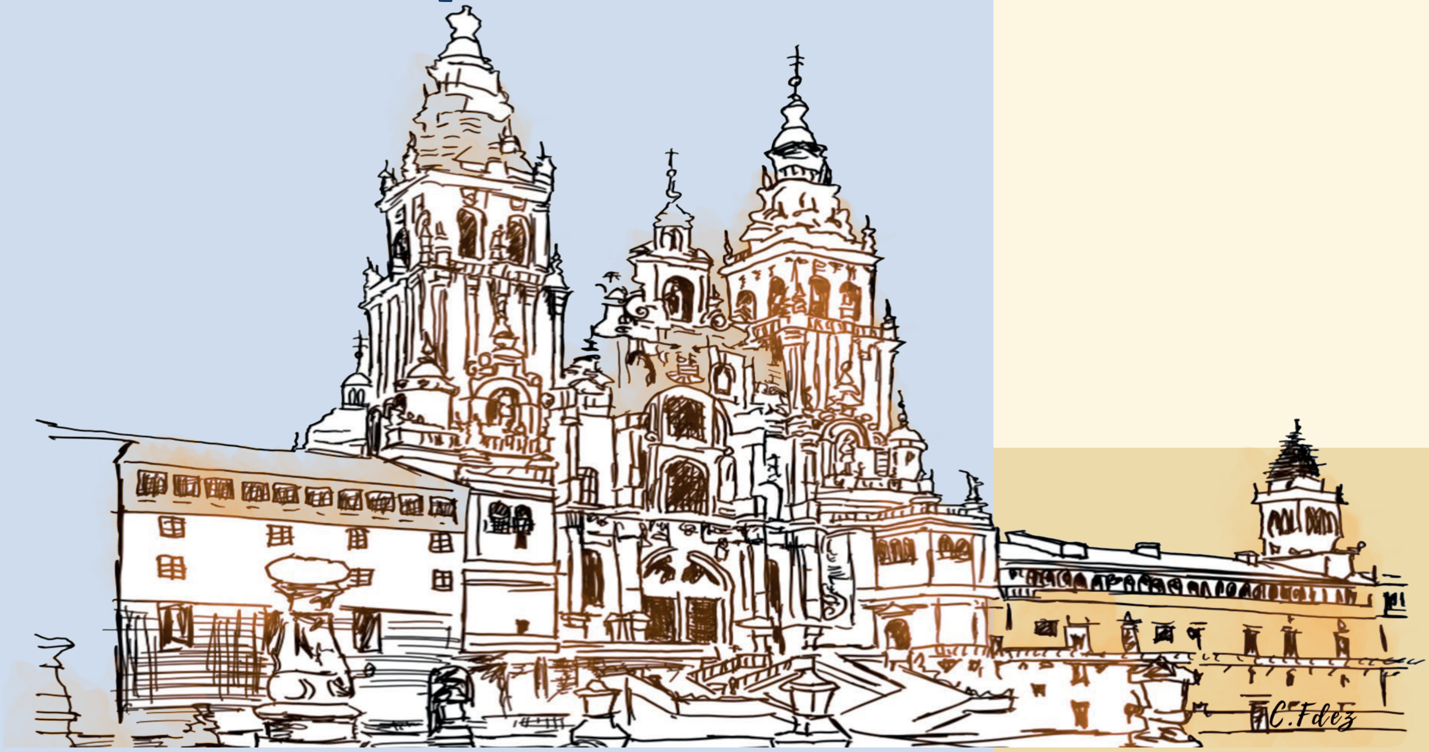
1, 2 y 3 de septiembre de 2022

Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad de Santiago de Compostela

SEIEM 2022



INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XXV

Editores:

Teresa F. Blanco, Cristina Núñez-García, María C. Cañadas, José Antonio González-Calero

SEIEM

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICAS APLICADAS

TESELA

AGAPEMA

CITMAga GALICIAN CENTRE FOR MATHEMATICAL RESEARCH AND TECHONOLOGY

roda

Investigación en Educación Matemática

XXV

USC

UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Investigación en Educación Matemática
XXV

Teresa F. Blanco, Cristina Núñez-García, María C. Cañadas y José Antonio González-Calero (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Santiago de Compostela, 1, 2 y 3 de septiembre de 2022

Investigación en Educación Matemática

XXV

EDICIÓN CIENTÍFICA

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Campus de la Cartuja, s/n 18071 Granada (España).

Dra. Teresa F. Blanco
Dra. Cristina Núñez-García
Dra. María C. Cañadas
Dr. José Antonio González-Calero

ISBN: 978-84-09-45038-1
ISSN: 2952-0045
Investigación en educación matemática (Internet)

Cítese como:
Blanco, T. F., Núñez-García, C., Cañadas, M. C. y González-Calero, J. A. (Eds.) (2022). *Investigación en Educación Matemática XXV*. Santiago de Compostela: SEIEM.

Las comunicaciones y los resúmenes de póster aquí publicados han sido sometidos a evaluación y selección por parte de investigadores e investigadoras miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).
La publicación de estas actas ha sido financiada por el Centro de Investigación y Tecnología Matemática de Galicia (CITMAga).

PRESENTACIÓN

Por fin, después de tres años de peregrinación en compañía del COVID, el camino nos trajo a Santiago de Compostela para volver, literalmente, a vernos las caras. Nuestra ciudad, que acostumbra a ser el fin del camino para muchas personas y grupos, ha acogido el XXV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Y lo ha hecho en un año santo atípico, al igual que lo ha sido la peregrinación que nos ha traído hasta aquí, entrelazando Santiago de Compostela y nuestro simposio en una feliz coincidencia en este año tan especial para la SEIEM.

Los que somos matemáticas y matemáticos sabemos que no hay números mejores que otros, ni más bonitos ni más feos, que el 25 es solo un número más, si acaso un cuadrado. Pero las y los matemáticos también somos personas, y para la mayoría de las personas el 25 tiene un significado especial: la cuarta parte de cien o las bodas de plata. Es desde esta perspectiva desde la que me quiero asomar al simposio celebrado, reconociendo el trabajo de todas las personas que han hecho posible que nuestra sociedad alcance esta cifra, un cruce de caminos lleno de trabajo, de compromiso y de ilusión, tanto de personas como de instituciones.

El programa científico del XXV Simposio de la SEIEM se desarrolló de manera íntegra en la Facultad de Ciencias de la Educación (Campus Norte) de la Universidad de Santiago de Compostela. Adelantándose incluso al inicio del curso académico, arrancó el jueves 1 de septiembre con la sesión de jóvenes investigadoras/es a cargo de la Dra. Ceneida Fernández y el Dr. Salvador Llinares (Universidad de Alicante), y continuó con la mesa redonda que coordinó el Dr. Álvaro Aguilar (Universidad de Oviedo) y contó con la participación de la Dra. Nuria Joglar (Universidad Complutense de Madrid), el Dr. José Antonio González-Calero (Universidad de Castilla-La Mancha), el Dr. Miguel Ángel Montes (Universidad de Huelva) y el Dr. Álvaro Aguilar (Universidad de Oviedo). La Dra. Nuria Joglar fue la encargada también, junto con la Dra. Miriam Méndez (Universidad Complutense de Madrid), de la Sesión de Formación y Docencia Universitaria, que se concretó en un seminario-taller para diseñar tareas formativas para futuros maestros de matemáticas.

En el primero de los seminarios de investigación se abordó el papel de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva de plena actualidad, con la coordinación del Dr. Pascual D. Diago (Universidad de Valencia) y las ponencias de la Dra. Hélia Jacinto (Universidad de Lisboa), el Dr. David Arnau (Universidad de Valencia) y el Dr. Abraham Arcavi (Instituto Científico Weizmann, Israel). El segundo seminario se centró en desarrollar el nuevo marco curricular en Matemáticas. Coordinado este por el Dr. Antonio Moreno Verdejo (Universidad de Granada), giró en torno a las nuevas propuestas curriculares en España y Portugal, el enfoque STEAM y la formación del profesorado, a través de las intervenciones de la Dra. Ana Paula Canavarro (Universidade de Évora), el Dr. José Manuel Diego-Mantecón (Universidad de Cantabria) y el Dr. Luis Carlos Contreras González (Universidad de Huelva).

Se presentaron un total de 48 comunicaciones, que se repartieron en tres bloques de hasta seis sesiones por bloque. A diferencia de otros simposios, los 52 pósteres presentados tuvieron su espacio en las pausas café como consecuencia de la convergencia de un horario comprimido y de las fechas de celebración de este simposio. Al igual que en el anterior simposio, se dejó un espacio para los grupos de investigación I (Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor de Matemáticas, Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica, Entornos Tecnológicos en Educación Matemática, Historia de las Matemáticas y Educación Matemática e Investigación en Educación Matemática) y otro para los grupos de investigación II (Aprendizaje de la Geometría, Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria, Didáctica del Análisis y Pensamiento Numérico y Algebraico).

Como no podía ser de otra manera, en este año tan especial, el programa del encuentro añadió una merecida sesión de homenaje que tuvo como maestros de ceremonia al Dr. Bernardo Gómez (C.U. jubilado, Universidad de Valencia), la presidenta de la SEIEM, Dr. Nuria Climent (Universidad de Huelva), y el Dr. Lorenzo J. Blanco (Expresidente de la SEIEM, Universidad de Extremadura) y que, además de embriagarnos de recuerdos, incluyó la presentación del libro 'Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática', muestra de la contribución de la SEIEM al momento actual sobre la base de lo que se ha ido construyendo a lo largo de los años.

Desde el comité organizador esperamos que, en estos dos días y medio de intenso trabajo, hayáis sentido el cariño y el empeño que hemos puesto en acogeros y en recuperar los momentos de encuentro, y que por esta vez Santiago no haya sido el fin, sino el principio del camino para numerosas colaboraciones, proyectos, investigaciones y nuevas amistades.

Para finalizar, quiero mostrar mi agradecimiento y el de todo el comité organizador a todas las personas que nos han marcado y guiado en el camino durante estos 25 años. Quiero agradecer también todo el trabajo realizado por el comité científico, así como el de las instituciones que han colaborado con nosotros, la Facultad de Ciencias de la Educación y la Universidad de Santiago de Compostela. Por supuesto, mi agradecimiento particular a mis compañeras y compañeros del comité organizador, en especial a María Jesús Salinas Portugal por hacernos partícipes de los cimientos de esta sociedad. Sin la coordinación y el esfuerzo de todas estas personas no hubiese sido posible afrontar el reto que supone este simposio. Por último, quiero dar las gracias a Carmen Fernández Vázquez por la entrega desinteresada de su ilustración de la catedral de Santiago de Compostela, la cual ha dado fondo a los identificadores y carteles, convirtiéndose en parte esencial de la imagen de este simposio.

En Santiago de Compostela, septiembre de 2022.

Teresa Fernández Blanco
Coordinadora Local del XXV Simposio de la SEIEM

Índice

Seminario de investigación I: El papel de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Presentación: Diago, P. D. (Universitat de València – Estudi General)

Ponentes:

- Arcavi, A. (Departamento de Enseñanza de las Ciencias, Instituto Weizmann de Ciencias, Israel)
- Arnau, D. (Universitat de València – Estudi General)
- Jacinto, H. (Universidade de Lisboa)

EL PAPEL DE LA TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

The role of technology in the teaching and learning of mathematics

Diago, P. D.

Universitat de València – Estudi General

Resumen

El primer seminario de investigación del XXV Simposio de la SEIEM está dedicado a debatir sobre los desarrollos tecnológicos y su influencia en la educación matemática. Organizado en tres ponencias, se reflexionará sobre el papel de la tecnología tanto en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, como en la propia metodología de investigación. Primeramente, se relata un estudio de caso exploratorio con el objetivo de caracterizar un diseño e implementación online para la resolución de problemas mediante soluciones tecnológicas en tiempos de la COVID-19. En una segunda comunicación se reflexiona, a partir de dos ejemplos concretos relacionados con la resolución de problemas verbales, sobre los efectos del uso de la tecnología centrada en el profesorado o centrada en el estudiante. Con ello se analizan las consecuencias en el desarrollo tecnológico, en la aparición de teorías explicativas o su influencia en la investigación en educación matemática. La última de las intervenciones está dedicada a ofrecer una visión retrospectiva del camino recorrido conjuntamente por la tecnología y la educación matemática durante las últimas décadas, analizando los retos y desafíos del pasado, presente y futuro.

Palabras clave: *tecnología educativa, entornos tecnológicos, conocimiento didáctico específico, COVID-19.*

Abstract

The first research seminar of the XXV SEIEM Symposium is devoted to discuss the technological developments and their influence on mathematics education. Organized into three presentations, it will reflect on the role of technology both in the teaching-learning processes of mathematics, and in the research methodology itself. Firstly, an exploratory case of study is reported with the aim of characterizing an online design and implementation for problem-solving through technological solutions in COVID-19 times. Secondly, we reflect, based on two specific examples related to the resolution of verbal problems, on the effects of the use of technology centered on teachers or centered on the student. With this, the consequences on technological development, on the appearance of explanatory theories or their influence on research in mathematics education are analyzed. Finally, the last intervention presents a retrospective vision of the path traveled jointly by technology and mathematics education during the last decades, analyzing the challenges of the past, present and future

Keywords: *educational technology, technological environments, specific didactic knowledge, COVID-19.*

Introducción

El uso de entornos tecnológicos para la educación matemática es hoy en día una realidad y su uso se ha visto sustancialmente incrementado en los últimos años (Borba y Villarreal, 2005; Fernández-Gutiérrez, Giménez y Calero, 2020). Especialmente desde finales de 2019, la inversión en equipamiento

Diago, P. D. (2022). El papel de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 3-5). SEIEM.

tecnológico de última generación que venía haciéndose por parte de instituciones y gobiernos se vio fuertemente potenciada por la situación pandémica derivada de la COVID-19 (Aldon et al., 2021). A fecha de hoy la práctica educativa es, a todos los niveles, casi inconcebible sin el uso de herramientas tecnológicas como ordenadores, plataformas de aprendizaje, aplicaciones específicas, correo electrónico, páginas web, etc. (Engelbrecht, Llinares y Borba, 2020; Ruthven, 2022). En el ámbito educativo en general, a pesar de este entusiasmo y motivación por el uso de las herramientas tecnológicas, la investigación no ha reportado claras evidencias en favor de los beneficios de su uso en procesos de enseñanza y aprendizaje (Fernández-Gutiérrez et al., 2020; Livingstone, 2012). En el caso particular de la educación matemática, se vislumbran resultados que apuntan hacia una mejor comprensión de la influencia de la integración de la tecnología en el contexto educativo, pero se hace necesaria una reflexión sobre su papel en la metodología de investigación propia del área, especialmente en la era post-COVID (del Olmo-Muñoz et al., en prensa; Engelbrecht, Llinares y Borba, 2020; Ruthven, 2022).

Objetivo y desarrollo

Bajo este panorama, este primer seminario de investigación del XXV Simposio de la SEIEM pretende esbozar la necesidad de un conocimiento más profundo sobre la tecnología, más allá de su papel como elemento motivador o de soporte de la actividad docente. El objetivo de las ponencias seleccionadas es la reflexión sobre las posibilidades de los entornos tecnológicos para influir tanto en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas como en la propia metodología de investigación. Para ello, se han organizado tres ponencias en las que se describirán aspectos concretos del papel de la tecnología en la educación matemática. A continuación, se describen brevemente algunos aspectos destacados de cada una de ellas.

Resolución de problemas con tecnología en la época del confinamiento

Durante el confinamiento forzado por la situación derivada de la pandemia del COVID-19 familias, profesores y estudiantes se vieron obligados a seguir un modelo de docencia a distancia. En la primera ponencia se discuten algunos aspectos teóricos que sustentaron, en Portugal, el diseño del club *Tecn@ Mat*. Durante el periodo de aislamiento social, esta iniciativa estuvo orientada al desarrollo de habilidades matemáticas y tecnológicas para resolver problemas a distancia en estudiantes de 12 a 14 años. Como se describe, en el diseño y planificación de este proyecto para la resolución de problemas con herramientas tecnológicas se tuvieron en cuenta diferentes perspectivas teóricas sobre el uso e impacto de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas escolares y en la propia actividad de resolución de problemas.

En esta primera ponencia se describirán los resultados de un estudio de caso dentro de las actividades de este club, relativo al desempeño de 12 estudiantes mientras resolvían problemas de forma online mediante un sistema de videoconferencia. En este estudio exploratorio se observa en los participantes una disminución del uso de recursos basados en papel y lápiz a medida que se aprendían nuevas posibilidades sobre las herramientas tecnologías empleadas en las diversas actividades.

De la tecnología a la didáctica específica y viceversa: dos ejemplos en resolución de problemas verbales

El fuerte desarrollo tecnológico de finales de la década de los 70s junto con las posibilidades de la inteligencia artificial han sido protagonistas, en el campo educativo, del desarrollo de potentes ordenadores capaces de participar en la toma de decisiones en procesos de resolución de problemas: los llamados *sistemas expertos*. En esta segunda ponencia se reflexiona sobre cómo, en el área de la resolución de problemas, la influencia inicial de la inteligencia artificial, tanto en la práctica educativa como en la metodología de investigación, dio paso a una visión de la tecnología centrada en el profesorado donde se desconfió de las posibilidades del uso de los desarrollos tecnológicos por parte de los estudiantes de forma autónoma.

Para ello, articulado por los diseños de dos investigaciones sobre resolución de problemas verbales, se reflexiona sobre los efectos de este cambio de paradigma en dos sentidos: i) desde la tecnología hacia la didáctica de la matemática; y ii) desde el conocimiento específico de la didáctica de la matemática hacia el desarrollo tecnológico. Como se discute en el texto de la ponencia, en el primero de los casos se observa que los esfuerzos de teorización han sido posteriores a la implementación de la tecnología, creando marcos teóricos que permitieron establecer paralelismos entre las actuaciones desempeñadas en el entorno tecnológico y en lápiz y papel. Por el contrario, en el segundo de los casos la implementación de soluciones tecnológicas a partir de conocimiento específico de la didáctica de la matemática permite impactar en la práctica educativa y permite aflorar nuevos problemas de investigación ofreciendo novedosos puntos de vista.

Tecnología y educación matemática: un camino recorrido conjuntamente

La última de las ponencias pretende ofrecer un estado del arte del camino recorrido conjuntamente por la tecnología y la educación matemática en las últimas décadas. Para ello, se ofrece una visión retrospectiva de las herramientas tecnológicas; desde su origen alejado de las necesidades de la Educación, pasando por la creación de *micromundos* (como *LOGO* o el actual *GeoGebra*); y finalizando con una reflexión sobre el presente y futuro de las mismas.

Referencias

Aldon, G., Cusi, A., Schacht, F. y Swidan, O. (2021). Teaching mathematics in a context of lockdown: A study focused on teachers' praxeologies. *Education Sciences, 11*(2), 1-21. https://doi.org/10.3390/educsci11020038

Borba, M. C. y Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking. Information and communication technologies, modeling, visualization, and experimentation*. Springer.

del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A., Diago, P. D., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. (en prensa). Intelligent Tutoring Systems for word problem solving in COVID-19 days: Could they have been (part of) the solution? *ZDM-Mathematics Education*.

Engelbrecht, J., Llinares, S. y Borba, M. C. (2020). Transformation of the mathematics classroom with the internet. *ZDM - Mathematics Education, 52*(5), 825-841. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01176-4

Fernández-Gutiérrez, M., Gimenez, G. y Calero, J. (2020). Is the use of ICT in education leading to higher student outcomes? Analysis from the Spanish Autonomous Communities. *Computers and Education, 157*(June). https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103969

Livingstone, S. (2012). Critical reflections on the benefits of ICT in education. *Oxford Review of Education, 38*(1), 9–24. https://doi.org/10.1080/03054985.2011.577938

Ruthven, K. (2022). Ergonomic, epistemological and existential challenges of integrating digital tools into school mathematics. *Asian Journal for Mathematics Education, 1*(1), 7-18. https://doi.org/10.1177/27527263221077314

TECNOLOGÍAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA: ¿ANDARÁN DOS JUNTOS, SI NO ESTUVIEREN DE ACUERDO?

Technologies and Mathematics Education: Can two walk together, except they be agreed?

Arcavi, A.

Departamento de Enseñanza de las Ciencias, Instituto Weizmann de Ciencias, Israel

Department of Science Teaching, Weizmann Institute of Science, Israel

Resumen

"¿Andarán dos juntos, si no estuvieren de acuerdo?" es una cita del libro de Amos (3:3), uno de los doce 'profetas menores' (así llamados por la extensión de sus libros en el Antiguo Testamento). La metáfora alude a las cosas que no suceden por casualidad, y a que detrás de todo hay motivos. Si dos personas se juntan para andar es porque se encontraron con un propósito y hay entre ellas una cierta relación.

Las tecnologías y la educación, dos campos distantes, se encontraron durante las últimas décadas. ¿Cuáles fueron la naturaleza, los propósitos y los desafíos de ese 'andar' juntos? Esta presentación es un intento de responder a esta pregunta a partir del advenimiento del ordenador individual y desde mi perspectiva personal, como espectador y, en menor escala, como 'actor'.

Palabras clave: *tecnología, educación matemática.*

Abstract

"Can two walk together, except they be agreed?" is a quote from the book of Amos (3:3), one of the twelve 'minor prophets' (so called due to the length of their books within the Old Testament). The metaphor refers to things that do not happen by chance and that there is a motive behind anything. If two people get together to walk they did it for a purpose and they have a certain relationship.

Technologies and education, two remote fields, met during the last decades. What were the nature, the purposes and the challenges of this 'walking' together? This presentation is an attempt to answer this question since the advent of the personal computer and from a personal perspective, as a spectator, and in a smaller scale, as an 'actor'.

Keywords: *technology, mathematics education.*

INTRODUCCIÓN

Las tecnologías digitales y de comunicación produjeron y continúan produciendo transformaciones profundas en todas las áreas de nuestras vidas, al punto que se ha llegado a afirmar que no sólo la sociedad está cambiando sino también lo que significa ser humano (Michael Bess, 2018). La educación en general y en especial la manera en que aprendemos y enseñamos matemáticas no escaparían a esta afirmación, pero las tecnologías no son tan omnipresentes en las aulas como lo son en la vida diaria

Arcavi, A. (2022). Tecnologías y educación matemática: ¿Andarán dos juntos si no estuvieren de acuerdo? En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 7-16). SEIEM.

y los cambios que ellas inducen no alcanzan ni la velocidad, ni la ubicuidad, ni la profundidad de los cambios en otras áreas. Sin embargo, la integración de la tecnología en la educación matemática tiene un gran potencial. En esta presentación describo las distintas facetas de ese potencial y lo que se ha logrado hasta hoy en día, destacando las múltiples complejidades intrínsecas y los desafíos presentes y futuros.

HERRAMIENTAS Y TECNOLOGÍAS COGNITIVAS

En educación, la tecnología digital no es un fin en sí mismo sino una herramienta más, es decir un medio que facilita la realización y el cumplimiento de una tarea (o el alcanzar un objetivo). Desde tiempos prehistóricos, una ocupación central de los seres humanos fue el diseño, creación, uso y mejora de herramientas para trascender limitaciones. Sin embargo, en nuestro caso, las tecnologías digitales no surgieron dentro de la educación, ni fueron diseñadas teniendo en cuenta las necesidades de la educación. Surgieron y se impusieron masivamente en todas las áreas de la vida y así es como los educadores nos vimos ante un hecho consumado: la existencia de una herramienta poderosa, ubicua y cada vez más accesible que no fue pensada precisamente teniendo en mente las necesidades de la educación. Es decir, en cierto sentido nos vimos ante una herramienta al alcance de todos para la cual habría que adecuarle propósitos y modos de uso. Esta situación dio lugar a una fascinante variedad de direcciones diversas para adoptar (incluso abrazar) la tecnología, muchas de ellas basadas e inspiradas en la manera en que la educación es concebida.

Para algunos investigadores, la aparición de los ordenadores reforzó la ilusión de que quizá se estaba ante una "máquina de enseñar" que eventualmente podría reemplazar gran parte de la tarea docente. Este propósito se nutrió de ideas educativas tales como la "instrucción programada" (por ejemplo, Calvin, 1969) muy afín con las propuestas para enseñar matemáticas de Gagné (1965), con profundas raíces en el conductismo (Skinner, 1974) y con miradas hacia lo que entonces se vislumbraba como aplicaciones de la "inteligencia artificial". Volveré sobre este punto más adelante.

Para otros, la inspiración fue la mismísima noción de herramienta como un medio destinado a facilitar la realización de una tarea ampliando y aumentando el poder de las capacidades humanas que según Bruner (1966) se da en al menos tres formas diferentes: (a) la amplificación de las capacidades motrices, por ejemplo, tijeras, palancas, automóviles; (b) la amplificación de las capacidades sensoriales, por ejemplo, detectores de humo, sensores de radar, telescopios y (c) la amplificación de "capacidades de razonamiento", por ejemplo, símbolos, teorías, modelos matemáticos (Bruner, 1966). Esta última función que se atribuye a una herramienta fue la base de "la corriente cognitiva" del uso de la tecnología en educación matemática.

Basado en Bruner, Pea (1987) propuso la noción de "tecnología cognitiva". Consideremos, por ejemplo, un par de herramientas muy poco sofisticadas como lo son el lápiz y el papel para resolver una ecuación. Estas herramientas amplifican considerablemente nuestro poder mediante la externalización y el registro escrito de los productos mentales intermedios (pasos en la solución). De esta manera, los procesos de pensamiento que suelen ser efímeros, privados y sujetos a las distorsiones y limitaciones de la memoria son "capturados" y representados en un medio comunicable que persiste, que es visible y pasible de ser observado y revisado.

La metáfora de la amplificación es útil para describir y explicar el papel que juegan las herramientas al permitir que los humanos aumentemos nuestras capacidades intelectuales, particularmente en matemáticas. Sin embargo, la metáfora tiene sus limitaciones. La amplificación "se refiere específicamente a la intensificación de una señal (acústica, electrónica), que no sufre cambios en su estructura básica" (Cole y Griffin, 1980, p. 349). Pero, algunas herramientas hacen mucho más que eso, no sólo expanden nuestras capacidades al "amplificar una señal", sino que también pueden permitirnos hacer cosas completamente nuevas que no podríamos haber emprendido sin ellas. Consideremos, por ejemplo, el surgimiento del lenguaje algebraico y la riqueza de oportunidades que abrió, incluidas las bases de muchos de los desarrollos matemáticos de los últimos cuatro siglos. Por ejemplo, diSessa (2000) describe en detalle uno de los mayores logros de Galileo en sus *Diálogos Acerca de Dos Nuevas Ciencias* por medio de seis teoremas tratados en su mayoría verbalmente en una página de texto enrevesado (y no fácil de leer), accesible sólo para las mejores mentes de su tiempo. En cambio, el mismo tratamiento, que hoy en día puede verse como nada más que un conjunto de variaciones de la fórmula "la distancia es igual a la velocidad por el tiempo", es bien conocido y fácil de manejar por la mayoría de los estudiantes de secundaria gracias al simbolismo algebraico. El álgebra, esa potente herramienta simbólica, simplificó drásticamente los teoremas de Galileo al expresarlos de una manera completamente nueva, concisa, comunicable y fácil de aprender. Además, el álgebra reorganizó todo el terreno intelectual al ofrecer una herramienta poderosa para resolver viejas tareas de maneras completamente diferentes, así como para emprender tareas totalmente nuevas, abriendo nuevos desarrollos matemáticos.

Las posibilidades que ofrecen los ordenadores los convierten en una poderosa tecnología cognitiva en esas dos funciones descritas más arriba: amplificar nuestras capacidades y permitirnos emprender trayectorias y modos de aprendizaje totalmente nuevos y prometedores.

Uno ejemplo emblemático de este enfoque fue la idea de micromundo (o microentornos), un concepto acuñado por Papert (1980) ni bien aparecieron los ordenadores personales a comienzos de la década del 80. Un micromundo es un entorno digital donde los alumnos pueden tomar la iniciativa para manipular, experimentar y explorar alternativas, testear conjeturas producidas por ellos mismos, construir y representar objetos abstractos, inventar, jugar, descubrir y resolver problemas. Además, el entorno invita al alumno a reflexionar sobre lo que ha hecho, depurarlo, y le provee de oportunidades de rehacer y modificar hasta lograr lo que se ha deseado. La filosofía educativa subyacente al diseño de micromundos considera que el aprendizaje es óptimo cuando el alumno tiene oportunidad de diseñar y construir objetos a voluntad de manera que éstos se puedan compartir, reformar y rediseñar. El micromundo más famoso de aquellas épocas fue el idioma LOGO mediante el cual el alumno puede construir objetos físicos o geométricos con una mínima cantidad de comandos de programación.

Desde entonces se han creado un sinnúmero de micromundos con distintas características, uno de ellos, de amplia difusión hoy en día, es Geogebra (o cualquier otro entorno de geometría dinámica). Se trata de un espacio abierto para explorar relaciones geométricas, descubrir teoremas, conectar representaciones y vivenciar fenómenos matemáticos de manera dinámica. Geogebra permite agregar al estudio de geometría deductiva una componente empírica, donde la experimentación del alumno/a da origen a conjeturas elaboradas por él/ella mismo/a y el micromundo invita y provee de utensilios para explorarlas. Hadas et al. (2000) describen una colección de actividades innovadoras diseñadas para que la exploración le depare al alumno sorpresas, confirmación o refutación de conjeturas, que a su vez se tornan en disparadores de la necesidad de demostrar, donde la demostración ya no es un mero ejercicio deductivo formal sino un proceso de explicación y justificación de un fenómeno investigado. Es decir, las posibilidades de un micromundo hacen que la actividad del alumno no sólo amplíe el espacio de visualización dinámica, sino que le permite "hacer geometría" de una manera diferente: ser el "propietario" de una conjetura explorable empíricamente, toparse con posibles refutaciones de sus supuestos generando la necesidad de recurrir a una justificación que explique algo inesperado. El éxito del micromundo en generar un aprendizaje diferente, profundo y estimulante depende de por lo menos dos factores fundamentales: (a) el diseño de actividades motivadoras, es decir, tareas y situaciones problema apropiadas para generar el tipo de actividad del alumno descrita previamente, y (b) la creación de una atmósfera de aula donde la exploración y la perseverancia son normas, la discusión y la colaboración son deseables, y el errar es legítimo y productivo, es decir potencialmente conducente a un aprendizaje sólido.

El siguiente ejemplo ilustra una actividad diseñada para ser explorada con geometría dinámica. Se comienza trazando un triángulo isósceles cuyos lados iguales son fijos (por ejemplo, de longitud 3). Se observa que se trata de una familia de infinitos triángulos, en los que su tercer lado es variable (y su dominio de variación es entre 0 y seis) y el área mínima del triángulo que es cero cuando el tercer lado es cero crece hasta cierto punto y luego decrece nuevamente hacia su valor mínimo. Se propone conjeturar la gráfica cartesiana del área en función del lado variable. Muchos alumnos proponen que el área máxima se obtiene cuando el triángulo es equilátero y que la gráfica es una parábola (y luego descubren que ¡ambas conjeturas son "dos caras de la misma moneda"!). La opción del trazado del gráfico a medida que hacemos variar el tercer lado del triángulo, depara una sorpresa que requiere una explicación (Figura 1) que puede o no ser satisfactoria y que conduce a desentrañar las causas de la conjetura basada en una intuición errónea.

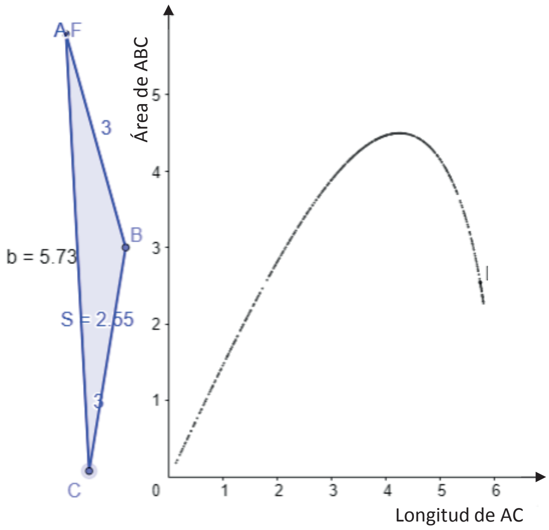


Figura 1. Grafica de la variación del área de un triángulo isósceles.

La descripción y el análisis de la actividad completa (diseñada para dos horas de clase) y su potencial están descriptos en Arcavi y Hadas (2000) y en Arcavi (2022), incluyendo otras sorpresas como la obtención de un gráfico que no es una función.

Este micromundo nos ofrece la posibilidad de vivenciar la esencia dinámica de la noción de función que describe una variación y la posibilidad de "jugar" con ella. En contraste, la representación algebraica de esa función ($A = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2}$) no sólo es estática sino que opaca propiedades tales como lo asimétrico de la variación y el valor de su máximo. Es decir, el micromundo permite modelar gráficamente un fenómeno, haciendo visible las propiedades claves, y relegando el modelo algebraico al cual se puede recurrir más tarde en la actividad como otra fuente de información y para apoyar el desarrollo del sentido de los símbolos, tal como se describe en Arcavi y Hadas (2000).

La función cognitiva de la tecnología digital plantea múltiples desafíos a los diversos copartícipes involucrados en educación matemática. A los alumnos le propone una manera diferente de "hacer" matemáticas, deben ejercitar su autonomía, tomar iniciativas, depender menos de la inmediata evaluación del profesor, no temer al yerro y considerarlo como un recurso para seguir aprendiendo. A los profesores les plantea una tarea docente que se asemeja más a la de un facilitador que a la de un "proveedor de conocimientos", y en ciertas circunstancias hasta debe renunciar a la imagen de autoridad que se le suele atribuir (por ejemplo, ¿cómo reaccionaría si un alumno al jugar en un micromundo propone una conjetura que el docente no sabe a primera vista si es o no correcta?). A los diseñadores del curriculum se les impone una revisión de los contenidos a enseñar e imaginar e implementar trayectorias diferentes para transitar esos contenidos. El reto para la evaluación de los alumnos (en las aulas y más aún en los exámenes a niveles nacionales) es que las tareas no sólo evalúen conocimientos, sino también iniciativas, autonomía y estrategias metacognitivas de trabajo.

SOCIALIZACIÓN Y COMUNICACIÓN

Con el acelerado desarrollo de las tecnologías de comunicación digital y las herramientas online (en línea), cobró un enorme auge una fase nueva, distinta a la de los microentornos. En un estudio exhaustivo presentado en el ICME13, Borba et al. (2016) caracterizan esta fase como la "revolución de las relaciones" (relationship revolution – término atribuido a Michael Schrage). Esta idea implica que la verdadera revolución que ha generado la Internet no está centrada solamente en el masivo acceso a todo tipo de información sino también en las nuevas maneras en que las personas pueden relacionarse entre sí. En ese sentido, el estudio señala cinco áreas que adquirieron protagonismo en los últimos años: tecnologías móviles (teléfonos inteligentes, tableta digital), cursos online masivos y abiertos (MOOCs), bibliotecas digitales, aprendizaje colaborativo mediante tecnología digital, y formación docente mediante aprendizaje combinado (semipresencial).

En cierto sentido, estas cinco áreas pueden yuxtaponerse y ser interdependientes presentado interrogantes y desafíos, como, por ejemplo:

- ¿Qué procesos de reacomodación y ajuste a estas nuevas modalidades de "hacer" se requieren de la educación tradicional y de las normas institucionales establecidas en el ámbito escolar?
- ¿De qué manera los innumerables recursos matemáticos accesibles a todos pueden facilitar u obstruir los procesos de enseñanza y aprendizaje?
- ¿Cómo es posible aprovechar el poder de las redes sociales para un aprendizaje significativo de matemáticas?
- ¿Cómo es posible extender el espacio y el tiempo de aprendizaje mediante la asequibilidad de las tecnologías?
- ¿Qué formas pueden adoptar los procesos de preparación y profesionalización docente con el apoyo de las tecnologías?

En el proyecto VIDEO-LM ((Viewing, Investigating and Discussing Environments of Learning Mathematics) intentamos proponer una respuesta a la última pregunta, con los siguientes objetivos de la profesionalización docente: (1) fortalecer y enriquecer continuamente los conocimientos pedagógicos de los contenidos y el conocimiento matemático para la enseñanza (Shulman, 1986; Ball et al., 2005) y (2) desarrollar e implementar la capacidad de reflexión del docente sobre todos los aspectos de su práctica profesional (Clarke, 2000).

Para alcanzar esas metas creamos ámbitos colectivos de discusión y análisis de clases de aula auténticas video-grabadas, y diseñamos un espacio de internet donde almacenamos más de 70 clases. El instrumento tecnológico usado es el video con sus múltiples ventajas, entre ellas su accesibilidad y lo que permite hacer, por ejemplo, rebobinar, detenerse y rever escenas (Borko et al. 2011). Nuestra mayor preocupación fue cómo encauzar las discusiones de manera que éstas sean conducentes a reflexiones productivas y transformativas. Una reflexión grupal es productiva cuando se nutre de ideas, creencias y miradas diferentes que se entretejen y llevan a pensamientos, perspectivas o enfoques nuevos, reconocidos y valorados por los participantes. Una reflexión es transformativa cuando un cambio de perspectiva induce un cambio fundamentado y explícito de una vieja práctica enraizada (Schwarts et al. 2022).

Creamos un marco de seis lentes para observar las clases, cada una con preguntas guías, diseñadas a apoyar la reflexión. Las lentes aspiran a detectar, analizar y discutir respectivamente: (1) las ideas matemáticas de una clase, (2) los objetivos del docente, (3) las tareas asignadas para lograr esos objetivos, (4) las interacciones docente-alumno y alumno-alumno, (5) los dilemas del docente y sus posibles resoluciones, y (6) las creencias del docente que implícitamente se han puesto de manifiesto en la clase. Los detalles del diseño, sus fundamentaciones teóricas y algunos resultados están descriptos en Karsenty y Arcavi (2017).

En este caso, la tecnología de video ofrece posibilidades técnicas tales como recortar clips y compartirlos, grabar episodios o clases enteras, crear un repositorio accesible a docentes, formadores, e investigadores con posibilidades entablar diálogos y dejar comentarios registrados. Es decir, la tecnología facilita y apoya una nueva manera de comunicación entre docentes, ofrece un foro de recursos y materiales para conversar, discutir e intercambiar ideas acerca del desempeño profesional, proveyendo un espacio para el funcionamiento apropiado de comunidades de aprendizaje docente (para una descripción de este tipo de comunidades, véase, por ejemplo, Arcavi, 2020).

En suma, más allá de proporcionar potentes medios que influyen en los aspectos meramente cognitivos del aprendizaje, y coincidiendo con Borba et al. (2017), la tecnología impacta también la naturaleza de la interacción de las personas entre sí y la interacción entre las personas y la educación matemática en contextos diversos.

PRESENTE Y FUTURO

"A pesar de medio siglo de recomendaciones y esfuerzos sostenidos, el grado en que el uso de herramientas digitales se ha convertido en parte integral de la práctica de las matemáticas escolares sigue siendo limitado" (Ruthven, 2022, p. 7, traducción libre). La cita no se refiere a los casos de ausencia de medios digitales en escuelas rurales en países en desarrollo donde los factores inhibidores son de índole económica, social y quizá también política. La cita se refiere a ámbitos escolares donde la tecnología está o podría estar en la institución, y sin embargo su implementación es reducida.

Una primera aproximación para entender la resistencia a la incorporación de las tecnologías en las aulas de matemáticas se centra en los docentes. Una gran mayoría de ellos (nosotros) no fueron (fuimos) educados usando tecnología en el aula. Si bien hay varios estudios que refutan como simplista la vieja máxima que dice "enseñamos de la misma manera en que nos enseñaron a nosotros" (por ejemplo, Oleson y Hora, 2013), es cierto que se debe hacer un esfuerzo profesional considerable para que adoptemos una práctica pedagógica radicalmente distinta de aquella con la que se nos enseñó.

En una segunda aproximación, Ruthven (2022) propone tres dimensiones que contribuyen a la resistencia a un uso integral de las tecnologías en las aulas de matemáticas: la dimensión ergonómica, la dimensión epistemológica y la dimensión existencial.

La dimensión ergonómica se refiere al "diseño de lugares de trabajo, herramientas y tareas, de modo que coincidan con las características fisiológicas, anatómicas, psicológicas y las capacidades de los trabajadores que se verán involucrados" en sus tareas diarias (https://es.wikipedia.org/wiki/Ergonom%C3%ADa). La introducción de las tecnologías en el aula cambia drásticamente las características del entorno de trabajo, modificando las rutinas y el fluir de la clase. El aula cambia su entorno de trabajo, debe transformarse en una especie de laboratorio, donde quizá cambia hasta la ubicación física de los alumnos. Las nuevas herramientas redefinen tanto la administración del tiempo de tareas por parte del docente como la dinámica de las interacciones y comunicaciones alumno-docente y alumno-alumno.

La dimensión epistemológica implica la manera en que conocemos y aprendemos, la naturaleza de las fuentes para adquirir nuevos conocimientos y sus distintos tipos. Consideremos, por ejemplo, la geometría dinámica y la manera en que incorpora una dimensión empírica de experimentación al conocimiento matemático y como re-posiciona el razonamiento deductivo (Hadas et. Al., 2000). Consideremos también la posibilidad que nos ofrece la tecnología de modelar un fenómeno mediante una gráfica en lugar de hacerlo mediante una expresión algebraica permitiéndonos acceder a distintos aspectos de los objetos matemáticos en estudio (véase el ejemplo ilustrado en la figura 1). Hoyles (2018) y Drijvers (2018) presentan un análisis exhaustivo de la dimensión epistemológica.

La dimensión existencial se refiere a los valores que atribuimos a ciertos tipos de actividades y a la imagen que tenemos de nosotros mismos en relación con un cierto quehacer intelectual. Ruthven trae como ejemplo las posturas fuertemente antagónicas que despertó la calculadora de bolsillo ("desestimula el cálculo mental", "adormece el cerebro", "desestima el esfuerzo [que implica calcular]", "se aprende cómo manejar una máquina y no cómo hacer matemáticas").

¡Y llegó la pandemia! La nueva situación nos propulsó, quisiéramos o no, a usar tecnologías, aunque más no sea para comunicarnos con nuestros alumnos como si estuviéramos en clase. Conozco docentes que por primera vez en sus vidas debieron usar tecnología para dar clases, no les quedaba otra alternativa. Dudo que un uso obligatorio del que no hay escapatoria sea la manera óptima de "amigar" a docentes con la tecnología, superar los desafíos descriptos y además dejar de lado los propios temores, algunos constituyendo una verdadera amenaza a la propia identidad profesional. Drijvers et al. (2021), en un estudio realizado en tres países europeos hallaron que, en efecto y a pesar de ciertas diferencias, los docentes que se abocaron al uso masivo de las tecnologías de video conferencias lo hicieron a expensas del uso de herramientas digitales específicas de matemáticas, un uso que se redujo considerablemente en aquellos docentes que si las aplicaban.

Quizá sea muy temprano para saber el impacto a largo plazo y en escala global de la pandemia en el uso de tecnologías en el aula de matemáticas, y cuáles van a ser las características de ese uso.

Inteligencia artificial

Los dramáticos avances de investigación en inteligencia artificial y sus diferentes aplicaciones están ya impactando todos los órdenes de la vida diaria, la investigación científica, la economía y la medicina. Es muy natural entonces que se considere la incorporación de la inteligencia artificial, en especial cuando su aplicación podría solucionar acuciantes problemas. Consideremos, por ejemplo, uno de los principales objetivos de la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible (UNESCO, 2015): garantizar que todas las personas del mundo tengan el mismo acceso a una educación de calidad.

Para enfrentar ese desafío, el mundo necesita agregar más de 20 millones de docentes de escuelas primarias y secundarias a la fuerza laboral, y reemplazar los aproximadamente 47 millones de docentes que dejaran la profesión en las próximas décadas. Por lo tanto, parece natural y atractivo pensar en sustituir a los docentes por robots. La inversión inicial necesaria para digitalizar la profesión docente daría sus frutos, ya que una vez instalados y en funcionamiento, los robots no requerirán salarios, no necesitaran días libres y nunca llegarían tarde al trabajo y no sería muy difícil encarar un cambio de programas de estudio. Si se programan correctamente, estos robots tampoco mostrarán ningún sesgo hacia los estudiantes en función del género, la raza, estatus socioeconómico, la preferencia de personalidad u otra consideración (World Economic Forum, 2016). De alguna manera retornamos a las ilusiones primeras que despertaran los ordenadores en cuanto hicieron su aparición masiva de reemplazar al docente humano.

