



UNIVERSIDADE DE ÉVORA

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA



DOCUMENTO DE TRABALHO Nº 2002/02

Novembro

***Estabilidade Local em Problemas de Controle Ótimo com
duas variáveis de Estado: Uma Extensão do Teorema de
Dockner***

José Manuel Madeira Belbute
Universidade de Évora, Departamento de Economia

UNIVERSIDADE DE ÉVORA
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
Largo dos Colegiais, 2 – 7000-803 Évora – Portugal
Tel.: +351 266 740 894 Fax: +351 266 742 494
www.decon.uevora.pt wp.economia@uevora.pt

Resumo/Abstract

O presente trabalho procura demonstrar que as condições exigidas por Dockner no teorema 3, mesmo para o caso da sociedade evidenciar impaciência face ao futuro (caso em que $r > 0$) podem fazer surgir não só os 4 valores próprios apenas com parte real a que o teorema se refere, como também dois pares de complexos conjugados sendo que dois deles têm parte real positiva e dois parte real negativa. Com isso, as trajectórias em direcção ao estado estacionário, quando vistas a partir do Stable Manifold, podem evoluir em forma de espiral convergente (Foco Estável).

Palavras-chave/Keyword: Controle Ótimo, Princípio de Pontryagin, Dinâmica de Sistemas, Estabilidade local em sistemas dinâmicos não lineares de dimensão 4.

Classificação JEL/JEL Classification: C61

Estabilidade Local em Problemas de Controle Ótimo com duas variáveis de Estado: Uma Extensão do Teorema de Dockner

José Manuel Madeira Belbute

Departamento de Economia - Universidade de Évora

I. INTRODUÇÃO

No seu artigo de 1985, Dockner apresenta uma metodologia que lhe permite calcular explicitamente os valores-próprios associados ao Jacobiano resultante da linearização do Sistema Dinâmico Hamiltoniano Modificado. Com isso, estabelece um Teorema (o *Teorema 3*) no qual apresenta as condições necessárias e suficientes para que o estado estacionário associado ao problema em estudo evidencie localmente as propriedades típicas de Ponto Sela. Verificadas essas condições, os valores-próprios do sistema canónico apenas apresentam parte real - $\text{Im}\{\lambda_i\} = 0$, com $i = 1, 2, 3, 4$ - sendo dois positivos e dois negativos.

O presente trabalho procura demonstrar que não só esse teorema é incompleto como ainda é incorrecta a afirmação segundo a qual "*it is an important fact in the case of $r = 0$, no imaginary eigenvalues are possible. Thus closed contours of H around the steady state are excluded and periodic sinusoidal motions are ruled out. A necessary condition for such motions to occur is $r = 0$* " (sendo que r corresponde à taxa de impaciência da sociedade ou Taxa de Desconto).

Na verdade, como teremos ocasião de mostrar, as condições exigidas por Dockner no teorema 3, mesmo para o caso da sociedade evidenciar impaciência face ao futuro (caso em que $r > 0$) podem fazer surgir não só os 4 valores próprios apenas com parte real de que já falámos, como também dois pares de complexos conjugados sendo que dois deles têm parte real positiva e dois parte real negativa. Com isso, as trajectórias em direcção ao estado estacionário, quando vistas a

partir da variedade central estável - Stable Manifold -, podem evoluir em forma de espiral convergente (Foco Estável)⁽¹⁾.

II - O problema geral de Controle Ótimo com Duas Variáveis de Estado

Começamos por especificar o problema geral de controle ótimo com duas variáveis de estado (x e y), definido num horizonte temporal infinito, autónomo (com um factor de desconto afectando a função objectivo), sem restrições sobre as variáveis de controle, u e que pode ser perturbado por um conjunto de parâmetros representados aqui pelo vector β . Formalmente, trata-se, em geral, de

$$[1] \quad \max_u \int_0^{\infty} F(u, x, y, \beta) e^{-\delta t} dt$$

s.a

$$\dot{x} = f(x, y, u, \beta)$$

[2]

$$\dot{y} = g(x, y, u, \beta)$$

$$x(0) = x_0$$

$$y(0) = y_0$$

onde, u é o vector das variáveis de controle : $u \in \mathfrak{R}^n$, $\beta \in \mathfrak{R}^n$, $F(\cdot)$, $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ são funções contínuas, definidas em \mathfrak{X} e $\delta > 0$ é a taxa de desconto.

