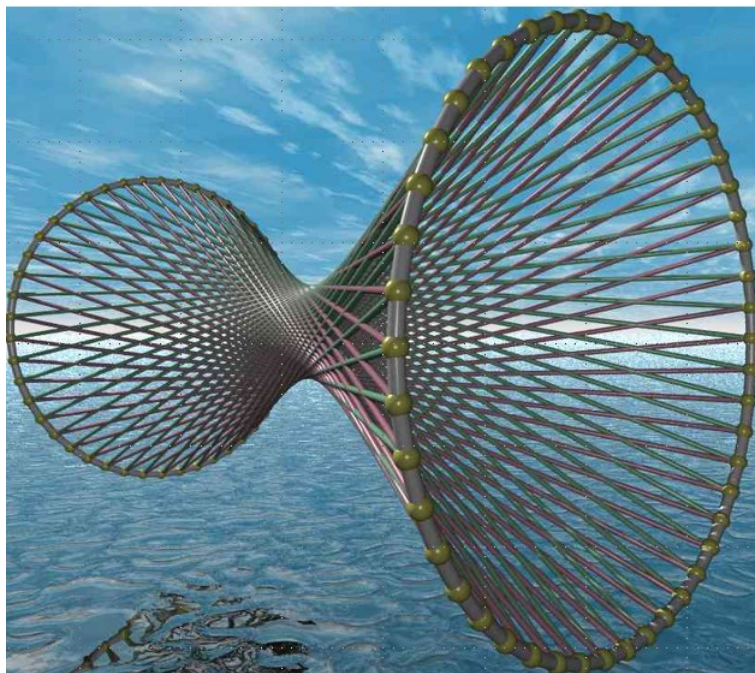


Dos Sistemas Dinâmicos à Ciência das Redes

A presença incontornável da hiperbolicidade



Maria Clara Canotilho Grácio

Sumário apresentado à Universidade de Évora no âmbito das
provas para a obtenção do título de Agregado em Matemática.

(Nos termos dispostos no Decreto-Lei nº 293/2007, de 19 de Junho, art. 5º, alínea c)

Conteúdo

1	Geometria hiperbólica, sistemas dinâmicos e redes complexas	2
1.1	Introdução	2
1.2	O conceito de hiperbólico ao longo dos tempos e em diversas áreas de conhecimento.	3
1.3	Geometria hiperbólica	3
1.3.1	Plano hiperbólico.	4
1.3.2	Modelos do disco e do semiplano de Poincaré.	4
1.3.3	Geodésicas e isometrias.	4
1.4	Redes complexas	5
1.5	Geometria hiperbólica e sistemas dinâmicos	5
1.5.1	Fluxo geodésico de curvatura negativa	5
1.5.2	Regiões fundamentais e grupos fuchsianos.	6
1.5.3	Espaço de Teichmuller e coordenadas de Fenchel-Nielsen	7
1.6	Geometria Hiperbólica e Redes Complexas	7
1.6.1	Duma rede aleatória hiperbólica a uma rede real complexa	8
1.6.2	Duma rede real complexa a uma rede hiperbólica.	8
1.7	Um exemplo na literatura	9
1.7.1	Reconhecimento de autoria dos textos da obra Historia Augusta.	9
1.7.2	Reconhecimento de autoria dos textos da obra Historia Augusta com utilização da geometria hiperbólica.	10
2	Desafios	11
3	Referências	12

Entrevista com Jürgen Jost

“In mathematics, what is your creative process? How do your ideas take shape?”

I don't know whether there is any general answer to that, because it depends on the particular problem. But of course, since I've explored many different fields, I know some techniques or methods from different areas that I can then bring to bear on a problem. For example, at the beginning of my career I was combining geometry and analysis, and in particular nonlinear partial differential equations and the calculus of variations...

“...So, combining different fields can make you productive because then you have access to different concepts and methods. I did this also for example when, later on, I moved to discrete mathematics. Exploring analogies between Riemannian geometry and graph theory helped me a lot to understand and address questions in discrete mathematics from a different perspective than the people who are usually working in these fields.”

Raffaella Mulas (Jürgen Jost's former PhD students) interviewed him

in November 2023, during his visit at VU Amsterdam,

<https://vu.nl/en/news/2023/interview-with-jurgen-jost>.

