O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora e Unidade de Investigação do IE/UL
Maria Elisa Pinto
Agrupamento de Escolas n.º 3 de Évora

Introdução

As atuais orientações curriculares para o ensino da Matemática propõem que os alunos aprendam os conceitos matemáticos ao mesmo tempo que desenvolvem capacidades matemáticas fundamentais, nomeadamente de resolução de problemas, de raciocínio matemático e de comunicação matemática (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; ME/DEB, 2001; ME, 2007; NCTM, 1991, 1994, 2007). Propõem, também, que estas capacidades transversais sejam alvo de atenção desde o início da escolaridade dos alunos, devendo começar a ser desenvolvidas desde o ensino pré-escolar (Cai, 2010; NCTM, 2007).

Estas indicações contrariam a ideia geral preconcebida de que a Matemática dos alunos dos primeiros anos se reduz ao contar e calcular, a qual implicitamente pressupõe que as crianças não têm capacidade de produzir raciocínios matemáticos não elementares ou de resolver problemas não triviais. Sublinha-se que esta ideia prevaleceu em Portugal durante muitas décadas, associada à existência de expectativas reduzidas acerca do que os alunos do 1.º ciclo são capazes de fazer em Matemática (Serrazina, Canavarro, Rocha, Guerreiro, & Portela, 2011). A investigação em educação matemática tem, no entanto, vindo a proporcionar evidências de que os alunos mais jovens, mesmo os do ensino pré-escolar, são capazes de explorar problemas e de criar estratégias adequadas para os resolver (Cai, 2010).

No atual contexto curricular, parece-nos de especial relevância aprofundar esta temática. Os alunos de seis anos são ou não capazes de produzir raciocínios matemáticos? Como lidam com situações que os desafiam? Que ferramentas mobilizam para resolver problemas? Que raciocínios revelam e como os apresentam? É nossa convicção que a procura de respostas a estas questões proporciona uma compreensão e um conhecimento relevante que pode apoiar o professor a pôr em prática um ensino em que os alunos tenham oportunidades de desenvolver, de forma integrada e sustentada, as capacidades de resolução de problemas, de raciocínio e de comunicação matemática, ao mesmo tempo que aprendem conceitos matemáticos fundamentais.

Referimo-nos ao conjunto destas três capacidades matemáticas transversais pois, apesar de cada uma ter características específicas, de uma certa forma elas são indissociáveis quando se adota uma conceção global de raciocínio matemático (Boavida, 2008; Yackel & Hanna, 2003). Recordamos que o conceito de raciocínio tem sido amplamente usado tendo subjacente a hipótese implícita de que existe um acordo universal sobre o seu significado. Yackel e Hanna (2003) referem mesmo que a maior parte dos matemáticos e educadores matemáticos usam o termo sem o clarificarem.

Na procura de uma clarificação sobre o que significa raciocinar em matemática, as mesmas autoras, focando-se no contexto escolar, consideram que raciocinar é uma atividade que o aluno exerce quando resolve problemas matemáticos e é chamado a explicar e a justificar a sua resolução (Yakel & Hanna, 2003). Como afirmam Whitenack e Yackel (2008), «explicar e justificar são aspetos importantes do raciocínio sobre ideias matemáticas» (p. 85). A diferença entre explicar e justificar pode ser subtil mas existe e reside nas razões que motivam estas atividades. A explicação é motivada pela necessidade de o aluno clarificar melhor o seu raciocínio, nem que seja para si mesmo. A justificação é motivada pela necessidade de o aluno validar as suas ideias e raciocínios não apenas para si próprio mas também para os outros (Whitenack & Yackel, 2008).

Boavida e Menezes (2012) também sublinham a importância da explicação e da justificação ao caracterizarem raciocínio:

> (...) raciocinar remete para calcular, mas também para usar a razão ao julgar, compreender, examinar, avaliar, justificar e concluir. Assim, em Matemática, não raciocinamos apenas quando provamos algo. Também raciocinamos ao apresentar razões que justificam ideias ou posicionamentos, ao argumentarmos para nos convencermos, ou para convencer outros, da plausibilidade de conjeturas que enunciamos e da razoabilidade de afirmações que fazemos ou ao procurarmos explicar a coerência entre o que se aceita como válido e as suas consequências (p. 289)

Esta conceção é aqui especialmente adequada em virtude do estudo a que nos reportamos ter como protagonistas alunos muito jovens, com seis anos de idade, a iniciar a escolaridade básica. Assim, neste artigo assumimos como raciocínio matemático a atividade intelectual que o aluno desenvolve quando se envolve com tarefas de natureza problemática com o intuito de as resolver e, para tal, procura dar sentido à situação em causa, relaciona matematicamente os elementos relevantes e produz, em consequência, uma resposta, a qual consegue explicar e/ou justificar de forma coerente por meios próprios.

Para que esta atividade aconteça, o aluno pode recorrer a conhecimentos ou estratégias anteriormente aprendidos e/ou a processos criativos que ele próprio invente, mas necessita sempre de usar representações que apoiem o processo e concretizem o produto do seu pensar. São elas que permitem, também, que o aluno externalize o seu raciocínio e o revele aos outros, independentemente do tipo de representações usadas (apoiadas nas ações, imagens ou símbolos) ou do seu grau de formalismo (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008; Goldin, 2002; Goldin & Shteingold, 2001).

O estudo realizado por Elisa Pinto (2009) ilustra que os alunos do 1.º ano de escolaridade, quando confrontados com a necessidade de resolver problemas matemáticos, tendem a preferir representações icónicas, assentes na imagem, por si criadas, às representações simbólicas formais, embora utilizem ambas e com funções distintas. Destaca ainda o papel das representações em diagrama como ferramenta fundamental ao apoio do raciocínio dos alunos. Este artigo sustenta-se neste estudo, sendo seu propósito analisar duas questões concretas:

- Como se caracterizam as representações, em especial os diagramas, que os alunos criam?
- Que funções têm estas representações para os alunos, em especial os diagramas?

Enquadramento teórico

Representações e suas funções

Todos nós usamos representações constantemente e nos múltiplos contextos com que lidamos no nosso dia a dia, sendo através delas que conseguimos tanto raciocinar sobre ideias, como dar visibilidade ao que pensamos. Em sentido amplo, uma representação é uma configuração que pode representar uma outra coisa de alguma forma. Dito de outro modo, é uma configuração que poderá, por exemplo, agir em lugar de, ser interpretada como, conetar-se, corresponder a, denotar, retratar, encarnar, codificar, evocar, rotular, ligar, significar, produzir, referir-se, assemelhar, servir como uma metáfora para, substituir, sugerir, ou simbolizar o elemento representado (Goldin, 2002). Se analisarmos estes diferentes significados para o conceito de representação, podemos aperceber-nos de duas características importantes das representações: por um lado, tanto se referem a um processo como a um produto, pois reportam-se tanto ao ato de pensar sobre um conceito, ideia ou relação, como à sua forma propriamente dita (Boavida et al, 2008; NCTM, 2007); por outro lado, as representações não são produtos estáticos, podendo assumir diferentes formas consoante a relação do sujeito que representa com aquilo que representa (Woleck, 2001).

Num sentido mais restrito, e no domínio da Matemática, as representações têm o poder de reportar-se a entidades muito distintas como conceitos, relações, procedimentos, ideias, muitos deles de natureza abstrata e dificilmente acedível sem recurso a uma representação externa (Goldin & Shteingold, 2001; Wong, 2004). Por exemplo, o numeral 7 poderá referir-se aos sete anões da história da Branca de Neve ou representar algo mais abstrato como o cardinal de um determinado conjunto que contém sete elementos. Um gráfico cartesiano poderá, por exemplo, retratar uma relação entre duas variáveis, ou representar uma função ou o conjunto solução de uma equação algébrica. Aquilo que é representado pode variar de acordo com o contexto ou com o próprio uso da representação. Além disso, as representações não podem ser entendidas de modo isolado. Os sistemas externos de representação encontram-se estruturados pelas convenções que lhes servem de base e que são definidas socialmente ou por uma comunidade. Um número em particular ou um determinado gráfico não têm significado fora do sistema a que pertencem (Goldin & Shteingold, 2001).

Nas últimas décadas, verificou-se uma progressiva valorização das representações no ensino e aprendizagem da Matemática ao nível das orientações curriculares, emanadas tanto por organismos internacionais (NCTM, 1991, 1994, 2007), como nacionais (APM, 1988; ME/DEB, 2001, 2004; ME/DGEBS, 1990; ME, 2007).

Esta valorização das representações surge desde os primeiros anos de escolaridade, considerados essenciais na iniciação e desenvolvimento de processos matemáticos fundamentais, entre os quais se incluem, ainda, raciocinar, resolver problemas, comunicar e estabelecer conexões matemáticas (NCTM, 2007). Na realidade, a capacidade de realizar representações matemáticas surge associada não só ao compreender e lidar com conceitos matemáticos, mas especialmente ao desenvolvimento das capacidades transversais de resolver problemas e de raciocinar. Como referem Boavida et al. (2008), as representações constituem-se como «ferramentas fundamentais para pensar matematicamente» (p.71). O NCTM destaca a importância das representações para promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, em particular no início escolaridade, sublinhando que os alunos do pré-escolar ao 2.º ano representam os seus pensamentos e os seus conhecimentos sobre as ideias matemáticas «através da linguagem verbal oral e escrita, através de gestos, desenhos e de símbolos inventados e convencionais (Edwards, Gandini e Forman, 1993). Estas representações constituem métodos de comunicação, assim como poderosas ferramentas de raciocínio» (NCTM, 2007, p.160).

