ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA
PLANA, E SOLIDA.

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA
PLANA, E SOLIDA,
SEGUNDO A ORDEM
DE
EUCLIDES,
PRINCEPE DOS GEOMETRAS.
ACCRESCENTADOS COM TRES UTEIS Appendices: o primeiro da Logistica das Proporções: o segundo dos Theoremas selectos de Archimedes: e o terceiro da Quadratriz de Dinostrato, para quadrar o Circulo, e tri-secar o Angulo.

PARA USO DA REAL AULA
Da Esfera do Collegio de Santo Antão da Companhia de Jesus de Lisboa Occidental.

OFFERECIDOS
A' MAGESTADE D'ELREY
NOSSO SENHOR
D. JOÃO V.
POR SEU AUTHOR O PADRE
MANOEL DE CAMPOS
Da mesma Companhia.

LISBOA OCCIDENTAL,
NA OFFICINA RITA-CASSIANA.

M.DCC.XXXV.
Com todas as licenças necessarias.

SENHOR.

NÃO tivera a confiança de pôr aos Reaes pês de V. Mageſtade eſta pequena obra; ſe não viſſe de huma parte

parte a innata benignidade, com que accolhe a todos os que procurão utilizar a Patria, e da outra a muita estimação que faz da Mathematica (como tam util â sua Coroa) de que são boas testemunhas as duas Aulas desta Corte, da Fortificação, e Nautica; as quaes â sombra do seu Real Palacio estão recebendo continuamente tam benignos influxos, como testemunhão as muitas graças, e distinctos privilegios, com que as favorece.

A Aula da Esfera *deste Collegio de Santo Antão (fundação do Senhor Rey D. Sebastião de saudoza memoria) não merece menor attenção da Real Providencia de V. Magestade; tanto pela sua veneravel antiguidade, como pela constancia com*

que

que sempre manteve este importante estudo, ainda na decadencia das outras Aulas: e assim està muito confiada de que posta aos Reas pês de V. Magestade haja de ser attendida, e merecer-lhe tambem o seu Real agrado. O de que mais necessita (supposto o numeroso concurso dos que a frequentão) são livros classicos, e manuaes para adiantar a sua applicação. Bem sey que a Corte abunda delles, e dos melhores Authores, que tem illustrado esta Sciencia; como aquella, que se està communicando continuamente com as mais polidas Nações de Europa: porèm tambem sey, que a diversidade dos estylos, dos idiomas, e dos methodos, não causão pequena confusão aos Mestres, e aos Discipulos, como me

têm

têm enſinado a experiencia. Eſta foy a razão, porque me reſolvi hâ tempos a formar hum Curſo Mathematico, *manual, e expedito, para ſervir com elle a meus Naturaes; recolhendo nelle todo o bom, e curioſo, que pude adquirir deſta ſciencia com o eſtudo de muitos annos. Bem ſey que a reſolução parecerà temeraria; e muito mais temerario o querer que ſaya a obra debaixo do Auguſto Nome de V. Mageſtade: porèm huma temeridade eſcuza a outra; e a incapacidade do ſogeito emendarà a Grandeza do Protector. Aquelle Eſpirito, Senhor, com que V. Mageſtade anima a todos os ſeus vaſſallos, para que promovão a gloria da Nação: aquelle Eſpirito, com que anima a dilatada Esfera da ſua Monarquia, ſem que*

haja

haja parte nella, por remota que ſeja, aonde não reſpire a vivacidade do ſeu Real Zelo: eſte Eſpirito, digo, me darà alentos para ſahir à luz com eſta obra: e me baſtarà fixar a conſideração, em que leva impreſſo no frontiſpicio o ſeu Auguſto Nome, para que não deſmaye na empreza; ſuprindo â força de eſtudo a falta do engenho. Emquanto pois nos faz V. Mageſtade a mim eſta honra, à Aula eſta graça, e dâ à Patria mais eſte exemplo da ſua innata Generoſidade; conſentindo, que debaixo da ſua Real Protecção ſaya à luz eſte pequeno penhor do meu agradecimento, ficarey rogando a Deos pela Saude, e Vida de V. Mageſtade: e ſerà a primeira lição, que dê a meus diſcipulos, o ficarem eternamente agradecidos ao ſeu Real *favor. Deos guarde a Real Pessoa de V. Magestade muitos annos &c. &c. Collegio de Santo Antão da Companhia de JESUS.*

SENHOR

De V. Magestade

Seu mais humilde, mais obediente, e mais fiel servo.

Manoel de Campos.

PRO-

PROLOGO
AO LEITOR.

SAhir neste tempo à luz com Elementos de *Euclides*, bem se deixa vêr, que mais he querer servir ao Publico, do que querer ser Author. Tem-se estampado tantas vezes esta obra, que não digo jà não hâ Nação; senão que não hâ Universidade, nem Estudo Publico, que os não tenha proprios para o uso das suas Aulas: porèm por isso

§§ ii mes-

meſmo experimentão os Meſtres deſta huma grande penuria, e mayor embaraço: penuria, porque attendo-ſe cada hum a eſta imaginada copia, não os fazem vir de fóra, na ſuppoſição de que ſe acharão facilmente: embaraço porque ſendo tantos, e tam varios os eſtylos, e methodos dos Authores Eſtrangeiros, he impoſſivel regular huma Aula com tanta variedade de exemplares.

Eſta he a razão porque, deixando outras obras, que tenho entre mãos, puz todo o cuidado em eſtampar, primeiro que todas, eſta, que não tem de minha, mais que o trabalho de a fazer publica.

ca.

ca. Podera eſtampar ſegunda vez os Elementos do Padre *Stafford*, o qual ſendo Meſtre da meſma Aula eſtampou huns Elementos em lingua caſtelhana, pelo meſmo motivo, que eu tenho agora; porèm quem não ſabe, que aquella obra foy feita com muita preſſa; e ſó a fim de accodir promptamente à neceſſidade em que então ſe achava a Aula? Os do Padre *Tacquet*, de que uſa ordinariamente a Companhia, ſão ſũmamente eſtimados em todas as Nações, pelo breve, pelo claro, e pelo ſolido; razão porque ſe tem eſtampado muitas vezes, e os tem adoptado para uſo ſeu muitos Eſtudos

dos Publicos: eſtes meſmos ſão os que dou à luz com mui pouca alteração; ſalvo a da lingua, que por ſervirem a todos, me foy aconſelhado, ou mandado, que foſſe na Portugueza: todavia não deixei de mudar alguma couſa em algumas Demonſtrações, e de lhe accreſcentar o 13. Livro, que ſupprimio o ditto Author; àlem do Appendiz ultimo, com que me pareceo ficaria completa a obra. De tudo dou razão nos prologos reſpectivos dos meſmos livros.

Vale.

LICEN-

LICENÇAS
DA ORDEM.

ANtonio Manſo da Companhia de JESUS, Provincial da Provincia de Portugal: por commiſſão eſpecial, que tenho de Noſſo Muito Reverendo P. Geral Franciſco Retz, dou licença, para que ſe poſſa imprimir eſte livro, intitulado *Elementos de Geometria*, compoſtos pelo Padre Manoel de Campos da meſma Companhia: o qual foy reviſto, e approvado por Religioſos doutos della, por nós deputados para iſſo; e em teſtemunho da verdade dei eſta aſſinada com o meu ſinal, e ſellada com o ſello do meu officio. Dada em Liſboa Occidental, aos 20. de Março de 1735.

Antonio Manſo.

LICEN-

LICENÇAS

§

DO SANTO OFFICIO.

Censura do Muito Reverendo Padre Mestre Frey Antonio de Santa Maria, Religioso de Santo Agostinho dos Descalços, Qualificador do Santo Officio, e Examinador das Tres Ordens Militares, e do Priorado do Crato, &c.

EMINENTISSIMO SENHOR.

NOs dous seculos, que a Religiosissima, e Sapientissima Companhia de JESUS, com assombro, e utilidade universal do Mundo; com jubilo, e gloria inexplicavel do Ceo, felizmente conta, floreceo sempre com heroes de sabedoria, portentos das letras assim Divinas como Humanas; porque sendo esta Sagrada Familia escolhida pela Providencia Divina, para dar a Deos a mayor gloria, sendo mandada a propagar o Evangelho no Universo; foy tambem

bem deſtinada para deſterrar do Mundo a ignorancia, e poriſſo decretada para Meſtra de todos os homens. Pouco homem ſerà aquelle, que hallucinado julge, que eſta Religião preclariſſima ſentio já mais idades de ferro, ſendo todas as que numera, ſeculos de ouro, e ouro tam fino, que nunca admittio liga, que o viciaſſe, nem conſentio eſcoria, que o corrompeſſe: poriſſo conſerva letras, e virtudes nos mais ſubidos quilates da perfeição, utilizando à hum, e outro Polo, não ſó com as linguas, mas com as pennas. As dos Eſcriptores Jeſuitas a tudo ſe remontão como as das Aguias: muito ignora quem o não ſabe, e mais que ignorante ſerà quem o não confeſſar, vendo ſómente os Authores, que occupárão as ſuas pennas na Faculdade da Geometria. Contou a minha reſpeitoſa veneração, e affectuoſa curioſidade, mais de ſeiſcentas, voando neſte emprego: e agora mais que todas a do R. P. M. Manoel de Campos.

Eſte illuſtre Varão *deſde os primeiros annos foy milagre* dos engenhos: e creſcendo com elle huma incomparavel erudição, admirou Roma, aſſombrou Eſpanha, e fez paſmar o Orbe Literario a ſua vaſtiſſima ſciencia. Quando o clarim da Fama não decantara eſta verdade, eu melhor que todos a podera teſtificar ſem hyperbole, nem lizonja; e o que mais he, ſem que a inteireza de Cenſor ſe corrompeſſe com a amizade de condiſcipulo: poſſo, e devo dizer, que todas as ſciencias, que nos ſette Sabios admirou Grecia, neſte ſó Sabio podera reſpeitar Portugal; e nas Faculdes Mathematicas muito em particular; porque ſe em todas as ſciencias he Coryfeo, neſtas he unico: não ſô tem boas, mas bellas letras; porque não ſô ſabe, mas ſabe ſaber: pois na ſua grande ſabedoria reluz a condição do Mayor Bem. Bem o moſtra neſte volume Geometrico (que attentamente vi por mandado de V. Eminencia) e o moſtrarâ em todos os que intenta dar ao prelo; os quaes, melhor que as pinturas de Apelles, trazem no ſeo nome a total approvação. A que faz aos livros acredores da licença de V. Eminencia para a eſtampa, ſe acharâ neſte ſem o menor eſcrupulo; pois não contèm huma ſò letra, entre as muitas com que ſe explica, que encontre a noſſa Santa Fè, e bons coſtumes. V. Eminencia mandarà o que for ſervido. Lisboa Occidental. Convento da Boa Hora dos Agoſtinhos Deſcalços 28. de Março de 1735.

Fr. Antonio de Santa Maria.

Cenſura

Censura do M. R. P. M. Paulo Campelli, da Congregação do Oratorio, Qualificador do Santo Officio, &c.

EMINENTISSIMO SENHOR.

LI o Livro, que Vossa Eminencia me manda vêr, intitulado *Elementos de Geometria Plana, e Solida*, composto pelo Muito Reverendo Padre Mestre Manoel de Campos da sempre illustre Companhia de JESUS. E sem embargo, que o nome de seu Author nelle escritto era a approvação mais indubitavel, que o podia abonar; como o preceito de Vossa Eminencia me manda interpor o meu parecer, digo, que nesta obra concorda em tudo a materia, de que trata, com a doutrina, que enserra; porque corre esta tam plana, como he em tudo solida: e sobre estas circunstancias, verdadeiramente raras, tem tambem a especial, e unica, de que dizendo o que jà por tantos Doutores està tratado, como o Author declara no Prologo, com tal arte, e com tal energia se explica em tudo, que em tudo diz de novo: razão porque se pode chamar egregio este Livro; porque se faz egregio por este modo, segundo o que disse o Lyrico.

Hor. in Art. Poeticâ. *Dixeris egregiè, notum ſi callida verbum*
Reddiderit junctura novum.

Bem pode a Sagrada Companhia jactar-ſe muito de tal filho, pois a enche de bem merecido applauſo; e faz com a fertilidade de ſeu engenho, que ſe verifique o que eſtava profetizado no Pſalmo, e diſſe David talvez pondo nella os olhos: que ſerião cheios de fertilida-
Pſal. 64. de os ſeus Campos: *Campi tui replebuntur ubertate.* Em fim não deſcubro neſta obra couza, que ſe opponha aos dogmas de Noſſa Santa Fè Catholica, e bons coſtumes. Eſte he a meu parecer. Voſſa Eminencia mandarà o que for ſervido. Lisboa Occidental, e Congregação do Oratorio 15. de Abril de 1735.

Paulo Campelli.

VIſtas as informações, pode-ſe imprimir o livro intitulado *Elementos de Geometria &c.* e deſpois de impreſſo tornarà para ſe conferir, e dar licença que corra, ſem aqual não correrà. Lisboa Occidental 19. de Abril de 1735.

Fr. Lencaſtre. Teixeira. Sylva. Abreu.

DO ORDINARIO.

POde-ſe imprimir o Livro, de que ſe trata; e deſpois de impreſſo tornará para ſe conferir, e dar licença para que corra. Lisboa Occidental 24. de Abril de 1735.

Gouvea.

LICEN-

nos dà noticia : e ſe com antecedencia me he licito expor a minha approvação , voluntario , e goſtozo a offereço , fundado , em que, como armas forjadas, batidas, e limadas na meſma Officina, não podem deixar de ſahir todas com igual luſtre , e bondade. Pede-o com altos clamores o credito da lingua Portugueza , para que ceſſe o dizer-ſe que ſò nella, entre as principaes de Europa , ſe não achão as Mathematicas reduzidas a hum Corpo : os curioſos , que não ſaõ inſtruidos nas linguas eſtrangeiras , alcançarão o proveito daquella lição com muyto menor trabalho . e todos ſe poderão aproveitar da muyta clareza , ordem , e eſpecialiſſimo genio , com que o Author coſtuma enſinar, recreando, e introduzindo com tal ſuavidade as Doutrinas, que ſe coſtumão beber com ſangue , que quando o Author as reparte, ſaõ alimentos tam bem compoſtos , que por mais que nutrão , nunca enfaſtião. Para mayor ſegurança do meu arbitrio , reconheço no Author todas as partes integrantes para concluir com abſolutiſſima felicidade o promettido; que ſe reduzem â larga lição de livros , enſinos publicos , e aceitação da Peſſoa , não ſò entre Nacionaes , e vizinhos , mas ainda entre os Paduanos remotos. Não duvido que na meſma Doutiſſima Religião ſe achem muitos ſogeitos capazes de ſerem Atlantes de tam grande Maquina ; mas as eximias forças , de que o Author ſe acha reveſtido , não ſó ſegurão o exito da empreza , mas a bizarria , e exceſſo , com que ſe-

rá

LICENÇAS DO PAÇO.

Approvação do Coronel Manoel da Maya, Engenheiro do Reyno, &c.

QUasi sempre o ser Censor foi Officio embaraçado, porque os discursos humanos pela sua diversidade difficultozamente se ajustão: comtudo nesta *occasiaõ se facilita* tanto esta difficuldade, que não encontro mais duvida em continuar as approvações jà proferidas, do que os agigantados passos, de que necessito para as poder proseguir: suprindo porém este defeito com a obrigação, em que as Ordens de V. Magestade me poem, não só reconheço por muyto conveniente, que o Author deste livro alcance a licença, que pede; mas tambem me parecia justo se lhe intimasse da parte de V. Magestade pozesse promptamente em publico todo o Curso Mathematico, de que

nos

rà executada ; como aquelle lutador , que ainda deſpois de ganhado o Campo , fica com os movimentos livres para ſegundos encontros. Eſte o meu parecer reduzido aos termos mais livres de affecto , ou adulação. V. Mageſtade mandarà o que for ſervido. Lisboa Occidental 3. de Mayo de 1735.

Manoel da Mayà.

QUe ſe poſſa imprimir, viſtas as licenças do Santo Officio , e Ordinario ; e deſpois de impreſſo tornará a eſta *Meſa* para ſe conferir , e taixar, e dar licença para correr , ſem aqual não correrà. Lisboa Occidental 6. de Mayo de 1735.

Pereira. Teixeira.

PROLUSÃO GEOMETRICA,

ENCOMIASTICO-HISTORICO-CRITICA.

§. I.

DA NATUREZA, EXCELLENCIA, e Progresso da Geometria.

O NOME da Geometria menos diz, do que se estende o seu objecto: o nome dá a entender que só se occupa em medir a Terra: o objecto estende-se a toda a Quantidade continua, terminada com qualquer figura. Duas são as Geometrias; huma *Practica*, e outra *Especulativa*: a *Practica*, de donde nasceo a *Especulativa*, só trata das medidas vulgares, e proprias dos usos humanos; como são *Distancias*, *Alturas*, *Profundidades*, *Niveis*, *Aqueductos*, *Areas*, *Corpos*, &c. A *Especulativa*, que foy a que promoveo, e aperfeiçoou a Practica, estende-se, como disse, a toda a Quantidade continua. A *Es-*

peculativa conſta principalmente de 3. partes a ſaber, *Elementos de Euclides*, *Esfericos de Theodoſio*, e *Conicos de Apollonio*: a primeira, e ſegunda (a que ſe pode ajuntar a Trigonometria) chama-ſe *Geometria Inferior*, aqual toda ſe abſolve por via de Regoa, e Compaſſo; e tem por objectos principaes, nos Planos o Circulo, e nos Solidos a Esfera. A terceira chama-ſe *Geometria Superior*, aqual tem por objecto principal a Pyramide Conica, cortada em differentes ſitios com 3. planos, de que reſultão 3. myſteriofas curvas, a ſaber, a *Parabola*, a *Ellipſe*, e a *Hyperbola*: a eſtas ſe ajuntão muitas outras de differentes propriedades, como ſão a *Quadratriz*, a *Ciſſoide*, a *Eſpiral*, a *Conchoide*, &c.

Querer teſſer panegyrico a eſta nobliſſima Sciencia, ſeria querer comprehender o mar em huma breve concha: baſta dizer que não houve em nenhuma idade Nação alguma culta, ou Eſchola celebre, que não fizeſſe della ſumma eſtimação. *Platão* mandou pôr ſobre a porta da ſua Academia huma Tarjeta com eſta letra: *Nullus Geometriæ expers accedito*: Nenhum, que não ſeja Geometra, entre neſta Aula: ou foſſe pela affeição, que tinha â Geometria, ou por entender que ſó ella era a idea da verdadeira ſciencia. Delle ſe diz que jà mais ſubira â cadeira, que não explicaſſe algum Problema de Geometria, como ſal

que

que dava ſabor, e graça a toda a erudição. *Galeno*, Medico inſigne, deſpois de ter curſado as Eſcholas mais celebres do ſeu tempo, dos Peripateticos, e dos Eſtoicos, eſtando quaſi deſeſperado de achar ſciencia neſta vida; porque tudo quanto tinha aprendido, ou erão opiniões, ou fallacias; reſoluto a ſe paſſar à ſeyta dos Pyrrhonios (que erão huns Filoſofos, que duvidavão de tudo, e não aſſentavão em nada) confeſſa ingenuamente, que facilmente tomaria aquelle partido, ſe não foſſe a Arithmetica, a Geometria, e a Dialectica, em que ſó achara evidencia nos principios, e certeza nos diſcurſos; e daqui deixou recõmendado a ſeus diſcipulos, que jà mais perdeſſem de viſta os myſterios daquelles numeros, e a ſubtileza daquellas linhas; como verdadeiras fontes do diſcorrer, do inventar, e do ſaber. E na verdade he couſa que faz paſmar, vêr como a Geometria, ſem mais dialectica, que aquelle natural *Sorite*, ou cadeya de Propoſições, com que vay paſſando de huma verdade em outra, chega ao mais alto da eſpeculação, com tanta certeza no diſcurſo, que jà mais vacilla, nem ainda nas verdades mais abſtruſas, e mais alheas dos ſentidos.

Quem foſſem os inventores deſta Sciencia, he queſtão entre os eruditos. Communmente ſe diz que forão os Egypcios, e entre elles hum certo *Theut*, ou *Deus*,

 como

como diz *Platão in Phædro.* Deo motiva este estudo, entre aquella gente, a inundação do Nilo; porque confundindo-se todos os annos os limites dos campos, davão occasião aos colonos de grandes litigios, e discordias. *Thales Milesio*, o primeiro Sabio de Grecia, foy tambem o primeiro que a transplantou do Egypto para a sua patria, como diz *Diogenes Laërcio.* A este se attribue a invenção das Proposições 5.15. e 26. do 1. livro, e a 31. do 3. Delle se diz que achara o modo de inscrever no circulo o triangulo equilatero; pelo que sacrificou âs Musas hum boy: tambem se diz que no Egypto chegara a medir as Pyramides pelas sombras. Da simplicidade destes inventos se pode inferir, qual seria por aquelle tempo a Geometria dos Egypcios: he verosimil que apenas chegaria â dos nossos agrimensores, que não fazem mais que reduzir as terras a rectangulos, para medir as areas pela multiplicação dos lados: comtudo a elles se attribue a invenção, e uso da Regoa, e do Campasso.

Nasceo *Thales Milesio* no anno 120. da Fundação de Roma, o qual corresponde ao de 632. antes de Christo. A elle succedeo *Mamertino*, insigne Geometra, de quem se diz em geral que illustrara muito esta sciencia. Viveo quasi no mesmo tempo *Amethisto*, Geometra summo, a quem se attribuem muitas invenções geometricas: porèm àlem do nome, e desta fama, não diz mais delle *Proclo*: foy irmão do Poeta *Stesichoro.*

No mesmo seculo succedeo a todos estes o famoso *Pythagoras Samio*: o qual despois de peregrinar pelo Egypto, e pela Persia, se recolheo a Grecia a ensinar o muito, que tinha aprendido nas Nações estrangeiras, aos seus Naturaes. Alguns lhe attribuem o transplantar do Egypto à Grecia a Mathematica; porèm o mais certo he, que foy o primeiro que abrio nella Eschola Publica. Foy insigne na Arithmetica, na Musica, e na Astronomia: porèm mais particularmente na Geometria, que illustrou com admiraveis inventos: sua he a invenção da 32. do 1. livro; theorema tam insigne, que o poem *Aristoteles* por exemplo da perfeita Demonstração: tambem he sua a invenção da 47. do mesmo livro; pela qual sacrificou âs Musas cem boys, a que chamão os Gregos *Hecatombe.*

Despois de *Pythagoras*, jà no 3. seculo da mesma Fundação, cultivarão este estudo *Anaxagoras*, de quem não existe mais que esta memoria: *Cenopides Chio*, a quem se attribue a 12. e 24. do 1: e *Zenodoro* seu discipulo, o qual foy Author de hum celebre tratado das Figuras Isoperimetras. Nesta obra pertende este Author desterrar do vulgo esta ignorancia; *Que as Figuras*

Isope-

Isoperimetras [isto he do mesmo ambito] *são iguaes*: e mostra que as Figuras quantos mai lados tem, tanto são maiores, que as Isoperi metras de menos lados; de que se segue que o circulo he a mayor figura de todas e que as Figuras, quanto mais iguaes ten os lados, tanto são mayores, *Cæteris pa ribus*, que as que os tem desiguaes. * Este tratado tomou *Clavio* de *Theon*, o qual o at tribue a *Zenodoro*: tocaremos delle algu ma couza na Geometria Practica, por se util.

Floreceo no mesmo seculo *Hippocrates Chio*, famoso Medico, o qual querendo quadrar o Circulo, quadrou a Luneta: porèm com pouca felicidade, porque a sua Demonstração a toma *Aristoteles* por exemplo do *Paralogismo*. Este foy o primeiro que compoz Elementos de Geometria, os quaes não existem. Sendo jà celebre no seu tempo a reposta do Oraculo Delfico, notou, que se entre duas rectas se achassem duas meyas proporcionaes, se teria o modo de duplicar o Cubo. Florecerão tambem para o fim do mesmo seculo *Theodoro Cyreneo*, e *Timeo Locro*, ambos discipulos de *Pythagoras*, os quaes illustrarão muito a Geometria. A este segundo introduz *Platão* no seu Dialogo *in Timæo*; e alguns dizem que o tomou delle.

No principio do 4. seculo floreceo *Democrito Milesio*, o qual escreveo do conta-

cto

cto do Circulo, e da Esfera: das Linhas Irracionaes: e dos Solidos. *Protagoras* no mesmo tempo tambem escreveo alguma couza pertencente a Mathematica: porèm nada disto existe.

A estes grandes Geometras succedeo *Platão* mayor que todos, discipulo de *Socrates*; o qual estimou tanto a Geometria que, como disse assima, nunca se passou dia que não expuzesse na Academia algum Problema. Foy o primeiro, que escreveo das Secções Conicas, e Cylindricas: e achou o modo de demonstrar Analytico; isto he, supponde feito o que se pede: que he huma como Algebra natural, de que nasceo depois a Artificial. A este forão consultar os Delios àcerca da duplicação do Cubo; e ainda que os remetteo a *Euclides*, não deixou de tentar a solução da quelle difficil Problema. O seu methodo de achar duas meyas proporcionaes, segundo a regra de *Hippocrates*, traz *Eutocio* no seu commentario, e nós o poremos abaixo no livro 6. Nas suas obras, que existem, alguns discursos se achão Geometricos, os quaes recolheo, e explicou *Theon*: porèm o principal perdeo-se. Foy *Anthenienfe*, e chamarão-lhe por antonomasia o *Divino*.

Amiclas Heracleotes, *Laodamas Thasio*, e *Neotides*, discipulos, ou amigos de *Platão*, illustrarão muito a Geometria. *Leon* tambem compoz Elementos, e mais accresaccrefcentados, que os de *Hippocrates*; porèm não exiftem. *Eudoxio Gnidio*, companheiro do mefmo *Platão* na peregrinação do Egypto, inventou o 5. livro das Proporções, no qual nos deixou huma nova Logica, ou Arte de argumentar, tam fubtil, e tam ajuftada com a fciencia, que fe não podia defcobrir couza mais accomodada para promover a Geometria.

Theeteto Athenienfe efcreveo fobre os 5. Corpos Regulares; porèm perdeo-fe efta obra. *Bryfo*, e *Antifon* tentarão por efte tempo a quadratura do Circulo com pouco fucceffo. *Filofofo*, difcipulo de *Platão*, tratou das *Figuras Circulares*, e das *Metades*: porèm não apparecem as fuas efpeculações.

No 5. Seculo, perto de 360. annos antes de Chrifto, floreceo *Theudio Magnefio*, o qual foy o terceiro, que compoz Elementos. Compoz fobre a mefma materia, e amplificou-a muito *Hermotimo Colofonio*. Illuftrou a Geometria *Cyzicino Athenienfe*. E *Arifteo*, o mais velho, efcreveo dos Conicos, e da Refolução dos Lugares Solidos, que fão obras de mais profunda efpeculação: porèm tudo ifto fe perdeo. *Pappo* livro 5.

Filippe Meteo, difcipulo de *Platão*, tambem efcreveo muito por efte tempo fobre a Geometria. *Menechmo*, difcipulo de *Eudoxio*, achou, fegundo alguns dizem, as Secções Conicas: porèm ignora-se qual foy particularmente a sua invenção. Acha-se em *Eutocio* hum methodo seu de achar duas meyas proporcionaes para a duplicação do Cubo; o qual daremos na Geometria Practica. *Gemino* demonstrou, que só havia 3. Linhas semelhantes; a saber, a *Recta*, a *Circular*, e a *Espiral Cylindrica*: e fez mais universal a 5. do 1. demonstrando a igualdade dos angulos sobre a base, ainda quando esta he Circular, ou Espiral Cylindrica. Achou tambem 3. Curvas muito celebres; a saber, a *Espiral*, a *Conchoide*, e a *Cissoide*. Destas mesmas Curvas escreveo despois *Perseo Cittico*. E finalmente o Grãde *Aristoteles Estagyrita* compoz hum livrinho da *Unidade*, e das *Linhas Insecaveis*, o qual existe.

Restaurador de todas estas perdas, e illustrador da mayor parte destas illustres invenções, foy *Euclides*, famoso Geometra, e quinto Author dos Elementos, em quem terminarey esta memoria, deixando o mais do Progresso para o meo Onomastico Mathematico.

§. II.

De Euclides, e das suas Obras.

HE questão entre os eruditos quem foy *Euclides*? Alguns o confundem com *Euclides* Filosofo, natural de Mégara [Cidade proxima ao isthmo Corinthiaco] o qual foy Author de huma Seyta, chamada *Megarica* pelo lugar da Eschola, e *Dialectica* pelo methodo da Doutrina. Este Filosofo, que foy discipulo de *Socrates*, foy tam celebre no seu tempo, que obrigou a *Platão* a hir de Athenas a Mégara sómente por conferir com elle, como diz *Laërcio*: e *Valerio Maximo l. 8. c. 12.* accrescenta, que consultado o mesmo *Platão* pelos Delios sobre a duplicação do Cubo, os remettera a *Euclides*; de que se infere, que era tambem insigne Geometra. Este fundamento com mais outras conjecturas fizerão tam verosimil aquella equivocação, que na Edição vulgar dos Elementos, segundo *Campano*, e *Theon*, o Author dos Elementos he *Euclides Megarense*: porèm o mais certo he, que o nosso *Euclides* foy diverso, e que floreceo muitos annos despois de todos os coetaneos de *Platão*; como diz *Proclo* na prefação a *Euclides*: e se infere claramente do mesmo *Diogenes Laërcio*, o qual fazendo individual menção de todas as obras de *Euclides* Filosofo, não diz huma sô palavra destes Elementos, que forão tam celebres em toda a Antiguidade.

Foy pois o nosso *Euclides*, natural de Alexandria; ou ao menos ensinou nella Geometria muitos annos, reynando *Ptolemeo*

lemeo I. o qual começou a imperar no Egypto depois de *Alexandre Magno*, na Olympiada 115. e pelos annos de 319. antes de Christo. Foy tam celebre nesta Sciencia, que illustrando-a nos 3. seculos antecedentes tantos, e tam insignes Filosofos, como temos visto, elle só mereceo o nome de Principe dos Geometras; e de Mestre universal de todos os que se seguirão: sendo o seu mayor louvor dizer-se delle, que nunca cahira em paralogismo. Escreveo *Euclides*, àlem dos Elementos, hum livro de *Dados*, o qual se pode reduzir ao methodo analytico de *Platão*, por inferir de humas couzas dadas outras desconhecidas. Consta este livro de 94. Proposições; e he muy estimado, e util para os Geometras. Compoz tambem 4. livros de Conicos, em que seguio a doutrina de *Aristeo*: item da Resolução, e Fallacias: item 2. livros dos Lugares à Superficie; e 3. dos Prismas: as quaes obras não existem. Compoz finalmente varios tratados de Optica, Catoptrica, Musica Elementar, e Esfera; tudo com muita clareza, acerto, e boa ordem: porèm o que o fez mais celebre, e lhe mereceo a universal estimação, foy o livro dos Elementos, de que darey, antes de entrar na sua explicação, esta breve noticia.

§. III.

Dos Elementos de Euclides.

OS Elementos de *Euclides* ſão huma obra tam engenhoſa, util, e tam bem ordenada, que paſſa de 2. mil annos que eſtà na poſſe de huma univerſal eſtimação; occupando em todos os ſeculos os melhores engenhos na ſua illuſtração. Eſta he a razão porque nunca me pude accomodar â opinião daquelles, que por fugir da ſua, que chamão prolixidade, introduzem nas Eſcholas Elementos ſuccintos, e mutilados, que ſô forão ordenados para inſtruir Principes [em quem ſuprem os Meſtres a falta dos livros] e deixão a eſtrada real de aprender com fundamento. Muito menos me accõmodo â opinião de outros, os quaes tendo obrigação de inſtruir, e formar verdadeiros Mathematicos, como ſão Engenheiros, Pilotos, e Arquitectos, lhes dão ſómente humas doutrinas ſuperficiaes, que não ſervem mais, que de crear ignorantes, e preſumidos com pouca utilidade do bem publico.

A primeira queſtão, que ſe offerece neſta obra, ſuppoſto o que fica ditto no §. 1. he ſaber qual foy propriamente o trabalho de *Euclides*? Reſpondo que foy ordenar, e amplificar o que jà eſtava ditto; e accreſ-

centar

centar tudo o mais que faltava, para reduzir a Geometria â ſua ultima perfeição.

A ſegunda queſtão he, ſe ſão de *Euclides* as Demonſtrações dos Elementos? E a razão de duvidar he, porque em muitos exemplares Gregos ſe achão as Propoſições ſem demonſtrações: porèm he certo, que as dittas demonſtrações, aſſim como ſe achão em outros exemplares, ſaõ de *Euclides*; porque *Pappo* compara muitas vezes as demonſtrações de *Euclides* com as de outros Geometras.

A terceira queſtão he, de quantos livros conſta eſta obra? Reſpondo que vulgarmente conſta de 16: porèm os 13. primeiros ſão propriamente de *Euclides*: o 14. e 15. (e não tudo) ſão de *Hypſicles Alexandrino*: e o 16. com a amplificaçaõ dos 2. antecedentes, he de hum certo *Franciſco Candalla*.

A ordem que ſegue *Euclides* nos dittos 13. livros he a ſeguinte. No 1. preſuppoſtas varias *Definições*, *Axiomas*, e *Poſtulados*, trata dos angulos, das linhas perpendiculares, e deſpois das propriedades dos triangulos, e dos parallelogrammos. No 2. conſidera ſómente os *Parallelogrāmos rectangulos*, e por meyo de varias equações eſtabelece os primeiros principios da Algebra. No 3. trata das propriedades do circulo. No 4. (que todo he problematico) enſina a inſcrever, e circunſcrever no meſmo circulo varias figuras

ras regulares. No 5. trata das proporções em geral; e dà huma nova *Logica* para promover a Geometria: este livro he engenhosissimo, e utililissimo; porèm he reprovado de alguns pelo methodo; porquanto faz depender todas as Proposições de huma certa propriedade das quantidades comparadas, a que chama *Equi-multiplices*, a qual nem he clara, nem expedita. A este defeito acodimos com outro methodo igualmente scientifico, e muito mais desembaraçado, chamado das *Equi-aliquotas*. No 6. explica varias Proporções em particular; e estabelece a *Regra Aurea*; e os principios da *Geodesia*.

No 7. 8. e 9. explica as propriedades dos numeros; naõ todas, senaõ sómente aquellas, que lhe pareceraõ necessarias para entrar no 10. livro a contemplar a natureza, e propriedade das linhas incõmensuraveis; que he huma especulaçaõ engenhosissima, ainda que reprovada de alguns por inutil. Eu nada julgo inutil, quando considero que a especulaçaõ se encaminha â ultima perfeiçaõ da sciencia; porque nesta forma seriaõ tambem inuteis muitas especulações da Algebra Moderna, as quaes naõ tem mais fim que apurar a sciencia.

A razaõ porque naõ exponho estes 4. livro nos meus Elementos, he porque os reservo para outro tratado particular da Arithmetica.

Expoſta aſſim a doutrina dos Planos, entra *Euclides* a tratar dos Solidos nos 3. ultimos livros pela ordem ſeguinte. No 11. expoſtos os primeiros principios, como fez nos Planos, paſſa logo a tratar dos Parallelipipedos, e dos Priſmas: no 12. trata dos Pyramides rectilineas, e conicas, dos Cylindros, e das Esferas: e no 13. explica a natureza dos 5. Corpos Regulares; e compara-os entre ſi, e com a Esfera. Tambem eſte livro he julgado por inutil: porèm álem do ditto aſſima, veja-ſe o meu prologo ao ditto livro.

ELEMENTOS DE GEOMETRIA.

LIVRO I.

A EXCELLENCIA DESTE LIVRO (e naõ he pequena) he ser o fundamento de todos os demais: este he o que leva a luz diante à Geometria para registar os escuros seyos da Quantidade. Trata principalmente dos Triangulos, e dos Parallelogrammos: e as suas proposições mais celebres saõ as 32. 35. 37. 41. 44. 45. e 47.

DEFFINIÇÕES.

1 PONTO: he o que naõ tem partes.* Entende-se segundo a nossa consideraçaõ. O ponto a respeito da Quantidade, he como a unidade a respeito do Numero.

2 *Linha*: he huma quantidade sómente longa; isto he, sem largura, nem grossura. * A linha considera-se produzida do fluxo, ou movimento de hum ponto. Nomea-se ordinariamente com duas letras,

 postas

Fig. 1. poſtas nas duas extremidades; como A, B.

3 *Termos* da linha: ſaõ os pontos extremos, em que começa, e acaba; como A, B.

Fig. 2. 4 *Linha recta*: he a que corre direitamente de hum termo a outro; iſto he, ſem trocer para nenhuma parte; ou como diz *Arquimedes*, a mais breve, que ſe póde tirar entre dous pontos: ou como diz *Plataõ*, aquella, cujos pontos extremos fazem ſombra, ou eſcondem a todos os intermedios. Tudo vem a ſer o meſmo.* Quando ſe diz *Recta*, entende-ſe linha.

Fig. 3. § O inſtrumento, com que ſe deſcreve huma recta, he a regoa: o modo, com que eſta ſe examina, he deſcripta a linha, paſſar a regoa à outra parte, e ver ſe ſe ajuſta com ella: porquanto ſe comprehendem eſpaço, nem a linha he recta, nem a regoa direita. Veja-ſe abaixo o Axioma 13.

5 *Superficie*: he huma quantidade ſómente longa, e larga; iſto he, ſem groſſura.* A ſuperficie conſidera-ſe produzida do movimento de huma linha.

6 *Termos da Superficie*: ſaõ as linhas extremas, com que ſe termina.

7 *Plano*, ou *Superficie Plana*: he a que corre direitamente de hum termo ao outro oppoſto; iſto he, ſem trocer para nenhuma parte: ou, como diz *Hero*, aquella à qual por todas as partes ſe póde ajuſtar huma linha recta.* O Plano conſidera-ſe produzido do movimento de huma recta, regulada por outra: podem-ſe-lhe accomodar as meſmas definições, que démos arriba à linha recta; iſto he, ſer a mais breve, que ſe póde conſiderar entre dous termos: ou, cujas linhas extremas fazem ſombra a todas as intermedias.

8 *Angulo Plano*: he a inclinaçaõ de duas linhas exiſtentes em hum plano, e concurrentes em hum ponto.* O Angulo naõ he quantidade; ſe não modo della, como a figura.

Fig. 4. 9 *Lados* do Angulo: ſaõ as rectas AB, CB, que o formaõ.

10 *Ver-*

10 *Vertice*: he o ponto B, em que concorrem os lados.* O Angulo nomea-se com tres letras, das quaes a media he a que determina o angulo; como A B C, FHG, &c. Isto se entende principalmente quando muitos angulos concorrem em hum ponto H (Fig 6.) e póde haver nelles alguma equivocaçaõ; porque naõ a havendo, bastarà nomear cada hum com a letra do vertice; como angulo B, ou H, &c. (Fig. 4.) Eu ainda no caso em que concorraõ muitos em hum ponto, os nomearei muitas vezes com huma só letra, por evitar prolixidade; e serà aquella pequena, que estiver dentro do angulo, como, *o. i.* &c.

11 *Angulos iguaes*, ou *semelhantes*: saõ aquelles, que se ajustaõ entre si, postos os vertices H, B, hum sobre o outro; e juntamente os lados.* Para que os angulos se digaõ iguaes, naõ he necessario que sejaõ iguaes os lados, basta que sejaõ iguaes as inclinações.

12 *Angulos desiguaes*, ou *dessemelhantes*: saõ quando postos os vertices hum sobre o outro, naõ se ajustaõ entre si os lados; isto he, quando ajustando-se quaesquer dous lados HF, o outro HG, ou cahe dentro, ou cahe fóra de HC; e entaõ aquelle angulo FHC, serà mayor, cujo lado HC, cahir fóra. Fig. 6.

13 *Angulo rectilineo*: he o que formaõ duas linhas rectas: *Curvilineo*, o que formaõ duas linhas curvas: e *Mixtilineo*, o que fórma huma curva, com huma recta. Fig. 4. 5. e 7.

14 *Angulo recto*: he o que tem hum lado perpendicular ao outro: isto he, quando huma recta BX, cahe de tal sórte sobre outra AC, que naõ inclina mais a huma que a outra parte; e entaõ a ditta recta BX, chama-se *Perpendicular*; e os angulos BXA, BXC, saõ rectos. Ou tambem, angulo recto he quando produzido hum lado AX, se forma da outra parte outro igual. Fig. 8.

§ O instrumento, com que se descreve hum angulo recto, he huma esquadra: consta esta de duas re-

Fig. 9. goas huma perpendicular à outra: seu inventor foi *Pythagoras*, como diz *Vitruvio* l. 9. c. 2. O modo, com que se examina se està exacto, he descrever hum angulo, e produzido hum lado para fóra delle, passar a esquadra a outra parte; e ver se se ajusta com o outro.

Fig. 10. 15 *Angulo Agudo*; he o angulo FBD, menor que o recto ABD.

Fig. 11. 16 *Angulo Obtuso*: he o angulo HBE, mayor que o recto GBE.

17 *Figura Plana*: he huma superficie plana comprehendida por todas as partes com huma, ou com muitas linhas.

18 *Circulo*: he huma superficie plana, comprehendida por todas as partes com huma só linha, den-
Fig. 12. tro da qual ha hum ponto A, do qual todas as rectas, que se tiraõ à extremidade, saõ iguaes. A ditta extremidade se chama *Circumferencia*, ou *Periferia*.

19 *Centro*: he o ponto A, donde sahem as linhas iguaes.

20 *Diametro*: he a recta B C, que passa pelo centro, e termina de huma, e outra parte na circumferencia, dividindo o circulo em duas partes iguaes.

21 *Semidiametro*, ou *Rayo*: he a recta AC, ou AD, que corre do centro atè a circunferencia.

22 *Semicirculo*: he a figura ADC, comprehendida de huma parte com metade da circunferencia, e da outra com o diametro.

§ O Circulo considera-se produzido do movimento de huma recta, cujo termo A, està fixo; e o outro D, se move ao redor. O instrumento com que se descreve he o Compasso: o mais simplez, e o mais engenhoso instrumento de todos, quantos se tem inventado; seu inventor foy *Perdix*, sobrinho de *Dedalo*.

Observou *Aristoteles* na geraçaõ do Circulo tres paradoxos notaveis: 1. O Moto, e a Quiete da linha Generante; isto he, estar toda em movimento, estando

parado

parado o ſeu principio: e dado que eſte ſe mova, como dizem alguns, naõ he menor paradoxo, o moverſe circularmente hum ponto indiviſivel. 2. A variedade dos periodos, e das velocidades de todos os pontos daquella linha, ſendo o movimento hum ſó. 3. A repugnancia da circumferencia; pois he juntamente concava, e convexa (extremos de recto) ſendo indiviſivel.

Os Geometras dividem a circumferencia do Circulo em 360. partes iguaes, a que chamaõ *Gráos*: a cada gráo dividem outra vez em 60. partes, a que chamaõ *Minutos*: e a cada minuto tornão a dividir em outras 60. a que chamaõ *Segundos*. &c. Da primeira diviſaõ ſe ſegue, que a ſemicircunferencia conſta de 180. gráos; o Quadrante de 90. e o Sextante de 60. A razaõ que tiveraõ pa a eſcolher eſtes numeros, podendo eſcolher outros quaeſquer, foy; por terem eſtes, e naõ outros, muitas partes aliquotas; as quaes ſe explicaõ por numeros inteiros ſem miſtura dequebrados; o que he de muito alivio para os Calculos. O Circulo nomea-ſe com quaes quer letras diſpoſtas pela circumferencia, começando pela do Centro.

23 *Figura Rectilinea*: he huma ſuperficie plana, comprehendida por todas as partes com linhas rectas.

24 *Triangulo*: he huma figura rectilinea, comprehendida com tres rectas, as quaes neceſſariamente formaõ tres angulos.* Eſta he a mais ſimplez figura de todas as rectilineas; e em quem todas as outras ſe reſolvem. Nomea-ſe com tres letras, poſtas nos vertices dos tres angulos: algumas vezes com huma ſó, poſta no meyo do triangulo, como X, Z. Fig. 33. 34.

25 *Triangulo Equilatero*: he o que tem todos os tres lados iguaes.

26 *Triangulo Iſóſceles*: he o que tem ſómente dous lados iguaes.* Ao terceiro coſtumaõ chamar *Baſe*.

27 *Triangulo Eſcaleno*: he o que tem todos os tres lados deſiguaes.

28 *Trian-*

Fig. 17. 28 *Triangulo Rectangulo*: he o que tem hum angulo recto.* O lado B C, oppofto ao ditto angulo, chama-fe Hypotenufa.

Fig. 24. 29 *Triangulo Obtufangulo*: he o que tem hum angulo abtufo.

Fig. 25. 30 *Triangulo Acutangulo*: he o que tem todos os tres angulos agudos.

Fig. 20. e 21. 31 *Rectangulo*: he huma figura quadrilatera, a qual confta de 4. angulos rectos.* Todo o Rectangulo he equiangulo; feja, ou naõ feja equilatero.

Fig. 20. 32 *Quadrado*: he hum rectangulo equilatero: ifto he, huma figura de quatro lados iguaes, e quatro angulos rectos.

Fig. 19. 33 *Rhombo*: he huma figura quadrilatera, que tem os quatro lados iguaes; porèm nenhum dos angulos rectos.

Fig. 14. 34 *Rhomboide*: he huma figura quadrilatera, que tem quaefquer lados oppoftos iguaes; porèm naõ todos quatro; nem rectos todos os angulos.* Alèm deftas quatro figuras quadrilateras, todas as demais fe chamaõ *Trapezias*; e todas fe nomeaõ com duas letras poftas em quaefquer dous angulos oppoftos; como A O.

Fig. 43. 35 *Parallelas Linhas*: faõ as rectas BA, FC, que poftas no mefmo plano, naõ concorrem para nenhuma das partes, por mais que fe eftendaõ.* Chamão-fe tambem *Equidiftantes*; porque continuadas infinitamente para qualquer das partes, fempre diftaõ entre fi com iguaes intervallos: eftes fe tomaõ nas perpendiculares O R, Q L, que medeão entre ellas.

§ As parallelas confiderão-fe produzidas do movimento uniforme de huma perpendicular fobre outra; defcrevendo o termo R da movel huma parallela à immovel. O inftrumento, com que fe defcrevem, confta de quatro regoas moveis, connexas entre fi com quatro torninhos redondos.

Fig. 14. 36 *Parallelogrammo*: he huma figura quadrilatera, cujos

cujos lados oppoſtos AC, BO: BA, OC, ſaõ parallelos. * Todo o rectangulo he parallelogrammo; mas nem todo o parallelogrammo he rectangulo.

37 *Diametro*, ou *Diagonal* do parallelogrammo: he a recta BC, que ſe tira de hum angulo ao outro oppoſto. * Quando de qualquer ponto O da ditta Diagonal ſe tiraõ duas parallelas LF, GE, a quaeſquer lados conjuntos BC, BD, fica dividido o parallelogrammo em outros quatro: deſtes os dous LE, GF, que eſtaõ fóra da diagonal, ſe chamaõ *Complementos*: os outros dous EF, LG, pelos quaes atraveſſa a meſma diagonal, ſe dizem *Exiſtir* no diametro. Fig. 64, e 65.

38 Quaeſquer outras figuras planas rectilineas, que tem mais de quatro lados, chamão-ſe *Multilateras*, ou *Polygonas*: deſtas humas ſaõ *Regulares*, outras naõ: as regulares ſaõ as que tem todos os lados, e angulos iguaes; as irregulares as que os naõ tem. As regulares tomaõ os nomes do numero dos angulos, de que conſtaõ: v.g. Pentagono conſta de cinco angulos: Hexagono de ſeis: Heptagono de ſette, &c. Humas, e outras ſe nomeaõ com duas, ou tres letras diſpoſtas pelos angulos.

39 *Angulo externo* de qualquer figura: he o que fórma hum lado produzido, com o conjuncto para a parte de fóra; como ABC. Fig. 23.

POSTULADOS.

Poſtulado: he o que ſe pede, e naõ ſe pòde negar. Pede-ſe pois para que ſe conceda.

1 QUe ſe tire de hum ponto a outro huma linha recta.

2 Que dada huma recta, ſe eſtenda, ou encurte para qualquer parte.

3 Que de qualquer ponto dado, e com qualquer intervallo ſe deſcreva hum circulo.

§ Eſ-

§ Estes saõ os unicos Postulados, com que passou a Geometria Antiga a explorar os mais occultos segredos da Quantidade; sem mais instrumentos, que huma regoa, e hum compasso. A Geometria Superior promove a sua especulaçaõ por meyo de outros Postulados, e com a ajuda de outros instrumentos de mayor artificio, como diremos em seu lugar.

AXIOMAS.

Axioma: he huma sentença evidente, a qual por si mesma se manifesta, como a luz.

1 AS quantidades iguaes a huma terceira saõ iguaes entre si. E todas as que saõ mayores, ou menores que huma, saõ mayores, ou menores que outra sua igual.

2 Se à quantidades iguaes se accrescentarem outras iguaes, as compostas seraõ iguaes. E,

3 Se de quantidades iguaes se tirarem partes iguaes, os residuos seraõ iguaes.

4 Se a quantidades desiguaes se accrescentarem outras iguaes, as compostas seraõ desiguaes. E,

5 Se de Quantidades desiguaes se tirarem partes iguaes, os residuos seraõ desiguaes.

6 Os duplos, triplos, quadruplos, &c. como tambem as metades, terças, quartas, &c. da mesma, ou de iguaes quantidades, saõ entre si iguaes.

7 As quantidades, que se ajustaõ perfeitamente entre si saõ iguaes. * Note-se bem este Axioma, porque delle dependem os primeiros Quatro Livros.

8 As quantidades iguaes, e semelhantes, ajustão-se perfeitamente entre si. * Entendo por *quantidades semelhantes*, linhas rectas com outras rectas; angulos rectilineos com outros rectilineos; circulos com circulos; arcos com arcos, &c. porque de outra sorte seria falso o Axioma.

9. Q

9 O todo he mayor, que a sua parte.

10 Os angulos rectos todos saõ iguaes.

11 Se huma recta RX cortar outras duas reãs DE, XV, fazendo com ellas para qualquer das partes dous angulos internos EDX, DXV, menores que dous rectos; as dittas rectas continuadas para a mesma parte, concorreraõ finalmente em algum ponto O. Fig. 47.

§ A verdade deste Axioma, naõ he taõ clara, que naõ necessite de domonstraçaõ; assim como necessita a Prop. 29. que he outra verdade semelhante a esta: por isso *Gemino*, e *Proclo* a excluiraõ do numero dos principios evidentes; e nòs a demostraremos abaixo no Escholio da ditta Prop. 29. O Padre *Tacquet* em lugar deste Axioma, substitue outros dous, os quaes constão manifestamente da geração das parallelas; e servem para demonstrar a Prop. 27. sem dependencia delle.

* 11 As parallelas usão de perpendiculo commum; isto he, a Recta RO, que he perpendicular à recta FC, he tambem perpendicular à sua parallela BA. Fig. 43

* 12 Duas perpendiculares RO, LQ, cortão de duas parallelas porções iguaes, RL, OQ.

13 Duas rectas não comprehendem espaço; porque para isto são necessarias ao menos tres.

14 Duas rectas não pòdem ter segmento commum: isto he, não pòdem continuar com huma terceira, perseverando rectas.* Infere se manifestamente da primeira definição da linha recta: porêm para mayor clareza, continuem, se for possivel, as rectas IX, OX, com a recta XZ; e descreva-se do ponto X, com qualquer intervallo, hum arco, o qual se divida para huma, e outra parte, começando do ponto I, em quaesquer partes iguaes à IO: tirem-se do centro X, pelos pontos das divisões outros tantos rayos XA, XE, XV, &c. Porquanto IO, he igual à IE, naõ ha mayor razão, porque sendo rectas OXZ, IXZ, o naõ sejão tambem IXZ, EXZ: Fig. 22

logo tambem o serão as duas extremas OXZ, EXZ; e por consequencia, outras quaesquer mais apartadas, VXZ, AXZ; o que he manifestamente absurdo.

PROPOSIÇÕES.

As Proposições Geometricas saõ em duas differenças: ou ensinão a construir algumas figuras, ou demonstrão as propriedades das jà formadas: as primeiras chamão-se Problemas, *as segundas* Theoremas. *Alèm destas Proposições perfeitas, ha outras imperfeitas; como saõ* Lemmas, Porismas, Corollarios, *e* Escholios; *as quaes ou servem para demonstrar mais facilmente as primeiras; ou se inferem dellas.*

Quanto às citações, e abreviaturas se note, que

Def. significa	*Definição*	*Theor.* significa	*Theorema.*
Post.	*Postulado*	*Probl.*	*Problema.*
Ax.	*Axioma.*	*Prop.*	*Proposiçaõ.*
Lem.	*Lemma*	*Constr.*	*Construcção.*
Cor.	*Corollario.*	*Dem.*	*Demonstração.*
Esch.	*Escholio.*	*Hypoth.*	*Hypothese.*
Por.	*Porisma.*	*Q.E.&c.*	*Que era o que se devia fazer, ou demonstrar.*
Ant.	*Antecedente.*		

PROPOSIÇÃO I. *Problema.*

Sobre huma recta dada AB, construir hum triangulo equilatero ACB.

Fig. 27.

CONstrucção. Tome-se nas pontas do compasso o intervallo da recta dada AB; e posta huma ponta ta em A, e depois em B, descrevão-se dous ci culos (*Post*.3.) os quaes se cortem em C: tirem-se as rectas AC, BC (*Post*. 1.) digo que o triangulo ACB, he o equilatero, que se pede.

Demonstração. A recta AC, he igual à AB (*Def*.18.) e a recta BC, he igual à BA: logo as rectas AC, BC, saõ iguaes entre si (*Ax*.1.) logo o triangulo ACB, he equilatero (*Def*.25.) *Que era o que se pedia*.

PROPOSIÇÃO II. *Probl.*

Dado o ponto B, tirar delle huma recta igual a outra dada EO. Fig. 28.

CONstr. Tome-se no compasso a recta EO; e posta huma ponta em B, descreva-se com a outra hum arco: de qualquer ponto C, deste arco tire-se huma recta ao ponto dado B; serà esta igual a EO.

Dem. Consta da Def. 18. e do Ax. 1. se se considera huma recta entre as pontas do compasso.

PROPOSIÇÃO III. *Probl.*

Dadas duas rectas desiguaes EO, BA, cortar da mayor BA, huma parte BC, igual à menor EO.

CONstr. Tome-se no compasso a recta EO; e descreva-se do ponto B, hum arco, o qual corte a mayor em C: digo que BC, he a parte, que se pede.

Dem. He a mesma que a da antecedente.

PROPOSIÇÃO IV. *Theorema.*

Fig.24. *Se dous triangulos DHG, CBA, tiverem dous lados respectivamente iguaes; isto he, DH igual à CB; e GH, igual à AB; e os angulos comprehendidos dos dittos lados H, B, tambem iguaes: serão as bases dos dittos triangulos DG, CA, iguaes; iguaes respectivamente os angulos sobre as bases: isto he, D igual à C; e G igual à A; e os triangulos totalmente iguaes.*

DEm. Imagine-se o primeiro triangulo posto sobre o segundo; e que posto o vertice H sobre o vertice B, cahe o lado DH, sobre o lado CB. Por quanto os angulos H, B, são iguaes (*Hypoth.*) cahindo o lado DH, sobre CB, cahirà GH, sobre AB (*Def.* 11.) e por quanto os dittos lados são respectivamente iguaes (*Hypoth.*) cahirà o ponto D, sobre C; e G, sobre A (*Ax.*8.) logo as bases DG, CA, se ajustarão entre si (*Ax.*13.) e por consequencia serão iguaes (*Ax.*7.) Ajustando-se as bases, e os lados, os triangulos serão totalmente iguaes (*Ax.*7.) logo tambem os angulos sobre as bases serão respectivamente iguaes. *Q.E.&c.*

ESCHOLIO.

Este methodo de demonstrar, fundado na coherencia de huma quantidade com outra, nos servirà atè o 5. livro; desde o qual, por beneficio das Proporções, tomarà a Geometria outro methodo de demonstrar mais abstracto, e mais universal.

Não faz menção Euclides *da conversa desta Prop. porèm convem demonstralla, porque della depende a 6. e a 26.*

SE as bases de dous triangulos forem iguaes; e iguaes respectivamente os angulos adjacentes:

tambem

tambem os lados dos dittos triangulos ſerão reſpectivamente iguaes; iguaes os angulos dos vertices; e ambos os triangulos totalmente iguaes.

Dem. *Por quanto as baſes DG, CA, ſe ſuppoem iguaes; e iguaes reſpectivamente os angulos adjacentes; ajuſtada huma com outra, cahirà o lado DH, ſobre CB; e GH. ſobre AB* (Def. 11.) *Logo tambem o ponto H, cahirà ſobre B [porque de outra ſórte, ou os angulos ſobre as baſes não ſerião iguaes, contra a hypotheſe; ou duas rectas terião ſegmento commum, contra o Ax* 14.] *logo os dous triangulos ſão totalmente iguaes* (Ax. 7.) *e por conſequencia, iguaes reſpectivamente os lados, e iguaes os angulos dos vertices. Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO V. *Theor.*

Em qualquer triangulo Iſóſceles ABC, os angulos ſobre a baſe A, C, ſão iguaes. Fig. 25. 26.

DEm. Imagine-ſe o triangulo dado virado para a outra parte; e que aſſim virado *cba*, ſe poem ſobre ſi meſmo. Por quanto os angulos *b*.B, ſão iguaes; e iguaes reſpectivamente os lados, que os comprehendem; iſto he, *cb*. igual à AB, e *ab*. igual à CB (*Hypoth.*) tambem os angulos ſobre as baſes ſerão reſpectivamente iguaes; iſto he, *c*. igual à A, e *a*. igual à *c*. (*Prop.*4.) logo *c*. ou C, he igual à A. *Q.E.&c.*

COROLLARIO.

Todo o triangnlo equilatero he tambem equiangulo;

PROPO-

PROPOSIÇÃO VI. *Theor.*

*Se o triangulo ABC, tiver os angulos ſobre a baſe A, C, iguaes; ſerà Iſóſceles: iſto he, tambem os lados CB, AB, oppoſtos aos dittos angulos, ſerão iguaes.** He converſa da antecedente.

DEm. Imagine-ſe o triangulo dado virado, e ſobrepoſto à ſi meſmo, como na antecedente. Porquanto a baſe *ca.* he igual à AC; e os angulos adjacentes ſão reſpectivamente iguaes; iſto he, *c.* igu l à A, e *a.* igual à C (*Hypoth.*) tambem os lados dos dittos triangulos ſerão reſpectivamente iguaes (*Eſch. da* 4.) logo *cb.* iſto he, CB, he igual à AB. *Q.E.&c.*

COROLLARIO.

Todo o triangulo equiangulo he tambem equilatero.

PROPOSIÇÃO VII. *Theor.*

Serve para demonſtrar a ſeguinte, naqual vay incluſa.

PROPOSIÇÃO VIII. *Theor.*

Fig. 24. *Se dous triangulos DHG, CBA, tiverem todos os tres lados reſpectivamente iguaes; iſto he, DH igual a CB; DG igual a CA; e HG igual a BA; tambem os angulos oppoſtos a iguaes lados ſerão reſpectivamente iguaes; iſto he, D igual à C; H à B; e G à A.*

DEm. Imagine-ſe a baſe DG, ſobrepoſta a CA; e que pela igualdade das rectas cahe o ponto D,

ſobre

ſobre C; e G ſobre A. Agora, ou o ponto H, cahe ſobre B, ou não: ſe cahe, ajuſtão-ſe os triangulos perfeitamente entre ſi; e por conſequencia tem todos os angulos reſpectivamente iguaes (*Ax.7.*)

Senão cahe (como na figura 29) tire-ſe a recta HB. Porquanto DH, he igual a CB (*Hypoth.*) ſerà o triangulo HCB, Iſóſceles: logo o angulo H, he igual à *o.* (*Prop.5.*) logo o angulo *u.* he menor que *o.* e por conſequencia muito menor que B: porém, por ſer GH, tambem igual à AB (*Hypoth.*) o meſmo angulo *u.* devia ſer igual ao meſmo angulo B (*Prop.5.*) logo he muito menor, que o ſeu igual; o que he abſurdo.

ESCHOLIO.

Eſte modo de demonſtrar chama-ſe Reducção a impoſſivel, *e he muito familiar aos Geometras, quando não achão meyos para demonſtrar direitamente as ſuas concluſões; o que ſuccede ordinariamente no principio das ſciencias: porém pode-ſe demonſtrar aſſim direitamente.*

Tenhão os triangulos DBG, DCG, os tres lados de hum iguaes aos tres do outro; e juntem-ſe por quaſquer dous lados iguaes de ſórte, que fiquem outros dous iguaes para ſima, e outros dous para baixo: tire-ſe a recta BG. Porquanto o triangulo BDC, he Iſóſceles(Hypoth.*) ſerà o angulo DBC, igual ao angulo DCB (* Prop.5. *) e por quanto o triangulo BGC, tambem he Iſóſceles, ſerà o angulo GBC, igual ao angulo GCB: logo todo o angulo B, he igual a todo o angulo C (*Ax.2.*) Saõ tambem iguaes reſpectivamente os lados, que os comprehendem: logo tambem ſerão iguaes os angulos BDG, CDG; aſſim como os angulos BGD, CGD (*Prop.4.*) e por conſequencia, os tres de hum iguaes aos tres do outro. Q.E.&c.* Fig. 30.

PROPO-

PROPOSIÇÃO IX. *Probl.*

Fig. 30. *Dado hum angulo rectilineo ADE, dividillo pelo meyo.*

COnstr. Tomem-se do vertice D, em hum, e outro lado duas partes iguaes DB, DC (*Prop.* 3.) e descrevão-se dos pontos B, C, com hum mesmo intervallo dous circulos, os quaes se cortem em G: tire-se a recta DG; e dividirà esta o angulo dado pelo meyo.

Dem. Tirem-se as rectas BG, CG. Os triangulos DBG, DCG, tem todos os lados respectivamente iguaes (*Constr.*) logo os angulos BDG, CDG, oppostos a iguaes lados, tambem são iguaes (*Prop.* 8.) e por consequencia, o total D, està dividido pelo meyo. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

Atègora se não tem descuberto modo Geometrico de dividir hum angulo em tres partes iguaes, por via de regoa, e compasso. Arquimedes *o divide por via de huma linha espiral, de que fallaremos na Geometria Practica:* e Pappo Alexandrino, *por via de outra linha curva, chamada* Quadratrix, *de que fallaremos no fim desta obra: porèm os principiantes, em quanto não chegão lâ, o poderão dividir mecanicamente, não sómente em tres, senão em quaesquer partes, da maneira seguinte.*

Fig. 26. *Ponha-se huma ponta do compasso no vertice C, do angulo dado, e com a outra se descreva hum arco aB, com qualquer intervallo. divida-se este arco em tantas partes, em quantas se deseja dividido o angulo; e tirem-se do ditto vertice, pelos pontos das divisões, outras tantas rectas: ficarà dividido o angulo nas partes, que se desejão.*

PROPO-

PROPOSIÇÃO X. *Probl.*

Dada huma recta finita BC, dividilla pelo meyo. Fig. 31.

CONstr. Com o intervallo BC, (ou com outro qualquer) descrevão-se dos termos da recta dada B, C, dous circulos, os quaes se cortem nos pontos A, E: ajuntem-se estes com huma recta; e dividirà esta pelo meyo a dada em O.

Dem. Tirem-se as rectas BA, CA. Nos triangulos X, Z, os lados BA, CA, são rayos de iguaes circulos; o lado OA, he commum; e os angulos comprehendidos BAO, CAO, são iguaes (*Ant.*) logo tambem as bases BO, OC, serão iguaes (*Prop.*4.) e por consequencia, BC està cortada pelo meyo em O. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XI. *Probl.*

Dada huma recta infinita AB, e nella o ponto O; levantar deste huma perpendicular à ditta recta. Fig. 33.

COnstr. Tomem-se para huma, e outra parte do ponto O, as partes iguaes OR, OS: e descrevão-se dos pontos R, S, com qualquer intervallo, dous arcos, os quaes se cortem em C. Ajuntem-se os pontos O, C, com huma recta; e serà esta a perpendicular, que se pede.

Dem. Tirem-se as rectas RC, SC. Os triangulos X, Z, são respectivamente equilateros (*Constr.*) logo os angulos ROC, SOC, oppostos a iguaes lados, são iguaes (*Prop.*8.) logo OC, he perpendicular à AB (*Def.*14.) *Q.E.&c.*

C PRO-

PROPOSIÇÃO XII. *Probl.*

Fig. 34. *Dada huma recta infinita BA, e fóra della hum ponto C; tirar deste huma perpendicular à ditta recta.*

COnstr. Descreva-se do ponto C, hum arco, o qual corte a recta dada nos pontos R, S: divida-se a recta RS pelo meyo em O (*Prop.* 10.) e ajuntem-se os pontos C, O, com outra recta; será esta a perpendicular, que se pede.

Dem. Tirem-se os rayos CR, CS. Os triangulos X, Z, são respectivamente equilateros (*Constr.*) logo os angulos em O, oppostos a iguaes lados, são iguaes (*Prop.* 8.) logo CO, he perpendicular à BA (*Def.* 14.) *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XIII. *Theor.*

Fig. 35. é 36. *Qualquer recta DO, que cahe sobre outra AB; ou faz com ella dous angulos rectos, ou dous iguaes a dous rectos.*

DEm. se DO, he perpendicular à AB (Fig. 35.) consta da (*Def* 14.) Senão: levante-se do ponto O, a perpendicular OE (Fig. 36.) Os 2 rectos EOB, EOA, são iguaes aos 3. EOB, EOD, DOA (*Ax.* 7.) porèm os primeiros 2. fazem o obtuso DOB: logo este junto com o agudo DOA, fazem 2. rectos. *Q.E.&c.*

COROLLARIOS.

1 DO mesmo modo se demonstra, que concorrendo muitas rectas no mesmo ponto O, todos os angulos, que nelle se formão, são iguaes a dous rectos.

2 E

2 E que quando se cortão duas rectas; ou fazem 4. rectos, ou 4. iguaes a 4. rectos.

3 E que quando muitas rectas se cortão no mesmo ponto O, todos os angulos, que nelle se formão, são iguaes a 4. rectos.

PROPOSIÇÃO XIV. *Theor.*

Se duas rectas AO, BO, concorrendo de huma, e outra parte, no extremo de outra recta DO, formarem com ella dous angulos iguaes a dous rectos AOD, BOD; as dittas rectas estarão em direitura, e comporão huma linha recta. Fig. 35.

DEm. Se AOB não he recta; seja recta outra qualquer AOE: logo os angulos DOA, DOE tambem são iguaes a dous rectos (*Ant.*) logo tirando o commum DOA, os remanentes DOB, DOE serão iguaes entre si (*Ax.*3.) isto he, serà a parte igual ao todo; o que he absurdo.

PROPOSIÇÃO XV. *Theor.*

Quando se cortão duas rectas AC, BD, os angulos verticalmente oppostos (isto he i. e. ou tambem u. o.) saõ iguaes entre si. Fig. 32.

DEm. Os angulos *i. o.* são iguaes à dous rectos (*Prop.* 13.) os angulos *o. e.* tambem são iguaes a dous rectos: logo tirando de summas iguaes o commum *o.* os remanentes *i. e.* serão iguaes (*Ax.*3.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XVI. & XVII.

São escusadas; porque se incluem na 32. a qual não depende dellas.

PROPOSIÇÃO XVIII. *Theor.*

Fig. 39. *Em todo o triangulo BOC, o angulo B opposto ao mayor lado CO, he mayor que o angulo C, opposto ao menor BO.*

D*Em.* B, não he igual à C; porque se o fosse, serião os lados BO, CO, iguaes (*Prop.*6.) contra a supposição. Tambem não he menor; porque se o fosse, tirada do mayor C, huma parte DCB, igual à B; serião os lados BD, CD, iguaes (*Prop.*6.) logo accrescentando a ambas as partes a commua DO, serião iguaes as compostas BDO, CDO (*Ax.*2.) e por consequencia, sendo BDO, ou BO, menor que CO (*Hypoth.*) tambem CDO seria menor que CO, contra a Def. da linha recta: logo, não sendo B, nem igual, nem menor que C, segue-se que he mayor. *Q.E.&c.*

* Do mesmo modo se demonstra do angulo C, a respeito do angulo O.

PROPOSIÇÃO XIX. *Theor.*

Fig. 39. *Em todo o triangulo BOC, o lado CO opposto ao mayor angulo B, he mayor, que o lado BO, opposto ao menor C.* * He conversa da antecedente.

D*Em.* CO, não he menor que BO; porque se o fosse, seria o angulo B, menor que C (*Ant.*) contra a hypoth. Tambem não he igual, porque se fosse, se, seria B, igual à C (*Prop.5.*) tambem contra a hypoth. logo he mayor. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XX. *Theor.*

Os dous lados dequalquer triangulo são mayores que o terceiro.

DEm. Consta manifestamente da Def. da linha recta.

PROPOSIÇÃO XXI. *Theor.*

Se dos extremos de hum lado de qualquer triangulo se tirarem duas rectas GO, HO, para dentro do mesmo triangulo, as quaes concorrão em hum ponto O; as dittas rectas juntas serão menores que os dous lados GE, HE, que as comprehendem: porém comprehenderão mayor angulo O, que o que elles formão E. Fig. 40.

DEm. 1. parte. Continue-se GO, atè D. Os dous lados OD, DH, são mayores que o terceiro OH (*Ant.*) logo accrescentado o commum GO, serão GD, DH, mayores que GO, OH. (*Ax.4.*) Porèm, pela mesma razão, por ser GE, ED, mayores que GD, accrescentando o commum DH, tambem GE, EH, são mayores que GD, DH: logo muito mayores serão que GO, OH. *Q.E.&c.*

A 2. part. constará a baixo do Cor.2. da Prop. 32, aqual não depende desta.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXII. *Probl.*

Fig. 37. *Dadas 3 rectas CA, AB, BC (das quaes duas sejão sempre mayores, que a terceira) formar com ellas hum triangulo.*

C*Onstr.* Transfira-se qualquer recta CA, para DG; e tanto do ponto D, como intervallo BC; como do ponto G, com o interuallo AB, descrevão-se dous arcos, os quaes se cortem em H: tirem-se as rectas DH, GH, e ficarà formado o triangulo &c.

Dem. Consta manifestamente da constr.

PROPOSIÇÃO XXIII. *Probl.*

Fig. 37. e 38. *Dado hum ponto D, em qualquer recta; formar nelle hum angulo igual ao outro dado C.*

C*Onstr.* Cortem-se os lados do angulo dado com qualquer recta AB; e transfira-se qualquer delles CA, de D, em G: dos pontos D, G, com os intervallos CB, AB, descrevão-se dous arcos, os quaes se cortem em H; e tirese a recta DH: serà o angulo HDG igual ao dado C.

Dem. Consta da 8.

ESCHOLIO.

Em graça dos principiantes porei aqui tres praxes, as quaes servem para a construcção dos angulos.

