

UNIVERSIDADE DE ÉVORA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA RURAL

HIDRÁULICA GERAL I

Engenharia Civil

Engenharia dos Recursos Hídricos

Maria Madalena Vitório Moreira Vasconcelos

Évora, 2005

Capítulo 1

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DO MOVIMENTO DOS FLUIDOS

1.1 Definição de fluido

O âmbito da matéria leccionada nesta disciplina relaciona-se com a representação matemática do comportamento físico dos fluidos.

Denomina-se por fluido toda a matéria que se deforma indefinidamente quando sujeita à acção de uma força tangencial. Nos fluidos a resistência à deformação é finita e por isso não têm forma própria, tomando a forma do recipiente que ocupam.

Na definição anterior podem enquadrar-se os líquidos e os gases. No entanto, estes dois fluidos podem apresentar comportamentos muito diferentes.

1.2 Fluido como meio contínuo

Os fluidos são constituídos por um conjunto de moléculas com espaços entre si, não sendo por isso possível identificar a continuidade. Não será feita a caracterização do comportamento de um fluido com base na molécula.

É possível, a uma escala maior, definir o equivalente ao ponto material da física que na mecânica dos fluidos tomará o nome de partícula. Define-se partícula como o elemento mais pequeno possível de identificar na Mecânica dos Fluidos e que garante a continuidade.

1.3 Propriedades físicas dos fluidos

1.3.1 Isotropia

É a propriedade do fluido possuir as mesmas características independentemente da direcção do versor normal a cada um dos planos que passam numa partícula.

1.3.2 Massa, peso, massa volúmica, peso volúmico e densidade

Massa, m , é a quantidade de matéria que existe num dado volume de fluido. Peso, \bar{P} , a acção da força atractiva exercida pela Terra (força da gravidade) sobre a massa do fluido.

Estas grandezas não apresentam grande interesse na Mecânica dos Fluidos se não introduzirem uma referência relativa ao volume. Assim, define-se massa volúmica, ρ , como a massa que existe por unidade de volume do fluido e peso volúmico, $\bar{\gamma}$, como o peso da unidade de volume do fluido. Estas duas grandezas são características de cada fluido, podendo variar mais ou menos com a temperatura e a pressão.

As unidades destas grandezas no sistema internacional, são apresentadas no Quadro 1.1.

Quadro 1.1 Unidades de grandezas no SI

Grandeza	massa	Peso	massa volúmica	peso volúmico
Unidade	kg	kg m s ⁻² = N	kg m ⁻³	kg m ⁻² s ⁻² = N m ⁻³

No Quadro 1.2 são apresentados os valores da massa volúmica e do peso volúmico da água e do ar para diferentes temperaturas, à pressão atmosférica normal.

Quadro 1.2 Valores da massa volúmica e do peso volúmico para diferentes temperaturas, à pressão atmosférica normal

temperatura (°C)	massa volúmica (kg m ⁻³)		peso volúmico (N m ⁻³)	
	água	ar	água	ar
0	999,9	1,293	9809,0	12,68
4	1000,0	1,274	9810,0	12,50
10	999,7		9807,1	
20	998,2	1,204	9792,3	11,81
30	995,7		9767,8	
40	992,2	1,129	9733,5	11,08
50	988,1		9693,3	
60	983,2	1,062	9645,2	10,42
80	971,8	1,009	9533,4	9,90
100	958,4	0,946	9401,9	9,28

Para simplificar esta caracterização física dos fluidos aplica-se uma grandeza adimensional que é a densidade, d , e que relaciona a massa ou peso de um dado volume de fluido com a massa ou peso de igual volume de água à temperatura de 4°C e à pressão atmosférica normal. A densidade de um dado fluido pode ser determinada pela relação entre a

massa volúmica ou peso volúmico desse fluido e a massa volúmica ou peso volúmico da água à temperatura de 4°C e à pressão atmosférica normal.

No Quadro 1.3 são apresentados os valores da densidade, relativos a diferentes líquidos e gases à temperatura de 15,6°C e à pressão atmosférica normal.

Quadro 1.3 Densidade de alguns fluidos à temperatura de 15,6 °C e pressão atmosférica normal

fluido	Gasolina	ácido etílico (100%)	azeite	ácido sulfúrico (100%)	mercúrio
densidade	0,68 a 0,74	0,79	0,912-0,918	1,83	13,6
fluido	Ar	dióxido de carbono	oxigénio	hidrogénio	hélio
densidade	1,22 E-3	1,87 E-3	1,35 E-3	0,085 E-3	0,17 E-3

A comparação dos valores da densidade dos líquidos e dos gases permite identificar a primeira grande diferença entre estes fluidos, a quantidade de massa por unidade de volume nos gases tem uma ordem de grandeza de cerca de 1000 vezes inferior à dos líquidos.

1.3.3 Compressibilidade

A compressibilidade de um fluido manifesta-se na diminuição do volume de uma dada massa de fluido quando sujeita à acção de um aumento de pressão. Neste caso verifica-se o aumento da massa volúmica do fluido.

Esta propriedade pode ser representada através do coeficiente de compressibilidade, α , definido como a relação entre a diminuição relativa do volume e o aumento de pressão que lhe deu origem.

$$\alpha = -\frac{\frac{\Delta V}{V}}{\Delta p} \quad (1.1)$$

É usado ainda o inverso deste coeficiente, o módulo de elasticidade volumétrico, ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{\alpha} \quad (1.2)$$

Tendo em conta a diferença entre o valor da massa volúmica dos líquidos e gases será fácil perceber que nos gases existirá mais espaço entre as moléculas, permitindo uma maior diminuição do volume para a mesma variação de pressão.

1.3.4 Viscosidade. Líquidos perfeitos

A viscosidade é uma das propriedades mais importantes dos líquidos, que se manifesta quando estes entram em movimento. Pode, de modo geral, definir-se como a resistência à

deformação, ou seja, a maior ou menor capacidade do fluido tomar a forma do recipiente que ocupa. A comparação de duas situações bem distintas em que se despeja uma quantidade de mel ou água de um jarro para um copo permite-nos concluir que o mel tem uma viscosidade superior à viscosidade da água.

A viscosidade de um fluido pode ser facilmente identificada pelo estudo de um escoamento unidimensional desse fluido em que se define um conjunto de camadas que se deslocam na mesma direcção, mas com velocidades diferentes, Figura 1.1. A camada com maior velocidade tende a exercer uma força de arrastamento sobre a camada com menor velocidade, que por sua vez exerce uma força de atraso sobre a primeira. Estas duas forças têm o mesmo módulo, a mesma direcção e sentidos opostos. À força de arrastamento por unidade de área chama-se tensão tangencial, τ , apresentando sinal contrário ao sentido do escoamento.

Os fluidos estudados no âmbito deste curso (água, ar, óleos) são os chamados fluidos Newtonianos em que a tensão tangencial de arrastamento é directamente proporcional ao gradiente da velocidade segundo a direcção normal ao escoamento, Figura 1.1.

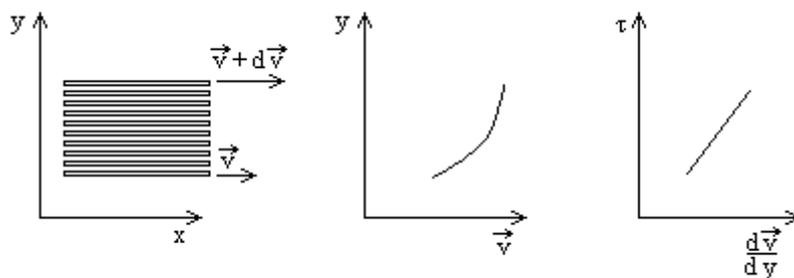


Figura 1.1 Movimento unidimensional de um fluido Newtoniano (escala deformada)

Esta relação pode ser representada pela equação (1.3)

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (1.3)$$

O coeficiente de proporcionalidade é a viscosidade dinâmica, μ . Por simplificação, no desenvolvimento de estudos hidráulicos é normalmente usado o parâmetro, designado por viscosidade cinemática, ν , relacionado com a viscosidade dinâmica através da

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ equação:} \quad (1.4)$$

No Quadro 1.4 são apresentados os valores da viscosidade cinemática para diferentes fluidos, a 38°C.

Quadro 1.4 Viscosidade cinemática para diferentes fluidos a 38°C

fluido	mercúrio	gasolina	azeite	Mel bruto
viscosidade cinemática (10⁻⁶ m²/s)	0,11	0,40 - 0,71	43	74

A viscosidade dos fluidos Newtonianos varia com a temperatura, no entanto de modo diferente nos líquidos e nos gases. A viscosidade nos líquidos diminui com o aumento da temperatura por diminuição das forças tangenciais de arrastamento. A viscosidade nos gases aumenta com o aumento da temperatura por se manifestar através do movimento das partículas.

No Quadro 1.5 e no Quadro 1.6 são apresentados os valores da viscosidade cinemática para diferentes temperaturas no caso da água e do ar, respectivamente. É possível identificar a diminuição da viscosidade na água e o aumento da viscosidade no ar, com o aumento da temperatura. Para variações de temperatura entre os 0°C e os 20°C a variação da viscosidade cinemática é de cerca de -43.3% e 8.5% para a água e para o ar, respectivamente. A variação da viscosidade cinemática com a temperatura na água é de ordem de grandeza superior à variação no ar.

Quadro 1.5 Viscosidade cinemática da água a diferentes temperaturas e à pressão atmosférica normal

temperatura (°C)	0	4	10	20	30	40	50	80	100
viscosidade cinemática (10⁻⁶ m²/s)	1,78	1,57	1,31	1,01	0,80	0,66	0,56	0,37	0,30

Quadro 1.6 Viscosidade cinemática do ar a diferentes temperaturas e à pressão atmosférica normal

temperatura (°C)	0	20	40	60	80	100	120	150
viscosidade cinemática (10⁻⁶ m²/s)	11,7	12,7	13,6	14,7	15,7	16,6	17,5	19,3

Sendo a viscosidade cinemática uma medida da resistência entre partículas do fluido em movimento, deve ser tomada em consideração a sua variação com a temperatura no estudo do escoamento. Na figura 1.2 representa-se a variação da viscosidade cinemática da água com a temperatura. É possível visualizar a variação da viscosidade cinemática dentro da gama de temperaturas da água dos escoamentos em estudo, no âmbito desta disciplina. É ainda apresentada a curva de ajustamento calculada pelo Método dos Mínimos Quadrados, a que corresponde um coeficiente de determinação igual à unidade.

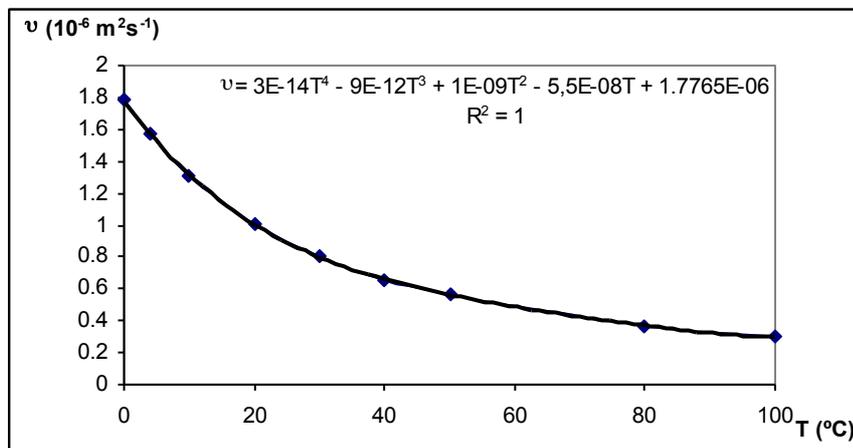


Figura 1.2 Variação da viscosidade cinemática da água com a temperatura

Define-se como fluido perfeito ou ideal aquele que, sendo homogêneo e isotrópico, se apresenta sem viscosidade. Naturalmente que este fluido não existe na natureza, tornando-se um conceito teórico. Existem, no entanto fluidos que em certas circunstâncias se comportam como perfeitos, é o caso de fluidos altamente acelerados. À medida que a velocidade de escoamento do fluido aumenta, diminui a influência da viscosidade.

1.3.5 Coesão e tensão superficial

A coesão manifesta-se através da acção atractiva entre moléculas no interior de um líquido, que se considera desprezável fora da esfera de actividade molecular (zona de influência de uma célula sobre as outras). As moléculas estão em equilíbrio quando as suas esferas de actividade molecular se encontram totalmente dentro do volume líquido.

Quando uma molécula está muito perto da superfície livre do líquido, a sua esfera de actividade molecular inclui um dado volume de gás que, por ter um número de moléculas inferior a igual volume de líquido, desequilibra o sistema de forças. Isto acontece com todas as moléculas que estão a uma distância da superfície livre inferior ao raio da esfera de actividade molecular, Figura 1.3. A força resultante é máxima quando a molécula está à superfície do líquido. O mesmo efeito se verifica no caso de dois líquidos não miscíveis.

Esta força por unidade de superfície chama-se tensão superficial e está directamente relacionada com a maior ou menor capacidade de evaporação de um líquido. A tensão superficial é quantificada pelo coeficiente de tensão superficial, δ , que representa a energia correspondente ao trabalho efectuado pela molécula para atingir a superfície, por unidade de área.

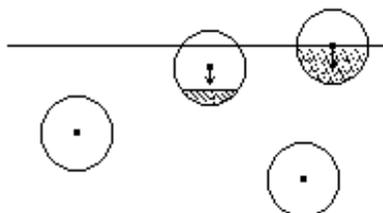


Figura 1.3 Representação esquemática da força superficial

No Quadro 1.7 são apresentados os valores do coeficiente de tensão superficial para diferentes líquidos, à temperatura de 20°C.

Quadro 1.7 Coeficiente de tensão superficial para diferentes líquidos à temperatura de 20 °C

líquido	em contacto com	coef. de tensão superficial (N/m)
álcool etílico	ar	22,37 E-3
óleo lubrificante	ar	35,3 E-3 a 38,3 E-3
água	ar	72,89 E-3
mercúrio	ar	513,85 E-3

mercúrio	água	392,69 E-3
-----------------	------	------------

1.3.6 Solubilidade dos gases nos líquidos

Coefficiente de solubilidade de um gás é a relação entre o volume de gás dissolvido e o volume de líquido dissolvente, em condições de saturação do gás.

As leis que regem a solubilidade dos gases nos líquidos são a Lei de Henry e a Lei de Dalton. Segundo a lei de Henry o coeficiente de solubilidade de um gás num líquido é constante se a temperatura se mantiver constante. Segundo a Lei de Dalton, no caso de vários gases dissolvidos num líquido, cada um dos gases se comporta como se fosse o único.

No âmbito desta disciplina só serão estudados fluidos gasosos com comportamento de gás perfeito, verificando-se a constância do produto do volume pela pressão, equação 1.5.

$$Vp = \text{const} \quad (1.5)$$

Se o coeficiente de solubilidade do gás for constante, quando ocorre um aumento da pressão do líquido os gases dissolvidos, respeitando a relação (1.5) dos gases perfeitos, diminuirão de volume permitindo aumentar a massa de gás dissolvida. No caso de diminuição de pressão no líquido, diminui a quantidade de massa do gás com possibilidade de dissolução, ocorrendo a libertação de parte do gás dissolvido.

No Quadro 1.8 são apresentados valores do coeficiente de solubilidade de gases na água, à pressão atmosférica normal.

Quadro 1.8 Coeficiente de solubilidade de gases na água à pressão atmosférica normal

gás	temperatura (°C)	coef. de solubilidade do gás
hidrogénio	0	0,023
	20	0,020
azoto	0	0,026
	20	0,017
oxigénio	0	0,053
	20	0,033
dióxido de carbono	0	1,87
	20	0,924

1.3.7 Tensão de saturação do vapor de um líquido

Define-se como tensão de saturação do vapor de um líquido a pressão absoluta para a qual o líquido passa ao estado gasoso. Neste caso, quando num dado líquido existem regiões

em que a pressão toma valores baixos ocorre a libertação de gases como foi apresentado no sub-capítulo anterior. Se a pressão continuar a diminuir e atingir o valor da tensão de vaporização o líquido passa ao estado gasoso.

A tensão de saturação varia com a temperatura atingindo o valor da pressão atmosfera normal à temperatura de 100°C e ao nível da água do mar. No Quadro 1.9 são apresentados os valores desta grandeza para diferentes temperaturas.

Quadro 1.9 Tensão de saturação do vapor da água a diferentes temperaturas

Temperatura (°C)	0	4	10	20	30	40	50	80	100
Tensão de saturação do vapor da água (N/m ²)	608	814	1226	2345	4248	7387	12341	47392	101367

A variação da tensão de saturação do vapor de água (N/m²) com a temperatura (°C) ajusta a um polinómio de 3º grau, equação 1.6, calculado pelo Método dos Mínimos Quadrados, a que corresponde um coeficiente de determinação igual a 0,997.

$$T_v = 0,1595T^3 - 8,3562T^2 + 251,43T - 13,466 \quad (1.6)$$

1.4 Forças exteriores

Sobre um dado volume de fluido podem actuar dois tipos de forças exteriores; as forças de massa ou volume e as forças de contacto ou de superfície.

No âmbito desta disciplina apenas são consideradas as forças de massa ou volume relativas à acção da gravidade - peso próprio.

As forças de contacto ou superfície são as forças que actuam no volume de fluido através da superfície limítrofe. Estas forças podem decompor-se na componente normal e componente tangencial à superfície.

A componente normal da força de contacto por unidade de superfície é designada por pressão, **p**. Esta é uma grandeza escalar e isotrópica, ou seja toma o mesmo valor numa partícula qualquer que seja a orientação do plano que passa nessa partícula. A componente tangencial por unidade de superfície é designada por tensão tangencial, **τ**.

A tensão tangencial só se manifesta quando os fluidos estão em movimento. A velocidade das partículas numa secção transversal do escoamento varia porque existe resistência na interface entre o fluido e a fronteira sólida e porque os fluidos têm viscosidade.

1.5 Variáveis a considerar na Mecânica dos Fluidos e sua representação

1.5.1 Variáveis envolvidas no estudo do comportamento de um fluido

Qualquer problema de dinâmica dos fluidos pode ser estudado a partir do conhecimento das seguintes grandezas em cada partícula, P , e ao longo do tempo:

- pressão $p = p(P,t)$
- massa volúmica $\rho = \rho(P,t)$
- temperatura $T = T(P,t)$
- vector velocidade $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$

Na maioria dos problemas práticos de Engenharia Hidráulica, no entanto, os processos são considerados isotérmicos, ou seja processos em que a variação de temperatura é desprezável em termos de resultados obtidos. Neste caso o número de variáveis reduz-se para cinco. No escoamento de fluidos incompressíveis a massa volúmica é constante, reduzindo o número de variáveis a quatro. A água é um fluido moderadamente compressível que, em determinadas condições, pode ser considerado incompressível.

1.6 Equações Gerais da Mecânica dos Fluidos

As equações que representam o comportamento do fluido podem apresentar-se na forma local ou na forma global. As equações locais representam o que se passa com cada partícula ou com cada posição do domínio fluido; as equações globais representam regiões do domínio fluido.

Nos problemas gerais de Dinâmica dos Fluidos é necessário determinar seis variáveis, ver sub-capítulo 1.5.1, sendo necessário, para tal, definir seis relações entre as variáveis:

- Equação da continuidade que representa o princípio da conservação da massa;

- Equação do equilíbrio dinâmico aplicado a um dado volume de fluido.

Sendo uma equação vectorial será representada pelas suas três componentes num sistema de eixos cartesianos;

- Equação de estado de um fluido que representa a relação entre a pressão, a massa volúmica e a temperatura;
- Equação do balanço de energia que representa o princípio da conservação da energia.

No caso de ser desprezável a variação da temperatura o número de variáveis reduz-se a cinco, a equação de balanço de energia não será aplicada e a equação de estado do fluido reduz-se a uma relação entre a pressão e a massa volúmica.

Se for desprezável a variação de temperatura e o fluido for considerado como incompressível, a equação de estado do fluido deixa de ter significado por não existir variação da massa volúmica com a pressão e o problema de dinâmica dos fluidos fica reduzido a quatro variáveis: a pressão e as três componentes da velocidade, que são determinadas pela resolução das quatro equações: a equação da continuidade e as três componentes da equação de equilíbrio dinâmico.

A aplicação dos princípios da conservação a uma dada região do domínio fluido permite obter as equações globais do comportamento do fluido:

- Equação da continuidade na forma global que representa o princípio da conservação da massa;
- Teorema de Euler ou Teorema da Quantidade de Movimento que representa o equilíbrio de forças aplicado a uma dado volume de fluido;
- Teorema de Bernoulli que representa um balanço energético

No âmbito da Engenharia Hidráulica a maioria das aplicações pretende determinar as grandezas globais. Por essa razão serão deduzidas no âmbito da Mecânica dos Fluidos as equações básicas na forma local e no âmbito da hidráulica as equações básicas na forma global.

1.7 Noções e parâmetros de carácter hidrocinemático

1.7.1 Representação do vector velocidade

1.7.1.1 Variáveis de Lagrange

A representação do vector velocidade em Variáveis de Lagrange significa o estudo do comportamento de cada partícula ao longo do tempo. É registada a história de cada partícula.

A nomenclatura usada é $\vec{v} = \vec{v}(M, t)$, que significa a velocidade da partícula M no instante t. Interessa conhecer a velocidade de cada partícula em diferentes instantes, figura 1.4.

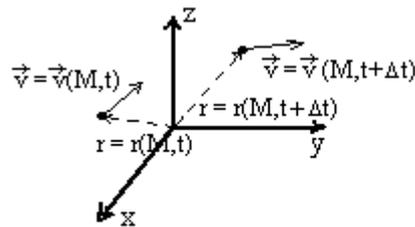


Figura 1.4 Representação da velocidade em Variáveis de Lagrange

A velocidade é determinada como a variação do vector de posição, \vec{r} , da partícula M, no tempo:

$$\vec{v}(M, t) = \frac{d\vec{r}(M, t)}{dt} \quad (1.7)$$

Esta representação torna-se, em Mecânica dos Fluidos, de difícil representação por não ser possível seguir cada partícula no seio do volume fluido

1.7.1.2 Variáveis de Euler

Neste caso são estudadas as características das partículas que passam numa dada posição do domínio fluido, ao longo do tempo. Em cada instante, é determinada a velocidade das partículas que nesse instante se encontram nas várias posições do domínio fluido.

A cada posição do domínio fluido corresponde um vector velocidade e um valor da pressão (relativos à partícula que se encontra naquela posição), constituindo um campo de vectores e um campo escalar.

A nomenclatura aplicada $\vec{v} = \vec{v}(P, t)$ é que significa a velocidade da partícula que está na posição **P** no instante **t**, figura 1.5.

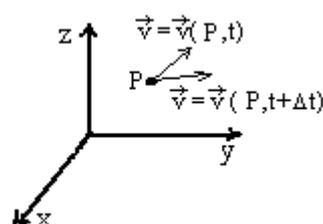


Figura 1.5 Representação da velocidade em Variáveis de Euler

No âmbito da Engenharia Hidráulica será aplicada a representação pelas variáveis de Euler.

1.7.2 Trajectórias e linhas de corrente

Designa-se por trajectória de uma partícula o lugar geométrico da posição dessa partícula ao longo do tempo. As trajectórias são definidas para as partículas e a sua representação é no tempo e no espaço, figura 1.6.

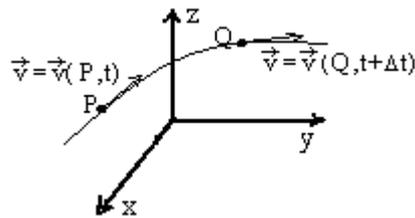


Figura 1.6 Trajectória de uma partícula

As linhas de corrente definem-se no domínio fluido, para um dado instante. São as curvas que têm em cada ponto, como tangente o vector velocidade de cada partícula localizada nesse ponto em cada instante, figura 1.7.

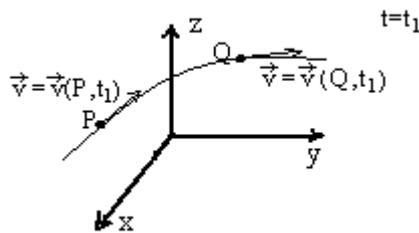


Figura 1.7 Linha de corrente para o instante t_1

Tendo em conta as características das trajectórias e das linhas de corrente pode concluir-se que:

- Em cada instante as linhas de corrente são tangentes às trajectórias das partículas no ponto onde está localizada a partícula nesse instante

- Se a velocidade das partículas que ocupam uma posição do domínio fluido for constante no tempo, as linhas de corrente em cada instante coincidem com a trajetória das partículas que se localizam nessa posição.

1.7.3 Tubo de fluxo

Seja uma linha fechada, não coincidente com uma linha de corrente, e faça-se passar por cada ponto dessa linha fechada uma linha de corrente. À superfície geométrica definida pelas linhas de corrente apoiadas no contorno fechado chama-se tubo de fluxo, figura 1.8.

A propriedade principal do tubo de fluxo é que as suas paredes não são atravessadas pelo fluido, já que a velocidade de todas as partículas de fluido localizadas na parede só têm componente tangencial.

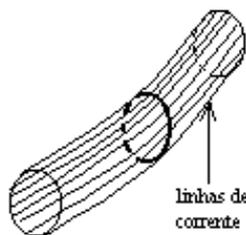


Figura 1.8 Tubo de fluxo para um dado instante

A vantagem da definição do tubo de fluxo está em que qualquer conduta de qualquer material se comporta como um tubo de fluxo, pois através das suas paredes também não se verifica escoamento.

1.7.4 Caudal e velocidade média de escoamento

Caudal, Q , é o volume de fluido que atravessa uma dada superfície por unidade de tempo. Seja S uma superfície e dS a superfície elementar onde a velocidade é considerada constante e igual a \vec{v} . Só a componente da velocidade, normal à superfície, contribui para o caudal através dessa superfície. O comprimento percorrido pelas partículas, localizadas na superfície no instante inicial, durante um intervalo de tempo dt é $v_n dt$ em que $v_n = v \cos \alpha$ é a componente da velocidade segundo a direção normal à superfície, figura 1.9.

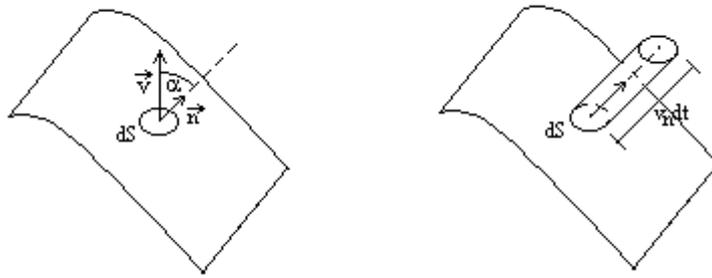


Figura 1.9 Caudal elementar

O volume do fluido que atravessa a superfície dS com a velocidade \vec{v} no intervalo de tempo dt é:

$$\text{Vol} = v_n dt dS \quad (1.8)$$

O caudal elementar que atravessa a área elementar dS é:

$$dQ = v_n dS = \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (1.9)$$

Na equação 1.9 o termo $\vec{v} \cdot \vec{n}$ representa o produto interno entre o vector velocidade e o versor normal à superfície. O caudal através de uma dada superfície S é igual ao integral, do caudal elementar, a toda a superfície:

$$Q = \int_S dQ = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_S v_n dS \quad (1.10)$$

Usualmente, o diagrama de velocidades na secção transversal de um tubo de fluxo não está disponível, tornando impossível o cálculo do caudal nessa secção. Para ultrapassar esta dificuldade foi definida uma grandeza designada por velocidade média e que é a velocidade fictícia, constante na secção, que transporta o mesmo caudal num tubo com iguais características geométricas:

$$U = \frac{Q}{S} = \frac{\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS}{S}$$

$$(1.11)$$

1.8 Classificação do movimento dos fluidos

1.8.1 Nota introdutória

A classificação dos escoamentos pode ser feita de acordo com diferentes critérios sendo cada um deles independente dos outros. Classifica-se o escoamento quanto à variação das grandezas no tempo; quanto à variação das grandezas no espaço; quanto ao comportamento relativo das partículas e quanto à posição relativa entre o fluido e a fronteira sólida.

1.8.2 Classificação quanto à variação das grandezas no tempo e no espaço

Os escoamentos em que todas as grandezas envolvidas não variam com o tempo designam-se por permanentes. Se alguma das grandezas é dependente do tempo o escoamento chama-se variável.

No caso de um escoamento permanente as grandezas envolvidas são apenas função da posição em que as partículas se encontram, não variando de instante para instante. As derivadas parciais em ordem ao tempo anulam-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (1.12)$$

As linhas de correntes mantêm-se ao longo do tempo, coincidindo com as trajectórias das diferentes partículas, uma vez que a velocidade em cada posição se mantém qualquer que seja a partícula nessa posição e qualquer que seja o instante.

Relativamente à variação das grandezas no espaço podem os escoamentos ser classificados como uniformes ou variados.

Escoamento uniforme é aquele em que as grandezas não variam de posição para posição no domínio fluido, ou seja a derivada das grandezas em ordem ao espaço (sendo s medido ao longo da linha de corrente definida para um dado instante) anula-se:

$$\frac{\partial}{\partial s} = 0 \quad (1.13)$$

No movimento variado as grandezas variam de posição para posição em que as partículas se encontrem, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial s} \neq 0$$

(1.14)

Na prática, teremos um escoamento permanente no caso do abastecido a partir de um reservatório de grandes dimensões, em que a entrada e/ou saída de caudal desse reservatório não se faz sentir na cota da superfície livre no reservatório. Mantendo-se constante ao longo do tempo a energia no reservatório, o caudal e a velocidade média na secção transversal da conduta que sai do reservatório também são constantes. Por outro lado, se o reservatório for de pequenas dimensões o abastecimento provoca a diminuição da cota da superfície livre dentro do reservatório e conseqüentemente a energia disponível no reservatório, variando o caudal e a velocidade média na secção transversal da conduta abastecida.

Se as características geométricas de uma dada conduta de transporte de um líquido se mantiverem constantes ao longo do seu comprimento o escoamento é uniforme. Caso contrário será variado.

1.8.3 Classificação quanto ao comportamento relativo das partículas

A análise do comportamento relativo das partículas permite identificar o escoamento laminar e o escoamento turbulento. O escoamento laminar caracteriza-se por um deslocamento regular de todas as partículas, mantendo, estas, uma posição bem definida entre si. O movimento turbulento caracteriza-se por uma deslocamento desordenado das partículas, as trajectórias de cada partícula cruzam-se variando a direcção da velocidade das partículas de modo muito irregular.

Nos movimentos turbulentos só faz sentido falar no valor médio das grandezas, pois os valores instantâneos variam de instante para instante. As partículas têm trajectórias que se inter cruzam sem ordem. A velocidade em cada instante e em cada posição é igual a:

$$\vec{v}_i = \bar{\vec{v}} + \vec{v}'_i \quad (1.15)$$

Em que:

\vec{v}_i é a velocidade instantânea,

$\bar{\vec{v}}$ é a velocidade média e

\vec{v}'_i a flutuação em torno da média

A velocidade instantânea de flutuação considera-se aleatória apresentando como média o valor zero.

A visualização do escoamento laminar e do escoamento turbulento pode ser feita através da Experiência de Reynolds que se caracteriza pela injeção de um líquido corado no escoamento de um líquido transparente (ex: água). Para velocidades baixas de escoamento verifica-se que o fluido corado se desloca segundo uma linha recta, estamos perante um regime laminar. À medida que a velocidade da água aumenta a linha correspondente ao escoamento do líquido corado começa a apresentar curvatura e para certo valor da velocidade a linha rompe e o escoamento do líquido corado confunde-se com o escoamento da água, não permitindo distinguir os dois fluidos. Neste caso estamos em regime turbulento. O escoamento entre o regime laminar e o regime turbulento designa-se por escoamento de transição.

