha defcreva-fe hum femicirculo; o ponto *O* em que elle cortar o antigo circulo *A*, ſerá o ponto do contacto da tangente.

Porque em tirando a linha *O M* temos ahi hum angulo *O*, cujo vertice eſtá na circunferencia, e que eſtá firmado ſobre o diametro *M B*; por conſeguinte he recto; e como *O M* he hum raio, *O B* ſerá a tangente. (n.º 52.)

Logo.

N.º 76. *Pelo angulo na circunferenrencia, podemos achar o ponto lo contacto de huma tangente, tirada de hum ponto dado, ſobre hum circulo dado.*

§ II.

Da medida de outros angulos formados no circulo.

MEu Amigo, os angulos na circunferencia ſempre ſaõ formados por duas cordas, ou hum diametro com huma corda: Como porém no circulo ha varias linhas, que naõ ſaõ cordas, nem diametros; já

ſe

ſe vê que ha varios angulos differentes dos que temos examinados; e he precizo tratar de todos ſeparadamente.

O angulo feito pela Tangente, e por huma corda naſcida do ponto do contacto (*Fig.* 23.) ou he agudo, ou obtuzo: ambos devemos medir; comecemos pelo agudo *A*. Eſt. 2. fig. 23.

Como já ſabemos medir os angulos na circunferencia, reduzirei o angulo da queſtaõ *A*, a outro igual na circunferencia *F*; e iſſo por meio de huma linha *MS* parallela á tangente: como *F*, e *A*, ſaõ alternos, a medida de hum ſerá a medida do outro (n.º 46.); ora o angulo *F* tem por medida metade do arco *RS* (n.º 72.) ou metade de *MR* ſeu igual, por ſerem comprehendidos entre parallelas (n.º 61.): logo tambem o angulo *A* tem por medida metade deſſe arco *MR* comprehendido nelle.

Quanto ao angulo obtuzo *MRO*, reparta-ſe em dois por meio de huma corda, qualquer que ſeja, *RB*; e entaõ neſſe cazo o angulo da circunferencia *E* tem por medida metade do ſeu arco *MB* (n.º 72.); o angulo da tangente em *I*, tem por medida metade do ſeu arco *BR*, pelo que acabamos de dizer: por conſeguinte o angulo total *MRO*, tem por medida metade do arco total *MBR*.

Logo.

N.º 77. *Todo o angulo formado por corda, e tangente tem por medida metade do arco que comprehende*: eſtes angulos tambem ſe chamaõ *Angulos no Segmento.*

⁂

Além deſtes angulos ſe pode formar outro por huma corda, e
Eſt. 2. continuaçaõ de outra, como v. g. o
fig. 24. angulo *SOA*. (*Fig.* 24.)

Para medir eſte angulo divida-ſe o angulo total por huma tangente *MN*: iſto feito, o angulo inferior *SON* terá por medida metade do arco *SO* que em ſi comprehende (n.º 77.), e o angulo ſuperior *NOA* como he igual a *I* por lhe ſer verticalmente oppoſto, terá a meſma medida delle, que he metade

do

do arco *RI*, pela razaõ do n.° precedente.

Logo.

N.° 78. *O angulo total (SOA) feito por huma corda, e pela continuaçaõ de outra, tem por medida metade do arco comprehendido, e mais metade do arco opposto.*

⁂

Tambem ſe pode formar hum angulo dentro do circulo (*Fig.* 25.) cujo vertice fique entre o centro, e a circunferencia. Eſt. 2. fig. 25.

Para ſe medir eſte angulo *A* produzaõ-ſe, e continuem-ſe ambos os lados até a circunferencia; e do ponto *O* tire-ſe huma parallela a *A N*: Iſto feito, o angulo *O* he igual a *A* (n.° 45.), e terá por medida metade do arco *MNR* (n.° 72.) ou metade de *MN*, e metade de *NR*. Ora o arco *NR* he igual a *ST* comprehendidos entre parallelas; e por conſeguinte em lugar da metade de *NR* podemos pôr metade de *ST*.

Logo eſta meſma ſerá a medida do angulo *A* ſeu igual.

Logo.

N.° 79. *Todo o angulo cujo vertice está entre o centro, e a circunferencia, tem por medida metade do arco concavo, sobre que estriba, e metade do convexo, comprehendido entre os seus lados se forem produzidos.*

⁂

Ultimamente se pode formar hum angulo por duas secantes, que se ajuntem fora do circulo, cujo vertice por conseguinte he fora da circunferencia. (*Fig.* 26.)

Est. 2. fig. 26. Para se medir este angulo *A* reduza-se a outro igual *O* feito na circunferencia; e isso por meio de huma parallela *R S*: ora este angulo *O* tem por medida metade do seu arco *S M*, e por conseguinte, se eu lhe desse por medida metade do arco total *N M*, devia descontar o que dera de mais, que he metade de *N S*; ou tambem metade de *T R* seu igual (n.° *61.*): assim se tomarmos metade do arco concavo *N M*, menos metade do convexo *T R*, teremos a medida verdadeira de *O* ou de *A* seu igual.

Lo-

Logo.

N.º 80. *O Angulo cujo vertice fica fora da circunferencia, tem por medida metade do arco concavo, menos metade do convexo.*

§. III.

Da medida dos Angulos nos Triangulos.

DEſembaraçados pois, amigo Eugenio, da medida dos angulos que pertencem ao circulo, vamos a medir os angulos nos triangulos.

Chamamos *Triangulo* huma figura formada por trez linhas rectas; as quaes por conſeguinte formaõ tres angulos. Qualquer deſtes angulos ſe pode chamar *Vertice* do Triangulo, e entaõ as linhas que formaõ o angulo do *Vertice* ſe chamaõ *Lados*, e a outra linha oppoſta ao vertice ſe chama *Baſe*.

Iſto poſto, ſe conſideramos os la-

lados do triangulo achamos trez especies de triangulos; porque.

Est. 2. fig. 27. Ou os trez lados saõ iguaes, e chama-se *Equilatero* (*Fig.* 27.)

Ou sómente dois lados saõ iguaes, e chama-se o Triangulo *Isosceles*. (*Fig.* 28.) Fig.28.

Ou nenhum lado he igual a outro, e chama-se entaõ Triangulo *Scaleno*. (*Fig.* 29.) Fig.29.

Considerando porém os angulos dos triangulos, achamos outras trez especies; porque se tem hum angulo recto, chama-se *Rectangulo*. (*Fig.* 30.) Fig.30.

Se tem hum angulo obtuso, chama-se *Obtusangulo*. (*Fig.* 31.) Fig.31.

Se tem todos os angulos agudos, chama-se *Acutangulo*. (*Fig.* 27., 28.) Fig.27, 28.

Para saber quanto valem os angulos de qualquer triangulo, podemos tirar pelo vertice (*Fig.* 32.) huma parallela á base. Fig.32.

Isto feito se vê que *M* he igual ao seu alterno *O*; assim como *N* he igual ao seu *E* (n.° 46.): Ora *M*, *A*, *N*; tem o valor de dois rectos

(n.° 11)

(n.° 11.), e por conseguinte O, A, E tem esse mesmo valor. Ora em qualquer triangulo rectilineo podemos fazer a mesma demonstraçaõ.

Logo.

N.° 81. *Todo o triangulo rectilineo tem nos trez angulos o valor de dois rectos.*

Consequencias.

I.

N.° 82. Logo *n'um triangulo naõ podem haver dois angulos rectos*: porque entaõ esses com o terceiro que falta teriaõ o valor de mais de dois rectos.

II.

N.° 83. Logo *em hum triangulo naõ podem haver dois angulos obtusos.* Pela mesma razaõ.

III.

N.° 84. Logo *sabendo-se o valor de*

hum

hum angulo , saberse-ha o valor da somma dos outros dois : porque será o que falta para dois rectos.

IV.

N.° 85. Logo *Sabendo-se o valor de dois angulos , sabe-se o valor do terceiro.*

Porque hade ser o que faltar, supposta a somma dos dois, para chegar a 180 gráos ; valor de dois rectos.

V.

N.° 86. Logo *se hum triangulo tem dois angulos iguaes a dois de outro triangulo , o terceiro angulo será igual ao terceiro do outro.*

※

N.° 87. Se se produzir hum lado
Est. 2. fig. 33. de qualquer triangulo (*Fig.* 33.) ; este lado assim continuado fará hum novo angulo com o lado *AM* ; e se chama *Angulo Externo.*

Este angulo *A*, que junto com *E* val dois rectos (n.° 11.), tambem junto com *N*, *M* val dois rectos, pelo que acabamos de dizer : e as-e assim tanto val *E* só, como *N* e *M* juntos.

Logo.

N.º 88. *O angulo externo de qualquer triangulo he igual aos dois internos oppostos.*

⁂

Esta mesma verdade de serem os trez angulos de qualquer triangulo iguaes a dois rectos, se conhece tirando pelos trez angulos hum circulo (*Fig.* 34.); porque então todos os trez angulos ficando na circunferencia, tem por medida cada hum metade do seu arco; e todos trez metade do circulo, que he a medida de dois rectos. Daqui se tirão outras

Est. 2. fig. 34.

Consequencias.

I.

NO triangulo Equilatero os tres lados (*Fig.* 34.) são tres cordas iguaes, que sustentão arcos iguaes (n.º 6.), por conseguinte as metades delles sendo iguaes dão aos

fig. 34.

tres

trez angulos oppoſtos medidas iguaes.

Logo.

N.º 89. *Todo o Triangulo equilatero, he Equiangulo.*

II.

Pela meſma razaõ, ſe os tres angulos de hum triangulo ſaõ iguaes, teráõ medida igual, e os arcos oppoſtos ſeráõ iguaes, o que pede cordas, ou lados iguaes. (n.º 5.)

Logo.

N.º 90. *Todo o Triangulo Equiangulo he Equilatero.*

III.

Eſt. 2. fig. 35. Fazendo-ſe a meſma operaçaõ no triangulo Iſoſceles (*Fig.* 35.) ſe vê que os dois lados iguaes pedem dois arcos iguaes, os quaes daõ iguaes medidas aos angulos oppoſtos.

E do meſmo modo ſe dois angugulos *A*, *E*, ſaõ iguaes devem ter medida igual nos arcos oppoſtos, e eſtes ſendo iguaes pedem cordas, ou lados iguaes (n.° 5.)

Logo.

N.° 91. *Todo o triangulo Iſoſceles tem dois angulos iguaes.*

N.° 92. Logo *todo o triangulo que tiver dois angulos iguaes ſerá Iſoſceles.*

IV.

O Triangulo *Scaleno* (*Fig.* 36.) como tem todos os lados deſiguaes, e os lados ſaõ cordas, forçozamente os arcos haõ de ſer deziguaes; e por conſeguinte dezigual a medida dos angulos oppoſtos. Eſt. 2. fig. 36.

Logo.

N.° 93. *O triangulo Scaleno tem todos os angulos deziguaes, e todo o triangulo que tiver os trez angulos deziguaes ſerá Scaleno.*

V.

V.

N.° 94. Logo *no triangulo Scaleno* (pela meſma razaõ) *o maior angulo hade eſtar oppoſto ao maior lado; e o menor angulo ao menor lado.*

§. IV.

Da medida dos Angulos nos Poligonos.

CHamamos *Poligono* qualquer figura formada por muitas linhas rectas: ora como já ſabemos avaliar os angulos dos triangulos, baſtará
Eſt. 2. dividir os poligonos em triangulos
fig. 37. (*Fig.* 37.) tirando varias linhas de hum angulo para os outros; e deſte modo medidos os angulos dos triangulos, ficaráõ medidos os do Poligono.

Neſta divizaõ neceſſariamente ſuccede que as linhas tiradas de *A* para os dois angulos proximos coincidem com os dois lados immediatos do poligono; por conſeguinte

ha

ha duas linhas inuteis, que naõ dividem o poligono em triangulos

Confiderando pois os triangulos todos com os vertices no ponto *A*, donde fahiraõ as linhas da divizaõ, vemos que todos os lados do poligono ficaõ fendo bazes de triangulos, excepto os dois lados *AE*, *AI*; que faõ os lados immediatos.

Logo.

N.º 95. *Tantos triangulos haverã no poligono dividido, quantos forem lados, depois de termos fuprimido dois lados.*

Logo.

N.º 96. *Nos poligonos haverá o valor de tantos rectos, quanto he o duplo dos feos lados, havendo fuprimido dois lados: ou por outro modo no Poligono ha o valor de tantos rectos, quanto he o duplo dos lados menos 4 rectos.*

⁂

Logo no Pentagono (isto he no poligono de finco lados) haverá o valor de feis rectos; porque de finco co lados tirando dois ficaõ tres, cujo duplo he seis. No Exagono (que he o que tem seis lados) haverá o valor de 8 rectos. No Heptagono (de 7 lados) haverá o valor de 10. No Octogono (de 8 lados) haverá o valor de 12. No Decagono (de 10 lados) haverá o valor de 16. No Dodecagono (de 12 lados) haverá o de 20 &c.

Depois de sabermos o valor da somma dos angulos internos dos Poligonos, isto he os angulos que se formaõ dentro delles, convém saber avaliar a somma dos externos; isto he dos angulos que haveria se continuassem todos os lados
Est. 2. para fora, e para a mesma parte,
fig. 38. (como na *Fig.* 38.)

Para isso tome-se qualquer dos angulos v. g. *A*; e no seu vertice por meio das parallelas a todos os mais lados, formemos angulos iguaes a todos os angulos externos: de sorte que *b* ficará igual a *B*; porque a linha *b* 2 he parallela a *B* 2; e pela mesma razaõ o angulo *c* he igual a *C*; e assim dos mais, por se-

ſerem todos feitos por parallelas (n. 45.)

Ora já ſabemos (n.º 12.) que os angulos formados á roda de hum ponto tem o valor de 4 rectos

Logo.

N.º 97. *Todos os angulos externos de hum poligono, qualquer que elle ſeja, valem a ſomma de 4 rectos.*

⁂

N.º 98. Nos poligonos regulares Eſt. 2. fig. 39.
(*Fig.* 39.) iſto he nos que tem todos os lados iguaes, e angulos iguaes, he mui facil o avaliar, naõ ſómente a ſomma de todos os angulos internos, como já fizemos pelo n.º 96., mas tambem avaliar a cada hum delles; e iſſo repartindo a ſomma pelo numero dos angulos. Deſte modo ſe vê que o Exagono tem angulos de 120 gráos cada hum, porque ſe reparte a ſomma de 8 rectos, ou 720 gráos pelos ſeis angulos: no Pentagono temos angulos de 108. &c.

N.º 99. Tomemos agora hum Exago-

gono regular (isto he que em todos os seos angulos, e lados seja igual, e semelhante), descrevamos
Est. 2. hum circulo que passe pelos tres an-
fig. 41. gulos *a*, *e*, *i* (*Fig.* 41.) pelo methodo que ensinamos (n.° 62.) e se achará por centro delle o ponto *T*; se se repetir a operaçaõ a respeito dos angulos *e*, *i*, *o*, e dos mais successivamente, se achará o mesmo ponto *T* para centro; por quanto a perpendicular *m T* sendo cortada em *T* pela perpendicular ao lado *a e*, tambem o será ahi mesmo pela outra perpendicular ao lado *i o*; por ser igual a *a e*, e igualmente inclinada que ella a *e i*, supposta a perfeita regularidade do Poligono. Logo o circulo descripto desse ponto *T*, naõ sómente passará por *a*, *e*, *i*, mas por *o*, *u*, *s*.

N.° 100. Tiremos agora desse centro linhas a todos os angulos (*Fig.*
Fig. 40. 40.), os angulos do centro todos seráõ de 60 gráos, para terem todos juntos o valor de 360; os angulos da circunferencia antes de divididos eraõ de 120, e agora ficá-

raõ

raõ de 60. Logo o Triangulo *e M i*, he equiangulo. O meſmo ſe diz dos outros triangulos: e todos os raios *Ma*, *Me*, *Mi*, &c. ſeraõ iguaes aos lados. (n.° 90.) Iſto poſto.

N.° 101. Eſſe circulo ſerá formado de ſeis arcos, e a circunferencia do Poligono he compoſta de ſeis cordas, que ſuſtentaõ eſſes arcos; e como cada hum dosarcos he maior que a ſua corda, os ſeis arcos, ou a circunferencia do circulo, ſerá maior que os ſeis lados que fazem o circuito do Poligono; ora eſtes ſeis lados ſaõ iguaes aos ſeis raios (n.° 100.) ou a trez diametros.

Logo.

N.° 102. *A circunferencia do circulo he maior que trez diametros delle.*

Iſto he, ſe o diametro val 7, a circunferencia hade valer mais que 21.

Obſervaçaõ.

N.° 103. ATé aqui naõ ſe achou Geometricamente que proporçaõ tem a circunferencia do circulo com o ſeu diametro; que isto he o que faz a grande difficuldade da Quadratura do circulo, isto he de o reduzir ao espaço de hum quadrado perfeitamente igual; porém Archimedes achou que o diametro comparado com a circunferencia, era como 7 para quazi 22, ainda que hum pouco menos de 22. Desta porporçaõ se servem commummente os Geometras, desprezando o pequeno erro que nisto ha: e ainda que haja outros numeros que cheguem mais exactamente á razaõ que ha entre o diametro e a circunferencia, uzaremos destes de Archimedes por serem mais simples.

§ V.

Modo de formar Triangulos, ou Poligonos iguaes aos que nos forem dados.

Est. 3. fig. 1. N.° 104. DAdo o triangulo *ABC* (*Est.* 3. *Fig.* 1.) se nos pedirem outro triangulo igual, e semelhante o podemos fazer por varios modos: o mais commum saõ tres.

N.°

Nº 105. I.º Medindo os trez lados.

II.º Medindo dois lados, e o angulo incluzo.

III.º Medindo hum lado, e os dois angulos adjacentes.

PRIMEIRO MODO.

Medindo os trez lados.

N.º 106. POrei huma baze *a b* igual a *A B* (*Fig.* Est. 3. 1.); depois tomarei no compasso a fig. 1. distancia *A C*, e descreverei com elle hum arco desde o ponto *a* como de centro; e ultimamente tomando no compasso a outra linha *B C*, descreverei outro arco desde o ponto *b*, os quaes se cruzaõ em *C*; e desse ponto tirarei duas linhas para *a*, e para *b*; e temos o triangulo *a b c*; o qual nós vamos examinar se he igual ao que nos deraõ *A B C*, ou naõ.

N.º 107. Como *A B* he igual a *a b*, podemos pôr hum triangulo sobre o outro, e ajustar as duas ba-ses. Isto feito, o ponto *C* necessariamente hade cahir no arco *i o*, que se descreveo com o raio *A C*, ou *ac*; e sendo esse ponto *C* tambem extremidade da linha *B C*, hade cahir no arco *r s*, que se descreveo com o raio *B C*, ou *b c*: Logo o ponto *C* necessariamente hade cahir no ponto *c*, em que os dois arcos se cruzaõ.

Ora se ajustando as duas linhas *AB*, e *ab*, o ponto *C* coincide com *c*; a linha tirada de *A* até *B* coincidirá com *ab*, e *B C* com *b c*, e ficando os dois triangulos justos se mostra que saõ iguaes.

SEGUNDO MODO.

Medindo dois lados, e o Angulo incluzo.

Est. 3. fig. 2. N.° 108. DEpois de medir *M N* no triangulo *A* (*Fig.* 2.) farei outra linha igual *m n*; descreverei do ponto *M* hum arco arbitrario *a o*, e com a mesma abertura do compasso descreverei outro

tro arco indefinido *r s*; depois disso tomarei no compasso o intervalo *a o*, e fazendo centro em *r*, cortarei o arco indefinido *r s*; e pelo ponto *s*, em que os dois arcos se cruzaõ, tirarei huma linha indefinida desde *m*. Ultimamente tomarei no compasso o lado *M E*, e cortarei outra igual porçaõ na linha indefinida *m e*: isto feito tirarei a linha *e n*, e ficará o triangulo *B* igual a *A*.

Porquanto sobrepondo o triangulo *B* em *A*, e ajustando *MN*, com *mn*, o lado *me* tambem cahirá sobre o seu correspondente *ME*, pela igualdade dos angulos, que elles formaõ com *MN*, *mn*; e como *m e* he igual a *ME*; naõ pode o ponto *e* deixar de coincidir com *E*; e assim a linha *e n* coincidirá com *E N*, pois ambas saõ rectas, e se terminaõ de ambas as partes em pontos que coincidem.

TERCEIRO MODO.

Medindo hum lado com os dois angulos adjacentes.

ANtes que passemos adiante, convém explicar este termo *adjacentes*. Chamo *angulos adjacentes á linha M A* (*Fig.* 3) os que se formaõ sobre ella, com os lados que sobem das suas extremidades; como saõ os angulos *o*, *e* no triangulo *D*. N.° 109. Se eu medir *M A* (*Fig.* 3.), e fizer outra linha igual *m a*; e depois disso medir os angulos *o*, *e*, e fizer outros iguaes em *m* e em *a*, pelo methodo assima dito (n.° 108.); e tirar duas linhas indefinidas, terei hum ponto *n*, no qual ellas se cruzaõ, o qual será o vertice do novo triangulo *E* igual a *D*.

Est. 3. fig. 3.

Porquanto sobrepondo o triangulo *E* em *D*, as bazes se ajustaráõ, e tambem os lados, supposta a igualdade dos angulos: Logo o ponto *N* commum aos dois lados do triangulo antigo *D*, cahirá sobre

bre *n*, ponto commum aos dois lados do triangulo novo *E* ; e ficaráõ os dois triangulos ajustados.

Logo.

N.º 110. *Para fazer huma figura rectilinea igual a outra dada, qualquer que seja (Fig. 4.) bastará dividir em triangulos a que nos foi dada, e fazer outros triangulos iguaes, e semelhantes na nova; e dispolos da mesma fórma.* Est. 3. fig. 4.

Consequencias.

I.

N.º 111. LOgo *todo o triangulo que tem os trez lados iguaes aos trez de outro triangulo, lhe fica igual* (n.º 107.)

II.

N.º 112. Logo *todo o triangulo que tem dois lados iguaes a dois lados de outro, e o angulo incluzo,*

tam-

tambem igual, ſerá em tudo igual ao outro triangulo (n.° 108.)

III.

N.° 113. Logo *todo o triangulo que tiver hum lado igual a hum lado de outro, e os dois angulos adjacentes iguaes aos dois adjacentes no outro, ſerá em todo igual.* (n.° 109.)

⁂

Ponhamos agora duas paralle-
Eſt. 3. las, e cortemo-las por outras duas
fig. 5. (*Fig.* 5.). Além diſſo tiremos huma linha diagonal, iſto he de hum canto *R* ao outro oppoſto *S*: temos dois triangulos *P*, *Q*, com hum lado commum, que he a diagonal: além diſſo os dois angulos *A*, *O*, que lhe ſaõ adjacentes á diagonal em *P*, ſaõ iguaes aos ſeos alternos *a*, *o* adjacentes á diagonal no triangulo *Q*: por conſeguinte os dois triangulos ſaõ perfeitamente iguaes, e os ſeos lados correſpondentes tambem o ſaõ.

Logo.

N.º 114. *As parallelas cortadas por parallelas ſaõ iguaes* : e aſſim *MR* he igual a *SN*; e *MS* he igual a *RN*.

Advertencia.

DEpois de tratarmos das linhas e dos angulos, para podermos explicar a relaçaõ que varias linhas tem entre ſi, convem tratar das *Razoens* e *Porporçoens* em geral.

Para vos facilitar, Amigo Eugenio, a expreſſaõ e abreviala, farei como todos os modernos, que uzaõ dos ſinaes de Algebra; pois moſtra a experiencia, que tudo o que faz mais curta a expreſſaõ de huma verdade, e a poem n'uma viſta de olhos defronte da imaginaçaõ, facilita incrivelmente a inteligencia della: os ſinaes de Algebra precizos por ora ſaõ os ſeguintes.

O ſinal + ſignifica acreſcentar huma quantidade á outra: v. g. $2+3$ quer dizer 2 mais 3, que val 5.

O ſinal — ſignifica diminuir a ſegunda quantidade da primeira: aſſim 8 — 2 quer dizer 8 menos 2, que he igual a 6.

O ſinal = ſignifica igualdade de duas quantidades: v. g. 4 = 3 + 1 quer dizer 4 igual a 3 e mais 1.

Eſta expreſſaõ 2. 3 : 5. 6 ſignifica que a differença de 2 a 3 he igual á differença de 5 a 6.

Eſta expreſſaõ 4 : 2 : : 6 : 3 ſignifica que 4 contém 2 tantas vezes, como 6 contém 3.

Eſta expreſſaõ 2×5 ſignifica que 2 eſtá multiplicado por 5.

Emfim eſta $\frac{8}{2}$ ſignifica 8 repartidos por 2.

Quando nós nos ſervimos de letras do Alfabeto para ſignificar as quantidades ſobre que queremos calcular, de varios modos ſignificamos a multiplicaçaõ: v. g ſe multiplicamos *a* por ſi meſmo, podemos dizer $a \times a$, ou $a\,a$; ou a^2.

Fim da ſegunda Carta.

CAR-

CARTA III.

Das Razoens e Propor-çoens.

§ I.

Da Razaõ em geral.

AMigo Eugenio, neſta Carta que vos eſcrevo, vou dar-vos a inſtrucçaõ mais importante, e que he huma chave precioza, para entrar em mil gabinetes de verdades lindiſſimas; mas ella he hum tanto enfadonha ao principio: ſe vos deſgoſtares ponde-a de parte, e ide lendo as Cartas ſeguintes, e depois voltareis a acabar de ler eſta pouco a pouco; porque he precíziſſima, e importantiſſima. Comecemos pois, que talvez vós com o goſto a naõ acheis emfadonha; e haveis de ſaltar de contente, quando vires as ſuas utilidades nas Cartas ſeguintes.

Quando comparamos entre ſi duas

duas quantidades do meſmo genero, v. g. 6 com 4, ou com 3, para ſaber a ſua reſpectiva grandeza, dizemos que eſtaõ neſta ou naquella *Razaõ*.

Neſta comparaçaõ a quantidade que ſe poem em primeiro lugar chama-ſe *Antecedente*, a ſegunda *Conſequente*; e ambas ſe chamaõ *Termos* da comparaçaõ ou da *Razaõ*.

De dois modos ſe podem comparar as quantidades: ou obſervando o exceſſo de huma a reſpeito da outra, e eſta differença ou exceſſo ſe chama *Razaõ Arithmetica*; e aſſim entre 8 e 5 a razaõ arithmetica he 3.

Ou tambem podemos reparar no numero de vezes que huma quantidade contém a outra; e eſte numero ſe chama *Razaõ Geometrica*; e por iſſo entre 12 e 4 a razaõ he 3, porque 12 contém 3 vezes o ſeu conſequente 4.

Quando o Antecedente, ou o primeiro termo he maior que o Conſequente, contem-o mais de huma vez; como ſe digo 6 : 3, cuja razaõ

he

he 2; ou 6:4, cuja razaõ he hum e meio, que ſe exprime aſſim $1\frac{1}{2}$; ou ſe digo 11:3, cuja razaõ he tres, e dois terços, que ſe eſcrevem aſſim $3\frac{2}{3}$; porque o antecedente 11 contém 3 vezes a tres, que faz 9; e demais contém duas unidades que ſaõ dois terços de 3, que he o conſequente.

Quando porém o antecedente he igual ao conſequente o contém huma vez ſómente; como quando digo 6:6 cuja razaõ he 1.

Porém quando o antecedente he menor que o conſequente, como quando digo 3:6, a razaõ he menos de 1; e he hum quebrado ou fracçaõ, iſto he parte de hum; e neſte exemplo de 3:6, a razaõ he metade de hum; que ſe eſcreve aſſim $\frac{1}{2}$, e neſte de 2:8, a razaõ he $\frac{1}{4}$; porque o contém a quarta parte de huma vez.

§ II.

§. II.

Da Proporçaõ em commum.

QUando nós havendo comparado duas quantidades *homogeneas*, isto he do mesmo genero, achamos a Razaõ que ha entre ellas; e depois comparando entre si outras duas quantidades, achamos entre ellas outra razaõ: se he igual dizemos que estes quatro termos estaõ em proporçaõ; e assim geralmente dizemos que.

N.° 115. *Proporçaõ he igualdade de razoens do mesmo genero.* V.g. se entre 6 e 3 ha razaõ dupla, e entre 8 e 4 tambem razaõ dupla, dizemos, que estes quatro termos estaõ em proporçaõ; e se escreve assim 6:3::8:4, que quer dizer a razaõ de 6 para 3, he igual á razaõ de 8 para 4.

Ora como toda a razaõ pede dois termos, a Proporçaõ que involve duas razoens, pede 4; isto he dois *Antecedentes*, e dois *Consequentes*.

Po-

Porém ás vezes ſuccede que o meſmo termo, pode occupar dois lugares, e ſer conſequente do que fica atraz, e antecedente do que ſe ſegue para diante ou depois; V. g. ſe diſſer 12 he para 6, como 6 he para 3; e ſe eſcreve ∴ 12 : 6 : 3. Iſto ſe chama *Proporçaõ Continua*: e quando ha quatro termos diſtinctos ſe chama *Proporçaõ Diſcreta*: como eſta 12 he para 6, como 8 he para 4; e ſe eſcreve aſſim 12 : 6 : : 8 : 4.

Ora como ha duas eſpecies de *Razaõ*, tambem deve haver duas eſpecies de *Proporçaõ*, como diremos depois.

§ III.

Da Razaõ Arithmetica.

Noçaõ.

JÁ diſſemos que o exceſſo ou a differença que ha entre duas quantidades do meſmo genero, ſe chamava *Razaõ Arithmetica*.

N.º 116. O modo de conhecer eſta differença he tirar ou diminuir hu-

ma quantidade da outra, e o resto he a *Razaõ Arithmetica* que buscavamos. V. g. entre 6 e 4 a razaõ he 2, porque de 6 tirando 4 ficaõ 2, o que se escreve assim: $6 - 4 = 2$. Costuma-se exprimir esta razaõ Arithmetica pondo hum ponto entre as
Est. 3. duas quantidades, deste modo 6. 4.
fig. 6. Outro exemplo (*Est.* 3. *Fig.* 6.) as linhas *B* e *A* saõ deziguaes, o excesso de huma sobre outra vale 2 palmos v. g.; e podemos dizer $B - A = 2$; e este excesso 2 he a razaõ Arithmetica entre *B* e *A*.

Propriedades.

DEsta simples noçaõ se deduzem varias propriedades da Razaõ Arithmetica, que eu vou explicar a meu modo, tende paciencia Eugenio.

Como a Razaõ Arithmetica he a differença entre duas quantidades, se esta differença dezaparece ou accrescentando-a a menor, ou tirando-a da maior, ficaráõ as quantidades iguaes.

V. g.

V. g. Entre 5 e 3 a differença he 2, logo ſe accreſcentarmos 2 a 3 fica igual a 5; e ſe tirarmos 2 de 5, fica igual a 3.

Logo.

Propriedade I.ª

N.º 117. *A Razaõ arithmetica tirada da quantidade maior, a deixa igual á menor; e acreſcentada á menor a deixa igual á maior.*

V. g. A razaõ de 5 para 2 he 3: Logo $5 - 3 = 2$; e $3 + 2 = 5$: do meſmo modo *Fig.* 6. $A + 2 = B$, e $B - 2 = A$.

⁂

Vamos adiante: Se, poſta huma Razaõ entre dois termos, nós accreſcentarmos ou diminuirmos igualmente a ambos a meſma quantidade, elles ficaráõ com a differença e dezigualdade que tinhaõ; porque nem no que ſe tirou, nem no que ſe accreſcentou houve alguma differença.

V. g. em 8 e 6 a differença he 2; ora ſupponhamos que accreſcentamos

mos a ambos o valor de 3, ficaõ 11, e 9, differença 2: ſuponhamos pelo contrario que tiramos de ambos elles 3, ficaõ 5 e 3, differença dois. O meſmo he em linhas
Eſt. 3. fig. 7. (*Fig.* 7.). Entre *A*, e *B* a razaõ arithmetica he 2, logo ſe de ambas as linhas tirarmos *n*, ficará a differença 2; e ſe a ambas accreſcentarmos *m*, a differença ſerá ſempre 2.

Logo.

Propriedade. II.ª

N.º 118. *Se a ambas as quantidades accreſcentarmos, ou ſe tirarmos dellas porçaõ igual; conſervaráõ a meſma razaõ arithmetica.*

⁂

Suppoſto o que diſſemos, que na differença ou exceſſo de huma quantidade ſobre outra he que eſtava a *Razaõ Arithmetica*, digo agora, que eſta differença procede de que huma quantidade tem, e outra naõ tem; e aſſim accreſcentar a hum, ou tirar do outro faz o meſmo effeito para a differença entre ambos.

V. g.

V. g. Entre 6 e 9 a differença he 3, mas se eu accrescentar 2 a hum termo, fará o mesmo effeito que se o tirasse do outro: se tirar 2 de 6 ficaõ 4, e para 9 faltaõ 5; mas tambem se eu accrescentasse os 2 aos 9, ficavaõ 11, e a differença de 6 he 5.

Logo.

Propriedade III.ª

N.º 119. *Para a Razaõ Arithmetica tanto importa accrescentar huma quantidade a hum termo, como tirala do outro.*

§ IV.

Proporçaõ Arithmetica.

Noçaõ.

JÁ dissemos que a igualdade de razoens do mesmo genero, faziaõ Proporçaõ desse genero.

Logo.

N.° 120. *Proporçaõ Arithmetica he igualdade de duas razoens arithmeticas*: como v. g. entre eſtes quatro termos: 3 e 5; e da outra parte 4 com 6; porque em ambas as comparaçoens a differença ou a razaõ he 2.

Exprime-ſe eſta Proporçaõ aſſim
Eſt. 3. 3. 5 : 4. 6; ou pondo o exemplo em
fig. 8. linhas comparando *A* com *B* (*Fig.* 8.) e *C* com *D*; o que ſe eſcreve aſſim *A*. *B* : *C*. *D*.

N.° 121. Quando tres termos ſe diſpoem de modo que o primeiro excede o ſegundo tanto, quanto o ſegundo excede o terceiro, ſe chama *Proporçaõ Arithmetica Continua*, como já diſſemos, e ſe exprime aſſim 9. 7 : 7. 5; ou aſſim ÷ 9. 7. 5.

Propriedades.

Desta noçaõ se tiraõ varias propriedades.

I.

A Somma dos extremos he igual á somma dos medios.

V.g. se $3 . 5 : 4 . 6$ podemos dizer $3 + 6 = 5 + 4$; ou tambem $A . B : C . D$ podemos dizer $A + D = B + C$. (*Fig.* 8.)

Porque feita a somma dos medios $5 + 4$ temos 9; ora se em lugar do 5, que he termo medio, puzermos 3 que he o seu extremo, e he menor no valor de 2, ficará essa somma com 2 de menos, e reduzida a 7; mas se tambem trocarmos o outro medio 4, e puzermos o seu extremo 6, que tem 2 de mais, ficará agora essa somma tambem com 2 de mais; e de 7 passará a 9; compensando-se huma differença em mais com outra em menos; e assim $5 + 4 = 9$; e tambem $3 + 6 = 9$.

Lo-

Logo.

N.º 122. *Logo em toda a proporçaõ arithmetica, a somma dos extremos he igual á dos medios.*

II.

N.º 123. *Quando quatro termos estaõ dispostos de modo, que a somma dos extremos se ache igual á dos medios, he final que estaõ em proporçaõ arithmetica.*

V. g. se $9 + 2 = 6 + 5$, podemos dizer 9. 6 : 5. 2.

Porquanto a igualdade das sommas he final que tanto excede o primeiro extremo o seu medio, como o ultimo extremo he excedido pelo seu : aliás naõ se podia compensar o excesso de hum com a falta de outro.

III.

Na Proporçaõ continua (v. g. 9. 7 5,) hum termo occupa o lugar de dois, podendo dizer 9. 7 : 7. 5, e entaõ $9 + 5 = 7 + 7$ Lo-

Logo ſe o termo medio repetido he igual á ſomma dos extremos; naõ repetido ſerá metade deſſa ſomma.

Logo.

N.º 124. *Na Proporçaõ Continua Arithmetica, a ſomma dos extremos he dupla do termo medio.*

IV.

N.º 125. *Quando tres termos eſtaõ diſpoſtos de modo que a ſomma dos extremos he dupla do termo medio; eſtaõ em proporçaõ continua*: v. g. ſe 12 + 4 he duplo de 8, poſſo dizer ÷ 12. 8. 4.

Porque neſſe cazo repetindo o termo medio ficará igual á ſomma dos extremos, o que (conforme acabamos de dizer) he ſinal de eſtarem os termos em proporçaõ arithmetica.

V.

N.º 126. *Dados tres termos de huma proporçaõ arithmetica, he facil achar o quarto.*

Por-

Porque feita a somma do segundo e terceiro, tirando della o primeiro termo, o resto será o quarto; porque este resto, junto com o primeiro deve ser igual á somma dos medios; e pelo n.º 223. ficaõ em proporçaõ.

Do mesmo modo, dados quaesquer tres termos de huma proporçaõ, se pode achar o que faltar.

V. g. se faltar o segundo, feita a somma dos extremos, e tirando o terceiro temos o segundo &c.

§ V.

Da Razaõ Geometrica.

JÁ dissemos que o numero de vezes que huma quantidade comprehende a outra se chamava *Razaõ Geometrica.* V. g. entre 6 e 2, a razaõ geometrica he 3; ou tam-
Est. 3. fig. 9. bem (*Fig.* 9.) entre *B* e *A* a razaõ geometrica he 3, porque *B* contém *A* trez vezes.

Convém advertir que quando se diz absolutamente *Razaõ*, se entende a Geometrica.

N.º

N.º 127. Conhece-ſe a razaõ que ha entre duas quantidades, dividinhado o Antecedente pelo Conſequente, v. g. 6 por 2; e o quociente 3, que ſahe na diviſaõ, ſignifica a *Razaõ* que ha entre os dois termos: eſte numero que ſahe no quociente deſta diviſaõ ſe chama tambem *Expoente.*

Exprime-ſe eſta razaõ de varios modos; ou pondo dois pontos entre as duas quantidades; dizendo 6 : 2; ou pondo-os com o ſinal da divizaõ dizendo $\frac{6}{2}$.

N.º 128. Sempre o Antecedente ſe hade repartir pelo Conſequente; ſe o contém duas vezes a razaõ he *dupla*, ſe tres vezes, a razaõ he *tripla*, ſe quatro *quadrupla.* &c. E aſ- Eſt. 3.
ſim $\frac{6}{2} = 3$; ou (*Fig.* 9.) $\frac{B}{A} = 3$; fig. 9.
porque o antecedente repartido pelo conſequente 2 dá a cada hum 3, e fica igual a tres; pois o contém 3 vezes.

E ſe pelo contrario o antecedente for menor que o conſequente; v. g. ſe diſſermos 3 : 6, ou 3 : 9; ou 3 : 12, 3 : 12, desorte que o consequente contenha o antecedente duas vezes, ou tres, ou quatro, a razaõ he *Subdupla*, *Subtripla*, *Subquadrupla*; e se podem exprimir assim $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{3}{12}$: e quer dizer que a razaõ he 3 sextas partes, ou 3 nonas partes, ou 3 duodecimas partes; desorte que sempre hade ser hum quebrado ou fracçaõ.

Já se suppoem o que se ensina na Arithmetica, que os quebrados se exprimem com dois numeros, hum sobre a risca, que se chama *Numerador*, outro debaixo, que se chama *Denominador*; e assim v. g. para dizer tres quartos escrevemos assim $\frac{3}{4}$; o de sima diz quantos quebrados saõ, o debaixo diz, que casta de quebrados sejaõ; isto he, se saõ terços, ou quartos, ou quintos &c.

N.° 129. Dissemos assima (n.° 127.) que se exprimia a razaõ geometrica entre dois numeros, pondo-os com o sinal da divisaõ; v. g. 6 e 3 pondo-do-os assim $\frac{6}{3}$. Daqui se segue que em todos os cazos o antecedente se pode tomar como hum Numerador, e o consequente como hum Denominador; desorte que na expressaõ $\frac{6}{3}$ ou de 6 comparados com 3 podemos dizer seis terços; e a razaõ de 12 para 7, he de 12 setimos, $\frac{12}{7}$ &c. Isto facilita muito para conhecer a razaõ entre quaesquer numeros.

N.° 130. Quando a razaõ entre as quantidades se pode exprimir por numeros, ou inteiros ou quebrados, a razaõ se chama *Racional*; quando porém se naõ pode exprimir por numeros nenhuns; como v. g. saõ o lado do quadrado, e a sua diagonal; ou o n.° 1, e a raiz quadrada do n.° 2, entaõ esta razaõ se chama *Surda* ou *Irracional.*

As quantidades que tem entre si razaõ de numero a numero saõ *Commensuraveis*, as que tem razaõ *Surda* saõ *Incommensuraveis*, por

naõ

naõ haver medida commum, que as poſſa medir.

Tambem he precizo explicar outros dois termos, que ſaõ partes *Aliquotas*, e *Aliquantas*; as *Aliquotas* ſaõ aquellas que multiplicadas certo numero de vezes exhaurem o todo ao juſto; como he o palmo a reſpeito da vara: as *aliquantas* ſaõ as que nunca ajuſtaõ com o todo, como he o covado com huma vara.

§ VI.

Propriedades da Razaõ Geometrica.

