

# O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade<sup>1</sup>

Maria Elisa Pinto  
Agrupamento de Escolas nº 3 de Évora, Portugal  
elisacalado@hotmail.com

Ana Paula Canavarro  
Universidade de Évora, Portugal  
apc@uevora.pt

## Resumo

Pretende-se investigar o papel que as representações, construídas por alunos do 1.º ano, desempenham na resolução de problemas de Matemática, a qual constitui uma atividade fundamental na aprendizagem da Matemática no 1.º Ciclo.

A metodologia de investigação segue uma abordagem interpretativa tomando por *design* o estudo de caso. Trata-se simultaneamente de uma investigação sobre a própria prática, correspondendo os quatro estudos de caso a quatro alunos da turma de 1.º ano da investigadora.

As representações icónicas e as simbólicas são apontadas como as representações usadas preferencialmente pelos alunos, embora com funções distintas. Os elementos simbólicos apoiam-se frequentemente em elementos icónicos, sendo estes últimos que ajudam a descompactar o problema. Nas representações icónicas enfatiza-se o papel do diagrama.

As representações construídas pelos alunos são fundamentais para a correta interpretação e resolução dos problemas, não dependem exclusivamente do tipo de estratégia(s) desenvolvida(s), parecendo estar diretamente relacionadas com as características da tarefa proposta.

**Palavras-chave:** resolução de problemas de Matemática; representações matemáticas; estratégias de resolução de problemas; ensino e aprendizagem da Matemática no 1.º Ciclo.

## 1. Introdução

### 1.1. Contextualização curricular

A Matemática constitui uma área do saber presente em todos os currículos escolares um pouco por todo o mundo e presente ao longo de todos os anos da escolaridade obrigatória.

---

<sup>1</sup> Pinto, E., & Canavarro, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. In O. Magalhães, & A. Folque (org), *Práticas de investigação em Educação*. Évora: Departamento de Pedagogia e Educação. ISBN: 978-989-95802-2-0

Nas últimas décadas, verificou-se uma progressiva valorização do papel da resolução de problemas no ensino e aprendizagem da Matemática ao nível das orientações curriculares, emanadas tanto por organismos internacionais (NCTM, 1991; NCTM, 1994; NCTM, 2007), como nacionais (APM, 1988; ME/DEB, 2001; ME/DEB, 2004; ME/DGEBS, 1990; Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins, & Oliveira, 2007).

Esta valorização da resolução de problemas surge desde os primeiros anos de escolaridade, que se revelam essenciais na iniciação e desenvolvimento de capacidades fundamentais, incluindo também raciocinar, comunicar e representar matematicamente, e estabelecer conexões (NCMT, 2007).

Em Portugal, no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte et al., 2007) a resolução de problemas surge como capacidade transversal a toda a aprendizagem da Matemática, desenvolvida num espaço próprio e que deve funcionar como ponto de partida para o estudo de conceitos e ideias matemáticas, bem como suporte para o seu desenvolvimento e aplicação.

Neste documento, as representações no ensino e aprendizagem da Matemática surgem de forma muito precisa e estruturada, realçando-se a necessidade dos alunos conhecerem e compreenderem diferentes tipos de representações, bem como a capacidade de as utilizarem em diversas situações e de saber qual a representação mais adequada para cada uma.

## **1.2. Problemas e sua resolução**

O conceito de problema matemático, as suas estratégias de resolução e o papel das representações matemáticas nesse processo, têm sido alvo de atenção da investigação.

Polya, o defensor pioneiro da resolução de problemas na sala de aula, em 1945 definia problema da seguinte forma: “Ter um problema significa procurar conscienciosamente alguma ação apropriada para atingir um objetivo claramente definido, mas não imediatamente atingível” (Vale & Pimentel, 2004, p. 13). APM (1988) acrescenta um pouco mais, afirmando que um problema deve despertar sempre a curiosidade do aluno a quem é colocado, devendo a solução estar dentro das suas capacidades, exigindo simultaneamente trabalho, reflexão e imaginação na procura de uma estratégia apropriada para a sua resolução. Outros autores referem que os bons problemas integram uma variedade de temas, envolvem matemática significativa, proporcionam aos alunos a oportunidade de consolidar e ampliar os seus conhecimentos e estimulam a aprendizagem da Matemática (NCTM, 2007).

Também a resolução de problemas tem sido perspectivada de diversas formas nos últimos vinte anos: como contexto, como capacidade ou como arte (Stanic & Kilpatrick, 1989); como uma meta, como um processo ou como uma habilidade básica (Diniz, 2001) e ainda como um processo, como uma finalidade ou como um método de ensino (Vale & Pimentel, 2004). Ao

resolver problemas, o aluno, além de aprender Matemática, desenvolve modos de pensar e capacidades básicas como verbalizar, ler, interpretar e produzir textos em Matemática. Adquire ainda uma maior autoconfiança nas suas capacidades e autonomia para investigar e resolver problemas (Diniz, 2001). A resolução de problemas deverá estar integrada no contexto do conteúdo curricular matemático, para que os alunos possam reconhecer a utilidade das estratégias utilizadas. Para que a resolução de problemas confirme ou não a aquisição e compreensão dos conteúdos matemático, é fundamental que o professor solicite ao aluno reflexão, explicação e justificação para as suas respostas (NCTM, 2007).

