Alguns Resultados da Robustez de um Método de Amostragem Adaptativo em Controlo de Qualidade

Manuel do Carmo
Universidade Europeia, Laureate International Universities,
CIMA-UE, *manuel.carmo@europeia.pt*

Paulo Infante
DMAT/ECT e CIMA-UE, Universidade de Évora, *pinfante@uevora.pt*

Jorge Mendes
ISEGI-NOVA, Universidade Nova de Lisboa,
CEAUL-FCUL, *jmm@isegi.unl.pt*

Palavras–chave: Robustez, Simulação, Amostragem Adaptativa, Controlo de Qualidade

Resumo: Apresentámos, anteriormente, um novo método, adaptativo, que utiliza a função de *Laplace* para definir intervalos de amostragem. O método de amostragem, denominado *LSI (Laplace Sampling Intervals)*, mostrou bom desempenho quando comparado com o método clássico *FSI* e com o método *VSI*. Neste trabalho apresentamos um estudo que permite avaliar a robustez deste método numa perspectiva de avaliar o seu desempenho estatístico em condições diferentes daquelas que inicialmente foi concebido: num primeiro caso considera-se que o menor intervalo de amostragem não pode ser inferior a um dado valor fixo, por limitações do processo a ser monitorizado e, num segundo caso, que a característica da qualidade não segue uma distribuição normal. Este último caso é abordado, por um lado, assumindo uma mistura de normais com valores diferentes dos desvios padrão e considerando 3 níveis de contaminação e, por outro lado, assumindo que a característica da qualidade segue uma distribuição *t-Student*. Utilizando cartas para médias, tipo *Shewhart*, compara-se o desempenho do método *LSI* com o dos métodos *FSI* e *VSI*. Os resultados, obtidos por simulação, mostram que o método *LSI* apresenta bom desempenho e robustez na detecção de diversas alterações.

1 Introdução

Em 1924 *Shewhart* apresentou a primeira carta de controlo para médias. Este tipo de cartas tornou-se popular na avaliação da variabilidade da qualidade de um qualquer produto ou serviço, pois permite a distinção entre variabilidade inerente ao processo e variabilidade oriunda de algo externo.

Como é conhecido, o tipo de carta a utilizar, que depende do contexto de operacionalização, assume um papel principal na concepção de um esquema de controlo de qualidade, onde se inclui a determinação dos instantes de amostragem, da dimensão amostral e dos múltiplos do desvio padrão nos limites de controlo. Nas cartas clássicas estes parâmetros são fixos durante todo o processo, mas estas têm pouca eficácia a detectar pequenas e moderadas alterações da qualidade. Para tentar ultrapassar essa desvantagem foram desenvolvidos, ao longo dos anos, diferentes métodos de amostragem: uns em que se fixam os instantes de amostragem no início do controlo do processo, designados métodos de amostragem predefinida ([2] e [13]), e outros que actualizam os parâmetros ao longo do controlo do processo, designados métodos de amostragem adaptativa ([12], [3], [11] e [4]). Alguns destes métodos têm aparecido ligados a aplicações práticas em diferentes áreas e usando diferentes tipos de cartas ([9]). Na generalidade, os métodos são concebidos considerando que a característica da qualidade tem distribuição normal, o que na realidade nem sempre acontece. Assim, interessa avaliar o desempenho dos métodos quando a característica em estudo não é normal. Esta temática tem chamado a atenção dos investigadores, dos quais destacamos os trabalhos de [1], [6], [7], [8], [9], [10] e [15], entre outros, que estudam a robustez de diferentes esquemas de amostragem considerando que a característica da qualidade não é normal e, por vezes, considerando diferentes estatísticas amostrais.

Neste contexto, e tal como em outros trabalhos já citados, considera-se que um método de amostragem em controlo de qualidade é robusto quando o seu desempenho estatístico é pouco ou nada afectado em situações diferentes das usuais. Na comparação entre dois métodos, o mais robusto é aquele em que o seu desempenho for menos afectado. Quando os métodos envolvem apenas instantes de amostragem variáveis, o desempenho estatístico é usualmente medido pelo tempo médio de mau funcionamento do sistema, denominado na literatura por *AATS (Adjusted Average Time to Signal)*, o que se faz também neste trabalho.

