Geometria dos espaços de gwistor

Rui Albuquerque
Departamento de Matemática da Universidade de Évora
Rua Romão Ramalho, 59
7000-671 Évora, Portugal
e-mail: `rpa@uevora.pt`

Resumo:
Breve introdução ao espaço de gwistor, a estrutura G_2 natural existente no fibrado de esferas tangente $\pi : SM \to M$ de qualquer variedade riemanniana M, orientável e de dimensão 4.

Abstract Brief introduction to gwistor space or the natural G_2-structure associated to any oriented riemannian 4-manifold.

palavras-chave: fibrado esferas; estrutura G_2; métrica de Einstein.

keywords: tangent sphere bundle; G_2 structure; Einstein manifold.

1 Estruturas G_2

Seja T um espaço euclidiano orientado de dimensão 4 e fixemos um vector $u \in S^3 \subset T$, onde S^3 denota a esfera de raio 1. Qualquer outro vector de T escreve-se de forma única como $\lambda u + X$, com $\lambda \in \mathbb{R},\ X \in u^\perp$.

Reparamos então que T suporta uma estrutura quaterniónica natural, ou seja, de álgebra de divisão isomorfa a $\mathbb{H}$, com a métrica euclidiana inicial e tal que u é o elemento unidade. Com efeito, a operação produto é dada por

$$(\lambda_1 u + X)(\lambda_2 u + Y) = (\lambda_1\lambda_2 - \langle X, Y\rangle)u + \lambda_2 X + \lambda_1 Y + X \times Y\ ,$$

sendo $\times$ um produto-cruzado, definido em $u^\perp$ pela identidade $\langle X \times Y, Z\rangle = \mathrm{vol}(u, X, Y, Z)$ para qualquer triplo $X, Y, Z \in u^\perp$. A operação de conjugação em T compatível é descrita obviamente por $\overline{\lambda u + X} = \lambda u - X$.

Lembremos agora que a *maior* álgebra de divisão normada com elemento unidade que existe, a álgebra dos octoniões $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus e\mathbb{H}$, pode ser encontrada através do processo de Cayley-Dickson:

$$(z_1, z_2) \cdot (z_3, z_4) = (z_1 z_3 - \overline{z_4} z_2, z_4 z_1 + z_2 \overline{z_3}), \qquad \forall z_i \in \mathbb{H}.$$

Note-se que e é um novo elemento de quadrado -1, como o é i em $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ ou j em $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$; porém, não só por si definem tais vectores a estrutura desejada (há muitos quádruplos ortonormados i, j, k, e na mesma relação). A operação de produto é suficiente. Por outras palavras, e voltando ao espaço T acima, interessa-nos a estrutura de módulo de T sobre $\mathbb{H}$ e a de $T \oplus T \simeq \mathbb{R}.1 \oplus \mathbb{R}^7$ sobre $\mathbb{O}$. Finalmente temos

$$\mathrm{G}_2 = \mathrm{Aut}\,\mathbb{O}$$

que é grupo de Lie simples, compacto, simplesmente conexo, de dimensão 14. Elementos de G_2 preservam a unidade 1 e a métrica, bem como a orientação, logo $\mathrm{G}_2 \subset \mathrm{SO}(7)$.

Tal grupo de Lie encontra-se entre as poucas classes de grupos de Lie simples dando origem a uma geometria riemanniana, dita excepcional, actualmente muito em voga em geometria e física. Aparece como um dos possíveis grupos de holonomia irredutível de variedades riemannianas não simétricas (classificação descrita num bem conhecido resultado de M. Berger de 1955). Mas $\mathrm{G}_2 \subset \mathrm{SO}(7)$ só aparece de modo irredutível em variedades de dimensão 7. Sabe-se que existem mesmo variedades com aquele grupo de holonomia (R. Bryant, 1987).

Uma **estrutura** G_2 numa variedade $\mathcal{S}$, de dimensão 7, é definida por uma 3-forma ϕ *estável*, i.e.