Da autoria de Polya (1945), *How To Solve It – A new Aspect of Mathematical Method* pretende ensinar um método geral de resolução de problemas. Polya distingue quatro fases no processo de resolução de problemas: i) compreensão do problema; ii) estabelecimento de um plano - nesta fase sugere-se o uso de algumas heurísticas; iii) execução do plano e iv) verificação da solução. Surgiram outros modelos sobre o processo de resolução de problemas, inspirados em Polya, dos quais se destaca um modelo apresentado por Lester, em 1980, e que possui “uma perspetiva inovadora a nível da análise dos processos mentais envolvidos na área da resolução de Matemática” (Borrvalho, 1990, pp. 79-81). Este é um modelo formado por seis fases: (i) Consciencialização; (ii) Compreensão; (iii) Análise do(s) objetivo(s); (iv) Desenvolvimento do plano; (v) Implementação do plano e (vi) Avaliação dos procedimentos e da solução.

No que diz respeito às estratégias de resolução de problemas, estas constituem abordagens que podem ser utilizadas em diversos problemas. Um mesmo problema pode ser solucionado por várias estratégias, sendo umas mais vantajosas que outras (Ponte & Serrazina, 2000). Para Cavalcanti (2001), incentivar os alunos a procurar diferentes resoluções, propicia a que seja possível ao professor observar e acompanhar a forma como os alunos pensam e registam as diferentes formas de resolução. Investigações recentes apresentam como estratégias de resolução de problemas as seguintes (Vale & Pimentel, 2004): i) descobrir um padrão/descobrir uma regra ou lei de formação; ii) fazer tentativas/fazer conjeturas; iii) trabalhar do fim para o princípio; iv) usar dedução lógica/fazer eliminação; v) reduzir a um problema mais simples/decomposição/simplificação; vi) fazer uma simulação, uma experimentação ou uma dramatização; vii) fazer um desenho, diagrama, gráfico ou esquema e viii) fazer uma lista organizada ou fazer uma tabela.

Existem diversas tipologias de problemas. Vale e Pimentel (2004) propõem uma tipologia, apresentada por Charles e Lester em 1986, constituída por cinco tipos de problemas (Vale & Pimentel, 2004, pp. 18-19): a) problemas de um passo; b) problemas de dois ou mais passos; c) problemas de processo; d) problemas de aplicação e e) problemas tipo puzzle. A investigação, no âmbito da resolução de problemas, aponta para a utilização de problemas que apelem ao uso de estratégias diversificadas. Os problemas de processo são os que apresentam mais

potencialidades a esse nível uma vez que “São os que só podem ser resolvidos através da utilização de uma ou mais estratégias de resolução. São os que não utilizam processos mecanizados ou estandardizados” (Vale & Pimentel, 2004, pp. 18-19).

### **1.3. Representações matemáticas**

Uma representação é uma configuração que pode representar uma outra coisa de alguma forma; dito de outro modo, é uma configuração que poderá, por exemplo, agir em lugar de, ser interpretada como, conetar-se, corresponder a, denotar, retratar, encarnar, codificar, evocar, rotular, ligar, significar, produzir, referir-se, assemelhar, servir como uma metáfora para, substituir, sugerir, ou simbolizar o elemento representado (Goldin, 2002). Num sentido mais restrito, e no domínio da educação matemática, as representações constituem ferramentas privilegiadas para organizar, registrar e comunicar ideias matemáticas (NCTM, 2007), não são produtos estáticos e captam o processo de construção de um conceito ou de uma relação matemática (Woleck, 2001). Uma representação matemática não pode ser compreendida ou interpretada isoladamente. Esta apenas faz sentido quando parte integrante de um sistema mais abrangente, estruturado, no qual diferentes representações estão relacionadas (Goldin & Shteingold, 2001). A forma como os alunos representam as ideias matemáticas está intimamente ligada com a forma como os alunos as compreendem e utilizam (Ponte & Serrazina, 2000).

As representações da criança são geralmente “representações idiossincráticas, espontâneas e imediatas, mais ou menos diferenciadas social e culturalmente, que têm mais a ver com o conhecimento do quotidiano do que com o conhecimento científico” (Santos, 1991, p. 21).

As representações idiossincráticas construídas pelos alunos na resolução de problemas podem ajudá-los tanto na compreensão como na própria resolução do problema, constituindo ainda uma forma de registo do método de resolução que pode ainda possibilitar um meio de o descrever a outras pessoas. Através destas representações iniciais os professores terão mais facilmente acesso à forma como o aluno interpretou e raciocinou durante a resolução da tarefa proposta (NCTM, 2007).