1 Geometria hiperbólica, sistemas dinâmicos e redes complexas

1.1 Introdução

Esta lição-palestra-seminário tem como objetivo principal sensibilizar os nossos alunos para o facto de as áreas na Matemática nunca serem estanques e que o trabalho de colaboração, cruzando diversos saberes, enriquece a Ciência. Também ilustra o meu percurso de ensino-investigação no passado, no presente e os desafios para o futuro. O grande matemático português Sebastião e Silva afirmava que: *"Seria possível dizer o que é a Matemática se esta fosse uma ciência morta. Mas a Matemática é, pelo contrário, uma ciência viva, que se encontra hoje, mais do que nunca, em rápido desenvolvimento, proliferando cada vez mais em novos ramos, que mudam não só a sua fisionomia, como até a sua essência."* (<https://clube.spm.pt/news/4260>)

Neste caso o belo campo da geometria hiperbólica, nomeadamente na sua íntima ligação com os sistemas dinâmicos, emerge como uma ferramenta poderosíssima, na linha de investigação da teoria de redes complexas.

Como o nome indica o conceito de hiperbólico(a) é o fio condutor nas questões abordadas nesta lição que é dirigida aos alunos desta unidade curricular. Contudo, a linguagem e formalismo (rigorosos, mas não herméticos) permitem que seja apresentado a alunos de outros cursos.

1.2 O conceito de hiperbólico ao longo dos tempos e em diversas áreas de conhecimento.

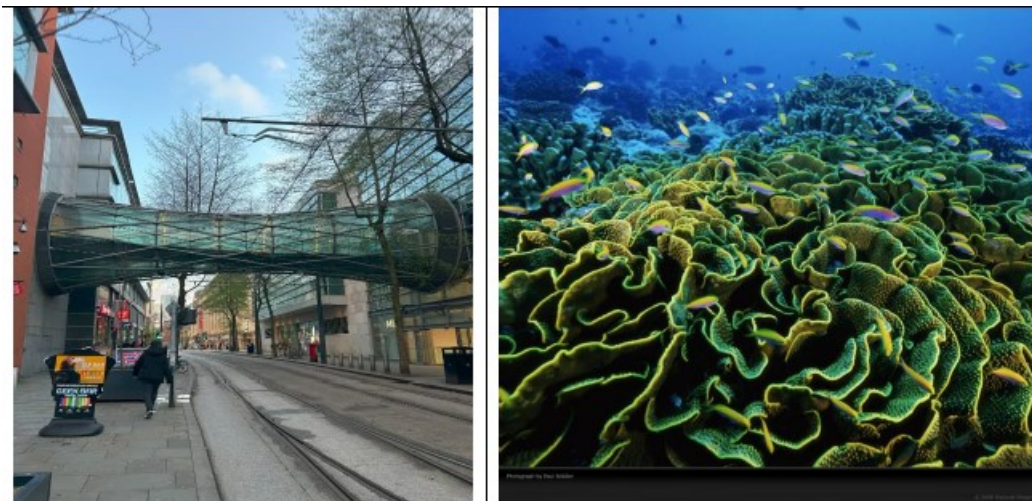


Figura 1: No lado esquerdo a passarela Corporation Street Bridge em Manchester e no lado direito corais marinhos (National Geographic).

Em primeiro lugar apresentamos algumas notas introdutórias tanto do ponto de vista histórico/societário quanto matemático, enquadrando o adjetivo “belo” utilizado para descrever o conceito de hiperbólico e, com ênfase especial na geometria hiperbólica. Exemplificaremos este conceito em áreas da cultura como a música, a arquitetura ou a literatura [Hua 23], [Gaw 13], [Net 17] e [Emm 05].

1.3 Geometria hiperbólica

Poucos tópicos têm tanto peso histórico e conceptual como a geometria hiperbólica. Estão associados a ela os nomes de grandes matemáticos, como Gauss, Lobachevsky, Bolyai, Klein ou Poincaré. O seu desenvolvimento incrivelmente fértil está relacionado com o (re)nascimento de conceitos como os espaços projetivos, grupos fuchsianos, espaço-tempo de Minkowski, entre outras noções decisivas para a matemática moderna e física, incluindo a estrutura matemática da teoria da relatividade de Einstein!