As representações iniciais da criança são geralmente «representações idiossincráticas, espontâneas e imediatas, mais ou menos diferenciadas social e culturalmente, que têm mais a ver com o conhecimento do quotidiano do que com o conhecimento científico» (Santos, 1991, p. 21). É usando estas representações que as crianças iniciam a aprendizagem formal e, portanto, deverão ser encorajadas a representar as suas ideias sob formas que para si tenham sentido — e essas formas não serão necessariamente nem provavelmente as convencionais próprias da matemática (NCTM, 2007). As representações idiossincráticas construídas pelos alunos no contexto de tarefas problemáticas podem ajudá-los tanto na compreensão como na própria resolução, constituindo, também, uma forma de registo do método de resolução que pode ainda possibilitar um meio de o descrever a outras pessoas. Como refere o NCTM, os alunos devem «criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas» (2007, p. 160).

A forma como um aluno representa as ideias matemáticas está intimamente ligada com a forma como compreende e utiliza os seus conhecimentos matemáticos (Ponte & Serrazina, 2000). Através das representações criadas pelo aluno, o professor pode ter acesso à forma como ele interpreta uma dada tarefa: «Os professores poderão aperceber-se do raciocínio dos alunos e da sua apreensão dos conceitos matemáticos ao analisar, questionar e interpretar as suas representações» (NCTM, 2007, p.160). Isto é particularmente relevante nas situações problemáticas, em que o aluno revela através das representações a forma como raciocina durante a sua resolução (Valério, 2005; Pinto, 2009).

É importante que o professor analise as representações dos seus alunos e oiça as suas discussões de modo a aperceber-se do desenvolvimento do seu raciocínio matemático e a conseguir ajudá-los a associar as suas representações às representações convencionais da matemática (NCTM, 2007).

Representações e sua tipologia

Jerome Bruner, investigador clássico neste domínio, distingue três tipos de representações: i) representações ativas, relativas ao conjunto de ações adequadas para referir ou alcançar certo resultado; ii) representações icónicas, relativas ao conjunto de imagens ou gráficos que sucintamente se referem a uma certa ideia ou processo; iii) representações simbólicas, relativas ao conjunto de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico regido por regras ou leis para a formação e transformação de proposições (Bruner, 1999). Estes três sistemas de representação operam durante o desenvolvimento da inteligência humana e a interação entre os diferentes sistemas é crucial para o desenvolvimento de cada pessoa. O desenvolvimento não implica uma sequência de etapas, mas sim um domínio progressivo destas três formas de representação.

Como consequência, uma representação matemática não pode ser totalmente compreendida ou interpretada isoladamente. Esta apenas faz sentido quando parte integrante de um sistema mais abrangente, estruturado, no qual diferentes representações estão relacionadas (Goldin & Shteingold, 2001). Para Wong (2004), o estabelecimento de conexões entre os diferentes modos de representação das ideias matemáticas ajuda os alunos a desenvolver um maior leque de estratégias de aprendizagem e uma compreensão mais profunda da matemática.

Tendo em conta o foco deste artigo, debruçamo-nos de seguida sobre as representações icónicas e sobre as simbólicas, pois as representações ativas não estão presentes na análise de dados.

Representações icónicas

Pela importância de que se revestem no 1.º ciclo, abordamos três tipos de representação icónica: o desenho, os símbolos não convencionais e o diagrama. Este último merece-nos mais atenção devido ao importante papel que tem neste estudo.

2.2.1.1.Desenhos

As crianças, desde pequenas, expressam-se naturalmente através do desenho, sendo esta a sua primeira linguagem escrita que se vai enriquecendo com a capacidade de definir melhor as figuras e de incluir pormenores. No desenho, a criança encontra um valioso recurso para comunicar e expressar os seus sentimentos, vontades e ideias, que muitas vezes serve de alternativa à linguagem oral. Segundo Cândido (2001), «Para crianças que ainda não escrevem, que têm dificuldade em expressar-se oralmente, ou que já escrevem, mas ainda não dominam a linguagem matemática, o desenho pode ser uma alternativa para que elas comuniquem o que pensam» (p. 19).

No contexto das representações matemáticas, para Smole e Diniz (2001) o desenho serve como recurso de interpretação do problema e também como registo da solução. Cavalcanti (2001) salienta a ideia de que o desenho pode ser usado de três formas diferentes na resolução de problemas. Uma delas diz respeito à sua utilização para representar alguns elementos ou a totalidade da situação apresentada no enunciado, sem expressar relações que identifiquem as transformações numéricas. É o que acontece na figura 1, em que o aluno recorre ao desenho para representar as bruxas e as vassouras do problema em questão mas não progride para encontrar a solução.

O voo das bruxas

20 bruxas têm de viajar em 8 vassouras para um encontro em Lisboa. Porém, nenhuma vassoura pode levar mais do que 4 bruxas nem menos do que 2. Como voarão as bruxas?

(Adaptado de Woleck, 2001)

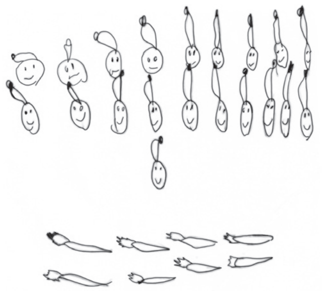


Figura 1.—Desenho representa a situação na resolução do problema do voo das bruxas[1]

Uma outra forma de os alunos usarem os desenhos consiste em representar a situação correspondente à solução do problema utilizando apenas o desenho, como está ilustrado na figura 2. Note-se que nesta representação é o retrato da solução do problema que está representada (representação como produto), sem se conhecer de que modo o aluno terá concluído que cabiam três rebuçados a cada amiga (representação como processo).

Os rebuçados

A Rita tem 9 rebuçados que quer distribuir pelas suas três amigas, de modo a que cada amiga receba o mesmo número de rebiçados. Quantos rebuçados recebe cada amiga?

(Adaptado de Ferreira, 2003)

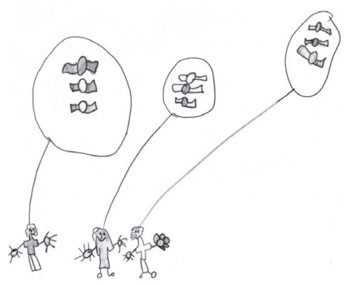


Figura 2.—Desenho que representa a solução na resolução do problema dos rebuçados

Por último, os alunos podem, também, usar os desenhos como ilustração de elementos da situação do problema, mas sem que o desenho interfira na resolução do problema, como se pode observar relativamente ao desenho do elefante no problema «A higiene do elefante», que tem uma função meramente ilustrativa (figura 3).

A HIGIENE DO ELEFANTE

Um elefante gasta dois sabonetes por dia na sua higiene. Quantos sabonetes gastará em cinco dias?

(Adaptado de Smole & Diniz, 2001)

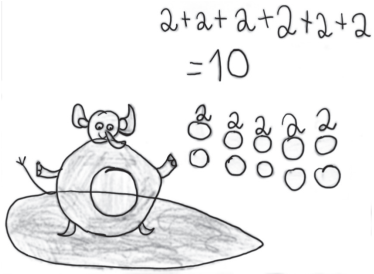


Figura 3.—Desenho ilustra elemento do contexto do problema «A higiene do elefante»

Note-se que a representação através de desenho nem sempre reverte a favor do raciocínio matemático dos alunos, como se pode observar nos casos aqui retratados nos desenhos da figura 1 e da figura 3. No entanto, Woleck (2001) afirma que o recurso ao desenho pelas crianças pode constituir um precursor da utilização de símbolos matemáticos.

Símbolos não convencionais

Os símbolos não convencionais correspondem a representações idiossincráticas (Santos, 1991) que são criadas e utilizados pelas crianças para representar determinados elementos do real, surgindo, por exemplo, sob a forma de traços verticais, traços horizontais, círculos, setas, etc... Enquanto que no desenho o aluno apresenta pormenores e detalhes tal como os vê na realidade, no símbolo não convencional representa sinteticamente alguém ou alguma coisa, usando o símbolo para assinalar a existência desse alguém ou coisa mas sem o tentar descrever. Um caso típico consiste na representação de uma pessoa – quando a criança a desenha, geralmente dota-a de tronco, cabeça e membros, cabelo e olhos e boca, e frequentemente roupa; quando a criança a representa por símbolos não convencionais, pode apenas usar uma bola com dois traços, por exemplo.

Uma ilustração deste tipo de representação pode observar-se na figura 4, na qual o aluno utiliza diversos símbolos idiossincráticos: traços verticais para representar as rodas relativas a quatro bicicletas (linha de cima) e a três triciclos (linha de baixo). É através da contagem destes traços que o aluno obtém os números de rodas total de cada tipo de veículo, embora não tenha apresentado a solução do problema propriamente dito.

O número de rodas
Quantas rodas existem em quatro bicicletas e três triciclos?

