

UTILIZAÇÃO E CONCILIAÇÃO DE DIVERSAS REPRESENTAÇÕES DAS FUNÇÕES EM SALA DE AULA¹

Ana Patrícia Gafanhoto
Escola Secundária Mouzinho da Silveira, Portalegre
patriciagafanhoto@hotmail.com

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
apc@uevora.pt

Resumo

Este artigo foca-se na utilização de representações múltiplas das funções por alunos de 9.º ano, na resolução de tarefas com recurso ao Geogebra. Decorre de uma investigação realizada no âmbito de um mestrado (Gafanhoto, 2011), onde se desenvolveu um estudo de caso descritivo e analítico de uma turma que foi alvo de uma intervenção didáctica com tarefas diversificadas sobre funções, em ambiente de sala de aula com recurso ao Geogebra, no qual a investigadora assumiu o papel de observadora participante em colaboração com a professora titular da turma. As conclusões deste estudo apontam para o uso das diversas formas de representação por parte dos alunos. Apesar de se registar uma tendência para a representação gráfica, as representações numérica, tabular e algébrica também foram recorrente e eficazmente usadas pela maioria dos grupos da turma e, alguns grupos estabeleceram ainda relações entre diferentes tipos de representações. O estudo permitiu identificar situações em que os alunos recorrem tipicamente a uma dada representação. A representação numérica e a algébrica foram usadas essencialmente para determinar a imagem dado o objecto, a primeira foi usada também para determinar os objectos dadas as imagens. A representação gráfica foi utilizada no estudo comparativo de funções e no estudo da monotonia ou, de modo mais geral, sempre que os alunos pretendiam uma imagem global sobre o comportamento da função. Os alunos recorreram à representação tabular essencialmente nas questões em que era pedido para analisarem a relação entre as variáveis o que teve mais-valias na identificação e escrita de funções implícitas nas tabelas.

Palavras-Chave: Representações múltiplas de funções; representação numérica, tabular, gráfica, e algébrica; Geogebra.

Introdução

Os alunos ao longo do seu percurso escolar devem ter oportunidade de contactarem com diversas formas de representação das ideias matemáticas, adquirindo assim a capacidade

¹ Trabalho realizado no âmbito do Projecto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*, com apoio da FCT, contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008

de passar informação de uma forma de representação para outra, estabelecendo relações entre diferentes ideias matemáticas sobre um tema (NCTM, 2007), em particular nas Funções, onde existem múltiplas representações acessíveis aos alunos.

Este artigo foca-se na utilização de representações múltiplas das funções por alunos de 9º ano e visa compreender como estes as usam e, em particular, como as conciliam, tirando partido das suas potencialidades específicas, ao responder a tarefas diversificadas envolvendo funções, em ambiente de sala de aula com recurso ao Geogebra. Decorre de uma investigação mais ampla realizada no âmbito da tese de mestrado da primeira autora (Gafanhoto, 2011).

Representações múltiplas das Funções

As representações surgem como um objectivo geral do ensino e aprendizagem da Matemática tendo um grande destaque nas orientações curriculares, nacionais e internacionais. O NCTM (2007) apresenta como objectivos para os alunos, desde o pré-escolar até ao 12º ano, no âmbito das representações, (NCTM, 2007, p. 160):

- Criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;
- Seleccionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
- Usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos.

Neste documento é referida a necessidade de estimular os alunos para a representação das suas ideias, primeiramente recorrendo a formas não convencionais para que depois aprendam as formas de representação convencionais, as quais facilitam quer a aprendizagem da Matemática, quer a comunicação das suas ideias matemáticas.

No Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007, p.5) as representações matemáticas são também bastante valorizadas. Destaca-se a referência feita ao trabalho com múltiplas representações, sempre que possível, proporcionando a aquisição da capacidade de passar de uma forma de representação para outra, que é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada.

Friedland e Tabach (2001) apresentam quatro modos de representação essenciais ao ensino da Matemática, nomeadamente da Álgebra – representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. O uso de diferentes representações torna o processo de aprendizagem da Álgebra, em particular das

Funções, significativo e efectivo. Estes autores apresentam as vantagens e desvantagens associadas a cada uma das formas de representação.

A *representação verbal* está normalmente associada à apresentação do problema e à interpretação final dos resultados obtidos, dá ênfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o quotidiano. Esta forma de representação pode tornar-se um obstáculo para a comunicação matemática, uma vez que não é universal e a sua utilização pode ser feita de forma ambígua ou conduzir a associações incorrectas.

A *representação numérica* é uma representação natural no início do estudo da álgebra e, normalmente, precede qualquer outro tipo de representação. Este tipo de representação é importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares, no entanto, apresenta como limitação, em alguns casos, o facto de não ser generalizável.