A solução do problema pode ser encontrada pela aplicação do Princípio de Máximo de Pontryagin que consiste em encontrar um valor para as duas variáveis de co-estado λ e μ , associadas às duas equações diferenciais [2], que maximizam o (valor-corrente do) Hamiltoniano

$$[3] \quad H(u, x, y, \beta, \lambda, \mu) = F(u, x, y, \beta) + \lambda f(u, x, y, \beta) + \mu g(u, x, y, \beta)$$

⁽¹⁾ Brito P. (1994), faz na sua dissertação de doutoramento uma caracterização completa da dinâmica local associada a sistemas Hamiltonianos como o que estamos aqui a usar. Nesse sentido os nossos resultados constituem apenas um dos casos que analisa, concretamente o caso que identifica como A (vide ob. cit. pág. 206).

que asseguram a existência de uma trajetória ótima $\{\mu^*, x^*, y^*\}_{t=0}^{\infty}$ e onde as condições necessárias geram o seguinte Sistema Dinâmico Hamiltoniano

$$[4] \quad \begin{aligned} \dot{x} &= H_{\lambda} \\ \dot{y} &= H_{\mu} \\ \dot{\lambda} &= \delta\lambda - H_x \\ \dot{\mu} &= \delta\mu - H_y \end{aligned}$$

com as seguintes condições de 1ª ordem

$$[5] \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow H_u = F_u(\cdot) + \lambda f_u(\cdot) + \mu g_u(\cdot) = 0$$

e que, devido às propriedades de $F(\cdot)$, $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$, fornece os níveis ótimos das variáveis de controle, u , como função de todas as variáveis que a determinam (solução fechada). Formalmente

$$[6] \quad \hat{u}_i = \hat{u}(x, y, \beta, \lambda, \mu) \quad \text{com } i = 1, \dots, m$$

Introduzindo agora [6] no Hamiltoniano inicial, obtemos o que na literatura se denomina por Hamiltoniano Modificado:

$$[7] \quad \hat{H}(\cdot) = H[\hat{u}(x, y, \beta, \lambda, \mu), x, y, \beta, \lambda, \mu]$$

que é, obviamente equivalente ao Hamiltoniano inicial e que dá origem a um sistema canónico também equivalente ao anterior denominado Sistema Dinâmico Hamiltoniano Modificado (SDHM).

A análise da estabilidade local baseia-se na linearização deste sistema em torno do ponto de equilíbrio $\left(\dot{x} = \dot{y} = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0 \right)$ que gera o seguinte sistema:

$$[8] \quad \dot{D} = JD \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A' + \delta I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

onde $\xi = \begin{bmatrix} x - x^\infty \\ y - y^\infty \end{bmatrix}$, $\eta = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda^\infty \\ \mu - \mu^\infty \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} H_{\lambda x} & H_{\lambda y} \\ H_{\mu x} & H_{\mu y} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} H_{\lambda\lambda} & H_{\lambda\mu} \\ H_{\mu\lambda} & H_{\mu\mu} \end{bmatrix}$,

$$C = -\begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{bmatrix}$$

e, finalmente, I_2 , a matriz Identidade de ordem 2, sendo $J = \{J_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,4}$, o Jacobiano obtido a partir do sistema inicial. Como J é uma matriz de dimensão (4×4) , os valores próprios ϕ que lhe estão associados são soluções do polinómio de quarto grau obtido a partir de $\det(J - \phi I_4) = 0$;