1 Dado em qualquer recta hum ponto D, formar nelle hum angulo igual ao outro dado C. Des-

cre-

creva-ſe do ponto C, hum arco com qualquer intervallo, o qual corte os lados do angulo dado nos pontos A, O: deſcreva-ſe do ponto D, com o meſmo intervallo outro arco, o qual corte a recta dada em G: tome-ſe no compaſſo o intervallo AO; transfira-ſe de G em L; e tire-ſe a recta DL, ficarà formado o angulo, que ſe pede.

2 Examinar os gráos de qualquer angulo C. *Deſcreva-ſe em huma lamina tranſparente hum ſemi-circulo, e divida-ſe em 180. partes iguaes: ajuſte-ſe o centro, e hum dos lados deſte ſemi-circulo, com o vertice, e hum dos lados do angulo propoſto; e veja-ſe quantas partes contem o arco intercepto AO. Digo que outros tantos ſerão os gráos do ditto angulo.*

3 Formar hum angulo de qualquer gráos. *Tire-ſe a recta CA infinita; e ajuſte-ſe com ella hum lado do ſemi-circulo tranſparente, que diſſe aſſima: numerem-ſe do ponto A, tantas partes, quantos ſão os gráos, de que ſe deſeja o angulo; e note-ſe o ponto O, termo da numeração, e juntamente o ponto C, correſpondente ao centro: tire-ſe a recta CO. &c. A Dem. de todas eſtas praxes conſtarà depois, da ultima Prop. do livro 6.*

PROPOSIÇÃO XXIV. *Theor.*

Se em dous triangulos ACB, ACG, forem dous lados de hum AC, CB, iguaes reſpectivamente a dous do outro AC, CG; porém o angulo comprehendido dos primeiros mayor, que o comprehendido dos ſegundos; tambem a baſe AB, oppoſta ao mayor angulo, ſerà mayor que a baſe AG, oppoſta ao menor. E pelo contrario: ſe a baſe do primeiro trian- Fig. 41

gulo

gulo for mayor, tambem o angulo opposto se-ra mayor.

DEm. 1. part. Imagine-se hum triangulo posto sobre o outro, de sorte que se ajustem quaesquer dous lados iguaes; v.g. os menores AC, e como, pela desigualdade dos angulos, os outros dous não se ajustão, e cahe hum fóra do outro (*Def.* 12.) ajuntem-se os termos delles com huma recta GB. O angulo AGB, he mayor que o angulo CGB (*Ax.* 9.) logo he mayor que o seu igual CBG [por ser Isósceles o triangulo GCB] e por consequencia muito mayor, que a sua parte ABG: logo no triangulo AGB, o lado AB, opposto ao mayor angulo G, he mayor que o lado AG, opposto ao menor B (*Prop.* 19.) isto he, a base do triangulo ACB, he mayor que a base do triangulo ACG. *Q. E. &c.*

A 2. part. consta da 1. por reducção a impossivel.

PROPOSIÇÃO XXVI. *Theor.*

Fig. 24. *Se dous triangulos DHG, CBA, tiverem dous angulos respectivamente iguaes; isto he, D igual à C; e G igual à A: e além disto, tiverem hum lado de hum igual a outro lado do outro (ou sejão os que estão entre os angulos iguaes, DG, CA; ou os oppostos a quaesquer delles) os triangulos serão totalmente iguaes; e por consequencia, terão iguaes respectivamente todos os angulos, e todos os lados.*

DEm. Supponhamos 1. que são iguaes os lados intermedios DG, CA. Consta do Esch. da

Prop. 4.

Prop.4. Supponhamos 2. que ſão iguaes os lados oppoſtos a iguaes angulos DH, CB. Porquanto os angulos D,G, ſão iguaes reſpectivamente aos angulos C, A; tambem os remanentes H, B ſerão iguaes [como conſtarà depois do Cor. 8. da Prop.32. a qual não depende deſta] logo jà os lados iguaes eſtão entre angulos iguaes; e por conſequencia, &c.

PROPOSIÇÃO XXVII. *Theor.*

Se a rectaGO, cortar duas parallelas BA,FC; Fig. 41. *ſerão* 1. *iguaes os angulos alternos RLO, LOQ.* 2. *ſerà o externo GLA, igual ao interno para a meſma parte LOC.* 3. *e ſerão os dous internos para a meſma parte ALO, LOC, iguaes a dous rectos.*

DEm. 1. part. Tire-ſe do ponto O, huma perpendicular à BA; e do ponto L, outra perpendicular a FC. As rectas OR, LQ, ſão perpendiculares à ambas as parallelas (*Ax.*11.) ſão iguaes entre ſi (*Def.*36.) e tomão das parallelas partes iguaes RL, OQ (*Ax.*12.) ſão tambem iguaes, ou rectos, os angulos comprehendidos R, Q: logo os triangulos LRO, OQL ſão totalmente iguaes (*Prop.*4.) e por conſequencia os angulos alternos, oppoſtos a iguaes lados, RLO, LOQ, ſão iguaes entre ſi. *Q. E. &c.*

* Da igualdade deſtes ſe infere a igualdade dos outros alternos ALO, LOF (*Prop* 13.)

2 Part. O angulo externo GLA, he igual ao ſeu verticalmente oppoſto RLO (*Prop.*15.) porém eſte, como fica ditto, he igual a LOQ: logo o externo he igual ao interno para a meſma parte (*Ax.*1.) *Q. E. &c.*

* Da meſma ſórte ſe demonſtra ſer GLB, igual à LOF.

3 Part. O angulo ALO, he igual a LOF (1. *part.*) porèm este, juntamente com LOQ, fazem dous rectos (*Prop.* 13.) logo tambem aquelle; isto he, os dous internos para a mesma parte. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXVIII. *Theor.*

Fig. 44. *Se a recta GO, cortando duas rectas AB, CF, fizer os angulos alternos ALO, LOF, iguaes entre si; as dittas rectas cortadas serão parallelas.*

DEm. Se o não são: passe pelo ponto L, outra qualquer recta XZ, parallela à CF. O angulo XLO, he igual ao seu alterno LOF (*Ant.*) porèm o angulo ALO, he igual ao mesmo, alterno pela hypothese: logo os angulos XLO, ALO, são iguaes entre si (*Ax.* 1.) isto he, a parte he igual ao todo; o que he absurdo, &c.

PROPOSIÇÃO XXIX. *Theor.*

Fig. 44. *Se a recta GO, cortando duas rectas AB, CF, fizer o angulo externo GLB, igual ao interno para a mesma parte LOF: ou tambem, os dous internos para a mesma parte BLO, LOF, iguaes a dous rectos; as duas rectas cortadas serão parallelas.*

DEm. 1. part. GLB, he igual a ALO, (*Prop.* 15.) porèm GLB, he igual a LOF (*Hypoth.*) logo os alternos ALO, LOF, são iguaes entre si (*Ax.* 1.) logo as duas rectas AB, CF, são parallelas (*Ant.*) *Q. E. &c.*

2. Part. LOC, LOF, são iguaes a dous rectos (*Prop.* 13.) porèm BLO, LOF, tambem são iguaes a dous rectos (*Hypoth.*) logo, tirado o commum LOF,

os

os remanentes alternos LOC, BLO, serão iguaes entre si (*Ax.*2.) e por consequencia, &c.

* Da 2. part. se segue que todo o rectangulo he parallelogrammo.

PROPOSIÇÃO XXX. *Theor.*

Se duas rectas AB, CF, forem parallelas a huma terceira XZ; serão tambem parallelas entre si. Fig. 42.

DEm. Corte a recta GO, a todas tres. O angulo externo GLB, he igual ao interno para a mesma parte LDZ (*Prop.*27.) este mesmo, como externo, he tambem igual ao interno DOF: logo os dous GLB, DOF [isto he, o externo, e o interno para a mesma parte] são iguaes entre si: logo as duas rectas AB, CF, são parallelas (*Ant.*) *Q. E. &c.*

* A demonstração sempre he a mesma; ou a recta XZ, caya dentro, ou fóra das duas parallelas.

PROPOSIÇÃO XXXI. *Probl.*

Dado hum ponto H, fóra de qualquer recta FC; tirar delle huma parallela à ditta recta. Fig. 45.

COnstr. Tire-se do ponto H (*à descripção*) huma recta HP, a qual corte a dada em P; e descreva-se do ponto P, com qualquer intervallo, o arco *eu*: descreva-se tambem do ponto H, com igual intervallo, outro arco *io*. igual ao primeiro; e tire-se a recta H*o* B; será esta a parallela, que se pede.

Dem. Consta da Prop. 28. e da 1. praxe do Esch. da Prop. 23.

* Outra praxe do Padre *Tacquet*. Dado o ponto O, fóra da recta BA, &c. Descreva-se hum circulo, o qual passe pelo ponto dado, e corte a recta dada em Fig. 46.

quaesquer dous pontos E, I: tomem-se destes dous pontos dous arcos iguaes EO, ID; e tire-se a recta OD: será esta a parallela, que se pede, &c. * Depende da Prop. 29. do l. 3.

ESCHOLIO.

Fig. 147. *Supposto, que lançamos fóra do numero dos Axiomas o* 11. *de* Euclides, *por não ser evidente: pede a razão que o demonstremos aqui, por ter muita connexão com a Prop.* 29.

Se a recta RX, cortar duas rectas DE, XV; e fizer para qualquer das partes dous angulos internos EDX, DXV, menores que dous rectos; as dittas rectas, continuadas para a mesma parte, concorrerão finalmente em algum ponto O.

Dem. *Tire-se a recta XZ, parallela à DE; e sejão os angulos EDX, DXZ, iguaes a dous rectos* (Prop. 27.) *He evidente, que entre as rectas XV, XZ, continuadas infinitamente, se póde tirar huma parallela à XD, a qual seja mayor que ella: seja pois esta ZS; e faça-se XR, igual a ella; e ajuntem-se os pontos R, S. Porquanto as rectas XR, ZS, são parallelas* (Constr.) *serão os angulos alternos RXS, XSZ, entre si iguaes* (Prop. 27.) *são tambem iguaes respectivamente os lados, que os comprehendem* (Constr.) *logo os angulos RSX, SXZ, oppostos a iguaes lados, são iguaes* (Prop. 4.) *logo as rectas RS, XZ são parallelas* (Prop. 28.) *porém a recta DE, tambem he parallela à XZ* (Constr.) *logo as rectas DE, RS são parallelas entre si* (Prop. 30.) *e por consequencia não podem concorrer para nenhuma parte* (Def. 36.) *logo DE, continuada, necessariamente ha de cortar a recta XS, em algum ponto O. Q. E. &c.*

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXXII. *Theor.*

Em todo o triangulo BCA, qualquer angulo externo OCA, he igual aos dous internos oppostos B, A: e todos os tres internos juntos C, B, A, são iguaes precisamente a dous rectos. Fig. 48.

DEm. 1. part. Tire-se CH, parallela à BA. Porquanto OB, corta as parallelas CH, BA; serà o angulo externo OCH, igual ao interno para a mesma parte B (*Prop.*27.) e porquanto CA, corta as mesmas parallelas, serà o angulo HCA, igual ao alterno A (*pela mesma Prop.*) logo todo o angulo externo OCA, he igual aos dous internos oppostos B, A. *Q.E.&c.*

COROLLARIOS.

1 O Angulo externo OCA, sempre he mayor, que qualquer dos internos oppostos B, A, (*Ax.*9.)

2 De dous angulos E, O, insistentes sobre a base GH, de qualquer triangulo, o mayor he o que cahe dentro. *Dem.* Continue-se GO, até D. O angulo GDH, he mayor que E (*Cor. ant.*) o angulo GOH, he mayor que GDH (*pelo mesmo Cor.*) logo he muito mayor que E. *Q.E.&c.* Fig. 49.

3 Se de hum ponto Z, se tirarem duas rectas a outra terceira CD; huma obliqua ZQ, e outra perpendicular ZO; cahirà esta para a parte do angulo agudo ZQC. *Dem.* Caya (se for possivel) para a parte do angulo obtuso ZQD; e seja ZR: logo serà o angulo agudo ZQC, mayor que o recto ZRC (*Cor.*1.)contra Def.15. Fig. 52.

2 Part. O angulo externo OCA, he igual aos dous internos oppostos A, B (1 *part.*) porém o mes- Fig. 48.

mo

mo externo, juntamente com o interno conjuncto ACB, são iguaes a dous rectos (*Prop.* 13.) logo os tres internos juntos C, B, A, são iguaes a dous rectos. *Q. E. &c.*

Fig. 50. * Por outro modo: Tire-se HL, parallela à base. Os alternos *a. i.* e os alternos *o. u.* são respectivamente iguaes (*Prop.* 27.) porèm *a. e. o.* são iguaes a dous rectos (*Cor.* 1. *da* 13.) logo tambem *i. e. u. Q. E. & c.*

COROLLARIOS.

4 OS tres angulos de qualquer triangulo são iguaes aos outros tres de outro qualquer triangulo; tomados todos juntos.

5 Se em qualquer triangulo for hum angulo recto; os outros dous farão outro recto. E,

6 Se hum angulo for recto, os outros dous serão agudos.

Fig. 17. 7 Se o angulo A, de hum triangulo for igual aos outros dous B, C, do mesmo triangulo; o primeiro serà recto.

8 Conhecidos os gráos de hum angulo de qualquer triangulo, conhecem-se tambem os gráos dos outros dous juntos. E conhecidos os gráos de quaequer dous juntos, conhecem-se tambem os gráos do terceiro: porque todos tres fazem sempre a summa de 180. gráos.

9 Se dous angulos de hum triangulo (ou separados, ou juntos) forem iguaes a outros dous de outro qualquer triangulo; tambem o terceiro serà igual ao terceiro.

10 Se dous triangulos tiverem hum angulo igual; tambem as summas dos outros dous serão iguaes.

11 Quando em hum triangulo Isósceles o angulo comprehendido dos lados iguaes for recto; os outros dous serão semi-rectos. E em todo o triangulo Isósceles os angulos sobre a base são agudos.

12 Qualquer angulo de hum triangulo equilatero he a terceira parte de dous rectos, ou duas terças de hum

recto;

recto; isto he, consta de 60. gráos. E

13 Daqui se tira hum modo facil de dividir em tres partes iguaes qualquer angulo recto BAC: porquanto, se se formar sobre qualquer dos lados AC, hum triangulo equilatero AHD (*Prop.* 1.) serà o angulo BAH, a sua terceira parte. Fig. 51.

14 A perpendicular ZO, he a mais curta de quantas rectas se podem tirar de hum ponto Z, a qualquer recta CD. *Dem.* Por ser o angulo O, recto, serà qualquer ZQO, agudo (*Cor.*6.) logo sempre ZO, opposta ao menor angulo, ha de ser menor que ZQ, opposta ao mayor (*Prop.*19.) Fig. 52.

15 De hum ponto Z, não se pòde tirar mais que huma perpendicular à qualquer recta CD.

ESCHOLIO.

Deste fecundissimo Theorema, cujo uso he mui frequente por toda a Geometria, foy inventor Pythagoras, *como diz* Eudemo. *Delle faz menção muitas vezes* Aristoteles; *e o traz por exemplar de huma perfeita demonstração. Por meyo delle se sabe, não sómente quantos angulos rectos fazem os tres de qualquer triangulo; senão tambem todos os angulos de qualquer Polygono: e não sómente os internos; senão tambem os externos, como veremos nos tres seguintes Theoremas.*

Theorema I.

Os 4. angulos de qualquer quadrangulo AC, fazem precisamente 4. rectos. Fig. 53.

Dem. *Tire-se a diagonal DB; e resolva-se o quadrangulo em dous triangulos. Os* 3. *angulos de cada hum destes triangulos fazem precisamente* 2. *rectos* (Ant.) *logo todos* 6. (*isto he, os* 4. *da figura*) *fazem* 4. *rectos.*

Theorema

Theorema 2.

Fig. 54. OS angulos internos de qualquer Polygono, fazem tantas vezes 2. rectos (menos 4.) quantos são os lados da figura.

Dem. *Tirem-se de qualquer ponto O, tomado dentro da figura, rectas a todos os angulos; e resolva-se o polygono em outros tantos triangulos, quantos são os lados. Os 3. angulos de cada hum destes triangulos fazem precisamente 2. rectos: porèm os angulos dos dittos triangulos são os mesmos que os do Polygono, com mais 4. rectos, formados no ponto O* (Cor. 3. da Prop. 13.) *logo os angulos do Polygono fazem tantas vezes 2. rectos (menos 4.) quantos são os lados da figura.*

Theorema 3.

Fig. 55. TOdos os angulos externos de qualquer Polygono fazem precisamente 4. rectos.

Dem. *Os externos juntamente com os internos fazem tantas vezes 2. rectos, quantos são os lados da figura* (Prop. 13.) *porèm os internos juntamente com 4. rectos fazem a mesma summa* (Theor. ant.) *logo os externos fazem precisamente 4. rectos.* He cousa admiravel; que por mais lados, que tenhão as figuras rectilineas; sempre a summa dos angulos externos he a mesma.*

PROPOSIÇÃO XXXIII. *Theor.*

Fig. 56. *Se duas rectas BC, AD, ajuntarem os extremos de outras duas AB, DC, iguaes, e parallelas; tambem ellas serão iguaes, e parallelas entre si.*

DEm. Tire-se a transversal AC. Os angulos alternos BAC, ACD, são iguaes (*Prop.* 27.) são

tam,

tambem respectivamente iguaes os lados, que os comprehendem (*Hypoth.*) logo as bases BC, AD, serão iguaes (*Prop.* 4.) *Que era o* 1. Além das bases, são tambem iguaes os angulos sobre as bases BCA, CAD, oppostos a iguaes lados: logo as mesmas bases BC, AD, são tambem parallelas (*Prop.* 28.) *Que era o* 2.

PROPOSIÇÃO XXXIV. *Theor.*

Em qualquer parallelogrammo BD, os angulos, e os lados oppostos são iguaes: e a diagonal AC, o divide pelo meyo, em dous triangulos iguaes, e semelhantes. Fig. 56.

DEm. Porquanto BC, AD, são parallelas (*Def.* 35.) e a estas corta a recta AC; serão os angulos alternos BCA, CAD, iguaes (*Prop* 27.) pela mesma razão são tambem iguaes os outros alternos BAC, ACD: logo o total A, he igual ao total C; e pelo mesmo discurso, B, he igual à D. *Que era o* 1.

Tendo os triangulos ABC, ADC, huma mesma base; e sendo os angulos a ella adjacentes respectivamente iguaes (como fica ditto) serão iguaes os lados, oppostos a iguaes angulos; isto he, será AD, igual à BC; e AB, igual à DC; e serão os dittos triangulos totalmente iguaes (*Prop.* 26.) *Que era o* 2. *e* 3 &c.

ESCHOLIO.

Deste Theorema, e da Def. 1. *do l* 2. *se tira o modo de medir qualquer parallelogrammo rectangulo, que he o seguinte. Meção-se quaesquer dous lados, que comprehendem hum dos quatro angulos rectos, com hu-*

Fig. 57. *ma medida commua; e seja v.g. o lado BA, de 4 palmos, e AC de 9. multiplique-se hum numero por outro; e o producto, que he 36. serà o numero dos palmos quadrados, de que consta a area do ditto pa-*
Fig. 58. *rallelogrammo. Para medir hum quadrado, bastarà medir hum só lado; e multiplicallo por si mesmo.*

Dem. *Consta da Prop. ant. que divididos quaesquer lados conjunctos com huma medida commua, desde hum mesmo ponto A; e tiradas pelos pontos das divisões parallelas aos lados oppostos; todos os lados, e angulos dos parallelogrammos pequenos, em que se resolvem os grandes, são iguaes entre si: logo são quadrados (Def.32.) e tantos em numero, quantos indica o producto dos numeros dos lados.* Advirta-se que assim como pela multiplicação de hum lado por outro se sabe o numero dos palmos quadrados, de que consta o parallelogrammo; assim tambem pela divisão deste producto por qualquer dos lados, se sabe o numero de palmos, de que consta o outro lado.*

PROPOSIÇÃO XXXV. e XXXVI. *Theor.*

Fig. 59. *Os Parallelogrammos EN, EL, que estão sobre a mesma, ou igual base EO, e entre as mesmas parallelas EX, ML, são iguaes.*

D*Em.* Os triangulos MEB, NOL são respectivamente equilateros: porquanto EM, ON; assim como EB, OL, são iguaes (*Prop.*34.) e MB, NL, compostos de duas partes iguaes MN, BL (por serem iguaes a huma terceira EO) e de huma commua NB, tambem são iguaes (*Ax.*2.) logo os dittos triangulos são totalmente iguaes (*Prop.*8.) logo tirando-lhes o triangulo commum NAB, e ajuntando-lhes o outro commum

EAO,

EAO, os parallelogrammos, que resultão, EN, EL, serão iguaes. *Q.E.&c.*

* Este Theorema (o qual se farà mais universal na Prop. 1. do l. 6.) he verdadeiramente admiravel: pois ainda que o parallelogrammo EN, seja rectangulo, e o mais curto de quantos se pòdem dar entre aquellas parallelas; e o outro EL, obliquangulo, e o mais estendido, que se possa imaginar entre as mesmas parallelas, sempre hande ser iguaes.

ESCHOLIO.

Deste Theorema se colhe tambem o modo de medir qualquer parallelogrammo obliquangulo; que he multiplicando a base pela altura: donde, se a base EO, for de 3. palmos, e altura LX, de 6. serà a area do parallelogrammo EL, de 18. quadrados. A razão he, porque o parallelogrammo obliquangulo EL, he igual ao rectangulo EN: porèm este mede-se, multiplicando a base EO, pela altura ME, ou LX (Esch. ant.) *logo tambem aquelle. Que cousa seja altura de hum parallelogrammo, ou triangulo, constarà despois da Def. 3 do l. 6.*

PROPOSIÇÃO XXXVII. e XXXVIII. *Theor.*

Os triangulos EMO, EBO, postos sobre a mesma, ou igual base EO, e entre as mesmas parallelas EX, ML, são iguaes entre si. Fig. 60.

DEm. Tirem-se ON, OL, parallelas aos lados EM, EB. Os parallelogrammos EN, EL, são iguaes (*Ant.*) porèm os triangulos EMO, EBO, são metades suas (*Prop* 34.) logo tambem serão iguaes entre si (*Ax.* 6.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXXIX. e XL. *Probl.*

Fig. 61. *Os triangulos iguaes ACO, ABO, postos sobre a mesma, ou igual base AO, de huma mesma recta; e virados para a mesma parte; estão entre as mesmas parallelas AO, CB.*

DEm. Se as dittas rectas não são parallelas; seja CD, parallela a AO; e continuado qualquer lado AB, do mais baixo triangulo, atè que occorra à ditta parallela em D, ajuntem-se os pontos O, D. Porquanto AO, CD, são parallelas (*Hypoth.*) serão iguaes os triangulos ACO, ADO (*Ant.*) porèm tambem se suppoem iguaes os triangulos ACO, ABO: logo os dous ADO, ABO, são iguaes entre si; isto he, o todo, e a parte, contra o Ax. 9.

PROPOSIÇÃO XLI. *Theor.*

Fig. 62. *O triangulo EBO, posto sobre a mesma, ou igual base EO, e entre as mesmas parallelas EX, ML, com o parallelogrammo EN, he a sua metade.*

DEm. Tire-se a diagonal OM. Os triangulos EMO, EBO, são iguaes entre si (*Prop.* 37.) porèm EMO, he metade do parallelogrammo EN (*Prop.* 34.) logo tambem o serà EBO. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

Deste Theorema, e do Esch da 34. se tira o modo de medir qualquer triangulo EBO; que he multiplicando *do a base por metade da altura; ou a altura por metade da base: v.g. seja a base EO, de 4. palmos, e a altura LX, de 6. serà a area do triangulo de 12. quadrados. A razão he; porque qualquer triangulo EOB, he igual ao triangulo rectangulo EMO* (Prop. 37.) *porèm este, como metade do parallelogrammo rectangulo EN* (Prop. 34.) *mede-se, multiplicando a base EO, por metade da altura ME, ou LX; ou esta por metade daquella* [*como facilmente se infere do Esch. da mesma* 34.] *logo &c.*

Advirta-se que no triangulo rectangulo EMO, os lados, que comprehendem o angulo recto E, são mutuamente altura, e base do mesmo triangulo; como constarà da Def. 3. do l. 6.

PROPOSIÇÃO XLII. *Probl.*

Construir hum parallelogrammo igual a hum triangulo dado EOB; o qual tenha hum angulo igual ao outro dado Q. Fig. 63. 63.

COnstr. Divida-se a base EO, pelo meyo em G, (*Prop.* 10.) e forme-se em G, hum angulo igual ao dado Q (*Prop.* 23.) tire-se do ponto O, huma parallela ao lado GM (*Prop* 31.) e do ponto B, outra parallela à base EO: serà GN, o parallelogrammo, que se pede.

Dem. Tire-se a recta GB. Os triangulos EBG, GBO, são iguaes (*Prop* 37.) logo o triangulo EBO, he duplo de cada hum: porèm o parallelogrammo GN, tambem he duplo de GBO (*Ant.*) logo he igual ao ditto triangulo (*Ax.* 6.) Tem tambem o ditto parallelogrammo o angulo G, igual à Q (*Constr.*) logo &c.

CORO-

COROLLARIO.

PAra se formar hum rectangulo igual ao ditt triangulo; não ha mais, que levantar GM, perpendicular à base.

PROPOSIÇÃO XLIII. *Theor.*

Fig. 64, 65. *Em todo o parallelogrammo BA, os Complementos LE, GF* (Def. 37.) *são iguaes entre si.*

DEm. Os triangulos totaes BDA, BCA, tem todos os lados respectivamente iguaes; e são totalmente iguaes entre si (*Prop*. 34.) porèm, pela mesma razão, tambem são iguaes entre si os triangulos parciaes OEA, OFA; como tambem BLO, BGO: logo, tirando os 4. ultimos dos 2. primeiros, os residuos; isto he, os 2. complementos LE, GF, serão iguaes (*Ax*. 3.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XLIV. *Probl.*

Fig. 65. 65, 65. *Sobre a recta FO, construir hum parallelogrammo igual a hum triangulo dado X; o qual tenha hum angulo igual a outro dado Q.*

COnstr. Continue-se à descripção a recta FO; e forme-se sobre a parte accrescentada hum parallelogrammo OD, igual ao triangulo dado X; o qual tenha hum angulo O, igual ao dado Q (*Prop*. 42.) tire-se pelo ponto F, huma parallela à EO (*Prop*. 31.) à

qual

qual occorra DE, continuada em A: formado assim o parallelogrammo FE, tire-se a diagonal AO, à qual continuada occorra DL, tambem continuada em B; e do ponto B, tire-se outra parallela à FL, àqual occorrão continuadas EO em G, e AF em C: serà o parallelogrammo FG, o que se pede.

Dem. FG, he parallelogrammo (*Constr.*) està formado sobre a recta dada FO: he igual ao parallelogrammo OD (*Ant.*) e por consequencia ao triangulo X (*Constr.*) e finalmente tem o angulo O, igual à Q (*Prop.* 15.) logo, &c.

PROPOSIÇÃO XLV. *Probl.*

Dado hum rectilineo ABC, e a recta PE; construir sobre esta hum parallelogrammo igual àquelle; o qual tenha hum angulo igual a outro dado O. Fig. 66; 66.

COnstr. Tirem-se as rectas BA, BC; e resolva-se o rectilineo dado nos triangulos X, Y, Z. Sobre a recta PE, forme-se hum parallelogrammo PF, igual ao triangulo Z; o qual tenha hum angulo P, igual ao dado O (*Ant.*) Estenda-se PR, á descripção, e forme-se sobre o lado RF, outro parallelogrammo RG, igual àY; e sobre o lado SG, outro SV, igual à X: digo, que PV, he o parallelogrammo que se pede.

Dem. Primeiramente PV, he igual ao rectilineo dado (*Constr.*) he tambem parallelogrammo [o que demonstro: RF, parallela à PE, he tambem parallela à SG; e esta parallela á TV: logo PE, TV, são parallelas (*Prop.* 30.) item PT, he parallela as partes EF, FG, &c. logo tambem a toda a EV] logo, &c. Resta provar que EV, seja huma recta; porèm isto se prova facilmente: porquanto, os angulos EPR, PRF, são iguaes a dous rectos (*Prop.* 27.) porèm EPR, he igual a EFR (*Prop.* 34.)

e PRF,

e PRF, à RFG (*Prop*.27.) logo tambem os dous angulos em F, são iguaes a dous rectos: logo EG, he huma linha recta (*Prop*. 14.) e pela mesma razão toda a EV. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

Deste Theorema se colhe o modo de conhecer o excesso, que tem hum rectilineo X,Y,Z, sobre outro Y,Z: porquanto, formado sobre qualquer recta hum parallelogrammo PV, igual ao rectilineo mayor; e outro PG, igual ao menor; será o residuo SV, o excesso, que se busca.

Fig. 67. *Porém a praxe mais expedita de reduzir qualquer quadrangulo ABCD, a hum rectangulo, he a seguinte, a qual servirà despois para a Prop. 14 do l. 2.*

Divida-se o quadrangulo proposto em dous triangulos ABC, ADC; e tirem-se dos vertices destes as rectas BO, DO, perpendiculares à diagonal AC: divida-se esta pelo meyo em E; e levante-se a perpendicular EV, igual às outras duas BO, DO: digo que o rectangulo VEC, he igual ao quadrangulo ABCD. Consta manifestamente da Prop. 41.

PROPOSIÇÃO XLVI. *Theor.*

Fig. 68. *Sobre a recta AB, construir hum quadrado AD.*

Constr. Levantem-se dos termos da recta dada duas perpendiculares iguaes a ella, AC, BD (*Prop.* 11.) e ajuntem-se os pontos C, D, &c.

Dem. Os angulos A, B, são rectos: logo as rectas AC, BD, são parallelas (*Prop.* 28.) são tambem iguaes entre si (*Constr.*) logo as rectas AB, CD, tambem são iguaes, e parallellas (*Prop.* 33.) logo AD, he hum parallelogrammo

rallelogrammo equilatero: he tambem rectangulo; por têr os angulos oppostos A,D; B,C, iguaes, e rectos (*Prop.* 34.) logo he quadrado (*Def.* 32.) *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XLVII. *Theor.*

Em todo o triangulo rectangulo PBQ, o quadrado do lado PQ, opposto ao angulo recto B, he igual aos dous quadrados juntos dos outros dous lados PB, QB. Fig. 69.

DEm. Tirem-se as rectas BE, PC; e do ponto B, a recta BR, parallela à QE. Os triangulos PQC, BQE, tem os angulos, indicados pelas mesmas letras, iguaes [por serem compostos de dous rectos, e de hum commum] e tem os lados, que comprehendem os dittos angulos, respectivamente iguaes (*Def.* 32.) logo os dittos triangulos são totalmente iguaes (*Prop.* 4.) Estão tambem entre duas parallelas, e tem as mesmas bases, o primeiro com o quadrado QH, e o segundo com o parallelogrammo QR: logo são metades delles (*Prop.* 41.) e por consequencia, o quadrado QH, he igual ao parallelogrammo QR (*Ax.* 6.) Da mesma sorte provarei, que o quadrado PF, he igual ao outro parallelogrammo PR: logo todo o quadrado PE, opposto ao angulo recto B, he igual aos outros dous quadrados QH, PF. *Q. E. &c.*

* Suppuz na demonstração que PH, era huma linha recta: porèm isto se prova facilmente pela 14. por serem os dous angulos em B, rectos.

E S C H O L I O.

Deste Theorema [o qual na Prop. 31. do l. 6. se farà universal para todas as figuras semelhantes] foy inven-

tor Pythagoras; *o qual (como diz* Vitruvio *no l.* 9.) *sacrificou às Musas cem bois; por lhe inspirarem huma tam subtil invenção, como elle suppunha. Que confusão esta para os que temos conhecimento do verdadeiro Deos! Pois recebendo continuamente daquelle Pay das Luzes tantas, e tam vivas illustrações, não fazemos mais, que serrar os olhos para o reconhecimento.*

O uso deste admiravel Theor. he frequentissimo por toda a Geometria. Elle he a chave mestra, com que se abrem os seyos da Quantidade, e se descobrem os segredos das linhas Incõmensuraveis de que trata Euclides *em todo o l.* 10. *Delle parece que teve principio aquelle celebre proloquio, tam decantado nas Escholas dos Antigos Geometras, especialmente de* Plataõ, e Aristoteles: Que o lado do quadrado era incõmensuravel com o seu diametro: *verdade tam patente, que* Plataõ *dizia, era bruto, e não homem, o que a ignorava.*

Alguns suspeitão, que a invenção deste Theor. foy mais casualidade, que industria de Pythagoras; *e que contemplando as proporções destes tres numeros* 3. 4. 5. *e a de seus quadrados; e comparando a com a de outros muitos seus compostos* 6 8 10 * 9. 12 15. *&c viera a dar, tentando, na sua universalidade: porèm não ha razão, porque tiremos esta gloria a hum tam grande Homem. Para prova do muito, que delle se infere, porei aqui tres Problemas, que sobre serem utilissimos, não excedem a capacidade dos principiantes.*

Problema I.

Fig. 70. Dados muitos quadrados, formar hum igual a todos.

70.

D*Em-se v.g. tres quadrados, cujos lados sejão as rectas* 1. 2. 3. *e deseje-se hum igual a todos. Forme-se hum angulo recto* ZDE; *e transfirão-se para os lados delle, de* D *em* P, *e de* D *em* G, *as duas rectas*

mais

mais pequenas 3. 2. ajuntem-se os extremos G, P, com outra recta; e transfira-se esta para qualquer dos lados, de D em Q, e a terceira 1. para o outro lado, de D em L: tornem-se a ajuntar os extremos L, Q, com outra recta; e serà esta o lado do quadrado, igual a todos tres.

Dem. *O quadrado LQ, he igual aos dous DL, DQ* (Ant.) *porém DQ, ou GP, he igual aos dous DG, DP: logo o quadrado LQ, he igual aos tres DL, DG, DP; isto he, aos quadrados de 1. 2. 3. Q. E. &c.*

Problema 2.

Dadas duas rectas desiguaes CD, CE, achar o lado do quadrado, em que o da mayor CD, excede o da menor CE. Fig. 71.

DEscreva-se hum circulo com o intervallo da mayor CD; e transfira-se ao diametro, começando do centro, a menor CE: levante-se do ponto E, huma perpendicular ED, até à circunferencia, e serà esta o lado do quadrado, que se busca.

Dem. *O quadrado CD, he igual aos dous CE, ED* (Ant.) *logo o quadrado ED, he o excesso do quadrado CD, sobre CE.*

Problema 3.

Conhecidos quaesquer dous lados de hum triangulo rectangulo BAC, conhecer o terceiro. Fig. 72.

SEjão 1. conhecidos os lados, que comprehendem o angulo recto; v.g AB, de 8. e AC, de 6. palmos; e deseje-se conhecer a hypotenusa BC. Quadrem-se os numeros 8. e 6. e ajuntem-se os productos 64 e 36. em huma summa 100. serà esta o quadrado do lado BC; e a sua raiz 10. o mesmo lado. Sejão 2. conhecidos os lados, que comprehendem qualquer angulo agudo B; v. g. AB, *de* 8. *e CB, de* 10. *palmos; e deseje-se &c. Quadrem-se os numeros* 8 *e* 10. *e tirese o quadrado menor* 64. *do quadrado mayor* 100. *serà o residuo* 36. *o quadrado do outro lado AC; e a sua raiz* 6. *o mesmo lado. Consta do ditto.*

PROPOSIÇÃO XLVIII. *Theor.*

Fig. 73. *Se no triangulo CBA, o quadrado do lado CA, fôr igual aos quadrados dos outros dous lados CB, AB; o angulo B, opposto ditto lado CA, serà recto.* * He conversa da ant.

DEm. Levante-se do ponto B, a perpendicular BO, igual à BA; e tire-se a recta OC. O quadrado OC, he igual aos dous quadrados CB, OB (*Ant.*) isto he, pela constr. aos dous CB, AB: logo he igual ao quadrado CA (*Ax.* 1.) logo os triangulos OBC, ABC, tem tódos os lados respectivamente iguaes: logo os angulos em B, oppostos a iguaes lados, são iguaes entre si (*Prop.*8. porèm hum he recto pela construcção; logo tambem o outro. *Q. E. &c.*

ELE.

ELEMENTOS DE GEOMETRIA.

LIVRO II.

ESTE LIVRO (DIZ O PADRE Tacquet) *he tam pequeno no corpo, como grande na utilidade, e ſubtileza. Eu o conſidero pelo primeiro fundamento da Algebra; razão porque, ſeguindo o eſtylo do ditto Author, me reſolvi a expollo abſtrahido de figuras; para que jà desde aqui ſe coſtumem os principiantes a conſiderar a Quantidade* in abſtracto, *ao modo dos Analyſtas.*

DEFINIÇÕES.

1 O PARALLELOGRAMMO Rectangulo; ou abſolutamente o Rectangulo ABDC, ſe diz ſer *Comprehendido* de quaeſquer dous lados BA, AC, que formão hum dos ſeus angulos rectos. Fig. 1.

* O Rectangulo, como ſe colhe das Def. 31. e 36. do l. ant. ſe produz do movimento de huma perpendicular

cúlar ſobre outra; iſto he, do lado BA, ſobre o lado AC: ou do lado CA, ſobre o lado AB. Donde, como eſtes dous lados ſão iguaes aos ſeus oppoſtos (*Prop. 34. do l. ant.*) e ou por ſi, ou por elles, formão os 4 angulos da figura; abſolutamente ſe diz ſer o ditto rectangulo *Comprehendido* de quaeſquer dous lados, que formão hum dos ſeus angulos rectos.

Daqui ſe ſegue, que dada huma recta, cortada como quer em hum ponto; para determinar qualquer dos rectangulos, que ſe pòdem formar, ou das ſuas partes, ou da meſma com qualquer dellas; baſtarà nomear 3. letras, com que eſtão notados os ſeus termos e o ponto da ſecção; complicando-as porèm differentemente, ſegundo forem os rectangulos: porquanto com as duas primeiras ſe determinarà hum lado, e com as

Fig. 2. duas ultimas o outro. *Exemplo*. Dê-ſe a recta AB, cortada como quer em C: digo, que o rectangulo ABC he o comprehendido de toda a AB, e da parte BC: o rectangulo BAC, he o comprehendido da meſma toda BA, e da outra parte AC: e o rectangulo ACB ou BCA, he o comprehendido das duas partes.

Do ditto ſe infere, que para ſe determinar qualquer quadrado, dos 3. que ſe pòdem formar; ou de cada huma das partes, ou de toda a recta, baſtarà nomear ſòmente duas letras; como por ſi he manifeſto.

Fig. 64. e 65. do l. 1. 2 *Gnomon*: he o rectilineo LDACGO; ou EDBCFO composto de qualquer dos parallelogrammos, exiſtentes ſobre o diametro, EF, ou LG; e de ambos os complementos LE, GF. Veja-ſe a Def. 37. do l ant.

* Eſta definição he eſcuſada no noſſo methodo; porèm, como hade ſervir no l. 13. a deixo ficar aqui, aonde a poz *Euclides*.

NOTA

NOTA.

E Ste ſignal $\{$ Significa *conjunção, ou alligação de algumas quantidades.*
Rect. ou RRect. Significa *rectangulo, ou rectangulos.*
Quad. ou QQuad. Significa *quadrado, ou quadrados.*

* Quanto às citações deſte livro; como tambem dos ſeguintes, ſe advirta, que aonde ſe achar hum ſó numero entre parentheſis, he citação de alguma propoſição do meſmo livro; porèm aonde ſe acharem dous, diſtinctos com hum pontinho; o primeiro he citação da Prop e o ſegundo do livro, aonde ella pertence: v.g. (47. 1.) quer dizer pela 47. do l. 1.

PROPOSIÇÃO I. *Theor.*

Fig. 1.

Dadas duas rectas BA, AC, a primeira inteira, e a ſegunda cortada em quaeſquer partes AX, XZ, ZC: ſerà o Rect. BAC, comprehendido da inteira, e da cortada, igual a todos os rectangulos juntos, comprehendidos da meſma inteira, e de cada huma das partes da cortada, BAX: BA,XZ: BA,ZC.

D *Em.* Levantem-ſe das ſecções X, Z, as perpendiculares XO, ZO; e formem-ſe os rectangulos BX, OZ, OC.

O Rect. BAC, he igual aos RRect. $\left\{\begin{array}{l}\text{BAX}\\ \text{OXZ}\\ \text{OZC.}\end{array}\right.$

(Por ſer o todo igual a todas as ſuas partes juntas.) Porèm as perpendiculares OX OZ, ſão iguaes à AB (*Def.* 36. 1.) logo, ſubſtituindo eſta por cada huma daquellas

quellas serà o Rect. BAC, igual aos RRect. { BAX
BA,XZ
BA,ZC
Q.E.&c.

ESCHOLIO.

AS 10. *primeiras proposições, todas se podem explicar por numeros; e o exemplo se porà abaixo na Prop. 8.*

PROPOSIÇÃO II. *Theor.*

Fig. 2. *Dada a recta AB, cortada como quer em C; serão os dous rectangulos ABC, BAC; comprehendidos da toda, e de cada huma das partes, iguaes ao quadrado da mesma toda AB.*

DEm. Tome-se a recta D, igual à AB. O Rect. D, AB, he igual aos RRect. { D,AC (*Ant.*)
D,CB.

Logo substituindo AB, pela sua igual D, serà o Quad. AB, igual aos RRect. { BAC
ABC. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO III. *Theor.*

Fig. 3. *Dada a recta BA, cortada como quer em C; serà o rectangulo BAC, comprehendido da toda, e de qualquer das partes CA, igual ao rectangulo das partes BCA, junto com o quadrado da mesma parte CA.*

DEm. Tome-se a recta D, igual à AC. O Rect. D,BA, he igual aos RRect. { D,BC (1.)
D,CA.

Logo substituindo CA, pela sua igual D, serà o Rect. BAC, igual ao { Rect. BCA
Quad. CA. *Q.E.&c.*

PROPO-

PROPOSIÇÃO IV. *Theor.*

Dada a recta AB, cortada como quer em C; será o quadrado da toda igual aos dous quadrados das partes AC, CB, juntamente com dous rectangulos das mesmas partes ACB. Fig. 4.

DEm. O Quad. AB, he igual aos dous RRect.
{ ABC (2.)
{ BAC.

Porém o Rect. ABC, he igual ao { Rect. ACB (3.)
{ Quad. CB.

e o Rect. BAC, he igual ao { Rect. BCA (3.)
{ Quad. AC.

Logo o Quad. AB, he igual ao { Quad. AC
{ Quad. CB
{ 2. RRect. ACB, BCA.

isto he ao mesmo, tomado duas vezes. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO V. *Theor.*

Dada a recta AB, cortada igualmente em O, e desigualmente em C; será o rectangulo das partes desiguaes ACB, juntamente com o quadrado da parte intermedia OC, igual ao quadrado da metade da recta dada OB. Fig. 5.

DEm. O Rect. ACB, he igual aos RRect.
{ AO, CB (1.)
{ OCB.

Porém, pela igualdade das rectas AO, OB, o Rect. AO, CB, he igual ao Rect. OBC; e este ao Rect.

 OCB,

OCB, juntamente com o Quad.CB (3.)

Logo o Rect.ACB, he igual à $\left\{\begin{array}{l}\text{2. RRect. OCB}\\ \text{Quad. CB.}\end{array}\right.$

Logo, accrefcentando a ambas as partes o Quad. OC

ferà o $\left\{\begin{array}{l}\text{Rect. ACB}\\ \text{Quad. OC.}\end{array}\right.$ igual à $\left\{\begin{array}{l}\text{2. RRect. OCB}\\ \text{Quad. CB}\\ \text{Quad. OC.}\end{array}\right.$

isto he, ao Quad. OB (4.) *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO VI. *Theor.*

Fig. 6. *Se â recta CE, cortada pelo meyo em O, fe lhe accrefcentar outra recta EA; ferà o rectangulo CAE, comprehendido da compofta CA, e da accrefcentada EA, juntamente com o quadrado da metade da dada OE, igual ao quadrado da compofta da metade da mefma dada, e da accrefcentada OA.*

DEm. Tome-fe da outra parte da recta dada a recta BC, igual a EA. Confta da Conftr. que BO, he igual a OA; e que BA, eftà cortada igualmente em O, e defigualmente em E.

Logo $\left\{\begin{array}{l}\text{o Rect. BEA}\\ \text{Quad. OE.}\end{array}\right.$ fão iguaes ao Quad. OA (*Ant.*)

Porém, pela igualdade das rectas BE, CA, o Rect. BEA, he igual ao Rect. CAE.

Logo $\left\{\begin{array}{l}\text{o Rect. CAE}\\ \text{Quad. OE.}\end{array}\right.$ fão iguaes ao Quad. OA. *Q.E.&c.*

PROPO-

Logo, accrescentando a ambas as partes 2. RRect. AOB, serão

2. RRect. AOB	iguaes à	2. RRect. AOB
Quad. OB		2. RRect. BOC
Quad. OC, ou AO.		Quad. CB.

(isto he o Quad. AB (4.)

isto he (pela igualdade dos rectangulos BOC, AOB) ao mesmo Rect. AOB, tomado 4. vezes, juntamente com o Quad. CB. *Q. E. &c.*

Exemplo: seja AC, 10. e CB, 4. Serà o Rect. AOB, 45. que tomados 4. vezes fazem 180. e serà o Quad. CB, 16. que juntos àquella summa fazem 196. Porèm destes mesmos consta o Quad. de toda a composta AB. 14. logo &c.

ESCHOLIO.

EUclides *propoem este Theorema de outra sorte. Se à recta OB, cortada como quer em C, se lhe accrescentar AO, igual à qualquer das partes OC: serà o rectangulo AOB, da dada, e da accrescentada, tomado 4. vezes, junto com o Quad. CB, da outra parte, igual ao Quad. de toda a composta AB.*

PROPOSIÇÃO IX. *Probl.*

Fig. 9. *Dada a recta BA, cortada igualmente em O, e desigualmente em C; serão os quadrados das partes desiguaes BC, CA, duplos dos quadrados da metade BO, e da parte intermedia OC.*

DEm. O Quad. BC, he igual à { 2. RRect. BOC (4.) / Quad. BO / Quad. OC.

Logo,

Logo, accrescentando a ambas as partes 2. RRect. AOB, serão { 2. RRect. AOB iguaes à { 2. RRect. AOB
{ Quad. OB { 2. RRect. BOC
{ Quad. OC, ou AO. { Quad. CB.
(isto he o Quad. AB (4.)

isto he (pela igualdade dos rectangulos BOC, AOB) ao mesmo Rect. AOB, tomado 4. vezes, juntamente com o Quad. CB. *Q.E.&c.*

Exemplo: seja AC, 10. e CB, 4. Será o Rect. AOB, 45. que tomados 4. vezes fazem 180. e será o Quad. CB, 16. que juntos àquella summa fazem 196. Porèm destes mesmos consta o Quad. de toda a composta AB. 14. logo &c.

ESCHOLIO.

EUclides *propoem este Theorema de outra sorte. Se à recta OB, cortada como quer em C, se lhe accrescentar AO, igual à qualquer das partes OC: será o rectangulo AOB, da dada, e da accrescentada, tomado 4. vezes, junto com o Quad. CB, da outra parte, igual ao Quad. de toda a composta AB.*

PROPOSIÇÃO IX. *Probl.*

Fig. 9. *Dada a recta BA, cortada igualmente em O, e desigualmente em C; serão os quadrados das partes desiguaes BC, CA, duplos dos quadrados da metade BO, e da parte intermedia OC.*

DEm. O Quad. BC, he igual à { 2. RRect. BOC (4.)
{ Quad. BO
{ Quad. OC.

Logo,

Logo, accreſcentando à ambas as partes o Quad. CA, ſeráo os QQuad. { BC
{ CA.
iguaes à { 2. RRect. BOC, ou AOC
{ Quad. BO
{ Quad. OC
{ Quad. CA.
Porèm os 2. rectangulos AOC, juntamente com o Quad. CA, ſão iguaes aos 2. quadrados OA, OC (7.) iſto he, pela igualdade dos lados, aos 2. quadrados BO, OC. Logo, ſubſtituindo eſtes por aquelles, ſerão os QQuad. { BC iguaes à { 2.QQuad. BO
{ CA. { 2.QQuad OC.
iſto he, ſerão duplos de hum, e outro. *Q.E. &c.*

PROPOSIÇÃO X. *Theor.*

Se â recta EC, cortada pelo meyo em O, ſe lhe accreſcentar outra recta CB; ſerão os quadrados da compoſta EB, e da accreſcentada CB, duplos dos quadrados da metade da dada EO, e da compoſta da metade, e da accreſcentada OB. Fig. 10.

DEm. Accreſcente-ſe da outra parte AE, igual à CB. Conſta da Conſtr. que toda a AB, eſtâ cortada pelo meyo em O, e não pelo meyo em C. Logo os QQuad. { AC
{ CB.
ſão iguaes à { 2.QQuad. AO (*Ant.*)
{ 2.QQuad. OC.
Porèm o Quad. AC, he igual ao Quad. EB; o Quad. AO, igual ao Quad. OB; e o Quad. OC, igual ao Quad. EO: logo, ſubſtituindo eſtes por ſeus iguaes, ſerão

ferão os QQuad. $\begin{cases} EB \\ CB \end{cases}$ iguaes à $\begin{cases} 2 \text{ QQuad. } O\ldots \\ 2 \text{ QQuad. } E\ldots \end{cases}$

isto he, ferão duplos de hum, e outro. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XI. *Probl.*

Fig. 11. *Dada a recta CD, cortalla de tal forte e… O, que seja o rectangulo CDO, compr… hendido da toda, e de huma das partes OD… igual ao quadrado da outra parte CO.*

CONftr. Levante-fe do ponto C, a perpendicul… CA, igual à CD, e corte-fe pelo meyo em L… ajuntem-fe os pontos L, D, e tome-fe na AC, produzi… da, LE igual à LD; e na dada CD, o fegmento C… igual à CE. Digo que o ponto O, he a fecção, que… pede.

Dem. Forme-fe fobre a recta dada o Quad. CB… e fobre o fegmento CO, o Quad. CF; e produzida… parallela FO, o Rect. AF. Porquanto â recta AC, co… ta la pelo meyo em L, fe lhe accrefcentou a recta CE… ferà o $\begin{cases} \text{Rect. AEC} \\ \text{Quad. LC,} \end{cases}$ igual ao Quad. LE, ou LD (6,…

isto he, aos QQuad. $\begin{cases} \text{CD} \\ \text{LC.} \end{cases}$ (47. 1.)

Logo tirando de ambas as partes o Quad. commu… LC, ficarà o Rect. AEC; isto he AF, igual ao Qua… CD, isto he CB: logo tirando outra vez de ambas… partes o Rect. commum AO, ficarà o Rect. OB, igual ao Quad. CF; isto he, o Rect. CDO, compre-hendido da toda, e de huma das fuas partes OD, igual ao Quad. da outra parte CO. *Q. E. &c.*

ESCHO-

ESCHOLIO.

Esta Prop. a qual verdadeiramente he admiravel, e de muito uso na Geometria, não se pòde explicar por numeros; nem inteiros, nem quebrados. Veja-se a Prop. 30. do l. 6.

PROPOSIÇÃO XII.

Em todo o triangulo FOB, o quadrado do lado FB, opposto ao angulo obtuso O, excede aos dous quadrados dos outros dous lados FO, BO, em dous rectangulos BOH, comprehendidos de qualquer dos dittos lados BO, e da recta OH, intercepta entre o ditto angulo obtuso, e a perpendicular FH, tirada do angulo opposto ao mesmo lado produzido. *O mesmo se entende, se se produzir o outro lado FO, e se tirar a perpendicular do angulo B. Fig. 12.

Dem. O Quad. FB, he igual aos QQuad. $\left\{\begin{array}{l}\text{FH (47. 1.)}\\ \text{HB.}\end{array}\right.$

Porèm o Quad. HB, he igual ao $\left\{\begin{array}{l}\text{Quad. HO (4.)}\\ \text{Quad. BO}\\ \text{2. RRect. BOH.}\end{array}\right.$

Logo, substituindo estes por aquelle, serà o Quad. FB, igual ao $\left\{\begin{array}{l}\text{Quad. FH}\\ \text{Quad. HO}\end{array}\right.$; isto he, ao Quad. FO (47. 1.)

$\left\{\begin{array}{l}\text{Quad. BO}\\ \text{2. RRect. BOH.}\end{array}\right.$

isto he, excederà aos dittos quadrados FO, BO, em 2. rectangulos BOH. *Q. E. &c.*

PROPO-

PROPOSIÇÃO XIII. *Theor.*

Fig. 13. e 14. *Em todo o triangulo BCA, o quadrado do lado BA, opposto a qualquer dos angulos agudos C, he excedido dos quadrados dos outros dous lados BC, AC, em 2. rectangulos ACO, comprehendidos de qualquer dos dittos lados AC, e da recta CO, intercepta entre o ditto angulo agudo, e a perpendicular BO, tirada do angulo opposto ao mesmo lado, produzido quando seja necessario.** Se a ditta perpendicular cahir dentro do triangulo, he CO, parte de AC; se fóra, como na figura 15. he AC, parte de CO.

DEm. Os QQuad. { AC
CO.
são iguaes à { 2. RRect. ACO (7.
Quad. OA.

Logo, accrescentando a ambas as partes o Quad. BO, serão os QQuad. { AC; isto he, os QQuad. { AC (47. 1.)
CO BC.
BO,

iguaes à { 2. RRect. ACO
Quad OA
Quad. BO.

isto he à { 2. RRect. ACO (47. 1.)
Quad. BA.

Logo o Quad. BA he excedido dos QQuad. BC, AC, em dous rectangulos ACO. *Q. E. &c.*

COROL.

COROLLARIO.

DO mesmo modo se demonstra, quando a perpendicular cahe fora do triangulo, como na Figura 15.

ESCHOLIO.

DEstas duas Proposições, e da 47. do l. 1. (com quem ellas tem muita connexão) se tira o modo de medir a area de qualquer triangulo BCA, *cujos lados sejão conhecidos. He sem duvida, que a ditta area se produz da multiplicação da base pela metade da altura; ou da altura pela metade da base, como se colhe facilmente da Prop. 41. do mesmo livro: donde toda a difficuldade està, em conhecer a ditta altura; isto he, tomado por base do triangulo qualquer lado conhecido AC, conhecer a perpendicular BO, que cahe sobre ella do angulo opposto: porèm esta se conhece assim.* Fig. 13. 14. 15. Fig. 14.

Supponhamos, que o ditto angulo B, he agudo (o que se sabe facilmente, comparando o quadrado da base com os dous dos lados; segundo o que dissemos nas duas Proposições antecedentes.) Tire-se o quadrado do lado AB, dos quadrados dos lados BC, AC; e serà o residuo igual à dous rectangulos ACO (Ant.) *logo, dividindo a metade deste residuo (isto he, hum Rect. ACO) pelo lado AC, conhecido, ficarà conhecida a recta* CO (Escho. da 34.) *Conhecida esta, tire-se o Quad. CO, do Quad. BC, e serà o residuo o Quad. BO* (47. 1.) *cuja raiz he a perpendicular, que se busca. Esta, como digo, multiplicada pela metade do lado AC, sobre quem cahe; ou todo o lado pela metade della, darà a area do triangulo ACB.* O mesmo se entende, quando a perpendicular cahe fora do triangulo; o que succede quando o quociente CO, he mayor, que o lado AC.* Fig. 15

Fig. 14. *Exemplo por numeros: seja o lado AC, de 14 palm. BC de 15. e AB de 13. e deseje-se saber de quantos palmos quadrados consta o triangulo ACB. He sem duvida, que o Quad. AC, consta de 196. palmos; BC de 225. e AB de 169. e que abatendo este ultimo dos dous primeiros, serà o residuo 252. cuja metade 126. dâ o Rect. ACO: porèm este numero partido por 14. dâ 9. logo a recta CO, consta de 9. palmos. Abata-se agora o Quad. de 9. do Quad. de 15. isto he, 81. de 225. isto he, o Quad. CO, do Quad. BC; e serà o residuo; isto he, o Quad. BO, de 144. palmos, cuja raiz 12. são os palmos da perpendicular BO. Multipliquem-se pois 6. por 14. ou 12. por 7. (isto he, a metade de BO, por AC; ou a metade de AC, por BO) e serà o producto 84. o numero dos palmos quadrados, de que consta a area do triangulo ACB. &c.*

Para exercicio dos principiantes puz tambem numeros na Figura 12. dos quaes se infere, ter a perpendicular FH 12. palmos; e a area do triangulo FOB 66. quadrados.

PROPOSIÇÃO XIV. *Probl.*

Fig. 16. 36. *Dado o rectilineo OCAD, construir hum quadrado igual a elle.*

CONSTR. Forme-se hum rectangulo DB, igual ao rectilineo dado (45.1.) Se os 2. lados conjuntos DA, DC, forem iguaes, serà o rectangulo DB, o quadrado que se pede: senão, produza-se o lado mayor BC, atè que CG, seja igual ao menor CD; e dividida a recta BG, pelo meyo em O, descreva-se o semicirculo BEG; e produza-se DC, atéque occorra â circunferencia em E. Digo que o quadrado CE, he o que se pede.

Dem. Tire-se o rayo OE. Por quanto BG, està cortada

cortada igualmente em O, e desigualmente em C, serà
{ o Rect.BCG, igual ao Quad. OG, ou OE (5.)
{ Quad. OC.
isto he, aos QQuad. { CE
{ OC.
Logo tirando o Quad.commum OC, serà o Rect.BCG; isto he, DB (*Constr.*) igual ao Quad. CE. *Q. E. &c.*

E S C H O L I O.

P*Ara se reduzir mais facilmente o rectilineo ao rectangulo, veja-se o Esch. da mesma* 45. *citada.*

ELEMENTOS DE GEOMETRIA.

LIVRO III.

DOS PARADOXOS, QUE OBSERvou Aristoteles *na geraçaõ do Circulo, tocamos alguma cousa na Definiçaõ 18. do l. 1. Dos mysterios (verdadeiramente admiraveis) que observou* Galileo *na sua rotaçaõ, fallaremos mais largamente no ultimo l. da Geometria Practica. Neste tratarey sómente com* Euclides *das suas propriedades, o qual he como hum preludio da Doutrina da Esfera; como aquella, que por qualquer parte que se corte, toda se resolve em circulos, como ensina* Theodosio. *As suas proposições mais admiraveis saõ as 16. 20. 21. 22. 31. 35. e 36. das quaes procedem as invenções de tantos, e tão engenhosos instrumentos, de que usa a Geometria Practica, e a Astronomia.*

DEFINIÇÕES.

1 CIRCULOS *iguaes*: são os que tem os diametros, ou semi-diametros iguaes.

2 A re-

Fig. 15. 2 A recta AB, se diz *Tocar* o circulo DOQ: quando de tal sorte lhe occorre em D, que continuada não o corta.

Fig. 12. 13. 3 Os circulos se dizem *Tocarse*: quando occorrendo hum ao outro; ou pela parte de dentro em A, ou de fora em O, não se cortão.

Fig. 17. 4 As rectas AD, BE, se dizem *Distar igualmente do centro de qualquer circulo*: quando as perpendiculares CO, CQ, tiradas do mesmo centro, são iguaes entre si.* E aquella distarà mais, cuja perpendicular CS, for mayor. Fig. 18.

Fig. 1. 5 *Segmento do circulo*: he a porção ADB, ou AEB, a quem corta a recta AB, a qual não passa pelo centro.* O segmento mayor he o que enserra em si o ditto centro; o menor he o que o exclue.

Fig. 1. 6 *Angulo do segmento*: he o angulo mixtilineo BAE; ou BAD, a quem comprehende a ditta recta, com qualquer das partes da circunferencia cortada.

Fig. 28. e 29. 7 *Angulo no segmento*: he o angulo ABD, a quem comprehendem duas rectas, tiradas dos extremos da secção AD, a qualquer ponto B, do arco cortado.

8 Este mesmo angulo se diz *Existir* no segmento ABD, aonde tem o vertice: *e Insistir* no segmento opposto AED, aonde estriba os lados.

Fig. 28. e 29. 9 *Sector de hum circulo*: he a porção ACD, comprehendida de dous semidiametros CA, CD, e do arco intercepto AED; ou seja mayor, ou menor que a semi-circunferencia, com tanto, que não seja igual.

10 *Segmentos semelhantes*: são os que comprehendem, ou sobre que insistem angulos iguaes.

PROPOSIÇÃO I. *Probl.*

Dado hum circulo, achar-lhe o centro.

Fig. 1. CONstr. Tire-se dentro do circulo dado qualquer recta AB, e corte-se pelo meyo em O, (10.1.) tire-

tire-se pelo ponto O, a perpendicular ED (11. 1.) e corte-se pelo meyo em C. Digo que este he o centro, que se busca.

Dem. Se o ditto centro està em ED, claro està que não pòde ser outro, que o ponto C: se està fora, v.g. em Q, tirem-se as rectas QA, QO, QB. Os triangulos QAO, QBO, tem todos os lados respectivamente iguaes [por quanto QA, QB, são rayos do mesmo circulo; AO, BO, são iguaes pela construcção; e QO, he comum] logo os angulos QOA, QOB, oppostos a iguaes lados, são iguaes (8. 1.) e por consequencia rectos (*Def.* 14. 1.) Porèm tambem são rectos os angulos EOA, EOB (*Constr.*) logo huns rectos são mayores que outros, contra o Ax. 10.

ESCHOLIO.

Facilmente se acha o centro de hum circulo com huma esquadra, se se applica o vertice desta a qualquer ponto da circunferencia F, e se notão os pontos D E, em que os lados a cortão: porquanto, tirada a recta DE, e cortada pelo meyo em C; serà este o centro, que se busca. Fig. 2.

A Dem. constarà a baxo da Prop. 31.

PROPOSIÇÃO II. *Theor.*

Se na circunferencia de hum circulo se tomarem dous pontos A, B, e se tirar huma recta de hum ao outro; toda esta cahirà dentro do ditto circulo. Fig. 3.

Dem. Consta manifestamente da Def. da linha recta, segundo *Arquimedes*: porèm pode-se demonstrar assim. Tome-se na recta AB, qualquer ponto O, to O, e tirem-se do centro as rectas CA, CO, CB. Porquanto as rectas CA, CB, são rayos do mesmo circulo, serão iguaes os angulos A, B (5. 1.) porèm o angulo externo COB, he mayor que o interno A (*Cor. 1. da* 32. 1.) logo tambem he mayor que B: logo no triangulo Z, o lado CB, opposto ao mayor angulo, he mayor que OC, opposto ao menor (19. 1.) Porèm BC, chega desde o centro precisamente atè a circunferencia: logo CO, ficarà aquèm; e por consequencia todos os pontos da recta AB, cahem dentro do circulo. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO III. *Theor.*

Fig. 3. *Se dentro de hum circulo qualquer recta DE, que passe pelo centro, cortar pelo meyo outra recta AB, que não passe por elle; farà com ella angulos rectos. E se os fizer, a cortarà pelo meyo.*

DEm. 1. part. Tirem-se do centro C, os rayos CA, CB. Os triangulos X, Z, tem todos os lados respectivamente iguaes, como he manifesto; logo os angulos em O, oppostos a iguaes lados, são iguaes (8. 1.) e por consequencia rectos (*Def.* 14. 1.) *Q. E. &c.*

2. Part. Os triangulos X, Z, são rectangulos em O (*Hyp.*) logo o Quad. CA, he igual aos QQuad. $\begin{cases} CO \\ AO. \end{cases}$

e o Quad. CB, aos QQuad. $\begin{cases} CO \text{ (47. 1.)} \\ OB. \end{cases}$

Porèm o Quad. CA, he igual ao Quad. CB, pela igualdade dos rayos: logo as duas summas são entre si iguaes; e por consequencia, tirado o Quad. commum CO, os remanentes AO, OB, serão iguaes. *Q. E. &c.*

PROPO-

PROPOSIÇÃO IV. *Theor.*

Se dentro de hum circulo ſe cortarem duas re- Fig. 3.4.
ctas AB, ED; não ſe cortarão mutuamente pelo meyo, ſenão no cazo, em que paſſem ambas pelo centro.

DEm. Se huma ED, paſſar pelo centro, e a outra AB, não; claro eſtà que a ſegunda não pòde cortar pelo meyo a primeira. E ſe nem huma, nem outra paſſar pelo centro, tire-ſe delle à ſecção commua a recta CO: logo (*pela Ant.*) ambos os angulos COD, COB, ſão rectos; e por conſequencia a parte he igual ao todo: o que he abſurdo, &c. Fig. 3. Fig. 4.

PROPOSIÇÃO V. e VI. *Theor.*

Os circulos que ſe cortão, ou tocão pela parte de dentro, não pòdem ter o meſmo centro. Fig. 6.7.

DEm. Seja, ſe for poſſivel, o ponto C, centro cõmum de ambos: logo tirado hum rayo CX, ou â ſecção, ou ao contacto X, e outro CZ, a qualquer differente ponto; ſerão as rectas CO, CZ, ambas iguaes à meſma CX, por ſerem rayos de hum meſmo circulo: logo ſerão iguaes entre ſi; iſto he, a parte ao todo: o que he abſurdo.

PROPOSIÇÃO VII. *Theor.*

Fig. 8. *Se dentro de hum circulo se tomar qualquer ponto O, diverso do centro, do qual se tirem quaesquer rectas OE, OQ, OB, â circunferencia; serà 1. a mayor de todas a que passar pelo centro OB: 2. a menor, a que com ella integra o diametro OG: 3. a mayor das intermedias, a que estiver mais perto do ditto diametro; isto he, serà OQ, mayor que OE: 4. e daquelle ponto não se poderão tirar mais que duas rectas iguaes.*

D*Em.* 1. part. Compare-se OB, com OQ, e tire-se o rayo CQ. Porquanto CQ, CB, são iguaes, acrescentada a commua OC, serão as duas OC, CQ, iguaes a OB: porèm OC, CQ, são mayores que OQ (20. 1.) logo tambem OB. O mesmo se entende de qualquer outra: logo &c.

2. Part. Compare-se OG, com OE, e tire-se o rayo CE. Por quanto CE, CG, são iguaes; e CE, he menor que as 2. juntas CO, OE (20. 1.) tambem CG, serà menor que ellas: logo tirada a parte commua CO, ficarà OG, menor que OE. &c.

3. Part. Nos triangulos OCQ, OCE, os lados OC, CQ, são iguaes respectivamente aos lados OC, CE: porém o angulo comprehendido dos primeiros, he mayor que o comprehendido dos segundos: logo tambem a base OQ, he mayor que a base OE (24. 1.) O mesmo se entende das de mais. &c.

4. Part. Consta da ant. porquanto, se se podessem tirar tres iguaes OE, OA, OD, ficarião duas iguaes para a mesma parte, contra o demonstrado na 3. part.

PRO-

PROPOSIÇÃO VIII. *Theor.*

Se de qualquer ponto B, tomado fora de hum circulo, se tirarem quaesquer rectas à circunferencia BO, BQ, BE, &c. Serà 1. a mayor de todas a que passar pelo centro BO, e terminar no concavo da ditta circunferencia. 2. Das outras serà sempre a mayor a que estiver mais perto desta. 3. Fora do circulo serà a menor a que terminar no convexo, e produzida passar pelo centro. 4. E das outras, que terminarem no mesmo convexo, serà sempre a menor a que estiver mais perto desta. 5. Finalmente do ditto ponto não se poderão tirar mais que duas rectas iguaes, ou terminem no concavo, ou no convexo. Fig. 9. Fig. 10.

DEm 1. part. Tire-se do centro C (*Fig.* 9.) a recta CQ. Porquanto CQ, CO, são iguaes; accrescentada a commua BC, serão as duas BC, CQ, iguaes a BO: porèm BC, CQ, são mayores que BQ (20. 1.) logo tambem BO, &c.

2. Part. Tire-se do mesmo centro a recta CE. Os lados BC, CQ, são iguaes respectivamente aos lados BC, CE: porém o angulo comprehendido dos primeiros he mayor que o angulo comprehendido dos segundos: logo tambem a base BQ, he mayor que a base BE (24. 1.) &c.

3. Part. Tire-se a recta CQ (*Fig.* 10.) os dous lados BQ, QC, são mayores que o terceiro BC (20. 1.) porèm QC, OC, são iguaes: logo tirando estes daquelles, ficarà BO, menor que BQ, &c.

4. Part. Tire-se as recta BE, e o rayo EC. Os dous lados BQ, QC, são menores que os outros dous BE,

EC (21. 1.) porèm os dous QC,EC, ſão iguaes : logo tirando eſtes da quelles, ficarà BQ, menor que BE, &c.

A 5. part. conſta claramente da antecedente.

PROPOSIÇÃO IX. *Theor.*

Fig. 8. *Se de hum ponto C, dentro de hum circulo, ſe tirarem mais que duas rectas iguaes à circunferencia; o ditto ponto ſerà o centro.*

DEm. Conſta da 4. part. da Prop. 7.

PROPOSIÇÃO X. *Theor.*

Fig. 11. *Hum circulo não pòde cortar a outro, mais que em dous pontos.*

DEm. Corte-o, ſe for poſſivel, em tres E,B,A. He ſem duvida, que os dittos pontos ſão communs à ambas as circunferencias: logo ſe do centro C, de qualquer circulo, ſe tirarem tres rayos aos dittos tres pontos, darſehão tres rectas iguaes, tiradas de hum meſmo ponto à circunferencia do outro circulo: logo (*pela Ant.*) ſerà tambem centro delle, contra o demonſtrado na Prop. 5.

PROPOSIÇÃO XI. *Theor.*

Se dous circulos ſe tocarem pela parte de dentro; a recta, que paſſar por ambos os centros C, E, paſſará tambem pelo contacto A. Fig. 12.

DEm. Se não paſſa: ſejão os centros C, V (o primeiro mayor, e o ſegundo do menor circulo) e corte a recta CV, à ambos os circulos nos pontos O, L. Tirem-ſe de ambos os centros a hum meſmo ponto do contacto os rayos CA, VA. As rectas VA, VO, ſão iguaes entre ſi, por ſerem rayos do meſmo circulo: logo accreſcentada a commua CV, ſerão CV, VA, iguaes a CO, e menores que COL: porèm CA, tambem he menor, que CV, VA (20. 1.) logo ſerà muito menor que COL; contra a Def. do circulo, &c.

PROPOSIÇÃO XII. *Theor.*

Se dous circulos ſe tocarem pela parte de fora; a recta que paſſar por ambos os centros G, C, paſſarà tambem pelo contacto O. Fig. 13.

DEm. Senão paſſa: ſejão os centros A, B; e corte a recta AB, os dous circulos, deixando entre hum, e outro a parte Q. Tirem-ſe de ambos os centros a hum meſmo ponto do contacto os rayos AO, BO. Eſtas duas rectas juntas ſão mayores, que AB (20. 1.) porèm, por ſer AO, igual a AQ, e BO, igual a BQ, devião ſer iguaes; e ainda menores, ſendo Q, alguma parte: logo, ſeriào mayores, e menores a reſpeito do meſmo: o que he abſurdo.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XIII. *Theor.*

Os circulos que ſe tocão, ou ſeja pela parte de dentro, ou pela de fóra, tocão-ſe ſómente em hum ponto. E em hum ſó ponto ſe toca tambem hum circulo com huma recta.