Jerome Bruner, um investigador clássico neste domínio, afirma existirem três tipos distintos de representações: representações ativas, representações icónicas e representações simbólicas (Bruner, 1999). Estes três sistemas de representação operam durante o desenvolvimento da inteligência humana e a interação entre os diferentes sistemas é crucial para o desenvolvimento de cada pessoa. O desenvolvimento não implica uma sequência de etapas, mas sim um domínio progressivo destas três formas de representação.

Neste estudo, atendendo ao nível etário dos alunos, foram abordadas mais pormenorizadamente três tipos de representações icónicas: o desenho, os símbolos não convencionais (representativos do real) e o diagrama.

No desenho a criança encontra um valioso recurso para comunicar e expressar os seus sentimentos, vontades e ideias. No contexto das representações matemáticas, para Smole e Diniz (2001), o desenho serve como recurso de interpretação do problema e como registo da estratégia de solução. Cavalcanti (2001) salienta a ideia de que o desenho pode ser usado de três maneiras diferentes na resolução de problemas: a) para representar aspetos da situação apresentada no texto sem expressar relações que identifiquem as transformações numéricas. b) para representar a resolução completa do problema utilizando apenas o desenho e c) o aluno mistura desenhos e símbolos matemáticos.

Os símbolos não convencionais são representações idiossincráticas (Santos, 1991) que são utilizados pelas crianças para representar elementos do real, surgindo sob a forma de traços verticais, traços horizontais, círculos, entre outros. Enquanto que no desenho o aluno apresenta pormenores e detalhes tal como os vê na realidade, no símbolo não convencional representa alguém ou alguma coisa mas despida de pormenores.

Um diagrama é uma representação visual que apresenta informações num formato espacial (Diezmann & English, 2001) e a sua elaboração constitui uma heurística importante para a resolução de problemas (Wong, 2004). Os diagramas podem ser encarados como representações da estrutura dos problemas e podem transformar-se em verdadeiras ferramentas de apoio ao pensamento matemático. A capacidade de desenvolver inferências corretas a partir de um diagrama é aquilo que caracteriza em primeiro lugar a importância do raciocínio a partir deste tipo de representação. Diezmann e English (2001) reportam-se a estudos publicados em 1999 por Novick, Hurley e Francis para identificar quatro tipos de diagramas que representam relações específicas entre os dados de um problema: diagramas em rede (*networks*), matrizes (*matrices*), diagramas de hierarquias (*hierarchies*) e diagramas parte-todo (*part-whole diagrams*).

A utilização de símbolos matemáticos deverá ser posterior a outras formas de comunicação de ideias matemáticas. Assim, será mais fácil para os alunos relacionar a sua linguagem quotidiana com a linguagem e símbolos matemáticos de forma significativa (NCTM, 2007). Para Cavalcanti (2001), os alunos deverão ter acesso à linguagem matemática de forma gradual e equilibrada, a qual deve ser desenvolvida por “aproximações sucessivas”. A linguagem escrita da Matemática aprende-se através do seu uso e, à medida que os alunos têm oportunidade de utilizar as representações que consideram válidas e de as confrontar com representações mais convencionais, descubram as funções e as potencialidades de uma forma mais convencional de resolver problemas.

## **2. Metodologia**

### **2.1. Objectivo e questões do estudo**

A presente investigação pretende investigar o papel que as representações, elaboradas por alunos do 1.º ano de escolaridade, desempenham na resolução de problemas de Matemática.

Desta forma, este estudo procurará responder às seguintes questões:

- a) Que representações preferenciais utilizam os alunos para resolver problemas?
- b) De que forma é que as diferentes representações são influenciadas pelas estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos?
- c) Que papel têm os diferentes tipos de representação na resolução dos problemas?

### **2.2. Opções fundamentais e design**

Esta investigação foi desenvolvida numa perspetiva interpretativa. O estudo desenvolvido teve como ponto de partida a prática pedagógica da primeira autora e desenvolveu-se no seu contexto profissional, tratando-se assim de uma investigação sobre a própria prática (Ponte, 2002) em que se concretiza uma experiência de ensino. Optou-se pela modalidade de estudo de caso analítico por ser adequado às características dos resultados finais que se pretendiam obter nesta investigação.

Os quatro casos elaborados correspondem a quatro alunos e foram selecionados tendo em conta os critérios: a) o tipo de representações construídas no decorrer da resolução dos problemas iniciais e b) características pessoais, como autonomia e capacidade de realização completa dos trabalhos.

Os alunos são designados por Ema, André, Mariana e José, nomes fictícios.

### **2.3. O contexto da investigação**

A presente investigação decorreu na escola sede de um Agrupamento de Escolas situada numa cidade do Alto Alentejo, numa turma do 1.º ano de escolaridade, composta por vinte alunos, dez do sexo feminino e dez do sexo masculino, na qual a primeira autora assumiu, em simultâneo, os papéis de professora e de investigadora.