$$[9] \quad \sum_{j=0}^4 (-1)^j M(4-j) \phi^j = 0$$

em que $M(h)$ denota o somatório de todos os menores principais de ordem h obtido a partir de J (por convenção, $M(0) = 1$)

$$[10] \quad \phi^4 - M(1)\phi^3 + M(2)\phi^2 - M(3)\phi + M(4) = 0$$

Definindo agora

$$[11] \quad Z = M(2) - \delta^2 = \frac{M(3)}{\delta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \dot{\mu}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{\mu}}{\partial \mu} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \mu} \end{vmatrix}$$

cada um dos menores principais pode ser escrito do seguinte modo:

$$M(1) = \text{tr}(J) = \sum_{i=1}^4 \phi_i = 2\delta$$

$$M(2) = \delta^2 + \delta(J_{33} + J_{44}) - 2(J_{34}J_{43} + J_{14}J_{41}) - J_{13}J_{31} - J_{24}J_{42} = \delta^2 + Z$$

$$M(3) = \delta[M(2) - \delta^2] = \delta Z$$

$$M(4) = \det(J) = \Delta$$

a equação característica de J virá

$$[12] \quad \phi^4 - 2\delta\phi^3 + (\delta^2 + Z)\phi^2 - \delta Z\phi + \Delta = 0$$

que é equivalente à seguinte equação bi-quadrática em $\lambda - \frac{\delta}{2}$ ⁽¹⁾

$$[13] \quad \left(\phi - \frac{\delta}{2}\right)^4 + \left(Z - \frac{\delta^2}{2}\right)\left(\phi - \frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2}\right)^2\left[Z - \left(\frac{\delta}{2}\right)^2\right] + \Delta = 0$$

usando agora a transformação $\varphi = \left(\phi - \frac{\delta}{2}\right)^2$ obtemos a seguinte quadrática em φ

$$[14] \quad \varphi^2 + \left(Z - \frac{\delta^2}{2}\right)\varphi - \left\{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2\left[Z - \left(\frac{\delta}{2}\right)^2\right] - \Delta\right\} = 0$$

Como consequência trivial, as raízes desta equação virão

$$[15] \quad \varphi_{1,2} = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{Z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{Z^2 - 4\Delta}$$

Tendo em conta a transformação que fizemos à pouco, podemos escrever que $\phi - \frac{\delta}{2} = \pm\sqrt{\varphi}$, donde os quatro valores próprios do jacobiano virão, finalmente

$$[16] \quad \phi_{1,2,3,4} = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{Z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{Z^2 - 4\Delta}}$$

Estamos agora em condições de estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 1- *Sendo $\Delta > 0$ e $Z < 0$, a solução estacionária possui as propriedades do ponto-sela. Se $Z^2 - 4\Delta \geq 0$, o Jacobiano do sistema canónico terá 4 raízes reais sendo duas positivas e duas negativas. Se $Z^2 - 4\Delta < 0$, o Jacobiano terá 4 raízes complexas conjugadas, sendo que duas terão parte real positiva e duas parte real negativa.*

(1) Vide Brito, P. (1991), pág. 198.

Dem. Quando $Z^2 - 4\Delta \geq 0$ é fácil verificar que as raízes serão reais dado que com $Z < 0$ se terá necessariamente $\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{Z}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{Z^2 - 4\Delta} > 0$. Por outro lado, como $\frac{\delta}{2} < \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{Z}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{Z^2 - 4\Delta}}$, duas raízes serão positivas e duas negativas. Isto significa que estamos, de facto, em presença das propriedades que tipificam um ponto sela.