(NCTM, 2007, p. 163)

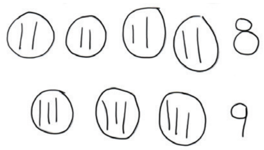


Figura 4.—Representação com símbolos não convencionais do problema «O número de rodas» (NCTM, 2007, p.163)

A criança muitas vezes utiliza estes símbolos que ela própria cria para complementar as ideias que coloca no papel através de desenhos. Por exemplo, pode incluir uma seta com a intenção de indicar movimento de um ser desenhado, ou um círculo para evidenciar uma disposição circular dos objetos desenhados. Desta forma, estes símbolos estão impregnados de significado e a sua consideração é importante para se compreender de forma mais completa o raciocínio dos alunos.

Diagrama
Um outro tipo de representação icónica é o diagrama, por vezes também designado por esquema. Um diagrama é uma representação visual que apresenta os dados e as suas relações num formato espacial (Diezmann & English, 2001). Trata-se de uma representação estrutural em que os detalhes descritivos não são importantes. A sua elaboração constitui uma heurística importante para a resolução de problemas (Wong, 2004). Os diagramas podem ser encarados como representações da estrutura dos problemas e podem transformar-se em verdadeiras ferramentas de apoio ao raciocínio matemático por permitirem desocultar as relações matemáticas em presença, como é muito visível no pensamento algébrico (Canavarro, 2009). Além disso, facilitam o desenvolvimento de inferências corretas sobre a situação representada, tornando-se, assim, uma ferramenta poderosa para raciocinar e obter soluções de problemas mais complexos.

Diezmann e English (2001) reportam-se a estudos publicados em 1999 por Novick, Hurley e Francis para identificar quatro tipos de diagramas que representam relações específicas entre os dados de um problema: i) diagramas em rede (networks); ii) matrizes (matrices); iii) diagramas de hierarquias (hierarchies); iv) diagramas parte-todo (part-whole diagrams).

Os diagramas em rede são diagramas que consistem em conjuntos de elementos interligados por uma ou mais ligações, em geral representadas por linhas. Este tipo de diagrama, quando formado por poucos elementos e poucas ligações entre os mesmos, é, por vezes, nomeado por diagrama de linhas (line diagram).

Problema da rã

Uma rã tentava saltar para fora de um poço. Cada vez que a rã saltava, subia quatro filas de tijolos, mas como estes estavam escorregadios, descia uma fila. Quantos saltos tem a rã de dar se o poço tiver 12 filas de altura?

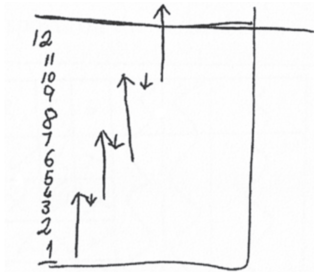


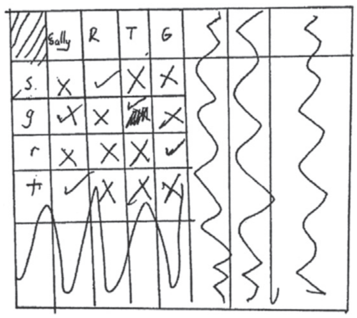
Figura 5.—Diagrama em rede elaborado por aluno na resolução do problema da rã (Diezmann & English, 2001, p. 78)

A figura 5 ilustra um diagrama em rede construído por uma aluna de dez anos. A aluna representou as filas de tijolos do poço por uma coluna vertical de números e indicou os movimentos ascendentes e descendentes da rã através de linhas orientadas (ou setas). A disposição espacial das setas permitiu-lhe facilmente coordenar e localizar os movimentos da rã durante um certo número de dias. O diagrama construído representou com clareza a estrutura do problema e forneceu as bases para determinar a solução correta (Diezmann & English, 2001).

As matrizes referem-se a diagramas que utilizam duas dimensões para representar as relações que existem entre dois conjuntos de informação, ou seja, organizam os dados em tabelas de dupla entrada. São particularmente vantajosos em problemas que requerem raciocínio combinatório. Também são muito úteis nos problemas que envolvem dedução porque ajudam o aluno a eliminar ou a localizar a informação conhecida e possibilitam que a informação implícita se torne mais explícita. Este tipo de diagrama em matriz encontra-se ilustrado na figura 6.

Problema dos desportos

Quatro amigos gostam de diferentes desportos. Um gosta de ténis (tennis), outro de natação (swimming), outro de correr (running) e outro gosta de ginástica (gym). Cada pessoa gosta de apenas um desporto. Utiliza as pistas para saber de que desporto gosta cada amigo:



1. A Sally e o Rick encontraram-se quando um deles ganhou uma corrida de natação.
2. A Tara e o Greg encontraram-se quando um deles exercitava no ginásio.
3. A Sally não é nem nadadora nem corredora.
4. O Greg é amigo do irmão do(a) ginasta.

Figura 6.—Diagrama em matriz elaborado por aluno na resolução do problema dos desportos (Diezmann & English, 2001, p. 80)

Na matriz desenhada por este aluno (figura 6), os quatro amigos são representados na entrada horizontal e os quatro desportos na entrada vertical. O aluno utilizou a primeira e a terceira pista para deduzir corretamente que Rick era o nadador. Esta dedução foi representada através de um visto na célula correspondente da matriz. Além disso, foi usando cruzes para eliminar os casos impossíveis, à medida que os identificava, e indicou com vistos os casos solução.

Os diagramas de hierarquias são aqueles que relacionam a informação relativa ao problema através de caminhos, em geral convergentes, que permitem chegar à solução. Os diagramas em árvore são um exemplo deste tipo de diagrama. O diagrama ilustrado na figura 7 é um exemplo de um diagrama de hierarquia.

Problema de voleibol

Quatro equipas disputam uma final de voleibol. A equipa A vence a equipa B e a equipa C perde para a equipa D.
Quem foi o vencedor sabendo que a equipa D perdeu o jogo final?

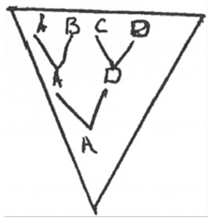


Figura 7.—Diagrama de hierarquia elaborado por aluno para a resolução do problema de voleibol (Diezmann & English, 2001, p. 81)

O diagrama de hierarquia da figura 7 representa claramente a estrutura do problema. Na primeira linha do diagrama o aluno representou as quatro equipas; na segunda linha apenas apresenta as equipas vencedoras da primeira volta; na última linha, surge apenas a equipa vencedora da competição de voleibol (Diezmann & English, 2001).

Por fim, os diagramas parte-todo representam a relação que existe entre a parte e o todo que constitui a solução do problema. Ao contrário dos dois tipos anteriores de diagrama referidos, os diagramas parte-todo não têm uma forma externa particular que os identifique. O diagrama ilustrado na figura 8 representa um diagrama parte-todo, em que a parte corresponde ao número de pernas do par pessoa-cão (6 pontinhos) e o todo é o número total de pernas (48 pontinhos) (Diezmann & English, 2001).

Problema do parque

A Jane viu algumas pessoas a passear os seus cães no parque. Ela contou as pernas e descobriu que ao todo eram 48 pernas. Quantas pessoas e quantos cães estavam no parque? Existem outras soluções?

(Diezmann & English, 2001, p. 81)

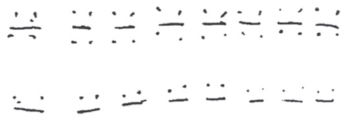


Figura 8.—Diagrama parte-todo elaborado por aluno para a resolução do problema do parque (Diezmann & English, 2001, p. 81)

Como se pode observar nos exemplos acima apresentados, é o facto de existir uma organização espacial correspondente à estrutura matemática do problema que faz de uma representação um diagrama. Na sua constituição, o diagrama pode ser composto apenas por símbolos não convencionais (figura 8 e figura 4), pela combinação de símbolos não convencionais e convencionais (figura 5 e figura 7) ou, ainda, pela combinação de desenhos e símbolos não convencionais (e eventualmente convencionais também).

É importante que os alunos tenham a possibilidade de desenvolver a sua capacidade de produzir e utilizar bons diagramas. Diezmann e English (2001) adotam o conceito de literacia do diagrama para referir a vantagem de os alunos conhecerem a razão por que um diagrama pode ajudar a resolver um problema, qual o diagrama mais apropriado para dado problema ou situação e como o utilizar para, efetivamente, obter uma solução. Para que esta literacia do diagrama possa ser desenvolvida, os alunos precisam de oportunidades não só para elaborarem diagramas, mas também para explicarem as suas ideias acerca dos diagramas e para discutirem e esclarecerem as suas dúvidas.

Com o objetivo de ajudar os alunos a compreender as relações existentes entre o problema e a sua representação, o professor deverá: (i) explicar a ligação que existe entre a estrutura de um problema e a sua representação através do diagrama; (ii) modelar a criação de um diagrama e explicar como os diversos componentes do problema são representados; (iii) encorajar os alunos a discutir entre si os seus diagramas bem como as semelhanças e diferenças em vários diagramas que podem representar o mesmo problema; (iv) conduzir os alunos para o estudo dos diferentes tipos de diagrama e apresentar-lhes problemas que podem ser representados por cada um deles e (v) proporcionar oportunidades aos alunos de identificar qual dos diagramas é mais apropriado para representar um determinado problema (Diezmann & English, 2001).