Este libreto en el que los humanos crean robots para reemplazar a los humanos y que para algunos tiene mucho sentido, nos produce no poca incomodidad, aun cuando su implementación no parezca factible, por lo menos a corto plazo. ¿Habría, quizás, un rol más realista para la inteligencia artificial en educación? Por ejemplo, asistir al docente o aportar a su desarrollo profesional como lo sugiere Luckin et al. (2016).

Una posible dirección a explorar sería el uso del "big data" (macrodatos). De la recopilación de más y más datos sobre los alumnos y sus acciones durante el aprendizaje puede que emerjan patrones claros. Estos patrones pueden servir de base empírica para decidir ciertos movimientos pedagógicos. Por ahora, parece haber una brecha entre la facilidad de recopilar grandes cantidades de datos de cualquier tipo y los posibles movimientos pedagógicos que pueden derivarse de su análisis. Además, a primera vista, parece haber una contradicción entre la tendencia a personalizar la enseñanza y la confianza en los datos masivos (patrones generalizados de acciones de aprendizaje) como recurso para el desarrollo profesional de la enseñanza de las matemáticas. El tiempo dirá si la investigación y el desarrollo de la inteligencia artificial, el aprendizaje automático o los macrodatos realmente producirán avances en el cumplimiento de la promesa depositada en ellos para convertirse en un recurso poderoso.

COLOFÓN

Desde mucho antes del advenimiento de los ordenadores personales, hubo líderes en educación matemática que se expresaban así: "Debemos esperar con confianza el eventual desarrollo de sistemas de enseñanza altamente efectivos que hoy en día son poco más que sueños" (Meserve, 1966). Aun sin poder imaginar el impresionante desarrollo de las tecnologías en poco más de medio siglo, existió la visión de que nuevas herramientas podrían cambiar la faz de la educación. Esa visión parece haberse materializado, ahora que esas tecnologías, inimaginables hace tan poco, ya existen y que su potencial ha sido reconocido y estudiado. Sin embargo, esta breve reseña describe los desafíos (algunos conocidos y otros imprevistos) que nos tendrán ocupados por muchos años, a los que nos dedicamos a la educación matemática. Está en nuestras manos tomar ventaja de lo que ya sabemos, de lo que ya existe y asumir la responsabilidad y el desafío de marchar hacia adelante para una mejor educación matemática de las nuevas generaciones.

Referencias

Arcavi, A. (2020). From tools to resources in the professional development of mathematics teachers: General perspectives and crosscutting issues. En O. Chapman y S. Llinares (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (2.ª ed., Vol. 2, pp. 421-437). Sense Publishers.

Arcavi, A. (2022). Geogebra – Tareas para sorprender. *Conferencia plenaria en VII Dia Geogebra Portugal.*

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, *5*(1), 25-45. https://doi.org/10.1023/A:1009841817245

Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, *30*(3), 14-17, 20-22, 43-46.

Bess, M. (2018). Technology isn't just changing society - it's changing what it means to be human. https://www.vox.com/technology/2018/2/23/16992816/facebook-twitter-tech-artificial-intelligence-crispr

Borba, M. C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S. y Sánchez Aguilar, M. S. (2016). Digital technology in mathematics education: Research over the last decade. En Kaiser, G. (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education ICME-13* (pp. 221-233). Springer Open.

Borko, H., Koellner, K., Jacobs, J. y Seago, N. (2011). Using video representations of teaching in practice based professional development programs. *ZDM Mathematics Education*, *43*(1), 175-187. https://DOI 10.1007/s11858-010-0302-5

Bruner, J. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, *19*(1), 1-15.

Calvin, A. (1969). *Programmed instruction: Bold new venture*. Indiana University Press.

Clarke, D. (2000). Time to reflect. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*(3), 201-203.

Cole. M. y Griffin, P. (1980). Cultural amplifiers reconsidered. En D. R. Olson (Ed.) *The Social Foundations of Language and Thought: Essays in Honor of Jerome S. Bruner* (pp. 343-364). W. W. Norton and Company.

Drijvers, P. (2018). Tools and taxonomies, a response to Hoyles. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 229-235. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1522269

Drijvers, P., Thurm, D., Vandervieren, E., Klinger, M., Moons, F., van der Ree, H., Mol, A., Barzel, B. y Doorman, M. (2021). Distance mathematics teaching in Flanders, Germany, and the Netherlands during COVID-19 lockdown. *Educational Studies in Mathematics*, *108*(1-2), 35-64. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10094-5

diSessa, A. (2000). *Changing Minds: Computers, Learning, and Literacy*. MIT Press.

Gagné, R. M. (1965). *Conditions of Learning*. Holt, Rinehart and Winston.

Hadas, N., Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in Dynamic Geometry environments. Educational Studies in Mathematics, *44*(1), 127-150. https://doi.org/10.1023/A:1012781005718

Hoyles, C. (2018). Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 209-228. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1484799

Karsenty, R. y Arcavi, A. (2017). Mathematics, lenses and videotapes: a framework and a language for developing reflective practices of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(5), 433-455. https://DOI 10.1007/s10857-017-9379-x

Luckin, R., Holmes, W., Griffiths, M. y Forcier, L.B. (2016). *Intelligence Unleashed. An argument for AI in Education*. Pearson. https://www.pearson.com/content/dam/corporate/global/pearson-dot-com/files/innovation/Intelligence-Unleashed-Publication.pdf

Meserve, B. (1966). Mathematics teachers, on guard! *The Mathematics Teacher*, *59*(6), 522-530.

Skinner, B. F. (1974). *About Behaviorism*. Vintage Books.

Oleson, A. y Hora, M.T. (2013). Teaching the way they were taught? Revisiting the sources of teaching knowledge and the role of prior experience in shaping faculty teaching practices. *Higher Education*, *68*(1), 29-45. https:// DOI 10.1007/s10734-013-9678-9

Papert, S. (1980). *Mindstorms. Children, Computers and Powerful Ideas*. Basic Books.

Pea., R. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. En Schoenfeld, A. (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 89-122). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Ruthven, K. (2022). Ergonomic, epistemological and existential challenges of integrating digital tools into school mathematics. *Asian Journal for Mathematics Education*, *1*(1), 7-18. https:// DOI: 10.1177/27527263221077314

Schwarts, G., Coles, A. y Arcavi, A. (2022). Leading mathematics teacher discussions during professional development: challenges, opportunities, and discussion sense. *For the Learning of Mathematics*, *42*(2).

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

UNESCO (2015). http://uis.unesco.org/sites/default/files/documents/fs39-the-world-needs-almost-69-million-new-teachers-to-reach-the-2030-education-goals-2016-en.pdf

World Economic Forum (2016). Why robots could replace teachers as soon as 2027. https://www.weforum.org/agenda/2017/12/why-robots-could-replace-teachers-as-soon-as-2027

DE LA TECNOLOGÍA A LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: ¿UNA VÍA DE DOBLE SENTIDO?

From technology to mathematics education: A two-way road?

Arnau, D.

Universitat de València – Estudi General

Resumen

En el campo de la resolución de problemas, la influencia inicial de la inteligencia artificial, tanto en la práctica educativa como en la metodología de investigación dio paso a una visión de la tecnología centrada en el profesorado donde se desconfiaba de las posibilidades del uso autónomo por parte del alumnado. En esta comunicación se reflexiona sobre los efectos de este cambio de paradigma tanto desde el punto de vista de las consecuencias en el desarrollo de entornos tecnológicos como en la aparición de teorías dominantes y su influencia en la investigación. Con este fin se esbozan los diseños de dos investigaciones sobre la resolución de problemas verbales. En un caso la tecnología no se diseñó con intenciones educativas y, en el otro, se diseñó desde conocimiento específico de la didáctica de la matemática.

Palabras clave: *hojas de cálculo, problemas verbales, resolución de problemas, sistemas tutoriales inteligentes, tecnología educativa.*

Abstract

In the field of problem solving, the initial influence of artificial intelligence, both in educational practice and research methodology, gave way to a teacher-centred vision of technology where the possibilities of autonomous use by students were mistrusted. In this communication, we reflect on the effects of this paradigm shift both from the point of view of the consequences in the development of technological environments and the emergence of dominant theories and their influence on research. To this end, the designs of two investigations on solving word problems are outlined. In one case, the technology was not designed with educational intentions, and, in the other case, the technology was designed from specific knowledge of the didactics of mathematics.

Keywords: *educational technology, intelligent tutoring systems, problem solving, spreadsheets, word problems.*

LAS EXPECTATIVAS DEPOSITADAS EN EL DESARROLLO TECNOLÓGICO PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En la década de los 70 del siglo pasado la miniaturización de los componentes electrónicos permitió el desarrollo de computadoras de tamaño similar al de las computadoras actuales. Aunque inicialmente su precio no las hacía accesibles a nivel de aula, la comunidad investigadora en el campo de las ciencias de la computación inició el estudio de soluciones tecnológicas con intenciones educativas. Un ejemplo representativo de estos primeros intentos lo encontramos en el desarrollo del lenguaje de programación LOGO y en los estudios sobre las posibilidades, en entornos educativos reales, del uso de lenguajes de programación como marcos para la enseñanza de las matemáticas (Feurzeig et al., 1970).

Arnau, D. (2022). De la tecnología a la educación matemática: ¿una vía de doble sentido? En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 17-29). SEIEM.

Las expectativas generadas idealizaron un futuro donde el uso de la tecnología sería algo común y, en el campo de la educación, se especuló con la posibilidad de implementar computadoras dotadas de inteligencia artificial (en adelante, IA) capaces de sustituir a los profesores humanos. Sin embargo, estas expectativas se vieron frenadas por las dificultades en la generación de nuevas soluciones teóricas en el campo de la IA. Así, durante la parte final del siglo XX se produjeron, de manera cíclica, estancamientos importantes en este campo. A cada una de estas crisis se les dio el nombre de *Invierno IA* (*AI Winter*) (McDermott et al., 1985). Es habitual considerar que el primer Invierno IA se produjo a mediados de los años 70. Sin embargo, la década de los 80 trajo nuevas esperanzas de la mano de nuevos lenguajes de programación y del desarrollo de computadoras más potentes que permitieron la implementación de *sistemas expertos*. Estos sistemas expertos pretendían participar en la toma de decisiones que debían asumir humanos en situaciones complejas o incluso llevarlas a cabo de manera autónoma. En el campo educativo, los sistemas expertos se pretendieron usar como el núcleo de lo que se llamarían *sistemas tutoriales inteligentes* (en adelante, STI). La comunidad investigadora en educación matemática fue permeable a estas novedades y, de manera modesta, algunos grupos de investigación iniciaron el desarrollo de STI capaces de realizar ciertas acciones típicas del profesorado de matemáticas. Así, durante este periodo surgieron aplicaciones como Word Problem Assistant (Thompson, 1989), Geometry Tutor (Anderson et al., 1985), Mentoniezh (Py, 1993). Al mismo tiempo, la confianza en los futuros desarrollos provenientes de la IA se reflejó en el espacio dedicado en reuniones internacionales y en compendios de investigación. Así, por ejemplo, dentro de las conclusiones del grupo de trabajo de tecnología del ICME VI, Fey (1989) apuntaba que "Hay un pequeño pero creciente cuerpo de investigación en educación matemática que pretende combinar el conocimiento de la ciencia cognitiva y de la inteligencia artificial para producir sistemas tutoriales 'expertos' para ciertos contenidos" (p. 266).

Pero la IA no solo fue vista como una posibilidad para la práctica educativa. La publicación del libro *Human Problem Solving* (Newell y Simon, 1972) influyó en una reorganización de la metodología de investigación en el campo de la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas. En principio este libro no tenía intenciones educativas, sino que pretendía determinar cómo los humanos piensan cuando resuelven problemas. De hecho, se indicaba que "si la actuación no se comprende bien, es prematuro estudiar el aprendizaje" (Newell y Simon, 1972, p. 8). Sin embargo, el interés que planteaba en la comprensión de los procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas proporcionaba una metodología de investigación que podía aplicarse en el campo de la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas. Esta metodología se caracterizaba, entre otros aspectos, por ser una teoría del individuo; orientada al contenido; empírica, pero no experimental; y no estadística.

La publicación de *Human Problem Solving* coincidió con un movimiento dentro del área de didáctica de la matemática donde se ponía en duda la capacidad de las metodologías estadísticas para desarrollar conocimiento (Freudenthal, 1982; Kilpatrick, 1978; Schoenfeld, 1994). Las alternativas para la investigación en el campo del aprendizaje y enseñanza de la resolución de problemas se centraron en metodologías basadas en el individuo donde los sujetos debían ser estudiados de manera intensiva en el tiempo y donde se dio prioridad a protocolos basados en pensar en voz alta (Schoenfeld, 1985). De manera más especulativa, se plantearon también metodologías basadas en el uso de la IA.

> El trabajo en inteligencia artificial y campos relacionados (como la psicología del procesamiento de la información y la ciencia cognitiva en última instancia) ha producido un conjunto de métodos que son claramente 'científicos'. Por ejemplo, la implementación exitosa de un programa que resuelve problemas, proporciona una prueba empírica de que determinadas ideas teóricas sobre el pensamiento realmente 'funcionan' (Schoenfeld, 1994, pp. 707-708).

Con todo, hacía principios de los años 90, las dificultades en el campo de las ciencias de la computación condujeron a un segundo Invierno IA que se manifestó en un pesimismo de las posibilidades de los STI en el campo de la educación (Balacheff y Kaput, 1996). En este sentido, McArthur y Lewis (1998) concluyeron que la búsqueda de entornos inteligentes flexibles que apoyaran a un estudiante en la resolución de problemas se había convertido en la búsqueda de una quimera. Y así, mientras la potencia de los ordenadores aumentaba rápidamente, la evolución de los STI en el campo de la resolución de problemas avanzaba muy lentamente. Lo anterior coincidió en el tiempo con la proliferación de sistemas operativos que proporcionaban interfaces gráficas y esto, posiblemente, dio pie a centrar la atención en los *micromundos* y en las posibilidades educativas de la expresión del contenido matemático mediante múltiples sistemas de representación. La pretensión inicial de los desarrollos apoyados en IA, donde se tenía la intención de reducir la distancia entre el entorno tecnológico y entorno habitual, fue sustituida por el aprovechamiento educativo de esa distancia.

A partir de ese momento, la atención de la didáctica de la matemática hacia la IA, y a los desarrollos tecnológicos dirigidos a un uso independiente por parte del alumnado, ha sido escasa tanto desde el punto de vista de la investigación como de la práctica educativa. En este último caso, esto se ha reflejado de manera indirecta en una falta de confianza en las posibilidades del uso autónomo de la tecnología por parte del alumnado. Esta falta de confianza se plasmó de manera patente en las recomendaciones ligadas al Principio Tecnológico de los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) donde se enfatizaba que "La tecnología no sustituye al profesorado de matemáticas. Cuando el alumnado utiliza herramientas tecnológicas, a menudo dedican tiempo a trabajar en forma que parece que lo hacen independientemente del profesorado, pero esta impresión es engañosa" (p. 26). Esta visión de la tecnología centrada en el profesorado también se ha instalado en la propia investigación en el área. Así, en una revisión bibliográfica realizada por del Olmo-Muñoz et al. (en prensa) se concluyó que las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas donde el alumnado hace un uso de la tecnología no mediado por el profesorado han sido prácticamente inexistentes. Posiblemente esta tendencia sea consecuencia de las perspectivas generadas en las agendas de investigación sobre dónde centrar el foco en el uso de la tecnología en la didáctica de la matemática. Así en *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain*, la publicación donde se recogen las discusiones del ICMI Study 17 dedicado al uso de la tecnología en la educación matemática, y dentro del capítulo dedicado a las perspectivas teóricas, se hace hincapié en dedicar atención a los procesos de génesis instrumental y mediación semiótica, el papel del profesor en un entorno de aprendizaje enriquecido tecnológicamente, y la influencia de las herramientas disponibles en las tareas y en el diseño de tareas (Drijvers et al., 2010). En estas recomendaciones podemos distinguir dos focos principales. Por un lado, la tendencia a asignar al profesorado de matemáticas el rol principal del uso de la tecnología; por otro, la necesidad de atender a una evolución en el uso de la tecnología desde un punto inicial donde esta se presenta al alumnado como algo extraño.

La situación descrita, donde se parte de que la tecnología es un artefacto, podría ser el resultado de una falta de influencia del área de la didáctica de la matemática en el desarrollo de soluciones tecnológicas. Esto podría tener como consecuencia que la investigación en el área se convirtiera en mera consumidora de una tecnología diseñada desde campo ajenos. Evidentemente, los marcos teóricos, las metodologías y los propios objetivos de investigación podrían ser la consecuencia de esta falta de protagonismo. Con este fin, reflexionaremos sobre dos ejemplos de investigación en el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. En el primero, la solución tecnológica es ajena al área; en el segundo, la tecnología se diseña y evoluciona desde el área.

De la tecnología a la Educación Matemática

Desde la implementación de las primeras hojas de cálculo a principio de la década de los 80, se observó su potencial para la enseñanza de la resolución de problemas verbales. Así, Arganbright (1984,

p. 187) afirmó que: "La hoja electrónica de cálculo puede ser usada para complementar el estudio de los problemas verbales en álgebra [...] Las capacidades '¿Y si...?' de la hoja de cálculo fomentan la experimentación de ensayo y error".

Dentro de la comunidad investigadora emergieron grupos de investigaciones centrados en analizar el potencial de la hoja de cálculo como una herramienta para ser utilizada en los primeros momentos de la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales. Así, el *Spreadsheet Algebra Project* fue un proyecto británico-mexicano que desarrollaron Teresa Rojano y Rosamund Sutherland en la década de los 90 en el que se analizó cómo alumnado sin conocimientos previos o con un largo historial de dificultades en el área de matemáticas desarrollaba las ideas de función y función inversa, expresiones algebraicas equivalentes y la resolución de problemas verbales usando el entorno de la hoja de cálculo (Rojano y Sutherland, 1991; Sutherland y Rojano, 1993). Entre las conclusiones finales del proyecto, y para el caso de la resolución de problemas verbales, se destacaba un aumento por parte del alumnado de la percepción de las relaciones entre cantidades; el uso del simbolismo de la hoja de cálculo para expresar relaciones generales; y una evolución hacia un método más general y algebraico consistente en ir de lo desconocido a lo conocido. En una línea similar, Friedlander (1996, 1999) concluyó que la resolución de problemas con la hoja de cálculo favorecía que el alumnado buscara esquemas, construyera expresiones algebraicas, generalizara y justificara conjeturas. En concreto, señalaba que el entorno ofrecía ventajas en la transición gradual de la aritmética al álgebra, ya que: "liberan al estudiante de la tarea de los cálculos y manipulaciones algebraicas; [...] permiten un movimiento libre de vaivén entre el mundo de los números y el del álgebra; presentan un medio en el cual el uso del álgebra es una necesidad natural, más que un requisito arbitrario" (Friedlander, 1996, p. 71). El estudio de Dettori et al. (2001) coincidió en identificar algunas nociones algebraicas que podían desarrollarse usando la hoja de cálculo para resolver problemas verbales como: usar relaciones y sintetizar ecuaciones, iniciar en el uso de variables e incógnitas, introducir al estudio de funciones, comprobar los resultados, razonar sobre el rango de la solución, generalizar los problemas mediante parámetros y aprender el lenguaje del álgebra.

Sin embargo, en estas investigaciones también se identificaban algunos posibles obstáculos asociados al uso de la hoja de cálculo. De este modo, el potencial de la hoja de cálculo a la hora de producir gran cantidad de datos podría conducir a que el alumnado realizara un esfuerzo menor para lograr una comprensión adecuada de las situaciones problemáticas (Dettori et al., 2001; Friedlander, 1999; Rojano y Sutherland, 1991). Otro aspecto señalado como conflictivo se encontraría en el carácter aritmético o algebraico de las expresiones representadas en la hoja de cálculo. Así, Capponi y Balacheff (1989) sostenían que el uso de la hoja de cálculo requería de la manipulación de expresiones con letras, pero que el carácter algebraico de estas manipulaciones no era evidente. De hecho, identificaron dos problemas asociados al lenguaje de la hoja de cálculo: la prioridad que el entorno da al cálculo y la necesidad de integrar en las expresiones de la hoja de cálculo la sintaxis del álgebra y la de la hoja de cálculo. Como posible peligro en la enseñanza, estos autores apuntaban que la prioridad en el cálculo podría inducir a los estudiantes a interpretar las fórmulas como descripciones de cálculos numéricos, en lugar de relaciones entre datos.

La necesidad de precisar la relación entre el simbolismo de expresiones matemáticas usadas en la hoja de cálculo y en lápiz y papel dio lugar a una importante producción investigadora (Drouhard y Teppo, 2004; Friedlander y Tabach, 2001; Tabach et al., 2008; Wilson, 2006). En estos trabajos, se destacaba el carácter híbrido del lenguaje de la hoja de cálculo que permitía al mismo tiempo una representación formal y una retroalimentación numérica. Sin embargo, este carácter híbrido no necesariamente debía considerarse como un recurso fácilmente accesible. De hecho Haspekian (2005) indicaba que la utilización de la hoja de cálculo para el aprendizaje del álgebra exige de un proceso de génesis instrumental. Así, en el lenguaje del álgebra las variables se representan mediante un símbolo (una letra) conectado a un conjunto de valores posibles. En el entorno de la hoja de cálculo, una variable también se representa mediante un símbolo (un *argumento de celda*) y existe en referencia a un conjunto de valores. Sin embargo, a diferencia de la letra en álgebra, este argumento de celda ofrece al mismo tiempo: una referencia general abstracta que representa a la variable (de hecho, la formula refiere a ella, haciéndole jugar el papel de variable); una referencia concreta particular que se expresa mediante un número; una referencia geográfica que se expresa mediante una dirección especial en la hoja; y una referencia material en la que la celda puede verse como un compartimento.

Otro aspecto analizado fueron las diferencias entre el uso del signo igual en la hoja de cálculo y en lápiz y papel. Así, para Dettori et al. (2001), la hoja de cálculo no permitía expresar ecuaciones, ya que el signo igual en la hoja de cálculo significa "asignación de un valor calculado a una celda, mientras que en álgebra indica relación" (p. 199). En Drouhard y Teppo (2004) se realizó un estudio comparativo del lenguaje del álgebra y de la hoja de cálculo donde concluyó que: (a) las fórmulas del tipo =A1+2 serían equivalentes a expresiones algebraicas del tipo x+2, donde el signo igual de la fórmula solo sería una señal que indicaría la necesidad de realizar la operación aritmética asociada; y (b) las fórmulas del tipo =SI(A1=B1;"verdadero";"falso") podrían ser consideradas como una manera de expresar ecuaciones del tipo $A = B$.

Arnau (2010): Un estudio sobre la resolución algebraica en la hoja de cálculo

En Arnau (2010) se planteaba una estudio sobre las posibilidades de la hoja de cálculo para desarrollar un método de resolución de problemas verbales que pudiera ser utilizado como mediador entre la resolución aritmética y la algebraica. Como parte del marco teórico se partía de que las situaciones de enseñanza y aprendizaje pueden ser interpretadas como procesos de comunicación y producción de sentido (Puig, 2008) y que la enseñanza tiene como una de sus intenciones lograr que los estudiantes lleguen a ser usuarios competentes de un sistema matemático de signos (en adelante, SMS) (Filloy, 1999). De acuerdo con Kieran y Filloy (1989), durante el aprendizaje el alumnado utiliza SMS intermediarios que deberán ser rectificados con la finalidad de que lleguen a ser competentes en SMS más abstractos. Estos mismos SMS intermediarios pueden ser utilizados como instrumentos para la creación de métodos de enseñanza mediadores. Para la construcción de estos métodos mediadores se parte de un modelo de competencia y, manteniendo parte de base lógica, se sustituye el SMS más abstracto por un SMS menos abstracto. En el caso que nos ocupa, el modelo de competencia en la resolución algebraica de problemas verbales implicaría el uso del SMS del álgebra y vendría descrito mediante una división en pasos ideales del método cartesiano (en adelante, MC).

1. Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
2. Elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).
3. Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.
4. Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso), igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad.
5. Transformación de la ecuación en una forma canónica.
6. Aplicación de la fórmula o algoritmo de solución a la ecuación en forma canónica.

7. Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema. (Filloy et al., 2008, p. 330)

En la elaboración del método de resolución de la hoja de cálculo (en adelante, MHC) se tuvo en cuenta tanto el MC como las reflexiones teórico-empíricas de trabajos previos sobre las similitudes del SMS de la hoja cálculo y el del álgebra. Básicamente, se sustituyo el SMS del álgebra por el SMS de la hoja de cálculo y no se tuvieron en cuenta los pasos posteriores al planteamiento de la ecuación (paso 4 del MC), pues no era posible llevar a cabo las transformaciones algebraicas usando el SMS de la hoja de cálculo.

1. Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
2. La asignación de una celda a una o varias cantidades desconocidas y la elección de una única cantidad desconocida representada en una celda de la que dependerán directa o indirectamente el resto de cantidades desconocidas representadas. A esta cantidad la llamaremos *cantidad de referencia* y a la celda que ocupa, *celda de referencia*.
3. Representar en las celdas anteriores (excepto en la celda de referencia) fórmulas que describen la relación que esas cantidades desconocidas tienen con otras cantidades.
4. El establecimiento de una ecuación, lo que se hace igualando dos expresiones que representan la misma cantidad.
5. La variación del valor presente en la celda de referencia hasta conseguir que se verifique la igualdad. Con este fin, replicaremos los pasos 3 y 4 sobre una secuencia de posibles valores de la cantidad representada en la celda de referencia.
6. Interpretación del valor que verifica la igualdad en términos del problema. (Arnau, 2010, p. 44)

Evidentemente ambos métodos difieren en SMS empleado, pero mantienen una parte lógica común (pasos 1-4). Para comparar de manera práctica ambos métodos utilizaremos el problema *Conejos y gallinas* (En una granja, entre gallinas y conejos hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?). Una resolución del problema *Conejos y gallinas* usando el MC podría conducir a la ecuación $4x+2(20-x)=52$, donde x representaría a la cantidad número de conejos. En la Figura 1 se presenta una resolución mediante el MHC del problema *Conejos y gallinas*. Podemos observar que la cantidad “nº de conejos” se asocia a una celda en blanco y que el resto de cantidades desconocidas dependen, directa o indirectamente de ella. En la comparación entre los procedimientos de resolución, se observa que “nº de gallinas” se expresaría en el lenguaje del álgebra mediante la expresión algebraica $20-x$ mientras que en el lenguaje de la hoja de cálculo se le asignaría la fórmula =20-B1. En este caso el signo igual es un igual de asignación, pues la intención es indicar que el valor de la celda B2 se obtiene restando a 20 el valor de la celda B1. En cuanto a la fórmula presente en la celda B6 (=52=B5), el primer igual es de asignación (en este caso se asigna un valor booleano a B6) y el segundo es de comparación. Una vez hecho el planteamiento anterior, para poder dar respuesta al problema, deberíamos iniciar un procedimiento de prueba de valores en la celda B1 hasta conseguir que la celda B6 tomará el valor VERDADERO. En definitiva, podemos observar la presencia de las mismas relaciones en las dos resoluciones. De hecho, si comparamos las lecturas analíticas realizadas al resolver el problema *Conejos y gallinas* usado el MHC y el MC, concluiremos que es la misma y que se expresaría mediante:

- número de animales (conocida) es igual número de conejos (desconocida) más número de gallinas (desconocida);

- total de patas de gallina (desconocida) es igual a número de gallinas (desconocida) por número de patas por gallina (conocida);
- total de patas de conejo (desconocida) es igual a número de conejos (desconocida) por número de patas por conejo (conocida);
- total de patas de animales (conocida) es igual a total de patas de conejo (desconocida) más total de patas de gallina (desconocida).

	A	B	C
1	nº de conejos		paso 2 MHC
2	nº de gallinas	=20-B1	paso 3 MHC
3	nº de patas de conejo	=4*B1	paso 3 MHC
4	nº de patas de gallina	=2*B2	paso 3 MHC
5	nº de patas	=B3+B4	paso 3 MHC
6		=52=B5	paso 4 MHC

Figura 1. Resolución mediante el MHC del problema Conejos y gallinas.

Pero, más allá de los anuncios de un posible potencial de la hoja de cálculo y sobre la posible equivalencia entre lenguajes, en Arnau (2010) se aplicó una secuencia de enseñanza basada en el MHC con una duración de 13 sesiones. En la experiencia participó un grupo natural de 22 sujetos de segundo de secundaria que había sido instruido previamente en la resolución algebraica de problemas verbales. Para determinar la influencia de la instrucción se les administró un pretest y un postest formados por ocho problemas que, típicamente, exigían una resolución algebraica. Los resultados mostraron que se produjo un incremento del 2,4% en el éxito en la resolución entre el post y el pre; pero, al mismo tiempo, el recurso al SMS del álgebra se redujo en un 6,2%. Lo anterior ponía de manifiesto que una instrucción basada en el MHC podía tener un efecto (ligero) en la competencia en la resolución de algebraica; pero la disminución en el uso del SMS del álgebra apuntaba a que el efecto no suponía un aumento en la competencia en el MC. De hecho, tras la instrucción se observaba un incremento de estrategias basadas en el ensayo y error apoyadas sobre el SMS de la aritmética. En definitiva, como la mayoría de los trabajos previos, los resultados presentados en Arnau (2010) arrojaban luces y sombras sobre el uso de la enseñanza de la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo como una forma de avanzar hacia la competencia en el método cartesiano.

DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA A LA TECNOLOGÍA

En *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Wagner y Kieran (1989) esbozaron una agenda de investigación en la que, entre otras, se planteaban estas preguntas: "¿Qué es un problema verbal algebraico? ¿Hay problemas verbales que son intrínsecamente algebraicos? ¿Cuándo un método de resolver problemas verbales es más algebraico que aritmético?" (p. 226). En los trabajos de Cerdán (2007) y Filloy et al. (2008) se concluyó que la respuesta a las dos primeras preguntas exigía no únicamente tener en cuenta las características del problema, sino que también era necesario incluir a la persona que resolvía y a los medios que utilizaba para conseguirlo. En consecuencia, lo que podría considerarse como aritmético o algebraico no sería el problema, sino la lectura analítica o la resolución que realizara un sujeto. Por otro lado la separación entre lectura analítica y el SMS empleado para materializar la resolución abría nuevas perspectivas para dar respuesta a la tercera pregunta de Wagner y Kieran (1989). Así el carácter aritmético o algebraico de un método no puede ligarse únicamente al SMS utilizado, sino que también debe tenerse en cuenta las características del entramado de relaciones entre cantidades al que se reduce un problema, pues esto pondrá de manifiesto si la resolución debe desencadenarse desde lo conocido o desde lo desconocido. En el caso de la lectura analítica del problema *Conejos y gallinas*, presentada al final de la sección anterior, se observa que en todas las relaciones hay más de una cantidad desconocida. Esto implicaría que no es posible realizar la resolución yendo de lo conocido a lo desconocido y, por lo tanto, la lectura analítica realizada se definiría como algebraica (Filloy et al., 2008). No obstante, el carácter algebraico de esta lectura analítica, el problema podría ser resuelto usando SMS distintos al del álgebra a partir de este entramado de relaciones entre cantidades. Así, en la sección anterior se usaba el SMS de la hoja de cálculo, pero también podría usarse el SMS de la aritmética y realizar una resolución por ensayo y error. Para finalizar esta breve discusión, conviene señalar que para un mismo problema pueden existir lecturas analíticas diferentes y, en ocasiones, estas pueden ser tanto aritméticas como algebraicas (Cerdán, 2007; Filloy, Rojano y Puig, 2008).

Partiendo del metalenguaje de los grafos trinomiales (Cerdán, 2007; Fridman, 1990; Filloy, Rojano y Puig, 2008), en Arnau (2015) se desarrolla una manera de representar las lecturas analíticas mediante hipergrafos orientados. Más allá de una mera representación del entramado de relaciones entre cantidades, e independientemente del SMS empleado, es posible expresar parte de la resolución de un problema verbal mediante acciones sobre un hipergrafo. A partir de estas ideas teóricas, hemos desarrollado un STI de nombre HINTS (Arnau et al., 2013) con las siguientes características básicas: (1) el programa no supone una asignación predeterminda entre una cantidad y su representación en un SMS, sino que comprueba la validez de la representación atendido a las restricciones del problema y a las decisiones previas del resolutor; (2) el programa, apoyado sobre la base lógica que proporciona el metalenguaje de los hipergrafos, permite resolver los problemas utilizando diversos SMS; y (3) los mensajes de error y ayuda no están predeterminados y se generan atendiendo al contenido y al estado de la resolución. El hecho de que HINTS pueda emular parte de las acciones que realiza el profesorado humano cuando participa en situaciones de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas verbales (Arnau et al., 2014) ofrece posibilidades no solo desde el punto de la enseñanza y el aprendizaje, sino también desde el punto de vista de la investigación. Así, proporcionar una computadora dotada de un STI a cada estudiante permite una recogida de datos intensiva y controlada tanto de las variables de producto como de las variables de proceso. De este modo, el uso de STI permite abordar problemas de investigación ya estudiados anteriormente desde nuevas perspectivas (véase, por ejemplo, del Olmo-Muñoz et al. (2022)) o plantear nuevas líneas investigación.

Pérez-Buj et al. (2021): Un estudio sobre la resolución aritmética usando SMS alternativos

La resolución aritmética y algebraica de problemas verbales exige asignar a las cantidades una representación no ambigua. En Cerdán (2007) se define la idea de diccionario de cantidades de un problema como un conjunto de ternas (x, u, n), donde x sería el número, letra o expresión algebraica que se le asigna a una cantidad; u sería la unidad de magnitud de la misma; y n sería “la manera en la que en el lenguaje vernáculo proporcionamos un sentido” (p. 33). Aunque la representación completa y no ambigua solo se consigue teniendo en cuenta la globalidad de la terna, podemos confiar en que el recurso al primer componente sería lo suficientemente preciso como para evitar equívocos. Por esta razón, cuando se resuelve de manera aritmética, es habitual referirse a las cantidades desconocidas por el número que las representa y, cuando se resuelve de manera algebraica, mediante una letra o expresión algebraica. Sin embargo, el uso de esta manera de representar las cantidades supone que, cuando se inicia la enseñanza de la resolución algebraica de problemas, el alumnado debe sustituir el SMS sobre el que habitualmente construyen sus razonamientos. Por el contrario, al fijar la atención en el último componente, encontramos que el uso de un nombre preciso para las cantidades proporcionaría una representación no ambigua que se mantendría invariante tanto en la resolución aritmética como en la algebraica. Al mismo tiempo, y apoyándonos en que la relación entre la comprensión lectora y la competencia en la resolución de problemas verbales ha sido ampliamente constatada (Barnett, 1979; Boonen et al., 2014; Sanz et al., 2019), el recurso a la representación de las cantidades mediante nombres podría permitir un enlace más preciso con la semántica del problema y posibilitaría de esta manera la identificación de esquemas conceptuales adecuados.

Partiendo de la base anterior, en Pérez-Buj et al. (2021) se presenta un estudio que tiene como uno de sus objetivos determinar el potencial de apoyar la resolución aritmética de problemas verbales sobre los nombres de las cantidades en lugar de hacerlo sobre los valores numéricos. Los participantes fueron cuatro grupos naturales de quinto de primaria. Se configuraron dos condiciones experimentales a las que se asignaron los nombres de condición de control y condición experimental. En ambas condiciones, en la primera y en la última sesión, se administraron dos cuestionarios formados por problemas verbales típicamente aritméticos. La comparación de estos cuestionarios pretendía medir el efecto de la intervención. Durante las sesiones centrales, las personas participantes resolvieron problemas verbales multietapa, típicamente aritméticos, bajo la supervisión de HINTS. En ambas condiciones, la interfaz de HINTS proporcionaba el enunciado del problema, cuatro botones con las operaciones básicas y un botón para abandonar el problema en el caso que la persona que resolvía el problema lo considerase necesario. Cuando se finalizaba o abandonaba un problema, HINTS planteaba de manera automática el siguiente hasta agotar los problemas de cada sesión. En la condición de control, se proporcionaban botones que incluían los valores de las cantidades conocidas; mientras que, en la condición experimental (Figura 2), los botones incluían los nombres de las cantidades. De manera común en las dos condiciones, HINTS identificaba y notificaba las acciones incorrectas y generaba un nuevo botón, con el valor o nombre según la condición, cuando la operación planteada era correcta.

Figura 2. Condición experimental.

En este caso se observa que, a diferencia del caso de la hoja de cálculo, la implementación del entorno tecnológico responde a una intención didáctica y que la configuración experimental, la cual sería difícilmente abordable en una situación con lápiz y papel, se aprovecha de la teoría subyacente que es la base del diseño.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el caso de la transferencia de la tecnología hacia la didáctica de la matemática, se observa que los esfuerzos de teorización han sido posteriores a la implementación de la tecnología. Estos esfuerzos se han dirigido principalmente a generar marcos teóricos que permitieran identificar diferencias y similitudes entre la resolución de tareas en el entorno tecnológico y en lápiz y papel, analizar los procesos de producción de sentido cuando se utiliza la tecnología, y describir el proceso de apropiación de la herramienta tecnológica. Sin embargo, el recurso a este tipo de teorías podría reducir la investigación a una mera descripción de fenómenos sin capacidad de producir impacto real en el aula. Así, en el caso concreto de las investigaciones sobre el uso de la hoja de cálculo para la enseñanza de la resolución algebraica de problemas, podemos concluir que las diferentes investigaciones consiguieron establecer una imagen precisa de la ventajas e inconvenientes asociadas a su uso. Sin embargo, las conclusiones derivadas no repercutieron en la modificación de la tecnología o en el diseño de nuevas soluciones adaptadas a las necesidades educativas. En este sentido, Capponi y Balacheff (1989) planteaban dos limitaciones –la prioridad que el entorno da al cálculo y la necesidad de integrar en las expresiones de la hoja de cálculo la sintaxis del álgebra y la de la hoja de cálculo– que hubiera sido posible atender mediante la implementación de hojas de cálculo con intenciones puramente educativas. En ellas se habría podido sustituir el SMS de la hoja de cálculo por otro más próximo al SMS del álgebra donde se diera prioridad a la sustitución algebraica. Este tipo de modificaciones habría producido una mayor proximidad entre el entorno tecnológico y el entorno de referencia. Sin embargo, y de manera general, la influencia de la didáctica de la matemática en la tecnología generada ha sido reducida, y, posiblemente, esta escasa influencia podría poner de manifiesto un problema más general: la carencia de proyección de los resultados de investigación en la práctica real de aula.

Por el contrario, la implementación de soluciones tecnológicas a partir de conocimiento específico de la didáctica de la matemática permite impactar en la práctica real educativa y posibilita abordar nuevos problemas de investigación o revisitar problemas antiguos desde nuevos puntos de vista. Posiblemente la combinación del rechazo de la comunidad investigadora a las posibilidades del uso autónomo de la tecnología por parte del alumnado, junto con una confianza en la capacidad del profesorado para orquestar el uso de la tecnología, ha tenido como consecuencia dejar de lado la necesidad de diseñar una tecnología transparente en la que la distancia entre el entorno tecnológico y el entorno de referencia pudiera ser nula. La regulación de esta distancia podría ser utilizada para producir nuevas situaciones de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como se ha intentado mostrar en el diseño de investigación donde se usaba HINTS. Por otro lado, las posibilidades que ofrecen los STI de atender de manera individualizada al alumnado, emulando parte de las acciones que realiza el profesorado humano y realizando una recogida intensiva de datos, podrían permitir difuminar, en parte, la habitual separación entre metodologías cualitativas y cuantitativas.

Para finalizar, resulta sorprendente el poco interés que se ha prestado desde el área a las soluciones basadas en IA en los últimos 25 años (del Olmo-Muñoz et al., en prensa). A diferencia de la atención que se dedicó a la IA durante el siglo XX, la revolución que se ha producido en el campo de la IA en los últimos años ha generado un escaso debate en el área de didáctica de la matemática (para una excepción, véase, Richard et al. (2022)). Posiblemente esto haya sido el resultado de las orientaciones teóricas y metodológicas dominantes en el área. Quizá sería el momento de dedicar un tiempo a una reflexión encaminada a determinar si los esfuerzos para generar teorías que se propusieron en los años 80 y 90 del siglo pasado, así como los cambios metodológicos asociados, han producido los resultados esperados.

Agradecimientos

Trabajo realizado al amparo de los proyectos PGC2018-096463-B-100, financiado por MCIN/ AEI /10.13039/501100011033/ y por FEDER Una manera de hacer Europa, y AICO/2021/019, financiado por la Generalitat Valenciana.

Referencias

Anderson, J. R., Boyle, C. F. y Reiser, B. J. (1985). Intelligent tutoring systems. *Science, 228*(4698), 456-462.

Arganbright, D. E. (1984). Mathematical applications of an electronic spreadsheet. En V. P. Hansen y M. J. Zweng (Eds.), *Computers in mathematics education* (pp. 184-193). National Council of Teachers of Mathematics.

Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. [Tesis doctoral]. Universitat de València.

Arnau, D. (2015). Hacia profesores artificiales en la resolución algebraica de problemas verbales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 45-59). SEIEM.

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M. y González-Calero, J. A. (2014). Emulating human supervision in an intelligent tutoring system for arithmetical problem solving. *Learning Technologies, IEEE Transactions on, 7*(2), 155-164. https://doi.org/10.1109/TLT.2014.2307306

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M., Puig, L. y González-Calero, J. A. (2013). Fundamentals of the design and the operation of an intelligent tutoring system for the learning of the arithmetical and algebraic way of solving word problems. *Coputers & Education, 63*, 119-130. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.11.020

Balacheff, N. y Kaput, J. J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 469-501). Kluwer Academic Publishers.

Barnett, J. (1979). The study of syntax variables. En G. A. Goldin y C. E. McClintock (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving* (pp. 23-68). ERIC/SMEAC.

Boonen, A. J. H., van Wesel, F., Jolles, J. y van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. International *Journal of Educational Research, 68*, 15-26. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.08.001

Capponi, B. y Balacheff, N. (1989). Tableur et calcul algebrique. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 179-210.

Cerdán, F. (2007). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos* [Tesis doctoral]. Universitat de València.

del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A., Diago, P. D., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. (en prensa). Intelligent Tutoring Systems for word problem solving in COVID-19 days: Could they have been (part of) the solution? *ZDM-Mathematics Education*.

del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A., Diago, P. D., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. (2022). Using intra-task flexibility on an intelligent tutoring system to promote arithmetic problem-solving proficiency. *British Journal of Educational Technology, online first*.

Dettori, G., Garuti, R. y Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 191-207). Kluwer Academic Publishers.

Drijvers, P., Kieran, C. y Mariotti, M.-A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. En C. Hoyles y J. B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain* (pp. 89-132). Springer.

Drouhard, J. P. y Teppo, A. R. (2004). Symbols and language. En K. Stacey, H. L. Chick y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 227-264). Kluwer Academic Publishers.

Feurzeig, W., Papert, S., Bloom, M., Grant, R. y Solomon, C. (1970). Programming-languages as a conceptual framework for teaching mathematics. *SIGCUE Outlook, 4*(2), 13-17.

Fey, J. T. (1989). Technology and mathematics education: A survey of recent developments and important problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(3), 237-272. https://doi.org/10.2307/3482471

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias, 26*(3), 327-342.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. Springer.

Freudenthal, H. (1982). Fiabilité, validité et pertinence: Critères de la recherche sur l'enseignement de la mathématique. *Educational Studies in Mathematics, 13*(4), 395-408.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. *Matemáticas. Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, 17-18*, 51-59.

Friedlander, A. (1996). Superproblemas del álgebra en hojas de cálculo. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, 9, 71-75.

Friedlander, A. (1999). Cognitive processes in a spreadsheet environment. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education.* (pp. 337-344). PME.

Friedlander, A. y Tabach, M. (2001). Developing a curriculum of beginning algebra in a spreadsheet environment. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 252-257). The University of Melbourne.