Fig. 14. DEm. 1. part. Supponhamos 1. que ſe tocão pela parte de dentro por todo o arco LA. Tire-ſe huma recta pelos dous centros C,E, atè o contacto A (11.) e tirem-ſe outras duas dos meſmos centros, a outro qualquer ponto L, do meſmo contacto. As rectas EL,EA, ſão iguaes entre ſi: logo accreſcentada a commua CE, ſerão as duas CE,EL, iguaes a CA: porèm eſtas meſmas ſão mayores que CL (20. 1.) logo tambem o ſerà CA; contra a Def. do circulo.

Fig. 15. Supponhamos 2. que ſe tocão pela parte de fora em todo o arco QO. Tire-ſe huma recta pelos dous centros C,G, a qual paſſe pelo contacto O (12.) e tirem-ſe outras duas dos meſmos centros a outro qualquer ponto Q, do meſmo contacto. As rectas CQ, GQ, ſão mayores que CG (20.1.) porèm ſe o ponto Q, foſſe commum a ambas as circunferencias, houverão de ſer iguaes: logo &c.

Fig. 15. 2. Part. Toque o circulo DOQ, ſe for poſſivel, a recta AB, em toda a parte HL. Tirem-ſe do centro C, a quaeſquer dous pontos H,L, do ditto contacto duas rectas: ſerà o triangulo HCL, iſóſceles: logo os angulos ſobre a baſe LHC,HLC, ſerão agudos (*Cor.* 11. *da* 32. 1.) logo tirada do meſmo centro a perpendicular CD, cahirà eſta dentro do meſmo triangulo (*Cor.* 3. *da meſma*) logo o lado CL, oppoſto ao mayor angulo, ſerà igual ao lado CD, oppoſto ao menor; contra o demonſtrado na 19. do 1.

CORO-

COROLLARIO.

OS circulos, que tem differentes centros em huma mesma recta; e a cortão em hum mesmo ponto O; todos se tocão no mesmo ponto. Fig. 16.

PROPOSIÇÃO XIV. *Theor.*

Dentro de hum circulo as rectas iguaes AD, BE, distão igualmente do centro. E as que distão igualmente do centro, saõ iguaes. Fig. 17.

DEm. 1. part. Tirem-se do centro C, as rectas CO, CQ, perpendiculares âs rectas dadas, e tirem-se os rayos CA, CB. Nos triangulos rectangulos COA, CQB, os lados oppostos aos angulos rectos CA, CB, saõ iguaes; como tambem os lados OA, QB. (3. *deste, e Ax.* 6. 1.) logo os seus quadrados são respectivamente iguaes. Porém o quadrado CA, he igual aos QQuad. OA, CO; e o Quad. CB, aos QQuad. QB, CQ (47. 1.) logo, tirando de iguaes summas os QQuad. iguaes OA, QB, ficarão iguaes os outros QQuad. CO, CQ; e por consequencia serão iguaes as distancias das rectas dadas. *Q. E. &c.*

2 Part. Demonstra-se quasi do mesmo modo.

PROPOSIÇÃO XV.

De todas as rectas, que se tirão dentro de hum circulo, a mayor he o diametro: e das outras a mayor, he a que està mais perto do centro. Fig. 18.

DEm. 1. part. Seja qualquer recta BE, distinta do diametro; e tirem-se os rayos CB, CE: estes

juntos

juntos ſão iguaes ao diametro, e mayores que BE (20.1.) logo, &c.

2. Part. Seja AD, mais proxima ao centro que PQ; iſto he, tiradas do centro as perpendiculares CV, CS, ſeja a primeira menor que a ſegunda (*Def.*4.) Digo que AD, he mayor que PQ. Tome-ſe CO, igual a CV; e tire-ſe pelo ponto O, a perpendicular BE: ſerà eſta igual a AD (*Ant.*) porèm BE, he mayor que PQ; por ſerem os lados BC, EC, iguaes aos lados PC, QC, e o angulo comprehendido dos primeiros, mayor que o angulo comprehendido dos ſegundos (24.1.) logo tambem AD, he mayor que PQ. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XVI. *Probl.*

Fig. 19. *Se pelo extremo E, do diametro de qualquer circulo, ſe tirar huma perpendicular DB; cahirâ eſta toda fora do ditto circulo. E do meſmo extremo não ſe poderà tirar outra recta EA, entre a perpendicular, e a circunferencia, ſem que corte o meſmo circulo.*

DEm. 1. part. Tome-ſe na recta DB, qualquer ponto L, diverſo de E; e tire-ſe do centro C, a recta CL. Porquanto o triangulo ECL, he rectangulo em E (*Hyp.*) ſerà o angulo L, agudo (*Cor.* 5. *da* 32.1.) logo CL, oppoſta ao mayor angulo, he mayor que CE, oppoſta ao menor (19. 1.) porèm a menor CE, chega deſde o centro atè à circunferencia: logo a mayor CL, deve paſſar a diante; e por conſequencia o ponto L, cahe fora do circulo. O meſmo ſe entende de outro qualquer ponto: logo, &c.

2 Part. Tire-ſe, ſe for poſſivel, entre a perpendicular, e a circunferencia a recta EA, a qual não corte o circulo. Porquanto o angulo CEA, he menor que recto, ſe do centro C, ſe tirar huma perpendicular

cular a EA, cahirà esta para a parte do ditto angulo (*Cor.* 3. *da* 32. 1.) e pela supposição depois de cortar a circunferencia em Q, occorrerá â ditta recta em O. Agora: no triangulo COE, rectangulo em O, o lado CE, opposto ao mayor angulo, he mayor que CO, opposto ao menor (19.1.) porèm o mesmo CE, por ser igual à CQ, he menor que CO: logo he mayor e menor a respeito do mesmo: o que he absurdo.

COROLLARIOS.

1 DO mesmo modo, que se demonstra a segunda parte, se pode tambem demonstrar a primeira.

2 Se continuado o diametro OG, se tomarem nelle quaesquer pontos, dos quaes se descrevão outros tantos circulos, todos concorrentes no ponto O; serà este o contacto commum de todos. E, Fig. 16.

3 Por mais, e mais que se avisinhem huns aos outros, e à perpendicular EB, nunca jà mais concorrerão entre si, nem com ella, senão na quelle indivisivel ponto.

4 Daqui se segue, que qualquer recta se póde dividir infinitamente em partes menores, e menores; sem que jà mais se chegue â minima.

Dem. Tire-se de qualquer ponto C, do ditto diametro a recta CB, atè â perpendicular EB. Consta do demonstrado, que todos os circulos assim descriptos, e outros infinitos, todos cortão aquella recta; sem que jà mais se encontre hum com outro, senão no ponto O (13.) logo cada hum determinarà na ditta recta differente parte, sem que jà mais se chegue â ultima.

5 Nenhuma recta pode dividir o angulo do contacto (ou da contingencia) LEQ. A razão he, porque para isso devia mediar a ditta recta entre o lado recto, e curvo

e curvo do ditto angulo; contra o demonſtrado na 2. parte.

6. Pode-ſe porêm dividir o ditto angulo com muitas, e muitas circunferencias, as quaes deſcriptas de differentes pontos do ditto diametro OG, paſſem todas pelo ponto O.

Fig. 19. * 7. O angulo do contacto LEQ, he menor que qualquer agudo rectilineo LEO, por minimo que ſeja; porquanto por mais, e mais que ſe ajuntem os lados do ditto angulo, ſempre o arco do do contacto ha de cahir dentro delles.

* 8. O angulo do ſemi-circulo CEQ, ainda que não he recto, he mayor que qualquer agudo CEO, por mayor que ſeja; porquanto por mais, e mais que ſe alargem os lados do ditto angulo agudo, ſempre o arco do do ſemi-circulo ha de cahir fora delles

* O angulo recto CEL, comprehende infinitos angulos do contacto QEL; e por conſequencia he infinitamente mayor que elle. A razão he, porque o angulo recto pode-ſe dividir em infinitos agudos; e cada agudo, por minimo que ſeja, ſempre he mayor que o do contacto.

* 10. O angulo do contacto QEL, he parte do recto CEL; e com tudo, por mais, e mais que ſe multiplique, nunca o pode igualar: de que ſe infere que infinitas partes juntas não compoem hum infinito.

* 11. Pode-ſe paſſar de menor a mayor, procedendo continuadamente de mais em mais, ſem ſe paſſar pelo igual. Porquanto ſe a recta EC, ſe mover circularmente ſobre o ponto E, até coincidir com a perpendicular EL, hirà formando infinitos angulos agudos CEO, ſempre mayores, e mayores, porêm nunca formarà hum igual ao angulo do ſemi-circulo CEQ.

ESCHO-

ESCHOLIO.

OS Corollarios 7. e 8. duvidão muitos que sejão de Euclides; *naõ obstante o acharem-se no texto. E na verdade* Apollonio, *insigne, e exactissimo Geometra, demonstrando da* Ellipse, *da* Hyperbola, *e da* Parabola *semelhantes propriedades, âs que demonstra* Euclides *do Circulo, jà mais fez mençaõ de taes sequelas. Os corollarios seguintes 9. 10. e 11. saõ certamente suppostos, e reputados cõmummente por paradoxos.*

Explica-se a natureza do angulo do contacto.

A celebre controversia, que houve antigamente entre Peletario, *e* Clavio, *sobre o angulo do contacto, deo tal brado nas Escholas, que obrigou a muitos e muy insignes Geometras, a sahir à luz com varios discursos, entre os quaes merecem particular attençaõ os de* Galileo, *e* Wallis, *Professores de grande nome. E aindaque naõ he do meu assumpto controverter aqui este ponto; todavia por naõ deyxar de dizer alguma couza em huma questaõ tam celebre, e que tem tanta connexão com os Elementos, porey aqui esta breve nota.*

O ponto principal da ditta controversia foy; se o angulo do contracto QEL, era parte do angulo recto CEL? E se os dittos angulos erão Quantidade, ou naõ? Para que melhor se perceba a solução destas duvidas; e se desatem os paradoxos dos 5. ultimos corollarios: Supponho Fig. 16.

1 *Que aindaque a Quantidade não se pode conceber sem Figura; e muito menos a Figura sem Quantidade; todavia, segundo a nossa consideraçaõ, a Quantidade e a Figura são cousas diversas, e tem muy differentes propriedades; porquanto da Quantidade se diz propriamente* Ser igual, ou desigual; *e da Figura* Ser semelhante, ou dessemelhante. *Daqui nasce, que comparadas duas Quantidades entre si, podem ser iguaes na grandeza, e desse-*

dessemelhantes na figura, como consta das Proposições 35. 36. 37. e 38. do l. 1. e pelo contrario, podem ser semelhantes na figura, e desiguaes na grandeza, como se vê nos circulos, nos triangulos equilateros, nos quadrados, &c.

2 *Que aindaque o angulo seja parte da Figura; e propriamente fallando hum Modo, ou Modificação da Quantidade; todavia, como he inseparavel, e ainda inintelligivel sem Quantidade, toma della por analogia aquella mesma propriedade, de* Ser igual, ou desigual, *que só a ella propriamente compete. E assim se diz dos angulos:* Ser hum mayor que outro: Ser hum parte de outro: Dividirse: Comporse; Diminuirse; Augmentarse *&c. como se lê frequentemente em todo o l. 1. Porèm como esta propriedade não he propria do angulo; senão, como disse, analoga, e accõmodaticia; não se verificão della todos aquelles Axiomas, que competem â rigorosa igualdade; e os primeiros que faltão, são os mais evidentes.*
Fig. 22. *Porquanto o angulo curvilineo Ao. não he igual, nem semelhante ao rectilineo oE; sendo assim que os angulos dos semi circulos A, E, são iguaes; o angulo o. commum; e segundo o Ax. 2. accrescentando o commum à iguaes, os compostos devião de ser iguaes. Item: o angulo rectilineo ACB, não he igual ao curvilineo DCE; sendo*
Fig. 23. *assim, que tirados iguaes de iguaes (isto he, BCD de*
23. *ACE) os residuos devião de ser iguaes Ax. 3.*

3 *Que o angulo rectilineo he totalmente incõmensuravel, e incomparavel com o curvilineo: o que demon-*
Fig. 21. *stro com hum exemplo, que pode servir de regra. Sejão no semi-circulo VAV, dous angulos; hum rectilineo VAZ, e outro mixtilineo VOEAZ. He sem duvida, que o angulo rectilineo consta de huma só inclinação; isto he, que todos os pontos, e partes do lado VA, segundo a direcção daquella linha, vão buscar constantemente o ponto A: e que o mixtilineo consta de differentes inclinações; porquanto, dividido o quadrante VA, em tres partes*

partes, e tiradas pellos pontos das divisões tres rectas VO,OE,EA; cada huma destas vay buscar no outro lado AZ, seu ponto differente; de tal sorte, que todo aquelle quadrante (repetida a divisão infinitamente) não he outra couza mais que huma continuada variedade de inclinações; que começa desde a perpendicular atè acabar na parallela. Logo os dittos angulos saõ totalmente incomparaveis; por ser hum constante, e outro vago. Daqui se segue, que comparado o angulo do contacto com qualquer agudo, nem he propriamente menor, nem mayor, nem igual: porquanto, como o lado curvo comprehende todas as inclinações; segundo huma serà mayor, segundo outra menor, e segundo outra igual: ou por melhor dizer, não serà nada; porque nunca chegarà a ter dous pontos fixos, que formem huma determinada inclinação.

Suppostos estes tres principios, não serà difficil responder ás duas duvidas assima; nem desatar os paradoxos dos 5. ultimos corollarios: porquanto á primeira duvida se responde, que hum angulo sómente por analogia he parte de outro; porém o do contacto nem ainda por analogia o pode ser do recto; pois aindaque occupe parte do seu espaço, não diz ordem alguma á sua inclinaçaõ; por ser aquella constante, e esta vaga. A 2. fica jà respondido na supposição 2.

Quanto aos 5. corollarios se responde, que os dous primeiros ou não são de Euclides; ou, se o são, fallou o Geometra metaforicamente, e no sentido da Prop. 16. nos outros 3. se muda a supposição, confundindo-se a semelhança com a igualdade. Porèm respondendo mais particularmente a cada hum: Digo que

Ao 7. Nego, que o angulo do contacto seja mayor, ou menor que o agudo, ainda metaforicamente; porque Fig. 13.
para o ser, devia o arco EQ, cahir dentro, ou fora da recta EO; o que he impossivel, porque necessariamente hade cahir dentro, e fora, segundo diversas partes.

Ao

Ao 8. *Nego do mesmo modo a supposição.*

Ao 9. *Nego que o angulo recto contenha propriamente infinitos angulos agudos; pois sómente os contêm em Potencia; ou como dizem os Filosofos* Syncathegorematicè. *Porèm dado que os contivesse, não haveria repugnancia, em que o angulo recto, collecção potencial de infinitos angulos agudos, excedesse outra infinidade de angulos do contacto, huma vez que constasse, que estes erão partes daquelles, o que he falso.*

Ao 10. *Nego que o angulo do contacto, como tambem o do semi-circulo, sejão partes do recto: são partes sim do seu espaço, porèm não da sua inclinação: e dado que o fossem, são partes potenciaes, communicantes, e essencialmente* Etherogeneas; *as quaes só compoem o todo daquelle modo, que elle nellas se resolve.*

Ao 11. *Consta do ditto o que se deve responder.*

PROPOSIÇÃO XVII. *Probl.*

Fig. 20. *Dado fora de qualquer circulo CQO, hum ponto A, tirar delle huma Tangente ao ditto circulo.** Tangente se diz a recta que toca o circulo.

C*Onstr.* Tire-se do ponto dado ao centro do circulo a recta AC; e do ponto Q, em que esta corta a circunferencia, levante-se huma perpendicular infinita QB. Descreva-se do mesmo centro, com o intervallo CA, outro circulo, o qual corte a ditta perpendicular em B; e tire-se tambem a recta BC. Do ponto O, em que esta corta a mesma circunferencia, tire-se ao ponto dado a recta OA. Digo que esta he a Tangente que se pede.

Dem. Os lados AC,OC, são iguaes respectivamente aos lados BC,QC; e o angulo comprehendido dos

dos primeiros, o mesmo que o dos segundos: logo os angulos AOC,BQC, oppostos a iguaes lados, são iguaes (4. 1.) porèm este he recto (*Constr.*) logo tambem aquelle; e por consequencia AO, he tangente do circulo (*Ant.*) *Q.E. &c.*

ESCHOLIO.

OUtro modo mais expedito, de tirar de hum ponto dado V, huma Tangente a qualquer circulo, se colhe da 31. deste, que he o seguinte. Tire-se do ponto dado, ao centro do circulo, a recta VC, e descreva-se sobre ella hum semi-circulo, o qual corte a circunferencia em O. Digo que a recta VO, he a Tangente, que se pede. Veja-se a ditta Prop.* Fig. 25.

PROPOSIÇÃO XVIII. *Theor.*

Se a recta QB, tocar hum circulo no ponto A, serà a recta CA, tirada do centro ao ditto ponto, perpendicular à ditta Tangente.

DEm. Se o não he: seja perpendicular outra qualquer recta CB, tirada do mesmo centro. Cortarà esta em qualquer ponto O, a circunferencia do circulo (16.) logo como o angulo CBA, he recto, e CAB, agudo (*Cor.* 5. *da* 32. 1.) serà CA, ou CO, mayor que CB (19. 1.) o que he absurdo. Fig. 26.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XIX. *Theor.*

Fig. 26. *Se a recta QB, tocar hum circulo, e do ponto do contacto A, se tirar para dentro delle a perpendicular AC; passarà esta pelo centro do ditto circulo.*

DEm. Senão: seja X o centro, e tire-se do contacto a recta AX. Pela Ant. o angulo QAX, he recto; e pela hypothese o he tambem QAC: logo dâse hum angulo recto mayor que outro, contra o Ax. 10.

PROPOSIÇÃO XX. *Theor.*

Fig. 27. 28. e 29. *O angulo no centro ACD, he duplo do angulo na circunferencia ABD, insistentes no mesmo arco.*

Fig. 27. DEm. Tres cazos admitte esta Proposição 1. quando o lado AC, cahe sobre o lado AB: e neste, como o angulo externo ACD, he igual aos dous internos oppostos CBD, CDB (32.1.) e estes pela igualdade dos lados oppostos, iguaes entre si (5.1.) seguese que he duplo de cada hum.

Fig. 28. 2 Quando ambos os lados AC, DC, cahem dentro dos outros dous AB, DB: e neste, tirada a recta BCE, do angulo da circunferencia pelo centro, serà pelo 1. cazo o angulo ECD, duplo de EBD; e o angulo ECA, duplo de EBA: logo ajuntando as partes, serà o total ACD, duplo do total ABD. *Q.E.&c.*

Fig. 29. 3 Quando hum lado AB, corta o outro DC: e neste, tirada tambem pelo centro, a recta BCE, serà o angulo total ECD, duplo do total EBD; e o parcial

cial ECA, duplo do parcial EBA: logo tirando cada parte do seo todo, serà o remanente ACD, duplo do outro remanente ABD. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXI. *Theor.*

Os angulos DAE,DBE, insistentes no mesmo arco DE, ou existentes no mesmo segmento DABE (tudo vèm a ser o mesmo Def. 8.) *saõ iguaes.* Fig. 30.

DEm. Dous cazos admitte esta Proposição: 1. quando o arco, em que insistem os angulos, he menor que o semi-circulo: e neste, tirados do centro os rayos CD,CE, qualquer dos angulos A,B, he metade do angulo C (*Ant.*) logo saõ iguaes entre si (*Ax.* 6.) 2. Quando o ditto arco he igual, ou mayor que o semi-circulo (*Fig.* 31.) e neste, tire-se a recta BA, pelos vertices. Nos triangulos X,Z, os angulos em O, são iguaes (15. 1.) como tambem os angulos D,E, insistentes no mesmo arco BA (1. *cazo.*) logo os remanentes B,A, tambem serão iguaes (*Cor.* 9. *da* 32. 1.) *Q.E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXII. *Theor.*

Os dous angulos oppostos de qualquer quadrilatero ABCD, inscripto em hum circulo, são iguaes a dous rectos. Fig. 32.

DEm. Tirem-se dos angulos oppostos as diagonaes AC,BD. No triangulo BCD, o angulo C, juntamente com os angulos *e. o.* são iguaes a dous rectos (32.1.) porèm os angulos *e. e.* são iguaes entre si; co-

 mo

mo tambem os angulos *o.o.* (*Ant.*) logo o mesmo angulo C, juntamente com os dous angulos *o.e.* oppostos; isto he, com todo o angulo A, são iguaes a dous rectos. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXIII. e XXIV.

São escusadas.

PROPOSIÇÃO XXV. *Probl.*

Fig. 33. *Dado hum arco EOF, acabar o circulo.*

COnstr. Tirem-se como quer as rectas EO,OF; e cortem-se pelo meyo com as perpendiculares AC,DC (10. 1.) Digo que o ponto C, em que estas concorrem, será o centro do circulo, de que o arco dado he parte.

Dem. O ditto centro está na recta AC, e na recta DC (como se infere da 1.) logo não pode deixar de estar no ponto commum à ambas. *Q.E.&c.*

* Praxe: Tome-se no arco dado qualquer ponto O, e descreva-se deste hum circulo, o qual corte o ditto arco em quaesquer 2. pontos E,F. Descrevão-se destes pontos dous arcos, os quaes cortem o ditto circulo em dous pontos cada hum; e tirem-se pelas 4. secções as duas rectas AC,DC: será o ponto C, em que estas se cortão, o centro do arco &c.

PROPO-

rão iguaes (4.1.) logo tambem os arcos que determinão &c. (*Ant.*) Da mesma sorte: porquanto os angulos em B,B, são iguaes; tambem o serão os seus duplos em C,C (20.) logo pelo mesmo discurso, serão iguaes os arcos &c.

2. Part. Da igualdade dos arcos se infere a igualdade das cordas AD, AD (*Ant.*) porèm da igualdade dos circulos se infere tambem a igualdade dos rayos CA, CD: CA,CD: logo os dous triangulos ACD, ACD, são totalmente iguaes (8.1.) e por consequencia os angulos em C,C: e suas metades em B,B, &c.

PROPOSIÇÃO XXX. *Probl.*

Fig. 34. *Dado hum arco AB, cortallo pelo meyo.*

COnstr. Tire-se a corda AB, e corte-se pelo meyo em O (10.1.) Digo que a perpendicular EF, a qual occorre ao arco dado em C, o dividirà pelo meyo.

Dem. Tirem-se as rectas AC,BC. Os triangulos AOC,BOC, tem dous lados respectivamente iguaes (*Constr.*) e rectos os angulos comprehendidos, indicados pelas mesmas letras: logo tambem as bases AC, BC, serão entre si iguaes (4.1.) e por consequencia os arcos que determinão (26.) *Q.E. &c.*

* Praxe: Descrevão-se, com qualquer intervallo, dos extremos do arco dado dous circulos, os quaes se cortem nos pontos E,F; e ajuntem-se estes com huma recta: dividirà esta o ditto arco pelo meyo.

PROPO-

rão iguaes (4. 1.) logo tambem os arcos que determinão &c. (*Ant.*) Da mesma sorte: porquanto os angulos em B,B, são iguaes; tambem o serão os seus duplos em C,C (20.) logo pelo mesmo discurso, serão iguaes os arcos &c.

2. Part. Da igualdade dos arcos se infere a igualdade das cordas AD, AD (*Ant.*) porèm da igualdade dos circulos se infere tambem a igualdade dos rayos CA, CD: CA,CD: logo os dous triangulos ACD, ACD, são totalmente iguaes (8. 1.) e por consequencia os angulos em C,C: e suas metades em B,B, &c.

PROPOSIÇÃO XXX. *Probl.*

Fig. 34. *Dado hum arco AB, cortallo pelo meyo.*

Constr. Tire-se a corda AB, e corte-se pelo meyo em O (10. 1.) Digo que a perpendicular EF, a qual occorre ao arco dado em C, o dividirà pelo meyo.

Dem. Tirem-se as rectas AC, BC. Os triangulos AOC, BOC, tem dous lados respectivamente iguaes (*Constr.*) e rectos os angulos comprehendidos, indicados pelas mesmas letras: logo tambem as bases AC, BC, serão entre si iguaes (4. 1.) e por consequencia os arcos que determinão (26.) *Q.E. &c.*

* Praxe: Descrevão-se, com qualquer intervallo, dos extremos do arco dado dous circulos, os quaes se cortem nos pontos E,F; e ajuntem-se estes com huma recta: dividirà esta o ditto arco pelo meyo.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXXI. *Theor.*

O angulo no semicirculo BAD, he recto: no mayor segmento BAE, he agudo: e no menor BAO, he obtuso. Fig. 35. e 36.

DEm. 1. part. Tire-se o rayo CA. Porquanto os lados CB, CA, são iguaes, tambem serão iguaes os angulos oppostos BAC, ABC (5.1.) e pela mesma razão os angulos DAC, ADC: logo todo o angulo A, he igual aos outros dous angulos B, D; e por consequencia o ditto angulo A, he recto (*Cor. 7. da* 32.1.) *Q.E.&c.*

2. e 3. Part. Tire-se do ponto B, o diametro BD; e do ponto A, a recta AD. O angulo BAD, he recto (1.*part.*) logo o angulo BAE, parte sua, he agudo; e o angulo BAO, de quem o recto he parte, obtuso (*Def.*15.*e* 16. *do* 1.) *Q.E.&c.* Fig. 36.

PROPOSIÇÃO XXXII.

Se huma recta ED, tocar hum circulo, e do ponto do contacto A, se tirar outra recta, AC, que o corte; será o angulo da Tangente e da Secante BAC, igual ao angulo existente no segmento alterno AOC. * Secante se diz a recta, que corta o circulo. Fig. 38. e 37.

DEm. Primeiramente se a Secante passar pelo centro (*Fig.*37.) a razão he clara: porquanto o angulo DAC, he recto (18.) como tambem o angulo no semi-circulo AOC (*Ant.*) logo &c. Senão passar (*Fig.*38.) tire-se pelo centro a recta AE; e ajuntem-se os pontos C, E. Porquanto o angulo no semi-circulo ACE, he recto, serão os dous juntos AEC, CAE,

outro

Logo tirando de ambas as partes o Quad. commum OC, ferà o Rect. AOB, igual ao Rect. EOD. *Q.E.&c.*

2. Quando huma recta ED (*Fig.* 39.) passa pelo centro; e não corta pelo meyo a outra recta AB: neste cazo, tire-se do centro a perpendicular CQ, e o rayo CA. O Quad. CA, he igual aos QQuad. { AQ (47.1.)
{ QC.

Porèm o Quad. AQ, he igual ao { Rect. AOB (5.2.)
{ Quad. OQ.

Logo o Quad. CA, he igual ao { Rect. AOB
{ Quad. OQ
{ Quad. QC.

isto he, he igual ao Rect. AOB, junto com o Quad. OC (47. 1.) Porèm o mesmo Quad. CA, ou CE, he tambem igual ao Rect. EOD, junto com o Quad. OC (5. 2.) logo, tirando de iguaes summas o Quad. commum OC, serà o Rect. AOB, igual ao Rect. EOD. *Q.E.&c.*

3. Quando nenhuma das rectas ED, AB (*Fig.*40.) passa pelo centro: neste cazo tire-se pela commua secção O, o diametro FG. Qualquer dos dous rectangulos AOB, EOD, he igual ao mesmo GOF (*pelo* 2. *cazo.*) logo saõ iguaes entre si. *Q.E.&c.*

ESCHOLIO.

Desta Proposição se tira hum modo facil de achar huma terceira proporcional a duas rectas dadas como direy despois no Esch. da Prop. 12. *dol.* 6.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXXVI. *Theor.*

Se do ponto B, tomado fora de hum circulo, se tirarem duas rectas â circunferencia do mesmo; huma tangente BA, e outra secante BE: serà o rectangulo EBO (comprehendido de toda a secante EB, e da parte intermedia entre o ditto ponto, e a circunferencia BO) igual ao quadrado da tangente BA; existente entre o mesmo ponto, e o contacto A. Fig. 41. e 42. 43.

DEm. Tres cazos admitte esta Proposição.

1. Quando a secante BE (*Fig.* 41.) passa pelo centro: e neste, tirada a recta CA, do centro ao contacto, serà o angulo CAB, recto (18.) logo o Quad. CB, serà igual aos QQuad. $\begin{cases} \text{CA (47. 1.)} \\ \text{AB.} \end{cases}$

Porèm, por estar EO, cortada pelo meyo em C, e accrescentada com OB, tambem o Quad. CB, he igual ao $\begin{cases} \text{Rect. EBO (6. 2.)} \\ \text{Quad. CO.} \end{cases}$

Logo, tirando de ambas as summas iguaes, os quadrados iguaes CA, CO, ficarà o Quad. BA, igual ao rectangulo EBO. *Q.E.&c.*

2. e 3. Quando a secante BE (*Fig.* 42. *e* 43.) não passa pelo centro; e cahe ou abaxo, ou arriba delle: e nestes, tirada pelo centro a recta BC, e do mesmo centro os rayos CA, CO; e a perpendicular CD, â secante dada (aquem cortarà pelo meyo em D pela 3.) serà o Quad. CB, igual aos QQuad. $\begin{cases} \text{BA} \\ \text{CA.} \end{cases}$

e aos QQuad. $\begin{cases} \text{BD (47. 1.)} \\ \text{DC.} \end{cases}$

M Porèm

Porèm o Quad. BD, he igual ao { Rect. EBO (6.2.) / Quad. DO. }

Logo, ſubſtituindo eſtes por aquelle, ſeráõ os QQuad. { BA / CA. } iguaes ao { Rect. EBO / Quad. DO / Quad. DC. }

iſto he, ſeráõ os Quad. { BA / CA. } iguaes ao { Rect. EBO / Quad. CO. } (47. 1.)

Logo, tirando das duas ſummas iguaes os dous quadrados iguaes CA, CO, ficarà o Quad. BA, igual ao Rect. EBO. *Q.E.&c.*

COROLLARIOS.

Fig. 44. 1. SE do meſmo ponto B, ſe tirarem muitas ſecantes BE, BE, &c. todos os rectangulos EBO, EBO, &c. ſeráõ entre ſi iguaes: por ſerem todos iguaes a hum meſmo Quad. BA.

2. E ſe do meſmo ponto B, ſe tirarem duas tangentes BA, BD; ambas ellas ſeráõ entre ſi iguaes: por ſerem os quadrados de ambas iguaes ao meſmo rectangulo EBO.

PROPOSIÇÃO XXXVII. *Theor.*

Fig. 44. *Se tiradas duas rectas BA, BE, do meſmo ponto B, fora de hum circulo, for o rectangulo EBO, da que penetrou atè a parte concava, igual ao quadrado BA, da que ſó chegou atè a parte convexa; ſerà eſta Tangente.** He converſa da antecedente,

D*Em.* Tire-ſe do ponto B, a tangente BD (17.) e do centro do circulo as rectas CA, CB, CD, CD. Porquanto o Rect. EBO, he igual ao Quad. BA (*Hyp.*) e pela ant. ao Quad. BD; ſerão eſtes dous quadrados entreſi iguaes; e por conſequencia as rectas BA, BD: porèm tambem ſão iguaes os rayos CA, CD; e commum o lado CB: logo os dous triangulos CAB, CDB, tem todos os angulos reſpectivamente iguaes (8. 1.) Logo ſendo D, recto (18.) tambem o ſerà A; e por conſequencia BA, he tangente do circulo (16.) *Q.E.&c.*

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA.
LIVRO IV.

ESTE LIVRO HE TODO PROBLEMatico; e todo se occupa em inscrever Figuras Regulares no circulo; razão porque he muy familiar aos Arquitectos Militares. Porèm o que o faz mais recõmendavel, he ser elle o que dà todo o fundamento â Trigonometria, dando a conhecer em partes do Rayo o valor das Cordas: e por consequencia o valor dos Senos, Tangentes, e Secantes, de que se compoem o Canon Trigonometrico. A sua Proposição mais insigne he a 10. *de que se segue o mais difficil Problema da inscripção do Pentagono.*

DEFINIÇÕES.

1 FIGURA rectilinea *Inscripta* em hum circulo: he aquella cujos angulos existem na circunferencia do ditto circulo. * E então se diz o circulo estar *Circunscripto* à ditta Figura.

2 Figu-

2 Figura rectilinea *Circunſcripta* a hum circulo: he a quella, cujos lados tocão a circunferencia do ditto circulo.* E então ſe diz o circulo eſtar *Inſcripto* na ditta figura.

PROPOSIÇÃO I. *Probl.*

Fig. 1. *Inſcrever em hum circulo huma recta, igual a outra dada O; com tanto que não ſeja mayor que o diametro.*

COnſtr. Tome-ſe no compaſſo a recta dada; e poſta huma ponta em qualquer ponto A, da circunferencia, deſcreva-ſe com a outra hum arco, o qual a corte em outro ponto B. Tire-ſe a recta AB, &c. He manifeſto (*Ax.* 1.)

PROPOSIÇÃO II. *Probl.*

Fig. 2, 2. *Inſcrever em hum circulo hum triangulo equiangulo com outro dado QOP.*

COnſtr. Tire-ſe a tangente AC: e forme-ſe no ponto B, do contacto, o angulo ABE, igual à P, e o angulo CBD, igual à Q (23. 1.) tire-ſe a recta ED, e ficará inſcripto no circulo hum triangulo equiangulo com o dado.

Dem. O angulo D, he igual a ABE (32. 3.) iſto he, pela conſtr. ao angulo P: pela meſma razão o angulo E, he igual ao angulo Q: logo o angulo B, tambem he igual a O (*Cor.* 9. 32. 1.) e por conſequencia &c.

PROPO-

PROPOSIÇÃO III. *Probl.*

Circunſcrever a hum circulo hum triangulo equiangulo com outro dado NLM. Fig. 3. 3.

CONſtr. Continue-ſe a baſe do triangulo dado para huma, e outra parte; de ſorte, que ſe formem dous angulos externos N,M: e formem-ſe no centro do circulo outros dous angulos iguaes a elles ECO,FCO. Tirem-ſe pelos tres pontos da circunferencia E,O,F, outras tantas tangentes, as quaes concorrão nos pontos B,A,D. Digo que o triangulo ABD, circunſcripto no circulo (*Def.* 2.) he equiangulo com o dado.

Dem. No quadrilatero ECOA, os angulos E,O, ſão rectos (18. 3.) logo os outros dous A,C, ſão tanto como 2. rectos (*Eſch.* 1. *da* 32. 1.) porèm tambem ſão tanto como 2. rectos os outros dous em N, externo, e interno (13. 1.) logo ſendo C, igual ao primeiro (*Conſtr.*) ſerà A, igual ao ſegundo. Do meſmo modo provarey ſer D, igual ao interno M; e por conſequencia B, igual à L: logo &c.

ESCHOLIO.

SUppuz, que as 3. tangentes hande concorrer em 3. pontos: o que tambem ſuppuz em ſemelhante cazo na 25. do 3. Porèm convem demonſtrallo. Porquanto os angulos E,O, ſaõ rectos, tirada pela imaginação huma recta EO (a qual neceſſariamente hade ſerrar eſpaço com os lados do angulo ECO) os angulos AEO,AOE, ſaõ menores que 2. rectos: logo as rectas EA,OA, hande concorrer para a quella parte em algum ponto A; como conſta do Eſch. da 31. do 1.

PROPO-

PROPOSIÇÃO IV. *Probl.*

Inscrever hum circulo em hum triangulo dado ABD.

COnstr. Dividão-se pelo meyo quaes quer dous angulos A,D, do triangulo dado (9. 1.) e do ponto C, em que concorrem as rectas, que os dividem, tirem-se tres perpendiculares aos lados CE,CF, CO: com o intervallo de qualquer destas CE, descreva-se hum circulo. Digo que este tocarà os 3. lados do ditto triangulo.

Dem. Nos triangulos ACE,ACO, os angulos em A, são iguaes; em E,O, rectos; e o lado AC, he cómum: logo os lados CE,CO, são iguaes (26. 1.) Do mesmo modo provarey, serem tambem iguaes os lados CO,CF: logo o circulo, que descripto do ponto C, passar por E, passarà tambem por O, e F; e tocarà o triangulo nos dittos pontos (16. 3.) *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO V. *Probl.*

Fig. 33. do 3. *Circunscrever hum circulo a hum triangulo: ou (que he o mesmo) descrever hum arco por tres pontos dados E,O,F, os quaes não estejão em huma linha recta.*

COnstr. Ajuntem-se os 3. pontos com duas rectas EO,OF; e cortem-se estas pelo meyo com duas perpendiculares AC,DC (10.1.) do ponto C, em que estas concorrem (*Esch. ant.*) descreva-se hum circulo com o intervallo CE. Digo &c.

Dem. Tirem-se as rectas CE,CO,CF. Nos triangulos CQO,CQF, os lados QO,QF, são iguaes; QC, commum;

QC, comum; e os angulos em Q, rectos: logo as bases CO, CF, são tambem iguaes (4. 1.) Do mesmo modo provarei, serem tambem iguaes CO, CE: logo o circulo, que descripto do ponto C, passar por E; passarà tambem por O, e F. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO VI. e VII. *Probl.*

Dado hum circulo, inscrever lhe, e circunscrever-lhe hum Quadrado. Fig. 4.

COnstr. 1. part. Tirem-se os diametros GH, QL, em angulos rectos: e ajuntem-se os 4. pontos G, Q, H, L, com 4. rectas: ficarà inscripto o Quadrado. A demonstração consta da 4. do 1. e da 31. do 3.

2 Part. Tirem-se pelos mesmos 4. pontos 4. tangentes, as quaes se cortem nos pontos A, B, D, E: ficarà circunscripto o Quadrado. A demonstração consta da 18. do 3: do Cor. 2. da 36. do mesmo: e da 28. e 34. do 1.

ESCHOLIO.

O Quadrado circunscripto he duplo do inscripto. Dem. O angulo QGL, he recto (31. 3.) logo o Quad. QL (isto he, o Quad. AE) he igual aos 2. QQuad. QG, GL (47. 1.) isto he, he duplo do Quad. QG.

PROPOSIÇÃO VIII. e IX. *Probl.*

Dado hum Quadrado, inscrever-lhe, e circunscrever-lhe hum Circulo. Fig.

COnstr. Tirem-se os diametros do Quadrado GH, QL; e do ponto C, em que se cortão, des-

 creva-se

hum circulo [5.] e tire-se a recta AD. Porquanto o rectangulo CBD, he igual ao quadrado CD, ou AB (*Constr.*) será AB, tangente do circulo CDA, de quem AD, he secante (37. 3.) logo o angulo BAD, he igual ao angulo C, no segmento alterno (32. 3.) Accrescente-se a huma, e outra parte o angulo DAC; será o angulo total A [ou B, seu igual] igual aos 2. DCA, DAC. Porém tambem o angulo externo BDA, he igual aos mesmos 2. angulos (32. 1.); logo o triangulo BAD, he Isósceles (6. 1) e por consequencia, sendo CD, igual à AB (*Constr.*) tambem o será a AD: logo tãbem he Isósceles o triangulo CDA; e por consequencia os angulos da base DCA, DAC, são iguaes (5. 1.) Porèm fica demonstrado, que o angulo externo BDA, ou seu igual B, he igual à quelles 2. logo he duplo de cada hum; isto he, de C. *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

QUalquer angulo de base do sobreditto triangulo contem $\frac{2}{5}$. de 2. rectos; ou $\frac{4}{5}$. de hum recto: e o do vertice contem $\frac{1}{5}$. de 2. rectos, ou $\frac{2}{5}$. de hum recto. Consta facilmente da 32. do 1.

PROPOSIÇÃO XI. *Probl.*

Inscrever em hum circulo dado hum Pentagono Regular. Fig. 8.

COnstr. Descreva-se hum triangulo Isósceles, como ensina a Prop. ant. e inscreva-se no circulo dado outro equiangulo ABC (2.) Dividão-se pelo meyo os angulos da base A, C; e continuem-se as rectas, que os dividem, atè que occorrão à circunferencia em D, hum circulo [5.] e tire-se a recta AD. Porquanto o rectangulo CBD, he igual ao quadrado CD, ou AB (*Constr.*) serà AB, tangente do circulo CDA, de quem AD, he secante (37. 3.) logo o angulo BAD, he igual ao angulo C, no segmento alterno (32.3.) Accrescente-se a huma, e outra parte o angulo DAC, serà o angulo total A [ou B, seu igual] igual aos 2. DCA, DAC. Porém tambem o angulo externo BDA, he igual aos mesmos 2. angulos (32. 1.) logo o triangulo BAD, he Isósceles (6.1) e por consequencia, sendo CD, igual à AB (*Constr.*) tambem o serà a AD: logo tãbem he Isósceles o triangulo CDA; e por consequencia os angulos da base DCA, DAC, são iguaes (5. 1.) Porèm fica demonstrado, que o angulo externo BDA, ou seu igual B, he igual à quelles 2. logo he duplo de cada hum; isto he, de C. *Q.E.&c.*

COROLLARIO.

Qualquer angulo de base do sobreditto triangulo contem $\frac{2}{5}$. de 2. rectos; ou $\frac{4}{5}$. de hum recto: e o do vertice contem $\frac{1}{5}$. de 2. rectos, ou $\frac{2}{5}$. de hum recto. Consta facilmente da 32. do 1.

PROPOSIÇÃO XI. *Probl.*

Inscrever em hum circulo dado hum Pentagono Regular. Fig. 8.

Constr. Descreva-se hum triangulo Isósceles, como ensina a Prop. ant. e inscreva-se no circulo dado outro equiangulo ABC (2.) Dividão-se pelo meyo os angulos da base A, C; e continuem-se as rectas, que os dividem, atè que occorrão à circunferencia em D, E: ajuntem-se todos os 5. pontos A,D,B,E,C, com outras tantas rectas; e ficarà inscripto o Pentagono.

Dem. Consta da constr. que os 5. angulos B.*o.u u.o.* são iguaes: logo tambem os arcos, em que insistem, serão iguaes (28.3.) e por consequencia as subtensas, ou lados da Figura (27.3.) Sendo estes iguaes, são tambem iguaes os angulos, que nelles insistem (29. 3.) logo tambem os da figura (compostos de 3. delles) serão iguaes: e por consequencia &c. (*Def.*3.)

COROLLARIO.

O angulo do Pentagono contem $\frac{3}{5}$. de 2. rectos. A razão he; porque todos os angulos em B, são iguaes entre si: porem o do meyo, pelo Cor. da ant. he $\frac{1}{5}$. de 2. rectos: logo &c.

ESCHOLIO.

Esta inscripção de Euclides *he engenhosa; porém muito mais expedita, e não menos engenhosa, he*
Fig. 12. *a de* Ptolemeo *no l.* 1. *do Almagesto. Tirem-se em angulos rectos os 2. diametros do circulo HG, CF: e dividido o rayo OG, pelo meyo em L, descreva-se deste ponto, com o intervallo LF, hum arco, o qual corte o outro rayo OH, em Q. Digo que a recta QF, he o lado do Pentagono; e QO, a do Decagono, que se houverem de inscrever naquelle circulo. A Dem. não he deste lugar; porèm dar-se-hà despois no Esch. da Prop.* 10. *do l.* 13. *Entre tanto darey aqui o seguinte*

Problema.

Dada a recta AB, construir sobre ella hum Pentagono Regular. Fig. 9.

D*Ivida-se a ditta recta de tal sorte em O, que o rectangulo BAO, seja igual ao quadrado OB: continue-se a mesma recta para huma, e outra parte, atè que AG,BF, sejão iguaes ao segmento mayor OB. Descrevão-se dos pontos A,G, com o intervallo AB, 2. arcos, os quaes se cortem em D; e dos pontos B,F, outros 2. os quaes se cortem em E. E com o mesmo intervallos descrevão outros 2. arcos dos pontos D,E, os quaes se cortem em C. Ajuntem-se todos estes 5. pontos com outras tantas rectas, e ficarà formado o Pentagono, que se pede.*

Dem. *Consta da Constr. que a figura descripta he equilatera. Provo que seja equiangula. Tire-se a recta GD: o triangulo GDA, be o isósceles, que ensina a construir a Prop. 10. logo o angulo DAG, contem* $\frac{2}{5}$*. de 2. rectos; e por consequencia o conjunto DAB, contem* $\frac{3}{5}$*. o mesmo digo do angulo EBA: logo hum, e outro saõ angulos do Pentagono. Porêm daqui se infere que tambem os outros 3. D,C,E, tem a mesma quantidade; se se imaginão continuados os lados AD,BE, e formados de fora outros 2. triangulos Isósceles, como os primeiros: logo &c.*

PROPOSIÇÃO XII. *Probl.*

Circunscrever a hum circulo hum Pentagono Regular. Fig. 11.

C*Onstr.* Inscreva-se (*pela Ant.*) hum Pentagono no circulo dado: e pelos 5. pontos, em que o toca,

toca, tirem-se outras tantas tangentes: digo que estas formarão o Pentagono, que se pede.

Dem. Tirem-se os rayos OH,OF,OG, &c. e as rectas OA,OB, &c. Os triangulos AHO,AFO, são respectivamente equilateros; por serem HO,FO, rayos; AO, commua; e as rectas AH,AF tangentes, tiradas do mesmo ponto (*cor.* 2. *da* 36. 3.) logo tanto os 2. angulos em A, como os 2. em O, são iguaes (8. 1.) o mesmo digo dos triangulos BFO,BGO. Porèm os angulos totaes HOF,FOG, são iguaes entre si; por insistirem em arcos iguaes (29. 3.) logo tambem as suas metades; e por consequencia, todos os 4. angulos em O, serão iguaes: logo, tendo os triangulos AFO,BFO, os angulos em O iguaes, em F rectos, e o lado FO commum, tambem as metades de A,B (26. 1.) e por consequencia os mesmos todos, serão iguaes. Demonstrada assim a igualdade dos angulos da figura, consta pelo mesmo discurso, a igualdade dos lados: logo &c.

ESCHOLIO.

Com este artificio se pode circunscrever a qualquer circulo qualquer figura regular; isto he, inscrevendo-lhe primeiro outra figura semelhante.

PROPOSIÇÃO XIII. e XIV. *Probl.*

Fig. 10. *Dado hum Pentagono Regular; inscreverlhe, e circunscrever-lhe hum circulo.*

Constr. Cortem-se pelo meyo quaesquer 2. angulos A,B, do Pentagono dado: e do ponto O, em que concorrem as rectas, que os dividem, tire-se huma perpendicular OF, a qualquer dos lados. Digo que,

que, ſe do ponto O, ſe deſcrever hum circulo com o intervallo OA, tocarà eſte todos os angulos: e ſe ſe deſcrever do meſmo ponto outro circulo, com o intervallo OF, tocarà eſte todos os lados do Pentagono.

Dem. Tirem-ſe do ponto O, rectas a todos os angulos, e perpendiculares a todos os lados. Os triangulos OAD, OAB, tem os angulos em A iguaes; e iguaes reſpectivamente os lados, que os comprehendem: logo os angulos ABO, ADO, ſão iguaes entre ſi (4.1.) Porèm o primeiro he metade do da figura (*Conſtr.*) logo tambem o ſegundo; e pelo meſmo diſcurſo, todos os angulos deſta eſtão cortados pelo meyo; e todos os triangulos formados ſobre ſeus lados ſão Iſóſceles (6.1.) logo o circulo que deſcripto do ponto O, paſſar por hum angulo, paſſarà por todos &c.

Da meſma ſórte: os triangulos OAH, OAF, tem os angulos em A iguaes; em H, F rectos; e o lado AO commum: logo as perpendiculares OH, OF, ſão iguaes (26.1.) Porém por eſtarem divididos pelo meyo todos os angulos da figura, todas as outras perpendiculares ſão iguaes a eſtas 2. logo o circulo, que deſcripto do ponto O, tocar hum lado, tocarà todos os outros. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XV. *Probl.*

Inſcrever em hum circulo dado hum Hexagono Regular. Fig. 13.

COnſtr. Tire-ſe o diametro AB; e deſcrevão-ſe dos ſeus extremos com o intervallo do ſemi-diametro 2. arcos COF, EOD, os quaes cortem a circunferencia nos 4. pontos C, F, E, D. Digo, que ſe ſe ajuntarem todos os 6. pontos com outras tantas rectas, ficarà formado, e inſcripto o Hexagono, que ſe pede.

Dem.

Dem. Tirem-se rayos a todos os angulos da figura. Os 4. triangulos COA, AOF, EOB, BOD, são equilateros (*Constr.*) logo cada hum dos seus angulos contem $\frac{1}{3}$. de 2. rectos [*Cor.* 12. *da* 32. 1.] porèm os 3. em O, para huma, e outra parte do diametro, são iguaes a 2. rectos [13. 1.] logo cada hum dos intermedios EOC, DOF, tambem contem $\frac{1}{3}$. de 2. rectos; e por consequencia tambem aquelles 2. triangulos são equilateros: logo, sendo todos iguaes, constarà a figura inscripta de lados, e angulos iguaes. *Q. E. &c.*

COROLLARIOS.

1. O Lado do Hexagono he igual ao rayo do circulo, em que està inscripto.

2. O angulo do Hexagono contem $\frac{2}{3}$. de 2. rectos.

3. Se se tirar outro diametro GH, perpendicular ao primeiro AB; e dos extremos deste se descreverem outros 2. arcos com o intervallo dos primeiros: ficarão determinados os pontos de hum Duodecagono Regular, com huma só abertura de compasso; o que he de grande uso para a *Gnomonica*. Fig. 14.

4. Do ditto se infere huma facillima inscripção de hum triangulo equilatero em hum circulo; que he, tirado o diametro AB, e descripto de qualquer de seus extremos A, hum sò arco QCF; ajuntar os 3. pontos Q, B, F.

5. O lado QF, do ditto triangulo corta a quarta parte do diametro AB, que he AO.

Dem. Os angulos CQO, AQO, por insistirem em arcos iguaes, são iguaes (29. 3.) são tambem iguaes os lados QC, QA (*Cor.* 1.) e QO commum: logo as bases AO, OC, tambem são iguaes (4. 1.) e por consequencia AO, metade do semi-diametro, he a quarta parte do diametro.

O 6. Cor. poderà ser o seguinte.

Problema

Problema.

Onstruir sobre huma recta dada AF, hum Hexagono Regular. Fig. 13.

Descreva se sobre a recta dada hum triangulo equilatero AOF; e do ponto O, com o intervallo OA, descreva-se hum circulo, em cuja circunferencia se accõmode 6. vezes o ditto rayo. Será este &c. Consta do ditto.

PROPOSIÇÃO XVI. *Probl.*

Inscrever em hum circulo dado hum Quindecagono Regular. Fig. 15.

Onstr. Inscreva-se pela 12. o lado do Pentagono B 5. e pelo *Cor. 4. da Ant.* o lado do Triangulo Equilatero B 3: divida-se pelo meyo a differença dos arcos 5.3: e será &c.

Dem. Considere-se a circunferencia do circulo dividida em 15. partes; e que destas tocão 3. ao arco B5. e 5. ao arco B3. logo tocarão 2. â differença dos arcos; e huma â sua metade.

COROLLARIO.

DEste modo se poderão inscrever em hum circulo muitas outras Figuras Regulares; isto he, inscrevendo dous lados, das inscriptas nas Proposições antecedentes; e dividindo a differença dos arcos pela differença dos denominadores: porquanto a ultima parte darà o lado de huma figura de tantos lados, quantos indica o producto dos mesmos denominadores: v. g. Inscreva-se o lado do Quadrado B4. e o do Hexagono B6. e parta-se a differença dos dous arcos 6.4. pela differença dos denominadores, que he 2. ferà a metade da ditta differença o lado de huma figura de 24. lados, que he o producto de 4. por 6.

ESCHOLIO.

ATè agora fenão tem defcuberto modo Geometrico de infcrever em hum circulo, fómente com regoa, e compaffo, huma Figura de 7.9.11. e 13. lados, &c. porquanto efta divifão depende da divifão do circulo em quaefquer partes; aqual aindafe defeja. Porèm, pelo que toca à praxe, darey aqui 2. Problemas mecanicos; refervando outros mais engenhofos para a Geometria Practica, e Arquitectura Militar.

Problema. I.

INfcrever em hum circulo dado hum Polygono Regular de 9. lados.

Divida-fe a circunferencia do circulo [ifto he 360. gr.] pelo denominador da Figura [ifto he por 9.] e o quociente, que fão 40. ferão os gráos, que tocão a cada angulo no centro, correfpondente a cada lado. Forme-fe pois no centro do circulo hum angulo de 40. gr. pelo Efchol. da 23. do l. 1. e determinado o arco, applique-fe 9. vezes a Corda &c. O mefmo digo de outra qualquer Figura.

Problema. 2.

Fig. 16. DAda a recta EG, formar fobre ella hum Heptagono Regular.

Suppónho, que o angulo do Quadrado a refpeito dos angulos das mais Figuras [defde 5. atè 12. lados] tem as proporções, que indica a Taboa feguinte; a qual foy calculada pelo Theor. 2. da 32. do 1.

TABOA.

TABOA.

Figuras	Proporções	Differenças	Gráos de cada parte.
V.	5. à 6.	1.	18.
VI.	3. à 4.	1.	30.
VII.	7. à 10.	3.	12. $\frac{6}{7}$.
VIII.	2. à 3.	1.	45.
IX.	9. à 14.	5.	10.
X.	5. à 8.	3.	18.
XI.	11. à 18.	7.	8. $\frac{2}{11}$.
XII.	3. à 5.	2.	30.

Conſtr. *Deſcreva-ſe pois de qualquer extremo* G, *da recta dada hum arco, à deſcripção, e tire-ſe a perpendicular* GO. *Buſque-ſe na Taboa a proporção entre o angulo do quadrado, e o do Heptagono* [*que he de* 7. *à* 10. *e a differença* 3.] *e dividido o quadrante EO, em* 7. *partes iguaes, tomem-ſe* 3. *deſtas, de O atè F: tire-ſe a recta GF, igual a EG, e deſcreva-ſe pelos* 3. *pontos E,G,F, hum circulo* (5.) *digo que eſte comprehenderà o Heptagono &c. A difficuldade eſtà em dividir o quadrante naquellas partes iguaes, que diz a Taboa: porèm ſe ſe uſar de hum ſemi-circulo graduado, ſe acharà facilmente, pelos gráos da ultima columna, o valor de cada parte.*

Theorema.

COncluirey este Livro com hum celebre Theorema de Proclo, *que serve para os Arquitectos: e he, que sómente com 3. Figuras Regulares se pode serrar espaço; a saber com 4. Quadrados, ou com 6. Triangulos Equilateros, ou com 3. Hexagonos. Consta manifestamente do Cor. 3. da 13. do 1. supposto o que fica ditto do valor dos angulos destas 3. Figuras na Def. 32. do 1. l. e no Cor. 12. da 32. do mesmo; e no Cor. 2. da 15. deste.*

ELEMENTOS DE GEOMETRIA.

LIVRO V.

A DOUTRINA DAS PROPORÇÕES, de que trata Euclides *neste, e no seguinte Livro, he como a alma da Geometria; e a que faz mover a todas as partes os seus Theoremas fundamentaes. Porèm sendo tam subtil, como necessaria, alguns a tratão com tanta prolixidade, e outros tão succintamente, que tenho por sem duvida são muy poucos os principiantes, que fazem pleno conceito della; e a comprehendem como he razão.*

Todo o defeito nasce da Def. 5. em que Euclides, *por via de* Equi-multiplices, *explica de tal sórte, ou a natureza, ou a propriedade das Razões Semelhantes, e Dessemelhantes, que verdadeiramente ficão embaraçadas, e pouco perceptiveis as Demonstra-*

monstrações: razão porque outros (por não confundir logo ao principio os principiantes) a explicão só por numeros, e por huns termos tam superficiaes, que as Demonstrações ficão ineptas, e sem energia: e o peyor he, que a doutrina fica mutila, e sem se estender à mais que à Quantidades Racionaes; *sendo assim, que não só deverá comprehender as* Irracionaes; *senão ainda todas aquellas couzas, que tem connexão com a Quantidade; como são* Motos, Velocidades, Durações, Pezos, Forças, Intenções de vozes &c.

Pelo que parece-me que farey qualquer serviço aos candidatos da Geometria, se lhes expuzer este livro com toda a claridade, energia, e desembaraço; regulando as suas Demonstrações pelo Methodo dos Modernos, chamado das Equi-aliquotas: *cujo principio huma vez demonstrado, nem molesta por prolixo, nem deixa ineptas as Demonstrações.*

DEFINIÇÕES.

1. PArte: se diz huma quantidade pequena comparada com outra mayor.* He em 2. differenças; *Aliquota*, e *Aliquanta*: a *Aliquota*, he a que repetida algumas vezes mede exactamente a quantidade mayor: a *Aliquanta*, he a que repetida não a mede; porque ou excede, ou não chega: v.g. 3. he parte aliquota de 9. e aliquanta de 8.

2. *Multipla*, ou *Multiplice* de alguma quantidade

de: he a que contem precisamente algumas vezes a ditta quantidade: v.g. 12. he multipla, ou multiplice de 3. * *Aliquota*, e *Multiplice* são correllativos.

3. *Razão*, ou *Proporção*: he o respeito, que ha entre 2. quantidades homogeneas, segundo o modo com que huma inclue, ou he incluida na outra. * Quantidades homogeneas [isto he da mesma natureza] são aquellas que diminuidas, ou augmentadas se podem exceder, ou igualar; como linhas com linhas; superficies com superficies; angulos com angulos &c. Entre estas sómente he que se pode dar comparação.

* *Em toda a Razão ha 2. termos; hum que se compara, e outro com quem se compara: o primeiro se chama* Antecedente; *o segundo* Consequente. *A Razão, ou he de igualdade, ou de desigualdade; e esta, ou de mayor, ou de menor desigualdade. Razão de igualdade, he quando se compara igual com igual: Razão de desigualdade, he quando se compara mayor com menor; ou menor com mayor.*

4. *Razão*, ou *Proporção Racional*: he a que se dâ entre 2. quantidades commensuraveis; ou que se podem exprimir por numeros. *Razão*, *ou Proporção Irracional*: he a que se dâ entre 2. quantidades incõmensuraveis, ou que se não podem exprimir por numeros, nem inteiros, nem quebrados. * Quantidades commensuraveis são aquellas, a quem mede alguma medida commua: incommensuraveis, as que nenhuma medida commua pode medir.

5. Duas Razões A para B; C para D, são *Semelhantes*, *Iguaes*, e as *Mesmas*; quando o antecedente da primeira A contem, ou he conteudo do mesmo modo no seu consequente B; como o antecedente da segunda C contem, ou he conteudo no seu consequente C. * Porèm, que couza seja este conter, ou ser conteudo *do mesmo modo*, quando as quantida- Fig. 1.

des

des ſão incommenſuraveis; iſto he o que ſe dezeja ſaber, e o que não ſe acha com claridade na Def. de *Euclides*, como logo veremos.

Os 4. termos de 2. Razões Semelhantes ſe chamão ordinariamente Proporcionaes; *razão porque alguns fazem differença entre* Razão, *e* Proporção: *a* Razão, *dizem, he aquella, que ſe dá entre duas quantidades: a* Proporção, *a que ſe dá entre duas razões. Porém outros confundindo a Razão com a Proporção, chamão* Proporcionalidade, ou Analogia, *á Semelhança das Razões. Cada hum pode fallar como quizer; porque de hum, e outro modo coſtumão fallar Authores graves. Veja-ſe* Clavio, Tacquet, e De-Chales.

Fig. 2. 6. Duas razões A para B, C para D; ſão *Deſſemelhantes*, *Deſiguaes*, *e Diverſas*; quando o Ant. da 1. A inclue, ou he incluido differentemente em ſeu Conſeq. B, que o Ant. da 2. C em ſeu Conſeq. D.

7. *Partes Semelhantes*: ſão as que ſe contem em ſeus todos igualmente, e do meſmo modo; iſto he, que tem para ſeus todos a meſma razão.

NOTA.

Q*Uando as partes Semelhantes ſão* Aliquotas, *ou ao menos* Aliquantas Racionaes; *facil he de explicar, que couza ſeja o* Conterſe em ſeus todos do meſmo modo; *ou* Ter para elles a meſma razão: *porquanto, ſe ſão* Aliquotas; *v.g. metades, terças, quartas &c. ja ſe ſabe, que cada todo contem duas vezes a ſua metade; tres a terça; e quatro a quarta &c. E ſe ſão* Aliquantas Racionaes, *v.g. metades acompanhadas de terças, quartas, ou quintas das meſmas metades [o meſmo digo de outras quaeſquer partes] facilmente ſe reduzem a aliquotas; e ſe vê quantas vezes o todo contem as partes das partes.*

Porém quando as partes ſemelhantes ſão Irracio-

naes

naes; *nem tem medida commua por donde se regulem; não sómente he difficil, senão impossivel explicar que couza seja,* o Conter-se nos seus todos do mesmo modo: *v. g. Todos os diametros tem a mesma razão para os lados dos seus quadrados, como constarà da 4. do l. 6. e todos elles são raizes de hum quadrado igual aos 2. dos lados, como consta da 47. do 1. porèm ninguem explicou ategora em termos claros, em que consiste a identidade destas razões.*

Supponhamos que o lado CE tem 3 palmos, cujo quadrado são 9. e que o lado CB tem 5. cujo quadrado são 25 serà o diametro DE raiz quadrada de 18. isto he, pouco menos de 4. $\frac{1}{4}$: e serà AB raiz quadrada de 50. isto he, pouco mais de 7: porém este pouco mais, ou poueco menos he de tal natureza, que nem por numeros inteiros, nem quebrados (por mais, e mais que se quebrem infinitamente) se póde explicar: nem se acharà jàmais medida alguma commua, por pequena que seja, que meça exactamente os lados, e o diametro de qualquer quadrado; como demonstra Euclides *na ultima do l. 10.* Fig. 3.

Peloque, sendo impossivel reduzir a hum conceyto commum a Semelhança de todas as Razões, assim Racionaes, como Irracionaes, para que debaixo de huma mesma regra possão proceder uniformes todas as demonstrações; não hà mais arbitrio, que recorrer a alguma Paixão, ou Propriedade da ditta Semelhança; a qual de tal sorte lhe comvenha, e recorra com ella, que seja hum distinctivo infallivel entre a Semelhança, e a Dessemelhança das Razões: o qual distinctivo, àlem de ser certo, e infallivel, deve tambem ser clarissimo, e evidente; como he, e deve ser todo o Primeiro Principio.

A Propriedade que descobrio Euclides, *e a que insinua na Definição 5. be:* Que então duas razões são semelhantes, quando tomadas quaesquer equi-multiplices dos antecedentes, e quaesquer equi-multiplices dos

P conse-

consequentes ; sempre aquelles são ou juntamente
Fig. 1. mayores , ou juntamente menores , ou juntamente iguaes a estes. *V.g. seja A para B, como C para D: e tomem-se 20A, e 20C (isto he , equi-multiplices dos antecedentes) e 30B, 30D (isto he, equi-multiplices dos consequentes) digo , que sempre que 20A for mayor , ou menor, ou igual a 30B; será tambem 20 C, ou mayor , ou menor, ou igual à 30D: e pelo contrario &c.*

Porém esta Propriedade padece muitas instancias: porquanto , deyxando a ligeira nota de alguns , de que Euclides *define assim a Propriedade, e não a Natureza das Razões Semelhantes ; o que com razão notão todos, he , que esta Propriedade não he de nenhum modo evidente ; nem tam clara , que possa passar por Primeiro Principio: antes, como despois veremos, he huma verdade tam escura , que necessita mais de demonstração , do que outras muitas verdades , que della dependem. Porém, deixando tambem esta nota , à qual todavia se póde acodir , demonstrando o que* Euclides *suppoem ; o que a mim me faz mais força, he , que fundadas neste Principio as Proposições do 5 Livro , ficão as suas demonstrações tam prolixas , e cançadas , que se fazem ordinariamente imperceptiveis aos principiantes. Peloque em lugar das* Equi-multiplices de Euclides, *julguey mais conveniente seguir o Principio dos Modernos das* Equi-aliquotas ; *o qual he desta maneira.*

Razões Semelhantes são aquellas , quando divididos os antecedentes em quaesquer partes aliquotas semelhantes v.g. 10. 100. 1000. 10000. &c. tantas respectivamente cabem a hum , como a outro consequente. *O que digo dos antecedentes a respeito dos consequentes , digo tambem dos consequentes a respeito dos ante-*
Fig. 3. *cedentes. V.g. seja CB para BA, como CE para ED: e dividão-se os antecedentes CB,CE, em* 10. 100. 1000. *ou quaesquer partes aliquotas semelhantes : Digo que*

que de qualquer modo que se faça a divisaõ, sempre hande caber tantas aliquotas de CB em BA, quantas de CE em ED: e que se tantas couberem do mesmo modo em hum, e outro consequente, as Razões serão semelhantes: com advertencia porém que se as dittas aliquotas, em alguma divisão, repetidas igualarem os consequentes, as quantidades serão Racionaes; se não, serão Irracionaes; porèm nunca se darà cazo, em que caybão mais a hum, que a outro consequente. Este em summa o Principio dos Modernos, chamado das Equialiquotas, o qual demonstraremos a baxo no §. 2. dos Theoremas Fundamentaes.

8. As quantidades A,B,C,D,E, &c. são *Continuamente proporcionaes*: quando cada huma das intermedias B,C,D, se toma 2 vezes na comparação; huma vez como consequente a respeito da que fica atraz, e outra vez como antecedente a respeito da que vay adiante: v.g. A he para B, como B para C: B he para C, como C para D: e C he para D, como D para E, &c. Fig. 4.

9, As quantidades A,B,C,D, são *Descontinuadamente proporcionaes*: quando nenhuma se toma duas vezes na comparação: v.g. A he para B, como C para D. Fig. 5.

10. Nas quantidades continuamente proporcionaes A,B,C,D, &c. a primeira A he para terceira C, em *Duplicada razão* da mesma primeira A para a segunda B: e a primeira A he para a quarta D em *Triplicada razão* da mesma primeira A para a segunda B,&c. Fig. 4.

11. *Quantidades Homologas*: são os termos semelhantes de semelhantes razões: isto he, antecedentes com antecedentes, e consequentes com consequentes; v. g. A he para B, como C para D: digo que A e C são quantidades Homologas; como tambem B, e D.

* As seguintes Definições pertencem aos differentes modos de argumentar, de que usão os Geometras;

metras; que he o principal fim para que foi instituido este livro. Para sua intelligencia, e para mayor expedição das Demonstrações, usarey daqui por diante das seguintes

NOTAS.

+ Significa *Composição*: como A+B, vale o mesmo que A mais B.

— Significa *Diminuição*: como A—B, vale o mesmo que A menos B.

: Significa *Comparação*: como A : B, vale o mesmo que A para B.

= Significa *Igualdade*: como A=B, vale o mesmo que A igual à B.

: = : Significa *Igualdade de Razões*: como A:B= C: D, vale o mesmo que A he para B, como C para D. Isto supposto, dem-se 4. termos proporcionaes

A : B= C : D.

9 : 3= 6 : 2.

e seja A para B, como C para D. Digo que

12. *Alternar*, ou *Permutar*: he o mesmo que comparar hum antecedente com outro antecedente; e hum consequente com outro consequente: v. g. A : C=B : D.

14. *Compôr*: he comparar os antecedentes, juntos com os consequentes, com os mesmos consequentes: v.g. A+ B : B= C+D : D.

15. *Dividir*: he comparar os antecedentes; mulctados dos consequentes, com os mesmos consequentes: v.g. A— B : B= C— D : D.

16. *Converter*: he comparar os antecedentes com os mesmos antecedentes, mulctados dos consequentes: v.g. A : A— B= C : C— D.

17. *Argumentar por Igual*, *ou por Igualdade de Razões*: he quando dadas duas series de quantidades com igual numero de termos, e de semelhantes razões [ou sejão continuadamente, ou descontinuadamente

pro-

porcionaes] ſe comparão duas quantidades correſpondentes de cada Serie, omittidas todas as intermedias: v.g.

Primeira Serie	A : B : C : D, &c.
	8 : 4 : 6 : 2.
Segunda Serie	E : F : G : H, &c.
	12 : 6 : 9 : 3.

Seja A para B, como E para F: B para C, como F para G: C para D, como G para H : &c. Digo que ſe ſe compara A com D, e E com H [termos correſpondentes ſegundo a ordem das comparações] ſe argumenta por Igual; ou por Igualdade de Razões.

* A comparação por igual he de 2. modos: *Ordenada*; ou *Perturbada*. A *Ordenada*, he quando as Razões da ſegunda ſerie correſpondem pela meſma ordem âs Razões da primeira: iſto he, a primeira â primeira; a ſegunda â ſegunda; e a terceira â terceira, &c. A *Perturbada*, he quando ſe promove, ou atraza, ou perturba a ordem: iſto he, quando a primeira da primeira correſponde â ſegunda da ſegunda: a ſegunda â terceira: e a ultima â primeira, &c. O exemplo da *Ordenada* he o que fica arriba; o da *Perturbada* he o ſeguinte; em que a ordem das letras indica a ordem das razões.

Primeira Serie	A : B : C : D, &c.
	8 : 4 : 6 : 2.
Segunda Serie	H : E : F : G, &c.
	36 : 12 : 6 : 9.

18 Dadas quaeſquer quantidades A,B,C,D,&c. a razão da primeira para a ultima; iſto he, de A para D, he *Compoſta* de todas as razões entremedias; A para B; B para C; C para D. &c. * Eſta Definição, e a 5. do 6. de quem ella depende, demonſtraremos abaixo no Appendiz 1. §. 12.

THEO-

THEOREMAS
Fundamentaes.

Para que a doutrina das Proporçoes fique firme, e bem assentada nos seus fundamentos; he necessario demonstrar aquelles dous Principios, que dissemos arriba na Nota â Def. 7. para que em qualquer delles que se proceda, fiquem sem escrupulo as demonstrações. Os principiantes poderão omittir todo o §. 1. e passar immediatamente ao 2. e quando ainda este lhes seja molesto, podem omittir ambos; e suppor por agora, como Axioma, o que dissemos no fim da ditta Nota.

§. I.

Explica-se, e demonstra-se o Principio de Euclides das *Equi-multiplices*.

Lemma I.

Fig. 5. *Seja A para B, como C para D: e tomem-se dos antecedentes A,C, quaesquer Equi-multiplices E, F, v.g. 2. duplas; e dos consequentes B, D, outras quaesquer Equi-multiplices G,H, v.g. 2. triplas. Digo que tambem E he para G, como F para H.*

DEm. Porquanto A : B = C : D; tambem 2A : B = 2 C : D. [Tomo este principio como Axioma, por ser evidente] logo E : B = F : D. Porem pela mesma razão, por

por ser E : B = F : D, serà tambem E : 3B = F : 3D; logo E : G = F : G. *Q.E.&c.*

Lemma II.

Se 2 quantidades A,B, tiverem huma medida commua C, serà A tomada tantas vezes, quantas C se inclue em B; igual a B, tomada tantas vezes, quantas o mesmo C se inclue em A.

D*Em.* Supponhamos que C se inclue 6 vezes em A, e 4 vezes em B. He evidente que considerada C como unidade, sera A o mesmo que 6; e B o mesmo que 4. Porèm 2 numeros, de qualquer modo que se multipliquem, sempre fazem o mesmo producto; isto he, 6 multiplicados por 4; ou 4 multiplicados por 6, sempre fazem os mesmos 24. Logo A, tomada 4 vezes, quantas C se inclue em B, he igual a B, tomada 6 vezes, quantas o mesmo C se inclue em A. *Q.E.&c.*

THEOREMA I.