A *representação gráfica* proporciona uma imagem clara de uma função de variável real, sendo intuitiva e apelativa para os alunos que gostam de uma análise visual. No entanto, é muito influenciada por factores externos (por exemplo, escalas) e apresenta frequentemente só uma parte do domínio do problema.

A *representação algébrica* é concisa, geral e efectiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, por vezes é o único método de justificar ou efectuar generalizações. Contudo, esta forma de representação, que usa exclusivamente símbolos algébricos pode ocultar o significado matemático ou a natureza do objecto e causar dificuldades de interpretação de resultados.

Brown e Mehilos (2010) chamam a atenção para outra representação, a tabular. Sublinham que as tabelas estabelecem a ponte entre a aritmética, onde os problemas envolvem números específicos, e a álgebra, onde as quantidades variam e são abstractas. As tabelas dão aos alunos uma experiência tangível em que as variáveis são números que se alteram e em que o valor das expressões varia como o resultado. No estudo desenvolvido por Brown e Mehilos (2010), alguns alunos desenvolveram rapidamente a facilidade em manipular os símbolos e perceberam o seu potencial. Outros continuaram a mostrar preferência pelo uso de tabelas, sendo esta forma de representação um suporte para usar enquanto procuram ficar confortáveis com as expressões algébricas.

A importância de trabalhar com várias representações resulta das vantagens e desvantagens apresentadas anteriormente para cada uma das formas de representação, sendo as desvantagens de umas colmatadas pela combinação com outras e, também da necessidade de corresponder a estilos individuais de raciocínio dos alunos. São considerados como factores que influenciam a utilização de determinado tipo de representação: a natureza da tarefa, a preferência pessoal, o estilo de pensamento do indivíduo que resolve o problema ou dificuldades em determinados tipos de representação (Kaput, 1992).

Metodologia

Este estudo desenvolve-se a partir de uma turma experiência de ensino realizada numa turma de 9º ano de escolaridade, em 2009/2010. A escolha deste ano de escolaridade prende-se com o facto de os alunos já conhecerem um leque de funções suficientemente amplo e o dominarem com relativo à-vontade. A experiência de ensino foi desenvolvida em contexto natural, conduzida pela professora titular da turma, que funcionou em cumplicidade com a investigadora. A intervenção didáctica consistiu na realização de seis tarefas diversificadas, envolvendo modelação matemática e estudo de famílias de funções (afim e quadráticas). As tarefas de modelação tinham como base situações não matemáticas; escolha de tarifários de telemóvel; análise do crescimento do cabelo; relação entre o comprimento e a largura das folhas de papel A4; o espaço visualizado através de canudos de diferentes comprimentos.

Cada uma das tarefas estava estruturada em duas partes: na primeira parte os alunos criavam, por pedido expresso, as diferentes formas de representação (tabular, gráfica e algébrica); na segunda parte, respondiam a questões de interpretação, usando as representações que considerassem mais adequadas para produzir as respectivas respostas, uma vez que já todas estavam imediatamente acessíveis. Durante a intervenção didáctica os alunos trabalharam em pequenos grupos. Estes alunos já tinham tido contacto com o *Geogebra* na resolução de outras tarefas matemáticas.

Na recolha de dados, a investigadora, assumiu uma postura de observadora participante. Foram recolhidos, para além dos descritivos das aulas, os documentos produzidos pelos alunos - as resoluções escritas das tarefas e os ficheiros de *Geogebra* respectivos.

A análise dos dados foi faseada. Primeiro organizaram-se as respostas dos grupos de alunos, realizando uma primeira análise do seu conteúdo. Na fase, averiguou-se quais as

formas de representação a que os grupos recorreram em cada resposta, optando-se por considerar as representações numérica, tabular, gráfica e algébrica das funções. Por último, efectuou-se uma análise cruzada de forma a encontrar semelhanças e diferenças entre as representações usadas pelos grupos, formulando-se, por fim, conclusões.

Apresentação de resultados

De uma forma global, os grupos aderiram bem à realização destas tarefas, não só ao nível do empenho e responsabilidade mas também da qualidade das respostas matemáticas que produziram. Seguidamente apresentam-se algumas das respostas dos grupos que procuram ilustrar um modo típico de usar cada uma das representações. Além disso, ilustra-se também os casos em que a conciliação de mais do que uma representação foi adoptada pelos alunos.