Na secção seguinte efectuamos uma breve apresentação do método *LSI* e das suas propriedades estatísticas mais importantes. Recordamos em que consistem os métodos *FSI* e *VSI* e, de seguida comparamos o desempenho dos três métodos truncando o menor intervalo de amostragem. Posteriormente consideramos que a distribuição da característica da qualidade é uma mistura de normais, com médias iguais e desvios padrão diferentes (caso que designámos por **NC**) e, por outro lado, que segue uma distribuição *t-Student*, com quatro graus de liberdade (caso que designámos por **sT**). Devido a dificuldades de tratamento analítico recorremos à simulação para obter resultados. Por fim, são tecidas algumas considerações finais e apresentadas algumas ideias de trabalho a desenvolver no futuro.

2 Os Métodos *LSI*, *FSI* e *VSI*

2.1 O método *LSI*

Sejam μ_0 e σ_0, respectivamente, média e desvio padrão da característica da qualidade X, que se admite ter distribuição aproximadamente normal. Seja t_i o instante de amostragem de ordem i e $\bar{x}_i$ a média da amostra analisada nesse instante. De acordo com o método de amostragem *LSI*, o próximo instante de amostragem (de ordem *i+1*) é dado por

$$t_{i+1} = t_i + \frac{k \cdot e^{-|u_i|}}{2}, \tag{1}$$

onde $u_i = \frac{\bar{x}_i - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$, $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{k}{2}$, $\bar{x}_0 = \mu_0$, $-L < u_i < L$, n é a dimensão da amostra e k uma constante conveniente de escala, dependente, em particular, de custos associados ao processo produtivo. Sendo u_i a média amostral reduzida, quando $|u_i| > L$ estamos numa situação de fora de controlo ou de falso alarme. Assim, os intervalos de amostragem, $d_i = t_i - t_{i-1} = k \cdot l(u_{i-1})$, $i = 1,2,3,\ldots$, onde $l(.)$ é a f.d.p. da distribuição de *Laplace* reduzida, são i.i.d. com a mesma distribuição da uma variável genérica D, definida por

$$D = t_{i+1} - t_i = \frac{k \cdot e^{-|u_i|}}{2}. \tag{2}$$

A ideia implícita ao método, adaptativo, é diminuir a frequência de amostragem quando as médias estão próximas da linha central e aumentá-la quando é maior a probabilidade de alteração da qualidade. Na prática, ao contrário de outros métodos adaptativos, necessitamos apenas de determinar a constante de escala k (considerando os limites de controlo fixos). Considerando os pressupostos para (1) e (2), uma carta para médias, e que, após alteração do processo, μ_0 e σ_0 podem assumir valores $\mu_1 = \mu_0 \pm \lambda\sigma_0$ e $\sigma_1 = \rho\sigma_0$, onde λ e ρ são, respectivamente, os coeficientes da alteração da média e do desvio padrão, obtemos para intervalo médio de amostragem, *E(D)*, a expressão

$$E(D|\lambda,\rho,n) = \frac{k}{2\beta}\left[e^{\lambda\sqrt{n} + \frac{\rho^2}{2}} \cdot A(L,\lambda,\rho,n) + e^{-\lambda\sqrt{n} + \frac{\rho^2}{2}} \cdot B(L,\lambda,\rho,n) \right], \tag{3}$$

onde β é a probabilidade de cometer um erro de tipo II, $A(L,\lambda,\rho,n) = \Phi\big(\frac{-\rho^2-\lambda\sqrt{n}}{\rho}\big) - \Phi\big(\frac{-L-\rho^2-\lambda\sqrt{n}}{\rho}\big)$, $B(L,\lambda,\rho,n) = \Phi\big(\frac{L+\rho^2-\lambda\sqrt{n}}{\rho}\big) - \Phi\big(\frac{\rho^2-\lambda\sqrt{n}}{\rho}\big)$ e $\Phi(u)$ é a função distribuição da normal reduzida. A expressão (3) é função de n, do coeficiente dos limites de controlo L, de λ e de ρ, mas não depende, directamente, dos valores da média nem do desvio padrão da qualidade. Considerando o processo sob controlo, $\lambda = 0$ e $\rho = 1$, e igualando (3) ao intervalo fixo (sem perda de generalidade, $d = 1$ em *FSI*), obtemos k dado por

$$k = \frac{\beta}{e^{1/2}\left[\Phi(L+1) - \Phi(1)\right]}, \tag{4}$$

que é igual a 3,8134 quando *L=3*, ficando o método definido.