Se a razão de A para B, for mayor que a de C para D; tantas equi-multiplices se poderão tomar dos antecedentes A,C; e tantas dos consequentes B,D, que excedendo a multipla do antecedente A a multipla de seu consequente B, não exceda a multipla do antecedente C, a multipla de seu consequente D.

D*Em.* Porquanto a razão de A para B, he mayor que a de C para D, serà A—X [isto he A menos alguma parte, o que noto assim A—] para B, como C para

C para D [Tomo tambem este principio por Axioma, por ser manifesto] Supponhamos agora que esta tal parte X se inclue 4 vezes em A—: e divida-se A— em taes partes aliquotas, que huma dellas [v.g. huma settima O] se inclua mais vezes em B [v.g. 5.] do que X se inclue em A—: e seja o residuo Z.

Porquanto O he medida commua de A—, e de B—, e se inclue 7 vezes na primeira, e 5 na segunda (*Hyp.*) serà A—, tomada 5 vezes, igual à B—, tomada 7 (*Lem.* 2.) porèm a particula Z, tomada tambem 7 vezes, he menor que a particula X, tomada 5 [por ser 5 X mayor que A— (*Hyp.*) isto he mayor que 7 O (*Hyp.*) isto he muito mayor que 7 Z; por ser Z menor que O] logo ajuntando estas duas quantidades desiguaes âs outras 2 iguaes; isto he, ajuntando 5 X à 5 A—, e 7 Z à 7 B—; serà toda a A, tomada 5 vezes, mayor que toda a B, tomada 7.

Porèm C, tomada 5 vezes, he menor que D, tomada 7 [Porquanto, pelo discurso arriba, 5. A— são iguaes a 7 B—; e por consequencia menores que 7 B: porèm sendo A—: B = C : D (*Hyp.*) tambem 5 A—: 7 B = 5 C : 7 D (*Lem.* 1.) logo sendo 5 A— menores que 7 B, tambem 5 C serão menores que 7 D] logo, sendo a razão de A para B, mayor que a de C para D, tantas equi-multiplices se pòdem tomar dos antecedentes A, C; e tantas dos consequentes B, D; que excedendo a multipla do antecedente A a multipla do seu consequente B, não exceda a multipla do antecedente C a multipla do seu consequente D. *Q. E. &c.*

THEO-

THEOREMA 2.

Se quaesquer equi-multiplices dos antecedentes A,C, forem sempre, ou juntamente mayores, ou juntamente menores, ou juntamente iguaes, a quaesquer equi-multiplices dos consequentes B,D; as razões de A para B, e de C para D, serão iguaes. Fig. 8.

D*Em.* Se o não são: seja v.g. a de A para B maior: logo tantas equi-multiplices se poderão tomar dos antecedentes, e consequentes de huma, e outra, que excedendo a multipla do ant. A a multipla do consequente B, não exceda a multipla do ant. C a multipla do cons. C (*Theor. ant.*): porem isto destroe a hyp. logo &c.

THEOREMA 3.

Se tanto dos antecedentes A,C, como dos consequentes B,D, se poderem tomar taes equi-multiplices, que excedendo a multipla do ant. A a multipla do seu cons. B, não exceda a multipla do ant. C a multipla do seu cons. D; será a razão de A para B, maior que a de C para D. * He conversa da 1. Fig. 8.

D*Em.* Primeiramente a razão de A para B, não he igual â de C para D; como se infere do Lem. 1. Tambem não he menor; porque a sello, sempre as equi-multiplices de A terião menor razão para as equi-multiplices de B, q̃ as equi-multiplices de C para as equi-multiplices de D; como se infere claramente do mesmo Lem. e por conseq. nunca podia succeder, que excedendo a multipla de A a multipla de B, não excedesse tambem a multipla de C a multipla de D (*contra a hyp.*) logo necessariamente hade ser maior. *Q. E, &c.*

THEOREMA 4.

Quando as razões ſemelhantes ſão Irracionaes, nunca pode ſucceder, que as multiplas dos antecedentes ſejão iguaes âs multiplas dos conſequentes: porem ſempre lhes fica a outra propriedade indefectivel do ſimultaneo exceſſo, ou defeito das equi-multiplices, demonſtrado no Theor. 2.

DEm. Seja a razão de A para B, irracional. Se a multipla de A podeſſe ſer alguma vez igual â multipla de B; tanto huma, como outra ſerião iguaes a huma terceira Z: porem tanto A, como B, como partes aliquotas da ditta terceira, ſão commenſuraveis com ella; logo ſerião commenſuraveis entre ſi, contra a hyp.

Não obſtante eſta impoſſibilidade, como o Theor. 2. he univerſal, ſempre fica por diſtinctivo infallivel de todas as razões ſemelhantes, aquella ſimultanea correſpondencia, de ſerem as equi-multiplices dos antecedentes à reſpeito das equi-multiplices dos conſequentes, ou ſempre maiores, ou ſempre menores, e ſomente para as racionaes o poderem ſer juntamente iguaes. * Deſembaraçado aſſim o Principio de *Euclides*, por veneração de tam grande Geometra, paſſemos ao dos Modernos.

§. II.

Explica-se, e demonstra-se o Principio dos Modernos das Equi-aliquotas.

THEOREMA 5.

Se os consequentes B, D, ou quasquer aliquotas semelhantes dos mesmos consequentes (v.g. decimas, centesimas, millesimas, &c.) se incluirem sempre em igual numero nos seus antecedentes A, C: as razões de A para B, e de C para D, serão iguaes. Fig. 9.

DEm. Se não o são: seja v.g. a de A para B maior; e por consequencia seja A—X (isto he, A menos alguma parte) para B, como C para D. He evidente, que o consequente B se pode considerar dividido em aliquotas tam pequenas, que huma dellas N seja menor que X: seja pois N huma decima de B; a qual tirada do ant. A, quantas vezes poder ser (v.g. 15.) deixe Y menor que N: serà A—Y : B = 15 : 10.

Divida-se agora o consequente D em 10. partes iguaes; e tire-se humas dellas O do ant. C, quantas vezes poder ser he sem duvida, que ou sobeje, ou não: alguma particula (isto he, ou Z seja alguma couza, ou não) sempre C—*Z* hade incluir tantas vezes a decima de D, quantas A—Y a decima de B (*Hyp.*) logo tambem serà C—Z : D = 15 : 10; e por conseq. A—Y : B = C—Z : D.

Porem A—Y he maior que A—X [por ser X maior que N (*Hyp.*) e N maior que Y] logo maior razão terà A—Y para B, que A—X para o mesmo B; isto he, que C para D (*Hyp.*) e sendo Z alguma couza, muito maior que C—Z para o mesmo D; contra o demonstrado.

THEOREMA 4.

Fig. 10. *Se os consequentes B, D; ou quasquer aliquotas semelhantes dos mesmos consequentes (v.g. N, O) se incluirem desigualmente em seus antecedentes A, C; as razões serão desiguaes: e aquella serà maior, cujo ant. incluir mais aliquotas do seu conseq.*

D*Em.* Inclua-se a aliquota N, decima de B, 20 vezes em A; e inclua-se a aliquota O, decima de D, 18 vezes em C: e seja o residuo X do primeiro ant. menor que N; e o residuo Y do segundo ant. menor que O.

Accrescente-se ao segundo antecedente a parte Z, de sórte que C+Z inclua 20 vezes a aliquota O. Porquanto A—X contèm 20 vezes a decima de B: e C+Z contèm 20 vezes a decima de D; serà A—X : B = C+Z : D : logo accrescentando X ao primeiro antecedente, mayor razão terà A para B, que C+Z para D: e tirando Z ao segundo, muito mayor que C para D: *Q.E.&c.* * Não demonstro as Conversas destas duas Proposições, por serem evidentes.

CONCLUSÃO.

ESTabelecidos estes dous Principios, segue-se que em qualquer delles que se proceda, sempre ficão firmes as demonstrações do 5. e 6. livro: porèm como o segundo he mais claro, e mais expedito, que o primeiro, deste nos serviremos, não sómente nas dittas demonstrações; senão em todas aquellas, que pelo discurso da Geometria dependerem de Proporções.

PROPO-

PROPOSIÇÕES.

Consta este livro de 25. Proposições; das quaes 10. não tem mais uso, que para demonstrar as outras 15. pelo methodo das Equi-multiplices: porèm como o que havemos de seguir he differente, não demonstrarey mais que aquellas 15. conservando comtudo a numeração de Euclides, *por evitar confusão nas citações. A estas 15. e em lugar das 10. que se omittem, ajuntarey outras 10. de* Pappo; *as quaes pela grande connexão, que tem com as de* Euclides, *ha muito que estão na posse de compôr com ellas hum mesmo livro.*

Advirta-se, que aindaque as Proposições deste livro se explicão por linhas, a sua força he mais universal; porque, como disse no Prologo, se estende a todas aquellas couzas, que tem connexão com a Quantidade, como são Motos, Velocidades, Pezos, &c.

AXIOMA.

Dadas 3. quantidades A,B,C, pode-se dar outra quarta X, para a qual tenha a terceira a mesma razão, que tem a primeira para a segunda.

PROPOSIÇÃO I. II. III. IV. V. e VI.

São superfluas no nosso methodo.

PRO-

PROPOSIÇÃO VII.

Fig. 11. *Se as quantidades A, B, forem iguaes; e se der outra terceira Z: serà A para Z, como B para o mesmo Z: e serà Z para A, como o mesmo Z para B.*

Tanto esta, como as quatro seguintes Proposições são puros Axiomas; e não necessitão de demonstração.

PROPOSIÇÃO VIII.

Fig. 12. *Se as quantidades A, B, forem desiguaes; e se der outra terceira Z: serâ a menor A para Z em menor razão, que a mayor B para o mesmo Z: e serà Z para a menor A em mayor razão, que o mesmo Z para a mayor B.*

COnsta manifestamente da Definição 3. Porquanto como a razão não he outra couza mais que o respeito de huma quantidade para outra, segundo a inclusão; claro estâ, que comparando-se v.g. 4. e 6. com 2; assim como 4. contem menos vezes 2. do que 6; assim 2. he menos vezes incluido em 4. que em 6; e por consequencia ao mesmo passo que 4. representa ser menor que 6. a respeito de 2; assim 2. representa ser mayor a respeito de 4. que a respeito de 6.

PROPOSIÇÃO IX.

*Se as quantidades A, B, tiverem para huma terceira Z a mesma razão; serão iguaes entre si.** He puro Axioma. Fig.11.

PROPOSIÇÃO X.

Se a quantidade B tiver mayor razão para Z, que A tem para o mesmo Z; será B mayor que A. E se Z tiver mayor razão para A, que para B; será A menor que B. Fig.12.
* Consta da 8.

PROPOSIÇÃO XI.

Se 2. razões forem iguaes, ou semelhantes a huma terceira razão; serão iguaes, ou semelhantes entre si. Fig.13.

SEja A : B=X : Z ; e seja C : D=X : Z. Digo que A : B=C : D. * He puro Axioma, e corresponde ao 1. do livro 1.

PRO-

PROPOSIÇÃO XII.

Fig. 14. *Se quaesquer quantidades A, C, E, tiverem a mesma razão para outras tantas quantidades B, D, F (cada huma â sua) aquella mesma razão, que tiver qualquer dellas para a sua correspondente (v.g. A para B) essa mesma terão todas as primeiras juntas A+C+E, para todas as segundas juntas B+D+F.*

DEm. Bastarà pôr hum exemplo racional. Se 4. he duplo de 2; e 6. de 3: claro està que 4+6 (isto he, 10.) tambem são duplos de 2+3 (isto he, 5.) E se 10. he duplo de 5; e 8. de 4: tambem 10+8 (isto he, 18.) são duplos de 5+4 (isto he, 9.) logo a mesma razão, que tem cada numero para o seu correspondente, tem tambem todos juntos, para todos juntos, &c. * O que digo das quantidades racionaes, se entende tambem das irracionaes; como constarà despois da Proposição 15. part. 3.

PROPOSIÇÃO XIII. XIV.

São superfluas.

PROPOSIÇÃO XV.

As aliquotas ſemelhantes B, D, tem entre ſi a mesma razão, que os ſeus todos A, C. O meſmo digo das aliquantas ſemelhantes; ou ſejão racionaes, ou não. Poder-ſe-ha tomar como Axioma; porem convêm demonſtralla, por ſer fundamental.* Fig. 15.

DEm. 1. part. As aliquotas ſemelhantes B,D, incluem-ſe nos ſeus todos igualmente, e preciſamente (*Def.* 7.) porèm cada huma das aliquotas de A, he para cada huma das aliquotas de C, como B para D; por ſerem todas reſpectivamente iguaes: logo A [iſto he, todas as aliquotas juntas do primeiro ant.] ſerà para C [iſto he, para todas as aliquotas juntas do 2.] como B para D (12.) *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

A Meſma razão, que tem B para D, tem tambem 2 B para 2 D, e 3 B para 3 D, &c.

2. Part. As aliquantas racionaes ſemelhantes A,C, dos todos G,H, uſão de medidas commuas ſemelhantes B,D; as quaes ſe incluem igualmente, e preciſamente nas partes, e nos todos reſpectivamente (*Def.* 7.) logo ſerà A : C = B : D; e ſerà tambem G : H = B : D (1. *Part.*) Logo (*pela* 11.) ſerà A : C = G : H. *Q. E. &c.* Fig. 5.

3. Part. Se ſendo A para B (aliquanta irracional) como C para D (aliquanta ſemelhante) não for A para C, como B para D: ſeja A — X : C = B : D. Iſto ſuppoſto: por ſerem as partes ſemelhantes proporcionaes aos todos, dividida B em quaeſquer aliquotas, das quaes huma N ſeja menor que X; e dividida D em Fig. 9.

ſemelhantes aliquotas, tantas das primeiras ſe incluiráo em A, quantas das ſegundas em C (*Theor.* 5.) Componháo pois as primeiras A—Y, e as ſegundas C—Z [porque ſendo as quantidades irracionaes, não pode ſer preciſa a incluſão (*Theor.* 4.] logo A—Y : C—Z= B : D (1. *Part.*) porèm A—Y he mayor que A—X (por ſer Y menor que N; e N menor que X) logo A—X terà menor razão para C—Z, que B para D (8.) e por conſequencia muito menor para todo o C, que B para D; contra o ſuppoſto.

PROPOSIÇÃO XVI.

Fig. 15. *Se a primeira A for para a ſegunda B, como a terceira C para a quarta D; ſerà permutando, ou alternando* (Def. 12.) *a primeira A para a terceira C, como a ſegunda B para a quarta D.*

DEm. Supponhamos, que B, D, ſão menores que A, C (porque ſendo iguaes, não tem lugar a demonſtração) Porquanto A he mayor que B, e C mayor que D, ſerão B, D, partes ſemelhantes de A, C, (*Def.* 1.) logo ſerà A : C= B : D (*Ant.*) *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

SE *A for para B, como C para D; ſerà invertendo* (Def. 13.) *B : A= D* : C. * He puro Axioma. No texto de *Euclides* eſte he o Corollario da 4.

PRO-

PROPOSIÇÃO XVII.

Se o antecedente A+B for para o consequente B como o antecedente C+D para o consequente D; será dividindo (Def. 15.) *A, excesso do primeiro antecedente sobre o seu consequente para o mesmo consequente B; como C, excesso do segundo antecedente sobre o seu consequente, para o mesmo consequente D.*

DEm. Porquanto A+B : B=C+D : D, divididos os consequentes B, D, em quaesquer aliquotas semelhantes, sempre estas se incluirão em igual numero nos seus antecedentes A+B, C+D (*Theor.* 5.) logo tirando iguaes numeros de aliquotas semelhantes de hum, e outro antecedente [isto he tirando B de A+B, e D de C+D] ainda ficarão com iguaes numeros de aliquotas os residuos A, C: logo será A : B= C : D (*Theor.* 5.) *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XVIII. Fig. 16

Se o antecedente A for para o consequente B, como o antecedente C para o consequente D; será compondo (Def. 14.) *A+B : B=C+D : D.*

DEm. Porquanto A : B=C : D; devididos os consequentes B, D, em quaesquer aliquotas semelhantes, sempre estas se incluirão em igual numero nos seus antecedentes A, C (*Theor.* 5.) logo accrescentando iguaes numeros de aliquotas semelhantes a ambos os antecedentes (isto he, accrescentando B à A, e D à C) ainda continuarão a ter iguaes numeros de seme-

ſemelhantes aliquotas as compoſtas A+B, C+D: logo pelo meſmo *Theor.* ſerà A+B : B = C+D : D. *Q. E. &c.*

COROLLARIOS.

1. SE for A+B : B = C+D : D; tambem multados os antecedentes dos ſeus conſequentes, ſerão os meſmos antecedentes para os reſiduos proporcionaes; iſto he, ſerà A+B : A = C+D : C.

Dem. Porquanto A+B : B = C+D : D; ſerà dividindo, A : B = C : D (17.) e invertendo, B : A = D : C (*Eſch. da* 10.) logo compondo, ſerá B+A : A = D+C : C (*Ant.*) iſto he, ſerà A+B : A = C+D : C. *Q. E. &c.* * Eſte modo de argumentar chama-ſe *Converſão da razão* (*Def.* 16.)

2. Se for A : A+B = C : C+D; tambem multados os conſequentes dos ſeus antecedentes, ſerão os meſmos antecedentes para os reſiduos proporcionaes; iſto he, ſerá A : B = C : D. E compondo os dittos antecedentes com os meſmos reſiduos, e comparando-os com elles meſmos, ſerà A+B : B = C+D : D.

Dem Porquanto A : A+B = C : C+D; ſerà invertendo, A+B : A = C+D : C. (*Eſch. da* 16.) logo dividindo, ſerà B : A = D : C (17.) e ſegunda vez invertendo, ſerà A : B = C : D. *Que era o primeiro* : e compondo, ſerà A+B : B = C+D : D (18.) *Que era o ſegundo.*

PROPOSIÇÃO XIX.

Se o todo A+B for para o todo C+D, como o tirado B para o tirado D; serà tambem o todo para o todo, como o residuo A para o residuo C.

DEm. Porquanto $A+B : C+D = B : D$; serà permutando, $A+B : B = C+D : D$ (16.) logo por conversão de razão, serà $A+B : A = C+D : C$. (*Cor. 1. da ant.*) e segunda vez permutando, serà $A+B : C+D = A : C$. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XX. e XXI.

São superfluas neste methodo.

PROPOSIÇÃO XXII.

Se em 2 series de quantidades A, B, C, D. &c. E, F, G, H. &c. for a primeira A para a segunda B, como a primeira E para a segunda F: e a segunda B para a terceira C, como a segunda F para a terceira G: e assim por diante (comparando sempre as razões de huma serie com as razões da outra) serà por igual (Def. 17.) *a primeira A para a ultima D da primeira serie, como a primeira E para a ultima H da segunda.* Fig. 18.

DEm. Porquanto $A : B = E : F$; divididos os antecedentes A, E, em quaesquer aliquotas semelhantes, tantas se incluirão respectivamente em B, como mo em F (*Theor*.5.) porèm tambem se incluirão respectivamente tantas em C, como em G: porque de outra sorte não seriáo semelhantes as razões de B para C, e de F para G (*Theor*.6.) logo A : C = E : G (*Theor*.5.) Do mesmo modo provarey, que A he para D, como E para H: logo &c.

PROPOSIÇÃO XXIII.

Fig. 19. *Se em duas series de quantidades for a primeira A para a segunda B, como a primeira D para a segunda E: e a segunda B para a terceira C, como a terceira F para a primeira D: serà por razão perturbada* (Def.17.) *a primeira A para a terceira C, como a terceira F para a segunda E.*

DEm. Faça-se como B para C, assim E para outra G. Porquanto B : C = F : D (*Hyp.*) e B : C = E : G (*Constr.*) serà F : D = E : G (11.) logo permutando, serà F : E = D : G (16.) Porèm D : G = A : C (*Ant.*) logo tambem F : E = A : C (11.) *Q.E.* &c.

ESCHOLIO.

E*Sta Proposição he universal, de qualquer modo que se perturbe a segunda serie; com tanto que se ajuntem nella as mesmas razões da primeira; e se compare o primeiro termo com o ultimo. Veja-se o exemplo seguinte, em que a ordem natural das letras indica a perturbação das razões; e note-se bem esta Proposição para quando se houverem de compôr razões, como diremos a baixo no Appendiz* 1. §. 12.

A : B : C :

A	:	B	:	C	:	D	:	E	:	F
2	:	4	:	1	:	3	:	6	:	9
R	:	O	:	M	:	N	:	P	:	Q
16	:	24	:	6	:	12	:	36	:	72.

PROPOSIÇÃO XXIV.

Se A fôr para C, como D para F; e B para o mesmo C, como E para o memso F: será a composta A+B para C, como a composta D+E para F. Fig. 17.

DEm. Porquanto B : C=E : F, será invertendo, C : B=F : E (*Esch. da* 16.) logo temos duas series de quantidades proporcionaes A, C, B : D, F, E : logo por igual, será A : B=D : E (22.) e compondo, será A+B : B=D+E : E (18.) Porèm B : C=E : F (*Hyp.*) logo segunda vez por igual, será A+B : C=D+E : F. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXV.

Se forem 4. quantidades proporcionaes A+B : C+D=E : F; será a mayor de todas A+B juntamente com a menor F, mayor que as duas intermedias C+D, E. Fig. 20.

DEm. Porquanto A+B : C+D=E : F, tirando da primeira A+B hũma parte A=E; e da segunda C+D outra parte C=F, será A+B : C+D =A : C, e [*pela* 19.] A+B : C+D=B : D. Porèm A+B he mayor que C+D (*Hyp.*) logo tanbem B he mayor que D. Porèm sendo [*pela Constr.*] A=E; e C=F, e $C=F$, he $A+F=C+E$: logo, se se accrescentarem a estas summas iguaes as duas desiguaes B, D; isto he, se se accrescentar à $A+F$ a mayor B, e a $C+E$ a menor D, ficarà a composta $A+F+B$ mayor, que a outra composta $C+E+D$; isto he, serà $A+B$ com F, mayor que $C+D$ com E. *Q. E. &c.*

NOTA.

Jà disse que as 10. *Proposições seguintes não são de* Euclides, *senão de* Pappo Alexandrino: *porèm pela connexão, que tem com as antecedentes, fazem com ellas hum mesmo livro; e continuão a mesma numeração.*

PROPOSIÇÃO XXVI.

Fig. 21. *Se a primeira A tiver maior razão para a segunda B, que a terceira C para a quarta D; terà, invertendo, a segunda B menor razão para a primeira A, que a quarta D para a terceira C.*

DEm. Porquanto A tem maior razão para B, que C para D; serà $A : B+X = C : D$ (10.) logo invertendo, serà $B+X : A = D : C$ (*Esch. de* 16.) e por consequencia terà B para A menor razão, que D para C (8.) *Q. E. &c.*

PRO-

PROPOSIÇÃO XXVII.

Se A tiver maior razão para B, que C para D; tambem permutando, terà A para C maior razão, que B para D.

D*Em.* Por quanto A tem maior razão para B, que C para D; serà A : B+X = C : D (10.) logo permutando, sera A : C = B+X : D (16.) Porem B+X tem maior razão para D, que B para o mesmo D (8.) logo tambem A terà maior razão para C, que B para D. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXVIII

Se A tiver maior razão para B, que C para D; tambem compondo, terà A+B para B maior razão, que C+D para D. Fig. 22.

D*Em.* Porquanto A tem maior razão para B, que C para D; serà A—X : B = C : D (10.) logo compondo, serà A—X+B : B = C+D : D (18.) logo accrescentando X â primeira, serà A+B para B em maior razão, que C+D para D (8.) *Q.E.&c.* * A demonstração sempre he a mesma; ou a primeira razão seja de maior, ou de menor desigualdade.

PROPOSIÇÃO XXIX.

Se A+B para B tiver maior razão, que C+D para D; tambem dividindo, terà A para B maior razão, que C para D.

DEm. Por quanto A+B para B tem maior razão, que C+D para D; ſerà A— X+B : B = C+D : D (10.) logo dividindo, ſerà A— X : B = C : D (17.) logo accreſcentan lo X ao primeiro antecedente, ſerà A para B em maior razão, que C para D (8.) Q. E.&c.

PROPOSIÇÃO XXX.

Se A+B para B tiver maior razão, que C+D para D; terâ convertendo, A+B para A menor razão, que C+D para C.

DEm. Por quanto A+B para B tem maior razão, que C+D para D; tambem dividindo, terà A para B maior razão, que C para D (29.) logo invertendo, terà B para A menor rezão, que D para C (26.) logo compondo, terà tambem B+A para A menor razão, que D+C para C (28.) Q.E.&c.

PROPOSIÇÃO XXXI.

Fig. 23. *Se A para B tiver maior razão, que D para E : e B para C tambem maior razão, que E para F (e aſſim por diante) tambem por igual, terà A para C maior razão, que D para F.*

DEm. Porquanto A para B tem maior razão, que D para E, ſerá A— X : B = D : E (10.) e por quanto B para C tambem tem maior razão, que E para F, ſerá B : C+Z = E : F (10.) logo por igual ſerá A—X : C+Z = D : F (22.) logo accreſcentando X ao primeiro antecedente, ſera A para C+Z em maior razão, que D para F (8.) e tirando Z ao primeiro conſe-

quente

quente, ſerà A para C em muito maior razão, que D para F. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXXII.

Se A para B tiver maior razão, que E para F; e B para C tambem maior razão, que D para E; tambem por igual (em razão perturbada) terà A para C maior razão, que D para F. Fig. 24.

A *Dem.* he a meſma que a antecedente; e ſomente ſe allega a 23. em lugar da 22.

PROPOSIÇÃO XXXIII.

Se a toda A+B for para a toda C+D em maior razão, que a parte B para a parte D; ſerá a meſma toda para a outra toda em menor, que a parte remanente A para a outra parte remanente C. Fig. 20.

D*Em.* Por quanto A+B he para C+D em maior que B para D; ſerà permutando, A+B para B em maior rezão, que C+D para D (27.) logo convertendo, ſerà A+B para A em menor razão, que C+D para C (30.) logo ſegunda vez permutando, ſerâ A+B para C+D em menor razão, que A para C (colhe-ſe da meſma 27.) *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXXIV.

Fig. 24. *Se as razões A para C, e D para F, forem duplicadas de iguaes razões A para B, e D para E; serão iguaes entre si. O mesmo digo se forem triplicadas, ou quadruplicadas, &c.*

D *Em.* Porquanto A para C he em duplicada razão de A para B; será A : B = B : C (*Def.* 10.) e pela mesma razão será D : E = E : F. Porem pela *Hypoth.*. A : B = D : E; e pela 11. B : C = E : F (por ser B : C = A : B; isto he, = D : E; isto he, = E : F) logo por igual será A : C = D : F (22.) *Q.E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXXV.

Fig. 24. *Se as razões iguaes A para C, e D para F, forem duplicadas das razões A para B, e D para E; tambem estas serão iguaes entre si.* * He conversa da antecedente.

D *Em.* Se não o são, seja A : B = D : X; e D : X = X : Z. Porquanto de iguaes razões A para B, e D para X, são duplicadas as razões de A para C, e D para Z; será D : Z = A : C (*Ant.*) isto he, = D : F (*Hyp.*) logo Z = F (9.) e por consequencia X = E. Logo D : X. (isto he,) E = A : B. *Q.E. &c.*

APPENDIZ I.

DOS DENOMINADORES, Algarismo, e Composição das Proporções.

§. I.

DA DIVISÃO DAS PROPORÇÕES.

DIVIDESE a Proporção (como se disse na *Def.* 4.) em *Racional*, e *Irracional*. A *Racional* se divide em Razão de Igualdade, e de Desigualdade; e esta em Razão de maior desigualdade, quando o antecedente he maior que o consequente; e de menor desigualdade, quando o antecedente he menor &c.

A Proporção Racional de maior desigualdade se divide em 5. especies; a saber *Multiplice*, *Super-particular*, *Super-parciente*, *Multiplice Super-particular*, e *Multiplice Super parciente*.

A Multiplice: he quando o antecedente contem precisamente o consequente algumas vezes; como duas, tres, quatro &c. e então se diz ser a razão *Dupla*, *Tripla*, *Quadrupla*, *&c.*

A Super-particular: he quando o antecedente contem

tem o consequente huma só vez, e mais alguma das suas partes aliquotas; como huma metade, terça, quarta, &c. V. g. a razão de 3. para 2. em que o antecedente contem huma vez o consequente, e mais a sua metade, chama-se, *Sesqui-altera*: a de 4. para 3. em que o antecedente contem huma vez o consequente, e mais huma terça, chama-se *Sesquit-ercia*, &c.

A Super-parciente: he quando o antecedente contem o consequente huma só vez, e mais algumas aliquotas, as quaes juntas não fação outra. V. g. 8. para 5. em que o antecedente contem huma vez o consequente, e mais tres quintas: ou 13. para 10. em que o ant. contem huma vez o conseq. e mais tres decimas: &c.

A Multiplice Super-particular: he quando o antecedente contem algumas vezes o consequente, e mais alguma das suas aliquotas. V. g. 5. para 2: ou 9. para 4. &c.

A Multiplice Super-parciente: he quando o antecedente contem algumas vezes o consequente, e mais algumas das suas aliquotas, as quaes juntas não fação outra. V. g. 8. para 3: 15. para 4. &c.

§. II.

Do Denominador da Proporção Racional.

O *Denominador* da Proporção Racional: he aquelle, que distincta, e claramente exprime a razão, que tem hum numero para outro; isto he, o que comparado com a unidade exprime o modo, com que hum numero maior contem outro menor. V. g. o denominador da razão de 24. para 8. he 3: porque 3. se ha para 1. como 24. para 8.

Acha-

Acha-ſe facilmente o denominador de qualquer razão, partindo-ſe o numero maior pelo menor; porquanto o quociente he o denominador que ſe buſca.

$$\frac{24}{8} : \frac{3}{1}$$

A razão he, porque como diremos na Arithmetica, a razão, que tem o quociente para a unidade, he a meſma que tem qualquer numero, que ſe parte, para o ſeu partidor. V.g. deſeje-ſe o denominador da razão de 50. para 6: parta-ſe o numero 50. por 6; e ſerà $8\frac{1}{3}$ (que he o quociente deſta partição) o denominador daquella razão.

§. III.

Do Denominador da Proporção Irracional.

A Nenhuma Proporçaõ Irracional, ſe for huma ſô, ſe pode aſſignar denominador, como he manifeſto: porèm ſe forem muitas, poder-ſe-lhes-ha aſſignar denominador, o qual exprima o modo, com que huma ſe ha para a outra, que he o ſeguinte. Reduzão-ſe as razões dadas a outras ſemelhantes, as quaes tenhão hum conſequente commum: e a razão que tiver hum antecedente para outro, eſſa meſma terà huma razão para outra razão.

B : C. E : F
D . G
X

V.g. ſejão as razões B para C, e E para F, irracionaes; e deſeje-ſe ſaber a razão, que tem huma para outra. Façaſe como B para C, aſſim D para X; e como E para F, aſſim G para o meſmo X; digo que a razão de B para C, he para a razão de E para F, como D para G.

Dem.

D*Em.* Por quanto X neſta reducção ſe conſidera como unidade, farão os antecedentes D, G, as vezes de denominadores das razões propoſtas: logo pelo meſmo modo, com que cada hum ſe ha para a unidade, exprimirão o modo com que ſe hão entre ſi. Veja-ſe a Prop. 8. do l. 5.

§ IV.

AXIOMAS.

1. As razões de A para Z, e de B para Z, as quaes tem hum conſequente cõmum, ſão entre ſi, como os ſeus antecedentes: iſto he, a razão de A para Z he tanto maior, que a de B para Z, quanto A he maior que B: ou pelo contrario, &c. Conſta do ditto.

A. B.
Z.

2. As razões de X para D, e de X para E, as quaes tem hum antecedente commum, ſão entre ſi em razão reciproca dos ſeus antecedentes: iſto he, a razão de X para D he tanto maior, que a de X para E, quanto E he maior que D: ou pelo contrario &c. Veja-ſe a Prop. 8. &c.

X
D . E

3. Quaeſquer razões racionaes tem entre ſi a meſma razão, que os ſeus denominadores. Sejão as razões dadas 3. para 9. e 12. para 4. cujos denominadores ſão $\frac{1}{3}$ e 3. (§. 2.) digo que a razão, que tem entre ſi aquellas duas razões, he a meſma, que a de $\frac{1}{3}$ para 3. Conſta do Ax. 1.

3 : 9 . 12 : 4.
$\frac{1}{3}$ 3.

§. V.

Da somma, e subtracção das razões racionaes.

A Somma se faz, ajuntando todos os denominadores de quaesquer razões dadas, e comparando-os com a unidade: a subtracção ao contrario, tirando o menor do maior, e comparando o residuo com a mesma unidade. V. g. sejão as razões dadas 15. para 3. e 12. para 4. cujos denominadores são 5. e 3: Digo que a sõma destes denominadores (isto he 8.) comparada com a unidade, he a somma das dittas razões: e o residuo dos mesmos (isto he 2.) comparado com a mesma unidade, he o residuo da maior razão, subtrahida a menor. Consta do Ax. 1. e 3.

15	:	3	*	5
12	:	4	*	3
Somm.	8	:	1	
Subtr.	2	:	1	

§. VI.

Da somma, e subtracção das razões irracionaes.

R Eduzão-se as razões dadas a hum consequente commum; e será a somma dos antecedentes, comparada com o ditto consequente, a somma das dittas razões: e o residuo, o residuo das mesmas, &c.

§. VII.

Da multiplicação, e divisão das razões racionaes.

MUltipliquem-se os denominadores das razões dadas, e compare-se o producto com a unidade; será este o producto das dittas razões. Parta-se hum denominador por outro, e compare-se o quociente com a mesma unidade; será este o quociente da partição das mesmas razões. V.g. sejão as razões dadas 9. para 3. e 20. para 5. cujos denominadores são 3. e 4. Digo, que o producto das dittas razões he 12. e o quociente he $\frac{3}{4}$. comparado hum, e outro com a unidade.

9	:	3	*	3
20	:	5	*	4
Prod.		12	:	1
Quoc.		$\frac{3}{4}$	:	1

DEm. Consta manifestamente do Axioma 1. e 3. Porquanto a multiplicação de duas razões não he outra couza mais, que a repetida addição de qualquer dellas, regulada pelas unidades da outra; as quaes, huma vez que estejão reduzidas à denominadores, se manejão como numeros.

§. VIII.

Da multiplicação das razões irracionaes.

COntinuem-se as razões dadas, e compare-se o primeiro com o ultimo termo; será este o producto das dittas razões. V. g. sejão as razões dadas A para B, e D para E. Faça-se como D para E, assim B para huma terceira X. Digo que A para X he o producto das dittas razões.

A	:	B	:	X
D	:	E		

DEm. A razão de A para X reſulta da multiplicação das duas razões A para B, e B para X (*como conſtarà deſpois do* §. 12.) porèm B para X he a meſma razão que D para E (*Conſtr.*) logo reſulta da multiplicação das razões dadas &c.

* Advirta-ſe que as razões dadas ſe podem continuar de dous modos; ou ſubindo a debaixo para riba; ou baixando a de riba para baixo; e iſto ou por razão ordenada, ou perturbada. Vejão-ſe as Propoſições 22. e 23. do 5.

§. IX.

Da diviſão das razões irracionaes.

ENtremetta-ſe entre a razão, que ſe quer partir, a razão por quem ſe hade partir, fazendo-ſe commum à ambas, ou o antecedente, ou o conſequente da primeira razão; e ſerà a razão reſidua o quociente da partição. V. g. queira-ſe partir a razão de D para E, pela razão de A para B. Faça-ſe como A para B, aſſim D para X: ſerà X para E o quociente da partição. Ou tambem: faça-ſe como A para B aſſim X para E; ſerâ D para X o outro quociente.

D	:	X	:	E
A	:	B		

DEm. Pelo §. ant. a razão de D para E reſulta da multiplicação das duas razões D para X, e X para E: logo ſe repreſentar qualquer dellas a razão de A para B, ſerà a remanente o quociente da partição.

§. X.

Da compoſição das razões.

HUma razão ſe diz ſer compoſta de outras razões, quando os termos Homologos ſe multiplicão entre ſi, e ſe comparão os productos: ou tambem, quando ſe multiplicão os denominadores, e ſe compara o producto com a unidade. * Eſta he a 5. Definição do livro 6. de que fallàmos ao principio deſte livro Def. ult.

Dem ſe as razões 12. para 4. e 15. para 3. cujos denominadores ſão 3. e 5. Digo que ou ſe multipliquem os termos Homologos das dittas razões (iſto he o antecedente com o antecedente, e o conſequente com o conſequente) e ſe comparem os product. 180. com 12. entre ſi: ou ſe multipliquem os denominadores, e ſe compare o producto 15. com a unidade, ſempre ſe terà huma meſma razão, a qual ſe diz compoſta daquellas duas.

12	:	4	*	3
15	:	3	*	5
Compoſição				
180	:	12	*	15 : 1.

§. XI.

A compoſição das razões não he outra couza mais, que a multiplicação das meſmas razões.

DEm. Conſta do §. 7. que a razão que reſulta da multiplicação de quaeſquer razões, he aquella que reſulta da multiplicação dos ſeus denominadores, comparado o producto com a unidade; porèm (*pela Def. do l. 6. citada*) a razão que reſulta da ditta multiplicação ſe diz *Compoſta* das meſmas razões: logo a compoſição, e a multiplicação coincidem.

Lemma.

Lemma.

Achar o denominador do producto de duas razões.

ASſim como a multiplicação de dous numeros não he outra couza mais, que achar hum terceiro, para o qual ſeja qualquer dos dados, como a unidade para o outro: aſſim tambem a multiplicação de duas razões não he outra couza mais, que achar huma terceira razão, para a qual ſeja qualquer das dadas, como a unidade para a outra. E como quaeſquer razões [ſejão racionaes, ou não] reduzidas a hum conſequente commum ſão entre ſi como os ſeus antecedentes (*Ax.* 1.) ſegue-ſe que para ſe achar facilmente eſta terceira razão, não ha mais que reduzir as razões dadas a hum conſequente cõmum [o qual neceſſariamente tem as vezes de unidade] e fazer que eſte tal conſequente ſeja para qualquer dos antecedentes, como o outro para hum quarto: porquanto eſte quarto, comparado com o meſmo conſequente commum, exprimirà a razão que ſe buſca.

§. XII.

Dadas quaeſquer quantidades, ou numeros, a razão do primeiro termo para o ultimo he compoſta de todas as razões intermedias.

ESte celebre Theorema he tam difficil de demonſtrar, que alguns inſignes Geometras, o tomarão por Primeiro Principio; certificados da ſua verdade, e deſeſperados de lhe achar demonſtração: ſómente em numeros o demonſtrou *Theon*, *Eutocio*, e *Vite-*

e *Vitelio*: porèm o Padre *Tacquet*, fundado no *Lemma ant.* não achou difficuldade em demonſtrallo em numeros, e em quantidades, pela maneira ſeguinte.

Demonſtra-ſe em quantidades.

SEjão dadas quaeſquer quantidades A, B, C, D. &c. deve-ſe demonſtrar, que a razão de A para D, he compoſta das razões intermedias A para B, B para C, e C para D. Diſponhão-ſe as duas primeiras razões, como moſtra a figura; e para que tenhão ambas hum conſequente commum, que ſirva de unidade, faça-ſe como C para B, aſſim B para hum quarto E. He ſem duvida, que ſe pelo *Lemma ant.* ſe buſcar o producto deſtas duas razões fazendo-ſe como B para E, aſſim A para hum quarto M; ſerà M para B o denominador do ditto producto; ou a razão compoſta das dittas duas razões (ſegundo o que fica ditto no §. 11.) Porèm por ſer invertendo, M para A, como E para B; iſto he, como B para C (*Conſtr.*) he alternando, M para B, como A para C: logo a razão compoſta das duas primeiras razões, he como a primeira quantidade para a terceira. Do meſmo modo ſe demonſtra ſer a razão compoſta de todas tres, como A para D; e aſſim de outras muitas: logo &c.

Fig. 25.

A	: B	: C	: D.	&c
A.	B.	E *	M.	M
··	··	··	··	··
B	C	B *	A.	B.

Demonſtra-ſe em numeros.

SEjão dados os numeros 8. 6. 4. 2. &c. Diſponhão-ſe da meſma ſorte as duas primeiras razões 8. para 6. e 6. para 4: e para que tambem tenhão hum conſequente commum, faça-ſe como 4. para

8	: 6	: 4	: 2.	&c.
8.	6.	9 *	12.	12.
··	··	··	··	··
6.	4.	6 *	8.	6.

ra

ra 6. aſſim 6. para 9. Multipliquem-ſe, ou componhão-ſe pelo *Lemma ant.* eſtas duas razões; e faça-ſe como 6. para 9 aſſim 8. para 12. Digo que tambem 12. he para 6. [iſto he, o producto das duas razões comparado com o conſequente commum, o qual faz as vezes de unidade] como 8. para 4. iſto he, como o primeiro numero para o terceiro.

A demonſtração he a meſma: porquanto invertendo, 12. he para 8. como 9. para 6. iſto he, como 6. para 4. (*Conſtr.*) logo alternando, ſerà 12. para 6. como 8. para 4. *Q.E.&c.*

ESCHOLIO.

Mais facilmente, e ſem recorrer âquelle Lemma, ſe pode demonſtrar o meſmo Theorema neſta forma. Porquanto 8. *e* 6. *ſão antecedentes; e* 6. *e* 4. *conſequentes; comparado o producto dos primeiros com o producto dos ſegundos, darſe-ha huma razão compoſta das duas razões* (§. 10.) *porem (por ſer o quociente o meſmo)* 6. *vezes* 8. *he para* 6. *vezes* 4. *como* 8. *para* 4. *logo &c. Do meſmo modo ſe demonſtra nas quantidades, como conſtarà da primeira do ſeguinte livro.*

8.	6	*	48
..	..		
6.	4	*	24.

§. XIII.

A razão compoſta de quaeſquer razões não he o meſmo que a ſomma dellas.

COnſta manifeſtamente dos §§. 5. 6. e 12. Porquanto a ſomma de quaeſquer razões ſe acha ajuntando os denominadores; e a compoſição multiplicando-os: logo não podem ſer o meſmo, ſalvo no cazo, em que a ſomma equivalha â multiplicação, como no numero 2. o qual, ou multiplicado, ou ſômado comſigo meſmo, ſempre faz o meſmo 4.

ELEMEN-

ELEMENTOS DE GEOMETRIA LIVRO VI.

EXPOSTA ASSIM EM GERAL a doutrina das Proporções, passa Euclides *neste livro a applicalla aos Planos. E aindaque esta applicação era indifferente, porque, como temos ditto, a podera applicar a qualquer especie da Quantidade: comtudo pareceo ao Summo Geometra applicalla particularmente aos Planos; tanto para cabal intelligencia da materia, como para deixar de caminho estabelecidos os principios mais essenciaes, de que hade depender despois a doutrina dos Solidos.*

Todas as Proposições deste livro são tam engenhosas, como necessarias: razão porque não notarey nenhuma em particular; porque o admiravel he caracter de todas.

DEFINIÇÕES.

1 FIGURAS *Rectilineas Semelhantes*: são aquellas, que tem os angulos respectivamente iguaes; e os lados, que os comprehendem [ou sejão os que se

oppoem, ou os que exiſtem entre iguaes angulos) ordenadamente proporcionaes; iſto he, todos os antecedentes em huma figura, e todos os conſequentes em
Fig. 31. 31. outra. * V.g. os Trapezios DB, HF, ſão figuras ſemelhantes; porque além de terem iguaes os angulos correſpondentes; iſto he, D=H, C=G, B=F, e A=E: tem tambem os lados, que comprehendem os dittos angulos, ordenadamente proporcionaes; iſto he, DC: HG = CB: GF = BA: FE = AD: EH.

2. *Figuras Reciprocas, ou Reciprocamente proporcionaes*: ſão aquellas que tem os lados conjunctos, ou os que comprehendem quaeſquer angulos iguaes, arrevezadamente proporcionaes: iſto he, hum antecedente em huma figura, e outro antecedente em outra. *
Fig. 26. V.g. os Parallelogramos X, Z, ſão reciprocos; porque tem os lados, que comprehendem os angulos iguaes em O, arrevezadamente proporcionaes; iſto he, AO: OB = CO: OD.

3. Huma recta ſe diz eſtar dividida em *Media*, e *Extrema Razão*: quando a toda he para huma parte,
Fig. 37. como eſſa meſma parte para a outra.* V.g. CB, eſtâ cortada em A em *Media*, e *Extrema Razão*, quando CB: CA = CA: AB.

4. *A Altura de qualquer figura*: he a perpendicular tirada do vertice â baſe; eſtendida eſta quando ſe-
Fig. 2. 2. ja neceſſario.* V.g. BX, he a altura do triangulo ABC: e PZ, a do triangulo OPQ.

5. *Razão compoſta de outras razões*: he a que reſulta da multiplicação dos termos homologos das dittas razões. * V.g. a razão compoſta das duas razões A para B, e D para E, he AD para BE. Veja-ſe o que diſſemos no §. 12. do Appendiz ant. aonde deixamos eſtablecido, que ſe ſe fizer como D para E, aſſim B para huma terceira X; ſerà A para X a razão compoſta das dittas razões: e aquella meſma que reſulta dos termos homolo-

A:	B:	X
D:	E	
AD:	BE.	

homologos multiplicados, AD para BE.

6 *Arcos Semelhantes*: são os que tem para as suas circunferencias a mesma razão.

PROPOSIÇÃO I. *Theorema*

Os Triangulos ABC, OPQ, que tem a mesma altura PX, ou existem entre as mesmas Parallelas; são entre si como as bases AC, OQ. O mesmo digo dos Parallelogrammos DC, OR. Fig. 1. 1.

DEm. Divida-se a base de hum, OQ, em quaesquer aliquotas OG, GH, &c. e tiremse do vertice as rectas PG, PH, &c. Consta da 38. do 1. que todos aquelles triangulos parciaes OPG, GPH, &c. são iguaes entre si: e que tanto a base, como o triangulo total, estão divididos em semelhantes aliquotas. Tome-se agora da base do outro AC, a aliquota OG, quantas vezes puder ser: isto he, AE, EF, &c. e tirem-se do vertice as rectas BE, BF, &c. Tambem he sem duvida, que todos aquelles triangulos parciaes ABE, EBF, &c. são iguaes entre si, e aos primeiros: e que tantas aliquotas da base OQ, contèm a base AC, quantas do triangulo OPQ, contèm o triangulo ABC. Porèm pelo mesmo discurso, o que digo destas, se entende de quaesquer outras: logo pelo *Theor. 5. do livro 5.* a base he para a base, como o triangulo para o triangulo. *Q. E. &c.*

Dos Parallelogrammos consta manifestamente, por serem duplos dos triangulos (41. 1.)

COROLLARIO.

Fig. 2. 2. OS triangulos ABC, OPQ, que tem a meſma, ou iguaes baſes AC, OQ, ſão entre ſi como as alturas BX, PZ.

Dem. Tomem-ſe QX, ZE, iguaes à AC, OQ; e tirem-ſe as rectas BQ, PE. Se nos triangulos BXQ, PZE, ſe tomarem as rectas BX, PZ, por baſes; e QX, ZE, por alturas; como eſtas ſão iguaes, ſerão os dittos triangulos como as baſes (*Ant.*) porèm eſtes ſão reſpectivamente iguaes aos dados (38. 1.) logo tambem aquelles ſerão entre ſi como as dittas baſes; iſto he, como as ſuas alturas BX, PZ. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO II. *Theor.*

Fig. 3. *Se dentro de hum triangulo QPO ſe tirar huma parallela AB a qualquer dos lados QO; cortarà eſta proporcionalmente os outros dous lados PQ, PO: iſto he, ſerà PA : AQ = PB : BO. E pelo contrario, ſe cortar os lados proporcionalmente, ſerà parallela ao terceiro.*

DEm. 1. part. Tirem-ſe as rectas AO, BQ. Porquanto os triangulos AQB, AOB tem a meſma baſe, e eſtão entre as meſmas parallelas, ſão iguaes entre ſi (37. 1.) logo o triangulo APB tem para hum, e outro a meſma razão (7. 5.) porém tem para o primeira a razão de PA para AQ; e para o ſegundo a razão de PB para BO (*Ant.*) logo PA : AQ = PB : BO (11. 5.) *Q. E. &c.*

2. Part. PA : AQ = PBA : ABQ; e PB : BO = PAB : BAO (*Ant.*) porém PA : AQ = PB : BO (*Hyp.*)

(*Hyp.*) logo PBA : ABQ = PAB : BAO (11. 5.) Porèm PBA, e PAB he o mesmo triangulo: logo os dous ABQ, BAO são iguaes entre si (9. 5.) e por consequencia existem entre duas parallelas (39. 1.) *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

SE à qualquer lado OQ de hum triangulo se tirarem muitas parallelas AB, CD, EF; serão todos os segmentos dos outros dous lados PO, PQ, ordenadamente proporcionaes. Fig. 4.

Dem. Tire-se do ponto E a recta EX, parallela a PQ. As rectas EV, VX, são iguaes âs rectas FB, BQ (34. 1.) porèm EA : AO = EV : VX (*Ant.*) logo tambem EA : AO = FB : BQ. Do mesmo provarey ser EC : CA = FD : DB; e ser PE : EC = PF : FD, &c. logo &c.

PROPOSIÇÃO III. *Theor.*

Se a recta BO cortar pelo meyo o angulo B de qualquer triangulo ABC; serão os segmentos da base AO, OC, na mesma proporção que os lados adherentes AB, BE. E se os dittos segmentos forem na mesma proporção, que os dittos lados; cortarà a recta BO o angulo B pelo meyo. Fig. 5.

DEm. 1. part. Continue-se o lado CB atè que BD seja igual a BA; e tire-se a recta DA. Porquanto o triangulo X, he isósceles, serão os angulos D, *u.* oppostos a iguaes lados, iguaes (5. 1.) porem o angulo externo CBA he igual a estes dous internos (32. 1.) logo a sua metade *e.* he igual a hum sò D; e por consequencia as rectas BO, DA, são parallelas (29. 1.) Logo no go no triangulo DCA, AO he para OC, como BD (isto he AB) para BC (*Ant.*) *Q. E. &c.*

2. Part. Porquanto AO : OC = AB : BC (isto he) = DB : BC (*Constr.*) serão as rectas DA, BO, parallelas (*Ant.*) logo o angulo externo *e.* he igual ao interno D (27.1.) e o interno *i.* a seu alterno *u.* Porèm pela igualdade dos lados DB, AB, os angulos D, *u.* são iguaes entre si (5. 1.) logo tambem o serão *i. e.* e por consequencia o angulo B, està dividido pelo meyo.

PROPOSIÇÃO IV. *Theor.*

Fig. 5, 6. *Os triangulos BCA, DCE, respectivamente equiangulos, tem tambem os lados respectivamente proporcionaes; e por consequencia são figuras semelhantes* (Def. 1.)

D*Em.* Colloque-se o segundo sobre o primeiro de sorte, que se fiquem correspondendo os angulos iguaes. Porquanto o externo D, he igual ao interno B, serão as rectas DE, BA parallelas (29.1.) logo CD : DB = CE : EA (2.) e compondo, CD : CB = CE : CA (18. 5.) Do mesmo modo mostrarey ser CE : CA = DE : BA [pondo o angulo D sobre o angulo A] logo &c.

COROLLARIO.

Fig. 7. 1. SE se tirar huma parallela CD, a qualquer lado BE de hum triangulo; serà o triangulo parcial CAD, semelhante ao total BAE; e por consequencia serà AC : AB = CD : BE.

2. Se no mesmo triangulo se tirar do angulo opposto âs dittas parallelas huma recta AX, as cortarà proporcionalmente. Porquanto por ser AO : AX = CO : BX; e juntamente = OD : XE; serà CO : BX = OD : XE

XE (11.5.) logo permutando, ferà CO : OD = BX : XE (16.5.)

PROPOSIÇÃO V. *Theor.*

Se dous triangulos CBA, CDE, tiverem os lados reſpectivamente proporcionaes; ſerão reſpectivamente equiangulos: e por conſequencia ſemelhantes. Fig. 6. 6.

DEm. Sobre a baſe CE do ſegundo triangulo, imagine-ſe outro terceiro CQE, equiangulo ao primeiro; de ſorte que ſejão os angulos *o. u.* iguaes aos angulos C, A, &c. Porquanto CB : CD = CA : CE (*Hyp.*) ſerà permutando, CB : CA = CD : CE. E porquanto CB : CQ = CA : CE (*Ant.*) ſerà tambem permutando, CB : CA = CQ : CE. Logo CD : CE = CQ : CE (15. 5.) e por conſequencia CD, CQ, ſão iguaes (7. 5.) Do meſmo modo moſtrarey ſerem tambem iguaes ED, EQ: logo os triangulos CDE, CQE, ſão reſpectivamente equilateros, e equiangulos; e por conſequencia &c.

PROPOSIÇÃO VI.

Se dous triangulos BCA, DCE, tiverem os angulos C, C, iguaes, e os lados, que os comprehendem, reſpectivamente proporcionaes (iſto he, CB : CD = CA : CE) ſerão ſemelhantes. Fig. 6. 6.

DEm. Feita a meſma conſtrucção, moſtrarey com o meſmo diſcurſo, que os lados CD, CQ, ſão iguaes: porem os angulos em C (*da 2. Figura*) tambem ſão iguaes [o de ſima pela *Hyp.* e o debaixo pela *Conſtr.*]

Constr.] e o lado CE commum: logo os triangulos DCE, QCE são respectivamente equilateros, e quiangulos (4. 1.) e por consequencia &c.

PROPOSIÇÃO VII.

He inutil.

PROPOSIÇÃO VIII. *Theor.*

Fig. 8. *No triangulo rectangulo ECD, a perpendicular CO, tirada do angulo recto â base, forma outros dous triangulos X, Z, semelhantes entre si, e ao total.*

D*Em.* O triangulo X, he equiangulo ao total CED: por ser o angulo E commum; os angulos O, C, rectos; e por conseq. *a.* D, iguaes (32. 1.) Do mesmo modo, o triangulo Z, he equiangulo ao mesmo total: logo ambos são equiangulos entre si; e por conseq. todos tres semelhantes (4.) *Q. E. &c.*

COROLLARIOS.

1. A perpendicular CO he media proporcional entre os segmentos da base EO, OD.

Dem. Os angulos *a.* E, do triangulo X, são iguaes respectivamente aos angulos D, *i.* do triangulo Z: logo os lados oppostos aos primeiros são respectivamente proporcionaes aos oppostos aos segundos (4.) isto he, EO: CO = CO: OD: logo &c.

2. O lado CE, he medio proporcional entre a base ED, e o segmento conjuncto EO: da mesma sorte o lado CD, he medio proporcional entre a mesma base DE, e o segmento conjuncto DO.

Dem.

Dem. Os angulos C,D, do triangulo total ſão reſpectivamente iguaes aos angulos O,*a*. do triangulo X: logo pela meſma razão ED : CE = CE : EO &c.

PROPOSIÇÃO IX. *Probl.*

Dada a recta Z, dividilla na razão dada (ÇO : OA.) Fig. 9.

COnſtr. Ajuntem-ſe os termos da razão dada em huma recta CA; e tire-ſe do ponto C, com qualquer inclinação, a recta infinita CX: tome-ſe nelſta CB = Z; ajuntem-ſe os pontos A,B; e tire-ſe do ponto O huma parallela à AB: ſerà o ponto Q, a diviſão que ſe pede. Conſta da 2. deſte.

PROPOSIÇÃO X. *Probl.*

Dada a recta AB, dividilla em tantas partes, e nas meſmas razões, em que eſtâ dividida a recta AC. Fig. 10.

C *Onſtr.* He a meſma que a da antecedente, e conſta do Cor. da meſma 2.

ESCHOLIO.

DEſta Propoſição ſe colhe hum modo facil de dividir huma recta em quaeſquer partes iguaes; que he o ſeguinte. Seja a recta dada AC; e queira-ſe dividir em 3. partes iguaes. Tire-ſe do ponto A, huma recta infinita AX; e tomẽ-ſe nella com qualquer abertura de compaſſo 3. intervallos iguaes AF, FO, OB. Ajuntem-ſe os extremos B, C; e tirem ſe as parallelas FG, OQ. &c.

Esta praxe de cortar huma recta por via de parallelas he muy sogeita a erro: pelo que darey dous modos de Maurolyco *mais seguros, e igualmente expeditos.*

Por outro modo: sejão as rectas dadas AC, CB, formese com ellas hum angulo recto ACB: ajuntemse os pontos A, B; e tirese do ponto B, huma perpendicular BO, a qual continuada occorra à primeira AC, tambem continuada, em O. Digo que CO, he a terceira proporcional, que se pede. Consta do Cor. 1. da 8. Fig. 14.

ESCHOLIO.

NÃo parece que serà fora do meu instituto, dar aqui o modo de continuar qualquer Progressão Geometria Decrescente (isto he de mayor desigualdade) não somente por alguns termos, senão por infinitos: e determinar juntamente a somma de todos. Trata deste Problema, e absolutamente de toda a doutrina das Progressões o Padre Gregorio de S. Vicente *da Companhia de JESUS, com tanta novidade, subtileza, e claridade, que não parece que se pode discorrer com mais acerto nesta materia. A summa da sua doutrina darey com alguma extensão na* Geometr. Pract. *por agora, seguindo ao* Padre Taquet, *tambem da Companhia, illustrarey sómente este problema, para satisfazer aos curiosos.*

Lemma 1.

Se a razão de menor desigualdade (BA : CA) se continuar por infinitos termos; virse ha a huma quantidade mayor que qualquer assignada.

TRansfirãose todos os termos da ditta progressão para a recta FA, termo ultimo. Porquanto $BA : CA = CA : DA$, será invertendo, $DA : CA = CA : BA$; e dividindo, $DC : CA = CB : BA$; e alternando $DC : CB = CA : BA$. Porém CA he mayor que BA (Hyp.) *logo tambem DC he mayor que CB. Do mes-*

igualdade das rectas AO, BC] BA : BC = BC : CQ. &c.

Por

Por outro modo: ſejão as rectas dadas AC, CB, e forme-ſe com ellas hum angulo recto ACB: ajuntem-ſe os pontos A,B; e tire-ſe do ponto B, huma perpendicular BO, a qual continuada occorra à primeira AC, tambem continuada, em O. Digo que CO, he a terceira proporcional, que ſe pede. Conſta do Cor. 1. da 8. Fig. 14.

ESCHOLIO.

NAõ parece que ſerà fora do meu inſtituto, dar aqui o modo de continuar qualquer Progreſſão Geometria Decreſcente (iſto he de mayor deſigualdade) não ſomente por alguns termos, ſenão por infinitos: e determinar juntamente a ſomma de todos. Trata deſte Problema, e abſolutamente de toda a doutrina das Progreſſões o Padre Gregorio de S. Vicente *da Companhia de JESUS, com tanta novidade, ſubtileza, e claridade, que não parece que ſe pode diſcorrer com mais acerto neſta materia. A ſumma da ſua doutrina darey com alguma extenſão na* Geometr. Pract. *por agora, ſeguindo ao* Padre Taquet, *tambem da Companhia, illuſtrarey ſómente eſte problema, para ſatisfazer aos curioſos.*

Lemma I.

Se a razão de menor deſigualdade (BA : CA) ſe continuar por infinitos termos; vir-ſe ha a huma quantidade mayor que qualquer aſſignada. 15.

TRansfirão-ſe todos os termos da ditta progreſſão para a recta FA, termo ultimo. Porquanto $BA : CA = CA : DA$, *ſerá invertendo,* $DA : CA = CA : BA$; *e dividindo,* $DC : CA = CB : BA$; *e alternando* $DC : CB = CA : BA$. *Porém CA he mayor que BA* (Hyp.) *logo tambem DC he mayor que CB. Do* *mesmo modo mostrarey ser ED mayor que DC; FE mayor que ED, &c. logo como continuando-se a progressão na quella recta, se vão successivamente accrescentando partes mayores, e mayores, necessariamente se hade vir a huma quantidade mayor que qualquer assignada.*

Lemma 2.

Fig. 20. Se a razão de mayor desigualdade (FA : EA) se continuar por infinitos termos; vir-se-ha a huma quantidade menor que qualquer assignada.

Fig. 19. e 18. *SEja a progressão FA, EA, DA, &c. decrescente; e dê-se qualquer quantidade ZB, por minima que seja. Invertão-se os termos da razão dada; e faça-se como EA para FA, assim ZB para ZC. He certo, que continuando-se esta segunda progressão, se virá a huma quantidade ZP, mayor que FA* (Lem. ant.) *Supponhamos pois que os termos desta segunda progressão são* 5. *e que se continua a primeira por outros* 5. *Digo que BA, ultimo termo da primeira, será menor que ZB, primeiro termo da segunda.*

Dem. *Por quanto invertendo os termos da ditta segunda progressão, as* 4. *razões ZP : ZE : ZD : ZC : ZB, são respectivamente iguaes às outras* 4. *razões da primeira, FA : EA : DA : CA : BA; será por igual, ZP : FA = ZB : BA; porèm ZP he mayor que FA* (Hyp.) *logo tambem ZB he mayor que BA, &c.*

Problema

Problema.

Dada a razão de mayor desigualdade (FE:ED) continualla por infinitos termos, e determinar a summa de todos. Fig. 19.

CONstr. *Ajuntem-se os termos da razão dada em huma recta; e levantem-se dos pontos F, E, duas perpendiculares FZ = FE; e EO = ED. Tire-se pelos extremos das dittas perpendiculares a recta ZO, a qual continuada occorra à FD, tambem continuada, em A:*

Digo 1. que se do ponto D, se levantar outra perpendicular DN, serà esta a terceira proporcional: e que se transferida DN para DC, se levantar do ponto C outra perpendicular CM, serà esta a quarta; e assim por diante: continuando-se sempre nas perpendiculares FZ, EO, DN, CM, BL, &c. e nos segmentos FE, ED, DC, CB, &c. a mesma proporção: e podendo-se sempre tirar do ultimo residuo BA, mais outro termo BL; por ser sempre este menor que aquelle, como o he FZ à respeito de FA: o que se collige do Cor. 1. da 4.

Digo 2. que FA he a summa de todos os termos daquella progressão; ainda que se considerem actualmente infinitos.

Dem. 1. *part. Porquanto FA : EA = FZ : EO* (Cor. 1. da 4.) *isto he = FE : ED* (Hyp.) *serà permutando, FA : FE = EA : ED; e por conversão da razão, FA : EA = EA : DA* (Cor. 1. da 18. 5.) *logo continuando huma mesma razão as rectas FA, EA, DA, tambem continuarão a mesma as perpendiculares FZ, EO, DN. Do mesmo modo mostrarey, que continuão a mesma razão as outras perpendiculares CM, BL, &c. logo &c.*

2. *Part. A summa dos infinitos termos daquella progressão nem he mayor, nem menor, que FA : logo he igual. Não he mayor; porque, como dissemos arriba, aplicadas*

aplicadas as perpendiculares FZ, EO, DN, &c á recta FA, todos os termos tem lugar nella, sem se chegar jâ mais ao ponto A. Não he menor, porque aplicadas as mesmas perpendiculares á recta FA, constituirão os residuos EA, DA, &c. outra progressão decrescente, cujo ultimo termo BA, serà menor que qualquer assignado (Lem. 2.) *logo como nunca a summa dos dittos termos possa ser tanto menor que a recta FA, que não seja o seu defeito menor que qualquer assignado, segue-se que absolutamente não pode ser menor. Logo &c.*

THEOREMA.

Em qualquer progressão decrescente, a differença dos primeiros dous termos, o primeiro termo, e a summa de todos, continuaõ huma mesma razaõ.

Fig. 19.

DEm. *Tire-se a recta OX, parallela à AF: serà XZ a differença entre FZ, e EO (isto he, dos primeiros dous termos) FZ o primeiro; e FA a summa de todos: porem* $XZ : XO = FZ : FA$ (*Cor.* 1. *da* 4.) *isto he [pela igualdade das rectas XO, FE, FZ]* $XZ : FZ = FZ : FA$: logo &c.

Por outro modo mais universal: seja a progressão

Fig. 20. *decrescente FA, EA, DA, &c. e transfirão-se todos os seus termos para o primeiro FA. Consta do ditto, que tambem as differenças FE, ED, DC, &c. constituirão outra progressão decrescente na mesma proporção; e que a recta FA he a summa de todas estas infinitas differenças. Isto supposto, por ser* $FA : EA = FE : ED$, *serà alternando, e invertendo,* $FE : FA = ED : EA$. *Porem esta mesma razão, que tem cada differença para o*

ra o ſeu termo reſpectivo, tem tambem a ſumma de todas as differenças, para a ſumma de todos os termos (12.5.) *logo ſerà FE para FA, como a meſma FA para a ſumma dos dittos termos &c.*

PROPOSIÇÃO XII. *Probl.*

Dadas tres rectas BO, OA, BQ, achar huma quarta proporcional. Fig. 17.

C*Onſtr.* Diſponhãoſe as 3. rectas, como moſtra a Figura; iſto he, a primeira, e a ſegunda a huma parte, e a terceira â outra; e juntos os pontos O, Q, com huma recta, tire-ſe a parallela AC. Digo que QC, ſerà a quarta proporcional, que ſe pede. Conſta da 2.

ESCHOLIO.

O Padre Bettino *no ſeu Theſouro, fundado na 35. do 3. e na 14. deſte, aqual não depende deſta, traz hum modo muy engenhoſo de achar terceira, e quarta proporcional, que he o ſeguinte.* Fig. 15.

Sejão as 3. rectas dadas AO, BO, OC; e queira-ſe achar a quarta: Ajuntem-ſe a ſegunda, e a terceira em huma recta, e aplique-ſe a primeira ao ponto O: pelos 3. pontos B, A, C, deſcreva-ſe hum circulo (3.4.) *ao qual occorra a recta AO continuada, em D. Digo que OD ſerà a quarta proporcional.*

Dem. *Os rectangulos AOD, BOC, ſão iguaes* (35. 3.) *logo AO : BO = OC : OD* (14.) Fig. 18.

Do meſmo modo. Dadas 2. rectas AO, BO, buſque-ſe a terceira. Tome-ſe em qualquer recta duas vezes a ſegunda, e aplique-ſe ao ponto O, a primeira AO. Deſcreva ſe pelos 3. pontos B, A, C, hum circulo &c. e ſerà OD, a terceira, que ſe buſca.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XIII. *Probl.*

Fig. 21. *Dadas 2 rectas AO, OC, achar huma media proporcional.*

CONſtr. Ajuntem-ſe as 2. dadas em huma recta, e deſcreva-ſe ſobre ella hum ſemi-circulo, &c. Levante-ſe do ponto O, huma perpendicular O B; e ſerá eſta a media proporcional. Conſta da 31. do 3. e do Cor. 1. da 8. deſte.

COROLLARIO.

DAqui ſe ſegue, que ſe dè qualquer ponto B, da ſemi-circunferencia ſe tirar huma prependicular ao diametro; ſerà eſta media proporcional entre os ſegmentos.

ESCHOLIO.

NAõ ſerà tambem fóra do aſſumpto dar aqui alguma luz daquelle celebre Problema, para cuja ſolução convidou Platão *aos melhores engenhos, a ſaber:* Achar duas Medias proporcionaes entre duas rectas dadas. *No Appendiz 2. da Geometr. Pract. tratarey particularmente deſte Probl. e proporey os melhores modos, que ſe offecerão aos Antigos para a ſua ſolução; como tambem alguns dos Modernos, que não ſão menos engenhoſos: por agora baſtarà tocar ſómente tres, que me parecem mais expeditos; e mais accommodados para principiantes.*

1. Modo de *Platão*.

SEjão as rectas dadas AC, CB, entre as quaes se desejão 2. medias proporcionaes. Disponhão-se em angulo recto as dittas rectas; e continuem-se á descripção atè X, Z. Appliquem-se duas esquadras [Platão *usa de huma só com huma regoa movel, e normal*] *huma á recta CX, e outra á recta CZ, de tal sorte, que fique huma parallela á outra, e passem os lados pelos extremos das rectas dadas. Digo, que as rectas interceptas EC, CO, serão as medias que se buscão.* Fig. 22.

Dem. *Porquanto o angulo AEO, he recto; e EC, perpendicular á base AO; serà esta media proporcional entre AC, CO* [Cor. 1. da 8.] *Pela mesma razão he tambem CO, media proporcional entre EC, CB: logo &c.*

2. Modo de *Philon Bysantino*.

SEjão as rectas dadas DE, EF. Disponhão-se em angulo recto; e perfeiçoe-se o rectangulo DEFA: estendão-se os lados AD, AF, á descripção: tirem-se os diametros AE, DF: e do ponto O, em que ambos se cortão, descreva-se hum circulo, o qual passe por todos os 4. pontos D, E, F, A (*collige-se da* 31. *do* 3.) *Applique-se huma regoa ao ponto E; e mova-se de tal sorte, que sejão os segmentos BQ, EC, iguaes. Digo, que as rectas DB, FC, são as medias proporcionaes, que se buscão.* Fig. 23.

Dem. *Porquanto BQ = EC* (Constr.) *serà QC = BE: logo o Rect. QCE = Rect. EBQ; isto he* (*substituindo iguaes*) *serà o Rect. ACF = Rect. ABD* (Cor. 1. da 36. 3.) *logo, reciprocando os lados, serà AC: AB = DB: FC (pela 14. deste, a qual não depende desta) Porèm tambem AC: AB = DE: DB* (Cor. 1. da 4.)

 logo

logo DE , DB , FC, continuão a mesma razão. Do mesmo modo mostrarey, que DB , FC , EF, continuaõ a mesma razão (por ser tambem AC : AB = FC : EF) logo as duas rectas DB , FC , saõ medias proporcionaes entre as duas dadas DE , EF. &c.

* *Estes dous modos são engenhosos , e expeditos; porèm como a applicação, ou das Esquadras, ou das Regoas , se faz tentando ; não são Geometricos.*

3. Modo de *Des-Cartes.*

ESte Author usa de hum instrumento , o qual consta de duas regoas moveis , e connexas em Z ; as Fig.24. *quaes se armão com varias esquadras nos lados , de tal sorte accommodadas , que humas impellem , e attrahem as outras , segundo as regoas se abrem , ou fechão; como mostra a Figura. Com este instrumento pois , o qual tirou sem duvida do methodo de Eratosthenes , acha não só duas , mas quaesquer medias proporcionaes , entre duas rectas dadas ; o que nem por Secções Conicas , nem por outro qualquer methodo, se pòde conseguir. Para achar duas medias proporcionaes , usa de 3. esquadras AD , DB , BE : e para achar 3. usa de 4. &c.*

Sejão pois dadas as rectas ZA , ZE , entre as quaes se desejem sómente duas. Tomada a menor ZA, em huma regoa, e a mayor ZE , na outra; applique-se a primeyra esquadra ao ponto A; e assegure-se alli com hum parafuso; e juntas a ella as outras esquadras, abraõ-se as regoas , até que a terceira toque precisamente o ponto E. Digo que ZD, ZB , saõ as medias proporcionaes, que se buscaõ.