TEmos dito que a Razaõ Geometrica ſe conhecia dividindo huma quantidade por outra; e que o quociente exprimia a *Razaõ* v. g. $\frac{6}{3} = 2$.

Desta noçaõ se tiraõ varias Propriedades.

I.

N.° 131. O *Consequente multiplicado pela razaõ fica igual ao Antecedente* : V. g. se disser $\frac{6}{3} = 2$, direi logo $2 \times 3 = 6$; porque a multiplicaçaõ torna a fazer o que desfez a divizaõ; e poem a quantidade nos termos em que estava antes de dividida. Outro exemplo para quando o Antecedente for menor que o Consequente: se dissermos $3 : 6$ ou $\frac{3}{6}$, a razaõ he $\frac{1}{2}$: ora o Consequente 6 multiplicado pela razaõ $\frac{1}{2}$ he igual ao Antecedente 3.

II.

Os dois termos de huma razaõ multiplicados por huma quantidade, conservaõ a mesma razaõ que tinhaõ. V. g. se 12, e 6 estaõ na razaõ dupla;

pla ; se os multiplicarmos v. g. por 3, ficaraõ sempre nessa razaõ dupla ; assim $12 \times 3 = 36$, e $6 \times 3 = 18$, que tambem estaõ na mesma razaõ dupla.

Est. 3. fig. 11. Outro exemplo (*Fig.* 11.) se *D*, e *B* estaõ na razaõ dupla ; multiplicando ambos por 3 ficaõ na mesma razaõ ; e assim *N*, e *M* estaõ na razaõ dupla.

Porquanto se hum antecedente (v. g. *D*) contém duas vezes o seu consequente (*B*) ; juntando outro antecedente igual a *D*, esse novo antecedente comprehenderá tambem outras duas vezes o seu consequente, igual a *B*. E do mesmo modo seráõ todos os mais antecedentes iguaes que lhes formos ajuntando, a respeito dos seos consequentes, que iremos tambem unindo ; cada antecedente *D* levará em si o valor de dois consequentes iguaes a *B*. Logo tomando o antecedente primitivo *D* 3 vezes, e tomando outras tantas vezes o seu consequente primitivo *B* ; o valor de todos os antecedentes juntos *N*, será duplo do valor dos conſequentes juntos *M*: Ora tomar os termos 3, ou 4 vezes &c. he o meſmo que multiplica-los por 3, ou por 4 &c.

Logo.

N.º 132. *O multiplicar dois termos por huma quantidade os deixa na meſma razaõ que elles tinhaõ.*

III.

Dividir dois termos pela meſma quantidade os deixa na meſma razaõ que elles tinhaõ.

V.g. ſe 12 e 6 eſtaõ na razaõ dupla, ſegue-ſe que $\frac{12}{3}$, e $\frac{6}{3}$ eſtaõ neſſa meſma razaõ. Ponhamos outro exemplo (*Fig.* 10.) Os dois eſpaços reprezentados por *Q*, e *P* eſtaõ na razaõ dupla. *Q* conſta de 6 eſpaços como *A*, e *P* conſta ſómente de 3: dividamos agora *P*, e mais *Q* por 3, bem ſe vê que em *P* temos hum *A*, e em *Q* dois; e apparece nelles outra vez a razaõ dupla. Eſt. 3. fig. 10.

A

A razaõ disto he, porque estando dividido o valor do antecedente *Q* em 3 partes iguaes, e tambem o do consequente *P*; se hum terço do antecedente naõ contém duas vezes o terço do consequente, nenhuma das outras partes iguaes á primeira as hade conter duas vezes: Logo todas as partes do antecedente juntas, ou o antecedente inteiro *Q*, naõ poderá conter duas vezes as partes juntas do consequente, ou o consequente inteiro *P*, como se suppunha.

Logo.

N.º 133. *Se dois termos se dividirem por huma quantidade, devem conservar a mesma razaõ que tinhaõ.*

Advirta-se, que quando duas quantidades se dividem igualmente por outra, as partes se chamaõ *Proporcionaes.*

Logo.

N.º 134. *A mesma razaõ que se achar entre dois termos, se hade*

achar

achar entre as ſuas partes proporcionaes; iſto he entre as ſuas metades, ou entre os ſeus terços, ou entre os ſeus quartos &c.

IV.

Eſtabelecemos aſſima que duas quantidades multiplicadas por huma ficavaõ na meſma razaõ que ellas tinhaõ (n.° 132.) : ora multiplicar duas quantidades por huma, ou huma por duas he o meſmo.

Logo.

N.° 135. *Quando huma quantidade ſe multiplica por duas, fica na meſma razaõ que ellas tinhaõ.* V.g. *A* (*Fig.* 10.) multiplicado ora por 6, ora por 3, que eſtaõ na razaõ dupla, fará os dois eſpaços *Q*, e *P*, que tambem eſtaõ neſſa razaõ dupla. Eſt. 3. fig. 10.

V.

Diſſemos tambem aſſima, que duas quantidades divididas por huma ficavaõ na mesma razaõ que antes tinhaõ.

Logo.

N.º 136. *Huma quantidade repartida por duas, fica na razaõ dellas, mas inversa.*

Isto he, se o divizor he duplo ou triplo &c. o quociente he *subduplo*, *subtriplo* &c. V. g. $\frac{24}{6} = 4$; $\frac{24}{3} = 8$: ora 4 : 8 tém razaõ subdupla; e os divizores 6 : 3 estavaõ na razaõ dupla. Ponhamos outro exemplo (*Fig.* 10.). O espaço *Q* dividido em 6 partes, fica com o valor de hum *A*, dividido em 3 partes fica com o valor duplo de *A*; logo quando o divizor he subduplo, o quociente he duplo.

A razaõ disto he, porque hum mesmo valor do dividendo *Q* repartido por mais partes, dá menos valor a cada huma dellas: Logo na mesma razaõ que se augmentar o numero das partes, ou o divizor, se hade diminuir o valor de cada huma dellas, ou o quociente.

VI.

VI.

Já ficou eſtabelecido, que as partes proporcionaes de duas quantidades eſtavaõ na meſma razaõ que ellas tinhaõ. (n.º 134.)

Logo.

N.º 137. *Se accreſcentarmos a dois termos alguma parte proporcional, ou ſe lha tirarmos, ficaráõ na meſma razaõ que antes tinhaõ.*

V. g. 12 : 6 tem a razaõ dupla; juntemos a 12 o ſeu terço, e tambem a 6 o ſeu, temos $12 + 4 = 16$; e no Conſequente temos $6 + 2 = 8$: ora 16 : 8 tambem eſtaõ na razaõ dupla. Do meſmo modo, ſe de ambos os termos tirarmos huma parte proporcional v. g. $\frac{1}{3}$, ficaráõ na meſma razaõ dupla: aſſim $12 - 4 = 8$; e $6 - 2 = 4$, que eſtaõ na razaõ dupla.

A razaõ he eſta: Para que hum Antecedente contenha duas vezes v. g. o ſeu Conſequente, he precizo que cada parte proporcional do Antecedente contenha duas vezes a que lhe corresponde no Consequente; (n.º 133.): Logo se accrescentarmos a ambos a terça parte v. g., essa nova parte do Consequente se achará involvida duas vezes na que se accrescentou ao Antecedente; e assim ficaraõ estes dois termos como estavaõ, isto he na razaõ dupla.

Do mesmo modo na divizaõ: se lhe tirarmos a ambos hum terço, ou outra qualquer parte proporcional, as que restarem num e noutro se comprehenderaõ duas vezes; como o Antecedente, e Consequente inteiros faziaõ. Por isso dizemos que accrescentar ou tirar de dois termos huma parte proporcional os deixa na mesma razaõ que tinhaõ.

VII.

N.º 138. *Na Razaõ Geometrica, tanta mudança faz o multiplicar hum termo por huma quantidade, como repartir por ella o outro termo.* V.g. ponhamos 24 e 6, a razaõ

he

he quadrupla, digo agora: ſe eu conſervar o Conſequente, e dividir o Antecedente por 3, dizendo $\frac{24}{3} : 6$; o quociente $1\frac{1}{3}$ porque $\frac{24}{3} = 8$; e $8 : 6 = 1\frac{1}{3}$. Ora iſto meſmo ſuccederá ſe eu conſervar o Antecedente 24, e multiplicar ſó o Conſequente por 3, dizendo aſſim. $24 : 6 \times 3$; pois $6 \times 3 = 18$; e $24 : 18$, o quociente he $1\frac{1}{3}$.

A razaõ he, porque o Antecedente comprehender em ſi o Conſequente mais ou menos vezes depende tanto da grandeza do Antecedente, como da pequenhez do Conſequente; logo o meſmo ſerá diminuir o Antecedente repartindo-o por hum termo, v. g. 3, como augmentar o Conſequente multiplicando-o por elle; e pelo contrario o meſmo ſerá augmentar o valor do antecedente multiplicando-o por 2 v. g. do que diminuir o do Conſequente dividindo-o por 2.

§. VII.

§ VII.

Da Proporçaõ Geometrica.

Noçaõ.

N.º 139. P*Roporçaõ Geometrica, he a igualdade de duas razoens Geometricas.*

V. g. entre 6 e 3 a razaõ he 2. Entre 8 e 4 a razaõ he 2, dizemos entaõ, que estes quatro termos estaõ em proporçaõ: o que se exprime assim 6 : 3 : : 8 : 4, ou tambem assim $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$.

N.º 140. Quando a Proporçaõ Geometrica consta de 3 termos, mas deforma que o primeiro seja para o segundo, como o segundo he para o terceiro, se chama continua, como já dissemos; e se exprime assim 12 : 6 : : 6 : 3, ou tambem assim ÷ 12 : 6 : 3.

Des-

Desta noçaõ se seguem varias

Propriedades.

I.

POsta qualquer Proporçaõ Geometrica, v.g. esta.

$6 : 3 :: 8 : 4$

Convém examinar se o producto dos Extremos he igual ao dos Medios: V.g se $6 \times 4 = 3 \times 8$.

Façamos primeiramente o producto dos medios $3 \times 8 = 24$: se em lugar do medio 3 puzermos o seu extremo 6 que he duplo, o producto, sóbe a ser duplo; e em lugar de 24 dará 48 (n.º 135.): para remediar isso, trocamos tambem o outro medio (8) pelo seu extremo (4), que he subduplo; e nesse cazo o producto desce de 48 a 24 (n.º 135). Ora se de 48 desce a 24, emenda-se numa troca a dezigualdade que fez a outra; por serem as razoens iguaes.

Lo-

Logo.

N.º 141. *Em toda a Proporçaõ Geometrica o producto dos Extremos he igual ao producto dos Medios.*

II.

Quando quatro termos estaõ de tal modo dispostos, que o producto dos extremos he igual ao dos medios, estaõ em proporçaõ geometrica.

V. g. se $6 \times 4 = 3 \times 8$, seguese que $6 : 3 :: 8 : 4$.

Porque feito o producto dos Medios 3 por $8 = 24$, se eu trocar o Medio 3 pelo seu Extremo duplo 6, sóbe o valor a ser duplo do que era; e de 24 passa a 48; ora se o outro Extremo 4 compensar com a sua diminuiçaõ a respeito de 8 Medio, o augmento que se achava em 6 a respeito de 3, (o que he precizo para a igualdade dos productos) he prova que tantas vezes contém 6 ao seu Medio 3, como 4 he contido no seu Medio 8.

Lo-

Logo.

N.° 142. *Se o producto dos Medios he igual ao dos Extremos, estaõ os quatro termos em proporçaõ.*

Advirto que fazer o quadrado de hum numero, he multiplica-lo por si mesmo. V. g. $3 \times 3 = 9$ he o quadrado de 3; ou tambem $5 \times 5 = 25$ he o quadrado do numero 5; e assim o quadrado de 6 he 36, o quadrado de 7 he 49. &c. Isto posto.

III.

A Proporçaõ continua ∸ 12 : 6 : 3 se pode escrever repetindo o termo Medio: 12 : 6 : : 6 : 3. Ora nesse cazo o producto dos Medios (que he o quadrado delle) he igual ao producto dos Extremos: (n.° 141.)

Logo.

N.° 143. *Na Proporçaõ continua o producto dos Extremos he igual ao quadrado do Medio.*

IV.

IV.

Quando tres termos saõ taes, que o producto de dois he igual ao quadrado de outro, podem se dispor em proporçaõ continua. V. g. de $12 \times 3 = 6 \times 6$ podemos dizer $12 : 6 : 3$.

A razaõ he, porque nesse cazo, pondo como extremos os factores do producto; e repetindo o termo que se hade multiplicar por si mesmo, para encher os lugares dos medios, ficaõ os termos no cazo do numero precedente, e em proporçaõ: ora supprimindo entaõ huma vez o termo medio, fica proporçaõ continua.

Logo.

N.° 144. *Toda a vez que o producto de dois termos he igual ao quadrado de outro, podem-se dispor em proporçaõ continua.*

V.

V.

Toda a quantidade multiplicada por 1 fica no meſmo valor que tinha : Logo ſe numa proporçaõ a Unidade for hum Extremo , o outro extremo ſó , ſerá igual ao producto dos medios. V. g. ſe diſſermos 1 : 3 : : 5 : 15 , ou ás aveſſas 15 : 3 : : 5 : 1 , o producto dos Medios ſerá igual a hum Extremo ſó.

Logo.

N.º 145. *Em toda a multiplicaçaõ, podemos ter huma proporçaõ, pondo os dois Factores por Medios, e o Producto por hum Extremo, e a Unidade por outro Extremo.*

VI.

Nós podemos conſiderar qualquer *Dividendo* como hum producto feito do *Diviſor*, e do *Quociente* como Factores.

Lo-

Logo.

N.° 146. *Toda a Divisaõ nos dá huma proporçaõ, se puzermos o Divisor e Quociente como Medios, e o Dividendo e a Unidade por Extremos.*

V. g. se $\frac{15}{3}=5$, podemos dizer 15 : 3 :: 5 : 1 ou tambem 1 : 3 :: 5 : 15.

Porque pela razaõ do numero precedente o producto dos extremos he o Dividendo. O Quociente e o Divisor saõ Factores.

VII.

O que chamaõ *Regra de Tres* he, dados tres termos de huma Proporçaõ, achar o quarto. Ora se o producto dos Medios he igual ao dos Extremos, repartindo pelo primeiro termo o producto dos Medios; hade dar no quociente o quarto termo da proporçaõ.

Lo-

Logo.

N.° 147. *Tendo nós tres termos de huma proporçaõ podemos achar o quarto.*

N.° 148. *Pelo meſmo modo podemos achar qualquer dos outros termos.*

V. g. para achar o terceiro, faremos o producto dos extremos, e o dividiremos pelo ſegundo, e dará o terceiro no quociente &c.

§. VIII.

Das Mudanças que ſe podem fazer nos termos, conſervando a proporçaõ.

I.

Mudanças ſómente de lugar.

DO que diſſemos aſſima (n.° 142.) ſe infere que

N.° 149. *Toda a mudança feita numa proporçaõ, que conſervar a igualdade entre o producto dos meios, e dos extremos, conſervará a proporçaõ.*

Lo-

Logo posta qualquer proporçaõ podemos fazer as mudanças seguintes.

I. *Trocar os Medios entre si*, pois isso naõ muda o valor do Producto delles.

II. *Trocar só os Extremos entre si*; pela mesma razaõ.

III *Fazer dos Medios Extremos, e dos Extremos Medios*: o que lhes naõ muda o valor; e isso dá de si muitas mudanças,

Assim posta esta proporçaõ - - - - - - 6 : 3 : : 8 : 4

I. Podemos *Transpor*, isto he pôr primeiro os dois ultimos termos, e em segundo lugar os que estavaõ primeiro, dizendo assim - - - - - 8 : 4 : : 6 : 3 porque os Extremos vaõ para Medios, e os Medios para Extremos.

II. Podemor *Inverter*, isto he, fazer dos Antecedentes Consequentes, e dos Consequentes Antecedentes, dizendo - 3 : 6 : : 4 : 8 pela mesma razaõ.

III.

III. Podemos *Alternar* $\underline{6:3}::\underline{8:4}$
Isto he comparar os dois Antecedentes entre si, e entre si os Consequentes - - - - - 6 : 8 : : 3 : 4
porque se trocaõ os lugares nos dois Medios.

IV. Podemos trocar entre si sómente os extremos, o que se chama *Alternar*, *Inverter*, e *Transpor* dizendo - 4 : 3 : : 8 : 6

V. Podemos tomar todos os quatro termos ás avessas, o que se chama *Inverter*, e *Transpor* dizendo - - - - - - 4 : 8 : : 3 : 6

Ponhamos outro exemplo em linhas (*Est.* 3. *Fig.* 12.) Est. 3. fig. 12.

Se $\underline{A : B} : : \underline{C : D}$ podemos fazer as seguintes mudanças.

I. $C : D : : A : B$ isto he transpor.
II. $B : A : : D : C$ isto he inverter.
III. $A : C : : B : D$ isto he alternar.
IV. $D : B : : C : A$ isto he alternar, inverter, e transpor.

V.

V. $D : C :: B : A$ isto he inverter, e transpor.

Porque em todas estas mudanças se acha, que o producto dos Medios he igual ao dos Extremos, o que prova a proporçaõ. (n.º 142.)

Podemos fazer outras mais mudanças que nestas se incluem; nas quaes se vê que se hum medio vai para extremo, o outro medio tambem vai: o que he precizo para que o producto dos extremos seja sempre igual ao dos medios.

II.

Das Mudanças compondo ou dividindo os termos.

ALém das Mudanças que fizemos nos lugares dos termos, se podem fazer mais algumas, accrescentando huns aos outros, o que se chama *Compor*; ou tirando huns dos outros, o que se chama *Dividir*, e milhor diminuir. Quando se juntaõ forma-se huma *Somma*; quando se tiraõ aparece a *Differença*: e es-

eſtas ſommas, e differenças tambem ficaõ em proporçaõ. Sobre o que ha varias propoſiçoens tiradas do que diſſemos.

Mas he precizo lembrar o que diſſemos (n.º 137.), que quando accreſcentamos ou tiramos a duas quantidades as ſuas partes proporcionaes, ficaõ com a meſma razaõ entre ſi que dantes tinhaõ: ora os Conſequentes de huma proporçaõ, ſaõ partes proporcionaes dos ſeos Antecedentes.

Logo.

N.º 150. *Poſtos quatro termos em proporçaõ, ſe aos antecedentes accreſcentarmos, ou delles tirarmos os os ſeos conſequentes, ficaõ na meſma razaõ que entre ſi tinhaõ.*

V. g. ſe diſſermos.

$$A : B :: C : D$$

podemos dizer $A+B : C+D :: A : C$

ou tambem $A-B : C-D :: A : C$

Exemplos em n.os

$$12 : 6 :: 8 : 4$$

podemos dizer $12+6 : 8+4 : 12 : 8$

ou tambem $12-6 : 8-4 : 12 : 8$

Isto por outros termos he dizer.

I. A somma dos primeiros termos he para a somma dos segundos, como o primeiro Antecedente para o segundo.

II. A differença dos primeiros termos he para a differença dos segundos, como o primeiro Antecedente he para o segundo.

III.

N.º 151. Ora se as sommas entre si, e tambem as differenças entre si saõ como hum antecedente para o outro: as sommas entre si, e as differenças entre si, vem a ter a mesma razaõ: e podemos fazer esta proporçaõ: huma somma he para outra somma, como huma differença he para outra differença. V. g. se

$$12 : 6 :: 8 : 4$$

5.ª $12 + 6 : 8 + 4 :: 12 - 6 : 8 - 4$

ou se $A : B :: C : D$

$$A + B : C + D :: A - B : C - D$$

e alternando esta, tambem podemos dizer huma somma para a sua Differenrença, como outra ſomma para a ſua.

6.ª $12 + 6 : 12 - 6 :: 8 + 4 : 8 - 4$
ou $A + B : A - B :: C + D : C - D$

Logo.

N.º 152. *A Somma dos primeiros he para a ſua differença, como a Somma dos ſegundos o he para a ſua.*

IV.

N.º 153. Poſta eſta doutrina, e a que demos da Alternaçaõ, podemos tirar outras conſequencias.

v. g. ſe diſſemos $\underline{12 : 6} :: \underline{8 : 4}$
podemos dizer

$$(\text{n.º } 150.)\begin{cases} 1.º & 12 + 6 : 8 + 4 : 12 : 8 \\ 2.º & 12 + 6 : 8 + 4 : 6 : 4 \end{cases}$$

Logo alternan-do a 1.ª conſequencia diremos $12 + 6 : 12 :: 8 + 4 : 8$
e alternando a 2.ª diremos $12 + 6 : 6 :: 8 + 4 : 4$

E pela meſma razaõ ſe diſſemos

$$A : B :: C : D$$

podemos daqui inferir

logo $\quad A + B : A :: C + D : C$

e tambem $\quad A + B : B :: C + D : D$

Logo.

N.° 154. *Posta qualquer proporção a Somma dos primeiros he para qualquer delles, como a somma dos segundos he para o que lhe correspondе.*

V.

Posta a proporçaõ primitiva.

$$\underline{12 : 6 :: 8 : 4}$$

já inferimos estas duas proporçoens. $3.^a \quad 12 - 6 : 8 - 4 :: 12 : 8$

$4.^a \quad 12 - 6 : 8 - 4 :: 6 : 4$

Logo alternando a $3.^a$

diremos $\quad 12 - 6 : 12 :: 8 - 4 : 8$

e alternando a 4^a

diremos. $\quad 12 - 6 : 6 :: 8 - 4 : 4$

O mes-

O mesmo podemos dizer em qualquer outra proporçaõ. V. g. se dizemos $A : B :: C : D$

diremos: logo $A - B : A : C - D : C$
e tambem $A - B : B :: C - D : D$

Logo.

Em qualquer proporçaõ podemos dizer.

N.° 155. *A Differença dos primeiros termos he para qualquer delles, como a differença dos ultimos para o que lhe corresponde.*

※

Posta qualquer proporçaõ podemos alterna-la; e com isto fazemos que os Antecedentes sejaõ termos primeiros, e os Consequentes termos ultimos: e assim.

VI.

N.° 156. *Tudo quanto temos dito das Sommas e Differenças dos primeiros*

ros o dos ultimos termos, podemos dizer das ſommas e differenças dos Antecedentes e dos Conſequentes.

Donde ſe deduzem as ſeguintes proporçoens naſcidas de huma proporçaõ já dada. Exemplo.

Se $A : B :: C : D$

Logo alternando $A : C :: B : D$

I. Logo combinando (n.150.) as ſommas $A + C : B + D :: A : B$

II. Ou (n.150.) tambem $A + C : B + D :: C : D$

III. Logo combinando as differenças $A - C : B - D :: A : B$

IV. ou tambem $A - C : B - D :: C : D$

V. Logo combinando ſommas com differenças (n.151.) $A + C : B + D :: A - C : B - D$

VI. Logo alternando (n.151.) $A + C : A - C :: B + D : B - D$

Ex-

Exemplo em numeros.

Seja a proporçaõ primitiva.

$$12:4::9:3$$

logo alternando

$$\underline{12:9::4:3}$$

I. Logo combinando as ſommas $12+9:4+3::12:4$ (n. 150.)

II. e tambẽ. $12+9:4+3::9:3$ (n. 150.)

III. Logo combinando as differenças $12-9:4-3::12:4$ (n. 151.)

IV. e tambẽ $12-9:4-3::9:3$ (n. 151.)

V. Logo combinando ſommas com differenças

$$12+9:4+3::12-9:4-3$$

VI. Logo alternando

$$12+9:12-9::4+3:4-3$$

E daqui ſe provaõ as propoſiçoens ſeguintes.

VII.

VII.

N.º 157. *A Somma dos Antecedentes he para a somma dos Consequentes, como hum Antecedente para o seu Consequente.*

VIII.

N.º 158. *A differença dos Antecedentes he para a dos Consequentes, como hum Antecedente para o seu Consequente.*

IX.

N.º 159. *A Somma dos Antecedentes he para a sua Differença, como a somma dos Consequentes he para a sua Differença.*

Até aqui nestas seis proporçoens, que saõ consequencias da proporçaõ primitiva, combinamos sommas com sommas, differenças com differenças, e sommas com differenças. Agora falta combinar as sommas dos Antecedentes ou Consequentes, e as suas differenças com ca-

cada hum delles ; e para isso basta alternar as porporçoens assima.

Exemplo.

Seja a Proporçaõ primitiva.

$$\underline{A : B} : : \underline{C : D}$$

Logo alternando a primeira Consequencia q̃ puzemos assima (n.º 156.) diremos - - - $A + C : A : : B + D : B$
e alternando a 2.ª diremos $A + C : C : : B + D : D$
e alternando a 3.ª diremos $A - C : A : : B - D : B$
e alternando a 4.ª diremos $A - C : C : : B - D : D$

Outro exemplo em numeros.
Seja a Proporçaõ primitiva.

$$\underline{12 : 4} : : \underline{9 : 3}$$

Lo-

Logo alternando a 1.ª Consequencia assima diremos $12 + 9 : 12 :: 4 + 3 : 4$

alternando a 2.ª temos $12 + 9 : 9 :: 4 + 3 : 3$

Alternando a 3.ª temos $12 - 9 : 12 :: 4 - 3 : 4$

Alternando a 4.ª temos $12 - 9 : 9 :: 4 - 3 : 3$

E daqui se provaõ as verdades seguintes.

XI.

N.º 160. *A Somma dos Antecedentes he para cada hum delles, como a somma dos Consequentes he para o que lhe corresponde.*

XII.

N.º 161. *A Differença dos Antecedentes he para cada hum delles; como a differença dos Consequentes he para o que lhe corresponde.*

§ IX.

§ IX.

Da Razaõ Compoſta.

N.° 162. SUccede muitas vezes (Amigo Eugenio) que huma quantidade excede outra, por muitos principios : v. g. huma Salla he maior que hum Gabinete, por ſer mais larga, e tambem por ſer mais comprida, e além diſſo por ſer mais alta : Supponhamos que tem largura quadrupla do gabinete; já ſómente por eſſe principio ſería como 4 : 1 ; ſupp nhamos mais que o comprimento he v. g. 3 tantos do comprimento do gabinete, já ſómente por eſſe principio, havia de ſer como 3 : 1 ; e combinando eſtas duas razoens, naõ as havemos de juntar huma a outra, e dizer $4 + 3 = 7$; mas multiplicar huma pela outra, e dizer $4 \times 3 = 12$; ſendo 12 o expoente deſſa Razaõ Compoſta.

Porquanto ſe o comprimento he triplo, podemos dividilo em tres partes iguaes; e em cada hum deſ-

ſes

ſes terços como ha huma largura quadrupla da do gabinete; nelle entrará o gabinete quatro vezes; e em cada hum dos outros terços outras tantas; o que faz em tudo 12; e aſſim ſerá precizo repetir 12 vezes a aria ou o chaõ do gabinete para encher a aria ou o chaõ da Sala.

Ora ſe a altura da Sala for dupla, e nós a dividiſſemos pelo meio com hum vigamento, ficava no andar de ſima outro tanto vaõ como no de baixo; iſto he, podiaõ-ſe ahi fazer outros 12 gabinetes: e tornaremos a multipli ar por 2 (expoente das alturas) o expoente compoſto do pavimento 12, e diremos que a ſala he para o gabinete, como 24 para 1.

N.° 163. Quando o expoente de huma razaõ he producto de dois expoentes a razaõ he compoſta de duas; quando he producto de tres expoentes, a razaõ he compoſta de 3. &c.

Se as duas Razoens ou expoentes, que multiplicados daõ hu-

huma razaõ composta, saõ iguaes entre si, como v. g. 2×2, ou 3×3, ou 4×4 &c. entaõ a razaõ composta se chama *Duplicada*; e no primeiro cazo he *duplicada* da razaõ dupla, no segundo *duplicada* da razaõ tripla, no terceiro *duplicada* da razaõ quadrupla &c.

Semelhantemente se o Expoente da razaõ he o producto de tres expoentes iguaes, será expoente da razaõ *triplicada*; e se os expoentes primitivos v. g. de largura, comprimento, e altura, forem $2\times2\times2=8$ a razaõ será *triplicada* da razaõ dupla; se forem $3\times3\times3=27$ será a razaõ *triplicada* da razaõ tripla; se forem $4\times4\times4=64$, a razaõ será triplicada da razaõ quadrupla &c.

Donde se vê a differença da razaõ *dupla* á razaõ *duplicada*; da razaõ *tripla* ou *quadrupla*, a razaõ *triplicada* ou *quadruplicada*. As *duplas*, *triplas*, *quadruplas*, se fazem por addicçoens de unidades; as *duplicadas*, *triplicadas* &c. se fazem por multiplicaçaõ de expoentes semelhantes.

Tam-

Tambem se adverte, que qualquer das razoens que compoem a duplicada he *subduplicada*; as que compoem a triplicada he *subtriplicada* &c.

Ponhamos agora duas Proporçoens, v. g. esta

10 : 5 :: 4 : 2 (exp. 2.)

e tambem

estoutra 6 : 2 :: 9 : 3 (exp. 3.)

Cujos expoentes saõ v. g. 2, e 3; e multipliquemos ordenadamente os termos de huma pelos da outra: isto he 10×6, 5×2, 4×9, 2×3, teremos nos productos outra proporçaõ v. g. 60 : 10 :: 36 : 6 (exp. 6.)

Cujo expoente será o producto dos dois expoentes 2 e mais 3 (isto he 6.) Porquanto o mesmo he multiplicar 10 por 6, que multiplicar 2 *vezes* 5, por 3 *vezes* 2; e nisso multiplicamos naõ só os dois consequentes 5, e 2; mas os dois expoentes; hum que diz, 2 *vezes*; e outro que diz, 3 *vezes*: e assim o producto 60 naõ só comprehende o seu Consequente (10) as duas vezes da

pri-

primeira proporçaõ, mas essas duas vezes multiplicadas pelos tres da segunda, que fazem 6: Ora como nos outros dois termos da proporçaõ 4×9, e 2×3 he a mesma razaõ; e nelles se multiplica tambem 4 (termo duplo) por 9 (triplo) o producto hade ser *Sextuplo*, como vemos em 36, e 6; e assim sendo em ambas as razoens o mesmo expoente, ficaõ os quatro termos em proporçaõ.

Logo.

N.º 164. *Quando se multiplicaõ ordenadamente os termos de huma proporçaõ pelos termos de outra, os productos fazem terceira proporçaõ; cujo expoente he o producto dos dois expoentes primitivos.*

Ora se se multiplicarem ordenadamente os termos naõ só de duas, mas de muitas proporçoens que tenhaõ varios expoentes, v. g. 2, 3, 4, os productos devem fazer nova proporçaõ, cujo expoente será o producto dos tres primeiros expoentes: isto he $24 = 2 \times 3 \times 4$.

Por-

Porque aqui milita a razaõ que demos para as duas proporçoens combinadas ; e as tres proporçoens se podem reduzir a menos , combinando primeiro duas , e depois o producto destas com o expoente da terceira ; e assim faremos se forem quatro ou mais as proporçoens dadas.

Logo.

Quando se multiplicarem ordenadamente os termos de muitas proporçoens , sempre os productos faráõ nova proporçaõ , cujo expoente será o producto de todos os expoentes primitivos.

※

Daqui se segue , que se forem só duas proporçoens e do mesmo expoente. v.g. 2.

$$\begin{cases} 1 : 2 :: 3 : 6 \\ 4 : 8 :: 5 : 10 \end{cases}$$

Os productos teráõ hum expoente , que será 4 , quadrado do primeiro ; e estaráõ na razaõ duplicada da primeira razaõ dupla : isto he 4 : 16 :: 15 : 60. Cujo expoente he 4 , ter-

mo

mo quadrado do expoente 2, que reinava nas outras proporçoens.

E pela mesma razaõ, se juntarmos tres proporçoens, em que haja a mesma razaõ, os productos teraõ por expoente hum cubo do primeiro; isto he o producto de tres razoens iguaes; e ficaráõ na razaõ triplicada da primeira.

Logo.

N.º 165. *Postos quaesquer termos*

em proporçaõ - -	1 : 2 : : 3 : 6	*raiz.*
os quadrados destes termos tambem o estaõ - - - - -	1 : 4 : : 9 : 36	*quadrados.*
e os Cubos tambem o estaráõ - - -	1 : 8 : : 27 : 216	*Cubos.*

Porque entre cada Antecedente e o seu Consequente, sempre se achará razaõ igual; isto he o producto de duas, ou de tres razoens iguaes.

Logo.

N.º 166. *Na Proporçaõ dos quadrados o expoente será hum quadrado*

 do

do expoente da proporçaõ Simples ou das Raizes; e na Proporçaõ dos Cubos o expoente ſerá hum Cubo do expoente da proporçaõ Simples.

Porque na dos quadrados o expoente he o producto de duas razoens iguaes; e na dos Cubos o expoente he producto de tres razoens iguaes.

§ X.

Da Proporçaõ Reciproca.

A Proporçaõ Directa, que he a que atéqui explicamos, ſe dá v. g. quando huma coiza contém outra igualmente por duas circunſtancias; v. g. huma porta contém outra duas vezes na altura, e tambem duas vezes na largura: dizemos entaõ altura grande he para altura pequena, como largura grande para a largura pequena; creſcendo ſempre á proporçaõ tanto a largura como a altura. O meſmo dizemos quando huma Sala he ſeis vezes mais comprida que hum gabinete, e tambem ſeis vezes mais larga.

N.°

N.° 167. Porém quando huma coiza excede outra, v. g. 3 vezes numa circunſtancia, e he excedida della tambem tres vezes noutra, eſtá em proporçaõ reciproca. V. g. quando hum campo he 10 vezes mais comprido que outro, porém 10 vezes mais eſtreito, excedendo-o numa dimenſaõ, e ſendo excedido igualmente noutra.

Ponhamos outro exemplo: Quando dois animaes correm; e tanto maior he a velocidade em hum, quanto o tempo precizo para correr huma legua he menor que o do outro: dizemos entaõ que as velocidades eſtaõ em proporçaõ reciproca com os tempos. E que a velocidade da galga v. g. he para a velocidade do homem, como o tempo do homem he para o tempo da galga.

Accreſcentemos outro exemplo: quanto maior he a tripolaçaõ de huma Náo, menos tempo dura huma certa provizaõ de mantimentos; e dizemos: a Tripolaçaõ da Náo grande he para a tripolaçaõ da pequena, como a duraçaõ do provimento na pequena, he para a duraçaõ na grande.

Em todos estes cazos se vê, que na proporçaõ reciproca o segundo termo, e o terceiro da proporçaõ pertencem ao mesmo objecto, e o primeiro termo com o quarto, pertencem ao outro. V. g. no exemplo das velocidades e tempos, a velocidade da galga he o primeiro termo, e o seu tempo o quarto; e a velocidade do homem he o segundo termo, e o seu tempo o terceiro, como se vê fazendo a proporçaõ: mas para abreviar chamemos as velocidades *V*, e aos tempos *T*, e á galga *G*, ao Homem *H*.

$$VG:VH::TH:TG.$$

E nisto he que está a differença da proporçaõ directa; que na Directa, o primeiro termo e o terceiro pertencem a hum objecto, e o segundo com o quarto a outro; mas na reciproca o primeiro e o quarto pertencem a *hum*; e o segundo e o terceiro a outro.

Esta materia, meu amigo, he

hum

hum pouco cançada, e eſcura; porém he indiſpenſavel: e ſe da primeira vez que lerdes eſta Carta a naõ comprehendereis bem, paſſai a diante, e ide lendo outras; e depois voltareis a ler a meſma Carta que já a haveis de entender milhor. Meu Amigo, crêde que lhe fiz boa diligencia para tratar eſta materia com a maior facilidade poſſivel; agradecei-me a boa vontade.

Fim da terceira Carta.

CARTA IV.

Das Linhas Proporcionaes.

§ I.

Dividir as Linhas na proporçaõ pedida.

A Doutrina que vos tenho dado, Amigo Eugenio, ácerca da proporçaõ dos numeros, ſe applica facilmente ás linhas, dividindo-as em certo numero de partes iguaes; e nós agora tratando das linhas proporcionaes nos iremos fundando ſobre o que diſſemos ácerca das razoens e proporçoens dos numeros.

N.° 168. Supponhamos pois que
Eſt. 3. fig. 13. nos daõ huma linha v. g. *AC* (*Eſt.* 3. *Fig.* 13.) e que nos pedem que a dividamos em certo numero de partes iguaes, v. g. 6 : faremos o ſeguinte.

I. De huma extremidade (*A*) tiremos outra linha qualquer, e indefinida, v. g. *AB*. II.

II. Tomemos com o compasso nessa linha indefinida *AB* varias porçoens iguaes, e do fim da ultima porçaõ *B* tiremos huma linha *BC* até a extremidade da linha dada *AC*.

III. De todos os pontos que o compasso sinalou em *AB*, tiremos parallelas a *BC*.

IV. De todos os pontos 1, 2, 3, &c. que as parallelas vaõ ferir em *AC*, tiremos humas pequenas parallelas a *AB*. Isto feito inferimos.

I. Que estes triangulos pequenos tem os lados de pontinhos iguaes entre si, por serem iguaes ás porçoens do compasso tomadas na linha *AB* (n.° 114.)

II. Que estes triangulos tem os angulos correspondentes iguaes entre si, por serem feitos por huma linha cortando parallelas (n.° 45.)

III. Que isto supposto estes triangulos tem hum lado igual e os angulos adjacentes iguaes; e que assim pelo n.° 109. saõ iguaes entre si; e por conseguinte a linha *AC* está dividida em seis partes iguaes, do mesmo modo que a linha *AB*, o está; posto que as partes de *AC* naõ sejaõ iguaes ás de *AB*, assim como as linhas totaes o naõ eraõ.

Logo.

N.° 169. *Qualquer das parallelas á baze deste triangulo divide os seus lados desorte que as quatro partes dellas ficaõ em proporçaõ.*

Porque a linha *mn* v. g. de tal sorte divide as linhas *AB*, *AC*, que *Am* : *mB* : : *An* : *nC*; pois que em ambas as partes a razaõ he de 4 para 2.

O mesmo podemos dizer de qualquer outra parallela, assim neste como em qualquer outro triangulo; porquanto lhe podemos applicar a mesma demonstraçaõ.

Logo.

Est. 3. fig. 14. N.° 170. *Qualquer parallela á baze de hum triangulo (Fig. 14.) divide os lados proporcionalmente*: assim *PQ* divide deforma os lados do

tri-

triangulo, que $AP : PN :: AQ : QM$.

⁂

Ora o ponto Q, em que a linha AN fica dividida proporcionalmente, he ponto unico; sómente elle corresponde a P; por conseguinte toda a linha que saindo de P for cortar o outro lado proporcionalmente, hade hir ter a Q, e coincidir com a parallela PQ; e assim essa linha hade ficar tambem parallela á baze.

Logo.

N.º 171. *Toda a linha que cortar proporcionalmente os lados de hum triangulo, he parallela a baze delle.*

⁂

Supponhamos agora, que eu (*Fig.* 15.) tiro de A, vertice de hum triangulo, huma linha AM sobre a baze: esta linha divide hum triangulo em dois, e fica hum lado commum para ambos; e assim a linha SR, que for *parallela* á baze, cortará *proporcionalmente* naõ só os dois lados antigos AB, AC; mas tambem a nova linha AM. Est. 3. fig. 15.

Lo-

Logo.

Toda a linha ſahida do vertice de qualquer triangulo, fica cortada proporcionalmente aos lados por toda a parallela á baze.

Iſto ſuppoſto podemos tirar deſtas propoſiçoens muitos uzos utiliſ-
Eſt. 3. fig. 16. ſimos para a praxe (*Fig.* 16.)

Supponhamos que nos he precizo reduzir de hum golpe muitas linhas differentes a huma ſetima parte menos, ou outra qualquer proporçaõ: faremos o ſeguinte.

I. Sejaõ as linhas que ſe devem
Fig. 16. reduzir (*Fig.* 16.) *aO*, *bO*, *cO*, *dO*, *eO*, *fO*.

II. Tirarei huma linha indefinida *P Q*, e com o compaſſo irei pondo todas as linhas dadas, deforma que todas ſaiaõ do ponto *O*, e ſe terminem na linha *P Q*; o que he facil fazendo de *O* centro de muitos arcos, cujos raios ſejaõ as linhas dadas, os quaes hiraõ cortar a indefinida em *a*, *b*, *c*, *f*, *d*, *e*. &c.

III. Cortarei de huma linha qualquer, v. g. *O a*, a parte que tiverem

pe-

pedido (n.º 168.), e do ponto *M* da divizaõ tirarei a parallela *MN*; esta linha dividirá todas as mais linhas proporcionalmente á primeira.

Logo.

N.º 172. *Temos methodo para dividir muitas linhas juntamente na mesma razaõ pedida.*

※

Dado hum triangulo qualquer que seja (*A. Fig.* 17.) supponhamos que dividimos pelo meio o angulo do vertice *B* : Essa linha *BP*, dividirá a baze em duas partes *M*, *N*. Vejamos agora se ellas ficaõ proporcionaes aos dois lados, desorte, que possamos dizer *M* : *N* : : *Q* : *T*. Est. 3. fig. 17.

Para examinar este ponto tiro da extremidade *R* huma parallela a *BP*, e continuo o lado *TS*, até encontrar a parallela em *I*.

Pelo que fica dito (n.º 170.) a linha *BP* sendo parallela a *IR*, baze do triangulo grande, hade dividir os seus lados proporcionalmente te, por conseguinte $M:N::S:T$.

Ora se o lado Q for igual a S, poderá por-se em lugar delle, e teremos a proporçaõ que buscamos.