A investigação desenvolveu-se em duas fases que corporizaram a experiência de ensino. Durante a primeira fase (1.º período de 2007/2008) foi desenvolvida uma primeira abordagem aos problemas, com a proposta de seis problemas iniciais aos alunos, e selecionados os quatro alunos que constituíram os quatro estudos de caso.

Ao selecionar os problemas iniciais, procurou-se que os mesmos fossem problemas de processo, que podem ser resolvidos por uma ou mais estratégias e potenciam o recurso a

diferentes tipos de representações. Os problemas exigiam raciocínios matemáticos de cariz diversificado, o que permitia observar o desempenho dos alunos em situações diferentes.

A segunda fase desenrolou-se durante os 2.º e 3.º períodos do mesmo ano letivo, com a recolha sistemática dos dados e a respetiva análise. Foram propostos à turma, com uma periodicidade semanal, um conjunto de dez problemas também de processo, que constituíram a base deste estudo.

Uma vez que se tratava de um 1.º ano, todos os problemas foram lidos para os alunos, à medida que estes acompanhavam a leitura através da folha de registo previamente distribuída, encabeçada pelo problema proposto (Problema A, B, ..., J) (Exemplo de problema em Anexo).

#### **2.4. A recolha de dados**

A recolha de dados teve lugar entre setembro de 2007 e junho de 2008, e foi realizada pela primeira autora. Foram recolhidos dados variados, numerosos e oriundos de diversas fontes o que possibilita a triangulação de informação (Yin, 1993).

Como técnicas de recolha de dados, utilizou-se a observação, a análise de documentos, os diários, os registos áudio/vídeo das explicações dos alunos sobre as representações e estratégias usadas nos diferentes problemas propostos.

#### **2.5. A análise dos dados**

A análise de dados desenrolou-se em duas fases. Tratou-se de um processo essencialmente interpretativo, tendo como base as questões da investigação, a revisão de literatura realizada e os dados recolhidos.

Numa primeira fase foi feita a análise dos dados recolhidos a partir da observação em sala de aula e das representações construídas nos problemas iniciais que permitiram selecionar os quatro estudos de caso. Após a recolha de todas as informações, teve lugar a segunda fase na qual a análise de dados se desenvolveu de um modo mais aprofundado.

As informações recolhidas através das diferentes fontes, previamente guardadas e organizadas em suporte digital, foram submetidas a diversas leituras e análises de complexidade e profundidade crescentes de forma a construir cada caso específico de cada aluno.

Com base no referencial teórico, foram definidas *a priori* algumas categorias de análise principais. No entanto, essas categorias foram sujeitas a um processo de adequação e refinação no decorrer da análise dos diferentes dados recolhidos e da construção dos casos em estudo.

Na definição das categorias definitivas de análise consideraram-se três grandes domínios:

1. Estratégias de resolução de problemas – definiram-se oito categorias inspiradas em Vale e Pimentel (2004).
2. Tipos de representação utilizadas – estabeleceram-se três grandes categorias inspiradas em Bruner (1989; 1999), subdivididas em subcategorias, adaptadas de diversas fontes (Bruner, 1989, 1999, 2000; Diezmann & English, 2001; Ponte & Serrazina, 2000; Santos, 1991; Wong, 2004).
3. O papel das representações na resolução de problemas – definiram-se sete categorias sintetizadas a partir do quadro teórico (Cavalcanti, 2001; Diezmann & English, 2001; NCTM, 2007; Ponte et al., 2007; Smole & Diniz, 2001; Woleck, 2001).

Com base nas categorias de análise referidas, desenvolveu-se uma análise que resume e caracteriza as representações e as estratégias utilizadas por cada aluno.

### **3. Análise transversal dos casos**

Após a elaboração de cada caso, desenvolveu-se uma sua análise cruzada transversal tendo em conta as questões do estudo e com o objetivo de encontrar similitudes e diferenças.

Essa análise possibilita uma visão global dos principais resultados do estudo (quadro 1).