Segundo Diezmann e English (2001), os professores poderão desenvolver o raciocínio dos alunos a partir dos diagramas de duas formas: (i) realçando a importância da precisão na localização e no movimento dos elementos num diagrama e (ii) encorajando os alunos a utilizarem estratégias de orientação quando constroem o diagrama para que o mesmo não fique demasiado confuso. Para além disso, é importante que os alunos verifiquem a correção dos diagramas e o raciocínio que fizeram sobre eles.

Representações simbólicas convencionais

Aprofundamos, de seguida, algumas ideias essenciais sobre este tipo de representação, reportando-nos, essencialmente, à linguagem simbólica utilizada por via escrita por ser esta que tem mais pertinência atendendo ao foco do artigo.

A escrita constitui um importante recurso de representação das ideias dos alunos nas aulas de Matemática e, segundo Cândido (2001), possui duas características muito próprias: (i) auxilia a recuperação da memória, uma vez que muitas discussões orais poderiam ficar perdidas sem o registo escrito e (ii) possibilita a comunicação à distância no espaço e no tempo, bem como a troca de informações com outras pessoas que, desta forma, têm acesso ao que foi pensado e vivido. Ao trabalhar estas funções da escrita na sala de aula, o professor proporciona ao aluno a possibilidade de «descobrir a importância da língua escrita e de seus múltiplos usos, ao mesmo tempo que as ideias matemáticas são aprendidas» (Cândido, 2001, p. 23).

Ao referirmo-nos a representações simbólicas convencionais, referimo-nos ao conjunto de símbolos específicos da Matemática cujo significado é partilhado, símbolos esses que representam noções abstratas e relações. Entre estes encontram-se, por exemplo, os algarismos e demais numerais, símbolos aritméticos como os sinais de operações, símbolos algébricos como as variáveis, ou ainda tabelas de dupla entrada, gráficos cartesianos, diagramas de pontos.

Para Cavalcanti (2001), os alunos deverão ter acesso à linguagem matemática de forma equilibrada e gradual, a ser desenvolvida por «aproximações sucessivas», em situações em que haja lugar para o seu uso. À medida que os alunos têm oportunidade de utilizar as representações que consideram válidas e de as confrontar com representações simbólicas convencionais, têm, também, a possibilidade de descobrir as funções e as potencialidades deste tipo de linguagem. Ao compararem a linguagem matemática convencional com as suas representações próprias idiossincráticas, podem reconhecer que a simbologia matemática permite uma maior economia de esforço e tempo na representação das ideias e, até, na obtenção da solução de um problema.

O uso dos símbolos, em especial das letras, vem simplificar a referência aos elementos presentes na situação em estudo e agilizar a expressão das generalizações em causa, funcionando como uma poderosa ferramenta linguística (Smith, 2003). A introdução das letras viu nas recomendações do NCTM (2000) antecipada a sua abordagem para os alunos do 3.º ao 5.º ano, sugerindo-se a representação da noção de variável, enquanto quantidade desconhecida, através de uma letra ou símbolo, ou a expressão de relações matemáticas através de equações. Na realidade, a investigação tem vindo a evidenciar a possibilidade de alunos do 1.º ciclo utilizarem com vantagem as letras, introduzidas com naturalidade e no contexto de problemas como abreviaturas dos elementos em jogo ou para representar quantidades indefinidas (Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2008).

Tal como as representações idiossincráticas dos alunos são importantes, «é igualmente importante que os alunos aprendam formas de representação convencionais, de modo a facilitar quer a sua aprendizagem da Matemática, quer a comunicação com terceiros das suas ideias matemáticas» (NCTM, 2007, p. 75). É, ainda, importante que os alunos reconheçam que, pelo seu caráter partilhado, a linguagem simbólica tem a vantagem de poder ser lida e compreendida da mesma forma por todas as pessoas que a conhecem, conseguindo-se assim chegar a uma população mais alargada.

No que diz respeito à sua iniciação por parte dos alunos, a utilização de símbolos matemáticos deverá ser posterior a outras formas de comunicação de ideias matemáticas. Assim, ser-lhes-á mais fácil relacionar, de forma significativa, a sua linguagem quotidiana e as formas pessoais de representação de tipo icónico que usam de forma espontânea com a linguagem e símbolos matemáticos que vão aprendendo (NCTM, 2007).

Metodologia

Opções fundamentais

Este artigo reporta-se a uma investigação mais ampla (Pinto, 2009) desenvolvida com o propósito de compreender o papel que as representações elaboradas por alunos do 1.º ano de escolaridade desempenham na resolução de problemas matemáticos diversos. No presente artigo fazemos uma reanálise de alguns dados então recolhidos com o intuito de caracterizar as representações usadas pelos alunos, dando especial ênfase ao diagrama, e de analisar com detalhe as funções que estas representações desempenham como contribuições para o raciocínio dos alunos no contexto da resolução de problemas. Assim, optámos por escolher três dos casos elaborados por Pinto (2009), correspondentes a alunos com forte tendência para produzir diagramas, os quais designamos pelos nomes fictícios de Ema, André e José.

Note-se que estes alunos, à data da recolha de dados, eram alunos de 1.º ano da turma da segunda autora deste artigo, professora numa escola EBI de uma cidade do Alto Alentejo. A recolha dos dados aqui analisados concretizou-se em sala de aula regular, nos 2.º e 3.º períodos do ano letivo de 2007/08. Antes disso, no primeiro período, enquanto decorria a adaptação da professora e dos alunos à nova realidade escolar própria do 1.º ano, os alunos foram tendo contacto com problemas diversificados, que foram resolvendo por meios próprios e discutindo na turma. Esta fase foi importante para que os alunos se familiarizassem com tarefas de natureza problemática e começassem a mostrar alguma desenvoltura em as resolver, reconhecendo-se a importância da continuidade do desenvolvimento deste tipo de trabalho, numa cultura de aula que valorize as suas contribuições e que promova a comunicação e discussão (NCTM, 2007).

A opção por tarefas de natureza problemática adveio do interesse que estas têm no presente estudo em que se pretende analisar o contributo das representações para o raciocínio dos alunos. Boavida et al. (2008) reconhecem um papel fundamental à resolução de problemas e consideram que esta tem múltiplas potencialidades, nomeadamente associadas a outros aspetos das capacidades transversais: «[a resolução de problemas] proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação; fomenta o raciocínio e a justificação; (…)» (p. 14).

Durante os 2.º e 3º. períodos, com um intervalo de pouco mais de uma semana, os alunos resolveram dez problemas de processo (Vale & Pimentel, 2004) que foram escolhidos por poderem ser resolvidos por uma ou mais estratégias e por suscitarem o recurso a diferentes tipos de representações. Além disso, os problemas evocavam raciocínios matemáticos de natureza diversa (por exemplo, estabelecer relações lógicas, fazer combinações, raciocinar proporcionalmente, …).

Para cada problema, foi entregue a cada aluno uma folha de registo, contendo o enunciado e um espaço próprio destinado à resolução escrita do mesmo, no qual era solicitado «Explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números». Os alunos tinham, também, à disposição na sala materiais manipuláveis (como cubos, tampas, palhinhas, etc.) aos quais podiam recorrer se desejassem – tal como aconteceu no primeiro período letivo.

Como já foi dito, a recolha de dados realizou-se em contexto de aula normal, decorrendo, em geral, o trabalho dos alunos no primeiro período da manhã. Por se tratar de uma turma do 1.º ano, cada problema foi lido pela professora aos alunos que acompanharam esta leitura através do enunciado da folha de registo previamente distribuída. Após a leitura, o problema foi interpretado oralmente, ouvindo-se as contribuições dos alunos até a professora se certificar de que, pelo menos a maioria, tinha apreendido corretamente o seu objetivo. À medida que as competências dos alunos na leitura foram melhorando, era-lhes, também, solicitado que lessem, silenciosamente, o enunciado do problema, embora o mesmo continuasse posteriormente a ser lido para toda a turma. Após o esclarecimento das dúvidas existentes, os alunos dispunham do tempo que desejassem para resolverem os problemas propostos, após o que entregavam as folhas com a respetiva resolução (ou em branco, caso não conseguissem resolver).

Após a resolução de alguns dos problemas, existiu um espaço de partilha na turma. Numa primeira fase, a apresentação das resoluções era voluntária. Os alunos que mostravam interesse em falar, explicavam, apoiados na respetiva folha de registo, a forma como tinham determinado a solução. Numa segunda fase, quando os alunos já sentiam uma maior segurança e confiança, quer no seu trabalho, quer perante a turma, as resoluções a apresentar passaram a ser maioritariamente selecionadas pela professora de modo a poderem ser partilhadas e discutidas as mais relevantes do ponto de vista das potencialidades das representações usadas.

Atendendo ao propósito deste artigo e às limitações da sua dimensão, referimo-nos apenas a dois dos problemas:

Problema dos periquitos (Adaptado de Gave, 2001)

O Pedro tem dez periquitos. Todos os dias o Pedro dá, a cada dois periquitos, três folhas de alface. Quantas folhas de alface tem o Pedro de dar, por dia, aos seus dez periquitos?

Problema dos apertos de mão (Adaptado de Stancanelli, 2001)

A Rita, o Nuno, o Paulo e a Lili são amigos. Quando chegaram à escola cumprimentaram-se e cada um deu um aperto de mão aos outros. Quantos apertos de mão deram ao todo?