Haspekian, M. (2005). An «Instrumental Approach» to study the integration of a computer tool into mathematics teachings: The case of spreadsheet. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*(2), 109-141.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7* (3), 230-240.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop* (pp. 7-20). ERIC/SMEAC.

McArthur, D. J. y Lewis, M. W. (1998). *Untangling the web: Applications of the internet and other information technologies to higher education.* RAND Corporation.

McDermott, D., Waldrop, M. M., Chandrasekaran, B., McDermott, J. y Schank, R. (1985). The Dark Ages of AI: A panel discussion at AAAI-84. *AI Magazine, 6*(3), 122-134.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Newell, A. y Simon, H. (1972). *Human problem solving*. Prentice-Hall.

Pérez-Buj, G., Arnau, D., Diago, P. D. y Arevalillo-Herráez, Miguel. (2021). *La influencia del razonamiento verbal en la resolución aritmética de problemas verbales aritmético-algebraicos en un sistema* *tutorial inteligente*. Reunión del Grupo de Trabajo PNA en el XXIV Simposio de la SEIEM, València.

Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA, 2*(4), 87-107.

Py, D. (1993). Geometry problem solving with Mentoniezh. *Computers & Education, 20*(1), 141-146.

Richard, P. R., Vélez, M. P. y Van Vaerenbergh, S. (Eds.). (2022). *Mathematics education in the age of artificial intelligence: How artificial intelligence can serve mathematical human learning*. Springer.

Rojano, T. y Sutherland, R. (1991). Symbolising and solving algebra word problems: The potential of a spreadsheet environment. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Psychology of Mathematics Education Conference* (pp. 207-213). PME.

Sanz, M. T., González-Calero, J. A., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. (2019). Uso de la comprensión lectora para la construcción de un modelo predictivo del éxito de estudiantes de 4o de Primaria cuando resuelven problemas verbales en un sistema inteligente. *Revista de Educación, 384*, 41-69. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2019-384-409

Schoenfeld, A. H. (1985). Making sense of «out loud» problem-solving protocols. *Journal of Mathematical Behavior, 4*(2), 171-191.

Schoenfeld, A. H. (1994). A discourse on methods. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 697-710.

Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior, 12*(4), 353-383.

Tabach, M., Hershkowitz, R. y Arcavi, A. (2008). Learning beginning algebra with spreadsheets in a computer intensive environment. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*(1), 48-63.

Thompson, P. W. (1989). Artificial intelligence, advanced technology, and learning and teaching algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 135-161). Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Wagner, S. y Kieran, C. (1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 220-237). Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Wilson, K. (2006). Naming a column on a spreadsheet. *Research in Mathematics Education, 8*(1), 117-132.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA COM TECNOLOGIA: INSPIRANDO ALUNOS DURANTE A PANDEMIA ATRAVÉS DO CLUBE TECN@MAT

Mathematical problem-solving with technology: inspiring students during the pandemic through the Tecn@Mat Club

Jacinto, H.

Universidade de Lisboa

Resumo

A pandemia Covid-19 instituiu a necessidade de cumprir distanciamento social que levou ao encerramento de atividades extracurriculares que envolvem colaboração e trabalho em equipa. Nesta comunicação analisa-se um programa extraescolar online que promove resolução de problemas de matemática com tecnologias, o Clube Tecn@ Mat. A partir de uma discussão teórica sobre a utilização de tecnologias digitais para resolver problemas, reporta-se um estudo de caso exploratório que visou caracterizar o design e a implementação do Clube, bem como documentar as experiências dos participantes em termos da sua capacidade de resolver problemas e expressar as suas soluções com tecnologia. Observou-se uma redução no uso de papel-e-lápis à medida que os participantes aprenderam sobre as potencialidades das tecnologias digitais para desenvolver abordagens aos problemas e para descrever os processos e os raciocínios com precisão.

Palavras-chave: *clube de matemática, estudo de caso exploratório, fluência tecno-matemática, resolução de problemas com tecnologias digitaispandemia.*

Abstract

The Covid-19 pandemic introduced the need to comply with social distancing, which led to the closure of extracurricular activities that involve collaboration and teamwork. This communication analyses an online after-school program that promotes mathematical problem solving with technologies, the Tecn@Mat Club. Based on a theoretical discussion on the use of digital technologies to solve problems, an exploratory case study is reported aiming to characterize the design and implementation of the Club, as well as to document the participants' experiences in terms of their ability to solve the problems and express the solutions with technology. A decrease in the use of paper-and-pencil was observed as participants learned about the affordances of digital technologies to develop approaches to the problems and to describe their processes and reasoning accurately.

Keywords: *math club, problem solving with digital technologies, techno-mathematical fluency, exploratory case study, pandemic.*

INTRODUÇÃO

A pandemia Covid-19 transformou o ensino e a aprendizagem da matemática em todo o mundo (Aldon et al., 2021; Borba, 2021; Drijvers et al., 2021; Kalogeropoulos et al., 2020). Os sucessivos

Jacinto, H. (2022). resolução de problemas de matemática com tecnologia: inspirando alunos durante a pandemia através do clube Tecn@Mat. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 31-46). SEIEM.

confinamentos foram extremamente exigentes para professores, alunos e suas famílias. Em Portugal, quando as escolas reabriram, a necessidade de cumprir o distanciamento social levou ao encerramento de atividades extracurriculares que normalmente envolvem interação, colaboração e trabalho em equipa, de que os Clubes de Matemática são exemplo.

Os clubes de matemática encontram-se entre a diversidade de iniciativas de enriquecimento curricular que podem ser desenvolvidas no espaço escolar ou para além da própria escola, e são conceptualizados como espaços onde jovens que gostam de matemática e partilham ideias semelhantes sobre a matemática se reúnem (Durbin, 2020). Os alunos encontram nestes clubes oportunidades para desenvolver a sua autoestima e um sentimento de pertença e de propósito (Papanastasiou e Bottiger, 2004).

Excetuando-se algumas iniciativas extraescolares de resolução de problemas (e.g., Carreira et al., 2016), os clubes de matemática não têm recebido muita atenção da parte dos investigadores portugueses. De igual forma, não tem sido produzida investigação abundante sobre esta temática no panorama internacional. Contudo, alguns estudos têm procurado compreender os aspetos subjacentes ao sucesso dos clubes de matemática e existem, na literatura, evidências de que a participação nestas iniciativas influencia a aprendizagem e as atitudes dos alunos perante a matemática.

Com base em dados recolhidos num clube de matemática de uma escola americana em que os alunos tendiam a obter excelentes resultados em testes de matemática estandardizados, Papanastasiou e Bottiger (2004) concluíram que participantes naquela atividade extracurricular revelavam atitudes muito positivas tanto em relação à disciplina de matemática como em relação ao próprio clube. Os investigadores também analisaram as razões que levavam os alunos a participar no clube, identificando motivos relacionados com a aprendizagem da matemática, motivos relacionados com fatores extrínsecos (tais como estar com os amigos), e outros relacionados com as características do clube (por exemplo, pelo facto de ser permitido usar a calculadora ou trabalhar em grupo).

Num estudo em que procuravam compreender as formas de raciocínio de alunos envolvidos num ambiente informal extraescolar baseado na resolução de problemas, Mueller e Maher (2009) concluíram que se a iniciativa é propícia à exploração e à colaboração, os alunos procuram defender os seus pontos de vista e raciocínios, tanto em pequenos grupos como no grande grupo de participantes. Os jovens não só construíram argumentos de forma colaborativa como forneceram justificações matemáticas para as soluções que desenvolveram.

Em 2016 foi conduzido na África do Sul o projeto *Pushing for Progression*, que providenciou formação contínua a professores de modo a apoiar a dinamização de clubes de matemática numa dada região do país (Stott et al., 2019). Os investigadores analisaram o impacto desta iniciativa no desempenho dos alunos, tendo concluído que foi positivo na aprendizagem das quatro operações aritméticas, tanto ao nível da fluência procedimental como da compreensão conceptual, num período de tempo relativamente curto de envolvimento num dos clubes de matemática que analisaram. Concluíram ainda que as parcerias estabelecidas entre os académicos, as entidades educativas distritais e os professores foram determinantes no sucesso do projeto e também para a aprendizagem dos alunos envolvidos nos clubes.

O impacto da participação neste tipo de atividades no desempenho dos alunos em matemática foi recentemente analisado por Durbin (2020). A partir de uma amostra representativa de mais de 23 000 alunos de 9.º ano, o investigador concluiu que o envolvimento prévio em competições matemáticas e em clubes de matemática leva a um aumento significativo da proficiência dos alunos.

Os clubes de matemática parecem ser, assim, espaços de encontro e partilha entre alunos que gostam e têm interesse pela aprendizagem da matemática, participando em jogos e competições, em que a resolução de problemas é uma das atividades privilegiadas. A participação nestas atividades tem impacto não só em termos do desenvolvimento de capacidades matemáticas, como de atitudes positivas em relação à aprendizagem, à disciplina de matemática, e à perceção da própria capacidade de ter sucesso em matemática. O Clube Tecn@Mat surgiu assim com vista a proporcionar um espaço de trabalho colaborativo em torno de uma atividade de resolução de problemas de matemática, procurando contornar o isolamento originado pela obrigação de manter distanciamento social.

Constituindo-se como um programa extracurricular pioneiro em Portugal, o Clube Tecn@Mat promove atividades matemáticas de enriquecimento *online* com recurso a tecnologias digitais, destinado a alunos do 3.º ciclo do ensino básico (12-14 anos), através da resolução de desafios matemáticos num ambiente colaborativo.

O estudo de que aqui se dá conta, pretende discutir os aspetos teóricos que fundamentaram o *design* do Clube Tecn@Mat, com particular incidência na conceção do seu conteúdo e da sua implementação, bem como examinar o impacto das experiências dos participantes no Clube em termos do desenvolvimento de competências matemáticas e tecnológicas para resolver os problemas e exprimir os seus raciocínios. Muito em particular, debruçar-me-ei sobre a primeira edição do Clube Tecn@Mat que decorreu num dos momentos críticos da pandemia Covid19 em Portugal, no final do primeiro confinamento.

Na secção seguinte discutirei ideias chave sobre o uso de tecnologias digitais para resolver problemas de matemática e o tipo de competências necessárias ao sucesso nessa atividade, conceitos que guiaram o *design* e a implementação do Clube Tecn@Mat.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA COM TECNOLOGIAS DIGITAIS

O planeamento e a conceção do Clube Tecn@Mat tiveram em consideração perspetivas teóricas sobre o impacto do uso de tecnologias digitais na aprendizagem da matemática bem como resultados de estudos empíricos focados na atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias digitais em ambientes extraescolares (Carreira et al., 2016; Jacinto, 2017; Jacinto e Carreira, 2017a, 2021; Carreira e Jacinto, 2019).

A primeira ideia chave envolve a conceptualização da cognição em habitats digitais como emergente das interações entre os indivíduos, as ferramentas tecnológicas e o ambiente circundantes no qual a atividade matemática decorre, aqui em concreto, a resolução de problemas. Várias metáforas têm sido avançadas sobre o papel da tecnologia na aprendizagem da matemática. Em 2005, Geiger considerou que as ferramentas digitais podem funcionar, entre outros, como *extensão de si próprio*, por exemplo quando o aluno "incorpora conhecimentos tecnológicos como parte integrante de seu repertório matemático" (Geiger, 2005, p. 371). Alega o autor que, quando a tecnologia é usada para desenvolver pensamento matemático, a fronteira entre o sujeito que pensa matematicamente e a ferramenta que suporta esse pensar torna-se nebulosa, difícil de identificar, pois a ferramenta é incorporada "tão naturalmente como um recurso intelectual" (Geiger, 2005, p. 371). Nesta mesma linha, Borba e Villarreal (2005), reconhecendo o poder da tecnologia em transformar e reorganizar o pensamento matemático, propuseram que se considerasse como sujeito responsável por conhecer, pensar e agir uma unidade indivisível – o ser-humano-com-media. Sinclair (2020) vem também contribuir para esta perspetiva concordando que, tendo em conta as diversas possibilidades de interação entre um indivíduo e a tecnologia, pode não ser possível estabelecer uma delimitação clara entre as suas ações e o pensamento (matemático) que é espoletado pelo uso de tecnologias digitais.

À semelhança de experiências de enriquecimento curricular anteriores (e.g., os campeonatos de resolução de problemas documentados em Carreira et al., 2016), o Clube Tecn@Mat pretende ser um espaço que promove o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de matemática. Importa, assim, discutir o que se entende por 'problema', por 'resolução de problemas' e, em particular, por 'resolução de problemas com tecnologias'. Os problemas propostos no Clube Tecn@Mat podem ser considerados *problemas não rotineiros* pois encerram uma situação desafiadora para o aluno embora este não disponha de um processo matemático direto que lhe garanta obter a sua solução (Saadati e Felmer, 2021, Schoenfeld, 1985). Esta definição, que revela uma grande proximidade com o contexto da aula de matemática, foi desafiada por Lesh e Zawojewski (2007) ao considerar que a resolução de problemas também deve possibilitar a perceção da relação entre as noções matemáticas e as situações do mundo real, para além da sala de aula. Na perspetiva destes autores,

> uma tarefa, ou atividade direcionada para um objetivo, torna-se um problema (ou uma situação problemática) quando o solucionador, que pode ser um grupo de especialistas em colaboração, precisa de desenvolver uma forma mais produtiva de pensar sobre a situação dada. (p. 782).

Tal como na resolução de problemas com papel-e-lápis, a resolução de problemas de matemática com tecnologias implica o envolvimento numa atividade de matematização onde o jovem-com-media deve conceber uma forma produtiva de pensar para lidar com tal situação desafiadora, tendo como resultado um modelo conceptual da situação (Lesh e Zawojewski, 2007). Como os modelos conceptuais transmitem os entendimentos matemáticos tidos sobre as situações, são geralmente "expressos usando uma variedade de meios de representação" (Lesh e Harel, 2003, p. 159) pelo que podem incorporar diagramas ou gráficos baseados em papel, mas também tabelas, texto escrito, símbolos, desenhos, imagens, gráficos ou figuras dinâmicas produzidos com tecnologias digitais. Contudo, "é a qualidade descritiva e explicativa do pensamento que faz com que funcione como um modelo" (Carreira et al, 2013, p. 55), pelo que a forma como os jovens-com-media exteriorizam a sua interpretação da situação e explicam as suas abordagens para obter a solução remete para considerar que as fases de resolução do problema e de elaboração da resposta estão intimamente ligadas. A obtenção de soluções para os problemas inclui, assim, a criação de descrições explicativas que "não são simplesmente suplementos que os alunos incluem após a 'resposta' ter sido produzida. Eles SÃO os componentes mais importantes das respostas que são necessárias" (Lesh e Doerr, 2003, p. 3, ênfase no original). Nesta linha, *resolver-e-exprimir* é um conceito chave que resume uma conceptualização desta resolução de problemas como um processo simultâneo de matematização da situação e de expressão do pensamento matemático desenvolvido (Carreira et al., 2016; Jacinto e Carreira, 2017a; 2021).

A investigação também tem mostrado que a resolução-e-expressão de problemas por meio de tecnologias digitais resulta na produção de uma narrativa, de uma história que conta como foi desenvolvida a solução de um dado problema (Jacinto e Carreira, 2017a). Este *discurso matemático digital expositivo* (Stahl, 2009) é, assim, impulsionado pelas ferramentas matemáticas e tecnológicas utilizadas, e destaca-se pelo uso de cores, pelos desenhos, imagens ou fotos, pelo recurso à linguagem natural e simbólica, e pelo uso de ficheiros produzidos com outros programas como os de geometria dinâmica ou as folhas de cálculo (Carreira et al., 2016).

Outro aspeto que presidiu à seleção e criação dos problemas para o Clube Tecn@Mat diz respeito ao nível de desafio que idealmente devem conter, já que "a predisposição para resolver uma tarefa parece diminuir em duas situações: quando as expetativas acerca da probabilidade de sucesso são muito elevadas (a tarefa é demasiado fácil) ou quando são muito baixas (a tarefa é demasiado difícil)." (Carreira et al., 2013, pp. 545-546). O conceito de *desafio matemático moderado* (Turner e Meyer, 2004), adotado no âmbito do projeto Problem@Web (Carreira et al., 2013, 2016), é particularmente útil pois contribui para criar um certo equilíbrio, que é necessário e desejável, isto é, o desafio deve cativar os alunos ao ponto de o procurarem resolver (Schweinle et al., 2013) e, embora a obtenção da sua solução exija esforço, o problema deve estar ao alcance de todos os alunos.

Deste modo, o Clube Tecn@Mat pretende constituir-se como um espaço em que os jovens participantes possam desenvolver a sua capacidade de resolver problemas de matemática com tecnologias digitais. Ter sucesso nesta atividade envolve, entre outros, o uso de recursos matemáticos adequados

(Schoenfeld, 1985) mas envolve também considerar que as ferramentas digitais são artefactos igualmente indispensáveis (Jacinto e Carreira, 2017a). É, portanto, necessário discutir em que consiste a proficiência de um jovem-com-media a resolver desafios moderados recorrendo a ferramentas matemáticas e tecnológicas. Hoyles et al. (2010) analisaram a capacidade de usar o conhecimento tecnológico e matemático para resolver problemas do quotidiano ou relacionados com o mundo profissional, propondo a designação de "literacia tecno-matemática". Conforme testemunhado nos ambientes de trabalho que estudaram, a literacia tecno-matemática dos trabalhadores não era adequadamente desenvolvida no contexto laboral, o que despertou nos investigadores a necessidade de desenvolver essa capacidade explicitamente. Assim, a literacia tecno-matemática apresenta-se como uma noção relevante para abordar a proficiência, de jovens-com-media, necessária à resolução-e-expressão de problemas de matemática.

Como identificado em estudos anteriores (e.g., Jacinto e Carreira, 2017a; 2021), uma característica marcante da atividade de resolução e expressão de problemas com tecnologias é a noção de *fluência*. Trazida por Papert e Resnick (1995), a ideia de fluência parece mais apropriada para descrever a capacidade de articular uma ideia complexa por meio de uma ferramenta digital, e ser-se capaz de produzir ou construir coisas relevantes com essa tecnologia. A noção de *fluência tecno-matemática* (FTm) tem sido usada para designar a capacidade de combinar conhecimentos matemáticos e tecnológicos para resolver e expressar problemas de matemática (Jacinto e Carreira, 2017a, 2017b). Tal como a fluência digital (Barron et al., 2007), a fluência tecno-matemática implica ser-se capaz de selecionar recursos úteis de um conjunto de possibilidades, matemáticas ou tecnológicas, identificar *affordances* ou restrições nesses recursos, e saber como uma determinada ferramenta pode ser usada para criar uma solução tecno-matemática para um problema (Jacinto e Carreira, 2017b). Importa frisar que o conhecimento matemático orienta o uso da tecnologia, pois permite o reconhecimento de *affordances* que podem determinar tanto a abordagem como o modelo conceptual desenvolvido no decurso da obtenção da solução (Yao e Manouchehri, 2019).

CONSIDERAÇÕES SOBRE A METODOLOGIA DE PESQUISA

Com o propósito de descrever e compreender as características do Clube Tecn@Mat que contribuem para o envolvimento dos alunos na atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias, foi desenvolvido um estudo de caso exploratório (Stake, 1995), com suporte na recolha e análise de dados qualitativos e quantitativos.

Os participantes

Todos os participantes nesta primeira edição do Clube aceitaram participar na investigação, mediante o consentimento informado dos seus encarregados de educação. Nestaa edição do Clube participaram 12 alunos, 4 rapazes e 8 raparigas, com idades compreendidas entre os 12 e os 14 anos. Sete alunos frequentavam o 7.º ano de escolaridade, quatro eram alunos de 8.º ano, e um dos alunos encontrava-se no 9.º ano. Os 12 alunos pertenciam a escolas da região do Algarve, da Grande Lisboa e do Minho. A participação no Clube e no estudo foi voluntária e decorreu de divulgação efetuada junto de vários professores de matemática e dos diretores das turmas dos alunos participantes.

A recolha e análise dos dados

A recolha de dados decorreu em vários momentos. Durante as sessões do Clube, via Zoom, procedeu-se à vídeo-gravação do trabalho em grande grupo bem como do trabalho autónomo realizado em 4 salas simultâneas; recolheram-se também os ficheiros digitais criados pelos participantes, quer para resolver, quer para exprimir os processos de resolução. No final de cada sessão, os participantes foram convidados a responder a um questionário *online* que possibilitava obter dados quantitativos e descritivos relativamente ao problema resolvido, ao envolvimento dos membros de cada equipa, às estratégias e às ferramentas tecnológicas usadas. Após a conclusão das atividades do Clube, foi realizada uma entrevista aos participantes, via Zoom e vídeo-gravada, organizada em 3 grandes temáticas – a resolução de problemas de matemática, o uso de tecnologias, e o trabalho colaborativo – pedindo-se aos alunos que se reportassem tanto às suas experiências na aula de matemática como no Clube Tecn@Mat. Recolheram-se também todos os documentos de apoio à dinamização do clube, em particular, os planos de cada uma das sessões, os ficheiros criados e as apresentações utilizadas. Nesta comunicação, irei reportar-me aos documentos de apoio às sessões, bem como aos dados recolhidos através dos questionários aplicados em cada sessão e das entrevistas realizadas aos participantes após a conclusão das atividades do Clube.

Os dados qualitativos foram organizados e tratados com recurso ao software NVivo, enquanto os dados de natureza quantitativa foram analisados recorrendo a estatística descritiva para identificar padrões ou alterações nas atitudes dos alunos perante a resolução de problemas de matemática com tecnologias digitais. Dado o pequeno número de participantes e o propósito exploratório do estudo, não se procurou estabelecer inferências nem determinar significância estatística, mas antes proporcionar uma descrição do caso em análise que permita uma compreensão em profundidade do modo de funcionamento do Clube e das experiências dos seus participantes, muito em particular no que diz respeito ao desenvolvimento da capacidade de resolver e exprimir problemas de matemática com tecnologias digitais. O processo de análise envolveu uma leitura meticulosa dos dados qualitativos e a subsequente procura e identificação de referentes-chave tendo por base os conceitos centrais discutidos teoricamente, cruzando-se com os resultados quantitativos sempre que oportuno.

O CLUB TECN@MAT

Em seguida descrevem-se as principais características do Clube Tecn@Mat, tanto do ponto de vista do *design* e da implementação do seu currículo, como na perspetiva dos jovens participantes e das experiências que reportaram.

Modo de funcionamento do Clube

O Tecn@Mat é um clube virtual de resolução colaborativa de problemas de matemática com tecnologias digitais, dirigido a alunos do 3.º ciclo do ensino básico (12-14 anos). A primeira edição do Clube Tecn@Mat foi implementada entre maio e julho de 2020, a partir do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Esta é uma iniciativa extraescolar que tem, desde a sua génese, uma natureza inclusiva, como bem ilustra o seguinte excerto do documento que visava obter o consentimento informado dos encarregados de educação para a participação no estudo dos seus educandos:

> O Clube Tecn@Mat pretende ser um espaço privilegiado de encontro entre alunos entusiastas de desafios matemáticos e da utilização de tecnologias, independentemente das suas classificações na disciplina. Os alunos terão oportunidade de se envolverem numa atividade matemática agradável, desafiante e entusiasmante, num clima descontraído, embora de aprendizagem.

A conceção do Clube previa estimular o envolvimento numa atividade de resolução de problemas de matemática para todos e ao alcance de todos, independentemente do seu desempenho na disciplina, pelo que este clube de destaca de outras iniciativas em que a resolução de problemas é usada como fator de seriação ou de seleção de alunos especialmente talentosos. Com efeito, os alunos participantes caracterizaram-se como alunos empenhados e interessados na disciplina de matemática, embora as suas classificações no final do ano letivo variassem entre o nível 3 e o nível 5 (numa escala em que 1 é a classificação mínima e 5 a máxima).

As atividades do Clube foram apoiadas essencialmente por uma plataforma de videoconferências (Zoom), por ferramentas e aplicações Google (e.g., Drive, Google Docs e Sheets) e uma página *web*. O Clube funcionou uma vez por semana ao longo de 5 sessões síncronas, cada uma com a duração de 90 minutos. Entre a 2ª e a 3ª sessão houve uma sessão assíncrona em que foram publicados dois desafios que os participantes podiam resolver autonomamente.

O trabalho nas sessões tinha como suporte um *website* onde eram disponibilizadas informações de carácter geral relacionadas com o projeto de investigação no qual o Clube estava ancorado. Em particular, uma das páginas do *website* era dedicada ao Clube Tecn@Mat e disponibilizava o conteúdo para o trabalho nas sessões (e.g., os enunciados dos desafios a resolver em cada sessão, algumas instruções, links para a submissão das soluções e de acesso aos questionários). Uma outra página abordava alguns conceitos básicos sobre resolução de problemas de matemática, nomeadamente, etapas de resolução de problemas, heurísticas, exemplos de estratégias mais comuns na resolução de problemas.

O conteúdo das sessões: problemas, conceitos matemáticos e tecnologias abordadas

Os problemas propostos foram selecionados ou criados de modo que, num curto espaço de tempo, facultassem experiências com diferentes ferramentas tecnológicas e não exigissem o uso de conhecimentos matemáticos avançados, já que o propósito era o de manter os participantes envolvidos na atividade de resolução de problemas com tecnologias e não o da instrução de conteúdos curriculares específicos (Tabela 1). Embora alguns dos problemas pudessem ser resolvidos com recurso a conhecimentos ou procedimentos matemáticos mais avançados (como é o caso do desafio "Gaiolas e periquitos" cuja solução pode ser obtida através da resolução de um sistema de duas equações com duas incógnitas), o facto de admitirem várias abordagens ou estratégias de resolução, associado à possibilidade de se poder tirar partido de ferramentas tecnológicas apropriadas, coloca estes desafios num nível mais acessível.

Apesar de ser permitido e incentivado o recurso às ferramentas tecnológicas que os participantes considerassem mais úteis e eficazes ao seu trabalho, os desafios foram igualmente escolhidos de modo a criar oportunidades para explorar programas específicos que apoiam o desenvolvimento de abordagens matemáticas, como é o caso dos ambientes de geometria dinâmica ou das folhas de cálculo. Também foi tida em consideração a possibilidade de analisar vantagens matemáticas de determinadas funcionalidades em programas de uso comum, como o editor de texto ou o editor de apresentações (e.g., para organizar informação recorrendo a representações tabulares, criação de esquemas ou diagramas) e ainda programas de criação de animações e vídeo.

Tabela 1. Sumário do conteúdo das sessões do Clube Tecn@Mat (fonte: guiões das sessões).

Sessão	**Desafios**	**Conceitos matemáticos**	**Ferramentas tecnológicas**
1	Unidos e cortados	Áreas de polígonos	GeoGebra (construção de figuras robustas; determinação de áreas; folha de cálculo do GeoGebra).
	Quantos retângulos?	Quadriláteros. Soma dos primeiros *n* números inteiros positivos.	GeoGebra (construção de figuras; folha de cálculo).

Tabela 1. (Continuación)

2	Círculos de encaixe	Área do círculo. Razão.	GeoGebra (construção de figuras; determinação de áreas; folha de cálculo).
	As três casas	Raciocínio lógico.	Editor de texto ou editor de apresentações (representação tabular).
3	Gaiolas e periquitos	Relações numéricas e algébricas, envolvendo o conceito de variável (sistema de duas equações com duas incógnitas).	Folha de cálculo (escrita, formatação de células, fórmulas simples, preenchimento automático de células).
	A inauguração do "Sombrero Style"	Relações numéricas e algébricas, envolvendo os conceitos de fração, múltiplo, variável.	Folha de cálculo (escrita, formatação de células, fórmulas simples, preenchimento automático de células).
4	Uma pizza à medida	Combinatória.	Editor de texto ou de apresentações. Editor de vídeo.
	Reencontro de amigos	Raciocínio co-variacional.	Folha de cálculo (escrita, formatação de células, fórmulas simples, preenchimento automático de células).
5	Cubos no chão	Relações numéricas e algébricas, envolvendo o conceito de quadrado perfeito.	Folha de cálculo (escrita, formatação de células, fórmulas simples, preenchimento automático de células).
	Chaves e cadeados	Combinatória.	Editor de texto ou editor de apresentações. Editor de vídeo.

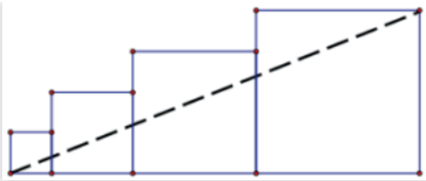
Uma sessão típica no Clube

Uma sessão típica incluía três grandes momentos. Um momento inicial envolvia todos os participantes e visava estabelecer a organização da sessão e relembrar regras de participação no Clube (e também no estudo). Nas sessões iniciais discutiu-se ainda em que consiste a resolução de problemas de matemática com tecnologias, nomeadamente, a importância de "apresentar e explicar o processo de resolução com clareza" (apresentação, Sessão 1), a indicação de que é permitido recorrer a qualquer ferramenta tecnológica bem como construir esquemas, utilizar figuras, realizar cálculos ou incorporar explicações que os participantes julgassem necessárias e adequadas. Pretendia-se legitimar o recurso a qualquer ferramenta que os participantes considerassem oportuna e o uso de uma diversidade de representações, incentivando assim o desenvolvimento de um discurso matemático digital expositivo (Stahl, 2009).

O segundo momento tinha a duração aproximada de 60 minutos e envolvia o trabalho autónomo dos participantes, organizados em equipas de 3 elementos, em salas simultâneas. A cada equipa era solicitado que escolhesse um dos dois problemas publicados em cada sessão, o resolvesse usando as ferramentas da sua preferência, criasse a sua resolução e enviasse o(s) ficheiro(s) por email para a coordenação do Clube. O recurso à Google Drive, de acesso exclusivo a cada equipa, permitia aos participantes colaborar em tempo real na co-construção de ficheiros Google Docs e Google Sheets para resolver os problemas ou elaborar a solução final de cada problema. Durante o trabalho autónomo dos alunos, a dinamizadora circulava pelas salas simultâneas observando o trabalho colaborativo e esclarecendo dúvidas pontuais.

Um terceiro momento de trabalho, de novo em grande grupo, envolvia a discussão das soluções produzidas pelas várias equipas. Para além disso, foram também apresentadas produções de outros alunos que resolveram problemas idênticos, sobretudo a partir de resultados do projeto Problem@Web (Carreira et al., 2016), ilustrando a diversidade de abordagens e de ferramentas tecnológicas que podem ser úteis e eficazes na resolução-e-expressão dos problemas.

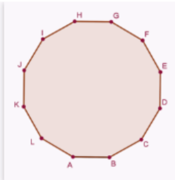
Por exemplo, na sessão 1 foram propostos os problemas "Unidos e cortados" e "Quantos retângulos?" (Figura 1) com a finalidade de testar a organização do trabalho previsto e a gestão dos diferentes espaços de trabalho virtual e colaborativo. No final dessa sessão, apresentou-se o GeoGebra aos participantes, nomeadamente, percorrendo algumas das suas ferramentas e explicitando algumas *affordances* deste ambiente de geometria dinâmica e de como delas se pode tirar partido para resolver problemas, convidando os participantes a voltar a explorar estes problemas por si próprios recorrendo a esta ferramenta.



Desafio 1: "Unidos e cortados"

Considerem uma sequência de quadrados de lados 1, 2, 3, 4,... centímetros, dispostos de modo a ficarem unidos uns aos outros, como ilustra a figura. Depois de juntos, cortam-se todos os quadrados segundo uma linha que parte do vértice inferior esquerdo do quadrado menor até ao vértice superior direito do quadrado maior. Qual é a área que fica acima da linha de corte se a sequência tiver 8 quadrados?

Não se esqueçam de explicar o vosso processo de resolução!



Desafio 2: "Quantos retângulos"?

Quantos retângulos é possível construir dentro do polígono regular da figura, unindo vértices?

E se o polígono regular tivesse 100 lados? E se tivesse *n* lados?

Não se esqueçam de explicar o vosso processo de resolução!

Figura 1. Problemas propostos na Sessão 1 do Clube Tecn@Mat.

Em cada sessão foram propostos dois desafios matemáticos (Figura 1), que podem ser considerados como problemas não rotineiros (Jacinto et al., 2016) no sentido em que não estão alinhados com o currículo escolar, mas visam estimular intelectualmente os alunos e requerem o desenvolvimento de uma estratégia ou abordagem que envolve conceitos ou procedimentos matemáticos. Esta possibilidade de escolha serviu dois propósitos: por um lado, ocasionar uma leitura atenta de cada desafio que alimentasse uma discussão inicial em cada equipa em torno dos problemas e, por outro, contribuir para uma maior expetativa acerca da possibilidade de obter sucesso e assim persuadir os participantes a tentar resolver o problema da sua preferência (Carreira et al., 2013; 2016; Turner e Meyer, 2004). Apesar de ambos os problemas poderem ser considerados desafios matemáticos moderados, o seu grau de dificuldade é inerente ao conhecimento e capacidades dos alunos participantes, pelo que pode ser percecionado de forma diferente por eles.

Na secção seguinte apresentam-se alguns resultados relativos aos dados produzidos pelos questionários aplicados aos participantes solicitando a sua apreciação do trabalho realizado em cada sessão do Clube Tecn@Mat e às entrevistas realizadas após as atividades do clube encerrarem.

A VOZ E A EXPERIÊNCIA DOS PARTICIPANTES NO CLUBE TECN@MAT

Sobre os problemas de matemática

Os participantes aparentavam manter uma boa relação com a matemática e, em particular, com a resolução de problemas, não obstante a variabilidade observada no desempenho escolar destes 12 alunos anteriormente documentada. Relativamente ao gosto sentido pelos participantes aquando da resolução dos problemas escolhidos em cada sessão, é possível observar que o valor médio é elevado e se mantém em valores relativamente próximos ao longo das quatro sessões avaliadas, variando entre os

4.5 e os 4.82 (Figura 2). Na entrevista final, entre as várias razões apresentadas pelos participantes para a identificação do desafio que mais gosto lhes deu resolver encontra-se o tema matemático associado (e.g., "acho mais giro problemas de lógica" [CC]), e o nível de desafio sentido (e.g., "Gostei porque foi desafiante" [FN]).

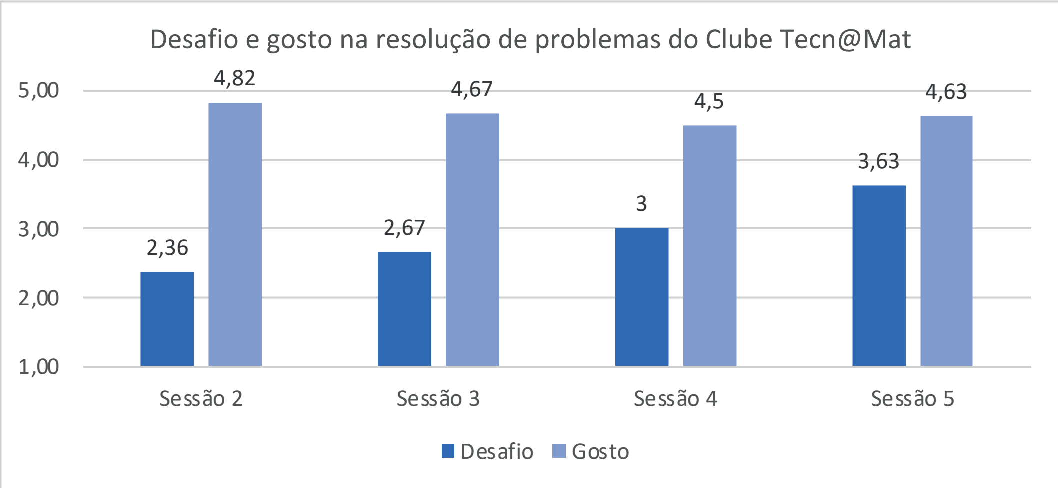


Figura 2. Valor médio do nível de desafio* e de gosto** sentido pelos participantes na resolução dos problemas em cada sessão do Clube Tecn@Mat.

* 1 – Muito fácil; 5 – Muito difícil. ** 1 – Não gostei nada; 5 – Gostei muito.

Relativamente ao nível de desafio experienciado pelos participantes, observou-se que este foi aumentando com o correr das sessões, passando de um valor médio de 2.36 na segunda sessão para 3.63 na última (Figura 2). Com efeito, na sessão 2, a maioria dos participantes resolveu o problema "As três casas" que envolve raciocínio analítico e dedutivo (Carreira et al., 2020) sendo que vários participantes reconheceram, durante a entrevista, que apreciam este tipo de problemas. O valor médio que caracteriza o desafio sentido na resolução de problemas da última sessão revela também a dificuldade sentida pelos participantes, embora se destaque que o gosto não diminuiu relativamente à sessão anterior e nem se alterou significativamente ao longo das várias sessões.

Nas entrevistas finais, a generalidade dos participantes considerou que o nível de desafio dos problemas propostos foi o adequado, embora alguns problemas tivessem sido considerados como mais acessíveis do que outros, tal como se ilustra a partir dos seguintes excertos:

> Não foram muito difíceis, mas também não foram fáceis, está ali no meio. [FN, entrevista final]
>
> Por exemplo, aquele das mesas, como eu estava a dizer, do restaurante, não foi assim muito fácil mas também não foi muito difícil . . . o das pizzas, esse eu até achei que foi fácil. [MP, entrevista final]

Sobre a utilização de tecnologias para resolver-e-exprimir problemas de matemática

Apesar de dominarem o uso de várias ferramentas tecnológicas, de conhecerem algumas que são habitualmente conotadas com Matemática (como a calculadora), e de já terem ouvido os seus professores falar noutras (como o Excel ou o GeoGebra), de um modo geral, estes alunos desconheciam formas úteis de as usar para resolver problemas e para expressar os seus raciocínios. Alguns explicaram que já usaram a folha de cálculo na disciplina de TIC, enquanto outros viram apresentações dos seus professores de matemática que continham figuras construídas no GeoGebra.

No questionário foi solicitado aos participantes que assinalassem o seu grau de concordância com várias afirmações relacionadas com o uso de tecnologias e/ou de papel-e-lápis em cada sessão do Clube. Observou-se que o uso do papel-e-lápis se reduziu, sobretudo entre a sessão 2 e as seguintes (Figura 3), à medida que os participantes foram progressivamente percebendo a utilidade do uso das ferramentas tecnológicas no desenvolvimento das suas abordagens, na obtenção da solução e na explicação dos raciocínios e procedimentos. Por outro lado, o uso de tecnologias aumentou à medida que os participantes passarem a perceber as suas potencialidades e a reconhecer a eficácia do seu uso, mas também por se sentiram mais confiantes na sua utilização para resolver-e-exprimir os problemas.

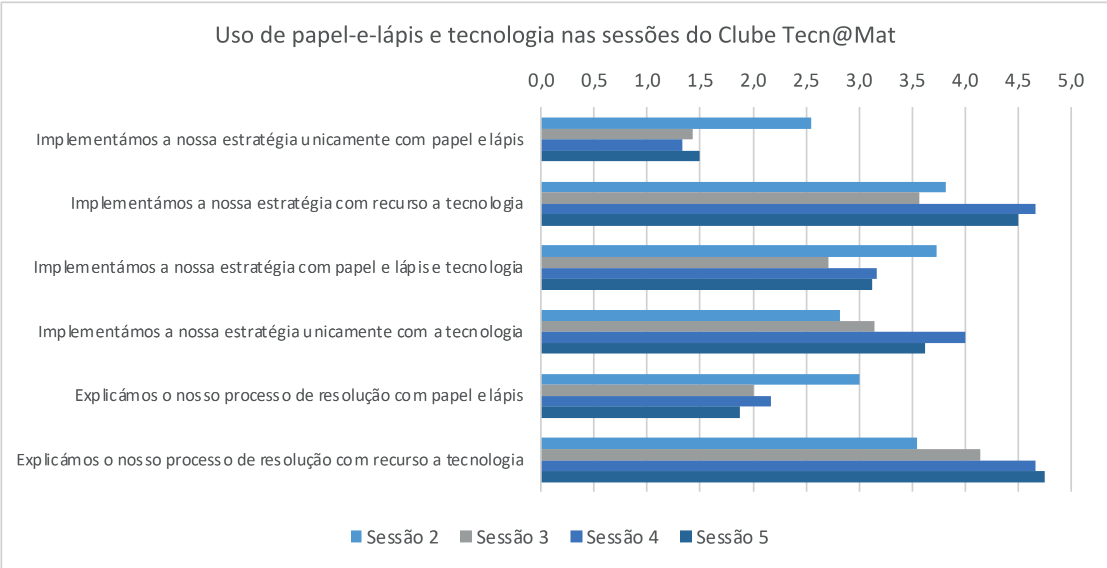


Figura 3. Nível médio de concordância* com cada uma das afirmações referentes ao uso de tecnologias e de papel-e-lápis para resolver problemas e exprimir soluções no Clube Tecn@Mat.

* 1 – Discordo; 2 – Discordo parcialmente; 3 – Nem discordo nem concordo; 4 – Concordo parcialmente; 5 – Concordo

Embora não tenham prescindido por completo do trabalho com papel-e-lápis, os participantes reconheceram a utilidade das tecnologias tanto para obter a solução dos problemas como para criar a sua explicação, sobretudo após os momentos de discussão em que diversas *affordances* das ferramentas eram abordadas e legitimadas para a resolução-e-expressão de problemas de matemática.

> Acho que foi só na 1.ª vez que usámos papel-e-lápis. Sim. Eu acho que foi para visualizar mais facilmente o problema porque eu ainda não sabia como é que podia fazer com a tecnologia, mas depois se calhar percebi que com a tecnologia até seria mais simples. [CC, entrevista final]

> No meu caso eu, depois de fazer… e de a professora explicar como aquilo funcionava, eu comecei a preferir fazer no computador mas antes eu preferia no papel. [LC, entrevista final]

Uma vez que a demonstração das possibilidades de ação com novas ferramentas ocorria no último momento de cada sessão, pontualmente no primeiro da sessão seguinte, os participantes aproveitavam todas as oportunidades para explorar e fazer uso dos programas, ainda que nem sempre o fizessem de forma refletida. Por exemplo, o GeoGebra foi apresentado no final da 1.ª sessão de trabalho para ilustrar a sua utilidade na resolução dos dois desafios da sessão (ver Figura 1). Contudo, nas duas sessões seguintes os participantes que integravam a equipa 2 resolveram fazer uso do GeoGebra para criar representações das situações problemáticas em análise, ainda que a natureza dos desafios não fosse a mais adequada pois o desafio 4 envolvia raciocínio analítico e dedutivo, enquanto o desafio 5 envolvia relações numéricas e algébricas (Figura 4).

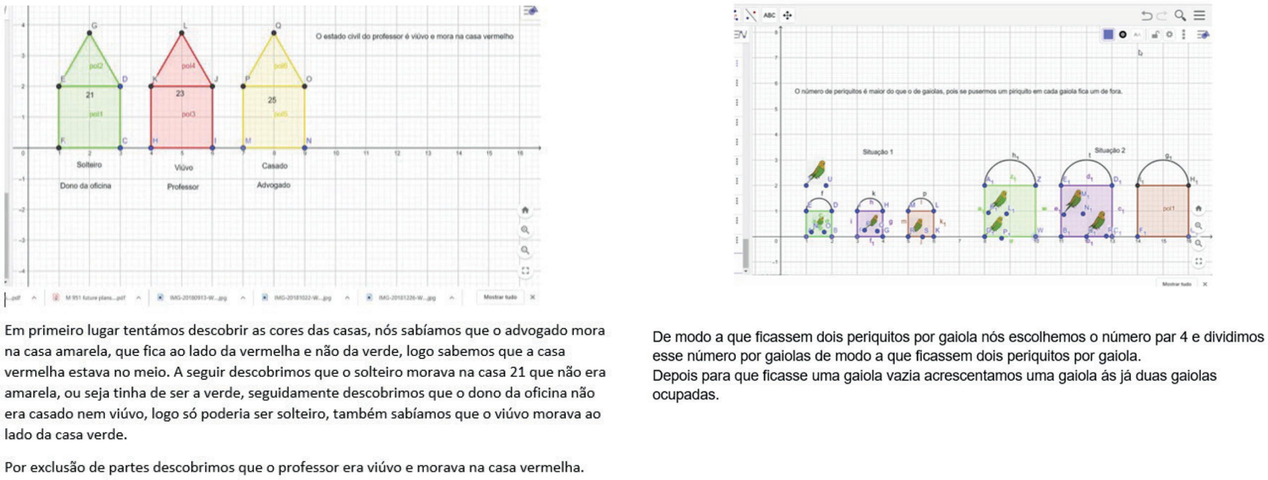


Figura 4. Soluções do desafio 4 (à esquerda) e do desafio 5 (à direita) produzidas pela equipa 2.