Quadro 1 - Representações/Estratégias utilizadas pelos quatro alunos

		Representações								
		Ativas	Icônicas			Simbólicas				
Estratégias de resolução de problemas	Fazer tentativas, conjeturas				A	B	C	A	B	C
							<i>Ema</i>			<i>Ema</i>
					D	E	F	D	E	F
					<i>Ema</i>	<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>	<i>André</i>	<i>Ema</i>	<i>José</i>	<i>André</i>
				G	H	I	G	H	I	
				<i>André</i> <i>José</i>	<i>José</i>	<i>André</i>	<i>André</i> <i>José</i>	<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>	<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>	
				J			J			
				A	B	C	A	B	C	
				D	E	F	D	E	F	
			G	H	I	G	H	I		
			J			J				
			<i>André</i> <i>José</i>			<i>André</i> <i>José</i>				
Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização			A	B	C					
			D	E	F					
			G	H	I					
			<i>Ema</i> <i>Mariana</i>							
			J							
			A	B	C	A	B	C		
			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>	<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>	<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>	<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>	<i>Mariana</i> <i>José</i>	<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>		
			D	E	F	D	E	F		
			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>José</i>	<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>	<i>Ema</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>	<i>Ema</i> <i>André</i> <i>José</i>	<i>José</i>	<i>Ema</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>		
			G	H	I	G	H	I		
			J			J				
			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>				
			A	B	C	A	B	C		
			D	E	F	D	E	F		
			G	H	I	G	H	I		
			J			J				
			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>			<i>Mariana</i> <i>José</i>				
			A	B	C	A	B	C		
			D	E	F	D	E	F		
			G	H	I	G	H	I		
			J			J				
			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>				
			A	B	C	A	B	C		
			D	E	F	D	E	F		
			G	H	I	G	H	I		
			J			J				
			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>				
			A	B	C	A	B	C		
			D	E	F	D	E	F		
			G	H	I	G	H	I		
			J			J				
			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>				
			A	B	C	A	B	C		
			D	E	F	D	E	F		
			G	H	I	G	H	I		
			J			J				
			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>				
			A	B	C	A	B	C		
			D	E	F	D	E	F		
			G	H	I	G	H	I		
			J			J				
			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>				
			A	B	C	A	B	C		
			D	E	F	D	E	F		
			G	H	I	G	H	I		
			J			J				
			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>				
			A	B	C	A	B	C		
			D	E	F	D	E	F		
			G	H	I	G	H	I		
			J			J				
			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>				
			A	B	C	A	B	C		
			D	E	F	D	E	F		
			G	H	I	G	H	I		
			J			J				
			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>			<i>Ema</i> <i>André</i> <i>Mariana</i> <i>José</i>				

Das oito categorias de *Estratégias de resolução de problemas* consideradas no âmbito da investigação, apenas surgem no quadro cinco estratégias, uma vez que foram estas as que se revelaram no decorrer da resolução dos problemas pelos alunos.

Ao fazer o cruzamento entre o tipo de estratégia e o tipo de representação utilizado, surgem na tabela os dez problemas propostos, bem como os alunos que optaram por essa estratégia/representação.

Da análise do quadro 1, constata-se que a estratégia mais utilizada pelos quatro alunos no âmbito da resolução dos dez problemas propostos foi a estratégia *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*.

Numa perspetiva horizontal, verifica-se que esta categoria das estratégias se encontra associada tanto às representações do tipo icónico, como às representações simbólicas, pelos quatro alunos. Apenas em três dos problemas propostos esta estratégia não foi utilizada por nenhum dos alunos.

Numa abordagem vertical, e observando as representações do tipo icónico, observa-se que em cinco dos problemas propostos os quatro alunos utilizaram elementos icónicos para resolver os problemas em questão, recorrendo à estratégia *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*, enquanto que em outros dois problemas, três dos alunos revelaram a mesma opção.

Quanto às representações simbólicas, verifica-se que em três problemas, os quatro alunos recorreram aos elementos do tipo simbólico para resolver os problemas referidos através da estratégia *Fazer um desenho, diagrama ou esquema*, enquanto que nos restantes problemas propostos apenas alguns dos alunos apresentaram a mesma escolha.

A segunda estratégia mais utilizada pelos alunos na resolução dos problemas foi a estratégia *Fazer tentativas, conjeturas*.

Tendo por base o quadro 1, e a partir de uma leitura horizontal, constata-se que esta estratégia, tal como a referida anteriormente, também se encontra associada a dois tipos de representações: icónico e simbólico. Apenas em três dos problemas propostos esta estratégia não foi utilizada por nenhum dos alunos.

Realizando agora uma leitura numa perspetiva diferente, verifica-se que, no que diz respeito às representações icónicas, estas foram utilizadas conjuntamente com a estratégia *Fazer tentativas, conjeturas* nos problemas C, D, E, F, G, H e I. No problema E, os quatro alunos deste estudo revelaram esta opção, enquanto que nos restantes problemas referidos nem todos os alunos seguiram o mesmo caminho.

Relativamente às representações simbólicas, estas foram utilizadas simultaneamente com a estratégia *Fazer tentativas, conjeturas* nos problemas C, D, E, F, G, H e I. No problema H e I, os quatro alunos deste estudo revelaram esta associação, enquanto que nos restantes problemas referidos nem todos os alunos apresentaram a mesma opção.

A terceira estratégia mais utilizada pelos alunos desta investigação foi a estratégia *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades*.

A partir da leitura do quadro 1, verifica-se que em três dos problemas propostos (B, H e I) tanto as representações icónicas como as representações simbólicas foram utilizadas recorrendo à estratégia *Fazer uma listagem de algumas/todas as possibilidades*. No problema D, esta estratégia foi utilizada apenas em conjunto com as representações simbólicas.