Considere-se G como o intervalo de tempo entre o instante em que ocorre a falha do processo e o instante em que a primeira amostra é analisada. O tempo médio de mau funcionamento do sistema, $AATS$, é dado por

$$AATS_{LSI} = E(G) + \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right) \times E(D_{LSI}), \tag{5}$$

onde β é a probabilidade de ter um ponto entre limites de controlo (erro de segunda espécie no caso de ter ocorrido uma alteração da característica da qualidade) e *E(G)* é dado por

$$E(G|L) = \frac{ke^{3/2}}{4} \frac{\Phi(L+2) - \Phi(2)}{\Phi(L+1) - \Phi(1)}, \tag{6}$$

e obtido sob as condições consideradas em [12] para o método *VSI*.

2.2 Métodos *FSI* e *VSI* e a comparação com o método *LSI*

Em *FSI* retiram-se amostras em intervalos de tempo fixos, sendo a dimensão amostral e os múltiplos de desvio padrão também fixos. Seja d o intervalo de amostragem e G a variável aleatória definida anteriormente. O valor esperado de G é aproximadamente igual a $d/2$ ([5]). Então, o $AATS_{FSI}$ é dado por

$$AATS_{FSI} \cong \frac{d}{2} + \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right) \times d. \tag{7}$$

Em [12] é proposto o método *VSI*. Utilizando dois intervalos de amostragem ($d_1 < d < d_2$) e dividindo a região de continuação da carta em duas sub-regiões $\big(\,]-w, w[\;\text{ e }\;]-L, -w] \;\cup\; [w, L[\,\big)$, o método permite antecipar (utilizando d_1) ou retardar (utilizando d_2) a recolha da amostra seguinte. Em [14] é obtida, para w, a expressão quando se iguala, sob controlo, o período médio de amostragem de *VSI* com o período de amostragem, d, do método *FSI*, sendo

$$w = \Phi^{-1}\left[\frac{2\Phi(L)(d-d_1) + d_2 - d}{2(d_2 - d_1)}\right]. \tag{8}$$

De acordo com [12], $AATS_{VSI}$ é dado por

$$AATS_{VSI} = \frac{d_1^2 p_{01} + d_2^2 p_{02}}{2(d_1 p_{01} + d_2 p_{02})} + \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right) \times E(D_{VSI}), \tag{9}$$

onde $p_{01} = 2\big[\Phi(L) - \Phi(w)\big]$ e $p_{02} = 2\Phi(w) - 1$ são as probabilidades de $\bar{x} \in]-L, L[$, quando o processo está sob controlo.

Para comparar a eficácia dos métodos, em termos de $AATS$, vamos considerar as grandezas (5), (7) e (9), tomando os métodos nas mesmas condições sob controlo, com $E(D) = 1$ e $L = 3$. Consideramos o rácio Q_1 que representa a variação relativa, em %, do $AATS$ obtido quando se usa *FSI* em vez do *LSI* e o rácio Q_2 que representa a variação relativa, em %, do $AATS$ obtido quando se usa *VSI* em vez de *LSI*, dados pelas expressões:

$$Q_1 = \left(\frac{AATS_{FSI}}{AATS_{LSI}} - 1\right) \times 100\%, \quad Q_2 = \left(\frac{AATS_{VSI}}{AATS_{LSI}} - 1\right) \times 100\%. \quad (10)$$

Dos diversos resultados obtidos, neste trabalho optámos, por limitações de espaço, apenas por apresentar resultados para alterações da média (λ) e amostras de 5 elementos. Na *Tabela* 1 apresentamos os resultados numa situação em que a característica da qualidade tem distribuição normal, os quais servirão de base de comparação com os que serão posteriormente apresentados em situações de afastamento à normalidade. Note-se que apesar de considerarmos alterações da média muito pequenas, as quais têm associados valores de *AATS* muito grandes, estas alterações, na maior parte dos casos, têm pouco interesse do ponto de vista prático.