1.8.4 Classificação quanto à posição relativa do fluido e da fronteira sólida

Quanto à posição relativa do fluido e da fronteira sólida classifica-se o escoamento como exterior ou interior. O escoamento exterior caracteriza-se por o fluido envolver completamente a fronteira sólida. Como exemplo refere-se o escoamento do ar em torno da asa de um avião, para um sistema de referência colocado na asa do avião. Escoamentos interiores são aqueles em que o escoamento é envolvido totalmente ou parcialmente pela fronteira sólida. Este é o tipo de escoamento que iremos estudar e refere-se a:

- escoamento em canais: escoamento em superfície livre
- escoamento em tubos fechados: ocupando a totalidade da secção (escoamento em pressão) ou parte da secção (escoamento em superfície livre).

Problemas resolvidos

1 - A que pressão pode esperar a ocorrência de cavitação na entrada de uma bomba que eleva água à temperatura de 20°C?

Qual pensa ser o valor superior: a tensão de saturação do vapor da água ou a tensão de saturação do vapor do mercúrio?

Resolução:

Consultando a tabela 1.9, conclui-se que a água, à temperatura de 20°C, passa ao estado de vapor para a pressão absoluta de 2345 Nm⁻².

Tendo em conta que o coeficiente de tensão superficial é muito superior no mercúrio em contacto com o ar do que na água em contacto com o ar, é necessário ocorrer uma diminuição maior nas forças de coesão entre as moléculas no mercúrio o que se consegue com uma maior diminuição da pressão no fluido. Assim, conclui-se que a tensão de saturação do vapor do mercúrio é inferior à tensão de saturação do vapor da água. Os valores da tensão de saturação do mercúrio e da água à temperatura de 20°C são respectivamente 2345 Nm⁻² e 0,173 Nm⁻².

2 - Determine o volume libertado de gases dissolvidos (hidrogénio, oxigénio e dióxido de carbono) em 1 m³ de água à pressão absoluta de 5 bar, para uma diminuição de pressão de 42 m c. a., sabendo que a temperatura se manteve constante e igual a 20°C durante a ocorrência do fenómeno.

Gás	coeficiente de solubilidade na água à temperatura de 20°C	coeficiente de solubilidade na água à temperatura de 0°C
Hidrogénio	0,020	0,023
Oxigénio	0,033	0,053
dióxido de carbono	0,924	1,870

Resolução:

Neste problema pretende-se determinar o volume de gás libertado, para tal será aplicada a Lei de Dalton que defende o comportamento de cada gás ser independente dos outros gases existentes num dado líquido; a Lei de Henry que admite o coeficiente de solubilidade manter-se constante para a mesma temperatura; e a Lei de gases perfeitos em que é constante o produto da pressão absoluta pelo volume ocupado pelo gás.

a pressão inicial é 5 bar = 5 . 10⁵ Nm⁻²

a diminuição da pressão é 42 m c.a. = 42 . 9800 Nm⁻² = 411600 Nm⁻²

a pressão final é 5 . 10⁵ Nm⁻² - 411600 Nm⁻² = 88400 Nm⁻²

hidrogénio

O volume ocupado pela massa de hidrogénio no instante inicial é:

$$\frac{V_H^i}{V_{H_2O}} = 0,020 \quad \Rightarrow \quad V_H^i = 0,020 \cdot 1 = 0,020 \text{ m}^3$$

O valor da constante do gás perfeito, com base nos dados fornecidos para o instante inicial é:

$$V_H^i p_H^i = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \text{const} = 0,020 \cdot 5 \cdot 10^5 = 10^4 \text{ Nm}$$

no instante final a pressão diminuiu e o volume ocupado pelo hidrogénio aumentou para:

$$V_H^f \cdot 88400 = 10^4 \quad \Rightarrow \quad V_H^f = 0,113 \text{ m}^3$$

O volume de hidrogénio libertado foi:

$$V_H^f - V_H^i = 0,113 - 0,020 = 0,093 \text{ m}^3 = 93 \ell$$

oxigénio

O volume ocupado pela massa de oxigénio no instante inicial é:

$$\frac{V_O^i}{V_{H_2O}} = 0,033 \quad \Rightarrow \quad V_H^i = 0,033 \cdot 1 = 0,033 \text{ m}^3$$

O valor da constante do gás perfeito, com base nos dados fornecidos para o instante inicial é:

$$V_O^i p_O^i = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \text{const} = 0,033 \cdot 5 \cdot 10^5 = 1,65 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

no instante final a pressão diminuiu e o volume ocupado pelo oxigénio aumentou para:

$$V_O^f \cdot 88400 = 1,65 \cdot 10^4 \quad \Rightarrow \quad V_O^f = 0,187 \text{ m}^3$$

O volume de oxigénio libertado foi:

$$V_O^f - V_O^i = 0,187 - 0,033 = 0,154 \text{ m}^3 = 154 \ell$$

dióxido de carbono

O volume ocupado pela massa de dióxido de carbono no instante inicial é:

$$\frac{V_{CO_2}^i}{V_{H_2O}} = 0,924 \quad \Rightarrow \quad V_{CO_2}^i = 0,924 \cdot 1 = 0,924 \text{ m}^3$$

O valor da constante do gás perfeito, com base nos dados fornecidos para o instante inicial é:

$$V_{CO_2}^i p_{CO_2}^i = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \text{const} = 0,924 \cdot 5 \cdot 10^5 = 4,62 \cdot 10^5 \text{ Nm}$$

no instante final a pressão diminuiu e o volume ocupado pelo dióxido de carbono aumentou para:

$$V_{CO_2}^f \cdot 88400 = 4,62 \cdot 10^5 \quad \Rightarrow \quad V_{CO_2}^f = 5,226 \text{ m}^3$$

O volume de dióxido de carbono libertado foi:

$$V_{CO_2}^f - V_{CO_2}^i = 5,226 - 0,924 = 4,302 \text{ m}^3$$

Capítulo 2

EQUAÇÕES GERAIS DO MOVIMENTO DOS FLUIDOS

2.1 Introdução

Neste capítulo serão deduzidas as equações básicas locais que representam o comportamento das partículas fluidas.

Considera-se que a variação da temperatura não afecta os resultados obtidos no estudo e que os fluidos são incompressíveis. Pelo que, o sistema de equações fica reduzido às equações da continuidade e de equilíbrio dinâmico e as variáveis a determinar são a pressão e o vector velocidade.

É aplicada a representação de Euler na dedução das equações locais, ou seja é estudado o que se passa em cada posição do domínio fluido, procurando representar o escoamento das partículas de fluido que passam nessas posições.

2.2 Equação da continuidade

2.2.1 Nota introdutória

Esta equação representa o princípio da conservação da massa aplicado a um dado volume do domínio fluido, denominado por volume de controlo, V , e limitado por uma superfície de controlo, S , considerada indeformável relativamente a um sistema de eixos de referência, figura 2.1.

A equação do balanço de massa representa a igualdade entre o fluxo de massa através da superfície de controlo e a variação de massa dentro do volume de controlo, na unidade de tempo e pode ser representada por:

$$m_s - m_e = \Delta m_{int} \quad (2.1)$$

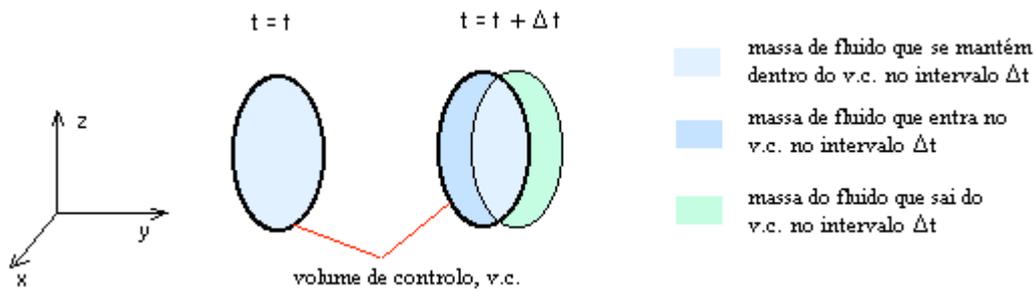


Figura 2.1 Representação do volume de controle e da superfície de controle

A massa que sai menos a massa que entra no volume de controle, através da superfície de controle, na unidade de tempo, é igual à variação da massa no interior do volume de controle, na mesma unidade de tempo.

Convenciona-se como positivo o sentido de saída de massa do volume de controle, através da superfície de controle.

2.2.2 Dedução da expressão geral e local da Equação da Continuidade

Se dQ é o caudal elementar, ou seja o volume de fluido que atravessa uma área elementar da superfície de controle, por unidade de tempo, então a massa que atravessa a área elementar da superfície de controle, por unidade de tempo é determinada através de:

$$dm = \rho dQ \quad (2.2)$$

Substituindo a equação do caudal elementar, equação 1.9, obtém-se:

$$dm = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (2.3)$$

De acordo com a convenção referida \vec{n} é o versor normal à superfície de controle, com o sentido positivo para o exterior e a expressão (2.3) é positiva quando o fluido sai da superfície de controle e negativa quando o fluido entra na superfície de controle.

A massa que atravessa a superfície de controle, por unidade de tempo, é determinada pelo integral da equação anterior à superfície de controle:

$$m_s - m_e = \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (2.4)$$

Relativamente à representação da variação da massa dentro do volume de controle começamos por definir a massa de um volume elementar que é representada por:

$$\rho dV \quad (2.5)$$

A massa total contida no interior da superfície de controlo, no instante inicial é representada por:

$$m_{\text{int}} = \int_V \rho dV \quad (2.6)$$

A variação da massa dentro do volume de controlo, na unidade de tempo, é determinada pela equação 2.7, em que o sinal negativo representa a diminuição da massa existente no volume de controlo quando o fluxo de massa através da superfície de controlo, na unidade de tempo, é positivo, ou seja a massa que sai é superior à massa que entra na superfície de controlo, por unidade de tempo.

$$\Delta m_{\text{int}} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad (2.7)$$

A equação do balanço de massa, na forma integral, pode ser representada do seguinte modo:

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0 \quad (2.8)$$

Para simplificar a equação anterior aplica-se o Teorema da Divergência de Gauss que iguala o fluxo de um vector através de uma superfície fechada ao integral no volume, limitado pela superfície referida, da divergência desse vector:

$$\int_S (\vec{r} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \text{div } \vec{r} dV \quad (2.9)$$

Na equação anterior S é a superfície fechada que limita o volume V e em que o vector \vec{r} e a sua divergência estão definidos.

Substituindo a equação 2.9 aplicada ao vector $\vec{r} = \rho \vec{v}$ na equação 2.8, esta transforma-se em:

$$\int_V \text{div } \rho \vec{v} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0 \quad (2.10)$$

Admitindo que, o volume de controlo não varia no tempo, a derivada em ordem ao tempo do segundo termo da equação (2.10) pode passar para dentro do integral:

$$\int_V \operatorname{div} \rho \vec{v} \, dV + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = 0 \quad (2.11)$$

Substituindo a soma de integrais pelo integral da soma, vem:

$$\int_V \left(\operatorname{div} \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 \quad (2.12)$$

Como não foi considerada qualquer restrição na definição do volume de controlo, a anulação do integral pressupõe a anulação do argumento do mesmo integral.

A expressão geral e local da Equação da Continuidade, sob a forma vectorial, representa-se por:

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.13)$$

Em notação tensorial cartesiana, a expressão geral e local da Equação da Continuidade representa-se do seguinte modo:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.14)$$

2.2.3 Casos particulares da expressão geral e local da Equação da Continuidade

No caso particular de fluidos incompressíveis, a massa volúmica é constante no espaço e no tempo. O segundo termo anula e no primeiro termo a massa volúmica sai da derivada. A Equação da Continuidade, na forma vectorial, fica reduzida a:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2.15)$$

Em notação tensorial cartesiana a Equação da Continuidade aplicada a fluidos incompressíveis é:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.16)$$

No caso particular de escoamento permanente não existe variação no tempo, anulando-se o segundo termo da equação (2.13).

A Equação da Continuidade aplicada a escoamento permanente, na forma vectorial, fica reduzida a:

$$\text{div } \rho \vec{v} = 0 \quad (2.17)$$

Em notação tensorial cartesiana:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.18)$$

2.2.4 Equação da continuidade aplicada a um tubo de fluxo

No caso de um tubo de fluxo, o volume de controlo a que será aplicado o princípio da conservação da massa pode ser definido de um modo geral, como representado na figura 2.2, em que a secção transversal pode variar ao longo do eixo do tubo.

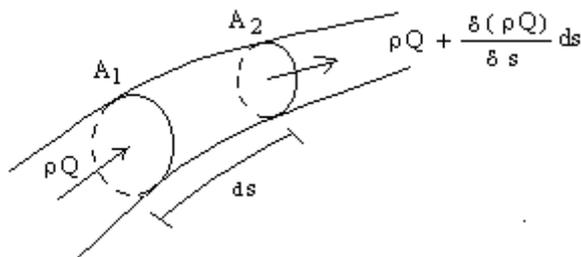


Figura 2.2 Volume de controlo representado por um tubo de fluxo

O fluxo de massa dá-se através das secções transversais do escoamento, A1 e A2. A superfície lateral do volume de controlo é formada por um feixe de linhas de corrente, não havendo passagem de partículas fluidas através dele.

O princípio da conservação da massa pode, neste caso, ser enunciado do seguinte modo; a massa que sai, por unidade de tempo, do volume de controlo através da secção A2 ($\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds$) menos a massa que entra, por unidade de tempo, no mesmo volume de controlo através da secção A1 (ρQ) é igual à variação, na mesma unidade de tempo, da massa que existe dentro do volume de controlo, equação 2.19.

$$m_{A2} - m_{A1} = \Delta m_{int} \quad (2.19)$$

A massa que existe dentro do volume de controlo no instante inicial, admitindo um volume tronco-cónico, é:

$$\rho V = \rho \frac{A_1 + A_2}{2} ds = \rho A ds \quad (2.20)$$

A variação da massa dentro do volume de controlo, na unidade de tempo, é determinada por:

$$\Delta m_{int} = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho A ds) \quad (2.21)$$

Substituindo na equação do balanço, obtém-se:

$$\left[\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds \right] - \rho Q = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho A ds) \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds + \frac{\partial}{\partial t} (\rho A ds) = 0 \quad (2.23)$$

Admitindo que não existe variação da forma ou dimensão do volume de controlo, o comprimento do troço em estudo, ds , é finito e constante no tempo, podendo sair da derivada no segundo termo, obtendo-se:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds + \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) ds = 0 \quad (2.24)$$

Dividindo a equação 2.24 por ds , a expressão da Equação da Continuidade, aplicada a um tubo de fluxo, reduz-se a:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0 \quad (2.25)$$

2.2.5 Casos particulares da expressão da Equação da Continuidade, aplicada a um tubo de fluxo

No caso particular de fluidos incompressíveis a massa volúmica é constante no espaço e no tempo. Nos dois termos a massa volúmica sai da derivada, podendo ser dividida a equação pela massa volúmica.

A Equação da Continuidade, aplicada ao longo de um tubo de fluxo e escoamento de um fluido incompressível, escreve-se:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (2.26)$$

No caso particular de escoamento permanente não existem variações no tempo, anulando-se o segundo termo da equação (2.25). A Equação da Continuidade, aplicada ao longo de um tubo de fluxo e escoamento permanente, escreve-se:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} = 0 \quad (2.27)$$

$$\rho Q = \text{const.} \quad (2.28)$$

Introduzindo na equação 2.28 a definição de velocidade média do escoamento, obtém-se:

$$\rho UA = \text{const.} \quad (2.29)$$

Se escoamento de um fluido incompressível é permanente, a Equação da Continuidade reduz-se a:

$$UA = \text{const.} \quad (2.30)$$

Como exemplo de aplicação da equação (2.30) refere-se a determinação da velocidade média de escoamento de um fluido incompressível na secção A_2 em função da velocidade média na secção A_1 , figura 2.3.



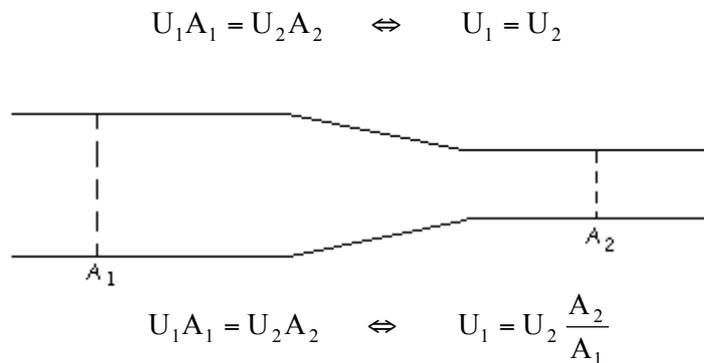


Figura 2.3 Aplicação da Equação da Continuidade aplicada ao longo de um tubo de fluxo

2.3 Equação de equilíbrio dinâmico

2.3.1 Introdução

Esta equação resulta da aplicação da equação fundamental da dinâmica a um dado volume de fluido em movimento que, no instante t , ocupa a posição definida pela superfície de controlo, superfície fronteira do volume de controlo.

Partindo da equação fundamental da dinâmica, equação 2.31, em que \vec{F}_e é a resultante das forças exteriores que actuam sobre o volume de fluido contido na superfície de controlo e $-m\vec{a}$ é a força de inércia da massa contida no volume de fluido.

$$\vec{F}_e - m\vec{a} = \vec{0} \quad (2.31)$$

As forças exteriores a considerar são:

- Força de massa ou volume: - peso próprio

A massa contida num volume elementar de fluido dentro do volume de controlo é $dm = \rho dV$ e o peso dessa massa $d\vec{G} = \rho \vec{g} dV$. O peso próprio da massa contida pela superfície de controlo é:

$$\vec{G} = \int_V \rho \vec{g} dV \quad (2.32)$$

- Força de contacto ou superfície:

O fluido circundante exerce sobre o fluido contido no interior do volume de controlo, através da superfície de controlo, acções distribuídas ao longo desta. Designando por \vec{T} a

tensão em cada ponto da superfície de controlo, para uma dada orientação da superfície de controlo (estado de tensão num ponto) com a normal à superfície \vec{n} e para um dado instante. A resultante das forças de superfície será determinada pelo integral:

$$\int_S \vec{T}(P, \vec{n}, t) dS \quad (2.33)$$

A tensão depende do ponto da superfície de controlo, P ; da orientação da superfície de controlo nesse ponto definida através da normal à superfície \vec{n} , e do tempo.

A força de inércia é determinada para uma massa elementar, dentro da superfície de controlo, por:

$$- dm \vec{a} = -\rho \vec{a} dV \quad (2.34)$$

Integrando a equação (2.34) no volume de controlo, a força de inércia é:

$$F_I = -\int_V \rho \vec{a} dV \quad (2.35)$$

Substituindo na equação fundamental da dinâmica, equação 2.31, as equações 2.31, 2.32 e 2.35 obtém-se a equação de equilíbrio dinâmico na forma integral:

$$\int_V \rho \vec{g} dV + \int_S \vec{T} dS - \int_V \rho \vec{a} dV = 0 \quad (2.36)$$

2.3.2 Representação de Euler do vector aceleração

A aceleração mede a variação da velocidade no tempo e no espaço. Em representação de Euler, a caracterização é feita relativamente a cada posição contida no volume de controlo, ou seja, relativamente às partículas fluidas que se encontram localizadas em posições dentro do volume de controlo. Na representação de Euler, a aceleração é caracterizada pelo gradiente de velocidade das partículas localizadas em posições diferentes do volume de controlo, num dado instante, e pelo gradiente de velocidade ao longo do tempo, em cada posição do volume de controlo, figura 2.4.

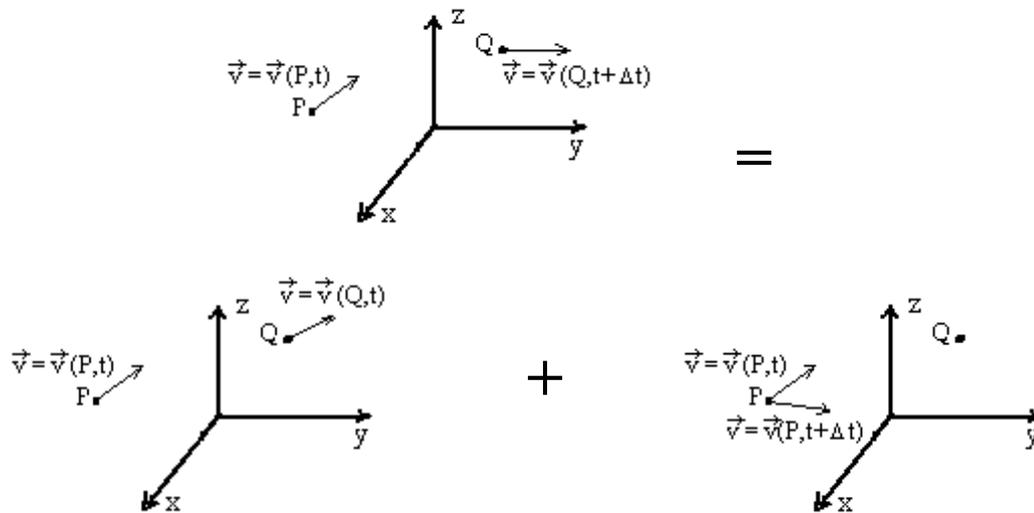


Figura 2.4 Caracterização da aceleração em Representação de Euler

No caso geral, o vector velocidade é dependente das variáveis independentes tempo e posição no meio fluido.

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}(t, x, y, z) \\ v_x = v_x(t, x, y, z) \\ v_y = v_y(t, x, y, z) \\ v_z = v_z(t, x, y, z) \end{cases}$$

Com base na definição de variável, a aceleração é determinada por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(Q, t + \Delta t) - \vec{v}(P, t)}{\Delta t} \quad (2.37)$$

Se à equação 2.37 somarmos e subtrairmos no numerador o valor da velocidade na posição **P** e instante **t + Δ t**, vem:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\vec{v}(Q, t + \Delta t) - \vec{v}(P, t + \Delta t)] + [\vec{v}(P, t + \Delta t) - \vec{v}(P, t)]}{\Delta t} \quad (2.38)$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\vec{v}(Q, t + \Delta t) - \vec{v}(P, t + \Delta t)]}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\vec{v}(P, t + \Delta t) - \vec{v}(P, t)]}{\Delta t} \quad (2.39)$$

A primeira parcela do membro da direita representa a variação da velocidade no espaço, para um dado instante, e a segunda parcela representa a variação da velocidade no tempo, para uma dada posição.

A variação no espaço pode ser decomposta nas três direcções do sistema de coordenadas ortogonais.

$$\begin{aligned} \bar{a} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{[\bar{v}(Q, t + \Delta t) - \bar{v}(P, t + \Delta t)] \Delta x}{\Delta x \Delta t} + \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[\bar{v}(Q, t + \Delta t) - \bar{v}(P, t + \Delta t)] \Delta y}{\Delta y \Delta t} + \\ \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{[\bar{v}(Q, t + \Delta t) - \bar{v}(P, t + \Delta t)] \Delta z}{\Delta z \Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\bar{v}(P, t + \Delta t) - \bar{v}(P, t)]}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Os limites da equação anterior correspondem a derivadas parciais do vector velocidade em ordem às variáveis independentes; tempo e posição no meio fluido.

$$\bar{a} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \quad (2.41)$$

A variação das componentes, num sistema de eixos cartesianos, da variável independente posição no meio fluido com a variável independente tempo é igual à respectiva componente da velocidade e a equação vectorial da aceleração é representada por:

$$\bar{a} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \quad (2.42)$$

As componentes da equação 2.42, segundo os três eixos cartesianos são:

$$\left\{ \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{aligned} \right. \quad (2.43)$$

Introduzindo a definição de **grad** a equação (2.42) é representada do seguinte modo:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad}) \bar{\mathbf{v}} \quad (2.44)$$

A primeira parcela do segundo membro da equação 2.44 corresponde à variação da velocidade no tempo, denomina-se por aceleração local; o segundo termo, correspondente à variação da velocidade no espaço, denomina-se por aceleração convectiva.

2.3.3 Equação de Euler

Substituindo a aceleração, equação 2.44, na equação de equilíbrio dinâmico, equação 2.36, obtém-se:

$$\int_V \rho \bar{\mathbf{g}} dV + \int_S \bar{\mathbf{T}} dS - \int_V \rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} | \text{grad}) \bar{\mathbf{v}} \right] dV = 0 \quad (2.45)$$

No caso particular de um líquido perfeito, ou seja um líquido homogéneo, isotrópico e sem viscosidade, as forças tangenciais são nulas e as forças de superfície ficam reduzidas às forças normais. A tensão em qualquer ponto da superfície de controlo é representada pela pressão com sinal negativo de acordo com a convenção definida, por ter o sentido de compressão da superfície de controlo:

$$\int_S \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{P}, \bar{\mathbf{n}}, t) dS = - \int_S p \bar{\mathbf{n}} dS \quad (2.46)$$

Substituída a equação 2.46 na equação de equilíbrio dinâmico, equação 2.45, obtém-se:

$$\int_V \rho \bar{\mathbf{g}} dV - \int_S p \bar{\mathbf{n}} dS - \int_V \rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} | \text{grad}) \bar{\mathbf{v}} \right] dV = 0 \quad (2.47)$$

A aplicação do Teorema da Divergência de Gauss, permite substituir o integral em superfície em integral no volume limitado pela superfície referida, ou seja:

$$\int_S \phi \bar{\mathbf{n}} dS = \int_V \text{grad} \phi dV \quad (2.48)$$

Na equação anterior S é a superfície fechada que limita o volume de controlo V e em que o escalar ϕ e o seu gradiente estão definidos. A aplicação do Teorema da Divergência de Gauss à grandeza escalar pressão, p , permite obter a seguinte relação:

$$-\int_S p \bar{n} dS = -\int_V \text{grad } p dV \quad (2.49)$$

A equação anterior substituída na equação de equilíbrio dinâmico, equação 2.47, permite obter:

$$\int_V \rho \bar{g} dV - \int_V \text{grad } p dV - \int_V \rho \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} | \text{grad}) \bar{v} \right] dV = 0 \quad (2.50)$$

A soma dos integrais é igual ao integral da soma dos três argumentos:

$$\int_V \left\{ \rho \bar{g} - \text{grad } p - \rho \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} | \text{grad}) \bar{v} \right] \right\} dV = 0 \quad (2.51)$$

Não tendo sido referido nenhuma condição na definição do volume de controlo, sendo por arbitrário, a anulação do integral pressupõe a anulação do argumento do mesmo integral.

$$\rho \left\{ \bar{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} | \text{grad}) \bar{v} \right] \right\} = 0 \quad (2.52)$$

A Equação de Equilíbrio Dinâmico aplicada ao caso particular de um fluido perfeito reduz-se à seguinte equação e denomina-se por Equação de Euler.

$$\bar{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - (\bar{v} | \text{grad}) \bar{v} = 0 \quad (2.53)$$

Por ser uma equação vectorial, as componentes da Equação de Euler, segundo os três eixos cartesianos, são representadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial t} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial t} - v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \\ -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial t} - v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} - v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (2.54)$$

2.3.4 Casos particulares da Equação de Euler

No caso particular de um escoamento permanente não existe variação no tempo, anulando-se o terceiro termo da equação 2.53.

A Equação de Euler para escoamento permanente, na forma vectorial, fica reduzida a:

$$\vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - (\vec{v} | \text{grad}) \vec{v} = \vec{0} \quad (2.55)$$

No caso particular do fluido em repouso, a estudar no capítulo seguinte, situação em que não se manifesta a viscosidade, ou seja o fluido se comporta como perfeito, a velocidade é nula e a Equação de Euler reduz-se a:

$$\vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \vec{0} \quad (2.56)$$

2.3.3 Equações de Navier-Stokes

A dedução das equações de equilíbrio dinâmico ao caso de fluidos reais, em que se manifestam as forças tangenciais de arrastamento, permite obter as equações gerais do movimento.

No caso de fluidos Newtonianos serão acrescentados à equação 2.53 os dois termos:

$$\frac{1}{3} \nu \text{grad}(\text{div } \vec{v}) + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.57)$$

O primeiro termo representa a influência da compressibilidade e o segundo termo representa a influência da viscosidade.

As Equações de Equilíbrio Dinâmico, na forma vectorial, para o caso de fluidos reais e Newtonianos denominam-se por Equações de Navier-Stokes e representam-se do seguinte modo:

$$\vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{3} \nu \text{grad}(\text{div } \vec{v}) + \nu \nabla^2 \vec{v} - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - (\vec{v} | \text{grad}) \vec{v} = 0 \quad (2.58)$$

Problemas resolvidos

1 - Verifique a equação da continuidade dos escoamentos de um líquido incompressível com os seguintes campos de velocidades:

a) $\vec{v} = 2y \vec{i}$

b) $\vec{v} = \frac{1}{3}x \vec{i} - \frac{1}{3}y \vec{j} + \frac{2}{3} \vec{k}$

Resolução:

A Equação da Continuidade aplicada ao caso particular do escoamento de um líquido incompressível é:
 $\text{div } \vec{v} = 0$

a) Trata-se de um escoamento unidimensional, ou seja em que a velocidade apenas tem componente segundo a direcção xx.

Aplicando a definição de divergente de um vector, vem:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial(2y)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0$$

A anulação do divergente da velocidade verifica a equação da continuidade.

b) Trata-se de um escoamento tridimensional em que o vector velocidade apresenta componente segundo os três eixos do sistema de coordenadas cartesianas. Aplicando a definição de divergente ao vector velocidade:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{1}{3}x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-\frac{1}{3}y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{2}{3}\right)}{\partial z} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 0 = 0$$

A anulação do divergente do vector velocidade verifica a equação da continuidade.

2 - Considere o escoamento de um líquido incompressível entre dois planos, representado pelo seguinte campo de velocidades:

$$\vec{v} = 2z \hat{i} - z \hat{j}$$

- Verifique a equação da continuidade
- Calcule o caudal através de uma secção rectangular, cujo vector normal coincide com o eixo dos xx, para a coordenada z entre 0 e 1m e a coordenada y entre 0 e 5m.
- Deduz a equação que representa as linhas de corrente
- Deduz a equação que representa as trajectórias
- Conclua acerca da permanência do escoamento

Resolução:

a) A equação da continuidade, para o caso particular do escoamento de um líquido incompressível, é: $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

aplicando a definição de divergente ao vector velocidade, obtém-se:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial(2z)}{\partial x} + \frac{\partial(-z)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0$$

A anulação do divergente da velocidade verifica a equação da continuidade.

b) Aplicando a definição de caudal: $Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$

e tendo em conta que: $\vec{n} = 1\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$
 $\vec{v} \cdot \vec{n} = (2z) \cdot 1 + (-z) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2z$

vem: $Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S 2z \, dS$

como a secção de escoamento se define no plano yoz, a sua área é determinada por:

$$S = y \cdot z \Rightarrow dS = dy \cdot dz$$

que substituído na equação anterior permite determinar o caudal transportado:

$$Q = \int_S 2z \, dS = \int_{z=0}^{z=1} \int_{y=0}^{y=5} 2z \, dy \, dz = \int_{z=0}^{z=1} 2z \cdot 5 \, dz = 5 \, \text{m}^3 \text{s}^{-1}$$

c) As linhas de corrente são definidas pelo sistema de equações diferenciais:

$$\frac{v_x}{dx} = \frac{v_y}{dy} = \frac{v_z}{dz}$$

a aplicação ao campo de velocidades apresentado neste problema permite obter:

$$\frac{2z}{dx} = \frac{-z}{dy} = \frac{0}{dz} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2z}{dx} = \frac{-z}{dy} \\ \frac{-z}{dy} = \frac{0}{dz} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2dy = -dx \\ z dz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = -x + C_1 \\ z = C_2 \end{cases}$$

Para cada valor das constantes de integração é definido o sistema de equações que representa uma linha de corrente.

d) As trajectórias são definidas pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dz}{dt} = v_z \end{cases}$$

a aplicação ao campo de velocidades actual permite determinar as equações das trajectórias:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2z \\ \frac{dy}{dt} = -z \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 2z dt \\ dy = -z dt \\ dz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -2dy \\ z = C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y + C_4 \\ z = C_3 \end{cases}$$

Para cada valor das constantes de integração C_3 e C_4 é definido o sistema de equações que representa uma trajectória.

e) Como as equações das linhas de corrente e as equações das trajectórias coincidem, o escoamento é permanente.