Representação numérica

A representação numérica foi usada por todos os grupos na tarefa 1, que se iniciava com o preenchimento de tabelas referentes a 3 tarifários telefónicos. Como instrumento auxiliar, os grupos, utilizaram a folha de cálculo do *Geogebra*, tal como era sugerido. Recorreram não só às potencialidades de cálculo oferecidas pelo *Geogebra*, como também utilizaram para esses cálculos as referências das células, como se pode ver na figura 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	tim							
3	duração	preço	duração	preço	duração	preço		
4	1	15.423	1	0.609	1	0.2418		
5	2	15.576	2	1.22	2	0.4836		
6	3	15.729	3	1.83	3	0.7	Número F4: 0.00403 * 60 A4	
7	4	15.882	4	2.44	4	0.9672		
8	5	16.035	5	3.05	5	1.209	Número D6: 0.81 A6	
9	120	33.63	120	73.2	120	29.016		
10							Número B8: 15.27 + 0.153 A8	

Figura 1- Procedimento utilizado pelo grupo 2, para preenchimento das tabelas.

Este procedimento foi uma mais-valia para a generalização e posterior determinação da expressão algébrica das funções procuradas, pois esta estratégia revela, mesmo que de forma implícita, as relações entre as variáveis e os parâmetros.

Outra situação interessante passou-se na tarefa 6, em que era pedido aos alunos que determinassem qual seria o comprimento do seu cabelo, tendo em conta a sua idade. Os diferentes grupos apresentaram respostas como a que se segue:

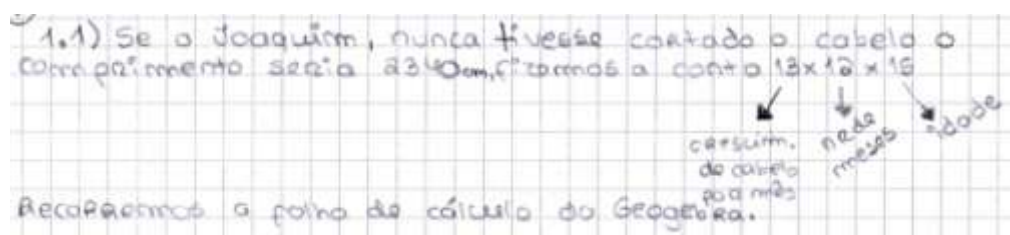


Figura 2- Resposta do grupo 1.

Para responderem à questão, todos os grupos usaram a representação numérica e usaram como ferramenta a folha de cálculo do *Geogebra*, que utilizaram como uma calculadora.

O mesmo se verificou para a questão em que era dado o comprimento do cabelo e se pedia que determinassem a idade mínima:

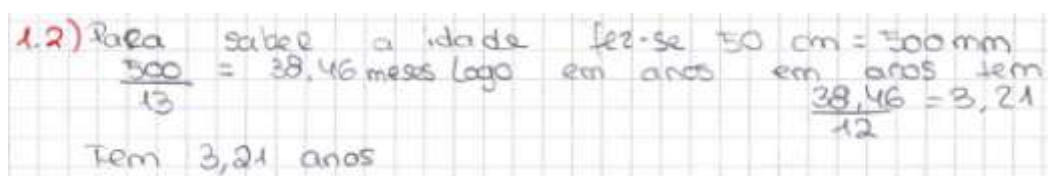


Figura 3- Resposta do grupo 4.

Os elementos do grupo 5 apresentaram opiniões e estratégias de resolução divergentes, tendo um elemento do grupo usado a regra de três simples com os dados da alínea anterior. Esta situação levou a que discutissem as resoluções apresentadas, tendo chegado a um consenso quanto à relação que se estabelece entre as variáveis, daí escreverem a expressão algébrica da função que modela o problema.

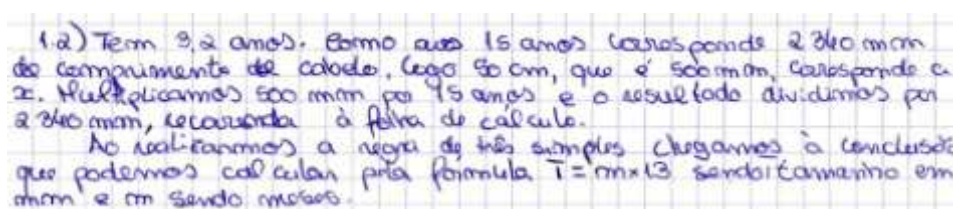


Figura 4- Resposta do grupo 5.

Representação tabular

A representação tabular foi outra forma de representação a que os alunos recorreram. Por exemplo, na tarefa 4, em que era solicitado que explicassem o que acontece ao tamanho da fita visualizada à medida que o tamanho do tubo se aproxima de 1 m.