Para conhecer que Q he igual a S, advirtiremos que o angulo $i=o$ pelas parallelas; $o=e$ pela divizaõ em duas metades; $e=r$ seu alterno; logo $i=r$; por conseguinte o triangulo IBR he isosceles (n.º 92.) e o lado $S=Q$: Logo podemos em lugar de S pôr Q, sem perturbar a proporçaõ, e dizer $M:N::Q:T$.

Logo.

N.º 173. *A linha que divide o angulo do vertice pelo meio, vai a dividir a baze proporcionalmente aos lados.*

§ II.

Dos Lados proporcionaes nos Triangulos Semelhantes.

N.º 174. CHamamos *Triangulos Semelhantes* os que tem todos os angulos corres-

pon-

pondentes iguaes (*Fig.* 18.) ; como v. g. os triangulos *A B C*, *a b c*. Eſt. 8. fig. 18.

Os lados oppoſtos a angulos ſemelhantes ſe chamaõ tambem *Homologos*.

Ora ſe eu puzer o triangulo pequeno *O* ſobre o grande *E*, para a parte do angulo *A*, os dois angulos *A a*, e as linhas que os formaõ haõ-de coincidir: além diſſo como o angulo *b* = *B*, e o angulo *c* = *C*, a linha de pontos *b c* fica parallela a *B C* (n.º 42.) ; e aſſim corta os dois lados *A B* , *A C* proporcionalmente (n.º 170.) e comparando os dois triangulos *O* , *E* , podemos dizer *ab* : *AB* : : *ac* : *AC*.

Do meſmo modo pondo o triangulo pequeno *O* ſobre o grande *E*, no angulo *C*, provamos que *a b* que correſponde a *A B*, lhe fica parallela; e que por conſeguinte corta proporcionalmente os dois lados *A C*, *B C*.

Logo.

N.º 175. *Todos os Triangulos Semelhantes tem os lados proporcionaes.*

Como eſta propoziçaõ (Amigo

Eu-

Eugenio) he a chave de infinitos deſcobrimentos em Geometria, procuramos todos os modos de conhecer quando dois triangulos ſejaõ ſemelhantes ; ao que ſe ordenaõ as obſervaçoens ſeguintes.

※

Nós ſabemos que toda a vez
Eſt. 3. que huma linha he parallela á baze
fig. 14. de hum triangulo (*Fig.* 14.) fas dois angulos *n*, *m* iguaes a *N*, *M* adjacentes á baze (n.° 44.) e que o angulo do vertice *A* fica commum ao triangulo antigo , e ao novo. Ora quando dois triangulos tem os angulos correſpondentes iguaes ſaõ ſemelhantes.

Logo.

N.° 176. *Toda a Linha que cortar os lados de hum triangulo, ſendo parallela á baze, fas dois triangulos ſemelhantes.*

※

Diſſemos tambem que todos os angulos formados por linhas reſpectivamente parallelas eraõ iguaes (n.° 45.)

Lo-

Logo. (*Fig.* 19.)

Est. 3. fig. 19.

N.° 177. *Quando todos os lados de hum triangulo forem parallelos aos de outro, os triangulos saõ semelhantes.*

⁂

Nós sabemos (*Fig.* 20.) que se huma linha for perpendicular sobre outra , em lhe dando huma revoluçaõ de 90 gráos , ou coincide com ella, ou lhe fica parallela (n.° 18.). Assim quando hum triangulo tiver todos os lados perpendiculares aos seus correspondentes no outro, em dando huma revoluçaõ de 90 gráos a hum triangulo , todos os lados de hum (*Fig.* 20.) ficaraõ parallelos aos do outro ; e por consequinte os angulos respectivos iguaes. Fig. 20.

Logo.

N.° 178. *Quando o triangulo tiver todos os seus lados perpendiculares aos de outro, lhe he semelhante.*

⁂

⁂

Tambem dissemos que os angulos verticalmente oppostos saõ iguaes (n.° 15.), e que os angulos alternos tambem o eraõ.

Logo.

Est. 3. fig. 21. N.° 179. *Quando os triangulos (Fig. 21.) saõ formados por duas linhas que se cruzaõ , e por duas entre si parallelas , ficaõ semelhantes*

Porque os seus angulos , ou saõ verticalmente oppostos , ou alternos.

⁂

Fig. 22. Formando hum triangulo qualquer que seja *H* (*Fig.* 22.) se tomarmos tres linhas *I*, *E*, *O*, proporcionaes aos seus lados , poderemos fazer dellas hum triangulo v. g. *P*. Vejamos agora se este novo triangulo necessariamente he semelhante ao primeiro.

Pondo os dois lados *E*, *O* sobre os seus correspondentes (supponhamos que saõ metades delles) se termiminaraõ em *D*, e em *E* : tiremos por esses pontos, em que os lados ficaõ cortados proporcionalmente, huma linha, a qual sendo por isso parallela a *AB* (n.º 177.) formará o triangulo (*b*) semelhante a *H* (n.º 176.).

Só falta mostrar, que esse pequeno triangulo *b*, he o mesmo que *P*, feito com as tres proporcionaes; o que se conhece assim.

Como os triangulos (*b*, *H*,) saõ semelhantes, todas as linhas seráõ proporcionaes; e assim a vertical será para a vertical, como a horizontal para a horizontal: ora *EC* he metade de *BC* pela suppoziçaõ: logo *DE* será o mesmo que *de*, metade de *AB*; e por conseguinte o triangulo *b* será o mesmo que o triangulo *P*.

Logo.

N.º 180. *Quando os tres lados de hum triangulo saõ proporcionaes aos tres do outro, os triangulos saõ semelhantes.* ⁂

Isto supposto se nos pedirem hu-

Est. 3. fig. 23. huma quarta proporcional, isto he, se nos derem (*Fig.* 23.) tres linhas *AB*, *AC*, *AD*; e nos pedirem huma quarta, que com as tres faça huma proporçaõ, faremos o seguinte.

I. Farei hum angulo arbitrario de linhas indefinidas *B-A-C*; e porei de huma parte a primeira linha dada *A B*, e no outro lado porei a segunda *A C*; e fecharei o triangulo com a linha de pontinhos *B C*.

II. Porei no primeiro lado a terceira linha dada *A D*, e tirarei huma linha *D E*, parallela a *B C*.

Isto feito os dois triangulos saõ semelhantes (n.° 176.); e os lados proporcionaes (n.° 175.) logo *AB* : *AC* : : *AD* : *AE*; por conseguinte *AE* he a quarta proporcional que nos pediraõ.

Logo.

N.° 181. *Temos modo para achar huma quarta proporcional.*

⁂

Do mesmo modo, se, dadas duas linhas, (*AB*, *AC*) nos pedirem huma terceira proporcional, faremos o seguinte (*Fig.* 24.). Est 3. fig. 24.

Feito o angulo arbitrario, poremos de hum lado a primeira e a segunda linha, e no outro repetiremos a segunda; e fecharei o triangulo com a linha *BC*; e ultimamente por meio da parallela *C D*, acharemos a terceira linha que buscavamos; e poderemos dizer *AB* : *AC* : : *AC* : *AD*.

Logo.

N.º 182. *Temos modo para achar huma terceira proporcional.*

§. III.

Applicação da Doutrina precedente á medição de distancias inacessiveis, sem o soccorro da Trigonometria.

NAda lizongêa mais o gosto dos principiantes, como o medirem distancias inacessiveis sem instromentos, nem calculos embaraçados: o que podem conseguir tirando varias consequencias da regra geral que assima pozemos: isto he que

Todos os triangulos semelhantes tem os lados em proporçaõ.

Consequencias.

I.

Est. 4. fig. 1. N.º 183. LOgo para medir a distancia inacessivel *B A* (*Est.* 4. *Fig.* 1.) bastará fazer o seguinte.

I. Pôr huma estaca em *B*, e outra em *Q*: isto he na linha vizual que vai de *B* até o objecto *A*: depois disso tiremos a linha vizual de *B* até *C*, onde poremos outra estaca *C*.

II. Tiraremos huma linha vizual *b a* parallela a outra vizual *B A*; a qual linha *b a* se notará com duas estacas, mas desorte que a estaca *a* fique tambem na vizual *C A*, e *b* na vizual *C B*.

III. Estas estacas com o objecto difdiſtante *A* fazem os termos de dois triangulos ſemelhantes *C B A*; e *c b a* conſideremos as duas linhas *B C*, *b c* como bazes dos dois triangulos, cujos vertices ſejaõ *A*, *a*. Ora como eſtes triangulos ſendo ſemelhantes haõde ter os lados proporcionaes (n.º 175.) ſegue-ſe que a pequena baze he para a grande, como a pequena altura he para a grande: aſſim temos eſta proporçaõ *cb* : *CB* :: *ba* : *BA*.

E aſſim ſe a pequena baze *bc* he v. g. 10 vezes menor que a grande *BC*, tambem a linha *ba* ſerá 10 vezes menor que a diſtancia *B A*; que he o que dezejavamos conhecer.

II.

N.º 184. QUando ſe naõ poder trabalhar no terreno que vai da linha *B C* (*Fig.* 2.) para diante, por ſer o terreno ou curto ou eſcabrozo, ſe pode trabalhar para traz; e por hum modo muito facil. Eſt. 4. fig. 2.

I. Poſta a linha vizual *B A*, tireremos huma perpendicular *B b* ; e depois outra *b a* perpendicular a *b B.*

II. Eſtas duas linhas *B A*, e *b a* ſendo perpendiculares á meſma linha *B b* fazem os angulos alternos iguaes, e vem a ficar parallelas entre ſi (n.° 41.)

III. Dividamos a linha *B b* em partes aliquotas. (Partes aliquotas Eugenio, ſaõ aquellas que repetidas certo numero de vezes valem ao juſto tanto como o Todo : naõ ſei ſe eſqueceo explicar-vos eſte termo) dividamos pois a linha *B b* em partes aliquotas, e ponhamos em huma dellas a eſtaca *C.*

IV. Recuemos por ſima da linha *b a*, até que a eſtaca *C* nos embaraſſe a viſta do objecto diſtante *A*, e ponhamos ahi outra eſtaca *a.*

Neſſe cazo os dois triangulos *a b c* , *A B C* ſaõ ſemelhantes (n.° 179.) e os lados proporcionaes : e chamemos bazes deſſes triangulos as linhas *B C*, *c b*: logo a pequena baze he para a grande , como a altura do pequeno triangulo he para a altura do grande ; e podemos fazer eſta proporçaõ $bc : BC :: ba : BA$; e fica conhecida a diſtancia BA, que nos he inacceſſivel.

III.

N.º 185. SE quizermos medir a altura de huma torre pela ſombra, o podemos fazer do modo ſeguinte (*Fig.* 3.). Eſt. 4. fig. 3.

I. Chegarme-hei ao fim da ſombra da torre, de maneira que a ſombra da minha cabeça fique emparelhada com a ultima ponta da ſombra que a torre faz.

II. Deixarei hum ſinal no chaõ no lugar onde eſtiveraõ os meos pés, e o meu criado notará no chaõ o lugar B, em que eſteve a ſombra da minha cabeça, á ilharga do lugar onde chegava a ſombra da torre.

III. Iſto feito, já temos dois triangulos ſemelhantes, porque todos os ſeus lados ſaõ reſpectivamente parallelos; pois a ſombra do meu corpo he parallela á da torre; os raios do Sol que paſſaõ pela minha cabeça para terminar a minha ſombra

bra

bra e os que passaõ pela grimpa da torre para terminar a sua sombra, tambem saõ parallelos; e ultimamente o meu corpo está parallelo com a torre, por estarem ambos a prumo.

IV. Logo a sombra pequena he para a grande, como a altura do meu corpo he para a altura da torre: o que supposto, como eu posso medir o espaço que occupava no tempo da operaçaõ a minha sombra, pois ficáraõ sinaes no chaõ tanto dos meos pés, como da sombra da minha cabeça, e tambem pelo lugar desta podemos conhecer até onde chegou a sombra da torre nesse tempo: Segue-se que a sombra da torre se he v. g. 20 vezes maior que a minha, tambem a altura da torre será 20 vezes maior que a do meu corpo.

Advirta-se que se deve contar no comprimento da sombra da torre tudo o que vai até o centro da torre *A*; para que fique a prumo a linha que vai até a grimpa *C*; pois só esta he a parallela do meu corpo; que sempre se suppoem a prumo.

Tam-

Tambem he de notar que eſta operaçaõ naõ admite tanta exacçaõ como as que ſe fazem com as linhas viſuaes, porque a ſombra naõ ſe termina em ponto fixo; porém ſempre ſe conhece a altura com pouca differença.

Advertencia.

QUando ſe formaõ eſtas proporçoens ſempre ſe deve guardar o termo que for incognito, para quarto lugar; e por conſeguinte ſe deve principiar por hum termo que naõ ſeja homologo ou correſpondente do termo incognito. V.g. no cazo prezente, como o termo incognito he a altura da torre, hade ficar para ultimo lugar, e naõ devo principiar pela minha altura, que eſſa he o termo homologo do incognito; mas devo principiar pela minha ſombra, e dizer ſombra he para ſombra, como a altura para altura; ou tambem ſombra pequena he para altura pequena, como ſombra grande he para altura grande.

Ora Eugenio eu enſino-vos eſte

Pro-

Problema, naõ porque na praxe elle se possa executar com perfeita exacçaõ; pois bem vedes que depende esta operaçaõ de muitas coizas dificeis de averiguar exactamente, como saõ a postura do homem bem a prumo, o termo da sombra &c. porém para huma medida pouco mais ou menos serve, e he facil.

Tambem advirto que quando se compáraõ os lados de dois triangulos semelhantes, so se compáraõ entre si os lados homologos, isto he, os que estaõ oppostos a angulos iguaes.

IV.

Est. 4. fig. 4. N.° 186. SE houver hum Gafometro (*Fig.* 4.) e hum semicirculo graduado (*Fig.* 5.)
Fig. 5. se podem medir as distancias inacessiveis com bastante exacçaõ deste modo.

I. Ponho duas estacas em *B*, *C*
Fig. 1. (*Fig.* 1.) as quaes com o objecto distante *A* fazem os tres pontos do triangulo vizual; depois disto no lugar

gar *C* porei o Gafometro da (*Fig.* 4.) para medir o angulo *C*.

O modo de medir os angulos vizuaes com o Gafometro he o seguinte. Porei em *C* o instrumento horizontalmente; e de modo que pela regua ou *Alillada* fixa *P Q* veja eu a estaca posta em *B*; e sem bulir com o instrumento voltarei a *Alillada* ou regua movel *M N* de forma, que pelas *Pinulas M*, *N* veja o objecto distante *A*: deste modo o arco do Gafometro comprehendido entre as duas allilladas, dará o numero de gráos comprehendidos pelo angulo vizual das linhas (*C*, *A* e *CB* da *Fig.* 1.) Fig. 1.

II. Medido por este modo o angulo vizual em *C*, tirarei o Gafometro dahi, e deixarei huma estaca em seu lugar; e o transportarei para o lugar da estaca em *A*; voltarei o instrumento de modo, que pela alillada fixa *P Q* possa ver a estaca *C*; e sem tocar no instrumento volverei a alillada movel *M*. *N* até ver o objecto distante em *A*; e entaõ o arco comprehendido entre as duas alil-

alilladas mostrará o valor do angulo vizual em *B*.

III. Medirei a linha *BC*, para ver quantos passos ou varas contém.

Est. 4. fig. 5. IV. Isto posto farei em hum papel (*Fig.* 5.) huma linha *bc*, que terá tantas partes do pé de Rei, ou qualquer outro *petipé*, quantas varas, ou braças &c. eu tiver na linha vizual *BC*: tirada assim esta linha *bc*, nas suas extremidades porei o centro *o* do semicirculo *H*, e farei ahi dois angulos iguaes aos dois angulos vizuaes que temos em *B*, e em *C*; e porei dois pontinhos nos gráos que lhes correspondem no semicirculo, pelos quaes tirarei duas linhas, as quaes em alguma parte se haõ de cruzar, e ahi porei a letra *a*, que corresponde ao objecto distante *A*.

V. Feitos estes triangulos chamarei bazes dos triangulos as linhas *BC*, *bc*; e alturas as linhas *BA*, *ba*; e direi que a baze do pequeno he para a sua altura, como a baze do grande he para a sua. E por este modo sabendo eu já quantas par-

tes do petipé tem a linha *bc*, e po-
dendo ver quantas ſe contém em
ba; ſabendo tambem quantas braças
tem a linha vizual *BC*, tenho hu-
ma proporçaõ *bc* : *ba* : : *BC* : *BA*; da
qual os tres termos ſaõ conhecidos,
e por conſeguinte o quarto o ſerá;
e he a diſtancia que buscavamos.

V.

N.º 187. POdemos medir de
outro modo ao meſ-
mo tempo a diſtancia e a altura de
hum objecto diſtante, ſem mais inſ-
trumento que duas eſtacas a prumo Eſt. 4.
(*Fig.* 6.) fig. 6.

I. Ponhamos duas eſtacas a pru-
mo *P*, e *Q*.

II. Chegando á eſtaca *P* notarei
ahi o ponto *a* na altura dos olhos;
e notarei na outra eſtaca o ponto
n, por onde paſſa o raio vizual que
vai ter á baze *N* do Edificio.

III. Tomarei a diſtancia que vai
de *n* até o chaõ, e a tranſportarei
para a eſtaca *P* no ponto *m*; e já
com iſto temos hum triangulo pe-
que-

queno, *a n m*, e outro grande que lhe he semelhante *A N M*; e a razaõ da semelhança he ser *n m* parallela ao chaõ, reprezentado na linha *N M*.

IV. Supposta a semelhança dos triangulos; chamarei altura delles ás linhas *am*, *AM*; e bazes ás linhas *nm*, *NM*; e assim posso dizer: a altura do pequeno he para a do grande, como a baze do pequeno he para a baze do grande; e assim digo que *am* : *AM* : : *mn* : *MN* : e sendo as tres primeiras quantidades conhecidas, tambem o será a quarta, que he a distancia do Edificio reprezentado na linha *N M*.

Agora para medir a altura farei o seguinte.

I. Transportarei para a estaca *Q* a altura *a M*, notando ahi o ponto *o*, deforma que a linha vizual *a o O* fique parallela ao chaõ.

II. Desde *a* olharei para o mais alto do edificio *I*, e notarei na segunda estaca o ponto *i*, por onde passa o raio vizual.

III. Com isto temos hum pequeno

no triangulo *a i o*, e hum grande *A I O*; o qual he ſemelhante, porque a eſtaca *Q* fica paralela ao edeficio.

IV. Logo a baze do pequeno he para a do grande, como a altura do pequeno he para a altura do grande; e aſſim poſſo dizer *ao* : *AO* : : *oi* : *OI*. Ora as tres primeiras quantidades ſaõ conhecidas, aſſim ficará a quarta tambem conhecida: e ſe juntarmos a altura *O I* á altura *a M*, ou *O N*, ficará conhecida a altura total do edeficio *N I*. Advirto que tambem eſta operaçaõ naõ pode ſer exactiſſima; mas feita com cuidado dá a conhecer a diſtancia e altura com pouca differença.

VI.

N.º 188. POr methodo ſemelhante temos hum modo para medir huma diſtancia que for inaceſſivel por ambas as extremidades (*Fig.* 7.) Eſt. 4. fig. 7.

I. Do ponto *C* tomado a arbitrio olharei para os dois objectos, cuja diſtancia quero conhecer; e com iſto

isto temos o triangulo *ACB*, cujos tres lados sendo incognitos parecem inuteis para toda a operação; mas para os conhecer farei o seguinte.

II. De hum ponto arbitrario *M*, tomado na linha *CA*, olharei para o objecto *B*; e tomando nessa mesma linha huma parte proporcional a meu arbitrio, notarei hum ponto *m*, do qual tirarei a linha *mb* parallela á grande *MB*; (o que he mui facil por meio do Gafometro pondo-o em *M*, e depois em *m*, sem mudar a graduação da alilada movel:) e notarei o ponto *n*.

Isto posto já temos dois triangulos semelhantes *mbC*, e o grande *MBC*, e chamando bazes ás linhas *MC*, e *mC*; podemos dizer a baze do pequeno he para a do grande, como a obliqua do pequeno he para á do grande; assim $Cm : CM :: Cb : CB$.

III. Transportarei para a linha *CB* as mesmas distancias que tomei na linha *CA*; isto he notando os pontos *nN*, que estaõ nas mesmas distancias de *C*, que *m*, e *M* tinhaõ delle; e tirarei de *N* huma linha vizual NA, e outra ſua parallela na, em ordem a ter dois triangulos ſemelhantes nac, NAC; e chamando bazes deſſes triangulos ás linhas Cn, CN, podemos dizer a baze do pequeno he para a do grande, como a obliqua do pequeno he para a do grande: iſto he $Cn : CN :: Ca : CA$: e como as tres primeiras quantidades ſaõ conhecidas, tambem o ſerá a quarta CA.

IV. Se o terreno naõ conſentir tomar os pontos nN na meſma diſtancia de mM, baſtará tomar quaeſquer outros, comtanto que a pequena diſtancia Cn ſeja a reſpeito da grande CN, como Cm he para CM.

V. Juntando agora o que temos provado conhecemos, que ſe Cm he v. g. a quarta parte de CM; e Cn de CN, tambem ca ſerá a quarta parte de CA, e Cb de CB.

VI. Tendo achado os dois pontos a, b que dividem proporcionalmente os dois lados CA, CB; tiraremos por elles huma linha ab; a qual (pelo n.º 171.) he parallela á li-

linha incognita AB; e assim os dois triangulos Cab, CAB, saõ semelhantes; e os lados proporcionaes: por conseguinte chamando bazes ás linhas ab, AB, diremos que o lado do pequeno Cb he para o do grande CB, como a baze do pequeno ab para a do grande AB: Isto he $Ca : CA :: ab : AB$.

E com isto temos conhecido naõ só a distancia AB, mas tambem em que rumo ou direcçaõ se acha essa linha; pois hade ser a mesma da sua parallela ab.

§. IV.

Applicaçaõ da Doutrina dada á divizaõ de qualquer linha em partes proporcionaes mui pequenas.

LEmbrando-nos nós (meu grande amigo) de duas verdades essenciaes já provadas, huma que a parallela que corta hum triangulo faz dois triangulos semelhantes (n.º 176.); outra que os triangulos sememelhantes tem os lados proporcionaes (n.° 175.), tiramos daqui varias consequencias.

I.

N.° 189. O Modo de dividir exactamente qualquer linha mui pequena nas partes que se pedirem. (*Fig.* 8.) Est. 4. fig. 8.

Seja a linha dada a linha *DE*; e supponhamos que a querem dividir em duas, e tres, e cinco partes setimas; o que se exprime assim $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$.

I. Tomaremos huma linha arbitraria *BC*, e nella com o compasso faremos sete medidas iguaes entre si, posto que tambem arbitrarias.

II. Tomarei no compasso as sete medidas juntas, que fazem a linha *BC*, e descreverei das suas extremidades dois arcos que se cruzem em *A*, para formar hum triangulo equilatero.

III. Das divizoens 2, 3, 5; tirarei linhas ao vertice *A*.

Isto feito, já sei que toda a linha que for parallela a *BC* ficará dividida como ella está, isto he em $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}$.

IV. Tomarei no compasso a linha dada *DE*, e desde o vertice *A* descreverei hum arco, que corte os lados do triangulo em *b*, *c*; e tirarei a linha *bc*; a qual será igual a *DE*, porquanto o novo triangulo *Abc* tendo o vertice commum em *A*, e os angulos da baze iguaes com os do triangulo grande *ABC*, hade ser equilatero como elle: e pela mesma razaõ todos os pequenos triangulos cujas bazes fazem a linha *bc*, saõ semelhantes aos grandes, cujas bazes juntas fazem a linha *BC*.

Logo.

A linha dada DE (ou a sua igual *bc*) *se acha dividida* (como *BC*) isto he *em* $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}$.

II.

II.

N.° 190. TEmos o modo de formar o *Petipé* de Centessimos, que muitos chamaõ de décimos.

O Petipe de Centessimos, se acha em muitos instrumentos Mathematicos, para se tomarem as partes centessimas de huma polegada, e se pode applicar a qualquer outra linha que quizerem; mas forma-se do modo seguinte. (*Fig.* 9.) Est. 4. fig. 9.

I. Seja a linha dada *AB*, a qual se procura dividir em cem partes iguaes. Para isso a dividiremos em 10 partes iguaes, numerando-as pelas dezenas seguintes 10, 20, 30 &c.

II. Das duas extremidades baixaremos as duas parallelas *Ae*, *Bo*, em cada huma das quaes tomarei com o compasso 10 partes iguaes entre si, notando-as com os numeros seguintes, 1, 2, 3. &c.

III. Uniremos as duas parallelas *Ae*, *Bo* com a linha *eo*, igual a *AB*.

IV.

IV. Tiraremos parallelas a *AB* por todos os 9 pontos que estiverem notados em *Ae*.

V. Tiraremos huma obliqua *Am*, e todas as mais parallelas a essa linha.

Isto posto: suponhamos que me pedem 56 partes centessimas da linha *AB*; procurarei nella a divizaõ 50; e em *Ae* a divizaõ 6, e verei onde essas duas divizoens se encontraõ, que he no ponto *O*; e tomando no compasso a distancia de *O* até 6, acharei 56 partes centessimas. Porquanto de *O* até *i* ha 5 divizoens, cada huma de 10 partes; e desde *i* até 6, ha 6 partes centessimas: o que se prova assim.

Esse triangulo *eAm* estando dividido por parallelas, em qualquer parte que o cortem fica sempre semelhante ao total: logo assim como a altura do grande he para a do pequeno como 10 para 6, assim a baze do grande será para a do pequeno, como 10 : 6; e se *em* val 10 partes centessimas, 6*i* terá 6.

Do

Do mesmo modo se podem achar todas as partes centessimas, desde 1 até 99.

§. V.

Das Linhas que saõ meias proporcionaes.

N.º 191. NÓs Eugenio chamamos *meia proporcional* huma linha que posta entre duas dadas, faz com ellas huma progressaõ Geometrica, ou proporçaõ continua.

Precizo he advertir, que se chama hypothenuza num triangulo a linha que fica opposta a hum angulo recto; como v. g. (*Fig.* 10.) a linha *AB*.

Tomemos agora hum triangulo rectangulo, e baixemos do angulo recto a linha *O o* perpendicular sobre a hypothenuza *AB* : com isto temos o triangulo total *T* dividido em dois, hum pequeno *P*, outro maior *M*.

P tem hum angulo recto em *o*, assim como o total o tem em *O*; e

tem

tem além disso o angulo *A* commum ao triangulo *P*, e ao total *T*; e por conseguinte (n.° 86.) será semelhante ao total.

Do mesmo modo o triangulo *M* tem hum recto em *o*, e hum angulo em *B* commum ao triangulo *M*, e o triangulo *T*; e será por conseguinte semelhante ao total; e tambem semelhante a *P*. Donde tiraremos esta consequencia geral.

Logo.

N.° 192. *Toda a Perpendicular sobre a hypothenuza divide o triangulo em dois, semelhantes entre si, e ao total.*

Sendo pois os tres triangulos semelhantes, os seos lados seráõ proporcionaes (n.° 175.) tomemos pois em *P*, e em *M* os lados que formaõ os angulos rectos, para os comparar entre si; e diremos $Ao : oO :: oO : oB$.

Logo.

N.° 193. *A Perpendicular baixada*

so-

ſobre a hypothenuza, fica meia proporcional entre as duas partes della.

Logo.

Se nos derem duas linhas a, e b (*Fig.* 11.), *e nos pedirem huma meia proporcional entre ellas, a podemos achar deſte modo.* Eſt. 4. fig. 11.

I. Porei as duas linhas *a*, *b* ſeguidas huma á outra; e farei de ambas o diametro de hum ſemicirculo, e levantarei do ponto *e*, em que as duas linhas ſe juntaõ, huma perpendicular. Com iſto, ſe eu tirar as duas linhas *or*, *os*, faço hum triangulo rectangulo (n.º 47.); e pelo numero precedente *a* : *m* : : *m* : *b*.

Logo.

N.º 194. *Temos methodo para achar huma meia proporcional entre duas linhas dadas.*

⁂

Pela meſma razaõ da ſemelhança dos triangulos *P*, e *T* (*Fig.* 10.) podemos comparar entre ſi os lados Fig. 10.

que

que em hum e outro formaõ o angulo commum *A*, e dizer assim $Ao : AO :: AO : AB$.

O mesmo faremos nos triangulos *M* e *T*, comparando entre si os lados que formaõ o angulo commum *B*; e diremos $Bo : BO :: BO : BA$.

Logo.

N.° 195. *Dividido qualquer triangulo rectangulo pela perpendicular sobre a hypothenuza, qualquer dos lados fica meia proporcional entre toda a hypothenuza, e o segmento della que lhe corresponde.*

⁂

Se nós descrevermos hum semicirculo (*Fig.* 12.) o seu diametro será hypothenuza do triangulo feito por ella, e por duas cordas terminada na suas circunferencia; porque ellas necessariamente fazem angulo recto (n.° 74.).

Est. 4. fig. 12.

Lo-

Logo.

N.º 196. *Qualquer corda (Fig. 12.) tirada da extremidade do diametro, he meia proporcional entre o diametro todo, e o ſegmento delle cortado pela perpendicular baixada da extremidade da corda* : e podemos dizer *AO* : *AM* : : *AM* : *AB*. Eſt. 4. fig. 12.

⁂

Tambem podemos achar huma meia proporcional por outro modo.

Se juntarmos n'um ponto fora do circulo (*Fig.* 13.) huma ſecante e huma tangente, temos tres linhas, que vem a ſer a exterior *AO*, a tangente *AN*, e a ſecante total *AM*. Fig. 13.

Para examinar ſe ficaõ em proporçaõ, tiraremos as linhas *NO*, e *NM*; as quaes formaõ dois triangulos *NAO*. *NAM*. Chamemos o o pequeno *P*, e o grande *T*.

Eſtes dois triangulos tem o angulo *A* commum; além diſſo o angulo *M* tem por medida metade do arco *NO* (n.º 72.) e o angulo *ONA* tambem tem eſſa medida (n.º 77.) por

por ſer angulo de Corda e de Tangente : logo os dois triangulos ſaõ ſemelhantes ; e ſe compararmos os lados homologos , que formaõ o angulo commum *A*, ſe acharáõ proporcionaes : e aſſim podemos dizer *AO* : *AN* : : *AN* : *AM*.

Logo.

N.° 197. *A Tangente que toca na extremidade da Secante, he meia proporcional entre a Secante toda, e a ſua parte exterior.*

§ VI.

Modo de dividir qualquer linha em meia e extrema Razaõ.

.N.° 198. CHamamos , Amigo Eugenio , dividir huma linha *em meia e extrema razaõ* quando a dividimos deforma , que a parte pequena comparada com a grande tenha a meſma razaõ que a grande comparada com a total. (*Eſt.*
Eſt. 5. fig. 1. 5. *Fig.* 1.) V.g. ſe nos derem para di-

dividir a linha *AB*, e a dividirmos no ponto *e*, ficará a parte pequena *p*, comparada com a grande *g*, como a grande comparada com a total *T*: podendo nós dizer $p : g :: g : T$.

Para conhecer isto faremos o seguinte.

I. Tomarei metade da linha dada *AB*, e levantarei sobre a sua extremidade huma perpendicular *AO*, igual a essa metade, que me servirá de raio para hum circulo; ficando desde modo o diametro delle igual á linha dada *AB*.

II. Tirarei da extremidade *B* huma secante que passe pelo centro do circulo, e vá ter até á circunferencia *M*.

Isto posto, já temos huma Secante e huma Tangente unidas n'um ponto: e por conseguinte (n.° 197.) a exterior *BN* he para a tangente *BA*, como esta he para a secante *BM*, dizendo assim $\div\!\!\div BN : BA : BM$.

Ora o diametro *MN* he igual a *AB* Tangente, e se póde pôr em lugar della, sem perturbar a progresgreſſaõ : logo podemos dizer BN : NM : BM.

Ficando deſte modo dividida a ſecante em meia e extrema razaõ.

Ora ſe tirarmos as duas parallelas MA, Ne, temos dois triangulos ſemelhantes, cujos lados eſtaõ cortados proporcionalmente, e do meſmo modo. (n.° 170.)

Logo.

N.° 199. *Temos modo de cortar qualquer linha dada em meia e extrema razaõ.*

§ VII.

Das Linhas que eſtaõ em proporçaõ reciproca.

N.° 200. CHamamos proporçaõ reciproca quando hum objecto comprehende outro tantas vezes n'uma circunſtancia, quantas he comprehendido por elle em outra: deſorte que na ***proporçaõ reciproca*** o ſegundo termo e o terceiro pertencem ao meſmo objecto, e o primeiro com o quarto a outro objecto. Iſto poſto.

Se

Se nós tirarmos num circulo duas cordas *AN*, *EM*, as quaes ſe cortem (*Fig.* 2.) e unirmos as ſuas extremidades com duas linhas *EA*, *NM*, faremos dois triangulos *P* e *Q*; os quaes ſaõ ſemelhantes; porquanto os angulos em *O* ſaõ oppoſtos pelo vertice, e os angulos em *E*, *N* ſendo na circunferencia, e firmados no meſmo arco *AM*, ſaõ tambem iguaes. Logo os lados que formaõ os angulos em *O* ſaõ proporcionaes; e aſſim temos que *OA* : *OE* : : *OM* : *ON*. Eſt. 5. fig. 2.

Ora o ſegundo e terceiro termo pertencem á meſma linha, aſſim como o primeiro e quarto tambem pertencem a huma.

Logo.

N.º 201. *Quando duas linhas ſe cruzaõ dentro em hum circulo, fazem quatro ſegmentos, que ficaõ em proporçaõ reciproca.*

⁂

Supponhamos agora que duas ſecantes ſe juntaõ n'um ponto *A* fo-
Est. 5. ra do circulo (*Fig.* 3.) e que dos
fig. 3. pontos *O*, *I* em que cortaõ o circulo tiramos duas linhas de pontinhos ás extremidades *M*, *N*; neſte cazo teremos dois triangulos *NIA*, *MOA*; os quaes tem hum angulo commum em *A*, e os angulos em *M*, *N* iguaes, por ſerem na circunferencia, e firmados no meſmo arco *IO* (n.° 72.); por conſeguinte ſeraõ ſemelhantes, e os lados reſpectivos proporcionaes: deſorte que o lado minimo de *P* ſerá para o minimo de *Q*, como o maximo de *P* para o maximo de *Q*; iſto he

$$AI : AO :: AN : AM.$$

Ora o ſegundo termo e o terceiro pertencem á meſma linha *AN*; aſſim como o primeiro e o quarto pertencem á outra *AM* : ſinal proprio da Proporçaõ Reciproca.

Logo.

N.° 202. *Quando duas Secantes de hum circulo se unem em hum ponto fora delle, as exteriores estaõ em razaõ reciproca com as secantes inteiras.*

§. X.

Das Circunferencias proporcionaes nos poligonos, e nos circulos.

PAra conhecer que proporçaõ ha entre as Circunferencias de varios poligonos semelhantes, ou diversos circulos, podemos advertir o seguinte.

I. Que os poligonos se podem dividir em triangulos.

II. Que sendo os triangulos respectivamente semelhantes, e postos do mesmo modo, vem a formar poligonos tambem semelhantes: donde se seguem varias consequencias.

I.ª

Est. 5. fig. 4. DAdo qualquer poligono irregular (*Fig.* 4.) se nos pedirem outro semelhante, cujo circuito seja duplo, ou triplo, ou em qualquer outra razaõ, a respeito do que foi dado, faremos o seguinte.

Do angulo *O* tiraremos diagonaes a todos os mais angulos, e as prolongaremos indefinidamente.

II. Prolongaremos tambem indefinidamente os lados que formaõ o angulo *O*.

III. Tomaremos na linha *O M* huma extensaõ, que tenha a respeito do lado *O A* a razaõ dupla ou tripla, ou a que quizerem; e desse ponto *M* em que se terminar o novo lado, tirarei huma parallela ao lado do Poligono antigo *A I*, e do ponto *N* outra parallela ao outro lado antigo; e assim nos mais lados.

Porquanto feito isto, o novo poligono será semelhante ao que nos deraõ; pois os triangulos que o formaõ, saõ semelhantes aos que formamavaõ o que nos deraõ (n.º 176.).

Além disso como os lados saõ proporcionaes, a mesma razaõ que se dá entre *OA* e *OM*, se dará entre *AI* e *MN*; por conseguinte entre os dois circuitos dos poligonos.

Logo.

N.º 203. *Nos poligonos semelhantes os circuitos saõ proporcionaes aos lados homologos.*

II.

N.º 204. SE o Poligono for regular, dividido elle em triangulos pelos raios tirados do centro, e feita a mesma operaçaõ, ficará o novo Poligono semelhante, com o circuito na razaõ dos seus raios; pela razaõ que acabamos de dar para os Poligonos irregulares.

III.

COmo os Circulos saõ considerados á maneira de poligonos de infinitos lados, podemos dizer dos circulos o que dissemos dos poligonos regulares.

Logo.

N.º 205. *As Circunferencias dos circulos saõ entre si como os raios, ou como os diametros delles.*

Pela razaõ do n.º precedente.

⁂

Ora meu amigo Eugenio, se tiveres bem entendido estas Cartas, podeis socegar, que naõ encontrareis nos Elementos de Geometria, coiza que vos seja difficil; porque o pior caminho está passado. Lembrai-vos da comparaçaõ que já vos fiz, e crede que cada propoziçaõ demonstrada he como huma nova Tocha que vos hade alumiar pelo caminho escuro que vos resta; e tendo tantas tochas acezas, naõ deveis temer ás trevas. Deos vos guarde. &c.

Fim da quarta Carta.

CARTA V.

Das Superficies.

§ I.

Da formaçaõ da Superficie.

DEpois de tratar, Amigo Eugenio, das *Linhas* e ſuas propriedades, pede a bôa Ordem, que entremos a tratar das *Superficies*; e depois dellas, trataremos dos *Solidos*. Ora vós eſtais lembrado, que para vos dar ideia da *Linha* vos diſſe, que conſideraſſeis hum ponto movendo-ſe, e que aſſentaſſeis que linha era o caminho por onde eſſe ponto paſſava: agora digo coiza ſemelhante para vos dar ideia da *Superficie*. *Quando huma linha ſe move para hum lado, eſſe eſpaço por onde a linha paſſou, ſe chama Superficie.*

N.° 206. Supponde agora que huma linha recta ſe move para hum lado, mas ſempre parallela a ſi meſ-

ma

Est. 5. fig. 7. ma (*Est.* 5. *Fig.* 7.) esse espaço que a linha correo se chama *Parallelogramo*.

A linha *AB* he a *Movel*, e a linha *AC* a *Directriz*.

N.° 207. Se a movel com a directriz fazem hum angulo recto (*Fig.* 8.) chama-se o parallelogramo *Rectangulo*, como *A*. Fig. 8.

N.° 208. Se além do angulo ser recto a movel he igual á directriz, chama-se o parallelogramo *Quadrado*; como *B* (*Fig.* 9.) Fig. 9.

N.° 209. Se a movel fizer com a directriz hum angulo que naõ seja recto, chama-se o parallelogramo *Obliquangulo*; e nesse cazo, se a movel he igual á directriz, o parallelogramo se chama *Rhombo*, como v. g. *C* (*Fig.* 10.); porém se naõ forem iguaes as linhas, chama-se *Rhomboide*, como *D* (*Fig.* 11.) Fig. 10. Fig. 11.

N.° 210. Tomemos agora hum parallelogramo de qualquer especie que seja, e tiremos nelle huma linha de hum angulo ao outro opposto: esta linha chama-se *Diagonal*; e cada metade do parallelogramo he hum

Tri-

Triangulo; os quaes ou ſaõ rectangulos ou obliquangulos, conforme era o parallelogramo donde ſahiraõ: Eſt. 5.
como *T* e *D* (*Fig.* 8. e 11.) fig. 8.
N.° 211. Juntando dois triangulos fig. 11.
hum á ilharga do outro, deforma que tenhaõ hum lado commum, rezulta huma figura de 4 lados: Ora ſe dois delles forem parallelos, a
figura ſe chama *Trapezio* (*Fig.* 12.) Fig.12.
porém ſe naõ houver lado algum parallelo ao outro, ſe chama ſimples-
mente *Quadrilatero* (*Fig.*13.) Fig.13.

N.° 212. Toda a figura de muitos lados, e por conſeguinte de muitos angulos, ſe chama *Poligono*; e ſe os lados forem todos iguaes, como tambem os angulos, o Poligono he
regular; como *M* (*Fig.* 14.); porém Fig.14.
ſe os lados forem deziguaes, ou os angulos, a figura he *Poligono irre-*
gular, como *N* (*Fig.* 15.) Fig.15.

N.° 213. O Eſpaço comprehendido dentro da linha circular, ſe chama
Circulo (*Fig.* 16.); mas o eſpaço Fig.16.
comprehendido (*Fig.* 17.) entre dois Fig.17.
raios e o arco, ſe chama *Sector*; porém o eſpaço comprehendido (*Fig.*
18.) Fig.18.

18.) entre a corda e o ſeu arco ſe chama *Segmento.*

Conſequencias.