Capítulo 3

HIDROSTÁTICA

3.1 Introdução

Hidrostática é o capítulo da Hidráulica que estuda o comportamento dos fluidos em repouso. Num fenómeno hidráulico em que a temperatura é constante, o fluido incompressível e a velocidade das partículas nula, existe uma incógnita que é a pressão.

A equação da continuidade deixa de ter significado, ficando o sistema de equações reduzido à equação de equilíbrio dinâmico que permite determinar a relação entre os valores de pressão nas partículas que ocupam as diferentes posições do domínio fluido.

Se a velocidade relativa entre partículas é igual a zero, não se manifesta o efeito da viscosidade, comportando-se o fluido como perfeito. Aplica-se assim, à hidrostática, a equação de Euler simplificada para velocidade de escoamento nula, equação (2.56):

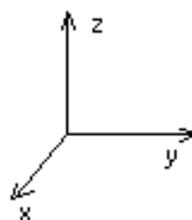
$$\bar{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0 \quad (2.56)$$

O primeiro termo representa o efeito das forças de massa ou volume (peso próprio) e o segundo termo representa o efeito das forças de contacto normais.

3.2 Lei hidrostática de pressões

As componentes, da equação 2.56, segundo os três eixos cartesianos, oxyz, representam-se por:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 & \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 & \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \end{cases} \quad (3.1)$$



A integração da 1ª equação ao longo do eixo ox, permite obter a relação da pressão entre dois pontos localizados ao longo da direcção definida por ox:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial p}{\partial x} dx = 0 \quad \Rightarrow \quad (p_{x_2} - p_{x_1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{x_2} = p_{x_1} \quad (3.2)$$

A variação da pressão ao longo do eixo ox é representada pela equação 3.3 e permite concluir que a pressão é constante para qualquer posição em ox:

$$p(x) = \text{const.} \quad (3.3)$$

A integração da 2ª equação ao longo do eixo oy permite concluir que a pressão também é constante para qualquer posição do eixo oy:

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial p}{\partial y} dy = 0 \quad \Rightarrow \quad (p_{y_2} - p_{y_1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{y_2} = p_{y_1} \quad (3.4)$$

$$p(y) = \text{const.} \quad (3.5)$$

Integrando a 3ª equação ao longo do eixo oz, permite obter:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial p}{\partial z} dz = - \int_{z_1}^{z_2} \gamma dz \quad \Rightarrow \quad (p_{z_2} - p_{z_1}) = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz \quad \Rightarrow \quad (p_{z_2} - p_{z_1}) = -\gamma(Z_2 - Z_1)$$

$$Z_1 + \frac{p_{z_1}}{\gamma} = Z_2 + \frac{p_{z_2}}{\gamma} \quad (3.6)$$

A variação de pressão ao longo do eixo oz é representada pela equação:

$$Z(z) + \frac{p}{\gamma}(z) = \text{const} \quad (3.7)$$

em que: Z é a cota topográfica;

p/γ é a altura piezométrica de uma partícula de fluido com pressão p.

Cota topográfica é a distância, medida na vertical, entre a posição que a partícula ocupa e um plano horizontal de referência. Altura piezométrica de uma partícula é a altura a que sobe o fluido num tubo piezométrico quando instalado nessa posição (ver pág. 45).

A soma dos dois parâmetros designa-se por cota piezométrica que, em Hidrostática, é constante para qualquer valor de z.

Da dedução anterior pode concluir-se que, no caso de um fluido incompressível, para o sistema de eixos cartesiano considerado:

- a pressão é constante ao longo do eixo ox;
- a pressão é constante ao longo do eixo oy;
- a cota piezométrica é constante ao longo do eixo oz;

Tendo em conta que a pressão é constante ao longo do eixo ox e ao longo do eixo oy, conclui-se que a pressão é constante no plano definido por estes eixos, o plano horizontal. Como a cota topográfica e o peso volúmico são constantes nesse plano, é possível dizer que a cota piezométrica também é constante.

Fica, assim, deduzida a Lei Hidrostática de Pressões que se apresenta do seguinte modo:

A cota piezométrica é constante, em qualquer partícula de um fluido em repouso:

$$Z + \frac{p}{\gamma} = \text{const} \quad (3.8)$$

3.3 Aplicações da Lei Hidrostática de Pressões

3.3.1 Relação entre pressões em diferentes posições de um fluido em repouso

Os gases apresentam peso volúmico muito baixo, ver capítulo 1, pelo que qualquer diferença da cota topográfica, dentro do reservatório, corresponde a pequenas diferenças de pressão com ordem de grandeza do peso volúmico do gás. Assim, no caso de fluidos gasosos, a pressão é considerada constante em qualquer ponto do domínio fluido.

No caso de fluidos líquidos a relação entre as pressões das partículas em diferentes posições do domínio líquido é determinada através da aplicação da Lei Hidrostática de Pressões.

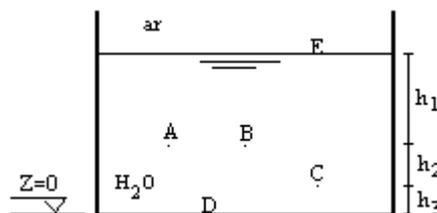


Figura 3.1 Reservatório com um líquido em repouso

No reservatório representado na Figura 3.1, a cota piezométrica é igual nas partículas localizadas nas posições A, B, C, D e E por serem partículas pertencentes ao mesmo líquido em repouso.

O cálculo começa pela partícula em que a pressão é conhecida, é o caso da partícula E que, por estar em contacto com a atmosfera, está sob acção da pressão atmosférica local

A partir da partícula E, ou qualquer outra partícula na superfície livre do líquido, é possível escrever as seguintes igualdades:

$$Z_D + \frac{p_D}{\gamma_{H_2O}} = Z_E + \frac{p_E}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow 0 + \frac{p_D}{\gamma_{H_2O}} = (h_1 + h_2 + h_3) + \frac{p_E}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow p_D = p_E + \gamma_{H_2O} (h_1 + h_2 + h_3) \quad (3.9)$$

$$Z_C + \frac{p_C}{\gamma_{H_2O}} = Z_D + \frac{p_D}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow h_3 + \frac{p_C}{\gamma_{H_2O}} = 0 + \frac{p_D}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow p_C = p_D - \gamma_{H_2O} h_3 \quad (3.10)$$

$$Z_B + \frac{p_B}{\gamma_{H_2O}} = Z_C + \frac{p_C}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow (h_2 + h_3) + \frac{p_B}{\gamma_{H_2O}} = h_3 + \frac{p_C}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow p_B = p_C - \gamma_{H_2O} h_2 \quad (3.11)$$

$$Z_A + \frac{p_A}{\gamma_{H_2O}} = Z_B + \frac{p_B}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow (h_2 + h_3) + \frac{p_A}{\gamma_{H_2O}} = (h_2 + h_3) + \frac{p_B}{\gamma_{H_2O}} \Rightarrow p_A = p_B \quad (3.12)$$

3.3.2 Relação entre pressões em partículas pertencentes a fluidos diferentes

No caso de um reservatório que contenha líquidos diferentes não miscíveis, em repouso, é possível relacionar a pressão em partículas dos diferentes líquidos através da superfície de interface entre os líquidos. A partir da referência (ex: partícula na superfície livre) é determinada a pressão numa partícula localizada na superfície de interface entre os líquidos. Admite-se que essa partícula pertence aos dois líquidos, mantendo a pressão qualquer que seja o líquido em estudo. A partir da pressão nessa partícula, calcula-se a pressão nas partículas do outro líquido.

Refere-se, ainda, que nas partículas pertencentes à superfície de interface entre os líquidos, a pressão não varia com o líquido em estudo, no entanto a cota piezométrica é diferente.

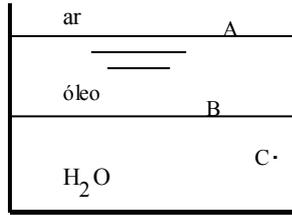


Figura 3.2 Reservatório com dois líquidos diferentes em repouso

No reservatório representado na Figura 3.2, a cota piezométrica é igual nas partículas localizadas nas posições A e B, por serem partículas pertencentes ao mesmo líquido em repouso, o óleo, por outro lado, a cota piezométrica é igual nas partículas localizadas nas posições B e C por serem partículas pertencentes ao mesmo líquido em repouso, a água. A cota piezométrica da partícula B será dependente do líquido em estudo.

O cálculo começa pela partícula A em que a pressão é igual à pressão atmosférica local. A partir da partícula A é possível escrever as seguintes igualdades:

$$Z_A + \frac{p_A}{\gamma_{\text{óleo}}} = Z_B + \frac{p_B}{\gamma_{\text{óleo}}} \Rightarrow p_B = p_A + \gamma_{\text{óleo}}(Z_A - Z_B) \quad (3.13)$$

$$Z_B + \frac{p_B}{\gamma_{\text{H}_2\text{O}}} = Z_C + \frac{p_C}{\gamma_{\text{H}_2\text{O}}} \Rightarrow p_C = p_B + \gamma_{\text{H}_2\text{O}}(Z_B - Z_C) \quad (3.14)$$

3.3.3 Diagrama de pressões sobre a fronteira sólida

Chama-se diagrama de pressões sobre uma superfície sólida a representação da variação de pressão do fluido que está em contacto com essa superfície. A determinação das pressões nas diferentes partículas em contacto com a superfície premida permite o traçado do diagrama de pressões. No caso da superfície premida ser um rectângulo com dois lados horizontais, o diagrama de pressões fica bem representado por uma figura geométrica plana, correspondente ao diagrama sobre um corte da superfície premida. O diagrama de pressões tem uma forma prismática com base igual à figura geométrica plana e com a altura igual à largura da superfície premida (na perpendicular à folha de papel).

Na figura 3.3 a) estão representados os diagramas das pressões interior e exterior sobre a parede lateral esquerda do reservatório apoiado. Na figura 3.3 b) está representado o diagrama de pressões resultante.

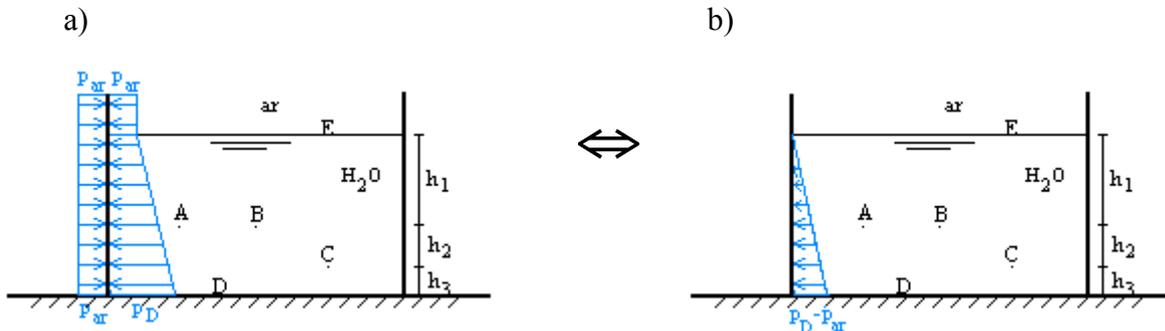


Figura 3.3 Diagrama de pressões sobre a parede lateral esquerda do reservatório apoiado
a) diagrama de pressões interior e exterior
b) diagrama de pressões resultante

No caso de se tratar de outra superfície premida qualquer, o diagrama de pressões não é prismático. No caso particular de uma superfície premida circular, na posição horizontal, o diagrama de pressões é um cilindro; se a mesma superfície estiver num plano não horizontal o diagrama de pressões é um cilindro cortado por um plano oblíquo ao eixo desse cilindro.

3.3.4 Pressões absolutas e pressões relativas

A análise do diagrama da figura 3.3 b) permite concluir que representa a variação de pressão calculada relativamente a uma referência que é a pressão atmosférica local.

Define-se, assim, a escala de pressões absolutas que tem a sua origem no vácuo e a escala de pressões relativas que apresenta a origem na pressão atmosférica local. A escala de pressões relativas relaciona-se com a escala de pressões absolutas através do esquema da figura 3.4.

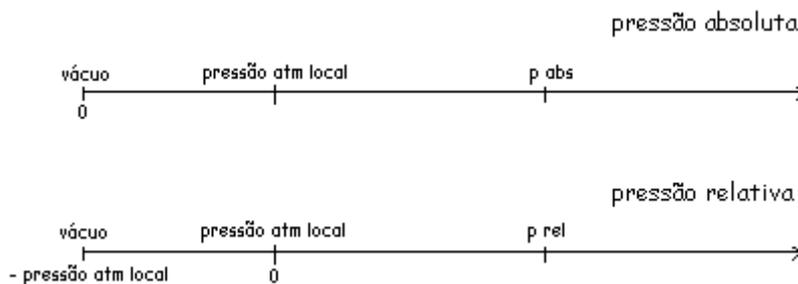


Figura 3.4 Escala de pressões absolutas e pressões relativas

A relação entre pressão absoluta e pressão relativa é representada pela seguinte equação:

$$P_{\text{absoluta}} = P_{\text{relativa}} + P_{\text{atm local}} \quad (3.15)$$

O termo pressão é identificado com a pressão relativa.

3.3.5 Manómetros de líquidos, medição de pressão

3.3.5.1 Manómetros simples

A medição da pressão numa partícula localizada numa posição de um domínio líquido, relativamente à pressão atmosférica local, é feita através da instalação de um manómetro simples.

O manómetro simples mais elementar é o tubo piezométrico, figura 3.5, que permite medir a pressão na posição onde foi instalado, relativamente à pressão atmosférica.

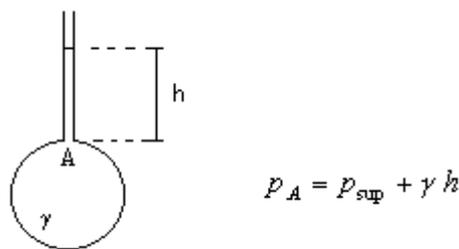


Figura 3.5 Tubo piezométrico

Pode definir-se altura piezométrica (p/γ) como a altura a que sobe um líquido dentro de um tubo piezométrico quando instalado num ponto em que a partícula de líquido, com peso volúmico γ , tem a pressão p .

Existem, no entanto, algumas excepções de aplicação do tubo piezométrico que são apresentadas na figura 3.6, em que se pretende determinar a pressão na partícula A, relativamente à pressão atmosférica local.

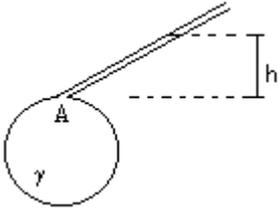
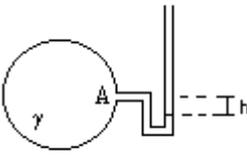
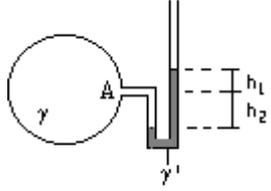
a) medição de pressões com valores baixos:	b) medição de pressões negativas:	c) medição de pressões com valores elevados:
		
$p_A = p_{\text{sup}} + \gamma h$	$p_A = p_{\text{sup}} - \gamma h$	$p_A = p_{\text{sup}} + \gamma'(h_1 + h_2) - \gamma h_2$

Figura 3.6 Exemplos de manómetros simples

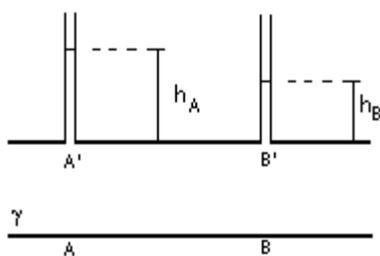
Para pressões baixas, caso a), o tubo inclinado permite a leitura numa escala maior, permitindo maior rigor.

Para pressões negativas, caso b) o tubo em U permite que a superfície livre com pressão relativa nula ocupe uma posição com cota topográfica inferior à cota topográfica da partícula A tendo esta uma pressão inferior a zero.

Para pressões muito elevadas é aplicado um manómetro simples um U e um líquido com maior peso volúmico de modo a que a igual pressão corresponda menor altura da coluna líquida. O líquido usado é normalmente o mercúrio, já que apresenta uma densidade de 13,6.

3.3.5.2 Manómetros diferenciais

Existem situações em que apenas interessa a determinação da diferença de pressões entre dois pontos. Esta medição pode ser feita com a instalação de dois manómetros simples, figura 3.7, ou pela aplicação de um manómetro diferencial, figura 3.8.

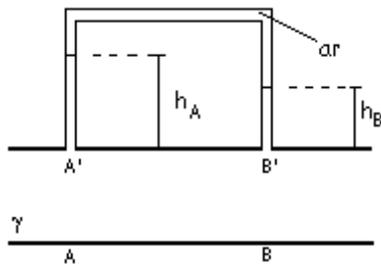


$$p_{A'} = p_{\text{sup}} + \gamma h_A$$

$$p_{B'} = p_{\text{sup}} + \gamma h_B$$

$$p_{A'} - p_{B'} = \gamma (h_A - h_B)$$

Figura 3.7 Manómetros simples aplicado na medição da diferença de pressões entre dois pontos



$$p_{A'} = p_{ar} + \gamma h_A$$

$$p_{B'} = p_{ar} + \gamma h_B$$

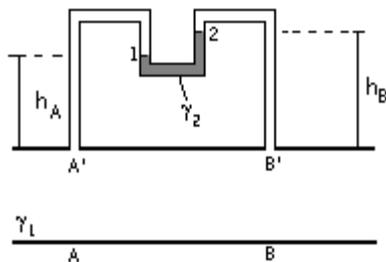
$$p_{A'} - p_{B'} = \gamma (h_A - h_B)$$

Figura 3.8 Manómetro diferencial

Os manómetros diferenciais permitem medir a diferença de pressões entre dois pontos.

No caso de pressões muito elevadas em A e B o manómetro diferencial da figura 3.8 deve conter ar comprimido permitindo diminuir a altura da coluna líquida.

Se a diferença de pressões entre A e B é muito elevada deve ser aplicado um líquido de maior peso volúmico, figura 3.9, para o que o manómetro deve ter a forma de U.



$$p_{A'} = p_1 + \gamma_1 h_A$$

$$p_{B'} = p_2 + \gamma_1 h_B$$

$$p_1 = p_2 + \gamma_2 (h_B - h_A)$$

$$p_{A'} - p_{B'} = (p_1 + \gamma_1 h_A) - (p_2 + \gamma_1 h_B)$$

$$p_{A'} - p_{B'} = \gamma_2 (h_B - h_A) + \gamma_1 (h_A - h_B)$$

$$p_{A'} - p_{B'} = (\gamma_2 - \gamma_1)(h_B - h_A)$$

Figura 3.9 Manómetro diferencial em U

3.4 – Impulsão hidrostática

3.4.1 Introdução

Chama-se impulsão hidrostática à resultante das forças de pressão que um fluido exerce sobre uma superfície com que esteja em contacto (quando exista essa resultante).

Designando por força elementar de pressão a força de pressão sobre uma área elementar, dA , em que a pressão se considera constante; as forças de pressão têm resultante única se as forças elementares são concorrentes ou paralelas, o que acontece no caso de superfícies planas ou superfícies curvas cilíndricas ou esféricas.

Tratando-se de uma força, a impulsão hidrostática só fica bem definida quando determinados: o módulo, a direcção, o sentido e o ponto de aplicação. Ao ponto de aplicação da impulsão chama-se centro de impulsão.

3.4.2 Impulsão hidrostática sobre uma superfície plana qualquer

Considere-se o caso geral de uma superfície plana com uma forma qualquer e cujo plano em que se desenvolve faz um ângulo α com o plano horizontal, figura 3.10. Nesta figura, para possibilitar a visualização da superfície plana premida, foi projectada a parede do reservatório onde se encontra a superfície premida em estudo, que é perpendicular ao papel, sobre a folha do papel.

A pressão numa área elementar, dA , da superfície premida é considerada constante e igual à pressão no centro de gravidade dessa área elementar. A força elementar de pressão que actua sobre essa área elementar é:

$$dF = p \, dA \quad (3.16)$$

O módulo de $d\vec{F}$ representa fisicamente o volume de um prisma com base igual a dA e altura igual ao valor da pressão nessa área elementar, ou seja o volume do diagrama de pressões correspondente à área elementar.

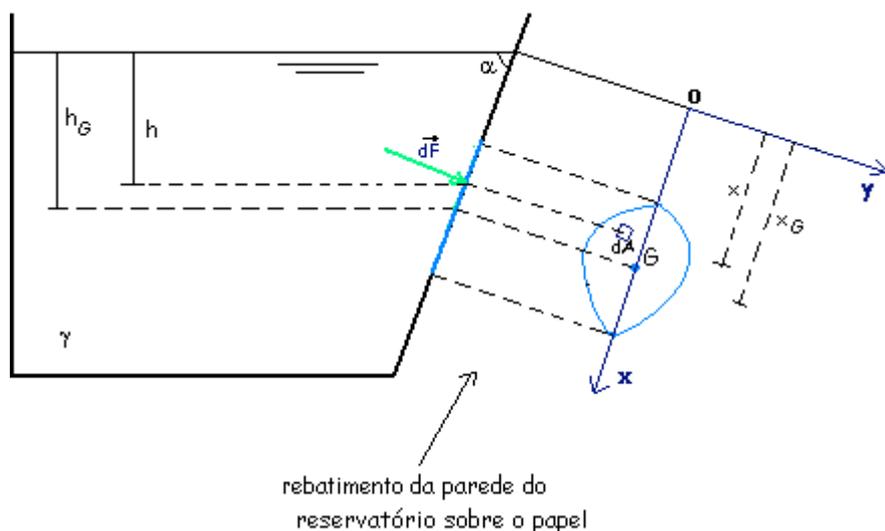


Figura 3.10 Força elementar de pressão sobre uma área elementar pertencente a uma superfície plana qualquer

A integração da equação (3.16) à área total da superfície premida permite obter a impulsão total sobre a superfície premida:

$$\Pi = \int_A dF = \int_A p \, dA \quad (3.17)$$

Fisicamente, este integral representa a soma de todos os volumes do diagrama de pressões relativos às áreas elementares que constituem a superfície premida.

Identifica-se, assim, a impulsão hidrostática com o volume total do diagrama de pressões. Na figura 3.11 está representado o corte do diagrama de pressões, segundo a linha de maior declive que passa no centro de gravidade da superfície premida.

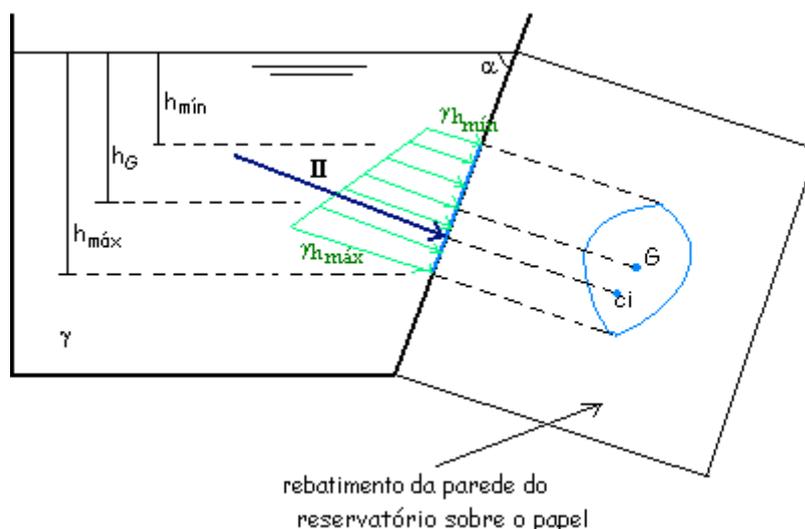


Figura 3.11 Diagrama de pressões e impulsão hidrostática sobre uma superfície plana qualquer

A determinação analítica da impulsão hidrostática será desenvolvida para as seguintes hipóteses simplificativas: a superfície livre no reservatório está à pressão atmosférica local e existe um único líquido no reservatório em contacto com a superfície premida.

Na representação gráfica foi considerado um sistema de eixos oxy definido de modo a que o eixo ox coincida com a direcção de maior declive do plano da superfície premida, a passar no centro de gravidade da superfície premida e o eixo oy é normal ao eixo dos xx e coincide com o traço (intercepção) dos dois planos definidos pela superfície livre e pela superfície premida, figura 3.10.

Em qualquer ponto da superfície premida, com a superfície livre à pressão atmosférica local, a pressão é determinada por:

$$p = \gamma h \quad (3.18)$$

e a força elementar de pressão que actua sobre a área elementar dA com centro de gravidade no ponto referido é determinada por:

$$dF = p \, dA = \gamma h \, dA \quad (3.19)$$

A resultante das forças de pressão sobre toda a superfície premida é obtida pela integração da equação anterior a toda a área:

$$\Pi = \int_A dF = \int_A \gamma h \, dA \quad (3.20)$$

Se $\gamma = const.$, a equação anterior transforma-se em:

$$\Pi = \int_A dF = \gamma \int_A h \, dA \quad (3.21)$$

Aplicando o sistema de eixos oxy , referido, a relação entre a profundidade h e a abcissa x de uma dada posição da superfície premida é dada por, figura 3.10:

$$h = x \, \text{sen} \alpha \quad (3.22)$$

que, substituída na equação (3.21), permite obter:

$$\Pi = \gamma \int_A h \, dA = \gamma \int_A x \, \text{sen} \alpha \, dA = \gamma \, \text{sen} \alpha \int_A x \, dA \quad (3.23)$$

Por definição, centro de gravidade de uma superfície plana é o ponto cuja posição permite igualar o momento da área total relativamente a um eixo e o integral a toda a área do

momento da área elementar relativamente ao mesmo eixo. A aplicação desta definição à superfície premida, e ao eixo oy, permite escrever a seguinte igualdade:

$$\int_A x \, dA = X_G A \quad (3.24)$$

que substituída na equação (3.23) permite obter:

$$\Pi = \gamma \operatorname{sen} \alpha \int_A x \, dA = \gamma \operatorname{sen} \alpha X_G A \quad (3.25)$$

Com base na aplicação das equações (3.18) e (3.22) ao centro de gravidade e na substituição destas na equação (3.25), a equação geral da impulsão hidrostática é representada por:

$$\Pi = \gamma \operatorname{sen} \alpha X_G A = \gamma h_G A = p_G A \quad (3.26)$$

A análise da equação (3.26) permite concluir que a impulsão sobre qualquer superfície plana premida é igual ao valor da pressão no centro de gravidade da superfície premida a multiplicar pela área da superfície premida.

A equação (3.26) é equivalente à impulsão sobre uma superfície premida em que a pressão é constante em toda a superfície, o que só se verifica no caso da superfície premida ser horizontal, em todos os outros casos a pressão aumenta à medida que a profundidade aumenta.

Fisicamente, é possível verificar que cortado o diagrama de pressões com um plano paralelo à superfície premida que passa no valor relativo à pressão no centro de gravidade, o volume excluído é igual ao volume necessário para completar o sólido definido pelo plano de corte, a superfície premida e as geratrizes que passam no limite da superfície premida, figura 3.12.

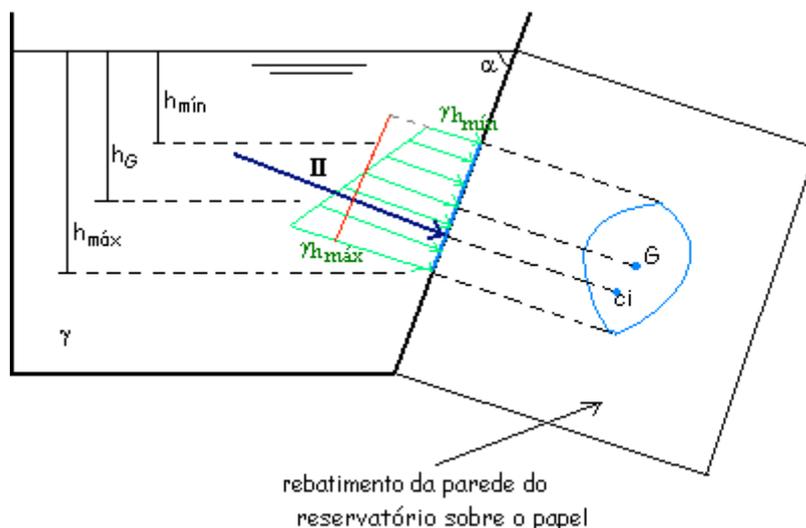


Figura 3.12 Impulsão hidrostática sobre uma superfície plana qualquer, equivalência do diagrama de pressões

Verificamos, assim, que a única restrição que se mantém na dedução da equação da impulsão é a superfície premida estar em contacto em toda a sua área com o mesmo líquido.

A substituição de γh_G por p_G permite aplicar a equação 3.26 qualquer que sejam as condições de distribuição de pressão acima do ponto mais alto da superfície premida.

A direcção da impulsão é perpendicular à superfície premida

O sentido da impulsão é de compressão, ou seja sempre no sentido da superfície premida.

O ponto de aplicação da impulsão, centro de impulsão, fica bem definido quando são conhecidas a sua abcissa e a sua ordenada relativamente ao sistema de eixos cartesianos oxy .

As coordenadas do centro de impulsão podem ser determinadas através da igualdade entre o momento da impulsão e o integral a toda a superfície premida do momento da força elementar de pressão, relativamente a um dado eixo.

Determinação da abcissa do centro de impulsão, X_{ci}

Para determinar a abcissa do centro de impulsão igualamos o momento da impulsão relativamente ao eixo oy com a integração a toda a área da superfície premida do momento da força elementar de pressão, relativamente ao mesmo eixo oy , figura 3.13.

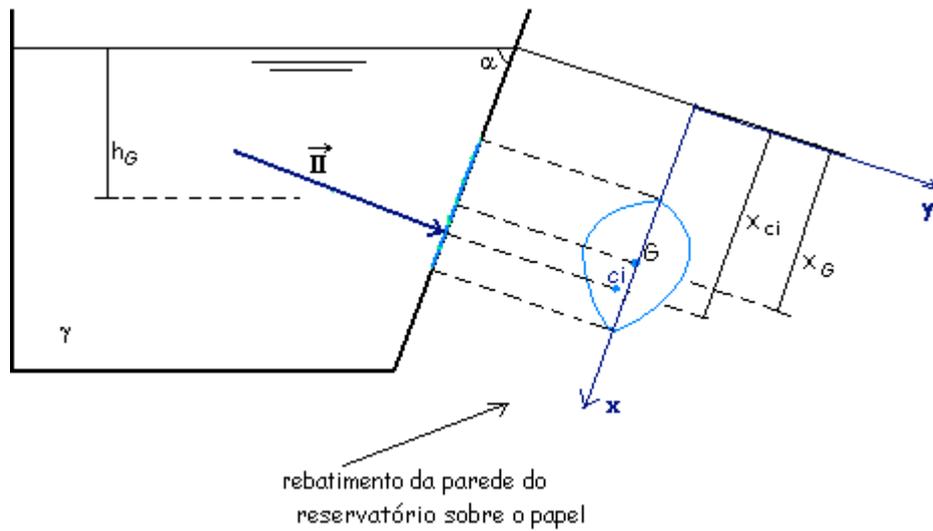


Figura 3.13. Determinação da abcissa do centro de impulsões

O momento da força elementar relativamente ao eixo oy é determinado por:

$$x \, dF \tag{3.27}$$

E o equilíbrio de momentos é:

$$\int_A x \, dF = \Pi X_{ci} \tag{3.28}$$

Substituindo as equações (3.19), (3.22) e (3.25) na equação 3.28, obtém-se:

$$\int_A \gamma x^2 \operatorname{sen} \alpha \, dA = \gamma X_G \operatorname{sen} \alpha A X_{ci} \tag{3.29}$$

Tendo em conta os parâmetros que são constantes, a equação fica reduzida a:

$$\gamma \operatorname{sen} \alpha \int_A x^2 \, dA = \gamma \operatorname{sen} \alpha X_G A X_{ci} \tag{3.30}$$

permitindo calcular a abcissa do centro de impulsões, X_{ci} , em função do momento de inércia da superfície premida relativamente ao eixo oy , I_{oy} , equação (3.31).

$$X_{ci} = \frac{\int x^2 dA}{X_G A} = \frac{I_{oy}}{X_G A} \quad (3.31)$$

Na bibliografia existem tabelas com a equação do momento de inércia de uma figura geométrica relativamente a um eixo que passa no centro de gravidade. Deste modo na equação (3.31) relaciona-se o momento de inércia relativamente ao eixo oy com o momento de inércia relativamente a um eixo que é paralelo a oy e passa no centro de gravidade da superfície premida, o eixo GG' :

$$I_{oy} = I_{GG'} + A X_G^2 \quad (3.32)$$

Obtém-se, assim, a equação geral para a abcissa do centro de impulsões:

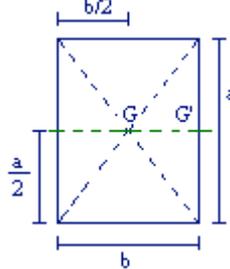
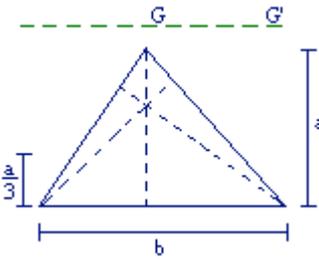
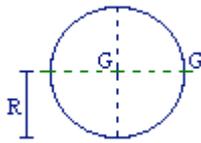
$$X_{ci} = X_G + \frac{I_{GG'}}{X_G A} \quad (3.33)$$

Na tabela 3.1 são apresentados os momentos de inércia de figuras geométricas planas relativamente a um eixo paralelo a oy que passa no centro de gravidade, o eixo GG' .