Dem. *Consta facilmente do* Corollar. 2. da 8. *Porquanto, pela construcção do instrumento , os triangulos ZDB , ZBE , saõ semelhantes: logo* $ZA : ZD = ZD : ZB = ZB : ZE$. *&c.*

Se entre ZA, e ZF, se quizerem 4. *proporcionaes, se usa-*

se usarà de 5. esquadras; e as regoas se abrirão atè que a quinta toque o ponto F. Se as medias proporcionaes forem pares, se tomarão as duas dadas em huma, e outra regoa; porém se forem impares, se tomarão ambas em huma mesma. Este modo, aindaque organico, e não tam simplez, como o de Platão, *he comtudo maravilhoso, por ser universal. Pelo que toca á fabrica do instrumento não deyxa de se offerecer alguma difficuldade nas larguras das regoas; porém isto se remette á industria dos Artifices.*

Achadas por qualquer dos 3. methodos arriba duas medias proporcionaes, não serà difficil resolver o problema Deliaco da duplicação do Cubo; como absolutamente qualquer outro, em que se pede o augmento, ou a diminuição de qualquer Solido Regular, em qualquer proporção dada; assim como diremos abayxo das Figuras Planas, por meyo de huma media proporcional; que foy invenção de Hippocrates, *a quem seguio despois toda a posteridade.*

PROPOSIÇÃO XVI. *Theor.*

Se os Parallelogrammos X, Z, forem iguaes, e tiverem 2. angulos em O, iguaes; terão tambem os lados, que comprehendem os dittos angulos, reciprocamente proporcionaes (Def. 2.) *E se tendo 2. angulos em O, iguaes, tiverem os dittos lados reciprocos, serão iguaes.* Fig. 25. 26.

D*Em.* 1. part. Ajuntem-se os angulos iguaes de tal sorte em O, que fiquem quaesquer 2. lados AO, OB, em huma linha recta; e por conseq. os outros 2. CO, OD em outra, (14. 1.) Continuem-se os lados CD, GB, atè concorrerem em Q; e forme-se outro parallelogrammo Y. Pela 1. deste, X : Y = AO : OB; e Z : Y = CO : OD. Porèm, pela igualdade dos parallelo-

 grammos

grammos X, Z (*Hyp.*) X : Y = Z : Y (7.5.) logo go tambem AO : OB = CO : OD [11.5.] *Q. E. &c.*

2. Part. AO : OB = X : Y [1.] e CO : OD = Z : Y. Porèm AO : OB = CO : OD (*Hyp.*) logo X : Y = Z : Y (11.5.) e por conseq. X = Z (9.5.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XV. *Theor.*

Fig. 28. *Se os Triangulos AOD, COB, forem iguaes, e tiverem 2. angulos em O, iguaes; teráo tambem os lados, que comprehendem os dittos angulos, reciprocos. E se tendo 2. angulos em O, iguaes, tiverem os lados, que os comprehendem, reciprocos; seráo iguaes.*

DEm. Ajuntem-se os triangulos nos angulos iguaes, como assima; e tirada a rectaBD, forme-se o triangulo BOD. O discurso he o mesmo, que o da ant.

COROLLARIO.

Fig. 27. 27. TAnto os parallelogrammos, como os triangulos, que tem as bases, e alturas reciprocas, sáo iguaes: e pelo contrario &c. Consta da antecedente, supposto o que fica demonstrado na 35. e 37. do 1.

PROPOSIÇÃO XVI. *Theor.*

Fig. 25. 25. *Se se derem 4. rectas proporcionaes AO : OB = CO : OD; será o rectangulo X, comprehendido das 2. extremas AO, OD, igual ao rectangulo Z, comprehendido das 2. intermedias OB, CO. E se o rectangulo das extremas for igual ao das intermedias; seráo as 4. rectas proporcionaes.*

DEm. Consta da 14. por serem os angulos em O rectos, ou iguaes.

PRO-

PROPOSIÇÃO XVII. *Theor.*

Se se derem 3. rectas continuamente proporcionaes DC : CG = CG : CO; será o rectangulo das extremas Y, igual ao quadrado da intermedia X. E se o rectangulo das extremas for igual ao quadrado da intermedia; serão as 3. rectas proporcionaes. Fig. 27.

DEm. He a mesma que a da ant. por ser EC = CG.

COROLLARIO.

DEsta, e da 13. consta, que o quadrado de qualquer perpendicular a hum diametro BO, he igual ao rectangulo dos 2. segmentos AO, OC. Fig. 21. ou 34.

PROPOSIÇÃO XVIII. *Probl.*

Dado qualquer polygono DB, construir sobre huma recta dada HE, outro semelhante. Fig. 31.

COnstr. Resolva-se o polygono dado em triangulos; e formem-se sobre a recta dada 2. angulos H, *u*. iguaes respectivamente aos 2. D, *o*. Continuem-se os lados atè concorrer em G; e formem-se sobre a recta GE, outros dous angulos *a*. *i*. iguaes respectivamente aos outros dous *r*. *e*. Serre-se a figura, e será o polygono HF, semelhante ao dado.

Dem. Primeiramente são equiangulos, como he manifesto. Tem tambem todos os lados respectivamente proporcionaes [por ser GE : CA = HE : DA (4.) e pela mesma razão todos os mais] logo &c.

PRO-

PROPOSIÇÃO XIX. *Theor.*

Fig. 29. 30. *Os triangulos ſemelhantes X, Z, ſão entre ſi em duplicada razão de quaeſquer dous lados correſpondentes AB, DE; iſto he, oppoſtos a iguaes angulos &c. * V.g. ſe ſe fizer como AB à DE, aſſim DE à huma terceira OB; ſerà o triangulo X ao triangulo Z, como AB à OB* (Def. 10. 5.)

DEm. Tire-ſe a recta CO. Porquanto os triangulos X, Z, ſão ſemelhantes, ſerà CB : FE = AB : DE; iſto he (*pela Conſtr.*) = DE : OB. Porem os angulos B, E, comprehendidos deſtes dous lados (reciprocamente proporcionaes) ſão iguaes (*Hyp.*) logo os triangulos Z, e OCB, ſão iguaes (15.) Porem o triangulo X, he ao triangulo OCB, como AB, à OB (1.) logo o meſmo triangulo X, he ao triangulo Z, como AB à OB (7.5.) *Q. E. &c.* * O meſmo ſe entende, ſe ſe fizer como DE à AB, aſſim AB à DQ.

PROPOSIÇÃO XX. *Theor.*

Fig. 32. 33. *Os polygonos ſemelhantes AD, MP, dividem-ſe* 1. *em igual numero de triangulos ſemelhantes* 2. *proporcionaes aos ſeus todos* 3. *e eſtes ſão entre ſi em duplicada razão de quaeſquer dous lados correſpondentes.*

DEm. 1. part. Tirem-ſe de quaeſquer angulos iguaes C, O, rectas aos angulos oppoſtos A, E; M, Q. Porquanto os angulos B, N, ſão iguaes; e os lados, que os comprehendem, reſpectivamente proporcionaes

cionaes (*Hyp.*) ſerão os triangulos P, X, ſemelhantes (6.) pela meſma razão ſão tambem ſemelhantes os triangulos R, Y: logo tambem o ſerão os intermedios Q, Z: porque ſendo os angulos totaes A, C, E, iguaes reſpectivamente aos totaes M, O, Q; e ſendo mulctados de iguaes partes, ſegundo o ditto, tambem os remanentes hande ſer iguaes, e por conſequencia os triangulos ſemelhantes (4.)

2. Part. Porquanto os dittos triangulos ſão reſpectivamente ſemelhantes; ſerà P para X, em duplicada razão de BA para NM (*Ant.*) Q para Z, em duplicada razão de AE para MQ: e R para Y, em duplicada razão de ED para QP. Porem a razão dos lados he ſempre a meſma: logo tambem a dos triangulos (34.5.) e por conſequencia, como qualquer delles para o ſeu correſpondente, aſſim todos juntos para todos juntos (12.5.)

3. Part. Conſta da 2. por ſer hum polygono para outro polygono, como qualquer triangulo para o ſeu correſpondente; e eſtes em duplicada razão dos lados.

COROLLARIOS.

1 TOdas as figuras regulares (como triangulos equilateros, quadrados, pentagonos, &c.) ſão em duplicada razão dos lados homologos; por ſerem figuras ſemelhantes.

2. Se em 2. figuras ſemelhantes ſe conhecerem quaeſquer 2. lados, oppoſtos a iguaes angulos; ſe conhecerà tambem a proporção das dittas figuras, continuando a razão dos ditos lados por mais outro termo; e comparando o primeyro com o terceyro. V. g. ſeja AE de 4. palmos, e MQ de 6. e ſeja como 4. para 6. aſſim 6. para 9. Digo que a razão de 4. para 9. he a que tem as figuras propoſtas.

3. Daqui se tira hum modo facil de diminuir, ou augmentar qualquer figura em qualquer razão dada. Seja AO, o lado da figuradada, e deseje-se outra semelhante 5. vezes mayor. Tome-se em AO, continuada, o mesmo intervallo 5. vezes, desde O atè C; e descreva-se sobre a recta AC, hum semi-circulo. Levante-se do ponto O, huma perpendicular OB, atè à circunferencia: Digo que esta serà o lado da figura, que se pede; a qual se descreve pela *Propos.* 18.

Dem. Consta da 13. que AO, OB, OC, são continuamente proporcionaes; logo a figura AO, he para a figura semelhante OB, como AO para OC; isto he, como 1. para 5. * O mesmo se entende dos circulos, pelo que diremos despois na 2. do 12.

PROPOSIÇÃO XXI. *Theor.*

Fig. 16. *As figuras X, Z, semelhantes a huma terceira Y, são semelhantes entre si.*

DEm. Consta da *Def.* 1. deste; do Ax. 2. do 1. e da 11. do 5.

PROPOSIÇÃO XXII. *Theor.*

Fig. 33. 33. 33. 33. *Se 4. ou mais rectas, forem proporcionaes; as figuras semelhantes, ordenadamente descriptas sobre ellas, serão tambem proporcionaes. E pelo contrario, &c. V. g. seja AB : CD = EF : GH; e descrevão-se sobre as duas primeiras os quadrados, X Z; e sobre as outras duas os triangulos equilateros*

ros P, Q: Digo que tambem X : Z = P : Q. E pelo contrario &c.

DEm. 1. part. Consta da 34. do 5. por serem tanto X para Z, como P para Q, razões duplic das de razões iguaes (19. e 20.) A 2. part. consta da 35. do mesmo.

PROPOSIÇÃO XXIII. *Theor.*

Os parallelogrammos equiangulos X, Z, são entre si em razão composta da razões dos lados, que comprehendem iguaes angulos; isto he, das razões de AO para OB, e de DO para OC (Def. 6.) Fig. 26.

DEm. Seja como DO para OC, assim OB para huma terceira S. Digo que X he para Z, como AO para S. Disponhão-se os parallelogrammos, como mostra a *Figura*; e concorrão os lados CD, GB em Q, &c. Pela 1. deste, X : Y = AO : OB; porèm Y : Z = DO : OC; isto he, = OB : S (*Constr.*) logo por igual, X : Z = AO : S. (23. 5.) *Q. E. &c.* * Vejase a *Def.* 6. da qual se infere, que tambem X he para Z, como o producto dos antecedentes AO, DO, para o producto dos consequentes OB, OC.

COROLLARIOS.

DEsta, e da 34. do 1. consta 1. que os triangulos, que tiverem os angulos em C, iguaes, terão entre si a razão composta das dos lados, que comprehendem os dittos angulos; isto he, de DC para CG; e de OC para CE. Fig. 27.

2. Que os rectangulos, ou quaesquer parallelogrammos, tem tambem entre si a razão composta das razões das suas bases, e alturas: o mesmo digo de quaesquer triangulos.

3. Que o modo de exhibir esta razão composta, assim dos parallelogrammos, como dos triangulos; he Fig. 2. compondo a razão das bases AC, OQ, com a razão das alturas BX, PZ, pelo modo arriba.

PROPOSIÇÃO XXIV. *Theor.*

Fig. 38. *Em todo o parallelogrammo BH, os parallelogrammos parciaes DS, GF, existentes sobre o diametro, são semelhantes entre si, e ao total.*

DEm. Primeiramente são equiangulos, como facilmente se colhe da 27. do 1: tem tambem os lados respectivamente proporcionaes (por ser AG : AB = GO : BE (4.) e permutando, AG : GO = AB : BE; isto he, = O D : DE &c.) logo &c. (*Def.* 1.)

PROPOSIÇÃO XXV. *Probl.*

Fig. 35 35. *Dado hum polygono Z, transformallo em outro, semelhante a qualquer dado X. Ou tambem, dados dous polygonos Z, X, construir hum terceiro igual ao primeiro, e semelhante ao segundo.*

COnstr. Sobre o lado PC, do segundo X, forme-se hum rectangulo R, igual a elle (44. 1.) e sobre o lado CA, deste mesmo rectangulo forme-se outro rectangulo S, igual ao primeiro Z: e porquanto os lados PC, CQ, fazem huma linha recta (14. 1.) busque-se entre hum,

e ou-e outro huma media proporcional CO (13.) e forme-se sobre ella hum polygono semelhante ao segundo(18.) serà este tambem igual ao primeiro.

Dem. PC, CO, CQ, são continuamente proporcionaes : logo o polygono X, he ao polygono CO, como PC à CQ (20.) isto he, como R à S (1.) logo permutando, serà X : R = polyg. CO : S. Porèm X he igual à R : logo tambem o polyg. CO, he igual à S ; isto he, à Z (*Constr.*) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXVI. *Theor.*

Os parallelogrammos semelhantes DS, BH, que tem hum angulo E, commum, existem sobre o mesmo diametro. Fig. 38.

DEm. Se não existem ; seja o diametro do mayor ECA, o qual córte o lado do menor DO, em C; e tire-se a parallela CQ.

Os parallelogrammos DQ, BH, são semelhantes (24.) logo AB : BE = CD : DE. Porèm tambem BA : BE = OD : DE; por se supporem semelhantes DS, BH: logo CD, OD, tem para DE, a mesma razão ; o que he absurdo; por ser huma recta parte da outra.

PROPOSIÇÃO XXVII. XXVIII. e XXIX.

Não tem uso algum ; e são prolixas.

PROPOSIÇÃO XXX. *Probl.*

Fig. 37. *Dada a recta CB, cortalla em media, e extrema razão* (Def. 3.)

COnstr. Corte-ſe a recta dada de tal ſorte em A, que ſeja o Rect. CBA igual ao Quad. CA (11. 2.) digo &c. *Dem.* Conſta da 17. que CB he para CA, como CA para AB : logo &c. * He admiravel eſta ſecção; e tem muyto uſo por toda a Geometria, principalmente na comparação dos Corpos Regulares, como veremos no l. 13.

PROPOSIÇÃO XXXI. *Theor.*

Fig. 36. *Se em qualquer triangulo rectangulo BAC, ſe formarem tres figuras ſemelhantes ſobre os lados: ſempre a figura Y, oppoſta ao angulo recto, hàde ſer igual âs outras duas X, Z, formadas ſobre os outros dous lados.** Aqui ſe faz univerſal a 47. do 1,

DEm. Tire-ſe do angulo recto â baſe a perpendicular AO. Porquanto BC, BA, BO, ſão tres continuas proporcionaes (*Cor.* 2. *da* 8.) ſerà Y : X = BC : BO (20.) e pela meſma razão, ſerà Y : Z = BC : OC. Logo (*pela* 24. *do* 5.) ſerà Y : X + Z = BC : BO + OC; iſto he, como igual para igual.

Por outro modo. O Quad. BC : Quad. BA = Polyg. Y : Polyg. X (22.) pela meſma razão, o Quad. BC : Quad. AC = Polyg. Y : Polyg. Z : logo o Quad. BC : QQuad. BA + AC = Polyg. Y : PPolyg. X + Z (24. 5.) iſto he, como igual para igual (47. 1.)

COROLLARIO.

DAqui se tira hum modo facil de fazer (dadas muitas figuras) huma igual a todas. Veja-se o *Probl.* 1. *do Eschol da* 47. *cit.* Fazer huma igual a huma serie infinita de figuras decrescentes em qualquer proporção, não he menos facil; porem fica reservado este Problem. para a *Geom. Pract.*

PROPOSIÇÃO XXXII.

Não tem uso; nem contem couza particular.

PROPOSIÇÃO XXXIII. *Theor.*

Em circulos iguaes os angulos no centro PCQ, FCE; ou tambem na circunferencia PAQ, FBE, tem entre si a mesma razão, que os arcos em que insistem PQ, FE. * O mesmo digo dos sectores correspondentes (*Def.* 9. 3.) Fig. 39. 40.

DEm. Quanto aos angulos no centro, e sectores, a demonstração he a mesma, que a da 1. deste; com a differença sómente, que em lugar de se citar a 38. do 1. se cita aqui a 29. do 3. E como os angulos na circunferencia são metades dos angulos no centro (20. 3.) segue-se que o que se demonstra destes, se demonstra tambem daquelles (15. 5.)

COROLLARIOS.

1. O Angulo no centro FCE, he para 4. rectos, como o arco, em que insiste, para toda a circunferencia. Forme-se o angulo recto FCG, e argumente-se por igualdade de razões. Fig. 40.

2. Os

2. Os arcos FE, QO, de desiguaes circulos, que subtendem iguaes angulos (ou seja no centro, ou na circunferencia) são semelhantes.

Dem. FE, he para a sua circunferencia, como FCE, para 4. rectos; QO he tambem para a sua circunferencia, como o mesmo FCE para 4. rectos: logo FE, he para a sua circunferencia, como QO para a sua &c.

3. Os dous semi-diametros CF, CE, cortão de quaesquer circunferencias concentricas semelhantes arcos FE, QO.

4. Os arcos EBE, QLO, de differentes circunferencias, em que existem iguaes augulos, são semelhantes. Consta do 2. *Cor. e da* 20. *do* 3.

ELEMEN-

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA
LIVRO VII.
OU XI.

DESPOIS DOS 6. LIVROS DOS Planos, passa Euclides *nos 3. livros seguintes a tratar dos Numeros, para investigar com mais fundamento no 10. a natureza, e propriedades das* Linhas Incommensuraveis; *que he huma das mais subtis especulações da Geometria Elementar. Porèm eu, seguindo a alguns commentadores, deixarei todos estes 4. livros para o tratado da Arithmetica; e passarey immediatamente dos Planos aos Solidos; e do livro 6. ao 11. conservando todavia nas citações a ordem de* Euclides, *e sómente nos titulos a ordem que levo.*

Neste livro pois (a quem eu chamo 7. e Euclides 11: *e que corresponde ao 1. dos Planos) se estabelecem primeiramente os Principios geraes da doutrina dos Solidos; e despois*

pois ſe trata particularmente dos corpos mais ſimplices (e em que ſe reſolvem todos os rectilineos) quaes ſão Parallelipipedos, *e* Priſmas.

DEFINIÇÕES.

1. SOlido, ou *Corpo*: he huma quantidade perfeita, que tem todas as tres dimenſões; a ſaber, longura, largura, e profundidade.

2. Os *Termos do Solido*: ſão as ſuperficies extremas, com que ſe termina; ou ſejão planas, ou curvas.

Fig. 1. 3. A recta AO, ſe diz ſer *Pendicular ao plano* ED: quando com todas as linhas exiſtentes no meſmo plano, e que paſſão pelo ſeu contacto O, forma angulos rectos AOB, AOC, AOD, &c.* Imagine-ſe que ſe revolve circularmente hum lado de hum angulo recto ſobre o outro lado: ſerà o immovel perpendicular ao plano, que deſcreve o movel.

Fig. 2. 4. O plano DA, he *Perpendicular ao plano* BC: quando qualquer recta AO, que nelle ſe tira perpendicular â commua ſecção DE, he tambem perpendicular ao outro plano.

Fig. 3. 5. Se a recta AB cahir obliquamente ſobre o plano XZ; e do ponto A, ſe tirar huma perpendicular ao ditto plano AO; ſerà o angulo ABO [que forma a ditta recta com a recta BO] a ſua *Inclinação*.

Fig. 4. 6. Se o plano CD, cahir obliquamente ſobre o plano ZX; ſerà o angulo AOE, que formão quaeſquer rectas AO, EO, perpendiculares â commua ſecção, a ſua *Inclinação*.

7. Dous planos ſe dizem eſtar *Igualmente inclinados a outros planos*: quando as ſuas inclinações ſão iguaes.

8. *Pla-*

8. *Planos parallelos*: são aquelles, que produzidos para qualquer parte nunca concorrem; ou, que sempre distão entre si com iguaes intervallos. * Estes se tomão nas rectas AC, BD, perpendiculares a hum, e outro plano.

9. *Solidos rectilineos semelhantes*: são os que se comprehendem com igual numero de planos semelhantes.

10. *Angulo solido*: he o que comprehendem muitos angulos planos CAB, BAD, DAC, concurrentes em hum ponto A; mas não existentes em hum mesmo plano. * Para se formar hum angulo solido, são necessarios ao menos tres angulos planos.

11. *Angulos solidos iguaes*: são os que metidos huns dentro dos outros se ajustão perfeitaméte entre si.

12. *Prisma*: he hum solido comprehendido por todas as partes de muitos planos; dos quaes os dous oppostos ABC, DEF, são parallelos, semelhantes, e iguaes; e todos os demais parallelogrammos. * Veja-se tambem a *Fig.* 7. Fig. 6.

13. *Parallelipipedo*: he hum solido comprehendido de 6. planos quadrilateros, cujos oppostos todos são entre si iguaes.

14. *Cubo*: he hum parallelipipedo comprehendido de 6. quadrados. Fig. 8.

PROPOSIÇÃO I. *Theorema*.

Huma recta não pode estar parte em hum plano, e parte em outro. Fig. 9.

DEm. Consta manifestamente do *Ax.* 14. do 1.

PROPOSIÇÃO II. *Theor.*

Fig. 10. *Duas rectas, que se cortão, existem em hum mesmo plano: como tambem todas as 3. de qualquer triangulo.*

DEm. Cortem-se as rectas DC, BE; e imagine-se sobre qualquer dellas DC, produzido hum plano, o qual se circunvolva atè chegar â outra recta BE. He evidente, tanto pela *Def.* do plano, como pela *Ant.* que o ditto plano se hade ajustar com a ditta segunda recta: logo &c. O mesmo digo do triangulo.

PROPOSIÇÃO III. *Theor.*

Fig. 11. *Se 2. planos CD, QG, se cortarem; a commua secção AB, serà huma recta.*

DEm. Se não he; tire-se no primeiro plano a recta AOB, e no segundo a recta AFB: logo 2. rectas comprehendem espaço, contra o *Ax.* 13. do 1.

PROPOSIÇÃO IV. *Theor.*

Fig. 13. *Se a recta AO, for perpendicular a 2. rectas; serà tambem perpendicular ao plano, que por ellas passa*

DEm. Se não he; tire-se do ponto A, huma perpendicular ao ditto plano AQ; e juntos os pontos O, Q, com huma recta, tire-se a esta outra perpendicular no mesmo plano QC; a qual necessariamente hade cortar alguma das rectas dadas em algum ponto C; como se collige do *Esch. da* 31. *do* 1. Tire-se finalmente

te a recta AC, e considerem-se 4. triangulos rectangu-
os AOC (*Hyp.*) CQO (*Constr.*) AQO, AQC (*Def.* 3.)
O quadrado AC, he igual aos quadrados AO+OC (47. 1.) porem AO, he igual à AQ+OQ; e OC, he igual à OQ+QC: logo o quadrado AC he igual aos quadrados AQ+QC+2.OQ. Porem (pela mesma 47.) houvera de ser igual sómente aos dous AQ+QC: logo he igual, e mayor a respeito dos mesmos, &c.

PROPOSIÇÃO V. *Theor.*

Se a recta AO, for perpendicular à 3. rectas OC, OB, OE, as quaes concorrão em hum ponto O; todas estas estarão em hum mesmo plano NM. Fig. 14.

DEm. Se não estão; passe pelas primeiras 2. o plano NM; e fique fora delle a recta OC. Continue-se o plano AOC, atè que occorra ao ditto plano NM, em OQ. Porquanto AO, he perpendicular às duas primeiras rectas, serà tambem perpendicular ao plano, que por ellas passa (*Ant.*) logo serà perperdicular à OQ (*Def.* 3.) logo os 2. angulos AOC, AOQ, são rectos; contra o *Ax.* 10. 1.

PROPOSIÇÃO VI. *Theor.*

Duas rectas AD, BC, perpendiculares a hum plano MN, são parallelas entre si. Fig. 15.

DEm. Ajuntem-se os pontos D, C; e tire-se no plano dado a recta CO, igual à DA, e perdicular a DC. Tirem-se tambem as rectas AC, AO, DO. Os triangulos ADC, OCD, tem os angulos D, C,

 rectos,

rectos, e os lados que os comprehendem, respectivamente iguaes (*Constr.*) logo tambem as bases AC, DO, serão iguaes (4. 1.) logo os triangulos ADO, OCA, tem todos os lados respectivamente iguaes: logo os angulos oppostos ao lado commum AO (isto he, ADO, OCA) são iguaes (8. 1.) porem o primeiro he recto (*Hyp.*) logo tambem o segundo.

He pois a recta OC, perpendicular âs 3. rectas CD, CA, CB: logo todas 3. existem em hum plano (*Ant.*) no qual existe tambem a recta AD (1.) logo sendo as duas rectas AD, BC, perpendiculares a DC (*Hyp.*) serão parallelas entre si (29. 1.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO VII. *Theor.*

Fig. 12. *Se a recta QO, cortar duas rectas existentes em hum plano; existirà com ellas no mesmo plano.*

DEm. Consta manifestamente: porquanto de outra sorte, tirada outra recta no mesmo plano, as duas comprehenderião espaço contra o *Ax.* 13. do 1.

COROLLARIO.

DAqui se segue, que se QO cortar duas parallelas, existirà com ellas no mesmo plano: porquanto, como consta da *Def.* 36. *do* 1. as parallelas sempre existem em hum plano.

PROPOSIÇÃO VIII. *Theor.*

Se huma de duas parallelas AD, for perpendicular a hum plano; tambem o serà a outra BC. Fig. 15.

DEm. He a mesma que a da *Prop.* 6. Porquanto, feita a mesma construcção, segue-se pelo mesmo discurso, que OC he perpendicular à CD, e CA; e por consequencia ao plano, que por ellas passa (4.) no qual existe CB: logo sendo BC, perpendicular à CD, e CO, tambem o serà ao plano, que por ellas passa *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO IX. *Theor.*

Se as rectas OA, QD, forem parallelas a huma terceira CB; aindaque não existão com ella no mesmo plano, serão parallelas entre si. Fig. 16.

DEm. Tirem-se duas perpendiculares OC, QC, a hum mesmo ponto da recta (CB cada huma em seu plano) e ajuntem-se os pontos O, Q, com huma recta. Porquanto BC, he perpendicular âs rectas CO, CQ, serà tambem perpendicular ao plano OCQ [4.] logo como AO, DQ, são parallelas â ditta perpendicular, serão tambem perpendiculares ao mesmo plano (*Ant.*) e por conseq. parallelas entre si (6.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO X.

Se 2. rectas AB, AC, concurrentes em hum plano, forem parallelas a outras 2. rectas QP, QO, Fig. 17.

QO, concurrentes em outro plano; comprehenderão iguaes angulos BAC, PQO.

DEm. Tome-ſe AB = QP, e AC = QO; e ajuntem-ſe os extremos com as rectas BC, PO; BP, AQ, CO. Porquanto AB, QP, ſão iguaes, e parallelas; ſerão tambem iguaes, e parallelas AQ, BP (33. 1.) e pela meſma razão AQ, CO: logo tambem BP, CO, ſerão iguaes, e parallelas (*Ant.*) e pela meſma razão CB, OP: logo os triangulos BAC, PQO, ſão reſpectivamente equilateros: e por conſeq. tem os angulos A, Q, oppoſtos a iguaes lados, iguaes (8. 1.) *Q.E. &c.*

PROPOSIÇÃO XI. *Probl.*

Fig. 18. *Dado fóra de hum plano hum ponto A, tirar delle huma perpendicular ao ditto plano.*

COnſtr. Tire-ſe no plano dado qualquer recta BD; e a eſta deſde o ponto dado huma perpendicular AC: do ponto C, tire-ſe no meſmo plano outra perpendicular CO; â qual occorra, desde o meſmo ponto dado, outra perpendicular AO. Digo que eſta ſerá a perpendicular, que ſe pede.

Dem. Tire-ſe pelo ponto O, EF, parallela à BD. Porquanto BC, he perpendicular à CA, e CO (*Conſtr.*) ſerá tambem perpendicular ao plano ACO (4.) logo tambem EO, ſerá perpendicular ao meſmo plano (8.) logo a recta AO, he perpendicular à OE (*Def* 3.) he tambem perpendicular à OC (*Conſtr.*) logo ſerá perpendicular ao plano, em que ellas exiſtem (4.) iſto he, ao plano dado. *Q.E. &c.*

Fig. 15. * Levanta-ſe facilmente huma perpendicular ſobre hum plano, por beneficio de 2. eſquadras ADC, ADO, concurrentes em hum ponto; como ſe infere da 4.

PRO-

PROPOSIÇÃO XII. *Probl.*

Dado em hum plano hum ponto O, levantar delle huma perpendicular ao mesmo plano. Fig. 19.

Constr. Tire-se pela *Ant.* de qualquer ponto B, fóra do plano dado, huma perpendicular BC, ao ditto plano; e tire-se do ponto O, huma parallela à CB. Digo &c. Consta da 8.

PROPOSIÇÃO XIII. *Theor.*

Duas rectas AO, CO: ou, OA, OC, tiradas ao mesmo ponto, ou do mesmo ponto, à qualquer plano; não podem ser ambas perpendiculares ao mesmo plano. Fig. 20.

Dem. Consta manifestamente; porquanto se o fossem, serião parallelas entre si (6.) e concorrerião em hum ponto; o que he absurdo.

PROPOSIÇÃO XIV. *Theor.*

Se a recta AC, for perperdicular a 2. planos; serão estes parallelos entre si. Fig. 21.

Dem. Tire-se do ponto B, de qualquer dos planos, huma parallela à AC, aqual occorra ao outro plano em D. He sem duvida, que BD, tambem he perpendicular a ambos os planos (8.) logo tiradas as rectas AB, CD, serà o quadrilatero AD, rectangulo (*Def.* 3.) logo os lados oppostos AC, BD, são iguaes (34.1.) Do mesmo modo mostrarey, que todas as parallelas a AC, são tambem perpendiculares a ambos os planos, e iguaes

entre

entre si: logo os dittos planos são parallelos (*Def.* 8.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XV. *Theor.*

Fig. 22. *Se 2. rectas AB, CB, concurrentes em hum ponto, forem parallelas a outras 2. GD, ED, concurrentes em outro ponto; os planos que por ellas passão serão tambem parallelos.*

DEm. Tire-se a perpendicular BO, do concurso das primeiras ao plano das segundas; e tirem-se neste outras 2. parallelas âs mesmas segundas QO, PO, concurrentes em hum ponto O. Porquanto tanto as rectas AB, CB, como as rectas QO, PO, são parallelas âs rectas GD, ED, serão estas parallelas entre si (9.) logo assim como são rectos os 2. angulos BOQ, BOP (*Def.* 3.) tambem o serão os outros 2. OBA, OBC (27. 1.) e por consequencia serà BO perpendicular a hum, e outro plano (4.) e estes parallelos entre si (*Ant.*) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XVI. *Theor.*

Fig. 23. *Se hum plano AD, cortar dous planos parallelos; serão tambem parallelas as communas secções AC, BD.*

DEm. Se não são; continue-se o plano AD; e concorrão as secções no ponto N: logo tambem, se se continuarem os planos parallelos, concorrerão no mesmo ponto (1.) contra a *Def.* 8.

PRO-

PROPOSIÇÃO XVII. *Theor.*

Se por quaesquer planos parallelos passarem quaesquer rectas AC, DF; ficarão estas cortadas proporcionalmente pelos dittos planos; isto he, será AB : BC = DE : EF. Fig. 24

DEm. Tire-se a recta AF; e nos planos parallelos as rectas AD, BO+OE, CF. Porquanto o triangulo CAF, corta planos parallelos, serão as secções BO, CF, parallelas (*Ant.*) logo AB : BC = AO : OF (2.6.) porem pela mesma razão, DE : EF = AO : OF. logo AB : BC = DE : EF (11.5.) *Q.E. &c.*

PROPOSIÇÃO XVIII. *Theor.*

Se a recta OQ, for perpendicular a hum plano; todos os planos, que por ella passarem, serão perpendiculares ao mesmo. Fig. 25.

DEm. Passe pela recta dada o plano AO, cuja secção commua seja AB; e tirem-se no ditto plano quaesquer perpendiculares â ditta commua secção.

Porquanto todas estas perpendiculares existem no mesmo plano com OQ, e todas formão angulos rectos com a mesma recta AB; serão entre si parallelas (29.1.) logo sendo OQ, perpendicular ao plano dado, o serão tambem as outras (8.) e por consequencia o plano, em que todas existem (*Def.* 4.) *Q.E. &c.*

PROPOSIÇÃO XIX. *Theor.*

Fig. 26. *Se se cortarem dous planos DA, BA, perpendiculares a outro terceiro DBE; serà a commua secção AO, perpendicular ao mesmo terceiro plano.*

DEm. Consta da *Def.* 4. que se do ponto O, se levantar huma perpendicular ao plano DBE, existirà esta em ambos os planos DA, BA: logo na secção communa OA (13.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XX. *Theor.*

Dado hum angulo solido O, comprehendido de Fig. 27. *tres angulos planos; serão quaesquer dous destes mayores que o terceiro.*

DEm. Se todos os 3. angulos forem iguaes, a razão he manifesta: se forem desiguaes; tire-se do mayor BOD, o angulo BOQ igual a qualquer dos outros 2. BOA; e igualadas as rectas OQ, OA, tire-se o plano ABQD.

Porquanto os triangulos BOA, BOQ, tem os angulos em O iguaes; e iguaes respectivamente os lados, que os comprehendem; serão tambem iguaes as bases BA, BQ (4. 1.) Porem no triangulo BAD (base do solido) os 2. lados BA, AD, são mayores que o terceiro BD (20. 1.) logo tirando de ambas as partes as iguaes BA, BQ, ficarà AD, mayor que QD: logo nos triangulos AOD, QOD, em que os lados são respectivamente iguaes, e as bases desiguaes, serà o angulo AOD, opposto â mayor base, mayor que o angulo QOD, opposto â menor (25. 1.) e por conseq. os dous juntos BOA,

BOA, AOD, ſerão mayores que o terceiro BOD. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXI. *Theor.*

Todos os angulos planos juntos, que comprehendem qualquer angulo ſolido O, ſão menores que 4. rectos. Fig. 28.

D*Em.* Corte-ſe o angulo ſolido com qualquer plano, no qual formem as ſecções dos lados o rectilineo ABCDE. Porquanto os dous angulos BAO, EAO, ſão maiores que o terceiro BAE (*Ant.*) e aſſim dos demais, ſerão todos os angulos das baſes dos triangulos R, S, T, V, X, mayores que os angulos da figura ABDDE: porem os angulos da ditta figura juntamente com 4. rectos, fazem tantas vezes 2. rectos quantos ſão os lados (*Eſch. da* 32. *do* 1. *Theor.* 2.) e os angulos das baſes dos dittos triangulos R, S, T, V, X, juntamente com os do vertice O, fazem a meſma ſomma (32.1.) logo os dittos angulos em O, ſão menores que 4. rectos. *Q.E.&c.*

COROLLARIO.

DEſta, e da antecedente conſta, que quaeſquer 3. angulos planos podem formar hum angulo ſolido; com tanto que todos juntos ſejão menores que 4. rectos; e quaeſquer 2. mayores que o terceiro, ſe forem 3.

ESCHOLIO.

T*Ambem nella tem ſeu principio aquelle celebre Theorema, de que fallaremos mais largamente no livro* 13. *a ſaber*, que ſómente 3. planos regulares podem formar angulos solidos; e por consequencia corpos regulares; isto he, 3. triangulos equilateros, 3. quadrados, e 3. pentagonos. *A razão he, porque para se formar hum angulo solido, são necessarios ao menos 3. angulos planos, os quaes não cheguem a 4. rectos; isto he, à 360. gráos: porem sómente os angulos destas 3. figuras tem esta condição; porquanto os angulos do triangulo equilatero constão de 60. gráos: os do quadrado de 90: e os do pentagono de 108: e 3. dos primeiros fazem 180. 3. dos segundos 270. e 3. dos terceiros 324. E pelo contrario, os angulos do hexagono constão de 120. gráos, e 3. delles fazem 360. gráos (e muitos mais os das figuras mayores) logo sómente aquellas 3. figuras regulares podem formar angulos solidos.*

Quanto aos corpos regulares (que são os que se comprehendem com planos regulares, e iguaes) digo tambem que não podem ser mais que 5. a saber Pyramide, *ou* Tetraëdro, Octaëdro, Icosaëdro, Cubo, *e* Dodecaëdro. *A razão he, porque ou os dittos corpos se compoem de triangulos, ou de quadrados, ou de pentagonos: se de triangulos, como estes só se podem multiplicar por 3. ou por 4. ou por 5. sem chegar a 4. rectos; segue-se, que só se podem formar delles 3. angulos solidos differentes, e por consequencia 3. corpos regulares; a saber, o* Tetraëdro *com 4. triangulos, o* Octaëdro *com 8. e o* Icosaëdro *com 20. Se de quadrados, e pentagonos, como estes só se podem multiplicar por 3. sem passar de 4. rectos; segue-se que só se podem formar delles 2. corpos; a saber, o* Cubo, *o qual consta de 6. quadrados; e o* Dodecaëdro, *o qual consta de 12. pentagonos &c. Porem disto fallaremos, como disse, mais largamente no livro citado.*

PROPOSIÇÃO XXII. e XXIII.

São inuteis, e prolixas.

PRO-

PROPOSIÇÃO XXIV. *Theor.*

Todos os 6. planos HF, LG; HC, DG; &c. de qualquer parallelipipedo HG, ſão parallelogrammos. E quaeſquer 2. oppoſtos ſão ſemelhantes, e iguaes. Fig. 29.

DEm. 1. part. Os planos HF, LG, ſão parallelos (*Def.* 13.) logo as ſecções HA, LC, ſão parallelas (16.) e pela meſma razão as ſecções AC, HL: logo o plano HC, he parallelogrammo; e pelo meſmo diſcurſo todos os demais &c.

2. Part. Conſta da 1. parte que as rectas AH, DH, concurrentes em H, ſão parallelas à CL, BL concurrentes em L: logo os angulos H, L, ſão iguaes (10.) o meſmo ſe entende dos outros 3. angulos A, F, D, a reſpeito dos outros 3. oppoſtos C, G, B. Item os lados HA, HD, ſão reſpectivamente iguaes a os lados LC, LB (34. 1.) logo abſolutamente os planos oppoſtos HF, LG, ſão ſemelhantes, e iguaes: e pela meſma razão todos os demais. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXV. *Theor.*

Se a hum parallelipipedo RS, cortar hum plano NO, parallelo a qualquer dos lados oppoſtos RQ, ou PS; cortallo ha na meſma proporção, que a baſe TS: iſto he, ſerà TO: OV = RO: OP. O meſmo ſe entende dos priſmas. Fig. 31. Fig. 6, 7.

DEm. He ſemelhante â 1. do 6.

COROL.

COROLLARIO.

Fig. 6. e 7. A Secção do prisma parallela â base he igual, e semelhante â mesma base; ou tambem ao plano opposto.

PROPOSIÇÃO XXVI. e XXVII.

São superfluas.

PROPOSIÇÃO XXVIII. *Theor.*

Fig. 29. *O plano que passa pelos diametros AD, CB, de quaesquer planos oppostos de hum parallelipipedo HG, divide o ditto parallelipipedo em 2. prismas iguaes.*

DEm. Consta da 24. que AC, DB, são parallelas â HL: logo são parallelas entre si (9.) e estão no mesmo plano com as diagonaes AD, CB. Provo agora que o ditto plano corta o parallelipipedo HG, em 2. prismas iguaes. Primeiramente, se o parallelipipedo he recto, imagine-se o prisma ADG, dentro do prisma ADL; e que cahe o ponto F, sobre o ponto H; e G, sobre L: he evidente, que sendo a inclinação dos planos HC, HB, igual â dos planos FB, FC; e que sendo estes respectivamente iguaes; como tambem todos os 4. triangulos AHD, AFD, &c. (34.1.) se ajustarão os prismas perfeitamente entre si: logo &c.

Se he obliquo; accommodados os prismas do mesmo modo, ficarão formadas arriba, e abaixo 2. pyra-
Fig. 30. mides quadrilateras DDH, BBG; as quaes pelo discurso da *Prop.* seguinte, estão comprehendidas de 5. planos, em sitio, em grandeza, e em figura respectivamente iguaes: logo accommodada tambem huma

dentro

dentro da outra, se ajustarão perfeitamente entre si: e por consequencia accrescentando âs dittas pyramides o solido intermedio, tambem os prismas serão iguaes. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXIX. e XXX. *Theor.*

Se os parallelipipedos OOCCCCQQ, AACCCCAA, tiverem a mesma, ou igual base, CCCC, e estiverem entre os mesmos planos parallelos CCCC, AAOOQQ; serão iguaes. Fig. 33.

DEm. Se os dittos parallelipipedos estiverem tambem entre os mesmos planos lateraes ACCQ, ACCQ; consta facilmente: porquanto pela 24. deste, e pela 8. do 1. todos os rriangulos ACO, ACQ, &c. são iguaes, e semelhantes; e todos os planos, que comprehendem os 2. prismas ACO, ACQ, são tambem iguaes, e semelhantes respectivamente: logo os dittos prismas são iguaes entre si; isto he, metido hum dentro do outro, se ajustarão perfeitamente: logo accrescentando a cada hum delles o solido intermedio OOCCCCAA, os parallelipipedos serão iguaes. *Q. E. &c.*

Se não estiverem entre os mesmos planos lateraes; Fig. 32. seja o segundo parallelipipedo EECCCCEE. Continuem-se os planos do primeiro QC, QC, atè que occorrão aos planos continuados do segundo EC, EC; e forme-se outro terceiro parallelipipedo AACCCCAA (*Def.* 13.) Porquanto este existe entre os mesmos planos lateraes com o primeiro, e com o segundo, será igual a cada hum delles (1 *part.*) logo estes serão iguaes entre si. *Q. E. &c.* * Esta *Prop.* corresponde â 35. *do livro* 1.

PRO-

PROPOSIÇÃO XXXI. *Theor.*

Fig. 34. *Todos os parallelipipedos, que tem iguaes bases AE, EN (seja qualquer a figura) e a mesma altura Z, são iguaes.*

D*Em.* Supponhamos que os parallelipipedos são rectos; e que estão dispostos de maneira, que os lados DE, EF, fazem huma recta. Continuem-se os lados AB, BE; e tirem-se as parallelas necessarias, atè formar 2. parallelogrâmos BF, EQ, dos quaes o ultimo ja igual ao rectilineo EN (45.1.) Sobre todos os 4. planos AE, BF, EN, EQ, imaginem-se levantados outros tantos parallelipipedos, todos da mesma altura Z. Porquanto AE.Z, he para BF.Z, como AE para BF (25.) isto he, como EN para BF (*Hyp.*) isto he, como EQ para BF (*Constr.*) isto he, como EQ.Z, para BF.Z (25.) serão AE.Z, EQ.Z, iguaes (9.5.) porem EQ.Z, he igual à EN.Z, (*Ant.*) logo tambem AE.Z, EN.Z, são iguaes entre si. *Q. E. &c.*

Se os Parallelipipedos forem obliquos; formem-se sobre as suas bases outros rectos com a mesma altura, aos quaes elles sejão iguaes (*Ant.*) e proceda-se com o mesmo discurso.

PROPOSIÇÃO XXXII. *Theor.*

Fig. 36. *Quaesquer parallelipipedos igualmente altos são entre si, como as bases.*

D*Em.* Sejão as bases NQ, e X; e seja a altura Z. Continue-se QO, e formese sobre NO, hum parallelogrammo MO, igual à X. Imagine-se sobre todo o parallelogrammo MQ, formado hum parallelipipedo com a mesma altura Z. Serà MO.Z, para NQ.Z, como

como MO, para NQ (25.) porem MO, he igual à X (*Conſtr.*) e MO.Z, igual à X.Z (*Ant.*) logo ſubſtituindo iguaes por iguaes; iſto he, plano por plano, e ſolido por ſolido, ſerà X.Z, para NQ.Z, como X para NQ. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

O *Que digo dos Parallelipipedos, demonſtrarey deſpois no livro ſeguinte das Pyramides,* Prop. 6. *dos Priſmas,* Cor. da 9. *e dos ſolidos Conicos, e Cylindricos,* Prop. 11.

PROPOSIÇÃO XXXIII. *Theor.*

Os parallelipipedos ſemelhantes RO, QL, ſão entre ſi em triplicada razão de quaeſquer 2. lados homologos, RQ, QE; ou KQ, QN, &c. Fig. 35.

DEm. Sendo os parallelipipedos ſemelhantes, ſeráo tambem ſemelhantes todos os planos correſpondentes (*Def.* 9.) iſto he, ſeráo os angulos dos dittos planos reſpectivamente iguaes; e os lados, que os comprehendem, reſpectivamente proporcionaes (*Def.* 16.) iſto he, ſerà RQ : QE = KQ : QN = CQ : QH. Diſponhão-ſe pois os dittos parallelipipedos de tal ſorte, que juntos os vertices de quaeſquer angulos iguaes RQK, EQN, fiquem em hum meſmo plano; e em direitura os lados, que os comprehendem (14. 1.) como tambem os que comprehendem os outros 2. angulos RQC, EQH, &c.

Continuem-ſe os planos, que forem neceſſarios (como moſtra a *Figura.*) e formem-ſe 3. parallelipipedos communicantes; iſto he, RA, cortado pelo plano QO: KG, cortado pelo plano QB: e CL, cortado pelo plano QF. Iſto ſupposto, Os 4. ſolidos, em que eſtão divididos os 3. communicantes; iſto he, RO, QA, NB, QL, ſão continuamente proporcionaes, e todos continuão a meſma razão de quaeſquer 2. lados homologos dos parallelipipedos extremos (ou dados.) Porquanto RO : QA = RK : QD (25) iſto he, = RQ : QE (1. 6.) Item, QA : NB = QD : NE; iſto he, = KQ : QN. Item, NB : QL = NC : HN; iſto he, = CQ : QH. Porem todas eſtas razões (RQ : QE) (KQ : QN) (CQ : QH) ſão a meſma: logo todos os 4. ſolidos continuão entre ſi huma meſma razão de quaeſquer 2. lados homologos; e por conſequencia o primeiro RO, he para o ultimo QL, em triplicada razão deſſa meſma razão (*Def.* 10. 5.) *Q.E.&c.*

ESCHOLIO.

O *Que digo dos Parallelipipedos, demonſtrarey deſpois no livro ſeguinte das Pyramides*, Prop. 8. *dos Priſmas*, Cor. 2. da 9. *de quaeſquer ſolidos Conicos, ou Cylindricos, na* 12. *e das Esferas, na* 18.

PROPOSIÇÃO XXXIV. *Theor.*

Fig. 37. *Se os parallelipipedos AB, QO, forem iguaes; reciprocarão as baſes com as alturas; iſto he, será a baſe do primeiro Z, para a baſe do ſegundo X; como a altura do ſegundo QP, para altura do primeiro AD. E pelo contrario, ſe reciprocarem as baſes com as alturas, ſerão iguaes.*

D*Em.* 1. part. Supponhamos 1. que os parallelipipedos ſão rectos; neſte cazo, ou as alturas

ſão

ſão iguaes, ou não: ſe o ſão, conſta da 32: e ſe não, corte-ſe da mayor AD, huma parte CD, igual a QP; e tire-ſe pelo ponto C, hum plano CG, parallelo â baſe. Porquanto CB : QO = Z : X (32.) item CB : AB = CD : AD (25.) iſto he (ſubſtituindo iguaes pela *Hyp.* e *Conſtr.*) CB : QO = QP : AD; ſerà Z : X = QP : AD (11. 5.) logo &c.

Supponhamos 2. que ſão obliquos. Conſiderem-ſe ſobre a meſmas baſes, e com as meſmas alturas formados outros rectos: eſtes, pelas 29. e 30. ſão iguaes aos obliquos; e pelo ditto arriba reciprocão as baſes com alturas: logo tambem aquelles.

2. Part. Supponhamos tambem 1. que os parallelipipedos ſão rectos, e as alturas deſiguaes. Feita a meſma diviſão, ſerá CO : CB = X : Z; iſto he, = AD : CD (*Hyp.*) iſto he, = AE : CE (1. 6.) iſto he, = AB : CB (25.) logo CO = AB (9. 5.) *Q. E. &c.*

Se ſão obliquos, conſta do diſcurſo arriba.

COROLLARIO.

TUdo o que temos demonſtrado dos parallelipipedos nas *Propoſições* 29. 30. 31. 32. 33. e 34. ſe entende do meſmo modo dos priſmas triangulares, por ſerem metades dos dittos parallelipipedos (28.) Pelo que.

1. Os priſmas triangulares igualmente altos ſão entre ſi em triplicada razão de quaeſquer lados homologos; iſto he, oppoſtos a iguaes angulos. Fig. 40.

3. Os iguaes, reciprocão as baſes com as alturas.

4. E os que as reciprocão, ſão iguaes.

ESCHOLIO.

A *Doutrina dos Parallelipipedos se estenderà despois no livro seguinte ás Pyramides, na* Proposição 9. *a quaesquer Prismas multilateros, nos* 3. Corollarios *da mesma* Prop. *e ás Pyramides Conicas, e Cylindros, desde a* 11. *atè à* 15.

PROPOSIÇÃO XXXV.

Serve para demonstrar a seguinte, aqual sem ella se demonstra.

PROPOSIÇÃO XXXVI. *Theor.*

Fig. 38. 38. *O parallelipipedo AH, formado de tres continuas proporcionaes, he igual ao parallelipipedo DO, formado sómente da media, com tanto que sejão ambos equiangulos.*

D*Em.* Supponhamos, que no parallelipipedo AH, os tres lados AE, EL, EG, são continuamente proporcionaes: e que no parallelipipedo DO, os tres lados DB, BI, BC, todos são iguaes a EL.

Porquanto AE : DB = BC : EG (*Hyp.*) serão os planos DC, AG, iguaes (14.6.) porem pela igualdade dos angulos solidos B, E (*Hyp.*) e das rectas BI, EL, accomodado hum angulo dentro do outro, o plano IA, coincide com o plano LF: logo as alturas são iguaes, e por consequencia tambem os dous parallelipipedos (31.) *Q.E.&c.*

ESCHOLIO.

DEsta Prop. *se infere que dadas quaesquer rectas* 1.2.3. *todas tres perpendiculares entre si, e concurrentes em hum ponto; dequalquer modo que se combinem, sempre compoem o mesmo solido. Sejão as combinaçõe s.* 12.3. 31.2. 23.1. *em que as primeiras duas letras indicão a base, e a terceira a altura do solido: comparando pois o primeiro ternario com o segundo, a base* 12. *he para a base* 31. *como* 2. *para* 3. (1. 6.) *isto he, como a altura do segundo para a altura do primeiro: logo estes dous solidos são iguaes. Item, comparando o segundo com o terceiro, a base* 31. *he para a base* 23. *como* 1. *para* 2. *isto he, como a altura do terceiro para a altura do segundo: logo tambem estes dous solidos são iguaes. &c.* Fig. 38.

PROPOSIÇÃO XXXVII *Theor.*

Se 4. *rectas forem proporcionaes* 2 : 4 = 3 : 6. *os parallelipipedos semelhantes, formados ordenadamente sobre ellas, serão proporcionaes. E se o forem, tambem o serão as rectas.*

* He semelhante esta *Prop.* à 22. do 6.

D*Em.* 1. part. Consta da 33. que as razões dos dittos parallelipipedos são triplicadas das razões das dittas rectas: porèm estas são iguaes (*Hyp.*) logo tambem aquellas (34. 5.) *Q. E. &c.*

A 2. part. Consta da 35. do 5.* Esta *Prop.* he universal para quaesquer solidos semelhantes; os quaes, como mostrarey no livro seguinte, todos são em triplicada razão dos seus lados homologos. Fig. 48.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXXVIII. e XXXIX.

São inuteis, e não contem couza memoravel.

PROPOSIÇÃO XXXX. Theor.

Fig. 39. 39. *Se 2. prismas triangulares PEQ, QSOR, tiverem iguaes alturas QE, RO; e a base de hum PE, for parallelogramma, e dupla da base triangular QSO, do outro; serão os dittos prismas iguaes.*

DEm. Formem-se dos dittos prismas os 2. parallelipipedos EO, OE. Pela igualdade das bases EP, OK (34. 1.) e pela igualdade das alturas QE, RO (*Hyp.*) os dittos parallelipipedos são iguaes (31.) logo tambem o serão os prismas metades suas (28.) *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

N*A* 41. *do* 1. *e no* Escholio *da* 36 *do mesmo, demos o modo de medir quaesquer parallelogrammos, em palmos, ou quaesquer medidas vulgares quadradas: agora concluiremos este livro, dando o modo de medir quaesquer parallelipipedos em palmos, ou quaesquer medidas cubicas. Reduzida pois a base de qualquer parallelipipedo a palmos quadrados; e conhecida em palmos a sua altura; multiplique-se hum numero por outro, e o producto serà o numero dos palmos cubicos, de que consta aquelle solido. V. g. supponhamos que a base DB, consta de* 18. *palmos quadrados, por constar o lado EB, de* 5. *e a perpendicular ED,*

Fig. 37.

de

de 3. e $\frac{7}{10}$. e ſupponhamos que a altura AD, conſta de 8. Digo que o producto deſtes numeros [18. *e* 8.] *iſto he*, 144. *ſão os palmos cubicos, de que conſta aquelle parallelipipedo. O meſmo ſe entende dos priſmas. &c.*

ELEMEN-

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA
LIVRO VIII.
OU XII.

NESTE LIVRO, QUE CORRESPONDE nos Solidos ao 6. dos Planos, trata Euclides *particularmente das Pyramides (assim rectilineas, como conicas) dos Cylindros, e das Esferas; e examina todas as suas medidas, e porporções; razão porque he muy familiar aos Geometras Practicos. Dos mais Corpos Polyëdros trata no livro seguinte: e nòs tanto destes como das Conoïdes, e Esferoïdes trataremos nos Selectos de* Arquimedes, *em huma e outra Geometria.*

DEFINIÇÕES.

1 SE fora de qualquer plano rectilineo BD, se tomar hum ponto A, no qual concorrão tantos triangulos, quantos são os lados do ditto rectilineo, BAE, EAD, &c. será o solido assim comprehendido huma *Pyramide re-* Fig. 1.

 ctilinea

ctilinea, ou absolutamente huma *Pyramide*; cuja *Base* he o ditto plano BD, e cujo *Vertice* he o ponto A * A base da pyramide pode ser qualquer polygono: porem os lados sempre hande ser triangulos.

§ Assim como o triangulo he a mais simplez figura das planas rectilineas, e em que todas ellas se resolvem; assim a pyramide triangular (isto he, a q̃ tem por base hum triangulo) he a mais simplez figura das solidas, tambem rectilineas, e em que todas ellas, &c.

Fig. 2.3. 2. Se fora de qualquer circulo CO, se tomar hum ponto A, do qual se circunvolva huma recta AC, ao redor do mesmo circulo; serà o solido assim comprehendido huma *Pyramide Conica*; cuja *Base* he o mesmo circulo CO, o *Vertice* o ponto A, o *Lado* a recta AC, e o *Exo* a recta AO, tirada do vertice ao centro do circulo. * A *Pyramide Conica*, ou he recta, ou escalena: a recta tem o *Exo* perpendicular â base; a escalena inclinado.

Fig. 4.5. 3. Se ao redor de dous circulos iguaes, e parallelos se circunvolver huma recta BC; serà o solido assim comprehendido hum *Cylindro*; cujas *Bases* são os dittos circulos, o *Lado* a recta BC, e o *Exo* a recta AO, tirada de hum centro a outro. * Tambem o *Cylindro*, ou he recto, ou escaleno, segundo o sitio do *Exo*.

4. *Pyramides Conicas*, e *Cylindros Semelhantes*; são os que tem os *exos*, e *diametros* das bases proporcionaes; e alem disto iguaes as inclinações dos mesmos *exos*.

5. *Esfera*: he hum solido comprehendido com huma unica superficie, dentro do qual ha hum ponto, do qual todas as rectas, que se tirão â ditta superficie são iguaes. Este tal ponto se chama *Centro*; e a recta que passando por elle, se termina de huma, e outra parte na mesma superficie, se chama *Diametro*. * A *Esfera* cõsidera-se ser gerada da circunvolução de hum semicirculo sobre o seu diametro.

6. Se

6. Se em huma figura ſe inſcreverem muitas outras, mayores, e mayores, ſem que jà mais cheguem a ſer iguaes a ella: ou tambem, ſe a huma figura ſe circunſcreverem muitas outras, menores, e menores, ſem que jà mais cheguem a ſer iguaes a ella; tanto humas como outras (inſcriptas, e circunſcriptas) ſe dizem *Acabar*, ou *Fenecer* na ditta figura. Iſto he, de tal ſorte creſcem as inſcriptas, e decreſcem as circunſcriptas, que dada qualquer quantidade, por menor que ſeja, ſempre o defeito das primeiras, ou exceſſo das ſegundas, he menor que qualquer aſſignado.

* Eſte he o 3. principio, em que ſe funda a Geometria para penetrar os mais reconditos ſegredos da Quantidade.

O 1. como diſſemos no *Ax.7.* do l. 1. he a total correſpondencia, ou coherencia das figuras.

O 2. he a igualdade, ou ſemelhança das razões, como ſe vê em todo o 5. e 6. livro.

O 3. he eſta mutua approximação de humas figuras a outras: a qual ſerve particularmente para as quantidades incommenſuraveis, e que ſó por eſte meyo ſe podem comparar.

PROPOSIÇÃO I. *Theorema.*

A razão que tem quaeſquer polygonos ſemelhantes inſcriptos em 2. circulos, he ſempre duplicada da dos diametros dos meſmos circulos. Fig. 6. 7.

DEm. Os polygonos ſemelhantes FHO, ADQ, ſão em duplicada razão de quaeſquer lados correſpondentes GF, BA (20.6.) porem eſtes tem ſẽpre a meſma razão, que os diametros dos circulos circunſcriptos FP, AE: e provo. Tirem-ſe no primeiro circulo as rectas HF, GP (a primeira ſubtenſa de qualquer angulo;

lo; e a segunda terminada no mesmo angulo, e na extremidade do diamerro) e no segundo as rectas DA; BE. Nos triangulos HGF, DBA, os angulos G, B, são iguaes, e os lados, que os comprehendem, proporcionaes (*Def.*1.6.) logo os angulos H, D, são iguaes (6.6.) logo nos triangulos GFP, BAE, os angulos P, E, insistentes nos mesmos arcos, com os antecedentes, são tambem iguaes (21.3.) Porem tambem são iguaes nos mesmos triangulos os angulos G, B, por serem rectos (31.3.) e por consequencia os remanentes F, A (*Cor.* 9. *da* 32. 1.) logo os lados dos dittos triangulos são respectivamente proporcionaes (4.6.) e por consequencia GF : BA = FP : AE. Logo sendo os polygonos em duplicada razão dos primeiros, o serão tambem dos segundos. *Q.E.&c.*

COROLLARIO.

OS ambitos, ou perimetros dos dittos polygonos são tambem proporcionaes com os mesmos diametros.

Dem. GF : BA = FP : AE; item HG : DB = FP : AE; e assim dos mais lados: logo todos os do primeiro polygono (isto he, o ambito FGH, &c.) são para todos os do segundo (isto he, para o ambito ABD, &c.) como FP para AE (12. 5.) *Q.E.&c.*

Lemma. I.

Os polygonos inscriptos em hum circulo Fenecem *nelle.*

Fig. 8. DEm. Inscreva-se no ditto circulo o quadrado CADB: será o remanente; isto he, as 4. lunetas COA, AQD, &c. menos que a metade do ditto circulo

culo: porquanto, ſendo o quadrado inſcripto metade do circunſcripto (*Eſcb. da 6. do 4.*) e eſte mayor que o circulo, neceſſariamente hade ſer mayor, que a ſua metade. Inſcreva-ſe deſpois o octagono COAQD, &c. He ſem duvida, que os exceſſos do ditto octagono ſobre o quadrado, (iſto he, os 4. triangulos COA, AQD, &c.) tambem ſão mayores, que a metade das 4. lunetas: porquanto, tirada pelo ponto O, a tangente EF e produzidos os lados do quadrado inſcripto; o triangulo COD, he metade do rectangulo CF (41. 1.) e eſta mayor que a luneta correſpondente, &c. Logo, ſe do meſmo modo ſe forem dobrando os lados das figuras inſcriptas, ſempre ſe irà tirando mais, e mais que a metade do remanente; e por conſequencia virſe-ha a hum defeito tam pequeno, que ſeja menor que qualquer aſſignado; que he o meſmo, que *Fenecerem* as figuras inſcriptas no circulo, conforme a *Def. 6.*

PORISMA UNIVERSAL.

Se quaeſquer figuras inſcriptas, e ſemelhantes fenecerem em outras, guardando ſempre entre ſi a meſma razão; eſta meſma terão as figuras, em que fenecem.

D*Em.* Sejaõ as figuras A, B, aquellas, em que fenecem as inſcriptas; e ſeja (X : Z) a razão, que ſempre guardão entre ſi quaeſquer inſcriptas ſemelhantes: Digo que tambem A he para B, como X para Z. Se o não he, ſeja v.g. A para B, em mayor razaõ, que X para Z; e por conſequencia, tomada outra qualquer R, menor que A, ſeja R : B = X : Z (10. 5.) He ſem duvida, que ſe podem inſcrever em A, e B, tantas figuras ſemelhantes mayores, e mayores, que ſeja huma dellas C, inſcripta em A (a quem correſpon-

R	:	
A	:	B.
X	:	Z.
C	:	D.

de D, inſcripta em B) mayor que R; iſto he, cujo defeito a reſpeito de A, ſeja menor que o de R, a reſpeito do meſmo A (*Lem. ant.*) Iſto ſuppoſto: porquanto R : B = X : Z (*Conſtr.*) e C : D = X : Z (*Hyp.*) ſerà R : B = C : D (11. 5.) e permutando, ſerà R : C. = B : D; porem B, he mayor que D (por ſer circunſcripta a reſpeito da inſcripta) logo tambem R, he mayor que C, contra a ſuppoſição.

PROPOSIÇÃO II. *Theor.*

Os circulos ſão entre ſi em duplicada razão dos ſeus diametros.

DEm. Conſta facilmente do ditto: porquanto, os polygonos ſemelhantes fenecem nos circulos (*Lem. ant.*) e tem ſempre entre ſi a meſma razaõ; iſto he, duplicada dos diametros (1.) logo tambem os circulos terão a meſma razão, pelo *Poriſma univerſal*. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO III. e IV.

São prolixas; e não tem mais uſo, que pera demonſtrar a quinta, a qual ſem ellas ſe demonſtra mais facilmente pelos 2. Lemmas ſeguintes.

Lemma II.

Se à duas pyramides triangulares cortarem dous planos parallelos às baſes, de ſórte que cortem tambem proporcionalmente quaeſquer lados dellas; ſerão as ſecções entre

entre si como as bases : isto he, serà HCD : TQN = FGB : RSX. Fig. 9. e 10.

DEm. Porquanto aos planos FAG, GAB, FAB, cortão os 2. planos parallelos FGB, HCD, serão as secções FG, HC; GB, CD; FB, HD, respectivamente parallelas (16. 11.) logo tambem os angulos H, C, D, são respectivamente iguaes aos angulos F, G, B (10. 11.) e por consequencia a secção HCD, he semelhante â base FGB: o mesmo digo da outra secção TQN, &c. Porèm HCD, he para FGB, em duplicada razão de CD à GB (19. 6.) isto he, de AD, à AB (*Cor. da 4 do 6.*) isto he, de MN à MX (*Hyp.*) isto he, de QN à SX; de quem tambem he em duplicada razão TQN para RSX (19. 6.) logo HCD : FGB = TQN : RSX (35. 5.) e alternando, HCD : TQN = FGB : RSX (16. 5.) *Q.E.&c.*

Lemma III.

Os prismas inscriptos, e circunscriptos âs pyramides triangulares, fenecem nellas.

DEm. Divida-se qualquer lado AG, de huma pyramide triangular, em quaesquer partes iguaes; e tirem-se pelos pontos das divisões B, D, planos parallelos â base OBQ, FDN. Dos pontos O, Q; F, N, tirem-se outras tantas parallelas ao mesmo lado AG; e juntos os termos destas com as rectas CE, LT, imaginem-se inscriptos na pyramide os prismas OBQEDC, FDNTGL. Fig. 16.

Do mesmo modo: produzidos os lados dos dittos planos, e levantadas as perpendiculares necessarias, imaginem-se circunscriptos â ditta pyramide os prismas VABQO, PBDNF, HDGSR. Serà este ultimo o excesso de todos os circunscriptos sobre os inscripto

[por-

[por ser VB, igual à OD; e por consequencia PD, a summa dos 2. primeiros excessos: item PD, igual à FG; e por consequencia HG, a summa de todos 3. &c.] Porèm dividido o lado AG, em aliquotas menores, e menores, este excesso vay sendo sempre de cada vez menor, atè ser menor que qualquer assignado; e com muito mais razaõ o excesso dos mesmos prismas sobre a pyramide (como he manifesto) logo os prismas circunscriptos fenecem na ditta pyramide (*Def.* 6.) *Q.E.&c.* * O mesmo digo dos inscriptos; por ser o defeito sempre menor, &c.

PROPOSIC,ÃO V. *Theor.*

Fig. 11. e 12. *As pyramides triangulares igualmente altas, são entre si como as bases.*

DEm. Dividão-se as alturas RG, AB, em igual numero de aliquotas; e pelos pontos das divisões tirem-se planos parallelos âs bases; e inscrevão-se prismas como no *Lem. ant.* Porquanto os prismas GPQO, BYDC, são igualmente altos; serà o primeiro para o segundo, como a base para a base (*Cor.* 1. *da* 34. *do* 11.) isto he, como PQO para YDC; ou como GHL para para BFE (*Lem.* 2.) porèm pelo mesmo discurso, todos os prismas correspondentes são entre si na mesma razão: logo a summa dos inscriptos na primeira pyramide he para a summa dos inscriptos na segunda, como a base para a base (12. 5.) Porèm os dittos prismas fenecem nas dittas pyramides (*Lem.* 3.) logo tambem estas serão entre si como as bases (*Por. universal.*) *Q. E. &c.* * A Dem. sempre he a mesma, ou as pyramides sejão rectas, ou inclinadas.

PROPO-

PROPOSIÇÃO VI. *Theor.*

Quaesquer pyramides igualmente altas são entre si como as bases.

DEm. Resolvão-se as bases em triangulos X, Z, Y; P, Q; e as pyramides multilateras em triangulares. A pyramide XA, he para a pyramide PB; como X para P (*Ant.*) Item, a mesma XA, he para a pyramide QB; como X para Q: logo XA : PB+QB = X : P+Q (12. 5.) Do mesmo modo mostrarey, ser PB+QB : XA+ZA+YA = P+Q : X+Z+Y: logo &c. Fig. 13. e 14.

PROPOSIÇÃO VII. *Theor.*

Toda a pyramide he a terceira parte do prisma, que tem com ella a mesma base, e altura.

DEm. Seja 1. a pyramide DCGO, triangular; a qual tenha a mesma base, e altura com o prisma DCGBEA. Tirem-se as rectas AC, CB, BD; e considere-se dividido o prisma em 3. pyramides. Porquanto os triangulos DBG, DBA, são iguaes (34. 1.) serão as pyramides DBGC, DBAC, tambem iguaes (5.) porem, pela mesma razão, as pyramides CAEB CADB (isto he, a mesma pyramide DBAC) tambem são iguaes: logo todas as 3. pyramides, em que està dividido o prisma, são iguaes entre si; e por consequencia cada huma dellas he a terceira parte do mesmo prisma. Porèm a proposta DCGO, he igual à DCGB (ou DBGC) logo tambem esta he a terceira parte do mesmo prisma. *Q. E &c.* Fig. 15.

Seja 2. multilatera a ditta pyramide GRC. Resolva-se o prisma AR, em prismas triangulares, como tambem a pyramide, &c. Consta da primeira par- Fig. 17.

te, que todos os prismas triangulares são triplos das pyramides correspondentes: logo tambem o prisma multilatero será triplo da pyramide multilatera. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO VIII. *Theor.*

As pyramides semelhantes são em triplicada razão dos seus lados homologos, ou correspondentes.

Fig. 19. e 20. DEm. Sejão 1. trigonas as pyramides propostas CBAE, ONMR. Dupliquem-se os triangulos das bases; e formem-se sobre os parallelogrammos AD, MP (34.1.) os parallelipipedos AH, MT, da mesma altura com as pyramides. Como estas se suppoem semelhantes, o serão tambem os dittos parallelipipedos (*Def.* 9. 11.) e como, dividido cada parallelipipedo em 2. prismas (28. 11.) cada pyramide he a terceira parte do seu prisma (*Ant.*) será tambem a sexta de cada parallelipipedo: logo serão as pyramides entre si, como os parallelipipedos (15. 5.) porèm estes são em triplicada razão dos seus lados homologos (33. 11.) os quaes são communs a ambos os solidos: logo tambem aquellas. *Q.E.&c.*

Fig. 21. e 22. Sejão 2. polygonas as dittas pyramides RSTV, XZYS. Resolvão-se as pyramides propostas em outras trigonas; as quaes facilmente se mostra que são respectivamente semelhantes (pela 20. e 5. do 6: e pela *Def.* 9. do 11.) porèm estas, pela primeira parte, são em triplicada razão de quaesquer lados homologos: logo tambem aquellas &c.

PROPOSI-

PROPOSIÇÃO IX. *Theor.*

As pyramides iguaes tem as bases, e alturas reciprocamente proporcionaes. E se as tem reciprocamente proporcionaes, são iguaes.

DEm. 1. part. Sejão 1. as pyramides trilateras OQPM, CBAF. Formados, e divididos, como na *Ant.* os parallelipipedos PT, AG; serão estes sextuplos das pyramides iguaes; e por consequencia iguaes: logo reciprocarão as bases com as alturas (34.11.) isto he, serà a altura PM para AF; como a base AD, para a base PR: porèm as alturas dos parallelipipedos são as mesmas que as das pyramides, e as bases duplas daquellas (34.1.) logo tambem as pyramides reciprocarão do mesmo modo &c. Fig. 23. e 24.

Sejão 2. multilateras &c. Reduzidas as bases polygonas a 2. triangulos respectivamente iguaes; e formadas 2. pyramides trigonas com as mesmas alturas; serão as trilateras, e multilateras respectivamente iguaes (6.) porèm as primeiras reciprocão as bases com as alturas: logo tambem as segundas.

2. Part. Porquanto OQP : CBA = AF : PM (*Hyp.*) serà tambem PR : AD = AF : PM; logo os parallelipipedos PF, AG, são iguaes (34. 11.) logo tambem as suas sextas partes; isto he, as pyramides &c.

COROLLARIOS.

O que dissemos das pyramides nas 3. Proposições antecedentes, 6. 8. e 9. se entende tambem de quaesquer prismas, que tiverem com ellas as mesmas bases, e alturas; por serem triplos dellas (7.) Pelo que

1. Os prismas igualmente altos são entre si como as bases.

2 Os prismas semelhantes são em triplicada razão dos lados homologos.

3 E os prismas iguaes reciprocão as bases com as alturas: e se as reciprocão, são iguaes.

ESCHOLIO.