Nas subseções seguintes introduzimos ferramentas necessárias para uma compreensão da geometria hiperbólica [Gra 02].

1.3.1 Plano hiperbólico.

Para compreender a identidade do principal protagonista desta subsecção, o espaço hiperbólico, como modelo do objeto geométrico de curvatura negativa constante introduzimos a noção de curvatura.

Ao contrário da geometria esférica, é impossível incorporar isometricamente uma superfície infinita simplesmente conexa de curvatura negativa constante no espaço euclidiano de dimensão 3. Assim, para visualizar a geometria hiperbólica, temos de recorrer a modelos. Apresentaremos, numa forma breve, vários modelos do plano hiperbólico [Can 97],[Gra 02].

1.3.2 Modelos do disco e do semiplano de Poincaré.

Como a ligação da geometria hiperbólica aos sistemas dinâmicos e às redes complexas se desenvolve no disco e no semiplano de Poincaré, detalharemos um pouco mais estes modelos. Na verdade Poincaré redescobriu os modelos de semiplano e de disco em 1882 e revelou a ligação entre a geometria hiperbólica bidimensional e a geometria complexa, especialmente por meio dos grupos fuchsianos e funções automórficas ([Poincaré 1882] , [Poincaré 1902]).

1.3.3 Geodésicas e isometrias.

Uma vez que as isometrias, ou as bijeções que preservam a distância destes dois modelos, são exatamente as transformações lineares fracionárias ou aplicações de Möbius, como mostrou Poincaré, iremos rever estas aplicações e também o conjunto de todos os automorfismos conformes de D ou H . Introduziremos, nestes modelos as métricas e as geodésicas [Grácio 2002].

No lado esquerdo a passarela Corporation Street Bridge em Manchester e no lado direito corais marinhos (National Geographic).

1.4 Redes complexas

Finalmente, nesta introdução, serão referidas algumas noções sobre sistemas complexos e redes, criando o pano de fundo do que se pretende explorar. Daremos algum destaque a três tipos de redes emblemáticas, redes aleatórias, redes Mundo Pequeno (small-world) e redes Sem-Escala (Scale-Free). Nos últimos anos, essas categorias estimularam um grande interesse no estudo dos princípios de organização subjacentes de várias redes complexas o que levou a avanços dramáticos neste campo emergente e ativo de investigação ([Erd-Ren 59],[Erd-Ren 60]), [Dor 03], [Wat-Str 98], [Bar-Alb, 99], [New 03], [Str 06], [Gra 14], [Gra 18], [Coo 05] [Por 16].

1.5 Geometria hiperbólica e sistemas dinâmicos

Na segunda parte, apresentaremos a íntima relação entre a geometria hiperbólica e os sistemas dinâmicos.

1.5.1 Fluxo geodésico de curvatura negativa

Esta apresentação é feita através dum exemplo incontornável - o fluxo geodésico numa superfície compacta de curvatura negativa. Este exemplo é tão importante que seria possível escrever a história da teoria dos sistemas dinâmicos no sec. XX com base na evolução dos vários trabalhos que estudaram o comportamento do fluxo geodésico numa superfície compacta de curvatura negativa [Hadamard 1898], [Ser 81], [Bow 79], [Gra 02] , [Gra 02] e [Gra 10].

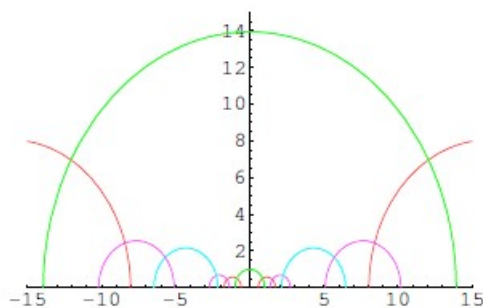


Figura 2: Domínio fundamental (em [Gra 06]).

1.5.2 Regiões fundamentais e grupos fuchsianos.

Introduziremos definições e resultados que estabelecem uma ponte entre a dinâmica, a topologia e a álgebra. Consideraremos o importante caso duma superfície M de género 2 por ser mais adequado na construção dum domínio fundamental (Figura 2), ([Jos 97] e [Gra 10]).