Uma exigência enfatizada ao longo das sessões – e registada em cada desafio mediante o apelo "não se esqueçam de explicar o vosso processo de resolução!" (Figura 2) –, dizia respeito à elaboração de um relato descritivo dos procedimentos e dos raciocínios. Para além da exploração de ferramentas como o GeoGebra e o Excel, este aspeto foi um dos que marcou igualmente a aprendizagem destes participantes ao longo das sessões do Clube pois a criação de uma explicação coerente e detalhada do seu processo de resolução, incluindo uma justificação do raciocínio, era uma atividade que esteve praticamente ausente nas suas experiências de sala de aula de matemática. Faz-se notar que nem todos os participantes responderam do mesmo modo a esse apelo e alguns sublinharam a necessidade de recorrer ao papel e lápis para exprimir ideias:

> [para explicar] o papel e lápis pode ser mais fácil porque podemos não estar tão habituados a projetar mais facilmente as nossas ideias, depois a tecnologia acho que é mais fácil aplicar a resolução do problema, mas sim… nós… eu não usei papel e lápis porque percebi que conseguia orientar-me com a tecnologia mas às vezes dá jeito até para fazer esquemas mais depressa. [CC, entrevista final]

A propósito da construção de uma boa explicação para uma solução de um problema do Clube, os participantes apontaram algumas características, destacando-se a clareza e a completude da resposta, aspetos que aparentam estar bastante centrados em experiências de sala de aula. Apesar da legitimação e do incentivo à construção e uso de diferentes representações e outputs digitais, com forte inspiração em diversas perspetivas teóricas (Carreira et al., 2016; Lesh e Doerr, 2003; Lesh e Harel, 2003), os participantes não os consideraram como parte integrante e indispensável de uma boa explicação das suas soluções:

> Que tenha todos os passos… tem que ser bem explicada. Como diz a minha irmã mais velha: "explica isso como se estivesses a explicar a um miúdo de 5 anos". Dizer a resposta. Eu acho que tem de ser completa. Ter uma sequência, não podemos fazer cálculos soltos. [LA, entrevista final]

> Hum, primeiro [colocar] os tópicos com o que o problema tem . . . depois explicar o nosso processo de pensamento, depois ver se está tudo certo e acho que é só. [LC, entrevista final]

Quando questionados sobre os aspetos que mais apreciaram no Clube Tecn@Mat, as respostas dividiram-se em duas temáticas. Por um lado, os participantes salientaram a dimensão social do Clube pois gostaram de conhecer e trabalhar com alunos de outras regiões do país. Na entrevista final, uma jovem fez igualmente alusão ao seu sentimento de pertença a uma comunidade que aprecia fazer matemática como algo bastante positivo nesta experiência:

> Eu acho que sempre é melhor assim porque acabamos por conhecer alunos de escolas de norte a sul do país e não só da escola onde eu ando. Apesar de eu não ser nada sociável e nada boa a trabalhar em grupo, acho que foi bom. Gostei de sentir que não estou sozinha. [LA, entrevista final]

> Foi o utilizar a *drive*. Eu gostei [muito] de fazer as explicações e meter lá as imagens. [LC, entrevista final]

> Eu achei giro estarmos com colegas de outras partes do país e… e conhecer ferramentas novas que eu não conhecia, e acho que foi isso. Os problemas também são mais giros do que os da escola. [CC, entrevista final]

Por outro lado, os participantes manifestaram apreço por algumas características inerentes ao Clube, nomeadamente, referindo a sua vertente tecnológica e a aprendizagem em torno da utilização de ferramentas específicas, mencionando também a natureza dos problemas propostos ao longo das sessões, que os dois excertos anteriores revelam. Estes fatores, que se podem apelidar de extrínsecos e intrínsecos, respetivamente, estão em sintonia com os resultados obtidos por Papanastasiou e Bottiger (2004), apoiando a ideia de que também os clubes de matemática são locais que possibilitam experiências matemáticas onde os fatores afetivos e cognitivos estão intimamente interligados.

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

O *design* do Clube Tecn@Mat levou em linha de conta um conjunto de princípios informados por resultados de investigação em torno da atividade de resolução de problemas com tecnologias digitais, no âmbito de um campeonato online extraescolar, que, grosso modo, foram reconhecidos pelos participantes neste estudo exploratório.

Os problemas não rotineiros propostos encerram um nível de desafio matemático moderado (Carreira et al., 2016; Turner e Meyer, 2004). Com efeito, os participantes reconheceram diferenças entre os problemas do Clube e os que lhes são colocados em sala de aula, estes bastante mais alinhados com os conteúdos que estão a trabalhar num dado momento. Os problemas lançados nas sessões do Clube foram percecionados como mais desafiantes pois exigem a construção de uma estratégia e a seleção de ferramentas – matemáticas e tecnológicas – adequadas. Embora o nível de desafio sentido tivesse aumentado ao longo das sessões, isso não reduziu o gosto que experimentaram na procura das suas soluções, tendo os participantes considerado que o grau de dificuldade era adequado. O facto de se lançarem dois desafios e de se permitir que os participantes escolham o que preferem resolver, deixa-os mais confiantes de que conseguem obter uma solução.

Relativamente ao uso de tecnologias para resolver-e-exprimir os problemas, constatou-se que os participantes procuraram gradualmente apropriar-se de algumas ferramentas tecnológicas e tirar partido delas, quer para obter a solução dos problemas, quer para comunicar os seus procedimentos e raciocínios. Ao longo das sessões puderam explorar diversas *affordances* das ferramentas que apoiaram o pensamento matemático (e.g. GeoGebra, Excel), ou para comunicar de forma eficaz (e.g. aplicações Google, PowerPoint, editor de vídeo). De um modo geral, esta experiência de participação no Clube permitiu aos jovens aumentar o seu repertório de ferramentas tecno-matemáticas e ampliar o seu conhecimento acerca das potencialidades matemáticas da sua utilização. Neste sentido, e apesar da curta duração do Clube, é possível dizer que os jovens participantes iniciaram o desenvolvimento da sua Fluência Tecno-matemática que envolve conhecimento da tecnologia, conhecimento matemático mobilizável com essa tecnologia, e formas produtivas de os conjugar para produzir as soluções tecno-matemáticas dos problemas (Jacinto e Carreira, 2017a, 2017b, 2021).

Este desenvolvimento, ainda que embrionário, é consistente com a génese de jovens-com-media já que os participantes possuíam um conjunto de recursos matemáticos (conceitos, procedimentos) que podiam mobilizar na resolução dos problemas, mas desconheciam diversas *affordances* das ferramentas tecnológicas. Embora conhecessem superficialmente algumas das tecnologias, nunca as tinham usado para desenvolver qualquer atividade matemática. Assim, é possível considerar que a emergência de coletivos de jovens-com-media ocorreu ao longo do Clube, ainda que de forma ténue. Isso ficou patente pela forma como se foram gradualmente desprendendo do papel e lápis e passaram a reconhecer algumas *affordances* matemáticas das ferramentas, e a explorar outras de forma mais independente.

Os resultados deste estudo de caso exploratório sugerem que a atividade matemática promovida no âmbito do Clube Tecn@Mat é consistente com práticas que apoiam o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, muito em particular, tirando partido de tecnologias digitais. Para além disso, constata-se que foi possível desenhar um currículo para o Clube com vista ao desenvolvimento da fluência tecno-matemática dos participantes sem que se transformasse num ambiente puramente instrucional. Por fim, espera-se que o conjunto de princípios teóricos subjacentes ao *design* do Clube Tecn@Mat, bem como as descrições de como foi implementado e conduzido, possam inspirar outros Clubes de Matemática baseados na resolução de problemas com tecnologias digitais.

Agradecimentos

Este trabalho teve o apoio da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia através de um Contrato de Estímulo ao Emprego Científico (CEECIND/01584/2017). Agradece-se a colaboração da Professora Doutora Susana Carreira que acompanhou as sessões do Clube como observadora externa. Agradece-se ainda aos participantes no estudo pela sua disponibilidade e envolvimento, bem como às professoras Joana, Luísa e Paula pela divulgação e por incentivarem os seus alunos a participar no Clube.

Referencias

Aldon, G., Cusi, A., Schacht, F. e Swidan, O. (2021). Teaching mathematics in a context of lockdown: A study focused on teachers' praxeologies. *Education Sciences*, *11*(2), 38. http://dx.doi.org/10.3390/educsci11020038

Barron, B., Martin, C. e Roberts, E. (2007). Sparking self-sustained learning: report on a design experiment to build technological fluency and bridge divides. *International Journal of Technology and Design Education*, *17*(1), 75-105.

Borba, M. e Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*. Springer.

Carreira, S., Amado, N., Ferreira, R., Jacinto, H., Nobre, S. e Amaral, N. (2013). O Projeto Problem@Web: perspetivas de investigação em resolução de problemas. Em J. A. Fernandes, M. H Martinho, J. Tinoco e F. Viseu (Orgs.), *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 51-71). Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Carreira, S., Amado, N. e Jacinto, H. (2020). Venues for analytical reasoning problems: How children produce deductive reasoning. *Education Sciences, 10*, 169.

Carreira, S. e Jacinto, H. (2019). A model of mathematical problem solving with technology: the case of Marco solving-and-expressing. Em P. Liljedahl e M. Santos Trigo (Eds.), *Mathematical Problem solving*, (pp. 41-62). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_3

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H. e Nobre, S. (2016). *Youngsters solving mathematics problems with technology.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-24910-0

Chan, M. C. E. e Clarke, D. (2017). Structured affordances in the use of open-ended tasks to facilitate collaborative problem solving. *ZDM Mathematics Education*, *49*, 951–963.

Drijvers, P., Thurm, D., Vandervieren, E., Klinger, M., Moons, F., van der Ree, H., Mol, A., Barzel, B. e Doorman, M. (2021). Distance mathematics teaching in Flanders, Germany, and the Netherlands during COVID-19 lockdown. *Educational Studies in Mathematics*, *108*, 35-64. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10094-5

Durbin, J. M. (2020). An examination of effects of student math extracurricular participation on math self-efficacy and proficiency. *Journal of Higher Education Theory and Practice*, *20*(9), 121-126. https://doi.org/10.33423/jhetp.v20i9.3643

Geiger, V. (2005). Master, servant, partner and extension of self: a finer grained view of this taxonomy. Em P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce e A. Roche (Eds.), *Building connections: Theory, research and practice*. MERGA.

Hoyles, C., Noss, R., Kent, P. e Bakker. A. (2010). *Improving mathematics at work: The need for techno-mathematical literacies*. Routledge.

Jacinto, H. (2017). *A atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias e a fluência tecno-matemática de jovens do século XXI*. Unpublished doctoral thesis. Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Jacinto, H. e Carreira, S. (2017a). Mathematical problem solving with technology: The techno-mathematical fluency of a student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(6), 1115–1136. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9728-8.

Jacinto, H. e Carreira, S. (2017b). Different ways of using GeoGebra in mathematical problem-solving beyond the classroom: Evidences of techno-mathematical Fluency. *Bolema*, *31*(57), 266-288. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a13

Jacinto, H. e Carreira, S. (2021). Digital tools and paper-and-pencil in solving-and-expressing: How technology expands a student's conceptual model of a covariation problem. *Journal on Mathematics Education*, *12*(1), 113-132. http://doi.org/10.22342/jme.12.1.12940.113-132

Jacinto, H., Carreira, S. e Mariotti, M. A. (2016). Mathematical problem solving with technology beyond the classroom: The use of unconventional tools and methods. Em C. Csíkos, A. Rausch e J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 27-34). PME.

Kalogeropoulos, P., Roche, A., Russo, J., Vats, S. e Russo, T. (2021). Learning mathematics from home during COVID-19: Insights from two inquiry-focussed primary schools. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *17*(5), 1957. https://doi.org/10.29333/ejmste/10830

Lesh, R. e Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. Em R. Lesh e H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-33). Erlbaum Associates.

Lesh, R. e Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(2-3), 157-189. https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679998

Lesh, R. e Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. Em F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 763-804). Information Age Publishing and NCTM.

Papanastasiou, E. C. e Bottiger, L. (2004). Math clubs and their potentials: Making mathematics fun and exciting. A case study of a math club. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(2), 159-171. https://doi.org/10.1080/00207390310001638395

Papert, S. e Resnick, M. (1995). *Technological fluency and the representation of knowledge*. [Proposal to the National Science Foundation]. MIT Media Laboratory.

Saadati, F. e Felmer, P. (2021). Assessing impact of a teacher professional development program on student problem-solving performance. *ZDM Mathematics Education*, *53*, 799-816. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01214-1

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schweinle, A., Berg, P. J. e Sorenson, A. R. (2013). Preadolescent perceptions of challenging and difficult course activities and their motivational distinctions. *Educational Psychologist, 33*(7), 797-816. https://doi.org/10.1080/01443410.2013.785049

Sinclair, N. (2020). On teaching and learning mathematics–technologies. Em Y. Kolikant, D. Martinovic e M. Milner-Bolotin (Eds.), *STEM Teachers and Teaching in the Digital Era* (pp. 91-107). Springer.

Stahl, G. (2009) (Ed.). *Studying virtual math teams*. Springer.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Sage.

Stott, D., Baart, N. e Graven, M. (2019). Partnering with districts to expand an after-school maths club programme. *Africa Education Review*, *16*(6), 183-200. https://doi.org/10.1080/18146627.2018.1464690

Turner, J. e Meyer, D. (2004). A classroom perspective on the principle of moderate challenge in mathematics. *Journal of Educational Research*, *97*(6), 311-318. http://dx.doi.org/10.3200/JOER.97.6.311-318

Yao, X. e Manouchehri, A. (2019). Middle school students' generalizations about properties of geometric transformations in a dynamic geometry environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, *55*, 1-19. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.04.002

Seminario de investigación II: El desarrollo del nuevo marco curricular en matemáticas

Presentación: Moreno, A. (Universidad de Granada)

Ponentes:

- Canavarro, A. P. (Universidade de Évora, Portugal)
- Contreras, L. C. (Universidade de Huelva, España)
- Diego-Mantecón, J. M., Ortiz-Laso, Z. y Blanco, T. F. (Universidad de Cantabria y Universidad de Santiago de Compostela)

INTRODUCCIÓN SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II: EL DESARROLLO DEL NUEVO MARCO CURRICULAR EN MATEMÁTICAS

The development of the new curricular framework in mathematics

Moreno, A.

Universidad de Granada

El currículo (MEFP, 2022a) se define como el conjunto de objetivos, competencias, contenidos enunciados en forma de saberes básicos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación. Es, por tanto, un plan de formación que propone una forma de entender el conocimiento, de interpretar el aprendizaje, de poner en práctica la enseñanza y de valorar la utilidad y dominio de los aprendizajes realizados.

En este sentido, el currículo es una visión de lo que es el conocimiento y una concepción del proceso de la educación. En la propuesta de currículo que acaba de aprobar el Ministerio, el desarrollo de las competencias específicas de matemáticas adquiere un papel relevante. Sus líneas principales son la resolución de problemas y las destrezas socio-afectivas. Junto a estas, la formulación de conjeturas, el razonamiento matemático, el establecimiento de conexiones entre los distintos elementos matemáticos y la comunicación matemática.

La alfabetización matemática y resolución de problemas ocupan una parte importante del texto previo a la determinación de los saberes básicos, que nos muestran de alguna forma el carácter vehicular de los clásicos bloques de contenido, estructurados en torno al sentido matemático y que se articulan desde las dimensiones cognitiva y afectiva, integrando conocimientos, destrezas y actitudes.

El texto que presenta Luis Carlos Contreras se inicia con el análisis de las claves del currículo como única manera de entender la filosofía que se oculta detrás de este cambio curricular que el propio autor define como:

> el primer cambio relevante del siglo XXI en el ámbito educativo español. Merece la pena realizar un recorrido detallado por el mismo e identificar sus claves, y eso haremos en el epígrafe siguiente; pero lo haremos con perspectiva, mirando de reojo otro referente curricular español de hace treinta y tres años, el Diseño Curricular Base derivado de la LOGSE (MEC, 1989a, b), el más relevante del comienzo de la etapa democrática. Pretendemos con ello apreciar mejor lo que es nuevo y preguntarnos, en caso contrario, qué justifica mantener lo que no lo es.

Advierte el autor que, como no puede ser de otra manera, todo el análisis que realiza está mediado por su propia ideología y por sus concepciones acerca de la matemática y de sus procesos de enseñanza y aprendizaje.

Stenhouse (2003) nos enfrentaba a dos puntos de vista diferentes acerca del currículo. Por un lado, podemos considerarlo como una intención, un plan, una idea acerca de lo que nos gustaría que ocurriera en las aulas. Por otra parte, podemos verlo como el estado de cosas existente en las escuelas, lo que de hecho sucede en las mismas.

Moreno, A. (2022). Introducción seminario de investigación II: el desarrollo del nuevo marco curricular en matemáticas. En En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 49-51). SEIEM.

Este seminario pretende contribuir al análisis del currículo acercándonos a estas dos ideas: intención y realidad. Asumimos la idea de que nuestra realidad rara vez coincide con nuestras intenciones. Por ello, Ana Canavarro nos cuenta cómo se está realizando el proceso de desarrollo del nuevo currículo de matemáticas portugués. La autora señala que los procesos de cambio curricular son siempre complejos y plantean desafíos para todas las partes interesadas. En el proceso actual de desarrollo curricular en Portugal surgen algunas preguntas críticas que bien nos pueden hacer pensar en el futuro proceso de desarrollo curricular español: 1) ¿Cómo recibirán los profesores un nuevo currículo de matemáticas que desafíe de muchas maneras las concepciones dominantes sobre la enseñanza de las matemáticas? 2) ¿Cómo evolucionarán los conceptos y prácticas relacionados con la evaluación del desempeño de los estudiantes, que tiene que centrarse en mucho más que el dominio del conocimiento matemático? 3) ¿Cómo se involucrarán el Ministerio de Educación y los centros escolares para brindar condiciones para el desarrollo curricular, es decir, para promover la colaboración entre docentes, articulada con el necesario desarrollo profesional de los docentes? 4) ¿Cómo serán los nuevos libros de texto y cómo podrán constituirse en recursos para promover nuevos aprendizajes?

Cambiar la práctica (Lampert, 2001), desarrollar el currículo (Canavarro y Santos, 2018) y articularlo con el desarrollo profesional del docente del profesor (MEFP, 2022b), son tres aspectos indisociables para lograr los nuevos objetivos de la educación matemática. Contreras señala la formación inicial y continua del profesorado como la cuestión esencial para conseguir que el profesorado acepte estos principios y orientaciones y que la formación inicial se oriente en función de las competencias profesionales que se derivan y que implican poner más énfasis en la indagación y el pensamiento matemático. La formación inicial y continua han de verse como dos partes integradas de un todo, y las comunidades de práctica, de aprendizaje o de investigación han de ser los foros en los que los distintos participantes aporten y reciban, contribuyendo al enriquecimiento y desarrollo mutuos.

El desarrollo curricular se convierte en un medio para el aprendizaje del propio profesor en tanto le da la oportunidad de probar ideas en la práctica. José María Diego y colaboradores presentan reflexiones específicas sobre el enfoque integrado del contenido y su impacto en el aprendizaje de las matemáticas. Los principales obstáculos que se han identificado son la formación del profesorado, la evaluación de los proyectos y la reticencia de las familias a las nuevas metodologías. Les preocupa especialmente el primero de ellos y, como consecuencia, trabajan en un marco de desarrollo profesional que permita potenciar el aprendizaje de las matemáticas a través del enfoque integrado del contenido. Sin embargo, este enfoque puede fomentar el desarrollo de creencias positivas hacia la utilidad de las matemáticas tanto en contextos reales como en relación con otras disciplinas.

Esperamos que este seminario sirva para profundizar en el currículo de matemáticas y su desarrollo, y para que surjan nuevas cuestiones con las que poder seguir discutiendo a nivel nacional e internacional en un futuro.

Finalizar agradeciendo a la Junta Directiva de la SEIEM la invitación a coordinar este seminario, y el trabajo y dedicación de los ponentes que lo han hecho posible.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el ámbito proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España.

Referencias

Canavarro, A. P. y Santos, L. (2018). A large scale cascade model in the context of mathematics curriculum reform: interactive factors of influence on multipliers' work. En E. Bergqvist, M, Österholm,

C. Granberg y L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 203-210). PME.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. Yale University Press.

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022a). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76*, 41571-41789.

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022b). *Documento para debate. 24 propuestas para reforma de la mejora de la profesión docente*. MEFP.

Stenhouse, L. (2003). *Investigación y desarrollo del currículo*. Morata

O DESENVOLVIMENTO DO NOVO CURRÍCULO EM MATEMATICA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA EM PORTUGAL

The development of the new curriculum in Mathematics for Basic Education in Portugal

Canavarro, A. P.

Departamento de Pedagogia e Educação e Centro de Investigação em Educação e Psicologia da Universidade de Évora, Portugal

Resumo

Esta comunicação incide sobre o processo de desenvolvimento de um novo currículo de Matemática para o Ensino Básico em Portugal. Começa por explicar o contexto que fez surgir a necessidade de mudança. De seguida, revela o processo que foi desenvolvido por parte da equipa responsável pela elaboração das novas orientações curriculares. Apresenta depois as novas orientações propriamente ditas, discutindo os princípios que lhe conferem racionalidade e as consequências que estes têm nas opções curriculares com vista à coerência interna e relevância da proposta. Segue-se uma descrição das medidas em marcha com vista a apoiar a generalização das novas orientações curriculares em 2022/23. Termina-se com questões pertinentes em qualquer processo de desenvolvimento curricular e que são neste momento especialmente críticas.

Palavras chave: *Orientações curriculares em Matemática, Ensino Básico, processos de mudança curricular*.

Abstract

This communication focuses on the process of developing a new mathematics curriculum for Basic Education in Portugal. It begins by explaining the context that gave rise to the need for change. Then, it reveals the process that was developed by the team responsible for the elaboration of the new curricular guidelines. It then presents the new guidelines themselves, discussing the principles that give them rationality and the consequences they have on curricular options with a view to the internal coherence and relevance of the proposal. Below is a description of the measures underway to support the generalization of the new curricular guidelines in 2022/23. It ends with issues relevant to any curriculum development process that are particularly critical at this time.

Keywords: *Curriculum guidelines in Mathematics, Basic Education, curriculum change processes.*

RAZÕES PARA A MUDANÇA CURRICULAR

Em 2018, o Ministério da Educação em Portugal decidiu encomendar um estudo de avaliação sobre a evolução do currículo de Matemática em Portugal. Para tal, constituiu o Grupo de Trabalho de Matemática (GTM), composto por especialistas em Didática da Matemática, Matemática e professores que ensinam Matemática em diferentes níveis de escolaridade. A necessidade deste estudo justificava-se por dois tipos de razões: por um lado, à data coexistiam diversos documentos curriculares díspares, o

Canavarro, A. P. (2022). El desarrollo del nuevo currículo en Matemáticas para la Educación Básica en Portugal. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 53-61). SEIEM.

que gerava dificuldades à gestão curricular dos professores; por outro lado, existia uma perceção social de que os programas de Matemática em vigor (Bivar, Grosso, Oliveira e Timóteo, 2013) eram desadequados às aprendizagens que os alunos deviam e podiam fazer em Matemática. O surgimento destes programas tinha sido acompanhado de diversas críticas generalizadas por parte de muitos professores e de entidades como a Associação de Professores de Matemática (APM), a Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM), a Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE) e grupos de matemáticos profissionais, alguns deles sócios da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM).

O GTM considerou um horizonte temporal de 30 anos e abrangeu todos os ciclos de escolaridade obrigatória, incluindo também a Educação Pré-escolar. Analisou documentos curriculares nacionais e internacionais, relatórios nacionais sobre diferentes planos e medidas dirigidas à melhoria das aprendizagens em Matemática, bem como algumas dissertações de mestrado e teses de doutoramento sobre estes assuntos. Considerou também dados disponíveis sobre resultados dos desempenhos de alunos portugueses em Matemática, bem como estudos de comparabilidade internacional.

O estudo transversal do GTM (GTM, 2020) concluiu que os programas então em vigor (Bivar et al., 2013) e os materiais curriculares que deles derivavam (por exemplo, os respetivos manuais escolares) não estavam alinhados com a evolução progressiva e consistente observada ao longo dos anos nas orientações nacionais relativas ao ensino da Matemática, nem no que dizia respeito aos conteúdos de aprendizagem, nem no que respeitava as orientações metodológicas. Como ilustração, indico três exemplos: 1) desde os anos 90 que os programas portugueses valorizavam a resolução de problemas mas os programas em vigor desvirtuavam o conceito, reduzindo-o a "problemas de passos"; 2) ao longo dos anos a tecnologia foi sendo cada vez mais adotada nos programas portugueses, mas os programas em vigor desvalorizavam-na e manisfestavam desconfiança quanto ao uso da calculadora; 3) com o evoluir dos tempos, a educação estatística foi cada vez mais presente desde os primeiros anos de escolaridade, mas os programas em vigor reduziram a uma expressão mínima a abordagem aos dados no 1.º Ciclo e tornaram-na procedimental, focada no cálculo de medidas. O estudo do GTM (GTM, 2019) enfatizou também que entre os anos 2005 e 2012 Portugal fez um investimento notável no ensino da Matemática, lançando um novo programa de Matemática para todo o Ensino Básico (alunos entre os 6 e os 15 anos) (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins e Oliveira (2007), apoiado por um programa de formação contínua de professores, em especial do 1.º Ciclo (Serrazina, Canavarro, Guerreiro, Rocha, Portela, & Gouveia, 2005), e por um plano de ação focado no desenvolvimento curricular nas escolas (Santos, Canavarro, Santos, Pires, Martinho, Amado e Ferreira (2012). Note-se ainda que durante esse período os resultados dos alunos portugueses em avaliações internacionais subiram de forma assinalável.

Em consequência, o GTM recomendou a elaboração urgente de um novo currículo de Matemática para a escolaridade obrigatória, a substituir todos os outros documentos e a constituir-se como a referência nacional, que tomasse em consideração a experiência curricular adquirida em Portugal nas últimas décadas e que buscasse inspiração nas tendências curriculares internacionais relativas ao ensino da Matemática. Esta foi a primeira recomendação do conjunto de 22 recomendações sobre quatro áreas relevantes e articuladas: o currículo de Matemática, as dinâmicas de desenvolvimento curricular, a avaliação do desempenho dos alunos na disciplina de Matemática e a formação de docentes (GTM, 2019).

O PROCESSO DE PRODUÇÃO DO NOVO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA

Após a publicação do estudo do GTM (GTM, 2020), o Ministério da Educação decidiu encetar o processo de revisão curricular em Matemática. Constituiu novos Grupos de Trabalho, incluindo elementos do anterior GTM e outros elementos novos, com diferentes missões. No que ao Ensino Básico diz respeito, foi nomeado um grupo responsável pela elaboração do programa de Matemática para o Ensino Básico (crianças dos 6 a 15 anos), designado por Grupo de Trabalho da Revisão Curricular das Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (GTRCAEMEB), e outro grupo responsável pelo apoio à generalização dos programas nas escolas, a nível nacional, designado por Grupo de Trabalho para o Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática (GTDCPM). Seguindo as recomendações do GTM (GTM, 2020), estes grupos foram constituídos com uma composição diversificada e incluindo especialistas das áreas da Didática da Matemática, da Matemática e professores que ensinam Matemática em diferentes níveis de escolaridade do Ensino Básico.

O GTRCAEMEB desenvolveu o seu trabalho de forma intensiva, entre novembro de 2020 e agosto de 2021, passando por diferentes fases e formas de organização. A primeira fase envolveu toda a equipa em conjunto e teve como objetivo a discussão do racional relativo às orientações curriculares a elaborar. A segunda fase foi desenvolvida em subequipas especializadas nos diferentes conteúdos de aprendizagem, associados aos grandes temas de Números, Álgebra, Geometria e Estatística e Probabilidades, e estabeceu a articulação vertical desses temas ao longo dos nove anos de escolaridade. A terceira fase foi desenvolvida com outra organização, com a equipa distribuída por subequipas especializadas nos diferentes ciclos de escolaridade (1.º, 2.º, e 3.º ciclos de escolaridade) e focou-se no desenvolvimento de cada um dos temas. Os outros elementos incluídos no programa (finalidades, objetivos, racional dos conteúdos, orientações metodológicas, avaliação das aprendizagens dos alunos, e indicações para a gestão curricular) são comuns aos documentos programáticos de todos os nove anos de escolaridade: compõem a sua introdução, reforçando uma lógica unificada do Ensino Básico.

Para a produção das novas orientações, adotou-se como referência fundamental o *Perfil dos Alunos à saída da Escolaridade Obrigatória* (PASEO) (Martins, Gomes, Brocardo, Pedroso, Carillo, Silva, Encarnação, Horta, Calçada, Nery e Rodrigues, 2017), que corresponde ao currículo global em Portugal, constituindo-se como indicador das aprendizagens que todos os jovens devem ter oportunidade de desenvolver na escola. Além deste documento balizador, outras obras foram objeto de atenção: Documentos curriculares anteriores, em especial o mais recente programa (Ponte et al., 2007) que antecedeu o que estava em vigor (Bivar et al., 2013), documentos curriculares de outras áreas disciplinares/disciplinas do Ensino Básico, e programas de outros países bem cotados nos estudos internacionais, em especial Finlândia, Ontário e Singapura — todos eles também em processo de revisão curricular recente ou em desenvolvimento.

As diversas subequipas trabalharam de forma independente mas articulada, discutindo as sucessivas versões que iam sendo produzidas. Esta articulação, vertical e horizontal, permitiu dotar os documentos curriculares de consistência a nível de conteúdos e a nível formal.

Ainda durante a fase de produção dos programas, a equipa fez reuniões de divulgação de ideias relevantes sobre os mesmos dirigidas aos autores de manuais escolares. Foi também realizado um processo de consulta pública, durante o qual foram recebidos pareceres escritos e realizadas reuniões de audição, umas dirigidas a professores dos diferentes ciclos, outras a entidades como a APM, a SIEM, a SPM. A direção da SPM teve uma atitude manifestamente crítica aos documentos curiculares mas as apreciações recebidas foram globalmente positivas, independentemente de existirem aspetos pontuais de crítica ou questionamento. Após a consulta pública, foram analisadas pela equipa todas as contribuições recebidas, tomadas as decisões finais e redigidas as versões definitivas dos programas para os nove anos de escolaridade. Estas versões foram homologadas e tornadas públicas em 19 de agosto de 2021, podendo ser consultadas em https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica (Canavarro, Mestre, Gomes, Santos, Santos, Brunheira, Vicente, Gouveia, Correia, Marques e Espadeiro, 2021).

O NOVO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA NO ENSINO BÁSICO

A tutela impôs três condições aos documentos curriculares, por uma questão de uniformização com as outras disciplinas do currículo português: designarem-se de *Aprendizagens Essenciais*, apresentarem-se por ano de escolaridade e adotarem a estrutura formal dos demais documentos *Aprendizagens Essenciais* das outras áreas disciplinares/disciplinas. Deste modo, cada programa de cada ano de escolaridade organiza-se em duas partes.

O racional do currículo de Matemática

É na primeira parte que se expõem as razões que explicam as opções da nova proposta curricular. Essa explicitação é de importância decisiva para que os documentos possam ser melhor interpretados por parte dos professores, pelos autores dos manuais escolares e pela comunidade educativa em geral. Importa sublinhar que nenhum currículo é neutro, a todos subjaz uma ideologia que deve ser assumida. Assim, o novo programa de matemática português começa por assumir três princípios fundamentais que enquadram toda a proposta.

"Matemática para todos/as" corresponde ao primeiro princípio assumido. Por um lado, todas as crianças e jovens têm o direito a aprender Matemática, um património científico e cultural indispensável para melhor conhecer, compreender e atuar no mundo em que vivem, prosseguir estudos, aceder a uma profissão e exercer uma cidadania democrática. Por outro lado, as sociedades precisam de indivíduos matematicamente literados, capazes de raciocinar matematicamente e formular, empregar e interpretar a Matemática para resolver problemas numa variedade de contextos do mundo real, e assim viver e atuar de modo informado, contributivo, autónomo e responsável. Assumir o princípio da Matemática para todos/as tem consequências. A possibilidade de aprendizagem é facilitada pelo desenvolvimento de uma predisposição positiva para essa aprendizagem. Para tal, cada aluno deve ter: 1) acesso a uma experiência matemática a que possa dar sentido, construída com base na compreensão das ideias; 2) oportunidade de desenvolver o gosto e a autoconfiança na capacidade de lidar com situações matemáticas; 3) oportunidade de reconhecer o valor do saber matemático que aprende. Por isso o novo programa defende a exploração de situações que promovam a compreensão da matemática pelos alunos, a abordagem aos conceitos por aproximações sucessivas e com progressivos níveis de formalização que se vão aprofundando em diferentes anos/ciclos, tirando partido quer das conexões internas que permitem ver a Matemática como um todo coerente, quer das conexões externas com contextos que permitem expor e evidenciar a relevância da Matemática.

'Matemática é única, mas não é a única' corresponde a outro princípio. Por um lado, a Matemática possui características específicas que fazem com que se distinga de todas as outras ciências e que proporcione aprendizagens específicas aos alunos, nomeadamente no que diz respeito ao desenvolvimento de determinados tipos de raciocínio. Por outro lado, o valor da aprendizagem da Matemática é tanto maior quanto mais ela conseguir contribuir para uma educação integral do indivíduo. A Matemática deve servir o currículo global, tal como todas as outras áreas disciplinares, numa lógica de diálogo interdisciplinar. Assumir este princípio tem também consequências. Implica que a Matemática seja perspetivada considerando o desenvolvimento que se deseja que todos os alunos atinjam, e em relação com as outras áreas curriculares. Para tal, a Matemática precisa de se perspetivar tomando como referencial o PASEO (Martins et al., 2017) e identificar como pode efetivamente contribuir para o desenvolvimento das áreas de competencias gerais que ele define. Precisa também de se pôr em perspetiva com as outras áreas curriculares, tirando partido das conexões que reforçam a relevância dos saberes múltiplos para uma educação integral e global. Por isso o novo programa propõe o desenvolvimento de capacidades e atitudes gerais transversais (não disciplinares) do PASEO que se podem associar intencionalmente ao trabalho em Matemática, como é o caso do pensamento crítico, criatividade, colaboração e autorregulação, no que diz respeito às capacidades transversais, ou da autoconfiança, perseverança, autonomia e valorização do papel do saber Matemática, no que diz respeito a atitudes transversais.

"Matemática no século XXI" corresponde ao terceiro princípio assumido. Como alertam diversas entidades internacionais, como a OCDE, assistimos ao aparecimento constante de novos desafios e problemas, num mundo marcado por acentuadas mudanças impulsionadas sobretudo pelo desenvolvimento tecnológico. A educação matemática tem de conseguir eleger como focos privilegiados de aprendizagem dos alunos aqueles que melhor contribuem para a sua preparação para lidar com a complexidade dos desafios atuais. Assumir este princípio tem consequências. Por um lado, o domínio, per si, de conhecimento meramente declarativo e a execução de procedimentos que podem ser atualmente desempenhados, com vantagem, por máquinas está diariamente a perder relevância. Por outro lado, torna-se cada vez mais premente ser capaz de lidar com situações complexas, destacando-se o valor da matemática como ferramenta para para descrever, explicar e prever fenómenos e na ajuda a formular juízos e decisões bem fundamentados, como se espera de cidadãos do século XXI participativos, empenhados e reflexivos (OCDE, 2018). Por isso este programa valoriza o desenvolvimento da "literacia matemática" (OCDE, 2018), dando especial destaque as capacidades matemáticas e aos conhecimentos matemáticos relevantes para interpretar as situações do mundo real e outras áreas de conhecimento. Como capacidades matemáticas elege a resolução de problemas, o raciocínio matemático, a comunicação matemática, as representações matemáticas e as conexões matemáticas, bem como o pensamento computacional, que recorre a práticas matemáticas que permitem resolver problemas por processos computáveis, favorecendo o contacto dos alunos com o que subjaz à opacidade da realidade tecnológica. O princípio 'Matemática no século XXI' implica também selecionar criteriosamente os conhecimentos matemáticos a abordar, sendo necessário ter a coragem de deixar para trás alguns que eram vistos como imprescindíveis e de dar destaque a outros que antes pareciam secundários. Importa que os alunos consigam compreender e usar, de forma fluente e rigorosa, com significado e em situações diversas, conceitos, procedimentos e métodos dos domínios dos Números, Álgebra, Dados e Probabilidades, Geometria e Medida.

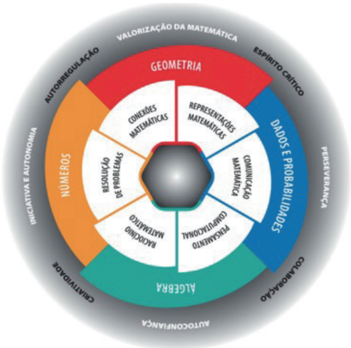


Figura 1. Esquema sobre os conteúdos de aprendizagem em Matemática no Ensino Básico (Canavarro et al., 2021, p. 4)

Concretizando mais, os três princípios combinados têm naturalmente consequências nas propostas relativas ao que os alunos devem aprender (Figura 1): Capacidades e atitudes gerais transversais do PASEO, capacidades matemáticas transversais e temas matemáticos. Relativamente a estes últimos, o foco é perspetivado tendo em conta o século XXI. Assim, nos Números valoriza-se o sentido de número, o cálculo mental e o saber lidar criticamente com estimativas e valores aproximados, dando relevância ao conhecimento dos números e das operações para resolver problemas matemáticos em contexto e com tecnologia. Na Álgebra valoriza-se a compreensão da variação em situações diversas, a identificação de relações matemáticas, o expressar a generalidade por representações adequadas e o uso do processo de modelar para descrever e fazer previsões. O pensamento algébrico surge desde o 1.º ciclo, com ênfase numa abordagem de aritmética generalizada. Em Dados e Probabilidades valoriza-se o desenvolvimento da literacia estatística e do raciocínio probabilístico desde os primeiros anos. Propõe-se a realização de investigações estatísticas por parte dos alunos (usar dados para conhecer o que nos rodeia e/ou interessa, fundamentar decisões e colocar novas questões, lidar com a incerteza), em contextos da realidade e usando tecnologia. Em Geometria e Medida valoriza-se o raciocínio espacial, com ênfase na visualização e na orientação espacial, a partir das explorações dos alunos e inclusão de novos objetos geométricos habitualmente não tratados. Propõe-se a comparação, estimação e determinação de medidas em vários contextos em que adquiram utilidade.

Estes três princípios têm igualmente consequências nas propostas relativas às orientações metodológicas que se preconizam em todos os conteúdos e ciclos/anos de escolaridade. Entre estas destacam-se as seguintes: 1) abordagem articulada aos conteúdos que mobilize, em simultâneo, conhecimentos de diversos domínios, potenciando as aprendizagens em momentos diversos e rentabilizando o tempo de ensino; 2) exploração de tarefas desafiantes, no contexto matemático ou exterior a ela, que motivem o interesse dos alunos e proporcionem uma experiência matemática significativa, diferenciada e relevante; 3) recurso a tecnologia potente, que amplie a atividade matemática que os alunos podem ter e a torne compatível com os dispositivos que os alunos usam diariamente fora da sala de aula; 4) implicação do aluno nos processos de construção de conhecimento de modo a incentivar a sua agência, autonomia e possibilidade de autorregulação.

A concretização detalhada das orientações curriculares

A segunda parte de cada programa de cada ano de escolaridade, designada por "Operacionalização das Aprendizagens Essenciais", está organizada em tabelas com quatro colunas (Figura 2), que concretizam as orientações curriculares para cada um dos cinco grandes temas matemáticos de conteúdo de aprendizagem. O primeiro são as capacidades matemáticas, de modo a sublinhar que estas constituem objetos de aprendizagem, e os quatro seguintes correspondem a cada um dos domínios de conhecimento matemático anteriormente referidos.

Comunicação e divulgação do estudo			**A, B, E, F, H, I**
Público-alvo e recursos para a divulgação do estudo	Decidir a quem divulgar o estudo realizado e elaborar diferentes recursos de comunicação de modo a divulgá-lo de forma rigorosa, eficaz e não enganadora. Divulgar o estudo, contando a história que está por detrás dos dados e levantando questões emergentes para estudos futuros.	Apoiar e acompanhar o desenvolvimento, em grupo, do estudo estatístico, nomeadamente a sua divulgação, reservando momentos de trabalho na sala de aula para este fim. Promover a discussão com toda a turma sobre a quem divulgar as conclusões e novas questões que emergem do estudo, incentivando a curiosidade. Dar autonomia aos alunos para escolherem o modo de comunicação/divulgação dos seus resultados apoiando-os na preparação dessa comunicação que incluirá a realização de um	

Figura 2. Excerto do novo programa de Matemática do 7.º ano (p. 35)

Para cada tema, a primeira coluna discrimina os conhecimentos, tópicos e subtópicos. A segunda coluna define os objetivos de aprendizagem para os alunos, considerando capacidades e conhecimentos matemáticos interligados. A terceira coluna indica ações estratégicas de ensino que se consideram adequadas ao(s) objetivo(s), correspondendo a orientações metodológicas detalhadas com múltiplas indicações sobre a abordagem aos conteúdos, tipos de tarefas a explorar, modos de trabalho, dinâmica da sala de aula, uso de recursos, papel dos alunos. A quarta coluna explicita, por tópico, diferentes áreas de competências do PASEO que podem ser mobilizadas se forem adotadas as indicações curriculares da proposta. Esta explicitação pretende dar visibilidade a como a Matemática se pode relacionar com o PASEO (Martins et al., 2017).

O PROCESSO DE GENERALIZAÇÃO DO NOVO PROGRAMA

O novo programa entrará em vigor, a nível nacional, em 2022/23, nos 1.º, 3.º, 5.º e 7.º anos de escolaridade. O ano de 2021/22 foi utilizado para desenvolver um conjunto de medidas de apoio à generalização do programa, da responsabilidade do GTDCPM atrás referido. Importa também notar que durante este período as editoras estiveram a produzir manuais escolares ajustados aos novos programas dos anos em questão.

As medidas desenvolvidas centram-se na operacionalização dos novos programas, na produção de recursos e na formação de professores. No que diz respeito à operacionalização, existem duas turmas piloto por ano de escolaridade (1.º, 3.º, 5.º e 7.º anos) que iniciaram a implementação do novo programa em 2021/23, com o objetivo de antecipar a deteção de dificuldades na prática curricular e de proporcionar testemunhos e materiais da experiência que possam servir de referência ao resto do país. As turmas piloto são turmas normais, de diversos locais. Os professores destas turmas participam de livre vontade e são acompanhados por autores dos novos programas, com uma organização por ano de escolaridade, existindo uma reunião semanal conjunta para preparação de tarefas, balanço das atividades desenvolvidas e reflexão sobre a evolução e dificuldades detetadas.

No que diz respeito à produção de recursos, destaca-se a organização de um banco digital de materiais relevantes que estavam dispersos e podem ser úteis para a preparação da prática letiva dos professores. Além disso, estão a ser preparados novos materiais, brochuras e vídeos, que se focam nas ideias centrais do novo currículo de Matemática.

No que diz respeito à formação de professores, foi desenhado um programa que envolve a articulação entre as instituições de ensino superior que formam professores e os centros de formação de professores. Este programa funciona em cascata e abrange todos os professores que ensinam Matemática segundo os novos programas no próximo ano. A equipa do GTDCPM já capacitou um conjunto de cerca de 160 formadores que estão preparados para formar os professores do terreno em larga escala, a partir do início de 2022/23. O programa estabelece que cada agrupamento de escolas indica um par de professores por ciclo de escolaridade para participar na formação prestada pelos formadores capacitados. Esse par replica, em calendário adequado (uma tarde livre por semana para esta atividade), a formação recebida aos outros docentes do seu agrupamento de escolas. Esta estratégia permite que todos se possam envolver em simultâneo num processo de desenvolvimento curricular e profissional, tirando partido da colaboração, do apoio especializado dos formadores, bem como da aplicação direta no terreno aos alunos e possibilidade de regulação das práticas.