DO ditto se infere hum modo facil de medir quaesquer prismas, e pyramides; com tanto que sejão conhecidas as bases, e as alturas em qualquer medida vulgar: porquanto multiplicando hum numero por outro, sabira o prisma; e multiplicando hum numero pella terceira parte do outro, sabira a pyramide. V. g conste a base POV, de 25. palm. quadr. e a altura PS, de 7. sera a solidez do prisma SV, de 175. palm. cubic. e a da pyramide POVL, de 58. $\frac{1}{3}$. * Demonstradas as proporções dos solidos rectilineos, segue-se agora tratar dos solidos curvilineos, ou circulares; para cuja theoria premitto o seguinte.

Fig. 18.

Lemma IV.

As pyramides, e prismas inscriptos nos solidos conicos, e cylindricos Fenecem nelles.

Fig. 25. DEm. As pyramides igualmente altas FGEA, FRGDEA, são entre si como as bases (6.) porem estas; isto he, os polygonos inscriptos, fenecem no circulo (*Lem.* 1.) logo tambem aquellas fenecerão na conica, que tem por base o mesmo circulo. O mesmo digo dos prismas FGEB, FRGDEB, &c. (*Cor.* 1 *da* 9.)

PROPOSIC,ÃO X. *Theor.*

Toda a pyramide conica FGEA, he a tercei. parte do cylindro FGEB, que tem com ella a mesma base, e altura. Fig. 25.

DEm. Inscreva-se na base do cylindro qualquer polygono regular; e sobre este se forme huma pyramide, e hum prisma; ambos da mesma altura AC, com a do cylindro: a pyramide inscripta na conica, e o prisma no cylindro. He sem duvida que a ditta pyramide he a terceira parte do prisma (7.) e que dobrando-se os lados do polygono da base, e inscrevendo-se novas, e novas pyramides; novos, e novos prismas, sempre as pyramides continuarão a ser as terceiras partes dos dittos prismas: porem as pyramides assim formadas fenecem na conica; e os prismas no cylindro (*Lem.* 4.) logo tambem a conica será a terceira parte do cylindro (*Por. universal.*) *Q. E. &c.*

PROPOSIC,ÃO XI. *Theor.*

As pyramides conicas igualmẽte altas FGEA, MPNH, são entre si como as bases. O mesmo digo dos cylindros FB, MQ.

DEm. As pyramides rectilineas inscriptas nas conicas são entre si como as bases (6.) porem as primeiras fenecem nas segundas (*Lem.* 4.) e as bases nos circulos (*Lem.* 1.) logo tambem as conicas são entre si como as bases (*Por. universal*) *Q. E. &c.* Fig. 25. e 26.

E como os cylindros são triplos das dittas pyramides conicas [*Ant.*] segue-se que tambem elles são entre si, como as bases &c.

CORO-

COROLLARIO.

DO mesmo modo se prova, que não sómente os cylindros; senão tambem quaesquer corpos cylindri-formes (ou rectos, ou escalenos) são entre si como as bases: como tambem quaesquer corpos â maneira de pyramides; isto he, que começando em hum plano vão acabar em hum ponto; com tanto que sejão todos igualmente altos.

PROPOSIÇÃO XII. *Theor.*

Fig. 25. e 26. *As pyramides conicas semelhantes* (Def. 4.) *FGEA, MPNV, são em triplicada razão dos diametros das bases FE, MN. O mesmo digo dos cylindros FGEB, MPNK*

DEm. Inscrevão-se nas bases das dittas pyramides polygonos semelhantes; e considerem-se nelles formadas pyramides rectilineas inscriptas nas conicas &c. Consta facilmente que tambem as ditas pyramides rectilineas são semelhantes; e por consequencia em triplicada razão dos lados homologos FG, MP [8.] isto he, dos diametros FE, MN [1.] porem as dittas pyramides inscriptas fenecem nas conicas [*Lem.* 4.] logo tambem estas serão em triplicada razão dos dittos diametros (*Por. universal*) *Q.E.&c.*

Dos cylindros consta facilmente pela 10.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XIII. *Theor.*

Se à qualquer cylindro RE, cortar hum plano FG, parallelo â base; serà a parte do solido RG, para a outra parte FE, como a correspondente parte do exo BC, para a outra parte CA. Fig. 27.

DEm. He a mesma que a da 25. do 11. e tem força tanto no solido, como na superficie cylindrica.

PROPOSIÇÃO XIV. *Theor.*

Os cylindros MQ, RE, collocados sobre iguaes bases, são entre si como as alturas. O mesmo digo das pyramides conicas. Fig. 26. e 27.

DEm. 1. part. Sejão 1. os cylindros rectos. Cortado do mayor a parte FE, da mesma altura que o menor MQ, serà MQ = FE (11.) porem FE : RE = CA : BA (*Ant.*) logo substituindo igual por igual, serà MQ : RE = CA (ou OH) : BA.* Se são escalenos, reduzão-se a rectos &c.

2. Part. Consta da *Prop.* 10.

COROLLARIO.

O mesmo se entende de quaesquer prismas, e pyramides; para cuja demonstração serve o *Cor.* 1. da 9. e a 25. do 11. quanto ao primeiro: e esta mesma com a 7. quanto ao segundo.

PROPOSIÇÃO XV. *Theor.*

Os cylindros iguaes FB, RE, reciprocão as bases Fig. 25. e 27.

bases com as alturas. E se reciprocão as bases com as alturas são iguaes.

DEm. He semelhante â da 34. do 11. mas em lugar da 32. e 25. do mesmo, que alli se citão, se deve citar a 11. e 13. deste.

ESCHOLIO.

N*Aõ faz menção* Euclides *da razão composta dos solidos; assim como a fez dos planos na 23. do 6. porem facilmente se lhes pode applicar a mesma doutrina. Digo pois, que os cylindros, e prismas são tambem em razão composta das suas bases, e alturas. Sejão os cylindros CCB, OOD: faça-se como a base do primeiro CC, para a base do segundo OO; assim X para Z: e como altura do mesmo primeiro CB, para a altura do segundo OD; assim Z para Y. Digo, que assim como X he para Y, assim o primeiro cylindro he para o segundo.*

Fig.28. e 28.

Dem. *Corte-se do mais alto huma parte OOG, a qual tenha a mesma altura, que o mais baixo CCB. Será CCB : OOG = CC : OO* (11.) *isto he, = X : Z; e será OOG : OOD = OG (ou CB) : OD* (13.) *isto he, = Z : Y: logo por igual, será CCB : OOD = X : Y* (22. 5.) *isto he, em razão composta daquellas duas razões* (Def. 18. 5.) *Q. E. &c.*

Quanto aos prismas, demonstra-se do mesmo modo; citando o Cor. *da 9. e a 14. E quanto âs pyramides (ou sejão rectilineas, ou conicas) a razão he manifesta; por serem tanto humas, como outras, terceiras partes dos prismas, e dos cylindros respectivos; pela 7. e 10. &c.*

PROPOSIÇÃO XVI. e XVII.

Não tem mais uso, que para demonstrar a 18. a qual sem ellas se demonstra mais facilmente pelo seguinte.

Lem-

Lemma V.

Os cylindros inſcriptos no hemisferio fenecem *nelle.* Fig. 29.

DEm. Seja *bab.* o ſemi-circulo maximo de hum hemisferio; e divida-ſe o rayo *ae.* perpendicular ao diametro *bb.* em quaeſquer aliquotas *ag. gf. fe.* Pelos pontos das diviſões *g. f.* tirem-ſe as perpendiculares *cc. ii.* e inſcrevão-ſe no ſemi-circulo os rectangulos *pi. oc*: e produzidos os lados, circunſcrevão-ſe os outros *bq. il. ch.* Como todos eſtes rectangulos tenhão a meſma altura he manifeſto que o exceſſo dos circunſcriptos ſobre os inſcriptos (iſto he, os rectangulos *bi. ic. ch. ol. pq.*) ſão iguaes ao rectangulo *bq.* Imagine-ſe pois, que ſe circunvolve o ditto ſemi-circulo ſobre o rayo *ae.* e que tanto elle, como os rectangulos inſcriptos, e circunſcriptos produzem hum hemisferio todo cheyo de cylindros inſcriptos, e circunſcriptos: tambem he evidente, que o exceſſo dos primeiros ſobre os ſegundos, he igual ao cylindro *bq.* porem a altura deſte pode ſer menor que qualquer aſſignada; e por conſequencia o meſmo cylindro: logo o exceſſo dos cylindros circunſcriptos ſobre os inſcriptos, e muito mais o do hemisferio ſobre os meſmos inſcriptos, pode ſer menor que qualquer aſſignado; e por conſequencia os dittos cylindros inſcriptos fenecem no hemisferio (*Def.* 6.) *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

DO meſmo modo ſe demonſtra, que os cylindros inſcriptos nas pyramides conicas, nas conoïdes, e esferoïdes, fenecem nellas.

PROPOSIÇÃO XVIII. *Theor.*

As esferas são em triplicada razão dos seus diametros.

Fig. 30. e 31. DEm. Dividão-se os rayos EA, XD, em igual numero de aliquotas; e inscrevão-se em hum, e outro hemisferio outros tantos cylindros, como no *Lem. ant.* Porquanto PG, CG, GA, são continuamente proporcionaes (*Cor. da* 13. 6.) serà PG para GA, em duplicada razão de CG para GA (*Def.* 10. 5.) assim como SM para MD, em duplicada razão de RM para MD: porem PG : GA = SM : MD (por serem os antecedentes equi-multiplices dos consequentes) logo CG : GA = RM : MD (35. 5.) isto he (pela igualdade das aliquotas) serà CG : GF = RM : MN: logo os cylindros CO, RQ, são semelhantes (*Def.* 4.), e por consequencia em triplicada razão dos diametros das bases (12.) ou dos semi-diametros CG, RM. Porem estes mesmos semi-diametros das bases são entre si como os diametros das esferas AP, DS [pelas 18. 22. e 16. do 5.] logo os dittos cylindros CO, RQ, são tambem em triplicada razão dos dittos diametros. Porem, pelo mesmo discurso, esta mesma triplicada razão dos diametros das esferas, tem todas os cylindros correspondentes, inscriptos nas mesmas esferas: logo, fenecendo estes nellas (*Lem. ant.*) tambem ellas terão a mesma razão (*Por. universal*) *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

COnhecida a proporção dos diametros de quaesquer esferas, facilmente se conhecerà a das mesmas esferas; se se continuar por 4. termos a mesma razão, e se comparar o primeiro termo com o quarto.

V.g.

V.g. seja o diametro BB de 27. palmos, e ZZ de 18. e continue-se por 4. termos aquella razão (27. 18. 12. 8.) Digo, que a razão da primeira para a segunda esfera, he como 27. para 8. * *O modo de medir as esferas, cylindros, e pyramides conicas, daremos abaixo no Appendiz 2. dos Selectos de* Arquimedes.

ESCHOLIO.

ASsim como os planos semelhantes se augmentão, ou diminuem em qualquer razão dada, por meyo de huma media proporcional; assim tambem os solidos se augmentão, ou diminuem por meyo de duas; da maneira seguinte. Dê-se qualquer solido [regular, ou irregular] cujo lado, ou diametro seja A; e queira-se outro semelhante para o qual tenha a razão de P para Q. Faça-se como P para Q, assim A para B; e busquem-se entre A, e B duas medias proporcionaes X, Z: Digo que o solido semelhante à A, que tiver por lado homologo, ou diametro, huma recta igual à X, será o que se busca. He invenção de Hippocrates; *e com que se satisfaz ao Oraculo Deliaco.*

$$\boxed{\begin{matrix} A : X : Z : B \\ P : Q \end{matrix}}$$

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA
LIVRO IX.
OU XIII.

NESTE LIVRO (O QUAL, COMO disse no Prologo, he o ultimo de Euclides) *se trata da inscripção dos Polyëdros Regulares na Esfera, assim como no 4. da dos Polygonos no Circulo. A materia não he muito necessaria aos Practicos; porem para os Theoricos, eu a julgo de summa importancia: pois àlem de ser engenhosissima, com ella se poem a ultima mão â Geometria Elementar; e se fazem referir todos os Corpos Regulares ao seu objecto de Attribuição, qual he a Esfera.*

DEFINIÇÃO UNICA

A RECTA DC, se diz *Poder* o duplo, triplo, ou quadruplo da recta DA; quando o quadrado, que sobre ella se forma, DF, he duplo, triplo, ou quadruplo, do que se forma so bre a outra recta, DO.* Isto mesmo se co- Fig. 1.

stuma

ſtuma explicar por eſtes termos: DC, he em *Potencia* dupla, tripla, ou quadrupla de DA.

Lemma.

Fig. 2. *Se cortado o lado AB, de qualquer quadrado, em quaeſquer pontos D, C, ſe tirarem delles rectas perpendiculares ao ditto lado, DR, CL; e pelos pontos O, Q, em que as dittas perpendiculares occorrem â diagonal BE, ſe tirarem parallelas ao meſmo lado, NH, KI: ſerão os parallelogrammos NR, VG, CI, exiſtentes ſobre a ditta diagonal, quadrados daquellas partes, que lhes correſpondem no lado cortado, AD, DC, CB.*

DEm. Conſta da 34. do 1. e do *Corollario* 11. da 32. do meſmo.

PROPOSIÇÃO I. *Theorema.*

Fig. 1. *Se ſe cortar a recta AB, em media, e extrema razão no ponto C* (30. 6.) poderá *o mayor ſegmento AC, junto com a metade da toda, ou com ſua igual DA, o quintuplo da meſma metade: iſto he, ſerà o quadrado DF = 5 DO.*

DEm. Forme-ſe ſobre DC, hum quadrado; e outro ſobre AB; e continue-ſe o lado FC, atè N; e o lado GA, atè H. Pelo ponto O, em que eſte ſegundo lado occorre â diagonal do primeiro quadrado, tire-ſe huma parallela ZK.

Porquanto o Rect. ABC = Quad. AC (*Hyp.*) ſerà ferà CL = HK (*Lem. ant.*) e porquanto os RRect. EO, OC, são iguaes entre si (43.1.) e qualquer delles metade de AN (por ser AC commum, e AO metade de AG) ferá o gnomon ZX = Quad. AL. Porem AL = 4 DO (20.6.) logo tambem ZX = 4 DO; e por consequencia o quadrado DF = 5 DO. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO II. *Theor.*

*Se DC, poder o quintuplo de DA; dividida a dupla da ditta DA (isto he AB) em media e extrema razão, ferà o mayor segmento AC, o que junto com DA, compoem a ditta recta DC.** He conversa da ant. Fig. 1.

DEm. Continue-se a recta dada DC, atè que AB, seja dupla de DA; e formem-se, e dividão-se como arriba os dous quadrados DF, AL. Porquanto DF, he quintuplo de DO (*Hyp.*) ferà o gnomon ZX, quadruplo do mesmo DO: logo o gnomon ZX = Quad. AL. (20.6.) Porem, por ser AB dupla de DA, e igual à AG, tambem AG he dupla de DA, ou de AO, sua igual, e por consequencia o Rect. AN, he duplo de OC, e igual aos 2. RRect. EO, OC (43.1.) logo o remanente Rect. CL, he igual ao remanente Quad. HK; isto he (pela igualdade das rectas) o rectangulo ABC, he igual ao quadrado AC; e por conseq. a recta AB, està cortada em C, em media, e extrema razão (30.6.) *Q. E. &c.*

PROPO-

PROPOSIC,ÃO III. *Theor.*

Fig. 2. *Se se cortar huma recta AB, em media, e extrema razão no ponto C;* poderà *o menor segmento CB, junto com a metade do mayor DC, o quintuplo da ditta metade.*

DEm. Forme-se o quadrado AF, e divida-se como no *Lem. ant.* Porquanto o Rect. ABC, ou CF, he igual ao Quad. AC, ou KL (*Hyp. e Lem.*) e o Quad. KL, he quadruplo do Quad. VG (20.6.) serà o Rect. CF, quadruplo do mesmo Quad. V.G: porem o Rect. CF, he igual ao gnomon XZ [por ser CH cõmum, e DO igual à GF, pela igualdade dos lados] logo o gnomon XZ he tambem quadruplo do mesmo Quad. VG; e por conseq. o Quad. DH he quintuplo do mesmo: isto he, a recta DB (composta da metade do mayor segmento, e do menor) *poderà* o quintuplo da ditta metade DC. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

N*Aõ faz menção* Euclides *da conversa desta Proposição, como nem das conversas das 2. seguintes; talvez porque vio, que a demonstração da antecedente se podia facilmente applicar a qualquer dellas, como o fez* Campano, e Clavio.

PROPOSIÇÃO IV. *Theor.*

Fig. 3. *Se AB, for cortada em C, em media, e extrema razão; serà o quadrado da toda junto com o quadrado do menor segmento CB,*

3. vezes mayor, que o quadrado do mayor ſegmento AC.

DEm. O Rect. ABC, ou AD, he igual ao Quad. AC, ou EG (*Hyp. e Lem.*) porem AD, he igual à CF: logo os 2. rectangulos AD, CF; iſto he o gnomon XZ, junto com o quadrado CD, ſão duplos do quadrado EG: logo accreſcentando ao ditto gnomon o meſmo quadrado EG, ſerà o quadrado AF, junto com o quadrado CD, triplo do quadrado EG. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

FRrancisco Maurolyco *accreſcenta aqui hum Theor. muito engenhoſo, que he o ſeguinte.* Se AB, for cortada em C, em media, e extrema razão, *poderà* a composta da toda, e do menor ſegmento CB, o quintuplo do mayor AC. Fig. 4.

Dem. *Continue-ſe AB, atè que BD, ſeja igual à CB. Porquanto à recta CD, cortada pelo meyo em B, ſe lhe accreſcentou a recta AC, ſerà o rectangulo ABD, tomado 4. vezes, juntamente com o quadrado AC, igual ao quadrado AD (8.2.) Porem o rectangulo ABD, ou ABC, he igual ao quadrado AC* (Hyp.) *logo o Quad. AD = 5. Quad. AC. Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO V. *Theor.*

Se cortada AB em C, em media, e extrema razão, ſe lhe accreſcentar DA, igual ao mayor ſegmento AC; ficarà a compoſta DB, tambem cortada em media, e extrema razão no ponto A: ſendo o ſeu mayor ſegmen- Fig. 7.

 to

to a mesma dada AB, e o menor a accrescentada DA.

DEm. Formem-se os 2. quadrados DK, AQ; e divida-se o segundo pelo *Lem. ant.* O Rect. ABC, ou KQ = Quad. AC, ou DK: logo accrescentando a ambas as partes o Rect. commum AG, serà o Rect. DG = Quad. AQ: isto he, serà DB : AB : = AB : DA (17. 6.) logo a composta DB, està cortada em A, em media, e extrema razão (30. 6.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO VI. *Theor.*

Fig. 6. *Se a recta AB, for Racional (como se suppoem qualquer recta, que não diz respeito à outra) e estiver cortada em media, e extrema razão no ponto C; serão os 2. segmentos AC, CB, as Irracionaes chamadas* Apotomes.

DEm. Accrescente-se à AB, a sua metade DA. Por ser AB, Racional, tambem o serà DA: logo ambas se podem exprimir por numeros, tanto em longitud, como em potencia. Porem, por ser o quadrado DC, quintuplo de DA (1.) tambem estes se podem exprimir por numeros, a respeito das mesmas unidades: logo as 3. rectas AB, DA, DC, são Racionaes em potencia; e as 2. primeiras em potencia, e em logitud. Porem por ser o Quad. DC, para o quadrado DA, como 5. para 1, ou 25. para 5. (isto he, como numero quadrado, para não quadrado) as suas raizes são incommensuraveis [*Cor. da* 24. 8.] logo, supposto que DA, he Racional, o residuo AC, serà Irracional *Apotome* (74. 10.) *Q. E. &c.*

Item; por ser o Rect. ABC = Quad. AC, applicado o quadrado da *Apotome* AC, à Racional AB, ficarà o resio residuo CB, tambem *Apotome Primeira* (98. 10.) *Q. E. &c.*

ESCHOLIO

ESta Proposição não se pode entender bem, sem alguma luz do livro 10. *porem por se não omittirem as ultimas Proposições deste livro, em q̃* Euclides *faz menção destas incommensurabilidades, a quiz pôr aqui pelo modo mais claro, que me foy possivel. Veja-se o* Esch. *da* 11. *do* 2.

PROPOSIÇÃO VII. *Theor.*

SE em hum pentagono equilatero ABCDE, se derem 3. *angulos iguaes (ou sejaõ os conjunctos A, B, C; ou os descontinuados A, C, E) será o ditto pentagono totalmente equiangulo.* Fig. 1.

Dem. 1. Cazo: tirem-se as subtensas BE, AC, BD: e do ponto O, em que as 2. primeiras se cortão, tire-se a recta OD. Porquanto os triangulos BAE, BCD, tem os angulos A, C, iguaes; e iguaes os lados, que os comprehendem (*Hyp.*) seraõ os angulos AEB, CDB, iguaes; e iguaes as bases BE, BD (4.1.) logo no triangulo Isosceles DBE, serão tambem iguaes os angulos sobre a base BED, BDE (5. 1.) e por conseq. os totaes E, D.

Porèm estes mesmos angulos são iguaes a qualquer dos 3. que se suppoem iguaes, A, B, C: porquanto, pelo discurso arriba, os triangulos BAE, ABC, são totalmente iguaes: logo o triangulo BOA, he isosceles [6. 1.] logo tiradas de iguaes BE, AC, as iguaes BO, AO, as remanentes OE, OC, serão iguaes: logo os triangulos OED, OCD são respectivamente equilateros, e equiangulos (8. 1.) Porèm pela igualdade dos dittos triangulos BAE, ABC os angulos parciaes AEB, BCA, são iguaes: logo tambem o serão os totaes E, C; e pelo mesmo discurso, o ultimo D. *Q. E. &c.*

2. Cazo: supposto que são iguaes os angulos A, C, o serão tambem, pelo discurso arriba, os outros 2. E, D; porèm E, tambem se suppoem igual à A: logo os 3. conjunctos A, E, D, são iguaes; e por conseq. todos 5. &c.

PROPOSIÇÃO VIII. *Theor.*

Fig. 9. *Se 2. rectas DB, GE, subtenderem 2. angulos conjunctos de qualquer pentagono regular; cortar-se-hão mutuamente em media, e extrema razão. E qualquer dos mayores segmentos EO, serà igual ao lado do ditto pentagono.*

DEm. Circuncreva-se hum circulo ao pentagono (14. 4.) e sejão os arcos AB, BG, &c. iguaes (26. 3.) serà o triágulo DOG, isosceles (29. 3. e 6. 1.) logo o angulo externo EOD, he duplo do interno ODG, ou BDG (32. 1.) porem tambem he duplo do mesmo angulo o angulo EDO, ou EDB, por insistir em hum arco duplo do primeiro (33. 6.) logo o triangulo DEO, he isosceles; e por conseq. o segmento mayor EO, he igual ao lado do pentagono ED, que he a 2. parte da Prop.

Quanto à 1. Os triangulos DOG, EDG, são isosceles; e o angulo nas bases DGE, he commum: logo os dittos triangulos são semelhantes (*Cor.* 9. *da* 32. 1. *e* 4. *do* 6.) logo EG : DG : = DG : OG; isto he, substituindo iguaes, EG : EO = EO : OG. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO IX. *Theor.*

Se se compuzerem os lados do decagono AB, e do hexagono BD (inscriptos no mesmo circulo) ficarà a composta AD, cortada em B, em media, e extrema razão. Fig. 10.

DEm. Tirem-se do centro C, as rectas CA, CB, CD. O triangulo ACB, he isosceles; e o angulo BCE, quadruplo do vertical ACB (*Hyp.*) porem o mesmo BCE, he igual aos 2. da base BAC, ABC (32. 1.) logo qualquer destes ABC, serà duplo do mesmo vertical ACB. Porem, por ser tambem isosceles o triangulo CBD (*Cor.* 1. *da* 15. *do* 4.) tambem o externo ABC he duplo do da base BDC: logo nos triangulos ACB, ADC, os angulos verticaes, indicados com as mesmas letras, são iguaes. He tambem commum a hum, e outro triangulo o angulo BAC: logo os dittos triangulos são equiangulos; e por conseq. AB : AC = AC : AD (4 6.) isto he, substituindo iguaes, AB : BD = BD : AD : logo AD, està dividida em B, em media, e extrema razão. *Q.E.&c.*

ESCHOLIO.

N*Aõ serà fora do assumpto demonstrar aqui com* Campano *a conversa desta Prop. para dar segundo exemplo ás conversas das antecedentes.*

Se dividida AD, em media, e extrema razão, for o mayor segmento BD, lado de hum hexagono; serà o menor AB, lado do decagono, inscripto no mesmo circulo. E se o menor for lado do decagono, serà o mayor do hexagono &c.

Dem. 1. *part. Forme-se sobre o segmento menor AB, hum triangulo isosceles com o intervallo do mayor BD:*

e des-e descripto do vertice C, hum circulo, tire-se o diametro AE, e a recta CD. Porquanto AB : BD = BD : AD (Hyp.) isto he, substituindo iguaes, AB : AC = AC : AD, serão os triangulos BAC, CAD (os quaes tem hum angulo A, commum, e os lados que o comprehendem proporcionaes) equiangulos (6. 6.) logo será o angulo D, igual ao angulo ACB. Porem, por ser isosceles o triangulo CBD (Constr.) tanto o angulo externo ABC, como seu igual BAC, são duplos do mesmo angulo D: logo o angulo externo BCE, o qual he igual a ambos juntos, serà quadruplo do mesmo D; isto he, de ACB, seu igual; e por conseq. serà o arco AB, a quinta parte do semicirculo ABE; e a sua subtensa lado do decagono. Q.E.&c.

2. Part. Applique-se AB, ao circulo ABE, de quem se suppoem ser lado do decagono; e para mostrar que BD, he igual a CA, rayo, ou lado do hexagono do mesmo circulo, descreva-se com o mesmo intervallo outro circulo OQP. Porquanto AD, esta cortada em B, em media, e extrema razão; sendo BD (ou RO) lado do hexagono do circulo OQP, serà AB (ou OQ.) lado do decagono do ditto circulo (Part. 1.) logo tirados os diametros AE, OP; e as rectas BE, QP, serão os triangulos ABE, OQP, totalmente iguaes (31. do 3. 33. do 6. e 26. do 1.) logo RO, metade de PO, serà igual à CA metade de EA: e huma, e outra igual, à BD. Q. E.&c.

Fig. 11.

PROPO-

PROPOSIÇÃO X. *Theor.*

O lado BA, do pentagono regular, inscripto em hum circulo, pode *o mesmo, que os lados BZ, do Hexagono, e VA do decagono, tomados separadamente.* Fig. 13.

D*Em.* Corte-se o arco BA, pelo meyo em V, e tire-se o rayo VZ: torne-se a cortar VA, pelo meyo em K, e tire-se o rayo KZ: tiradas as subtensas BV, VA, tire-se huma recta do ponto V, da primeira bissecçaõ, âquelle ponto Q, em que o segundo rayo corta o lado do pentagono. Os triangulos ZBA, ZBQ, saõ equiangulos; por ser o ang. B commum, e BAZ igual à BZQ [por ser BAX, metade de BZX (20. 3.) de quem tambem he metade BZK, por insistir na metade do arco BX, como consta da construcçaõ] logo BA: BZ = BZ: BQ (4.6.) e por conseq. o Rect. BA, BQ, ou ABQ, he igual ao Quad. BZ (17. 6.)

Porèm os triangulos BVA, VQA, tambem saõ equiangulos; por serem ambos isosceles (*Cor.* 1. *seg.*) e terem hum angulo sobre a base VAB, commum (*Cor.* 9. *da* 32. 1.) logo tambem BA : VA = VA : QA; e por conseq. o Rect. BA, QA, ou BAQ, he igual ao Quad. VA. Saõ pois os 2. RRect. ABQ, BAQ; isto he, o Quad. BA, do lado do pentagono (2. 2.) iguaes aos Q Quad. BZ, V A, dos lados do hexagono, e do decagono. *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

1 A Recta, que tirada do centro divide pelo meyo qualquer arco BA, divide tambem pelo meyo a sua subtensa, e forma angulos rectos no ponto G, da secção.

2 Odia-

2. O diametro AX, tirado de qualquer angulo A, de hum pentagono regular, divide pelo meyo o arco, e lado opposto CD. O mesmo se entende de qualquer polygono regular impar.

ESCHOLIO.

A *Qui tem seu proprio lugar a Demonstr. da quella praxe de* Ptolemeo, *que demos no Esch. da* 11. *do* 4. (*veja-se a Fig.* 12. *da quelle livro*) *Porquanto a recta OG, està cortada pelo meyo em L; e se lhe accrescentou a recta QO; serà o Rect. GQO + Quad. OL = Quad. QL, ou FL* (6. 2.) *porem o Quad. FL = QQuad. FO + OL* (47. 1.) *logo, tirado o comum OL, ficarà o Rect. GQO = Quad. FO, ou OG: logo a recta QG, està cortada em O, em media, e extrema razão* (30. 6.) *e por conseq. o menor segmento QO he lado do decagono, e o mayor OG, lado do hexagono, inscriptos no mesmo circulo* (Esch. ant.) *Porèm, por ser FO = OG, a recta FQ* pode *o mesmo que QO + OG: logo he lado do pentagono inscripto no mesmo circulo.* (10.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XI. *Theor.*

Se o diametro do circulo for Racional; o lado do pentagono, nelle inscripto, serà a Irracional chamada Menor.

Fig. 14. TIrem-se os diametros AF, BG, de sorte que dividão pelo meyo os lados do pentagono oppostos CD, DE: tirem-se as subtensas AC, AG: e tome-se no semi-diametro OG, a sua quarta parte OZ; e na recta AC, a sua quarta parte CX. Como BG, he a primeira Racional, serão tambem Racionaes BO, OZ, BZ. Isto supposto,

Dem.

Dem. Os triangulos AQO, ACI, por terem o angulo A, commum; e Q, I, rectos (*Cor.* 1. *e* 2. *da ant.*) são equiangulos: logo, CI : QO = CA : OA (4.6.) ou OG : logo tomando pelos dous ultimos termos as suas quartas partes, serà CI : QO = CX : OZ; e permutando, CI : CX = QO : OZ; isto he, tomando as duplas dos dous primeiros termos, CD : CQ = QO : OZ; e compondo, CD+CQ : CQ = QZ : OZ pela qual razão serão tambem proporcionaes os seus quadrados (22.6.)

Tire-se agora a recta BD, a qual corte AC, em media, e extrema razão no ponto Y (8.) serà AY = CD (*a mesma*) e serà o Quad. da composta AY+CQ, ou CD+CQ, quintuplo do Quad. CQ (1.) logo tambem o Quad. QZ, serà quintuplo do Quad. OZ; e por conseq. sendo OZ Racional, serà tambem Racional QZ; e commensuravel com ella, ao menos em *potencia*.

Supponhamos agora que se divide BO, em 4. partes: serà OZ, 1. e BZ, 5: e serà o Quad. OZ, 1. e o Quad. BZ, 25. porem o Quad. QZ, he 5. como notamos assima: logo as linhas BZ, QZ, são commensuraveis em *potencia*, e incommensuraveis em longitud; por serem raizes de numeros não quadrados (*Cor. da* 24.8. *e* 9.10.) logo, se da Racional BZ, se tirar QZ, ficarà BQ, Irracional *Apotome* (74.10.) cuja *Congruente* he QZ.

Possa pois a recta BZ, mais que a recta QZ, o Quad. R: e por conseq. sendo o Quad. BZ para o Quad. QZ, como 25. para 5. ou 5. para 1. seja o Quad. R, 4: logo serão commensuraveis os quadrados BZ, e R; porem as suas raizes serão incõmensuraveis pela razão assima: logo como BZ, commensuravel em longitud com a primeira Racional BG, *possa* mais que a Congruente QZ, o Quad. R, o qual he com ella sòmente commensuravel em potencia, serà BQ *Apotome quarta* (*Def.* 4. depois da 85.10.)

Finalmente: como AB, seja media proporcional entre BG, e BQ (por ser recto o angulo no semi-circulo BAG. &c.) e o Quad. AB, igual ao rectangulo BG, BQ (17. 6.) segue-se que *podendo* a recta AB o rectangulo comprehendido da Racional BG, e da *Apotome quarta BQ*, será *Irracional Menor* (95.10.) *Q. E &c.*

* Os principiantes podem omittir esta Prop. a qual sô ponho, por não mutilar o texto de *Euclides* em huma propriedade tam insigne do lado do Icosaëdro.

PROPOSIÇÃO XII. *Theor.*

Fig. 15. *O lado AB, do triangulo equilatero ABC, inscripto em hum circulo,* pode *o triplo do rayo QD.*

DEm. Tire-se o diametro AD, e juntamente a recta BD. Porquanto o arco BD, he a sexta parte da circunferencia (*Cor.* 2. *da* 10.) serà a sua subtensa igual ao rayo QD (*Cor.* 1. *da* 15.4.) porem, por ser recto o angulo ABD (31. 3.) o quadrado AD, quadruplo de QD, ou BD (20. 6.) he igual aos quadrados AB, BD (47. 1.) logo 4. quadrados BD, são iguaes aos quadrados AB, BD; e por consequencia o quadrado AB, he triplo de BD, ou QD. *Q. E. &c.*

COROLLARIOS.

1. O Diametro he em *potencia* sequi-tercio do lado do ditto triangulo; isto he, o Quad. do diametro AD, he para o Quad. do lado AB, como 4. para 3.

2. O lado do ditto triangulo BC, corta o semi-diametro QD, pelo meyo em O. Veja-se o *Cor.* 5. *da* 15. 4.

PRO-

PROPOSIÇÃO XIII. *Probl.*

Inſcrever hum tetraëdro (ou pyramide equilatera) em huma esfera. E moſtrar que o diametro da ditta esfera he em potencia *ſeſqui-altero do lado da ditta pyramide.* Fig. 16.

CONſtr. Seja RS, o diametro da esfera, em que ſe hade inſcrever o tetraëdro; e ſeja MS, a ſua terceira parte. Levante-ſe do ponto M, a perpendicular MI, atè terminar na circunferencia, e tirem-ſe as ſubtenſas RI, IS. Com o intervallo MI, deſcreva-ſe hum circulo CPQO, e inſcreva-ſe nelle hum triangulo equilatero; de cujo centro C, ſe levante huma perpendicular CX = RM. Tirem-ſe as rectas PX, QX, OX. Digo que o ſolido PQOX, he o tetraëdro, que ſe pede. Fig. 17.

Dem. Porquanto os lados XC, CP, ſão reſpectivamente iguaes aos lados RM, MI (*Conſtr.*) e os angulos comprehendidos rectos, ſerão as baſes XP, RI, iguaes (4. 1.) o meſmo digo das outras duas XQ, XO: logo todas 3. ſão iguaes entre ſi. He tambem XP, igual a PQ: e provo (*Fig.* 16.) As 3. rectas RM, MI, MS, ſão continuamente proporcionaes (*Cor. da* 13.6.) logo o Quad. RM: Quad. MI = RM: MS (20.6.) e compondo, os quadrados RM+MI: Quad. MI = RM +MS: MS (18.5.) isto he, o Quad. RI (47.1.): Quad. MI = RS: MS. Porem RS, he tripla de MS (*Conſtr.*) logo tambem o quadrado RI, he triplo do Quad. MI: e por conſeq. (pela igualdade das rectas) o Quad. XP, he triplo de CP. Porem tambem o Quad. PQ, he triplo de CP (*Ant.*) logo XP = PQ, &c. São pois os 4. triangulos, que compoem o ſolido PQOX, equilateros, e iguaes.

Formado aſſim o tetraëdro; paſſemos â ſua incripção

pção na esfera. Continue-ſe a perpendicular XC, atè que ſeja XV = RS. Porquanto MI, he media proporcional entre RM, e MS; ſerà CP, pela igualdade das rectas, tambem media proporcional entre XC, e CV (o meſmo ſe entende de CQ, e CO) logo cada hum dos 3. pontos P, Q, O, exiſtirà na circunferencia de qualquer circulo, que tiver por diametro a recta XV (*Cor. da* 13.6.) logo, ſe fixo o diametro XV, ſe circunvolver qualquer ſemicirculo XPV, paſſarà por todos os dittos pontos, e deſcreverà a esfera.

Quanto â proporção do diametro para o lado. Porquanto RS, RI, RM, ſão continuamente proporcionaes (*Cor.* 2. *da* 8. 6.) ſerà o Quad. RS : Quad. RI = RS : RM (20.6.) porem RS : RM = 3 : 2 (*Conſtr.*) logo o diametro da esfera he em *potencia* ſesqui-altero do lado do tetraëdro inſcripto. *Q.E.&c.*

COROLLARIOS.

1. O Diametro da ditta esfera RS, he em *potencia* quadruplo ſeſqui-altero do ſemidiametro do circulo da baſe MI.

Dem. Porquanto RS, he em *potencia* ſeſqui-altero de RI, ſerà o Quad. RS : Quad. RI = 9 : 6. porem o Quad. RI : Quad. MI = 6 : 2 (por ſer o Quad. RM : Quad. MI = RM : MS; iſto he, 2 : 1, e o Quad. RI igual a ambos) logo por igual, ſerà o Quad. RS : Quad. MI = 9 : 2; iſto he, ſerá RS, em *potencia* quadruplo ſeſqui-altero de MI. *Q.E.&c.*

2. A perpendicular NM, intercepta entre o centro da esfera, e a baſe do tetraëdro inſcripto, he a ſexta parte do diametro, ou a terceira do ſemidiametro NS, da ditta esfera.

Dem. Porquanto RS, he tripla de MS, ſerá RS : MS = 6 : 2; e MS : NM = 2 : 1. logo por igual, ſerà RS : NM = 6 : 1. &c. Daqui ſe ſegue, que RM, altura do tetraëdro, contem 2. terças do diametro da esfera circunscripta; e por conseq. que o Quad. RS, he para Quad. RM, como 9. para 4. como se infere duplicando-se a razão de 3. para 2.

ESCHOLIO.

SE se descreverem em hum papelão 4. triangulos equilateros (como mostra a Figura 12.) formarse-há com elles hum tetraëdro; o qual para que se accommode em qualquer esfera dada, se recorrerá á proporção arriba.

PROPOSIÇÃO XIV. *Probl.*

Inscrever hum octaëdro em huma esfera: e mostrar, que o diametro da esfera he em potencia *duplo do seu lado.* Fig. 16.

COnstr. Seja, como arriba, o diametro da esfera RS; e levante-se do centro N, a perpendicular NK, em cujo extremo K, concorrão as cordas RK, SK. Sobre a recta PQ = RK, forme-se hum Quad. PQOI, cujas diagonaes PO, IQ, se cortem pelo meyo em C, Fig. 13. como se demonstrou na 8. do 4: tire-se pelo ponto C huma perpendicular VF, ao ditto Quad. a qual produzida igualmente para huma, e outra parte, seja igual â diagonal PO; e juntem-se os 4. pontos I, P, Q, O, com os 2. extremos F, V, com 8. rectas, &c. Digo que o solido assim descripto he o octaëdro, que se pede, &c.

Dem. Todos os angulos em C, são rectos, ou sejão, os horizontaes, ou os verticaes; e todos os lados, que os comprehendem, são iguaes: logo tambem o serão as bases; isto he, os lados do solido: e por conseq. ficarà comprehendido com 8. triangulos equilateros, &c.

Quanto â inscripção na esfera. Porquanto quaesquer

quer rectas CF, CI, CV, são iguaes, e existem em hum plano (2.11.) descripto do ponto C, hum semicirculo, e revolvendo-se este sobre o diametro FV, passará por todos os 4. pontos I, P, Q, O; e descreverá huma esfera &c.

Quanto â proporção entre o diametro, e o lado. O Quad. RS = QQuad. RK, SK (47.1.) logo he duplo de cada hum: logo tambem o será o Quad. FV, a respeito de qualquer dos QQuad. PF, PV.

COROLLARIOS.

1 OS 3. planos PFOV, IFQV, IPQO, são quadrados iguaes; por constarem de lados iguaes, e angulos rectos (31.3.)

2. O octaëdro divide-se por qualquer destes 3. planos em duas pyramides iguaes, e semelhantes (*Def.* 11. 11.)

3. Se na mesma esfera se inscrever hum tetraëdro, e hum octaëdro; será o lado do primeiro em *potencia* sesqui-tercio do segundo; isto he, como 4. para 3.

Dem. RS, he para RI, em *potencia* sesqui-altero; isto he, como 6 para 4 (*Ant.*) RS, he para RK, em *potencia* duplo; isto he, como 6. para 3. logo RI, he para RK, em *potencia* sesqui-tercio; isto he, como 4. para 3.

4. Todos os planos oppostos do Octaëdro são parallelos entre si.

Dem. IO, he parallela à PQ, assim como FO, parallela à PV; logo os planos, que por ellas passão IOF, VPQ, são parallelos entre si (15.11.) e assim dos demais.

ESCHOLIO.

SE se descreverem em hum papelão 8. triangulos equilateros [como mostra a Fig. 20.] formarse ha com elles hum octaëdro; o qual se accomodarà á mes-

ma

ma esfera, em que está inscripto o tetraëdro; se se guardar a proporção arriba.

PROPOSIÇÃO XV. *Probl.*

Fig. 16. e 19.

Inscrever hum cubo em huma esfera: e mostrar, que o diametro desta he em potencia *triplo do lado daquelle.*

C*Onstr.* Seja o diametro da esfera RS: a sua terceira parte MS: levante-se a perpendicular MI: e tirem-se as cordas RI, SI. Sobre a recta EH = SI, forme-se hum quadrado EFGH, de cujos angulos se levantem 4. perpendiculares, todas iguaes â mesma EH; e ajuntem-se os 4. extremos destas A, B, D, C, com outras tantas rectas. Digo, que o solido assim formado he o cubo, que se pede.

Dem. Consta da 6. 11: da 33. 1: e da 10. 11. que todos os 6. planos, que comprehendem este solido, são quadrados iguaes &c. Quanto â inscripção na esfera. Tirados dous diametros em quaesquer dous planos oppostos AD, EG; BC, FH; os planos que por elles passão AEGD, BFHC, são rectangulos iguaes: e a commua secção QP, he perpendicular aos 2. oppostos (18. e 19. 11.) logo cortando-se os dittos diametros pelo meyo nos pontos Q, P; tirados outros 4. diametros interiores do cubo AG, ED; BH, FC; todos estes serão iguaes; e se cortarão pelo meyo em O (por ser v. g. no triangulo ADE, como AD para QD, assim ED, para OD, &c.) logo, se do ponto O, sobre qualquer diametro ED, se descrever hum semi-circulo, o qual se revolva sobre o mesmo diametro, descreverà huma esfera, aqual tocará todos os angulos do cubo, como he manifesto.

Agora: que esta esfera seja a mesma, que produz o semi-circulo RIS: e que o seu diametro tenha para o

lado

lado do cubo a razão aſſignada, demonſtra-ſe aſſim. No triangulo rectang. EHG, o Quad. EG = aos QQuad. EH+HG; iſto he a 2. QQuad. EH: porem no triangulo rectang. EGD, tambem o Quad. ED = aos QQuad. EG+GD: logo, ſubſtituindo iguaes, ſerà o Quad. ED = a 2. QQuad. EH+ Quad. GD; iſto he, 3. QQuad. EH. Porem no ſemi-circulo RIS, por ſerem as rectas RS, SI, MS, continuamente proporcionaes, o Quad. RS: Quad. SI = RS: MS; iſto he, como 3. para 1. (*Conſtr.*) logo ſendo EH = SI, tãbem ſerá ED = RS; e por conſeq. as esferas ſaõ iguaes; e o diametro para o lado do cubo he em *potencia* triplo. *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

A Potencia do diametro da esfera, ou do cubo inſcripto, he a meſma, que as duas potencias juntas do lado do meſmo cubo, e do lado do tetraëdro: iſto he, o quadrado do diametro he igual aos quadrados do lado cubo, e do tetraëdro. Conſta do dito; por ſer a reſpeito do primeiro, como 3. para 1. e a reſpeito do ſegundo, como 3. para 2.

ESCHOLIO.

SE ſe deſcreverem em hum papelão 6. quadrados iguaes [*como moſtra a* Fig. 24.] *formarſe-há hum cubo; o qual ſe accommodarà na meſma esfera, ſe tiver a proporção aſſignada.*

PROPOSI-

PROPOSIÇÃO XVI. *Probl.*

Inscrever hum icosaëdro em huma esfera; e mostrar, que o lado daquelle a respeito do diametro desta he a Irracional, chamada Menor. Fig. 22. e 23.

COstr. Seja o diametro da esfera KA: a sua quinta parte 5 A: tirese a perpendicular 5 O; e as cordas KO, AO. Com o intervallo AO, descreva-se hum circulo; e neste hum pentagono ABCDE: e de todos os 5. angulos se levantem outras tantas perpendiculares A*a*, B*b*, C*c*. &c. todas iguaes â mesma AO; por cujos extremos passe hum plano parallelo ao ditto circulo. Levante-se do ponto O, outra perpendicular OQ, a qual occorra ao plano superior no ponto Q; e descreva-se deste hum circulo com o mesmo intervallo AO, com que foy descripto o inferior: passarà este por todos os 5. pontos *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, como facilmente se mostra pelas mesmas Proposições, que citey arriba no principio da ant.

Dividão-se depois pelo meyo os arcos *ab*, *bc*, *cd*, &c. nos pontos G, H, K, L, F: e ajuntem-se estes 5. pontos com outras tantas rectas GH, HK, KL, &c. ficarà formado outro pentagono em tudo igual ao debaixo; porèm com os angulos encontrados; isto he, correspondendo os de sima aos meyos arcos dos de baixo; e correspondendo os debaixo aos meyos arcos dos desima. Formados assim estes dous pentagonos, e juntos os angulos correspondentes com as rectas GA, AF, FE, EL, &c. ficarão formados 10. triangulos equilateros, e iguaes; e por conseq. o tronco medio do icosaëdro.

Dem. Tire-se a perpendicular F*f*. O triangulo F*f*A, he rectang. em *f*: logo o quadrado AF, he igual aos quadrados A*f*, F*f*: porem o lado A*f*, he lado do decagono; e Ff (igual à AO) lado do hexagono do circulo inferior: logo AF, he lado do pentagono do mesmo circulo (10.) Do mesmo modo mostrarey, ser FE, lado do mesmo pentagono: logo hum, e outro são iguaes à AE: e por conseq. o triangulo AFE, he equilatero. O mesmo mostrarey de todos os mais triangulos: logo todos os 10. são equilateros, e iguaes entre si. *Q. E. &c.*

Passemos agora âs 2. pyramides, com que se fecha o ditto tronco. Continue-se a recta OQ, para huma, e outra parte, atè que QP, OV, sejão iguaes à Af, lado do decagono; e juntos os 5. angulos do pentagono superior com o ponto P, e os do inferior com o ponto V, formem-se outros 10. triangulos &c. Digo, que tambem estes são equilateros, e iguaes aos antecedentes.

Dem. Porquanto todos angulos em Q, são rectos, serà em qualquer triangulo FQP, o Quad. FP, igual aos quadrados FQ, QP; isto he, aos quadrados do hexagono, e do decagono: logo FP, he igual a FL (10.) O mesmo digo dos de mais lados: logo todos os 20. triangulos, que comprehendem aquelle solido, todos são equilateros, e iguaes. *Q. E. &c.*

Resta agora demonstrar, que este mesmo icosaëdro se comprehende em huma esfera, cujo diametro PV, he igual à KA: e que o lado do ditto icosaëdro he Irracional *Menor* a respeito do ditto diametro. Divida-se QO, pelo meyo em R; e tirem-se deste ponto a todos os angulos da figura outras tantas rectas RD, RK, &c. He manifesto, que todas estas rectas são iguaes entre si; pela igualdade dos angulos formados em Q, O; e pela igualdade dos lados, que os comprehendem. Item: sendo QO, lado do hexagono, e OV, do decagono, a respeito do mesmo circulo, fica QO, dividida em O, em media, e extrema razão (9.) e por conseq. a recta RV, composta da metade do mayor segmento, e do menor, *pode* o quintuplo de RO (3.) porem tambem RD, *pode* o quintuplo do mesmo RO (por ser

RO,

RO, metade de OD; e ser o quadrado OD, 4. vezes mayor que o quadrado RO; e RD, igual à ambos) logo RV, he igual RD: o mesmo se entende de todas as outras rectas, tiradas do mesmo ponto R, a todos os angulos da figura. Porem por ser RV : RO = PV : QO (15.5.) tambem o Quad.RV : Quad.RO = Quad. PV : Quad.QO (22.6.) logo sendo o Quad.RV quintuplo de RO, tambem o Quad. PV, serà quintuplo de QO, ou de AO, seu igual. Porem por ser KA, quintupla de 5.A tambem o Quad. KA he quintuplo de AO (*Cor*.2.*da* 8.6.*e* 20.6.) logo PV, he igual à KA. *Q.E.&c.*

Quanto â proporção. PV, *pode* o quintuplo de AO: logo as dittas rectas são Racionaes, aindaque somente commensuraveis em *potencia* (*Cor. da* 24. 8.) porem AE, lado do pentagono inscripto no circulo, de quem AO, he rayo, he Irracional *Menor* a respeito do diametro do ditto circulo (11.) ou do mesmo rayo: logo tambem o serà a respeito de PV, diametro da esfera. *Q.E.&c.*

COROLLARIOS.

1. O Diametro da esfera he quintuplo em *potencia* do semi-diametro do circulo, que comprehende quaesquer 5. angulos do icosaëdro inscripto.

2. O diametro da ditta esfera he composto de hum lado do hexagono, e de dous do decagono do mesmo circulo.

3. Quaesquer dous lados oppostos de hum icosaëdro, são parallelos entre si.

Dem. GF, he parallela à *gf*; esta he parallela á CD logo GF, CD, são parallelas (9.11.)

ESCHOLIO.

D*Escrevão-se em hum papelão* 20.*triangulos equilateros* (*como mostra a Figura* 21.) *e formarse-na com elles hum icosaëdro &c.*

PROPOSIÇÃO XVII. *Probl.*

Fig. 26. *Inscrever em huma esfera hum dodecaëdro: e mostrar que o lado deste he Irracional* Apotome *a respeito do diametro da ditta esfera.*

C*Onstr.* Forme-se hum cubo pela 15. deste; e sejão os 3. quadrados, que comprehendem qualquer dos seus angulos solidos, os planos AD, DE, EA. Divida-se o quadrado interior pelo meyo com 2. rectas, GH, VQ: e o vertical fronteiro com outras 2. XZ, QP. Dividão-se em media, e extrema razão (começando do meyo) as metades de quaesquer secções contrapostas em hum, e outro plano; isto he, OZ em M: OX em N: OQ em *u*, OV em *a*: e dos 4. pontos M, N, *u*, *a*, levantem-se outras tantas perpendiculares para fora do cubo, todas iguaes ao segmento mayor: isto he, MS = OM: NR = ON: *ue* = O*u*: *ao* = O*a*. Ajuntem-se os 5. pontos R, S, D, *e*, C, com outras tantas rectas: e procedendo-se do mesmo modo pelas outras faces do cubo, descrevão-se 12. figuras rectilineas, que comprehendão hum solido [a *Figura* não exprime mais que 3. por evitar confusão.] Digo que o ditto solido he o dodecaëdro, que se pede; e que as dittas 12. figuras todas são pentagonos regulares, e iguaes.

Dem. Porquanto RS, he parallela à NM; e esta parallela à CD, serão as rectas RS, CD, parallelas entre si (9. 11.) logo CRSD, he hum plano. Item: por ser DQ, perpendicular âs rectas QP, QV, he tambem perpendicular ao plano, que por ellas passa (6. 11.) logo os 2. triangulos QOF, *eu*Q, estão em hum plano: porem pela igualdade, e divisão das rectas, que se suppoem na *Constr.* os lados, que comprehendem os angulos rectos O, *u*, são proporcionaes; isto he, QO : OF = *eu*:

=*eu*: *u*Q [veja se a 2. *Figura* 26.] logo os angulos OQF, *ue* Q, são iguaes (6.6.) e por conseq. sendo tanto como dous rectos os 3. angulos em Q, será *e*QF, huma recta (14.1.) e a figura CRSD*e*, estará em hum plano (1.11.)

Temos pois que a ditta figura he absolutamente hum pentagono. Provo agora que o ditto pentagono he regular: e começando pelos lados, digo assim. Nos triangulos rectangulos DZM, DQ*u*, as bases DM, D*u*, são iguaes (4.1.) logo tambem nos triangulos, assim mesmo rectangulos DMS, D*ue*, as bases DS, D*e*, serão iguaes. Do mesmo modo mostrarey, serem tambem iguaes as outras duas bases CR, C*e*: logo as 4. rectas SD, D*e*; RC, C*e*, são iguaes de duas em duas: porem a quinta RS, he igual a qualquer das duas visinhas, v.g. à SD [e provo: os quadrados OZ, MZ; isto he, DZ, MZ; isto he, o quadrado DM, he triplo do quadrado OM (4.) logo accrescentando a ambas as partes outro quadrado OM, serão os quadrados DM, OM; isto he, DM, MS; isto he, o quadrado DS, quadruplo do quadrado OM: porem o quadrado NM, ou RS, tambem he quadruplo do mesmo quadrado OM (20.6.) logo as rectas RS, SD, são iguaes] logo todas a 5. do pentagono são iguaes entre si.

Quanto aos angulos. Porquanto OZ, està cortada em M, em media, e extrema razão; e se lhe accrescentou o mayor segmento OM, ou seu igual NO, serão os quadrados NZ, NO, triplos do quadrado OZ, ou ZD (5. e 4.) logo accrescentando a ambas as partes o mesmo quadrado ZD, serão os quadrados NZ, ZD, NO; isto he, ND, NO; isto he, ND, NR; isto he, o Quad. RD, igual a 4. quadrados ZD, ou a hum sò CD: logo as 2. rectas CD, RD; e pela mesma razão tambem a terceira CS, são iguaes entre si: logo tambem serão iguaes entre si os 3. angulos descontinuados R, S, *e* (8.1.) e por conseq. o pentagono he equiangulo (7.) *Q.E.&c.*

Quan-

Quanto â inscripção na esfera. Continuem-se os 2. planos PQV, TGH; e seja metade da sua commua secção a recta KO, a qual he parallela aos 4. lados perpendiculares do cubo, metade de qualquer delles, e equi-distante de cada hum. Tirem-se do ponto K, aos angulos do ditto cubo as rectas KE, KC, &c. e aos angulos do dodecaëdro (àlem destas) as rectas KR, KS, &c. Para mostrar que a esfera, em que estâ inscripto o cubo, toca tambem os demais angulos do dodecaëdro, tenho de mostrar que as rectas KC, KE, são iguaes âs rectas KR, KS: demonstro-o assim.

Porquanto o semi-diametro da esfera *pode* o triplo da metade do lado do cubo (15.) será o quadrado KE, ou KC, triplo do quadrado CQ: porem a recta KR, tambem *pode* o mesmo triplo [e provo: por ser XO = KO; e OM = OF; será XM = KF; porem, por estar XM, cortada em O, em media, e extrema razão (5.) o quadrado XM, junto com o quadrado OM, são triplos do quadrado XO (4.) logo tambem os quadrados KF, OF; isto he, KF, RF; isto he, o quadrado KR, serà triplo do quadrado KO, ou XO, ou CQ] logo as 2. rectas KC, KR, são iguaes. *Q.E.&c.*

Ainda resta mostrar, que tocando a esfera os 4. pontos C, R, S, D, toca tambem o quinto *e*. do mesmo pentagono; porem isto não serà difficil, suposto o que fica ditto: porquanto pelo mesmo discurso, com que se mostra que toca os pontos R, S, se mostra tambem (voltando a *Figura*) que toca os pontos *o. e.* Porem independentemente desta razão, mostrarey absolutamen-
Fig. 25. te com *Clavio. Que se de qualquer ponto E, se tirarem 4 rectas iguaes a quaesquer 4. angulos de hum pentagono EC, ER, ES, ED; tambem a quinta que se tirar ao quinto angulo Ee. hade ser igual.*

Dem. Tire-se a perpendicular EO; e no plano do pentagono as rectas CO, RO, &c. Porquanto os 4. triangulos EOC, EOR, &c. são rectangulos em O, tem hum

hum lado EO commum, e as bases EC, ER, &c. iguaes; serão tambem iguaes os outros lados CO, RO, &c. (47.1.) logo o ponto O, he centro do circulo circumscripto ao pentagono (9.3.) logo o quinto triangulo EO*e*, he totalmente igual aos 4. (4. 1.) logo EC = E*e*. *Q. E. &c.*

Finalmente, quanto â proporção. Porquanto o diametro da esfera se suppoem Racional; e he triplo em *potencia* do lado do cubo (15.) tambem o ditto lado serà Racional (*Def.* 6. 10.) o mesmo digo do semi-lado. Porem este, ou seu igual OZ, se suppoem dividido em M, em media, e extrema razão; e por conseq. o mayor segmento OM, ou seu igual FS, he Irracional *Apotome* a respeito do ditto semi-lado (6.) logo tambem a dupla do ditto mayor segmento; isto he RS, lado do dodecaëdro, serà Irracional *Apotome* a respeito do duplo do ditto semi-lado, ou lado do cubo: e por conseq. do diametro da esfera. *Q. E. &c.*

COROLLARIOS.

1. SE o lado do cubo inscripto em huma esfera, se cortar em media, e extrema razão; serà o mayor segmento lado do dodecaëdro, inscripto na mesma esfera.

Dem. Porquanto OZ : OM = OM : MZ. (*Constr.*) serão 2. OZ : 2 OM = 2. OM : 2. MZ isto he, serà XZ : NM = NM : XN + MZ. &c.

2. Se cortada huma recta em media, e extrema razão, for o menor segmento lado do dodecaëdro; serà o mayor segmento lado do cubo, inscriptos &c.

Dem. Porquanto CS, RD, subtendem 2. angulos conjunctos do mesmo pentagono, cortar-se-hão em media, e extrema razão (8.) logo serà CS, [ou CD, lado do cubo] para o mayor segmento [isto he, para

RS,

RS, lado do mesmo pentagono (8.)] como o mesmo mayor segmento para o menor: logo accrescentando ao primeiro termo o mesmo mayor segmento, ficarà a composta dividida tambem em media, e extrema razão (4.) cujo mayor segmento serà o lado do cubo, e o menor o do dodecaëdro, &c.

3. Em cada dodecaëdro ha 6. lados; dos quaes cada 2. oppostos são parallelos: a estes cortão pelo meyo, e em angulos rectos, 3. rectas iguaes, tiradas pelo centro do mesmo dodecaëdro: noqual ponto tambem estas se cortão pelo meyo, e em angulos rectos.

4. Finalmente se qualquer das dittas rectas, tiradas pelo centro, se cortar em media, e extrema razão, serà o mayor segmento o lado do cubo, e o menor o do dodecaëdro. Hum, e outro *Cor.* consta facilmente do ditto: e não me detenho mais nas suas Demonstrações, por não confundir a *Figura*.

ESCHOLIO.

Fig. 27. *SE se fizerem de papelão 12. pentagonos iguaes, e se formar com elles hum solido com as medidas que prescreve a Prop. serà este o dodecaëdro, &c.*

PROPOSIÇÃO XVIII.
e ultima *Probl.*

Fig. 22. *Expôr, e comparar os lados dos 5. corpos regulares.*

SEja KA, o diametro de huma esfera. Divida-se *primò* pelo meyo em C; e de tal sorte em 3. 5. que seja 3 A, a sua terceira parte, e 5 A, a quinta. *Secundò*: descripto sobre a ditta recta hum semi-circulo, levantem-se as perpendiculares CB, 3 D, 5O; e tirem-se as subtensas

tenſas KB, BA : KD, DA : KO, OA. *Tertiò*: corte-ſe de KO, o ſegmento EO, igual ao lado do decagono, que ſe houver de inſcrever em hum circulo, de quem OA ſeja ſemidiametro. E corte-ſe DA em Q em media, e extrema razão. Iſto feito,

Digo 1. que KD, he lado do tetraëdro inſcripto naquella esfera, de quem KA, he diametro.

Dem. KA : KD = KD : K 3. (8.6.) logo o Quad. KA : Quad. KD = KA : K 3. (20.6.) Porem a razao de KA, para K 3. he ſeſqui-altera (*Conſtr.*) logo tambem ſerá ſeſqui-altera a do Quad. KA, para o Quad. KD; e por conſequencia KD, he lado do tetraëdro (13.) *Q. E. &c.*

Digo 2. que KB, he lado do octaëdro; por ſer KA dupla em potencia do ditto lado (14.)

Digo 3. que por ſer DA, media proporcional entre KA, e 3 A: iſto he, por ſer o Quad. KA para o Quad. DA, como KA à 3 A; ou como 3. à 1. ſerà DA, lado do cubo (15.)

Digo 4. que por ſer OA, media proporcional entre KA, e 5A; e KA quintupla de 5A; ſerà o Quad. KA, quintuplo do Quad. OA: logo OA, ſerà ſemidiametro do circulo, circumſcripto a 5. angulos conſequutivos do icoſaëdro (16.) Porem EO, he lado do decagono, e OA do hexagono do meſmo circulo: logo EA, ſerà o lado do meſmo icoſaëdro (16.)

Digo 5. que por eſtar DA, lado do cubo, cortada em Q em media, e extrema razão, ſerá QA, mayor extremo, lado do dodecaëdro (*Cor. 1. da ant.*)

Quanto â comparação; melhor conſtará da Taboa ſeguinte, em que não ſômente ſe vêm as proporções dos lados, ſenão tambem as das ſuperficies, e as das corpulencias dos 5. corpos, reduzidas a fractos decimaes atè a quinta diviſão. O diametro da esfera ſe ſuppoem de duas unidades com 5. cifras; iſto he, de duzentas milleſimas.

Kk *Taboa*

[illegible]

Digo 1. que KD, he lado do tetraedro inscripto na mesma esfera, de que he KA diametro.

Porque KA : KD :: KD : KB (8. 6.) logo o Quad. KA : Quad. KD :: KA : KB (2. c. 20. 6.) Porém a razão de KA para KB he sesquialtera (Consi.) logo tambem será sesquialtera a do Quad. KA para o Quad. KD; e por consequencia KD, he lado do tetraedro (13.) [illegible]

Digo 2. que KB, he lado do octaedro; por ser KA dupla em potencia do mesmo lado (14.)

Digo 3. que por ser DA, media proporcional entre KA, e 3 A: isto he; por ser o Quad. KA para o Quad. DA, como KA a 3 A; ou como 3. a 1. será DA, lado do cubo (15.)

Digo 4. que por ser OA, media proporcional entre KA, e 5A: e KA quintupla de 5A; será o Quad. KA, quintuplo do Quad. OA; e logo OA, será semidiametro do circulo, circumscripto a 5. angulos consequutivos do icosaedro (16.) Porém EO, he lado do decagono, e OA do hexagono do mesmo circulo: logo EA, será o lado do mesmo icosaedro (16.)

Digo 5. que por estar DA, lado do cubo, cortada em Q em media, e extrema razão, será QA, mayor extremo, lado do dodecaedro (Cor. 1. de 17.)

Quanto á comparação; melhor constará da Taboa seguinte, em que não sómente se vêm as proporções dos lados; senão tambem as das superficies, e as das corpulencias dos 5 corpos, reduzidas a fracções decimaes até a quinta divisão. O diametro da esfera se suppoem de duas unidades com 5 cifras; isto he, de duzentas millesimas;

Taboa da comparação dos 5. Corpos Regulares segundo Herigonio.

Diametro da Esfera.	2.
Lado do Tetraëdro.	163299. uun
Lado do Cubo.	115470.
Lado do Octaëdro.	141421.
Lado do Dodecaëdro.	71364.
Lado do Icosaëdro.	105146.
Superficie da Esfera.	1256637. uuu
Area do Circulo Maximo.	314159.
Superficie do Tetraëdro.	461880.
Superficie do Cubo.	8.
Superficie do Octaëdro.	692820.
Superficie do Dodecaëdro	1051462.
Superficie do Icosaëdro.	957454.
Corpulencia da Esfera.	418879. uuu
Corpulencia do Tetraëdro.	51320.
Corpulencia do Cubo.	153960.
Corpulencia do Octaëdro.	133333.
Corpulẽcia do Dodecaëdro.	278516.
Corpulencia do Icosaëdro.	253615.

ESCHOLIO.

P*Ara mayor intelligencia desta Taboa: e ainda para que os curiosos possão examinar as proporções dos seus numeros [de que todavia não estou muito satisfeito] me pareceo preciso pôr aqui ao menos os titulos daquellas Proposições, de que depende a sua construcção; tiradas pela mayor parte do Supplemento de* Hypsicles, *de* Pappo, *e de* Clavio.

Hypsicles no *Suppl. l.* 14.

PRop. 9. *A superficie do decaëdro he para a do icosaëdro, como o lado do cubo para o do mesmo icosaëdro.*

Prop. 11. *O dodecaëdro he para o icosaëdro na mesma proporção.*

Prop. 12. *O lado do triangulo equilatero he em* potencia *sesqui-tercio da perpendicular, tirada de qualquer dos angulos ao lado opposto. Isto he, como* 100000. *à* 86602.

Prop. 14. *A base do tetraëdro he sesqui-tercia da base do octaëdro. Porèm a superficie do octaëdro he sesquialtera da do tetraëdro.*

Prop. 19. *O semidiametro da esfera he em* potencia *triplo da perpendicular, tirada do centro da mesma esfera a qualquer das bases do octaëdro.*

Prop. 20. *O duplo do quadrado do diametro da esfera he igual â superficie do cubo. E a perpendicular, tirada do centro da mesma esfera â base do cubo, he igual â metade do lado do mesmo cubo.*

Prop. 21. *A mesma perpendicular, que cahe do centro da esfera sobre a base do cubo; cahe tambem sobre a base do octaëdro.*

Prop. 22.

Prop. 22. *O octaëdro he para o triplo do tetraëdro, como o lado do primeiro para o lado do segundo.*

Prop. 27. *O cubo he para o octaëdro como a superficie do primeiro para a superficie do segundo: ou tambem como o lado do cubo para o semidiametro da esfera.*

Prop. 30. *O quadrado do cubo he para o triangulo do tetraëdro, como o lado do tetraëdro para a perpendicular do ditto triangulo.*

Prop. 31. *O lado do tetraëdro he em* potencia *sesqui-altero do seu exo; e o exo he em* potencia *sesqui-tercio do lado do cubo.*

Prop. 32. *O cubo he triplo do tetraëdro.*

Pappo. na *Inscripção dos 5. Corpos Regulares, &c.*

Cor. da Prop. 2. *O diametro da esfera he em* potencia *duplo do lado do octaëdro.*

Cor. da Prop. 3. *O diametro da esfera he em* potencia *triplo do lado do cubo.*

Cor. da Prop. 4. *O diametro da esfera he para o lado do icosaëdro, como o lado do pentagono para o do decagono. Isto he, como 58778. à 30901.*

Clavio.

O *Yto quadrados do semidiametro da esfera são iguaes á superficie do cubo.*

APPEN-

APPENDIZ II.

DOS THEOREMAS SELECTOS DE *Arquimedes*, pertencentes â Esfera, Cylindro, e Pyramide Conica.

Não ficaria completo este Tratado, se não se lhe accrescentassem alguns Theoremas de Arquimedes, *pertencentes â Esfera, Cylindro, e Pyramide Conica, com que se promovesse a especulação destes 3. corpos circulares, de que trata* Euclides *no livro 12. e se facilitasse a sua resolução. Muitos outros Theoremas deste Feniz dos engenhos, pertencentes âs Esferoïdes, e Conoïdes, daremos no Appendiz da* Geometria Superior, *visto não terem lugar neste Tratado, em que só se trata da* Geometria Inferior; *isto he, daquella que somente se absolve por via de Regoa, e Compasso, como deixamos notado no principio desta obra.*

DEFINIÇÕES.

TOme-se dentro de hum circulo DBAC, huma perpendicular ao diametro, BC; e tirados os ra- Fig. 2??

yos

yos OB, OC, âs extremidades da ditta perpendicular, revolva-se o circulo sobre o mesmo diametro. Digo que.

1. *Sector da Esfera*: he o solido OBAC, o qual se considera produzido da circumvolução do triangulo mixtilineo OBA.

2. *Segmento da Esfera*: he o solido BAC, o qual se considera produzido da circumvolução do outro triangulo mixtilineo CQA: ou tambem o solido BDC, &c.

3. *Vertice do segmento menor BAC*: he o extremo do diametro A. O do mayor BDC, he o outro extremo D.

A Base commua dos dittos segmentos: he o circulo QBSC. Os seus *Exos*: são os segmentos do Exo da Esfera, interceptos entre os vertices, e a base commua; AQ, DQ.

4. Quando se falla da *Superficie Esferica* de qualquer porção da Esfera; ou de qualquer corpo circular nella inscripto, nunca se entende o circulo da base. O mesmo digo da *Superficie Cylindrica*, ou *Conica*; excepto quando se accrescenta *Toda*; porque então entra tambem o ditto circulo.

* Em todo este Tratado sò se trata de Cylindros, e Pyramides Conicas *Rectas*.

AXIOMAS.

1. O Ambito do polygono inscripto em hum circulo, sempre he menor que a circunferencia do ditto circulo: e o do circunscripto, mayor.

2. Se o circulo em que estiver inscripto hum polygono, se revolver sobre o seu diametro; serà a superficie do solido produzido do polygono, sempre menor que a da esfera produzida do circulo: e a do circunscripto, mayor.

3. O am-

3. O ambito do polygono inscripto em hum segmento de circulo, sempre he menor que o ditto segmento. E se hum, e outro se revolver sobre o exo commum, a superficie do solido descripto do polygono, serà menor que a da porção esferica descripta do arco.

4. A superficie do prisma inscripto em hum cylindro he menor que a superficie do ditto cylindro: e a do circunscripto, mayor. O mesmo digo da superficie da pyramide rectilinea inscripta, ou circunscripta na conica.

PROPOSIÇÃO I.

Se dadas quaesquer figuras (ou planas, ou solidas) A,B, se derem outras mayores E,F, as quaes decrescendo infinitamente atè fenecerem nellas, sejão sempre entre si iguaes; tambem as primeiras A, B, serão iguaes.

E: F.
A:B.X.

DEm. Se não são: seja A, mayor que B; e seja o excesso X. Porquanto se podem dar duas figuras E, F, entre si iguaes, as quaes excedão as dadas A, B, em menor quantidade, que qualquer assignada X (*Hyp.*) serà F, menor, que A: porem F, he igual à E (*Hyp.*) logo tambem E, he menor que A, contra a supposição.

PROPOSIÇÃO II. *Theor.*

Se dadas quaesquer figuras A,B, se derem outras menores E,F, as quaes crescendo infitamente, atè fenecerem nellas, sejão sempre entre si iguaes; tambem as primeiras A, B, serão iguaes.

A :	*B.Z.*
E :	*F.*

DEm. Se não são: seja A, mayor que B; e seja o excesso Z. Porquanto se podem dar duas figuras E,F, entre si iguaes, as quaes sejão excedidas das dadas A, B, em menor quantidade, que qualquer assignada Z (*Hyp.*) serà E, mayor que B: porèm E, he igual à F (*Hyp.*) logo tambem F, he mayor que B, contra a supposição.