Alguns grupos, baseando-se na análise dos dados incluídos na folha de cálculo (Fig. 6), concluíram:

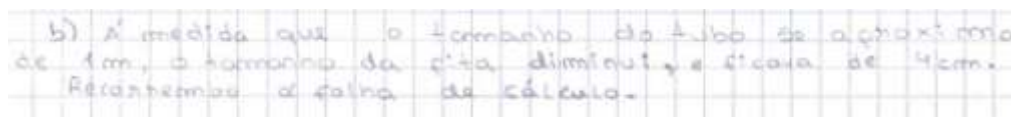


Figura 5- Resposta do grupo 1.

	A	B	C	D
1	Tam. Tubo	Comp. Fita		
2	80	5	400	
3	70	6	420	
4	50	8	400	
5	44	9	396	
6	40	10	400	
7	30	12	360	
8	23	17	391	
9	20	19	380	
10	10	26	260	
11	60	6.67		
12	90	4.44		
13	100			

Figura 6- Tabela que os alunos analisaram para responder à questão referida.

A representação tabular foi tendencialmente usada noutras situações em que os alunos já dispunham de uma tabela e em que a complementaram para obter valores procurados em falta.

Representação gráfica

A representação gráfica foi usada pelos alunos em diversas as situações, das quais se apresentam exemplos mais significativos. Na tarefa 1 pretendia-se que os alunos indicassem qual o tarifário mais vantajoso sabendo que Pedro só quer gastar 25 euros. Os alunos apresentaram as seguintes propostas para obter a resposta, todas diferentes mas com forte recurso ao gráfico:

- Procurámos os 25 euros no eixo dos yy. (Jorge, grupo 2)
- Traçava uma recta horizontal. (Marta grupo 5)
- Nós mexemos a zona gráfica até encontrarmos os 25 euros e depois a recta que ficava mais abaixo era o melhor tarifário, que neste caso era o da Optimus. (Mafalda grupo 3)

Ainda na tarefa 1 questionava-se se haveria algum momento em que o tarifário da Vodafone seria mais vantajoso. Os grupos procederam à análise comparativa dos

gráficos que representam cada um dos três tarifários, tendo os grupos 3 e 5 completado essa análise com a determinação do ponto de intersecção entre os gráficos.

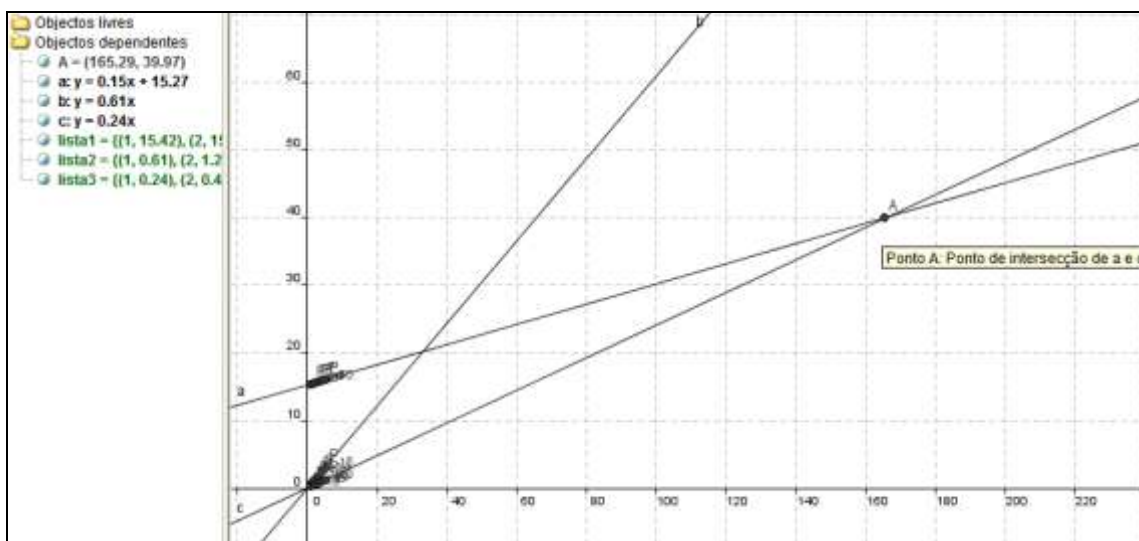


Figura 7- Resolução dos grupos 3 e 5.

Na tarefa 2 destinada ao estudo das funções afim do tipo $ax + b$, foi pedido aos alunos a identificação da influência do parâmetro b , tendo estes respondido:

Vii) Recordando a representação gráfica movendo o sector b , podemos verificar que quando b aumenta a função sobe no eixo de y , e quando diminui desce nesse mesmo eixo.

Figura 8 - Resposta do grupo 5.

Outro uso interessante e eficaz da representação gráfica surgiu na tarefa 4, em que era pedido aos alunos que determinassem o comprimento de fita visualizado se utilizassem um tubo de 60 cm e outro de 90 cm. A maioria dos grupos recorreu à representação gráfica, mas com diferentes procedimentos:

a) Recordamos a zona gráfica marcando um ponto no comprimento da fita e de b , e se fosse no tubo de 90 era de y .