APONTAMENTO FINAL

Os processos de mudança curricular são sempre complexos e colocam desafios a todos os intervenientes. No atual processo em desenvolvimento em Portugal, algumas questões críticas se colocam: 1) Como vão os professores receber um novo currículo de Matemática que desafia em muito conceções dominantes sobre o ensino da Matemática (NCTM, 2017)? 2) Como vão evoluir as conceções e práticas relativas à avaliação do desempenho dos alunos, que tem de se focar em muito mais do que o domínio de conhecimentos matemáticos (NCTM, 2017)? 3) Como vão o Ministério da Educação e as escolas implicar-se de modo a facultar condições de desenvolvimento curricular, nomeadamente para promover a colaboração entre docentes, articulado com o necessário desenvolvimento profissional dos professores (Canavarro e Santos, 2018; Krainer, 2015)? 4) Como vão ser os novos manuais escolares e de que modo se vão conseguir constituir como recursos promotores das novas aprendizagens?

Estas questões não são novas mas surgem com especial relevo num processo em que os desafios estão potenciados pela magnitude das transformações curriculares em jogo. A investigação em educação matemática tem nestas reformas curriculares terreno fértil para a investigação.

Agradecimentos

Equipa do GTM: Ana Paula Canavarro, Carlos Albuquerque, Célia Mestre, Hélder Martins, Jaime Carvalho e Silva (Coord.), João Almiro, Leonor Santos, Luís Gabriel, Olga Seabra e Paulo Correia.

Equipa do GTRCAEMEB: Ana Paula Canavarro (Coord.), Célia Mestre, Dulce Gomes, Elvira Santos, Lina Brunheira, Leonor Santos, Manuela Vicente, Maria João Gouveia, Paulo Correia, Pedro Macias Marques e Rui Gonçalo Espadeiro.

Equipa do GTDCPM: Leonor Santos (Coord.), Ana Paula Canavarro, Célia Mestre, Cristina Martins, Elvira Santos, Hélia Jacinto, João Almiro, Lina Brunheira, Paulo Correia, Rosa Tomás Ferreira e Rui Gonçalo Espadeiro.

Referencias

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. e Timóteo, C. (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. e Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica

Canavarro, A. P., Albuquerque, C., Mestre, C., Martins, H., Silva, J. C., Almiro, J., Santos, L., Gabriel, L., Seabra, O. e Correia, P. (2020). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática*. Lisboa: DGE. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/ Estudos_Relatorios/ gtm_27_03_2020_relatorio_final.pdf

Canavarro, A. P. e Santos, L. (2018). A large scale cascade model in the context of mathematics curriculum reform: interactive factors of influence on multipliers' work. Em E. Bergqvist, M, Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 203-210). PME.

Krainer, K. (2015). Reflections on the increasing relevance of large scale professional development. *ZDM Mathematics Education, 47*, 143-151.

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R. e Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Direção-Geral da Educação, Ministério da Educação.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2017). *Princípios para a ação – Assegurar a todos o sucesso em Matemática.* APM.

Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD] (2018). *The future of education and skills 2030*. OECD Publishing.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L, Martins, E. e Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, Ministério da Educação.

Santos, L., Canavarro, A. P., Santos, E., Pires, M., Martinho, H., Amado, N. e Ferreira, R. (2012). *Plano da Matemática e novo programa do Ensino Básico. Relatório final*. Novembro 2012. Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, Ministério de Educação (não publicado).

Serrazina, L., Canavarro, A. P., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J. e Gouveia, J. (2005). *Programa de formação contínua em Matemática para professores de 1.º Ciclo*. Lisboa: Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, Ministério de Educação.

LA NUEVA PROPUESTA CURRICULAR Y LA FORMACIÓN DEL PROFESOR

The new curricular proposal and teacher training

Contreras, L. C.

Centro de Investigación COIDESO, Universidad de Huelva, España

Resumen

La necesidad de un cambio curricular es siempre percibida en las aulas, por la sociedad y por su sector productivo. Los indicadores de su necesidad proceden de los resultados de las diferentes pruebas diagnósticas. Los procesos de cambio se originan en los estamentos políticos, no siempre contando de forma transparente con otros ámbitos, como el académico. Los fundamentos de gran parte de las propuestas tienen su respaldo en la investigación educativa y muchos de ellos, como puede ser la resolución de problemas, han venido inspirando sucesivas reformas. Generalmente, el profesorado asiste como invitado a este proceso. Como resultado, las propuestas de cambio no tienen el efecto deseado. En este trabajo analizaremos la actual propuesta de reforma de la Educación Primaria, mirándola en perspectiva en comparación con la realizada en la LOGSE, y reflexionaremos después sobre sus implicaciones en la formación del profesorado.

Palabras clave: *cambio curricular, educación primaria, educación secundaria, formación del profesorado.*

Abstract

The need for a curricular change is always perceived in the classrooms, by society and by its productive sector. The indicators of its need come from the results of the different diagnostic tests. The processes of change originate in the political classes, not always counting in a transparent way with other areas, such as the academic one. The foundations of a large part of the proposals are supported by educational research and many of them, such as problem solving, have been inspiring successive reforms. Generally, teachers attend this process as guests. As a result, the proposals for change do not have the desired effect. In this work we will analyze the proposal for the reform of Primary Education, looking at it in perspective in comparison with the one carried out in the LOGSE and we will later reflect on its implications in teacher training.

Keywords: *curricular change, primary education, secondary education, teacher training.*

INTRODUCCIÓN

Desde la segunda mitad del siglo XX hemos asistido a numerosos cambios curriculares, tanto en el plano nacional, como internacional. Es bastante probable que, si el aprendizaje matemático de los estudiantes hubiera sido, en general, exitoso, estos cambios se habrían dilatado más en el tiempo o habrían sido meramente coyunturales. A veces los cambios han estado alimentados por necesidades sentidas desde el desarrollo tecnológico, por la competencia técnica entre las grandes potencias, pero, incluso en estos casos, lo que subyace en estos cambios era una mejora en la alfabetización matemática de la población. En una suerte de movimiento pendular, estos cambios se han sustentado unas veces

Contreras, L. C. (2022). La nueva propuesta curricular y la formación del profesor. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 63-79). SEIEM.

en principios pedagógicos, y en otros, como en el caso de la matemática moderna, en la propia evolución de la matemática académica. Algunos de estos cambios han tenido repercusiones, más o menos directas, en los modelos de formación de los profesores y todos ellos se han visto reflejados, con mayor o menor acierto, en los libros de texto, a la postre convertidos en el material curricular de referencia, cuando no el único. La investigación en educación matemática ha logrado, en todos estos procesos, dejar semillas de gran calado educativo, como es el caso de la resolución de problemas. Sin embargo, pocas veces esas grandes ideas han conseguido germinar en las aulas.

Estamos ante el primer cambio relevante del siglo XXI en el ámbito educativo español. Merece la pena realizar un recorrido detallado por el mismo e identificar sus claves, y eso haremos en el epígrafe siguiente; pero lo haremos con perspectiva, mirando de reojo otro referente curricular español de hace treinta y tres años, el Diseño Curricular Base derivado de la LOGSE (MEC, 1989a, b), el más relevante del comienzo de la etapa democrática. Pretendemos con ello apreciar mejor lo que es nuevo y preguntarnos, en caso contrario, qué justifica mantener lo que no lo es.

Los cambios, en cualquier caso, los tienen que hacer efectivos los profesores. Los mismos profesores que ayer enseñaban desde unas directrices determinadas, tendrán que hacerlo mañana desde otras diferentes, sin que entre ambos momentos se les haya dado la oportunidad de reflexionar sobre las consecuencias de los cambios producidos. Este aspecto ocupará otro epígrafe de este análisis.

Cualquier mirada al currículo puede hacerse desde diferentes puntos de vista. Todos ellos están mediados por la ideología del autor del análisis y, en nuestro caso, por sus concepciones acerca de la matemática y de sus procesos de enseñanza y aprendizaje; las concepciones e ideología de quien suscribe, por tanto, impregnarán el análisis, pero intentaremos justificar los comentarios a la luz de la producción en educación matemática.

UNA REVISIÓN DE LAS CLAVES DE LA PROPUESTA CURRICULAR

Por su similitud, estructura y fundamentos, hemos tomado para nuestro análisis la propuesta curricular para la Educación Primaria (RD 157/2022), aunque añadiremos aquellos aspectos que puedan ser más específicos para Educación Secundaria Obligatoria (RD 217/2022). Haremos nuestro análisis sobre el conjunto de la propuesta, desde los preámbulos, exposición de motivos o fundamentos, hasta la parte más vinculada a los contenidos matemáticos de los mismos.

En los principios generales se declara el interés por que el currículo no suponga “una barrera que genere el abandono escolar o impida el acceso y disfrute del derecho a la educación” (RD 157/2022, p. 24386). Esto es una apuesta clara por la educación para todos y una llamada de atención para materias que, como las matemáticas, han supuesto una selección de los estudiantes. Como hemos señalado en Montes *et al.* (en prensa), lejos del derecho de nacimiento que supone poder aprender matemáticas, estas se han convertido en un filtro social que segrega a los estudiantes y les aleja, en muchos casos, del acceso a profesiones bien remuneradas como las ingenierías. Al igual que ha hecho el CEMat (2021) aplaudimos la consideración de las matemáticas como actividad humana con la consiguiente consideración del derecho universal de acceso a la misma; además, su reconocimiento como lenguaje hace ese derecho universal más patente.

También este preámbulo parte del enfoque competencial, dando prioridad a estas (tanto a las competencias clave, como específicas) frente a los saberes básicos (una versión actualizada y elemental de los anteriores bloques de contenido), hasta ahora tratados como compartimentos estancos. Priorizar las competencias supone, de hecho, dar oportunidades para construir y crear, donde la formulación y resolución de problemas, la formulación de conjeturas, la argumentación o la justificación constituyen el objetivo, mientras que los contenidos son el medio.

Compartimos, asimismo, la visión del CEMat (2021) en su consideración del currículo como bastante más que un elenco de actividades y en su llamada de atención acerca de la transversalidad que se otorga a los procesos, métodos y actitudes matemáticas, frecuentemente "mermadas a causa de la preponderancia de los bloques de contenido clásicos" (p. 4).

En los fines de la Educación Primaria, contenidos en el RD, se enfatiza lograr:

> Aprendizajes de la expresión y comprensión oral, la lectura, la escritura, el cálculo, las habilidades lógicas y matemáticas, la adquisición de nociones básicas de la cultura y el hábito de convivencia, así como los de estudio, trabajo, el sentido artístico, la creatividad y la afectividad (RD 157/2022, p. 24388).

En el caso de la ESO, el objetivo f) muestra una clara interdisciplinaridad al "concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas" (RD 217/2022, p. 41576).

Ninguno de estos fines es ajeno al conocimiento matemático. La expresión y la comprensión oral son las bases de dos competencias matemáticas: la argumentación y la comunicación; el cálculo y las habilidades lógicas y matemáticas lo son también de las competencias pensar, razonar, representar o modelizar, como los demás aprendizajes podrían vincularse a elementos afectivos y metacognitivos. Se defiende, de hecho, como principio pedagógico, que estos aprendizajes se favorezcan desde todas las áreas curriculares, con un "aprendizaje significativo que promueva la autonomía y la reflexión … [a través de] la resolución colaborativa de problemas" (RD 157/2022, p. 24389). Esto supone la primera llamada para que la resolución de problemas constituya el eje vertebrador de todas las áreas. Se incide de nuevo en esto en los objetivos, instando a "desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como [su aplicación] a las situaciones de su vida cotidiana" (RD 157/2022, p. 24390).

De las ocho competencias clave (prácticamente idénticas en Educación Primaria y ESO), de las que se pretende una visión estructural y funcional, hay al menos cuatro que requieren nuestra atención: la competencia en comunicación lingüística; la competencia matemática y competencia en ciencias, tecnología e ingeniería (con una llamada clara a STEM); la competencia digital; y la competencia personal, social y de aprender a aprender. Sus descriptores operativos (ver pp. 24405 y ss., en Primaria, RD 157/2022; pp. 41597 y ss. en ESO, RD 217/2022) muestran con precisión los elementos clave en el aprendizaje, para y a través de, la resolución de problemas, enfatizando los procesos matemáticos (observar, analizar, pensar, razonar, representar, argumentar, comunicar, modelizar), así como la capacidad de aprender a gestionar los procesos metacognitivos, frente a los clásicos contenidos o temas que pasan a ocupar un papel de vehículo.

En la parte específica de Matemáticas (pp. 24485 y ss. del anexo, en Primaria, RD 157/2022; pp. 41725 y ss. en ESO, RD 217/2022), se comienza señalando el "marcado carácter instrumental que las vincula con la mayoría de las áreas de conocimiento" (RD 157/2022, p.24485), algo que siendo cierto supone solo una visión parcial que queda matizada cuando se afirma que:

> Poseen un valor propio, [y] constituyen un conjunto de ideas y formas de actuar que permiten conocer y estructurar la realidad, analizarla y obtener información nueva y conclusiones que inicialmente no estaban explícitas ... [promoviendo] el razonamiento, la argumentación, la comunicación, la perseverancia, la toma de decisiones o la creatividad (RD 157/2022, p. 24485).

También en el caso de la ESO, se establecen el razonamiento, la argumentación, la modelización, el conocimiento del espacio y el tiempo, la toma de decisiones ante situaciones de incertidumbre, la comunicación, la perseverancia, la organización, la optimización o la creatividad como características de los procesos matemáticos.

Esto se aleja del paradigma dominante, que Ellis y Berry (2005) denominan procedimental-formalista, centrado en la utilidad formativa necesaria en el ámbito científico al que realmente accede una parte muy pequeña de la población estudiantil.

La alfabetización matemática y resolución de problemas ocupan una parte importante del texto previo a la determinación de los saberes básicos, que nos muestran de alguna forma el carácter vehicular de los clásicos bloques de contenido, estructurados en torno al sentido matemático y que se articulan desde las dimensiones cognitiva y afectiva (y esto supone una novedad importante), integrando conocimientos, destrezas y actitudes. Esto supone un acercamiento hacia lo que Chevalard (2017) ha llamado "paradigma de cuestionamiento del mundo" que lleve a los estudiantes a hacerse preguntas por una motivación intrínseca del deseo de aprender. Se enfatiza (en el caso de la ESO) que "las líneas principales en la definición de las competencias específicas de matemáticas son la resolución de problemas y las destrezas socio-afectivas" (RD 217/2022, p. 41725), precisando la importancia de la formulación de conjeturas, el razonamiento matemático y el establecimiento de las diferentes conexiones, dentro de la matemática y con el resto de las materias.

Merece mención especial la atención que se dedica a los aspectos socioafectivos en Primaria. El control de las emociones, saber gestionar situaciones negativas (frecuentes en actividades de resolución de problemas) y moldear las concepciones y la percepción de las propias posibilidades puede ayudar a incrementar la curiosidad y la necesidad de nuevos aprendizajes. En el caso de la ESO, fundamenta la importancia de los elementos socio-afectivos en la investigación en educación matemática, resaltando también la relevancia del control de las emociones.

Como señala Hannula (2015), es una cuestión asumida en la investigación en educación matemática que la disposición del estudiante cuando resuelve problemas, entendida como el conjunto de actitudes, ansiedad, creencias, valores o motivación, tiene una gran influencia en el éxito del proceso. Las emociones son consideradas como una parte importante en los procesos de autorregulación de la resolución de problemas no rutinarios. Una disposición positiva hacia las matemáticas mejora el rendimiento, y viceversa; a medida que mejora el rendimiento mejora la actitud del estudiante ante nuevos retos y, además, esa mejora potencia las relaciones interpersonales y la coordinación social desde la perspectiva colaborativa. De ahí que nos parezca especialmente relevante esta consideración explícita, formando parte de dos competencias específicas, como veremos más adelante.

De los cinco ejes que permiten organizar el nuevo currículo (resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación, y destrezas socio-afectivas), es al primero al que se le dedica especial atención, considerándolo más como principio metodológico que como contenido en sí mismo; en el caso de la ESO se afirma que "es una de las principales formas de aprender matemáticas" (RD 217/2022, p. 41725). Así, se establece que la resolución de problemas "se debe favorecer no solo como competencia específica del área, sino como método para su aprendizaje" (RD 157/2022, p. 24486) potenciando con su uso otros ejes del área, como el razonamiento, el pensamiento computacional, diferentes sistemas de representación, la argumentación y la comunicación, en la línea de "enseñar vía resolución de problemas" (Pehkonen, 2019).

En el caso de la ESO la resolución de problemas, además de resaltar la importancia de la comprensión, planificación, ejecución y comprobación, se vincula al pensamiento computacional desde la perspectiva de la programación:

> En la resolución de problemas destacan procesos como su interpretación, la traducción al lenguaje matemático, la aplicación de estrategias matemáticas, la evaluación del proceso y la comprobación de

> la validez de las soluciones. Relacionado con la resolución de problemas se encuentra el pensamiento computacional. Este incluye el análisis de datos, la organización lógica de los mismos, la búsqueda de soluciones en secuencias de pasos ordenados y la obtención de soluciones con instrucciones que puedan ser ejecutadas por una herramienta tecnológica programable, una persona o una combinación de ambas, lo cual amplía la capacidad de resolver problemas y promueve el uso eficiente de recursos digitales (RD 217/2022, p. 41725).

Volviendo al enfoque competencial, al que antes nos hemos referido, se establecen ocho competencias específicas, en Educación Primaria, y diez en el caso de la ESO. La primera de ellas (en ambos casos) se puede sintetizar en la capacidad de comprender y representar la realidad. Es difícil evitar entender los argumentos sin pensar en la primera fase de resolución de problemas de Polya (1945), máxime cuando se dice textualmente que "una buena representación o visualización del problema ayuda a su interpretación" (RD 157/2022, p. 24487). La resolución de problemas (o de situaciones problematizadas), en contextos personales, escolares, sociales, científicos o humanísticos, ocupan el contenido de la segunda competencia. También en ambos casos, se construye aquí el argumento sobre la base de las diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento que se pueden aplicar en la planificación y ejecución propias de un proceso de resolución, así como el análisis de la validez y adecuación al contexto de la/s soluciones obtenidas, y se citan estrategias heurísticas como la analogía, el ensayo y error, la resolución inversa (o proceder marcha atrás) o la identificación de submetas. Es especialmente interesante la alusión al hecho de que las estrategias heurísticas han de tratarse de forma que el estudiante no tienda a convertirlas en rutinas o en una especie de algoritmo, perdiendo así su poder creativo, e incita a su revisión periódica, algo que se puede conseguir fácilmente con un adecuado proceso de enunciar/resolver problemas similares con cambios significativos en los datos, contexto o estructura (Contreras, 2021).

La tercera competencia (también en ambos casos) une un contenido netamente sintáctico (Schwab, 1961), como es formular conjeturas, con la capacidad de razonamiento y la argumentación necesarias para comprobarlas o refutarlas, y nombra una nueva estrategia heurística que es la búsqueda de patrones, estructuras y regularidades como generador de nuevo conocimiento, y clave para el desarrollo del pensamiento crítico.

La búsqueda de patrones, la generalización, la creación y modificación de algoritmos, la modelización y el pensamiento computacional se unen en el enunciado de la cuarta competencia específica, tanto en Primaria, como en ESO. Hay aquí un guiño explícito a la competencia digital desde la perspectiva de la programación.

Una crítica que hemos hecho con frecuencia en anteriores propuestas curriculares es la visión parcelada del conocimiento que supone poner el énfasis en los bloques de contenido, como si estos supusieran una secuencia a seguir. La necesaria visión holística del conocimiento, a través de la identificación y uso de conexiones entre las diferentes ideas matemáticas, interrelacionando conceptos y procedimientos, forma parte de la quinta competencia específica en los dos diseños curriculares. Esta idea está más desarrollada en el caso de la ESO, en la sexta competencia, orientada a la identificación de las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser matematizadas.

Antes de exponer las últimas competencias específicas merece la pena echar una mirada atrás y comparar lo que llevamos expuesto en relación con propuestas anteriores.

Nos vamos a remontar, como se señaló al principio, al DCB de Primaria (MEC, 1989a), de hace ahora más de tres décadas. Aquel diseño comenzaba con un apunte acerca de la naturaleza del conocimiento matemático. Es una buena opción fundamentar lo que han de aprender los estudiantes sobre la base de la naturaleza del conocimiento. La manera de entender qué es la matemática nos retrata en nuestras decisiones acerca de cómo enseñarlas. Al fin y al cabo, lo que hacemos en las aulas está mediado por nuestras concepciones acerca de la matemática y de sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Por ello, la naturaleza de las matemáticas que se movilizan en los contextos escolares depende de las opciones que toma el profesorado acerca de qué y cómo deben enseñarse, de cómo secuenciar los contenidos y de cómo evaluarlos (Ernest, 2000). Estos eran los fundamentos en aquel momento:

> El enfoque adoptado en este Diseño Curricular Base parte de la consideración de las matemáticas como un poderoso instrumento que permite representar, analizar, explicar y predecir hechos y situaciones de una forma rigurosa, concisa y sin ambigüedades. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas debe estar por lo tanto presidida por la preocupación de que, en el transcurso de la escolarización obligatoria, los alumnos desarrollen y aprendan un conjunto de recursos eficaces para conocer mejor la realidad en la que viven y poder así actuar en y sobre ella (MEC, 1989a, p. 384).

En este primer enfoque sobre la naturaleza de las matemáticas se apostaba por considerarlas un medio de comunicación universal y una herramienta para representar, analizar y comprender fenómenos de la realidad. La siguiente consideración aborda las relaciones intra y extra-matemáticas:

> La perspectiva histórica muestra claramente que las matemáticas son un conjunto de conocimientos en evolución continua y que en dicha evolución desempeña a menudo un papel de primer orden su interrelación con otros conocimientos y la necesidad de resolver determinados problemas prácticos … Esta consideración epistemológica tiene importantes repercusiones desde el punto de vista curricular. En efecto, sería cuanto menos contradictorio con el camino seguido en su propia génesis histórica, al igual que con el estado actual del conocimiento, presentar las matemáticas a los alumnos bajo un aspecto monolítico, cerrado y alejado de la realidad (MEC, 1989a, pp. 377-378).

Estos enfoques son muy similares a lo comentado anteriormente en la exposición de motivos del actual Real Decreto, donde se aludía a la estructura de la matemática. Desde nuestra perspectiva, esta consideración es esencial, tanto en lo que se refiere a sus componentes, como a sus relaciones. Como acabamos de comentar, en relación con la quinta competencia específica, solo una visión holística de los componentes o dimensiones de la matemática puede conducir a una perspectiva integradora en su enseñanza y aprendizaje:

> Las matemáticas, como el resto de las disciplinas científicas, aglutinan un conjunto de conocimientos con unas características propias y una determinada estructura y organización internas. Lo que confiere un carácter distintivo al conocimiento matemático es su enorme poder como instrumento de comunicación conciso y sin ambigüedades. Gracias a la amplia utilización de diferentes sistemas de notación simbólica (números, letras, tablas, gráficos, etc,), las matemáticas son útiles para representar de forma precisa informaciones de naturaleza muy diversa, poniendo de relieve algunos aspectos y relaciones no directamente observables y permitiendo anticipar y predecir hechos, situaciones o resultados que todavía no se han producido (MEC, 1989a, p.379).

El tercer pilar que pretendía articular aquel currículo es, en realidad, el eje vertebrador de su enseñanza y aprendizaje y expresa un sentido propio de la construcción del conocimiento, desde su origen mismo:

> Otra consideración importante se deriva del uso, en el proceso histórico de construcción de las matemáticas del razonamiento empírico-inductivo en grado no menor que el razonamiento deductivo, desempeñando incluso a menudo un papel mucho más activo en la elaboración de nuevos conceptos que este último. Esta afirmación vale no sólo desde el punto de vista histórico, sino que describe cómo proceden los matemáticos en su trabajo. Los tanteos previos, los ejemplos y contraejemplos, la solución de un caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y ver qué sucede, etc., son las auténticas pistas para elaborar proposiciones y teorías. Esta fase intuitiva es la que convence íntimamente al matemático de que el proceso de construcción del conocimiento va por buen camino.

> La deducción formal suele aparecer casi siempre en una fase posterior. Esta constatación se opone frontalmente a la tendencia, fácilmente observable en algunas propuestas curriculares, a relegar los procedimientos intuitivos a un segundo plano, tendencia que priva a los alumnos del más poderoso instrumento de exploración y construcción del conocimiento matemático (MEC, 1989a, p. 378).

Como puede verse, la consideración implícita de la resolución de problemas (cuando alude a tanteos previos, ejemplos y contraejemplos, buscar la solución de un caso particular, modificar las condiciones iniciales y ver qué sucede) es también un elemento coincidente, aunque en esta nueva propuesta sea todavía más explícita y además se enfatice su papel como medio sobre el de contenido. Sí quedaba explícita en el Diseño Curricular Base de Secundaria Obligatoria (MEC, 1989b, p. 493):

> La resolución de problemas y la realización de investigaciones son actividades formativas de primer orden. Los problemas que pueden abordarse por distintas vías, que admiten varios niveles de solución razonables, permiten que el alumno adquiera una visión de las Matemáticas como ciencia abierta y asequible y que desarrolle una actitud favorable para afrontar problemas matemáticos en su vida cotidiana.

Un cuarto principio nos lleva a una consideración filosófica o epistemológica de calado, al debate entre los contextos de justificación o descubrimiento de Reichembach (1938):

> Es importante diferenciar el proceso de construcción del conocimiento matemático de las características de dicho conocimiento en un estado avanzado de elaboración. La formalización, la precisión y la ausencia de ambigüedad del conocimiento matemático no es el punto de partida, sino más bien el punto de llegada de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para conocerla, analizarla y transformarla (MEC, 1989a, p. 379).

También esta consideración forma parte de esta nueva propuesta.

No estamos seguros de que los profesores de la década de los 90 estuvieran suficientemente preparados para entender estos cuatro principios, como tampoco lo estamos de que los profesores de hoy lo estén. Lo que sí estamos en condiciones de afirmar es que no supieron dar forma, en sus procesos de enseñanza, a todo lo que ello encierra. Por ejemplo, se afirmaba en DCB que, como consecuencia natural de estos principios, los bloques de contenido que los acompañaban:

> No constituyen un temario. No son unidades compartimentadas que tengan sentido en sí mismas. Su estructura responde a lo que se pretende que el profesorado tenga en cuenta a la hora de elaborar los Proyectos Curriculares de Centro y las Programaciones (MEC, 1989a, p.394).

Es el profesorado quien tiene que dar forma de secuencia de aprendizaje a unos fundamentos filosóficos y epistemológicos no necesariamente compartidos, ni por la comunidad científica, ni por la de educadores matemáticos.

Se decía entonces que habría de ser el equipo docente de un centro quien decidiera cómo distribuirlos en los ciclos, secuenciándolos, y cada profesor tendría que seleccionar, posteriormente, los contenidos a desarrollar en su programación. Cabe preguntarse cómo ha de ser el conocimiento del profesor para que esto sea posible, qué formación ha debido de recibir para ser capaz de generar secuencias de aprendizaje transitando por la rica maya de relaciones que sustenta el entramado matemático, para que pueda atravesar (sic.) “los bloques eligiendo de cada uno de ellos los contenidos de cada tipo que considere más adecuados para la unidad didáctica que en ese momento vaya a desarrollar” (MEC 1989a, p. 108), y que lo haga motu proprio, sin dejarse influir por el orden en que los contenidos son presentados en el propio DCB o en los múltiples libros de texto que de él se generan, teniendo “en cuenta que, por lo tanto, el orden de presentación de los bloques no supone una secuenciación”.

Pero dejemos esta reflexión sobre el profesorado para la siguiente sección y continuemos con las tres últimas competencias específicas.

La sexta competencia (octava en el caso de la ESO) se centra en el discurso matemático a través del uso de los diversos recursos del lenguaje. Se considera a comunicación y el debate fundamentado de ideas, conceptos y procedimientos como "una parte esencial de la educación científica y matemática" (RD 157/2022, p. 24489). Es algo con lo que es imposible no estar de acuerdo. La comunicación de ideas contribuye a la consolidación del propio pensamiento y favorece el debate, permitiendo que otros las depuren o rebatan; es una de las esencias de la construcción del conocimiento y potenciar su adquisición en la Educación Primaria es fundamental.

La séptima competencia en la ESO aborda los procesos de representación, individual o colectivamente, de elementos matemáticos a través de recursos tecnológicos, como medio para potenciar la visualización y estructura de los procesos matemáticos, lo que parece orientarse hacia la generación de algoritmos.

Las dos últimas competencias (séptima y octava, en el caso de Primaria; novena y décima, en el caso de la ESO) entran de lleno en el ámbito afectivo. Desarrollar destrezas personales para identificar y gestionar las emociones es imprescindible cuando la actividad matemática consiste en afrontar retos matemáticos. La construcción del conocimiento en un contexto de descubrimiento implica un uso constructivo del error, fomenta la confianza en sí mismo y permite gestionar situaciones de incertidumbre. Afrontar retos requiere perseverancia, resiliencia y una actitud proactiva. Por otro lado, el desarrollo de destrezas sociales requiere valorar y reflexionar sobre los argumentos de los demás y reconocer y respetar sus emociones, generando relaciones interpersonales saludables.

Se cierra el diseño con los criterios de evaluación por ciclos de competencias y saberes básicos, y entendemos que el orden no es baladí, pues vuelve a conceder un papel predominante a las competencias.

EL PROFESOR Y EL LIBRO DE TEXTO COMO MEDIADORES EN LA APLICACIÓN DE LA REFORMA CURRICULAR

Como se señala en el documento para debate de las 24 propuestas para reforma de la mejora de la profesión docente (MEYFP, 2022), cualquier reforma del sistema educativo pasa por abordar una reforma de la formación inicial y permanente del profesorado, de su acceso, su especialización y su desarrollo profesional. Además, como señala Chevalard (2017), la cuestión no es solo reflexionar acerca de qué y cómo enseñar, pues los cambios solo serán efectivos si en paralelo se promueve un cambio en el paradigma dominante, consiguiendo que una mayoría del profesorado se implique en él; probablemente este es el mayor reto (Lampert, 2001).

Para conseguir que el profesorado se adapte al nuevo paradigma que subyace a las reformas, más que imponer nuevas prácticas, es preciso ayudarle a que estructure ambientes de aprendizaje que permitan que afloren en las aulas dos elementos clave: en primer lugar, el discurso matemático de los estudiantes, que hay que educar y potenciar (Li y Schoenfeld, 2019) a través de tareas que impliquen exploración, comprensión profunda y refinamiento de ideas matemáticas; y, en segundo lugar, la movilización de contenidos matemáticos conectados y articulados en torno a grandes ideas matemáticas, para lo cual resulta imprescindible que el conocimiento matemático del profesorado sea extenso y profundo (Ma, 1999; Sfard, 2003).

Como señala Kieran (2013), la historia de la educación matemática muestra amplias evidencias de que la matemática escolar tiene un énfasis procedimental, que no permite que se incida demasiado en la comprensión conceptual. Coincidimos con esta autora en que ambos aspectos no son mutuamente excluyentes, al contrario, es posible que la comprensión conceptual vaya de la mano de la elaboración y uso de técnicas, de forma que el propio proceso de generación de esas técnicas se torne en un proceso de enriquecimiento conceptual. Los procedimientos deben usarse para generar oportunidades de crear una nueva comprensión conceptual a través de su adaptación, refinamiento y extensión. Esta perspectiva supone avanzar hacia un pensamiento flexible y un conocimiento procedimental profundo (Star, 2005) y es una de las claves del cambio de paradigma.

El planteamiento y la resolución de problemas que, como hemos mostrado, viene ocupando un papel relevante en las últimas reformas curriculares y que en esta adquiere un lugar predominante, no ha sido ni es una realidad generalizada en las aulas. La identificación de problema con ejercicio de aplicación y refuerzo ha contribuido al énfasis procedimental y aprendizaje mecánico a que nos hemos referido anteriormente. Muchos maestros no han aprendido resolviendo problemas, tienen dificultades para resolver problemas y para plantearlos se valen exclusivamente de los que aparecen en los libros de texto, webs de problemas u otros materiales curriculares (Singer, et al., 2011). Para que la resolución de problemas sea el eje vertebrador de la adquisición de competencias que hemos comentado en el apartado anterior, es preciso que el profesorado tenga la capacidad de elaborarlos con una intencionalidad definida (Pehkonen, 2019), sepa gestionarlos en el aula, creando oportunidades de reflexión y discusión, y ayude a los estudiantes en la elección de registros de representación adecuados, en la identificación de estrategias heurísticas, y en la elaboración de protocolos de resolución que hagan transparentes sus procesos de pensamiento (Callejo, 2012; Taylor, 2019). Es preciso, por tanto, que se potencie el proceso ante el resultado, que se fomente el espíritu crítico ante los procesos de otros en la búsqueda de la solución más elegante y refinada, que se comparta su análisis acerca del pensamiento de los estudiantes con cada uno de ellos, potenciando su metacognición (Gourdeau, 2019). El final de cada problema ha de considerarse como una oportunidad para el comienzo de otro, introduciendo cambios en los datos, el contexto y/o la estructura (Karimi et al., 2019). Así, cada estudiante tendrá la oportunidad de descubrir lo esencial ante lo contingente y de modificar su tendencia a convertir cada gama de procesos en una rutina. Además, el final de cada problema debe incluir una valoración crítica sobre el proceso seguido, junto con la viabilidad y adecuación de las soluciones.

El tiempo que requieren estos procesos ha sido frecuentemente utilizado como argumento para justificar su no utilización como herramienta básica de aprendizaje, a la vez que se esgrime la duda acerca de los contenidos que con ellos se pueden desarrollar. La mejor manera de ganar tiempo es saber perderlo, no se trata hacer llegar las matemáticas a los estudiantes, sino más bien de llevar a los estudiantes hacia las matemáticas (Philipp 2001, en Ellis y Berry, 2005), de hacerles partícipes de los procesos de construcción, y ese proceso requiere "su" tiempo.

La visión parcelada del conocimiento, que supone priorizar la organización sistemática de los contenidos en forma de un temario, se ha trasladado de los currículos de Primaria a los currículos de la formación de maestros, de tal forma que muchos de los programas de nuestros centros de formación parecen un desarrollo de aquellos. Es preciso ahora que el enfoque por competencias específicas que queremos desarrollar en nuestros estudiantes se traduzca en un enfoque por competencias profesionales en la formación de nuestros maestros. Aunque queda camino por recorrer en la justificación de la relación entre las competencias del profesor y los logros de los estudiantes (Blömeke et al., 2022), sigue pareciendo relevante formar al profesor en su capacidad de percibir, interpretar y tomar decisiones acerca de lo que sucede en su aula.

El marco de competencias profesionales docentes, ámbito de investigación recurrente en educación matemática en los últimos años (Blömeke y Kaiser, 2017; Kaiser et al., 2017), ha de ir más allá de competencias generales, estableciendo competencias específicas para cada materia curricular. Estas competencias conjugan elementos cognitivos y afectivos. Nos referiremos fundamentalmente a los primeros, y comenzaremos remontándonos a los primeros trabajos de Mogens Niss.

Como señalaba Niss (2004), para ser un profesor matemáticamente competente no es suficiente disponer de una sólida formación matemática, por un lado, y una adecuada formación psicopedagógica por otro. Las competencias para un profesor de matemáticas han de ser específicas y desarrolladas de forma integrada desde la perspectiva de lo que la investigación en educación matemática nos ha ido indicando. En ese sentido, como señala Rico (2004), entre estas competencias podemos señalar las competencias matemáticas, las competencias relativas a la planificación, las competencias relativas a la gestión del aula, las competencias relativas a la comprensión y mejora de los procesos de aprendizaje matemático, las competencias sobre evaluación y competencia digital.

A la luz de las propuestas curriculares, una competencia esencial, como hemos señalado, es la de proponer y resolver problemas, junto con la de evaluar protocolos de resolución de estos. Vinculada a esta, Font (2011), señala la competencia en el dominio de los contenidos matemáticos, correspondientes al currículo del nivel educativo que se trate y de su aplicación a diferentes contextos (sobre todo extra-matemáticos).

Ese dominio de los contenidos está en la línea de Niss (2004) y Rico (2004), quienes afirman que un profesor, en primer lugar, ha de ser el mismo matemáticamente competente. Esto significa que, en consonancia con lo que ha de desarrollar en los estudiantes, ha de tener la capacidad de hacer y responder preguntas en y con las matemáticas, dominar los modos matemáticos de pensamiento, ser capaz de analizar y construir modelos matemáticos relacionados con otras materias o áreas de práctica, ser capaz de razonar matemáticamente, ser capaz de manejar diferentes representaciones de entidades matemáticas, ser capaz de manejar el lenguaje de símbolos y los sistemas matemáticos formales, ser capaz de comunicarse, en, con y sobre las matemáticas y ser capaz de hacer uso de y relacionarse con las ayudas y herramientas de las matemáticas.

Por otro lado, la competencia en plantear y resolver problemas, como hemos visto, incluye dos dimensiones, cognitiva y afectiva. En la dimensión cognitiva, el profesor ha de disponer de la capacidad de detectar dificultades en la fase de comprensión y disponer de instrumentos para mejorarla, de orientar en la búsqueda y elección razonada de una estrategia, de su ejecución y de orientar en el análisis de la validez y razonabilidad de la solución. En el ámbito afectivo, ha de disponer de mecanismos para ayudar a los alumnos a mejorar el control de sus emociones y a mejorar su metacognición.

La actividad del aula requiere una adecuada planificación, gestión y evaluación. Por ello, de nuevo siguiendo a Font (2011) y Rico (2004), destacamos la competencia en la planificación y diseño de secuencias didácticas, la competencia en la gestión de esas secuencias didácticas en el aula y la capacidad para utilizar diversas estrategias de enseñanza. Marbán et al. (2013), en concordancia con Niss (2004), sitúan estas características dentro de la competencia docente (Niss lo matiza incluyendo la creación de un amplio espectro de situaciones de enseñanza/aprendizaje, así como la capacidad de encontrar, evaluar, seleccionar y crear materiales didácticos, inspirar y motivar a los estudiantes, discutir los currículos y justificar las actividades de enseñanza/aprendizaje con los estudiantes).

Niss (2004) resalta la competencia en el análisis, interpretación y evaluación de los conocimientos matemáticos de los alumnos a través de sus actuaciones y producciones matemáticas, que Marban et al. (2013) incluyen dentro de las competencias docentes y competencias para "destapar" el aprendizaje. Estos autores añaden la competencia curricular, que permite analizar, evaluar, relacionar e implementar los currículos y programas de matemáticas existentes, y construir otros nuevos, así como tomar decisiones acerca de las diferentes propuestas y materiales (en concordancia con Niss, 2004).

Comprender todas estas situaciones del aula requiere saber mirar profesionalmente, por ello, la competencia *noticing* nos parece especialmente relevante. La competencia *noticing* es una competencia basada en el uso del conocimiento del ámbito de la educación matemática para reconocer aquellos elementos relevantes de la práctica que emergen en situaciones reales de enseñanza, para su interpretación y consiguiente toma de decisiones (Llinares et al., 2019). Al permitir así el desarrollo de la competencia docente, la competencia *noticing* puede ser considerada como una metacompetencia donde otras competencias y conocimientos se ponen en juego ayudando a razonar y argumentar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se encuentran en los diferentes registros de la práctica.

Hay, finalmente, otras dos competencias señaladas por Niss (2004) que no son netamente matemáticas, pero que merece la pena señalar; son la competencia de colaboración con diferentes tipos de colegas dentro y fuera de las matemáticas, así como con otros (padres, autoridades) sobre la enseñanza de las matemáticas y sus condiciones y la competencia de desarrollo profesional, que puede entenderse como una meta-competencia. El profesor ha de sentir la necesidad de participar y relacionarse con actividades de desarrollo profesional y de reflexionar sobre la propia enseñanza y sus necesidades de formación, manteniéndose actualizado sobre nuevos planteamientos y tendencias en investigación y práctica. Incidiremos algo más en esto cuando abordemos el papel de las comunidades de práctica o de aprendizaje profesional.

Cuando el profesorado diseña, planifica y secuencia sus propuestas de enseñanza se suele apoyar en un libro de texto (Martínez-Bonafé y Rodríguez, 2010). Esta acción podría no tener consecuencias negativas si el profesorado hubiera hecho una selección crítica del libro, entre todos los materiales curriculares a su disposición, si lo tomara como un referente susceptible de adaptaciones y si no siguiera, necesariamente, la linealidad de sus páginas. Pero este no es, en general, el caso. Como tampoco es general que la matemática escolar que muchos libros ofrecen esté acorde con el contexto de descubrimiento que, desde nuestra perspectiva, debería ser característico. Es más frecuente que ofrezca una visión parcelada de los contenidos matemáticos, pobre en relaciones y desde su visión acabada (González-Astudillo y Sierra, 2004). Es por eso que se hace necesaria una llamada a la responsabilidad del profesorado en la selección y uso de libros de texto, aspectos ambos que deberían formar parte de su competencia docente.

A la luz del modelo de profesor que se refleja en las competencias anteriores parece clara la necesidad de reformar la formación del profesorado. Como medidas a corto plazo hay que pensar en la formación permanente y como medidas a medio y largo plazo en la formación inicial del profesorado, una formación que debería articularse (como así parece desprenderse del documento de debate antes citado) en torno a las competencias profesionales, particularmente a las competencias específicas, pero, además, ambas, inicial y permanente, han de verse como un continuo. El modelo de formación dual puede ser una vía de convivencia e integración de la formación académica y la formación práctica, minimizando la distancia que tradicionalmente se ha percibido entre ambos contextos. Los diferentes grupos de investigación de la SEIEM han ofrecido formas de entender esta formación dual (Badillo et al., 2019; Carrillo et al., 2019; Llinares, 2020; Carrillo et al., 2020; Fernández y Choy, 2020). Desde la perspectiva de la formación inicial, como señalan Llinares et al (2019, p. 178), "es necesario crear oportunidades para que los estudiantes para profesor puedan implicarse en situaciones profesionales similares a la profesión de ser profesor, aprendiendo a usar un conocimiento relevante para comprender y actuar en las situaciones de enseñanza". Esta vinculación entre la formación académica y los contextos prácticos permiten ver la formación como un continuo que puede caracterizar el desarrollo profesional (Carrillo et al., 2020) desde una perspectiva sociocultural. Como señala Llinares (2012), el conocimiento práctico también puede adquirirse en la universidad, permitiendo el análisis guiado y fundamentado de situaciones reales de aula sin los condicionamientos y tensiones que implican la toma de decisiones inmediatas que requiere la realidad. Por otro lado, si miramos la formación continua, desde una perspectiva situada, el aprendizaje es tanto un proceso individual, que ayuda a comprender las características de una comunidad en particular, como un proceso comunitario de refinamiento de ideas y formas de pensar de cada individuo (Borko et al., 2008; Lave y Wenger, 1991). En contextos educativos, una perspectiva situada sugiere que las comunidades de aprendizaje profesional pueden mejorar el conocimiento profesional de los docentes y su práctica (Little, 2002). En el ámbito de la formación inicial, este proceso comunitario no tiene por qué darse en un aula real, el trabajo con diferentes registros de la práctica, como casos o narrativas, planificaciones, materiales curriculares, trabajos de los estudiantes y vídeos de lecciones puede ser adecuado para ello. En el contexto de la formación continua, formadores de profesores y profesores en ejercicio, con diferentes niveles de experiencia, pueden colaborar constituyendo una comunidad emergente de investigación sobre problemas de la práctica. Como señalan Sakonidis y Potari (2014), la reflexión colaborativa optimiza las posibilidades de desarrollo profesional. Las tensiones que se generan, derivadas de la asimetría entre sus miembros (diferentes historias personales y objetivos) se convierten en oportunidades para nuevas conceptualizaciones y, por lo tanto, de aprendizaje para todos los participantes; el trabajo conjunto entre formadores (investigadores) y profesores puede contribuir a la generación de nuevo conocimiento para ambos (Goos, 2014).