PROPOSIÇÃO III. *Theor.*

Fig. 1. *Os ambitos dos polygonos circunscriptos em qualquer circulo, fenecem na circunferencia do mesmo circulo. O mesmo digo das áreas dos mesmos polygonos a respeito da do circulo.*

DEm. 1. part. Imaginem-se os circulos divididos, e subdivididos infinitamente, e que ao mesmo passo que se dividem, se lhes circunscrevem, e inscrevem polygonos de mais, e mais lados, &c. Porquanto AB : *ab* = OA : O*a* (*Cor.* 1. *da* 4.6.) serà tambem o ambito circunscripto ABCDF, para o inscripto *abcdf*, como OA para O*a* (12.5.) porem *a*A, excesso de OA sobre O*a*, pode ser menor, que qualquer assignado [se se multiplicarem os lados dos polygonos] logo tambem o excesso do ambito circunscripto sobre o inscri-

pto,

pto, e muito mais sobre a circunferencia (*Ax.* 1.) pode ser menor que qualquer assignado: o mesmo digo do ambito inscripto: logo hum, e outro fenecem na circunferencia (*Def.* 6. 12.) *Q. E. &c.*

2. Part. Porquanto o excesso de AB sobre *ab*, he e cada vez menor; por ser sempre AB : *ab* = OA : O*a*, será tambem o excesso do Quad. AB sobre o Quad. *ab*. de cada vez menor: porem o Quad. AB : Quad. *ab*. = Polyg. ABCDF : Polyg. *abcdf*. (22. 6.) logo tambem o excesso do primeiro polygono sobre o segundo será de cada vez menor; e muito menor a respeito do circulo: e por consequencia aquelles fenecem neste. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO IV. *Theor.*

O polygono regular circunscripto a qualquer circulo ABCDF, he igual ao triangulo, cuja base he o ambito do ditto polygono, e a altura o rayo do mesmo circulo OE. E o polygono inscripto abcdf, *he igual ao triangulo, cuja base he o seu mesmo ambito, e a altura a perpendicular OQ, tirada do centro do circulo a qualquer dos lados.* Fig. 13.

DEm. 1. part. Porquanto o rayo OE, tirado ao contacto E, he perpendicular ao lado DF (18. 3.) resoluto o polygono em triangulos iguaes, e tirados rayos a todos os contactos, será o rayo OE, altura commua de todos: logo hum triangulo, que tiver por base os lados do polygono, e por altura aquelle rayo, será igual ao ditto polygono. *Q. E. &c.*

2. Part. demonstra-se do mesmo modo, pela *Def.* 4. e *Prop.* 14. *do* 3. porem advirta-se, que a 1. part. he universal para todos os polygonos: a 2. he somente para os regulares.

PROPOSIÇÃO V. *Probl.*

O circulo he igual ao triangulo, cuja base he a periferia do mesmo circulo, e a altura o rayo.

DEm. O polygono circunscripto he sempre igual ao triangulo, cuja base he o ambito do mesmo polygono, e a altura o rayo (*Ant.*) porem o polygono circunscripto fenece no circulo; assim como o ditto triangulo em outro, que tem por base a circunferencia, e por altura o mesmo rayo [por ser hum para outro, como o ambito para a circunferencia (1.6.) cuja differença he sempre menor que qualquer assignavel] logo o circulo he igual ao ditto triangulo (1.) *Q.E.&c.*

COROLLARIOS.

1. DEsta, e da 41. do 1. se infere 1. que o rectangulo comprehendido do rayo, e da metade da circunferencia, he igual ao circulo: 2. que o comprehendido do mesmo rayo, e de toda a circunferencia, he duplo: 3. e que o comprehendido de todo o diametro, e de toda a circunferencia, he quadruplo.

2. O circulo he para o quadrado inscripto, como metade da circunferencia para o diametro: e para o circunscripto, como a quarta parte da mesma circunferencia para o mesmo diametro.

Fig. 4. do l. 4. *Dem.* o quadrado inscripto GLHQ, he igual ao rectangulo GE, comprehendido do diametro, e do rayo: e o circulo, que o comprehende, he igual ao rectangulo comprehendido do mesmo rayo, e da metade da circunferencia: logo hum he para outro, &c. (1.6.) Item: o quadrado circunscripto he para o inscripto, como 2. diametros para hum

Cir.	$\frac{1}{2}$.*circunf.*
Q. inscr.	1.*diam.*
Q.circunscr.	2.*diam.*

16;

ſô: logo por igual, o circunſcripto he para o circulo, como 2. diametros para metade da circunferencia; ou como 1. diametro para a quarta parte da circunferencia.

PROPOSIÇÃO VI. *Theor.*

A circunferencia do circulo contem o diametro menos que 3. vezes, e $\frac{1}{7}$: e mais que 3. vezes, e $\frac{10}{71}$.

PAra achar a medida da circunferencia em partes do diametro, uſou *Arquimedes* de 2. polygonos, de 96. lados cada hum; hum circunſcripto, e outro inſcripto; e moſtrou, que o perimetro do primeiro continha o diametro do circulo menos que 3. vezes, e $\frac{1}{7}$: e que o perimetro do ſegundo continha o meſmo diametro mais que 3. vezes, e $\frac{10}{71}$: e por conſeq. que a circunferencia do ditto circulo, a qual he menor que o primeiro, e mayor que o ſegundo perimetro, ainda differia menos &c.

A Demonſtraçaõ de *Arquimedes* he igualmente prolixa, que engenhoſa: a de que uſáo os modernos depende da *Trigonometria*: peloque, reſervando eſta materia para a *Geometrica Pract.* darey aqui ſòmente algumas approximaçóes mais celebres, quanto baſte para reſolver quaeſquer Problemas, que dependão da commenſuração do circulo.

1. Appro-

1. Approximação de *Arquimedes.*

Diametro. 7.

Circunferencia mayor que a verdadeira. 22.

Diametro. 71.

Circunferencia menor que a verdadeira. 223.

* DAqui se segue, que se as razões (22:7.) (223:71.) se reduzirem a hum consequente commum â maneira de quebrados, nesta forma $\frac{1562}{497}$ ^{6}; posto o diametro de 497. partes, tocarão â circunferencia mayor que a verdadeira 1562. â menor 1561. e será a differença $\frac{1}{497}$. Item; que se se inverterem os termos das mesmas razões (7:22.) (7:223.) e se reduzirem a outro consequente cõmum nesta forma $\frac{1561 \quad 1562}{4906}$; posta a circunferencia de 4906. partes, tocarão ao diametro menor que o verdadeiro 1561. ao mayor 1562. e será a differença $\frac{1}{4906}$.

2. Approximação de *Metio.*

Diametro. 113.

Circunferencia mayor que a verdadeira. 355.

* ESta he muito mais exacta, que a de *Arquimedes*, e a que em numeros pequenos mais se chega â verdadeira: porquanto posto o diametro de 10.000,000. e buscando-se na ditta proporção a circunferencia, acharse-ha de 31. 415,929. isto he, tam proxima

xima â verdadeira, que a penas a excede em pouco mais de 2. unidades; isto he, em dez millionesimas do diametro, como se vè claramente na approximação seguinte.

3. Approximação de *Ludolfo de Ceulen.*

Diametro. 100. 000,000. 000,000. 000,000.

Circunferencia mayor que a verdadeira

314. 159,265. 358,979. 323,847.

Circunferencia menor que a verdadeira

314. 159,265. 358,979. 323,846.

* ESta he a mais exacta de todas quantas se tem achado atègora; e pela qual devemos muito â diligencia deste famoso logista; pois multiplicando mais e mais os lados dos polygonos inscriptos, e circunscriptos; e tomando hum rayo excessivamẽte crescido, chegou a tal proximidade, que a penas chega a differença do perimetro circunscripto ao do inscripto, a huma particula do diametro, denominada de huma unidade com 20. cyfras. Outra ainda mais exacta achou o mesmo Author, cuja differença se exprime com huma unidade, e 35. cyfras: porem como huma, e outra são pouco uteis para a praxe, concluirey esta materia com a approximação de *Ricciolo*; aqual por ser sufficientemente exacta, e muy expedita para os calculos, será a de que usaremos nelles daqui por diante.

4. Appro-

4. Approximação de *Ricciolo.*

Diametro 100.

Circunferencia menor que a verdadeira. 314.

ESCHOLIO.

AS praxes utilissimas, que se seguem desta Prop. *são as seguintes.*

1. Dada a circunferencia achar o diametro. *Ponha-se o mayor termo de qualquer destas 4. proporções em primeiro lugar, em segundo o menor, e em terceiro o numero das partes da circunferencia dada: multiplique-se o segundo pelo terceiro, e divida-se o producto pelo primeiro: serà o quociente o numero das partes, que tocão ao diametro.*

V.g. Conste o ambito do circulo maximo da Terra de 6300 *legoas Espanholas (a razão de* 17 *e* $\frac{1}{2}$. *cada grào) e dezeje-se saber o diametro da mesma Terra. Disponhão-se os numeros na forma seguinte.*

$$314 : 100. = 6300. : 2006.\tfrac{116}{314}.$$

e feita a operação segundo a regra dada, sahirà o diametro de 2006. $\frac{116}{314}$. *legoas.*

2. Dado o diametro, achar a circunferencia. *Invertão-se os primeiros dous numeros; e faça-se a mesma operação.*

$$100 : 314 = 2006.\tfrac{116}{314}. : 6300 \text{ \&c.}$$

3. Dado o diametro, achar a area do circulo. *Ache-se pela* Praxe ant. *a circunferencia pelo diametro; e multiplique-se a metade deste pela metade daquella: serà o producto a area do circulo* (5. Cor. 1.) *V.g. o diametro dado são* 2006. $\frac{116}{314}$. *cuja metade são* 1003. $\frac{58}{314}$. *e a circunferencia achada são* 6300. *cuja metade*

de são 3150. os productos destas duas metades são 3160,031. $\frac{2}{3}$. digo, que estas são as legoas quadradas, que contem a area do circulo maximo da Terra As quaes tomadas 4. vezes dão as quadradas da sua superficie, como veremos despois na* Prop. 24.

4. Dado o diametro da base, juntamente com a altura de qualquer cylindro, ou pyramide conica, achar a solidez de cada hum. *Os prismas, e cylindros se produzem da multiplicação das alturas pelas bases; e as pyramides rectilineas, e conicas, da multiplicação das mesmas bases pela terceira parte das alturas* (10. e 7. *do* livro 12.) *Como pois, dado o diametro da base, se tem a mesma base* (Praxe ant.) *e se suppoem dada a altura; segue-se, que em se multiplicando hum numero por outro, segundo a regra, se tem o que se busca.*

PROPOSIÇÃO VII. *Theor.*

As periferias dos circulos são entre si, como os diametros. Fig. 6. e 7. do l. 12.

DEm. Os ambitos dos polygonos semelhantes inscriptos em 2. circulos, são constantemente como os diametros (*Cor. da* 1. 12.) porem os dittos ambitos fenecem nas periferias (3.) logo tambem estas são entre si como os mesmos diametros (*Poris. univ. do livro* 12.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO VIII. *Theor.*

Fig. 3. *A superficie do prisma regular circumscripto, ou inscripto em hum cylindro, he igual ao rectangulo, cuja altura he o lado do mesmo cylindro LI, e a base o perimetro da base prismatica ACDB &c: ou ZPQT. &c.** Veja-se a nota â Def. 4.

DEm. A superficie do prisma circumscripto toca o cylindro no lado LI, o qual he perpendicular â base, por se suppôr recto o ditto cylindro (o mesmo digo das outras rectas dos contactos) logo todos os rectangulos AF, CG; DH, &c. convêm em terem huma mesma altura, que he o lado do cylindro; e por base hum dos lados da base do prisma: logo a superficie prismatica, que he a summa de todos estes rectangulos, tem por base o perimetro do prisma, e por altura o lado do cylindro. *Q.E &c.*

O mesmo se entende do prisma inscripto, cujo lado OQ, tambem he lado do mesmo cylindro.

PROPOSIÇÃO IX. *Theor.*

Fig. 4. *A superficie da pyramide regular, circumscripta â conica, he igual ao triangulo, cuja base he o perimetro da base pyramidal BEFD &c. e a altura o lado da mesma pyramide conica AQ. E a superficie da pyramide inscripta he igual ao triangulo, cuja base he o perimetro pyramidal, e a altura a perpendicular AO, tirada do vertice a qualquer dos lados CS.*

DEm. 1. part. Tirem-se do vertice A, aos contactos das bases Q, K, Q, outras tantas rectas: serão

rão estas lados da pyramide conica; e (por ser esta recta) todas entre si iguaes: e porquanto o exo AG, he perpendicular à base, será tambem o plano AGQ, perpendicular à ditta base (18 11.) e por conseq. EQ, que nella existe, e he perpendicular à commua secção QG (18. 3.) será tambem perpendicular ao lado QA (*Def.* 4. 11.) He pois o lado AQ, lado da pyramide conica, e altura do triangulo BAE: o mesmo digo dos outros lados, que cahem dentro dos outros triãgulos EAF, FAD, &c. logo o triangulo, que tiver por base o perimetro da base pyramidal BEFD, &c. e por altura o ditto lado, será igual â superficie pyramidal circunscripta. *Q. E. &c.*

2. Part. Demonstra-se do mesmo modo.

PROPOSIÇÃO X. *Theor.*

A superficie do prisma regular circunscripto, ou inscripto no cylindro recto, fenece na superficie do ditto cylindro. O mesmo digo da superficie da pyramide regular circunscripta, ou inscripta na conica. Fig. 3. e 4.

DEm. 1. part. As superficies dos prismas regulares, circunscriptos, ou inscriptos infinitamente nos cylindros, chegão a ter finalmente huma differença entre si menor, que qualquer assignavel; como facilmente se infere das *Proposições* 8. e 3. logo ainda a terão menor a respeito da superficie cylindrica (*Ax.* 4.) logo &c.

A 2. part. demonstra-se do mesmo modo pela *Prop.* 9. e 3. * Advirta-se, que as *Figuras* 3. e 4. representão somente as metades dos solidos, por evitar confusão.

Lemma. I.

Fig. 7. *Se as rectas QO, S, CP, forem continuas proporcionaes, e se tomar a metade da primeira AO, e a dupla da terceira QP, tambem AO, S, QP, serão continuas proporcionaes.*

DEm. Porquanto AO : QO = CP : QP, serà o Rect. AO, QP = Rect. QO, CP (16.6.) porem o Rect. QO, CP = Quad. S (17.6.) logo tambem o Rect. AO, QP = Quad. S: e por conseq. AO, S, QP, são continuas proporcionaes (17.6.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XI. *Theor.*

Fig. 5. e 6. *O circulo XMMM, cujo rayo XZ, he medio proporcional entre o lado do cylindro recto, e o seu diametro; isto he, entre CQ, e QO, he igual á superficie do mesmo cylindro.*

DEm. Circunscrevão-se ao cylindro infinitos prismas regulares, &c. A base de qualquer prisma circunscripto; isto he, o polygono DFE, he igual ao triangulo, que tem por altura o semidiametro AB, e por base o perimetro DFE (4.) e a superficie do mesmo prisma he igual ao rectangulo, que tem por altura o lado do cylindro CQ (ou seu igual HD) e por base o mesmo perimetro (8.) porem o ditto rectangulo he igual ao outro triangulo, que tem por altura 2 CQ, e a mesma base (*Esch. da* 41. 1.) logo sendo os triangulos, que tem a mesma base, como as alturas (*Cor. da* 1.6.) serà a base do prisma para a superficie prismatica, como AB para 2 CQ: o mesmo digo de outro qualquer

prisma;

prisma. Porem os polygonos fenecem no circulo, ou base do cylindro, assim como as superficies prismaticas na cylindrica (3. e 10.) logo tambem a base do cylindro he para a superficie cylindrica, como AB (ou AQ) para 2CQ [*Por. univ. do l.* 12.]

Porem por serem QO, XZ, CQ, continuas proporcionaes (*Hyp.*) tambem AQ, XZ, 2 CQ, são continuas proporcionaes (*Lem. ant.*) e por consequencia AQ, he para 2 CQ, em duplicada razão de AQ para XZ: logo a base do cylindro; isto he, o circulo AQGO, he para a superficie cylindrica em duplicada razão de AQ para XZ. Porem tambem o circulo AQGO, he para o circulo XMMM, em duplicada razão de AQ para XZ (2. 12.) logo o circulo XMMM, he igual à superficie cylindrica (9 5.) *Q. E. &c.*

* Quam quizer demonstralla, inherendo nos principios de *Arquimedes*, recorra â *Prop.* 13. * Deste insigne *Theor.* se tira o modo de exhibir hum circulo igual â superficie cylindrica de qualquer cylindro recto.

COROLLARIOS.

A Superficie do cylindro recto he igual ao rectangulo, que tem por altura o lado do cylindro, e por base a circunferencia da sua base.

Dem. Consta do ditto, que 2 CQ : XZ = XZ : AQ; porem XZ : AQ = MMM : QGO (7.) logo 2 CQ : XZ = MMM : QGO (11.5.) logo o triangulo, que tiver por base a circunferencia QGO, e por altura 2 CQ (isto he, o rectangulo que tiver a mesma base, e metade da ditta altura) serà igual ao triangulo, que tiver por base a circunferencia MMM, e por altura o rayo XZ; isto he, ao circulo XMM (5.) ou à superficie cylindrica sua igual. *Q. E. &c.*

* Daqui se infere, que todas as propriedades, que

se demonstrão dos rectangulos, são communas âs superficies cylindricas dos cylindros rectos: isto he,

2. As superficies cylindricas igualmente altas BEDF, QNFM, são entre si como os diametros das bases, FE, MN.

Fig. 25. 26. e 27. do l. 12. *Dem.* Os rectangulos comprehendidos das circunferencias EDF, NTM; e das alturas iguaes BE, QN, são entre si como as mesmas circunferencias (1. 6.) logo tambem serão como os diametros FE, MN (7.) *G. E. &c.*

3. As superficies cylindricas QNM, EVR, que tem iguaes bases, são entre si como as alturas (*Cor. da* 1. 6.)

4. As supeficies cylindricas semelhantes BEF, KNM, são entre si em duplicada razão dos diametros das bases FE, MN.

5. As superficies cylindricas são entre si em razão cõposta dos lados, e dos diametros das bases.

6. As superficies cylindricas iguaes tem os lados reciprocos com os diametros das bases. E as que os tem reciprocos, são iguaes.

7. Finalmente a dimensão das dittas superficies se absolve pelas regras geraes dos rectangulos; achadas primeiramente pelos diametros das bases as circunferencias das mesmas (6.)

PROPOSIÇÃO XII. *Theor.*

Fig. 6. e 5. *A superficie do cylindro recto CO, he para a base QGO, como o lado CQ, para a quarta parte do diametro QR.*

DEm. Seja XZ, media proporcional entre CQ, e QO: e pelo *Lem.* 1. seja tambem media proporcional entre 2 CQ, e QA. O circulo XMM, he igual â superficie cylindrica CO (*Ant.*) porem o circulo XMM, he he para a base QGO, em duplicada razão de XZ para QA; isto he, como 2CQ para QA (*Def.* 10. 5.) ou como CQ para QR (12.5.) logo tambem a superficie cylindrica CO, he para a base QGO, como CQ para QR. *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

A Superficie do cylindro, cujo lado he igual ao diametro, he quadruplo da base: e se o lado for igual â quarta parte do ditto diametro, serâ igual.

PROPOSIÇÃO XIII. *Theor.*

O circulo XMM, cujo rayo he medio proporcional entre o lado VC, da pyramide conica recta, e o rayo da base CC, he igual à superficie conica da mesma pyramide. Fig. 8. 9.

DEm. Imaginem-se circunscriptos infinitos polygonos regulares semelhantes, tanto na base da pyramide OSCR, como no circulo XMM: e que sobre os primeiros se levantão outras tantas pyramides rectilineas igualmente altas VPTQ. Porquanto OC, XZ, VC, são continuas proporcionaes (*Hyp.*) será OC para VC, em duplicada razão de OC para XZ: porem, como OC para VC, assim o triangulo, que tem por altura o rayo OC, e por base o ambito do polygono circunscripto, para o triangulo, que tem por altura o lado VC, e por base o mesmo perimetro (*Cor. da* 1. 6.) logo o primeiro triangulo he para o segundo em duplicada razão de OC para XZ: e por consequencia, sendo o primeiro igual à base da pyramide circunscripta, e o segundo â sua superficie (4. e 5.) serà o polygono PTQ,

para

para a ſuperficie pyramidal VPTQ, em duplicada razão de OC para XZ.

Porem o meſmo polygono PTQ, he para o ſeu ſemelhante DBF (circunſcripto ao circulo XMM) em duplicada razão dos meſmos rayos (1.12.) logo a ſuperficie pyramidal VPTQ, he ſempre igual ao polygono DBF; e por conſequencia, tenecendo a primeira na ſuperficie conica (10.) e o polygono no circulo XMM (3.) tambem a ſuperficie conica ſerá igual ao ditto circulo (1.) *Q. E. &c.*

COROLLARIOS.

1. A Superficie conica VSCR, he igual ao triangulo, cuja altura he o lado VC, e a baſe a circunferencia SCR. Demonſtra-ſe do meſmo modo, que o *Cor.* 1. *da* 11. Daqui ſe ſegue, que todas as propriedades, que ſe demonſtrão dos triangulos rectangulos, ſe demonſtrão tambem das ſuperficies conicas das pyramides rectas: e aſſim.

2. As ſuperficies conicas, que tem iguaes lados, ſão entre ſi, como os diametros das baſes.

3. As que tem os diametros, ou as circunferencias iguaes, ſão entre ſi, como os lados.

4. As ſemelhantes ſão em duplicada razão dos diametros.

5. E quaeſquer duas tem entre ſi a razão composta dos lados, e dos diametros.

6. As que ſão iguaes, reciprocão os lados com os diametros. E as que os reciprocão, ſão iguaes.

7. Finalmente acha-ſe hum circulo igual a qualquer ſuperficie conica, ſe ſe acha huma media proporcional entre o lado VC, e o ſemidiametro OC: e mede-ſe a meſma ſuperficie, ſe ſe multiplica o ditto lado pela metade da circunferencia SCQ; ou pelo contrario &c.

PRO-

PROPOSIÇÃO XIV. *Theor.*

A ſuperficie conica he para o circulo da baſe, como o lado VC para o rayo OC.

DEm. Seja XZ, media proporcional entre VC, e OC. Fig. 8. e 9.
O circulo XMM, he para o circulo OSCR, em duplicada razão de XZ para OC: iſto he, como VC para OC: porem a ſuperficie conica VSCR, he igual ao dito circulo XMM (*Ant.*) logo tambem &c.

Por outro modo. A ſuperficie conica he igual ao triangulo, que tem por altura o lado, e por baſe a circunferencia da baſe (*Cor.* 1. *da ant.*) e a baſe he igual ao triangulo, que tem por altura o rayo, e por baſe a meſma circunferencia (5.) logo huma he para a outra, como o lado para o rayo.

COROLLARIOS.

1. A Superficie conica, que reſulta da circumvolução de hum triangulo equialtero FEG, ſobre a perpendicular EO, he dupla da baſe OFSG. Fig. 27.

Dem. O lado FE, he igual ao diametro FG; e duplo do rayo OG: logo &c.

2. A ſuperficie conica que, reſulta da circumvolução de hum triangulo iſóſceles rectangulo BEC, ſobre a perpendicular EQ, he para a baſe QBTC, como o diametro para o lado do quadrado. Fig. 27.

Dem. A perpendicular EQ, corta pelo meyo o angulo recto E (26. 1.) logo o triangulo EQB, he a metade de hum quadrado, cujo diametro he EB, e cujo lado he BQ. &c.

3. A ſuperficie do cylindro HDTG, he para a ſuperficie da pyramide conica BDTG [exiſtentes ſobre a meſma baſe, e com a meſma altura] como o lado do cylin- Fig. 23.

cylindro HD, para a metade do lado da pyramide BD.

Dem. A superficie da pyramide he para a base, como o lado BD para o rayo DA: isto he, como $\frac{1}{2}$. BD para $\frac{1}{2}$. DG: porem a mesma base ADTG, he para a superficie cylindrica, como $\frac{1}{2}$. DG para o lado HD (12.) logo por igual, a superficie da pyramide conica he para a cylindrica, como $\frac{1}{2}$. BD para HD; isto he, invertendo &c.

Lemma 2.

Fig. 10. *Se em qualquer triangulo BAC, se tirar huma recta DE, parallela â base BC; serà o rectangulo comprehendido de AC, CB, igual ao rectangulo comprehendido de AE, ED, juntamente com os comprehendidos de EC, e das rectas ED, CB.* O mesmo se entende para a outra parte.*

DEm. Tire-se GC, igual à CB, e perpendicular ao lado AC; e forme-se o rectangulo FC: tire-se a parallela EH: a diagonal AG: e pelo ponto O, a outra parallela IL. Porquanto GC, CB, são iguaes, serão tambem iguaes OE, ED (*Cor.* 1. *da* 4.6. e 9. 5.) logo o Rect. FC = Rect. ACB; e o Rect. IE = Rect. AED. Resta pois demonstrar, que os 2. rectangulos IH, HC, são iguaes ao rectangulo comprehendido de EC, e das duas ED, CB: porem isto he manifesto, por ser HC, comprehendido de EC, GC, ou CB seu igual; e IH igual à EL (43. 1.) comprehendido de EC, OE, ou ED sua igual: logo &c.

PRO-

PROPOSIÇÃO XV. *Theor.*

Se se cortar a pyramide conica BAGT, com hum plano parallelo â base; será o circulo POZ (cujo rayo for medio proporcional entre o segmento do lado BD, e a composta dos rayos CB, ED) igual â superficie conica do tronco existente entre os 2. planos parallelos. Fig. 11. e 12.

DEm. Seja PN, media proporcional entre AB, CB; e seja PQ, media proporcional entre AD, ED: descrevão-se com os 3. intervallos PQ, PO, PN, 3. circulos; será o primeiro PQY, igual à superficie conica ADS, e o terceiro PNX, igual à superficie conica ABT (13.) Isto supposto.

O Rect. ABC = aos RRect. ADE+BDE+DBC (*Lem. ant.*) Porem, por ser PN, media proporcional entre AB, CB; o Rect. ABC = ao Quad. PN: por ser PQ, media proporcional entre AD, ED, o Rect ADE = ao Quad. PQ: e por ser PO, media proporcional entre BD, e a composta dos rayos ED, CB; os RRect. BDE, + DBC = ao Quad. PO (17. 6.) logo o Quad. PN = aos QQuad. PQ+PO.

Porem os circulos são entre si, como os quadrados dos rayos (2. 12.) logo o circulo PNX = aos circulos PQY+POZ; e por conseq. sendo o primeiro igual â superficie conica ABT, e o segundo igual â parte da ditta superficie ADS, será o terceiro igual â parte remanente DBT. *Q. E. &c.*

Lemma 3.

Fig. 13. *As rectas FH, BN, que cortão da circunferencia de hum circulo porções iguaes, FB, HN, são parallelas.*

DEm. Tire-se a recta BH. Porquanto os arcos FB, HN, são iguaes, serão tambem iguaes os angulos alternos FHB, NBH (29. 3.) logo FH, BN, são parallelas (28. 1.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XVI. *Theor.*

Fig. 13. *Se se inscrever em hum circulo huma figura regular de lados pares (isto he, de 6. 8. 10. &c.) e do extremo do diametro E, se tirar huma recta ao extremo F, do lado opposto, mais proximo ao ditto diametro; juntos os angulos correspondentes com as rectas FH, BN, GR, será o rectangulo AEF, comprehendido do diametro, e da recta EF, igual ao rectangulo comprehendido de qualquer lado AF, e da composta de todas as dittas rectas FH + BN + GR.*

DEm. Tirem-se as transversaes BH, GN. Porquãto todos os arcos a quem subtendem os lados da figura, são iguaes (*Hyp.*) serão as rectas FH, BN, GR, parallelas (*Lem. ant.*) e pela mesma razão as rectas FA, BH, GN, ER: logo os triangulos FAP, HDP; BDQ, NCQ; GCO, REO, são equiangulos (27. e 15. 1.) logo FP : PA = HP : PD. Item BQ : QD = NQ : QC. Item GO : OC = RO : OE (4. 6.) Logo, como qualquer dos antecedentes para o seu consequente; isto he

como

como FP para PA, assim todos os antecedentes juntos FP+HP+BQ+NQ+GO+RO, para todos os consequentes juntos AP+PD+DQ+QC+CO+OE; isto he, como as perpendiculares FH+BN+GR, para o diametro AE (12.5.) Porem tambem FP : PA = EF : FA (8.6.) logo FH+BN+GR : AE = EF : FA (11. 5.) e por conseq. o rectangulo comprehendido das extremas he igual ao comprehendido das intermedias (16. 6.) *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XVII. *Theor.*

Se no segmento de hum circulo GAR, se inscrever huma figura equilatera, e parilatera, e se tirarem, como na Ant. *as mesmas rectas, será o rectangulo comprehendido de EF, AO, igual ao rectangulo comprehendido de qualquer dos lados AF, e da composta das perpendiculares FH+BN+ $\frac{1}{2}$ GR.* Fig. 13

DEm. Prova-se do mesmo modo, que a antecedente.

Lemma 4.

Se no circulo maximo de huma esfera se inscrever huma figura regular, cujos lados para huma, e outra parte do diametro sejão pares, e o ditto circulo se revolver sobre o ditto diametro; ficarà inscripto dentro da esfera hum solido, cuja superficie se comporà de varias superficies conicas de pyramides rectas. Fig. 14

DEm. He manifesto, que as rectas AF, AH; EG, ER, descrevem pyramides conicas rectas (*Def.* 2. 12.)

2. 12.) Item, que as rectas BF, NH; BG, NR (por concorrerem em hum mesmo ponto do diametro, produzido para huma, e outra parte (29. 3. e 26. 1.) descrevem tambem pyramides conicas rectas, as quaes ficão cortadas dentro da esfera pelos circulos descriptos das perpendiculares FH, BN, GR: logo &c.

Lemma 5.

Se no segmento do circulo maximo de huma esfera se inscrever huma figura equilatera, e parilatera, a qual nem para huma, nem para outra parte tenha lado algum parallelo ao diametro, e esta se revolver sobre o dito diametro: ficarà inscripto dentro do segmento esferico hum solido, cuja superficie serà composta de muitas conicas de pyramides rectas.

DEm. Prova-se do mesmo modo.

PROPOSIÇÃO XVIII. *Theor.*

Fig. 13. e 17. *Supposto o ditto no* Lemma 4. *e tirada a recta EF, segundo o que fica ditto na* Prop. 16. *serà o aggregado de todas as superficies conicas inscriptas na esfera, igual ao circulo, cujo rayo S,* pode *o rectangulo AEF; isto he, he medio proporcional entre o diametro AE, e a recta EF* (17. 6.)

DEm. Porquanto FH = 2FP; BN = 2BQ; e GR = 2GO: e porquanto todos os lados da figura inscripta são iguaes, serà o rectangulo comprehendido de qualquer lado AF, e das perpendiculares FH, BN, GR;

GR, igual aos rectangulos comprehendidos de AF,FP; de FB,FP+BQ; de BG,BQ+GO; e de GE,GO (consta manifestamente da 3.do 2. por se tomarem duas vezes as metades das perpendiculares; e ser a altura AF, FB,BG,GE, sempre a mesma.)

Porem o rectangulo comprehendido de AF, e do aggregado das perpendiculares FH,BN,GR, he igual ao rectangulo AEF (16.) isto he, ao quadrado S (*Hyp.*) logo o Quad. S, he igual aos rectangulos comprehendidos de AF,FP, de FB,FP+BQ; de BG,BQ+GO; e de GE,GO.

Agora: busque-se entre AF, e FP, huma media proporcional V; entre FB, e FP+BQ, outra media proporcional X; entre BG, e BQ+HO, outra media proporcional Z; e entre GE, e GO, outra media proporcional Y: serão os 4 quadrados V,X,Z,Y, iguaes aos 4 rectangulos assima dittos (17.6.) isto he, ao quadrado S: logo, sendo os circulos entre si como os quadrados (2.12.) será o circulo S, igual aos circulos V, X,Z,Y. Porem, por ser V, media proporcional entre AF,FP; o circulo V, he igual à superficie conica FAH (13.) e por ser X, media proporcional entre FB, e FP +BQ, o circulo X, he igual à superficie conica FBHN (15.) e assim das de mais: logo o circulo S, he igual âs superficies conicas inscriptas na esfera. *Q.E. &c.*

PROPOSIÇÃO XIX. *Theor.*

Supposto o ditto no Lem. 5. *digo, que todas as superficies conicas inscriptas no segmento de huma esfera GAR, são iguaes ao circulo, cujo rayo he medio proporcional entre o exo AO, do ditto segmento, e a recta EF.*

D*Em.* He a mesma, que a da *Ant.* e sòmente se cita a 17. em lugar da 16.

PRO-

PROPOSIÇÃO XX. *Theor.*

Fig. 15.

As ſuperficies conicas inſcriptas na esfera fenecem na esferica.

DEm. Seja dada qualquer minima ſuperficie Z. He manifeſto, que dentro da ſuperficie esferica AEBF, ſe pode dar outra concentrica QPSN, tam pouco menor que ella, que ſeja o defeito menor que qualquer quantidade aſſignada Z. Sejão pois circulos maximos das dittas esferas concentricas, os expreſſados com as meſmas letras; e tire-ſe o diametro commum AB, a quem corte em Q, à tangente OG.

Se o ſemicirculo AOB, ſe cortar pelo medio em E; e o quadrante AE, ſe biſſecar infinitamente; virſeha a hum arco tam pequeno AC, que ſeja menor que AO (*Eſch. da* 11.6.) e cuja ſubtenſa não toque o circulo interno QPSN: logo ſerà lado de huma figura regular parilatera, cujos lados não chegão ao ditto circulo. Logo ſe, deſcripta eſta figura, ſe revolverem ambos os circulos ſobre o diametro commum AB, ſerâ o aggregado das ſuperficies conicas inſcriptas mayor que a ſuperficie esferica interior, e por conſeq. menor que a ſuperficie esferica exterior em quantidade, menor que a aſſignada Z. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXI. *Theor.*

Fig. 16.

As ſuperficies conicas inſcriptas no ſegmento esferico DAF, fenecem na esferica do ditto ſegmento.

DEm. He ſemelhante â antecedente.

PROPOSIÇÃO XXII. *Theor.*

Fica demonstrado na Prop. 18. *que o circulo, cujo rayo he medio proporcional entre o diametro AE, e a recta EB (tirada da extremidade do diametro â extremidade do lado opposto) he igual a todas as superficies conicas inscriptas na esfera, segundo o* Lem. 4. *Agora digo, que este mesmo circulo, e por consequencia as mesmas superficies fenecem em outro, cujo rayo he o mesmo diametro.* Fig. 18.

DEm. Se pro via de bisecções se inscreverem no circulo maximo de huma esfera figuras parilateras de mais, e mais lados; e pela revolução do ditto circulo se inscreverem na esfera superficies conicas; cõsta manifestamente, que ao mesmo passo que o lado AB, se vay encurtando, se vay tambem estendendo a recta EB, atè fenecer no diametro: logo tambem a media proporcional entre AE, e EB; e por consequencia o circulo, que a tiver por rayo, se hiraõ augmentando atè fenecer em outro, que tenha por rayo o mesmo diametro, &c. * He tam claro, que não necessita de mais demonstração.

PROPOSIÇÃO XXIII. *Theor.*

Fica demonstrado na Prop. 19. *que o circulo, que tiver por rayo a media proporcional entre EB, e AO (exo do segmento esferico DAF) he igual ao aggregado de todas as superficies conicas inscriptas no ditto segmento, segundo o* Lem. 5. *Agora digo, que este circulo fenece em outro, cujo rayo he a* Fig. 16.

recta AD, tirada do extremo do mesmo exo A, â circunferencia do circulo ODS, base do ditto segmento.

DEm. Consta da *Ant.* que EB, fenece em AE: logo tambem a media proporcional entre EB, e AO, fenecerà na media proporcional entre AE, e AO; isto he, em AD [*Cor.* 2. *da* 8. 6.] logo tambem o circulo, cujo rayo for medio proporcional entre EB, e AO, fenecerá em outro, cujo rayo serà AD, *Q. E. &c.*

Lemma 6.

Se hum diametro for duplo do outro; e o circulo do primeiro, serà quadruplo do circulo de segundo.

DEm. Consta da 2. do l. 12. e da *Def.* 10. do 5.

PROPOSIÇÃO XXIV. *Theor.*

Fig. 15. *A superficie da esfera he quadrupla do circuco maximo da mesma esfera.*

DEm. Imagine-se inscripta no circulo maximo da esfera huma figura regular parilatera, segundo a regra do *Lem.* 4. e que revolvendo-se o ditto circulo sobre o diametro AB; se inscreve na esfera hum solido comprehendido de muitas superficies conicas, &c. Tire-se a recta BC.

Consta da 18. que todas aquellas superficies conicas são iguaes a hum circulo, cujo rayo he medio proporcional entre o diametro AB, e a recta BC: o que succede todas as vezes que se inscrevem no ditto circulo maximo figuras parilateras de mais, e mais

lados

lados &c. porem as dittas ſuperficies conicas fenecem na esferica (20.) aſſim como o circulo, à quem ſão iguaes, em outro, que tem por rayo o diametro AB (22.) logo a ſuperficie esferica he igual ao ditto circulo (2.) e por conſequencia quadrupla do circulo maximo da esfera, por ſer o rayo do primeiro duplo do rayo do ſegundo (*Lem.* 6.) *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

DEſte admiravel Theorema ſe tira o modo de exhibir hum circulo igual a qualquer ſuperficie eſferica; que he tomando por rayo delle o diametro da meſma eſfera.

ESCHOLIO.

TAmbem daqui ſe tira o modo de medir a ſuperficie de qualquer esfera, que he o ſeguinte. Dado o diametro da esfera, ache-ſe o ſeu circulo maximo, ſegundo o ditto no Eſch. da 6. *e multiplique-ſe por* 4. *V. g. o circulo maximo da Terra conſta de* 3.160,031 $\frac{2}{7}$. *legoas quadradas: digo, que a ſuperficie da meſma Terra conſtarà de* 12.640,126 $\frac{1}{3}$.

Por outro modo. Multiplique-ſe o diametro da esfera pela circunferencia do ſeu circulo maximo; e o producto darà a ſuperficie esferica. V. g. o diametro da Terra [pelo Eſch. cit.] *conſta de* 2006 $\frac{116}{314}$. *legoas, e a circunferencia de* 6300. *digo que o producto deſtes dous numeros; iſto he,* 12.640,127 $\frac{1}{3}\frac{2}{7}\frac{3}{4}$. *darâ o numero das legoas quadradas, de que conſta a ſuperficie. Conſta do* Cor. 1. da 5. *porquanto o rectangulo comprehendido do diametro da esfera, e da circunferencia do circulo maximo, he* 4. *vezes mayor que o ditto circulo.*

PROPOSIÇÃO XXV. *Theor.*

Fig. 16. *A ſuperficie de qualquer ſegmento esferico DAF, he igual ao circulo, cujo rayo he a recta AD, tirada do vertice do ditto ſegmento â circunferencia da baſe ODSF.*

DEm. Imagine-ſe inſcripta na ſecção maxima do ditto ſegmento huma figura parilatera, e equilatera; e que ſe revolve a ditta ſecção ſobre o exo AO: tire-ſe a recta EB. Conſta da 19. que todas as ſuperficies conicas inſcriptas no ſegmento esferico DAF, ſão iguaes ao circulo, cujo rayo he medio proporcional entre EB, e AO; o que ſuccede todas as vezes, que ſe inſcrevem na ditta ſecção figuras parilateras de mais, e mais lados, &c. Porem as ſuperficies conicas, aſſim inſcriptas, fenecem na esferica do ditto ſegmento (21.) aſſim como o circulo, a quem ſão iguaes, no que tem por rayo a recta AD (23.) logo aquella ſuperficie he igual a eſte circulo (2.) *Q.E.&c.*

* Tanto eſte, como o *Theor.* antecedente ſão dos mais illuſtres inventos de *Arquimedes*: pelos quaes mereceo immortal gloria entre os Geometras.

PROPOSIÇÃO XXVI. *Theor.*

A superficie cylindrica de hum cylindro recto, circunscripto a huma esfera, he igual â superficie da mesma esfera. E se tanto o cylindro, como a esfera se cortarem com planos parallelos â base; serão os segmentos da superficie cylindrica iguaes aos segmentos correspondentes da superficie esferica. Fig. 14.

DEm. 1. part. Porquanto o lado cylindrico HP, he igual ao diametro da base PS (*Hyp.*) será a superficie cylindrica HS, quadrupla da base PFS (*Cor. da* 12.) isto he, do circulo maximo da esfera. Porem deste mesmo circulo he tambem quadrupla a superficie da esfera (24.) logo huma he igual â outra *Q. E. &c.*

2. Part. Tirem-se as rectas BQ, AQ. Porquanto o angulo BQA, he recto (31.3.) e a recta QG, he perpendicular â base BA, será BQ, media proporcional entre BA, e BG (*Cor.* 2. *da* 8.6.) isto he, entre PS, e PI: logo o circulo, cujo rayo for igual à BQ, será igual â superficie cylindrica IS (11.) Porem o mesmo circulo he igual â superficie esferica do segmento QBQ (*Ant.*) logo a superficie cylindrica IS, e a esferica QBQ, são iguaes. Do mesmo modo mostrarey, ser igual a superficie cylindrica LS, â esferica OBO: logo tambem a residua IX, será igual â residua QOOQ; e por consequencia os segmentos cylindricos são iguaes aos segmentos esfericos. *Q. E. &c.*

PROPO.

PROPOSIÇÃO XXVII. *Theor.*

Fig. 14. *Os ſegmentos da ſuperficie esferica (dividida a esfera com circulos parallelos) ſão entre ſi como os ſegmentos do exo, interceptos entre os dittos circulos.*

DEm. Segue-ſe da *Ant.* porquanto os ſegmentos da ſuperficie esferica QAQ,OQQO,MOON, &c. ſão iguaes aos ſegmentos da ſuperficie cylindrica HY,IX,LN, &c. porém eſtes tem entre ſi a proporção das alturas; iſto he, dos ſegmentos do exo AG,GD, DC, &c. [13.12.] logo &c.

ESCHOLIO.

D*Aqui ſe colhe o modo de inveſtigar as proporções, que tem entre ſi as* Zonas, *e os* Climas *da Terra. Porquanto, ſendo eſtas entre ſi como os ſegmentos do exo; iſto he, ſendo todos (começando do Equador MN) como os ſenos dos arcos MO,MQ, &c. e as differenças, como as differenças dos meſmos ſenos; facilmente ſe acharão no* Canon Trigonometrico *as dittas proporções. E daqui meſmo ſe colhe o modo de medir as dittas* Zonas, *e* Climas: *porquanto, ſendo conhecida em legoas quadradas toda a ſuperficie da Terra, e por conſequencia a ſua metade* (pelo Eſch. da 24.) *e ſendo conhecidas as dittas proporções, facilmente ſe acha por regra de* 3. *a quantidad ede cada* Zona, *ou* Clima.

* Os 4. *Theoremas antecedentes, e todos os que ſe ſeguem, ſão tam admiraveis, que elles ſó baſtavão para fazer reſpeitavel a Geometria, e appetecido o ſeu eſtudo.*

Lemma 7.

Se huma esfera tocar hum plano; serà a recta OQ, tirada do centro ao ponto do contacto, perpendicular ao ditto plano. Fig. 18.

DEm. Corte-se a esfera, e o plano com 2. planos, os quaes passem pelo centro, e pelo contacto: e seja a commua secção a recta OQ; as secções da esfera os circulos OAQ, OHQ; e as do plano dado as rectas QF, QD: serão estas tangentes dos dittos circulos (18. 3.) e por consequencia rectos os angulos OQF, OQD: logo OQ, he perpendicular ao plano AE (4. 11.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXVIII. *Theor.*

A esfera he igual â pyramide conica, cuja altura AC, he igual ao rayo OR, e cuja base ZZZ, he igual â superficie da mesma esfera. Fig. 19. e 21.

DEm. Imagine-se circunscripto à esfera hum polyëdro regular, e que se lhe cortão os angulos com planos tangentes da mesma esfera (a *Figura* 19. representa o circulo maximo da ditta esfera, com as secções dos angulos &c.) He sem duvida, que feita assim esta divisão, ficarâ circunscripto â esfera outro polyëdro menor; tanto no corpo, como na superficie; e que se deste segundo polyëdro se cortarem tambem os angulos, resultará outro menor; de sorte, que continuando-se assim a divisão, virão finalmente os polyëdros a fenecer na esfera, e os planos tangentes na sua superficie: o que por si he tam manifesto, que se pode tomar por Axioma. Isto supposto.

Qualquer polyëdro assim circunscripto, compoem-

ſe de pyramides rectilineas, cujo vertice commum he o centro da esfera; as baſes os planos tangentes; e as alturas o meſmo rayo OR da esfera; por ſerem todos os rayos, tirados do vertice aos contactos, perpendiculares aos dittos planos (*Lem. ant.*) logo, ſe deſcripto o
Fig. 20. polygono XXX, igual â ſuperficie do ditto polyëdro, ſe levantar ſobre elle huma pyramide rectilinea, cuja altura AC, ſeja igual à OR; ſerá esta igual à todas aquellas pyramides juntas (6.12.) e por conſequencia ao ditto polyëdro.

Porem aſſim como o polyëdro fenece na esfera; aſſim tambem a pyramide rectilinea AXXX, fenece na conica AZZZ (por ſer huma para a outra, como a baſe, para a baſe; isto he, como a ſuperficie do polyëdro para a da esfera; das quaes huma fenece na outra) logo a esfera he igual â ditta pyramide conica (1.) *Q. E. &c.*

* A Dem. de *Arquimedes* he muy ſubtil, e engenhoſa; porem he tam prolixa, que depende de 2. *Manifeſtos*, e de 11. *Propoſições*; âlem de outras muitas, de que estas dependem. Advirta-ſe, que o ditto *Arquimedes* não propoem este *Theor.* nos termos em que nós o propomos, ſenão aſſim: *Toda a esfera he quadrupla da pyramide conica, cuja altura he o rayo, e a baſe o circulo maximo da meſma esfera.*

ESCHOLIO.

D*Eſte engenhoſo* Theor. *ſe tira o modo de medir à corpulencia de qualquer esfera: porquanto ſe ſe multiplicar a ſexta parte do diametro (ou a terceira do rayo) pela ſuperficie da esfera, ſe terà a ſua corpulencia. V. g. o diametro da Terra (ſegundo o ditto no* Eſch. da 6.) *conſta de* $2006\frac{1}{3}\frac{16}{74}$. *legoas, cuja ſexta parte ſão* $334\frac{1}{3}$: *e a ſuperficie da meſma (ſegundo o ditto no* Eſch. *da* 24.) *conſta de* $12.640,127\frac{1}{3}$. *Digo, que o producto deſtes dous numeros; iſto he,* 4,226.015,905. *he o numero das legoas*

goas cubicas, de que consta o solido da Terra.

PROPOSIÇÃO XXIX. *Theor.*

O sector da esfera he igual â pyramide conica, que tem por base a superficie esferica do ditto sector, e por altura o rayo da mesma esfera. Fig. 22.

DEm. Seja 1. o sector OBAC, menor que o hemisferio: se a este se circunscrever hum polyëdro, como na *Ant.* facilmente se mostra, com o mesmo discurso, que tanto a corpulencia, como a superficie fenecem nas do sector: logo &c.

Seja 2. o sector OBDC, mayor que o hemisferio: os 2. sectores juntos (isto he, toda a esfera) são iguaes â pyramide, que tem por base toda a superficie da esfera, e por altura o seu rayo (*Ant.*) porem o sector menor he igual â pyramide, que com aquella altura tem por base a menor porção da superficie: logo tambem o mayor serà igual a outra, que com a mesma altura tenha por base a porção mayor (12.12.) *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

COmo a superficie BAC, he igual ao circulo, cuja rayo he AC (25.) e a superficie BDC, he igual à outro circulo, cujo rayo he DC: segue-se, que os dous sectores OBAC, OBDC, são iguaes âs pyramides conicas, cuja altura he o rayo da esfera, e as bases os dittos circulos AC, DC.

bre a baſe (que he metade do da figura) para o angulo do vertice, ou no centro, &c.

PROPOSIÇÃO IV. *Theor.*

Fig. 1. *Se o quadrante, e a quadratriz tiverem o meſmo centro; ſerão o arco do quadrante AD, o lado AC, e a baſe da quadratriz CE, continuamente proporcionaes.*

D*Em.* Se o não ſão: ſeja AD : AC = AC : CZ (mayor que CE) e deſcripto do centro commum C, o quadrante ZI, o qual occorra â quadratriz em O, tire-ſe o rayo COL, e a perpendicular â baſe OM. Porquanto AD : AC = CD : CZ (*Hyp.*) e CD : CZ = AD : IZ (*7. de Arquimedes*) ſerà AD : AC = AD : IZ (11.5.) e por conſequencia AC = IZ (9.5.) Porem, por ſer AD : LD = AC : PC (1.) e AD : LD = IZ : OZ (*Cor. 2. da* 33.6.) tambem AC : PC = IZ : OZ; iſto he (por ſer AC = IZ) IZ : PC = IZ : OZ: logo PC, ou OM = OZ; iſto he, a metade da corda he igual â metade do arco, a quem ſubtende; o que he abſurdo &c. * O meſmo ſe entende, ſe CZ for menor que CE.

COROLLARIO.

1. DAqui ſe tira o modo de achar huma recta igual a qualquer arco. Seja 1. o arco dado o quadrante AD. Porquanto AD, AC, CE, ſão continuamente proporcionaes, ſerâ invertendo, CE : AC = AC : AD; logo, ſe âs duas rectas CE, AC, ſe buſcar huma terceira proporcional (11.6.) ſerà eſta igual ao quadrante AD: e por conſequencia duplicada, ſerà igual â ſemicircufecencia, e quadruplicada à toda a circunferencia do circulo.

Seja

altura do primeiro segmento BO, para o rayo BC; assim a altura do segundo OQ, para huma quarta QD: ou tambem: como a altura do segundo QO, para o rayo QC; assim a altura do primeiro OB, para huma quarta BA: serão.

1. *As pyramides conicas GDE, GAE (cujas alturas são as compostas OD, OA, e a base commua o circulo GSE) iguaes respectivamente aos segmentos GQE, GBE.*

2. *A razão dos dittos segmentos esfericos, a mesma que a dos segmentos do diametro continuado OD, OA.*

3. *E o segmento esferico GQE, para a pyramide recta nelle inscripta, como OD para OQ, assim como: o segmento esferico GBE, para a sua pyramide tambem inscripta, como OA para OB.*

DEm. 1. part. Corte-se tanto a esfera, como as 2. pyramides conicas com hum plano, o qual passe pelo diametro BQ continuado; e seja o circulo BGQE, a secção maxima da esfera; e os 2. triangulos GAE, GDE, as das 2. pyramides &c. Porquanto o diametro BQ, he perpendicular ao circulo GCES (*Hyp.*) serà recto o angulo GOB; assim como o angulo no semicirculo BGQ (31.3.) logo os triangulos BGO, BQG, são semelhantes; e por consequencia BG : GO = BQ : GQ. Porem a razão de BQ para OQ, he duplicada da de BQ para GQ (*Cor.2.da* 8.6.) logo tambem o serà da de BG para GO, sua igual: e por consequencia BQ he para OQ, como o circulo cujo rayo he BG, para o circulo, cujo rayo he GO (2.12.)

Porem, por ser OQ : CQ = BO : AB (*Hyp.*)

 he

he invertendo AB : BO = CQ, ou BC : OQ; e permutando, AB : BC = BO : OQ; e compondo AC : BC = BQ : OQ. Logo comparando esta proporção com a desima, será o circulo cujo rayo he BG, para o circulo cujo rayo he GO, como AC, para BC: logo, reciprocando os termos, serà a pyramide, que tiver por base o circulo do rayo BG, e por altura o rayo da esfera BC; isto he, o sector GBEC (*Cor. da* 29.) igual â pyramide que tiver por base o circulo do rayo GO, e por altura a recta AC (15. 12.) Logo, se tanto ao sector GBEC, como a esta pyramide, se accrescentar a pyramide pequena GSEC; serà todo o segmento esferico OGBE, igual âs 2. pyramides, que tem por base commua o circulo OGSE, e por alturas os segmentos AC, CO; isto he, a toda a pyramide GAE (14. 12.) *Q. E. &c.*

* O mesmo se entende do outro segmento OGQE.

2. Part. As pyramides GAE, GDE, sáo entre si como as alturas AO, OD (14. 12.) logo tambem os segmentos esfericos, seus iguaes, OGBE, OGQE, &c.

3. Part. A pyramide GAE, he para a pyramide GBE, como AO para BO (14. 12.) logo tambem o segmento esferico GBE, igual â primeira pyramide, terà para a pyramide inscripta a mesma razão.

ESCHOLIO.

Este Theor. he prolixo, mas summamente engenhoso: delle se tira outro modo mais facil de medir qualquer segmento esferico GBE, que he medindo a pyramide conica GAE, pelo Elch. *da* 6.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXXII. *Theor.*

O cylindro recto HG, he para a esfera inscripta EBFA, tanto na corpulencia, como na superficie (entende-se da total) em razão sesqui-altera; isto he, como 3. para 2. Fig. 23.

DEm. 1. part. Seja BA, exo commum da esfera, e do cylindro; e seja EBF, a mayor pyramide conica inscripta no hemisferio superior. Porquanto o cylindro HF [metade de HG] he triplo da pyramide conica EBF [10. 12.] e o hemisferio circunscripto he duplo da mesma (30.) será o cylindro para o hemisferio como 3. para 2. logo todo o cylindro HG, he para toda a esfera inscripta na mesma razão (12. 5.) *Q.E.&c.*

2. Part. Porquanto HD, lado do cylindro, he igual ao diametro da base DG, será a superficie cylindrica quadrupla da ditta base (*Cor. da* 12.) logo accrescentando-lhe as duas bases DTG, HVK, será *toda* a superficie cylindrica sextupla da mesma base, ou do circulo maximo da esfera ESF. Porem a superficie esferica he quadrupla do mesmo circulo (24.) logo a superficie cylindrica *total* he para a esferica, como 6. para 4. ou como 3. para 2. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

A*Gradou-se tanto* Arquimedes *deste Theor.* [*sendo tantas, e tam subtis as invenções do seu feliz, e fecundissimo engenho*] *que mandou gravar a figura delle na campa da sua sepultura. Talvez lhe motivou a admiração, o vêr que estes dous corpos seguião a mesma proporção, assim na corpulencia, como na superficie; o que verdadeiramente he admiravel, e rarissimo. O Padre*

Padre Tacquet [*engenho tambem feliz entre os da Companhia*] *observou a mesma propriedade nos Anneis cylindricos, como demonstra no livro 4. daquella sua admiravel Obra dos* Corpos Cylindricos, *e* Annulares *Prop.* 13. 14. *e* 15. *porem despois, profundando mais a especulação sobre a mesma esfera, achou que não só esta a respeito do cylindro circunscripto guardava aquella proporção sesqui-altera; senão que o mesmo cylindro, a respeito da pyramide conica equilatera, circunscripta â mesma esfera, continuava a mesma proporção; assim na corpulencia, como na superficie: o que com muitas outras particularidades [todas de propria invenção] pertencentes a estes 3. Corpos, expoem, e demonstra nas 13. seguintes Proposições.*

PROPOSIÇÃO XXXIII. *Theor.*

A superficie da esfera he dupla da do cylindro quadrado, inscripto nella.

Fig. 26.

D*Em.* Seja AF, o quadrado inscripto no circulo maximo da esfera, o qual revolvendo-se sobre o exo commum BD, descreve o cylindro: e seja RK, o seu commum diametro. Porquanto o quadrado RK, he igual aos dous quadrados iguaes RF, KF, serâ duplo de RF: logo tambem o circulo, cujo diametro he RK, serà duplo do circulo, cujo diametro he RF (2.12.) Porem a superficie esferica he quadrupla do circulo maximo da mesma esfera; isto he, do circulo RK (24.) logo he octupla do circulo RF. Porem, por serem iguaes AR, RF, a superficie cylindrica he quadrupla do mesmo circulo RF (*Cor. da* 12.) logo a superficie esferica he para a cylindrica; como 8. para 4. ou como 2. para 1. *Q. E. &c*

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXXIV. *Theor.*

A ſuperficie da esfera he para toda a ſuperficie do meſmo cylindro, como 4. para 3. Fig. 26.

DEm. A ſuperficie cylindrica AF, he quadrupla da baſe RF: logo accreſcentando-lhe as baſes RF, AK, ſerà ſextupla. Porem a ſuperficie esferica, como fica demonſtrado na antecedente, he octupla: logo a esferica he para *toda* a cylindrica, como 8. para 6. ou 4. para 3. *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

TOda a ſuperficie do cylindro recto circunſcripto â esfera, he para *toda* a ſuperficie do cylindro quadrado, inſcripto na meſma, como 2. para 1.

Dem. A ſuperficie circunſcripta he para a esferica, como 12. para 8. (32.) a esferica he para a inſcripta, como 8. para 6. (*Ant.*) logo por igual, a circunſcripta he para a inſcripta, como 12. para 6. ou 2. para 1. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXXV. *Theor.*

A ſuperficie esferica de qualquer ſegmento esferico GBE, he para a ſuperficie conica da pyramide maxima nelle inſcripta, como o lado da pyramide GB, para o rayo da baſe GO. Fig. 28.

DEm. A ſuperficie esferica do ditto ſegmento he igual ao circulo, cujo rayo he BG (25.) porem eſte circulo he para a baſe GSE em duplicada razão de GB para GO (2. 12.) iſto he, da razão da ſuperficie conica GBE, para a meſma baſe GSE (14.) logo a ſuperfiperficie esferica, a conica, e a base continuão a mesma razão. Porem a conica he para a base, como o lado GB para o rayo GO (14.) logo tambem a esferica he para a conica, como GB para GO. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXXVI. *Theor.*

Fig. 23. *A superficie do hemisferio EBFS, he para a superficie da pyramide conica maxima nelle inscripta, como o diametro para o lado do quadrado. E para a superficie da conica circunscripta (semelhante â inscripta) como o lado do quadrado para o diametro.*

DEm. 1. part. Consta manifestamente da antecedente: porquanto a superficie de qualquer segmento esferico he para a da pyramide conica nelle inscripta, como EB, para EO: isto he, pela igualdade dos rayos EO, OB, como o diametro para o lado &c.

2. Part. Seja a metade do quadrado circunscripto
Fig. 5. do l. 4. GLH, o qual revolvendo-se sobre o exo LQ, descreva a pyramide conica circunscripta ao hemisferio &c. Porquanto o quadrado GH, he duplo do quadrado GL, ou DB, serà tambem o circulo GLHQ, duplo do circulo DABE (1.12.) porem a superficie do hemisferio inscripto na pyramide, ou seu igual DAB, tambem he dupla do mesmo circulo, ou base DABE (24.) logo o circulo GLHQ, he igual â superficie do ditto hemisferio. Logo, sendo o circulo GLHQ, para a superficie conica circunscripta GLH, como GC para GL; isto he, como o lado do quadrado para o diametro (14.) tambem a superficie do hemisferio inscripto serà para a mesma superficie conica na mesma proporção. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXXVII. *Theor.*

A esfera he para o rhombo quadrado-conico a ella circunscripto (tanto na corpulencia, como na superficie) como o lado do quadrado para o diametro. Fig. 5. do l. 4

DEm. Circunscreva-se ao circulo maximo da esfera o quadrado GLHQ, o qual revolvendo-se sobre o exo LQ, descreva o rhombo quadrado-conico circunscripto â esfera: e continue-se a razão do lado para o diametro [isto he, de GL para GH] por 4. termos S : P ; Q : R. Será S para P, como GL para GH: será S para R, em triplicada razão de GL para GH: e será R para P, em duplicada razão de R para Q ; isto he, de GH para GL ; isto he, como o quadrado GH, para o quadrado GL: e por consequencia será R dupla de P. Isto supposto,

1. Part. Considere-se circunscripta outra esfera ao rhombo quadrado-conico. A esfera inscripta he para a esfera circunscripta em triplicada razão de DB para GH, ou de GL para GH; isto he [como fica notado] como S para R. Porem a esfera circunscripta he para o rhombo quadrado-conico, como 2. para 1. (30.) isto he [como tambem fica notado] como R para P : logo por igual, a esfera inscripta he para o rhombo quadrado-conico, como S para P; isto he, como GL para GH, ou como o lado para o diametro. *Q.E. &c.*

2. Part. Consta da *Precedente*, que a superficie hemisferica he para a conica circunscripta; isto he, toda a esferica para toda a rhombo-conica, como o lado para o diametro: logo &c.

PROPOSIÇÃO XXXVIII. *Theor.*

Fig. 27. *A superficie esferica do segmento esferico, que comprehende huma pyramide conica equilatera, he dupla da superficie conica da ditta pyramide.*

DEm. Consta da 35. Porquanto a superficie esferica do segmento FEG, he para a conica inscripta, como FE para FO: porem, por ser a pyramide equilatera, FE he igual à 2 FO: logo &c.

PROPOSIÇÃO XXXIX. *Theor.*

Fig. 27. *A superficie da esfera he para* toda *a da pyramide conica equilatera, nella inscripta, como 16. para 9.*

DEm. Seja Q, o centro da esfera: FEG, a pyramide equilatera: ED, o exo commum: e passe por este hum plano, o qual corte a ditta esfera, e pyramide; deixando descripto na commua secção hum circulo maximo, e hum triangulo equilatero nelle inscripto.

Porquanto FO, he media proporcional entre EO, e OD, será o Quad. FO = Rect. EOD (*Cor. da* 17.6.) E porquanto FG, corta a quarta parte do exo ED (*Cor.* 5.*da* 5.4.) será o ditto Rect. EOD; isto he, o Quad. FO, triplo do Quad. OD (16.) logo, como o Quad. do rayo QD, he quadruplo d. Quad. OD (20.6.) será o ditto Quad. QD, para o Quad. FO, como 4. para 3: logo tambem o circulo BECD, será para o circulo FSG, como 4. para 3. (2.12.) e por consequencia 4. circulos BECD; isto he, a superficie esferica (24.) serão para o circulo FSG, como 16. para 3. Porem a superficie conica FEG, he dupla do mesmo circulo FSG (*Cor.* 1. *da* 14.)

da 14.) logo accrescentando-lhe a base (isto he, o mesmo circulo) serà a superficie esferica para *toda* a conica, como 16. para 9. *Q.E.&c.*

Por outro modo. Porquanto o lado FG, corta a quarta parte do exo ED, serà a superficie esferica do menor segmento FDG, a quarta parte de toda a superficie esferica (27.) e a do segmento mayor FBEC, tres quartas da mesma: logo, se toda a superficie esferica se considerar dividida em 16. partes, tocarão destas 12. ao segmento mayor. Porem a do segmento mayor he para a conica inscripta FFG, como 12. para 6. (*Ant.*.) e a conica para a base FSG, como 6. para 3. (*Cor.* 1. *da* 14.) logo ajuntando tudo, serà a de toda a esfera para *toda* a da pyramide, como 16. para 9. &c.

PROPOSIÇÃO XL. *Theor.*

A superficie da esfera, he para toda *a da pyramide conica equilatera, circunscripta, como 4. para 9.* Fig. 25.

DEm. Circunscreva-se ao circulo maximo da esfera QEL, o triangulo equilatero MAN, o qual revolvendo-se sobre o exo commum AR, descreva huma pyramide equilatera &c. Circunscreva-se ao mesmo triangulo outro circulo, e â pyramide outra esfera. Porquanto QR, he a quarta parte de AR (*Cor.* 5. *da* 15.4.) serà AR dupla de DQ: logo como os circulos são em duplicada razão dos diametros (2. 12.) serà o circulo QEL, para o circulo RST, como 1. para 4. Porem o circulo RST (como fica demonstrado na *antecedente*) he para a base da pyramide MZN, como 4. para 3. logo por igual, o circulo QEL, he para o circulo MZN, como 1. para 3.

Porem *toda* a superficie da pyramide equilatera, MAN, he tripla do meſmo circulo MZN (*Cor.* 1. *da* 14.) logo o circulo QEL, he para *toda* a ſuperficie da ditta pyramide, como 1. para 9. e por conſequencia 4. circulos QEL; iſto he, a ſuperficie da esfera inſcripta (24.) ſão para a ditta ſuperficie pyramidal, como 4. para 9. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XLI. *Theor.*

Fig. 25. *A ſuperficie total da pyramide conica equilatera, circunſcripta â esfera, he quadrupla da total de outra pyramide ſemelhante, inſcripta na meſma esfera.*

DEm. A ſuperficie total da pyramide MAN, he para a da esfera inſcripta QEL, como 9. para 4. (*Ant.*) porem a da ditta esfera he para a total da pyramide inſcripta GDF, como 16. para 9. (39.) logo por razão perturbada (23. 5.) a ſuperficie da pyramide circunſcripta he para a da inſcripta, como 16. para 4. ou como 4. para 1. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XLII. *Theor.*

Fig. 27. *A esfera he para a pyramide conica equilatera inſcripta, como 32. para 9.*

DEm. Corte-ſe a esfera, e a pyramide com hum plano, o qual paſſe pelo exo commum ED; e ſeja a ſecção da esfera o circulo maximo BECD; e a da pyramide o triangulo equilatero FEG. Tire-ſe pelo centro Q, outro plano BTC, perpendicular ao exo; e conſidere-ſe inſcripto no hemisferio ſuperior a pyramide maxima BEC, cuja ſecção com o primeiro plano

ſeja

ſeja o triangulo rectangulo notado com as meſmas letras. Iſto ſuppoſto,

Porquanto o lado FG, corta a quarta parte do exo ED (*Cor.* 5. *da* 15. 4.) ſerà EO para EQ, como 3. para 2. ou como 9. para 6. He tambem o circulo FSG, para o circulo BECD, ou para ſeu igual BTC, como 3. para 4. ou como 6. para 8. [pelo demonſtrado na 39.] logo ſendo a pyramide FEG, para a pyramide BEC, em razão compoſta das alturas, e das baſes; iſto he, das perpendiculares EO, EQ; e dos circulos FSG, BTC; iſto he, de 9. para 6. e de 6. para 8. ſerà a pyramide FEG, para a pyramide BEC, como 9. para 8: logo, ſendo a esfera quadrupla da pyramide inſcripta no hemisferio BEC (30.) ſerà a pyramide FEG, para a ditta esfera, como 9. para 32. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XLIII. *Teor.*

A pyramide conica equilatera circunſcripta â esfera, he para a pyramide ſemelhante inſcripta na meſma esfera, como 8. para 1. Fig. 25.

DEm. Seja AQ, exo commum da esfera, e das pyramides: e tirado por elle hum plano, ſeja o circulo QEL, a ſecção da esfera; e os triangulos equilateros MAN, GDF, as ſecções das pyramides. Circunſcreva-ſe ao triangulo mayor o circulo RST, e continue-ſe o exo atè R.

Porquanto o lado MN, corta a quarta parte do exo AR, ſerà AR (dupla de DQ) : AQ = DQ : DO; e permutando, ſerà AR : DQ = AQ : DO; e por conſeq. ſerà AQ dupla de DO. Porem pela ſemelhança dos triangulos MAN, GDF, tambem os diametros das baſes conicas MN, GF, ſão entre ſi em razão dupla (4.6.) logo as pyramides MAN, GDF, ſão ſemelhantes (*Def.* 4. 12.)

e por

e por consequencia em triplicada razão dos diametros das bases MN, GF (12.12.) logo sendo MN para GF, como 2. para 1. serà a pyramide circunscripta para a inscripta, como 8. para 1. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XLIV. *Theor.*

Fig. 25. *A esfera he para a pyramide conica equilatera circunscripta, tanto na corpulencia, como na superficie total, como 4. para 9.*

DEm. 1. part. A esfera QEL, he para a pyramide conica equilatera inscripta GDF, como 32. para 9. (42.) a inscripta he para a circunscripta, como 1. para 8. ou como 9. para 72. (*Ant.*) logo por igual, a esfera he para a pyramide circunscripta, como 32. para 72; isto he (partindo os termos por 8.) como 4. para 9. *Q. E. &c.*

2. Part. Fica demonstrado na *Prop.* 40. que a superficie da esfera he para a superficie total da pyramide inscripta, como 4. para 9: logo &c.

ESCHOLIO.

O *Que admirou* Arquimedes *no* Theor. 32. *foy vêr, que tinhão a mesma razão de* 2. *para* 3. *a esfera, e o cylindro circunscripto, tanto na corpulencia, como na superficie. O mesmo, pela mesma razão, se deve admirar na mesma esfera, e pyramide conica equilatera cicunscripta; pois tambem estas guardão entre si huma mesma razão de* 4. *para* 9. *tanto na corpulencia, como na superficie. Porem o que daqui se segue, e o que com razão excede toda a admiração, he vêr, que porisso mesmo os dittos* 3. *corpos; esfera, cylindro, e pyramide*

conti-

continuão entre si a mesma razão de 2. para 3. assim na corpulencia, como na superficie: invenção, que toda se deve ao estudo, e engenho do Padre Tacquet, *e que passo agora a demonstrar neste ultimo* Theor. *com que darey fim a este Appendiz.*

PROPOSIÇÃO XLV. *Theor.*

A esfera, o cylindro recto, e a pyramide conica equilatera, circunscriptos â mesma esfera, continuão entre si a mesma razão sesquialtera de 2. para 3. tanto na corpulencia, como na superficie.

DEm. Consta manifestamente do demonstrado. Porquanto o cylindro recto he para a esfera inscripta (assim no corpo, como na superficie) como 3. para 2. ou como 6. para 4. (32.) porem (pela *Precedente*) a pyramide conica equilatera, circunscripta â mesma esfera, he para ella, como 9. para 4. (tanto na corpulencia, como na superficie) logo estes 3. corpos guardão entre si as razões destes 3. numeros 9 : 6 : 4. isto he, continuão entre si a mesma razão sequi-altera de 3. para 2. *Q. E. &c.*

APPEN-

APPENDIZ III.

DA LINHA QUADRA-triz.

DOUS PROBLEMAS FICARÃO POR resolver nos Elementos de Euclides, *os quaes são de muito uso na* Geometria, *e fazem defectuosa a quella Obra: o* 1. *a trisecção do angulo: o* 2. *a quadratura do circulo. Do* 1. *tratarey* ex professò *na* Geometria Superior: *do* 2. *na* Practica: *porem, porque não fique imperfeito este tratado, darey aqui brevemente hum modo mecanico de resolver hum, e outro Problema, dos muitos que tem excogitado os* Geometras.

Pappo *no livro* 4. *trata de huma linha curva (invenção de* Dinostrato, *e* Nicomedes) *por meyo da qual se triseca o angulo, e quadra o circulo. A geração desta curva, a qual por ser inventada principalmente para este segundo uso, se chama* Quadratrix, *depende de hum instrumento composto de dous* *movimentos contrarios, hum recto, e outro circular; o qual pareceo tam imperceptivel a* Pappo, *que porisso mesmo reprovou esta curva, e a lançou fora da* Geometria, *como couza inutil, e impracticavel.*

Todavia Clavio, *reflectindo mais na ditta curva, e vendo a muita utilidade, que della podia resultar à* Geometria, *achou hum modo facil de a descrever; o qual aindaque não he rigorosamente geometrico, porque sómente assigualla os pontos, e não o fluxo da linha; todavia he muy expedito, e assaz exacto; e tanto, que tomando-se mais, e mais pontos, por via de bissecção continuada (a qual he geometrica) se poderá chegar a qualquer exactidão, que se deseje.*

DESCRIPÇÃO DA QUADRATRIZ.