A partir da *Tabela* 1 podemos concluir que: **a)** a carta com *LSI* é mais rápida que a carta com o método *FSI* na detecção de pequenas e moderadas alterações da média (alterações em que a probabilidade de detecção é pequena); **b)** o método *LSI* é mais rápido do que o método *VSI* a detectar grandes alterações na média, em qualquer dos pares considerados; **c)** o aumento de d_1 em *VSI* reduz a sua eficácia, tornando-se a eficácia de *LSI* mais abrangente (é mais eficaz em pequenas alterações), contudo os valores dos rácios diminuem no mesmo sentido; **d)** os ganhos obtidos com *LSI* são sempre superiores aos obtidos com a utilização dos outros dois métodos.

(d_1, d_2)	*w/λ*	*0,25*	*0,50*	*1,00*	*1,50*	*2,00*	*2,50*	*3,00*
(0.1, 2)	0,63	-3,7	-13,2	-11,9	37,4	53,2	54,9	55,00
(0.1, 1.5)	0,92	-2,3	-8,7	-16,3	7,9	17,2	18,3	18,3
(0.3, 2)	0,54	-1,5	-4,1	12,1	38,8	39,6	38,8	38,7
(0.3, 1.5)	0,81	-0,5	-1,2	7,6	15,6	11,7	10,3	10,2
(0.5, 2)	0,43	0,9	5,6	36,8	40,2	26,1	22,7	22,4
(0.5, 1.5)	0,67	1,4	7,0	32,7	23,6	6,1	2,3	2,0
(1, 1)	—	7,9	32,6	101,7	44,2	-7,9	-17,7	-18,4
AATS	—	**122,81**	**24,81**	**1,98**	**0,74**	**0,63**	**0,61**	**0,61**

Tabela 1: Valores de $AATS_{LSI}$, de Q_1 e de Q_2 em função de λ, para diferentes pares em *VSI* e $d = 1$ em *FSI*.

3 Estudos de Robustez

3.1 Menor intervalo truncado em *LSI*

Pensamos que a aplicação prática, em contextos industriais onde é difícil, fisicamente ou administrativamente, recolher e analisar amostras em curtíssimos espaços de tempo, justificam este tipo de estudo.

Seja D a variável aleatória para o intervalo de tempo entre inspecções consecutivas e d_1 o menor intervalo amostral possível. Tem-se:

$$D \leq d_1 \Longleftrightarrow \frac{k}{2} e^{-|u|} \leq d_1 \Longleftrightarrow u \geq -\ln\left(\frac{2d_1}{k}\right) \vee u \leq \ln\left(\frac{2d_1}{k}\right) \qquad (11)$$

onde $-\ln\left(\frac{2d_1}{k}\right) = L^*$ é múltiplo do desvio padrão, podendo, o seu papel, ser encarado como o de w na metodologia *VSI*. Considerando apenas alterações da média, a probabilidade de tipo II reescreve-se como

$$\beta^* = \Phi\big(L^* - \lambda\sqrt{n}\big) - \Phi\big(-L^* - \lambda\sqrt{n}\big). \tag{12}$$

Consequentemente tem-se que o intervalo médio de amostragem é dado por:

$$\begin{aligned} E(D^*|\lambda,n,L^*) &= \frac{k\sqrt{e}}{2\beta^*}\big[e^{\lambda\sqrt{n}}\left(\Phi(-1-\lambda\sqrt{n}) - \Phi(-L^*-1-\lambda\sqrt{n})\right) \\ &+ e^{-\lambda\sqrt{n}}\left(\Phi(L^*+1-\lambda\sqrt{n}) - \Phi(1-\lambda\sqrt{n})\right)\big]. \end{aligned} \tag{13}$$