Existem muitos espaços interessantes associados a uma superfície M . Para estudar sistemas dinâmicos em M , considera-se o grupo de automorfismos do próprio M ; para estudar a geometria, os geómetras interessam-se pelo espaço de Teichmüller.

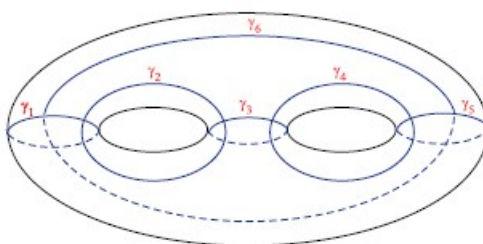


Figura 3: Superfície compacta de Riemann de género 2 e colar geodésico (em [Gra 10]).

1.5.3 Espaço de Teichmuller e coordenadas de Fenchel-Nielsen

No nosso caso, estamos interessados em ambas as abordagens e nas relações entre elas. Assim, introduziremos brevemente o espaço de Teichmüller e um sistema de coordenadas globais do espaço de Teichmuller: as coordenadas de Fenchel-Nielsen [Mas 99], [Im-Ta 92] e [Gra 10].

1.6 Geometria Hiperbólica e Redes Complexas

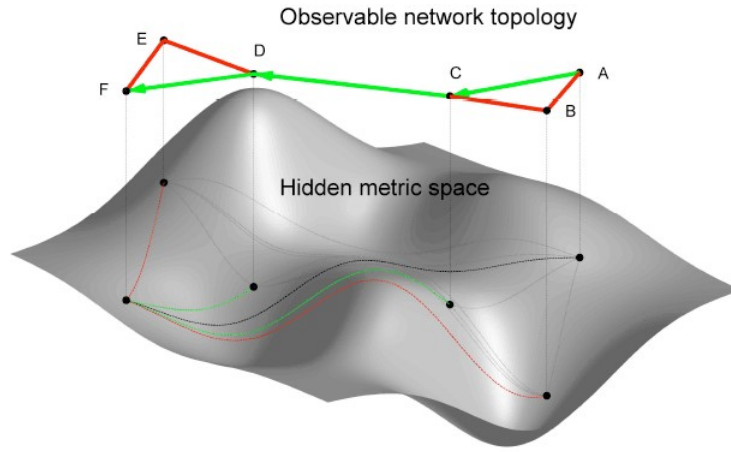


Figura 4: Hidden metric space (https://www.caida.org/catalog/papers/2008_self_similarity/analysis/)

“...Este artigo ([Krioukov, 2010]) realmente deu o tom para a nova década. Costuma-se dizer que a vantagem de publicar cedo um tema novo é que não é preciso ter muito cuidado, mas este é um artigo com ideias inovadoras e rigor. Outra marca registrada desta grandeza é que demorei muito para apreciar sua grandeza. Por um tempo, pensei que era apenas uma forma inventada de modelar redes...”, Mason Porter, blog, October 21, 2019.

Recentemente, na comunidade científica de redes, o interesse pelas caracterizações geométricas de conjuntos de dados de redes reais tem crescido com um ritmo notável.

Por um lado, esta questão tem de facto muitas aplicações como as que são relacionadas com problemas de encaminhamento na Internet ou a deteção de comunidades [Les 09], [Adc 13], [Don 04]

e [Cao 13]. Paralelamente, diferentes definições de curvaturas de redes foram propostas por matemáticos [Lin 10], [Lin 11], [Bau 11], [Kell 11], [Gro 87], [Oll 09]. Por outro lado, a caracterização da hiperbolicidade de conjuntos de dados de redes reais tem ganhado força graças ao desenvolvimento de modelos de rede incorporados em planos hiperbólicos [Krio, 10], [Bog 21], [Ast 05], [Papa 12], e com a definição de alfa -hiperbolicidade de redes, conforme foi proposto por Gromov [Jon 13], [Jon 19], [Che 13].

A ligação entre a geometria hiperbólica e as redes complexas fornece informação valiosa em duas direções principais: partindo de redes aleatórias para redes reais complexas e de redes reais para redes hiperbólicas [Ser 22] , . [Bla 16].