Selecionámos estes problemas pelo seu caráter ilustrativo da tipologia das representações usadas pelos alunos, em especial os diagramas, e também por revelarem diferentes funções destas representações para o raciocínio dos alunos.

Recolha e análise de dados

Os dados referidos neste artigo são provenientes de duas fontes distintas. Uma delas é a análise documental das folhas de registo, referidas na secção anterior, nas quais os alunos responderam por escrito aos problemas. Esta análise foi fundamental para a identificação e caracterização das representações usadas em cada um dos problemas.

A segunda fonte de dados foram os registos vídeo das entrevistas a que Ema, André e José responderam, tendo presente o registo escrito das resoluções que fizeram. As gravações vídeo foram sempre realizadas pela professora a seguir à resolução ou no próprio dia, também em contexto de sala de aula, enquanto a restante turma desenvolvia outro trabalho. A análise destas explicações permitiu complementar, para cada aluno, a compreensão dos raciocínios evidenciados nas resoluções escritas, com a explicitação oral das relações que estabeleceram e por que ordem, do modo como chegaram à solução de cada problema e dos significados que atribuíram às representações que criaram.

A análise de dados consistiu num processo essencialmente interpretativo, orientado pelas questões da investigação e inspirado na revisão de literatura realizada. Com base no referencial teórico, foram definidas a priori algumas categorias de análise principais. Tendo em conta o foco deste artigo, importa aqui considerar as categorias relativas aos tipos de representação utilizados e às suas funções no contexto da resolução dos problemas.

No que diz respeito aos tipos de representação, e tomando por base diversos autores, e em especial Bruner (1999), consideram-se três categorias principais: i) Representações ativas (dramatizações pelos alunos, manipulação de materiais); ii) Representações icónicas (desenhos, diagramas, símbolos não convencionais); iii) Representações simbólicas (algarismos, sinais de operações ou igual, expressões matemáticas, letras ou palavra escrita). No entanto, tendo em conta que neste artigo não se analisam problemas resolvidos com recurso a representações ativas, só são utilizadas as duas últimas categorias relativas a representações icónicas e representações simbólicas.

No que diz respeito às funções das representações, e tendo por referência diversas publicações, em especial o NCTM (2007), definiram-se quatro categorias principais: i) Compreender; ii) Organizar; iii) Registar; iv) Comunicar. No entanto, com o decorrer da análise, as categorias relativas às funções das representações foram por nós ajustadas. A função de registar deixou de ser pertinente uma vez que só analisávamos resoluções escritas e, portanto, obrigatoriamente alvo de registo. No lugar da função de compreender adotámos a função de interpretar, pois a representação revela realmente como a criança interpreta o problema (independentemente de a ter ou não compreendido corretamente). No lugar da função de organizar optámos por considerar as funções de estabelecer relações matemáticas, desocultar a estrutura matemática do problema e obter a solução do problema, pois estas três funções resultam todas de ações de organização dos dados e suas relações; acrescentámos a função de rever o processo de resolução que ainda não estava considerado. Já no lugar da função de comunicar, optámos por a concretizar em explicar/justificar o processo de resolução, pois exprimem de forma mais direta as intenções ou ações da criança. Pensamos que este ajustamento acolhe melhor a diversidade de funções encontradas nas representações que os alunos criaram ao resolver os problemas. Assim, para analisar as funções das representações acabámos por estabilizar seis categorias: i) interpretar a situação; ii) estabelecer relações matemáticas; iii) desocultar a estrutura matemática; iv) obter a solução; v) rever o processo de resolução; vi) explicar e/ou justificar o processo de resolução

Os alunos e as suas representações matemáticas

Ema

Ema resolve o problema dos periquitos na sua folha de registo apresentando a resolução da figura 9.

Figura 9.—Resolução do problema dos periquitos realizada por Ema

Ao explicar oralmente como tinha feito, olhou para a sua resolução e, apesar de não ter desenhado nem periquitos nem folhas, falou como se tais elementos estivessem realmente representados na folha de papel. Conta que começou por escrever o número 10 representativo do total de periquitos e explica o raciocínio que seguiu: «Comecei a dar, a cada dois periquitos, três folhas e a seguir contei quantas folhas eram.» Quando questionada acerca de como sabia que devia parar ao fim de cinco grupos de folhas, Ema voltou a explicar que as primeiras três folhas eram para dois periquitos, as outras três para outros dois periquitos e por aí fora, até ter dado folhas a todos os periquitos – justificando com isto porque é que as folhas eram 15. Assim, parece que a aluna contou mentalmente de dois em dois, até perfazer os dez periquitos, provavelmente recorrendo ao processo frequentemente trabalhado nas aulas de fazer contagens de dois em dois.

A representação adotada por Ema é essencialmente composta por tracinhos horizontais que escolheu para representar as folhas de alface que dava a cada dois periquitos. Ao utilizar estes símbolos idiossincráticos representativos do real, Ema vê-os impregnados de significado e não necessita de recorrer a representações menos formais e mais concretas — como seria o desenho dos periquitos, mais moroso e não mais eficaz. Note-se que estes tracinhos não estão dispostos aleatoriamente, antes pelo contrário. A organização em grupos de três permitiu-lhe não só representar o que cada par de periquitos come, como também o que comem todos os dez periquitos. Esta representação constitui claramente um diagrama, que pode ser classificado como diagrama parte-todo uma vez que representa a relação que existe entre a parte (três folhas para dois periquitos) e o todo (quinze folhas para dez periquitos).

Ao elaborar este diagrama, Ema conseguiu não só representar a situação e dar-lhe significado, como evidenciar a estrutura matemática presente e raciocinar sobre ela de modo a encontrar corretamente a solução do problema: 15, valor provavelmente também calculado mentalmente como adição sucessiva de cinco parcelas 3 mas plenamente justificado. Este valor é apresentado através dos algarismos inscritos num círculo, o que lhe dá um estatuto diferente de solução. Assim, Ema usa representações simbólicas quer para indicar os dados iniciais do problema (10 periquitos), como para exibir a solução que encontrou (15 alfaces).

Relativamente ao problema dos apertos de mão, Ema apresenta a resolução representada na figura 10.

Figura 10.—Resolução do problema dos apertos de mão realizada por Ema

Ema desenhou o corpo completo das crianças, com bastantes pormenores, e escreveu os respetivos nomes. Ligou as crianças através de linhas as quais representam os apertos de mão que deram entre si. De cada criança desenhada sai uma linha em cujo extremo está um círculo com o algarismo 3. Quando inquirida sobre o significado desse 3, Ema apontou para as diferentes crianças desenhadas e explicou: «Esta [Rita] dava [um aperto de mão] a este [Nuno] e também dava a este [Paulo] e a esta [Lili] (…)». A explicação continuou do mesmo modo, com a aluna a percorrer os quatro intervenientes até considerar que todos se tinham cumprimentado uns aos outros.

Para elaborar esta resolução, Ema conciliou a utilização do desenho e da palavra escrita para representar as crianças, com linhas que representam os cumprimentos entre os amigos. Foi esta forma, muito pessoal, que a aluna encontrou para evidenciar as relações existentes e para concluir que cada amigo cumprimentava os outros três. Daqui chega à solução, provavelmente obtida pela adição sucessiva de quatro parcelas de 3, que perfaz um total de doze apertos de mão, número que a aluna registou com algarismo em destaque antecedido do sinal de igual. Assim, Ema construiu assim um diagrama parte-todo, em que cada amigo representa um parte do problema.

Ao elaborar este diagrama, Ema conseguiu representar a situação e dar-lhe significado, e também desocultar a estrutura matemática do problema, embora de forma não completamente conseguida. O que faltou a Ema foi reconhecer a reciprocidade de cada cumprimento entre cada par de alunos e por isso não conseguiu obter a solução correta do problema. O seu diagrama permite-nos identificar precisamente esta falha e compreender a razão de a aluna responder 12 (o dobro do número efetivo de apertos de mão dados).

A análise conjunta dos diagramas elaborados por Ema revela que a aluna usa símbolos não convencionais ou desenhos para interpretar e dar sentido às situações problemáticas, os quais dispõe de forma a estabelecer relações e evidenciar a estrutura matemática e, daí, obtém a solução. Assim, os diagramas funcionam como ferramenta para o seu raciocínio. Salienta-se que no problema dos periquitos o diagrama revela inclusive aspetos implícitos do raciocínio da aluna que ela não consegue explicitar oralmente mas que se tornam evidentes. Também evidente se torna qual a interpretação feita pela aluna no problema dos apertos de mão e que a levou a apresentar uma solução errada para o problema. Os diagramas serviram, ainda, de recurso para a aluna comunicar o processo de resolução dos problemas, pois baseou-se neles para explicar como pensou e obteve as soluções.

André

André resolve o problema dos periquitos conforme se pode ver na figura 11.

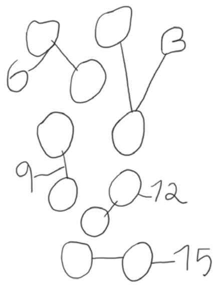


Figura 11.—Resolução do problema dos periquitos realizada por André

Quando explica oralmente como pensou, André apoia-se na representação criada e afirma:

> André: Os dois periquitos comeram três [folhas] [aponta com o seu dedo para o primeiro grupo de dois círculos, ligado ao algarismo três]; depois aumentaram mais três [aponta com o seu dedo para o algarismo seis] e foram sempre aumentando mais três [aponta com o seu dedo para o grupo do algarismo nove], nove, doze até quinze.