No que concerne à utilização das representações icónicas através desta estratégia, todos os alunos as utilizaram no problema B, enquanto que nos problemas H e I, está presente apenas para um dos alunos.

Ainda relativamente a esta estratégia, e no que diz respeito às representações simbólicas, verifica-se que os quatro alunos recorreram a elementos simbólicos para resolver os problemas H e I. Nos problemas B e D, estão dois alunos e um aluno, respetivamente, que realizaram esta opção.

A estratégia *Usar dedução lógica; fazer eliminação* foi utilizada em dois dos problemas, E e J, associada a elementos icónicos. Dois dos alunos deste estudo recorreram a esta estratégia mas utilizando representações de natureza simbólica num dos problemas propostos (J).

Por fim, uma quinta estratégia utilizada pelos alunos foi a estratégia *Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização* a qual foi utilizada conjuntamente com as representações ativas no problema G, por dois dos alunos deste estudo.

## **4. Conclusões**

### **4.1. Que representações preferenciais utilizam os alunos para resolver problemas?**

No que diz respeito ao tipo de representações utilizadas pelos quatro alunos na resolução dos problemas propostos, as preferenciais são as do tipo icónico e as do tipo simbólico. No entanto, estes dois tipos de representações não foram utilizados pelos quatro alunos nem da mesma forma, nem com a mesma função, nem no mesmo contexto.

Ema recorreu sobretudo a representações do tipo icónico para resolver os problemas propostos, embora tenha utilizado materiais manipulativos para resolver um dos problemas propostos, revelando neste caso o recurso a representações ativas. Dentro das representações icónicas, Ema revelou ainda uma tentativa para criar diagramas, para organizar o raciocínio e estruturar a informação presente no problema, tendo apresentado alguns no decorrer do trabalho apresentado.

Relativamente a esta aluna, as representações simbólicas têm também a sua presença porém o seu papel é manifestamente diferente do papel das representações citadas atrás no que diz respeito ao processo de resolução. As representações simbólicas são sobretudo utilizadas para

representar e comunicar ou a solução encontrada ou um determinado número de elementos do problema em questão. Apenas em dois dos problemas resolvidos a aluna recorreu apenas a representações simbólicas.

O André utilizou sobretudo representações do tipo simbólico para resolver os problemas propostos. Embora um importante elemento icónico, o diagrama, esteja presente em quase todas as resoluções, o seu papel é o de descompactar a estrutura do problema, servindo de precioso apoio aos raciocínios matemáticos que conduzem à solução correta. No entanto, pelo que se pode observar no trabalho deste aluno, os elementos constituintes desses diagramas são sobretudo de cariz simbólico.

A Mariana, embora recorra com frequência às representações simbólicas, as representações icónicas parecem desempenhar um importante papel para resolver os problemas. Também as representações ativas desempenharam um importante papel uma vez que permitiram a Mariana resolver um dos problemas, que de outro modo não teria conseguido resolver.

No caso do José, embora as representações icónicas (desenho e diagrama) estejam presentes na maioria das representações apresentadas e tenham funcionado como precioso apoio a diversos raciocínios matemáticos, são as representações simbólicas que sobressaem nas representações utilizadas pelo aluno na resolução de todos os problemas apresentados.

#### **4.2. De que forma é que as diferentes representações são influenciadas pelas estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos?**

Tanto as representações do tipo icónico como as representações do tipo simbólico foram elaboradas sendo associadas a diferentes estratégias. As representações ativas, talvez dado o seu cariz experimental, encontram-se diretamente ligadas à estratégia de simulação, quando os alunos ainda não conseguem reconstruir e simular, no papel, a situação do problema de outra forma.

Deste estudo pode concluir-se que as representações construídas pelos alunos no decorrer da resolução das tarefas propostas, não dependem em exclusivo do tipo de estratégia ou estratégias desenvolvidas uma vez que, no caso da estratégia *Fazer uma simulação, experimentação ou dramatização*, são as representações ativas que lhe dão sustentação e apoio. Já no caso das restantes estratégias utilizadas verifica-se a utilização tanto das representações icónicas como das representações simbólicas, parecendo essa utilização estar diretamente relacionada com as características da tarefa proposta relativamente às estruturas matemáticas envolvidas.

#### **4.3. Que papel têm os diferentes tipos de representação na resolução dos problemas?**

As representações utilizadas pelos quatro alunos, englobadas em três grandes categorias – representações ativas, representações icônicas e representações simbólicas – revelaram possuir papéis e funções muito distintas entre si. Uma das funções iniciais ao nível da resolução dos problemas propostos foi o de possibilitar aos alunos transpor para o papel a informação ouvida no decorrer da leitura dos enunciados dos problemas. Neste caso, as representações apoiaram a compreensão do enunciado do problema, a interpretação do mesmo, bem como das relações existentes entre os dados do problema.