A probabilidade de d_1 é dada por

$$\begin{aligned} p_1 &= P\big(D = d_1|\lambda\big) = 1 - \frac{\beta^*}{\beta} \\ &= 1 - P\left(\mu_0 - L^*\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu_0 + L^*\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}|LIC \leq \bar{x} \leq LSC\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Nestas condições, a expressão que permite determinar o intervalo médio de amostragem vem dada por

$$E(D) = \frac{\beta^*}{\beta} \times E(D^*) + d_1 \times \left(1 - \frac{\beta^*}{\beta}\right). \tag{15}$$

Com (15) igual à unidade, sob controlo, obtivemos por simulação, os valores de k^* e de L^*, para diferentes valores de d_1 considerados, concluindo-se, naturalmente, que k^* diminui quando d_1 aumenta, diminuindo os múltiplos de desvio padrão. Esta característica mostra como o método *LSI* pode ser equiparado a *VSI*, pois em *VSI* o aumento de d_1 implica uma redução de w. Para avaliar o impacto causado pelo truncamento do menor intervalo de amostragem nos valores de $AATS$, reescrevemos (5) como

$$AATS_{LSI^*} = E(G) + \frac{E(D^*) \times \beta^* + d_1 \times (\beta - \beta^*)}{1 - \beta}. \tag{16}$$

Na $Tabela$ 2 apresentamos valores de Q_1 e Q_2, obtidos utilizando (10), tendo como referência $AATS_{LSI^*}$.

A partir dos resultados apresentados na $Tabela$ 2 podemos retirar, entre outras, as seguintes conclusões: **a)** *LSI* continua a ser mais eficaz do que *FSI* e *VSI* nas mesmas alterações da média; contudo os ganhos de eficácia com a utilização de *LSI* vão-se diluindo à medida que aumenta o menor intervalo de amostragem; **b)** o aumento de d_1 não é proporcional à redução de eficácia do método (por exemplo, quando passamos $d_1 = 0{,}1$ para $d_1 = 0{,}3$, Q_1 passa de 101,7% para 80,9%); **c)** quando a probabilidade de detecção é grande, *FSI* continua a ser mais eficaz do que *LSI*, contudo o aumento de d_1 tem pouco impacto; **d)** no geral, o desempenho de *LSI* e de *VSI* piora; há uma aproximação entre os dois métodos para todas as alterações da média, o que significa que o método *LSI*, relativamente ao método *VSI*, perde um pouco de eficácia para grandes alterações e ganha eficácia para pequenas e moderadas alterações; **e)** as reduções obtidas com *LSI* continuam a ser superiores às obtidas com *FSI* e com *VSI*; **f)** contrariamente à situação inicial, não encontramos nenhum par de amostragem em *VSI* de modo que a sua eficácia seja, para qualquer tipo de alteração, inferior à eficácia de *LSI*.

(d_1, d_2)	d_1/λ	*0,25*	*0,50*	*1,00*	*1,50*	*2,00*	*2,50*	*3,00*
(0.1, 2)	0,1	-3,7	-13,2	-11,9	37,4	53,2	54,9	55,0
(0.1, 1.5)	0,1	-2,3	-8,7	-16,3	7,9	17,2	18,3	18,3
(0.3, 2)	0,3	-1,9	-6,2	0,6	27,1	36,4	37,8	37,8
(0.3, 1.5)	0,3	-1,0	-3,4	-3,5	5,9	9,1	9,4	9,5
(0.5, 2)	0,5	-0,9	-2,5	1,6	13,4	19,2	20,3	20,4
(0.5, 1.5)	0,5	-0,4	-1,2	-1,4	0,0	0,3	0,3	0,3
(0.1, 1)	0,1	7,9	32,6	101,7	44,2	-7,9	-17,7	-18,4
(0.3, 1)	0,3	7,4	29,7	80,9	32,1	-10,0	-18,3	-18,9
(0.5, 1)	0,5	5,9	22,4	49,8	16,6	-12,9	-19,3	-19,7

Tabela 2: Valores de Q_1 e de Q_2 em função de λ, para diferentes pares em *VSI* e diferentes valores de d_1 em *LSI*.