I.ª

DIſſemos aſſima (n.º 210.) que em qualquer *Parallelogramo* tirada huma *Diagonal* apareciaõ dois *Triangulos* : Dizemos agora que eſ-
Eſt. 5. fig. 8. 9, 10, 11. tes triangulos (*Fig.* 8, 9, 10, 11.) tem hum lado commum que he a Diagonal, e além diſſo os angulos adjacentes á Diagonal alternos, e aſſim os dois triangulos vem a ſer iguaes (n.º 113.). Além diſſo elles tem por baze os lados, que tambem ſaõ a baze do Parallelogramo; e tem a meſma altura delle.

Logo.

N.º 214. *Todo o parallelogramo ſe divide em dois triangulos iguaes, da meſma baze, e da meſma altura do parallelogramo.*

N.º 215. Note-ſe que podemos chamar baze a qualquer lado do triangulo, comtanto que chamemos vertice ao angulo que lhe ficar opposto.

Advirta-se tambem que chamamos altura do triangulo ou do parallelogramo, a perpendicular sobre a baze, ou sobre a continuaçaõ della; como *AC* (*Fig.* 19.) Est. 5. fig. 19.

Logo.

N.° 216. *O valor de qualquer triangulo he metade do valor que teria o seu parallelogramo*; isto he o que fosse da mesma baze, e da mesma altura.

Advirto, que quando falamos do valor do Triangulo, Parallelogramo, Circulo, Poligono &c. falamos da aria ou espaço comprehendido entre as linhas que o cercaõ.

§ II.

Modo de avaliar as Superficies.

N.° 217. PAra se avaliar a Superficie de hum parallelogramo rectangulo, se deve multitiplicar a baze pela altura : porém os principiantes naõ podem comprehender bem como se multiplica huma linha por outra.

Para isto se adverte, que qualquer quantidade reprezentada por huma linha, se deve dividir em certo numero de unidades, ainda que seja sempre arbitraria a qualidade dellas : pois cada unidade pode ser ou linha, ou polgada, ou palmo, ou vara, ou legoa &c. e assim multiplicando o numero de huma linha pelo numero da outra, fica huma linha multiplicada pela outra.

N.° 210. Advirta-se tambem, que formar huma superficie naõ he o mesmo que avalia-la; porquanto para a formar, se considera a linha Mathematicamente, isto he prescidindo de grossura; e esta linha se move para o lado, indo sempre parallela a si, segundo a direcçaõ da outra linha, para formar o espaço ou a superficie.

Porém se queremos avaliar a superficie já formada, devemos numerar a quantidade de partes que a com-

compoem; e já daqui se vê, que essas partes tambem haõde ser superficies, e naõ meramente linhas; porquanto de linhas mathematicas que naõ tem grossura naõ se pode compor huma extençaõ fisica, que tem largura; sendo bem certo que o *Nada* ainda que se multiplique infinitamente naõ pode dar coiza pozitiva.

He logo evidente, que quando se trata de avaliar alguma superficie, havemos de considerar a linha movel, como a primeira serie de unidades extensas, isto he de polegadas quadradas, ou palmos quadrados &c.: e pela mesma razaõ a linha *directriz* se deve dividir em unidades; e entaõ multiplicando-se hum numero pelo outro, temos o valor da Superficie.

Est. 5. fig. 20.

Supponhamos agora (*Fig.* 20.) que o parallelogramo que devemos avaliar tem na baze 5 polegadas, e de altura 3, devo multiplicar 5 por 3, o que dá 15; porquanto a baze em si tem 5 polegadas quadradas; a segunda serie outras 5, e a terceira igualmente: Ora pondo 3 series

ries humas sobre outras temos exhaurido o parallelogramo de altura 3.

Logo.

N.° 219. *Multiplicando a baze do Paralellogramo rectangulo pela sua altura temos o seu valor.*

Se por acazo a unidade que ha-de servir á medida naõ for hum quadrado, mas hum parallelegramo (*Fig.* 21.), como por exemplo se quizessemos saber quantos ladrilhos seriaõ precizos para ladrilhar huma salla, devemos fazer a mesma conta: mas com a cautella seguinte; se *A* face maior do parallelogramo que serve de unidade, for a baze, a face menor *O* deve servir para medir a altura do parallelogramo: porque desse modo multiplicando a primeira ordem tantas vezes quantas a altura do ladrilho entra na altura do parallelogramo, fica exhaurido todo o espaço: e assim $3 \times 4 = 12$; que he o valor do parallelogramo.

Est. 5. fig. 21.

✠

Para avaliarmos os parallelogramos obliquangulos faremos a reflexaõ seguinte.

Tomemos o parallelogramo rectangulo *A* (*Fig.* 22.) e dividamo-lo em varios parallelogramos horizontaes: se depois disso em vez de os considerarmos a prumo huns sobre outros, como em *A*, os consideramos na forma que se vê em *B*, o valor delles sempre será o mesmo. Est. 5. fig. 22.

Tiremos agora das duas extremidades da baze *C E*, duas parallelas ás extremidades da linha *D F*; a linha *C D* cortará todos os triangulos que mostra a figura; e a linha *E F* da outra parte fechará outros tantos espaços vazios triangulares; nos quaes caberáõ ao justo os triangulos da outra parte; porquanto a altura de huns e outros triangulos he a mesma; os angulos adjacentes ao lado que forma a altura delles saõ de hum angulo recto sempre igual, e outro angulo formado por paralle-

las

las, que he igual (n.° 45.); por conseguinte cada triangulo de huma parte he igual ao vazio que da outra lhe corresponde; e se os consideramos mudados para essa parte o encheraõ perfeitamente (n.° 113.): o que feito se reduz o parallelogramo rectangulo *A* a obliquangulo *B*.

Logo.

N.° 220. *Os parallelogramos que tem a mesma baze, e a mesma altura saõ iguaes.*

⁜

Est. 5. fig. 23. Ora se o Parallelogramo *B* (*Fig.* 23.) he igual ao rectangulo *A*, e este se avalia multiplicando a baze por altura, assim se deve avaliar o seu igual *B*; isto he multiplicando a baze *RS*, naõ pelo lado *SO*, mas pela altura *SE*.

Logo.

N.° 221. *Quando se houver de avaliar hum parallelogramo obliquangulo,* *lo, ſe deve multiplicar a ſua baze, naõ pelo lado, mas pela altura perpendicular.*

⁂

De caminho obſervamos que o parallelogramo obliquo *B*, tendo lados mais compridos que o recto *A*, he igual a elle no valor.

Logo.

Pode o meſmo eſpaço ſem mudar de valor ſer comprehendido ora por linhas maiores, ora por menores; (*Fig.* 23.). Eſt. 5. fig. 23.

Porquanto nos dois parallelogramos *A* e *B* os eſpaços ſaõ iguaes, e com tudo os lados em *A* ſaõ linhas perpendiculares, em *B* ſaõ obliquas, e ſempre as obliquas ſaõ maiores que as perpendiculares que cahem ſobre a meſma linha (n.º 37.)

Logo.

N.º 222. *Os eſpaços ou ſuperficies naõ ſeguem a meſma proporçaõ das linhas que os terminaõ.*

⁂

⁂

N.° 223. Nós dissemos que os triangulos eraõ metades dos parallelogramos que tivessem a mesma baze, e a mesma altura (n.° 216.) e acabamos de dizer que os parallelogramos da mesma baze, e altura saõ iguaes. Por conseguinte tambem o seráõ as respectivas metades.

Logo.

N.° 224. *Os triangulos da mesma*
Est. 5. *baze, e da mesma altura saõ iguaes*
fig. 24. (*Fig.* 24.); e assim *A* he igual a *B*.

Logo.

N.° 225. *Quando nos derem hum triangulo para ser avaliado, o podemos fazer por estes modos* (*Fig.* 25.)
Fig. 25.

I. *No triangulo A multiplicando toda a baze por toda a altura, e tomar sómente metade desse producto para valor do triangulo A.* A baze he 5, a altura 4, o producto 20, metade delle 10 para valor do triangulo *A*.

II.

II. *Multiplicando a baze do triangulo (B) por meia altura*; e entaõ a baze 5 multiplicada por meia altura 2, dá tambem 10, para valor do triangulo *B*.

III. *Em D multiplicando toda a altura* 4 *por metade da baze* $2\frac{1}{2}$ que faz tambem 10 para valor do triangulo *D*. A razaõ he, porque de todos estes tres modos vem a ter o triangulo metade do valor do seu parallelogramo.

⁂

Se nos derem para avaliar o trapezio da *Fig.* 26., faremos o seguinte. Est. 5. fig. 26.

Tiraremos a linha *MN* parallela ás duas faces parallelas do trapezio, e em igual distancia dellas: depois a multiplicaremos pela altura, fazendo hum parallelogramo rectangulo. Com isto cortaremos do trapezio os dois triangulos inferiores, e formaremos em sima outros dois superiores; os quaes saõ iguaes aos debaixo; porquanto a altura delles he a meſma, (pois a altura ſe dividio pelo meio) ; os angulos rectos ſaõ iguaes, e os que ſaõ oppoſtos pelo vertice tambem o ſaõ : por conſeguinte (n.° 113.) o triangulo inferior he igual ao ſuperior, que lhe correſponde ; e aſſim poſtos os triangulos ſuperiores em lugar dos inferiores que lhes ſaõ iguaes, o trapezio ſe converte em hum parallelogramo rectangulo, cujo valor he o producto da parallela media multiplicada pela altura.

Logo.

N.° 226. *Todo o Trapezio he igual ao parallelogramo em que a parallela media do trapezio ſe multiplica pela altura.*

§ III.

Modo de avaliar os Poligonos Regulares e os Circulos.

Eſt. 5. fig. 27. N.° 227. QUalquer poligono regular (*Fig.* 27.) ſe pode dividir em triangulos iguaes e ſemelhantes, tiranrando linhas do centro a todos os ſeus angulos; porquanto todos os lados que formaõ a circunferencia ſaõ iguaes, e todos os angulos tambem; aliás naõ ſería o poligono regular.

A linha perpendicular tirada do centro ſobre os lados do poligono ſe chama *Apothema.*

Para achar eſte centro levantaremos huma perpendicular ſobre o meio de hum lado *F*; e levantando outra ſobre o meio do lado *E*, ſe cruzaõ em algum ponto (*O*); ora como o lado *A* tem igual inclinaçaõ para *F*, tambem a perpendicular ſobre o meio deſſe lado cortará a de *F* no meſmo ponto *O*, em que a cortou a perpendicular tirada de *E*. O meſmo argumento ſe faz dos mais lados e todas ſe cruzaõ em *O*.

Digo agora que *O* ſerá o centro do Poligono, porque todos os triangulos tem bazes na circunferencia iguaes, e os angulos adjacentes iguaes; e aſſim em tudo ſaõ iguaes: Logo o circulo deſcrito de *O* como centro pode paſſar por todos os angulos, pois todos os raios e lados dos triangulos saõ iguaes.

Est. 5. fig. 28. Isto posto (*Fig.* 28.) se eu separasse todos os triangulos em que se dividio o poligono, pondo-os em linha recta: estes triangulos teríaõ o mesmo valor do poligono.

Além disso vós bem vedes, que os espaços vazios que estes triangulos deixaõ entre si, saõ outros triangulos iguaes em situaçaõ inversa; porquanto os lados saõ iguaes, e os angulos dos vertices comprehendidos por elles, tambem iguaes por serem alternos; pois os lados *Cm*, *Dn* saõ parallelos, pela igualdade dos angulos da baze em todos os triangulos do Poligono.

Ora supponhamos agora, que tomava os 3 ultimos triangulos *D*, *E*, Fig. 29. *F*, para os voltar sobre os primeiros tres *A*, *B*, *C* (*Fig.* 29.) ajustando-os nos vaõs que entre elles havia; e que dividia pelo meio o triangulo *F*, para o pôr nas duas extremidades; nesse cazo formaría hum parallelogramo, cuja baze sería meia circuncunferencia do poligono, e a sua altura todo o apothema.

Logo.

N.° 229. *O Poligono regular he igual a hum parallelogramo, cuja baze seja meia circunferencia, e altura todo o apothema.*

⁂

Se eu dividir pelo meio este parallelogramo da *Fig.* 29. e puzer (*Fig.* 30.) as duas metades huma adiante da outra, neste cazo tería hum parallelogramo do mesmo valor, cuja baze sería toda a circunferencia, e altura sómente meio apothema. Est. 5. fig. 29. fig. 30.

Logo.

N.° 230. *O Poligono regular tambem he igual a hum parallelogramo cuja baze seja toda a circunferencia, e cuja altura seja meio apothema.*

⁂

Dividamos agora esse parallelogramo (*Fig.* 30.) e tiremos em huma Fig. 30.

ma metade a diagonal *a o*: com ella faremos hum triangulo *n*, o qual
Est. 5. podemos voltar sobre o ponto *o* (*Fig.*
fig. 31. 31.) em ordem a cahir para a outra parte, e fazer hum Triangulo.

Nesses termos, o triangulo *m* será igual a *n*; pois ambos tem hum angulo recto; e os lados que o formaõ em hum e outro triangulo saõ iguaes (n.° 113.); e assim o valor delles he o mesmo: Logo cortando o triangulo *m*, e pondo *n* em seu lugar, naõ se mudará o valor; e nesse cazo temos hum triangulo cuja baze he toda a circunferencia, e altura todo o apothema.

Logo.

N.° 231. *O Poligono regular he igual a hum triangulo, cuja baze seja toda a circunferencia, e altura todo o apothema.*

✻

Fig. 32. Ora o Circulo (*Fig.* 32.) pode-se confundir com o poligono regular de lados infinitos; e assim tudo

tudo quanto ſe diz do poligono regular, ſe pode applicar ao circulo.

Logo.

N.° 232. *O Circulo A he igual primeiramente ao parallelogramo B, cuja baze ſeja meia circunferencia, e altura todo o raio.*

2. *He igual a hum parallelogramo C, cuja baze ſeja toda a circunferencia, e altura meio raio.*

3. *He igual a hum triangnlo D, cuja baze ſeja toda a circunferencia, e altura todo o raio.*

⁂

Nós diſſemos, que o *Sector* do circulo era huma porçaõ delle comprehendida entre dois raios e o arco: Eſt. 6.
(*Fig.* 1.) Iſto poſto; aſſim como o fig. 1.
circulo ſe reduz a hum parallelogramo cuja baze ſeja a circunferencia toda, ou todos os arcos que a formaõ, e a altura meio raio, aſſim podemos dizer do *Sector.*

E pela meſma razaõ; aſſim como o circulo ſe reduz a hum parallelelogramo, cuja baze ſeja meia circunferencia, e altura todo o raio, aſſim tambem ſerá o *Sector*.

Logo.

Eſt. 6. fig. 1. N.° 233. *O Sector do circulo (Fig. 1.) ſerá igual ao parallelogramo (A) que tem por baze meio arco (ME), e por altura todo o raio (MO). E tambem ſerá igual ao parallelogramo (B), cuja baze ſerá igual a todo o arco (MEN), e altura metade do raio MO.*

※

Diſſemos em ſeu lugar, que o ſegmento era a parte do circulo, comprehendida entre a corda e o arco; por conſeguinte tirando do valor do
Fig. 2. Sector (*Fig.* 2.) o triangulo *a*, feito pela corda e dois raios, o reſto ſerá o ſegmento.

Para iſto ſer bem ſenſivel, ponhamos os dois parallelogramos *A*, *B* da figura primeira, aos quaes nós reduzimos o *Sector*; e ſobre elles reduzamos agora o triangulo *a*,

que

que fica por baixo do segmento, re-
duzamo-lo (digo) aos parallelogra-
mos *a*, *a*, para ver o que resta. E
primeiramente, indo ao parallelogra-
mo *A*, reduzamos o triangulo *a* a
hum parallelogramo *a*, cuja baze se-
ja metade da corda, e altura todo
o complemento da flexa (isto he da
altura do segmento). Depois indo ao
parallelogramo *B*, reduzamos o tri-
angulo *a* a outro parallelogramo *a*,
cuja baze seja toda a corda, e altu-
ra meio complemento da flexa, co-
mo se vê na figura *B*. Isto posto, ve-
mos o que resta; e isso será o valor
do segmento. He bem verdade que
he huma figura irregular, mas que
se rezolve em dois parallelogramos
rectos faceis de avaliar.

Logo.

N.° 234. *O Segmento do circulo he igual ao parallelogramo que tem o valor do Sector, depois de lhe tirarem o parallelogramo que tem o valor do triangulo feito pela corda e raios* : como se vê na Fig. 2. Est. 6.

§. IV.

§ IV.

Do modo de reduzir hum parallelogramo a outro.

N.° 235. DO que dissemos assima (n.° 220.) se segue que podemos reduzir qualquer
Est. 5. fig. 23. parallelogramo obliquangulo (*B. Fig.* 23. *Est.* 5.) a outro recto *A*, que lhe seja igual. Prolongaremos huma baze *B* do obliquangulo, e levantaremos das extremidades da outra baze *R S*, duas perpendiculares, até encontrarem a linha *A B*; e ficará o parallelogramo recto *A* igual a *B*.

Agora daremos varios methodos para reduzir qualquer parallelogramo a outro qualquer que se pedir. Para isto he necessario saber
Est. 6. fig. 3. que (*Est.* 6. *Fig.* 3.) quando tiramos huma diagonal num parallelogramo; e por algum ponto (*O*) da dita diagonal tiramos duas parallelas aos dois lados do parallelogramo, formamos outros dois pequenos parallelogramos *A*, *B*; que se chamaõ *Complementos*.

Pa-

Para examinar ſe eſtes complementos *A*, *B* ſaõ iguaes, he precizo reparar que a diagonal divide em triangulos iguaes naõ ſó o parallelogramo total, mas tambem os dois parallelogramos parciaes cortados pela diagonal; e aſſim o triangulo *M* he igual a *N*; como tambem o triangulo *i* he igual a *e*: por conſeguinte ſe do triangulo que fica da diagonal para ſima tiramos *M* e mais *i*; e do triangulo que fica da diagonal para baixo tirarmos *N* e mais *e*, os dois reſtos *A*, e *B* haõde ſer iguaes.

Logo.

N.º 236. *Os Parallelogramos A, B, que ſaõ complementos, ſaõ entre ſi iguaes.*

⁂

Deſta regra geral ſe tira a ſoluçaõ de varios problemas.

I.º

N.º 238. Dado hum parallelogramo *Aa* (*Fig.* 5.) se nos pedirem outro igual, e que te- Eſt. 6. fig. 5.

tenha hum lado igual á linha dada *MN*, faremos o seguinte.

I. Prolongaremos *on*, accrescentando-lhe a dada *MN*, ou *mn* sua igual; e depois prolongarei igualmente *eu* baze inferior de *A*.

II. Prolongaremos indefinidamente os dois lados *ou*, *ne*, perpendiculares a *no*.

III. Tiraremos huma diagonal desde *m*, a qual passe pelo angulo *e*, até encontrar a linha *oI*.

IV. Do ponto *I*, em que as duas linhas se encontraõ, tirarei *PI*, parallela e igual a *mo*, e terminarei o parallelogramo *mo*, *PI*.

Isto feito se vê, que *B* he parallelogramo igual a *A*, e do comprimento que nos pediraõ, porque ambos saõ complementos (n.º 236.)

II.

Est. 6. fig. 6. N.º 239. SE além disto nos pedirem (*Fig.* 6.) que o novo parallelogramo, naõ sómente seja do comprimento dado *OE*, mas que seja obliquo, e com hum an-

angulo igual ao angulo *M*, faremos o seguinte.

I. Continuarei indefinidamente as duas bazes *as*, *ur*, e entre ellas formarei hum parallelogramo obliquangulo *B*, igual a *A* (n.° 220.); e com o angulo *M*.

Agora para reduzir *B* a outro que lhe seja igual, e tenha por hum lado a linha dada *OE*, faremos a operaçaõ como no numero precedente, tendo para isso prolongado as duas bazes de *B*, e tambem os outros dois lados *ci*, *on*; e tirando depois a diagonal *en*, até encontrar a linha *ci*, e acabando o parallelogramo *ceit* se determina a altura do parallelogramo *D*.

Deste modo o parallelogramo *D* será igual a *B*, por serem ambos complementos (n.° 236.); e por conseguinte *D* tambem será igual a *A*; e terá todas as circunstancias que pediraõ.

III.

Est. 6. fig. 4. N.º 240. SEja hum campo como reprezenta a (*Fig.* 4.), deforma que hum dono seja Senhor de todo o espaço branco, e o outro de todo o espaço escuro : pede-se que sem se fazer mediçaõ alguma das duas coirellas, se dê huma linha recta *xy*, parallela a *E i*, a qual divida os dois campos deforma, que sem prejuizo dos possuidores huma só linha separe as suas possessoens. Faremos o seguinte.

I. Prolongaremos a linha *E i* até *O*.

II. Poremos hum dos donos em *O*, e o outro em *A*.

III. Passearemos pela linha *Ri*, até que o nosso corpo embarasse que os dois possuidores se vejaõ.

IV. Por esse ponto *n* em que estiverem os nossos pés, tiraremos a linha *xy*, a qual satisfará ao que se pedio.

Porquanto o parallelogramo *M* que hum perde da sua possessaõ antitiga, he igual a *N* que de novo adquire, por ſerem *M N* complementos. (n.º 236.)

IV.

N.º 241. PAra converter hum parallelogramo qualquer que elle ſeja em hum quadrado igual, faremos o ſeguinte.

Lembrarnos-hemos do que diſſemos das proporcionaes (n.º 143.) que quando tres quantidades eſtavaõ em progreſſaõ, o producto dos extremos era igual ao quadrado do medio.

Ora ſendo o parallelogramo dado *M* (*Fig.* 7.) porei como primeiro termo da progreſſaõ a altura delle *A*, e por terceiro termo o ſeu comprimento *C*. Iſto feito buſcarei huma meia proporcional entre *A* e *C*, que ſerá *b*; e eſſe ſerá o lado do quadrado *N* que me pedem; porque eſtando em progreſſaõ as tres linhas $\div\!\div\, a : b : c$, inferimos logo $a \times c = b \times b$, ou b^2 (n.º 143.). Por conſeguinte *M* he igual a *N*. Eſt. 6. fig. 7.

V.

V.

TAmbem podemos por outro modo rezolver o problema assima do n.º 238., valendo-nos das proporçoens.

Est. 6. fig. 8. N.º 242. Seja dado (*Fig.* 8.) o parallelogramo *A* , e peçaõ-nos outro, cujo lado seja *M* , ignoramos qual deva ser a sua altura *x* , para que esse parallelogramo seja igual ao dado.

Dissemos que estando em proporçaõ quatro quantidades os productos dos extremos he igual ao dos medios, (n.º 141.) segue-se daqui, que se eu puzer a linha dada *M* como primeiro termo da proporçaõ, a altura e baze do parallelogramo dado (*A*) como segundo e terceiro termo della, teremos no quarto termo *x* , a altura do parallelogramo *B*; podendo entaõ dizer-se: Se $m : n :: o : x$ logo $m \times x = n \times o$; por conseguinte *A* formado por $o \times n$, he igual a *B* feito por $m \times x$.

§. VI.

§ V.

Da Reducçaõ das Figuras irregulares a outras tambem irregulares.

Diſſemos (n.º 224.), que os triangulos da meſma baze e altura eraõ iguaes donde ſe tiraõ varias conſequencias.

I.

N.º 243. SE nos derem hum pentagono *B* (*Fig.* 9.) Eſt. 6. para reduzir a hum quadrilatero, fa- fig. 9. remos o ſeguinte.

I. Tiraremos huma diagonal *MN*, e pelo vertice *I* huma parallela á diagonal.

II. Continuaremos hum dos lados da porçaõ inferior, até topar na parallela *O*, e tiraremos a linha *MO*. Neſte cazo o triangulo que fizemos de novo *MON* he igual ao que antes havia *MIN*, por terem a meſma baze e a meſma altura.

Logo.

O Quadrilatero EMOA fica igual ao pentagono que nos tinhaõ dado.

II.

N.º 244. SUponhamos que querem reduzir (*Fig.* 10.) este ou outro quadrilatero a hum triangulo: faremos a mesma operaçaõ, tirando a diagonal *MA*, e a parallela *RS*, e depois a linha *RA*.

Est. 6. fig. 10.

Porquanto isto feito, como o triangulo antigo *MEA* he igual ao novo *MRA*, vem a ficar o quadrilatero *MEAO* igual ao triangulo *RAO*.

III.

N.º 245. SE nos derem hum triangulo, e pedirem hum parallelogramo igual, faremos o que dissemos no (n.º 225.)

IV.

IV.

N.° 246. SE nos derem hum triangulo, e nos pedirem hum quadrado igual o reduzirei primeiro a hum parallelogramo conforme o que dissemos (n.° 225.); e depois reduziremos este parallelogramo a hum quadrado conforme o que dissemos (n.° 241.)

§ VI.

Das proporçoens das Superficies do mesmo nome, posto que sejaõ dissemelhantes.

N.° 247. DEpois de conhecermos o valor das superficies, convém que saibamos conhecer a razaõ que tem entre si: e principiemos pelas que tem o mesmo nome, v. g. parallelogramos entre si, triangulos entre si &c. e para isso havemos de dar attençaõ ora ás suas bazes, ora ás alturas, ora a tudo juntamente.

Sendo a altura dos dois paral-
Est. 6. lelogramos *A*, e *B* (*Fig.* 11.) a
fig. 11. mesma, se huma baze entra na outra 3 vezes, dividida a baze por parallelas, aparece *A* 3 vezes em *B*.

Logo.

N.° 248. *Os Parallelogramos da mesma altura estaõ entre si como as bazes.* ※

Ora os triangulos saõ ametades dos seus parallelogramos, e ficaõ entre si como elles (n.° 134.)

Logo.

N.° 249. *Os Triangulos da mesma*
Fig. 12. *altura (Fig. 12.) estaõ entre si como as bazes.* ※

Se os parallelogramos *A*, *B* (*Fig.* 13.) tem a mesma baze, em
Fig. 13. dividindo a altura do maior (*A*) por parallelas á baze, tantas vezes entra a altura de hum na do outro, tantas entrará todo o parallelogramo pequeno *B* no grande *A*.

Logo.

N.° 250. *Os parallelogramos da mes-*

mesma baze estaõ entre si como as alturas. De sorte que se a altura de *A* for 20 vezes maior que a de *B*, pela operaçaõ das parallelas entrará *B* 20 vezes em *A*.

⁂

Ora os triangulos ou as ametade dos parallelogramos saõ entre si como elles.

Logo.

N.º 251. *Os triangulos* (*Fig.* 14.) *da mesma baze estaõ entre si como as alturas*; e se *B* he duplo de *A*, ametade de *B* será dupla da metade de *A*. Est. 6. fig. 14.

⁂

Os parallelogramos podem juntamente ser differentes na baze, e na altura; deforma que (*Fig.* 15.) divididas por parallelas as bazes e as alturas, *A* pode entrar em *B* muitas vezes por conta da baze, e muitas por conta da altura. Fig. 15.

Logo.

N.º 252. *Os parallelogramos de diffe-*

ferente baze, e differente altura estaõ entre si na razaõ das bazes multiplicada pela razaõ das alturas.

E assim se a baze de *A* he tres vezes mais pequena que a de *B*, só por isso *A* entra 3 vezes em *B* (n.° 248.); porém como em *B* a altura he dupla de *A*, as 3 quantidades que já se continhaõ em *B*, se tornaõ a repetir para formar o parallelogramo *B* de altura dupla: por conseguinte *B* vem a ficar 6 vezes maior do que *A*. Isto he, está na razaõ 3 da baze multiplicada por 2 de altura.

⁂

Ora nós temos dito muitas vezes que os triangulos sendo metade dos parallelogramos, estaõ entre si como elles. (n.° 134.)

Logo.

N.° 253. *Os triangulos de diversas*
Est. 6. *bazes e alturas (Fig. 16.) saõ en-*
fig. 16. *tre si na razaõ das bazes multiplicada pela das alturas.*

E por isso completando os parallelogramos *A* e *B*, que lhes corres-

pon-

pondem, ficaõ elles ſendo metades dos parallelogramos, que tem entre ſi eſta razaõ.

§. VII.

Da proporçaõ das Superficies do meſmo nome e ſemelhantes.

N.º 254. ACabamos de dizer que os parallelogramos e triangulos de differente baſe e altura eſtaõ entre ſi na razaõ das bazes multiplicada pela das alturas.

Ora quando a razaõ das bazes e das alturas for a meſma, multiplicar huma pela outra he fazer o quadrado de qualquer dellas.

Logo.

N.º 255. *Os parallelogramos ſemelhantes (Fig. 17.) eſtaõ entre ſi como os quadrados de qualquer dos lados.* Eſt. 6. fig. 17.

Iſto he, ſe o lado de hum for duplo do do outro, o parallelogramo grande ſerá quadruplo do pequeno: como tambem (*Fig.* 18.) ſe o lado de hum val 3 vezes o do outro, Fig. 18.

tro, todo o parallelogramo valerá 9 vezes o outro.

※

Ora os triangulos saõ metades dos seus parallelogramos.

Logo.

Est. 6. fig. 19. N.° 256. *Os triangulos semelhantes* (*Fig.* 19.) *estaõ entre si como os quadrados dos lados.*

※

N.° 257. Nós de triangulos semelhantes podemos formar todas as figuras que forem entre si semelhantes; e por conseguinte conservaráõ entre si a mesma razaõ que tinhaõ os triangulos de que ellas se formaraõ.

Logo.

Fig. 20. N.° 258. *Todas as figuras semelhantes* (*Fig.* 20.) *tem entre si a mesma razaõ que os quadrados dos seus lados homologos.*

Lo-

Logo.

N.º 259. *Todos os poligonos regulares e ſemelhantes eſtaõ entre ſi como os quadrados dos ſeus lados homologos.*

Ora como nos Poligonos ſemelhantes os lados eſtaõ entre ſi como os raios que os dividem, ou como os apothemas, iſto he como as linhas *OE*, *oe* que ſahem do centro, perpendiculares aos lados; diremos que os Poligonos ſemelhantes ſaõ como os quadrados dos raios, ou dos apothemas.

Aſſim (*Fig.* 20.) o poligono *B* contém 4 vezes *A*, pois o lado he 2. Eſt. 6. fig. 20.

⁂

Nós ſabemos que os circulos ſe podem conſiderar como poligonos ſemelhantes de infinitos lados, e que neſſe cazo os apothemas ſe confundem com os raios; e por conſeguinte os circulos eſtaõ entre ſi como os poligonos ſemelhantes.

Logo.

N.º 260. *Os Circulos eſtaõ entre*

ſi

Est. 7. fig. 1. *si como os quadrados dos raios (Fig. 1.)*

E assim se o Raio de *B* he duplo do de *A*, o Circulo *B*, val 4 vezes *A*.

Os Diametros saõ dois raios; e tem entre si a mesma razaõ que elles.

Logo.

N.° 261. *Os Circulos estaõ entre si como os quadrados dos diametros.*

※

Fig. 2. Nos parallelogramos semelhantes (*Fig.* 2.) o expoente da razaõ das bazes he o mesmo da razaõ das alturas; e quando se multiplica hum expoente pelo outro, se multiplica por si mesmo, e se faz hum quadrado de qualquer delles. Ora o que se diz dos parallelogramos semelhantes se diz dos triangulos, e de todas as figuras semelhantes entre si.

Logo.

N.° 262 *O Expoente de figuras semelhantes he o quadrado do Expoente dos lados (Fig. 2.)*

Ad-

Advertencia.

N.º 263. QUando ſe tem medido huma ſuperficie com medida determinada; v. g. palmo quadrado ou vara quadrada &c. e depois he precizo reduzir eſta medida a outra maior, os principiantes coſtumaõ confundir-ſe: deſorte que com 5 palmos, julgaõ que fazem huma vara: o que he falſiſſimo em tudo o que he ſuperficie; ſendo ſómente verdade quando ſe trata de linhas. Iſto ſe vê claramente na *Fig.* 2. Eſt. 7. fig. 2. porque ſe para formar a baze de *B* que he huma vara, he precizo pôr ſinco vezes a baze de *A* que he hum palmo; e para fazer a altura de *B* tambem he precizo pôr ſinco vezes a altura de *A*: ſegue-ſe, que para encher huma vara quadrada he precizo pôr 5 ordens de palmos quadrados; e em cada huma pôr 5 palmos; o que faz 25 palmos quadrados, que compoem huma vara quadrada. Iſto ſuppoſto, ſe tendo avaliado huma ſuperperficie em palmos, for precizo reduzila a varas, repartiremos o numero de palmos por 25, e teremos no quociente o numero de varas quadradas. Como tambem pelo contrario, se tendo avaliado a superficie por varas, achamos alguns quebrados, e para reduzir tudo a inteiros quizermos reduzir as varas a palmos, devemos multiplicar o numero das varas por 25, e teremos o numero de palmos quadrados.

§. VIII.

Da razaõ que ha entre o Circulo e os Quadrados Inscrito, e Circunscrito, e do formado sobre o raio.

N.º 264. CHama-se *Quadrado Circunscripto* aquelle que fica por fóra do circulo, tocando-o por todos os 4 lados. Este quadrado necessariamente hade ter

Est. 7. fig. 3. por seu lado o Diametro (*Fig.* 3.)

N.º 265. Chama-se *Quadrado Inscrito* (*Fig.* 4.) o que se forma dentro

Fig. 4. do circulo, tocando a circunferencia nos seus quatro cantos.

Cha-

Chama-se *Quadrado do Raio* o que o tem por lado (*Fig.* 5.) Est. 7. fig. 5.

N.° 266. Agora para conhecer a razaõ que ha entre o circulo e o quadrado circunscripto farei o seguinte (*Fig.* 3.) Fig. 3.

I. Reduzirei o circulo a hum parallelogramo *A*, cuja baze seja a circunferencia, e a altura meio raio (n.° 232.); deste modo se o diametro do circulo val 7, a circunferencia delle ou o comprimento do parallelogramo será 22 (n.° 130.)

II. Dividirei o quadrado em 4 parallelogramos iguaes ficando cada hum delles com a altura de meio raio, e o comprimento do diametro: por conseguinte todos quatro enfiados fazem hum parallelogramo *B* da mesma altura que *A*; mas o seu comprimento será 4 vezes 7, ou 28.

Ora estes dois parallelogramos *A*, e *B* tem a mesma altura e saõ como as bazes (n.° 248.)

Logo.

N.° 267. *O Circulo he para o quadrado circunscripto como a circunfe-*

ren-

rencia para 4 diametros; que vem a ser como 22 para 28.

⁂

Se quizermos saber a proporçaõ do circulo para o quadrado inscri-
Est. 7. fig. 4. pto, faremos o seguinte (*Fig. 4.*)

I Dividiremos o quadrado *circunscripto* por duas diagonaes em 4 triangulos, e cada hum delles terá por baze o diametro, e por altura o raio.

II. Dividirei o quadrado *inscripto* por huma diagonal em dois triangulos, que tambem teráõ por baze o diametro, e por altura o raio.

Logo.

N.º 268. *O Quadrado inscripto he ametade do circunscripto.*

Por conseguinte o circulo he para o quadrado inscripto, como a circunferencia para dois diametros, ou como 22 para 14.

⁂

Finalmente para saber a razaõ que

que ha entre o circulo e o quadrado do ſeu raio, farei o ſeguinte.

Dividirei o quadrado circunſcrito (*Fig.* 5.) por dois diametros em 4 quadrados iguaes, e cadaqual delles ſerá quadrado do raio: por conſeguinte ſe o quadrado circunſcripto val 28, o quadrado do raio naõ valerá ſenaõ 7. Eſt. 7. fig. 5.

Logo.

N.° 269. *O Circulo he para o quadrado do ſeu raio, como a circunferencia para hum diametro; ou como 22 para 7.*

Saõ logo os 3 quadrados que pertencem a hum circulo como 7, 14, 28, valendo o circulo 22.

§ IX.

Da razaõ que ha entre o quadrado da Hypothenuza, e os quadrados dos outros dois Lados.

Esta propoziçaõ, que he famoziſſima, ſe atribue a Pithagoras; o qual dizem que por a ter achado facrificára ás Mufas 100 Bois em agradecimento.

Para conhecer pois a proporçaõ
Est. 7. que ha entre o quadrado *T* da hypo-
fig. 6. thenuza (*Fig.* 6.) e os dois quadrados *A* e *B*, formados fobre os lados do triangulo *a*, *b* faremos o feguinte.

I. Tiraremos huma perpendicular defde o vertice do triangulo, a qual o dividirá em dois *a*, *b*; os quaes faõ femelhantes entre fi, e tambem ao total (n.° 192.)

II. Lembrarnos-hemos de que os triangulos femelhantes faõ entre fi como os quadrados dos feus lados (n.° 256.); e affim os 3 triangulos *a*, *b*, e o total, faõ entre fi como os quadrados *A*, *B*, e *T*.

III. Obfervemos que os dois triangulos pequenos *a*, *b* juntos faõ iguaes ao grande: logo tambem os dois quadrados pequenos *A*, *B* juntos faõ iguaes ao grande.

Logo.

N.° 270. *O Quadrado da Hypothe-*

thenuza he igual aos dois quadrados dos lados.

※

Supoſta a celebridade deſta propoziçaõ, naõ ſctá dezagradavel aos principiantes o ter noticia de algumas outras demonſtraçoens, as quaes aqui ajuntaremos.

Formemos hum triangulo reɛtangulo (*R Fig.* 7.) e ſobre os ſeus 3 lados formemos os 3 quadrados *A*, *B*, *H*; baixemos do vertice do triangulo huma perpendicular, que divida naõ ſó a hypothenuza, mas tambem o ſeu quadrado em dois parallelogramos *a*, *b*. Eſt. 7. fig. 7.

Ora pelo (n.º 195.) quando ſe baixa huma perpendicular desde o vertice ſobre a hypothenuza; qualquer lado do angulo reɛto he meia proporcional entre a hypothenuza toda, e o ſegmento cortado pela perpendicular; por conſeguinte temos $Me : MO :: MO : MN$: Logo multiplicando o primeiro termo pelo ultimo, faremos hum parallelogramo igual ao quadrado do termo medio;

 e aſ-e assim o parallelogramo *a* he igual ao quadrado *A*. Pela mesma razaõ *b* he igual a *B*; logo $a+b$ que fazem o quadrado da hypothenuza he igual a $A+B$, quadrados dos lados.

※

Est. 7. fig. 8. Ainda se pode demonstrar por outro modo (*Fig.* 8.) Temos o triangulo rectangulo *A E O*, queremos provar que o quadrado de *AO*, he igual ao quadrado de *AE*, junto com o quadrado de *EO*.

Ponhamos o triangulo em *b*, e formemos sobre os seus lados os dois quadrados *P*, e *Q*: ficaõ dois parallelogramos claros, com os quaes se encheria o quadrado total da figura *P*, *T*, *R*, *Q*.

Formemos agora o quadrado da hypothenuza *a o*, e temos o quadrado *a*, *o*, *i*, *s*. Este quadrado deixa quatro triangulos *m*, *m*, *m*, *m*. Estes triangulos saõ iguaes entre si, e iguaes a *b*. O que se conhece advertindo, que os lados do quadrado total *P T R Q* saõ iguaes, e cada hum he igual a hum lado pequeno

dos

dos triangulos, junto com hum lado grande; e como todos saõ rectangulos vem a ficar todos iguaes. Ora cada parallelogramo claro val dois triangulos *m m*; logo tanto valem os dois parallelogramos claros, como os quatro triangulos *m*, *m*, *m*, *m*: Ora se tirarmos do quadrado total os dois parallelogramos ficaõ os dois quadrados *P*, *Q*. Se tirarmos do quadrado total os 4 triangulos, fica só o quadrado da hypothenuza; logo tanto val o quadrado da hypothenuza, como os dois formados sobre os lados.

⁂

O Grande Euclides demostra esta propoziçaõ pelo modo seguinte (*Fig.* 9.) Est. 7. fig. 9.

Forma o triangulo rectangulo *MON*, e os tres quadrados sobre os seus lados, tira huma perpendicular sobre a hypothenuza, aqual divide o seu quadrado em dois parallelogramos; e depois prova que o parallelogramo *G* he igual ao quadrado *B*, assim como o parallelogramo *H* he igual a *A*: o que prova do modo ſeguinte.

Primeiramente os dois triangulos *SON*, *NMF* saõ iguaes, pois ambos tem hum lado do quadrado grande, e outro lado do quadrado *B*, e o angulo comprehendido entre elles he compoſto do angulo commum *e*, e de hum angulo recto. O que baſta para ſerem iguaes (n.º 112.)

Ora o triangulo *SON* he metade do parallelogramo *G*, porque tem o meſmo valor que teria ſe o ſeu vertice eſtiveſſe em *c*. Do meſmo modo o triangulo *NMF* he metade do quadrado *B*, porque tem o meſmo valor que teria ſe o ſeu vertice *M* paſſaſſe para *O*: Logo ſe metade de *G* he igual a metade de *B*, o parallelogramo *G* he igual ao quadrado *B* que lhe correſponde.

Do meſmo modo ſe prova que *H* he igual a *A*: Logo ſe *H* e *G* fazem o quadrado da hypothenuza, fica eſte igual aos dois quadrados dos lados *A* e mais *B*.

Con-

Consequencias desta Proposição.

I.

SE o triangulo rectangulo (*Fig.* 10.) tiver hum lado do angulo recto que valha 3, e o outro que valha 4, o quadrado de hum será 9, e o do outro 16, os quaes juntos fazem 25: ora o quadrado da hypothenuza será 25, cuja raiz he 5. Est. 7. fig. 10.

Logo.

N.° 271. *No triangulo rectangulo, se o angulo recto for feito por lados de valor de* 3, *e de* 4, *a hypothenuza será* 5.