En el pasado, algo similar a esta formación dual se llevaba a cabo a través de la red de centros nacionales de prácticas. El modelo dejó de ser viable, fundamentalmente porque el sustancial incremento del número de estudiantes de nuevo acceso implicó una demanda de centros de prácticas que las Escuelas Anejas no pudieron asumir. Se abrió, entonces, la posibilidad de que cualquier centro docente, sin ningún tipo de restricción o condicionamiento, fuera centro de prácticas.

Sin embargo, en aquel modelo había una notable ausencia, que consideramos esencial para esa integración entre la formación inicial y continua, ni los profesores de las Escuelas Anejas estaban habilitados para participar en la docencia de las entonces Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado, ni los profesores de estos centros lo estaban para ejercicio alguno de la docencia en Primaria. Desde nuestra perspectiva, un modelo eficaz de formación no solo pasa por la citada integración e interacción de la formación recibida, también por la integración e interacción de quienes son responsables de ambos cometidos. Apostamos por la creación de comunidades de práctica (Wenger et al., 2002), como un "grupo de personas que comparten un interés, un conjunto de problemas o una pasión sobre un tema, y quienes profundizan su conocimiento y experiencia en el área a través de una interacción continua que fortalece sus relaciones" (p.17). Se podrían impulsar, mediante convocatorias específicas en el ámbito de Retos de Investigación (donde el ámbito educativo aparece hoy desdibujado), la creación de equipos de investigación internivel en los que cooperativamente se aborden problemas de enseñanza y aprendizaje. Los miembros de estos equipos tendrían el perfil idóneo para ejercer como tutores de práctica para los futuros profesores, a la vez que se produce el necesario trasvase de saberes, el académico y el práctico. Naturalmente esto implica, de nuevo, una disminución sustancial de la oferta de plazas de nuevo ingreso en los centros de formación y, por otro lado, cambios legislativos que favorezcan el intercambio entre docentes universitarios y de centros educativos.

Desde nuestra perspectiva, otra mejora posible de la formación inicial pasa por una revisión y actualización de las actuales menciones que acompañan a los títulos de grado en Educación Infantil y Primaria (como así se señala en el documento de debate remitido por el Ministerio). De un lado, a la luz de las competencias generales y específicas que el profesor ha de desarrollar en cada una de las materias del currículo, parece razonable que, al menos en las dos materias instrumentales (matemáticas y lenguaje) obtenga una formación más profunda. Pero de otro, aunque el modelo de maestro generalista actual presenta incontestables ventajas psicopedagógicas para el alumnado, si analizamos en profundidad el conocimiento especializado que requerirá para desarrollar con éxito las competencias específicas de cada materia curricular, podría parecer que pretendemos formar en un grado a un super maestro. Por ello, cabe plantearse, en analogía con la formación del profesor de secundaria, una especialización o al menos una mención por cada una de las materias del currículo. Hay antecedentes en España de la formación especializada de maestros que convendría revisar (Especialidades de Ciencias, Ciencias Humanas y Lengua Española e Idiomas) a la luz de la evolución de los resultados de los cambios producidos en el sistema educativo estos últimos 30 años.

REFLEXIONES FINALES

Independientemente de que una visión global de la reforma curricular (en relación con aspectos no directamente relacionados con la educación matemática) pueda conducirnos a posiciones más enfrentadas, entendemos que, en lo concerniente a la matemática escolar y sus procesos de enseñanza y aprendizaje, el cambio va (sigue yendo) en la dirección apropiada. Como hemos ido señalando, apunta hacia una matemática escolar como construcción humana y como un derecho de la ciudadanía. Como construcción humana, desde un contexto de descubrimiento, basado en la resolución de problemas; como derecho de todos estudiantes en cuanto enfatiza la necesidad de que deje de ser un filtro para el acceso a una formación de alto nivel.

Las competencias hacen referencia clara a las prácticas matemáticas, a actividades que llevan a pensar y razonar, a conjeturar, a argumentar, a comunicar, a que el discurso matemático del aula sea más el discurso de los estudiantes que el del profesor y nos muestra que, sin restar importancia a los saberes básicos (los clásicos bloques de contenido), éstos no son un fin en sí mismos sino un medio para alcanzar las competencias. Junto a los aspectos cognitivos, los elementos socio-afectivos adquieren también relevancia. Su consideración nos resulta clave para superar la barrera que parece separar a la ciudadanía de las matemáticas. El desarrollo de la metacognición, para reflexionar sobre los propios procesos de resolución de problemas, ayuda a mejorar la forma de aprender y asume el error como oportunidad de aprendizaje (Carrillo, 2000; Gourdeau, 2019); ayudar a controlar las emociones, fomentando la autoestima, la perseverancia y la resiliencia.

La cuestión que se torna esencial es conseguir que el profesorado en activo haga suyos estos principios y orientaciones y que la formación inicial, que se encuentra en fase de discusión y cambio, se oriente en función de las competencias profesionales que se derivan y que implican poner más énfasis en la indagación y el pensamiento matemático (Taylor, 2019). La experiencia de reformas anteriores no nos hace ser muy optimistas en este sentido.

La formación inicial y continua han de verse como dos partes integradas de un todo (Carrillo et al., 2020), y las comunidades de práctica, de aprendizaje o de investigación han de ser los foros en los que los distintos participantes aporten y reciban contribuyendo al enriquecimiento y desarrollo mutuos.

Hasta ahora hemos asistido a un número importante de reformas educativas (casi tantos como legislaturas) que, en el ámbito de la educación matemática, no parecen haber conseguido los fines perseguidos. Quizás esta vez sea diferente.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto RTI2018-096547-B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España, del centro de investigación COIDESO, del grupo de Investigación DESYM (HUM-168), y de la Red MTSK, auspiciada por la AUIP.

Referencias

Badillo, E., Climent, N., Fernández, C. y González, M. T. (Eds.), (2019). *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*. Universidad de Salamanca.

Blömeke, S. y Kaiser, G. (2017). Understanding the development of teachers' professional competencies as personally, situationally and socially determined. En J. D. Clandinin y J. Husu (Eds.), *International handbook of research on teacher education,* (pp. 783-802). Sage. https://doi.org/10.4135/9781526402042.n45

Blömeke, S., Jentsch, A., Ross, N., Kaiser, G. y Köning, J. (2022). Opening up the black box: Teacher competence, instructional quality, and students' learning progress. *Learning and Instruction, 79,* 101600. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2022.101600

Borko, H., Jacobs, J., Eiteljorg, E. y Pittman, M. E. (2008). Video as a tool for fostering productive discussions in mathematics professional development. *Teaching and Teacher Education, 24*, 417-436. https://doi.org/10.1016/j.tate.2006.11.012

Callejo, M. L. (2012). Desarrollo de competencias profesionales con problemas de generalización de patrones. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 61*, 67-75.

Carrillo, J. (2000). Aportaciones desde la resolución de problemas a la construcción de conocimiento professional. *Quadrante 9*(2), 27-54.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2019). Mathematics teachers' specialised knowledge in managing problem solving classroom task. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds.), *Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development*, (pp. 297-316). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_16

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2020). Using professional development contexts to structure prospective teacher education. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education,* (pp. 393-420). Brill/Sense. https://doi.org/10.1163/9789004418967_015

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *La Gaceta de la RSME, 20*(1), 159-169.

Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas (2021, mayo). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria.* CEMaT. Recuperado el 30 de enero de 2022 de https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf

Contreras, L. C. (2021). La resolución de problemas en la formación inicial del profesorado de Primaria: una experiencia de aula. *Realidad y Reflexión, 53*, 208-227. https://doi.org/10.5377/ryr.v53i53.10896

Ellis, M. W. y Berry, R. Q. (2005). The paradigm shift in mathematics education: Explanations and implications of reforming conceptions of teaching and learning. *The Mathematics Educator, 15*(1), 7-17.

Ernest, P. (2000). Why teach mathematics? The aims, outcomes and opportunities afforded by its teaching and learning. En J. White y S. Bramall (Eds.), *Why learn maths?* (pp. 1-14). University of London.

Fernández, C. y Choy, B. H. (2020). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing: Learning, teaching psychological, and social perspectives. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education* (pp. 337-360). Brill/Sense. https://doi.org/10.1163/9789004418967_013

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. U*nión, 26*, 9-25.

Goos, M. (2014). Researcher–teacher relationships and models for teaching development in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 46*, 189–200. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0556-9

González-Astudillo, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la Enseñanza Secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(3), 389-408. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3872

Gourdeau, F. (2019). Problem solving as subject and as a pedagogical approach, and the ongoing dialogue between mathematics and mathematics education. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds), *Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development* (23-42). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_2

Hannula, M.S. (2015). Emotions in Problem Solving. En S. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th ICME*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_16

Kaiser, G., Blömeke, S., König, J., Busse, A., Dohrmann, M. y Hoth, J. (2017). Professional competencies of (prospective) mathematics teachers—cognitive versus situated approaches. *Educational Studies in Mathematics, 94*, 161-182. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9713-8

Karimi, S., Shahvarani, A. y Haghverdi, M. (2019). The role of problem-based Mathematics teaching according to the Kirkpatrick's Model on problem-solving performance of mathematics teachers. *Journal for Educators, Teachers and Trainers, 10*(1), 12-26.

Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skillls: an exemple form algebra. En K. R. Leatham (Ed.), *Vital directions for mathematics education research* (pp. 153-171). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6977-3_7

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. Yale University Press.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press.

Li, Y. y Schoenfeld, A. H. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as "given" in STEM education. *International Journal of STEM Education*, *6*, 44. https://doi.org/10.1186/s40594-019-0197-9

Little, J. (2002). Professional community and the problem of high school reform. *International Journal of Educational Research*, *37*(8), 693-714.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM, 2*, 53-70

Llinares, S. (2020). Tools and ways of thinking in mathematics teacher education: An introduction. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of mathematics teacher education* (pp. 1-22). Brill/Sense. https://doi.org/10.1163/9789004418967_001

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, A. y Groenwald, C. (2019). "Mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza: una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 177-192). Universidad de Salamanca.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.

Marbán, J. M., Martín, M. C., Ortega, T. y De la Torre, E. (2013). Perfil emocional matemático y competencias profesionales. *REIFOP, 16*(1), 73-96. https://dx.doi.org/10.6018/reifop.16.1.179451

Martínez-Bonafé, J. y Rodríguez, J. (2010). El currículum y el libro de texto escolar. Una dialéctica siempre abierta. En J. Gimeno-Sacristán (Com.), *Saberes e incertidumbres sobre el currículum* (pp. 246-268). Morata.

Ministerio de Educación y Ciencia (1989a). *Diseño Curricular Base. Educación Primaria.* MEC.

Ministerio de Educación y Ciencia (1989b). *Diseño Curricular Base. Ed. Sec. Obligatoria I.* MEC.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Documento para debate. 24 propuestas para reforma de la mejora de la profesión docente. MEYFP.

Montes, M., Codes, M. y Contreras, L. C. (en prensa). Consideraciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en Educación Matemática.* SEIEM.

Niss, M. A. (2004). The Danish "KOM" Project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell, B. Grevholm y O. Helenius (Eds.), *Educating for the future: Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education: Preparation of mathematics teachers for the future* (pp. 179-190). National Center for Mathematics Education (NCM).

Pehkonen, E. (2019). An alternative method to promote pupils' mathematical understanding via problem solving. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds), *Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development* (111-122). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_6

Pólya, G. (1945). How to solve it. A new aspect of mathematical method. Princeton University Press.

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157

Real Decreto 217/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217

Reichenbach, H. (1938). *Experience and prediction: an analysis for the foundations and the structure of knowledge*. University of Chicago.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 8*(1), 1-15.

Sakonidis, A. y Potari, D. (2014). Mathematics teacher educators'/researchers' collaboration with teachers as a context for professional learning. *ZDM Mathematics Education 46*, 293-304. https://doi.org/10.1007/S11858-014-0569-Z

Schwab, J. J. (1961). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury y N. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum and liberal education: Selected essays* (pp. 229-272). Chicago University Press.

Sfard, A. (2003). Balancing the unbalanceable: The NCTM standards in light of theories of learning mathematics. En J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 353-392). National Council of Teachers of Mathematics.

Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J. y Leung, E. C. K. (2011). Problem posing in mathematics learning and teaching: a research agenda. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 137-166). PME.

Star, J. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 404–411. https://doi.org/10.2307/30034943

Wenger, E., McDermott, R. y Snyder, W. (2002). *Cultivating communities of practice: A guide to managing knowledge*. Harvard Business School Press.

Taylor, P. (2019). Reforming school mathematics: Two levels of structure. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds), *Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development* (3-22). (Research in Mathematics Education Series). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_1

REFLEXIONES DEL OPEN STEAM GROUP SOBRE EL IMPACTO DEL ENFOQUE INTEGRADO DEL CONTENIDO EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Open STEAM Group reflections on the impact of the content integrated approach for learning mathematics

Diego-Mantecón, J. M.[a], Ortiz-Laso, Z.[a] y Blanco, T. F.[b]

[a]Universidad de Cantabria y [b]Universidad de Santiago de Compostela

Resumen

Este artículo se escribe como respuesta a las directrices de la nueva reforma educativa y presenta reflexiones específicas sobre el enfoque integrado del contenido y su impacto en el aprendizaje de las matemáticas. Estas reflexiones son producto de años de estudio en la implementación del aprendizaje basado en proyectos (ABP) de las disciplinas de Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemáticas (STEAM) con formato KIKS. Como oportunidades principales de esta metodología se destacan los beneficios de los proyectos interdisciplinares para fomentar la retención de conocimientos matemáticos de forma más prolongada, y el desarrollo de actitudes positivas hacia la utilidad de esta disciplina. Como retos a superar se describen la necesidad de un marco formativo para el profesor especializado de secundaria, la identificación de pautas de evaluación en el trabajo colaborativo y el proceso creativo, y la popularización del ABP entre las familias.

Palabras clave: *aprendizaje basado en proyectos, educación integrada, formato KIKS, matemáticas, STEAM.*

Abstract

This article is written in response to the new Spanish educational reform and presents specific reflections on the content integrated approach and its impact on learning mathematics. Such reflections are the result of years of research in the project-based learning (PBL) implementation of the Science, Technology, Engineering, Arts, and Mathematics (STEAM) disciplines with KIKS format. The main potentialities of this methodology are the utility of interdisciplinary projects to promote the retention of mathematical knowledge over a longer time, and the development of positive attitudes towards the usefulness of this discipline. As challenges to overcome, we point out the need for a training framework for the specialized secondary teacher, the identification of evaluation guidelines in collaborative work and the creative process, and the popularization of the PBL approach among families.

Keywords: *project-based learning, integrated education, KIKS format, mathematics, STEAM.*

INTRODUCCIÓN

En este artículo se presentan algunas reflexiones del grupo Open STEAM sobre el enfoque integrado del contenido en las disciplinas de Ciencias, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemáticas, y de su implementación en el aula a través del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) con Formato KIKS

Diego-Mantecón, J. M., Ortiz-Laso, Z., y Blanco, T. F. (2022). Reflexiones del Open STEAM Group sobre el impacto del enfoque integrado del contenido en el aprendizaje de las matemáticas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 81-94). Santiago de Compostela: SEIEM.

(Diego-Mantecón, 2020). El Open STEAM, establecido en la Universidad de Cantabria desde el 2014, está constituido por investigadores, formadores, profesores y familias que buscan impulsar el aprendizaje de las matemáticas a través del enfoque integrado del contenido. En su sitio web aloja un repositorio en el que el profesorado puede nutrirse de actividades o proyectos STEAM para su implementación en el aula. Así mismo, imparte a lo largo del año varios cursos de formación para integrar de manera eficaz proyectos STEAM en el aula (https://www.opensteamgroup.unican.es/).

El artículo se escribe en respuesta a la petición de Antonio Moreno coordinador del seminario 'El desarrollo del nuevo marco curricular en Matemáticas' dentro del XXV Simposio de la SEIEM en Santiago de Compostela, 2022. El seminario se organizó como respuesta a la reciente ley educativa española (LOMLOE), que sugiere cambios docentes significativos para potenciar de forma efectiva la denominada 'Competencia Matemática y Competencia en Ciencia, Tecnología e Ingeniería (STEM)'. Las reflexiones que se proporcionan en las siguientes páginas son producto de los estudios de investigación que el grupo Open STEAM ha realizado desde el 2014 en el contexto de la Educación STEAM, y más concretamente en el de las matemáticas. Estas reflexiones tienen como objetivo proporcionar a la comunidad española de educación matemática nociones sobre cómo abordar el enfoque integrado en el aula desde una perspectiva matemática. Este grupo de investigación ya anticipó, en el XXIII Simposio de la SEIEM 2019, la contribución del aprendizaje basado en proyectos STEAM al desarrollo de las competencias LOMCE (Blanco et al., 2019).

¿POR QUÉ UN ENFOQUE INTEGRADO STE(A)M?

Como casi todos los enfoques educativos, el enfoque integrado de las disciplinas STEAM (acrónimo inglés de Science, Technology, Engineering, Arts y Mathematics) nace como consecuencia de cambios significativos en la sociedad. En las últimas dos décadas, se han dado numerosos cambios, tanto en España como a nivel mundial, que están teniendo un impacto notorio en nuestra forma de relacionarnos, de trabajar, y por lo tanto de aprender (Consejo de la Unión Europea, 2018). Uno de estos cambios está relacionado con el intenso avance tecnológico y científico que ha tenido lugar; otro con el intento de abogar por una sociedad más igualitaria que permita un bienestar y una educación al alcance de todos. En este sentido, la Unión Europea, así como países de gran potencial como Estados Unidos y Corea del Sur, fomentan la formación de ciudadanos competentes para hacer frente a las exigencias de un mundo altamente tecnológico (Chu et al., 2019; Kelley y Knowles, 2016). En concreto se promueve, prácticamente a nivel mundial, una formación competencial de nuestros jóvenes en las disciplinas STEM que permita hacer frente a las necesidades actuales y futuras de la sociedad (Niss et al., 2017), eliminando brechas sociales como la infrarrepresentación de la mujer en determinados sectores profesionales. Ahora en España, con la nueva reforma educativa (LOMLOE), se describe y articula de forma más concreta la denominada 'Competencia Matemática y Competencia en Ciencia, Tecnología e Ingeniería' adelantada en la LOMCE. Dicha competencia se identifica con el acrónimo STEM y se detalla de acuerdo con cinco 'descriptores operativos' del Perfil de salida, que orientan sobre el nivel de desempeño esperado al término de la enseñanza básica. Por ejemplo, el número tres (STEM3) señala que al completar la enseñanza básica, el alumno ha de ser capaz de "Plantear y desarrollar proyectos diseñando, fabricando y evaluando diferentes prototipos o modelos para generar o utilizar productos que den solución a una necesidad o problema de forma creativa y en equipo, procurando la participación de todo el grupo, resolviendo pacíficamente los conflictos que puedan surgir, adaptándose ante la incertidumbre y valorando la importancia de la sostenibilidad." (Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], 2022, p. 29).

¿A QUÉ NOS REFERIMOS CON ENFOQUE INTEGRADO STE(A)M?

La educación STEM se ha definido frecuentemente como la elaboración de actividades o prácticas educativas que integran contenidos y destrezas de las disciplinas de Ciencias, Tecnología, Ingeniería, y/o Matemáticas. Dichas actividades suelen enmarcarse en contextos del mundo real que promueven la resolución de problemas, basados en la indagación y el aprendizaje colaborativo (Martín-Páez et al., 2019; Thibaut et al., 2018). En los últimos años se ha abogado por incorporar la A de Artes, en el denominado enfoque STEAM, para facilitar contextos reales más amplios en los que sustentar la resolución de problemas y en los que se incorporen las artes plásticas, las ciencias sociales y las humanidades (Diego-Mantecón et al., 2021a). Con este enfoque se busca potenciar la creatividad, la ética, la estética, la innovación (Colucci-Gray et al., 2019; Quigley et al., 2020) y el conocimiento intercultural (Chu et al., 2019). No hay consenso sobre si una práctica STEAM o STEM (en adelante STE(A)M) debe combinar dos (o más) disciplinas (Carmona et al., 2019; El Bedewy et al., 2021) o integrarlas todas (Toma y García-Carmona, 2021). Ciertamente, esto depende de los objetivos propios de la actividad, del contexto educativo y curricular en la que se va a implementar, así como de la formación académica de los docentes y las características de los estudiantes que la van a desarrollar.

EL APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS STE(A)M CON FORMATO KIKS

Aunque la educación STEAM es un enfoque emergente, ya se ha vinculado a varias metodologías de enseñanza incluidas la Gamificación y el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), resultando esta última una de las más eficaces para potenciar la integración de contenidos. El ABP se caracteriza por ser una metodología en la que el estudiante adopta un papel activo, como agente central del proceso de aprendizaje, y el profesor actúa como facilitador de dicho aprendizaje. Apoyándose en el marco de Thibaut et al. (2018), Diego-Mantecón et al. (2021c) describen cinco dimensiones fundamentales de esta metodología: (1) la integración de contenido, (2) el contexto de resolución de problemas, (3) el aprendizaje basado en la indagación, (4) el diseño y (5) el trabajo cooperativo. Con el fin de trabajar el enfoque integrado STEAM, los investigadores y profesores del grupo Open STEAM complementan el ABP con un formato de difusión denominado: formato KIKS (Diego-Mantecón et al., 2021a). Este formato pretende incorporar una motivación adicional en el proceso de aprendizaje además de fomentar competencias clave (MEFP, 2022) mediante la difusión de los proyectos en eventos educativos como ferias de la ciencia o conferencias (Istúriz et al., 2017; Ortiz-Laso, 2020). KIKS proviene de los términos en inglés: *Kids Inspiring Kids in STEAM*; en español, Chicos que Motivan a Chicos en las STEAM (Fenyvesi et al., 2017; Houghton et al., 2020).

Los proyectos STEAM con formato KIKS se introducen en el aula a partir del siguiente reto: ¡Elaboremos un proyecto que dé respuesta a una necesidad y que pueda ayudar o motivar a otros! El proyecto puede surgir de una idea de los propios participantes, de una necesidad del centro educativo o de la región en la que viven, así como de un problema de actualidad que está teniendo lugar en alguna parte del mundo y necesita respuesta. El Open STEAM proporciona un repositorio de proyectos para distintas etapas educativas del que los profesores pueden nutrirse (Diego-Mantecón et al., 2021c).

EJEMPLOS DE PROYECTOS STE(A)M CON FORMATO KIKS Y EJECUCIÓN

Los proyectos varían en complejidad y tiempo de ejecución, de acuerdo con la disponibilidad de los participantes. Distinguimos principalmente dos tipos de proyectos: los interdisciplinares y los transdisciplinares. Los primeros son aquellos en los que se yuxtaponen contenidos de al menos dos disciplinas estableciéndose conexiones explícitas (Gao et al., 2020; Gresnigt et al., 2014), pero sin necesidad de ser problemas de la vida diaria en los que la aplicación de conocimientos y destrezas trascienden los contenidos de las disciplinas curriculares, como es el caso de los proyectos transdisciplinares (English, 2016; Gresnigt et al., 2014). Cuando hablamos de proyectos interdisciplinares en donde la disciplina dominante son las matemáticas, nos referimos a aquellos en los que los conceptos y procedimientos matemáticos son el punto de partida sobre el que se desarrolla el proceso de resolución; véanse por ejemplo las guías de los proyectos 'Arcos en nuestra ciudad' o 'Cómo determinar el norte geográfico' alojados en el repositorio del Open STEAM (Figura 1). Los proyectos transdisciplinares se corresponden con situaciones reales en las que la problemática que emerge no tiene, necesariamente, como punto de partida las matemáticas, y la consecución de un producto (o prototipo) suele tener un peso importante en todo el proceso de elaboración; véanse por ejemplo los proyectos "Jardines verticales" o "Nidos flotantes".

Figura 1. Proyectos del Repositorio Open STEAM

Una vez elegido un proyecto para su implementación en el aula se ha de proceder a la secuenciación y distribución de tareas. Todos los estudiantes han de colaborar en las distintas tareas del proyecto incluyendo el planteamiento del problema inicial y su fragmentación, los procesos de indagación y diseño, la puesta en común de soluciones para la elaboración del producto final, y la redacción de las conclusiones. Los estudiantes han de participar por igual en el proceso de difusión, realizando exposiciones de sus trabajos a través de videoconferencias y encuentros presenciales, en eventos nacionales e internacionales. Durante el tour de exposiciones, los equipos introducen cambios y mejoras y adaptan las presentaciones a los diferentes públicos: profesores, investigadores, padres, y estudiantes (Ortiz-Laso, 2020). Para cada proyecto se requiere entregar un documento de texto y un vídeo: el documento incluye la parte analítica del proyecto, su desarrollo y resultado final, mientras que el vídeo ha de mostrar la parte práctica: ensamblado del material, construcción de los artefactos, y funcionamiento o aplicabilidad de los mismos (Blanco et al., 2019). Normalmente los proyectos son elaborados por equipos de 5-6 estudiantes y dos profesores de alguna de las disciplinas STEAM. Los proyectos realizados dentro del Open STEAM se ejecutan en lengua no materna, normalmente en inglés, con el objetivo de motivar a los homólogos extranjeros en el aprendizaje, potenciando además la competencia lingüística, la personal y social, así como la competencia en conciencia y expresiones culturales (Consejo de la Unión Europea, 2018).

ESTUDIOS REALIZADOS POR EL OPEN STEAM GROUP DESDE 2014

Como resultado de la participación en varios proyectos internacionales y nacionales que promueven la educación STEAM (p. ej., KIKS, STEMforYouth, Mathematics EduLarp, STEAMTeach, EAMARE-STEAM o AuthOMath), el Open STEAM ha realizado varios estudios con el objetivo de evaluar el aprendizaje de las matemáticas desde un enfoque integrado del contenido. La mayoría de estos estudios se han llevado a cabo en las aulas de educación secundaria, aunque también se realizaron implementaciones en primaria e infantil. Desde el 2014 hasta la actualidad han participado en el desarrollo de proyectos STEAM con formato KIKS más de 2500 estudiantes y alrededor de 140 profesores de países europeos. La muestra ha sido variada integrando a estudiantes de rendimiento académico alto, medio y bajo, participando también sujetos con dificultades de aprendizaje, con problemas de conducta, y en riesgo de abandono escolar. El profesorado participante ha sido también diverso contando con profesores de secundaria de las distintas disciplinas STEAM, así como con maestros de las etapas de primaria e infantil. Dada la extensión limitada del artículo, a continuación, se reportan únicamente los resultados de los estudios realizados con profesores y estudiantes de educación secundaria.

ALGUNOS RESULTADOS RELEVANTES PARA LA COMUNIDAD EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En este apartado se sintetizan los tres resultados que pueden suscitar mayor interés, en estos momentos, para la comunidad en educación matemática: proyectos STEAM que potencian el aprendizaje de las matemáticas, conocimientos, competencias y actitudes que fomenta el enfoque integrado, y perfil del alumnado que más se puede beneficiar de dicho enfoque.

Proyectos STEAM que potencian el aprendizaje de las matemáticas

Nuestros estudios sugieren que el tipo de proyecto, así como la disciplina que desempeña el rol dominante en el contexto del mismo, determina los contenidos, procedimientos y destrezas matemáticas que se van a trabajar. Se observó que, en contra de lo que se puede interpretar de los documentos oficiales, los proyectos interdisciplinares potencian más el aprendizaje de las matemáticas que los transdisciplinares, aunque estos últimos aborden problemas reales en los que la aplicación de conocimientos y destrezas trascienden los contenidos de las disciplinas curriculares. Se detectó, por ejemplo, que en proyectos transdisciplinares donde la ingeniería es la disciplina dominante los profesores se centran con frecuencia en el producto final en lugar de en el proceso de aprendizaje. Tienden a potenciar principalmente la investigación y el diseño para construir un prototipo, y rara vez tratan de implicar a sus alumnos en tareas de razonamiento matemático mediante el planteamiento y la comprobación de hipótesis o conjeturas, que potencien el desarrollo del pensamiento matemático, como recoge de forma explícita la nueva ley (MEFP, 2022). De hecho, en este tipo de proyectos es difícil hacer surgir las matemáticas, bien porque son complejas o porque se simplifican en exceso, lo que provoca que el profesor de secundaria con especialidad en matemáticas trate de evitar su implementación (más información en Diego-Mantecón et al., 2022a). Lasa et al. (2020), Macías et al. (2020) y Ubuz (2020) corroboran estos resultados y manifiestan la dificultad de dichos proyectos para explotar de manera natural las matemáticas escolares, más allá de realizar cálculos aritméticos básicos o trabajar la identificación de figuras geométricas. Igualmente, estudios previos en otros países como Corea del Sur

(Kang, 2019) y Turquía (Sevimli y Ünal, 2022) muestran los obstáculos del profesorado de matemáticas para identificar e involucrar contenidos de dicha disciplina en contextos reales. En este sentido, los profesores coreanos reclaman la necesidad de programas de desarrollo profesional que potencien las matemáticas en un enfoque STEAM (Kang, 2019).

A diferencia de los transdisciplinares, los proyectos interdisciplinares en los que las matemáticas tomaban un rol dominante permitieron abordar más en profundidad aspectos de esta disciplina como la interpretación y la modelización de un problema, el análisis de soluciones, la comprobación de conjeturas o la interrelación de conceptos y procedimientos dentro de la misma disciplina y entre disciplinas. Así ocurrió en proyectos como 'Arcos en nuestra ciudad' o 'Cómo determinar el norte geográfico', mencionados anteriormente, en los que los conceptos y procedimientos matemáticos fueron el punto de partida sobre el que elaborar la resolución. En este tipo de proyectos, los profesores encuentran más oportunidades para abordar los contenidos matemáticos curriculares y desarrollar competencias específicas de las matemáticas descritas en MEFP (2022). Los proyectos interdisciplinares promueven, además de la aplicación de conceptos y cálculos matemáticos básicos, el empleo del pensamiento flexible mediante la búsqueda de estrategias de resolución acordes con las restricciones del problema. Los procesos de resolución anteriores requieren demandas cognitivas altas por parte del estudiante. En las experiencias realizadas dentro del Open STEAM Group, los proyectos interdisciplinares en los que las matemáticas fueron el foco central fueron llevados al aula únicamente por profesores especializados en esta disciplina.

Conocimientos, destrezas, y actitudes adquiridas en relación con las matemáticas

Nuestros estudios no pueden confirmar que los alumnos participantes en la elaboración de proyectos STEAM mostrasen cambios significativos en las calificaciones con respecto a los exámenes ordinarios (para más información ver Diego-Mantecón et al., 2019a), en contraposición a los resultados obtenidos por Han et al. (2015, 2016). Sí pudimos observar que el conocimiento adquirido a través de la metodología ABP-STEAM con formato KIKS se mantiene de forma más prolongada en el tiempo, ya que los procesos de aprendizaje fueron centrales para los estudiantes (información más detallada en Diego-Mantecón et al., 2019a). Muchos de nuestros estudiantes trabajaron durante al menos dos cursos académicos en proyectos y prepararon presentaciones para diferentes públicos, lo que dio lugar a una mayor retención de los conocimientos y habilidades involucradas. Pudieron además establecer conexiones entre diferentes elementos, conceptos y procedimientos matemáticos, desarrollando así una visión de las matemáticas como un todo. En este sentido, creemos que el ABP-STEAM con formato KIKS contribuyó a desarrollar varias de las competencias específicas reflejadas en MEFP (2022).

Esta forma de aprender también modificó las percepciones de los estudiantes en relación con las matemáticas. Tras la participación en proyectos interdisciplinares con un enfoque matemático, los estudiantes tomaron conciencia de la aplicabilidad de esta disciplina no solo en diferentes contextos, sino también sobre su utilidad en otras disciplinas. Esto generó en ellos una actitud más positiva hacia las matemáticas, a la vez que propició una mayor confianza a la hora de aprenderlas y trabajarlas. Nuestros resultados no concuerdan con los de Kwon et al. (2021) y Tseng et al. (2013) quienes no encontraron diferencias significativas en cuanto a la relación entre el desarrollo de proyectos STEM y el incremento de una actitud positiva hacia las matemáticas. Creemos sin embargo que sus resultados están influenciados por el corto periodo de trabajo STEM al que sus estudiantes fueron expuestos. Los cambios en las creencias y actitudes del alumnado hacia las matemáticas son lentos y requieren largos procesos para obtener resultados positivos (Diego-Mantecón et al., 2019c). En este sentido, cabe destacar que todos los estudiantes evaluados durante nuestros estudios trabajaron de forma continua y prolongada, algunos participando hasta dos y tres años académicos en el Open STEAM.

Además de facilitar el desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas, el ABP-STEAM con formato KIKS promueve el desarrollo de competencias clave recogidas en el perfil de salida del alumnado al término de la enseñanza básica del sistema educativo español (MEFP, 2022) y establecidas en la Recomendación del Consejo de la Unión Europea de 22 de mayo de 2018 relativa a las competencias clave para el aprendizaje permanente. Algunas de estas competencias identificadas son la multilingüe, la lingüística, la digital, la emprendedora, la social y la cultural. El desarrollo de estas competencias se genera tras largos procesos de aprendizaje donde los estudiantes tienen que trabajar en lengua no materna, realizar presentaciones para diferentes públicos, así como difundir sus trabajos tanto a través de la producción de vídeos como en eventos presenciales. Además, han de comparar y discutir su trabajo con profesores y estudiantes de otros países comprendiendo que los contextos en los que se desarrollan los problemas, así como los factores sociales y culturales de los mismos, pueden influir en los resultados.

Una educación inclusiva a través de entornos de aprendizaje significativos y personalizados

A pesar de que en todas nuestras intervenciones en el aula hemos buscado, como propone la LOMLOE (MEFP, 2022), promover un enfoque abierto y flexible que facilite la integración y el aprendizaje de todos los alumnos, hemos identificado que alcanzar tal equidad en el aprendizaje es una quimera. Bajo los mismos contextos de aprendizaje y con los mismos profesores, hemos detectado que las características de cada individuo influyen fuertemente en su proceso de aprendizaje y como consecuencia en sus logros académicos. El enfoque integrado STEAM con formato KIKS ha mostrado ser útil con alumnos en riesgo de abandono escolar que no se adaptan al ritmo de la clase regular. A estos alumnos les beneficia la parte práctica y creativa de los proyectos en la que tienen que construir. Este tipo de actividades manipulativas les permite moverse por el aula de forma libre e investigar en aspectos de interés para ellos. Se trata de estudiantes que rehúsan la instrucción tradicional que implica escuchar al profesor durante la mayor parte de la jornada y realizar tareas guiadas sin romper el ritmo de trabajo en el aula. Los estudiantes con buenas calificaciones en la clase regular, sin diagnóstico en altas capacidades, y constantes en su forma de trabajar han rechazado por lo general esta metodología. Su impresión era que los proyectos requieren mucha elaboración y esto les hacía sentir que desaprovechaban tiempo de estudio. Estos alumnos se sentían más cómodos bajo una enseñanza estructurada de contenidos, en la que podían observar de manera más periódica sus avances. En cuanto a alumnos de rendimiento académico medio, la decisión de participar en los proyectos estaba vinculada a sus intereses y motivaciones personales. Para algunos resultó muy motivador resolver problemas contextualizados donde se podía vivenciar la aplicación de las matemáticas y otras disciplinas. Estos resultados confirman que incluso cuando la instrucción se ejecuta bien, independientemente del método, el aprendizaje requiere esfuerzo y compromiso del estudiante. En este sentido, Chaaban et al. (2021) y Nguyen et al. (2021) afirmaron que numerosos profesores abandonan las prácticas innovadoras en el aula debido a la resistencia de los estudiantes y su poca disposición hacia otros métodos de enseñanza.

RETOS A SUPERAR EN EL ENFOQUE INTEGRADO STE(A)M

A continuación, se resumen los tres principales obstáculos identificados durante la implementación del enfoque integrado de las disciplinas STE(A)M: la formación del profesorado, la evaluación y las familias.

La formación del profesorado

Durante estos años hemos observado que el diseño e implementación de proyectos STEAM se ve afectado por la especialización de los docentes y de esta forma por su conocimiento de la disciplina.

Normalmente, el docente de secundaria español se forma específicamente en una de las disciplinas STEAM para luego realizar un máster de capacitación y adaptación pedagógica. Esta formación es contraria al enfoque integrado STEAM que sugieren los últimos documentos oficiales a nivel educativo; observación realizada también por Toma y García-Carmona (2021) desde el ámbito de la didáctica de las ciencias. El enfoque integrado requiere conocimientos conceptuales, procedimentales y epistemológicos sólidos en diversas disciplinas. Nuestros docentes de hecho se sienten inseguros a la hora de implementar proyectos STEAM en el aula y manifiestan una falta de conocimiento del contenido de estas disciplinas, así como de su conocimiento didáctico. Este hándicap ha sido ampliamente reportado en la literatura (Domènech-Casal et al., 2019; Frykholm y Glasson, 2005; Toma y García-Carmona, 2021) y las sugerencias para superarlo son variadas. Algunos, como Davis et al. (2019), reivindican la necesidad de instruir a los docentes en el abordaje de conceptos STEM desde diversas orientaciones epistemológicas (o formas de conocer); otros sugieren la adquisición de contenido de las distintas disciplinas (Stinson et al., 2009) derivando en una formación similar a la de educación primaria; mientras que otros recomiendan el trabajo colaborativo entre profesores para llegar a una contextualización e integración del contenido más profunda (Potari et al., 2016). Los miembros del Open STEAM nos decantamos por la última de las estrategias (ver Diego-Mantecón et al., 2022a, 2022b). De hecho, unas de las razones que nos ha llevado a crear la comunidad Open STEAM es la dificultad del profesorado para establecer vínculos de colaboración en su entorno más inmediato— su centro educativo. Con el grupo Open STEAM pretendemos poner en contacto a profesores de distintos centros para que se apoyen durante el proceso de diseño e implementación de los proyectos.

El aprendizaje por competencias, promovido en España en leyes como la LOMCE, y enfatizado en la actualidad por la LOMLOE, tiene como objetivo "ofrecer al alumnado la oportunidad de conectar y aplicar lo aprendido en contextos cercanos a la vida real" (MEFP, 2022, p. 41767). Para promover procesos de resolución realistas a un problema, el profesor necesita un conocimiento sólido del contexto en el que se enmarca el proyecto. El estudio de Diego-Mantecón et al. (2021b), en el que se evalúa la competencia matemática de adultos en un establecimiento de venta de productos de carpintería para el hogar, puso de manifiesto las dificultades que tienen los individuos españoles con estudios medios (o superiores) a la hora de resolver problemas reales que involucran las matemáticas. En concreto, se detectó una falta de conocimiento contextual al comprar los materiales necesarios para construir distintos muebles, sugiriendo que el conocimiento del contexto es prácticamente exclusivo de los profesionales, en ese caso, ebanistas. Como consecuencia de estos resultados y los de nuestras observaciones a profesores que desarrollan proyectos del Open STEAM, consideramos que uno de los grandes retos educativos a los que nos enfrentamos en los próximos años es el de formar a profesores especializados para que sean capaces de resolver problemas de la vida real que involucran las matemáticas. En este sentido, el conocimiento del contenido y el pedagógico no son suficientes, requiriéndose además un conocimiento relacionado con el contexto del problema y en particular con las matemáticas que se utilizan en los diferentes contextos reales. Cabe destacar que tradicionalmente la noción de competencia ha estado asociada con la formación profesional (Halász y Michel, 2011), que busca cualificar en un determinado campo profesional durante varios años.

La evaluación

Como se ha mostrado anteriormente, el ABP-STEAM no parece tener los mismos efectos en todos los estudiantes. De acuerdo con la LOMLOE (MEFP, 2022), al terminar la etapa de formación obligatoria se han de alcanzar entre otros los dos objetivos siguientes: trabajar de forma colaborativa, y dar soluciones creativas a través del diseño, la resolución de problemas y la experimentación. Como consecuencia, los profesores deberían ser capaces de evaluar estos dos objetivos que ya han generado cierto desconcierto entre el profesorado participante en las iniciativas del Open STEAM. Por un lado, todos nuestros profesores estuvieron de acuerdo sobre la dificultad de evaluar el trabajo en grupo, señalando que es complejo tener una visión individualizada del aprendizaje; un hallazgo ya destacado por Domènech-Casal et al. (2019), Kang (2019), y Margot y Kettler (2019). Por otro lado, los profesores también sintieron inseguridad al evaluar tareas que no tienen una solución única ya que están acostumbrados a calificar tareas rutinarias de uno o dos pasos. Estas tareas son las que se promueven generalmente en los libros de texto incluso cuando se integran disciplinas tan complementarias como las artes y las matemáticas, que propician de manera casi natural el análisis de obras de arte o creaciones artísticas mediante el empleo de las matemáticas (Blanco et al., 2021; Diego-Mantecón et al., 2019b). Como señalan Lu y Kaiser (2022), evaluar el proceso creativo es una tarea compleja, y no existe un consenso sobre los aspectos a evaluar. Es importante resaltar que además de la evaluación sumativa el profesor ha de considerar también la evolución formativa. Los estudiantes bajo la metodología del ABP-STEAM con formato KIKS desarrollan un proyecto durante varias semanas e incluso meses que requiere una retroalimentación continua, y adaptada al perfil de cada estudiante, para dar lugar a un aprendizaje significativo de las distintas disciplinas (Li y Schoenfeld, 2019).

El apoyo de las familias

El ABP-STEAM supone un cambio radical en la metodología de enseñanza actual. Muchas familias cuestionan la validez de esta nueva metodología por rechazo a lo desconocido. Nuestros profesores reconocen que algunos padres muestran escepticismo hacia este enfoque porque es radicalmente distinto al que están acostumbrados. Por ello, al inicio del curso se les informa sobre esta manera de trabajar y sus objetivos. A pesar de esto, a lo largo del proceso de ejecución nos encontramos que algunas familias continúan cuestionando la metodología. Esto se debe, por ejemplo, a que algunos padres no saben cómo ayudar a sus hijos en sus tareas, generando nerviosismo y descontento. En ocasiones, el cuestionamiento se agrava al recibir calificaciones negativas cuando el alumno presenta un producto funcional, obtenido con la ayuda de su entorno, en el que no es capaz de verbalizar los conceptos, hechos o procedimientos que subyacen de ese modelo o prototipo. Esto origina un conflicto con las familias al no entender por qué se puede recibir una calificación baja cuando el prototipo es válido. Como consecuencia, algunos profesores han dejado de proponer a sus alumnos tareas, relacionadas con los proyectos, fuera del aula. La percepción de aquellas familias con una actitud negativa suele cambiar cuando los estudiantes presentan su proyecto ante un público, y los padres experimentan un sentimiento de orgullo. También hay familias que desde el inicio se muestran receptivas a ser involucradas en el proceso de diseño del proyecto, pudiendo enriquecerlo significativamente. Durante estos años de experimentación, hemos documentado casos donde los padres aportaron un conocimiento contextual relacionado con su profesión, resultando en un beneficio para todos. Una interacción estrecha y positiva entre familias y centro educativo fue también percibida por Balsobre-Aguilar y Herrada-Valverde (2018), durante la implementación de la metodología aprendizaje basado en proyectos.

CONCLUSIÓN E IMPLICACIONES FUTURAS

Las investigaciones del Open STEAM sugieren que la implementación del enfoque integrado como medio para fomentar el aprendizaje de las matemáticas presenta oportunidades y retos. Este enfoque puede fomentar el desarrollo de creencias positivas hacia la utilidad de las matemáticas tanto en contextos reales como en relación con otras disciplinas (Diego-Mantecón et al., 2019a). Este aspecto ha sido destacado también por Kwon et al. (2021) quienes identifican, además, una relación entre creencias positivas hacia la resolución de problemas y el propósito de continuar la formación académica en el ámbito STEM. El formato KIKS aplicado como complemento al ABP-STEAM parece potenciar la retención del conocimiento de forma más prolongada que la enseñanza regular. Hemos de señalar que los resultados reportados en este artículo surgen de las implementaciones en el aula con profesores con cierta formación en este enfoque y que dichos profesores contaron siempre con el apoyo y supervisión de formadores e investigadores del Open STEAM. En consecuencia, los resultados expuestos anteriormente podrían no replicarse bajo condiciones distintas a las aquí descritas.