Figura 9- Resposta do grupo 2.

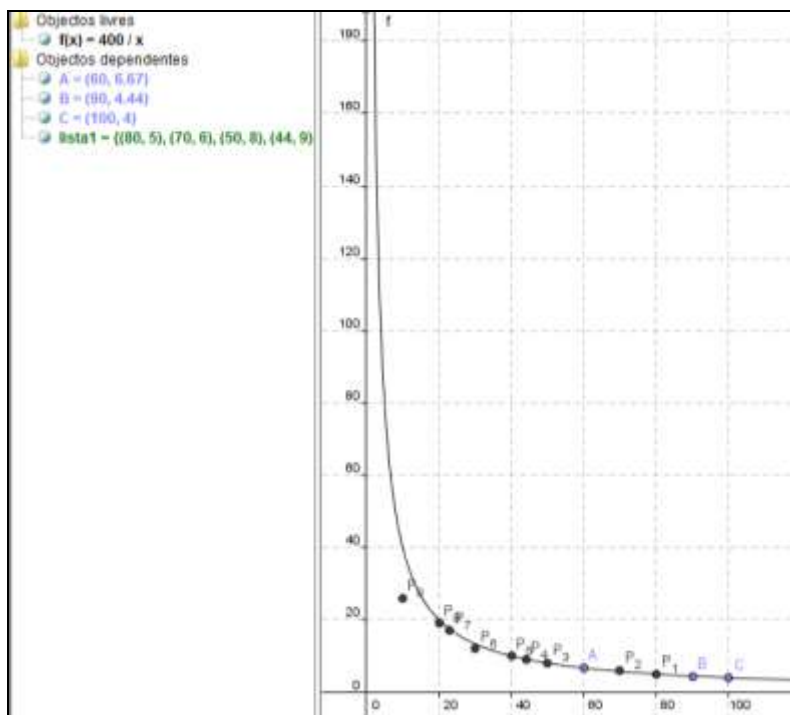


Figura 10- Procedimento utilizado pelo grupo 2.

O grupo 3 optou por traçar rectas verticais de equação igual ao objecto para o qual se pretendia determinar a respectiva imagem bem como o ponto de intersecção entre essas rectas e o gráfico da função, como se pode ver em seguida:

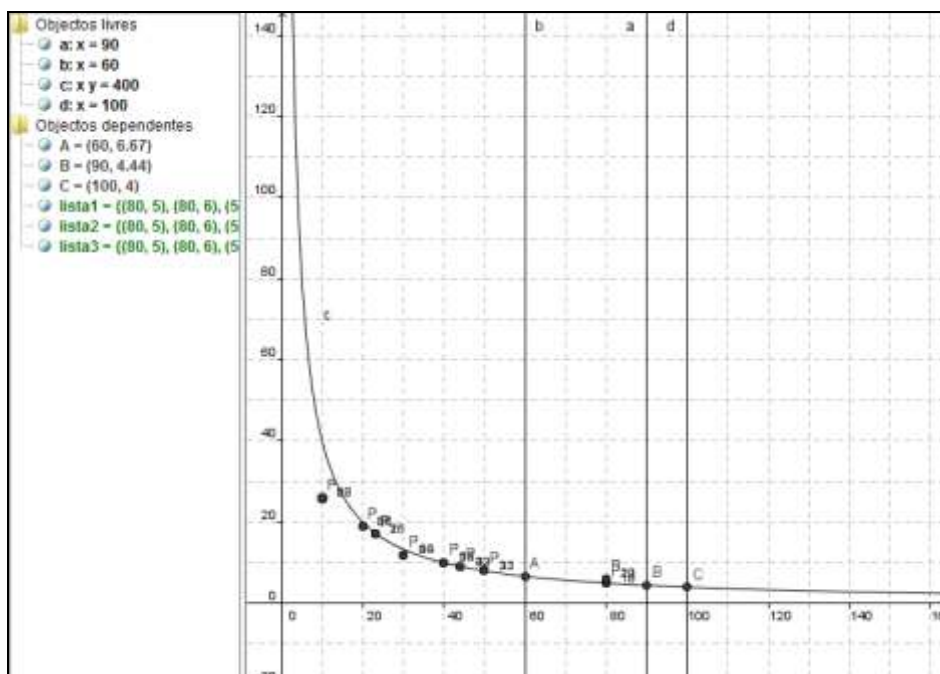


Figura 11- Procedimento utilizado pelo grupo 3.