Fig. 1. DEscreva-se pois hum quadrado ABDC; e nelle hum quadrante de circulo ALD: e divididos os lados AC, BD, em quaesquer partes iguaes AT, TI, &c. BR, RN, &c. por via de bissecção (10. 1.) tirem-se as parallelas TR, IN, &c. Divida-se do mesmo modo o quadrante ALD, em outras tantas partes iguaes AS, SH, &c. tambem por via de bissecção (30. 3.) e tirem-se os rayos CS, CH, &c. Digo que se se ajuntarem com huma curva as interseccções dos rayos como as parallelas F, Q, O, X, &c. ficarà descripta a Quadratriz.

DEFINIÇÕES.

1. *O lado da quadratriz:* he o rayo do quadrante AC.
2. *A base da mesma:* he o segmento CE, do outro rayo.

PROPO-

PROPOSIÇÃO I. *Theorema.*

Se do centro C, por quaesquer pontos de quadratriz Q, O, se tirarem rectas, as quaes occorrão ao quadrante nos pontos H, L; e dos mesmos pontos Q, O, se tirarem perpendiculares â base QG, OM; ou tambem parallelas â mesma QI, OP: ficarà dividido o quadrante pelos rayos na mesma proporção, em que o lado AC, pelas parallelas; ou que guardão entre si as perpendiculares (34. 1.) *Isto he, serà AH : HD = AI : IC; item AL : LD = AP : PC; e por consequencia HL : LD = IP : PC* (19. 5.)

DEm. Consta manifestamente da mesma geração da curva: porem para mayor clareza. Porquanto o arco AH, he parte semelhante do quadrante AD; assim como AI do lado AC,

Serà convertendo, AD : HD = AC : IC,
 e dividindo, AH : HD = AI : IC. *Que era o* 1.
E serà AD : LD = AC : PC,
 e dividindo, AL : LD = AP : PC. *Que era o* 2.
E sendo os 3. arcos HD, AD, LD, proporcionaes âs 3. rectas IC, AC, PC,
 Serà por igual, HD : LD = IC : PC,
 e dividindo, HL : LD = IP : PC. *Que era o* 3.

Daqui se segue, que assim como ha rectas incõmensuraveis, como dissemos no *l.* 2. *Prop.* 11. no *l.* 13. *Prop.* 6. *e* 11. e trataremos *ex professò* no *l.* 10: assim tambem ha arcos incommensuraveis: pois sendo o arco HL para o arco LD, como a recta IP para a recta PC, he sem duvida, que sendo estas rectas incõmensuraveis, o serão tambem aquelles arcos.

PROPOSIÇÃO II. *Probl.*

Dividir qualquer arco HD, em qualquer proporção dada; v.g. de 1. para 2.

Fig. 1. COnſtr. Tire-ſe do ponto H, ao centro do arco a recta HC; a qual corte a quadratriz em Q: tire-ſe do ponto Q, a recta QI, parallela â baſe; e divida-ſe o ſegmento IC, na proporção dada em P (9. 6.) Do ponto P, tire-ſe outra parallela â baſe PO; e pelo ponto O, aonde eſta occorre â quadratriz, o rayo CL. Digo que tambem eſte dividirà o arco HD, na proporção dada em L. Conſta da 3. *part. da ant.* por ſer IP : PC = HL : LD.

Se ſe quizer dividir todo o quadrante AD, em qualquer proporção dada: divida-ſe todo o lado AC, na ditta proporção; e tirada do ponto I, aonde caye a diviſão, huma parallela â baſe IQ, tire-ſe pelo ponto Q, em que eſta occorre â quadratriz, o rayo CH, &c.

Fig. 2. Se ſe quizer dividir todo o ſemicirculo EXO, na meſma proporção: divida-ſe primeiramente o quadrante EX em F, e deſpois o outro quadrante XO em G; e transfira-ſe o arco EF, de F em Q: ficarà divido o ſemicirculo no ponto Q, na proporção dada. A razão he clara; porquanto EF+XG = EQ (*Conſtr.*) logo tambem FX+GO = QO: porem EF+XG, he para FX +GO na proporção dada (12. 5.) logo tambem EQ, para QO.

Finalmente ſe ſe quizer dividir qualquer arco EXOA, mayor que o ſemicirculo, &c. dividão-ſe primeiramente os quadrantes, e deſpois o arco remanente, na proporção dada, e ajuntem-ſe as partes ſemelhantes, &c.

COROLLARIO.

DAqui se tira hum modo facil de dividir qualquer angulo rectilineo ECX, em qualquer proporção dada, ou em quaesquer partes aliquotas. Descrevase do vertice C, o arco EX; e divida-se o ditto arco na proporção assignada, &c.

PROPOSIÇÃO III. *Probl.*

Formar hum triangulo Isósceles, cujos angulos sobre a base tenhão para o do vertice qualquer proporção dada.

COnstr. Seja a proporção dada (DN : NB) e represente DN, a quantidade do angulo sobre a base, e NB, a do angulo do vertice. Divida-se NB, pelo meyo em R, e divida-se o semicirculo EXO, de tal sorte em G, que seja EG : GO = DN : NR. Forme-se o triangulo OCG; e será este o que se pede. Fig. 1 Fig. 2

Dem. Porquanto o arco EG, he para o arco GO, como o angulo EOG, para o angulo OEG (33.6.) será o angulo EOG, para o angulo OEG, como DN para NR: porem o angulo OEG, he para o angulo OCG, como NR para NB; isto he, com 1. para 2. (20. 3.) logo por igual, o angulo EOG (ou COG) he para o angulo OCG, como DN para BN. *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

DAqui se tira hum modo facil de inscrever qualquer figura regular em hum circulo. Resolva-se a ditta figura em triangulos isósceles; e ache-se (*pelo Esch. da* 16. *do* 4.) a proporção que tem o angulo sobre

bre a base (que he metade do da figura) para o angulo do vertice, ou no centro, &c.

PROPOSIÇÃO IV. *Theor.*

Fig. 1. *Se o quadrante, e a quadratriz tiverem o mesmo centro; serão o arco do quadrante AD, o lado AC, e a base da quadratriz CE, continuamente proporcionaes.*

DEm. Se o não são: seja AD : AC = AC : CZ (mayor que CE) e descripto do centro commum C, o quadrante ZI, o qual occorra à quadratriz em O, tire-se o rayo COL, e a perpendicular à base OM. Porquanto AD : AC = CD : CZ (*Hyp.*) e CD : CZ = AD : IZ (*7. de Arquimedes*) serà AD : AC = AD : IZ (11.5.) e por consequencia AC = IZ (9.5.) Porem, por ser AD : LD = AC : PC (1.) e AD : LD = IZ : OZ (*Cor. 2. da 33.6.*) tambem AC : PC = IZ : OZ; isto he (por ser AC = IZ) IZ : PC = IZ : OZ: logo PC, ou OM = OZ; isto he, a metade da corda he igual à metade do arco, a quem subtende; o que he absurdo &c. * O mesmo se entende, se CZ for menor que CE.

COROLLARIO.

1. DAqui se tira o modo de achar huma recta igual a qualquer arco. Seja 1. o arco dado o quadrante AD. Porquanto AD, AC, CE, são continuamente proporcionaes, serà invertendo, CE : AC = AC : AD; logo, se às duas rectas CE, AC, se buscar huma terceira proporcional (11.6.) serà esta igual ao quadrante AD: e por consequencia duplicada, serà igual à semicircumferencia, e quadruplicada à toda a circunferencia do circulo.

Seja

Seja 2. o arco LD, menor que o quadrante. Porquanto AC : PC = AD : LD (1.) e o quadrante AD, se suppoem rectificado, consta manifestamente que se se buscar huma quarta proporcional âs 3. conhecidas AC, PC, AD (12.6.) será esta igual ao arco LD. Seja 3. o arco EQ, ou EQA, ou EQAK, mayor que o quadrante. Busque-se (*pela* 1. *parte*) huma recta igual ao quadrante EX; ou â semicircunferencia EXO, ou aos 3. quadrantes EXOY (segundo for o arco dado) e despois outra igual ao excesso XQ, ou OA, ou YK, &c. Fig. 2.

2 Se a base da quadratriz CE, for rayo de algum circulo; será o lado AC, igual ao quadrante do mesmo circulo; e por consequencia o duplo será igual â semicircunferencia; e o quadruplo à toda a circunferencia, &c. Fig. 1.

Dem. Porquanto os diametros são como as circunferencias dos circulos; e os semidiametros como as suas quartas partes (7. *de Arquimedes*) será o quadrante AD para o quadrante YE, como AC para CE: porem AD : AC = AC : CE (*Ant.*) logo AD : YE = AD : AC: e por conseq. AC = YE, &c. * Da mesma sorte se demonstra, que se o rayo de qualquer circulo CE, for para o rayo AC, de outro circulo, como a base da quadratriz para o seu lado; será este segundo rayo igual ao quadrante do primeiro circulo.

3. Do ditto se infere, que se pode exprimir por numeros [por via de approximação] a proporção da circunferencia para o diametro. Divida-se o quadrante AD em 90. gr. e cada grâo em 60. min. isto he, divida-se em 5400. particulas iguaes, e em outras tantas o rayo AC: e descreva-se segundo a ditta divisão a quadratriz AOE. Seja CV, huma destas segundas particulas; e tirem-se as rectas VX, CX. He manifesto, que pela insensivel differença, que em tam pouca distancia tem entre si as parallelas VX, CE, se pode tomar huma por outra: logo se no triangulo rectangulo CVX [em que

o an-o angulo X, he de hum minuto, e o complemento C de 89. gr. 59. min.] se tomar o lado CX, de 10. 000,000. particulas; e se resolver o triangulo pelas regras da *Trigonometria*, tocarão ao lado VC, 2909. e ao lado VX, ou CE, seu igual, 9 999,999: logo, multiplicando 2909. por 5400. tocarão ao lado AC; isto he, ao quadrante YE (*Cor. ant.*) 15. 708,600; e â semi-circunferencia 31. 417,200. Cujo denominador (§. 2. do *App. do l.* 5.) he $3.\frac{1417203}{9999999}$. ou $3.\frac{157467}{1111111}$. [partidos por 9. os termos do tracto] isto he, será a ditta proporção tripla sesqui-septima; e mayor que a verdadeira, como demonstrou *Arquimedes*.

* Se se quizer outro calculo mais exacto, resolva-se o ditto triangulo CVX, supponđo o angulo X, de hum minuto segundo, e o angulo C, de 89. gr. 59. min. e 59. segundos; e tomem-se das Taboas grandes de *Vlacq* os senos respectivos, &c. Eu tomando o seno de 10. segundos das Taboas de *Bonaventura Cavalieri*, achey que a razão do rayo para o quadrante, era como 10. 000,000. para 15. 714,000; e a do diametro para a circunferencia, como 10. 000,000. para 31. 428,000. que reduzida a numeros pequenos, he a mesma de que usa *Ricciolo*; isto he, de 100, para 314.

PROPOSIÇÃO V. *Probl.*

Dado hum circulo, construir hum quadrado igual.

COnsta da 5. de *Arquimedes Cor.* 1. que o circulo he igual ao rectangulo, comprehendido do rayo, e da metade da circunferencia: rectifique-se pois pelo *Cor.* 2. *da ant.* a semi-circunferencia do circulo proposto; e ache-se entre ella, e o rayo huma media proporcional (13.6.) será esta o lado do quadrado, que se pede (17.6.) * O modo practico de rectificar qualquer semi-mi-circunferencia, por meyo da quadratriz, he fazer como a base CE ao lado AC, assim o rayo do circulo proposto a hum 4. termo (12. 6.) este dobrado serà igual â metade da ditta semi-circunferencia (*Cor.* 2. *da ant.*) Porem mais facilmente se pode rectificar a ditta semi-circunferencia, e quadrar o circulo, por meyo de 2. instrumentos muy expeditos na forma seguinte.

1. Descreva-se em huma lamina hum angulo recto: transfira-se para qualquer dos lados a base da quadratriz CE, e para o outro o lado da mesma AC. Se o circulo, que se quizer quadrar, tiver o rayo igual â base CE, serà AC o seu quadrante, e o duplo a sua semi-circunferencia: porem se for mayor, ou menor, como CG, tirada a recta AE, tire-se a parallela GF; e serà CF o seu quadrante &c. Fig. 3.

2. Tirada â descripção a recta EA, e levantada de qualquer ponto C, a perpendicular CD; transfira-se a base da quadratriz de C em E, e duas vezes o lado de C em A: corte-se pelo meyo a recta EA, e descreva-se do ponto medio X, hum semicirculo, o qual corte a perpendicular em D. Digo que a recta CD, he o lado do quadrado igual ao circulo, cujo rayo he CE. Tudo consta do que fica ditto; por ser CD, media proporcional entre CE, e CA; lados do rectangulo, à quem he igual o circulo &c. Agora, se se der outro circulo, cujo rayo for mayor, ou menor que CE, como CG, não ha mais que tirar as parallelas GO, OF, aos lados ED, DA, &c. Fig. 4.

* Advirta-se que para se dividir qualquer destes instrumentos com toda a precisão, se pode recorrer ao *Cor.* 3. *da ant.* tomando CE, de 10.000. particulas, e CA de 15 714. no primeiro instrumento, ou de 31.428. no segundo.

PROPOSIÇÃO VI. *Probl.*

Fig. 4. *Dado hum quadrado, deſcrever hum circulo igual.*

CONſtr. Seja S, o lado do quadrado propoſto. Transfira-ſe eſte para a perpendicular do ſegundo inſtrumento, de C atè O; e tirem-ſe as parallelas aos lados GO, OF: ſerà CG, o rayo do circulo, que ſe pede. Conſta do ditto.

COROLLARIO.

DAqui ſe ſegue, que ſe pode exhibir hum circulo igual a qualquer figura rectilinea; ſe eſta ſe transformar em hum quadrado pela 14. do 2.

PROPOSIÇÃO VII. *Probl.*

Fig. 3. *Dada huma recta, exhibir huma circunferencia igual.*

COnſtr. Tome-ſe a quarta parte da recta dada, e transfira-ſe ao 1. inſtrumento de C atè F: tire-ſe a parallela FG; e ſerá CG, o rayo do circulo, cuja circunferencia he 4. vezes mayor que CF. Ou tambem: transfira-ſe a metade da ditta recta ao 2. inſtrumento, de C atê F, e corrão-ſe as parallelas GO, OF: ſerà CG o rayo &c. Fig. 4.

PROPOSIÇÃO VIII. *Probl.*

Dados 2. circulos desiguaes POZ, PNX; e dado no menor hum arco OZ, cortar da mayor hum outro arco igual. Fig. 12. de Arquimedes.

C*Onstr.* Achada a differença dos rayos ON, divida-se o arco dado de tal sorte em V, que seja PO: ON = OV : VZ (2.) tire-se pelo ponto V, o rayo PX; e será NX, o arco que se pede.

Dem. Porquanto invertendo, ON : PO = ZV : VO, será compondo, PN : PO = ZO : VO : porem tambem PN : PO = XN : VO : logo ZO : VO = XN : VO; e por consequencia ZO = XN. *Q. E. &c.*

Não he differente a praxe, quando o arco dado fosse no circulo mayor, e se buscasse o igual no menor.

DIATRIBA

DIATRIBA
DO PONTO, E DA UNIDADE.

ESTA' tam connexa a *Geometria* com a *Fysica* na composição do *Continuo*; que me pareceo necessario dar aqui alguma luz do differente modo, com que huma, e outra considerão a Quantidade; para que não se persuadão os principiantes, que as difficuldades insuperaveis, que encontra a *Fysica* naquella composição, enfraquecem de algum modo as Demonstrações Geometricas.

§. I.
Do Ponto.

PAra que se entenda melhor o que heide dizer, supponho, que a difficuldade principal da composição do *Continuo* consiste, em se as suas partes na ultima divisão são indivisiveis, ou não? Isto he, se feita a divisão atè os ultimos termos, a que

pòde

pòde chegar a arte, ou a imaginação; se chega finalmente à partes átomas, e fysicamente indivisiveis: ou se quaesquer, que se tomem por ultimas, são essencialmente divisiveis em outras menores, e menores &c? *Zenão* levou a primeira sentença: *Aristoteles* a segunda: porèm huma, e outra està envolta em huma tal cegueyra de paradoxos, que verdadeiramente he confusão do engenho humano, vèr como entre duas sentenças, que parecem contradictorias, não pode tomar partido. Pelo que respeita à Mathematica huma cousa he certa; e he, que sendo tam facil explicar na primeira sentença, que couza he ponto; isto he, huma parte sem partes, ou parte indivisivel, como diz a 1. *Def. dos Elementos*: na segunda não sómente he difficil, senão totalmente impossivel: porque que parte se pòde considerar sem partes em huma sentença, em que não hà parte tam átoma, que não conste essencialmente de infinitas outras; ao menos em *potencia*, como sente *Aristoteles*?

As Demonstrações Geometricas tanto parece que favorecem a huma, como à outra sentença: antes parece que suppoem huma, e outra. Porquanto, deixando à parte alguns Theoremas da *Geometria Superior*, como são os accessos dos Assymptotos, e das Espiraes; as evoluções das Conchoides, e outras muitas, sómente nos *Elementos*, e sem passar da *Prop.* 13. *do l.* 3. achamos fundamentos ineluctaveis tanto pela indivisibilidade, como pela divisibilidade do *Continuo*. Diz *Euclides* na *Prop. cit.* que
Fig. 16. do l. 3. o circulo toca huma recta indivisivelmente, e em hum só ponto O: logo da continua rotação do circulo pela ditta recta se segue, que tanto ella, como a circumferencia do circulo não constão mais que de indivisiveis. Diz logo no *Cor.* 4. da mesma *Prop.* que tirada huma recta CB, do centro do circulo a

qualquer

qualquer ponto da ditta recta, não ha parte nella, por pequena que seja, que não seja divisivel em outras menores partes: logo o *Continuo* consta de partes. Temos pois, que a *Geometria* não sómente favorece a ambas as opiniões, senão que em vez de evitar as difficuldades, ao menos de huma dellas; se involve nas difficuldades de ambas; e o que mais he, que sendo as conclusões de huma, e outra incertas, e imperceptiveis, e pela mayor parte paradoxas; não pòdem os seus Theoremas ser tam infalliveis, como se suppoem nas Escholas, e reconhecerão sempre todos os Sabios.

Para acodir pois a esta difficuldade, serà todo o meu empenho dar aqui huma breve explicação daquella 1. *Def. dos Elementos*, e dizer em termos claros, em que consiste a indivisibilidade do ponto Mathematico. Digo pois, que o ponto Mathematico nisto se distingue do Fysico, que este (seja, ou não seja possivel) não tem partes, nem ainda pela nossa consideração: e o outro sómente pela nossa consideração he que as não tem; isto he, ou as tenha, ou as não tenha, considera-se como se as não tivesse. V.g. tome-se hũ estylo, e descreva-se com elle huma linha: digo que a ponta daquelle estylo (ou seja grossa, ou delgada) em ordem a geração daquella linha, se considera como indivisivel: e que só movendo-se, e como replicando-se em differentes lugares, he que se considera divisivel, extensa, e com partes; não em si, senão à respeito do espaço por onde se move; ou da linha que descreve. Do mesmo modo descreva-se com hum compasso (ou subtil, ou grosseiro) hum circulo: digo que a ponta immovel se considera como indivisivel; e a movel como divisivel, ao passo que se move. O que alguns explicão por estes termos: a quantidade immota, e parada, na consi-

conſideração Mathematica he indiviſivel, e inextenſa: movida he diviſivel, e extenſa; porque não ſe pòde conceber moto ſem extenſão, nem extenſão ſem moto, ao menos imaginario. A razão pois porque o Fyſico, e o Mathematico conſiderão tam differentemente a Quantidade, he, porque o Fyſico conſidera a natureza das couzas, e olha para ellas como por dentro: logo a elle toca inveſtigar, ſe as partes da Quantidade ſão indiviſiveis, ou não: o Mathematico não he aſſim; mede ſómente a Quantidade, e olha para ella como por fóra: logo ſó lhe toca ſaber donde começa, e a caba; e aonde tem os termos extrinſecos da ſua extenſão: os quaes, poriſſo meſmo que ſão termos, não ſe extendem mais para aquellas partes.

Suppoſto eſte principio, e fixando o diſcurſo naquella *Prop. cit.* vejamos como as Demonſtrações Geometricas não ſe embaração com as difficuldades do *Continuo*, nem recebem dellas a menor vacillação. He ſem duvida que, deſcripto hum circulo com qualquer compaſſo, por groſſo, que ſeja ſempre a ponta C, ao redor da qual ſe revolve o compaſſo, ſe pode conſiderar como indiviſivel: tanto porque não muda lugar, que he o meſmo que não ter extenſão; como porque para qualquer parte que ſe revolva, ſempre he termo commum de infinitas linhas iguaes; ou eſtas comecem da parte de dentro, ou da parte de fóra da ditta ponta, ou do meyo della. A outra ponta O, em quanto
Fig. 16. eſtà parada, tambem ſe pòde conſiderar como indi-
do l. 3. viſivel pela meſma razão: porèm a penas ſe move, jà começa a deſcrever linha, que he o arco intermedio entre hum, e outro termo.

Supponhamos agora, que ao meſmo paſſo, que o ponto O, ſe começa a revolver ao redor do centro C, eſ move do meſmo ponto hum eſtylo pela recta OB, perpendicular ao rayo CO: tambem' he ſem duvida, que ambas eſtas linhas recta, e curva ſe não podem ajuntar adequadamẽte,ſenão naquelle ponto O; por correr cada huma para differente parte, e ſer impoſſivel, que ſe ache o meſmo ponto em dous lugares. Pois iſto he, o que quer dizer *Euclides* naquella *Prop.* diz que a linha recta, e a circular não podem concorrer mais, que em hum ſó ponto total; porque ao meſmo paſſo, que caminhão para differentes partes, ſe deſencontrão.

Agora: que o ditto ponto ſeja fyſicamente indiviſivel, ou não: iſſo não diz *Euclides*, nem pertence ao Mathematico: porque, como diſſe, a este ſó pertence ſaber o termo extrinſeco, donde começão as linhas: e donde, tirado do centro o rayo CO, tem ſeu principio extrinſeco aquelles 2. motos. Não duvido, que ſe ſe tomar outro eſtylo mais ſubtil, e outro compaſſo mais delicado, naquelle meſmo ponto, que dantes ſe tomava como indiviſivel, ſe poſſão diſtinguir 2. motos, circular, e recto: porem ſempre ſe verificarà, o que diz *Euclides*; iſto he, que o termo extrinſeco, ou intrinſeco total, não pòde ſer mais que hum; porque o meſmo he mover-ſe o ponto, que diverſificarem-ſe as linhas; e tomar cada huma para differente parte.

Dirão, que aquelle contacto he fyſico, e real: logo a parte, em que o circulo toca a recta, ou hade ſer realmente diviſivel, ou indiviſivel. Reſpondo, que iſſo toca ao Fyſico dizer o que he; porem não ao Mathematico, que não tem mais fim que medir a Quantidade, determinados extrinſecamente os termos da ſua extenſão. Se a Quantidade conſtar de indiviſiveis, dirá que aquelle contacto he indiviſivel: ſe de partes, dirà que he parte; porèm huma parte tal, que por mais groſſeira que ſe conſidere, nunca movida hade ſer recta, e circular; porque do meyo della ſe haõ de começar a diverſificar os motos; ou eſſe meyo ſeja poſitivo, ou negativo; iſto he, ou ſeja indiviſivel fyſico, ou imaginario.

Na ponta fixa do compaſſo temos hum bom exemplo. Não he pequena duvida na *Fyſica* reſolver, ſe hum indiviſivel ſe pode mover circularmente, ou não? Porèm ſeja o que quer que for do indiviſivel fyſico: do mathematico não póde haver a menor duvida. He certo, que do centro à circumferencia vay ſempre o meſmo intervallo, como aquelle que depende da meſma abertura do compaſſo: logo ſe a ponta do compaſſo for indiviſivel, ſerá o centro indiviſivel, e moverſe-ha circularmente; e ſe não, ſerà hum centro negativo, ou imaginario, conſiderado no meyo da ponta fixa: a qual para qualquer parte, que ſe mova, ſempre leva adiante de ſi a ſua metade: o que he innegavel, pois tanto o moto, como a equidiſtancia ſão evidentes.

O 4. *Cor.* naõ he mais que huma ſequéla do ditto: porquanto, por mais groſſeira que ſeja a ponta movel do compaſſo, nunca he poſſivel, que a ditta ponta ſe ache em dous lugares adequadamente diſtinctos; ou que o ſeu meyo imaginario eſteja em 2. diſtinctas circumferencias: ſobpena de ſe admittir o contradictorio, que inſinua a Demonſtração.

Finalmente tanto do ditto, como da doutrina das *Linhas incommenſuraveis* (da qual trata *Euclides ex profeſſo* em todo o l. 10. e cujo myſterio quaſi ſe toca com as mãos na diagonal do quadrado; e nas partes da linha cortada em media, e extrema razão) ſe ſegue, que as Demonſtrações Geometricas favorecem mais a ſentença de *Ariſtoteles*, que a de *Zenão*: porém advirto que na opinião dos ſeus melho-

res

res commentadores, *Ariſtoteles* nunca admittio no *Continuo* partes diſtinctas com a ſua ultima actualidade, ſenão ſómente communicantes, potenciaes, e indeterminadas, e *Syncathegorematicè* infinitas: de que ſe ſegue, pelo que toca ao contacto, que aquelle ponto em todo o rigor fyſico ſó he indiviſivel *extrinſecè*, e naõ *intrinſecè*; como todo o termo da Quantidade: o que ſe à alguns parece paradoxo; podem eſtar certos, que não parece aſſim à outros: nem ſey que ſeja melhor arbitrio eſcolher antes as contradições, por ſerem mais claras.

§ 2.

Da Unidade.

A Unidade não he mais, que huma ſombra do Ponto mathematico: e aſſim, álem do ditto, pouco mais ha que dizer. Ao *Hum* definem os Filoſofos: *Indiviſum in ſe, & diviſum à quovis alio*: iſto he, o que ſe conſidera ſem partes, e diſtincto de qualquer outro. Eſtas unidades repetidas conſtituem numero, que he objecto da *Arithmetica*: a qual, como ſombra da *Geometria*, vay contando por unidades, o que a outra mede por partes. Porém aſſim como as medidas geometricas ſão 3. a ſaber, *Longura*, *Largura*, e *Profundidade*: aſſim as unidades ſão em 3. differenças: *Unidade ſimplez*, *Unidade quadrada*, e *Unidade cubica*: a ſimplez ſerve para as linhas, a quadrada para as ſuperficies, e a cubica para os ſolidos, ou corpos.

Qualquer deſtas unidades na ſua eſpecie he como o ponto: iſto he, huma parte ſem partes ſegundo a noſſa conſideração: porèm iſto não tira, que em outra conſideração as não tenha, deixando poriſſo meſmo de ſe conſiderar como unidade. V.g. huma vara tem 5. palmos, e cada palmo 8. polegadas: em quanto a vara he vara, he huma: em quanto palmos, he 5. e em quanto polegadas, he 40.

Conſiderada a unidade como dividida em partes, de 2. modos ſe podem eſtas manejar nas operações arithmeticas; ou como outras tantas unidades mais pequenas, ou como hum quebrado da 1. unidade. Na primeira conſideração não ſe diſtingue o ſeu manejo do dos numeros vulgares; porque tanto importa multiplicar 4. varas por 3. como 20. palmos por 15. &c. Na ſegunda pòde cauſar alguma perplexidade aos principiantes, vèr como na multiplicação ſaya muitas vezes o producto menor, que o numero multiplicado: e na diviſão ſaya o quociente mayor, que o numero dividido. Porèm tudo iſto naſce de ſe não perceberem bem os termos da multiplicação, e diviſão: porque ſe ſuppoem commũmente, que a multiplicação ſempre augmenta o numero multiplicado; e que a diviſão o diminue; o que he falſo, e ſó ſe verifica em numeros inteiros.

Para intelligencia deſtas 2. operações havemos de ſuppor, que multiplicar 3. por 4. não he mais, que tomar tantas vezes 3. quantas 1. ſe inclue em 4. E pela meſma razão, multiplicar 3. por $\frac{1}{4}$. ou $\frac{1}{4}$. por 3. não he mais, que tomar a quarta parte de 3. ou tomar tantas vezes $\frac{1}{4}$. quantas 1. ſe inclue em 3. Do meſmo modo dividir 12. por 4. he partir o numero 12. de tal ſórte em 4. partes, que cayba huma dellas a cada hum dos 4. e dividir 3. por 4. he partir de tal ſorte o numero 3. em 4. partes, que cayba hũma dellas a cada hum dos 4. o que ſe faz facilmente, partindo cada unidade por 4. e tomando $\frac{1}{4}$. para cada hum. Temos pois que multiplicar, ou partir, não he mais que buſcar hum quarto proporcional a 2. numeros dados, com reſpeito à unidade: iſto he, na multiplicação, que ſeja a unidade para qualquer dos numeros, como o outro para o producto: e na diviſão, que ſeja hum numero para o outro, como o quociente para a unidade. Donde ceſſa a admiração dos principiantes, ſe multiplicando-ſe 12. por $\frac{1}{4}$. he o producto 3. e dividindo-ſe 3. por $\frac{1}{4}$. he o quociente 12. Porquanto na multiplicação, ou ſe toma ſómente a quarta parte de 12. ou 12. vezes $\frac{1}{4}$: e na diviſão, claro eſtà que, ſe ſe dão 3. à $\frac{1}{4}$. ſe haõ de dar 12. à 1.

Porém deixando eſtas conſiderações de menor importancia para os principiantes; o que mais admira nas unidades, he que tambem nellas ſe acha aquella incommenſurabilidade, que ſe acha nas partes da Quantidade; razão porque no 5. l. diſſemos, que as Proporções Irracionaes erão aquellas, que ſe não podião explicar por numeros; porque nem havia medida commua, que as mediſſe; nem fracto, que as explicaſſe. Seja V. g. hum quadrado de 25. palm. cuja raiz he 5. e ſeja outro de 50. igual a 2. do primeiro (como ſuccede no quadrado da diagonal à reſpeito dos dos lados) Digo que por mais que ſe divida a unidade em partes decimas, centeſimas, milleſimas, e millioneſimas; nunca jà mais ſe virà a huma, cujo numero quadrado iguale aquelles 2. divididos tambem em iguaes particulas: o que verdadeiramente he admiravel.

F I M.

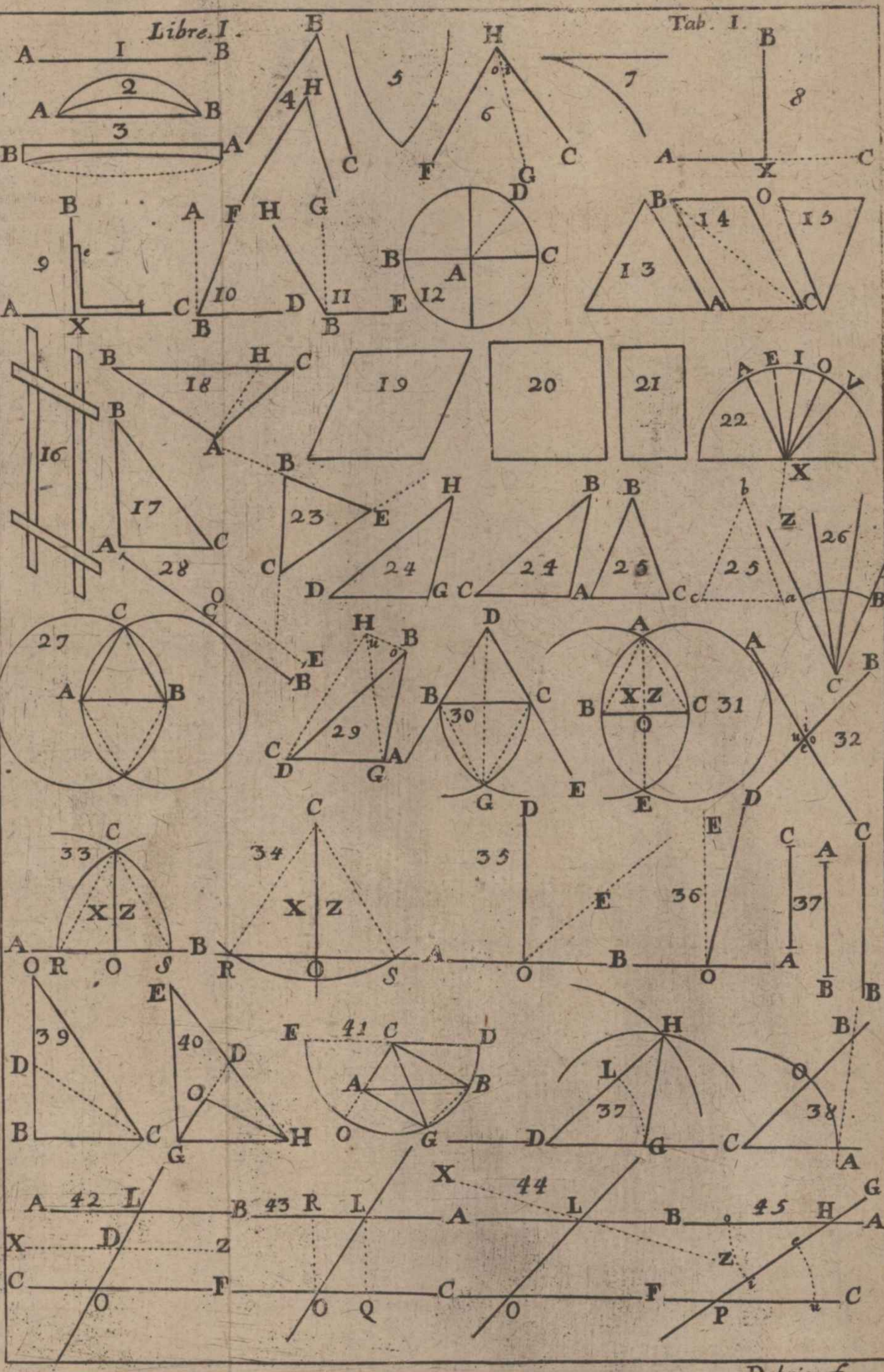
E R R A T A S.

Na Prolusão.

Pagina 4. Linha 1. moti	Lea	motivo
pag. 6. lin. 21. Delfico	lea	Deliaco

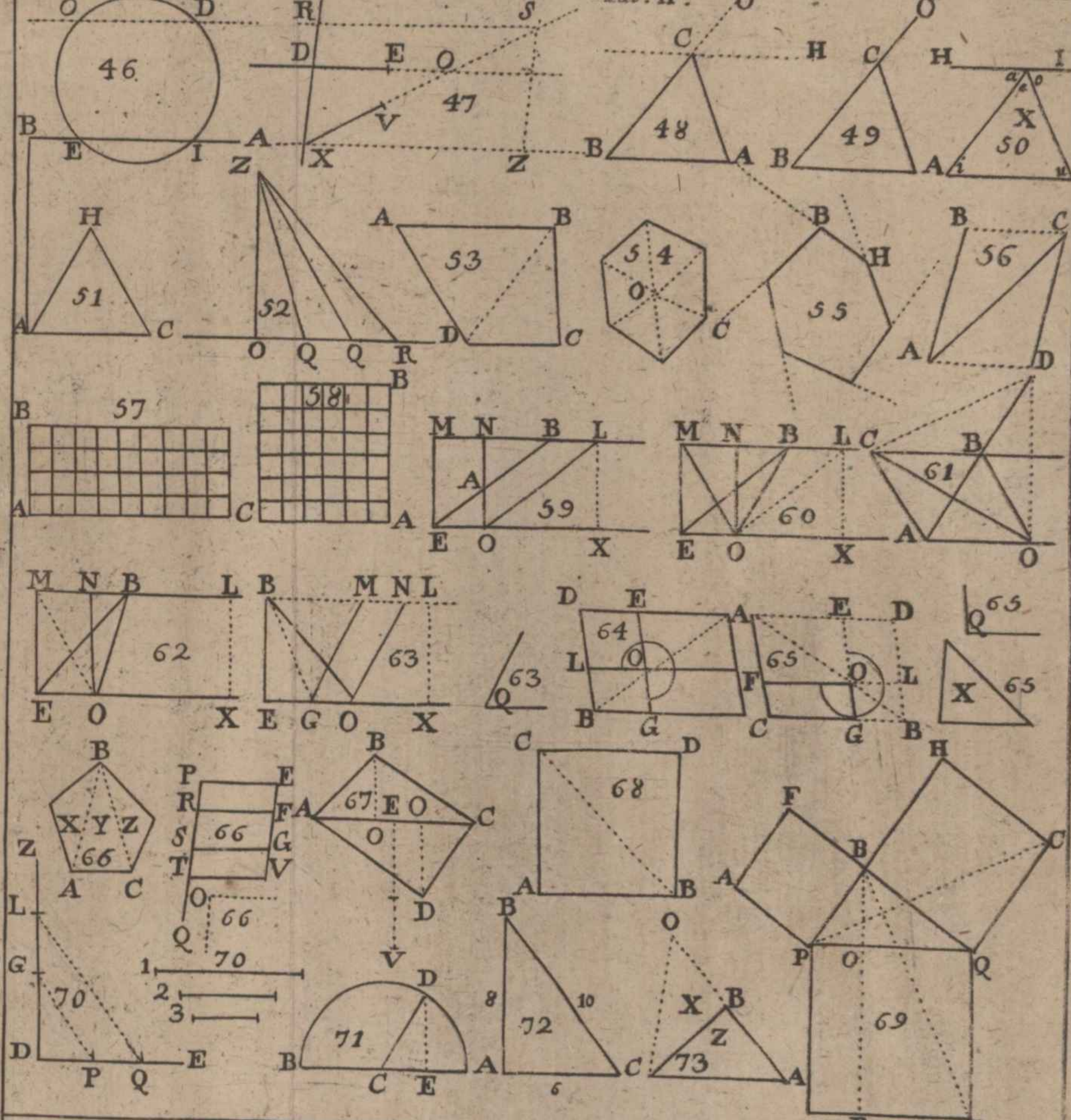
Nos Elementos.

Pagina 1. Linha 8. regiſtar	lea	regiſtrar
pag. 9. lin. 13. da ditta Prop. 29.	lea	da Prop. 31.
pag. 23. lin. 23. Prop. XXIV.	accreſcente, e	XXV.
pag. 56. lin. 12. ua	lea	na
pag. 113. lin. 15. poueco	lea	pouco
pag. 131. lin. 23. devididos	lea	divididos
pag. 168. lin. 10. dê	lea	de
pag. 176. lin. 2. 34.	lea	Fig. 34.
Ibidem lin. 18. Ax. 2.	lea	Ax. 1.
pag. 185. lin. 22. iguaes	lea	parallelos
pag. 187. lin. 27. perdicular	lea	perpendicular
pag. 189. lin. 18. [CB	lea	CB[
pag. 200. lin. 10. ja	lea	ſeja
pag. 209. lin. 11. porporções	lea	proporções.
pag. 233. lin. 11. Frranciſco	lea	Franciſco
pag. 261. lin. 10. decaëdro	lea	dodecaëdro
pag. 270. lin. 13. 7:223.	lea	71:223.
pag. 175. lin. 24. Propofições	lea	Propoſições
pag. 281. lin. 21. que,	lea	, que
pag. 282. lin. 26. ſeu	lea	ſua
pag. 284. lin. 6. e 7. an-os	lea	angulos
pag. 309. lin. 16. Teor.	lea	Theor.

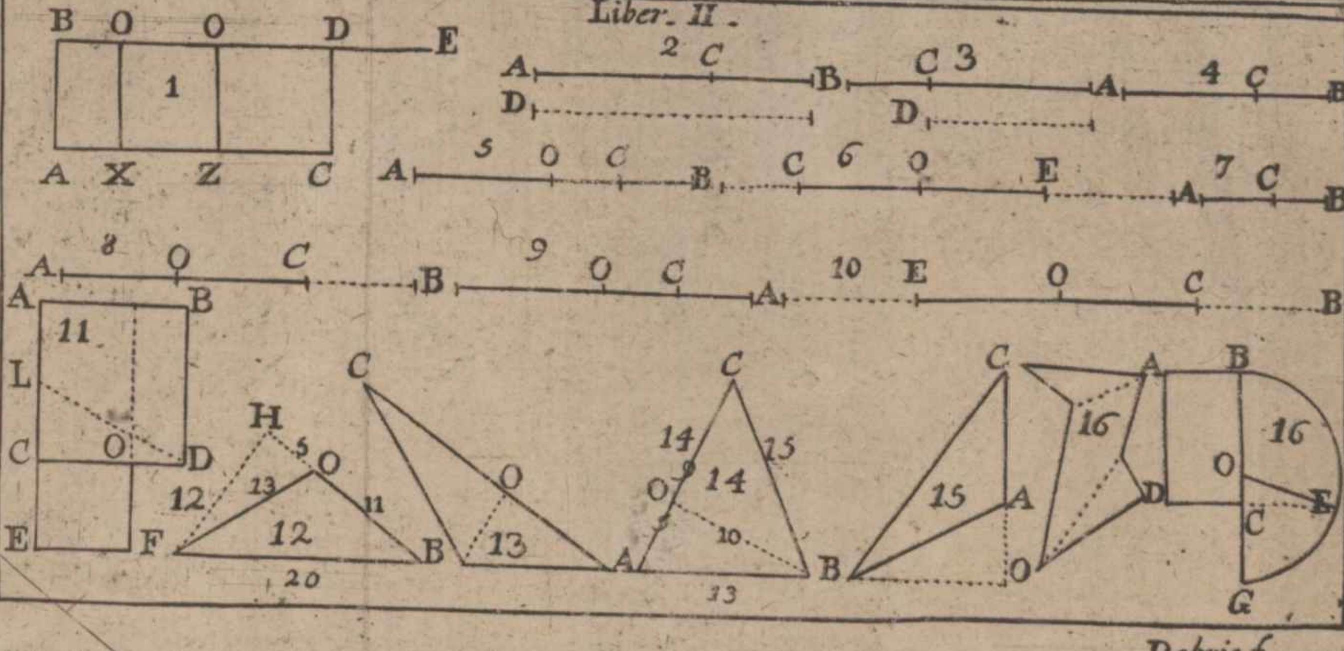


Debrie. f.

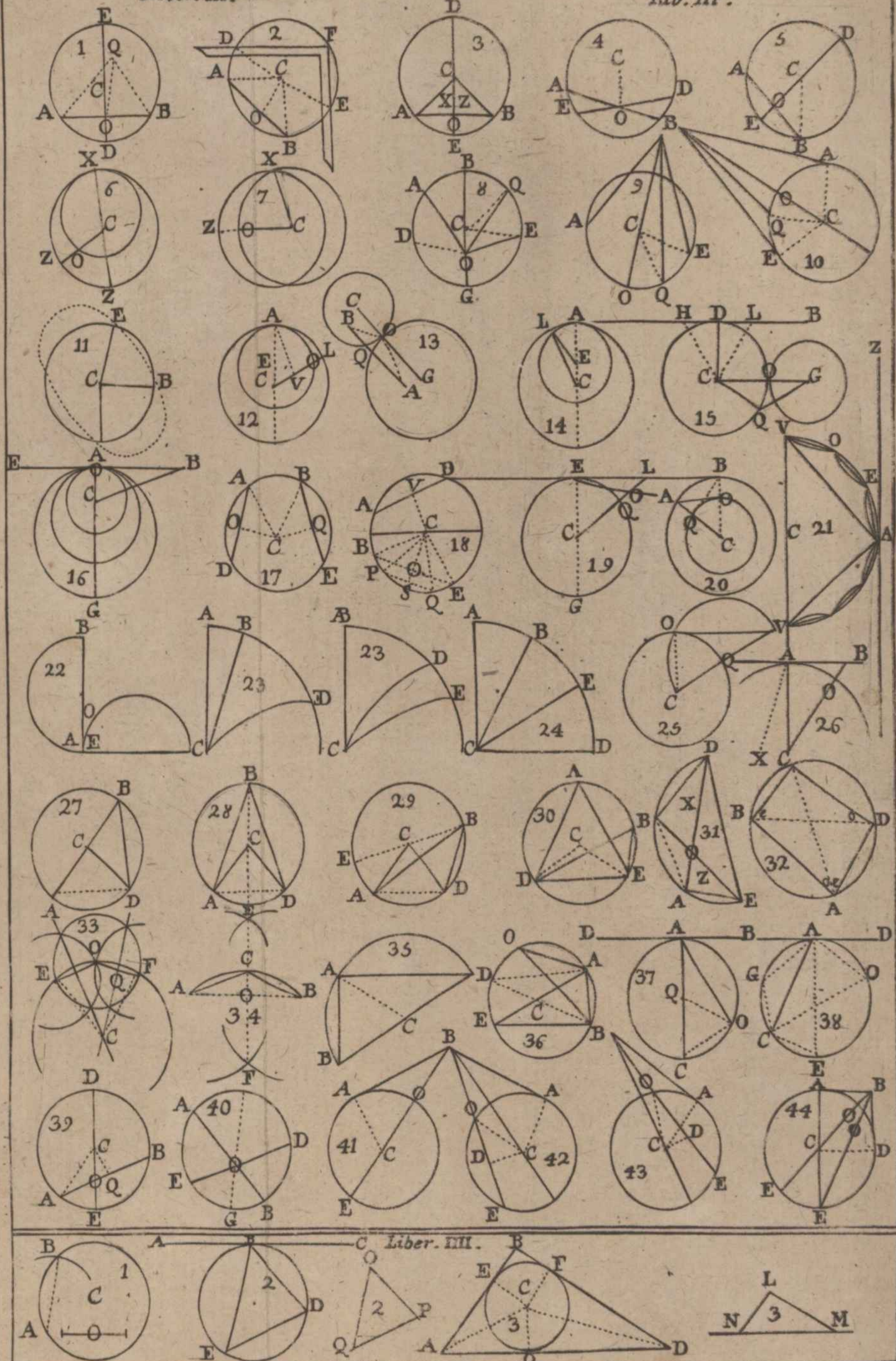
Tab. II.



Liber. II.

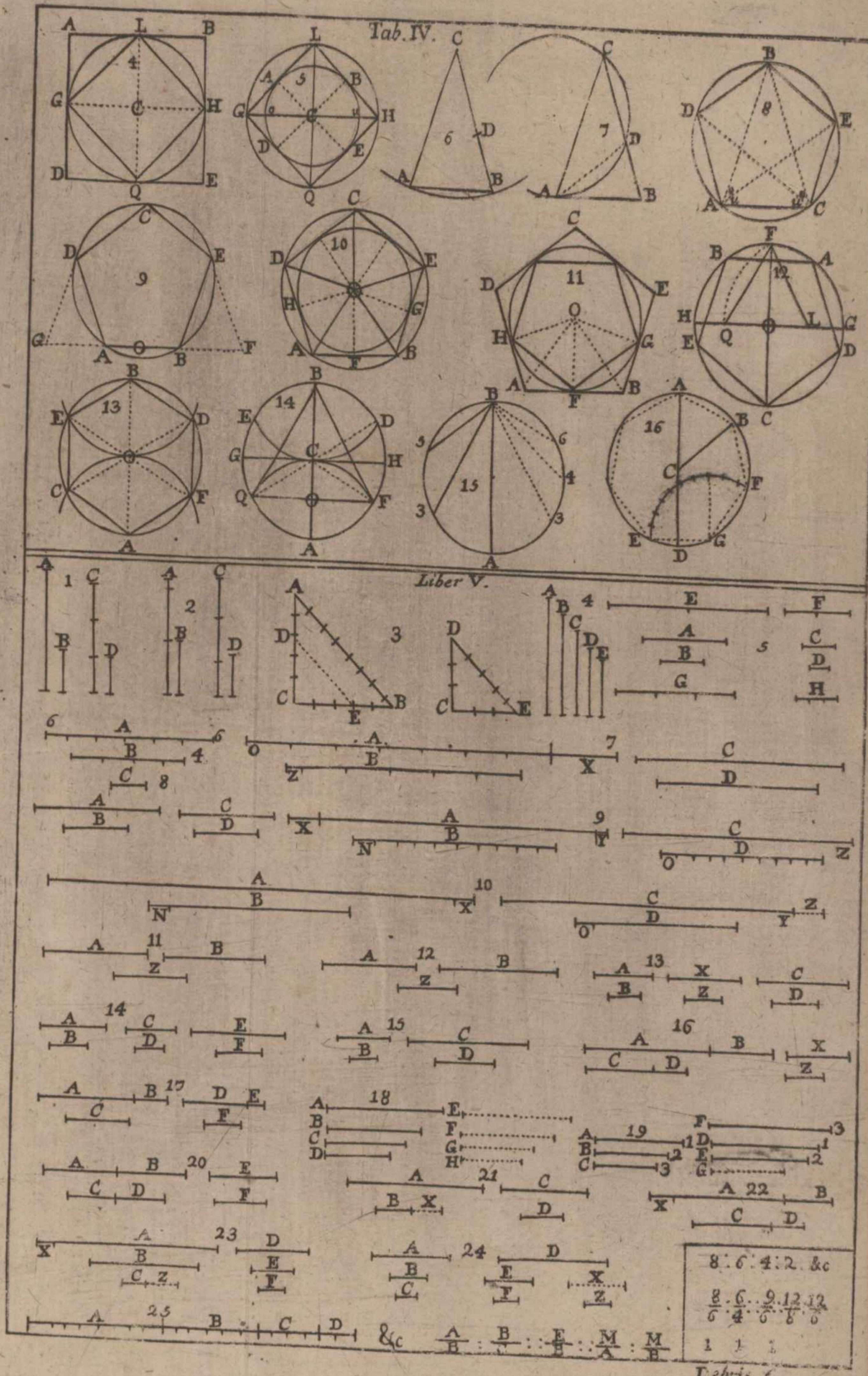


Debrie f.

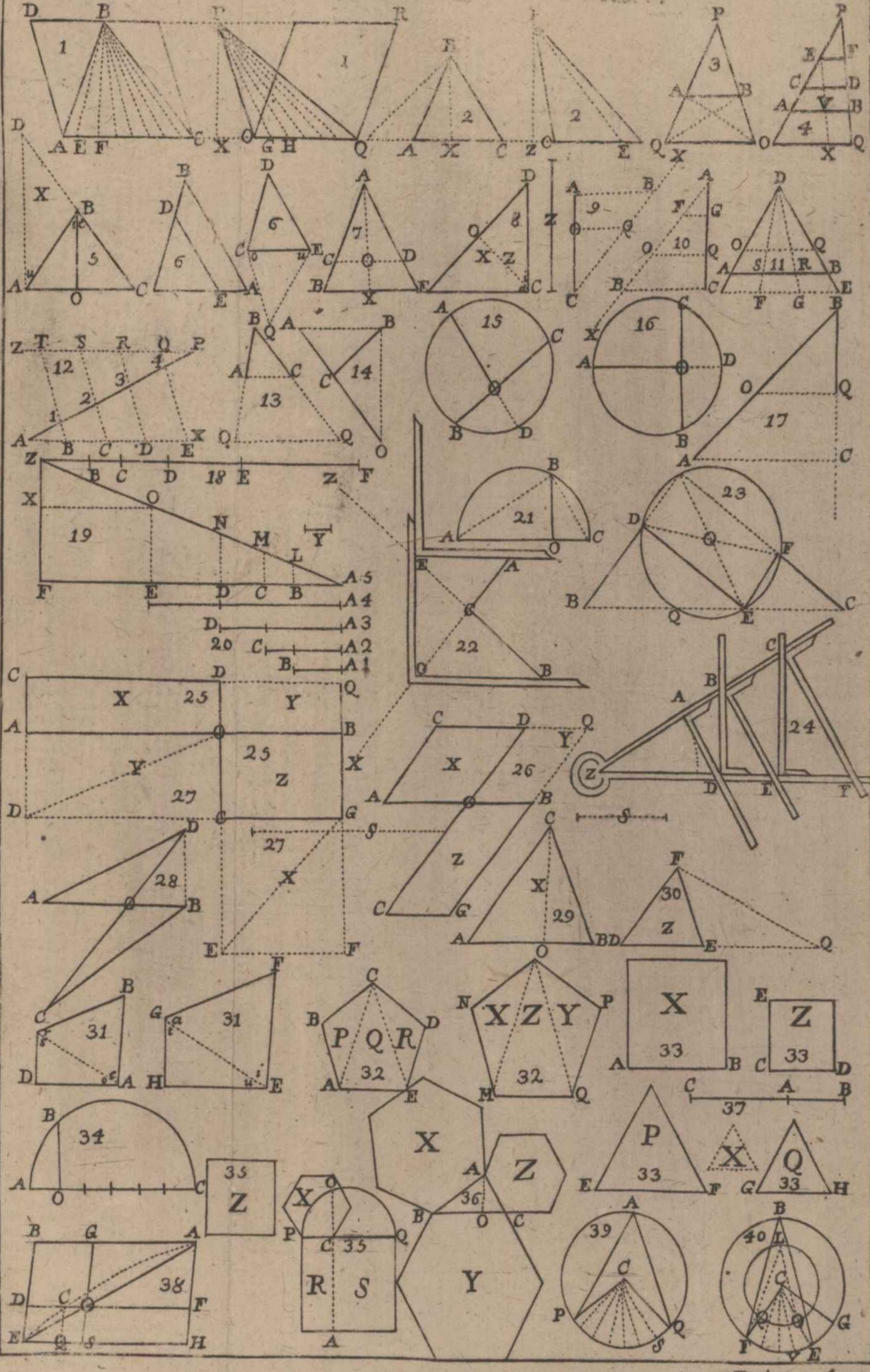


Liber. IIII.

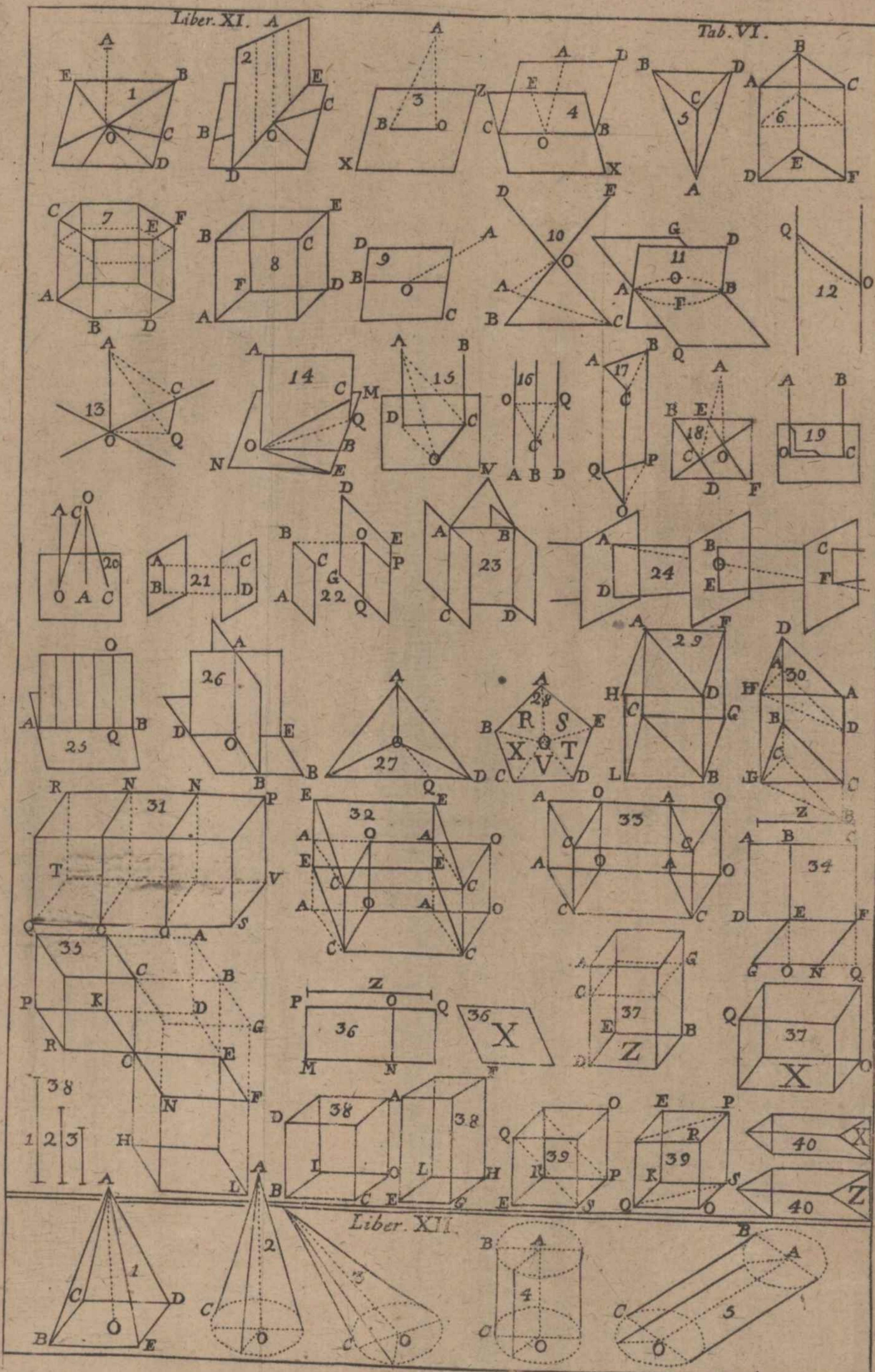
Debrie f.



Debrie f.

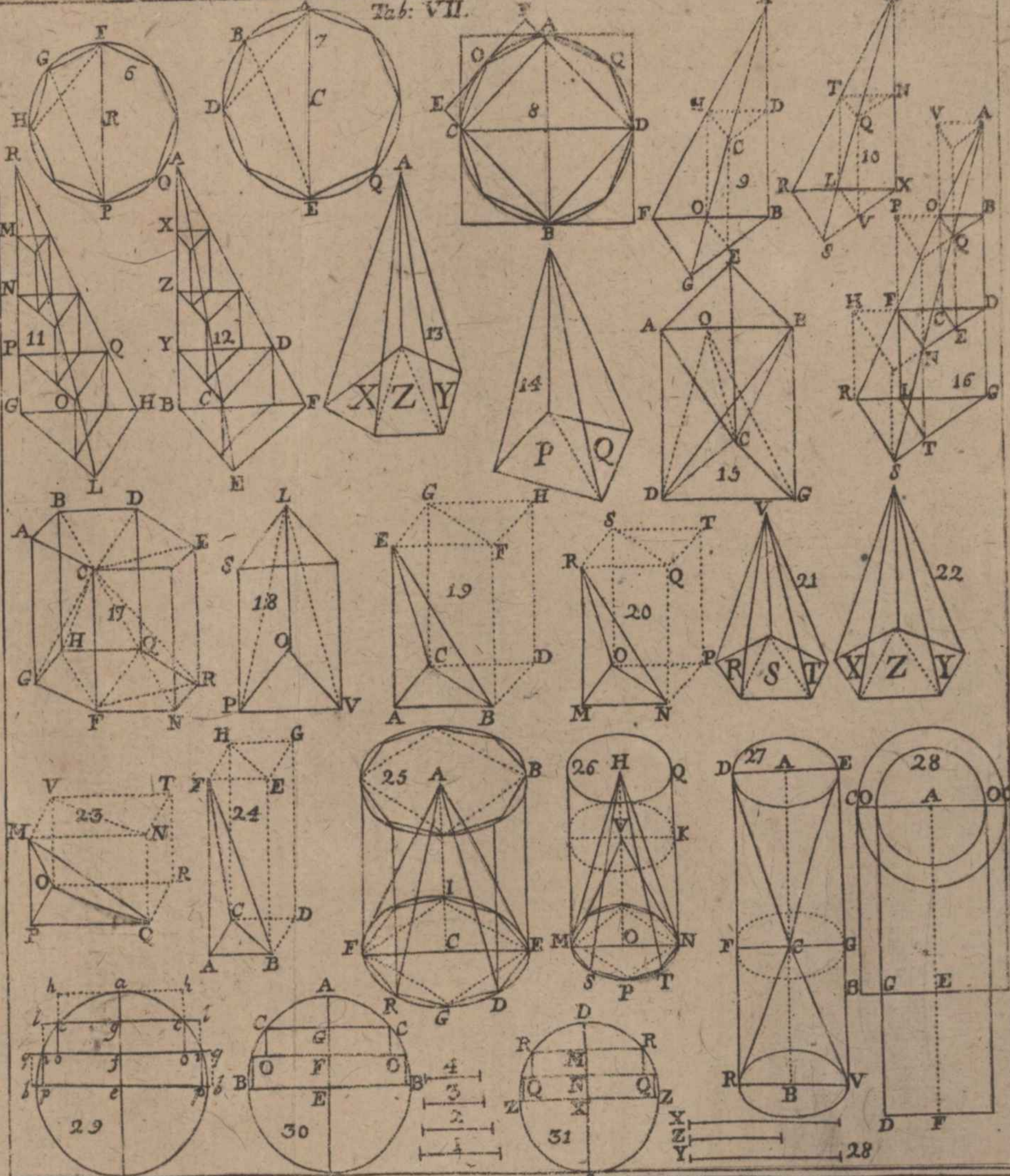


Debrie f.

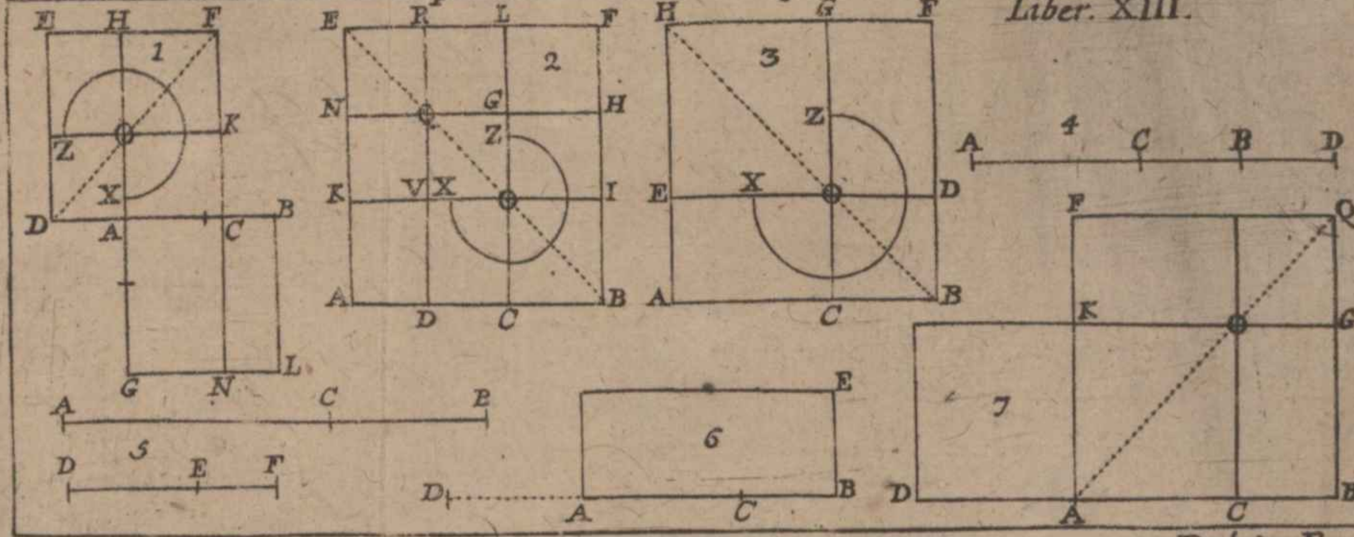


Debrie. f.

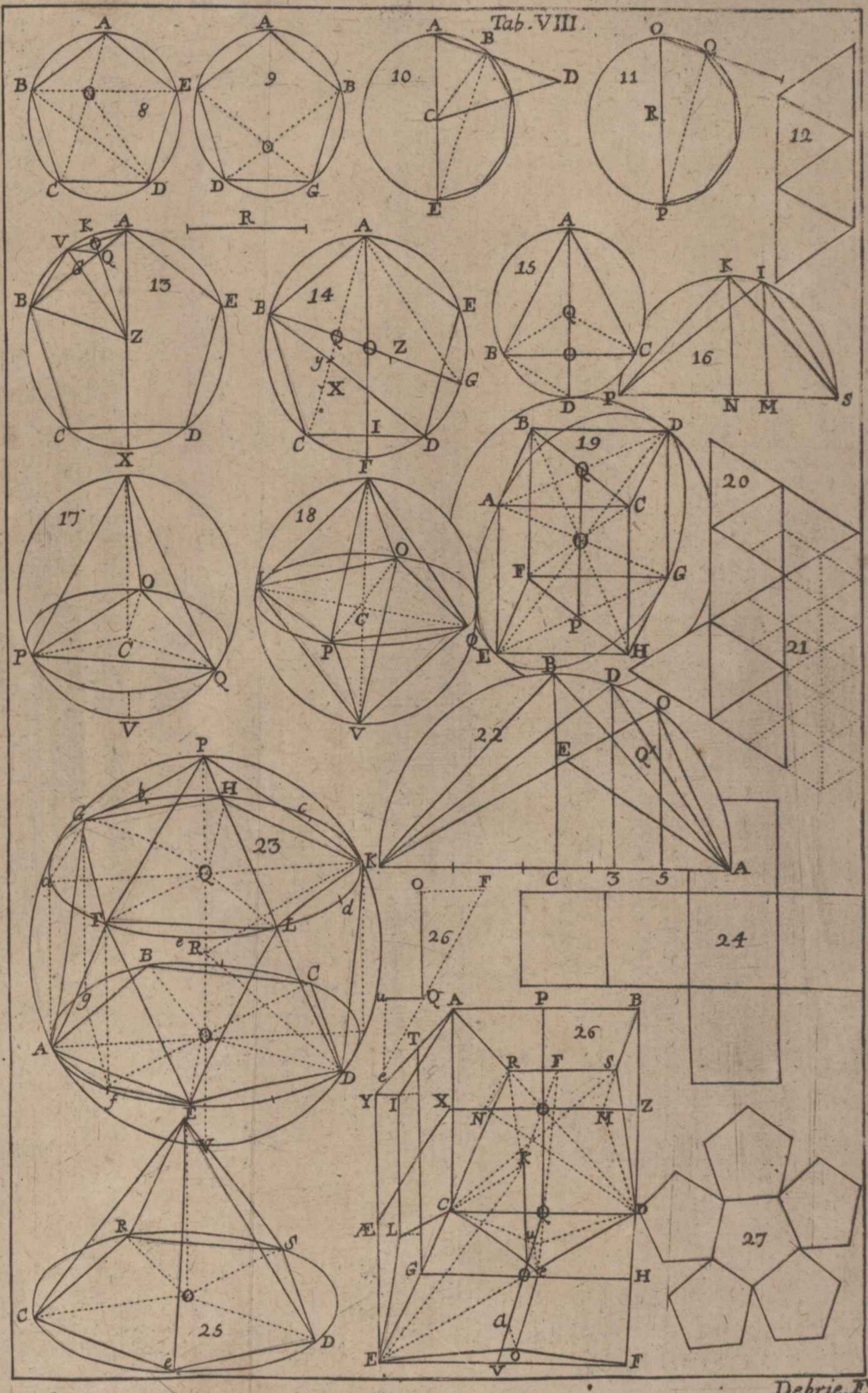
Tab: VII.



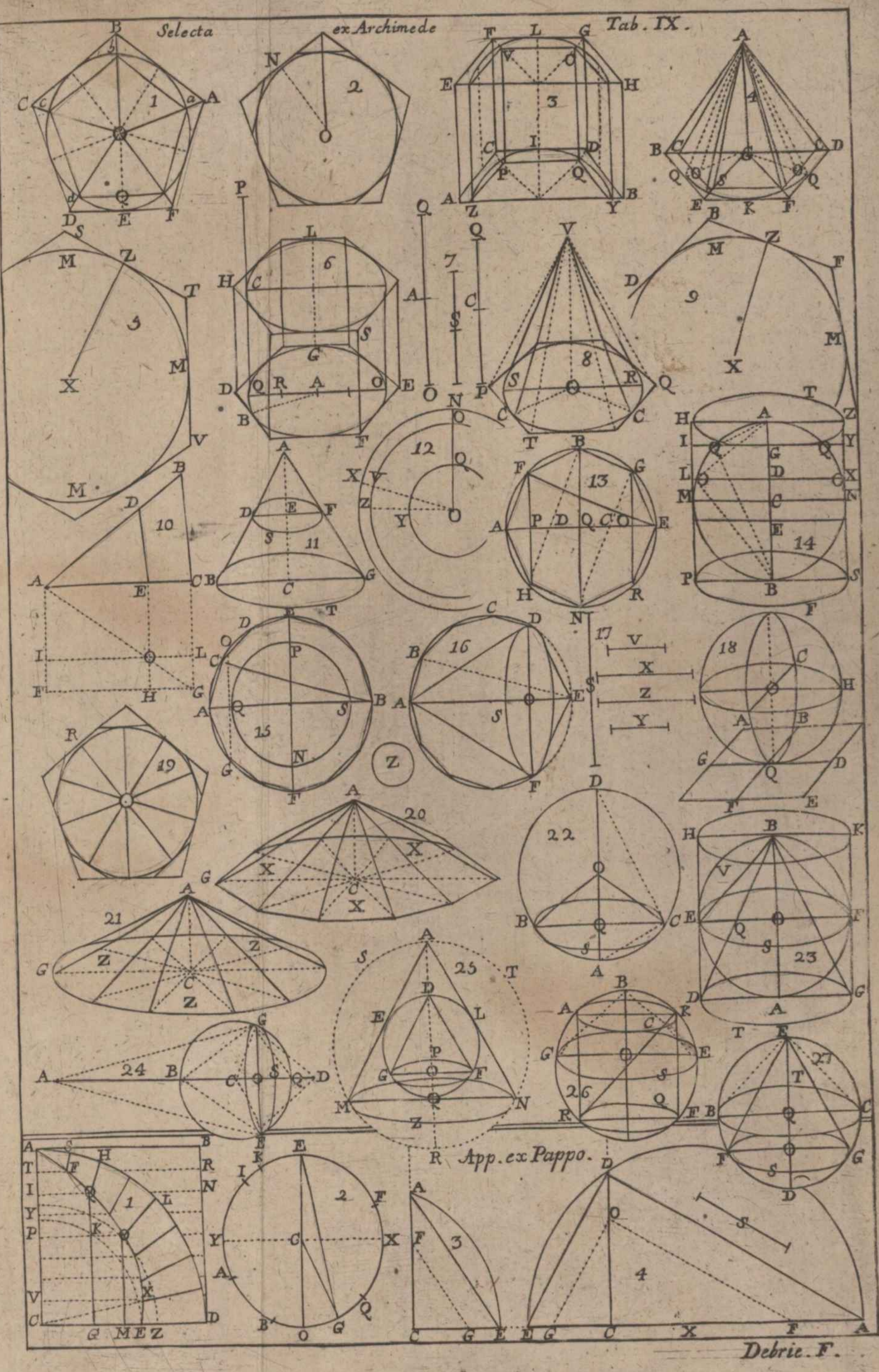
Liber. XIII.



Debrie. F.



Debrie. F.



Debrie. F.