- $\exists$ um produto vectorial tal que $\phi(X, Y, Z) = \langle X \cdot Y, Z\rangle$, o qual corresponde ao produto octoniónico dos imaginários puros $\mathbb{R}^7 \subset \mathbb{O}$, ou
- $\phi = e^{456} + e^{014} + e^{025} + e^{036} - e^{126} - e^{234} - e^{315}$ nalgum referencial (por definição, $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$), ou
- ϕ pertence a certa $\mathrm{GL}(7)$-órbita aberta de $\Lambda^3 T^*\mathcal{S}$ (dim $35 = 49 - 14$).

A existência de tal 3-forma implica a redução do grupo de estrutura $\mathrm{GL}(7)$ da variedade $\mathcal{S}$ para $\mathrm{SO}(7) \supset \mathrm{G}_2$, de forma única. Com efeito:

$$\phi \text{ determina a orientação e uma única métrica sobre } \mathcal{S}.$$

Como acontece noutras geometrias, a holonomia da variedade riemanniana e orientada $(\mathcal{S}, \phi)$ reduz-se a $\{g \in \mathrm{SO}(7) :\ g^*\phi = \phi\} = \mathrm{G}_2$ se $\nabla^g\phi = 0$, onde ∇^g denota a conexão de Levi-Civita. Neste caso, $\mathcal{S}$ diz-se uma **variedade** G_2. A topologia de $\mathcal{S}$ é condicionada, cf. [6].

Um teorema de A. Gray garante: $\nabla^g\phi = 0$ se e só se $\mathrm{d}\phi = 0$ e $\mathrm{d} * \phi = 0$. Tais equações são raramente satisfeitas nos espaços que se conhecem actualmente; interessam-nos, por outro lado, parte das equações. ϕ diz-se *calibrada* se $\mathrm{d}\phi \in \Lambda^4 T^*\mathcal{S}$ se anula. E ϕ diz-se *cocalibrada* se $\mathrm{d} * \phi$ se anula.

2 O espaço de gwistor

Seja (M,g) uma variedade riemanniana, orientada, de dimensão 4 e seja

$$SM = \{u \in TM : \ \|u\| = 1\}.$$

Seja $\pi : TM \longrightarrow M$ o fibrado vectorial tangente. Tem-se $\mathrm{d}\pi : TTM \longrightarrow \pi^*TM$, morfismo de fibrados sobre TM. Como bem se sabe da geometria clássica de TM, identifica-se $\ker \mathrm{d}\pi \simeq \pi^*TM$ de forma natural. A conexão ∇^g sobre M permite escrever $TTM = H^{\nabla^g} \oplus \ker \mathrm{d}\pi \ \simeq \ \pi^*TM \oplus \pi^*TM$. O fibrado, dito vertical, $\ker \mathrm{d}\pi$ contém uma secção canónica, U, que em cada ponto $u \in SM$ toma o valor $u \in \pi^*TM$. Não é dificil provar que $TSM = U^\perp \subset TTM$. Reproduzindo a construção algébrica da secção 1, com estrutura métrica óbvia em $(\pi^*TM)_u = T$, fica demonstrado o

Teorema 2.1 *SM admite uma estrutura G_2 natural.*

A tal estrutura damos o nome **espaço G_2-twistor** ou **gwistor** de M.

Sobre o espaço de gwistor podemos sempre construir, localmente, um referencial móvel ortonormado directo, $e_0 = u, \ \ e_1, e_2, e_3 \in H^{\nabla^g}$, sistema depois reproduzido como $U_u, e_4, e_5, e_6 \in \ker \mathrm{d}\pi$ no subespaço vertical, de modo a descrever as seguintes formas globais de SM:

$$\alpha = \text{3-forma volume nas fibras de } SM = e^{456}\ , \qquad \theta = e^0\ ,$$
$$\alpha_1 = e^{156} + e^{264} + e^{345}\ , \qquad \alpha_2 = e^{126} + e^{234} + e^{315}$$
$$\alpha_3 = e^{123}\ , \qquad \mathrm{vol} = \pi^*\mathrm{vol}_M = e^{0123} = \theta \wedge \alpha_3$$