A análise da equação (3.33) permite concluir que, no caso da superfície premida ser horizontal, a abcissa do centro de gravidade é infinita, anulando a segunda parcela do membro direito, e a abcissa do centro de impulsões coincide com a abcissa do centro de gravidade. No caso geral de um plano não horizontal, o centro de impulsão localiza-se sempre abaixo do centro de gravidade, já que o segundo termo do membro da direita é sempre positivo.

A determinação analítica do centro de impulsão assumiu as seguintes hipóteses simplificativas: a superfície livre no reservatório está à pressão atmosférica local e existe um único líquido no reservatório.

Tabela 3.1 Momento de inércia de figuras planas

Figura plana e posição do centro de gravidade	Momento de inércia
<p>rectângulo</p> 	$I_{GG'} = \frac{a^3 b}{12}$
<p>triângulo</p> 	$I_{GG'} = \frac{a^3 b}{36}$
<p>círculo</p> 	$I_{GG'} = \frac{\pi R^4}{4}$
<p>semicírculo</p> 	$I_{GG'} = 0,1098R^4$

Determinação da ordenada do centro de impulsão, Y_{ci}

A ordenada do centro de impulsão é calculada seguindo o procedimento aplicado na determinação da abcissa, com alteração do eixo de referência que passa a ser o eixo dos xx.

O momento da força elementar relativamente ao eixo ox é:

$$y dF \tag{3.34}$$

E o equilíbrio de momentos é:

$$\int_A y dF = \Pi Y_{ci} \tag{3.35}$$

Substituindo as equações (3.19), (3.22) e (3.25) na equação (3.35), obtém-se:

$$\int_A \gamma x \operatorname{sen} \alpha \, dA = \gamma X_G \operatorname{sen} \alpha A Y_{ci} \quad (3.36)$$

Tendo em conta os parâmetros que são constantes, a equação fica reduzida a:

$$\gamma \operatorname{sen} \alpha \int_A x y \, dA = \gamma \operatorname{sen} \alpha X_G A Y_{ci} \quad (3.37)$$

permitindo calcular a ordenada do centro de impulsões, Y_{ci} , em função do produto de inércia da superfície premida relativamente aos eixos ox e oy , I_{xy} na equação (3.38)

$$Y_{ci} = \frac{\int_A x y \, dA}{X_G A} = \frac{I_{xy}}{X_G A} \quad (3.38)$$

No entanto, normalmente as superfícies sobre as quais pretendemos determinar a impulsão são simétricas relativamente ao eixo ox , sendo neste caso a ordenada do centro de impulsão nula, porque o produto de inércia é nulo.

3.4.3 Impulsão hidrostática sobre uma superfície curva

Não sendo fácil determinar o módulo da impulsão hidrostática através do volume do diagrama de pressões é necessário apresentar o modo analítico mais expedito.

Em qualquer superfície curva a impulsão hidrostática é decomposta na componente vertical que é a resultante de todas as forças verticais, Π_v e na componente horizontal que é a resultante de todas as forças horizontais, Π_h , figura 3.14.

No caso mais geral de uma superfície curva, a pressão numa área elementar dA é constante e igual à pressão no centro de gravidade dessa área elementar. Por definição de área elementar esta pode ser considerada plana. A força elementar de pressão que actua sobre essa área elementar é determinada pela equação (3.16), figura 3.14:

$$dF = p \, dA \quad (3.16)$$

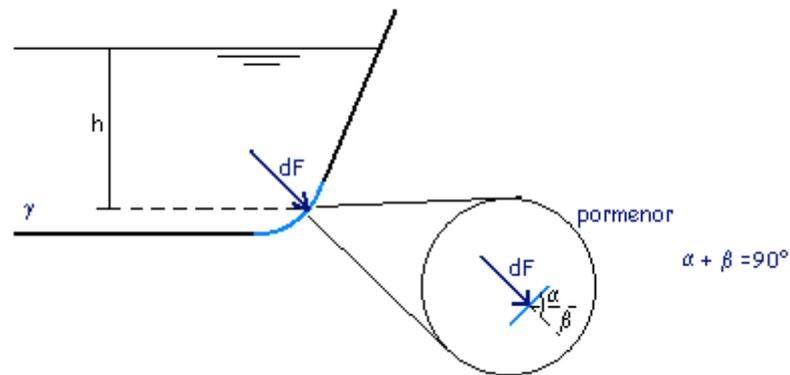


Figura 3.14 Impulsão hidrostática sobre uma superfície curva, força elementar de pressão

No caso particular da superfície livre do reservatório estar à pressão atmosférica local e dentro do reservatório o peso volúmico ser constante, o valor da pressão num ponto da superfície premida é determinado por:

$$p = \gamma h \quad (3.18)$$

e a força elementar de pressão que actua sobre a área elementar dA com centro de gravidade no ponto referido é determinada por:

$$dF = p \, dA = \gamma h \, dA \quad (3.19)$$

Componente vertical:

A componente vertical da força elementar de pressão é dada por, figura 3.14:

$$dF_v = dF \cos \alpha = \gamma h \, dA \cos \alpha \quad (3.39)$$

em que o factor $dA \cos \alpha$ representa a projecção vertical da área elementar sobre um plano horizontal representada por dA_v , que substituído na equação (3.39) permite obter:.

$$dF_v = \gamma h \, dA \cos \alpha = \gamma h \, dA_v \quad (3.40)$$

O factor $h dA_v$ representa o produto de uma área horizontal por uma altura do fluido, ou seja o volume do líquido acima da projecção vertical da área elementar. Tendo a área elementar dimensões muito pequenas, pode ser considerada plana, coincidindo o volume referido atrás com o volume de líquido acima da área elementar premida.

A componente vertical da força elementar de pressão pode associar-se, assim ao peso do volume do líquido limitado pela área elementar, a superfície livre do líquido e as projectantes verticais que passam no contorno da área elementar.

A resultante da componente vertical das forças de pressão sobre toda a superfície é obtida pela integração da equação (3.40) a toda a área da superfície premida:

$$\Pi_v = \int_A dF_v = \int_A \gamma h dA_v \quad (3.41)$$

Verificada a hipótese simplificativa de peso volúmico do líquido constante, obtém-se:

$$\Pi_v = \gamma \int_A h dA_v \quad (3.42)$$

O integral da equação (3.42) é igual ao volume do líquido limitado pela superfície premida, a superfície livre do líquido e as projectantes verticais que passam no contorno da superfície premida.

A componente vertical da impulsão sobre a superfície curva é igual ao peso do volume referido, equação (3.43)

$$\Pi_v = \gamma \text{Vol} \quad (3.43)$$

Na figura 3.15 está representada a componente vertical da impulsão sobre a superfície curva representada na figura 3.14.

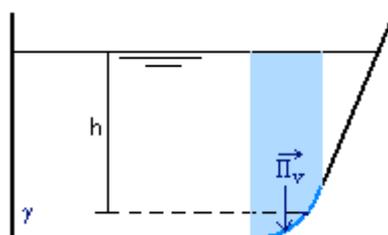


Figura 3.15 Componente vertical da impulsão hidrostática sobre uma superfície curva

Componente horizontal:

A componente horizontal da força elementar de pressão é dada por, figura 3.14:

$$dF_h = dF \cos \beta = \gamma h dA \cos \beta \quad (3.44)$$

O factor $dA \cos \beta$ representa a projecção horizontal da área elementar sobre um plano vertical que se representará por dA_h , que substituído na equação (3.44) permite obter:

$$dF_h = \gamma h dA \cos \beta = \gamma h dA_h \quad (3.45)$$

O factor $h dA_h$ representa o produto entre a área vertical (projecção horizontal da área elementar) e a distância do centro de gravidade dessa área a um dado eixo, definido no mesmo plano vertical.

A resultante da componente horizontal das forças de pressão sobre toda a superfície curva é obtida pela integração da equação anterior a toda a área elementar, com $\gamma = const$:

$$\Pi_h = \int_A dF_h = \gamma \int_A h dA_h \quad (3.46)$$

A comparação desta equação com a equação da impulsão sobre uma superfície plana, equação (3.21) permite concluir que a componente horizontal da impulsão hidrostática sobre uma superfície curva é calculada do mesmo modo que a impulsão sobre uma superfície plana, sendo essa superfície plana a projecção da superfície curva sobre um plano vertical:

$$\Pi_h = \gamma \int_A h dA_h = \gamma h_G A_h = p_G A_h \quad (3.47)$$

Na equação anterior h_G é a profundidade do centro de gravidade da projecção horizontal da superfície curva sobre um plano vertical e A_h é a área da projecção horizontal da superfície curva sobre um plano vertical.

A componente horizontal da impulsão sobre uma superfície curva é dada por:

$$\Pi_h = p_G A_h \quad (3.48)$$

Na figura 3.16 é representada a componente horizontal da impulsão sobre a superfície curva representada na figura 3.14.

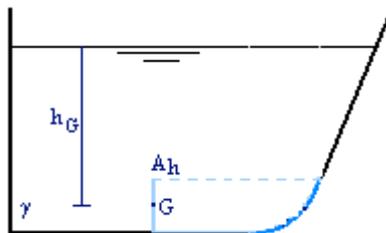


Figura 3.16 Componente horizontal da impulsão hidrostática sobre uma superfície curva

Impulsão hidrostática sobre a superfície curva:

Quando se trata de uma superfície curva cilíndrica ou esférica as forças de pressão admitem resultante única sendo a impulsão hidrostática sobre a superfície curva determinada por:

$$\Pi = \sqrt{\Pi_v^2 + \Pi_h^2} \quad (3.49)$$

A direcção da impulsão é determinada através do ângulo formado com o plano horizontal:

$$\alpha = \arctg \frac{\Pi_v}{\Pi_h} \quad (3.50)$$

O sentido da impulsão é de compressão.

Relativamente ao ponto de aplicação, tendo em conta que as linhas de acção de todas as forças elementares de pressão são perpendiculares à superfície premida e concorrentes no centro geométrico da superfície premida, também a linha de acção da impulsão hidrostática é perpendicular à superfície premida e concorrente no centro geométrico da superfície curva, figura 3.17.

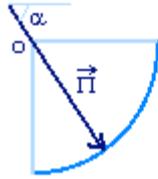


Figura 3.17 Impulsão hidrostática sobre uma superfície curva cilíndrica ou esférica

3.4.4 Impulsão sobre corpos imersos

É conhecido o *Teorema de Arquimedes* aplicado a corpos mergulhados num fluido em repouso que se enuncia do seguinte modo: todo o corpo imerso num líquido em repouso recebe da parte deste uma impulsão vertical, de baixo para cima, igual ao peso do volume do fluido deslocado.

No caso de um corpo estar totalmente imerso aplicam-se do mesmo modo os conceitos aprendidos neste capítulo, sendo no entanto necessário subdividir a superfície premida de modo a determinar as componentes verticais de cima para baixo e de baixo para cima e as componentes horizontais da esquerda para a direita e da direita para a esquerda.

A aplicação das equações analíticas da impulsão sobre superfícies curvas, a um corpo totalmente imerso, demonstra o Teorema de Arquimedes.

Capítulo 4

TEOREMA DE BERNOULLI E SUAS APLICAÇÕES

4.1 Introdução

Na maioria dos problemas de hidráulica é importante conhecer o que se passa numa dada região do fluido em movimento, não sendo imprescindível conhecer o que se passa em cada posição do escoamento.

Será, assim, deduzido o Teorema de Bernoulli que representa o Princípio da Conservação da Energia e que relaciona as diferentes formas de energia mecânica ao longo do tubo de fluxo: a energia potencial de posição, a energia potencial de pressão e a energia cinética.

Este capítulo começa por apresentar a dedução do Teorema de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente e, de seguida, generaliza a um tubo de fluxo.

4.2 – Teorema de Bernoulli ao longo da linha de corrente

O Teorema de Bernoulli pode ser deduzido pela aplicação da Equação de Euler a um dado volume de controlo, através da sua componente segundo a direcção da linha de corrente. Obtém-se, neste caso, a Equação de Bernoulli ao longo da linha de corrente, aplicada a líquidos perfeitos.

O volume de controlo foi escolhido de modo a permitir relacionar as diferentes formas de energia mecânica ao longo da linha de corrente e garantindo que não existe variação, dos parâmetros do escoamento, na normal à linha de corrente. O volume tem a forma de um cilindro com altura ds na direcção da linha de corrente e secção transversal com área elementar, dA , onde as grandezas pressão e velocidade possam considerar-se constantes, figura 4.1. O sistema de eixos a considerar é cilíndrico, em que as direcções \mathbf{s} e \mathbf{n} definem o plano (oxz) e o terceiro eixo corresponde à direcção oy .

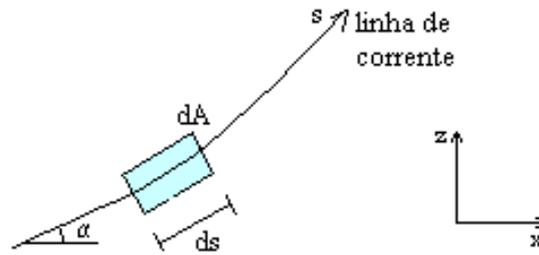


Figura 4.1 Volume de controle para aplicação da equação de Euler segundo a direcção da linha de corrente

A componente da equação de Euler, segundo a direcção da linha de corrente, aplicada ao volume de controlo da figura 4.1, é representa-se por:

$$-g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial v_s}{\partial t} + \left(v_s \frac{\partial}{\partial s} + v_n \frac{\partial}{\partial n} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) v_s \quad (4.1)$$

Tendo em conta que:

- $\sin \alpha$ representa a variação da cota topográfica com a variação da distância segundo a direcção da linha de corrente: $\sin \alpha = \frac{\partial Z}{\partial s}$;
- v_s é a componente da velocidade segundo a direcção da linha de corrente e que, pela definição de linha de corrente, coincide com o vector velocidade: $v_s = v$;
- v_n é a componente da velocidade segundo a direcção normal à linha de corrente e que é nula: $v_n = 0$;
- v_y é a componente da velocidade segundo a direcção normal ao plano definido pela linha de corrente e pela normal à linha de corrente que é nula: $v_y = 0$.

a equação (4.1) transforma-se em:

$$-g \frac{\partial Z}{\partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \quad (4.2)$$

Tratando-se de um líquido incompressível, o peso volúmico do fluido é constante, os argumentos da derivada parcial em ordem à direcção segundo a linha de corrente, podem ser associados:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.3)$$

A equação anterior é a representação do Teorema de Bernoulli aplicado a líquidos perfeitos e ao longo de uma linha de corrente.

O significado físico dos diferentes parâmetros da equação (4.3) é:

Z - cota topográfica relativamente a um dado plano horizontal de referência, é a energia potencial de posição por unidade de peso do fluido;

$\frac{p}{\gamma}$ - altura piezométrica, é a energia potencial de pressão por unidade de peso do fluido;

$\frac{v^2}{2g}$ - altura cinética, é a energia cinética por unidade de peso do fluido;

$Z + \frac{p}{\gamma}$ - cota piezométrica relativamente a um dado plano horizontal de referência;

$H = Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$ - energia mecânica total por unidade de peso do fluido ou carga, relativamente a um dado plano horizontal de referência;

$-\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$ - força de inércia local por unidade de peso do fluido, variação da quantidade de movimento por unidade de tempo.

Para o caso particular de um escoamento permanente, a variação no tempo anula-se e a equação de Bernoulli fica reduzida a:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = 0 \quad (4.4)$$

Esta equação significa que, no caso de líquidos perfeitos, a energia mecânica total por unidade de peso do fluido é constante. No entanto, os líquidos perfeitos não existem na natureza. Os líquidos reais comportam-se como perfeitos quando fortemente acelerados, tornando-se desprezáveis as tensões tangenciais de arrastamento.

No escoamento de líquidos reais existe resistência sendo necessário acrescentar na equação (4.4) o trabalho realizado pelas forças resistentes ao escoamento, por unidade de peso do fluido e por unidade de comprimento, a que chamaremos perda de carga unitária e se representa por j .

A equação de Bernoulli toma, neste caso, a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - j \quad (4.5)$$

Para escoamentos permanentes e líquidos reais, a equação de Bernoulli aplicada ao longo da linha de corrente é representada por:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = -j \quad (4.6)$$

4.3 Teorema de Bernoulli no aspecto global. Aplicação a um tubo de fluxo.

4.3.1 Introdução

O Teorema de Bernoulli ao longo de um tubo de fluxo é deduzido pela integração, na secção transversal do tubo de fluxo, da Equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente. Nesta dedução é necessário garantir que a potência mecânica do escoamento real ou seja, a energia mecânica por unidade de tempo, numa secção transversal do tubo de fluxo seja igual ao somatório da potência mecânica relativa a cada uma das linhas de corrente que passam nessa secção transversal.

A energia mecânica total por unidade de tempo que passa numa área elementar, dA , correspondente a uma linha de corrente é determinada através do produto da energia mecânica por unidade de peso do fluido pelo peso do fluido que passa na área elementar por unidade de tempo ($\gamma v dS$).

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\left(Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) \gamma v dS \right] = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (v \gamma v dS) - j \gamma v dS \quad (4.7)$$

Para determinar a energia mecânica total por unidade de tempo que passa na secção transversal do tubo de fluxo é integrada a equação anterior na secção do tubo de fluxo:

$$\int_s \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) \gamma v dS \right] = -\int_s \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (v \gamma v dS) - \int_s j \gamma v dS \quad (4.8)$$

Aproximando o integral, na secção transversal do tubo de fluxo, da variação da carga ao longo da linha de corrente pela variação ao longo do tubo de fluxo da integração da carga na secção, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_S \left(Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) \gamma v dS = - \int_S \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (v \gamma v dS) - \int_S j \gamma v dS \quad (4.9)$$

A resolução da equação anterior obriga à definição de coeficientes globais que permitem substituir o diagrama de velocidades e diagrama de pressões na secção transversal do tubo de fluxo por uma função da velocidade média e uma função da pressão no centro de gravidade da secção transversal, respectivamente.

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_S \left(Z + \frac{p}{\gamma} \right) \gamma v dS + \frac{\partial}{\partial s} \int_S \left(\frac{v^2}{2g} \right) \gamma v dS = - \int_S \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (v \gamma v dS) - \int_S j \gamma v dS \quad (4.10)$$

4.3.2 Coeficiente de distribuição de pressões

O primeiro termo da equação (4.10) representa a variação, ao longo do tubo de fluxo, da cota piezométrica na secção transversal.

Para deduzir este termo é necessário calcular a representação da cota piezométrica na secção transversal do tubo de fluxo. A relação entre as cotas piezométricas em diferentes posições da secção transversal do tubo de fluxo é deduzida através da aplicação da componente segundo a direcção normal à linha de corrente da Equação de Euler

O volume de controlo escolhido é um cilíndrico com altura, segundo a direcção normal à direcção da linha de corrente, igual a $d\mathbf{n}$ e em que a base é uma área elementar $d\mathbf{A}$, de modo a que não exista variação de pressão e de velocidade na base, figura 4.2.

A componente da Equação de Euler, segundo a direcção normal à linha de corrente e aplicada ao volume de controlo definido na figura 4.2, é representada por:

$$-g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - \frac{\partial v_n}{\partial t} - v_s \frac{\partial v_n}{\partial s} - v_n \frac{\partial v_n}{\partial n} - v_y \frac{\partial v_n}{\partial y} = 0 \quad (4.11)$$

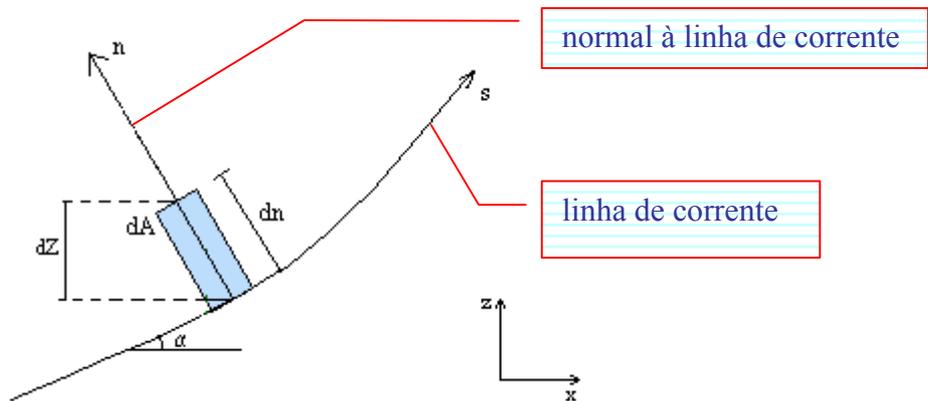


Figura 4.2 Volume de controlo para aplicação da equação de Euler segundo a direcção normal à linha de corrente

Tendo em conta que:

- $\cos \alpha$ representa a variação da cota topográfica com a variação da distância segundo a direcção normal à linha de corrente, n: $\cos \alpha = \frac{\partial Z}{\partial n}$;
- \underline{v}_s é a componente da velocidade segundo a direcção da linha de corrente. Pela definição de linha de corrente esta componente coincide com o vector velocidade: $v_s = v$;
- \underline{v}_n é a componente da velocidade segundo a direcção normal à linha de corrente. Esta componente é nula: $v_n = 0$. As suas derivadas em ordem ao tempo e à direcção n são nulas e a sua derivada em ordem à direcção s é igual ao cociente entre a velocidade segundo a direcção s e o raio de curvatura da linha de corrente;
- \underline{v}_y é a componente da velocidade segundo a direcção normal ao plano definido pela linha de corrente e pela normal à linha de corrente que é nula: $v_y = 0$.

a equação (4.11) transforma-se em:

$$-g \frac{\partial Z}{\partial n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - v \frac{v}{r} = 0 \quad (4.12)$$

Dividindo a equação (4.12) por $-g$ e admitindo a hipótese de que o fluido é incompressível ou seja, o peso volúmico é constante, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(Z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \frac{v^2}{r} \quad (4.13)$$

Casos particulares

No caso particular de linhas de corrente rectilíneas, em que o raio de curvatura das linhas de corrente é infinito, o membro direito da equação (4.13) é igual a zero e a cota piezométrica, segundo a normal à linha de corrente, é constante, figura 4.3.

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(Z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0 \quad (4.14)$$

Qualquer que seja o tubo de fluxo em que as linhas de corrente são rectilíneas, numa superfície normal às linhas de corrente a cota piezométrica é constante, figura 4.3 b) e c).

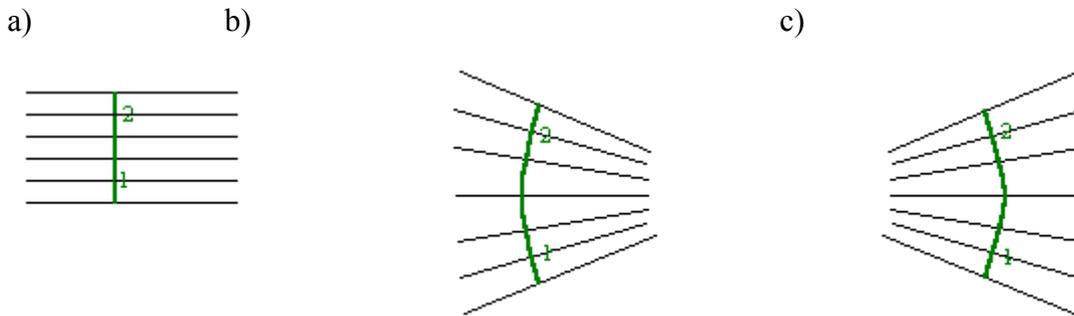


Figura 4.3 Variação da cota piezométrica numa superfície normal às linhas de corrente rectilíneas

Integrando a equação (4.14) para os três casos apresentados na figura 4.3, entre os pontos 1 e 2, obtém-se:

$$\left(Z + \frac{p}{\gamma} \right)_2 - \left(Z + \frac{p}{\gamma} \right)_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(Z + \frac{p}{\gamma} \right)_2 = \left(Z + \frac{p}{\gamma} \right)_1 \quad (4.15)$$

Na figura 4.4 são representadas linhas de corrente curvas: côncavas e convexas. Neste caso o raio de curvatura das linhas de corrente é sempre finito e o membro direito da equação (4.13) é sempre negativo.

Integrando a equação (4.13) entre dois pontos 1 e 2 de uma secção transversal, obtém-se:

$$\left(Z + \frac{p}{\gamma} \right)_2 - \left(Z + \frac{p}{\gamma} \right)_1 = - \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{V^2}{r} dn \quad (4.15)$$

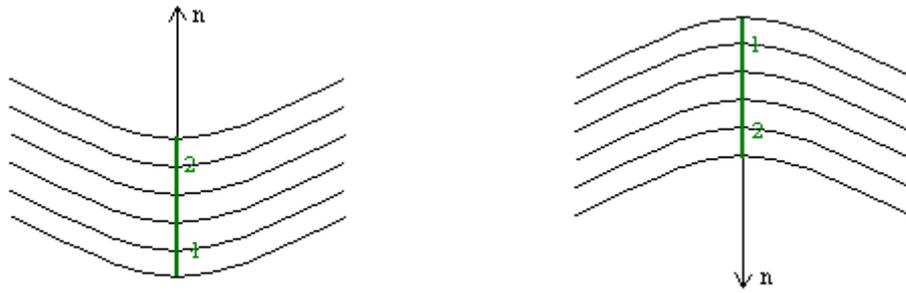


Figura 4.4 Variação da cota piezométrica numa secção transversal às linhas de corrente curvas

Sabendo que o raio de curvatura da linha de corrente e que o quadrado da velocidade são sempre positivo, o membro da direita da equação (4.15) é sempre negativo. A cota piezométrica, segundo a direcção normal às linhas de corrente (com o sentido positivo para dentro da curvatura) diminui à medida que aumenta a cota segundo a direcção normal às linhas de corrente.

$$\left(Z + \frac{p}{\gamma}\right)_2 - \left(Z + \frac{p}{\gamma}\right)_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \left(Z + \frac{p}{\gamma}\right)_2 < \left(Z + \frac{p}{\gamma}\right)_1 \quad (4.16)$$

De um modo geral, a cota piezométrica em qualquer ponto da secção transversal de um tubo de fluxo pode ser representada em função da cota piezométrica no centro de gravidade dessa secção:

$$Z + \frac{p}{\gamma} = Z_G + \frac{p_G}{\gamma} \pm \frac{p'}{\gamma} \quad (4.17)$$

em que

$$\begin{cases} \frac{p'}{\gamma} = 0 \text{ se as linhas de corrente são rectilíneas} \\ \frac{p'}{\gamma} \neq 0 \text{ se as linhas de corrente são curvas} \end{cases}$$

Substituindo a equação (4.17) no primeiro termo da equação (4.10), obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\int_s \left(Z_G + \frac{p_G}{\gamma} \right) \gamma \, vdS \pm \int_s \frac{p'}{\gamma} \gamma \, vdS \right] = \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(Z_G + \frac{p_G}{\gamma} \right) \gamma \int_s \, vdS \pm \left(\gamma \int_s \frac{p'}{\gamma} \, vdS \right) \right] \quad (4.18)$$

Sendo a cota piezométrica no centro de gravidade da secção transversal do escoamento constante e aplicando a definição de caudal, a equação (4.18) transforma-se em:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left[\left(Z_G + \frac{p_G}{\gamma} \right) \gamma Q \right] \pm \gamma Q \frac{\int_s \frac{p'}{\gamma} v dS}{Q} \right\} = \frac{\partial}{\partial s} \left[\gamma Q \left(Z_G + \frac{p_G}{\gamma} \pm \frac{\int_s \frac{p'}{\gamma} v dS}{Q} \right) \right] \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\gamma Q \left(Z_G + \frac{p_G}{\gamma} \pm \frac{\int_s \frac{p'}{\gamma} v dS}{Q} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \gamma Q \left[Z_G + \frac{p_G}{\gamma} \left(1 \pm \frac{\int_s \frac{p'}{\gamma} v dS}{Q p_G} \right) \right] \right\} \quad (4.20)$$

Designa-se por coeficiente de distribuição de pressão o parâmetro β , representado por:

$$\beta = \left(1 \pm \frac{\int_s \frac{p'}{\gamma} v dS}{Q p_G} \right) \quad (4.21)$$

O coeficiente de distribuição de pressão toma o valor 1 se as linhas de corrente são rectilíneas e um valor diferente de 1 se as linhas de corrente são curvas.

Com base na demonstração anterior, conclui-se que o primeiro termo da equação (4.10) é representado por:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_s \left(Z + \frac{p}{\gamma} \right) \gamma v dS = \frac{\partial}{\partial s} \left[\gamma Q \left(Z_G + \beta \frac{p_G}{\gamma} \right) \right] \quad (4.22)$$

4.3.3 Coeficiente de energia cinética

O segundo termo da equação (4.10), representa a variação ao longo do tubo de fluxo da potência cinética do escoamento na secção transversal:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_s \frac{v^2}{2g} \gamma v dS = \frac{\partial}{\partial s} \int_s \frac{v^3}{2g} \gamma dS \quad (4.23)$$

Define-se o coeficiente de Coriolis, α , como sendo a relação entre a potência cinética do escoamento real, numa secção transversal do escoamento, e a potência cinética do escoamento fictício em que a velocidade é uniforme na secção e igual à velocidade média:

$$\alpha = \frac{P}{P_m} = \frac{\int_s \frac{v^3}{2g} \gamma \, dS}{\int_s \frac{U^3}{2g} \gamma \, dS} = \frac{\int_s \frac{v^3}{2g} \gamma \, dS}{\frac{U^3}{2g} \gamma S} = \frac{\int_s v^3 \, dS}{U^3 S} \quad (4.24)$$

A potência cinética do escoamento real, na equação de Bernoulli aplicada ao longo de um tubo de fluxo, será substituída pela potência cinética do escoamento fictício a multiplicar pelo coeficiente de Coriolis.