Los principales obstáculos que se han identificado son la formación del profesorado, la evaluación de los proyectos y la reticencia de las familias a las nuevas metodologías. Nos preocupa especialmente el primero de ellos y como consecuencia estamos trabajando en un marco de desarrollo profesional que permita potenciar el aprendizaje de las matemáticas a través del enfoque integrado del contenido (Diego-Mantecón et al., 2022b). Este marco, todavía en desarrollo, aboga por formar en aspectos pedagógicos que permitan al profesorado articular de forma combinada el enfoque integrado del contenido y el ABP, y proveer con recursos que posibiliten su implementación en el aula de la manera menos disruptiva posible. Se pretende además fomentar la colaboración entre profesores y profesionales de distintas especialidades, conservando la idea de que el conocimiento que se requiere para instruir una disciplina es especializado (Diego-Mantecón et al., 2021b; 2022a), pero requiere diferentes apoyos para que este sea implementado de forma efectiva en diferentes contextos.

Importante, los cambios metodológicos en educación deben ser tomados con precaución y han de llevarse a cabo de forma paulatina, en paralelo con la enseñanza tradicional, y tratando de mejorar de forma iterativa su integración en el aula, para evitar cualquier impacto negativo en el individuo, bien sea el alumno, el profesor o el padre.

Agradecimientos

El trabajo presentado en este artículo se llevó a cabo con el apoyo del programa Erasmus+ de la Unión Europea y en concreto gracias a las subvenciones recibidas de los siguientes proyectos competitivos: [2020-1-ES01-KA201-082102; STEAM Education for Teaching Professionalism]; [2021-1-DE01-KA220HED-000032031; AUTHOMATH]; [2019-1-CZ01-KA201-061377; Mathematics EduLarp]; y [2015-1-HU01-KA201-013611; KIKS- Kids Inspire Kids for STEAM]. También se recibió ayuda del Programa Horizon 2020 de la Unión Europea [SEAC-2015- 1-710577; STEM4YOUTH], del Fondo Europeo de Desarrollo Regional (Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades – Agencia Estatal de Investigación) [EDU2017-84979-R; EAMARE-STEAM], y de varios proyectos puente financiados por la Universidad de Cantabria y la Consejería de Universidades, Igualdad, Cultura y Deporte del gobierno Cantabria.

Referencias

Balsalobre-Aguilar, L. y Herrada-Valverde, R. I. (2018). Aprendizaje basado en proyectos en educación secundaria: el orientador como agente de cambio. *Revista Española de Orientación y Psicopedagogía, 29*(3), 45-60. https://doi.org/10.5944/reop.vol.29.num.3.2018.23320

Blanco, T. F., González-Roel, V., Diego-Mantecón, J. M. y Ortiz-Laso, Z. (2021). Análisis de la conexión arte-matemáticas en los libros de texto de Educación Primaria. *Educación Matemática, 33*(3), 67-93. https://doi.org/10.24844/em3303.03

Blanco, T. F., Ortiz-Laso, Z. y Diego-Mantecón, J. M. (2019). Proyectos STEAM con formato KIKS para la adquisición de competencias LOMCE. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y A. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 614). SEIEM.

Carmona, J. A., Arias, J. y Villa, J. A. (2019). Formación inicial de profesores basada en proyectos para el diseño de lecciones STEAM. En E. Serna (Ed.), *Revolución en la formación y la capacitación para el siglo XXI* (pp. 483-492). Instituto Antioqueño de Investigación.

Chaaban, Y., Qadhi, S. y Du, X. (2021). Student teachers' perceptions of factors influencing learner agency working in teams in a STEAM-based course. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(7), em1980. https://doi.org/10.29333/ejmste/10978

Chu, H. E., Martin, S. N. y Park, J. (2019). A theoretical framework for developing an intercultural STEAM program for Australian and Korean students to enhance science teaching and learning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(7), 1251-1266. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9922-y

Colucci-Gray, L., Burnard, P., Gray, D. y Cooke, C. (2019). A critical review of STEAM (science, technology, engineering, arts, and mathematics). En P. Thomson (Ed.), *Oxford research encyclopedia of education* (pp. 1–26). Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/acrefore/9780190264093.013.39

Consejo de la Unión Europea (Ed.) (2018). *Recomendación del consejo de 22 de mayo de 2018 relativa a las competencias clave para el aprendizaje permanente*.

Davis, J. P., Chandra, V. y Bellocchi, A. (2019). Integrated STEM in initial teacher education: Tackling diverse epistemologies. En P. Sengupta, M. C. Shanahan y B. Kim (Eds.), *Critical, transdisciplinary and embodied approaches in STEM education* (pp. 23-40). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29489-2_2

Diego-Mantecón, J. M. (2020). Classroom implementation of STEM Education through technology: advantages and handicaps. En P. R. Richard, S. Van Vaerenbergh y M. P. Vélez (Eds.), *First Symposium on Artificial Intelligence for Mathematics Education. Book of Abstracts (AI4ME 2020)* (pp. 9-10). Universidad de Cantabria.

Diego-Mantecón, J. M., Arcera, Ó., Blanco, T. F. y Lavicza, Z. (2019a). An engineering technology problem-solving approach for modifying student mathematics-related beliefs: Building a robot to solve a Rubik's cube. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 26*(2), 55-64.

Diego-Mantecón, J. M., Blanco, T. F., Búa-Ares, J. B. y González-Sequeiros, P. (2019b). Is the relationship between art and mathematics addressed thoroughly in Spanish secondary school textbooks? *Journal of Mathematics and the Arts, 13*(1-2), 25-47. https://doi.org/10.1080/17513472.2018.1552068

Diego-Mantecón, J. M., Blanco, T. F., Chamoso, J. M. y Cáceres, M. J. (2019c). An attempt to identify the issues underlying the lack of consistent conceptualisations in the field of student mathematics-related beliefs. *Plos one, 14*(11), e0224696. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0224696

Diego-Mantecón, J., Blanco, T., Ortiz-Laso, Z. y Lavicza, Z. (2021a). STEAM projects with KIKS format for developing key competences. [Proyectos STEAM con formato KIKS para el desarrollo de competencias clave]. *Comunicar, 66*, 33-43. https://doi.org/10.3916/C66-2021-03

Diego-Mantecón, J. M., Haro, E., Blanco, T. F. y Romo-Vázquez, A. (2021b). The chimera of the competency-based approach to teaching mathematics: a study of carpentry purchases for home projects. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(2), 339-357. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10032-5

Diego-Mantecon, J. M., Prodromou, T., Lavicza, Z., Blanco, T. F. y Ortiz-Laso, Z. (2021c). An attempt to evaluate STEAM project-based instruction from a school mathematics perspective. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(5), 1137-1148. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01303-9

Diego-Mantecón, J. M., Ortiz-Laso, Z. y Blanco, T. F. (2022a). Implementing STEM projects through the EDP to learn mathematics: the importance of teachers' specialization. En P. R. Richard, M. P. Vélez y S. Van Vaerenbergh (Eds.), *Mathematics education in the age of artificial intelligence: How artificial intelligence can serve mathematical human learning* (pp. 1137-1148). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_17

Diego-Mantecón, J. M., Ortiz-Laso, Z., Diamantidis, D. y Kynigos, C. (2022b). Toward a STEAM professional development program to exploit school mathematics. En *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*. ERME.

Domènech-Casal, J., Lope, S. y Mora, L. (2019). Qué proyectos STEM diseña y qué dificultades expresa el profesorado de secundaria sobre Aprendizaje Basado en Proyectos. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 16*(2), 2203. https://doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2019.v16.i2.2203

El Bedewy, S., Lavicza, Z., Haas, B. y Lieban, D. (2021). A STEAM practice approach to integrate architecture, culture and history to facilitate mathematical problem-solving. *Education Sciences, 12*(1), 9. https://doi.org/10.3390/educsci12010009

English, L. D. (2016). STEM education K-12: perspectives on integration. *International Journal of STEM Education, 7*(9), 502-507. https://doi.org/10.1186/s40594-016-0036-1

Fenyvesi, K., Houghton, T., Diego-Mantecón, J. M., Crilly, E., Oldknow, A., Lavicza, Z. y Blanco, T. F. (2017). Kids Inspire Kids for STEAM. *The STEAM Journal, 3*(1). https://doi.org/10.5642/steam.20170301.21

Frykholm, J. y Glasson, G. (2005). Connecting science and mathematics instruction: Pedagogical context knowledge for teachers. *School Science and Mathematics, 105*(3), 127-141. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2005.tb18047.x

Gao, X., Li, P., Shen, J. y Sun, H. (2020). Reviewing assessment of student learning in interdisciplinary STEM education. *International Journal of STEM Education, 7*(24). https://doi.org/10.1186/s40594-020-00225-4

Gresnigt, R., Taconis, R., van Keulen, H., Gravemeijer, K. y Baartman, L. (2014). Promoting science and technology in primary education: a review of integrated curricula. *Studies in Science Education, 50*(1), 47-84. https://doi.org/10.1080/03057267.2013.877694

Halász, G. y Michel, A. (2011). Key Competences in Europe: interpretation, policy formulation and implementation. European Journal of Education, 46(3), 289-306. http://doi.org/10.1111/j.1465-3435.2011.01491.x

Han, S., Capraro, R. y Capraro, M. M. (2015). How science, technology, engineering, and mathematics (STEM) project-based learning (PBL) affects high, middle, and low achievers differently: The impact of student factors on achievement. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(5), 1089-1113. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9526-0

Han, S., Rosli, R., Capraro, M. M. y Capraro, R. M. (2016). The Effect of Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) Project Based Learning (PBL) on students' achievement in four Mathematics topics. *Journal of Turkish Science Education, 13*, 3-29.

Houghton, A., Oldknow, A., Diego-Mantecón, J. M., Fenyvesi, K., Crilly, E. y Lavicza, Z. (2019). KIKS Creativity and Technology for All. *Open Education Studies*, *1*(1), 198-208. https://doi.org/10.1515/edu-2019-0014

Istúriz, M. P., González-Ruiz, I., Diego-Mantecón, J. M., Recio, T., Búa, J. B., Blanco, T. F., González, M. J., y Polo, I. (2017). Kids Inspiring Kids for STEAM (KIKS). En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10)* (pp. 1676-1677). DCU Institute of Education & ERME.

Kang, N. H. (2019). A review of the effect of integrated STEM or STEAM (science, technology, engineering, arts, and mathematics) education in South Korea. *Asia-Pacific Science Education, 5*(1), 1-22. https://doi.org/10.1186/s41029-019-0034-y

Kelley, T. R. y Knowles, J. G. (2016). A conceptual framework for integrated STEM Education. *International Journal of STEM education*, *3*(1), 1-11. https://doi.org/10.1186/s40594-016-0046-z

Kwon, H., Capraro, R. M. y Capraro, M. M. (2021). When I believe, I can: Success STEMs from my perceptions. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *21*(1), 67-85. https://doi.org/10.1007/s42330-020-00132-4

Lasa, A., Abaurrea, J. y Iribas, H. (2020). Mathematical content on STEM activities. *Journal on Mathematics Education, 11*(3), 333-346. https://doi.org/10.22342/jme.11.3.11327.333-346

Li, Y. y Schoenfeld, A. H. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as "given" in STEM education. *International Journal of STEM Education, 6*(1), 1-13. https://doi.org/10.1186/s40594-019-0197-9

Lu, X. y Kaiser, G. (2022). Creativity in students' modelling competencies: Conceptualisation and measurement. *Educational Studies in Mathematics*, *109*(2), 287-311. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10055-y

Macías, C. F. M., Meneses-Villagrá, J. Á. y Caballero-Sahelices, M. C. (2020). Aprendizaje basado en proyectos como estrategia para aprender sobre electricidad: estudio de caso en una escuela rural colombiana. *Investigações Em Ensino De Ciências, 25*(3), 145-161. https://doi.org/10.22600/1518-8795.ienci2020v25n3p145

Margot, K. C. y Kettler, T. (2019). Teachers' perception of STEM integration and education: A systematic literature review. *International Journal of STEM Education, 6*, 2. https://doi.org/10.1186/s40594-018-0151-2

Martín-Páez, T., Aguilera, D., Perales-Palacios, F. J. y Vílchez-González, J. M. (2019). What are we talking about when we talk about STEM education? A review of literature. *Science Education, 103*(4), 799-822. https://doi.org/10.1002/sce.21522

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP]. (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado,* (76), 41571-41789.

Nguyen, K. A., Borrego, M., Finelli, C. J., DeMonbrun, M., Crockett, C., Tharayil, S., Shekhar, P, Waters, C. y Rosenberg, R. (2021). Instructor strategies to aid implementation of active learning: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education, 8*. https://doi.org/10.1186/s40594-021-00270-7

Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R. y Villa-Ochoa, J. A. (2017). Conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. En G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematics Education* (pp. 235-248). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_15

Ortiz-Laso, Z. (2020). STEAM activities with KIKS format. En P. R. Richard, S. Van Vaerenbergh y M. P. Vélez (Eds.), *First Symposium on Artificial Intelligence for Mathematics Education. Book of Abstracts (AI4ME 2020)* (pp. 6-7). Universidad de Cantabria.

Potari, D., Psycharis, G., Spiliotopoulou, V., Triantafillou, C., Zachariades, T. y Zoupa, A. (2016). Mathematics and science teachers' collaboration: searching for common grounds. En C. Csíkos, A. Rausch, y I. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 91-98). PME.

Quigley, C. F., Herro, D., Shekell, C., Cian, H. y Jacques, L. (2020). Connected learning in STEAM classrooms: Opportunities for engaging youth in science and math classrooms. *International*

Journal of Science and Mathematics Education, 18(8), 1441-1463. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10034-z

Sevimli, E. y Ünal, E. (2022). Is the STEM approach useful in teaching mathematics? Evaluating the Views of Mathematics Teachers. *European Journal of STEM Education, 7*(1), 01. https://doi.org/10.20897/ejsteme/11775

Stinson, K., Harkness, S. S., Meyer, H. y Stallworth, J. (2009). Mathematics and science integration: Models and characterizations. *School Science and Mathematics*, *109*(3), 153-161. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2009.tb17951.x

Tseng, K. H., Chang, C. C., Lou, S. J. y Chen, W. P. (2013). Attitudes towards science, technology, engineering and mathematics (STEM) in a project-based learning (PjBL) environment. *International Journal of Technology and Design Education, 23*(1), 87-102. https://doi.org/10.1007/s10798-011-9160-x

Toma, R. B. y García-Carmona, A. (2021). «De STEM nos gusta todo menos STEM». Análisis crítico de una tendencia educativa de moda. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 65-80. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3093

Thibaut, L., Ceuppens, S., De Loof, H., De Meester, J., Goovaerts, L., Struyf, A., Boeve-de Pauw, J., Dehaene, W., Deprez, J., De Cock, M., Hellinckx, L., Knipprath, H., Langie, G., Struyven, K., Van de Velde, D., Van Petegem, P. y Depaepe, F. (2018). Integrated STEM education: a systematic review of instructional practices in secondary education. *European Journal of STEM Education, 3*(1), 02. https://doi.org/10.20897/ejsteme/85525

Ubuz, B. (2020). Examining a technology and design course in middle school in Turkey: Its potential to contribute to STEM Education. En J. Anderson y Y. Li (Eds.), *Integrated approaches to STEM Education: An international approach* (pp. 295-312). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-52229-2_16

Sesión homenaje

- Gómez, B. (Universidad de Valencia)
- Blanco, L. (Universidad de Extremadura)
- Climent, N. (Universidad de Huelva)

EL DESPEGUE DEL ÁREA DE CONOCIMIENTO DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

The didactics of mathematics' take off as field of knowledge

Gómez, B.

Universidad de Valencia

Resumen

Breve descripción de los hechos y razones que dan cuenta del contexto histórico y legislativo del nacimiento, despegue y consolidación del área conocimiento didáctica de la matemática.

Palabras clave: *didáctica de las matemáticas, área de conocimiento, historia.*

Abstract

Brief description of the facts and reasons that account for the historical and legislative context of the birth, take-off and consolidation of the didactic of mathematics as field of knowledge.

Keywords: *didactic of mathematics, field of knowledge, history.*

EL DESPEGUE

Situamos en la década de los 70 el comienzo del desarrollo de la investigación en Educación Matemática en el ámbito internacional y en 1984 su despegue oficial en España. Lo primero, con motivo del primer ICME (International Congress on Mathematical Education) celebrado en Lyon en 1969, bajo la presidencia de Hans Freudenthal, a la sazón presidente del ICMI (International Commission on Mathematical Instruction). Lo segundo al institucionalizarse el área de conocimiento Didáctica de la Matemática gracias a la Ley de reforma universitaria (LRU, 11/1983 de 25 de agosto, BOE 01/09/1983) que estableció las condiciones legales para que su docencia e investigación tuvieran pleno reconocimiento universitario.

Previamente, la Ley General de Educación de 1970 (LGE, 14/1970), última ley del sistema educativo franquista que estuvo vigente, aunque con modificaciones, durante los años de la transición española (1975-1982) y los ocho primeros años de los gobiernos socialistas (1982-1990) hasta la aprobación de la LOGSE (1990), había generalizado la educación de los 6 a los 14 años integrando en un sistema único a todos los niños comprendidos en estas edades. Esta ley suprimió el Bachillerato elemental, que pasó a integrarse en la Educación General Básica (EGB), de ocho cursos, estructurados en dos etapas de 4 años: de 6 a 10 años y de 11 a 14. Esta última etapa dejó de impartirse por profesores licenciados y pasó a ser competencia de los maestros.

Para las Escuelas Normales esta ley supuso una profunda transformación ya que las incorporó a la Universidad, bajo el nombre de Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de Educación

Gómez, B. (2022). El despegue del área de conocimiento Didáctica de la matemática. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 97-102). SEIEM.

General Básica (EUFPEGB), convirtiendo a su profesorado y alumnos en universitarios, lo que supuso un salto cualitativo en la formación de los maestros en relación con los planes precedentes[1].

Fruto de esta ley fue el Plan provisional de estudios de magisterio de 1971, con el que se obtenía el título de Diplomado en Profesor de EGB, que era un primer ciclo universitario. El título capacitaba para impartir las enseñanzas relativas a la Primera Etapa de E.G.B., y como novedad la capacitación especializada para impartir la Segunda Etapa (equivalente al anterior bachillerato elemental); para ello implementó la especialización ligada a bloques de conocimientos: Ciencias, Ciencias Humanas, y Filología (aparte de Preescolar y Educación Especial), en los que se incluían sus didácticas específicas, que por primera vez son tratadas como disciplinas universitarias, por lo que se puede decir que con este plan la educación matemática surge como especialización de la comunidad de profesores de matemáticas de las EUFPEGB.

Este título también daba acceso al segundo ciclo de las enseñanzas universitarias, es decir, a las licenciaturas, mediante un curso puente.

Al no exigir la superación de las pruebas de selectividad para acceder a estos estudios, aunque se exigía el COU, se llenaron las aulas de alumnos que buscaban un título universitario de corta duración, muchos de ellos rechazados de otras carreras.

Los PNNs

Para dar respuesta al incremento progresivo de estudiantes universitarios que se produjo en esa década de los 70, especialmente durante los años de la transición política, las EUFPEGB y las universidades en general acudieron a un procedimiento de urgencia para cubrir sus necesidades inmediatas de profesorado. Esto se hizo bajo una forma de contrato laboral, con salarios bajos y elevada carga docente, que se sustanció con la incorporación de un gran número de profesores jóvenes y noveles que fueron conocidos como los PNNs, siglas que corresponden a las iniciales de Profesor no numerario (equivalía a no funcionario).

Durante el período de transición política española los PNNs fueron el colectivo mayoritario en la universidad española, hasta el punto de que en 1981 solo el 20% del profesorado era numerario. Durante este periodo, el movimiento de los PNNs reivindicando la mejora de sus condiciones laborales y la democratización de la universidad y sus órganos de gobierno logró un gran apoyo social.

---

[1] La principal Ley de educación del franquismo fue la de Educación Primaria de 17 de julio de 1945. Esta ley cambió la denominación de Escuelas Normales por Escuelas de Magisterio femeninas y masculinas. En el desarrollo de esta ley, en 1950 se promulgó un Plan de formación del Magisterio. Su sistema docente exigía tener cumplidos los catorce años de edad, examen de ingreso ante tribunales constituidos por profesores del mismo centro, con la base cultural del bachillerato elemental (cuatro años de 10 a 14 años tras los cuatro de primaria), aprobar tres cursos y una prueba final con cuestionarios fijos.

La reforma de la Ley de Educación Primaria de 1965 (LEP, 169/1965, de 21 de diciembre) y su posterior refundición el 2 de febrero de 1967, trajo un nuevo Plan de estudios de Magisterio. Para el acceso se exigía el título de bachiller superior. Constaba de dos cursos de estudios profesionales, una prueba de madurez o de conjunto y hacerse cargo de un curso en período de prácticas docentes con derechos económicos. La asignatura de metodología pasó a llamarse didáctica de las matemáticas

Sólo tres años después, la Ley General de Educación de 1970 (LGE, 14/1970 de 4 de agosto) creaba las Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de EGB en sustitución de las Escuelas de Magisterio, que dejan de ser centros autónomos dependientes del Ministerio de Educación Nacional. Esta Ley generalizó la educación de los 6 a los 14 años integrando en un sistema único a todos los niños comprendidos en estas edades, por lo que se suprimió el Bachillerato elemental. Cursando la Educación General Básica (EGB) obligatoria y gratuita, de ocho cursos, estructurados en dos etapas, se obtenía el título de Graduado Escolar, que daba acceso al Bachillerato Unificado Polivalente (BUP), de tres cursos (14-17). Con este título se podía pasar al Curso de Orientación Universitaria (COU, 17-18 años) y a la Formación Profesional de segundo grado.

Un primer intento de abordar el problema fueron las oposiciones restringidas de 1981, a agregado de Universidad y de Escuela Universitaria, del ministro de Universidades González Soara, que resultó insuficiente. Con la llegada al gobierno del partido socialista, en las legislativas de 28/10/1982, el ministro de educación y ciencia José Mª Maravall, que había incorporado a su equipo a un destacado PNN (Alfredo Pérez Rubalcaba como Director del Gabinete Técnico de la Secretaría de Estado de Universidades e Investigación), convocó en 1984 unas pruebas de evaluación a distancia conocidas como pruebas de idoneidad.

Quienes las superasen serían nombrados Profesores de los Cuerpos Docentes presentes en la Ley Orgánica 11/1983 de Reforma Universitaria (LRU), en las categorías de Profesor Titular de Universidad o de Escuela Universitaria, cuerpo este último para el que no se exigía el título de doctor, con destino en la Universidad en la que prestaban sus servicios como contratados o interinos.

A estas pruebas podían participar los PNNs que el 30 de septiembre de 1983 llevasen cumplidos cinco cursos académicos de docencia universitaria o investigación. Para ser evaluada su capacidad docente e investigadora, así como el historial académico de los candidatos, éstos debían remitir a la Comisión correspondiente su curriculum vitae, programa de un curso o asignatura de la especialidad científica elección del candidato y memoria.

Estas pruebas fueron superadas por 4.938 candidatos, mientras que 2.100 no las superaron. Inmediatamente, a lo largo del siguiente curso académico las universidades ya pudieron convocar por el nuevo sistema de acceso previsto en la LRU, un número de plazas de profesores numerarios similar al que fue cubierto por la vía de las pruebas de idoneidad. A esta primera convocatoria se sumaron otras antes de 1987, fecha en que terminó el plazo señalado en la LRU para que expiraran los contratos de no numerarios, hasta alcanzar una cifra global de unas 10.500 nuevas plazas.

El término idoneidad adoptado en la LRU resultó "poco idóneo", al producir el efecto no deseado de que los profesores que accedieron por esta vía vieron menoscabada la consideración pública de su competencia profesional; sin embargo, tanto las pruebas de idoneidad como la aceleración de los concursos oposición permitió el rejuvenecimiento de la plantilla de profesores numerarios de universidad (el 70% de los aprobados tenía menos de 40 años, y el 41 %, entre 17 y 35) y el hecho de que con esta incorporación masiva el porcentaje de profesores numerarios se elevara a un 47%.

LA ORGANIZACIÓN DEPARTAMENTAL POR ÁREAS DE CONOCIMIENTO

La LRU normalizó la integración universitaria de los estudios de maestro (en muchos casos al favorecer su adscripción a Facultades de Educación) en una nueva estructura universitaria, cuyas competencias docentes se articularon en torno a la organización departamental vinculada a un listado oficial de áreas de conocimiento, entre las cuales se encontraban las Didácticas Específicas. Si bien, al ser estudios de primer ciclo no daban acceso a los maestros a los estudios de tercer ciclo.

Los profesores titulares de EE.UU. y los profesores de Universidad tuvieron que adscribirse a un área de conocimiento a su elección. Muchos profesores de matemáticas de las EUFPEGB vislumbraron el alcance de la oportunidad que se les ofrecía y aceptaron el desafío de adscribirse al área recién creada y, allí donde fue posible, crearon el departamento homónimo: Madrid-UC, Granada, Sevilla y Valencia-UVEG (4); en otros casos, donde fue imposible llegar al número mínimo de profesores exigido, se agruparon con otras áreas de Didácticas específicas (16) y en el resto de las universidades el agrupamiento se realizó con áreas de matemáticas (18).

Ya constituidos los Departamentos, inmediatamente, en los albores de los 90, se pusieron en marcha programas de doctorado específicos en Didáctica de las Matemáticas que, a falta de doctores especialistas en España, contaron con la participación de prestigiosos investigadores internacionales. Una vez que comenzaron a sustanciarse en tesis doctorales propias de nuestra área de conocimiento ya se puede hablar propiamente de la figura del profesional de la investigación en este campo.

MOVIMIENTOS SOCIO PROFESIONALES

El esfuerzo realizado por la comunidad de educadores matemáticos en nuestro país en los años precedentes ya había delimitado individuos y grupos profesionalizados en Didáctica de la Matemática, organizados en Sociedades de profesores, grupos de innovación pedagógica y seminarios, algunos vinculados a los Institutos de Ciencias de la Educación (ICEs) de las Universidades.

Algunos de estos individuos y grupos, reconocibles por la realización de trabajos académicos pioneros, sometidos a la crítica y control de los colegas, colaboraron en la creación de revistas profesionales especializadas, en particular la revista Enseñanza de las Ciencias y de las Matemáticas, cuyo primer número se publicó en 1983 bajo los auspicios de las universidades de Barcelona y Valencia, y la revista Epsilon de la Sociedad andaluza de Educación Matemática Thales en 1981.

También hay que mencionar, el importante papel que jugó la organización de jornadas y congresos, entre ellos las primeras JAEM realizadas en 1981, las primeras Jornadas andaluzas de profesores de matemáticas celebradas en Cádiz en 1983, y el primer Congreso bienal sobre investigación en la didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas organizado por la revista Enseñanza de las Ciencias en Barcelona en 1985.

Más populares, si cabe, fueron las Escuelas de verano, impulsadas por los movimientos de renovación pedagógica (MRP) con apoyo financiero de la administración educativa y la creación de los Centros de profesores en 1984, que eran instituciones preferentes para la formación permanente del profesorado y la promoción del encuentro profesional.

En la segunda mitad de esta década de los 80s destaca la Publicación de la obra colectiva: *Matemáticas: cultura y aprendizaje* (1987) y *Educación Matemática en Secundaria*, más conocida como colección Síntesis, con 61 títulos en los que participaron alrededor de doscientos autores españoles de todos los niveles educativos bajo la coordinación de profesores del área.

CONSOLIDACIÓN. LA SEIEM

Un cauce fundamental para la consolidación del área se estableció cuando los investigadores profesionales en educación matemática establecieron su propio espacio de encuentro, debate, documentación y reflexión constituyendo la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

El acto de constitución se celebró en Madrid el 12 de marzo de 1996, en el salón de actos del Centro de Desarrollo Curricular del Ministerio de Educación y Ciencia con la asistencia de 35 profesores vinculados con la investigación en Educación Matemática los cuales realizaban su trabajo en 20 universidades españolas. Los profesores Carmen Azcarate, Pilar Azcarate, Josep M. Fortuny, Luis Puig y Luis Rico, del área de Didáctica de la Matemática, fueron los firmantes del documento "Reflexiones para la constitución de un grupo español de investigación en educación matemática" que acompañaba a la convocatoria del encuentro en el que en el que tendría lugar la constitución de la Sociedad.

Un año después comenzaba a gestarse el grupo europeo de investigación en Educación Matemática, la ERME (European Research in Mathematics Education). En mayo del 97 en Osnabruck fue la reunión de constitución y el primer congreso de este grupo se celebró en esta misma ciudad en 1998.

El primer boletín de la SEIEM, que llevaba el número cero, se editó para dar cuenta del acto de constitución. Apareció en abril de 1996 y sus editores fueron Luis Rico y Eduardo Lacasta. En él se recogen los objetivos de la Sociedad, plasmados en sus estatutos, vale la pena recordarlos en este momento:

- Mantener un espacio de comunicación, crítica y debate sobre investigación en Educación Matemática, donde plantear cuestiones, transmitir e intercambiar resultados, profundizar en las elaboraciones teóricas, mejorar y validar los diseños metodológicos.
- Promover la constitución de grupos de investigación estables en Educación Matemática, con producción propia cualificada, que delimiten prioridades y aborden cuestiones de indagación específicas.
- Promover el impulso a la Educación Matemática en los organismos e instituciones relacionados con la investigación. Promover la participación en las convocatorias de ayudas a la investigación, institucionales y privadas.
- Contribuir y participar en el desarrollo, evaluación y aplicación de investigaciones en Didáctica de la Matemática.
- Contribuir a la presentación de resultados de investigación en los foros, encuentros y revistas de Educación Matemática.
- Mantener contactos y promover la colaboración con grupos de investigación en Educación Matemática.
- Favorecer activamente la cooperación e intercambio entre investigación y docencia en todos los niveles educativos.
- Transmitir y divulgar institucionalmente la actividad de la Sociedad.

Desde entonces han aparecido regularmente los boletines, más de cincuenta hasta la fecha de hoy, los cuales recogen la vida de la Sociedad en estos XXV años y una síntesis de la actividad investigadora de sus miembros.

En el balance global de actuaciones en función de los objetivos planificados apreciamos que la SEIEM ha recorrido un camino importante; la constitución de una comunidad española de investigación en educación matemática con visibilidad internacional es hoy una realidad creíble y consistente.

LA REUNIÓN DE VALENCIA

Nueve años antes, en septiembre de 1987, con motivo del II Congreso bienal sobre investigación en la Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas, organizado por la revista Enseñanza de las Ciencias en Valencia, se celebró la que se denominó "primera reunión del área de conocimiento Didáctica de las Matemáticas", en la E. U. de F. del P. de EGB de la Universidad de Valencia, con la asistencia de 52 profesores del área.

Durante dos días, en sesiones de mañana y tarde, se debatieron cuestiones referentes a nuestra área de conocimiento y a nuestra incardinación y participación en la estructura universitaria, agrupadas en torno a las siguientes preguntas:

¿Qué significa Didáctica de la matemática? ¿Cuáles son los problemas de puesta en marcha y consolidación de un área nueva y formada por profesores que proceden de EE.UU.? ¿Cuál es nuestro papel en la definición de los planes de estudio de formación de profesores y posgrados? ¿Cuál es la situación de la investigación en Didáctica de las Matemáticas producida desde nuestros departamentos?

Para encauzar el debate, estas preguntas fueron contestadas antes de la reunión presencial, mediante documentos elaborados por los departamentos de Valencia, Bellaterra y Granada, para ser discutidos durante el encuentro. Dicho encuentro se dejó registro videograbado y se levantó acta.

Las intervenciones, protagonizadas principalmente por los portavoces de los departamentos representados en la reunión, dejaron constancia de que la función de esta área dentro de la universidad estaba en la formación de profesores y que las disciplinas básicas deberían abarcar: formación matemática básica, curriculum de matemáticas, aprendizaje de las matemáticas (teorías cognitivas), factores socioculturales e históricos en el conocimiento matemático, análisis didáctico del contenido matemático y la acción en el aula y su planificación.

En cuanto a los problemas del área, se destacó principalmente la ausencia de especialistas en el área, al no haber una formación específica de Didáctica de las Matemáticas, y la coexistencia en nuestra comunidad con profesores que se sienten incómodos con unos conocimientos que desconocen y no les motivan.

Se mencionó también la imagen débil y pobre, poco coherente y dispersa de la investigación en nuestra comunidad junto con la falta de contacto con la escuela.

Dos años después, se celebró el II encuentro estatal de profesores de Didáctica de las Matemáticas en Santiago, durante los días 18-19 de septiembre de 1989. Allí se elaboró un documento reivindicativo solicitando la modificación del título de Diplomado en Educación infantil y Primaria por el de Licenciado.

Referencias

Ley de 17 de julio de 1945, sobre Educación Primaria (1945). BOE, 199, de 18/7/1945, 385 a 416. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-1945-7246

Ley 169/1965, de 21 de diciembre, sobre Reforma de la Enseñanza Primaria (1965). BOE, 306, de 23/12/1965, 17240 a 17246. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-1965-21380

Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa (1970). BOE, 187, de 6/8/1970, 12525 a 12546. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-1970-852

Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (1990), BOE, 238, de 4/10/1983, 28927 a 28942. https://www.boe.es/eli/es/lo/1990/10/03/1

Ley Orgánica 11/1983, de 25 de agosto, de Reforma Universitaria (1983). BOE, 209, de 01/09/1983, 24034 a 24042. https://www.boe.es/eli/es/lo/1983/08/25/11

APORTACIONES AL DESARROLLO DEL CURRÍCULO DESDE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Contributions to curriculum development from research in mathematics education

Blanco Nieto, L. J.

Universidad de Extremadura

Resumen

Presentamos un libro, elaborado desde la SEIEM, que pretende ser útil al profesorado para interpretar y concretar el currículo oficial fruto de la reciente reforma educativa. Se expone brevemente la intencionalidad del libro, su organización y contenido, incluyendo un índice de los capítulos que lo componen.

Palabras clave: *reforma curricular, matemáticas, profesorado.*

Abstract

We present a book, produced by the SEIEM, which aims to be useful for teachers in interpreting and specifying the official curriculum resulting from the recent educational reform. Its aims, organisation and contents are briefly described, including an index of its chapters.

Keywords: *curriculum reform, mathematics, teachers.*

El nacimiento de la SEIEM podría considerarse como un eslabón más dentro del movimiento en torno a la educación matemática que se había iniciado en los años 70, caracterizado por un deseo de reforma de la educación en España, del que no podía ser ajeno la educación matemática. La escasez de referencias específicas, la percepción de una cierta sensación de fracaso en la enseñanza y aprendizaje (E/A) y la necesidad de una renovación pedagógica nos impulsaron a la realización de tareas de experimentación e innovación espontáneas, en diferentes niveles educativos.

En este marco, de esperanza y de inquietud, participábamos numerosos profesores que constituimos la SEIEM, incorporados mayoritariamente a la nueva Área de Conocimiento de "Didáctica de la Matemática" y a los departamentos universitarios, lo que nos permitió disponer de medios personales y materiales, ayudas institucionales y otros recursos para facilitar un salto cualitativo hacia la investigación en este campo. Surgía en el ámbito universitario un profesorado con formación básica de matemáticas, específico y motivado, para abordar trabajos en la educación matemática, generando un espacio de comunicación, crítica y debate desde diferentes marcos, teóricos y metodológicos de investigación y compartir los resultados de los proyectos desarrollados. Pero, además, manteniendo la idea básica de contribuir a la mejora de la educación matemática en todos los ámbitos, procurando su

Blanco Nieto, L. J. (2022). Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática. En M. T. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 103-107). SEIEM.

divulgación y ayudando a la toma de decisiones cuando correspondieran e influir en los organismos e instituciones relacionados con la educación, al objeto de lograr una enseñanza de las matemáticas más eficaz.

Por ello, la Junta Directiva de la SEIEM propuso, en 2021, participar con un documento propio en el debate actual sobre la modificación curricular y sobre la formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas. Obviamente, esta aportación al desarrollo del currículo se haría desde la investigación en Educación Matemática y teniendo en cuenta las aportaciones realizadas por los diferentes grupos de trabajo. Así, se propuso la elaboración de un libro que reflejara cuestiones generales sobre la E/A de las matemáticas y, al mismo tiempo, los diferentes organizadores del currículo como los objetivos, contenidos, metodología y evaluación, asumiendo la perspectiva adoptada en relación a las competencias generales y específicas. Pero siempre, considerando que los temas tratados pudieran ser útiles al profesorado en su actividad profesional, tanto para generar actividades de aula como poder avanzar en su formación como profesores de matemáticas.

La buena disposición de los miembros de la SEIEM y la amplitud de perspectivas en las que trabajan nos permitió ser ambiciosos al incluir todos los niveles e itinerarios educativos, reflejar los diferentes sentidos y saberes matemáticos que se señalan en el currículo, y abordar cuestiones transversales. Estas últimas se ocupan del uso de recursos didácticos, manipulativos y virtuales, así como una multitud de factores que condicionan el proceso de E/A de una materia que entendemos es útil para la formación de las personas en el siglo XXI, y cuya enseñanza puede y debiera ser agradable y motivadora, aunque exija reflexión y esfuerzo. Igualmente, entendemos que la educación matemática debe integrar aspectos cognitivos y afectivos, en íntima relación con los aspectos socio-culturales y valores propios de la sociedad actual.

En la propuesta hemos establecido cuatro partes desarrolladas con la participación de 70 profesionales, docentes e investigadores, pertenecientes a 23 universidades. Así, iniciamos el documento con una breve mirada histórica para mostrar reflexiones y aportaciones que nos ayudan a profundizar sobre los problemas de la educación matemática y de la implementación del currículo, que a su vez serán objeto de fundamentación y análisis para ayudar a la práctica docente. Es importante reflexionar sobre los descriptores curriculares de la educación matemática y mantener viva las preguntas sobre qué matemáticas enseñar y por qué hay que enseñar matemática en el siglo XXI. Como profesionales reflexivos debemos considerar los objetivos generales de la educación y que nuestro trabajo se dirige a la formación de personas que van a vivir en una sociedad concreta en la que deben integrarse y participar creativamente y luchar para que sea más solidaria, igualitaria y justa. A este respecto, con el objetivo de orientar a los profesores en este nuevo rumbo curricular, reflexionamos sobre la pertinencia y fundamentación de sentidos matemáticos escolares en los documentos curriculares publicados, y sobre las consecuencias que tendrán en futuros procesos de enseñanza y aprendizaje. Se realiza una descripción general de cada uno de los sentidos matemáticos escolares (sentido numérico, espacial, de la medida, estocástico y algebraico), señalándose las principales componentes que lo organizan. Termina la primera parte con un capítulo relativo a la evaluación, aspecto fundamental que sigue reflejando prácticas muy tradicionales, por lo que se aportan elementos para su evolución.

La consideración de los descriptores curriculares nos lleva a considerar, específicamente, las matemáticas en los diferentes niveles educativos (infantil, primaria, secundaria obligatoria, bachillerato, universidad, formación profesional, educación de adultos y aprendizaje matemático de alumnado con necesidades especiales), que son la referencia en la parte segunda del libro. Es necesario reconsiderar la enseñanza de las matemáticas en infantil y primaria, reconocer el papel de las matemáticas intuitivas e informales y potenciar actividades que generen aprendizajes de una manera más natural, espontánea y significativa, como paso para acceder a una matemática más formal.

Reflexionamos sobre el paso del bachillerato a la universidad, acerca del sentido de las matemáticas en diferentes grados universitarios y se proponen algunas tareas que puedan ser consideradas en las aulas universitarias. Pero también, la enseñanza de las matemáticas está presente en la educación de personas adultas y en la formación profesional. A este respecto, es necesario incidir sobre el papel de la educación matemática y, en este sentido, sugerimos contextualizar las situaciones de aprendizaje e integrarlas en la vida cotidiana de las personas, dando ejemplos de aplicación concreta de contenidos matemáticos en diferentes profesiones. En ambos casos, se muestran estudios concretos.

La educación matemática presenta numerosos elementos transversales, algunos de los cuales son considerados en la tercera parte. Asumimos el aula de matemáticas como un contexto social de comunicación que debe propiciarse a partir de tareas matemáticas específicas, con prácticas centradas en el alumnado y sus procesos de aprendizaje y una matemática inclusiva que valore los aportes y características de todos los alumnos. Asumimos la importancia de avanzar hacia una enseñanza de las matemáticas que dé sentido a la educación y sea enriquecedora a nivel personal, social y académico. En esta parte se realizan propuestas para trabajar las conexiones con otras disciplinas, se consideran los desafíos de la sociedad actual, como los Objetivos de Desarrollo Sostenible o la perspectiva de género y las experiencias de matemáticas fuera del aula. Para ello, es fundamental el uso de materiales y recursos manipulativos y entornos tecnológicos, que ayuden a los aprendices. Somos consciente de la dificultad, didáctica y de disponibilidad, del uso de materiales, así, como de la necesidad de conocer con claridad la secuencia de aprendizaje que se genera en cada caso. Este uso, además, debe realizarse en el aula y fuera de ella ya que es fundamental la complementariedad de las actividades regladas y no regladas desarrolladas en el entorno inmediato. Termina la tercera parte con una referencia a la resolución de problemas y modelización, consideradas desde diferentes perspectivas e incidiendo en su papel como contexto necesario para desarrollar el aprendizaje y para dar sentido matemático de los diferentes saberes que se indican en el currículo.

En la última parte, abordamos la formación del profesorado de infantil, primaria y secundaria, el acceso a la profesión docente y mostramos situaciones de aprendizaje en relación a su desarrollo profesional (obviamente, considerando los tres pasos como un proceso continuo de formación, que le permita ir adaptándose a las necesidades que la sociedad va originando). Se pretende dar respuesta a la demanda de la formación de profesores a través del modelo de competencias profesionales docentes, a partir de la identificación del conocimiento específico de los profesores de matemáticas orientado a la práctica profesional, y de las prácticas profesionales específicas que configuran la actividad de enseñar matemática y que se especifican en el texto. Las propuestas de desarrollo profesional inciden en la idea de la reflexión sobre la propia práctica y en el necesario uso de referencias teóricas procedentes de la Didáctica de la Matemática para organizar la reflexión.

Es fácil entender que el contenido de cada una de las cuatro partes en las que se divide la publicación, e incluso de cada capítulo, podría ser objeto de un documento específico más amplio que este que presentamos. Por ello, esbozamos algunas orientaciones, teóricas y prácticas, con el objetivo de ayudar a los profesores en su trabajo profesional y servir de apoyo al desarrollo del nuevo currículo. Evidentemente, todo el contenido debiera tener claras repercusiones en la formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas. Las múltiples referencias que se aportan permiten profundizar en cada uno de los temas esbozados.

Conocemos múltiples estudios que describen y analizan las dificultades, profesionales e institucionales, que condicionan la implementación de las propuestas curriculares en la práctica docente y la modificación de la formación de profesores. Establecer líneas de conexión entre el currículo, la investigación y la práctica docente es uno de nuestros objetivos, aun reconociendo que nuestra aportación es un paso pequeño, que sugiere otros muchos que deben propiciarse desde las instituciones educativas y de las asociaciones de profesores.

Anexamos, a continuación, el índice de los capítulos del libro, esperando que esto anime a su lectura y difusión.

Capítulo 2.7. Las Matemáticas en la educación de personas adultas. Javier Diez-Palomar, Universidad de Barcelona.

Capítulo 2.8. Pensemos en unas matemáticas para todo el alumnado. Alicia Bruno, Universidad de La Laguna, Elena Gil, Universidad de Zaragoza. Ángel Gutiérrez y Adela Jaime, Universidad de Valencia. Irene Polo-Blanco, Universidad de Cantabria.

Parte 3. Otras cuestiones a considerar en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Coordinadora: Maite González Astudillo, Profesora Titular de Universidad de la Universidad de Salamanca.

Capítulo 3.1. Tensiones y prácticas inclusivas en la enseñanza de las matemáticas. Nuria Planas, Universidad Autónoma de Barcelona, Alberto Arnal-Bailera, de la Universidad de Zaragoza, Natalia Munera y Miguel Morell, Universidad Autónoma de Barcelona.

Capítulo 3.2. Desarrollar las competencias de resolución de problemas y modelización para aprender matemáticas. Jordi Deulofeu, Universidad Autónoma de Barcelona. Abraham de la Fuente, Universidad Autónoma de Barcelona e Instituto Angeleta Ferrer.