Sendo U e e_0 campos definidos globalmente, em boa verdade a estrutura de SM reduziu-se a SO(3). Note-se que já se conheciam a métrica (de Sasaki) em SM, o campo vectorial $e_0 \in \mathfrak{X}_{SM}$ e logo a 1-forma θ, a qual verifica $(\mathrm{d}\theta)^3 \wedge \theta \neq 0$, implicando o resultado que diz que $(SM, \frac{1}{4}g, \frac{1}{2}\theta, 2e_0)$ constitui uma estrutura métrica de contacto (Y. Tashiro).

Finalmente,

$$\phi = \alpha_2 - \alpha + \theta \wedge \mathrm{d}\theta.$$

Observamos ainda que se pode generalizar a construção do espaço de gwistor com H^∇ provindo de qualquer conexão métrica ∇ em M.

Agora, sobre SM definem-se $\underline{r} = \underline{r}_u = r^{\nabla^g}(u,u)$, $\rho = r^{\nabla^g}(\ \ ,U) = (\mathrm{ric}\, U)^\flat$. Tem-se que $\mathrm{d} * \phi = \rho \wedge \mathrm{vol}$ e que $\mathrm{d}\phi = 2\theta \wedge \alpha_1 - \underline{r}\, \mathrm{vol} - \mathcal{R}^U\alpha + (\mathrm{d}\theta)^2$ onde

$$\mathcal{R}^U\alpha := \mathrm{d}\alpha \ = \sum_{0 \leq i < j \leq 3} R_{ij01}e^{ij56} + R_{ij02}e^{ij64} + R_{ij03}e^{ij45}\ .$$

Teorema 2.2 *Tem-se sempre* $\mathrm{d}\phi \neq 0$*; Temos* $\mathrm{d} * \phi = 0$ *se e só se* (M, g) *é variedade de Einstein.*

Exemplos. 1. se $M = \mathcal{H}^4$ é o espaço hiperbólico real com curvatura seccional -2, então $SM = S\mathcal{H}^4 = \frac{\mathrm{SO}_0(4,1)}{\mathrm{SO}(3)}$ é de tipo puro $W_3 = \{\tau \in \Lambda^3 : \ \tau \wedge \phi = \tau \wedge *\phi = 0\}$:

$$\mathrm{d}\phi = *\tau = *(2\theta \wedge \mathrm{d}\theta + 6\alpha), \qquad \mathrm{d} * \phi = 0.$$

2. espaços simétricos de rank 1 geram espaços de gwistor homogéneos,

$$S\mathbb{S}^4 = V_{5,2}\ , \qquad S\mathbb{CP}^2 = \frac{\mathrm{SU}(3)}{\mathrm{U}(1)} = N_{1,1}\ , \qquad S\mathcal{H}^2_{\mathbb{C}} = \frac{SU(2,1)}{U(1)}\ .$$

Outros resultados sobre G_2 e novos desenvolvimentos na teoria dos espaços de gwistor encontram-se na bibliografia.

Referências

[1] R. Albuquerque e I. Salavessa, "The G_2 sphere of a 4-manifold", *Monatsh. Math.*, Vol. 158, Issue 4 (2009), pp. 335-348.

[2] R. Albuquerque e I. Salavessa, "Erratum to: The G_2 sphere of a 4-manifold", *Monatsh. Math.*, Vol. 160, Issue 1 (2010), pp. 109-110.

[3] R. Albuquerque, "On the G_2 bundle of a Riemannian 4-manifold", *J. Geom. Phys.*, Vol. 60 (2010), pp. 924-939.

[4] R. Albuquerque, "On the characteristic connection of gwistor space", *Central European J. Math.*, (2012), DOI: 10.2478/s11533-012-0082-y

[5] R. Albuquerque, "Variations of gwistor space", http://arxiv.org/abs/1107.5358v2

[6] D. Joyce, *Riemannian Holonomy Groups and Calibrated Geometry*, Oxford University Press, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 2009.