3.2 Qualidade não normal

Em aplicações práticas a característica da qualidade nem sempre tem distribuição normal. Desse modo, para avaliar a eficácia do método de amostragem *LSI*, vamos considerar diferentes níveis de afastamento à normalidade, à semalhança do que se faz, por exemplo, em [8] e [9]. Para tal vamos considerar duas situações de claro afastamento à normalidade: uma, em que a característica da qualidade é uma mistura de normais, com a mesma média e desvio padrão diferente (**NC**) e, outra, em que a característica da qualidade tem distribuição *t-Student* (**sT**). Apresentamos resultados com contaminações de 10% ($\sigma_c = 1{,}5$ e $\sigma_c = 3$) e 30% ($\sigma_c = 3$) no caso **NC** e 4 graus de liberdade no caso **sT**, que reflectem claramente o pretendido. Como a distribuição das médias amostrais se afasta, claramente, da distribuição normal, devido à dimensão da amostra ($n = 5$), recorremos à simulação para obter grande parte dos resultados. Foram geradas 200000 amostras, com $n = 5$, nas condições já descritas. Dessa forma obtivemos os valores de L, w e dos limites de controlo, de modo a que a probabilidade de cometer um erro do tipo I fosse igual a 0,0027. Para avaliarmos os resultados da simulação, comparamos o desvio padrão teórico para **NC** ($\sigma_e^2 = (p.\sigma_c^2 + 1 - p)/n$, onde p é a proporção de valores e σ_c o desvio padrão da distribuição normal contaminante) com o desvio padrão, obtido na simulação, para a mesma situação. O erro relativo máximo foi de 0,23%, que pode ser considerado muito bom. Considerando os diferentes métodos com os novos parâmetros das cartas, obtivemos os valores do *AATS* para cada situação referida. Utilizando (10), obtivemos os resultados apresentados nas *Tabelas* 3, 4 *e* 5. Analisando os valores da *Tabela* 3, caso **sT**, podemos concluir que: **a)** a eficácia de *LSI* relativamente a *FSI* melhora, sendo essa melhoria muito mais acentuada para alterações moderadas da média; **b)** para o par (0.1, 2), o desempenho de *LSI* piora relativamente ao desempenho de *VSI* para todas as alterações; as diferenças são mais pronunciadas nas situações em que *VSI* é melhor e menos pronunciadas nas situações em que *LSI* é melhor; **c)** para o par (0.5, 2), o desempenho de *LSI* é ligeiramente mais afectado do que o desempenho de *VSI* para pequenas e moderadas alterações, mas para alterações $1 \leq \lambda \leq 2$, o desempenho de *LSI* é muito mais afectado (positivamente) que o desempenho de *VSI* e, consequentemente, acentua-se a diferença entre os dois métodos a favor de *LSI*; **d)** as diferenças entre métodos, sob controlo, devem-se ao uso da simulação para obter quantis, pois os métodos estão nas mesmas condições. Assim, podemos concluir que o facto da população ser *t-Student*, com nítido afastamento da normal, interfere no desempenho do método *LSI*: o método melhora o seu desempenho relativamente ao *FSI* para todas as alterações e melhora o seu desempenho para alterações moderadas, relativamente ao *VSI*.

—	*LIC*	-2,355	*LSC*	2,382
(d_1, d_2)	—	(1, 1)	(0.1, 2)	(0.5, 2)
w	—	—	0,57 (0,63)	0,39 (0,43)
λ	$AATS$	Q_1	Q_2	Q_2
0,00	377,02 (370,39)	0,0 (0,0)	-7,5 (0,0)	-4,6 (0,0)
0,25	260,74 (122,81)	8,3 (7,9)	-11,3 (-3,7)	-3,4 (0,9)
0,50	93,91 (24,81)	36,3 (32,6)	-21,2 (-13,2)	2,9 (5,6)
1,00	6,15 (1,98)	177,2 (101,7)	-33,3 (-11,9)	57,2 (36,8)
1,50	0,92 (0,74)	177,9 (44,2)	25,7 (37,4)	88,5 (40,2)
2,00	0,64 (0,63)	21,3 (-7,9)	51,6 (53,2)	36,7 (26,1)
2,50	0,62 (0,61)	-13,2 (-17,7)	53,6 (54,9)	20,5 (22,7)
3,00	0,61 (0,61)	-17,7 (-18,4)	53,7 (55,0)	18,3 (22,4)

Tabela 3: Valores de $AATS_{LSI}$, de Q_1 e Q_2 no caso **sT**, em função de λ, e, entre parêntese, os correspondentes valores obtidos sob normalidade.