1.6.1 Duma rede aleatória hiperbólica a uma rede real complexa

A geometria hiperbólica constitui a base de um modelo natural e explicativo para as redes do mundo real. Os grafos aleatórios hiperbólicos são obtidos escolhendo pontos aleatórios no plano hiperbólico e ligando pares de pontos que são geometricamente próximos. As redes resultantes partilham muitas propriedades estruturais, por exemplo, com as redes sociais online, como o Facebook ou o Twitter. Assim, elas são adequadas para análises algorítmicas num ambiente mais realista.

1.6.2 Duma rede real complexa a uma rede hiperbólica.

Partindo de uma rede do mundo real, a geometria hiperbólica é adequada para incorporações métricas. Os vértices de uma rede podem ser mapeados para pontos desta geometria, de modo a que as distâncias geométricas sejam semelhantes às distâncias no grafo. Tais incorporações têm uma variedade de aplicações algorítmicas que vão desde aproximações baseadas em algoritmos geométricos eficientes até ao encaminhamento ganancioso usando exclusivamente coordenadas

hiperbólicas para decisões de navegação [Bian 15] e [Bla 16].

1.7 Um exemplo na literatura

Na quarta parte desta lição apresentamos um trabalho realizado na área da literatura e o mesmo trabalho agora com a ligação entre a geometria hiperbólica e as redes complexas.

1.7.1 Reconhecimento de autoria dos textos da obra *Historia Augusta*.

O reconhecimento da autoria e do estilo literário de um escritor têm sido temas frequentes de investigação. Hoje, uma nova abordagem para representar e modelar sistemas complexos ganhou força e revelou-se poderosa: as redes complexas [Aki 17], [Linz 20].



Figura 5: Capa de uma edição de 1698 da Historia Augusta na Abadia de Ettal, Alemanha.

Começamos por apresentar um trabalho realizado neste âmbito: utilizámos uma rede de co-ocorrência de palavras para reconhecimento de autoria de textos em latim. Os textos latinos objeto deste estudo são excertos da Historia Augusta, uma coleção de biografias de imperadores romanos

que se estende desde Adriano que começou a reinar em 117 d.C., até Caro e seus filhos Numério e Carinus, isto é, até aos anos 284-285 d.C [Gra 21].

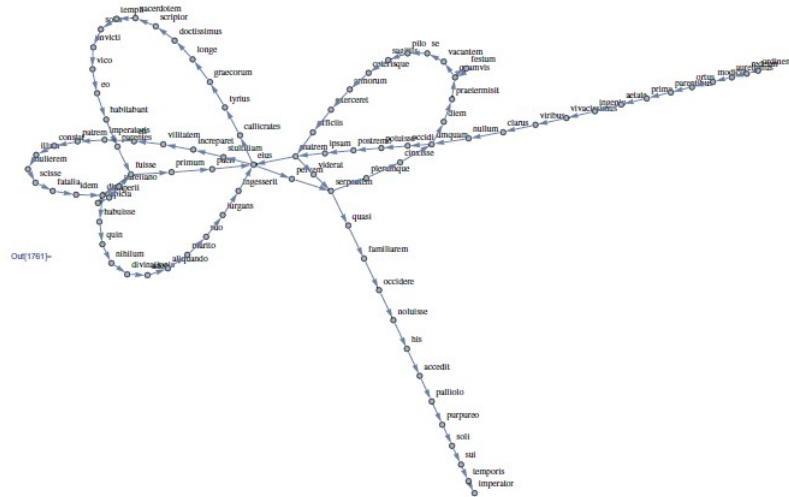


Figura 6: Grafo duma parte da rede de co-ocorrências, in [Gra 21]

1.7.2 Reconhecimento de autoria dos textos da obra *Historia Augusta* com utilização da geometria hiperbólica.

No trabalho anterior [Gra 21] foram utilizadas redes tradicionais de co-ocorrência. Apesar do relativo sucesso em diversas aplicações, estas redes não conseguem estabelecer ligações entre palavras semelhantes sempre que estas se posicionam em "lugares" distantes no texto. Para melhorar a resolução desta questão utilizamos o método de incorporação ("embeddings") de palavras como ferramenta para criar ligações virtuais em redes de co-ocorrência, para melhorar a qualidade dos sistemas de classificação. É construída uma nova abordagem para a construção de incorporações de palavras, que capturam a hierarquia latente dos textos, no espaço hiperbólico [Dhi 18], [Nic 17] [Gra 25].