II.

N.° 272. SE quizermos levantar huma perpendicular na extremidade de huma linha (*Fig.* 11.) quando o terreno naõ permite nem prolongala, nem trabalhar para debaixo della, o faremos pelo methodo seguinte. Fig. 11.

1. Com o compasso notaremos na linha dada 5 medidas iguaes.

2. Tomaremos tres medidas no compasso, e desde o ponto *M* descreverei hum arco.

3. Tomarei no compasso 5 medidas, e vindo ao ponto *A* que termina 4 medidas, descreverei outro arco, que cortará o primeiro em *O*; e desse ponto baixarei huma linha até *M*. A qual he perpendicular; porquanto sendo o triangulo formado com lados de 3, 4, 5 medidas, necessariamente hade ser rectangulo.

III.

N.º 273. TOda a vez que o triangulo rectangulo for Isosceles; v. g. como quando
Est. 7. fig. 12. (*Fig.* 12.) dividimos hum quadrado pela sua diagonal, o quadrado da hypothenuza será duplo de qualquer quadrado que se formar sobre os lados; porquanto sendo o da hypothenuza igual á somma dos dois dos lados, he duplo de qualquer das metades dessa somma: e assim.

Se

Se nos derem hum quedrado *A* (*Fig.* 12.), e nos pedirem outro que ſeja duplo delle, tiraremos huma diagonal, e eſſa ſerá o lado do quadrado novo *B*; porque he hypothenuza de hum triangulo iſſoſceles. Eſt. 7. fig. 12.

Logo.

N.° 274. *Ha methodo para formar hum quadrado duplo de outro dado.*

IV.

SE n'um quadrado *A* tirarmos as diagonaes *RM*, *ON*, ſeráõ mutuamente perpendiculares; porque a primeira tem dois pontos *R*, *M* igualmente diſtantes das extremidades da outra (n.° 32.); e do meſmo modo a ſegunda a reſpeito da primeira; e como cada huma tem dois pontos igualmente diſtante das extremidades da outra, ſe cortaõ pelo meio (n.° 35.); por conſeguinte o triangulo *N e M* he rectangulo, e Iſſoceles.

Logo o quadrado ſobre a ſua hy-

hypothenuza *N M* he duplo do quadrado sobre o seu lado *o M*; por conseguinte o novo quadrado *B* he metade do que nos deraõ *A*.

Logo.

N.° 275. *Temos methodo para formar hum quadrado (B) que seja metade de outro quadrado (A) que nos tenhaõ dado.*

V.

N.° 276. SE nos pedirem que reduzamos a hum so quadrado dois quadrados que nos derem *A*, *B* (*Fig.* 14.) faremos o seguinte.

Est. 7. fig. 14.

1. Formaremos hum angulo recto com linhas indefinidas.

2. Poremos de huma parte o lado de *A*, e da outra o de *B*, tiraremos huma linha *M N* que será hypothenuza, e por isso *C* quadrado sobre ella, será igual aos dois juntos *A*, e *B*.

§ X.

§ X.

Applicaçaõ da doutrina da Hypothenuza aos Poligonos e Circulos.

NÓs dissemos (n.º 261.) que todas as figuras semelhantes eraõ entre si como os quadrados dos seus lados correspondentes : ora os poligonos regulares do mesmo numero de lados saõ figuras semelhantes.

Logo.

N.º 277. *O Poligono regular sobre a hypothenuza he igual aos dois poligonos semelhantes* sobre os dois lados ; e assim o Poligono *C* (*Fig.* 15.) he igual aos dois *A*, e *B*. Est. 7. fig. 15.

⁂

Como os circulos podem ser considerados á maneira de poligonos regulares, podemos dizer dos circulos o que acabamos de dizer dos poligonos.

Lo-

Logo.

Est. 7. fig. 16. N.° 278. *O Circulo sobre a hypothenuza he igual aos dois circulos sobre os lados* (*Fig.* 16.); e assim *C* será igual a *B* junto com *A*, *e se o triangulo for issoceles, o circulo da hypothenuza será dobrado do circulo de qualquer dos lados* (n.° 273)

Consequencias.

I.

Fig. 17. SE nos derem huma Coroa, ou hum anel, (*Fig.* 17.) e nos pedirem hum circulo que seja igual ao anel, se obrará deste modo.

1. Tomarei o diametro exterior do anel *M N*, para fazer delle huma hypothenuza, descrevendo sobre ella hum meio circulo *m*, *o*, *n*.

2. Tomarei o diametro interior do anel, e farei delle o lado *m o* do triangulo rectangulo.

3. Acabarei o triangulo com a linha *o n*; e esta será o diametro do cir-

circulo *P*, o qual ferá igual ao anel que nos deraõ.

Porquanto o circulo *A* da hypothenuza he igual aos dois, *P* e *Q*; logo *A* menos *Q* hade fer igual a *P*: ora *A* menos *Q* he o meſmo que o anel; porque o circulo *Q* he igual ao vaõ *Q*; e aſſim tanto val dizer *A* menos *Q*, como dizer o anel; e aſſim o Anel *A* he igual a *P*.

Logo.

N.° 279. *Ha methodo para reduzir hum anel, ou coroa a hum circulo inteiro.*

II.

SE nos derem (*Fig.* 18.) huma Lua ou creſcente *B*, para reduzir a hum circulo inteiro, procederei como no cazo precedente; porque tanto importa tirar de hum circulo grande hum pequeno concentrico, como tiralo mais de hum lado que do outro; o que faz que em lugar de huma coroa ou anel, tenhamos huma eſpecie de Lua nova.

Ad-

Advirta-se porém que naõ deve o circulo pequeno *A* sahir do grande por nenhum cazo, em ordem a que a demonstraçaõ tenha seu vigor.

III.

Est. 7. fig. 19. SE nos derem hum circulo *A* (*Fig.* 19.), e nos pedirem outro que seja duplo delle o farei do modo seguinte.

1. Tirarei dois diametros em angulo recto; e os unirei com huma hypothenuza *B O*.

2. Desta hypothenuza me servirei como de raio para o novo circulo *B*.

Isto posto temos, que *B* tem como raio huma hypothenuza, e *A* hum dos lados do triangulo, sendo elle Issosceles: Ora já dissemos que os circulos eraõ como os quadrados (n.º 260.), e tambem dissemos (n.º 273.) que o quadrado da hypothenuza era duplo do quadrado de qualquer dos lados: e assim *B* será duplo de *A*.

Lo-

Logo.

N.° 281. *Temos methodo para fazer hum circulo (B) , que seja metade de outro dado (A).*

§. XI.

Modo de formar Quadrados e Circulos em qualquer razaõ que nos pedirem a respeito dos que nos foraõ dados

N.° 282. Dissemos (n.° 196.) que tirando da ex-
Est. 8. fig. 2. tremidade de hum diametro (*Fig.* 2.) huma corda *AM* ficava meia proporcional entre todo o diametro *AB*, e o segmento delle *AO*, cortado pela perpendicular *MO*.

Podendo entaõ dizer ∺ *AO*: *AM* : *AB* ; por conseguinte o producto dos extremos hade ser igual ao quadrado da quantidade media : isto he $AO \times AB = \overline{AM}^2$, que he o mesmo que $AM \times AM$.

Do mesmo modo (*Fig.* 2.) posso

ſo moſtrar que a outra corda AN he meia proporcional entre o diametro AB e o ſegmento AI cortado pela perpendicular NI; podendo dizer-ſe $AI : AN :: AN : AB$; e por conſeguinte $AI \times AB = \overline{AN}^2$

N.º 283. Façamos iſto ſenſivel na *Fig.* 3. As duas cordas Mr, Ms, ſaõ meias proporcionaes entre o diametro total MN, e os ſeus dois ſegmentos Mo, Mi: por conſeguinte $Mo : Mr :: Mr : MN$. Logo $Mo \times MN = Mr \times Mr$.

Ora $Mo \times MN$ he o parallelogramo a, cuja baze he Mo, e altura he $Mn = MN$; e $Mr \times Mr$ he o quadrado A; e aſſim o parallelogramo a he igual ao quadrado A.

Do meſmo modo ſe prova que o parallelogramo total Mp he igual ao quadrado maior B, cujo lado ſeja a corda Ms.

Ora eſtes dois parallelogramos Mg, Mp tendo a meſma altura ſaõ entre ſi como as bazes; iſto he como os ſegmentos Mo, Mi: Logo os dois quadrados, que lhes ſaõ iguaes, ſaõ entre ſi como os dois ſegmentos Mo, Mi.

Lo-

Logo.

N.° 284. *Os quadrados das cordas tiradas da extremidade do diametro saõ entre si, como os segmentos do diametro, cortados pelas suas perpendiculares.*

Desta regra geral se tiraõ varias
Consequencias.

I.

N.° 285. SE dado hum quadrado A (*Fig.* 4.) nos
Est. 8. fig. 4. pedirem a hum tempo varios outros que tenhaõ diversa proporçaõ com o primeiro. V. g. 4 vezes maior, ou 6, ou 9, e 13, e $15\frac{1}{2}$, e 20 &c. poderemos em brevissimo tempo rezolver este problema do modo seguinte.

1. Tire-se huma linha arbitraria, e sobre ella descreva-se hum meio circulo.

2. Tome-se no compasso *a i*, lado do quadrado *A* que nos deraõ,

e

e forme-ſe delle huma corda *a i* ſahida da extremidade do diametro; e da outra extremidade da corda (*i*) tire-ſe huma perpendicular ſobre o diametro.

3. Tome-ſe no compaſſo eſſe segmento *a* 1 do diametro, e com eſſa medida vamos dividindo todo o diametro na forma da figura

IV. Notarei o n.º 4, 6, 9, 13, 15 $\frac{1}{2}$, e 20 &c. que correſpondem aos quadrados que me pediraõ; e delles levantarei perpendiculares, as quaes hiráõ ter aos pontos da circunferencia *m*, *n*, *o*, *p*, *q*; onde hiráõ parar as cordas tiradas de *a*, que haõde ſer os lados dos quadrados que nos pediraõ.

Porquanto eſtá provado que eſtes differentes quadrados da figura eſtaõ entre ſi como os ſegmentos do diametro cortados pelas perpendiculares. (n.º 284.) Logo os novos quadrados eſtaõ neſſa meſma proporçaõ de 4, 6, 9, 13, 15 $\frac{1}{2}$.

Se acazo o numero dos quadrados que nos pediraõ for taõ longe que naõ caiba no diametro arbitrario que se tomou, tome-se outra linha maior á proporçaõ das que faltarem, e repita-se para esses a operaçaõ.

Logo.

N.° 286. *Temos methodo para formar com huma só operaçaõ quaesquer quadrados na razaõ que nos pedirem.*

II.

NÓs dissemos que os circulos estavaõ entre si como os quadrados dos seus diametros (n.° 261.): por conseguinte podemos dizer dos circulos cujos diametros forem as
Est. 8. cordas (*Fig.* 5.) que elles tem en-
fig. 5. tre si a mesma razaõ dos segmentos de hum diametro, cortados por varias perpendiculares sahidas das outras extremidades das cordas; e assim dando-nos o circulo *B*; poderemos fazer outros *C*, *D*, que sejaõ 5, ou 7 vezes maiores, ou em qualquer outra razaõ que os pedirem.

Lo-

Logo.

N.º 287. *Temos methodo para formar com huma só operaçaõ os circulos que nos pedirem, em qualquer razaõ que quizerem a respeito de algum circulo dado (B.)*

III.

N.º 288. SE nos derem hum circulo *A* (*Fig.* 6.) e nos pedirem outro que seja a terceira ou quinta parte delle, faremos o seguinte. Est. 8. fig. 6.

1. Tire-se huma linha arbitraria, mas que seja maior que o diametro do circulo dado, e descreva-se sobre ella hum semicirculo; e depois huma corda *m n*, igual ao diametro *MN* do circulo dado.

2. Tire-se de *n* huma perpendicular *n o*, sobre o diametro; e divida-se esse segmento (*m o*) do diametro em tres partes iguaes: da divizaõ 1 se levante huma perpendicular, que hirá ao ponto *e*: delle

tire-se a corda *em*, que será o diametro do novo circulo *B*, o qual pelo que está dito, será a terça parte de *A*. Porque os circulos *A*, *B* estaõ entre si como os segmentos do diametro *m* 1, *m* 3.

IV.

N.º 289. SE havendo-nos dado dois quadrados, ou
Est. 8. dois circulos *A*, *B* (*Fig.* 7.) nos
fig. 7. perguntarem que razaõ ha entre elles, faremos o seguinte.

1. Descreva-se hum meio circulo arbitrario, porém deforma que o seu diametro seja maior que o de qualquer delles.

2. Dos dois diametros se faráõ duas cordas, nascidas ambas do ponto *M*; e das outras extremidades dellas baixarei perpendiculares sobre o diametro do meio circulo.

3. Verei que proporçaõ ha entre os dois segmentos desse diametro, *MO*, *ME*, e essa mesma será a razaõ entre os dois circulos dados.

Do mesmo modo podemos trabalhar

balhar ſe forem quadrados, fazendo dos ſeus lados cordas.

Logo.

N.° 290. *Ha methodo para achar a razaõ entre muitos quadrados que nos derem, ou entre muitos circulos dados.*

V.

SE nos derem hum circulo *A* (*Fig.* 8.) e nos pedirem outro que ſeja v. g. tres vezes maior, ſem nos valermos dos quadrados das cordas como fizemos no n.° 287, o poderemos fazer do modo ſeguinte. Eſt. 8. fig. 8.

1. Ponhamos o diametro *m n*, do circulo dado, e continuemos a linha tomando outras tres porçoens iguaes.

2. Deſcreva-ſe ſobre eſſa linha total hum ſemicirculo.

3. Levante-ſe huma perpendicular do ponto *n*, e ella ſerá o diametro do novo circulo *B*, que deve ſer a reſpeito de *A* como 3 para 1.

Porquanto as tres linhas *m n*, *n e*,

ne, *no* estaõ em proporçaõ; logo o quadrado da primeira linha *mn* he para o quadrado da segunda *ne*, como a primeira linha he para a terceira *no* (n.° 116.), e como os circulos saõ entre si como os quadrados (n.° 261.) o circulo de *mn* he para o de *ne*, como a linha *mn* he para a linha *no*.

Logo.

Temos outro mothodo para fazer hum circulo na razaõ pedida a respeito do que nos deraõ, sem nos valer das cordas dos circulos.

§ XII.

Modo de achar Superficies que sejaõ meias proporcionaes entre duas Superficies dadas.

DIssemos que quando se multiplicava huma linha por outra se fazia hum parallelogramo, no qual huma das linhas servia de baze, e outra de altura perpendicular (n.°219.) e que e que os parallelogramos da meſma baze eraõ como as alturas (n.° 250.) e os da meſma altura eraõ como as bazes (n.° 248.)

Supponhamos agora que nos daõ dois quadrados *A*, *B* (*Fig.* 9.) e que multiplicamos o lado de hum pelo lado do outro, faremos o parallelogramo *C*. Eſte parallelogramo a reſpeito de *A* eſtará na razaõ das bazes, iſto he de 3 para 4; e a reſpeito de *B* na razaõ das alturas, tambem de 3 para 4; ora como nos quadrados a razaõ das bazes he a meſma que a das alturas, ſegue-ſe que ha a meſma razaõ entre *A* e *C*, que entre *C* e *B*: e por conſeguinte *C* fica meia proporcional entre *A*, e *B*. Eſt. 8. fig. 9.

Logo.

N.° 219. *Ha methodo para achar hum parallelogramo que ſeja meio proporcional entre dois quadrados dados.*

Pelo meſmo modo (*Fig.* 9.) ſe nos derem outros dois quadrados *B E*, em multiplicando hum lado de Fig. 9.

B

B por outro de *E* faremos o parallelogramo *D*, que ſerá meio proporcional entre os dois pela razaõ aſſima.

O que ſe confirma pelos numeros, porque ſe *A* tiver por lado 3, e *B* 4 (*Fig.* 9.) hum vale 9 e o outro 16 : ora multiplicando o lado de hum 3, pelo de outro 4, temos o parallelogramo 12, meio proporcional entre 9 e 16 ; porque podemos dizer 9 : 12 : : 12 : 16. reinando neſta proporçaõ a razaõ de 3 a 4.

Do meſmo modo ſe o lado de *B* vale 4 e o de *E* vale 5, em multiplicando 4 por 5 faremos o parallelogramo *D*, que vale 20, meio proporcional entre *B*, que vale 16, e *E* que vale 25 : podendo dizer 16 : 20 : : 20 : 25 ; pois em ambas as partes reina a razaõ de 4 a 5.

⁂

N.° 292. Se dados dois quadrados nos pedirem hum novo quadrado, que ſeja meio proporcional entre os dois, faremos o ſeguinte.

1. Buſquemos huma meia pro-

por-

porcional entre os lados dos dois quadrados que nos deraõ *A* e *B*, (*Fig.* 10.) e acharemos a linha *e*, que ſerá o lado do quadrado pedido *E*. Eſt. 8. fig. 10.

Porquanto ſe tres quantidades *a*, *e*, *b* eſtaõ em progreſſaõ, tambem o ficaõ os quadrados que dellas ſe formaõ, ainda que a razaõ ſeja differente (n.° 259.)

Exemplo $\div$ 1 : 2 : 4; o expoente ou a razaõ que reina neſta progreſſaõ he 2, e ſe fizermos os quadrados deſtas raizes teremos $\div$ 1 : 4 : 16 cujo expoente he 4.

Logo.

Se $\div$ *a*, *e*, *b*, *eſtaõ em proporçaõ, tambem os ſeos quadrados* $\div$ *A*, *E*, *B*, *o eſtaõ.*

⁂

Eisaqui Amigo Eugenio hum rezumo das propoziçoens mais uteis que achei tocantes as ſuperficies; ſei que vos hade iſto dar hum goſto indizivel, pelo que me tendes dito nos correios paſſados; porquanto ſe a doutrina ſóbre as linhas vos inteteressa tanto, que andais encanrado segundo a vossa expressaõ, muito mais encantado vos deixara a doutrina das Superficies; e ainda muito mais a dos Solidos, que começo já a preparar para vola remeter com brevidade.

Fim da quinta Carta.

CAR-

CARTA VI.

Sobre os Solidos.

§ I.

Da Formação dos Solidos.

SUpposto o que me mandais dizer, Amigo Eugenio, que tendes entendido bem o que vos disse na Carta antecedente, nenhuma duvida tenho que comprehendereis facilmente o que vos vou agora a dizer sobre os Solidos.

Primeiramente quanto á sua Formação quero que vos lembreis da formação das Linhas, e das Superficies; porque assim como considerando o movimento de hum ponto formamos a ideia de huma *Linha*, e considerando o movimento de huma linha fazemos a ideia de huma *Superficie*, assim tambem.

N.° 293. Considerando o movimento de huma Superficie (v. g. *AM* *Est.* 9. *Fig.* 1.) que vai sempre paral- Est. 9. fig. 1.

rallela a si mesma, e seguindo huma linha recta (*A E*) faremos a ideia de hum *Solido*; este solido assim formado se chama com nome geral *Prisma*.

N.º 294. Se a superficie movel era hum parallelogramo, como v. g. *A M* (*Fig.* 1.) o Solido ou *Prisma* que formou se chama *Parallelipipedo*, isto he Solido comprehendido entre faces parallelas.

Est. 9. fig. 2. Se a superficie movel era hum triangulo ou Poligono (*Fig.* 2.) o Prisma que se formou fica *Triangular* ou *Poligonico*.

N.º 295. Se o plano que se moveo era hum circulo, o Solido que disso rezulta se chama *Cilindro*, como v. g.
Fig. 3. *Fig.* 3.

N.º 296. Se o plano ou superficie que se moveo naõ somente vai sempre parallelo a si mesmo, mas á proporçaõ que se move vai diminuindo por todos os lados proporcionalmente, até acabar em hum ponto, o Solido que daqui rezulta, se o plano era figura rectilinea se chama *Piramide*; e se era hum circulo se chama *Cóne*.

N.º

N.º 297. O movimento do Plano deve ſeguir huma linha recta (v. g. *A E Fig.* 1.), a qual ſe chama *Directriz.*

Se a Directriz ſe eleva perpendicularmente ſobre o plano, como v. g. na *Fig.* 1, 2, 3, 4, o priſma ou Cilindro, ou Piramide, ou Cóne ſe chamaõ *Rectos*; porém ſe a Directriz ſe inclina mais para huma parte do plano do que para a outra, o Solido ſe chama *Obliquo*, como na *Fig.* 5., 6. Eſt. 9. fig. 1. 2., 3., 4. Fig. 5. e 6.

N.º 298. Se a Superficie movel era hum quadrado, e a Directriz for igual aos lados delle, e perpendicular, o Solido ſe chama *Cubo*, como na *Fig.* 7. Fig. 7.

N.º 299. O movimento de hum circulo andando á roda do ſeu diametro forma huma Esphera (*Fig.* 8.) Fig. 8.

N.º 300. O movimento de hum *Sector*, ou de hum *Segmento* de circulo, andando á roda do ſeu eixo, faz o *Sector* ou *Segmento da Eſphera*, *Fig.* 9., e 10. Fig. 9. e 10.

N.º 301. O movimento de huma fi-

figura Oval, andando á roda do ſeu
Eſt. 9. fig. 11. diametro menor, forma huma *Eſpheroide abatida* (*Fig.* 11.)

N.º 312. Porém andando á roda do ſeu diametro maior, faz huma *Eſ-*
Fig. 12. *pheroide oblonga* (*Fig.* 12.)

N.º 303. Se hum poligono regular andar á roda do ſeu diametro, faz huma *Eſpheroide poligonica* (*Fig.*
Fig. 13. 13.)

Deſta ſimples formaçaõ dos Solidos ſe tiraõ varias

Conſequencias.

I.ª

A Baze inferior he a meſma que pelo movimento vem a ſer a baze ſuperior.

Logo.

N.º 304. *Em qualquer Priſma a baze ſuperior he igual á inferior.*

II.

POr qualquer parte que ſe corte o priſma ſendo a ſecçaõ parallela á baze inferior, já eſſa ſecçaõ fica ſendo baze ſuperior.

Logo.

N.° 305. *Toda a Secçaõ do priſma parallela á baze lhe fica igual.*

III.

DIſſemos que a baze da piramide movendo-ſe parallela a ſi meſma, e diminuindo proporcionalmente em todos os ſeus lados, á medida que ſobe, formava a piramide; o meſmo á proporçaõ do Cóne.

Logo.

N.° 306. *Toda a Secçaõ da piramide ou cóne, ſendo parallela á baze he hum plano ſemelhante a ella.*

IV.

IV.

NO Circulo, que pelo ſeu movimento á roda do diametro gerou a eſphera (*Fig.* 14.), ſe podem conſiderar muitas cordas perpendiculares a eſſe diametro ou eixo, cujas metades *ao*, *ei* ſaõ raios que andando circularmente á roda de huma extremidade fixa, deſcrevem outros tantos circulos.

Eſt. 9. fig. 14.

Ora feita qualquer ſecçaõ por hum plano na eſphera, pode-ſe conſiderar como hum plano perpendicular ao diametro do circulo generante, formado pela revoluçaõ de alguma meia corda.

Logo.

N.° 307. *Toda a Secçaõ na eſphera he hum circulo.*

✠

Porém ſe nós tirarmos no circulo generante muitas linhas perpendiculares ao ſeu diametro ou eixo, a linha que paſſar pelo centro (*Fig.* 14.) he a maxima de todas; porque

Fig. 14.

que he a unica que chega á tangente m, i, n ficando terminadas todas as mais pela circunferencia que ſe afaſta da Tangente.

Logo.

N.° 308. *Em toda a ſecçaõ da Eſphera, ſó a que paſſa pelo centro he o Circulo maximo*, ou gerado pelo raio maximo; *e toda a outra ſecçaõ ſerá circulo menor que elle.*

Ora a linha *e i Fig.* 14. perpendicular ao eixo do circulo gerante, que toca no centro, ſempre he o raio deſſe circulo, igual ſempre em todos os cazos.

Logo.

N.° 309. *A Secçaõ Central da Eſphera ſempre he igual.*

§ II.

Das Superficies dos Priſmas, e dos Cilindros.

NAs Superficies dos Priſmas (Amigo Eugenio) ſó ſe conſideraõ as faces que o cercaõ em redondo, e se faz abstracção das bazes: o mesmo se diz dos Cilindros, Prismas &c.

Ora nós dissemos (n.° 219.) que a superficie de qualquer parallelogramo recto era igual á sua linha
Est. 9. fig. 15. da baze multiplicada pela altura perpendicular; e nós vemos (*Fig.* 15.) que as faces do prisma recto *B* estendidas saõ os parallelogramos tambem rectos. *A*, *E*, *I*, *O*, em que o circuito da baze *a*, *e*, *i*, *o* se multiplica pela altura.

Logo.

N.° 310. *A Superficie do prisma recto* (*Fig.* 15,) *he igual ao circuito da baze* (*a*, *e*, *i*, *o*) *multiplicado pela altura.*

⁂

Quanto á Superficie do Cilin-
Fig. 16. dro recto (*D Fig.* 16.) nós sabemos, que ella he igual, ou podesse confundir com a do prisma de infinitas faces; e assim podemos dizer de huma o que dissemos da outra.

Lo-

Logo.

N.° 311. *A Superficie do Cilindro recto he igual á Circunferencia da baze multiplicada pela altura (Fig. 16.)* Est. 9. fig. 16.

⁂

Dissemos tambem (n.° 221.) que quando o parallelogramo era obliquo (*Fig.* 17.) o haviamos de reduzir a recto para o avaliar, multiplicando a linha *A O*, naõ pela obliqua *O E* ou *A M*, mas pela perpendicular *O I* ou *A N*. Fig. 17.

Logo.

N.° 312. *A Superficie do prisma obliquo (Fig. 18.) naõ se deve avaliar multiplicando a linha do comprimento A i pelo circuito da baze, A M, ou i N; mas pelo circuito da Secçaõ perpendicular i o.* Fig. 18.

Porquanto o prisma obliquo tem a superficie composta de alguns parallelogramos obliquos.

Isto fica manifesto cortando nós

a porçaõ triangular *i o n* da parte superior, e juntando-a da parte debaixo; porque nesse cazo o prisma se converte de obliquo em recto; e a sua superficie pelo numero precedente he composta da linha do comprimento *A i* multiplicada pelo circuito da Secçaõ perpendicular *i o*.

⁂

Já temos dito muitas vezes que os Cilindros se confundem com os prismas de infinitas faces.

Logo.

N.° 313. *A Superficie do Cilindro obliquo he igual á linha do compri-*
Est. 9. fig. 19. *mento A E (Fig. 19.) multiplicada naõ pelo circuito da baze E N, ou A M, mas pelo circuito da Secçaõ perpendicular E O.*

O que tambem fica vizivel cortando a porçaõ superior *E O N*, para a pôr no lugar inferior *A I M*.

§ III.

§ III.

Das Superficies das Piramides e Cónes inteiros e truncados.

DIssemos em seu lugar (n.º 225.) que os triangulos eraõ iguaes ás suas bazes multiplicadas por meia altura; ou tambem as alturas multiplicadas por metade da baze. He logo precizo para medir as superficies das piramides compostas de triangulos, como se vê em *B* (*Fig.* 20.) atender ás suas bazes e alturas. Est. 9. fig. 20.

Advirta-se porem, que naõ he o mesmo a altura de huma piramide e a altura dos triangulos que compoem a sua superficie; porquanto *A o*, altura da piramide toma-se na perpendicular que vai do seu vertice *A* até á baze *o*, ou a continuaçaõ della se a piramide for inclinada; porém a altura dos triangulos he a linha *A m*, que vai pela superficie abaixo, mas perpendicularmente a linha do circuito da baze.

Esta altura dos triangulos tambem se chama *Apothema*. Lo-

Logo.

N° 314. *A Superficie da piramide recta e regular* (composta de triangulos como vemos em *B*) *he igual ao circuito da baze multiplicado por meio apothema*, como se vê em *D*; ou tambem a todo o apothema *B e* multiplicado por meio circuito da baze *i*, *r*, *s*.

※

Na piramide obliqua e irregular, como os apothemas saõ differentes, naõ fica taõ facil a reducçaõ, mas deve-se fazer separadamente a reducçaõ de cada triangulo.

※

Assim como o cilindro se pode confundir com o prisma de infinitas faces, tambem o cóne se pode confundir com a piramide de infinitas faces. Assim a superficie verdadeira
Est. 9. fig. 21. do cóne, que se vê em *M* (*Fig*. 21.) se pode considerar como se fosse huma collecçaõ de triangulos cujas ba-

zes

zes fossem infinitamente pequenas, mas que juntas igualassem o circuito da baze do cóne, e tivessem por altura o seu apothema *o i*.

Logo.

N.º 315. *A Superficie do Cóne recto A (Fig. 21.) he igual a hum parallelogramo N, no qual o circuito da baze i, r, s, t, se multiplica por meio apothema; ou ao parallelogramo H, em que se multiplica meio circuito da baze por todo o apothema.* Est. 9. fig. 21.

✠

N.º 316. A Superficie da piramide truncada *P* (*Fig.* 22.) he composta de muitos trapezios, os quaes juntos fazem a figura *B*: ora reduzindo os trapezios a parallelogramos (n.º 226.) isto he multiplicando a altura delles *m a* pelas medias parallelas *n o*, todos elles fazem hum parallelogramo *M*, cuja baze he a media parallela dos trapezios, e cuja altura he o apothema. Fig. 22.

Lo-

Logo.

N.º 317. *A Superficie da piramide truncada P he igual a hum parallelogramo M, cuja baze he o circuito medio da piramide, e cuja altura seja todo o apothema.*

⁂

Pela mesma razaõ que confundimos o cóne inteiro com a piramide, devemos reputar a cóne truncado por huma piramide tambem truncada de infinitas faces.

Logo.

Est. 10. fig. 1. N.º 318. *A Superficie do Cóne truncado E (Est. 10. Fig. 1.) he igual ao parallelogramo H, no qual a baze he o circuito medio do cóne ai, e a altura todo o seu apothema (nm.)*

⁂

N.º 319. Se ao cóne inteiro tirarmos hum unico ponto do vertice, fica truncado; e entaõ naõ he digna de consideraçaõ a differença que procede de hum só ponto. Nesse cazo po-

podemos reputar hum como o outro, e podemos discorrer da superficie de hum, como da superficie do outro; e assim podemos reduzir a superficie do Cóne inteiro (*Est.* 9. *Fig.* 21.) a hum parallelogramo, cuja baze seja o circuito medio *A e*, e cuja altura seja todo o apothema, como se vê em *H*. Est. 9. fig. 21.

§ IV.

Da Superficie da Esphera, e dos Segmentos della.

N.° 220. NÓs assim como podemos considerar hum circulo como hum poligono de lados infinitos, assim tambem podemos confundir a Esphera formada por hum circulo andando á roda do seu eixo, com huma Spheroide formada por hum poligono andando á roda do seu diametro (*Fig.* 2.) Est. 10. fig. 2.

Por conseguinte para medir a superficie da Esphera bastará medir a superficie da Spheroide poligonica, ainda que esta seja de poucas fa-

faces; porquanto essa mesma doutrina se applica á de faces infinitas, e dessa se passa para a Esphera.

Para medir pois a superficie desta Spheroide façamos o seguinte.

Est. 10. fig. 2. 1. Dividamos o Spheroide (*Fig.* 2.) em cónes truncados, cortando-a pelas secçoens *er*, *st*. &c.

Ora supposto o que dissemos no §. precedente, podemos reduzir a superficie de cada hum destes cónes truncados *se*, *fig*. 2., ou *SE fig*. 3 a hum parallelogramo *A fig*. 4., em que a circular media seja a baze, e os apothemas sejaõ as alturas (n.º 318.)

Mas como cada Cóne tem sua especial circular media, e seu particular apothema, convém trabalhar para reduzir todas essas linhas a outras que façaõ menos confuzaõ: e para isso

2. Tomemos hum desses Cónes truncados *erst* que compoem a Spheroide, e o punhamos separado á
Fig. 3. parte (*Fig*. 3.) Tire-se huma parallela media pela superficie delle, o que fará huma circular, a qual deve ter seu raio *Ai*, o qual sahe de *Mu* eixo do Cóne, e vai até *A*

3. Tire-se do mesmo ponto *A* huma linha até *M*, centro da Spheroide que se suppoem: e com a parte do eixo *Mi* completemos hum triangulo de pontinhos *MAi*.

4. Do ponto *E* em que se termina o apothema do Cóne *SE*, baixaremos huma perpendicular *ER* sobre a sua baze.

5. Isto assim disposto, temos dois triangulos, hum maior *MAi*, outro menor *SER*.

Agora para provar que saõ semelhantes, basta provar que os lados de hum saõ perpendiculares aos lados do outro; porquanto a linha *MA*, que passa pelo centro, e pelo meio da corda *SE*, lhe fica perpendicular (n.° 32.) E além disso *ER* corta perpendicularmente *Ai*, porque he perpendicular sobre a baze do cóne, parallela de *Ai*: e ultimamente *SR* continuada vai cortar perpendicularmente *Mi*, por ser parte do eixo: Logo os dois triangulos *saõ semelhantes (n.° 178.)*; e os *seus lados respectivos proporcionaes*; e assim podemos dizer *MA*:*AI*:: *SE*:*ER*.

Ora

Ora nós ſabemos que a circunferencia do raio Ai ſerá para a circunferencia do raio AM, como os dois raios ſaõ entre ſi: (n.° 205.) por conſeguinte em lugar dos dois raios podemos pôr as duas circunferencias, ſem perder a proporçaõ: e aſſim a circunferencia de MA he para a circunferencia de Ai, como SE para ER; e podemos dizer

Circ. MA : circ. Ai : : SE : ER.

Logo multiplicando o primeiro termo pelo ultimo teremos o meſmo producto, que ſe multiplicaſſemos o ſegundo pelo terceiro (n.° 141.) e aſſim Circ. $MA \times ER =$ circ. $Ai \times SE$. Ora a circunferencia de MA differe da circunferencia do circulo maximo da Eſphera á proporçaõ que a linha MA que achamos na Eſpheroide, differe do raio da Eſphera; porém conſiderando nós o eſpheroide compoſta de infinitos cónes truncados, ou o Poligono generante de infinitos lados, já nós podemos confundir a eſpheroide com a Eſphera, e a linha MA, com o raio da Eſphera; a corda SE com o arco

SE

S E, e a circunferencia de *M A* será o mesmo que a circunferencia do circulo maximo da Esphera : por conseguinte podemos dizer que

A Circunferencia do Circulo maximo da Esphera multiplicada pela linha ER he igual á Circunferencia de A i multiplicada por S E, e o parallelogramo A (Fig. 4.) igual a B. Est. 10. fig. 4.

Para fazer isto vizivel façamos *B* (*Fig.* 4.) cuja baze he a circunferencia do circulo maximo da Esphera, e altura a altura do Cóne; e tambem o parallelogramo *A*, cuja baze he a circunferencia de *A i*, e altura a linha *S E*.

N.º 321. *Logo se a superficie do cóne he igual ao parallelogramo A, tambem he igual ao parallelogramo B.*

Pela mesma razaõ todos os mais cónes truncados de que se compoem a Espheroide teráõ a superficie igual aos parallelogramos que tenhaõ por baze a circunferencia do circulo maximo da Esphera, e por altura as alturas dos cónes.

Logo.

N.º 224. *A superficie da Espheroide Poligonica he igual a hum parallelogramo que tenha por baze a circunferencia do circulo maximo, e por altura todas as alturas dos Cónes, ou o diametro da Espheroide.*

E como nós podemos confundir esta Espheroide com a Esphera, podemos dizer.

Logo.

Est. 10. fig. 5. N.º 323. *A Superficie da Esphera A (Fig. 5.) he igual a hum parallelogramo B, no qual a circunferencia do circulo maximo da Esphera he a baze, o diametro a altura.*

Destas verdades se deduzem varias

Consequencias.

I.ª

N.º 324. Divida-se este parallelogramo em 4 parallelogramos iguaes *d*, *e*, *f*, *g*, cada hum

hum delles ſerá igual a hum circulo maximo da Eſphera (n.° 232.) por ter por baze a circunferencia , e altura meio raio : logo todo o parallelogramo *B* he igual a 4 circulos maximos *D* , *E* , *F* , *G*.

Logo.

N.° 325. *A Superficie da Eſphera A he igual á de 4 circulos maximos.*

II.

COmo os 4 circulos maximos ſaõ iguaes a hum que tenha o diametro duplo (n.° 264.) ſegue-ſe (*Fig.* 6.) Eſt. 10. fig. 6.

Logo.

A Superficie da Eſphera (A) he igual a hum circulo H , que tenha como raio o diametro della.

III.

N.° 326. *LOgo (Fig. 7.) a ſuperficie convexa de huma meia Eſphera he dupla da ſua ſuperficie plana.* Fig. 7.

Por-

Porque a ſuperficie convexa da meia Eſphera vale dois circulos maximos; e a ſuperficie plana naõ he ſenaõ hum.

IV.

QUalquer ſegmento da Eſphera ſe pode conſiderar compoſto de varios cónes truncados huns ſobre outros, como diſſemos da Eſpheroide, cujas ſuperficies juntas ſaõ iguaes a hum parallelogramo, que tenha por baze a circunferencia do circulo maximo da Eſphera, e por altura a flexa *AO* (*Fig.* 8.), ou a altura do ſegmento.

Eſt. 10. fig. 8.

Logo.

N.° 327. *A Superficie do ſegmento S he igual a hum parallelogramo (T), cuja baze ſeja a circunferencia do circulo maximo da Eſphera, e altura a flexa.*

V.

NÓs já diſſemos que a ſuperficie do Cilindro circunſcrito *E* (*Fig.* 9.) era igual a hum parallelo-

Fig. 9.

logramo *B*, cuja baze fosse a circunferencia do Cilindro, ou da Esphera que he a mesma, e cuja altura fosse a do cilindro, ou diametro da Esphera (n.° 311.)

Logo.

O mesmo parallelogramo B feito pela circunferencia do circulo maximo da Esphera e seu diametro, mede a superficie da Esphera (A), e a do cilindro circunscrito (E); e assim podemos dizer. Est. 10. fig. 4.

Logo.

N.° 328. *A Superficie do Cilindro circunscrito he igual a da Esphera (Fig. 9.); e por isso igual a 4 circulos mnximos.* Fig. 9.

⁂

Já dissemos assima, da superficie dos prismas e cilindros, que so se attendia á superficie que os cerca em roda e se fazia abstracçaõ das duas bazes, inferior, e superior. Por conseguinte se contarmos a superficie total do cilindro circunscrito será igual a 6 circulos maximos, sendo

 a sua ſuperficie da eſphera igual ſomente a 4.

§. V.

Da Solidez ou valor dos Priſmas, e dos Cilindros.

N.º 329. TOda a medida, Amigo Eugenio, he huma repetiçaõ ou multiplicaçaõ da Unidade primitiva, a qual deve ſer do meſmo genero que a quantidade que por ella ſe hade medir, ou avaliar; e aſſim ſe queremos medir linhas, iſto he diſtancias, ou comprimentos, a unidade deve ſer linha, ou diſtancia v. g. hum palmo, ou vara, ou legoa &c. Porém ſe queremos medir ſuperficies ou aria, ou vaõ ou eſpaço; a medida deve ſer ſuperficie, v. g. palmo quadrado, ou vara quadrada, ou coiza ſemelhante: mas emfim deve ſer ſuperficie, ou eſpaço.

Finalmente ſe queremos avaliar ſolido, ou volume, iſto he coiza que tenha as tres dimenſoens de comprimento largura, e altura, a uni-

unidade deve ſer tambem hum ſolido que as tenha, v. g. palmo cubico, ou polegada cubica, ou coiza ſemelhante.

N.º 330. Além diſto nós diſſemos na multiplicaçaõ de huma linha por outra para avaliar as ſuperficies, que a linha movel ſe naõ conſiderava como linha Mathematica ſem groſſura, mas como huma ſerie de partes, ou unidades quadradas, a qual ſe multiplicava pelo numero das unidades que ſe achaõ na directriz. Aſſim tambem, quando ſe quer avaliar o volume dos ſolidos naõ ſe deve conſiderar a baze movel como huma Superficie Mathematica, e ſem groſſura, mas como huma quantidade de unidades ſolidas, que poſtas humas a ilharga das outras occupaõ a baze; e eſta collecçaõ de unidades que formaõ a primeira ordem dellas ſe deve multiplicar pelo numero de unidades que ſe achaõ na altura, fazendo varias ordens dellas, as quaes *todas enchem o eſpaço do Solido.*

Iſto poſto, para medir o volume de qualquer ſolido, devemos avaliar primeiro a ſua baze, e depois multiplica-la pelo valor da altura; o que dará o valor do priſma.

Eſt. 10. fig. 10. Exemplo (*Fig.* 10.) O Solido *A* tem na largura 4 vezes a largura de *B*, que lhe ſerve de medida: tem de fundo ou comprimento 2 vezes o fundo de *B*: Logo multiplicando 4 por 2 temos que a baze de *A* he compoſta de 8 bazes de *B*: Ora *A* tem altura tripla de *B*; e aſſim he precizo repetir 3 vezes as 8 medidas *B*, que ſe achaõ na primeira ordem de *A*; e aſſim para formar o volume de *A* ſaõ precizos 24 volumes de *B*.

Logo.