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_s \frac{v^3}{2g} \gamma \, dS = \frac{\partial}{\partial s} \left(\alpha \frac{U^3}{2g} \gamma S \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \gamma Q \right) \quad (4.25)$$

4.3.4 Coeficiente de quantidade de movimento

O terceiro termo da equação (4.10), representa a integração, na secção transversal do escoamento, da quantidade de movimento por unidade de tempo. Se considerarmos a secção constante no tempo, o integral na secção transversal pode ser incluído no argumento da derivação em ordem ao tempo:

$$\int_s \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} v \gamma \, v \, dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_s \frac{1}{g} v^2 \gamma \, dS \quad (4.26)$$

Definiu-se o coeficiente de quantidade de movimento, α' , como sendo a relação entre a quantidade de movimento por unidade de tempo do escoamento real, numa secção transversal do escoamento, e a quantidade de movimento por unidade de tempo do escoamento fictício em que a velocidade é uniforme na secção e igual à velocidade média:

$$\alpha' = \frac{M}{M_m} = \frac{\int_s \frac{v^2}{g} \gamma \, dS}{\int_s \frac{U^2}{g} \gamma \, dS} = \frac{\int_s \frac{v^2}{g} \gamma \, dS}{\frac{U^2}{g} \gamma S} = \frac{\int_s v^2 \, dS}{U^2 S} \quad (4.27)$$

A quantidade de movimento por unidade de tempo do escoamento real, na equação de Bernoulli aplicada ao longo de um tubo de fluxo, será substituída pela quantidade de movimento por unidade de tempo do escoamento fictício a multiplicar pelo coeficiente de quantidade de movimento.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{v^2}{g} \gamma \, dS = \frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha' \frac{U^2}{g} \gamma S \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha' \frac{U}{g} \gamma Q \right) \quad (4.28)$$

4.3.5 Perda de carga unitária ao longo de um tubo de fluxo

O quarto termo da equação (4.10), representa a integração, na secção transversal do escoamento, do trabalho realizado pelas forças resistentes por unidade de tempo e por unidade de comprimento do tubo de fluxo.

Designaremos por J o trabalho realizado pelas forças resistentes por unidade de peso do fluido e por unidade de comprimento do tubo de fluxo.

$$\int_S j \gamma v \, dS = \gamma Q \frac{\int_S j v \, dS}{Q} = \gamma Q J \quad (4.29)$$

A substituição dos coeficientes globais na equação de Bernoulli generalizada a um tubo de fluxo, equação (4.10), permite obter:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\gamma Q \left(Z_G + \beta \frac{p_G}{\gamma} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \gamma Q \right) = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha' \frac{U}{g} \gamma Q \right) - \gamma Q J \quad (4.30)$$

Ao longo do tubo de fluxo o peso volúmico (líquido incompressível) e o caudal (definição de tubo de fluxo) são constantes. Dividindo a equação anterior por γQ , obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(Z_G + \beta \frac{p_G}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha' U) - J \quad (4.31)$$

A equação 4.31 representa a Equação de Bernoulli global, aplicada ao longo de um tubo de fluxo e para o caso de líquidos reais.

O significado físico dos parâmetros envolvidos na equação 4.31 é:

Z_G - cota topográfica do centro de gravidade da secção, relativamente a um dado plano horizontal de referência, é a energia potencial de posição por unidade de peso do fluido do centro de gravidade da secção transversal do tubo de fluxo;

$\frac{p_G}{\gamma}$ - altura piezométrica do centro de gravidade da secção, é a energia potencial de pressão por unidade de peso do fluido do centro de gravidade da secção transversal do tubo de fluxo;

$-Z_G + \beta \frac{p_G}{\gamma}$ - cota piezométrica da secção transversal do tubo de fluxo, relativamente a um dado plano horizontal de referência;

$\alpha \frac{U^2}{2g}$ - altura cinética da secção transversal do tubo de fluxo, é a energia cinética por unidade de peso do fluido da secção;

$H = Z_G + \beta \frac{p_G}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g}$ - energia mecânica total por unidade de peso do fluido ou carga na secção transversal do tubo de fluxo, relativamente a um dado plano horizontal de referência;

$-\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha' U)$ - força de inércia local por unidade de peso do fluido da secção transversal do tubo de fluxo, variação da quantidade de movimento por unidade de tempo da secção;

$-J$ - perda de carga unitária ao longo do tubo de fluxo, trabalho realizado pelas forças resistentes por unidade de peso do fluido e por unidade de comprimento do tubo de fluxo.

Casos particulares:

- escoamento permanente

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(Z_G + \beta \frac{p_G}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = -J \quad (4.32)$$

A integração da equação 4.32 entre as secções A e B de um tubo de fluxo, figura 4.3, escreve-se:

$$\int_A^B \frac{\partial}{\partial s} \left(Z_G + \beta \frac{p_G}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) ds = - \int_A^B J ds \quad (4.33)$$

$$H_B - H_A = - \int_A^B J ds \quad (4.34)$$

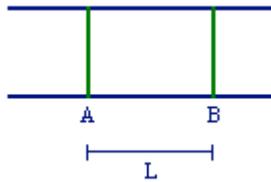


Figura 4.5 Tubo de fluxo. Integração da Equação de Bernoulli

- Escoamento permanente e uniforme, $J=const$

No caso de um escoamento uniforme a velocidade, o diâmetro e a natureza do tubo mantêm-se constantes ao longo do tubo de fluxo e a perda de carga unitária também.

$$H_B - H_A = - \int_A^B J ds = -JL \quad (4.35)$$

4.4 – Linha piezométrica e linha de energia

No projecto de um sistema de condutas, é necessário verificar o sistema de pressões ao longo do escoamento, comparando a cota piezométrica com a cota topográfica do eixo da conduta. Para tal, sobrepomos o traçado de uma linha que representa a cota piezométrica em cada secção transversal do tubo, linha piezométrica, ao traçado do perfil longitudinal do eixo da conduta. A distância, medida na vertical, entre a linha piezométrica e o traçado do eixo da conduta é igual à altura piezométrica.

Pela aplicação da Equação de Bernoulli ao longo do tubo de fluxo é possível calcular a carga nas secções transversais desse tubo. A representação da energia mecânica total por unidade de peso do fluido ao longo de uma linha de corrente ou de um tubo de fluxo chama-se Linha de Energia. A Linha Piezométrica é facilmente traçada a partir do traçado da Linha de Energia diminuindo em cada secção o valor da altura cinética.

A Linha de Energia, no caso particular do escoamento permanente de um líquido perfeito, ao longo de uma linha de corrente, é uma recta horizontal, figura 4.6. Por se tratar de escoamento permanente a linha de corrente coincide com a trajetória de uma partícula.

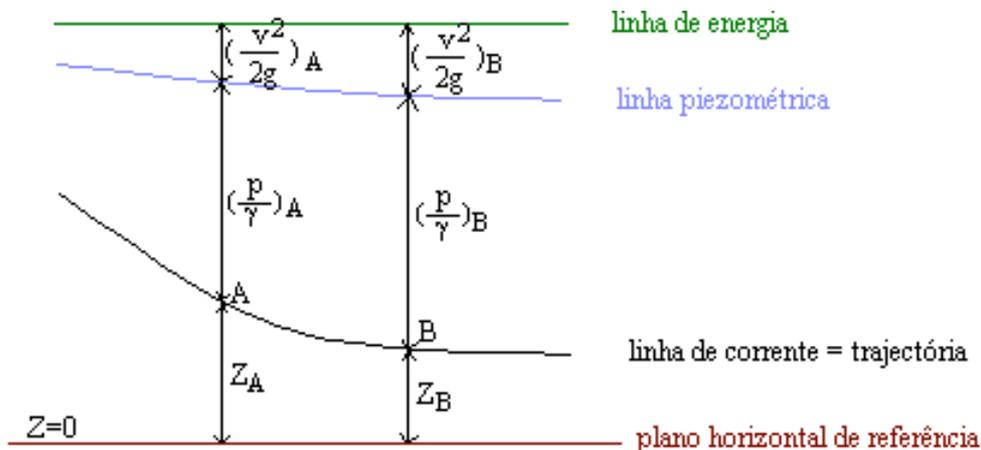


Figura 4.6 Traçado da linha piezométrica e da linha de energia no caso particular de um escoamento permanente de um fluido perfeito, ao longo de uma linha de corrente

No caso particular de um escoamento permanente de um líquido real, ao longo de uma linha de corrente, a carga diminui ao longo da linha de corrente, figura 4.7.

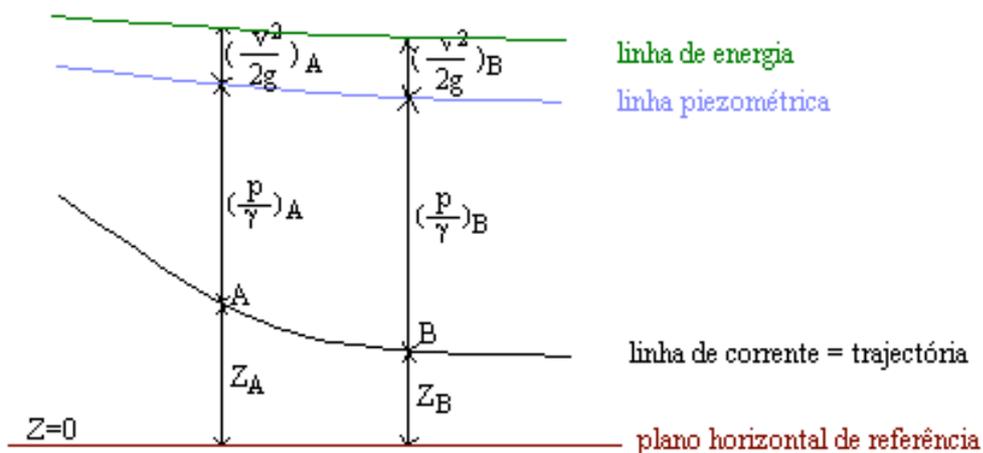


Figura 4.7 Traçado da linha piezométrica e da linha de energia no caso particular de um escoamento permanente de um fluido real, ao longo de uma linha de corrente

Quando se trata de um tubo de fluxo a representação da cota topográfica corresponde ao eixo do tubo, a Linha Piezométrica fica localizada acima da linha de cotas topográficas, medido na vertical, o valor da altura piezométrica no eixo de cada secção transversal (p_G/γ)

e a Linha de Energia fica localizada acima da Linha Piezométrica, medida na vertical, o valor da altura cinética na secção transversal ($\alpha U^2/2g$).

Significado físico da linha piezométrica e da linha de energia, relativa à linha de corrente:

Linha piezométrica – é a linha que une a superfície livre de tubos piezométricos instalados ao longo da linha de corrente.

Linha de energia – é a linha que une a superfície livre de tubos de Pitot instalados ao longo da linha de corrente.

Tubo piezométrico, Figura 4.8

Um tubo piezométrico instalado perpendicularmente a uma linha de corrente num dado ponto dessa linha de corrente, se não alterar o comportamento do fluido, permite através da cota da superfície livre medir a cota piezométrica no ponto da linha de corrente onde foi instalado. Dentro do tubo piezométrico o fluido está em repouso sendo a cota piezométrica constante em qualquer ponto do fluido dentro do tubo piezométrico (Lei Hidrostática de Pressões). A cota piezométrica na base do tubo piezométrico é igual à cota piezométrica da partícula que se encontra na posição da linha de corrente onde o tubo foi instalado e por outro lado igual à cota piezométrica à superfície do tubo que, por a pressão ser nula, coincide com a cota topográfica da superfície livre.



Figura 4.8 Tubo piezométrico. Transferência de energia.

Tubo de Pitot, Figura 4.9

Este tubo tem a forma de L e é instalado paralelamente à linha de corrente permitindo que a carga da partícula localizada à entrada do tubo seja igual à carga da partícula localizada na posição da linha de corrente onde foi instalado. Desprezando a perda de carga entre as duas

posições referidos e por o fluido estar em repouso dentro do tubo, a energia cinética do fluido na linha de corrente transformou-se em altura piezométrica que por sua vez se transformará em energia potencial de posição na superfície livre do Tubo de Pitot, figura 4.9.

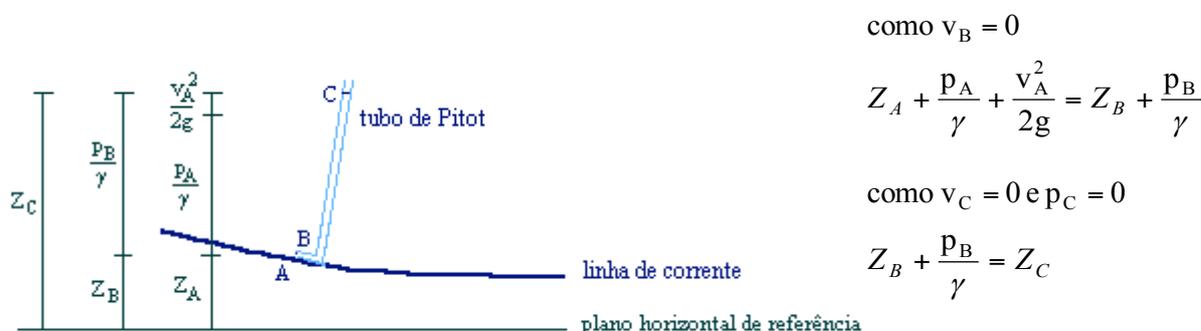


Figura 4.9 Tubo de Pitot. Transferência de energia.

4.5 – Potência hidráulica. Bombas e turbinas

É interessante fazer o estudo de um circuito hidráulico através da análise da transferência de potência hidráulica em substituição da análise de equilíbrio de energia.

Considere o circuito hidráulico constituído por dois reservatórios de grandes dimensões com uma conduta que liga os dois reservatórios e que permite o transporte de um caudal Q do reservatório de montante R_1 para o reservatório de jusante R_2 , figura 4.10.

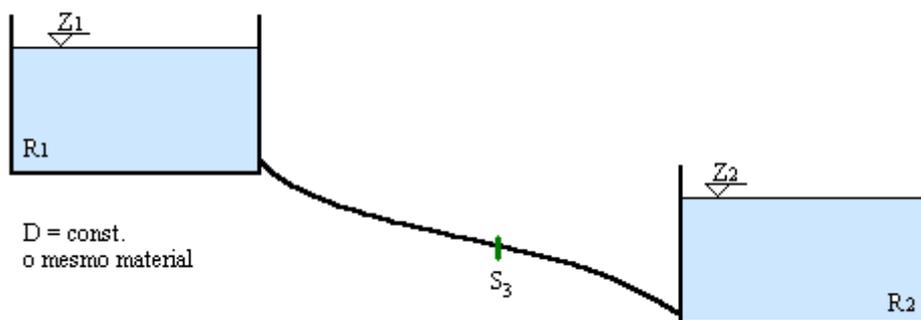


Figura 4.10 Circuito hidráulico. Potência hidráulica

A potência hidráulica do líquido no reservatório de montante (de grandes dimensões), é:

$$P_{\text{esc}_1} = \gamma Q H_1 \quad (4.36)$$

em que a carga no reservatório é igual à cota topográfica da superfície livre no reservatório de grandes dimensões porque a velocidade do líquido é nula dentro do reservatório, verificando-

se a Lei Hidrostática de Pressões. Se a cota piezométrica é constante também é igual à cota piezométrica à superfície livre que, por ter uma pressão nula, iguala a cota topográfica.

Do mesmo modo, no reservatório de grandes dimensões de jusante a potência hidráulica do líquido é:

$$P_{\text{esc}2} = \gamma Q H_2 \quad (4.37)$$

A potência do líquido numa secção da conduta, S_3 , é:

$$P_{\text{esc}3} = \gamma Q H_3 \quad (4.38)$$

em que:

$$H_3 = Z_3 + \beta \frac{p_3}{\gamma} + \alpha \frac{U_3^2}{2g} \quad (4.39)$$

A potência do escoamento, necessária para o transporte do caudal Q entre os dois reservatórios, é:

$$P_{\text{esc}\Delta H} = \gamma Q \Delta H \quad (4.40)$$

em que ΔH é a perda de carga ao longo do percurso, entre o reservatório de montante e o reservatório de jusante.

Podem ocorrer dois casos:

1º caso - Se $\Delta H > H_1 - H_2 \Rightarrow$ é necessário instalar uma bomba que transmite ao escoamento uma potência correspondente a uma carga, designada por altura total de elevação da bomba, igual a, figura 4.11:

$$H_t = \Delta H - (H_1 - H_2) \text{ ou } H_t = H_s - H_e \quad (4.41)$$

A potência transmitida pela bomba ao escoamento é:

$$P_{\text{B-esc}} = \gamma Q H_t \quad (4.42)$$

e a potência da bomba é superior, tendo em atenção as perdas na bomba:

$$P_B = \frac{\gamma Q H_t}{\eta_B} \quad (4.43)$$

A potência necessária no motor da bomba é:

$$P_m = \frac{\gamma Q H_t}{\eta_m \eta_B} \quad (4.44)$$

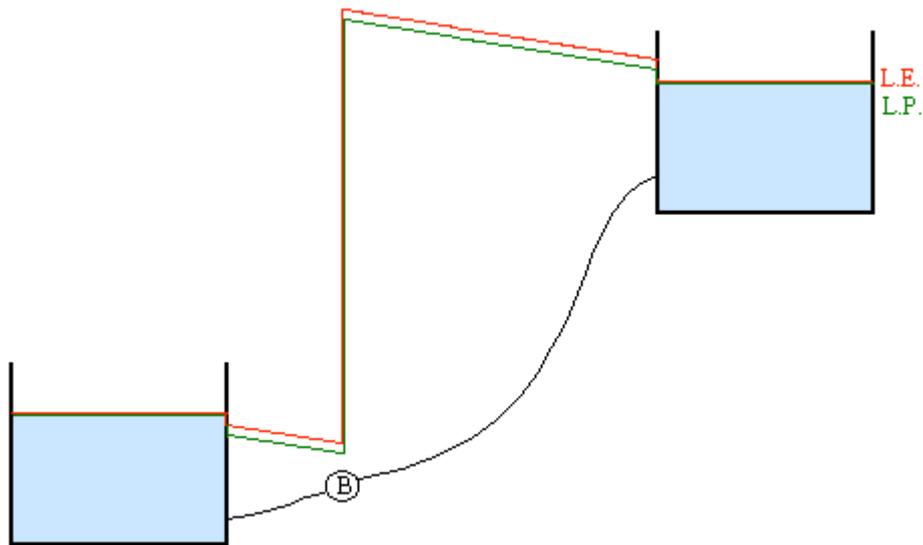


Figura 4.11 Linha de energia e linha piezométrica no circuito hidráulico-conduta elevatória

2º caso - Se $\Delta H < H_1 - H_2 \Rightarrow$ pode ser instalada uma turbina que recebe do escoamento uma potência correspondente a uma carga, desinada por queda útil, igual a, figura 4.12:

$$H_u = (H_1 - H_2) - \Delta H \text{ ou } H_u = H_e - H_s \quad (4.45)$$

A potência recebida pela turbina a partir do escoamento é:

$$P_{\text{esc-T}} = \gamma Q H_u \quad (4.46)$$

A potência da turbina é inferior, tendo em atenção as perdas na transformação (na turbina):

$$P_T = \eta_T \gamma Q H_u \quad (4.47)$$

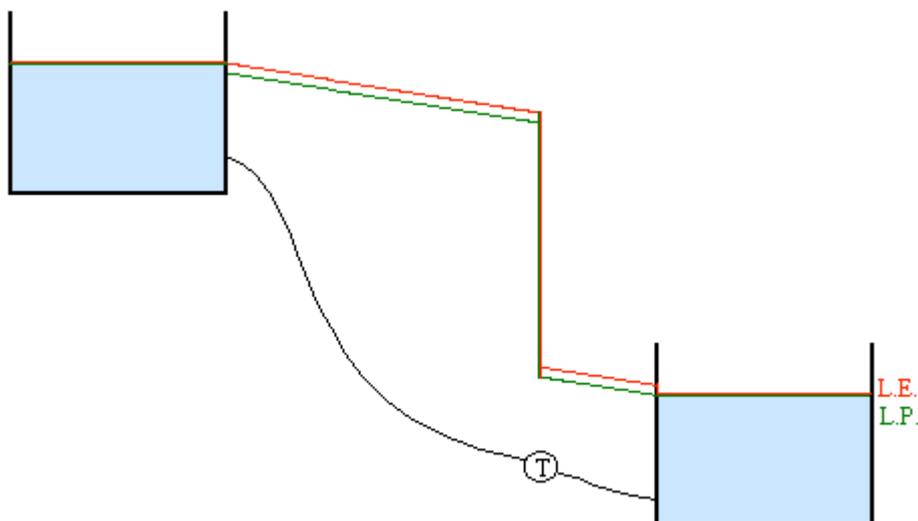


Figura 4.12 Linha de energia e linha piezométrica no circuito hidráulico-conduta gravítica com turbina

4.6 – Campo de aplicação do Teorema de Bernoulli

4.6.1 Tubo de Pitot

Do ponto de vista de balanço de energia, o funcionamento do Tubo de Pitot é uma das aplicações tradicionais do Teorema de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente. A associação do Tubo de Pitot com o tubo piezométrico permite a determinação experimental da altura cinética e indirectamente da velocidade de escoamento na partícula que ocupa a posição da linha de corrente em que os dois tubos foram instalados.

É possível com a instalação de um tubo piezométrico numa secção de um tubo de fluxo com eixo rectilíneo, em que as linhas de corrente são rectilíneas e paralelas entre si, e a instalação de um Tubo de Pitot em diferentes posições da secção transversal determinar o diagrama de velocidades nessa secção, figura 4.13.

À medida que a posição do Tubo de Pitot se aproxima do centro de gravidade da secção transversal do tubo de fluxo a diferença da cota topográfica da superfície livre entre os dois tubos aumenta, porque a velocidade também aumenta

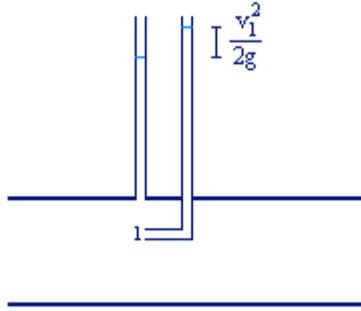


Figura 4.13 Associação do Tubo Piezométrico com o Tubo de Pitot para determinação do diagrama de velocidades numa secção transversal de um tubo de fluxo

4.6.2 Tubo de Venturi

O tubo de Venturi é usado para medir a velocidade média (e consequentemente o caudal) num troço de um tubo de fluxo com secção constante. É constituído por um tubo de secção menor e um manómetro diferencial que permite determinar a diferença entre a cota piezométrica na secção do tubo de fluxo em estudo relativamente à cota piezométrica numa secção do tubo de menor área, figura 4.14.

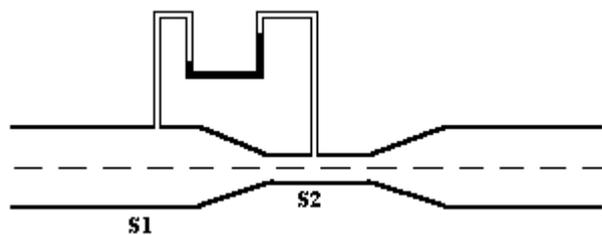


Figura 4.14 Tubo de Venturi

A aplicação do Teorema de Bernoulli ao longo de um tubo de fluxo permite relacionar as velocidades medidas nas duas secções que, em conjunto com a equação da continuidade, as permite calcular. Calculada a velocidade média numa das secções é possível calcular o caudal escoado.

Problemas resolvidos

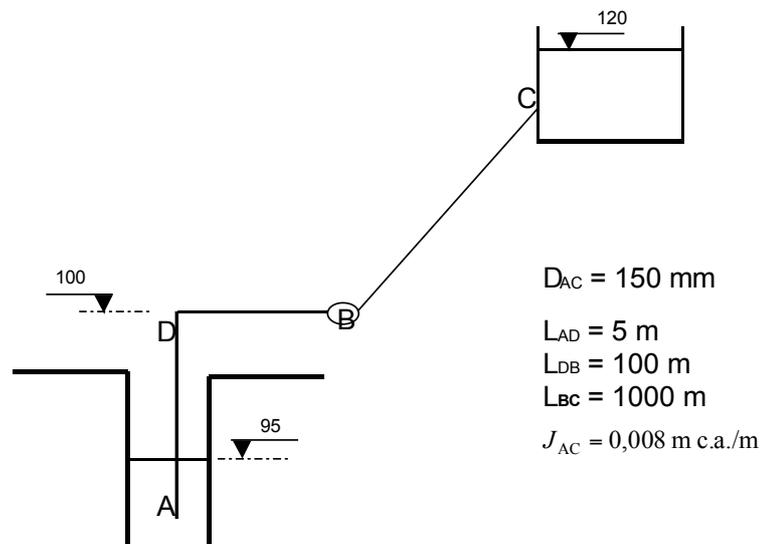
2 - Uma bomba está instalada numa conduta de PVC, que liga dois reservatórios com superfície livre às cotas 95 m e 120 m, conforme a figura. A bomba funcionando durante 10

horas diárias com um rendimento (bomba-motor) de 85%, eleva um volume de 720 m³.

Nestas condições determine:

- a altura total de elevação da bomba;
- o consumo diário de energia;
- a pressão da água na secção a montante da curva D.

Nota: Considere os reservatórios de grandes dimensões e despreze as perdas de carga localizadas



Resolução:

- A altura total de elevação da bomba é o ganho de carga na bomba necessário a transportar o caudal pretendido à carga pretendida. A perda de carga unitária é constante ao longo de toda a conduta pois, o diâmetro, a natureza da conduta e o caudal também.

Aplicando o Teorema de Bernoulli entre os dois reservatórios obtenho:

$$H_{Rm} - H_{RJ} = J_{AB}L_{AB} - H_t + J_{BC}L_{AC} \text{ em que } J_{AB} = J_{BC}$$

$$H_t = H_{RJ} - H_{Rm} + J_{AB}L_{AB} + J_{BC}L_{AC}$$

$$H_t = 120 - 95 + 0,008 * 105 + 0,008 * 1000 = 33,84 \text{ m c.a.}$$

A altura total de elevação da bomba é de 33,84 m c.a.

- O consumo diário de energia é função da potência do motor:

$$P_m = \frac{\gamma Q H_t}{\eta_B \eta_m} = \frac{9,8 * Q * 33,84}{0,85}$$

O caudal é definido pelo volume diário a elevar e o período de elevação:

$$Q = \frac{Vol}{t} = \frac{720}{10 * 60 * 60} = 0,02 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$P_m = \frac{9,8 * 0,02 * 33,84}{0,85} = 7,803 \text{ kW}$$

A energia consumida diariamente é:

$$E = P_m * t = 7,803 * 10 = 78,03 \text{ kWh}$$

c) A determinação da carga na secção a montante da curva D e da velocidade média nessa secção permite, pela definição de carga, determinar a pressão no eixo da secção. A cota topográfica dessa secção é um dado do problema.

A aplicação do Teorema de Bernoulli entre o reservatório de montante e a secção a montante da curva D:

$$H_{R_m} - H_D = J_{AD} L_{AD}$$

$$H_D = H_{R_m} - J_{AD} L_{AD} = 95 - 0,008 * 5 = 94,96 \text{ m c.a.}$$

A velocidade média na conduta é:

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{0,02}{\frac{\pi * 0,15^2}{4}} = 1,13 \text{ ms}^{-1}$$

O coeficiente de distribuição de pressões é igual a $\beta = 1$ para linhas de corrente rectilíneas e paralelas entre si.

O coeficiente de Coriolis tem um valor, em regime turbulento, de $\alpha = 1,15$ que, afectando a altura cinética com

valor da ordem de $\frac{1,13^2}{2 * 9,8} = 0,07$, é desprezável.

A aplicação do conceito de carga permite obter:

$$H_D = Z_D + \beta \frac{p_D}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} \Rightarrow 94,96 = 100 + 1 \frac{p_D}{9800} + 1,15 \frac{1,13^2}{2 * 9,8} \Rightarrow p_D = -5,12 \text{ m c.a.}$$

A pressão na secção a montante da curva é negativa e igual a - 5,12 m c.a. = - 50126 Nm⁻²

Capítulo 5

TEOREMA DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO E SUAS APLICAÇÕES

5.1 Introdução

Nos problemas de hidráulica, em que se pretende determinar as forças que o fluido exerce sobre a fronteira sólida, não é suficiente a aplicação da Equação da Continuidade (Princípio da Conservação da Massa) e do Teorema de Bernoulli (Princípio da Conservação da Energia) sendo necessária a dedução de uma equação que considere o equilíbrio das forças que actuam sobre um dado volume de fluido (Teorema da Quantidade de Movimento ou Teorema de Euler).

O Teorema da Quantidade de Movimento permite determinar os esforços sobre a fronteira sólida em contacto com o fluido permitindo, no caso particular de escoamentos permanentes, a caracterização do escoamento com base, apenas, no conhecimentos do que se passa na fronteira.

O Teorema da Quantidade de Movimento em conjunto com o Teorema de Bernoulli e a Equação da Continuidade permitem resolver qualquer problema no âmbito da hidráulica, com base na caracterização de um dado volume no domínio fluido.

5.2 Dedução do Teorema da Quantidade de Movimento a partir da Equação de Euler e da Equação da Continuidade

A Equação de Euler (2.55), equação de equilíbrio dinâmico aplicada a líquidos perfeitos, e a Equação da Continuidade (2.13) constituem um sistema de duas equações que, na forma tensorial, se representa por:

$$\begin{cases} \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Com base na definição de derivada de um produto, a terceira e quarta parcelas da Equação de Euler podem ser substituídas pelas seguintes equações:

$$- \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} - v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.2)$$

$$- \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (\rho v_i v_j)}{\partial x_j} - v_i \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} \quad (5.3)$$

Obtém-se assim a Equação de Euler na forma:

$$\rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} - v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial (\rho v_i v_j)}{\partial x_j} - v_i \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} \right) \quad (5.4)$$

$$\rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_j)}{\partial x_j} - v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} \right) \quad (5.5)$$

O termo dentro de parênteses na equação (5.5) anula-se se verificada a Equação da Continuidade, obtendo-se a equação simplificada:

$$\rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_j)}{\partial x_j} \quad (5.6)$$

A integração da equação (5.6) num dado volume de fluido, volume de controlo, e a aplicação do Teorema da Divergência de Gauss aos segundos termos dos dois membros, surgindo dois integrais na superfície fronteira do volume de controlo, superfície de controlo, permite obter a equação:

$$\int_V \rho g_i dV + \int_S -p n_j dS = \int_V \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} dV + \int_S \rho v_i v_j n_j dS \quad (5.7)$$

A equação (5.7) representa a Equação do Teorema da Quantidade de Movimento, na forma integral aplicada aos líquidos perfeitos. Em notação vectorial, a equação (5.7) representa-se por:

$$\int_V \rho \vec{g} dV + \int_S -p \vec{n} dS - \int_V \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV - \int_V \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (5.8)$$

5.3 Interpretação do Teorema da Quantidade de Movimento

O significado físico de cada um dos termos da equação (5.8) é:

- $\int_V \rho \vec{g} dV$ - forças de massa que actuam sobre o fluido contido no interior da superfície de controlo, \vec{G}
- $\int_S -p \vec{n} dS$ - impulsão exercida, ao longo da superfície de controlo, pelo fluido circundante ou por paredes sólidas (positivo quando dirigido para fora). Neste termo, de modo a generalizar a aplicação da equação deduzida a líquidos reais, têm que ser incluídas as parcelas correspondentes às tensões tangenciais na superfície de controlo, $\vec{\Pi}$
- $-\int_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV$ - força local de inércia (anula-se para escoamentos permanentes), \vec{I}
- $-\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$ - quantidade de movimento através de toda a superfície de controlo, na unidade de tempo, ou seja a quantidade de movimento que sai menos a quantidade de movimento que entra na superfície de controlo, por unidade de tempo. O integral afectado pelo sinal negativo, corresponderá à quantidade de movimento que entra menos a quantidade de movimento que sai pela superfície de controlo, $\vec{M}_e - \vec{M}_s$

De modo simplificado, o Teorema da Quantidade de Movimento, pode ser escrito:

$$\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_s = \vec{0} \quad (5.9)$$

5.4 Teorema da Quantidade de Movimento aplicado a um tubo de fluxo

Tratando-se da aplicação a um fluido incompressível que se desloca em regime permanente através de uma conduta, figura 5.1, a superfície de controlo é constituída pela

superfície lateral do tubo de fluxo e por duas secções transversais A_1 e A_2 e o volume de controlo é o volume de fluido contido na superfície de controlo.