2 Desafios

Ao longo desta lição, procurou-se evidenciar as potencialidades das redes complexas na resolução de problemas em diferentes contextos. Na conclusão, são apresentados alguns dos principais desafios atuais da aplicação das redes complexas em domínios tão diversos como a medicina, a literatura e a propagação de incêndios rurais. Estes desafios incluem a necessidade de melhorar modelos preditivos, desenvolver ferramentas computacionais mais eficientes e criar métricas mais robustas para análise de dados. Trabalhos recentes exemplificam essas direções. [Jos 23], [Gra 21b], [Gra 23], [Gra 24].

3 Referências

Referências

- [Adc 13] Adcock, A., Sullivan, B. and Mahoney, M., Tree-like structure in large social and information networks. In Data Mining (ICDM), IEEE 13th International Conference on Data Mining, 2013.
- [Ast 05] Aste, T., Di Matteo, T. and Hyde, S., Complex networks on hyperbolic surfaces, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 346, 20, 2005.
- [Aki 17] Akimushkin C, Amancio DR, Oliveira Jr, Text authorship identified using the dynamics of word co-occurrence networks. *PLOS ONE* 12(1), 1-15, 2017.
- [Bar-Alb, 99] Barabási, A. and Albert, R., Emergence of scaling in random networks, *Science*, 286(5439), 509–512, 1999.
- [Bau 11] Bauer, F. Jost, J. and Liu, S., Ollivier-Ricci curvature and the spectrum of the normalized graph Laplace operator. *arXiv preprint arXiv:1105.3803*, 2011.
- [Bian 15] Wu, Z., Menichetti, G., Rahmede, C. and Bianconi, G., Emergent Complex Network Geometry, *Sci Rep* .5, 10073, 2015.
- [Bla 16] Thomas Bläsius, Tobias Friedrich and Anton Krophmer, Hyperbolic Random Graphs: Separators and Treewidth. In 24th ESA, 1–15, 2016.
- [Bog 21] Marián Boguñá Dmitri Krioukov 1,2, Ivan Bonamassa3, Manlio De Domenico and M. Ángeles Serrano, Network Geometry, *Nat Rev Phys* 3, 114–135, 2021.

-
- [Bow 79] Bowen, R. and Series, C., Markov maps associated with fuchsian groups, I.H.E.S. Publications., vol 50, 153-170, 1979.
- [Can 97] Cannon, J., Floyd, W., Kenyon, R. and Parry, W., Hyperbolic Geometry, Flavors of Geometry MSRI Publications Volume 31, 1997.
- [Cao 13] Cao, X., Wang, X., Jin, D., Cao, Y. and He, D., Identifying overlapping communities as well as hubs and outliers via nonnegative matrix factorization. Sci. Rep. 3, 2993, 2013.
- [Che 13] Chen, W., Fang, W., Hu, G. and Mahoney, M., On the hyperbolicity of small-world and 21 treelike random graphs, Internet Mathematics 9, 434, 2013.
- [Coo 05] Coolen, ACC., Kuehn, R. and Sollich, P., Theory of neural information processing systems, Oxford University Press, 2005.
- [Dhi 18] Dhingra, B., Shallue, C., Norouzi, M., Dai, A. and Dahl, G., Embedding Text in Hyperbolic Spaces. In Proceedings of the (TextGraphs-12), 2018.
- [Don 04] Donetti, L. and Munoz, M., Detecting network communities: a new systematic and efficient algorithm, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment P10012, 2004.
- [Dor 03] Dorogovtsev, S. and Mendes, J., Handbook of Graphs and Networks, chapter Accelerated Growth of Networks, Wiley-VCH, Berlin, 2003.
- [Emm 05] Emmer, M., C. Escher's Legacy : A Centennial Celebration, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg, 2005.
- [Erd-Ren 59] Erdos, P. and Rényi, A. On Random Graphs I., Publicationes Mathematicae, 6, 290–297, 1959.