N.° 231. *Para avaliar qualquer priſma recto, cuja baze ſeja hum parallelogramo recto, baſta multiplicar as 3 dimenſoens, largura, comprimento, e altura.*

Porque multiplicando comprimento por largura temos a baze, e depois multiplicando baze por altura, temos o volume: logo multiplicando as 3 dimenſoens temos o valor do Solido.

Advirto que nós podemos considerar qualquer face do prisma *A* como se fosse baze, voltando-o sobre ella; e assim podemos variar o modo de multiplicar essas 3 dimensoens: sempre teremos o mesmo producto 24. Porque podemos dizer, como assima, $4 \times 2 = 8, \times 3 = 24.$ ou deste modo, $4 \times 3 = 12, \times 2 = 24.$ ou tambem, $3 \times 2 = 6, \times 4 = 24.$

Advirto tambem, que se a baze do prisma for parallelogramo obliquangulo naõ se deve multiplicar hum lado della pelo outro para avaliar a baze, mas hum lado pela sua perpendicular como dissemos (n.º 221.) reduzindo-o a rectangulo; e depois esse parallelogramo reduzido a rectangulo multiplica-lo pela altu- perpendicular.

Logo.

N.º 332. *Se a baze de hum ou de muitos prismas for igual a de outro, e altura for a mesma, o valor será o mesmo.*

※

Nós dissemos, que o triangulo tinha metade do valor do seu parallelogramo (n.° 216.) Logo quando quizermos avaliar a baze de hum
Est. 10. prisma triangular (*F Fig.* 11.) bas-
fig. 11. tará fazer a conta á baze do prisma G que fosse parallelipipedo, e contar sómente metade da baze para multiplicar pela sua altura.

Logo.

N.° 333. *O valor do prisma triangular* (F) *he metade do valor do seu parallelipipedo correspondente* (G)

※

Os Poligonos, segundo dissemos, se podem divídir em triangulos; por conseguinte os Prismas Poligonicos, divididas as suas bazes em triangulos, e continuadas essas divizoens de huma até a outra baze, ficaõ divididos em prismas triangulares; por conseguinte podemos dizer de huns o que acabamos de dizer dos outros.

Lo-

Logo.

N.° 334. *Para avaliar os Prismas poligonicos havemos de multiplicar o valor das suas bazes pela sua altura perpendicular.*

⁂

Temos dito muitas vezes, que o circulo se pode confundir com o Poligono, considerando-o de infinitos lados: do que se tira que podemos confundir o *Cilindro* com o Prisma de infinitas faces, e proceder na avaliaçaõ do cilindro, como no valor dos prismas.

Logo.

N.° 335. *Avaliada a baze do Cilindro e multiplicada pela altura temos o valor delle.* Por conseguinte.

Logo.

N.° 336. *Se as bazes de muitos Cilindros forem iguaes á de hum só, e a altura for a mesma, o valor será o mesmo.*

Lo-

Logo.

N.° 337. *Se a baze de hum ou muitos cilindros for igual á de hum ou muitos prismas, e a altura a mesma, o valor hade ser o mesmo.*

§. VI.

Da comparaçaõ dos Prismas, e cilindros rectos com os obliquos.

Nós dissemos que o parallelogramo rectangulo era igual ao obliquangulo, quando elles tinhaõ a mesma baze, e a mesma altura, (n.° 220.) Agora para saber se tambem o Prisma recto e obliquo quando tem a mesma baze, e altura saõ iguaes, convém fazer o seguinte (*Fig.* 12.)

Est. 10. fig. 12.

1. Ponhamos hum parallelipipedo recto *A*, cuja baze seja hum rectangulo, e divida-se na altura em partes iguaes por secçoens parallelas á baze.

2.

2. Ponhaõ-se estas partes humas sobre outras naõ a prumo, mas da forma que se reprezentaõ em *E*.

3. Tirem-se duas linhas desde as extremidades da baze *m n*, até *o*, *i*; e cortem-se segundo a linha *m o* todos os prismas triangulares que ha de *m* até *o*, para pôr da outra parte desde *n* até *i*; como fizemos falando dos parallelogramos (*Est.* 5. *Fig.* 22.) e veremos que os vãons desde *n* até *i* ficaõ cheios, pela razaõ que ahi demos; e deste modo o corpo *E* se muda no parallelipipedo obliquo *C*. Est. 5. fig. 22.

Logo.

N.º 338. *Os Parallelipipedos A, C da mesma baze, e mesma altura tem o mesmo valor*; ainda que hum seja recto, o outro obliquo.

⁂

Mas os prismas que tiverem por baze parallelogramos obliquos se podem reduzir a rectos; e por conseguinte delles daremos a mesma doutrina.

Ora dividindo os dois parallelilipipedos recto e obliquo ſegundo as diagonaes tiradas nas duas bazes, ficaraõ priſmas triangulares, os quaes ſeráõ entre ſi, como os parallelipedos.

Logo.

N.° 339. *Os Priſmas triangulares recto e obliquo da meſma baze, e meſma altura ſaõ iguaes.*

※

Ora nós dos priſmas triangulares juntos entre ſi fazemos toda a qualidade de priſmas.

Por conſeguinte diremos dos priſmas poligonicos compoſtos, o que diſſemos dos triangulares e ſimples.

Logo.

N.° 340. *Todos os priſmas que tiverem a meſma baze, e a meſma altura ſaõ iguaes.*

※

Ora nós aſſim como podemos confundir hum circulo com hum poligono de lados infinitos, aſſim pode-demos confundir hum cilindro com hum prisma poligonico de infinitas faces, e dizer do cilindro o que se diz do prisma.

Logo.

N.º 341. *O Cilindro recto e obliquo de igual baze, e de igual altura saõ iguaes (Est. II. Fig. I.)* Est. II. fig. I.

Advirta-se, que naõ he o mesmo *Cilindro obliquo* que *Cilindro inclinado*; porquanto o Cilindro inclinado he qualquer cilindro que sahio do seu prumo, no qual toda a secçaõ que for perpendicular ao comprimento he hum Circulo; porém o Cilindro obliquo he hum solido cuja baze he hum circulo, o qual vai subindo sempre parallelo a si mesmo, seguindo huma linha directriz inclinada á baze; e assim no Cilindro obliquo a secçaõ para ser circular hade ser parallela á baze; e se for perpendicular ao comprimento, entaõ fica oval.

§ VII.

§ VII.

Da Comparaçaõ das Piramides e Cónes rectos com os obliquos.

Est. 11. fig. 2. QUanto ás piramides podemos considerar primeiro (*Fig.* 2.) hum solido piramidal *A* composto de varios prismas de igual altura, e de bazes semelhantes, cujos lados homologos vaõ diminuindo em progressaõ arithmetica; os quaes se poem a prumo huns sobre outros.

Consideremos agora que depois vamos successivamente puxando para o lado esses mesmos prismas, ou outros iguaes, fugindo do prumo, como em *B*, seguindo huma Directriz inclinada á baze. Nesse cazo he evidente que em *A*, e *B* naõ só a baze he igual, e a altura igual; mas que tambem o valor he igual.

Ora nós podemos na consideraçaõ augmentar quanto quizermos o numero dos prismas e diminuir a altura de cada hum delles; e quanto mais esta se diminuir, mais se che-

chegaõ estes solidos ás piramides que imitaõ. Sendo sempre verdade que quando a baze for igual, e a altura igual, saõ compostos dos mesmos ou iguaes prismas, mas postos de differente modo; e por conseguinte que he igual o valor dos solidos: e assim podemos confundir estes solidos piramidaes com as piramides; e dizer dellas o que delles acabamos de dizer; que sendo a baze igual, e igual a altura o valor he igual.

Logo.

N.° 342. *As Piramides que tem igual baze e igual altura saõ iguaes no valor* (*Fig.* 3.) Est. 11. fig. 3.

⁂

Os Cónes podem-se equivocar com as piramides de faces infinitas.

Logo.

N.° 343. *Os Cónes da mesma baze, e da mesma altura saõ iguaes* (*Fig.* 4.) Fig. 4.

⁂

※

Se huma Piramide se dividir desde o vertice até á baze, em lugar de huma piramide temos muitas, as quaes juntas igualaõ o valor da total.

Logo.

N.° 344. *Quando as bazes de muitas piramides forem iguaes á de huma só, e a altura for a mesma, o valor será o mesmo.*

Logo.

N.° 345. *Quando as bazes de muitos Cónes forem iguaes á de hum só, sendo a altura a mesma, o valor será o mesmo.* Pela mesma razaõ.

§ VIII.

Modo de conhecer o valor das Piramides e dos Cónes.

PAra se conhecer (meu Amigo Eugenio) o valor dos triangulos dissemos que bastava conhecer o pa-

parallelogramo que lhes correſpondia, do qual o triangulo he ſómente metade. Mas naõ he aſſim nas Piramides a reſpeito dos Priſmas; e para conhecer o valor da ſolidez dellas faremos o ſeguinte (*Fig. 5.*) Eſt. II. fig. 5.

1. Tomemos hum Priſma triangular recto *H*, e do angulo *e* tiremos duas diagonaes, pelos dois lados *er*, *es*, e cortemos o priſma ſegundo eſſas linhas: deſte modo fica ſeparada a piramide *A*, cujo vertice eſtá em *e*, e cuja baze he a meſma do priſma *ros*: ſendo a ſua altura tambem *eo* altura do priſma.

2. Separada eſta piramide *A*, fica o priſma antigo mutilado, e faz a figura *B*: ora nós podemos lançar ſobre o bofete eſte tal corpo *B*, de forma que o parallelogramo *ar ms* ſeja a baze de quatro lados, e o ponto *e* ſeja o vertice de huma piramide de quatro faces.

3. Tire-ſe na baze deſſa piramide *B* huma diagonal *as*, e deſde o vertice *e* ſe divida a piramide de 4 faces em duas triangulares, ſeguindo a direcçaõ da diagonal; teremos as piramides *C*, e *D*. Eſ-

Estas duas piramides tem as bazes iguaes entre si; porque cada huma dellas he metade do parallelogramo *am rs*; e ambas faziaõ a baze da piramide *B*; e o vertice he commum por ser o ponto *e*: logo as duas piramides *C*, *D* tem baze igual, e tem a mesma altura; por conseguinte saõ iguaes (n.° 342.)

Ora a Piramide *D* necessariamente he igual á piramide *A*, porque huma tem por baze o plano ou baze inferior do prisma *ros*, e a outra se a voltarem pode ter por baze o plano superior do prisma *aem* igual ao inferior.

Além disso a piramide *A* tem por altura a esquina do prisma *eo* e a piramide *D* tem por altura a outra esquina igual do prisma *ms*: e assim se a baze he a mesma e a mesma altura, as piramides *A* e *D* saõ iguaes (n.° 342.), e como já vimos que a piramide *D* era igual a *C*, segue-se que as tres piramides *A*, *C*, *D*, em que o prisma triangular recto se dividio saõ iguaes.

Logo.

N.° 346. *O Prisma triangular recto tem o valor de 3 piramides que tenhaõ a mesma baze e a mesma altura delle.*

Ora todo o Prisma que naõ for recto se pode reduzir a hum que o seja, e que seja da mesma baze e altura; como tambem as piramides; por conseguinte podemos dizer de todos os prismas triangulares obliquos o que dissemos dos rectos.

Logo.

N.° 347. *Toda a Piramide triangular (B Fig. 7.) vale sómente o terço do prisma (A) que tiver a mesma baze e altura.* Por conseguinte. Est. II. fig. 7.

N.° 348. *Todo a Piramide triangular (B) he igual a hum prisma (C) da mesma baze, e da terça parte da sua altura (Fig. 7.)*

⁂

O Cubo (*Fig.* 6.) he hum Prisma cuja divizaõ em piramides Fig. 6.

tem huma propriedade ſingular, porque ſe divide em 3 piramides iguaes e ſemelhantes, o que naõ tem outro nenhum priſma.

O Cubo tem 6 faces; 3 ſe reprezentaõ na eſtampa, as outras 3 ſe ſuppoem, mas naõ ſe vem; huma que he a baze *MONE*, outra a face poſterior *RTON*, outra a face do lado *SRMO*.

Nas 3 faces que ſe vem tiremos 3 diagonaes do meſmo angulo *I*, que ſaõ *IR*, *IM*, *IN*: e do meſmo angulo *I* tiremos outra diagonal que paſſe pelo centro do cubo, e vá ter ao angulo oppoſto *O*: ſe por eſtas diagonaes ſe fizer a divizaõ, teremos huma piramide quadrada *H* cujo vertice vem ao angulo das diagonaes *I*, e cuja baze he a baze do cubo *m*, *o*, *n*, *e*. Eſta he a primeira piramide.

Temos outra, cuja baze he a face poſterior *RTON*, e cujo vertice vem ao angulo dos diagonaes *I*.

A terceira piramide tem por baze a face lateral *SRMO*, que ſe naõ vê, e o vertice no angulo das diagonaes *I*.

Ora

Ora como todas as faces no cubo saõ iguaes e semelhantes, e todos os angulos iguaes, e os lados iguaes, segue se que todas estas piramides tem baze igual, e semelhante, e a mesma altura; por conseguinte todas saõ iguaes e semelhantes.

Logo.

N.° 349. O *Cubo se divide em tres piramides iguaes e semelhantes, cada huma da mesma baze e da mesma altura do cubo.* E por conseguinte.

Cada piramide da mesma baze e altura do cubo naõ he senaõ a terça parte delle.

⁂

Para examinar-mos que proporçaõ tem hum prisma Poligonico com a Piramide da mesma baze e altura (*Fig.* 8.) dividamos tanto o Prisma Poligonico, como tambem a sua Piramide da mesma baze e altura, em Prismas triangulares, e em Piramides triangulares: *Isto feito* cada Piramide será o terço do seu Prisma (n.° 347.) Logo a somma das Pi- Est. 11. fig. 8.

Piramides, isto he a piramide total *B*, será o terço da somma dos Prismas, isto he será o terço do Prisma total *A*.

Logo.

Est. 11. fig. 8. N.° 350. *A Piramide Poligonica (B) he igual a hum prisma (C Fig. 8.) da mesma baze, e da terça parte da altura.*

⁂

Supposto o que temos dito de poder confundir o Cilindro com o prisma Poligonico de infinitas faces, e o cóne com a piramide correspondente, inferimos.

Logo.

N.° 351. *O Cilindro (A) vale tres cónes (B) da mesma baze e altura*
Fig. 9. *do Cilindro. (Fig. 9.)*

Logo.

N.° 352. *O Cóne (B) vale hum Cilindro C da mesma baze e da terça parte da altura do Cóne.*

§ IX.

§. IX.

Do valor da Piramide, e do Cóne truncados.

N.° 353. COmo a Piramide truncada (*A Fig.* 10.) he huma piramide inteira, menos a pequena piramide *e*; para conhecer o valor da truncada precizo he avaliar a total, e depois avaliar a pequena imaginaria *e*, para a descontar da total; e o resto será o valor da piramide truncada. Est. 11. fig. 10.

Do mesmo modo, como o Cóne truncado *B* he hum cóne inteiro, menos a parte que se lhe suppoem cortada (*r Fig.* 10.) avaliado o total, e descontado o cóne imaginario *r*, o resto he o valor do cóne truncado *B*. Fig. 10.

N.° 355. A difficuldade está em conhecer pelo cóne truncado qual seria a altura do cóne se fosse inteiro; *para o que faremos o seguinte:* e a mesma operaçaõ podemos applicar á piramide.

Est. 11. fig. 10. 1. Tire-se huma linha indefinida *N I* (*Fig.* 10.)

2. Ponha-se nessa linha a altura do cóne truncado *N o*.

3. Ponha-se em *N*, o raio da baze inferior do cóne *N S*; e em *o* o raio da baze superior *o i*; sendo ambas as linhas perpendiculares a *N I*.

4. Baixemos de *i* huma parallela a *o N*.

5. Tiremos pelas duas extremidades dos raios *i*, *s* huma obliqua, que irá cortar a indefinida em *I*.

Isto posto as duas parallelas *oN*, *in* fazem que sejaõ semelhantes os dois triangulos *nis*, *NIs*.

E assim *ns* : *Ns* : : *ni* : *NI*.

Isto he, a pequena baze he para grande, como a pequena altura he para a grande. Nesta proporçaõ os tres primeiros termos saõ conhecidos; porque *n s* he o excesso do raio da baze inferior *N S*, sobre o raio superior *o i*. Tambem he conhecida a linha *N S* raio inferior. Tambem he conhecida *n i* altura do cóne: Logo achamos *N I* altura do cóne total;

e

e assim fica tambem conhecida a linha *oI*, altura do cóne imaginario *r*; o qual se fosse verdadeiro, completaria o total.

Logo.

Dado qualquer Cóne truncado, conhecendo os raios da baze inferior, e superior, e a altura do cóne truncado, faremos esta proporçaõ.

N.° 356. *A differença dos Raios, he para o raio grande: como a altura do cóne truncado he para a altura do inteiro.*

§ X.

Do valor da Esphera.

N.° 357. CONsideremos a Esphera dividida muitas vezes, mas sempre pelo centro: ficaraõ muitas piramides, cujas bazes juntas fazem a superficie da Esphera, e cujo vertice será o centro della, e a altura será o raio (*Fig.* 11.) Est. 11. fig. 11.

E assim a Esphera *A* he huma collecçaõ destas piramides unidas pelas faces.

Ora

Ora como a ſuperficie da Eſphera (*A*) he igual a quatro circulos maximos (n.° 325.), ſe em lugar deſſa collecçaõ de piramides que
Eſt. 11. fig. 12. compoem a eſphera, puzermos quatro cónes (*Fig.* 12.) cada hum dos quaes tenha por baze hum circulo maximo, e por altura o raio da eſphera, o valor deſtes quatro cónes ſerá igual ao da collecçaõ de piramides que diſſemos (n.° 343.) ou á Eſphera.

※

Eſtes Cónes *B* ſaõ iguaes a 4
Fig. 13. Cilindros *D* (*Fig.* 13.) da meſma baze, e da terça parte da altura dos cónes (n.° 352.): por conſeguinte tambem a Eſphera he igual a 4 cilindros *D*, ſendo a baze de cada hum circulo maximo, e a altura hum terço do raio: ora eſtes 4 cilindros *D* poſtos huns ſobre outros, fazem hum cilindro *E*, cuja baze he hum circulo maximo, e cuja altura he a dos quatro juntos, iſto he 4 terços de Raio, ou 2 terços do diametro.

Logo.

N.° 358. *A Esphera he tambem igual a hum Cilindro (E Fig. 13.) cuja baze seja hum circulo maximo, e cuja altura seja quatro terços de raio, ou dois terços de diametro.* Est. 3. fig. 13.

⁂

Ora os quatro Cilindros *D* da (*Fig.* 13.) tem a mesma baze que hum só (*F Fig.* 14.) cuja baze seja hum circulo que tenha como raio o diametro da esphera, e a mesma altura de hum terço de raio. Fig. 14.

Logo.

N.° 359. *A Solidez da Esphera A tambem he igual a hum cilindro (F) cujo raio seja o diametro da esphera, e cuja altura seja hum terço de raio della.*

⁂

Tambem os 4 Cónes (*B Est.* 11. *Fig.* 12.) saõ iguaes a hum só (*G Est.* 12. *Fig.* 1.) cuja altura seja o raio, e cuja baze seja hum circulo que tenha como raio o diametro da Esphera (n.° 260.) Fig. 12. Est. 12. fig 1.

Lo-

Logo.

Est. 12. fig. 1. N.° 360. *A Esphera (A Est. 12. Fig. 1.) tambem he igual a hum cóne G, cuja altura seja o raio, e cuja baze seja o circulo formado pelo diametro como raio.*

III.

Como a superficie da Esphera (*Est.* 10. *Fig.* 5.) he igual a hum parallelogramo que tenha por altura o diametro da esphera, e por baze a circunferencia do seu circulo maximo (n.° 323.) dando a este parallelogramo (*H Fig.* 1.) a mesma altura que demos aos 4 cilindros *D*, isto he hum terço de raio, ficará esse Prisma igual aos 4 cilindros *D* da *Fig.* 13. e por conseguinte a Esphera *A*.

Est. 10. fig. 5.

Est. 12. fig. 1.

Logo.

N.° 361. *A Esphera (A) he igual a hum Prisma, cuja baze seja hum paral-*

rallelogramo feito pelo diametro da esphera, e pela circunferencia do seu circulo maximo, e cuja altura seja hum terço de raio.

§ XI.

Da Razaõ que tem os Solidos entre si.

AValiados os Prismas, os Cilindros, as Piramides, os Cónes, e as Espheras, convém que saibamos a razaõ que estes corpos tem entre si; comecemos pelos Solidos da mesma especie.

Prismas.

NÓs dissemos (n.° 135.) que quando huma quantidade se multiplica por duas, fica na mesma razaõ que ellas tinhaõ; e tambem dissemos (n.° 293.) que na formaçaõ do Prisma a baze se multiplicava pela altura; e assim quando a mesma *baze se multiplicar por* alturas diversas, os Prismas ficaráõ como as alturas

Lo-

Logo.

Est. 12. fig. 2. N.° 362. *Os Prismas da mesma baze saõ entre si como as alturas.* Por isso (*Est.* 12. *Fig.* 2.) Os Prismas *A*, e *B* estaõ na razaõ quadrupla, que he a razaõ das alturas.

Tambem dissemos (n.° 132.) que quando duas quantidades se multiplicavaõ por huma, ficavaõ entre si na razaõ que d'antes tinhaõ: e assim diversas bazes multiplicadas pela mesma altura ficaõ entre si como d'antes eraõ.

Logo.

N.° 363. *Os Prismas da mesma altura saõ entre si como as bazes*; e assim (*Est.* 12. *Fig.* 3.) *A*, e *B*
Fig. 3. estaõ na razaõ tripla, porque as suas bazes tem entre si essa razaõ.

Logo.

N.° 364. *Quando a altura he diversa, e tambem diversa a baze os*

Pris

Prismas saõ entre si na razaõ composta da razaõ das bazes multiplicada pela razaõ das alturas (*Fig.* 4.) Est. 12. fig. 4.

Porquanto se a altura de *A* e *b* fosse a mesma, e a baze fosse em *b* quadrupla de *A*, só por isso *b* teria 4 vezes o valor de *A*: Ora supponhamos que nós punhamos em sima de *b* outro corpo semelhante *b*; em ordem a que fosse nelle dupla a altura de *A*, essa segunda porçaõ superior *b* seria igual á inferior; e por isso teria em si mesma 4 vezes o valor de *A*: por conseguinte o prisma total *B* teria 8 vezes o valor de *A*: que vem a ser o mesmo que a razaõ 4 da baze multiplicada pela razaõ 2 da altura.

Desta regra geral se tiraõ varias

Consequencias.

1.

COmo as partes proporcionaes de varias quantidades estaõ entre si na mesma razaõ que tem as quan-

quantidades totaes, (n.° 134.) e as piramides saõ os terços dos seus Prismas (n.° 346.) inferimos.

Logo.

Est. 12. fig. 5. N.° 365. *As Piramides da mesma baze* (*Fig.* 5.) *estaõ entre si como as alturas*; assim *B* he dupla de *A* porque a altura he tambem dupla.

Logo.

Fig. 6. N.° 366. *As Piramides da mesma altura estaõ entre si como as bazes*: (*Fig.* 6.) assim *A* : *B* : : 1 : 4 porque as bazes saõ nessa razaõ.

Logo.

N.° 367. *As Piramides de differente baze e altura saõ entre si na razaõ das bazes multiplicada pela razaõ das alturas* (*Fig.* 7.), e assim *F* : *G* : : 1 : 8; porque a razaõ das alturas he 2, a das bazes he 4; logo a razaõ das Piramides he 8, isto he 2 × 4.

II.

II.

ALém diſſo como os Cilindros ſe confundem com os Priſmas podemos dizer.

Logo.

N.° 368. *Os Cilindros da meſma altura eſtaõ entre ſi como as bazes*; (*Fig.* 8.) aſſim *A* : *B* : : 1 : 4 porque neſſa razaõ eſtaõ as bazes. Eſt. 12. fig. 8.

E os da meſma baze eſtaõ entre ſi como as alturas (*Fig.* 9.) aſſim *E* : *F* : : 1 : 2; porque neſſa razaõ eſtaõ as alturas. Fig. 9.

E os Cilindros da baze diverſa e diverſa altura eſtaõ entre ſi na razaõ das bazes multiplicada pela das alturas (*Fig.* 10.) aſſim *A* : *B* : : 1 : 8; Fig. 10. porque as bazes ſaõ como 1 : 4 as alturas como 1 : 2; logo os Cilindros ſaõ como 1 : 8; iſto he como 2 × 4.

III.

COmo os Cónes ſaõ os terços dos Cilindros, devemos dizer.

Lo-

Logo.

N.º 369. *Os Cónes da meſma altura ſaõ entre ſi como as bazes.*

Os Cónes da meſma baze eſtaõ entre ſi como as alturas.

E os Cónes de differente baze e differente altura eſtaõ entre ſi na razaõ das bazes multiplicada pela das alturas.

§. XII.

Da Razaõ que tem entre ſi os Solidos Semelhantes.

NÓs Eugenio diſſemos em ſeu lugar, que os Solidos ſe formavaõ pelo movimento de huma ſuperficie; e que da diverſidade da ſuperficie movel ou *generante*, e tambem da diverſidade da linha que dirige o movimento que ſe ſe chama Directriz naſciaõ as diverſas eſpecies e qualidades de Solidos.

Agora dizemos, que quando as Superficies generantes ſaõ ſemelhantes, e ſemelhante o movimento dellas,

las, desorte que os angulos sejaõ iguaes, e todas as linhas em proporçaõ, os Solidos que daqui rezultaõ se chamaõ *Solidos Semelhantes*.

Dissemos que os Parallelogramos, Triangulos, e mais figuras planas que delles se formaõ, estavaõ na razaõ composta da razaõ das bazes, multiplicada pela razaõ das alturas da figura plana.

Ora os Solidos, como acabamos de dizer, estaõ na razaõ composta da razaõ das superficies que lhe servem de baze, multiplicada pela razaõ das linhas que lhe medem a altura; e assim os Solidos estaõ entre si na razaõ composta de tres, isto he, de duas razoens que ha na baze generante, e outra nas alturas do Solido.

Logo.

N.° 370. *A razaõ dos Prismas entre si he composta dc tres razoens, duas que ha na Superficie generante ou baze do prisma, e huma que ha na sua altura.*

Ora quando as bazes dos prismas saõ semelhantes, as duas razoens que ha nellas saõ iguaes; deforma que huma razaõ multiplicada por outra he o mesmo que multiplicada por si mesma; e assim que o expoente desta razaõ composta he hum quadrado da razaõ simples (n.º 262.)

Ora se os prismas saõ semelhantes a mesma razaõ que ha entre quaesquer lados correspondentes da baze hade haver nas alturas; e por conseguinte quando a baze se multiplica pela altura para formar o prisma, a razaõ da baze, que he hum quadrado da razaõ simples dos lados, se multiplica de novo por essa razaõ simples, ou outra igual; o que he huma razaõ composta de 3 razoens semelhantes.

Logo.

N.º 271. *Os Prismas semelhantes estaõ entre si na razaõ composta de 3 razoens iguaes.*

Lo-

Logo.

N.° 272. *O expoente dos prismas semelhantes he hum numero producto da razaõ simples de qualquer lado, multiplicada por si mesma huma vez para fazer hum quadrado, e multiplicada outra vez pela raiz para fazer hum Cubo.*

Logo.

N.° 273. *Os Prismas semelhantes estaõ entre si como os Cubos de qualquer dos seus lados correspondentes.*

⁂

Ora as Piramides saõ as terças partes dos prismas (n.° 346.), e as partes proporcionaes estaõ entre si como os todos (n.° 134.)

Logo.

N.° 274. *As Piramides semelhantes estaõ entre si como os cubos dos seus lados.*

⁂

Tambem dissemos, que os Cilindros se podiaõ considerar como os Prismas de faces infinitas, e os Cónes como piramides de infinitas faces.

Logo.

N.° 275. *Os Cilindros semelhantes, e Cónes semelhantes estaõ entre si como os Cubos dos seus lados homologos.*

⁂

Porém nós já consideramos a Esphera compdsta de infinitas Piramides com o vertice no seu centro.

Logo.

N.° 276. *As Espheras saõ entre si como os Cubos dos seus diametros.*

Deforma que se huma esphera tem o diametro duplo da outra, o seu valor he 8 vezes maior: porque $2 \times 2 \times 2 = 8$; e se o diametro for triplo, o seu valor he 27 vezes maior; porque $3 \times 3 \times 3 = 27$; e o mes-

mesmo se diz de todos os outros Solidos semelhantes.

§ XIII.

Da Proporçaõ que tem o valor da Esphera com o do Cilindro, e Cubo, e Cóne que tiverem a mesma largura, e a mesma altura da Esphera.

N.° 377. CHamamos *Cilindro circunscrito á Esphera* aquelle que tiver por base hum Circulo maximo da Esphera, e por altura o seu diametro (*Fig.* 11.) e por conseguinte que toca a Esphera em baixo, em sima, e pelo circuito. Est. 12. fig. 11.

Ora nós acabamos de dizer (n° 358.) que a esphera (*A*) he igual ao cilindro (*L Fig.* 14.), que tem por baze hum circulo maximo, e por altura dois terços do diametro: e que o cilindro circunscrito *B Fig.* 11. tem a mesma baze do cilindro *L Fig.* 14. e tres terços do diametro por altura. Logo estes dois Fig.14. Fig.11. Fig.14.

Ci-

Est. 12. fig. 14. Cilindros *B*, e *L* (*Fig.* 11., e 14.) saõ entre si como as alturas; isto he como 2 terços para 3.

Logo.

Fig. 11. N.° 378. *Tambem a Esphera* (*A Fig.* 11.) *he para o seu Cilindro circunscripto* (*B*) *como* 2 *para* 3.

Isto he, se a esphera peza 22 onças, o cilindro peza 23.

⁂

Vale pois a Esphera dois terços do Cilindro circunscrito. Ora o Cóne que tivér essa mesma baze, e essa mesma altura do Cilindro vale sómente huma terça parte delle; isto he se o Cilindro *B* peza 33 onças, Fig 12. o Cóne *C* (*Fig.* 12.) pezará sómente 11.

Logo.

Est. 12. fig. 12. N.° 379. *O Cone* (*Fig.* 12.) *que tem por baze hum circulo maximo da Esphera, e por altura o seu diametro, vale metade da esphera.* De fórma que se a esphera val 22, o Cóne valerá 11.

Aſſim o Cóne C, *que tiver por baze hum Circulo maximo, e por altura o diametro da Eſphera, he igual a meia eſphera* (*D*) *Fig.* 12.

Logo.

N.º 380. *O Cóne, a Eſphera, e o Cilindro que tem a meſma altura, e largura ſaõ como* 1, 2, 3; *ou como* 11, 22, 33. (*Fig.* 15.) Eſt. 12. fig. 15.

⁂

Quanto ao Cubo circunſcrito (*Fig.* 13.) ſe o quizermos comparar com a eſphera, dividiremos a dificuldade, e a iremos ſoltando pouco a pouco. Fig. 13.

N.º 381. Primeiramente (*Fig.* 14.) comparemos a eſphera (ou o Cilindro *L* ſeu igual) com hum priſma *M* da meſma altura, iſto he de dois terços do diametro, ou 4 terços de raio. Ora ſendo a altura a meſma, ſómente há a differença nas bazes *F*, *G*, a qual como diſſemos (n.º 267.) he como 22 para 28, iſto he como a circunferencia para quatro diametros. Fig. 14.

tros. Logo ſe o Cilindro *L* ou a eſphera que lhe he igual, peza 22 onças, o priſma *M* pezará 28.

N.° 382. Comparemos agora eſſe priſma *M* com o Cubo circunſcrito *N*: como ambos ſaõ da meſma baze; a differença toda eſtá ſómente na altura: ora tendo o Cubo por altura 3 terços do diametro, e o Priſma ſómente 2, ſe o Priſma *M* vale 4 diametros ou 28, o Cubo hade valer 6 diametros ou 42; e por conſeguinte comparando a eſphera (*A*), ou o Cilindro *L* ſeu igual, com o Cubo *N* circunſcrito, ſerá como 22 para 42, ou como a circunferencia para 6 diametros.

Logo.

Eſt. 12. fig. 15. N.° 383. *Os quatro Corpos que pertencem á eſphera do modo aſſima dito*, (*Fig.* 15.) *iſto he Cóne*, *Eſphera*, *Cilindro*, *e Cubo*, *eſtaõ neſta proporçaõ*, 11, 22, 33, 42.

§ XIV.

Do valor do Sector e do Segmento da Esphera.

N.° 384. NÓs assima como consideramos a Esphera dividida em piramides cujo vertice commum era o centro : podemos dividir o Sector em muitas piramides cujo vertice commum seja o centro , e cujas bazes façaõ a superficie convexa do Sector (*Fig* .1.) Est. 13. fig. 1.

Logo.

N.° 385. *O Sector he igual a muitas piramides juntas cujas bazes façaõ a superficie, e cuja altura seja o raio.* E nós já dissemos (n.° 346.) que cada piramide tinha o valor do terço do seu prisma , e era igual a sua baze multiplicada pelo terço da altura do prisma.

Lo-

Logo.

Est. 13. fig. 1. N.° 386. *O Sector Z (Fig. 1.) he igual a hum prisma B, cuja baze seja hum prrallelogramo igual á superficie convexa do Sector, e cuja altura seja hum terço do raio da esphera.*

Ora a Superficie convexa do Sector *Z* (que he a mesma do segmento), já dissemos (n.° 327.) que era igual a hum parallelogramo *B*, cujo comprimento fosse a circunferencia do circulo maximo da Esphera, e largura a flexa (*Fig.* 1.) Fig. 1.

Logo

O valor de Z Sector da Esphera he igual a hum prisma B, cujo comprimento seja a circunferencia da Esphera, a largura a flexa, e a altura hum terço do raio (Fig. 1.) Fig. 1.

※

N.° 387. Para avaliar *o Segmento da Esphera (Fig. 2.)* depois de ter avaliado o Sector *B*, basta cortar to- Fig. 2.

do

do o Cóne *K* , e avaliado elle , o resto será o valor do segmento *H*.

Ora o Cóne *K*, já dissemos que era igual a hum Cilindro da mesma baze , e da terça parte da altura (n.° 352.), e já tinhamos dito que o circulo da baze deste Cóne se podia reduzir a hum parallelogramo que tivesse por comprimento a circunferencia delle, e por altura meio raio (n.° 232.)

Logo.

N.° 388. *Fazendo hum Prisma P cujo comprimento seja a circunferencia do Cóne, a lurgura meio raio da sua baze , e altura o terço da altura do Cóne , fica conhecide o seu valor.*

Logo.

N.° 389. *O valor do segmento H (Fig. 2.) he o valor do Sector Z, (Fig. 1.) menos o do Cóne K.* Est. 13. fig. 2.

Lo-

Logo.

Est. 13. fig. 1. N.°390. *O valor do Segmento H he igual ao do Prisma B da Fig.1. depois de tirarmos delle o valor do Cóne K, que he o do outro Prisma P*
Fig. 2. (*Fig.* 2.) E assim o Segmento *H* fica igual ao Solido *Y*.

Porque assim como juntando o Cóne *K* ao Segmento *H* temos o Sector *Z*, e assim tambem pegando no prisma *P*, que vale o Cóne *K*, e juntando o Solido *Y*, onde entra, se forma o prisma *B* da fig. 1. igual ao Sector *Z*.

§ XV.

Do modo de avaliar o Prisma recto truncado.

N.° 391. CHamamos Prisma truncado todo aquelle que for cortado irregularmente como *A* (*Fig.* 3.)
Fig. 3. Para simplificar a doutrina que havemos de dar, falaremos do Prisma

ma triangular; porque todos os mais ſe podem reduzir a triangulares.

O Priſma pois triangular *A* tem 3 eſquinas deziguaes, e para ſe reduzir a hum priſma regular e capaz de ſer avaliado ſe fará o ſeguinte.

N.° 392. 1. Tiraremos do angulo Solido *o* duas diagonaes *om*, *on*, e conſideremos cortada e ſeparada eſſa pequena piramide, cuja baze *m a n*, he a baze do priſma, e cujo vertice eſtá em *o*, e que a pomos abaixo em *E*.

2. Separada a piramide *E*, fica o reſto *B*, que he huma piramide irregular de 4 faces; cuja baze he *rsnm*, e cujo vertice eſtá em *o*; ora neſta baze *r s m n* podemos tirar huma diagonal *m s*.

3. E nós podemos conſiderar huma divizaõ deſde o vertice *o*, indo ſempre buſcando a diagonal *m s*; e dividimos eſſa piramide quadrilatera em duas triangulares; as quaes podemos ſeparar; huma *C*, cuja baze he *r s m*, com o ſeu vertice em *o*; outra *D*, cuja baze he *m s n*, e cujo vertice he tambem *o*; as quaes ſe

ſe

ſe juntarem fica feito outra vez o Solido *B* ; e pondo-lhes em ſima a piramide *E* , fica formado o priſma truncado *A* primitivo.

Deſte modo ſe conhece que o priſma truncado *A* ſe divide em 3 piramides *E*, *C*, *D*.

Como eſtas piramides ſaõ diſſemelhantes , e naõ tem nada commum , vejamos ſe reduzimos *C*, e *D*, a outras iguaes , que tenhaõ a meſma baze de *E* , vem a ſer a do Priſma primitivo *A* ; porque deſte modo ſerá mais facil o avaliar as piramides , e o priſma que nellas ſe dividio.

N.° 393. 4. Façamos pois duas piramides imaginarias *F*, e *G* , cujas bazes ſejaõ como a da piramide *E* , iſto he a do priſma primitivo *A*; e demos a *F* a altura do priſma na eſquina *rm* ; e á piramide *G* a altura do priſma na eſquina *sn* : ficando a piramide *E* com a altura do Priſma em *oa*. Com iſto temos 3 piramides todas 3 com a meſma baze do priſma ; e cadaqual tem por altura huma eſquina do priſma ; *ao*

ſe-

ſerá a altura de *E* ; *rm* de *F*; *sn* de *G*.

5. Vejamos agora ſe eſtas duas piramides imaginarias *F*, *G* valem tanto como as verdadeiras *C*, *D* em que o priſma ſe dividio. Quanto a *C*, ella tem o vertice em *o*, tem por baze o triangulo *mrs* ; ora a piramide imaginaria *F* ſe a deitarem no chaõ ſobre o triangulo *mrn*, fica com eſſe triangulo por baze: Para compararmos agora eſtas duas bazes ou triangulos *mrs*, *mrn*, buſquemolos no priſma *A*, e veremos que o triangulo *rsm*, ou *rnm* ſaõ iguaes porque ſaõ entre as meſmas parallelas (n.° 224.) Logo o triangulo *rsm* baze de *C*, he igual a *rnm* baze de *F*; vamos agora ver a altura deſſas duas piramides *C*, e *F*: *C* tem o vertice em *o*, e *F* em *a*; ora olhando para o priſma primitivo *A*, ſe vê que *o* e mais *a* ficaõ na meſma parallela ; logo as piramides *C*, *F* tem baze igual e altura igual, por conſeguinte ſaõ iguaes.

Vamos agora ás Piramide *G*, e *D*, para ver ſe tambem ſaõ iguaes entre si; deitemos huma e outra de sorte que fiquem por vertices em *G* o ponto *a*, em *D* o ponto *o*; ambos da mesma esquina *a o* do Prisma *A*, que já vimos que ficavaõ na mesma altura.

Quanto á baze de *D* he o triangulo *m s n* do Prisma *A*; a baze de *G* he o mesmo triangulo *m s n* do Prisma *A*. Logo *D* e *G* tem a mesma baze, e os vertices na mesma altura, e assim a piramide imaginaria *G* he igual á piramide verdadeira *D*.

Logo.

N.º 394. *O Prisma truncado he igual ás tres piramides E, F, G, que tem por bazes a do prisma, e por alturas as tres esquinas delle.*

⁂

Ora estas tres piramides (*Fig.* 4.) se reduzem a tres prismas da mesma baze do truncado *A*, e de altura que seja $\frac{1}{3}$ das piramides, isto he $\frac{1}{3}$ das esquinas do prisma *A*, assim os prismas *B*, *C*, *D*, saõ iguaes es as piramides *E*, *F*, *G*, que lhes correſpondem a prumo na eſtampa. Eſt. 13. fig. 4.

Logo.

N.° 395. *O Priſma truncado (A Fig. 3.) he igual a hum priſma inteiro (A Fig. 4.) da meſma baze cuja altura ſeja a ſomma das terças partes das 3 eſquinas do truncado;* e aſſim o Priſma truncado he igual ao priſma inteiro *A*, composto dos priſmas *B*, *C*, *D*. Fig. 3. Fig. 4.

Se o Priſma naõ for recto, corte-ſe pelo meio por huma ſecçaõ perpendicular ás eſquinas, e ficará dividido em 2 priſmas rectos truncados, e ſaberemos avalia-lo.

§ XVI.

Modo de avaliar o Volume dos Corpos irregulares.

N.° 396. QUalquer Corpo irregular ſe pode dividir por huma ſecçaõ recta, e já ficaõ eſſas duas ſuperficies da secçaõ podendo servir de bazes rectas desses dois corpos.

Em segundo lugar, posta qualquer dessas partes sobre a sua baze recta podemos hir dividindo cada huma dessas partes em prismas triangulares truncadas; e sabendo avaliar cada hum, se sabe o valor do Solido; e poderáõ restar algumas piramides as quaes já nós sabemos tambem avaliar.