Representação algébrica

Para além das formas de representação já referidas anteriormente, os alunos fizeram uso também da representação algébrica. Por exemplo, na tarefa 1, era pedido para determinar qual o melhor tarifário sabendo que o Pedro falou 120 minutos. Todos os grupos recorreram à folha de cálculo usando para isso a expressão algébrica que modela a situação, sendo considerado pelos alunos a estratégia mais adequada:

Foi mais fácil recorrer à folha de cálculo, porque já tínhamos a fórmula foi só substituir o valor. (Bárbara, grupo 3)

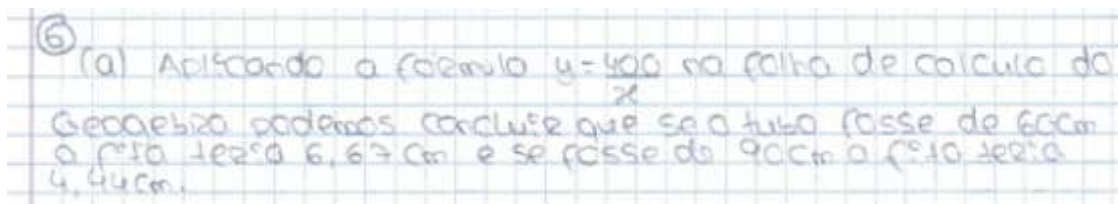
Esta afirmação foi apoiada por todos os alunos. Note-se que apesar de se visualizar uma tabela, os alunos estão nesta situação a fazer uso da expressão algébrica.

	A	B	C	D	E
1					
2	tim 1				
3	Duração	preço			
4	0	15.27			
5	1	15.423			
6	2	15.576			
7	3	15.729			
8	4	15.882			
9	5	16.035			
10	120	33.63			
11	tim 2				
12	duração	preço	Número B10: 15.27 + 0.153 A10		
13	0	0			
14	1	0.609			
15	2	1.218			
16	3	1.827			
17	4	2.436			
18	5	3.045			
19	120	73.08			
20	tim 3				
21	Duração	preço	Número B19: 0.609 A19		
22	0	0			
23	1	0.2418			
24	2	0.4836			
25	3	0.7254			
26	4	0.9672			
27	5	1.209			
28	120	29.016			
29			Número B28: 0.2418 A28		
30					

Figura 12- Procedimento utilizados por todos os grupos para determinar quanto pagaria o Pedro tendo este registado 120 minutos em chamadas.

O procedimento descrito anteriormente foi adoptado também noutras situações, nomeadamente na tarefa 4, em que era pedido que determinassem o comprimento de fita

visualizado, se se utilizasse um tubo de 60 cm e outro de 90 cm. Apesar de já terem sido apresentadas duas respostas baseadas em gráficos para esta questão, outros três grupos apresentaram a seguinte resposta:



(a) Aplicando a fórmula $y=400$ na folha de cálculo do Geogebra podemos concluir que se o tubo fosse de 60cm a fita teria 6,67cm e se fosse de 90cm a fita teria 4,44cm.

Figura 13- Resposta do grupo 5.

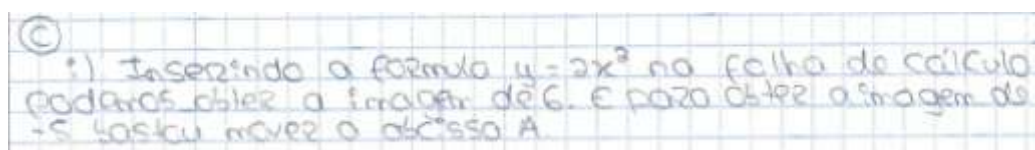
	A	B	C	D
1	Tam. Tubo	Comp. Fita		
2	80	5	400	
3	70	6	420	
4	50	8	400	
5	44	9	396	
6	40	10	400	
7	30	12	360	
8	23	17	391	
9	20	19	380	
10	10	26	260	
11	60	6.67		
12	90	4.44		
13	100			

Número B11: 400 / A11

Figura 14- Procedimento utilizado pelos grupos 1, 4 e 5.

Conciliação das representações algébrica e gráfica

Os alunos em determinadas questões sentiram necessidade de usar mais do que uma forma de representação para poderem apresentar uma resposta. Por exemplo, na tarefa 5, tal como noutras questões das tarefas apresentadas, pedia-se que os alunos determinassem as imagens dos objectos indicados. Nestas situações os grupos recorriam à representação gráfica ou algébrica, dependendo dos valores dos objectos/imagens e da exactidão dos resultados obtidos por cada uma das formas de representação. A resposta que segue é exemplo desta situação:



(c) Inserir a fórmula $y=2x^2$ na folha de cálculo e poderos obter a imagem de 6. E para obter a imagem de -5 basta mover o eixo A.