-
- [Erd-Ren 60] Erdos, P. and Rényi, A. On the evolution of random graphs., *Publicationes Mathematicae*, 5, 17–61, 1960.
- [Gan 18] Ganea, O., Becigneul, G. and Hofmann, T., Hyperbolic Neural Networks, *Advances in neural information processing systems*, 2018.
- [Gaw 13] Gawell, E., Non-euclidean Geometry in the Modeling of Contemporary Architectural Forms, *The Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics*, Volume 24, 2013.
- [Gra 93] Grácio, C., Quantificação de Sistemas Dinâmicos Hiperbólicos, *Dissertação de Mestrado*, 1993.
- [Gra 02] Grácio, C., Sistemas Dinâmicos de Baixa Dimensão e Fluxo Geodésico no Bitoro, *Tese de Doutorado*, 2002.
- [Gra 03] Grácio, C. and Ramos, J.S., Boundary maps and Fenchel-Nielsen-Maskit coordinates, *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 13 7, 1949–1958, 2003.
- [Gra 06] Grácio, C. and Ramos, J.S., The first eigenvalue of the Laplacian and the conductance of a compact surface, *Nonlinear Dynamics* 44, 243–250, 2016.
- [Gra 10] Grácio, C. and Ramos, J.S., Geodesic length spectrum on compact Riemann surfaces, *Journal of Geometry and Physics* 60 11, 1643–1655, 2010.
- [Gra 14] C. Gracio, Coolen, ACC. and Annibale, A., Cycle statistics in complex networks and Ihara’s Zeta function, *Nonlinear maps and their applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* 57, 81–94, 2014.

-
- [Gra 15] Rocha, J., Fernandes, S., Grácio C and Caneco A, Spectral and dynamical invariants in a complete clustered network, *Appl Math Inf Sci* 9(5):2367, 2015.
- [Gra 18] C Grácio, S Fernandes, LM Lopes, Full-Commanding a network: The dictator, *Studies in Computational Intelligence*, Volume 812, Pages 505-511, 2018.
- [Gra 21] Martins, A., Grácio, C., Teixeira, C., Rodrigues, I., Zapata, JL. and Lígia, F., Historia Augusta authorship: an approach based on Measurements of Complex Networks, *Applied Network Science* 6 1, 2021.
- [Gra 21a] Zapata, JL. and Clara Grácio, C., Clustering Vertex-Weighted Graphs by Spectral Methods, *Mathematics* 9 22, 2841-2841, 2021.
- [Gra 21b] Perestrelo, S., Grácio, C., Ribeiro, N. and Lopes, L., Modelling Forest Fires Using Complex Networks, *Math. Comput. Appl*, 2021.
- [Gra 23] Lopes, L., Grácio, C., Fernandes, S. and Fournier-Prunaret, D., Using Couplings to Suppress Chaos and Produce a Population Stabilisation Strategy, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2023.
- [Gra 24] Cartwright, J., Cejková, J., Fimmel, E., Giannerini, S., Gonzalez, D., Goracci, G., Clara Grácio, C., et al, *Information, Coding, and Biological Function: The Dynamics of Life, Artificial Life*, 2024.
- [Gra 25] Grácio, C. and Zapata, JL., Authorship of texts using complex networks and hyperbolic geometry (a submeter).
- [Gro 87] Gromov, M., *Hyperbolic groups* Springer, New York, 1987.

- [Hadamard 1898] Hadamard, J., 1898, Les surfaces a courbures opposées et leurs lignes geodesiques, J. de Math. Pures et Apliquées, N°4, 27-73, 1898.
- [Hua 23] Huang, W., Yu, Y., Xu, H., Su, Z. and Wu, Y., Hyperbolic Music Transformer for Structured Music Generation, in IEEE Access, vol. 11, 26893-26905, 2023.
- [Im-Ta 92] Imayoshi, Y. and Taniguchi, M., An Introduction to Teichmüller Spaces, Springer-Verlag, 1992.
- [Jon 13] Jonckheere, E., Lohsoonthorn, P. and Bonahon, F., Scaled Gromov hyperbolic graphs, Journal of Graph Theory 57, 157, 2013.
- [Jon 19] Jonckheere, E., Grippo, E. and Banirazi, R., Curvature, entropy, congestion management and the power grid, 2019 IEEE Conference on Control Technology and [Applications (CCTA), 535-542, 2019.
- [Jos 97] Jost, J., 1997, Compact Riemann Surfaces, Springer-Verlag, 1997.
- [Jos 08] Jost, J., Networks: From Biology to Theory, Springer-Verlag, 2008.
- [Jos 17] Weber, M., Saucan, E. and Jost, J., Characterizing complex networks with Forman-Ricci curvature and associated geometric flows, Journal of Complex Networks, Volume 5, Issue 4, 2017.
- [Jos 23] Jost, J., Lalli, R. Laubichler, M., Olbrich, E., Renn, J., Restrepo, G., Stadler, P. and Wintergrün, D., Computational history: challenges and opportunities of formal approaches, Journal of social computing, 4 3, 232-22, 2023.
- [Kell 11] Keller, M., Curvature, geometry and spectral properties of planar graphs, Discrete and Computational Geometry 46, 500, 2011.