André consegue assim justificar como obteve a solução, evidenciando a correta interpretação que fez da situação e a forma como usou a representação para ir construindo progressivamente a resposta ao problema. O aluno representou os dez periquitos por círculos que agrupou dois a dois por intermédio de um segmento, o que lhe permitiu formar cinco pares de periquitos. De cada um destes cinco pares fez sair um segundo segmento em cujo extremo escreve o resultado da contagem de três em três: três, seis, nove, doze e quinze, correspondente ao número de folhas de alface que ia sendo comido pelos periquitos de cada vez que juntava mais um par de periquitos.

A forma como o aluno desenhou os pares de periquitos não é, do nosso ponto de vista, espacialmente arrumada, mas mesmo assim ajudou-o a controlar as quantidades de elementos presentes na situação. Além disso, permitiu-lhe ancorar a contagem que identificou como uma regularidade para determinar o número de folhas de alface comidas: «foram sempre aumentando mais três». Assim, esta representação constitui um diagrama em rede que possibilita ao aluno não só gerir os dados da situação, como estabelecer relações entre eles e concluir sobre a solução de uma forma bastante eficaz — arriscamos conjeturar que se o problema fosse estendido a um maior número de periquitos, o aluno teria facilidade em adotar a contagem de três em três como modelo para encontrar novos números de folhas de alface comidas.

Para resolver o problema dos apertos de mão, André apresentou a resolução da figura 12.

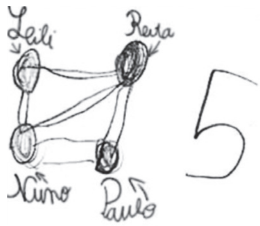


Figura 12.—Resolução do problema dos apertos de mão realizada por André

O aluno representou cada um dos quatro amigos por círculos que identificou escrevendo os respetivos nomes. Todos os círculos estão ligados entre si (com exceção de dois deles) por duas linhas que estabelecem as relações entre os intervenientes e que representam, segundo o aluno, os apertos de mão entre os amigos. Questionado sobre a razão da existência de duas linhas entre os círculos, André explicou que correspondiam ao cumprimento que um amigo dá ao outro e vice-versa, tendo contabilizado essa dupla linha como um único aperto de mão.

Apoiando-se no registo escrito, André explicou o raciocínio seguido:

> André: Fiz quatro bolinhas que eram eles [os quatro amigos] e depois fui fazendo risquinhos que eram os cumprimentos.
>
> Professora: Então explica lá os cumprimentos que eles deram.
>
> André: [apontando para a palavra Lili] A Lili deu ao Nuno [um aperto de mão], a Lili também deu à Rita [simultaneamente segue com o dedo as linhas que ligam estes amigos], [pequena pausa, observando o diagrama feito] … esqueci-me do Paulo!

A forma como André organizou os elementos que escolheu para representar os elementos presentes na situação e as relações matemáticas entre eles, permitem-lhe evidenciar a estrutura do problema e obter a sua solução. Trata-se de um diagrama em rede, uma vez que o aluno conseguiu representar as relações existentes entre os diferentes elementos e associá-los para produzir uma visão global da situação.

André exibe a sua resposta ao problema usando a notação convencional, que usa para registar com destaque o 5 relativo ao total de apertos de mão que contou. Embora esta não seja a solução do problema, todo o raciocínio seguido por André está correto. Aliás, o próprio aluno identifica a sua falha ao rever o diagrama, como se pode constatar no diálogo acima transcrito. É a falta de estabelecer uma ligação entre o Paulo e a Lili que ocasiona que a sua solução seja inferior em uma unidade à solução real do problema, o que é bem percetível no diagrama. Assim, neste caso, o diagrama serviu não só para que André desse significado à situação, desocultasse a sua estrutura matemática e produzisse uma solução, como para que revisse o seu raciocínio e o pudesse corrigir. Além disso, André consegue justificar o porquê de a solução correta ser 6.

Ao analisar os dois diagramas apresentados por André, observamos que começou por usar símbolos não convencionais por ele criados para interpretar e dar sentido às situações, associou-os de modo a estabelecer relações matemáticas entre eles e, assim, descobriu a estrutura matemática geral presente nos problemas. No problema em que existiam pessoas, escreveu, também, os seus nomes para as identificar. Usou os símbolos convencionais matemáticos para registar os valores associados à resolução do problema ou à sua solução, no caso em que não recorreu a cálculo mas apenas à contagem. Em ambos os problemas, o aluno construiu diagramas em rede bastante eficazes, nos quais se apoiou para raciocinar e obter soluções, mas também para explicar e justificar como pensou, explicitando com clareza os processos de resolução. Acrescentamos, ainda, o papel que o diagrama teve para que o aluno identificasse ele mesmo um erro (esquecimento) cometido ao resolver o problema dos apertos de mão.

José

José resolveu o problema dos periquitos apresentando a resolução representada na figura 13.

Figura 13.—Resolução do problema dos apertos de mão realizada por José

A resolução do aluno mostra dez periquitos desenhados, rodeados dois a dois por uma linha circular fechada. No interior de cada uma, encontram-se, também, três desenhos ou manchas verdes, as alfaces. Cada conjunto representa a relação que existe entre cada par de periquitos e o número de folhas consumido por ele, como explica o próprio aluno:

> José: Se o Pedro em cada dia dava três folhas a dois periquitos eu fiz dois periquitos e três alfaces, três folhas, e depois fiz uma bola à volta. Fiz primeiro os dez periquitos e depois fiz as folhas e depois fiz um grupinho com os dois [periquitos e folhas de alface]. E depois pus aqui [aponta para a expressão matemática] três mais três mais três mais três mais três que eram todas as três folhas [aponta para as folhas de cada conjunto do diagrama] e depois fiz a conta e vi que eram quinze.

Assim, percebe-se que o aluno usou o desenho dos periquitos para organizar a informação e o desenho das alfaces para estabelecer a relação entre os periquitos e as alfaces consumidas, dando origem a um diagrama parte-todo em que cada conjunto pássaros-alface representa uma parte da situação.

Na explicação oral, José refere-se, ainda, à forma como concluiu sobre a solução do problema e justifica-a, recorrendo a uma outra representação totalmente simbólica onde exprime formalmente o raciocínio realizado correspondente à adição sucessiva de cinco parcelas 3, que tem como resultado 15.

O diagrama de José é elaborado tomando como elementos base os seus desenhos dos periquitos, alguns dos quais são bastante perfeitos e completos mas outros surgem mais simplificados, acusando provavelmente algum cansaço do aluno em desenhar tantos periquitos. O mesmo fenómeno se observa relativamente às folhas de alface, pois algumas estão bastante bem definidas mas outras aparentam ter sido feitas com menos paciência ou mais apressadamente.

Além disso, José regista de forma perfeita a expressão matemática correspondente à estrutura matemática da situação e que permite obter a solução do problema, revelando um bom domínio da linguagem simbólica que já conhece aos seus seis anos de idade (algarismos, sinal de operação, sinal de igual).

Para resolver o problema dos apertos de mão, José apresenta a resolução da figura 14.

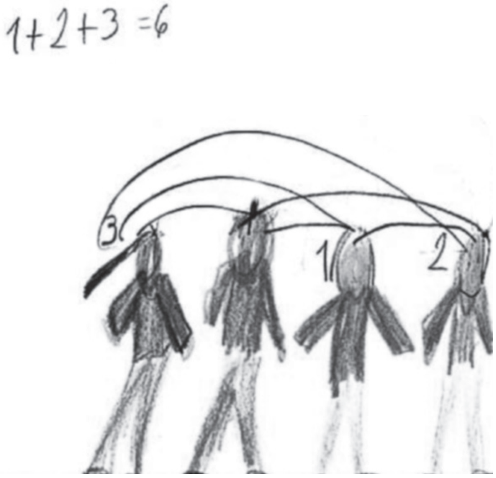


Figura 14.—Resolução do problema dos periquitos realizada por José

O aluno apresenta o desenho dos quatro amigos, com alguns detalhes mas sem pormenores, distinguindo-se as raparigas apenas pelo cabelo mais longo e de forma muito ténue (primeira e terceira pessoas desenhadas). Os quatro amigos estão ligados através de arcos que tocam as suas cabeças, correspondendo, cada arco, a um aperto de mão, como José explicou. Junto a três deles, estão escritos os algarismos 3, 1 e 2 respetivamente junto do primeiro, do terceiro e do quarto amigo (a contar da esquerda para a direita), que contabilizam o número de apertos de mão dado por iniciativa própria a cada um dos amigos. A explicação de José revela, com muita clareza, como pensou e desvenda qual a justificação:

> José: Este [aponta para o primeiro amigo do lado esquerdo] dava a este [aponta para o segundo amigo], já era um [aperto de mão]; mas não podia ser só com este também tinha de ser com este [terceiro amigo] e com este [quarto amigo], por isso pus uns riscos assim [aponta para os três arcos]. Este aqui [quarto amigo] como já tinha dado um aperto de mão a este [primeiro amigo]... por isso só dava mais [apertos de mão] com este [terceiro amigo] e com este [segundo amigo]. E depois este aqui [aponta o terceiro amigo] como já tinha dado a todos menos a este [segundo amigo] dá um [aperto de mão] a este.