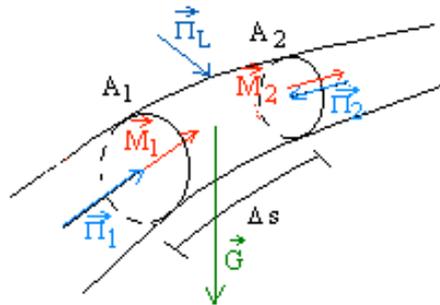


Figura 5.1 Volume de controlo ao longo de um tubo de fluxo

A aplicação do Teorema da Quantidade de Movimento ao volume de controlo referido anteriormente, permite obter, figura 5.1:

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{\Pi}_L + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 = \vec{0} \quad (5.10)$$

A incógnita é a resultante das forças exercidas pelo fluido sobre as paredes do tubo que é simétrica à força de contacto da parede do tubo sobre a superfície lateral da superfície de controlo: $\vec{R} = -\vec{\Pi}_L$

A substituição na equação (5.10) permite representar directamente a incógnita na Equação da Quantidade de Movimento:

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 - \vec{R} + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 = \vec{0} \quad (5.11)$$

Como determinar cada uma das forças representadas?

- tratando-se de um fluido homogéneo, o peso do volume de fluido, dentro da superfície de controlo, é dado pelo produto do peso volúmico pelo volume do fluido, $G = \gamma \text{ Vol}$
- as forças de contacto sobre as secções transversais do escoamento, A_1 e A_2 , têm uma componente normal (impulsão) e uma componente tangencial. Considerando as linhas de corrente que atravessam as secções transversais praticamente rectilíneas, a distribuição de pressões na direcção normal às linhas de corrente é hidrostática e o valor da impulsão é dado pelo produto entre a pressão no centro de gravidade da superfície premida e a área da secção transversal. A componente tangencial das forças de contacto anula-se nas secções transversais

por a velocidade do escoamento principal apenas ter componente segundo a normal à secção transversal, $\Pi_1=p_1A_1$ e $\Pi_2=p_2A_2$.

- R é o vector incógnita
- considerando que não existe transporte de massa fluida através da superfície de controlo lateral, mas apenas através das secções transversais A1 e A2, a quantidade de movimento que entra por unidade de tempo no volume de controlo acontece através da secção transversal A₁ e a quantidade de movimento que sai por unidade de tempo acontece através da secção A₂.

O módulo da quantidade de movimento por unidade de tempo que atravessa uma secção elementar, dA, é dada por (tendo em conta apenas a componente normal da velocidade relativamente à secção elementar, $\vec{v} = v$):

$$dM = \frac{dmv}{dt} = \frac{\rho dVol v}{dt} = \frac{\rho (v dt dA) v}{dt} = \rho v^2 dA \quad (5.12)$$

O módulo da quantidade de movimento por unidade de tempo que atravessa a secção transversal do tubo de fluxo é dada por:

$$M = \int_A dM = \rho \int_A v^2 dA = \alpha' \rho U^2 A \quad (5.13)$$

O coeficiente de quantidade de movimento, α' , é a relação entre a quantidade de movimento por unidade de tempo do escoamento real e a quantidade de movimento do escoamento fictício que transporta o mesmo caudal através da mesma conduta no mesmo intervalo de tempo:

$$\alpha' = \frac{\int_S \rho v^2 dS}{\rho U^2 S} \quad (4.27)$$

A aplicação da equação (5.13) às secções transversais do tubo de fluxo permite obter:

- $M_e = M_1 = \alpha' \rho U_1^2 A_1$
- $M_s = M_2 = \alpha' \rho U_2^2 A_2$

A direcção e sentido da quantidade de movimento por unidade de tempo é igual à direcção e sentido do vector velocidade.

5.5 Campo de aplicação do Teorema da Quantidade de Movimento

5.5.1 Resultante das forças exercidas por um líquido numa curva, acessório de um sistema de condutas

Seja o caso de uma conduta de adução entre uma albufeira e um reservatório. Nessa conduta existem troços rectos e nós que unem os troços rectos. Os nós podem ser materializados por acessórios como: curvas, tês, uniões, etc.

Para determinar a resultante das forças que o líquido exerce sobre o acessório-curva aplica-se o Teorema da Quantidade de Movimento, em regime permanente, ao volume de fluido contido na curva de modo a que o simétrico da incógnita coincida com a força de contacto exercida pela curva sobre o volume de líquido definido e que as secções transversais sejam atravessadas por linhas de corrente rectilíneas, figura 5.2.

A aplicação do Teorema de Bernoulli e da Equação da Continuidade ao longo do tubo de fluxo permite relacionar as cotas topográficas, as velocidades e as pressões nas secções transversais de entrada e saída da curva.

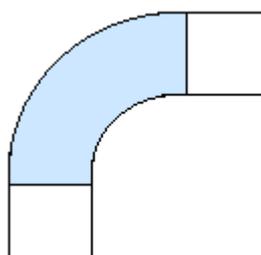


Figura 5.2 Volume de controlo na curva

5.5.2 Acção exercida por um jacto sobre uma superfície

Pretende-se determinar a resultante das forças que um jacto, de um líquido incompressível e em regime permanente, exerce sobre a placa em que incide. A aplicação do Teorema da Quantidade de Movimento permite resolver este problema, admitindo-se que o atrito água-ar é desprezável e que a força de contacto normal, ou seja a impulsão, se anula para superfícies em contacto com a atmosfera.

A escolha do volume de controlo deve ser feita tendo em atenção o seguinte: qual a superfície de contacto do líquido com a placa (a superfície de controlo tem que conter essa superfície); quais as secções do jacto que estão melhor caracterizadas ou que são de mais fácil caracterização (estas secções também devem pertencer à superfície de controlo); quais as superfícies laterais que unem as superfícies referidas anteriormente. Normalmente a maior parte da superfície de controlo está em contacto com a atmosfera. O volume de controlo é o volume do líquido limitado pela superfície de controlo.

Escolhido o volume de controlo desta maneira, a equação que representa o Teorema da Quantidade de Movimento fica muito simplificado.

A aplicação do Teorema de Bernoulli e da Equação da Continuidade ao longo do tubo de fluxo permite relacionar a velocidade média nas diferentes secções do escoamento.

Capítulo 6

TEORIA DA SEMELHANÇA EM HIDRÁULICA

6.1 Introdução

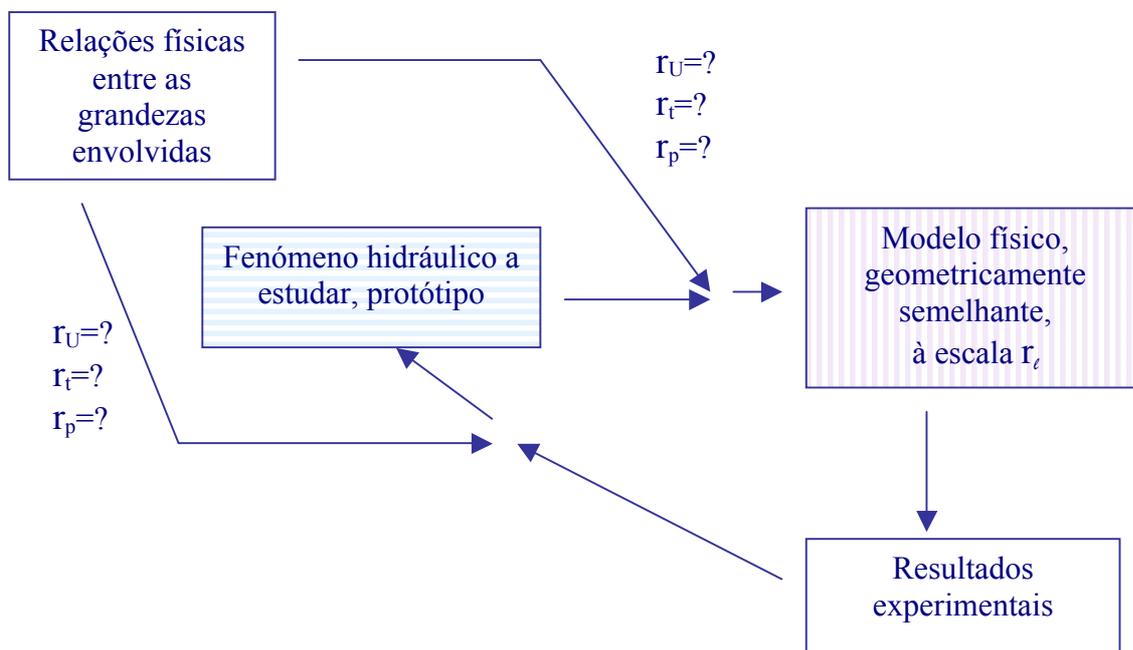
Nem sempre os fenómenos físicos, estudados no âmbito da Hidráulica, podem ser representados por modelos matemáticos, sendo necessária a construção de modelos físicos em laboratório ou em campos experimentais.

Neste capítulo serão estudados os conceitos que nos permitem dimensionar o modelo reduzido a construir para estudo do comportamento de uma obra hidráulica em projecto (a que chamaremos protótipo). Aprenderemos, ainda, a relacionar as grandezas medidas no modelo com o valor das grandezas esperadas no protótipo.

Designa-se por escala de uma dada grandeza a relação entre o valor da grandeza no modelo e o valor da mesma grandeza no protótipo.

É necessário definir inicialmente a escala geométrica e em função dessa as escalas de velocidades, de tempo, de caudal, de pressão, etc.

De modo geral é possível esquematizar da seguinte forma:



Este capítulo pode ser subdividido em dois sub-capítulos principais:

- Análise dimensional
- Semelhança hidráulica

6.2 – Análise dimensional

A análise dimensional permite obter relações físicas envolvidas num fenómeno hidráulico, a partir exclusivamente das respectivas dimensões.

Teoremas da Análise Dimensional

São aplicados dois Teoremas que, na sua aplicação à Hidráulica, se descrevem do seguinte modo :

- Teorema da Homogeneidade

toda a relação física tem de ser dimensionalmente homogénea.

- Teorema de Vaschy – Buckingham (ou dos π)

toda a relação dimensionalmente homogénea entre n grandezas físicas:

$$F(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 0$$

pode ser substituída por uma relação entre n-p (em Hidráulica p=3) grandezas adimensionais:

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-3}) = 0$$

sendo p o número de grandezas dimensionalmente independentes que intervêm no fenómeno.

Os parâmetros adimensionais são definidos cada um deles com essas 3 grandezas fundamentais (a_k, a_l, a_m) e cada uma das n-3 grandezas restantes:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{a_1}{a_k^{x_1} * a_l^{y_1} * a_m^{z_1}} \\ \pi_2 &= \frac{a_2}{a_k^{x_2} * a_l^{y_2} * a_m^{z_2}} \\ &\dots\dots\dots \\ \pi_{n-3} &= \frac{a_{n-3}}{a_k^{x_{n-3}} * a_l^{y_{n-3}} * a_m^{z_{n-3}}}\end{aligned}$$

Em que os expoentes x_i, y_i e z_i são determinados pela condição de π_i ser adimensional, verificando o Teorema da Homogeneidade.

Aplicação do Teorema dos π a um problema de Mecânica dos Fluidos

1ª Variáveis que condicionam o fenómeno

características geométricas – grandezas lineares identificadas genericamente por ℓ

características cinemáticas – velocidade média do escoamento, U

características dinâmicas – variações de pressão, Δp ; aceleração da gravidade, \bar{g}

propriedades do fluido – massa volúmica, ρ ; viscosidade cinemática, ν

Estas grandezas relacionam-se através de uma relação dimensionalmente homogénea:

$$F(\ell, U, \Delta p, \rho, g, \nu) = 0$$

2ª Seleccionar entre as diferentes grandezas um sistema de unidades fundamentais, em hidráulica são tradicionalmente adoptadas as variáveis (ℓ, ρ, U)

3ª Definir a equação função de grandezas adimensionais:

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$$

com:

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{\ell^{x_1} * U^{y_1} * \rho^{z_1}} \quad \pi_2 = \frac{g}{\ell^{x_2} * U^{y_2} * \rho^{z_2}} \quad \pi_3 = \frac{\nu}{\ell^{x_3} * U^{y_3} * \rho^{z_3}}$$

os valores x_i, y_i, z_i podem ser determinados tendo em conta que π_i são parâmetros adimensionais e que as equações anteriores verificam o Teorema da Homogeneidade. Será facilitado o trabalho se nos apoiarmos num sistema de unidades conhecido como por exemplo o sistema MLT, ou seja:

grandeza	equação às dimensões
ℓ	$M^0 L^1 T^0$
U	$M^0 L^1 T^{-1}$
ρ	$M^1 L^{-3} T^0$
Δp	$M^1 L^{-1} T^{-2}$
g	$M^0 L^1 T^{-2}$
ν	$M^0 L^2 T^{-1}$

$$M^0 L^0 T^0 = \frac{M^1 L^{-1} T^{-2}}{(M^0 L^1 T^0)^{x_1} * (M^0 L^1 T^{-1})^{y_1} * (M^1 L^{-3} T^0)^{z_1}}$$

$$M^0 L^0 T^0 = \frac{M^0 L^1 T^{-2}}{(M^0 L^1 T^0)^{x_2} * (M^0 L^1 T^{-1})^{y_2} * (M^1 L^{-3} T^0)^{z_2}}$$

$$M^0 L^0 T^0 = \frac{M^0 L^2 T^{-1}}{(M^0 L^1 T^0)^{x_3} * (M^0 L^1 T^{-1})^{y_3} * (M^1 L^{-3} T^0)^{z_3}}$$

E aplicando o Teorema da Homogeneidade, vem:

$$\text{Relativamente a } \pi_1: \begin{cases} 1 = 0x_1 + 0y_1 + 1z_1 \\ -1 = 1x_1 + 1y_1 - 3z_1 \\ -2 = 0x_1 - 1y_1 + 0z_1 \end{cases} \begin{cases} z_1 = 1 \\ x_1 = 0 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \pi_1 = \frac{\Delta p}{\ell^0 * U^2 * \rho^1} = \frac{\Delta p}{\rho U^2}$$

$$\text{Relativamente a } \pi_2: \begin{cases} 0 = 0x_2 + 0y_2 + 1z_2 \\ 1 = 1x_2 + 1y_2 - 3z_2 \\ -2 = 0x_2 - 1y_2 + 0z_2 \end{cases} \begin{cases} z_2 = 0 \\ x_2 = -1 \\ y_2 = 2 \end{cases} \quad \pi_2 = \frac{g}{\ell^{-1} * U^2 * \rho^0} = \frac{g \ell}{U^2}$$

Relativamente a π_3 :

$$\begin{cases} 0 = 0x_3 + 0y_3 + 1z_3 \\ 2 = 1x_3 + 1y_3 - 3z_3 \\ -1 = 0x_3 - 1y_3 + 0z_3 \end{cases} \begin{cases} z_3 = 0 \\ x_3 = 1 \\ y_3 = 1 \end{cases} \quad \pi_3 = \frac{v}{\ell^1 * U^1 * \rho^0} = \frac{v}{\ell U}$$

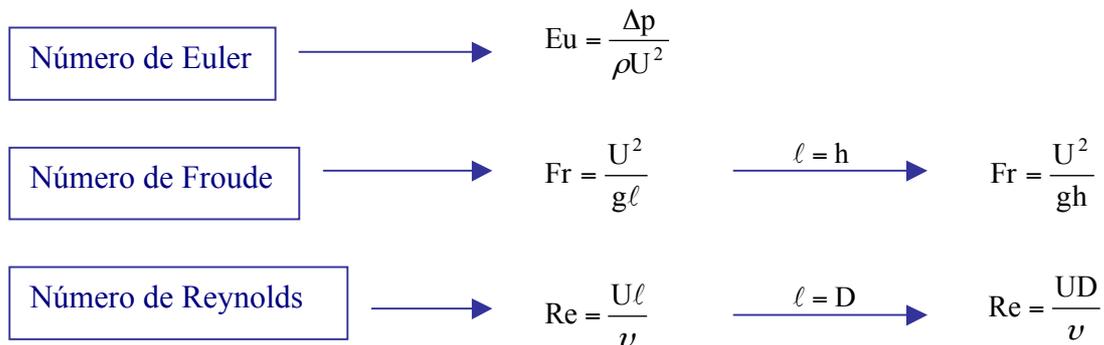
O Teorema dos π permite transformar a função F , que exprime uma relação entre seis grandezas, numa expressão que relaciona três grandezas adimensionais:

$$\Phi\left(\frac{\Delta p}{\rho U^2}, \frac{g\ell}{U^2}, \frac{v}{\ell U}\right) = 0$$

ou de modo equivalente:

$$\Phi'\left(\frac{\Delta p}{\rho U^2}, \frac{U^2}{g\ell}, \frac{\ell U}{v}\right) = 0$$

Os parâmetros adimensionais assim determinados traduzem importantes propriedades do escoamento e por isso têm designações próprias:



A função Φ' pode ser representada do seguinte modo:

$$\Phi'(Eu, Fr, Re) = 0 \quad \text{ou} \quad Eu = \Phi''(Fr, Re)$$

A aplicação da Análise Dimensional permite obter uma expressão que representa o fenómeno hidráulico. A função Φ'' pode ser determinada experimentalmente.

Significado físico dos parâmetros adimensionais

Tendo em conta a forma de representação das forças envolvidas no problema anterior é possível relacionar cada um dos parâmetros com formas de força.

Tipo de Força	Representação das forças no sistema (ℓ, U, ρ)
Força de inércia	$F_I = -ma = -\rho \ell^3 U t^{-1} = -\rho U^2 \ell^2$
Força de pressão	$F_p = \Delta p \ell^2$
Forças gravíticas	$F_G = \gamma \ell^3$
Forças da viscosidade	$F_v = (\mu U \ell^{-1}) \ell^2 = \nu \rho U \ell$

Comparando as equações deduzidas para os três parâmetros adimensionais com a representação das diferentes forças, verificamos que:

- O número de Euler representa a relação entre as forças de pressão e as forças de inércia

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho U^2} = \frac{\Delta p \ell^2}{\rho U^2 \ell^2} = \frac{F_p}{F_I}$$

- O número de Froude representa a relação entre as forças de inércia e as forças gravíticas

$$Fr = \frac{U^2}{g \ell} = \frac{\rho U^2 \ell^2}{\rho g \ell \ell^2} = \frac{\rho U^2 \ell^2}{\gamma \ell^3} = \frac{F_I}{F_G}$$

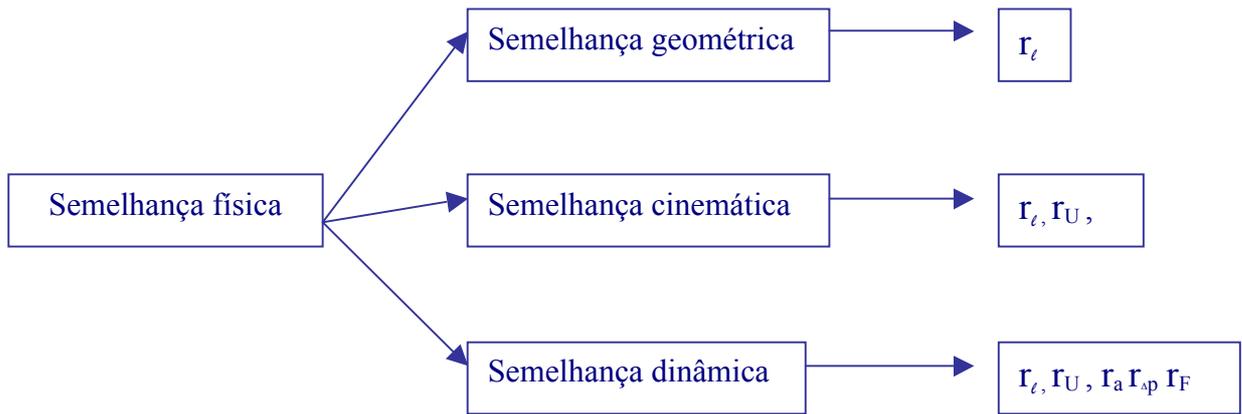
- O número de Reynolds representa a relação entre as forças de inércia e as forças de viscosidade

$$Re = \frac{U \ell}{\nu} = \frac{\rho U \ell U \ell}{\rho \nu U \ell} = \frac{\rho U^2 \ell^2}{\rho \nu U \ell} = \frac{F_I}{F_v}$$

6.3 – Semelhança hidráulica

Dizemos que dois sistemas são fisicamente semelhantes relativamente a um conjunto de grandezas se existir uma relação constante entre valores homólogos dessas grandezas nos dois sistemas.

A semelhança física pode ser caracterizada de modos diferentes: Semelhança geométrica em que apenas se verifica constante a relação entre as grandezas geométricas no modelo e no protótipo; Semelhança cinemática em que se verifica a constância da relação entre as grandezas geométricas e cinemáticas entre o modelo e o protótipo; Semelhança dinâmica em que se verifica a constância da relação entre as grandezas geométricas, cinemáticas e dinâmicas entre o modelo e o protótipo. De um modo esquemático pode ser representado do seguinte modo:



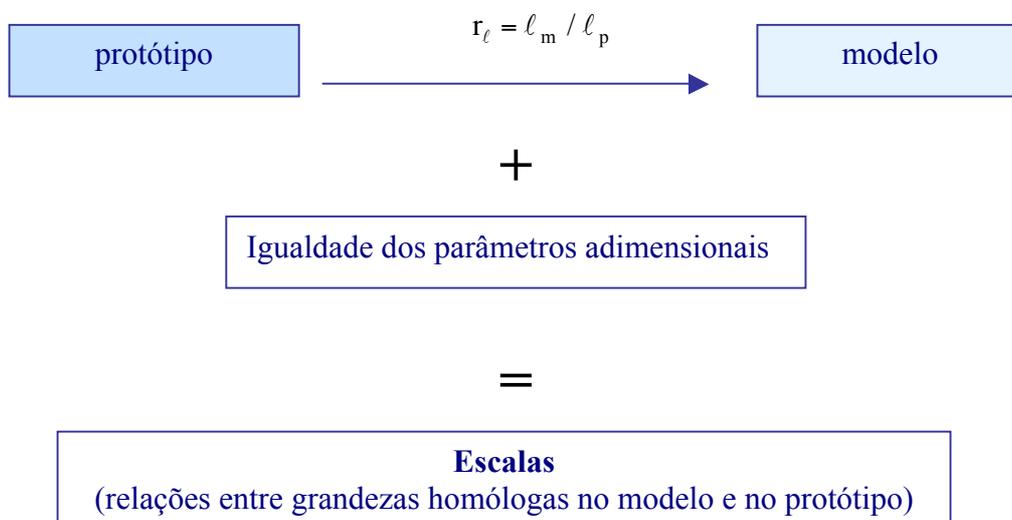
Em Hidráulica a Teoria da Semelhança baseia-se na igualdade dos valores dos parâmetros adimensionais no modelo e no protótipo.

Não sendo, no entanto, compatível a igualdade entre todos os parâmetros para representar um dado fenómeno hidráulico é normalmente estudado qual o parâmetro adimensional que melhor representa um dado fenómeno tendo em conta as forças intervenientes no fenómeno e depois de escolhido esse parâmetro é igualado no modelo e no protótipo. As semelhanças são designadas pelo nome do parâmetro a igualar.

Semelhança de Euler, Froude e Reynolds

Cada uma das semelhanças referidas será conseguida com base na escala geométrica e na igualdade dos parâmetro adimensional correspondente que permite obter o valor das escalas das diferentes grandezas envolvidas.

De modo esquemático:

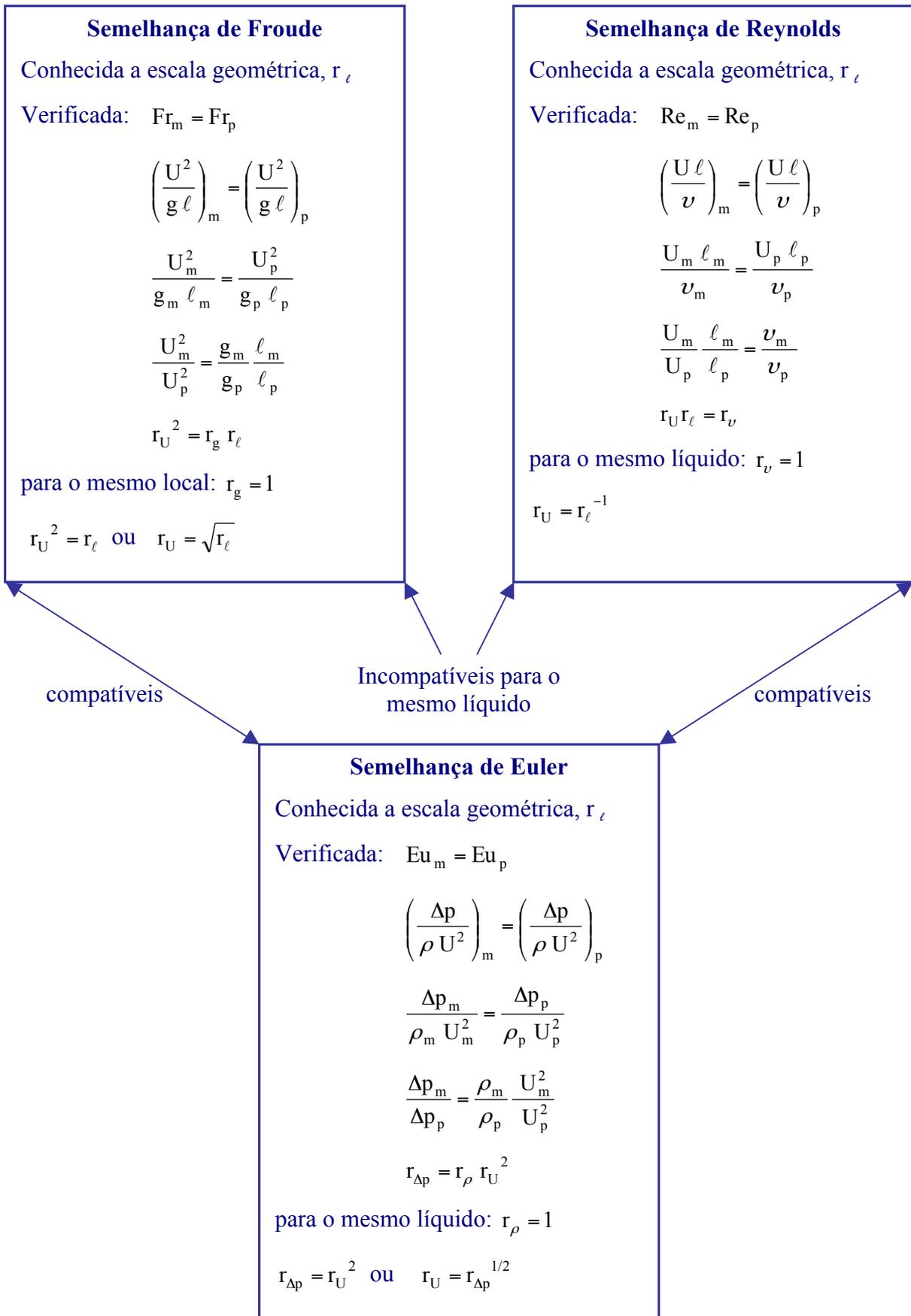


Serão de seguida apresentadas as escalas a verificar para os diferentes tipos de semelhança, conhecida a escala geométrica aplicada. As semelhanças de Froude e de Reynolds não podem ser verificadas simultaneamente se for aplicado o mesmo fluido no protótipo e no modelo e para a mesma aceleração da gravidade.

No entanto, a semelhança de Euler é compatível com a semelhança de Reynolds ou com a semelhança de Froude por permitir determinar a escala de pressões a partir da escala de velocidades.

A Semelhança de Froude é aplicada nas situações em que exista predominância das forças gravíticas relativamente às forças da viscosidade, ex: regimes turbulentos completamente estabelecidos e escoamentos determinados pela acção do peso (escoamentos em superfície livre). Despreza-se o efeito da viscosidade (Re muito elevados)

A Semelhança de Reynolds é aplicada no escoamento de líquidos no interior de condutas, desde que não esteja presente uma superfície livre, que determinaria a intervenção das forças da gravidade. Escoamentos sob pressão e escoamentos interiores.



Problemas resolvidos

1 - Verifique a homogeneidade dimensional da equação que exprime o Teorema da Quantidade de Movimento:

$$\vec{G} + \vec{I} + \vec{\Pi} + \vec{M}_e - \vec{M}_s = \vec{0}$$

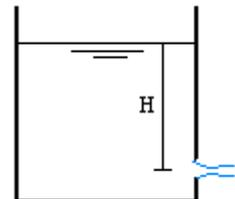
Resolução:

Para uma relação física estar correcta precisa de verificar o Teorema da Homogeneidade, o que pode ser comprovado com o apoio do sistema de unidades MLT:

grandeza	$G = \gamma \text{ Vol}$	$I = -m a$	$\Pi = p A$	$M = \rho U^2 A$
equação de dimensões	$[\gamma] = M^1 L^{-2} T^{-2}$ $[\text{Vol}] = M^0 L^3 T^0$ $[G] = M^1 L^1 T^{-2}$	$[m] = M^1 L^0 T^0$ $[a] = M^0 L^1 T^{-2}$ $[I] = M^1 L^1 T^{-2}$	$[p] = M^1 L^{-1} T^{-2}$ $[A] = M^0 L^2 T^0$ $[I] = M^1 L^1 T^{-2}$	$[\rho] = M^1 L^{-3} T^0$ $[U] = M^0 L^1 T^{-1}$ $[A] = M^0 L^2 T^0$ $[M] = M^1 L^1 T^{-2}$

Todas as parcelas têm a mesma equação de dimensões, logo conclui-se que a equação é dimensionalmente homogéna

2 - Considere o reservatório de grandes dimensões representado na figura, com um orifício de pequenas dimensões numa das paredes laterais. Pretende-se determinar a velocidade média na secção contraída do jacto, sabendo que é função da carga no eixo do orifício (H), das características do líquido (ρ) e que o escoamento ocorre devido à acção das forças da gravidade. Deduza a expressão da velocidade na secção contraída aplicando o Teorema dos π .



Resolução:

Se a velocidade média na secção contraída (U) depende da carga no eixo do orifício (H), da massa volúmica do líquido (ρ) e da aceleração da gravidade (g), o escoamento é traduzido por uma relação:

$$F(U, H, \rho, g) = 0$$

O Teorema dos π transforma esta expressão em (admitindo como grandezas fundamentais - U, H e ρ):

$$\Phi(\pi_1) = 0 \quad \text{com} \quad \pi_1 = \frac{g}{U^{x_1} H^{y_1} \rho^{z_1}}$$

$$M^0 L^0 T^0 = \frac{M^0 L^1 T^{-2}}{(M^0 L^1 T^{-1})^{x_1} * (M^0 L^1 T^0)^{y_1} * (M^1 L^{-3} T^0)^{z_1}}$$

$$\begin{cases} 0 = 0x_1 + 0y_1 + 1z_1 \\ 1 = 1x_1 + 1y_1 - 3z_1 \\ -2 = -1x_1 + 0y_1 + 0z_1 \end{cases} \begin{cases} z_1 = 0 \\ y_1 = -1 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

Assim, $\pi_1 = \frac{gH}{U^2}$ ou $\Phi\left(\frac{gH}{U^2}\right) = 0$

Uma função de um único parâmetro significa que este parâmetro não depende de nenhum outro por isso será uma constante:

$$\pi_1 = \frac{gH}{U^2} = K \quad \text{ou} \quad U = \sqrt{\frac{1}{K}} \sqrt{gH}$$

Através da aplicação do Teorema dos π é possível concluir que a velocidade média é directamente proporcional à raiz quadrada da carga e da aceleração da gravidade.

A constante de proporcionalidade tem que ser determinada a partir de trabalho experimental ou desenvolvimento analítico, fora do âmbito da Análise Dimensional.