No caso **NC**, *Tabela* 4 e *Tabela* 5, podemos concluir que: **a)** *LSI* melhora o desempenho, em relação a *FSI*, quando aumenta a contaminação e o desvio padrão; essa melhoria reflecte-se tanto no valor dos rácios como na abrangência de alterações da média; **b)** quando comparamos *LSI* com *VSI*, verificamos que no caso de contaminação 10% e, $\sigma_c = 1{,}5$, o desempenho dos métodos é idêntico à situação de população normal; **c)** quando aumentamos a percentagem de contaminação a diferença entre os métodos *LSI* e *VSI* mantém-se; **d)** deste modo podemos concluir que o desempenho de *LSI* é afectado, melhorando comparativamente ao *FSI*, piorando ligeiramente em relação ao *VSI* quando a percentagem de contaminação aumenta e sendo invariante para *VSI* quando o desvio padrão aumenta; **e)** as reduções no $AATS$ obtidas com *LSI* continuam a ser sempre superiores às reduções obtidas com o *VSI*, o que atesta a real alternativa deste método em situações em que o processo está sujeito a múltiplas causas assinaláveis que provocam alterações da média de diferentes magnitudes.

—	*Cont.*	10%	σ_c	1,5	*Cont.*	10%	σ_c	3
—	*LIC*	-1,462	*LSC*	1,426	*LIC*	-2,119	*LSC*	2,141
(d_1, d_2)	—	(1, 1)	(0.1, 2)	(0.5, 2)	—	(1, 1)	(0.1, 2)	(0.5, 2)
w	—	—	0,63	0,43	—	—	0,57	0,39
λ	$AATS$	Q_1	Q_2	Q_2	$AATS$	Q_1	Q_2	Q_2
0,00	370,00	0,0	-0,1	-0,3	368,69	-0,1	-7,3	-4,4
0,25	128,52	7,9	-3,9	0,7	169,64	8,1	-11,0	-3,2
0,50	25,95	32,9	-13,4	5,6	44,40	34,7	-20,5	3,0
1,00	2,04	105,2	-12,4	38,9	3,20	141,4	-24,7	50,4
1,50	0,74	47,2	37,6	42,8	0,80	85,2	32,5	62,8
2,00	0,63	-7,3	53,3	26,5	0,63	0,2	51,7	30,7
2,50	0,61	-17,6	54,9	22,4	0,61	-15,9	53,6	19,8
3,00	0,61	-18,4	55,0	22,1	0,61	-18,2	53,7	18,4

Tabela 4: Valores de $AATS_{LSI}$, de Q_1 e Q_2 no caso **NC**, em função de λ.

—	*Cont.*	30%	σ_c	3
—	*LIC*	-2,762	*LSC*	2,805
(d_1, d_2)	—	(1, 1)	(0.1, 2)	(0.5, 2)
w	—	—	0,58	0,39
λ	$AATS$	Q_1	Q_2	Q_2
0,00	369,36	-0,1	-6,8	-4,5
0,25	196,24	8,2	-10,6	-3,3
0,50	57,17	35,4	-20,3	2,6
1,00	4,21	161,6	-29,6	48,8
1,50	0,83	123,9	29,3	61,3
2,00	0,63	7,9	51,6	27,9
2,50	0,61	-14,7	53,7	19,2
3,00	0,61	-17,9	53,8	18,3

Tabela 5: Valores de $AATS_{LSI}$, de Q_1 e Q_2 no caso **NC**, em função de λ.