As representações ativas, através da manipulação de materiais concretos, tiveram um papel crucial para que duas das alunas conseguissem resolver um dos problemas proposto. Através da ação, estas alunas conseguiram concretizar o raciocínio matemático que esteve subjacente à correta resolução do problema em questão.

No que diz respeito às representações icônicas, em particular ao desenho, este desempenhou um papel fulcral nas representações de alguns dos alunos representando diferentes elementos do problema ou chegando, em alguns casos, a representar a resolução completa do problema. Este elemento icónico serviu ainda, frequentemente, como recurso de interpretação do problema e como registo da solução. Houve também situações em que o desenho foi utilizado apenas para representar aspetos da situação apresentada no texto do problema sem expressar qualquer tipo de relação. O desenho parece ter dado a possibilidade aos alunos de construir um significado para as diferentes situações, muitas delas novas, que surgiam no âmbito da resolução dos problemas propostos. Esta representação funcionou assim como uma ferramenta para os alunos darem significado aos conceitos e às ideias matemáticas com que se iam deparando. Através deste elemento icónico, os alunos tiveram oportunidade de refletir sobre o que iam construindo e recordar o processo matemático seguido a fim de o comunicar aos outros. Os desenhos criados pelos alunos tinham significado, eram intencionais e tinham um propósito.

Uma das subcategorias das representações icônicas muito utilizada foi o diagrama. Esta representação revelou-se uma ferramenta essencial com a qual os alunos organizaram o pensamento matemático de modo a representarem a estrutura dos problemas que procuravam resolver. O diagrama serviu ainda de apoio a diferentes raciocínios matemáticos e lançou as bases para a solução dos problemas envolvidos. Através desta representação, os alunos comunicaram também o processo de resolução seguido bem como a solução encontrada. Através dos diagramas construídos, os alunos realizaram diversas inferências que os conduziu, na maioria das vezes, à resposta correta.

Os símbolos criados pelos próprios alunos para representar determinado elemento do real, os símbolos não convencionais, tiveram igualmente um papel importante. Com frequência, verificou-se que os símbolos não convencionais foram manipulados como se de objetos reais

se tratassem. Estes símbolos permitiram aos alunos expressar as suas ideias matemáticas e comunicar aos outros como encontraram a solução para o problema proposto, além de lhes ter possibilitado uma resolução menos morosa. Importa ainda realçar que estes símbolos não convencionais tiveram significado e funcionaram como suporte para a descoberta e construção pessoal de linguagens convencionais e não convencionais.

No que concerne às representações simbólicas, em algumas situações foram apenas utilizadas para representar e comunicar ou a solução encontrada e/ou um determinado número de elementos do problema em questão. Noutros problemas, os elementos simbólicos foram utilizados no âmbito da resolução do problema em si, constituindo os elementos que formavam os diagramas elaborados. Foram raras as resoluções em que os alunos apenas recorreram a elementos simbólicos para determinar a solução do problema. Constatou-se que os elementos simbólicos se apoiam nos elementos icónicos previamente construídos, e que são estes últimos que ajudam os alunos a descompactar o problema e a dar significado à interpretação do mesmo.

Verificou-se ainda que, mesmo quando os alunos não determinaram a solução correta do problema proposto, as representações revelaram se o aluno em questão tinha ou não compreendido e interpretado corretamente o problema.

#### **4.4. Considerações finais**

Como se pode concluir do trabalho desenvolvido, as representações construídas pelos alunos desempenham um papel crucial na correta interpretação e resolução dos problemas propostos. Em particular, os diagramas utilizados pelos alunos parecem ter funcionado como preciosas ferramentas para o raciocínio matemático, sendo por isso essencial que os alunos sejam encorajados e orientados para criar diagramas como forma de melhorar a sua compreensão da estrutura do problema. Mas para que os alunos os possam criar, é fundamental que os problemas propostos sejam de uma natureza que desafie os alunos para o uso deste tipo de representação.

As representações utilizadas, além de possibilitarem aos alunos a resolução dos problemas, permitem ao professor compreender qual o raciocínio matemático que esteve subjacente à interpretação e resolução apresentadas. Mas como pode o professor ter acesso a processos que têm lugar internamente nos alunos? Precisamente através das representações externas apresentadas pelo aluno, complementadas com a sua explicação de como as construiu e utilizou. É igualmente fundamental proporcionar aos alunos espaços nos quais estes partilhem com os seus pares, e com o professor, como e porque construíram esta ou aquela representação. Esta partilha permite aos colegas terem contato com outras formas de pensar, com outro tipo de representações, e permite aos professores adaptar a sua prática pedagógica

em função do feedback recebido, uma vez que estes momentos de partilha providenciam indicações preciosas das diversas etapas que o aluno atravessou durante a resolução de um determinado problema. O professor poderá, desta forma, preparar o seu trabalho em função dos aspetos em que os seus alunos apresentarem mais dificuldade, potenciando outros que permitam desenvolver diferentes competências no campo da Matemática.