3 - A galeria de desvio, do caudal do rio Guadiana, para construção da Barragem do Alqueva, tem aproximadamente um comprimento de 450 m e 8 m de diâmetro. Pretende-se construir um modelo reduzido em laboratório. Sabendo que o diâmetro não deve ser superior a 0.5 m e inferior a 0.2 m e que o comprimento disponível é 20 m, determine o caudal a utilizar no modelo para representar o caudal no protótipo de 50 m³/s.

Resolução:

Neste problema não se pretende encontrar a relação entre parâmetros envolvidos, mas sim as características de um modelo reduzido geometricamente semelhante ao protótipo.

Começamos por definir a escala geométrica, de seguida escolhemos o tipo de semelhança a adoptar e calculamos as escalas de alguns parâmetros:

1º - o espaço disponível para construir está limitado ao comprimento por 20 m, logo a escala geométrica tem que ser inferior a:

$$r_l \leq \frac{20}{450} \quad \text{ou} \quad r_l \leq 0,04444$$

2º - o diâmetro no modelo deve estar entre:

$$0,2 \leq D_m \leq 0,5, \text{ ou seja a escala geométrica teria que estar entre os valores:}$$

$$0,025 \leq r_\ell \leq 0,0625$$

3° - interessando-nos usar a escala de comprimentos maior possível será considerado um valor igual a: $r_\ell = 0,04444$ que corresponde a um comprimento no modelo igual a 20 m e a um diâmetro no modelo de $D_m = 0,04444 * 8 = 0,36$ m

4° - é necessário agora escolher o tipo de semelhança a considerar:

Semelhança de Froude ou Semelhança de Reynolds?

tendo em conta que o escoamento se faz em superfície livre, ou seja devido à acção das forças de gravidade, estas tornam-se mais importantes que as forças da viscosidade escolhendo-se a Semelhança de Froude.

5° - a semelhança de Froude permite obter a escala de velocidades: $r_U = \sqrt{r_\ell} = 0,21082$

6° - através da relação física entre:

- a área e o comprimento
- o caudal a velocidade e a área

é possível determinar a escala de áreas e a escala de caudais:

$$r_A = r_\ell^2 = 0,00198$$

$$r_Q = r_U r_A = \sqrt{r_\ell} r_\ell^2 = r_\ell^{5/2} = 0,00042$$

7° - conhecida a escala de caudais e o valor do caudal previsto no protótipo, determina-se o caudal no modelo:

$$r_Q = \frac{Q_m}{Q_p} \Rightarrow Q_m = 0,00042 * 50 = 0,02082 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} = 20,8 \text{ l s}^{-1}$$

Capítulo 7

LEIS DE RESISTÊNCIA DOS ESCOAMENTOS PERMANENTES E UNIFORMES EM PRESSÃO

7.1 Conceitos fundamentais

Os escoamentos permanentes em pressão acontecem em condutas com condições de fronteira, a montante e jusante, constantes ao longo do tempo. Os escoamentos uniformes em pressão acontecem em condutas de eixo rectilíneo com secção transversal e caudal constantes, em que as características do escoamento se mantêm constantes ao longo do escoamento.

As leis de resistência são relações físicas que permitem relacionar a perda de carga unitária com o diâmetro da conduta, D , a natureza do material da conduta e o caudal transportado de um dado fluido. As leis de resistência apresentadas neste capítulos são aplicáveis a escoamentos permanentes e uniformes.

A perda de carga unitária, J , perda de carga por metro linear de conduta, é representada pela unidade mc.a./m. Esta unidade é adimensional do ponto de vista formal, mas do ponto de vista físico é uma unidade de energia por unidade de peso do fluido sobre uma unidade de comprimento, assim é normalmente usado o factor de resistência, f , que representa a sua forma adimensional obtida pela divisão de J pela altura cinética e a multiplicação pelo diâmetro da conduta:

$$f = \frac{JD}{\frac{U^2}{2g}} \quad (7.1)$$

Em cálculo hidráulico o diâmetro da conduta refere-se ao diâmetro interno, que em regime uniforme é constante.

A natureza do material da conduta é representada pela sua rugosidade, caracterizada pelo parâmetro denominado rugosidade absoluta equivalente, k , cujo significado será explicado à frente. Em regime uniforme este parâmetro é constante na conduta.

O fluido é representado pelas características físicas: peso volúmico, γ e viscosidade cinemática, ν , ou viscosidade dinâmica, μ . No âmbito do nosso estudo o fluido é a água.

O caudal transportado pela conduta é constante no tempo e ao longo da conduta. Se o diâmetro é constante também a secção molhada e o módulo da velocidade média são constantes. No regime uniforme a direcção da velocidade também tem de ser constante, ou seja, a conduta tem obrigatoriamente eixo rectilíneo. As linhas de corrente, coincidentes com as trajectórias, são rectilíneas e paralelas entre si, sendo por isso a distribuição de pressões hidrostática, na secção transversal do escoamento.

Para o caudal (ou velocidade), a natureza do material da conduta e o diâmetro da conduta constantes no espaço e no tempo, a perda de carga unitária, no transporte de um dado fluido, também é constante ao longo do percurso e ao longo do tempo. A linha de energia, que representa a carga total em cada secção da conduta, é uma recta e o seno do ângulo formado pela recta com a horizontal, β , é a perda de carga unitária, figura 7.1. A linha piezométrica que representa a cota piezométrica das secções transversais ao longo da conduta, é paralela à linha de energia. Se o diagrama de velocidades é constante ao longo da conduta, a velocidade média e o coeficiente de Coriolis também são constantes, Figura 7.1.

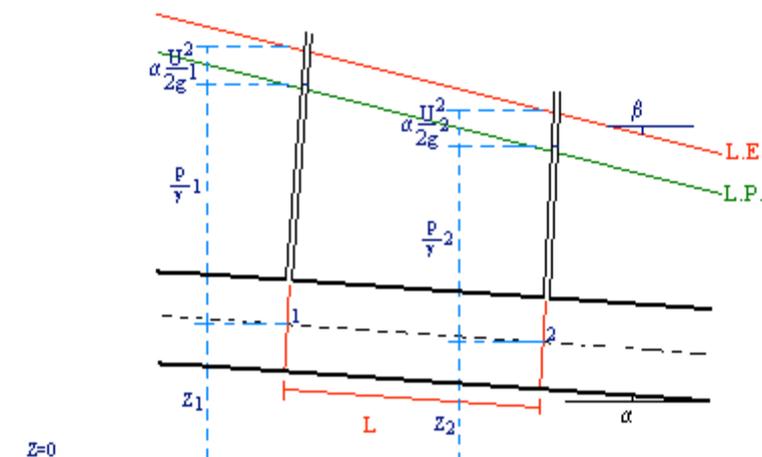


Figura 7.1 Representação esquemática da linha de energia e da linha piezométrica de um escoamento permanente e uniforme em pressão

Ao longo de um escoamento permanente e uniforme numa conduta em pressão, a perda de carga unitária é determinada pela equação seguinte:

$$J = \frac{H_1 - H_2}{L} \quad (7.2)$$

em que, substituindo a carga em cada secção pela soma das três formas de energia mecânica, permite obter:

$$J = \frac{\left(Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} \right)}{L} \quad (7.3)$$

Para o caso particular de regime uniforme, em que a velocidade média e o Coeficiente de Coriolis são constantes ao longo da conduta, é possível simplificar a equação anterior do seguinte modo:

$$J = \frac{\left(Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right)}{L} \quad (7.4)$$

podendo concluir-se que, em escoamentos uniformes, a perda de carga unitária também pode ser determinada a partir da linha piezométrica.

Em laboratório e no caso de escoamentos permanentes e uniformes em pressão, a perda de carga unitária pode ser determinada instalando dois tubos piezométricos em duas secções da conduta afastadas de um dado comprimento. A diferença entre as cotas topográficas da superfície livre nos dois tubos piezométricos é igual à perda de carga contínua entre as duas secções; esta diferença a dividir pelo comprimento da conduta entre as duas secções referidas permite obter a perda de carga unitária.

O cálculo analítico da perda de carga unitária obriga a uma análise da causa imediata da sua ocorrência: o gradiente de velocidade na secção transversal. A velocidade varia na secção transversal do escoamento porque a conduta apresenta rugosidade e porque o fluido transportado tem viscosidade. Se não existisse rugosidade, o fluido deslocava-se como um sólido deslizando sobre as paredes do tubo sem atrito, a rugosidade da parede obriga a que as partículas de fluido em contacto com a parede fiquem retidas e, como existe resistência ao deslocamento entre as partículas, atrasam as partículas que lhe estão junto. Acontece assim a variação da velocidade na secção transversal, desde a velocidade nula junto às paredes do tubo até à velocidade máxima no eixo do tubo. O gradiente de velocidades na secção transversal dá origem à tensão tangencial de arrastamento que realiza trabalho. O trabalho

realizado pelas forças resistentes por unidade de peso do fluido e por unidade de comprimento é a perda de carga unitária.

Os diagramas de velocidade na secção transversal de um escoamento variam com o regime de escoamento: laminar ou turbulento, figura 3.6, dando por isso origem a leis de resistência diferentes.

7.2 Escoamento laminar

No regime laminar as partículas mantêm a sua posição relativa, não existindo transferência de informação entre as lâminas de fluido que se deslocam ao longo da conduta. As partículas que estão encostadas à parede têm velocidade igual à velocidade do tubo, influenciando as partículas vizinhas através do efeito da viscosidade.

Em regime laminar a perda de carga unitária é função da velocidade média, do diâmetro da conduta e das características físicas do fluido, não se manifesta a influência da rugosidade do tubo. Esta relação é representada pela Fórmula de Hagen-Poiseuille que, para o caso particular das secções circulares, se representa através da equação seguinte:

$$J = 32 \frac{\mu}{\gamma} \frac{U}{D^2} \quad (7.5)$$

No escoamento laminar de um fluido com viscosidade e peso volúmico constantes, num dado tubo de secção constante, a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência um da velocidade.

No caso de escoamentos laminares em tubos de secção não circular a equação 7.5 é diferente no valor da constante.

A equação de Hagen-Poiseuille pode ser apresentada de um modo adimensional através da introdução do factor de resistência, equação 7.1, e do nº de Reynolds, equação 7.6, obtendo-se a equação de Hagen-Poiseuille adimensionalizada, equação 7.7.

$$\text{Re} = \frac{UD}{\nu} \quad (7.6)$$

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad (7.7)$$

7.3 Escoamento turbulento em tubos circulares comerciais

7.3.1 Nota introdutória

A maioria dos escoamentos de água em circuitos hidráulicos fazem-se em escoamento turbulento. Se a viscosidade cinemática da água tem o valor de $\nu=1,01 \text{ E-6 m}^2\text{s}^{-1}$ para $T=20^\circ\text{C}$, é necessário que as velocidades de escoamento tomem valores muito baixos para que o regime de escoamento seja laminar, tendo em conta que para condutas circulares o regime turbulento acontece para N° de Reynolds superiores a 3000-4000.

Os primeiros trabalhos experimentais e analíticos desenvolvidos para o cálculo das perdas de carga unitárias em escoamentos turbulentos foram realizados em tubos de rugosidade uniforme.

Na realidade, os tubos comerciais não apresentam rugosidade uniforme e por isso foi necessário adaptar as equações desenvolvidas para tubos de rugosidade uniforme. Para tal, foi introduzido o parâmetro rugosidade absoluta equivalente, k .

7.3.2 Equação de Colebrook-White

Com base nos estudos realizados por Nikuradse em tubos de rugosidade uniforme, nas equações de Karman-Prandtl para tubos lisos, equação 7.8, e para tubos rugosos, equação 7.9, e em trabalho experimental com tubos comerciais, Colebrook e White deduziram uma equação que permitiu relacionar a perda de carga unitária com o caudal ou velocidade, o diâmetro e a rugosidade absoluta equivalente dos tubos, equação 7.10, designada por Equação de Colebrook-White. Esta equação é implícita, relativamente à perda de carga unitária, obrigando à aplicação de um método numérico para a sua resolução (ex: Método das Substituições Sucessivas).

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{Re\sqrt{f}}{2,51} \quad (7.8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3,7 D}{k} \quad (7.9)$$

$$J = \frac{U^2}{8gD} \log^{-2} \left(\frac{k}{3,7D} + \frac{2,51\nu}{D\sqrt{2gDJ}} \right) \quad (7.10)$$

A equação de Colebrook-White pode ser apresentada na forma adimensional através da introdução de três parâmetros adimensionais: o factor de resistência, o nº de Reynolds e a rugosidade relativa, equação 7.11.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k}{3,7 D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (7.11)$$

O factor de resistência e o nº de Reynolds já foram apresentados, a rugosidade relativa é a rugosidade absoluta equivalente adimensionalizada com o diâmetro interior do tubo, k/D .

Define-se rugosidade absoluta equivalente como a rugosidade uniforme fictícia, calculada pela equação de Karman-Prandtl para tubos rugosos, que dê origem à mesma perda de carga quando transporta o mesmo caudal através de um tubo com o mesmo diâmetro.

O valor da rugosidade absoluta equivalente de cada material comercial está disponível no catálogo do fabricante. No Quadro 7.1 são apresentados valores da rugosidade absoluta equivalente de diferentes materiais.

Quadro 7.1 Rugosidade absoluta equivalente de diferentes materiais (Novais Barbosa, 1985)

Natureza do tubo	Rugosidade absoluta equivalente (mm)
Vidro	0,001 a 0,003
Cobre	0,01 a 0,04
PVC	0,01 a 0,04
Fibrocimento	0,03 a 0,1
Ferro fundido novo	0,25 a 1,0
Ferro galvanizado	0,1 a 0,3
Betão liso	0,3 a 2
Betão rugoso	2 a 10

7.3.3 Ábaco de Moody

Na época em que foi deduzida a equação de Colebrook-White não existiam meios de cálculo compatíveis para a sua aplicação. Foram traçados vários ábacos com a representação da Equação de Colebrook-White que permitiam a aplicação directa no cálculo da perda de carga unitária. O mais conhecido é o Ábaco de Moody, figura 7.2, que permite o cálculo

rápido de um valor aproximado da perda de carga unitária e a identificação das características dos diferentes tipos de escoamento que se verificam no transporte de um fluido através de um tubo.

O Ábaco de Moody tem os eixos graduados em escala logarítmica e representa a variação do factor de resistência em função da variação do nº de Reynolds para tubos com diferente rugosidade relativa. É um Ábaco universal porque também representa a equação de Hagen-Poiseuille para escoamentos laminares e tubos circulares que, em escala logarítmica, é uma recta.

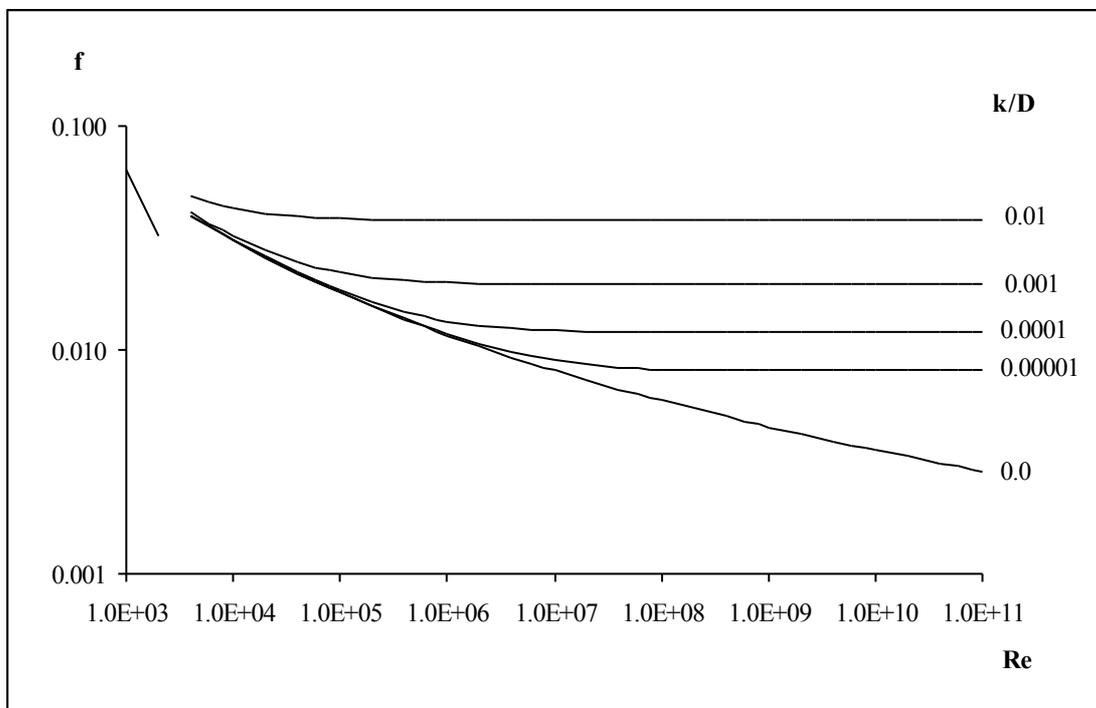


Figura 7.2 Ábaco de Moody

Numa análise cuidada do Ábaco de Moody verifica-se que os tubos com um dado diâmetro e uma dada rugosidade comportam-se como se fossem lisos para pequenos valores de Re (velocidades baixas). No caso de um tubo com rugosidade relativa igual a $k=0,00001$, a curva que representa a variação do factor de resistência com o nº de Reynolds coincide com a curva relativa à rugosidade nula (tubo liso) até ao valor de Re de aproximadamente $5,0E05$. Este fenómeno verifica-se para valores tão mais pequenos da velocidade quanto maior for a rugosidade absoluta equivalente do material. Pode assim concluir-se que para uma dada rugosidade relativa existe um intervalo de Re em que o tubo se comporta como liso, o factor

de resistência apenas depende do nº de Reynolds e o regime turbulento é designado por regime turbulento liso. Existem algumas exceções como por exemplo no caso de tubos com rugosidade relativa $k=0,01$ em que o escoamento nunca é turbulento liso.

No mesmo tubo, quando o caudal aumenta, aumenta a velocidade e o nº de Reynolds e a partir de um dado valor o factor de resistência mantém-se constante. No Ábaco de Moody a curva de variação do factor de resistência com o nº de Reynolds transforma-se numa recta horizontal, o que acontece para valores do Re tanto maiores quanto menor for a rugosidade relativa. Pode assim concluir-se que neste caso o factor de resistência apenas depende da rugosidade relativa e o regime turbulento é designado por regime turbulento rugoso. Se o factor de resistência se mantém constante com o Re, a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência dois da velocidade média, equação 7.1. No caso do tubo com rugosidade relativa igual a $k=0,00001$, o escoamento turbulento rugoso acontece para valores do nº de Reynolds superiores a aproximadamente $9,0E07$. Em tubos lisos não é possível acontecer um escoamento turbulento rugoso.

Entre o regime turbulento liso e o regime turbulento rugoso o escoamento turbulento designa-se por turbulento de transição e caracteriza-se por o factor de resistência variar com o nº de Reynolds e com a rugosidade relativa.

Pode assim concluir-se que em escoamentos turbulentos, para uma dada rugosidade relativa :

- até um dado valor de Re, a perda de carga unitária em tubos rugosos coincide com a perda de carga em tubos lisos e apenas depende do Re – *regime turbulento liso*
- a partir de um dado valor de Re, a perda de carga unitária em tubos rugosos apenas depende da rugosidade – *regime turbulento rugoso*
- entre os dois valores de Re anteriores a perda de carga unitária depende da rugosidade e do Re – *regime turbulento de transição*

7.3.3 Equações empíricas

Existem ainda equações empíricas para determinação da perda de carga unitária. Estas equações são de utilização simples e devem ser cuidadosamente aplicadas por terem sido deduzidas para condições específicas. As equações empíricas só podem ser aplicadas nas condições para que foram deduzidas.

São apresentados alguns exemplos:

Equação de Blasius:

$$f = 0,3164 \text{Re}^{-0,25} \quad \text{para } 3000 < \text{Re} < 10^5 \quad (7.12)$$

O factor de resistência é apenas função do Re, o que só será admissível em regime turbulento liso. A sobreposição desta equação com o Ábaco de Moody, figura 7.3 permite concluir que a equação de Blasius representa bem o factor de resistência para valores do nº de Re até 10^5 .

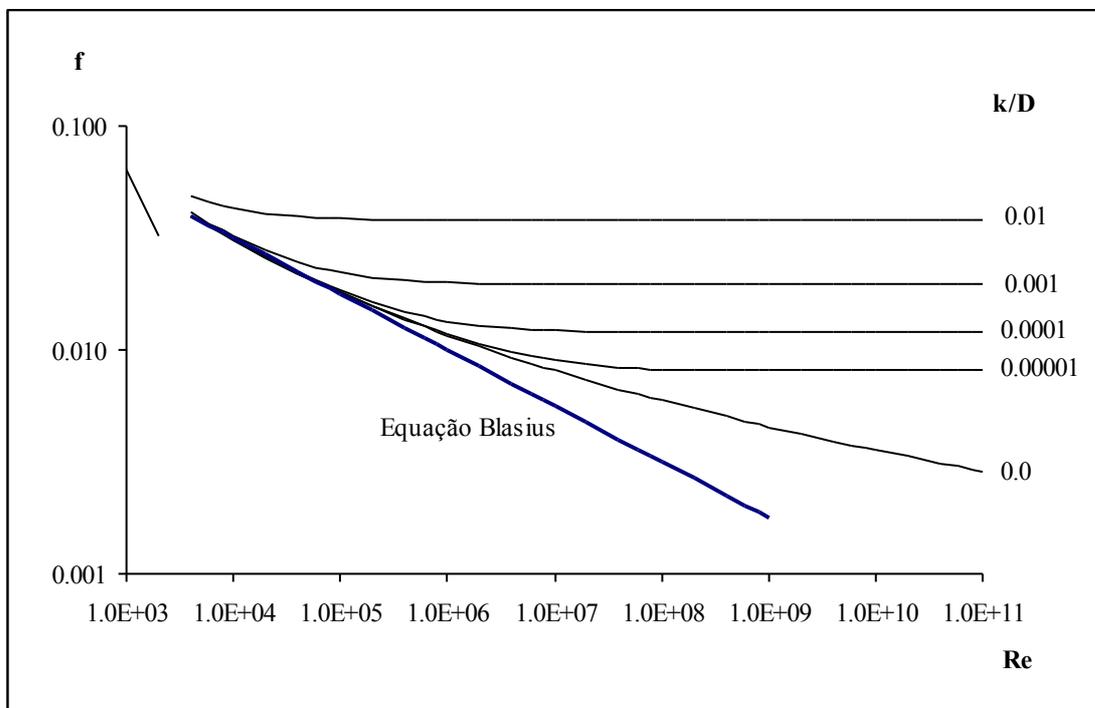


Figura 7.3 Sobreposição da Equação de Blasius ao Ábaco de Moody

A substituição da Equação de Blasius na equação 7.1 permite obter:

$$\frac{JD}{U^2} = 0,3164 \left(\frac{UD}{\nu} \right)^{-0,25} \quad (7.13)$$

$$J = 0,3164 \frac{\nu^{0,25}}{2gD^{1,25}} U^{1,75} \quad (7.14)$$

Esta equação permite concluir que, tendo em conta que a viscosidade cinemática e o diâmetro não dependem da velocidade média, a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência 1,75 da velocidade média, em regime turbulento liso.

Equação de Manning-Strickler:

$$Q = K_s A R_h^{2/3} J^{1/2} \quad (7.15)$$

em que:

R_h – raio hidráulico que é a relação entre a área molhada e o perímetro molhado, no caso do tubo circular é determinado por $R_h = D/4$;

K_s – coeficiente de Manning-Strickler, depende da natureza do tubo e do diâmetro;

Esta equação foi deduzida para escoamentos em superfície livre, devendo por isso ser evitada a sua aplicação a escoamentos em pressão. Tendo em conta que os parâmetros K_s e R_h não dependem da velocidade média, conclui-se que a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência dois da velocidade média, ou seja esta equação pode dar bons resultados em escoamentos turbulentos rugosos.

No Quadro 7.2 são apresentados os valores do parâmetro K_s para diferentes materiais do tubo.

Quadro 7.2 Coeficiente de Manning-Strickler para diferentes materiais
(Novais Barbosa, 1985)

Natureza do tubo	Coeficiente de Manning-Strickler ($m^{1/3}s^{-1}$)
Betão	70
Ferro fundido novo	80
Betão muito liso	85
Fibrocimento	95 a 105
Cobre, PVC	115 a 125

Para estudar o campo de aplicação desta equação foi substituído, na Equação de Manning-Strickler, o parâmetro J pela relação com o factor de resistência, equação 7.1, obtendo-se:

$$f = \frac{2^{11/3} g}{K_s^2 D^{1/3}} \quad (7.16)$$

A equação 7.16 mostra que o factor de resistência não depende da velocidade. Para um dado tubo de um dado material o factor de resistência é constante.

Na figura 7.4 é sobreposta a Equação de Manning-Strickler para tubos de ferro fundido novo e três diâmetros diferentes, em que o Coeficiente de Manning-Strickler foi considerado $K_s = 80 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$ e a rugosidade absoluta equivalente $k = 0,25 \text{ mm}$, com Ábaco de Moody. Nesta representação apenas foi considerada a gama de nº de Reynolds correspondente a velocidades possíveis nos circuitos hidráulicos.

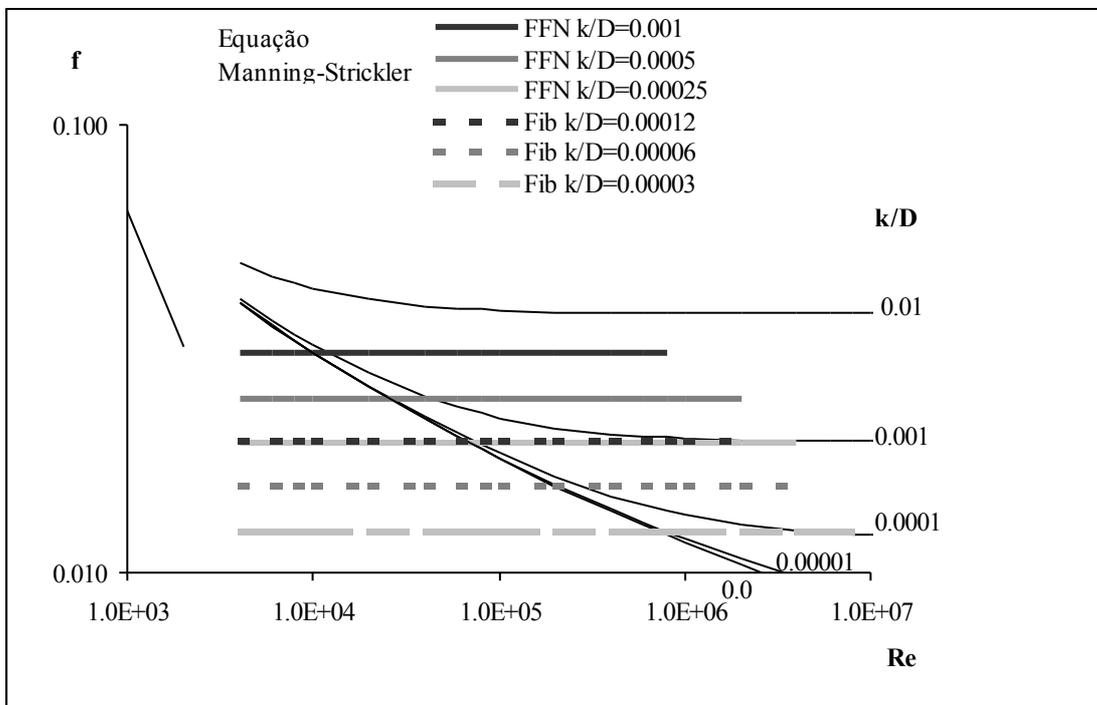


Figura 7.4 Sobreposição da Equação de Manning-Strickler ao Ábaco de Moody

Conclui-se que para tubos de ferro fundido novo a Equação de Manning-Strickler calcula valores do factor de resistência superiores ao valor obtido pela aplicação do Ábaco de Moody.

Equações de Scimemi (aplicadas a tubos de secção circular e escoamento de água):

$$Q = K_1 D^\alpha J^\beta \quad [Q] = \text{m}^3 \text{ s}^{-1} \quad [D] = \text{m} \quad [J] = \text{m.c.a. m}^{-1} \quad (7.17)$$

Estas são equações empíricas específicas do material e aplicadas ao escoamento da água. No Quadro 7.3 são apresentados os valores destes parâmetros para diferentes tubos.

Quadro 7.3 Valores dos parâmetros das Equações de Scimemi para diferentes tubos (Quintela, 1981)

Natureza do tubo	K_1	α	β
Fibrocimento	48,3	2,68	0,56
Ferro fundido novo	35	2,625	0,535
Betão liso novo	38,77	2,67	0,53
Aço sem soldadura	36,4	2,59	0,55

A perda de carga unitária é directamente proporcional à potência $1/\beta$ da velocidade média, que toma o valor de aproximadamente 1,8.

Estas equações permitem obter bons resultados quando aplicadas em regimes turbulentos de transição, como se pode verificar na figura 7.5 (para $\nu=1,01E-06$, correspondente à temperatura de 20°C) em que é apresentada a sobreposição das equações de Scimemi, para tubos de ferro fundido novo ($k=0,25\text{mm}$) com três diâmetros diferentes, equação 7.18, e para tubos de fibrocimento (0,03mm) em que a relação entre o factor de resistência e o nº de Reynolds não depende do diâmetro, equação 7.19, e o Ábaco de Moody.

Para representação sobre o Ábaco de Moody foi deduzida a equação de Scimemi específica do ferro fundido novo com introdução dos parâmetros adimensionais factor de resistência e nº de Reynolds:

$$f = \left(\frac{\pi}{140} \right)^{\frac{1}{0,535}} \frac{2g}{\nu^{\frac{0,07}{0,535}} \text{Re}^{\frac{0,07}{0,535}} D^{\frac{0,02}{0,535}}} \quad (7.18)$$

e a equação de Scimemi específica do fibrocimento é:

$$f = \left(\frac{\pi}{193,2} \right)^{\frac{1}{0,56}} \frac{2g}{\nu^{\frac{0,12}{0,56}} \text{Re}^{\frac{0,12}{0,56}}} \quad (7.19)$$

A análise das equações 7.18 e 7.19 permite concluir que o valor do factor de resistência varia ligeiramente com o diâmetro do tubo para o material ferro fundido novo e que não varia no caso de tubos de fibrocimento.

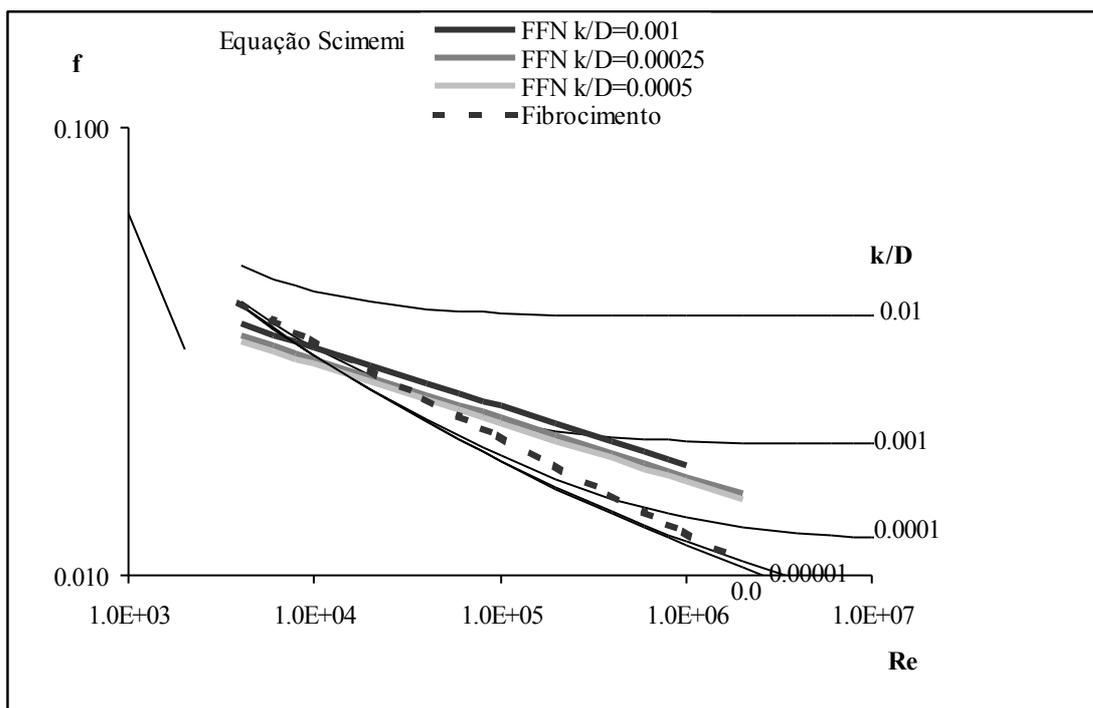


Figura 7.5 Sobreposição das Equações de Scimemi com o Ábaco de Moody

A relação entre a perda de carga unitária e a velocidade média do escoamento pode ser um indicador do regime de escoamento a que se aplicam as equações empíricas disponíveis na bibliografia:

- Em regime laminar a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência 1 da velocidade média;
- Em regime turbulento liso a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência 1,75 da velocidade média;
- Em regime turbulento rugoso a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência 2 da velocidade média;
- Em regime turbulento de transição a perda de carga unitária é directamente proporcional à potência entre 1,75 e 2 da velocidade média.