Para abreviar a operaçaõ daremos algumas regras que dispensem de chegar até á ultima divizaõ de prismas triangulares truncados.

N.° 397. 1. Seja hum Solido como o da fig. 5. da Est. 13. a sua baze *EAOQ* seja hum parallelogramo, sobre cujos 4 angulos se levantem perpendicularmente 4 esquinas deziguaes *ES*, *AI*, *PQ*, e *OR*. A face *EOSR* seja cortada deforma que se termine em *I*; e a face *OQRP* seja tambem cortada deforma que se termine em *I*. Aqui temos *hum parallelipipedo irregularmente truncado*: Ora supponhamos que he precizo saber o seu valor.

II. Tiremos na baze a diagonal *AO*, e conforme essa diagonal se faça huma secçaõ pelas esquinas *OR*, *AI*, ficará dividido nos dois prismas truncados que vemos separados na mesma figura; os quaes sabemos já avaliar; pelo que fica dito.

Porquanto o que tem por baze o triangulo *EAO* he igual a hum prisma recto dessa baze cuja altura seja $\frac{1}{3}$ de *ES*, e mais $\frac{1}{3}$ de *AI*, e mai $\frac{1}{3}$ de *RO*. Semelhantemente o outro he igual a hum prisma recto cuja baze seja o triangulo *AOQ*, e cuja altura seja $\frac{1}{3}$ de *PQ*, e mais $\frac{1}{3}$ de *AI*, e $\frac{1}{3}$ de *RO*.

Ora como as duas bazes sendo triangulos metades do parallelogramo saõ iguaes, em vez de fazermos dois productos ou prismas, façamos hum com a altura dos dois; isto he *hum prisma, cuja baze seja EAO*, e cuja altura seja $\frac{1}{3}$ de *ES*, $\frac{1}{3}$ de

 PQ,

PQ, e $\frac{2}{3}$ de *AI*, e $\frac{2}{3}$ de *RO*, ou por outro modo $\frac{1}{3}$ de cada esquina naõ commum, e $\frac{2}{3}$ das esquinas communs a ambos, que saõ aquelles por onde vai a divizaõ.

E como o Prisma quadrilatero total se divide nos dois, o seu valor he a somma de ambos.

Logo.

N.° 398. *O Parallelipipedo differentemente truncado hé igual á sua meia baze multiplicada por $\frac{1}{3}$ de cada esquina naõ commum, e $\frac{2}{3}$ de cada esquina commum aos dois prismas triangulares em que se podia dividir.*

Est. 13. fig. 6. O mesmo diremos se o parallelipipedo for concavo (*Fig.* 6.) entaõ se poderá dividir segundo a linha da direcçaõ da concavidade *MN*, e se tirará a diagonal na baze *oi*, e se fará a mesma operaçaõ assima.

II.

II.

N.º 399. O Prisma quadrangular que naõ for parallelipipedo, só se pode avaliar fazendo a divizaõ na baze, segundo a linha ou direcçaõ da convexidade, ou da concavidade superior, e fazendo dois triangulos, e de cada hum delles multiplicado pelos terços das suas tres esquinas, formar hum producto, e a somma de ambos será o valor desse Solido.

§. XVII.

Dos Solidos Regulares.

N.º 400. CHamamos Solido absolutamente regular o que nas Superficies, nas Linhas, e nos Angulos guarda huma perfeita igualdade e semelhança. Deste genero saõ o *Cubo*, o *Tetahedro*, o *Octahedro*, o *Icosahedro*, e o *Dodecahedro*: nos quaes naõ ha a minima desigualdade em Angulos, Linhas, Superficies &c.

Est. 14. fig. 1. N.° 401. A Esphera (*Est.* 14. *Fig.* 1.) tambem se podia collocar entre os corpos regulares, por ser por toda a parte semelhante a si mesma; deforma que de qualquer modo que se tome sempre offerece a mesma face igualmente convexa.

Fig. 2. O Cubo (*Fig.* 2.) he formado por 6 quadrados iguaes; hum fica na baze, os quatro ároda da baze fazem os quatro lados, e o sexto forma a baze superior.

No Cubo todos os angulos Solidos saõ formados pelo concurso de 3 quadrados; e nos quadrados todos os angulos de superficie saõ de 90 gráos, e todas as linhas saõ iguaes.

Logo.

N.° 402. *O Cubo he hum Solido perfeitamente regular.*

※

Com quadrados naõ podemos formar outro Solido; porque se quizermos juntar sómente dois, naõ se fórma angulo solido; o qual forçozamente hade ter 3 faces ao menos, e 3 dimençoens em longo, largo, e alto.

Se

Se juntamos as tres faces quadradas que dissemos, formamos hum angulo Solido, como se vê no Cubo. Est. 14.

Se juntarmos quatro (*Fig.* 7.) fig. 7. *e*, *i*, *o*, *u*; tendo cadaqual 90 gráos, todos juntos fazem 360; e por conseguinte o ponto do concurso he o centro de hum circulo, e naõ pode fazer angulo Solido.

Logo.

N.° 403. *Com quadrados naõ se pode formar outro Solido além do Cubo.*

✠

Vejamos agora os Solidos que formamos com os triangulos equilateros; pois todos os outros triangulos saõ pela sua irregularidade incapazes de formar corpo perfeitamente regular.

Juntos 3 triangulos (*Fig.* 3.) Fig. 3. faraõ hum angulo *Solido M*; e como a baze tambem hade ser hum triangulo formado por 3 lados dos triangulos que formaõ as faces; hade ser triangulo; e como as linhas que o formaõ saõ lados de triangulos equi-

equilateros, tambem elle hade ser *equilatero*, e igual por isso aos superiores. Os tres angulos da baze, sendo todos elles formados por 3 triangulos equilateros hum da baze, e dois dos lados, e saõ todos iguaes aos que formaõ o angulo do vertice *M*, tambem lhe saõ iguaes.

Est.14. fig. 8. Estes quatro triangulos se vem na (*Fig.* 8.) onde se vê como se podem formar de papellaõ para se armar o *Tetahedro* : *B* he a baze; *A*, *E*, *O*, saõ os lados que se levantaõ para sima em roda, e juntaõ os angulos *m m m*, para fazer o vertice do *Tetahedro M* da *Fig.* 2.

Logo.

N.º 404. *O Tetahedro formado por 4 triangulos equilateros he corpo regular.*

⁂

Fig.12. Juntemos agora 4 triangulos equilateros (*a*, *e*, *m*, *n*. *Fig.* 12.) de sorte que *o o* se juntem; ficará huma piramide de 4 faces, com o vertice em *i*; porém a baze será quadrada

e

e por isso desigual aos lados; e ficará o Solido irregular.

Formemos porem outra piramide semelhante, e juntemos as duas bazes quadradas, ficará o Solido regular *H* (*Fig.* 4.) Porquanto. Est. 14. fig. 4.

1. Todas as 8 faces saõ triangulos equilateros.

2. Todos os angulos Solidos saõ formados por 4 faces, como o vertice em *i*, porque a inferior *t* se suppoem o mesmo que o de sima; os lateraes *r*, *s* &c. Saõ formados cada hum pelo concurso de dois triangulos superiores, e de dois inferiores; e assim saõ formados por 4 triangulos equilateros.

Logo.

N.° 405. *O Octahedro he Corpo perfeitamente regular.*

Para o formar de papellaõ se pode cortar como na (*Fig.* 9.) e Fig. 9. dobra-lo deforma que *o o* se juntem: porque logo aparece hum Solido em *i*, formado pelos triangulos *a e m n*, e os outros 4 formaõ a parte infe-

rior

rior do Octahedro, cujo vertice he *t*.

※

Juntemos agora ſinco triangulos
Eſt. 14. fig. 13. equilateros (*Fig.* 13.), e façamos que *m*, *n* ſe juntem ; o centro *o* ſe levantará ; e ficará hum Solido de 5 faces iguaes e ſemelhantes. Porém a baze deſſa piramide he hum pentagono, e os lados ſaõ triangulos, o que contradiz á regularidade que ſe dezeja ; e aſſim por eſte modo ainda naõ temos Solido regular.

Se formarmos outra piramide pentagonica ſemelhante para lhe ajuntar voltando-a com a cuſpide para baixo, como fizemos no *Octahedro*, ſim fica hum Solido todo formado por triangulos equilateros ; porém os angulos Solidos naõ ſaõ ſemelhantes ; porquanto o ſuperior e o inferior ſaõ formados pelo concurſo de 5 triangulos ; e os lateraes em circuito *a a a a*, &c. Só ſaõ formados por 4, dois da piramide ſuperior, e dois da inferior : e aſſim ainda naõ ha Solido regular.

Façamos porém huma figura em papellaõ, como ſe reprezenta na

(*Fig.* 10.) onde além dos 5 trian- Eſt.14. fig. 10.
gulos equilateros *o*, *o*, *o*, *o*, *o*, que haõ de formar a piramide ſuperior *O*, e dos outros 5 *e e e e e* que formaraõ a inferior *E*, temos huma tira *M N* formada de 10 triangulos equilateros, 5 que unem pelas bazes com os ſuperiores, e outros 5 que unem com os inferiores. Dobrando pois eſta tira circularmente, deſorte que as duas extremidades *M N* ſe juntem, e dando golpes nas divizoens dos ſeus triangulos, para que ſó por eſſas linhas ſe dobre a tira, e faça hum circuito de faces planas; ſe unirmos em ſima todos os angulos *o*, *o*, *o*, *o*, *o*, e embaixo os angulos *e*, *e*, *e*, *e*, *e*, temos hum Solido, como ſe vê na *Fig.* 5., no qual obſervamos o ſeguinte. Fig. 5.

1. Que eſſe Solido he compoſto de 20 triangulos equilateros.

2. Que todos os angulos Solidos ſaõ formados pelo concurſo de 5 faces: Em *O*, e em *E* he manifeſto; *nos lateraes do circuito a, i, vemos* que cada angulo Solido dos que terminaõ a baze da piramide ſuperior

O,

O, he formado por dois triangulos da piramide superior; outros dois que desses pendem e cahem para baixo; e hum que vem debaixo, a introduzir-se entre os dois que pendem. O mesmo digo de *s*, e dos mais que terminaõ a baze da piramide inferior *E*.

Logo.

N.° 406. *O Icosahedro he hum Corpo regular, formado por 20 faces semelhantes e iguaes.* &c.

Est. 14. fig. 14. Se juntarmos 6 triangulos equilateros (*Fig.* 14.), como cada angulo dos do centro he de 60 gráos, todos 6 fazem 360, que he o circuito de hum circulo; desorte que se os juntarmos, o centro *O* naõ se pode levantar do plano, nem formar angulo Solido.

Logo.

N.° 407 *Com triangulos equilateros naõ se pode formar corpo algum regular além do Tetahedro de 4 faces, do Octahedro de 8 fates, do Icosahedro de 20.*

⁂

Vamos agora aos *Pentagonos* para ver que corpos Solidos poderemos formar com elles, e juntemos 3 pentagonos (*Fig.* 15.) Para examinar que valor tem os ſeus angulos; tomemos hum Pentagono, e tiremos do ſeu centro raios aos ſeus angulos. Os do centro *o*, como tem por medida $\frac{1}{5}$ da circunferencia, tem por medida 72 gráos. Eſt. 14. fig. 15.

Ora cada triangulo tem o valor de 180, faltaõ logo para valor dos 2 angulos que cada triangulo tem no circuito do Pentagono o que vai de 72 a 180 que ſaõ 108; iſto repartido pelos 2 dá a cada hum 54: ora nós apagando eſtes raios que dividem o Pentagono em triangulos, fica cada angulo duplo do que fazia a baze do triangulo, iſto he duplo de 54, que vem a ſer 108.

Logo.

Os angulos do Pentagono valem 108.

Juntando agora 3 pentagonos *a*, *e*, *o* *Fig.* 15. Só temos em *A* 324 gráos no valor que os tres angulos occupaõ; e falta ainda o valor de 36 gráos, para completar a circunferencia de 360. Logo se juntarmos *e* com *i* formaremos hum angulo Solido com 3 faces pentagonicas.

Est. 14. fig. 11. Tomemos pois hum pentagono de papellaõ *M* (*Fig.* 11.) e dos seus 5 lados façamos que se levantem outros 5 pentagonos iguaes; e levantem até se unirem mutuamente por modo de huma bandeja (perdoe se a familiaridade dos termos porque attendemos á clareza de que precizaõ os principiantes) formemos outra bandeja semelhante á roda do pentagono *N*: e encaixaremos huma
Fig. 6. sobre a outra como na (*Fig.* 6.)

Ora nesta figura temos que observar.

1. Que todas as faces saõ semelhantes, e formadas por lados e angulos planos semelhantes e iguaes; pois todas saõ pentagonos iguaes e semelhantes.

2. Que todos os angulos Solidos

ſaõ formados por 3 faces; porquanto nos que ſe formaõ á roda do pentagono ſuperior *M*, e inferior *N* he manifeſto, porque os forma a baze com os dois pentagonos que ſe levantaõ como lados até ſe encontrarem mutuamente: e os que ſe formaõ pelo concurſo da metade ſuperior com a inferior, tambem ſe formaõ por hum pentagono que ſobe debaixo para ſe introduzir entre dois que pendem do que eſtá em ſima, ou ás aveſſas.

Logo.

N.º 408. *O Dodecahedro he hum Solido regular, compoſto de* 12 *faces iguaes e ſemelhantes.*

⁂

Se quizermos juntar 4 Pentagonos para fazer com elles hum angulo Solido, naõ poderemos; porque tendo cada hum delles os angulos de 10 gráos, 4 juntos fariaõ a ſomma de 432, o que ſendo muito maior que a circunferencia do circulo, naõ pode caber no plano, e muito menos

nos no angulo Solido, que para se elevar do plano, deve ter circunferencia menor que a do circulo.

Logo.

N.° 409. *Com Pentagonos regulares naõ se pode fazer Solido álem Dodecahedro.*

⁂

Se quizermos formar com *Exagonos* algum corpo solido, veremos que he impossivel; porque (*Fig.*16.) juntando 3, temos 360 gráos; pois cada angulo do exagono regular contém 120 como dissemos (n.° 98.) Logo 3 fazem 360; o que he justamente a circunferencia do circulo, e assim o ponto do concurso naõ se poderia elevar do plano para fazer angulo Solido.

Est. 14. fig. 16.

⁂

Se nós quizermos valer do Epthagono, naõ poderemos fazer Solido algum, porque se tres Exagonos naõ podem fazer angulo Solido, muito menos o poderáõ os Epthagonos, cujos angulos saõ maiores.

Lo-

Logo.

N.°410. *Naõ pode haver Solido algum regular além dos que eſtaõ ditos , iſto he do* Cubo , Tetahedro, Octahedro , Icoſahedro , e Dodecahedro ; excetuando a Eſphera de que aqui ſe naõ fala.

⁂

Agora Amigo Eugenio , antes que ponha termo a eſtes Elementos de Geometria , me occorre (governandome pela experiencia que tenho) o fazer-vos hum Epilogo de combinaçaõ entre as razoens das Linhas , das Superficies , e dos Solidos ; que vos dará grande luz ; e o ajunto a eſta Carta que já tinha acabado.

EPILOGO.

Sobre a Combinaçaõ das Razoens e Proporçoens das Linhas, Superficies, e Solidos.

§ I.

N.° 411. NÓs dissemos em seu lugar (n.° 139.) que quando muitos termos estavaõ em progressaõ, a mesma razaõ hia reinando entre todos elles; desorte que entre dois termos vizinhos quaesquer que fossem se achava o mesmo Expoente.

N.° 405. Dissemos tambem que hum numero multiplicado por si mesmo fazia o quadrado: V. g. 4 por 4 dava 16, que he hum numero quadrado. Tambem dissemos que este quadrado multiplicado outra vez pela raiz, ou pelo numero primitivo formava o Cubo.

Ora quando huma quantidade se multiplica por si mesma para formar o quadrado se diz que sobe a

se-

segunda potencia; e quando se multiplica outra vez pela raiz para formar o Cubo, se diz que sobe *a terceira potencia*, e quando o Cubo se multiplica de novo pela raiz, sobe a *quarta potencia*, e depois disso se se multiplica de novo pela raiz, sobe a *quinta potencia* &c.

O que se costuma a exprimir assim em algebra: Seja a quantidade simples ou a raiz igual a A; o quadrado de A se exprime assim $A \times A$, ou A^2 o Cubo de A ou a terceira potencia podia-se exprimir assim $A \times A \times A$; porem fica mais curto dizer assim A^3; e do mesmo modo a quarta potencia de A se exprime assim A^4; e a quinta patencia assim $A.^5$

N.º 412. Onde devem advertir os principiantes que naõ he o mesmo $3\,A$, ou A^3, o numero 3 antes de A significa addicçaõ, isto he que se deve tomar 3 vezes; porém A^3, significa que devemos multiplicar A huma vez; e depois esse producto multiplicalo outra vez. Supponhamos que A vale 4 palmos $3\,A$ valem 12 palmos, e A^3 vale 64 palmos; porque 4×4 vale 16, e 16×4 vale 64.

N.° 413. Na Geometria podemos dar figura ſenſivel tanto da ſegunda potencia, que he huma ſuperficie, como da terceira, que he hum Solido; porém como naõ ha mais de 3 dimenſoens, naõ podemos dar figura ſenſivel da quarta, nem da quinta potencia &c. Sómente os numeros daõ ideia deſta multiplicaçaõ e naõ as linhas.

Iſto ſuppoſto formando huma progreſſaõ Geometrica $\div$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128. &c. cujo expoente commum he 2. Vê-ſe claramente que o primeiro termo para chegar ao valor do ſegundo baſta multiplicalo huma vez pelo expoente; mas para chegar ao valor do terceiro he precizo outra multiplicaçaõ pelo meſmo expoente 2; e do meſmo modo para chegar ao valor do quarto termo, he preciza terceira multiplicaçaõ pelo expoente &c. Donde ſe inferem varias Conſequencias.

C.

I.ª

Que podemos dizer que a razaõ do primeiro termo ao ſeu vizinho he o expoente ſimples, iſto he 2.

II.ª

N.º 414. Que a razaõ do primeiro termo ao terceiro he hum quadrado, ou ſegunda potencia do expoente 2, iſto he 4.

III.ª

N.º 415. Que a razaõ do primeiro termo ao quarto, he hum Cubo ou terceira potencia do expoente 2, iſto he 8.

IV.ª

N.º 416. Que a razaõ do primeiro termo ao quinto, he 2 ſubindo a quarta potencia, iſto he 16.

V.ª

N.º 417. Que a razaõ do primeiro

termo ao sexto he 2 subindo a quinta potencia, isto he 32. &c.

N.° 418. Supponhamos agora que formamos quadrados desses mesmos termos da progressaõ. (veja-se a *Est.* 15. *Fig.* 1.)

Est. 15. fig. 1.

$\div\!\div$ 1 : 2 : 4 : 8 - - - razaõ - - - 2.

$\div\!\div$ 1 : 4 : 16 : 64 - - razaõ - - - 4.

A razaõ ou *expoente* que reina nesta segunda progressaõ he 4; isto he o quadrado do *expoente* que reinava na primeira, porque como dissemos (n.° 164.) Nos quadrados ha a razaõ composta da que havia entre as bazes, e da que havia entre as alturas; e como saõ iguaes, e a razaõ composta de duas iguaes he hum quadrado da simples; segue-se.

Logo.

N.° 419. *Na progressaõ dos quadrados o expoente do primeiro para o segundo he hum quadrado do expoente simples.*

Ora entre o primeiro termo das raizes, e o terceiro, o *expoente* que ha he hum quadrado do *expoente* simples ao quarto da primeira progressaõ.

Logo.

N.° 421. *Entre o primeiro termo e o segundo da progressaõ ultima o expoente he hum. Cubo do expoente simples da primeira Progressaõ.*

§ II.

N.° 422. Outra coiza deveis observar Eugenio, que tudo o que saõ linhas em quaesquer figuras semelhantes tem entre si a razaõ das raizes, isto he o expoente simples, seja qual for a proporçaõ, ou Arithmetica, ou Geometria. Desorte que (*Fig.* 2.) se nos Circulos os raios saõ como 1, 2, 3, os diametros saõ como 1, 2, 3, as circunferencias saõ como 1, 2, 3, os arcos de igual numero de raios seráõ como 1, 2, 3, &c.

Est. 15. fig. 2.

N.° 423. Porém se nós comparamos Superficies semelhantes humas com outras, já o seu expoente ou razaõ naõ he o expoente simples das rai-

zes;

zes; mas hade ser esse expoente subindo a segunda potencia; isto he o quadrado do primeiro; como dissemos (n.° 412.): e esse mesmo expoente hade reinar em tudo o que for superficie; assim (*Fig.* 3.) se as linhas saõ como 1, 2, 3, os quadrados formados sobre ellas seráõ como 1, 4, 9, os triangulos como 1, 4, 9; e tambem nas piramides, ou Cubos, ou Cónes, ou Espheras, tudo o que for superficie será como 1, 4, 9. Est. 15. fig. 3.

N.° 424. Ultimamente se nós comparamos Solidos semelhantes entre si (*Fig.* 3.) o expoente naõ será nem o das raizes, nem o das superficies, mas o dos Cubos: isto he hade ser hum Cubo do primeiro expoente simples; e se as linhas que lhes pertencem, isto he os diametros ou periferias eraõ 1, 2, 3, os seus volumes seráõ 1, 8, 27. Porque o Cubo de 1 he 1, o de 2 he 8, e o de 3 he 27. Deforma que assim como nos circulos distinguimos a *Aria*, *ou o campo*, da circunferencia que os fecha, e dizemos que as superficies ou arias

saõ

saõ como 1, 4, 9, mas que as linhas da Circunferencia sempre ficaõ como 1, 2, 3, conforme eraõ os raios e diametros eraõ, assim agora nos solidos naõ havemos de confundir volumes com as superficies que os incluem; e assim se os raios de huma
Est. 15. fig. 3. esphera (*Fig.* 3.) ou os lados de varios Cubos forem como 1, 2, 3, tudo o que for linha nesses solidos semelhantes será como 1, 2, 3, isto he altura 1, 2, 3, lados como 1, 2, 3, &c. Porém tudo o que for superficie, v. g. baze, face &c. seráõ como 1, 4, 9, e o pezo, ou volume, ou o vaõ e espaço comprehendido dentro da superficie total seráõ como 1, 9, 27.

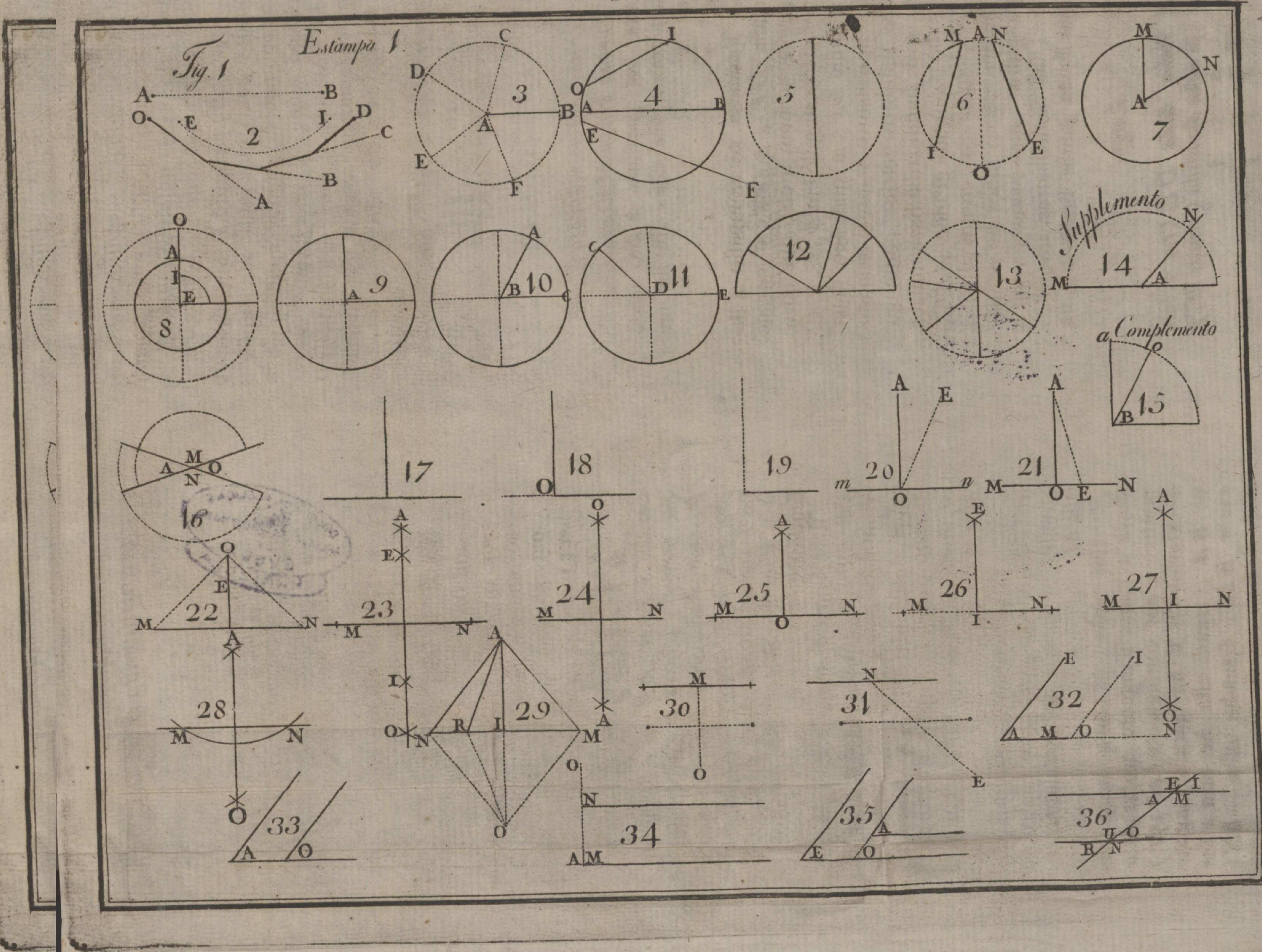
N.º 425. Donde se segue que nos Solidos semelhantes todas as linhas correspondentes estaõ na razaõ simples.

Todas as Superficies na razaõ dos quadrados.

Todos os Volumes ou pezos na razaõ dos Cubos.

Eisaqui Amigo Eugenio, o que me parece que basta para a intelligengência da Musica que vós quereis saber; e da que vos irei ensinando em varias Cartas que vos remetterei, conforme o que prometi.

Fim do primeiro Tomo.


Estampa 1
Fig. 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
Supplemento
15
Complemento
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36

Estampa II

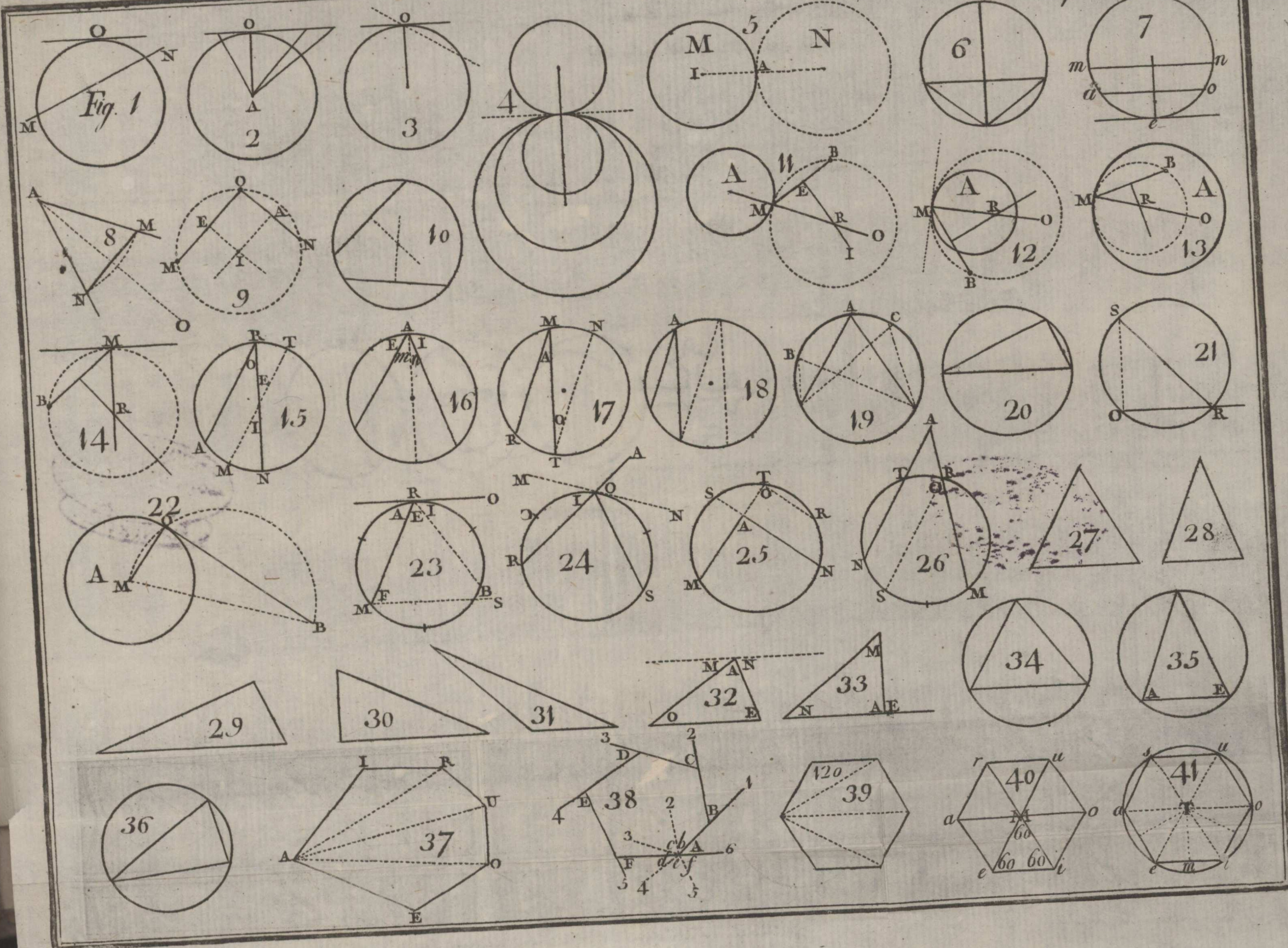
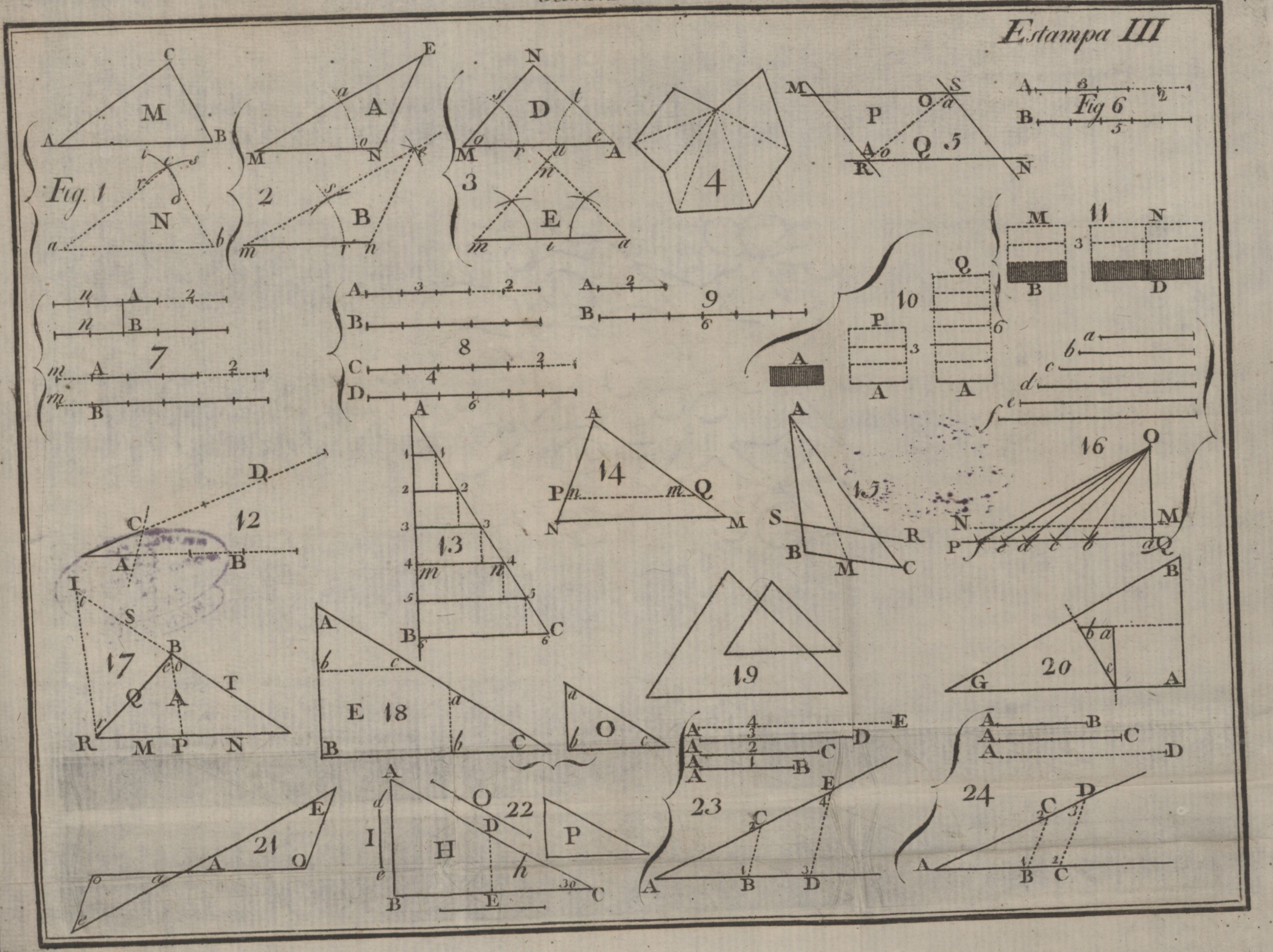
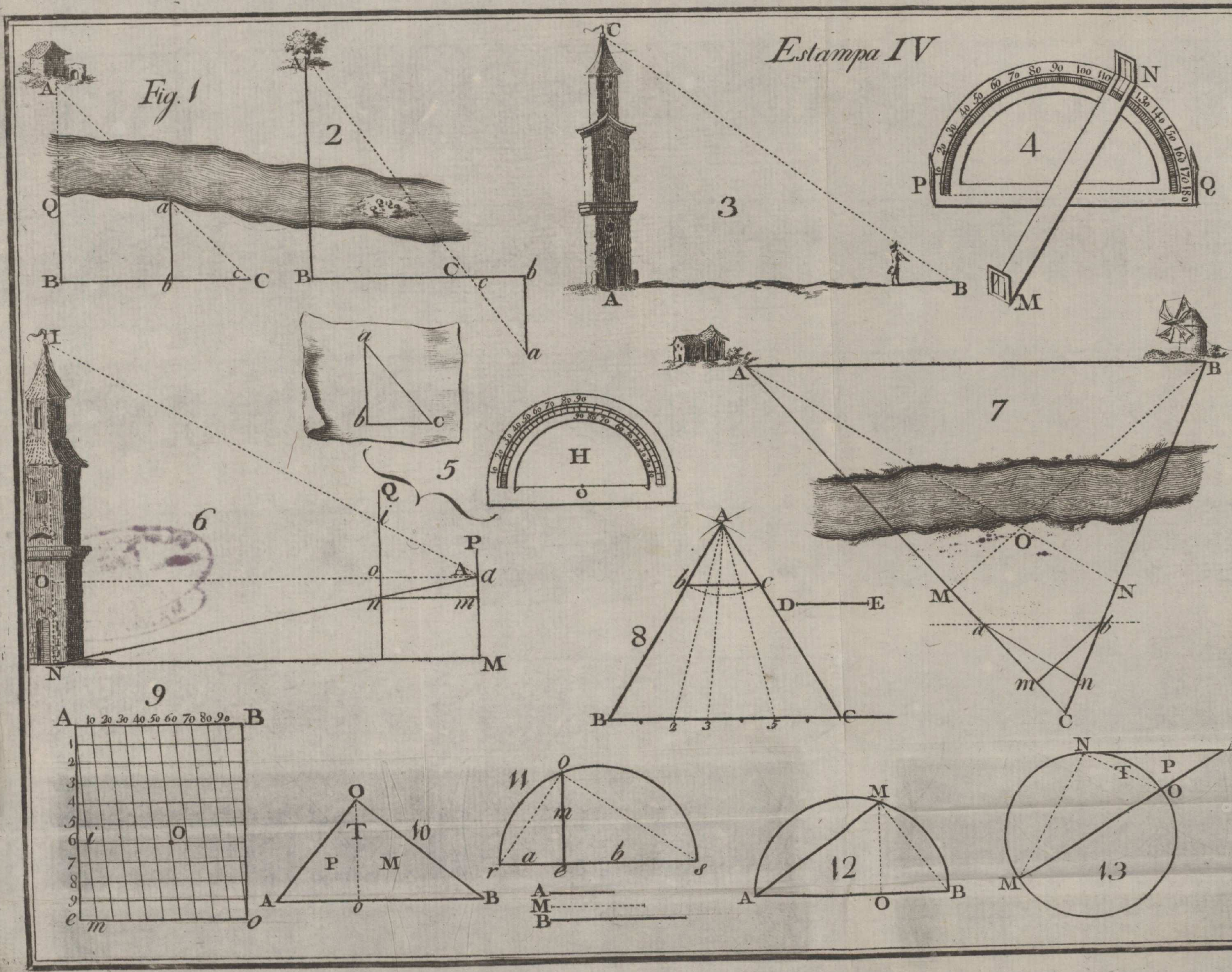


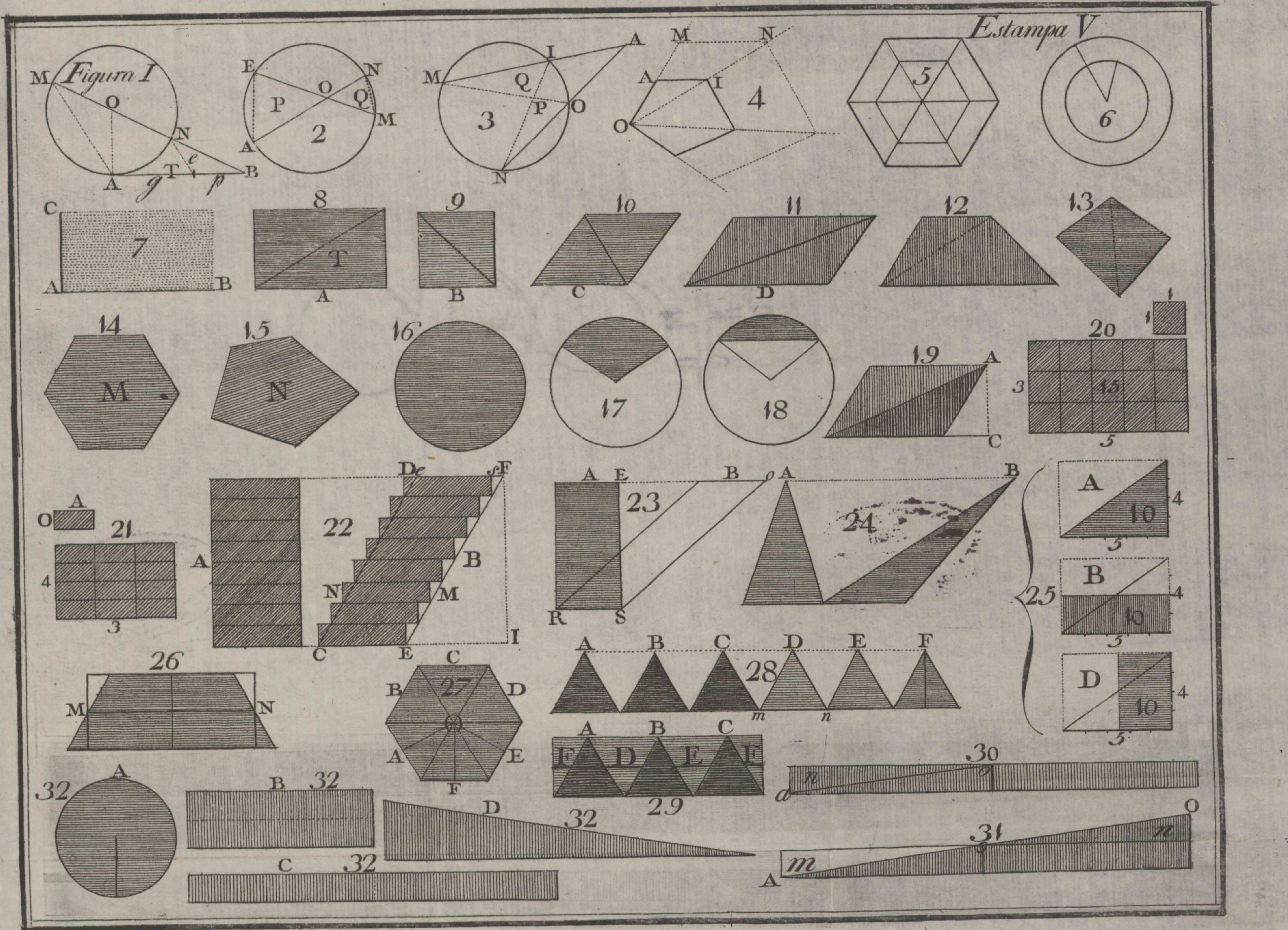
Fig. 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41