4 Considerações Finais

Para diferentes pares de amostragem de *VSI*, *LSI* tem melhor desempenho do que *VSI*, para todas as alterações da média, o que não acontece com outro método de amostragem adaptativa. O desempenho de *LSI* mantêm-se, por vezes melhora de forma acentuada, em contextos de não normalidade da característica da qualidade. Assim, e pelo conjunto de resultados obtidos (diferentes graus de liberdade no caso **sT**, diferentes graus de contaminação, com diferentes valores para o desvio padrão, no caso **NC**, e para outros pares de amostragem em *VSI*) a utilização de *LSI* parece-nos poder vir a ser uma vantagem competitiva em determinados contextos produtivos, podendo considerar-se um método robusto relativamente ao truncamento do menor intervalo e ao afastamento à normalidade. De futuro, pretendemos estudar propriedades estatísticas de *LSI* utilizando outros tipos de cartas e prolongar o estudo de robustez considerando a distribuição *Gama* e/ou a distribuição de *Burr* com diferentes parâmetros de forma e escala.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos Editores e aos dois Revisores os seus úteis comentários, os quais permitiram melhorar este texto. Os dois primeiros autores são membros do CIMA-U.E., centro de investigação financiado pelo Programa FEDER e por financiamentos plurianuais da FCT.

Referências

[1] Amin, R.W., Miller, R.W. (1993). A Robustness Study of Xbar Control Charts with Variable Sampling Intervals. *Journal of Quality Technology* 25(1), 36–44.

[2] Banerjee, P.K., Rahim, M.A. (1988). Economic Design of Xbar Control Charts Under Weibull Shock Models. *Technometrics* 30(4), 407–414.

[3] Costa, A.F.B. (1994). Xbar Charts with Variable Sample Size. *Journal of Quality Technology* 26(3), 155–163.

[4] Costa, A.F.B. (1999). Xbar Charts with Variable Parameters. *Journal of Quality Technology* 31(4), 408–416.

[5] Carmo, M. (2004). *Problemas de Amostragem em Controlo de Qualidade*. Tese de Mestrado, ISEGI, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

[6] Figueiredo, F., Gomes, M.I. (2009). Monitoring Industrial Processes with Robust Control Charts. *Revstat-Statistical Journal* 7(2), 151–170.

[7] Infante, P., Rodrigues Dias, J. (2003). Robustez de um Método Dinâmico de Amostragem em Controlo de Qualidade In Brito, P., Figueiredo, A., Sousa, F., Teles, P., Rosado, F. (eds.): *Literacia e Estatística*, 345–360, Sociedade Portuguesa de Estatística.

[8] Lin, Y.-C., Chou, C.-Y. (2007). Non-normality and the Variable Parameters Xbar Control Charts. *European Journal of Operational Research* 176(1), 361–373.

[9] Lin, Y.-C., Chou, C.-Y. (2011). Robustness of the EWMA and the Combined Xbar-EWMA Control Charts with Variable Sampling Intervals to Nonnormality. *Journal of Applied Statistics* 38(3), 553–570.

[10] Ou, Y., Wu, Z., Tsung, F. (2012). A Comparison study of Effectiveness and Robustness of Control Charts for Monitoring Process Mean. *International Journal of Production Economics* 135, 479–490.

[11] Prabhu, S.S., Montgomery, D.C., Runger, G.C. (1994). A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval Xbar Control Scheme. *Journal of Quality Technology* 26(3), 164–176.

[12] Reynolds, M.R. JR, Amin, R.W., Arnold, J.C., Nachlas, J.A. (1988). Xbar Charts with Variables Sampling Intervals. *Technometrics* 30(2), 181–192.

[13] Rodrigues Dias, J., Infante, P. (2008). Control Charts with Predetermined Sampling Intervals. *International Journal of Quality and Reliability Management* 25(4), 423–435.

[14] Runger, G.C., Pignatiello, J.J. (1991). Adaptive Sampling for Process Control. *Journal of Quality Technology* 23(2), 133–155.

[15] Schoonhoven, M., Does, R.J.M.M. (2010). The Xbar Control Chart Under Non-Normality. *Quality and Reliability Engineering International* 26, 167–176.