Quando $Z^2 - 4\Delta < 0$, teremos seguramente dois pares de raízes complexas

$$[17] \quad \phi_{1,2} = \frac{\delta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{Z}{2} \pm \frac{1}{2}(\sqrt{4\Delta - Z^2})}$$

$$[18] \quad \phi_{3,4} = \frac{\delta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{Z}{2} \pm \frac{1}{2}(\sqrt{4\Delta - Z^2})}$$

que escritas na forma polar tomam o seguinte aspecto

$$[19] \quad \phi_{1,2} = \left(\frac{\delta}{2}\right) + \{r[\cos\theta \pm isen\theta]\}^{\frac{1}{2}}$$

$$[20] \quad \phi_{3,4} = \left(\frac{\delta}{2}\right) - \{r[\cos\theta \pm isen\theta]\}^{\frac{1}{2}}$$

e onde se fez

$$[21] \quad r = \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^4 - Z\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \Delta}$$

$$[22] \quad \cos\theta = \frac{\left[\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{Z}{2}\right]}{r}$$

$$[23] \quad sen\theta = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{4\Delta - Z^2}}{r}$$

usando agora o *Teorema de De Moivre*, as raízes características do jacobiano podem se escritas do seguinte modo:

$$[24] \quad \phi_{1,2} = \left(\frac{\delta}{2}\right) + r^{\frac{1}{2}} [\cos \frac{1}{2}\theta \pm isen \frac{1}{2}\theta]$$

$$[25] \quad \phi_{3,4} = \left(\frac{\delta}{2}\right) - r^{\frac{1}{2}} [\cos \frac{1}{2}\theta \pm isen \frac{1}{2}\theta]$$

parte real de $\phi_{1,2}$ é positiva dado que com $\cos \theta > 0$ e terá $\cos \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2}} > 0$. Porém, as propriedades de ponto sela requerem que as partes reais de $\phi_{3,4}$ sejam

negativas o que se verificará desde que em [25] se tenha $\left(\frac{\delta}{2}\right) < r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\theta$.

Usando de novo a fórmula do semiângulo, $\cos \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2}} > 0$ e em face de [22], podemos escrever que

$$[26] \quad r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\theta = r^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{Z}{2}}{r} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(r + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{Z}{2} \right)}$$

Porém, como $\Delta > 0$ e $Z < 0$ verificar-se-ão, seguramente as seguintes relações

$$[27] \quad \sqrt{\frac{1}{2} \left(r + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{Z}{2} \right)} > \sqrt{\frac{1}{2} \left(r + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \right)} > \sqrt{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \right)} = \frac{\delta}{2} \quad (1)$$

pelo que a parte real de $\phi_{3,4}$ é seguramente negativa e teremos, assim, as condições necessárias para as propriedades de ponto-sela.

(1) Recorde-se que como se tem $\Delta > 0$ e $Z < 0$, [21] permite escrever seguramente que

$$r = \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^4 - Z\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \Delta} > \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$

Isto significa que existem duas "variedades" (manifolds) de dimensão dois (sendo uma estável, associada às raízes com parte real negativa e outra instável, associada às raízes com parte real positiva) tangente aos respectivos Espaços Lineares, respectivamente, Estável (E^S) e Instável (E^U) do sistema canónico e que contém o estado estacionário.

A variedade estável de dimensão dois (já que são dois os valores próprios com raízes negativas -ou com parte real negativa) tem a propriedade de que qualquer "caminho" que parta do seu interior, efectuará uma trajectória assintótica em direcção ao estado estacionário. Isto significa que se escolher convenientemente os valores iniciais das variáveis de co-estado e de estado, $\lambda(0) = \lambda[x(0), y(0)]$ e $\mu(0) = \mu[x(0), y(0)]$, de tal modo que estes valores iniciais emanem da variedade estável, então há a garantia de que o caminho que percorrerão ao longo do tempo se dirigirá para o estado estacionário $(x^\infty, y^\infty, \lambda^\infty, \mu^\infty)$.

Se as raízes forem reais e restringindo a análise ao plano da variedade estável linearizada de dimensão dois, então o estado estacionário será caracterizado pela topologia típica de um nó-estável.