Desta forma, José construiu um diagrama em rede que lhe permitiu representar os elementos do problema e as suas diversas relações, ilustrando de forma completa a situação. A estrutura matemática do problema revela-se através dos arcos em que associa todos os amigos, permitindo a sua identificação e contagem parcial para chegar à solução do problema. Assim, o diagrama foi essencial para dar significado ao problema e para apoiar o raciocínio matemático realizado e explicitado.

José apresentou, também, uma outra representação totalmente simbólica onde formalizou o processo de obtenção da solução através de uma expressão com símbolos matemáticos formais onde adiciona os números de apertos de mão para obter a solução 10. De registar que, nesta expressão, o aluno escreve as parcelas relativas ao número de apertos de mão dados pelos amigos, não pela ordem em que surgiram no diagrama mas seguindo antes a ordenação numérica crescente. Este facto poderá dever-se a variadas razões mas uma conjetura que temos é que, de algum modo, o aluno poderá ter intuído alguma regularidade nos números envolvidos. Talvez o diagrama usado por José lhe tenha indiciado que ao acrescentar mais um amigo e portanto ao ficar com cinco, teria de aumentar quatro arcos... Ou, simplesmente, José gosta de ver os números ordenados …

Assim, ao analisarmos em conjunto os diagramas apresentados por José, observamos que este aluno compõe os seus diagramas com desenhos, que representam os elementos envolvidos na situação problemática. A esses desenhos acrescenta símbolos não convencionais simples que lhe permitem estabelecer relações matemáticas e desocultar a estrutura matemática dos problemas. Usa, também, símbolos matemáticos já com um à-vontade suficiente para indicar de modo correto a forma como obtém a solução de cada problema, com expressões matemáticas rigorosas relativas às operações matemáticas que conduzem a essa solução. No problema dos apertos de mão, a forma como escreve a expressão poderá indiciar um eventual reconhecimento, por parte do aluno, de uma possível regularidade — que seria muito útil no caso de uma eventual extensão ou generalização do problema. Para além de apoio ao raciocínio, os diagramas foram, também, usados pelo aluno como recurso efetivo para a explicação e justificação de como pensou em cada situação e de como obteve a solução.

5. Conclusões

Tendo presente a evidência analisada neste artigo, apresentamos, de seguida, uma tabela que sintetiza as principais características e funções das representações usadas pelos alunos na resolução dos dois problemas apresentados (quadro 1).

Quadro 1.—Síntese das características e funções das representações usadas pelos alunos

	Tipo de representação	**Funções da representação para o aluno**
EMA **Problema dos periquitos**	Diagrama parte-todo com: • Símbolos não convencionais (tracinhos) • Algarismos para dados Algarismos para a solução	Interpretar e estabelecer relações Desocultar a estrutura matemática (contagem implícita de 2 em 2 até ao dez e adicionar cinco parcelas de 3) Obter a solução 15=3+3+3+3+3 (certa) Explicar e justificar o processo de resolução/solução
EMA **Problema dos apertos de mão**	Diagrama parte-todo com: • Desenhos com nomes para amigos • Símbolos não convencionais (linhas) • Algarismos para relações Algarismos para a solução	Interpretar e estabelecer relações Desocultar a estrutura matemática (explicitação de quatro amigos, 3 apertos de mão cada) Obter implicitamente a solução 12 = 3+3+3+3 (errada) Explicar o processo de resolução/solução
ANDRÉ **Problema dos periquitos**	Diagrama em rede com: • Símbolos não convencionais (círculos e linhas) • Algarismos para relações (e solução implícita)	Interpretar e estabelecer relações Desocultar a estrutura matemática (explicitação de regularidade de contar de 3 em 3 — generalização?) Obter a solução: 3, 6, 9, 12, 15 Explicar e justificar o processo de resolução/solução
ANDRÉ **Problema dos apertos de mão**	Diagrama em rede com: • Símbolos não convencionais (bolinhas e risquinhos) • Nomes para indicar os amigos Algarismo para a solução	Interpretar e estabelecer relações Desocultar a estrutura matemática (explicitação de a cada par de amigos, um aperto de mão) Obter a solução: 5 (por contagem) (errada) Explicar e justificar o processo de resolução/solução Identificar "esquecimento" que leva a solução errada

Quadro 1.—Síntese das características e funções das representações usadas pelos alunos (continuação)

	Tipo de representação	Funções da representação para o aluno
José **Problema dos periquitos**	Diagrama parte-todo com: • Desenhos (periquitos e alfaces) • Símbolos não convencionais (círculos) Símbolos matemáticos para expressão da adição (e solução)	Interpretar e estabelecer relações Desocultar a estrutura matemática (explicitação de cada dois periquitos, três folhas de alface) Obter explicitamente a solução: 3+3+3+3+3+3=15 (certo) Explicar e justificar o processo de resolução/solução
José **Problema dos apertos de mão**	Diagrama em rede com: • Desenhos (amigos e amigas) • Símbolos não convencionais (arcos) • Algarismos para relações Símbolos matemáticos para expressão da adição (e solução)	Interpretar e estabelecer relações Desocultar a estrutura matemática (explicitação de um número diferente de apertos de mão da iniciativa de cada amigo — generalização da solução como a soma 1+2+3+...?) Obter explicitamente a solução: 1+2+3=6 (certa) Explicar e justificar o processo de resolução/solução

Caracterização das representações criadas pelos alunos

Os alunos recorreram em todos os casos a representações icónicas para resolver os problemas apresentados, destacando-se os diagramas que criaram.[2] Estes diagramas são diagramas parte-todo ou diagramas em rede (Diezmann & English, 2001), dependendo a tipologia do diagrama da opção dos alunos e não das características matemáticas dos problemas. Na realidade, os diagramas parecem estar bastante marcados pela pessoalidade dos alunos seus autores, como discutimos mais à frente.

Para construir os diagramas, os alunos escolheram fazer desenhos mais ou menos pormenorizados (Ema e José) ou símbolos não convencionais por eles criados (André) para identificar os elementos do contexto do problema, que dispuseram no papel com uma distribuição espacial bastante organizada na maioria dos casos. Note-se que no caso em que os elementos foram pessoas (problema dos amigos), dois alunos (Ema e André) sentiram necessidade de os identificar com os nomes, independentemente de terem sido desenhados ou representados por símbolo idiossincrático.

Foi sempre com símbolos não convencionais simples por eles criados (linhas, traços, círculos, setas) que os alunos relacionaram os diferentes elementos do problema. Em alguns casos, os diagramas incluem algarismos junto a esses símbolos não convencionais, adotados para evidenciar elementos numéricos que os alunos detetaram e que são importantes na definição da estrutura matemática dos problemas. Isto acontece quer nos diagramas parte-todo, nomeadamente para indicar as partes, quer nos diagramas em rede, nomeadamente para indicar as sequências de valores numéricos associados à estrutura matemática dos problemas.

Destacamos, ainda, que as resoluções apresentadas pelos alunos também incluem símbolos matemáticos para além dos algarismos incluídos nos diagramas. Os algarismos são ainda usados em alguns casos para indicar explicitamente a solução obtida a partir do diagrama (Ema e André). As expressões matemáticas mais completas, que revelam a expressão da operação realizada para a obtenção da solução, são também usadas por um aluno (José). Notamos que este tipo de representação simbólica convencional nunca foi usada em exclusivo em nenhum problema e que a sua utilização pelos alunos decorreu sempre do uso e análise prévia dos diagramas respetivos, sendo o seu registo escrito sido sempre o último a ser feito (e também a ser referido oralmente).

As funções das representações para os alunos

Os alunos usaram as representações que criaram com uma multiplicidade de funções, como se pode observar no quadro 1. Pela importância que têm neste estudo, sistematizamos de seguida as funções que deram aos diagramas. A primeira é a de interpretar a situação, que permite aos alunos darem sentido ao problema, identificarem os elementos presentes na situação a que o problema se reporta e os dados que são relevantes. A segunda função é a de estabelecer relações matemáticas, indicadas de forma mais ou menos explícita com símbolos idiossincráticos sobre as representações dos elementos relativos aos problemas. Uma outra importante função é a de desocultar a estrutura matemática do problema a partir das relações matemáticas identificadas, de uma forma parcial (nos diagramas parte-todo) ou global (nos diagrama em rede). Em alguns casos (André e José), os diagramas parecem mesmo poder servir como pontes para que os alunos consigam identificar regularidades que se aplicam a generalizações ou extensões dos problemas. Uma quarta função é a de obter a solução do problema a partir da identificação da estrutura do problema, a qual é registada de forma explícita ou de forma implícita, surgindo, por exemplo, em sequências numéricas associadas ao diagrama. Uma quinta função é a de rever o processo de resolução e de eventual identificar de erros pelo próprio aluno e sua autocorreção (André), o que constitui uma oportunidade acrescida à importante tarefa, recomendada por Polya (2003), de verificação da solução dos problemas. Estas cinco funções que atrás sistematizamos ilustram as potencialidades dos diagramas no apoio ao raciocínio dos alunos no contexto da resolução de problemas.