-
- [Krio, 10] Krioukov, D., Papadopoulos, F., Kitsak, M., Vahdat, A. and Boguna, M., Hyperbolic geometry of complex networks, *Physical Review E*, 82(3): 036106, 2010.
- [Les 09] Leskovec, J., Lang, K., Dasgupta, A. and Mahoney, M., Community structure in large networks: Natural cluster sizes and the absence of large well-defined clusters, *Internet Mathematics* 6, 29, 2009.
- [Lin 10] Lin, Y. and Yau, S-T., Ricci curvature and eigenvalue estimate on locally finite graphs, *Math. Res. Lett* 17343, 2010.
- [Lin 11] Lin, Y., Lu, L. and Yau, S-T., Ricci curvature of graphs. *Tohoku Mathematical Journal* 63, 605, 2011.
- [Linz 20] Linzhuo, L., Lingfei, W. and James, E., Social centralization and semantic collapse: Hyperbolic embeddings of networks and text, *Poetics*, Volume 78, 2020.
- [Mas 99] Maskit, B., New parameters for fuchsian groups of genus 2, *Proc. of A.M.S.*, vol 127, N^o, 12, 3643-3652, 1999.
- [Net 17] Neto, D., Hipérbole: presença nas artes – presença analítica *Psicanálise*, Porto Alegre, 19 (1), 154-170, 2017.
- [New 03] Newman, M., The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45(2):167–256, 2003.
- [Nic 17] [Nickel 2017] Nickel, M, and Kiela, D., Poincaré embeddings for learning hierarchical representations, *Advances in Neural Information Processing Systems* 30, 6338–6347, 2017.
- [Oll 09] Ollivier, Y., Ricci curvature of Markov chains on metric spaces, *Journal of Functional Analysis* 256, 810, 2009.

-
- [Papa 12] Papadopoulos, F., Kitsak, M., Serrano, M., Boguna, M. and Krioukov, D., Popularity versus similarity in growing networks, *Nature* 489, 537, 2012.
- [Poincaré 1882] Poincaré, H., Théorie des groupes fuchsians, In: *Acta Math.* 1.1, First article in a series published in the same volumen, 1882.
- [Poincaré 1902] Poincaré, H., *La Science et l'hypothèse*. Paris, Flammarion, 1902.
- [Por 16] Porter, M. and James Gleeson, J., *Dynamical Systems on Networks - a Tutorial*, Springer, 2016.
- [Sch 98] Schaller, P., Geometry of Riemann surfaces based on closed geodesics, *Bull. of A.M.S.*, vol 35, N°35, 193-214, 1998.
- [Ser 81] Series, C., Symbolic dynamics for geodesic flows, *Acta Math.*, N°146, 103-128, 1981.
- [Ser 22] Series, C., *Hyperbolic Geometry and Data Science*, published in *Mathematics Today* in 2022.
- [Str 06] Strogatz, S., Exploring complex networks, *Nature*, 410:268–276, 2006.
- [Wan 21] Wan, Z., Mahajan, Y., Kang, B., Moore, T. and Cho, J., A Survey on Centrality Metrics and Their Network Resilience Analysis, in *IEEE Access*, vol. 9, 104773-104819, 2021.
- [Wat-Str 98] Watts, D. and Strogatz, S., Collective dynamics of small-world networks, *Nature*, 393(6684) 440–442, 1998.