Se as raízes forem complexas, a trajectória desenvolvida pelas variáveis em direcção ao estado estacionário descreverá uma espiral (ou foco estável).

{ Inserir aqui Fig. 1 }

III - Conclusão

Com o presente trabalho clarificámos o *teorema 3* de Dockner (1985) ao separar duas situações distintas relativas à topologia em torno do estado estacionário mas que exigem as mesmas condições para o $\det(J)$ e para a magnitude Z . Ao contrário do que especifica o teorema 3, não se pode dizer que, verificadas as condições nele previstas, se tenham imediata e unicamente quatro valores próprios reais, sendo dois positivos e dois negativos (assegurando, por isso, a convergência para o estado estacionário).

Como julgamos ter demonstrado, verificadas as condições previstas no teorema 3 e mesmo para uma taxa de desconto positiva, a relação entre $Det(J)$ e a magnitude Z pode ser de tal ordem que os 4 valores próprios do sistema canónico podem ser dois pares de complexos conjugados, dois com parte real positiva e dois com parte real negativa. Neste caso, a aproximação ao estado estacionário pode ser feita sob a forma de um Foco Estável.

Bibliografia

- BELBUTE, J. M. (1996); *Crescimento Económico e Sustentabilidade*, Dissertação de Doutoramento, Évora, Julho de 1996.
- BRITO, P. (1994); *Taxa de Câmbio Real, Crescimento e Dívida Externa*, Dissertação de Doutoramento, ISEG, Lisboa.
- DOCKNER, E. (1985); *Local Stability Analysis in Optimal Control Problems with Two State Variables*, in *Optimal Control Theory and Economic Analysis*, Feichtinger Editor, Elsevier Science Publishers.
- FEICHTINGER, g., A. Novak & F. Wirl (1994); *Limit Circles in Intertemporal Adjustment Models*, Journal of Economic Dynamics and Control, 18, pp. 353-380.
- HALE, J. & Koçack (1991); *Dynamics and Bifurcations*, Springer Verlag, N. Y.
- KUZNETOV, Y. (1995); *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer Verlag, N. Y.
- SEIERSTAD, A. & Sydsaeter (1987); *Optimal Control Theory with Economic Applications*, North-Holland, Amsterdam.
- TU, P, (1994); *Dynamical Systems: An introduction with Applications in Economics and Biology*- 2ª Ed., Springer Verlag N.Y.

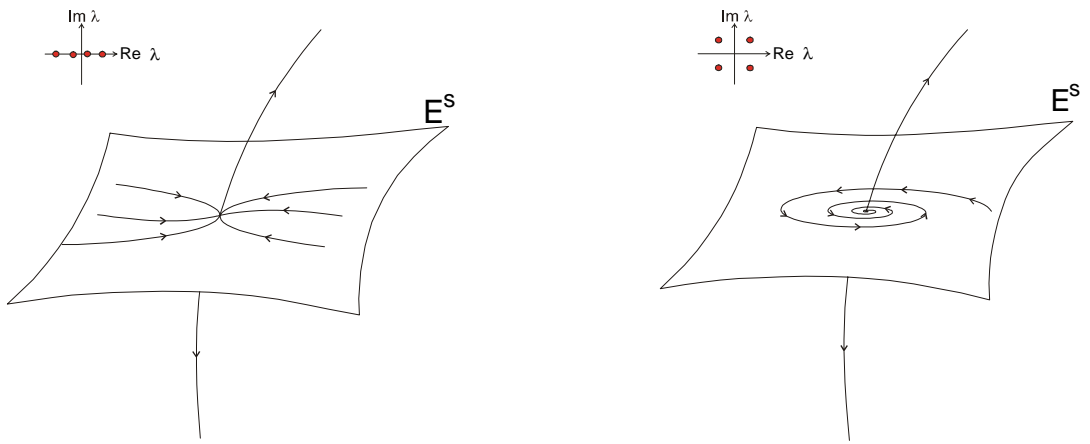


Figura 1