Figura 15- Resposta do grupo 5.

Houve outras situações em que os alunos, por sua iniciativa, usaram a representação algébrica para obterem a gráfica, para obterem a resposta à pergunta que lhes foi colocada. Considera-se como exemplo a resposta dada na tarefa 6, em que se pedia para compararem duas situações de crescimento de cabelo, modeladas por funções afim e, em particular, que determinassem se em algum momento as duas funções representavam o mesmo comprimento de cabelo:

1.6 - colocando a equação $y = 100 + 13x$ que é o comprimento do cabelo da Jana que cresce 13mm por cada mês e a equação $y = 15x$ as rectas vão se cruzar quando elas tiverem 750mm de comprimento de cabelo e isso acontecerá ao fim de 50 meses.

Figura 16- Resposta do grupo 3.

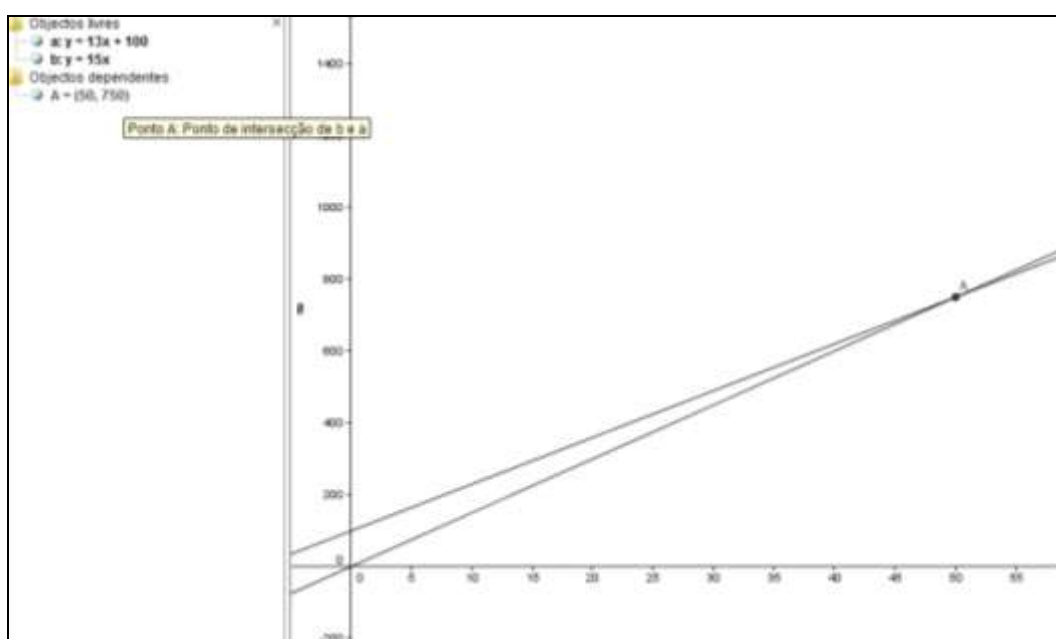


Figura 17- Procedimento utilizado pelos grupo 1, 3 e 4.

Conciliação das representações gráfica e tabular

Em algumas situações, os alunos recorreram às duas representações gráfica e tabular, como no exemplo que se descreve em seguida. Os grupos parecem ter beneficiado da análise simultânea da representação gráfica e tabular dos dados recolhidos para descrever o comportamento das variáveis e identificar o tipo de relação em estudo, como se ilustra com a resposta do grupo 5:

4. 4ª resposta. Porque é uma situação de proporcionalidade inversa, quando uma das variáveis aumenta a outra diminui. Recorre-se à folha gráfica e à tabela.

Figura 18- Resposta do grupo 5.

Identificou-se ainda outras situações em que os grupos utilizaram a representação gráfica para construir a tabular, nomeadamente nas situações em que pretendiam obter o valor da imagem dado o objecto ou vice-versa, usufruindo das potencialidades do *Geogebra*, como se pode ver em seguida, em que os alunos leram no gráfico as coordenadas dos pontos a incluir na tabela:

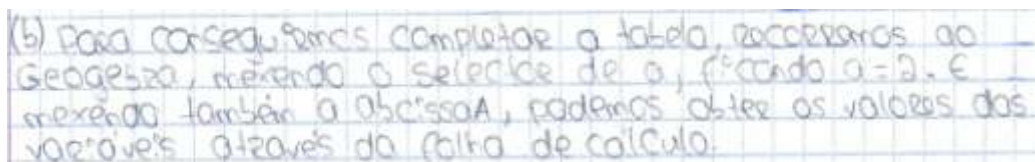


Figura 19- Resposta do grupo 5 (tarefa 5).