As representações iniciais, espontâneas e muito pessoais irão, gradualmente, transformar-se em representações mais formais, simbólicas, verificando-se que em muitas situações os dois tipos de representação, menos formais e mais formais, coexistirão sempre que o aluno de tal sentir necessidade. Esta dupla utilização não retira correção ao trabalho realizado pelo aluno, muito pelo contrário. Fornece-lhe uma maior riqueza de pormenores e um maior cunho pessoal, além de fornecer ao professor um conjunto de informações bastante pertinentes no que se refere às tarefas desenvolvidas.

### **Agradecimentos**

À escola onde decorreu a presente investigação pelo apoio manifestado.

### **Referências bibliográficas**

- APM (1988). *A renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.
- Borralho, A. (1990). *Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de Matemática: proposta de um programa de intervenção* (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.
- Bruner, J. (1989). El desarrollo de los procesos de representación. In J. L. Linaza (Ed.), *Acción, pensamiento y language* (pp. 119-128). Madrid: Alianza Editorial.
- Bruner, J. (1999). *Para uma Teoria da Educação*. Lisboa: Relógio D'Água.
- Bruner, J. (2000). *A cultura da educação*. Lisboa: Edições 70.
- Cavalcanti, C. T. (2001). Diferentes formas de resolver problemas. In K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas. Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 121 – 149). Porto Alegre: Artmed.
- Diezmann, C., & English, L. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. Cuoco, & F. Curcio (Eds.), *Roles of Representation in School Mathematics - 2001 Yearbook* (pp. 77-89). Virgínia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Diniz, M. I. (2001). Resolução de problemas e comunicação. In K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 87 – 97). Porto Alegre: Artmed.
- Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics - 2001 Yearbook* (pp. 1-23). Virgínia: National Council of Teachers of Mathematics.

- ME/DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.
- ME/DEB (2004). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico – 1.º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica. (Programa original publicado em 1990).
- ME/DGEBS (1990). *Reforma Educativa. Ensino Básico: Programa do 1.º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação. Direcção Geral dos Ensinos Básicos e Secundário.
- NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.
- NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.
- Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.
- Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME/DGIDC.
- Ponte, J., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Santos, M. E. (1991). *Mudança Conceptual na Sala de Aula: Um desafio pedagógico*. Lisboa: Livros Horizonte.
- Smole, K., & Diniz, M. (2001). *Ler, escrever e resolver problemas. Habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed.
- Stancanelli, R. (2001). Conhecendo diferentes tipos de problemas. In K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 103 – 120). Porto Alegre: Artmed.
- Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM & Lawrence Erlbaum.
- Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. In P. Palhares (Ed.), *Elementos de matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 7-51). Lisboa: Lidel.
- Woleck, K. (2001). Listen to their pictures: An investigation of children's mathematical drawings. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics - 2001 Yearbook* (pp. 215-227). Virgínia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Wong, K. (2004). Using Multi-modal think-board to teach mathematics. In *Proceedings of ICME-10*. Copenhagen: Technical University of Denmark. (consultado em <http://math.nie.edu.sg/kywong/Multi-modal%20think-board%20ICME%2010%20paper.pdf>)
- Yin, R. (1993). *Applications of case study research*. Thousand Oaks: Sage.

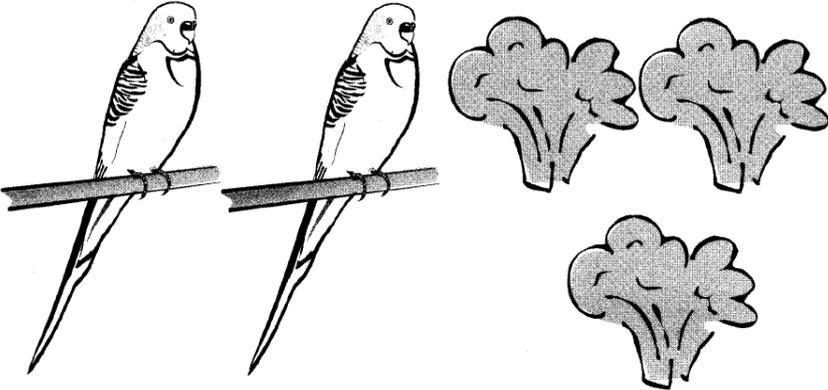
## Anexo

Exemplo de problema proposto aos alunos no âmbito da investigação:

### PROBLEMA A

Nome: \_\_\_\_\_ Ano/Turma \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_\_



**Os periquitos**

O Pedro tem 10 periquitos. Todos os dias o Pedro dá a cada 2 periquitos 3 folhas de alface. Quantas folhas de alface tem o Pedro de dar, por dia, aos seus 10 periquitos?

(Adaptado de Gave, 2001)

Explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.