Estampa III





Estampa IV


Estampa V
Figura I
M
O
N
e
T
A
g
p
B
E
N
O
P
Q
M
A
2
A
I
M
Q
P
O
3
N
M
N
A
I
4
O
5
6
C
7
A
B
8
T
A
9
B
10
C
11
D
12
13
14
M
15
N
16
17
18
19
A
C
20
3
15
5
A
O
21
4
3
A
22
De
F
B
N
M
C
E
I
A
E
B
23
R
S
A
B
24
A
10
4
5
25
B
4
10
5
D
4
10
5
26
M
N
C
B
27
D
A
E
F
A
B
C
D
E
F
28
m
n
A
B
C
F
D
E
F
29
30
n
a
32
A
B
32
D
32
C
32
O
31
n
m
A

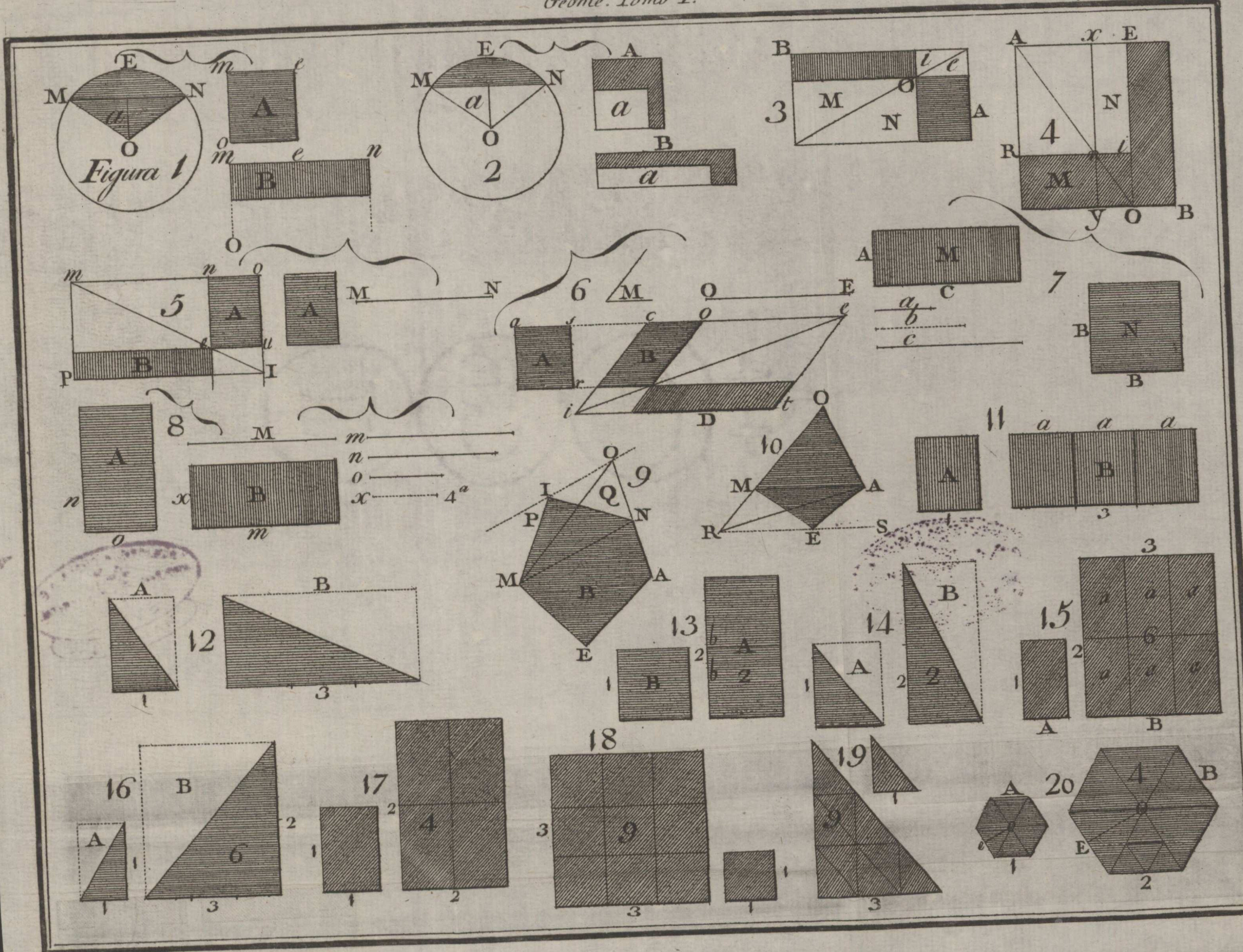
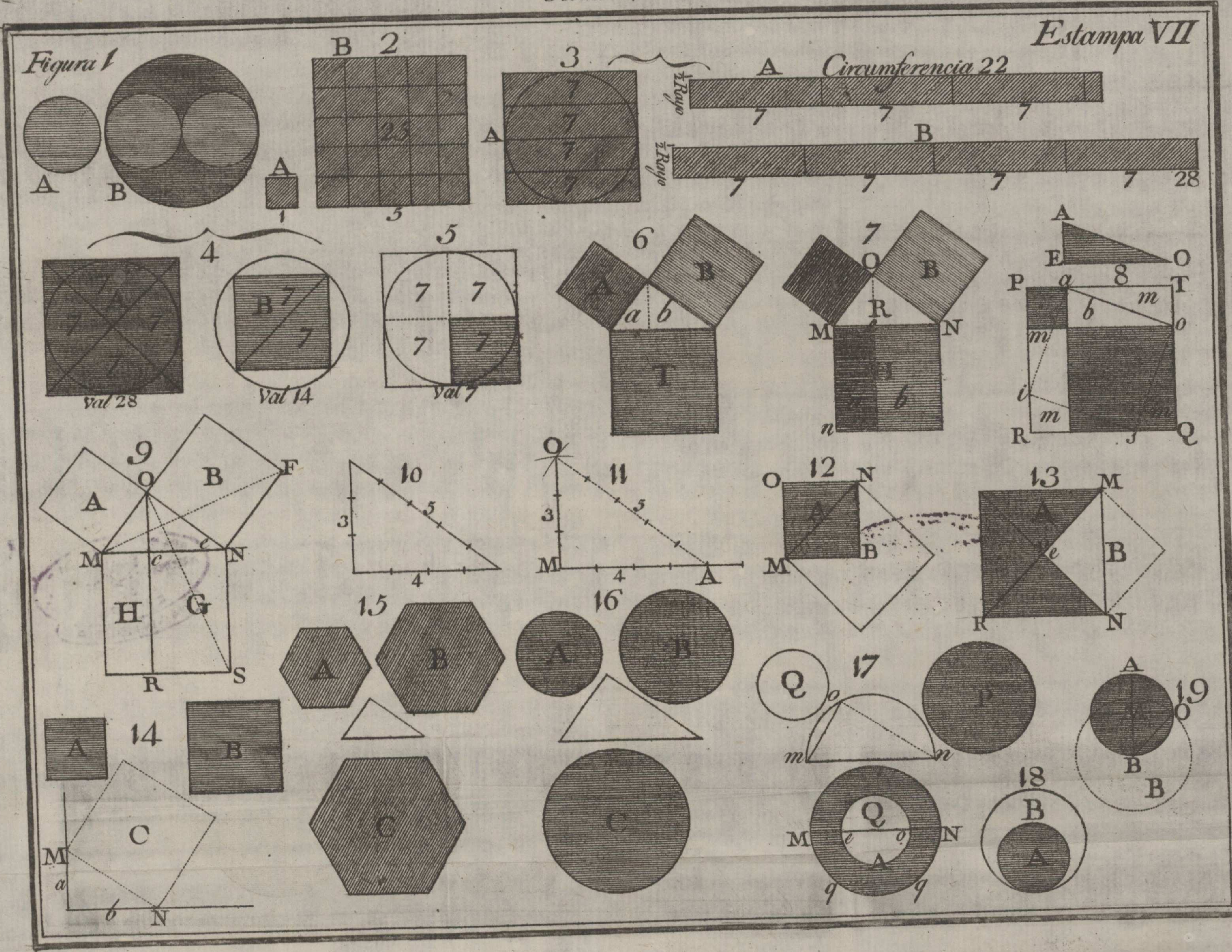
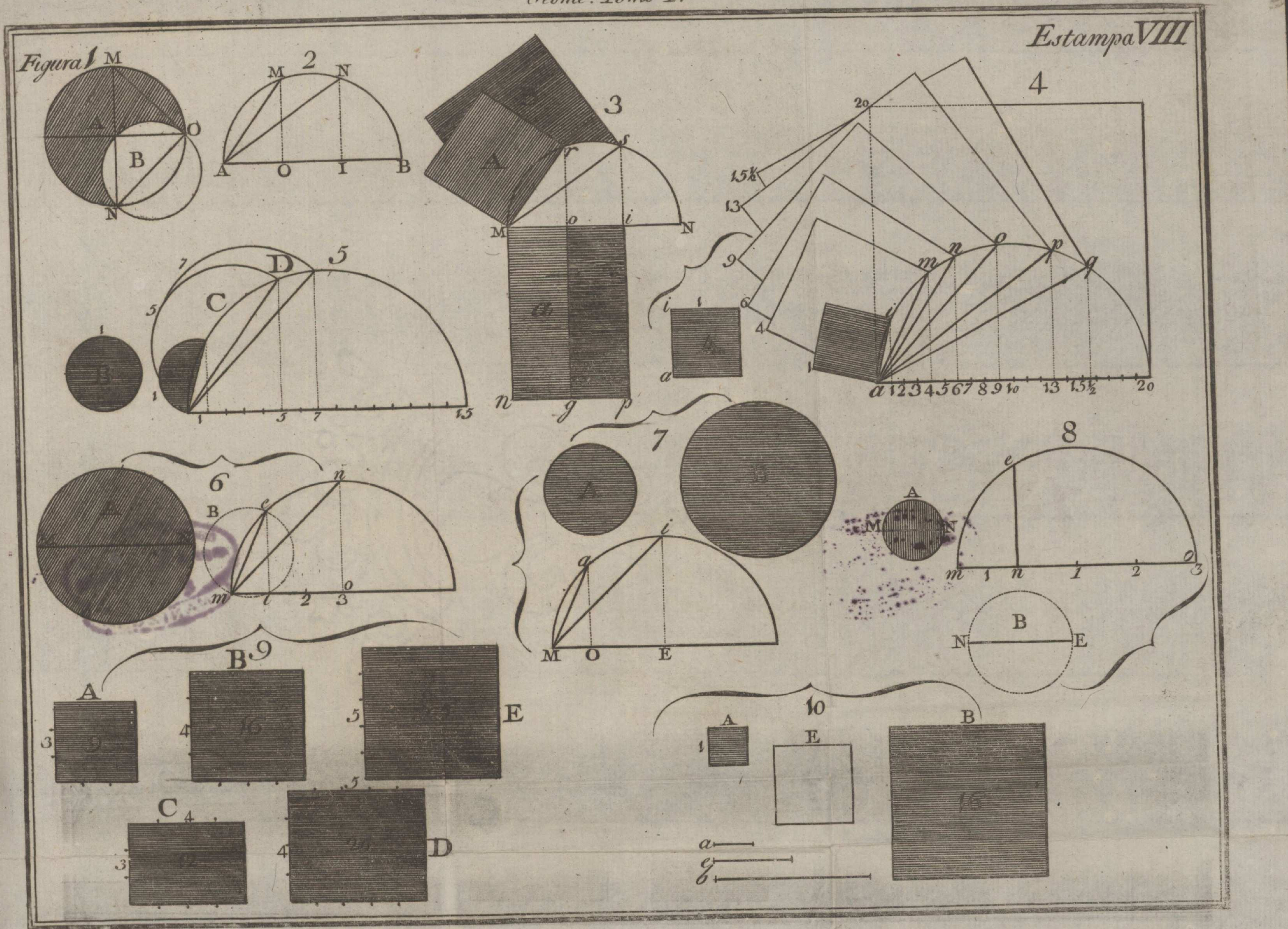


Figura 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20


Estampa VII
Figura 1
A
B
2
B
25
5
1
A
3
A
7
7
7
7
Circumferencia 22
½ Rayo
7
7
7
B
½ Rayo
7
7
7
7
28
4
A
7
7
7
7
Val 28
B
7
7
Val 14
5
7
7
7
7
Val 7
6
A
B
a
b
T
7
O
B
R
M
N
H
b
n
A
E
O
8
P
a
T
b
m
o
m
i
m
m
R
Q
9
O
B
F
A
M
c
e
N
H
G
R
S
10
3
5
4
O
11
3
5
M
4
A
12
O
N
A
M
B
13
M
A
e
B
R
N
14
A
B
C
M
a
b
N
15
A
B
C
16
A
B
C
17
Q
o
P
m
n
18
B
A
Q
M
e
o
N
A
q
q
19
A
O
B
B


Estampa VIII
Figura 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

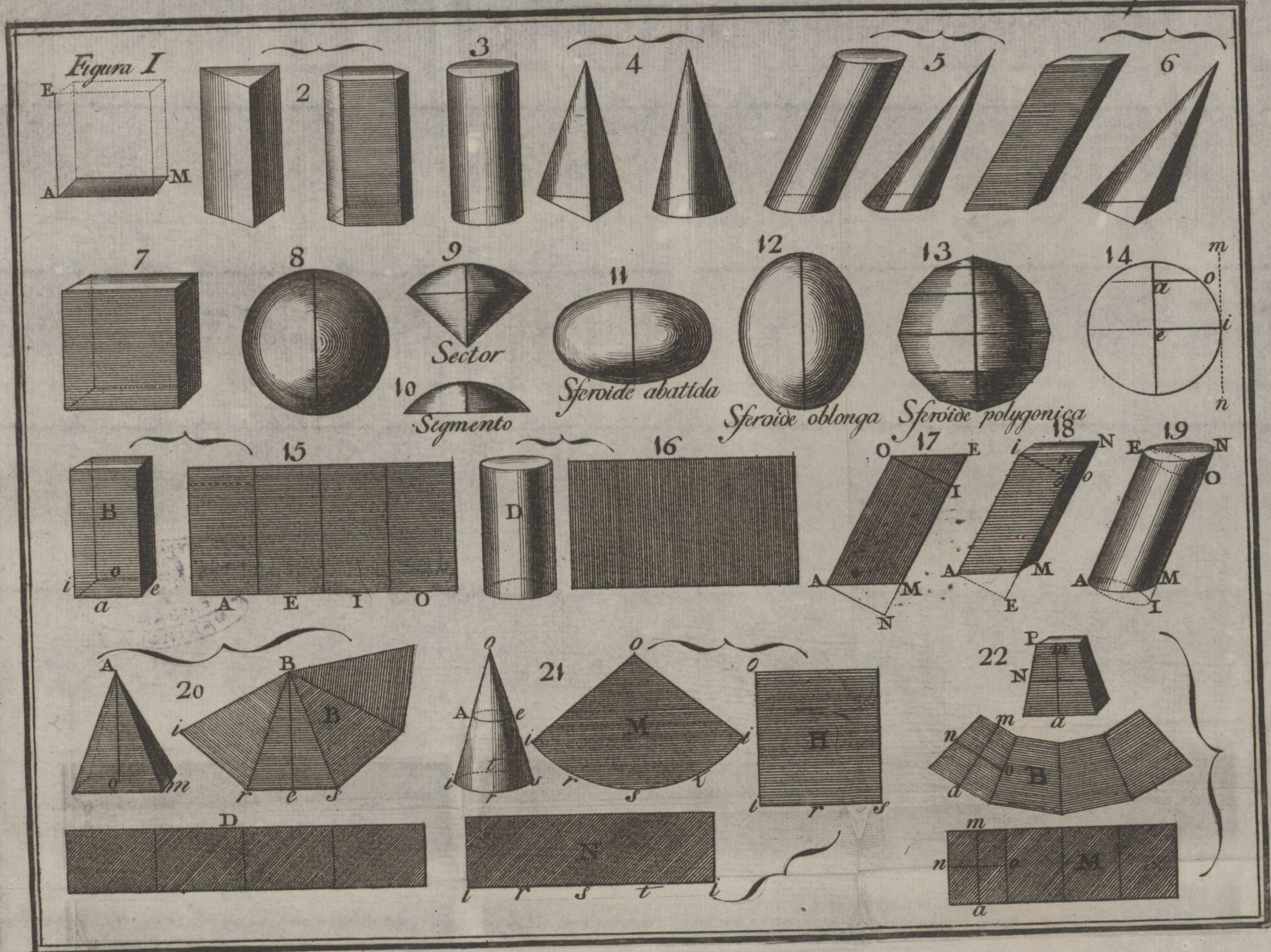
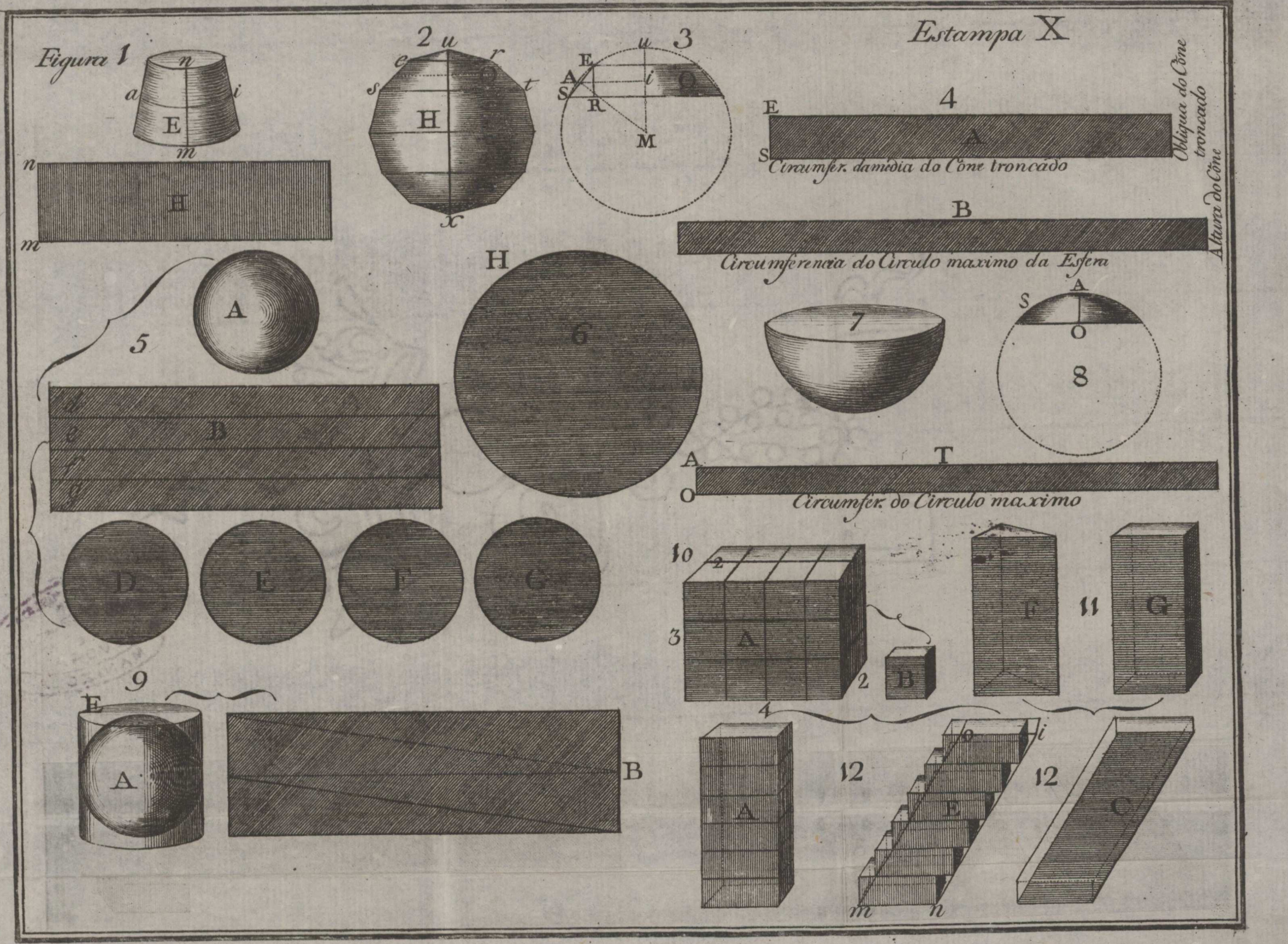


Figura I
E
A
M
2
3
4
5
6
7
8
9
Sector
10
Segmento
11
Sferoide abatida
12
Sferoide oblonga
13
Sferoide polygonica
14
m
o
a
i
e
n
15
B
i
o
e
a
A
E
I
O
16
D
17
O
E
I
A
M
N
18
i
N
o
A
M
E
19
E
N
O
A
M
I
20
A
B
i
B
o
m
r
e
s
D
21
o
A
e
t
i
r
s
o
M
i
i
r
s
t
o
H
l
r
s
N
l
r
s
t
i
22
P
N
a
n
m
o
B
d
m
n
o
M
a


Estampa X
Figura 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
Circumfer. da média do Cône troncado
Obliqua do Cône troncado
Altura do Cône
Circumferencia do Circulo maximo da Esfera
Circumfer. do Circulo maximo

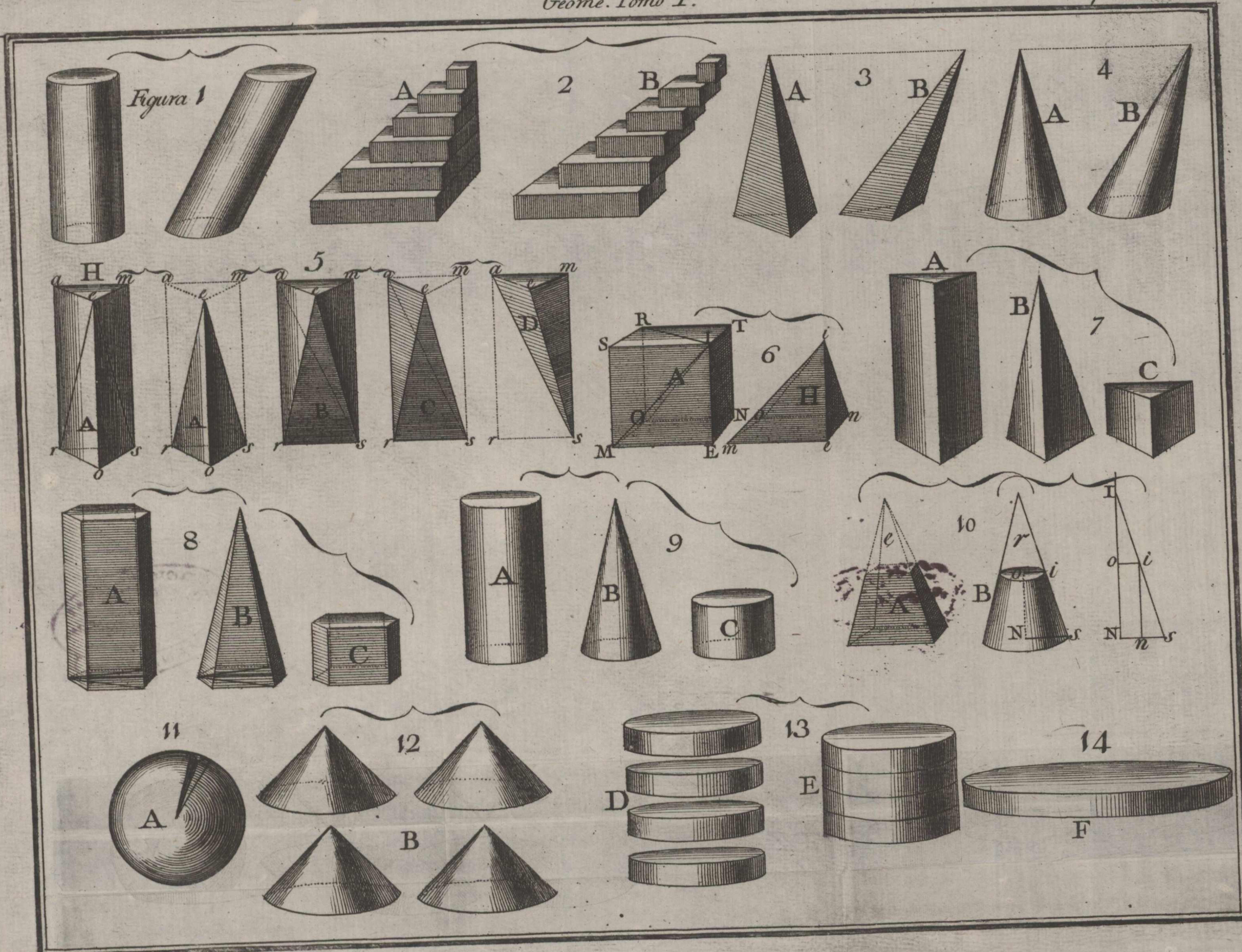


Figura 1
A
2
B
A
3
B
4
A
B
a
H
m
a
m
a
5
m
a
m
a
m
e
A
r
s
o
B
C
D
R
T
S
A
6
H
O
N
M
E
m
e
n
i
A
B
7
C
8
A
B
C
A
9
B
C
10
e
r
o
i
A
B
N
s
I
o
i
N
n
s
11
A
12
B
13
D
E
14
F

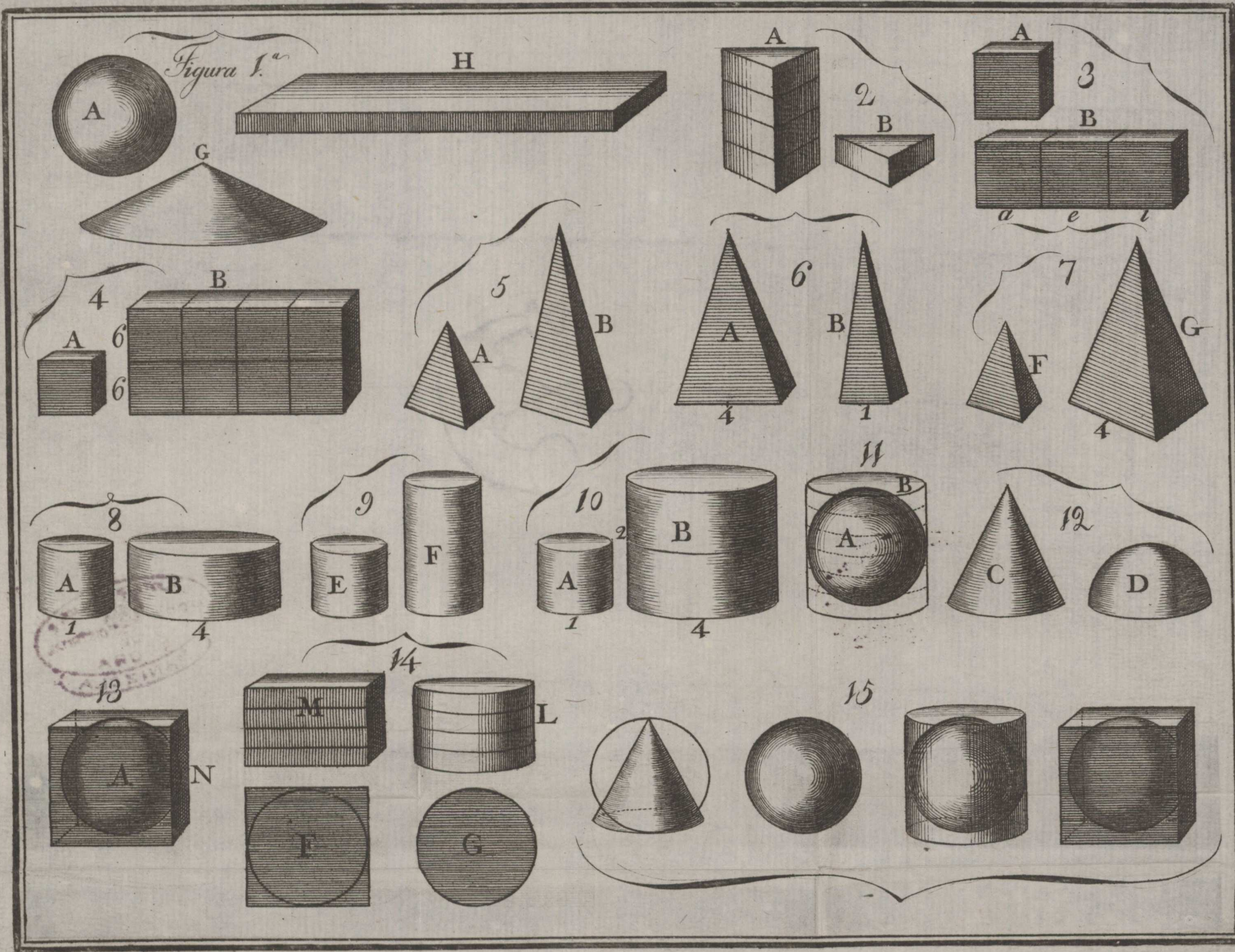


Figura 1.a
A
H
G
A
2
B
A
3
B
a
e
i
4
B
A
6
6
5
A
B
6
A
B
4
1
7
F
G
4
8
A
B
1
4
9
E
F
10
A
2
B
1
4
11
B
A
12
C
D
13
A
N
14
M
L
F
G
15

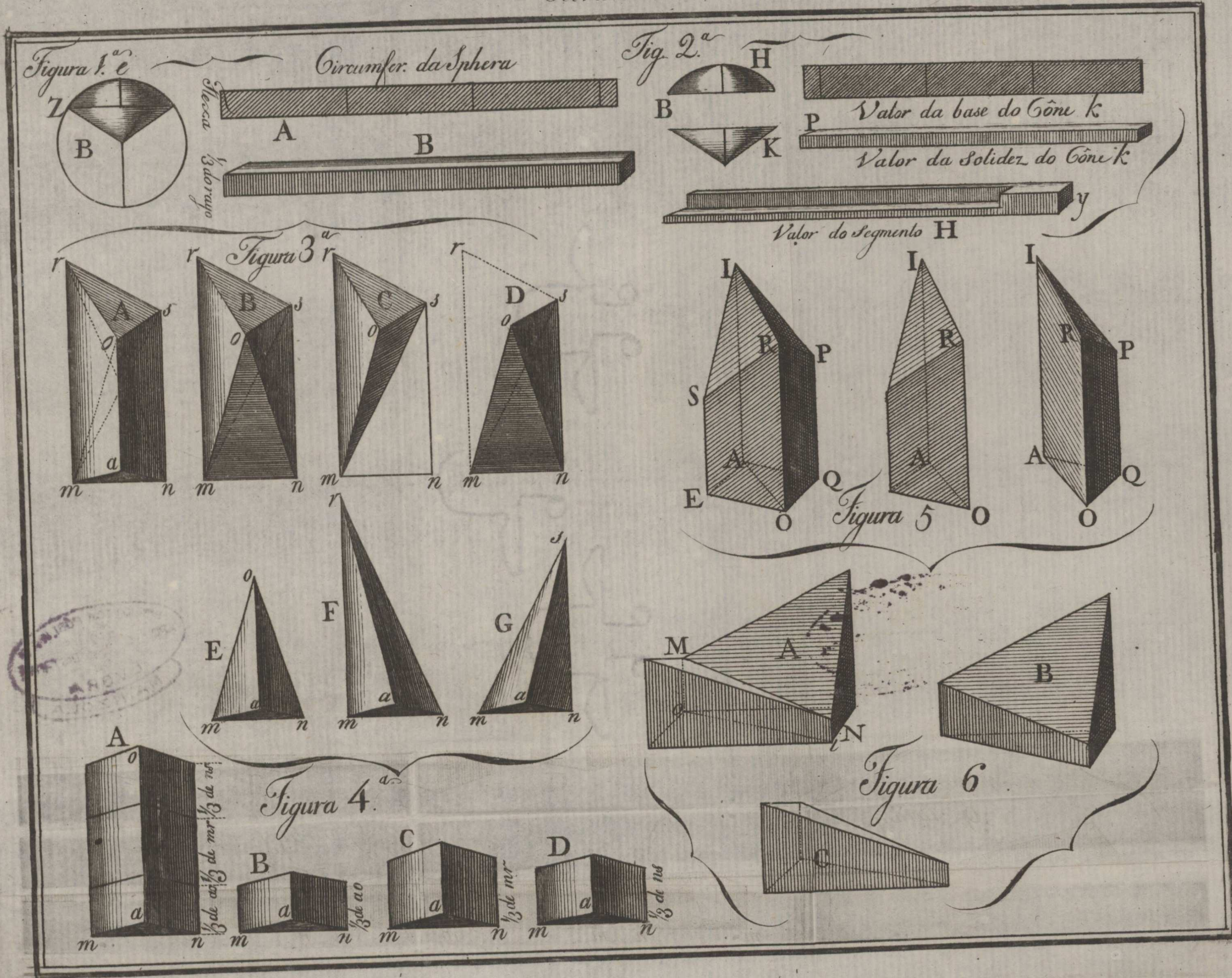


Figura 1.ª
Circumfer. da Sphera
Flecha
⅓ do rayo
A
B
Z
e
Fig. 2.ª
H
B
K
Valor da base do Côni k
P
Valor da Solidez do Côni k
y
Valor do Segmento H
Figura 3.ª
r
s
o
a
m
n
A
B
C
D
E
F
G
I
R
P
S
Q
O
Figura 5
M
N
l
Figura 6
Figura 4.ª
⅓ de mr

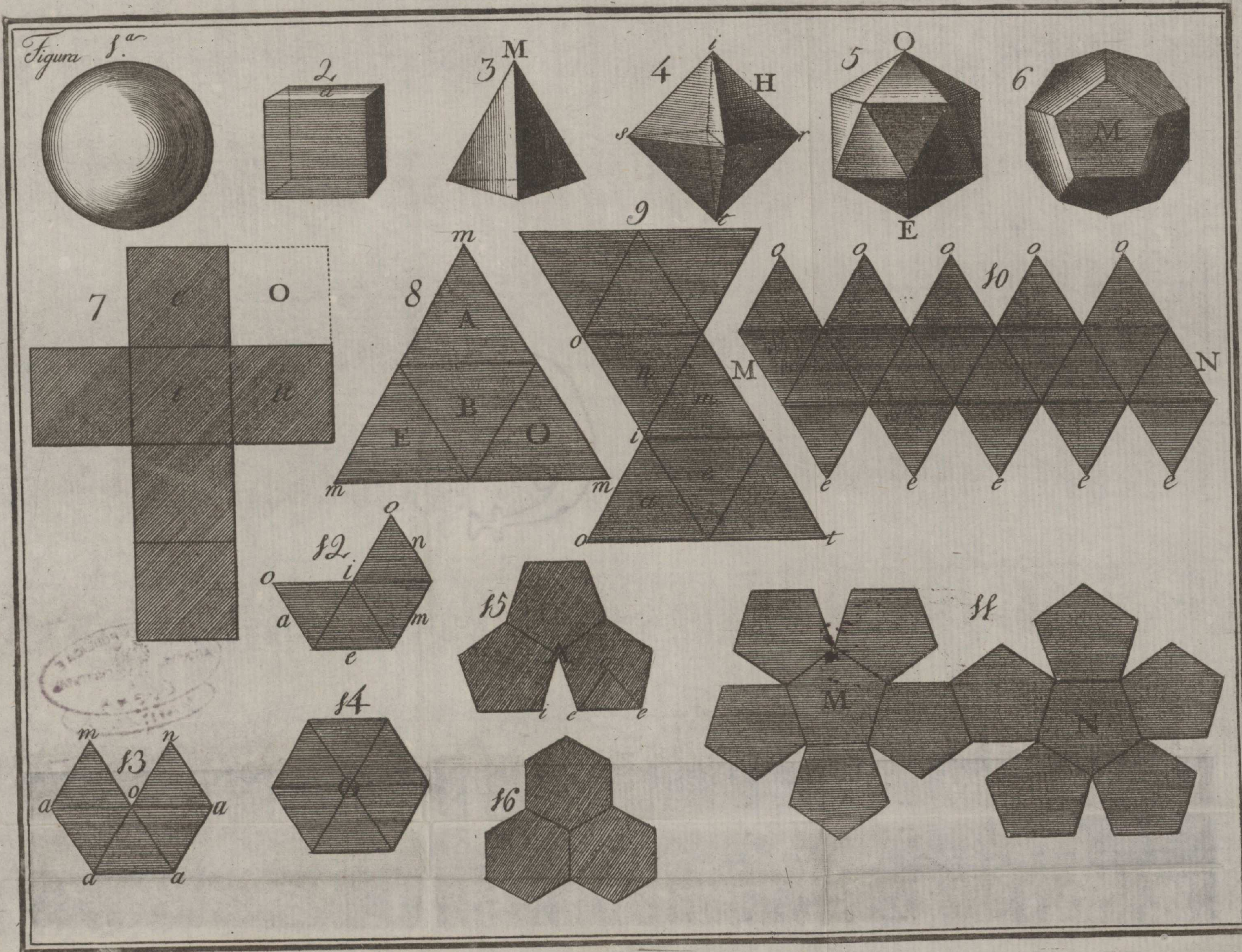


Figura 1.ª
2
a
3
M
4
i
H
s
r
t
5
O
E
6
M
7
e
O
i
n
8
m
A
B
E
O
m
m
9
o
n
M
m
i
e
a
o
t
10
o
o
o
o
o
N
e
e
e
e
e
12
o
n
i
o
a
m
e
13
m
n
o
a
a
d
a
14
O
15
A
i
e
e
16
11
M
N

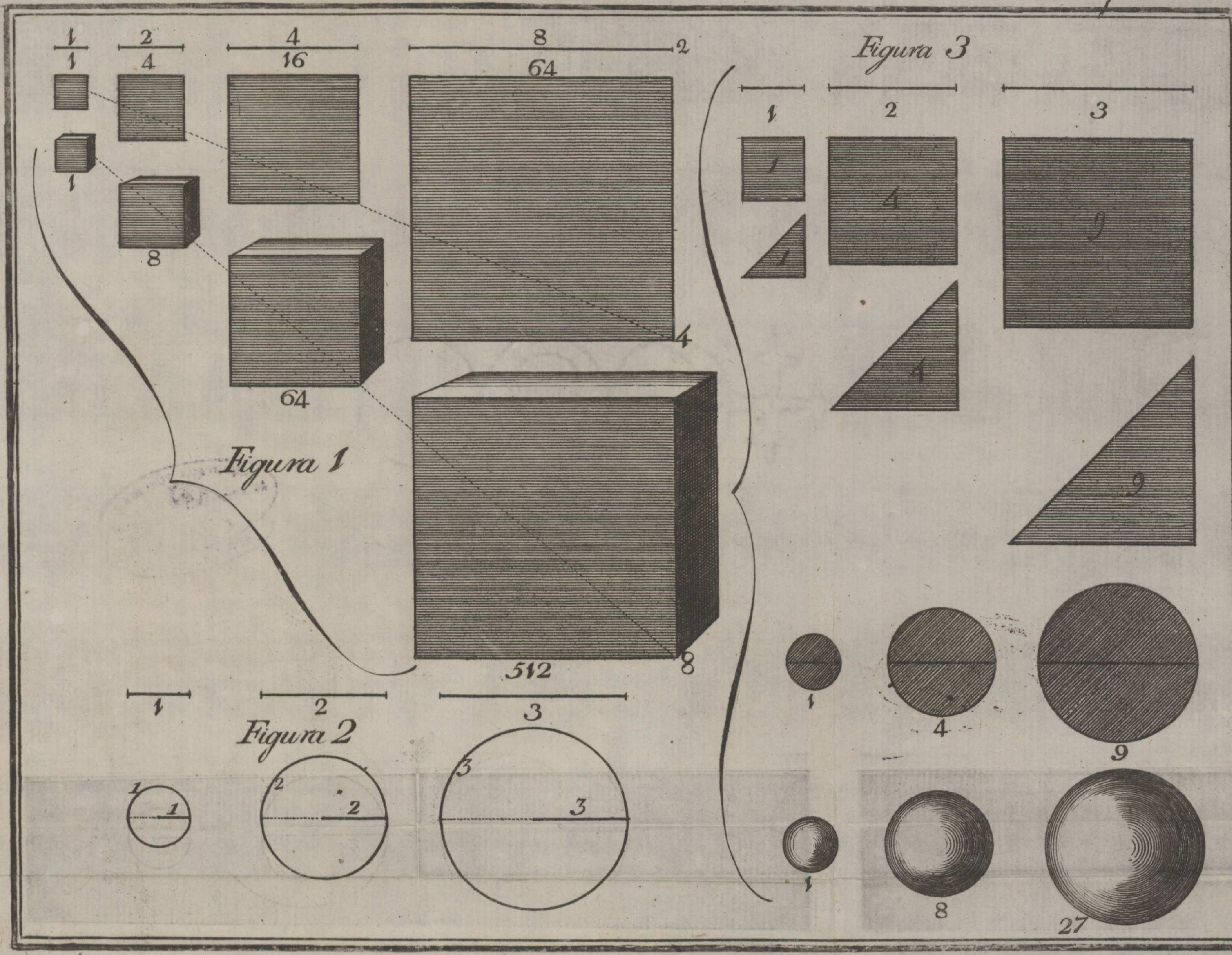


Figura 1
1
1
2
4
4
16
8
64
2
1
8
64
4
512
8
Figura 2
1
2
3
Figura 3
1
2
3
1
1
4
4
9
9
1
4
9
1
8
27