Conclusões

De seguida sistematizam-se as principais ideias sobre as formas de representação das funções que os alunos adoptaram na resolução das tarefas propostas com recurso ao Geogebra, procurando desta forma caracterizar-se as situações em que optam por uma ou outra representação e aquelas em que utilizam de forma interligada mais do que uma representação.

Para além das preferências que os grupos parecem revelar, a escolha das representações parece ser orientada pelo tipo de conhecimento matemático que as questões evocam. Assim, o uso da *representação numérica* surge essencialmente nas questões em que é pedido para se identificar a imagem dado o objecto e vice-versa, nomeadamente quando é solicitado aos alunos que completem tabelas ou ainda, tal como é referido por Friedland e Tabach (2001), quando a questão é considerada pelos alunos como requerendo uma resposta isolada, e não como um questão do problema inicial. Esta última situação é evidenciada nas resoluções de todos grupos, na tarefa 6.

A *representação tabular* foi essencialmente utilizada pelos alunos para analisar a relação entre as variáveis e para estudarem as funções em determinados valores do seu domínio, estando estes representados nas tabelas. No entanto, a sua construção também se revelou inspiradora na definição da expressão algébrica de uma função, nomeadamente por forçar o estabelecimento de relações entre as variáveis tabuladas, resultado que veio de encontro com os resultados do trabalho desenvolvido por Brown e Mehilos (2010).

Os alunos recorreram à *representação gráfica* para dar resposta às questões em que era solicitado o estudo comparativo de duas ou mais funções ou o estudo da monotonia da função. Esta forma de representação dá uma imagem clara global das funções, sendo esta uma mais-valia quando se pede aos alunos que estabeleçam comparações entre funções ou que identifiquem momentos em as funções assumem o mesmo valor ou que analisem a sua monotonia. A representação gráfica foi também a forma de representação utilizada por todos os grupos de alunos quando era solicitado que efectuassem o estudo da influência dos parâmetros das funções (funções afim e quadráticas), situação em que se procurava obter uma visualização global e rápida e não pormenorizada.

A *representação algébrica* surgiu muito associada às questões em que é solicitado aos alunos para determinarem a imagem dado o objecto, mas quando estes já dispõem da expressão algébrica (criada pelos próprios alunos ou não). É interessante sublinhar que a obtenção da expressão algébrica foi, em muitos casos, auxiliada pela construção da tabela.

Os alunos conciliaram sobretudo a representação gráfica com a algébrica e a representação tabular com a gráfica. A representação gráfica é conciliada com a algébrica nas seguintes situações: quando o domínio representado na forma gráfica não abrange os valores em estudo ou então quando, por limitações do *software*, o aluno não consegue seleccionar no gráfico o valor em pedido. Os alunos também recorreram frequentemente à representação algébrica para construir a representação gráfica das funções, revelando uma conciliação adequada e eficiente destas diversas representações.

A representação gráfica foi muitas vezes a base da construção da representação tabular das funções, uma vez que a partir da definição de um ponto sobre o gráfico da função e a deslocação do mesmo, o *Geogebra* constrói automaticamente a tabela. O grupo 5, destacou-se por recorrer em grande parte a este procedimento para depois usar a representação tabular para dar resposta às questões. Portanto, pode-se afirmar que este grupo conciliou de forma expedita estes dois tipos de representação, a gráfica e tabular. Em geral, os grupos foram adoptando representações adequadas para resolver as questões e demonstraram conseguir colmatar as desvantagens de cada uma das representações com as vantagens das outras.

Por fim queremos sublinhar a importância do ambiente de trabalho em que este estudo se desenvolveu. Note-se que o que distinguiu esta proposta de trabalho foi, por um lado,

a possibilidade de os alunos poderem responder, sem qualquer constrangimento, usando a representação que considerassem para si mais apropriada e, por outro lado, o uso do Geogebra que disponibiliza de forma eficiente as representações múltiplas das funções e permite transitar de umas para as outras com um click. Acautelar condições para que os alunos possam usar de forma eficaz representações múltiplas constituiu um desafio que não pode ser descurado, dada a sua importância no ensino e aprendizagem da matemática, em geral, referenciada nos documentos de orientação curricular nacionais e internacionais e como resultados de investigações, para o qual os actuais recursos informáticos disponíveis muito podem contribuir.

Referências

- Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to Bridge Arithmetic and Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(9), 532-538.
- Friendland, A., & Tabach, M., (2001). Promoting multiple representation in álgebra. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.
- Gafanhoto, A. (2011). *Integração das diferentes representações das Funções no contexto de utilização de um ambiente de geometria dinâmica (Geogebra)*. Tese de mestrado, Universidade de Évora. Lisboa: APM.
- Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. In Douglas Grouws (Ed). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.