7.4 Notas conclusivas

Com base no estudo desenvolvido neste capítulo podemos concluir que:

- o escoamento da água dá-se em regime turbulento com excepção de algumas situações de início de escoamento, paragem ou escoamento variável;

Capítulo 8

PERDAS DE CARGA LOCALIZADAS EM ESCOAMENTOS PERMANENTES SOB PRESSÃO

8.1 Introdução

Neste capítulo pretende-se estudar o método de cálculo das perdas de carga que ocorrem nas singularidades, de um sistema de condutas em pressão, que se encontram entre trechos de condutas de eixo rectilíneo como sejam alargamentos, estreitamentos, juntas, curvas, bifurcações, válvulas, entre outros.

Quando acontece uma variação da direcção de escoamento, ou seja a curvatura das linhas de corrente estabelece-se um regime permanente variado. A variação não está localizada no acessório instalado, mas a um dado comprimento antes e depois da singularidade. Isto pode ser verificado, em laboratório, através da determinação da linha piezométrica com a instalação de uma banda de piezómetros.

Num sistema de duas condutas de eixo rectilíneo, unidas por um estreitamento brusco, figura 8.1, a instalação de uma série de tubos piezométricos permite concluir que a linha piezométrica definida pela superfície livre dentro dos tubos piezométricos toma uma forma linear ao longo do tubo enquanto não se manifesta a influência da singularidade, nos primeiros cinco tubos da esquerda. O tubo 1 é de diâmetro constante, caudal constante e natureza do material constante, logo a perda de carga unitária também é constante. Como a velocidade é constante a linha de energia é paralela à linha piezométrica e são rectas. O mesmo raciocínio se aplica ao tubo 2 relativamente aos três tubos da direita que definem a linha piezométrica do tubo 2 correspondente a perda de carga unitária superior. Quando o escoamento se aproxima da singularidade começa a sentir a influência da variação da direcção das linhas de corrente e a linha piezométrica desce, sofrendo uma variação superior à correspondente às perdas de carga contínuas.

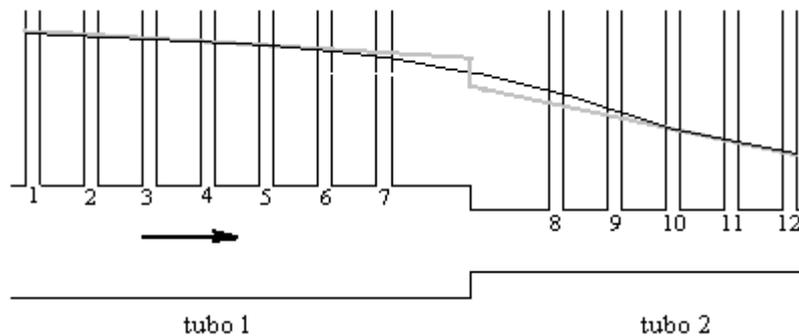


Figura 8.1 Representação da linha piezométrica num sistemas de duas condutas em série com diferentes diâmetros

No entanto, é mais fácil do ponto de vista de cálculo concentrar a perda de carga localizada na secção da singularidade, dessa maneira a perda de carga localizada é calculada pela seguinte equação, a partir dos valores experimentais:

$$\Delta H_{loc} = \Delta \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} \quad (8.1)$$

A perda de cota piezométrica está representada pela descida brusca da Se a velocidade de escoamento for da ordem de 1ms^{-1} a altura cinética toma valores muito pequenos e a linha de energia p unirmos dois tubos rectilíneos As perdas de carga que ocorrem numa singularidade não se manifestam, na realidade, numa secção. O escoamento quando se aproxima da singularidade começa a perder energia, depois de atravessar a secção da singularidade ainda está a perder energia.

De um modo geral a linha de energia em troços prismáticos representa-se através de uma recta sendo essa recta tanto mais inclinada quanto maior a perda de carga unitária, figura 8.4.



Figura 8.4 Linha de energia em troços de conduta prismáticos

Se os dois troços representados na figura 8.4 forem ligados através de uma singularidade – alargamento brusco, a linha de energia será representada como se mostra na figura 8.5. Na figura estão representadas a linha de energia real e a linha de energia fictícia em que se considera que a perda de carga localizada acontece apenas na secção da singularidade.

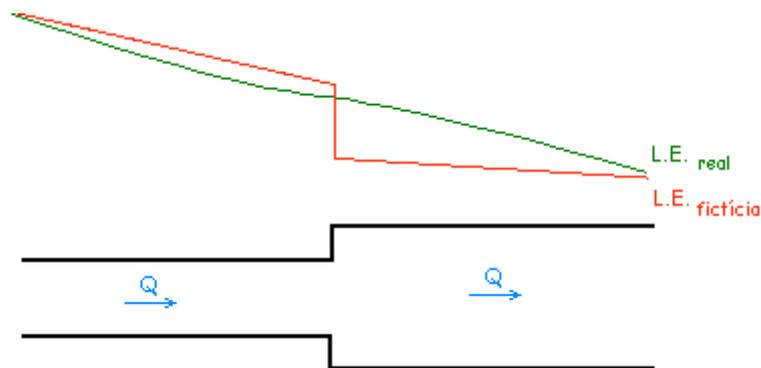


Figura 8.5 Linha de energia em troços de conduta prismáticos com singularidade

A perda de carga localizada é expressa através da equação geral:

$$\Delta H = K \frac{U^2}{2g} \quad (8.1)$$

em que:

ΔH é a perda de carga localizada

K é o coeficiente de perda de carga localizada (depende da geometria da singularidade, das condições de escoamento e do n.º Reynolds)

$U^2/2g$ é a altura cinética de referência (normalmente o maior valor envolvido)

Os valores do coeficiente de perda de carga localizada são determinados experimentalmente, tendo alguns autores tabelado esses coeficientes para diferentes singularidades. À exceção das válvulas as perdas de carga localizadas tomam valores da ordem da altura cinética.

Em casos excepcionais, K é calculado analiticamente:

- Alargamento brusco (Equação de Borda), figura 8.6.

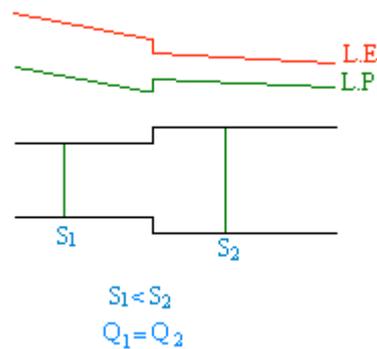


Figura 8.6 Alargamento brusco

Neste caso o investigador deduziu analiticamente a equação que permite determinar a perda de carga localizada, obtendo:

$$\Delta H = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} \quad (8.2)$$

Esta equação também pode ser apresentada na forma da equação 8.1:

$$\Delta H = K \frac{U_1^2}{2g} \quad (8.3)$$

com:

$$K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \quad (8.4)$$

A comparação da perda de carga de Borda com a Diferença entre as alturas cinéticas nas condutas a montante e jusante da singularidade permite concluir que a linha piezométrica sobe na passagem da singularidade. À perda de carga localizada na singularidade está associada a transferência de energia cinética em energia potencial de pressão.

Para o caso particular de passagem de uma conduta para um reservatório o alargamento brusco com secção de jusante muito superior à secção de montante, corresponde a um valor do coeficiente de perda de carga localizada igual a um, figura 8.7.

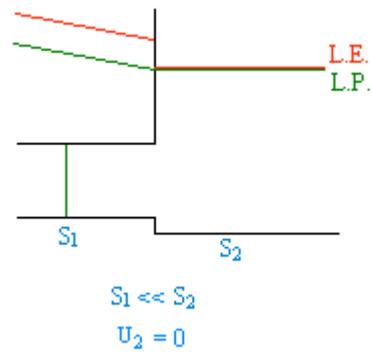


Figura 8.7 Alargamento brusco – passagem de uma conduta para reservatório

- a avaliação rigorosa da perda de carga unitária em regime permanente e uniforme deve basear-se na aplicação da Equação de Colebrook-White;
- uma avaliação aproximada da perda de carga pode ser feita através da aplicação de equações empíricas escolhidas de acordo com as suas condições de aplicação;
- em qualquer caso de dúvida na escolha da equação empírica a aplicar deve ser aplicada a Equação de Colebrook-White;
- O Ábaco de Moody pode permitir averiguar uma primeira aproximação do valor do factor de resistência num dado escoamento;
- O coeficiente de rugosidade equivalente, ou uma equação empírica para aplicação no cálculo de um dado tubo deve ser fornecido pelo fabricante do mesmo.

Capítulo 9

ESCOAMENTOS PERMANENTES SOB PRESSÃO

9.1 Introdução

Neste capítulo serão estudados os passos que permitem dimensionar ou verificar o funcionamento de um circuito hidráulico.

9.2 Tipo de escoamentos permanentes

Num circuito hidráulico com escoamento em pressão, o regime permanente pode ser uniforme ou variado. O regime permanente uniforme acontece em condutas de secção constante (tubo prismático) em que o caudal se mantém ao longo da conduta, figura 9.1. No caso de variação gradual da secção ou variação gradual do caudal escoado, o regime de escoamento é dito permanente gradualmente variado, figura 9.2. No caso de variação brusca da secção ou variação brusca de caudal numa dada secção da conduta, o regime de escoamento é designado por regime permanente rapidamente variado.

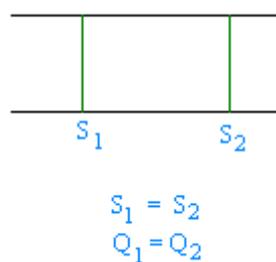


Figura 9.1 Escoamento permanente e uniforme

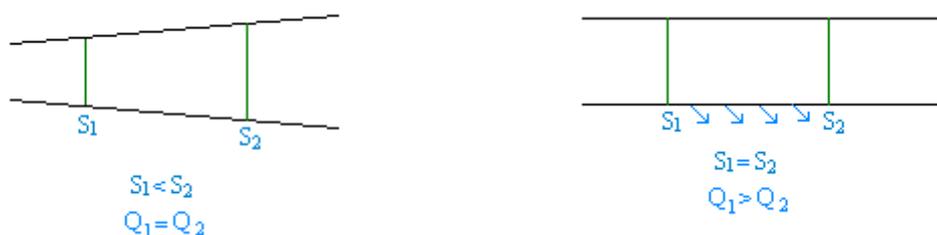


Figura 9.2 Escoamento permanente gradualmente variado

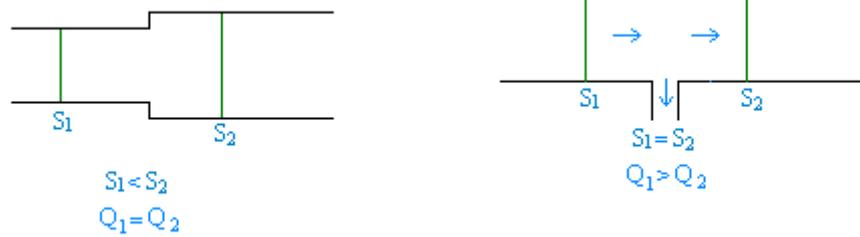


Figura 9.3 Escoamento permanente rapidamente variado

9.3 Perdas de carga contínuas

No capítulo anterior foram apresentadas as leis de resistência que permitem determinar a perda de carga unitária em regime permanente e uniforme, ou seja no caso de escoamento em condutas prismáticas.

Se o regime de escoamento for gradualmente variado, as leis de resistência apresentadas no capítulo anterior são aplicadas para determinar a perda de carga unitária, considerando-se que em cada secção a perda de carga unitária é igual à perda de carga unitária que se verificaria se fosse prismática e com a secção igual à da secção em estudo. Este é o chamado regime uniforme tangente.

No caso de regime permanente rapidamente variado não é possível calcular uma perda de carga contínua, mas sim uma perda de carga localizada na secção em que ocorre a variação brusca. No próximo sub-capítulo são calculadas as perdas de carga localizadas para diferentes singularidades.

9.4 Perdas de carga localizadas

As perdas de carga que ocorrem numa singularidade não se manifesta, na realidade, numa secção. O escoamento quando se aproxima da singularidade sente e começa a perder energia, depois de atravessar a secção da singularidade ainda está a perder energia.

De um modo geral a linha de energia em troços prismáticos representa-se através de uma recta sendo essa recta tanto mais inclinada quanto maior a perda de carga unitária, figura 9.4.



Figura 9.4 Linha de energia em troços de conduta prismáticos

Se os dois troços representados na figura 9.4 forem ligados através de uma singularidade – alargamento brusco, a linha de energia será representada do seguinte modo, figura 9.5. A verde está representada a linha de energia real. A encarnado a linha de energia fictícia em que se considera que a perda de carga localizada acontece apenas na secção da singularidade.

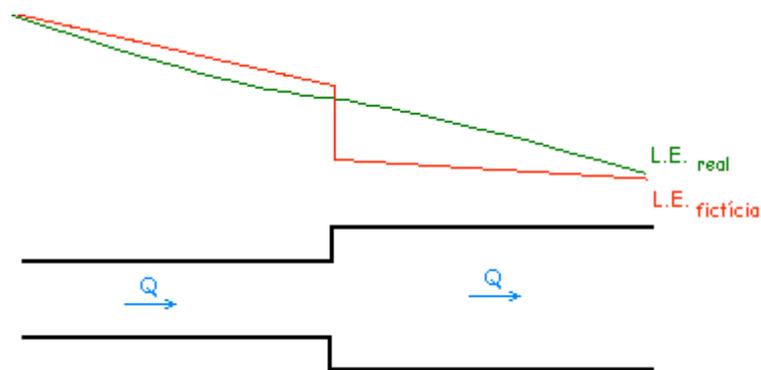


Figura 9.5 Linha de energia em troços de conduta prismáticos com singularidade

A perda de carga localizada é determinada através da equação geral:

$$\Delta H = K \frac{U^2}{2g}$$

em que: ΔH é a perda de carga localizada

K é o coeficiente de perda de carga localizada (depende da geometria da singularidade, das condições de escoamento e do nº Reynolds)

$U^2/2g$ é a altura cinética de referência (normalmente o maior valor envolvido)

Os valores do coeficiente de perda de carga localizada são determinados experimentalmente, tendo alguns autores tabelado esses coeficientes para diferentes singularidades.

Em casos excepcionais, K é calculado analiticamente:

- Alargamento brusco (Eq. de Borda), figura 9.6.

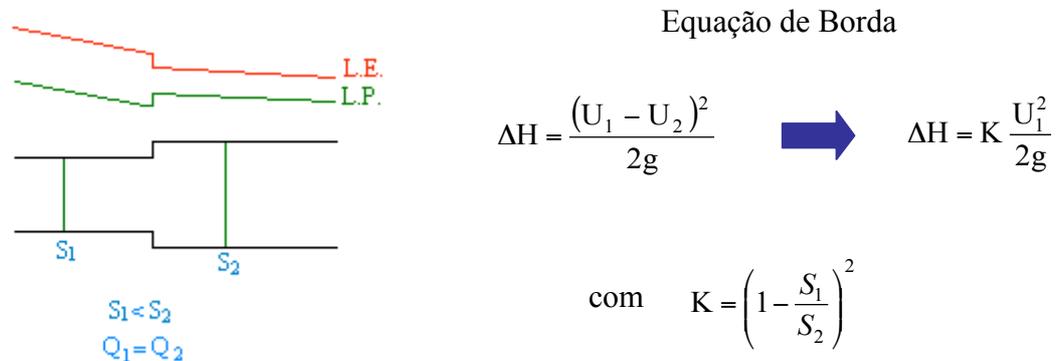


Figura 9.6 Alargamento brusco

Para o caso particular de passagem de uma conduta para um reservatório temos um alargamento brusco com secção de jusante muito superior à secção de montante, vem, figura 9.7:

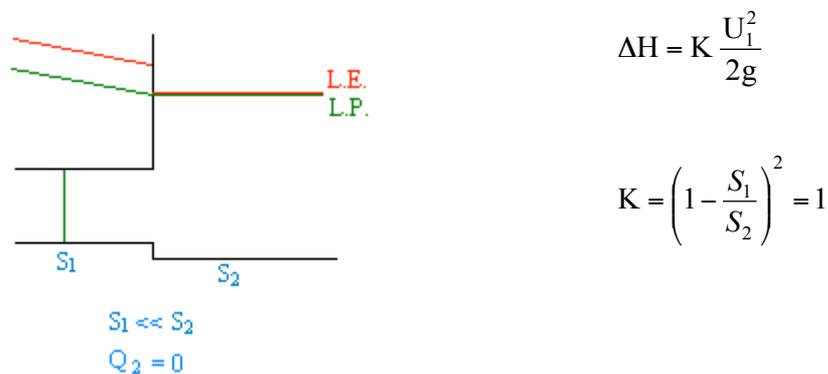


Figura 9.7 Alargamento brusco – passagem de uma conduta para reservatório

9.5 Cálculo de instalações

Na resolução de um circuito hidráulico em pressão podem existir dois objectivos no cálculo:

- *dimensionar:*

dados: carga disponível
 natureza do tubo
 caudal

determina: diâmetro

- *verificar:*

caso 1

dados: carga disponível
natureza do tubo
diâmetro

determina: caudal

caso 2

dados: caudal
natureza do tubo
diâmetro

determina: carga disponível

caso 3

dados: carga disponível
caudal
diâmetro

determina: natureza do tubo

Para um circuito hidráulico constituído por dois reservatórios e uma conduta com várias singularidades, figura 9.8, a aplicação do Teorema de Bernoulli, da lei de resistência conveniente e da equação da perda de carga localizada permite resolver os problemas de dimensionamento e verificação.

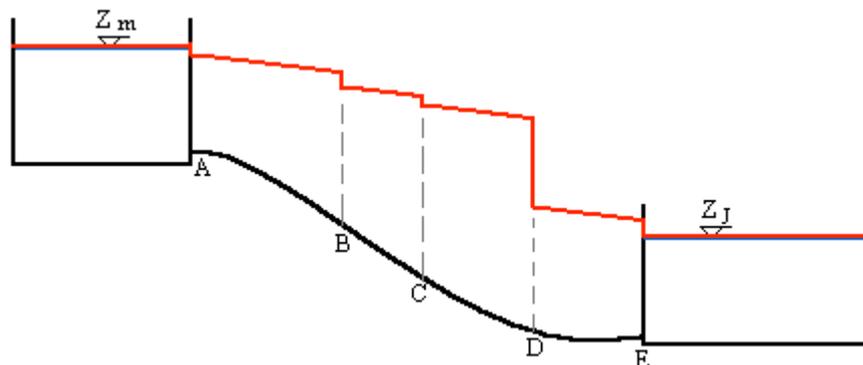
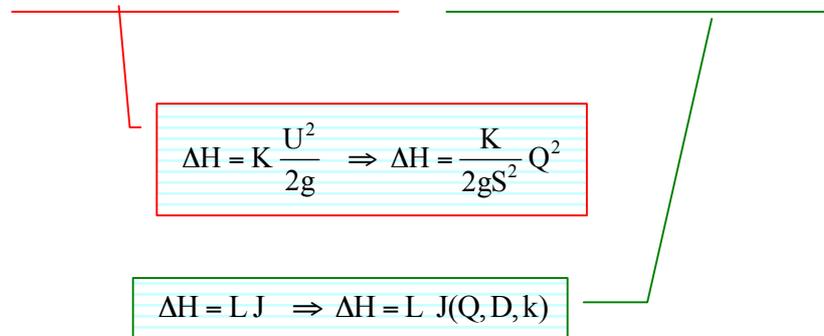


Figura 9.8 Circuito hidráulico

$$Z_m - Z_J = \Delta H_A + \Delta H_{A-B} + \Delta H_B + \Delta H_{B-C} + \Delta H_C + \Delta H_{C-D} + \Delta H_D + \Delta H_{D-E} + \Delta H_E$$

$$Z_m - Z_J = \Delta H_A + \Delta H_B + \Delta H_C + \Delta H_D + \Delta H_E + \Delta H_{A-B} + \Delta H_{B-C} + \Delta H_{C-D} + \Delta H_{D-E}$$



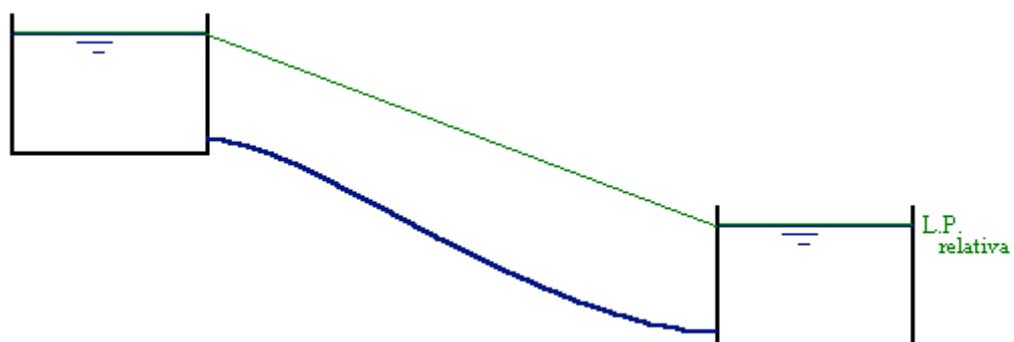
9.6 Influência do traçado da conduta

Em igualdade de todos os parâmetros: caudal, energia disponível, diâmetro e comprimento da conduta, natureza da conduta

Nota: desprezamos as perdas de carga localizadas e a altura cinética

Podemos ter diferentes situações relativamente ao traçado da conduta:

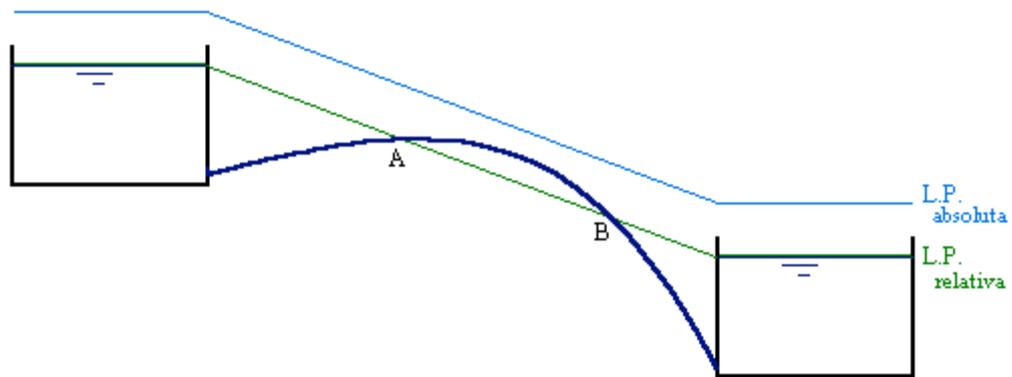
Traçado 1 – a conduta está sempre abaixo da L.P., figura 9.9



$$p > 0 \quad J = \frac{Z_m - Z_J}{L} \quad Q = Q(D, k, J)$$

Figura 9.9 Traçado 1 da conduta

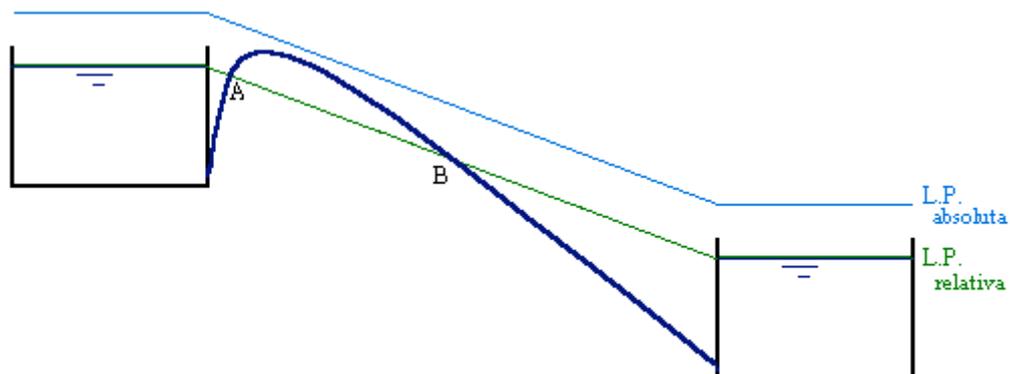
Traçado 2 – a conduta tem um trecho com cota topográfica superior à L.P._{relativa}, figura 9.10.



$$p_{A-B} < 0 \quad J = \frac{Z_m - Z_J}{L} \quad Q = Q(D, k, J)$$

Figura 9.10 Traçado 2 da conduta

Traçado 3 – a conduta tem um trecho com cota topográfica superior à L.P._{relativa} e superior à cota topográfica da superfície livre no reservatório de montante, figura 9.11.



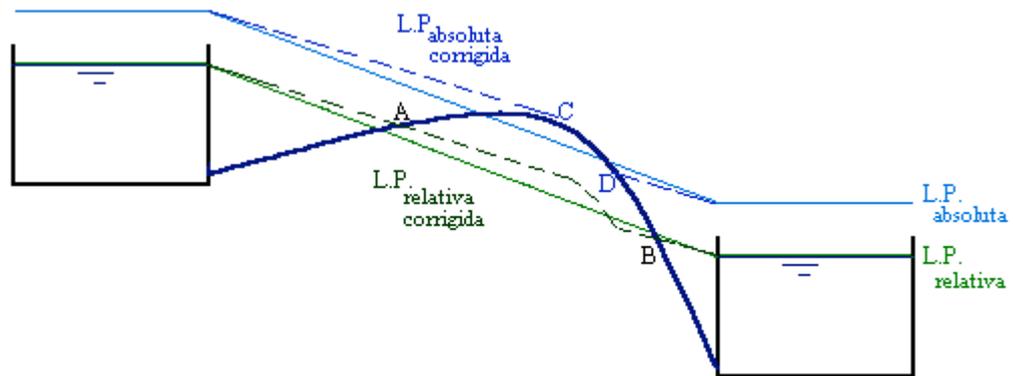
$$p_{A-B} < 0 \quad J = \frac{Z_m - Z_J}{L} \quad Q = Q(D, k, J)$$

Figura 9.11 Traçado 3 da conduta

Funcionamento em sifão

Para se estabelecer o escoamento é necessário criar uma depressão na conduta (escorvamento ou ferragem do sifão)

Traçado 4 – a conduta tem um troço com cota topográfica superior à L.P. absoluta, figura 9.12.



$$p_{A-B} < 0 \quad J' < J \quad J' = \frac{Z_m - \left(Z_C + \frac{t_v}{\gamma} - \frac{p_{atm}}{\gamma} \right)}{L_{R_m-C}} \quad Q' < Q \quad Q' = Q'(D, k, J')$$

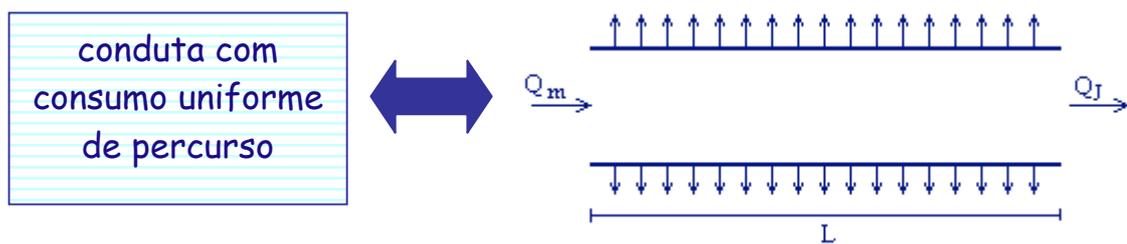
Figura 9.12 Traçado 4 da conduta

Escoamento em superfície livre entre C e D.

Funcionamento com carácter pulsatório.

9.7 Condutas com consumo uniforme de percurso

Este escoamento classifica-se como gradualmente variado.

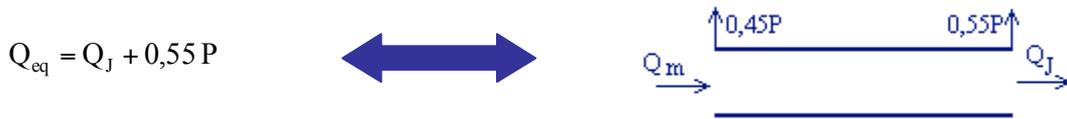


caudal de percurso: $P = Q_m - Q_J$

consumo unitário: $p = \frac{P}{L} = \frac{Q_m - Q_J}{L}$

perda de carga contínua: $\Delta H = J_{eq} L$

perda de carga unitária equivalente, J_{eq} , é calculada através da aplicação das leis de resistência estudadas para o regime permanente uniforme com um caudal constante ao longo da conduta e igual ao valor do caudal equivalente, Q_{eq} .



9.8 Redes de condutas

As redes de condutas são constituídas por troços de conduta que se unem formando uma rede ramificada, figura 9.13, ou rede malhada, figura 9.14.

Nas redes ramificadas o dimensionamento baseia-se na aplicação de:

- equação da continuidade;
- equação de Bernoulli;
- leis de resistência;

+ conceito velocidade máxima;
 pressão máxima;
 pressão mínima.

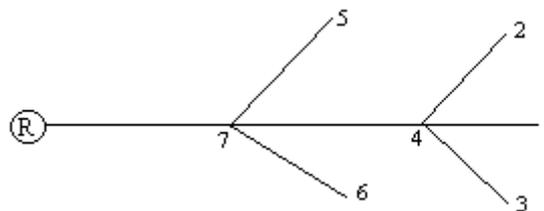


Figura 9.13 Rede de condutas ramificada

Nas condutas malhadas o dimensionamento baseia-se na aplicação de:

- equação da continuidade em cada nó;
- equação de Bernoulli nas malhas;
- leis de resistência.

+ conceito velocidade máxima;
pressão máxima;
pressão mínima.

método numérico: Hardy-Cross

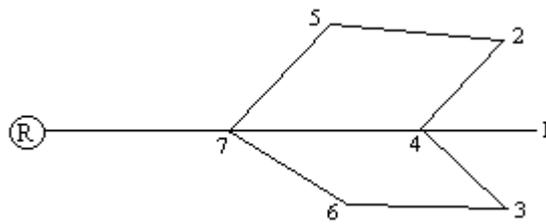


Figura 9.14 Rede de condutas malhadas

Bibliografia

Lencastre, A. *Hidráulica Geral* Ed. Hidroprojecto, Lisboa, 1983

Manzanares, A. Abecasis *Hidráulica Geral Vol I e Vol II* Técnica, A.E.I.S.T., Lisboa, 1979

Novais-Barbosa, J. *Mecânica dos Fluidos e Hidráulica Geral Vol I e II* Porto Editora, Porto, 1985

Quintela, A. de Carvalho *Hidráulica* Ed. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1981