Uma outra função dos diagramas é a de apoio à explicação e/ou justificação dos alunos. Todos se apoiaram nos diagramas que criaram ao explicar à professora como tinham pensado para obter a solução dos diferentes problemas resolvidos, apontando diretamente para o diagrama para revelar as suas ideias, por vezes com evidente representação escrita mesmo quando não acompanhada de correspondente explicação oral (Ema). Esta última função que assinalamos ilustra o poder dos diagramas enquanto instrumento de comunicação matemática dos alunos no contexto da resolução de problemas.

Considerações finais

Concluímos este artigo com duas ideias que, de algum modo, podem ser interpretadas como recomendações que o estudo realizado nos suscita.

Uma primeira ideia tem a ver com a importância do professor explorar as representações icónicas dos alunos, com os alunos. Estas representações desempenham um papel crucial na correta interpretação e resolução dos problemas pelos alunos, sejam desenhos ou representações simbólicas não convencionais, a que eles atribuem significado, em especial, diagramas que funcionam como preciosas ferramentas para o raciocínio matemático. É importante que o professor aproveite estas representações para nelas ancorar a apresentação dos símbolos matemáticos convencionais e da escrita de expressões matemáticas, relacionando-as com representações icónicas convenientes. Interessa, também, que o aluno entenda a simbologia matemática como uma forma económica e poderosa de representação de ideias a que possa dar valor, o que dificilmente acontecerá se o professor apressar ou adotar em exclusivo o uso de símbolos matemáticos formais no início da escolaridade. As representações icónicas e as simbólicas têm toda a vantagem em coexistir e o estabelecimento de conexões entre elas permite que o aluno tenha maiores oportunidades de construir as ideias matemáticas de forma mais completa, com uma compreensão mais profunda da matemática (Cavalcanti, 2001; Goldin & Shteingold, 2001; Wong, 2004).

Uma segunda ideia prende-se com a importância de contribuir para que os alunos evoluam na sua capacidade de representar, em particular, de construir diagramas. É fundamental que o professor deixe espaço aos alunos para que, numa primeira fase, representem livremente os seus raciocínios mas é igualmente importante que estes aprendam a tornar-se mais eficazes quando se trata de representar ideias matemáticas, nomeadamente na resolução de problemas. Fazer desenhos poderá ser relevante para que o aluno tenha uma relação mais significativa com as situações a que dizem respeito os problemas, mas gradualmente deverá reconhecer que pode, com economia de esforço e de tempo, substituir um desenho cheio de pormenores por um símbolo simples com o mesmo significado — como José parece hesitar fazer, substituir uma alface recortada por um risco verde. De igual modo, é importante que ao construir um diagrama se habitue a usar os símbolos idiossincráticos de forma organizada de modo a mais facilmente se evidenciar a estrutura matemática. E é importante que conheçam diferentes tipos de diagramas que os ajudem perante diferentes tipos de problemas, não com o sentido de dotar os alunos de procedimentos a aplicar, mas sim do os dotar de ferramentas a usar (Diezman & English, 2001).

Notas

1 As ilustrações seguintes são, na sua maioria, da autoria de alunos de uma turma de 1.º ano da investigadora. Quando a fonte for outra, será devidamente indicada.

2 Neste artigo apresentamos os casos de três alunos na resolução de dois problemas, mas como já referimos, baseia-se num estudo mais alargado que envolveu quatro alunos e dez problemas. Importa aqui dizer que neste estudo, as representações icónicas foram as preferencialmente usadas por todos os alunos, sendo o diagrama a representação adotada pelos alunos não só em mais problemas como também por mais alunos — foi usada pelo total dos quatro alunos em cinco dos dez problemas e pelo menos por três alunos em sete dos dez problemas.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica .

APM (1988). *A renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Boavida, A. M. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática*, *100*, 1.

Boavida, A., & Menezes, L. (2012). Ensinar Matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e racionar: contornos e desafios. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática — Práticas de ensino da Matemática* (pp. 287–295). Portalegre: SPIEM.

Boavida, A., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Bruner, J. (1999). *Para uma Teoria da Educação*. Lisboa: Relógio D'Água.

Cai, J. (2010). Helping elementary school students become successful mathematical problem solvers. In D. Lambbin & F. Lester (Eds.), *Teaching and learning mathematics: Translating research for elementary school teachers* (pp. 9–14). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante 16*(*2*), 81–118.

Cândido, P. T. (2001). Comunicação em Matemática. In K. Smole & M. Diniz (Eds.), Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática (pp. 15 – 28). Porto Alegre: Artmed.

Carraher D., Schliemann, A. e Schwartz, J. (2008). Early Algebra is not the same as Algebra Early. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds). *Algebra in the Early Grades* (p. 235–272). LEA: New York.

Cavalcanti, C. T. (2001). Diferentes formas de resolver problemas. In K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas. Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 121–149). Porto Alegre: Artmed.

Diezmann, C., & English, L. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. Cuoco, & F. Curcio (Eds.), *Roles of Representation in School Mathematics — 2001 Yearbook* (pp. 77–89). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197–218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics — 2001 Yearbook* (pp. 1–23). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

ME/DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

ME/DEB (2004). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico — 1.º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica. (Programa original publicado em 1990).

ME/DGEBS (1990). *Reforma Educativa. Ensino Básico: Programa do 1.º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral dos Ensinos Básicos e Secundário.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Pinto, E. (2009). *O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade* (Tese de Mestrado, Universidade de Évora). Lisboa: APM.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Ponte, J., & Serrazina, L. (2000). *Didática da Matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Santos, M. E. (1991). *Mudança conceptual na Sala de Aula: Um desafio pedagógico*. Lisboa: Livros Horizonte.

Serrazina, L.,Canavarro, A. P.,Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J. (2011). *O Programa de Formação Contínua em Matemática: Contributos da investigação*. in Nunes, C., Henriques, A.C., Caseiro, A., Silvestre, A. I., Pinto, H., Jacinto, H. , Ponte, J. P. (Orgs.), Atas do Seminário de Investigação em Educação Matemática. Lisboa: APM.

Smole, K., & Diniz, M. (2001). *Ler, escrever e resolver problemas. Habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed.

Stancanelli, R. (2001). Conhecendo diferentes tipos de problemas. In K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 103–120). Porto Alegre: Artmed.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. In P. Palhares (Ed.), *Elementos de matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 7–51). Lisboa: Lidel.

Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1.º ano. *Quadrante*, *14*(*1*), 37–66.

Whitenackm J., & Yackel, J. (2008). Construindo argumentações matemáticas nos primeiros anos: A importância de explicar e justificar ideias. *Educação e Matemática*, *100*, 85–88.

Woleck, K. (2001). Listen to their pictures: An investigation of children's mathematical drawings. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics — 2001 Yearbook* (pp. 215–227). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Wong, K. (2004). Using Multimodal think-board to teach mathematics. In *Proceedings of ICME–10*. Copenhagen: Technical University of Denmark. (consultado em `http://math.nie.edu.sg/kywong/Multimodal%20think-board%20ICME%2010%20paper.pdf`)

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227–236). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Resumo. Este artigo foca-se no uso de representações matemáticas por parte de alunos do 1.º ano do 1.º ciclo e analisa o seu contributo para o raciocínio matemático desses alunos. O propósito principal do artigo é caracterizar as representações, em especial os diagramas, que os alunos criam para resolver problemas que lhes são propostos, bem como analisar as funções com que as usam. Apresentamos os casos de três alunos, analisando as resoluções que produziram relativamente a dois problemas. Os alunos recorreram tanto a representações icónicas idiossincráticas como a representações simbólicas convencionais, mas com funções muito distintas. Entre as representações icónicas criadas pelos alunos destaca-se o diagrama, que serviu de ferramenta fundamental ao raciocínio e comunicação matemática. Mais concretamente, o diagrama foi usado pelos alunos para interpretar a situação problemática, relacionar os seus elementos, desocultar a estrutura matemática presente, obter a solução, rever o processo de resolução adotado e apoiar a explicação e/ou justificação do respetivo raciocínio para resolver os problemas. As representações simbólicas convencionais decorreram das icónicas e serviram essencialmente para apresentar as soluções dos problemas ou as expressões aritméticas relativas à sua determinação.

Palavras-chave: raciocínio matemático; representações matemáticas; diagramas.

Abstract. This article focuses on the use of representations by 6 year students and analyses their contribute for the mathematical reasoning of the students. The main purpose of the article is to characterise the representations, specially the diagrams, that students create to solve the problems, and to analyse the functions of that representations. We analyse the mathematical productions of three students created to solve two different problems. The students created idiosyncratic iconic representations and also used conventional symbolic representations, but with very different functions. Diagrams were used by the students to interpret the problematic situation, to relate their elements, to unpack the mathematical structure, to obtain the solution, to review the problem solving process and to support the explanation and/or justification of the reasoning. Conventional symbolic representations were based on the iconic ones, and they were used by the students to display the solutions of the problems or the arithmetic expressions associated to the solution.

Keywords: Mathematical reasoning, mathematical representations, diagrams.

■ ■ ■

ANA PAULA CANAVARRO
Universidade de Évora e Unidade de Investigação do IE/UL
apc@uevora.pt

MARIA ELISA PINTO
Agrupamento de Escolas n.º 3 de Évora
elisacalado@hotmail.com

(Recebido em maio de 2012, aceite para publicação em outubro de 2012)