Capítulo 3.3. Entornos tecnológicos para el desarrollo del pensamiento computacional y de la competencia en resolución de problemas. Pascual Diago, Universidad de Valencia. Javier del Olmo-Muñoz y José Antonio González-Calero, Universidad de Castilla-La Mancha. David Arnau, Universidad de Valencia.

Capítulo 3.4. Los materiales y recursos para el aula. Mercedes Rodríguez, Beatriz Sánchez Barbero y María Consuelo Monterrubio, Universidad de Salamanca.

Capítulo 3.5. Matemáticas transversales. Matías Arce, Universidad de Valladolid. Mónica Arnal-Palacián, Universidad de Zaragoza. Laura Conejo, Universidad de Valladolid. Israel García, Universidad de La Laguna. Miriam Méndez-Coca, Universidad Complutense de Madrid.

Parte 4. Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. Coordinador Salvador Llinares, Catedrático de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Alicante.

Capítulo 4.1. Interpretar el pensamiento matemático. Ceneida Fernández y Mar Moreno, Universidad de Alicante. José Luis Lupiáñez, Universidad de Granada. Vincenç Font, Universidad de Barcelona.

Capítulo 4.2. Acceso a la profesión. Salvador Llinares Ciscar, Universidad de Alicante.

Capítulo 4.3. Desarrollo profesional. Vicenç Font, Universidad de Barcelona. Luis Carlos Contreras y Nuria Climent, Universidad de Huelva.

Capítulo 4.4. Cuestiones transversales. Patricia Pérez-Tyteca de la Universidad de Alicante.

UNA MIRADA AL FUTURO PRÓXIMO DE LA SEIEM

A look into the future of the SEIEM

Climent, N.

Universidad de Huelva

Resumen

El presente documento presenta un conjunto de líneas de actuación para el futuro de la SEIEM, atendiendo a la comunicación, el debate y la formación dentro de la propia Sociedad, las relaciones con otros agentes e instituciones, la mejora de la calidad de la investigación en Educación Matemática y la transferencia de dichas investigaciones. Para situar estas propuestas se hace una breve síntesis del camino recorrido desde la creación de la SEIEM.

Palabras clave: *agenda para la acción, SEIEM, trayectoria.*

Abstract

We expose a set of lines of action for the SEIEM's future, focusing on communication, debate and education within the Society, relations with other institutions, improvement of the quality of mathematics education research and transfer of this research. In order to situate these proposals, a brief summary is made of the path followed by the Society since its creation.

Keywords: *action agenda, SEIEM, path.*

En estos 25 años de celebración de simposios, la SEIEM ha contado con 7 presidentes, 2 presidentas, y más de 40 vocales. Se han publicado las respectivas actas de cada simposio y 51 boletines (hasta la fecha de cierre de este documento). La Sociedad ha pasado de tener 98 socios en 1997 (Boletín 0 de la SEIEM) a 232 a fecha de 20 de junio de 2022. Desde sus inicios la mayor parte de los socios son profesores universitarios (estando representados buena parte de las universidades españolas), si bien la componen también profesores de Primaria y Secundaria.

En este camino, se ha dado luz a una revista de investigación, AIEM-Avances de investigación en Educación Matemática, de la que se han publicado 21 números, y en la que se han implicado un editor y dos editoras principales, así como más de 20 editores asociados. Se han generado diversos documentos que pretenden contribuir al cambio educativo y se han establecido relaciones institucionales con diferentes sociedades relacionadas con las matemáticas y la educación matemática, tanto nacionales como internacionales.

En lo que sigue, haré un muy breve recorrido a través de algunas de los que considero señales identitarias de la SEIEM.

Climent, N. (2022). Una mirada al futuro próximo de la SEIEM. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 109-115). SEIEM.

Simposios

Los simposios anuales han tenido un papel fundamental en la actividad desarrollada en la SEIEM, como espacio de comunicación, de debate académico y de fortalecimiento de la comunidad. Desde la celebración del primero (en Zamora en 1997, poco más de un año después de la constitución de la Sociedad) se ha celebrado un simposio cada septiembre, con la salvedad del 2020 por la situación de crisis sanitaria. La estructura inicial, consistente en seminarios, sesiones de trabajo de los grupos y una asamblea, fue dando cabida a otros formatos que en un primer momento eran sobre todo actividades plenarias (como debates y discusiones de tesis leídas), incorporándose la presentación de comunicaciones en el VII Simposio celebrado en Granada en 2003 y la de pósteres en el XVII Simposio celebrado en Salamanca en 2014. Los 25 simposios celebrados han recorrido 13 de las 17 comunidades autónomas de España. El número de asistentes ha aumentado considerablemente, de 52 en el primer simposio hasta casi 200 en el XIV Simposio, celebrado en Valencia. También ha aumentado su variedad en procedencia geográfica, proviniendo una parte de ellos de otros países.

Durante el desarrollo de cada simposio se celebra la asamblea anual de socios, en la que se da cuenta de la labor desarrollada en el año y se toman decisiones sobre la marcha de la Sociedad.

Grupos de trabajo

El intercambio y apoyo entre investigadores se ha visto reforzado a través de la estructura de los grupos de trabajo. La creación de estos grupos pretende dar respuesta al objetivo 2 de la Sociedad, que alude a la constitución de grupos de investigación estables en Educación Matemática, con producción propia cualificada, que delimiten prioridades y aborden cuestiones de indagación específicas. Además de las reuniones durante los simposios anuales, los grupos de trabajo celebran reuniones intermedias en las que se discuten investigaciones en curso.

Ya en el boletín 0 (de marzo de 1996) se establecían 6 grupos de trabajo (Didáctica del Análisis; Aprendizaje de la Geometría; Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria; Pensamiento Numérico y Algebraico; Formación de Profesorado; y Metodología de Investigación en Didáctica de la Matemática) y se citaban 2 por confirmar (Educación Infantil e Historia de la Educación Matemática) que se constituyeron en el I Simposio. Al poco tiempo, el grupo de Formación de Profesorado pasó a llamarse Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesorado, y el grupo de Metodología de Investigación en Didáctica de la Matemática desapareció y se constituyó en su lugar el de Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica (en el III Simposio en 1999). Los grupos de Historia de la Educación Matemática y Educación Infantil cesaron su actividad durante algunos años, reconstituyéndose el primero en el VII Simposio (2003) y el segundo, con el nombre de Investigación en Educación Matemática Infantil, en el XIV Simposio (2010). Todos estos grupos mantienen su actividad hasta la actualidad, añadiéndose la creación del grupo de Entornos Tecnológicos en Educación Matemática en 2019.

Jóvenes investigadores

Desde sus inicios se vislumbra en los boletines de la Sociedad la preocupación por la formación de jóvenes investigadores. De este modo, en el primer simposio, se señalaba la escasa presencia de jóvenes investigadores y doctorandos, planteándose ya en ese momento la necesidad de incentivar la participación de este colectivo. Con el tiempo fue aumentando la presencia de estos investigadores, de forma que en la valoración del IV Simposio (año 2000) se destacaba el crecimiento, que ya era visible en años anteriores, de la asistencia de estudiantes de tercer ciclo y doctorandos.

En el XIX Simposio, celebrado en 2015, se inició un espacio dedicado a jóvenes investigadores. Además, en la asamblea celebrada en 2016 se aprobó la modificación de los estatutos para la incorporación de un representante del grupo de jóvenes investigadores en la Junta Directiva de la SEIEM.

La importancia de la formación del colectivo de jóvenes investigadoras e investigadores llevó a la celebración de la primera escuela de verano en 2019 y la segunda, hispano-lusa, en 2021. Pudiera ser una precursora de estas escuelas, la Escuela de Verano Luso-Hispano-Italiana celebrada en Santarem (Portugal) en julio de 1999, a la que acudieron 13 miembros de la SEIEM, si bien aquellos asistentes eran investigadores consolidados.

AIEM

La creación de la revista AIEM fue aprobada en noviembre de 2011 y su primer número vio la luz en marzo de 2012. Desde entonces, la revista ha experimentado un notable avance. Ha ganado calidad y relevancia como revista de investigación en educación matemática en lengua española, situándose en poco más de diez años en una buena posición en índices de impacto internacionales (está incluida en Emerging Sources Citation Index, ESCI, desde 2019, en Scopus y posicionada en Q2 en 2021 en Scimago Journal & Country Rank).

AIEM contribuye a la difusión de la investigación que se desarrolla en la SEIEM y a su enriquecimiento, al permitir nutrirnos y establecer contacto con investigadores de otros países. Colabora, además, en el análisis de estados del arte de la investigación en un determinado tema. Sus artículos recogen la pluralidad de focos de la investigación en educación matemática de la Sociedad.

Proyectos de investigación

En los inicios de la Sociedad, los esfuerzos de investigación en educación matemática en España estaban concentrados principalmente en la realización de tesis doctorales. Esto se hizo explícito en el boletín 3 (de 1998), donde se constataba que la SEIEM aún no había promovido en su seno ningún proyecto coordinado de investigación. Desde el boletín 8 (junio del 2000) se incluyó información con resúmenes de los proyectos de investigación financiados por comunidades autónomas y el Ministerio de Educación y Ciencia, lo que da cuenta del progreso en la adjudicación de proyectos de investigación competitivos.

Relaciones con otras sociedades

Los primeros convenios con otras sociedades se formalizaron con instituciones homólogas en Portugal y con la Real Sociedad Matemática Española (RSME). Así, ya se constata la firma de un convenio con el grupo portugués de investigación en Educación Matemática en el boletín 3 (de marzo de 1998). En el III Simposio (Valladolid, 1999) se aprobó un convenio de colaboración con el Grupo de Trabajo para la Investigación (GTI) de la Asociación de Profesores de Matemáticas (APM) de Portugal. En este mismo simposio se avaló también el acuerdo de reciprocidad entre la RSME y la SEIEM. En 2004 se reconstituyó el Comité IMU español, que tomó el nombre de Comité Español de Matemáticas (CEMAT) y que aglutina a todas las Sociedades españolas de Matemáticas, entre las que se encuentra la SEIEM. En 2006 la Sociedad entró a formar parte, como el resto de las sociedades de matemáticos, de la Conferencia de Decanos y Directores de matemáticas. En 2011 se acordó un convenio con la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). Igualmente, hay un acuerdo de colaboración con la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM). Si bien desde 2014 se hace mención al establecimiento de relaciones (convenios o acuerdos de colaboración) con sociedades de Latinoamérica y Europa similares a la SEIEM, aunque se han hecho diversos intentos, no han llegado a hacerse efectivos.

Documentos que pretenden contribuir al debate educativo

La Sociedad ha contribuido al debate público en problemáticas concernientes a la educación matemática con la elaboración de documentos mostrando su posicionamiento. Esto se ha dado especialmente en lo relativo a la formación del profesorado. Así, en 2011 se elaboraron y enviaron a departamentos y áreas de conocimiento de Didáctica de la Matemática de las universidades españolas y a la Comisión de Educación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), documentos sobre la formación inicial del profesorado de Educación Primaria en el área de matemáticas y sobre la formación del profesorado de matemáticas en Educación Secundaria. Igualmente, se ha confeccionado un documento con sugerencias sobre las propuestas actualmente en discusión acerca de la reforma de la formación del profesorado y, a través del CEMat, se ha participado en la elaboración de sugerencias a las propuestas curriculares aprobadas recientemente.

PROSPECTIVA

La SEIEM se propuso una agenda de acción para el quinquenio 2018-2022, con la que pretendía definir líneas de actuación concretas y evaluables. La próxima finalización del periodo que abarcaban estas propuestas, ha propiciado el debate sobre la situación de la Sociedad en relación con sus propósitos y futuras líneas de acción. Este debate se ha realizado en un primer momento en el seno de una comisión de cuatro miembros de la SEIEM, entre los que me encuentro. Fruto del trabajo de esta comisión se ha confeccionado un documento con propuestas de acciones. En estos momentos el documento se encuentra a disposición de los socios para su debate. Esta presentación quiere propiciar y animar este debate. Para ello, me centraré en cinco aspectos que desde mi perspectiva definen las aportaciones del documento. Dado que a partir de ahora plasmo las ideas principales de la propuesta de agenda 2023-2027, usaré la primera persona del plural como reflejo de las reflexiones compartidas en la comisión de elaboración de dicha propuesta.

Formación de jóvenes investigadores

Como puede apreciarse, la formación de investigadores en educación matemática ha sido objeto de atención de la SEIEM desde sus inicios, habiéndose consolidado algunas vías para tal formación. En la actualidad la formación de jóvenes investigadores se hace aún más necesaria. La creación del área de Didáctica de las Matemáticas en los 80 del siglo pasado, ha supuesto que nos encontremos en un momento de actualización de las plantillas de profesorado del área. Este profesorado requiere de formación investigadora en educación matemática. Sin embargo, en muchas ocasiones la formación investigadora previa del profesorado que accede al área de conocimiento se ha desarrollado en otras áreas.

Es por ello por lo que interesa incrementar los esfuerzos hacia la formación de investigadoras e investigadores noveles, tanto doctorandos como doctores. En este sentido, consideramos que es el momento de consolidar el grupo de la SEIEM de jóvenes investigadores, de modo que se constituya como otro de los grupos de investigación en los que se organiza la actividad de la Sociedad. De este modo, sería deseable que dispusiera de un espacio propio de debate dentro de los simposios, compatible con los de los restantes grupos, que se propiciaran reuniones intermedias entre los simposios, al igual que se realizan en los demás grupos, y que se consolidaran las escuelas formativas de verano. Además, desde la propia SEIEM conviene fomentar la inmersión de la nueva generación de investigadores en el panorama de la educación matemática internacional, ampliando sus perspectivas y favoreciendo que establezcan lazos con investigadoras e investigadores de otros países. Las actuales escuelas de verano han iniciado este camino, con la integración de jóvenes de Portugal y de España. Esta iniciativa podrá redundar en la colaboración futura de equipos investigadores de ambos países, cuya cercanía, no solo geográfica, puede permitir mayor riqueza de aproximaciones a la investigación de problemáticas compartidas. La ampliación de este marco internacional pondría en relación la investigación futura de la SEIEM con la de otros países. Pensamos especialmente en las relaciones con otros investigadores europeos, a través del fomento de la participación en actividades para jóvenes investigadores del ERME, y la apertura a investigadores de otros países de las actuales escuelas de verano, así como de otras actividades organizadas por la SEIEM y orientadas a jóvenes investigadoras e investigadores.

Internacionalización

Las SEIEM ha establecido relaciones institucionales con otras sociedades relacionadas con las matemáticas y la educación matemática de ámbito nacional. Asimismo, destaca la colaboración con su sociedad homónima en Portugal, la *Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática* (SPIEM). Si bien la actividad de la comunidad investigadora de la Sociedad se desarrolla en colaboración con comunidades de otros países y muestra relaciones sólidas con sociedades de investigación matemática extranjeras, en general esto no se ha traducido en el ámbito institucional. Por este motivo, consideramos que el establecimiento de colaboraciones con instituciones y sociedades extranjeras puede constituir una vía de crecimiento de la SEIEM. En este sentido, desde la propia SEIEM podrían diseñarse e implementarse programas institucionales de cooperación con dichas sociedades europeas y latinoamericanas, así como la firma de nuevos convenios con sociedades tanto investigadoras como de profesorado. Podría aprovecharse así la posibilidad de realizar actividades conjuntas en formato online, así como la de compartir materiales derivados de la investigación. Además, la cooperación con la SPIEM debe seguir cuidándose, reforzándola con el aumento de difusión de las actividades investigadoras de ambas sociedades y de la participación de investigadoras e investigadores de un país en los simposios anuales de la otra sociedad. Asimismo, conviene consolidar la realización de actividades conjuntas de promoción de la investigación, especialmente en formato online.

Asimismo, la SEIEM puede potenciar la constitución de grupos de investigación que integren a investigadoras e investigadores nacionales y extranjeros. La divulgación de información sobre iniciativas ya establecidas puede ser un primer paso para animar al establecimiento de otras nuevas. Con este fin, se propone crear espacios para informar entre la comunidad de la SEIEM sobre redes de investigación y proyectos competitivos internacionales vigentes (como ERASMUS+), de modo que orienten sobre sus potencialidades, dificultades, solicitud y gestión.

Enriquecimiento de la investigación en educación matemática

La SEIEM ha necesitado definir su identidad, en paralelo a la necesidad de constitución de la educación matemática como campo científico. Esto ha estado muy ligado, en un primer momento, a diferenciar el campo de acción de la educación matemática del de otras ciencias. Hemos necesitado reivindicar que tanto los objetos de investigación como las formas de aproximación a su estudio son específicos de nuestra área. En este sentido, en el terreno de la investigación, se observa un avance significativo. Podemos hablar de cierta madurez que puede permitirnos abrir más nuestra mirada para nutrirnos mejor de aproximaciones de otras áreas. Esta apertura, que se observa en las investigaciones que desarrolla la comunidad investigadora española en educación matemática, podría plasmarse en la actividad de la SEIEM. De este modo, proponemos, por un lado, que se establezcan colaboraciones institucionales con asociaciones de investigación en áreas afines (como pudieran ser, por ejemplo, en otras didácticas específicas u otras áreas relacionadas con la educación). Asimismo, en los simposios anuales y otras actividades de la SEIEM sería interesante contar con expertos en estas áreas afines, que nos permitan enriquecer nuestra mirada sobre los fenómenos de estudio.

Impacto de la investigación en educación matemática

La transferencia de la investigación que realiza la comunidad investigadora de la SEIEM requiere de refuerzo. Esto supone reflexionar sobre lo conseguido en este sentido y estudiar vías alternativas.

Podría ser objeto de estudio y análisis el impacto que ha alcanzado nuestra investigación en la formación docente, la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles y el currículo. Además, sería interesante generar espacios para que se compartan experiencias de transferencia que parecen haber funcionado, uniendo fuerzas para aprovechar los medios de diferentes equipos. El estudio e intercambio de experiencias podría abordarse en sesiones específicas en futuros simposios o en seminarios que promuevan un estado de la cuestión, así como en números especiales de la revista AIEM.

A pesar de la relativa madurez de la investigación en educación matemática, queda mucho camino para que la SEIEM constituya un referente de la educación matemática a nivel político y social. El aumento de la relevancia como voz autorizada en las problemáticas relativas a la educación matemática es un paso necesario para el aumento del impacto real de nuestra labor investigadora. Para ello proponemos redoblar esfuerzos en la creación de documentos que aporten propuestas fundamentadas en temas relativos a la educación matemática y que se hagan llegar a los organismos correspondientes. El contexto de la inminente reforma de la formación del profesorado y la implementación de los nuevos currículos brinda una oportunidad única.

Otra forma de que la investigación en educación matemática llegue a la sociedad es la elaboración y difusión de materiales y recursos derivados de esta. A este respecto, la SEIEM podría apoyar en la difusión de la investigación por parte de la comunidad investigadora de la SEIEM y promover materiales multimedia de divulgación.

La visibilidad de la SEIEM puede impulsarse también con el aumento de su presencia en distintos foros. De este modo, proponemos que se potencie la participación de la Sociedad en foros sociales y científicos relacionados con la educación matemática y la investigación educativa. Este hecho, además de promover la difusión de los resultados de la investigación a la sociedad, permite que la investigación que realizamos pueda nutrirse del conocimiento de problemáticas actuales.

En el impacto de la acción de la SEIEM en la sociedad, la relación con el profesorado ocupa un lugar especial. Es por ello, que uno de los ocho objetivos que se establecen en los estatutos de la Sociedad, el objetivo 7, se refiere a la cooperación entre investigación y docencia. Vemos prioritario que la investigación llegue al profesorado y que las necesidades y problemáticas del profesorado lleguen a la investigación. De este modo, pensamos en modos de propiciar una colaboración fructífera bidireccional entre investigación y docencia. Desde este punto de vista, sugerimos reforzar la colaboración con sociedades de profesorado de matemáticas, tanto nacionales como locales, pudiendo generar encuentros conjuntos en torno a problemáticas relevantes de la práctica docente. Asimismo, recomendamos una acción más activa de la Sociedad en la formación continua del profesorado, ofertando actividades específicas para tal fin y facilitando la participación del profesorado en las actividades que organiza la SEIEM.

Si la formación del profesorado es una de las vías naturales y principales de devolución a la sociedad de nuestra labor investigadora, nuestra formación como formadores de profesorado debe ocupar un lugar privilegiado. Al respecto, aconsejamos que la SEIEM genere espacios para compartir experiencias, perspectivas y recursos en la formación de profesorado. En particular, esto contribuiría a la formación de formadores noveles de profesorado, promoviendo actividades y redes de formación, y permitiría reflexionar sobre vías de formación de estos formadores. En esta línea, se podría continuar la labor de los simposios de formación de profesores de primaria y secundaria en el área de Didáctica de la Matemática que se vinieron realizando hasta principios de la primera década de este siglo.

Nuevas formas de interacción y comunicación

Una vez consolidada la Sociedad y dada la emergencia de nuevas formas de comunicación y su importancia, es buen momento para mejorar los espacios de comunicación de la SEIEM. Se hace necesaria una actualización de la Sociedad en este sentido, pasando de unos medios de comunicación que pueden mostrar cierta austeridad a otros que se muestren más dinámicos.

Es por ello que proponemos la diversificación de los espacios de interacción y comunicación de la Sociedad, revisando la página web, de modo que sirva en mayor medida para conocer entre la comunidad de la SEIEM la investigación que desarrollamos, y modernizando la interfaz de algunos de los espacios a través de los que se visibiliza la SEIEM, como la página web y el boletín.

Si bien la revista AIEM goza actualmente de buena salud, hemos de seguir cuidándola desde la Sociedad, para aumentar su visibilidad, su posicionamiento en índices internacionales y nacionales de referencia y su inclusión en nuevos índices. Para hacerla más visible, es importante la labor de divulgación de información específica sobre la misma.

El aumento de dinamismo en la SEIEM sería aconsejable también en las formas de participación en sus actividades y su funcionamiento. Para ello, en los simposios podemos promover nuevas formas de participación en seminarios, comunicaciones y en foros, de modo que se fomente un debate científico más plural y compartido. Además de experimentar con nuevos formatos, el uso de otras vías de participación como foros o cuestionarios online podría contribuir en este sentido. Estas nuevas formas de debate, aprovechando las ventajas de la virtualidad, podrían ser útiles también en los procesos de elaboración de documentos de posicionamiento de la Sociedad ante cuestiones de educación matemática.

Agradecimientos

Agradezco la implicación y la reflexión realizada por Marianna Bosch Casabó, Matías Camacho Machín y Pere Ivars Santacreu en relación con el presente y futuro de la SEIEM, como compañeros de la comisión encargada de proponer una agenda para la acción de la SEIEM 2023-2027.

Comunicaciones

RECURSOS MANIPULATIVOS Y GRÁFICOS EN LA COMPRENSIÓN DE TAREAS CON PATRONES: UN ANÁLISIS COMPARATIVO CON NIÑOS DE 4 A 6 AÑOS

Manipulative and graphic resources in the comprehension of patterned tasks: a longitudinal study with children aged 4-6 years

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N.

Universitat de Girona

Resumen

Se presenta un estudio para analizar cómo influyen los recursos manipulativos (RM) y los recursos gráficos (RG) en la comprensión de tareas con patrones de repetición con una muestra de 24 niños de Educación Infantil. A partir de una investigación basada en el diseño, se comparan las representaciones de patrones obtenidas durante dos cursos escolares (4 a 6 años). Los resultados arrojan una mayor presencia de errores en el contexto de RG que en el de RM representando un 54.2% frente a un 30% para 4 años; y un 69.6% frente a un 0% para 5 años respectivamente. Se concluye que el éxito de la comprensión a través de la representación está condicionado por el nivel de abstracción del contexto de enseñanza; y que, cuando los niños tienen la oportunidad de manipular, explorar, transformar y modificar un patrón de manera tangible, son más capaces de comprender, generalizar y transferir este conocimiento a otras situaciones de aprendizaje.

Palabras clave: *Patrones matemáticos, contextos de enseñanza, recursos manipulativos, recursos gráficos, educación Matemática infantil.*

Abstract

A study is presented to analyse the influence of manipulative resources (MR) and graphic resources (GR) on the comprehension of tasks with repetition patterns in a sample of 24 children in pre-school education. Based on a design-based investigation, the pattern representations obtained during two school years (4 to 6 years old) are compared. The results show a greater presence of errors in the context of RG than in the context of RM, representing 54.2% versus 30% for 4 years old; and 69.6% versus 0% for 5 years old respectively. It is concluded that the success of understanding through representation is conditioned by the level of abstraction of the teaching context; and that when children have the opportunity to manipulate, explore, transform and modify a pattern in a tangible way they are better able to understand, generalise and transfer this knowledge to other learning situations.

Keywords: *Mathematical patterns, teaching contexts, manipulative resources, graphic resources, early childhood mathematics education.*

INTRODUCCIÓN

El pensamiento algebraico se conforma de procesos mentales que contribuyen a crear significado referencial para algún tipo de representación, construyendo y expresando a su vez, generalizaciones

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N. (2022). Recursos manipulativos y gráficos en la comprensión de tareas con patrones: un análisis comparativo con niños de 4 a 6 años. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 119-127). SEIEM.

(Cetina-Vázquez y Cabañas-Sánchez, 2022). Desde este prisma, la exploración de patrones puede considerarse un trampolín para promover la generalización (Wijns et al., 2021) y un componente que influye positivamente en el desarrollo matemático temprano (Callejo et al., 2016; Lüken, 2018; Mulligan et al., 2020; Papic et al. 2011; Rittle-Johnson et al., 2017; Wijns et al., 2021), puesto que promueve el estudio de las regularidades, y la conexión y representación de relaciones mediante símbolos (Radford, 2008). Precisamente, Lüken y Sauzet (2020) afirman que aprender matemáticas es desarrollar la capacidad de reconocer patrones, interpretar estructuras y establecer relaciones. Por tanto, es necesario que los niños tengan experiencias previas con tareas de patrones para desarrollar su pensamiento algebraico antes de iniciar una instrucción en el uso de la notación y simbología algebraica (Carraher y Schliemann, 2018).

En este contexto, se aboga por una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades que se construya a partir del conocimiento concreto, familiar y cercano del niño, para luego avanzar hacia un conocimiento más abstracto y simbólico. A pesar de esta idea consolidada, poco se sabe sobre cómo influye el contexto de enseñanza en la comprensión de tareas con patrones. No podemos obviar que en ocasiones el libro de texto y las fichas se postulan como una herramienta de apoyo para los docentes, dejando poco espacio para abordar conceptos y procedimientos matemáticos desde otros escenarios más manipulativos, concretos y significativos para los niños (Alsina, 2020).

Por ende, nuestro propósito es aportar evidencias que permitan contrastar la comprensión de tareas con patrones desde contextos concretos y abstractos, para de esta manera iniciar una aproximación al modo en que los niños de 4 a 6 años ejecutan patrones de repetición y exteriorizan su representación. Para realizar este análisis comparativo se considera el Enfoque de Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (Alsina, 2020), en adelante EIEM, y se muestran los resultados obtenidos de manera longitudinal a partir del uso de recursos manipulativos y recursos gráficos.

Desde esta perspectiva nos formulamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo influyen los recursos manipulativos (RM) y los recursos gráficos (RG) en la comprensión de tareas con patrones de repetición?

De esta pregunta se derivan los siguientes objetivos de estudio:

1. Analizar la influencia que ejerce el contexto de aprendizaje en la comprensión de tareas con patrones de repetición.
2. Determinar la relación que se establece entre la comprensión y la representación de patrones de repetición.

MARCO TEÓRICO

En las siguientes líneas se abordan los pilares teóricos que sustentan el enfoque de EIEM y se define el patrón de acuerdo con la literatura contemporánea.

Por un lado, el EIEM (Alsina, 2020) establece tres niveles de enseñanza a partir de secuencias de aprendizaje intencionadas que avanzan de lo concreto a lo abstracto, ofreciendo una orientación de uso jerarquizado de los contextos y recursos que lo conforman en tres niveles: informal (vida cotidiana, recursos manipulativos y juegos); intermedio (recursos literarios y tecnológicos); y formal (recursos gráficos). Dicho enfoque está concebido como una herramienta para ayudar a los docentes a desarrollar la competencia matemática de los niños en los primeros niveles escolares, partiendo de la base de que para potenciar esta competencia es necesario diversificar los contextos de enseñanza-aprendizaje. Se fundamenta en tres pilares interrelacionados: a) la Perspectiva Sociocultural del Aprendizaje Humano (Vygotsky, 1978), que concibe la educación como un fenómeno social y cultural que se basa en el lenguaje y la interacción como herramientas fundamentales para promover el aprendizaje; b) el Modelo Realista de Formación del Profesorado (Korthagen, 2001), que considera que los profesores deben conocer muchas formas de actuar y ejercitarlas en la práctica, es decir, deben tener criterio para saber cuándo, qué y por qué algo es adecuado y reflexionar sobre ello de forma sistemática; y c) la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1991), que fomenta el uso de situaciones cotidianas o problemas contextualizados como punto de partida para el aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, los patrones son secuencias de elementos ordenados que se rigen por una organización replicable determinada, es decir, con una regularidad replicable (Papic et al., 2011). Su enseñanza mejora los hábitos mentales y desarrolla una habilidad cognitiva esencial en las matemáticas tempranas que permite reconocer y describir atributos de objetos, así como similitudes y diferencias entre ellos. Dicha enseñanza comprende una amplia gama de tareas para evaluar y fomentar las habilidades para hacer patrones (Lüken y Sauzet, 2020), es decir, un conjunto de competencias que se configuran como predictoras del rendimiento matemático en etapas posteriores: copiar, interpolar, extender, abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear (Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2017; Wijns et al., 2021). En esta línea, Du Plassis (2018, p. 3) constata que el conocimiento de patrones "permite ingresar al mundo algebraico del pensamiento generalizado".

McGarvey (2013) considera que cuando se presentan los patrones a los niños de manera temprana, es más probable que desarrollen habilidades necesarias para comprender relaciones dentro de un patrón y comenzar a usar símbolos para representar esas relaciones. En este contexto, Rahmawati et al. (2017) conciben la representación en matemáticas como el medio para pensar y comunicar las ideas matemáticas, Por consiguiente, se asume que, desde una edad temprana, los niños deben representar para aprender y comprender patrones (Acosta et. al., en revisión).

MÉTODO

El presente estudio se enmarca en una investigación basada en el diseño (Design-based research [DBR]) donde se ha diseñado, validado y aplicado de manera longitudinal un itinerario de enseñanza de patrones para alumnos del segundo ciclo de Educación Infantil (3-6 años) que contempla los tres niveles del EIEM. Desde este marco metodológico pretendemos captar la complejidad de los contextos de enseñanza-aprendizaje para poder ofrecer orientaciones teóricas y prácticas que optimicen la gestión docente (Molina et al., 2011). Autores como Bakker (2019) y Molina (2021) destacan que esta metodología aboga por aumentar la transferencia y aplicabilidad del conocimiento, generando a su vez nuevas condiciones de aprendizaje, herramientas, estrategias o entornos que promuevan una mejora de la práctica educativa.

Diseño y procedimiento

Considerando los objetivos del estudio se han seleccionado las propuestas de los itinerarios de enseñanza de patrones de 2º y 3º de infantil (4-6 años) que corresponden a los recursos manipulativos y los recursos gráficos, respectivamente. El principal criterio de selección ha sido que se trata de propuestas ubicadas en polos opuestos del itinerario (niveles informal y formal respectivamente) y, por lo tanto, implican habilidades cognitivas diferentes (manipulación *vs.* formalización). Todas las propuestas fueron sometidas previamente a un juicio de expertos, cada curso escolar, por ocho miembros del Grupo de Trabajo "Investigación en Educación Matemática Infantil" de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. En la tabla 1 se muestran las actividades diseñadas y validadas.

Tabla 1. Propuestas de tareas con patrones en los recursos manipulativos y gráficos.

	2º de Educación Infantil (4-5 años)
Recursos manipulativos	A1. Se propone a los alumnos crear seriaciones, con las piezas del *Pattern Blocks* (Geomosaico), siguiendo el patrón (AB), (AAB) o (ABB) que indican las tarjetas
	A2. Se pone a disposición de los alumnos cartulinas plastificadas con diferentes unidades de repetición (AB), (AAB) o (ABB). Se les invita a extender el patrón para completar las seriaciones con la ayuda de pinzas de ropa de colores.
Recursos gráficos	A través de una tarea escrita previamente diseñada con diferentes tipos de toldos, se invita a los niños a completar la seriación.
	3º de Educación Infantil (5-6 años)
Recursos manipulativos	A1. A partir de piezas translúcidas de diferentes formas y colores se invita a escoger una unidad de repetición determinada: (AB), (ABB), (AAB) o (ABC) para crear un collar en la mesa de luz siguiendo el criterio establecido.
	A2. Se pone al alcance de los alumnos piezas del Pattern Blocks (Geomosaico y material reciclado (tapas de botellas, corchos, conchas, botones, etc.) y se les propone construir de manera cooperativa un mandala gigante. De manera conjunta se decide que patrón se sigue en cada circulo concéntrico que conforma el mandala.
Recursos gráficos	A través de fichas previamente diseñadas se invita a los alumnos a observar, analizar y leer las seriaciones propuestas para poder completar la seriación.

La implementación se ha llevado a cabo de manera longitudinal, con 24 niños españoles pertenecientes todos a una misma clase de un centro público. La muestra está conformada por 12 niños y 12 niñas, y la edad promedio de los participantes es de 4,8 años (2º de Educación Infantil) y 5,8 años (3º de Educación Infantil). La muestra ha sido seleccionada de manera intencionada, por las facilidades de acceso y el seguimiento longitudinal de la maestra tutora. Cabe destacar que previamente a la intervención, se obtuvo el consentimiento informado de todas las familias. Las sesiones se han distribuido en tres fases: a) introducción de la propuesta, b) interacción y desarrollo, y c) representación y reflexión. Durante la tercera fase, el docente promueve el razonamiento de los niños formulando preguntas que generen argumentación y evitando aquellas que se contestan con un "sí" o un "no". Todas las propuestas se han desarrollado en subgrupos de 12 alumnos conformados de manera aleatoria.

Análisis de los datos

La recogida de datos se ha llevado a cabo en tres niveles, como se muestra en la figura 1.

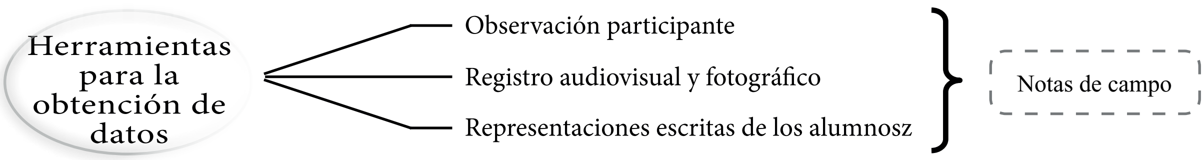


Figura 1. Técnicas y herramientas de recogida de información.

A través de un análisis descriptivo e interpretativo, se comparan los datos obtenidos a partir de las representaciones de los patrones realizadas por los participantes en cada contexto estudiado (recursos manipulativos y recursos gráficos) y en cada edad, de forma longitudinal.

Dichas representaciones, recogidas en formato de dibujo, se han categorizado siguiendo el diagrama que se muestra en la figura 2, con la intención de eliminar el sesgo que genera una presencia jerarquizada de propuestas de acuerdo con los planteamientos del EIEM (Alsina, 2020). Además, destacar que a) el grado de dificultad de las tareas es similar, ya que movilizan habilidades que no requieren el reconocimiento previo de la unidad de repetición para su resolución; y b) la actividad de recursos gráficos está vinculada con propuestas previamente abordadas en el contexto de situación de vida cotidiana. Se considera, pues, la categoría "correcto" cuando la representación no presenta errores e "incorrecto" cuando la producción presenta error en su estructura. Las transcripciones de los vídeos y las notas de campo han ayudado a contrastar los resultados obtenidos.

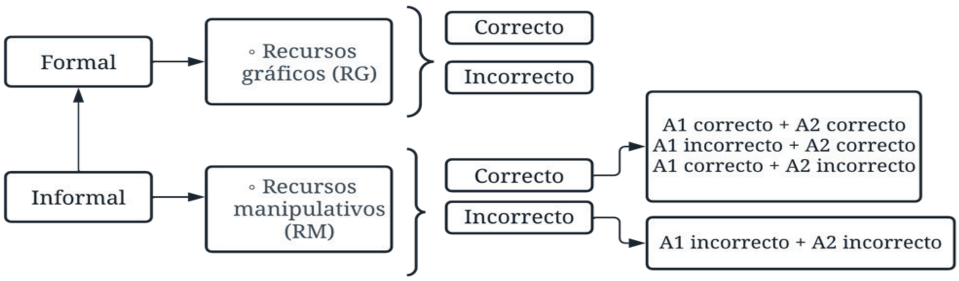


Figura 2. Diagrama de flujo con el proceso de categorización de las representaciones recogidas en formato dibujo.

RESULTADOS

Considerando la finalidad de nuestro estudio, se analizan los resultados obtenidos de manera longitudinal a partir del uso de recursos manipulativos (RM) y recursos gráficos (RG), con la intención de comprobar cómo influye el contexto de enseñanza en la comprensión de tareas con patrones de repetición. A pesar de que el P-valor calculado mediante el estadístico no paramétrico de McNemar para dos muestras apareadas con un nivel de confianza del 95%, no es significativo, sí que se observa una relevancia en cuanto a los porcentajes que se exponen a continuación.

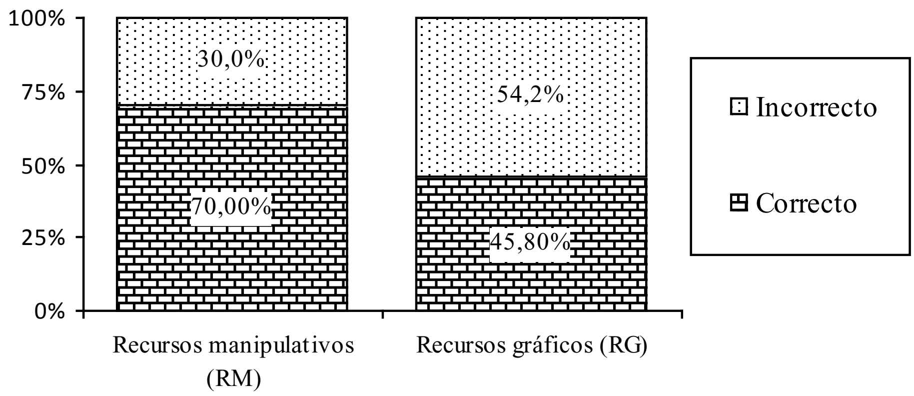


Figura 3. Resultados obtenidos para 4-5 años en cada contexto de aprendizaje.

De acuerdo con la información que se muestra en la figura 3, podemos apreciar que los errores fueron menores en el contexto de RM, representando un 30% frente a un 54.2% en los RG. En relación con las representaciones correctas se aprecia una diferencia de aciertos del 24.2% entre los dos contextos analizados, apreciándose una clara presencia de producciones correctas en el contexto de RM.

Seguidamente, se exponen los resultados correspondientes para 5-6 años.

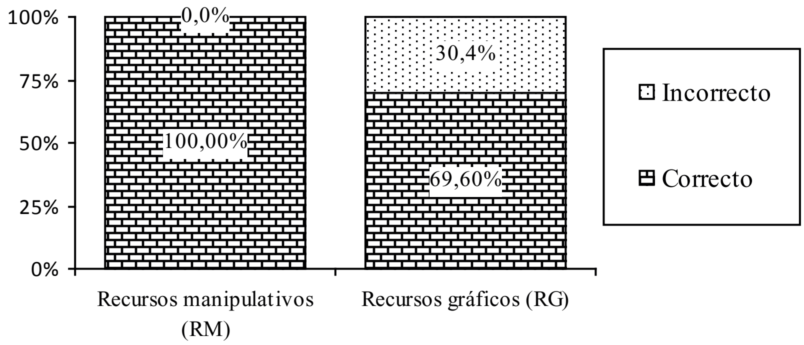


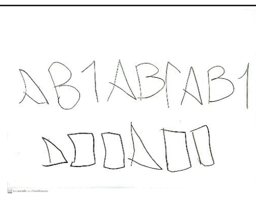
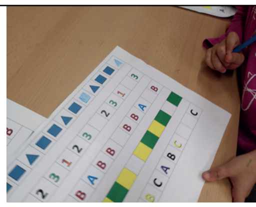
Figura 4. Resultados obtenidos para 5-6 años en cada contexto de aprendizaje

Tal y como se observa en la figura 4, el 100% de casos válidos representaron sin errores los patrones identificados en el contexto de RM, mientras que en el contexto de RG solo lo hizo el 69.6%. Apreciamos de manera general que, en comparación con la intervención del año anterior, los errores remitieron totalmente en el contexto de RM y que el grado de producciones correctas aumentó ligeramente en un 23.8% en el contexto de RG.

La tabla 2 muestra algunos ejemplos que nos han permitido analizar la relación que se establece entre la comprensión y la representación de patrones de repetición. Por razones de espacio se selecciona un ejemplo para cada recurso y edad.

Tabla 2. Ejemplos de representaciones correctas obtenidas en cada contexto según edad.

Contexto	**4-5 años**		**5-6 años**	
				
Recursos manipulativos	Dos alumnos trabajan en paralelo y uno de ellos expone que su patrón es igual al de su compañero con forma **Docente:** ¿Y por qué dices que son iguales? **Alumno:** Porque los dos tienen dos figuras iguales y una diferente.	**Alumno:** Yo ya completé la tira y mira una corona. **Docente:** Y ¿cómo es tu corona? **Alumno:** Le faltaban pinzas y las puse bien… una naranja y dos sin color, una naranja y dos sin color. **Docente:** Y ¿cómo sabías cuál era el color que tocaba? **Alumno:** Porque después de una naranja, venían dos sin color (…).	**Alumno:** Yo haré uno muy difícil. **Docente:** ¡Oh! ¿Y cómo es uno muy difícil? **Alumno:** Con tres diferentes. Tengo que estar muy concentrado para no equivocarme. **Docente:** Muy bien, adelante con este reto.	**Docente:** Qué patrones habéis acordado? **Alumno 1:** Aquí con palos (blanco-verde-lila; blanco-verde-lila; blanco-verde-lila) **Alumno 2:** Aquí con tapas (dos blancas-una amarilla; dos blancas-una amarilla; dos blancas-una amarilla).

				
Recursos gráficos	**Alumno:** Me gusta más este: dos verdes, uno amarillo, dos verdes, uno amarillo **Docente**: ¿Y por qué? **Alumno:** Hay que estar más concentrado para no equivocarse y porque mi color preferido es el verde.	**Docente:** ¿Nos explicas tu representación? **Alumno:** Es el toldo que pinté. A mí me gusta el rosa y el lila. **Docente:** Entonces el toldo también tenía dos colores iguales y uno diferente. **Alumno:** Tenia amarillo y marrón.	**Docente:** El patrón de la ficha era ABCABCABC, el tuyo es AB1AB1AB1, ¿son iguales o diferentes? **Alumno:** Son diferentes. **Docente:** ¿Por qué? **Alumno:** Porque tiene números. **Docente:** Pero si nos fijamos los dos tienen tres elementos diferentes (ABC) y (AB1). Entonces los podríamos considerar iguales porque tienen la misma estructura de repetición.	**Alumno:** Faltaba un cuadrado y un triángulo en la primera fila. **Docente:** ¿Cómo lo has sabido? **Alumno:** Porque es cuadrado-cuadrado, triángulo, cuadrado-cuadrado, triángulo, cuadrado- (aquí faltaba el cuadrado), triángulo.

A partir de los ejemplos que se muestran en la tabla 2 se puede comprobar como la respuesta de los niños presentaba mayor nivel de sofisticación y justificación en el contexto de RM que en el de RG. De la misma manera destacar el rol del docente como guía e incitador de aprendizaje a través de preguntas deliberadas (*National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2014) que inviten a generar conocimiento compartido con el grupo de iguales.

CONSIDERACIONES FINALES

Nuestro estudio presenta datos relevantes que muestran que el grado de éxito de la comprensión de patrones a través de su representación está condicionada por el nivel de abstracción del contexto donde se lleva a cabo la propuesta. Desde este prisma, Mulligan et al. (2004) afirman que las imágenes externas de un niño reflejan las características estructurales de sus representaciones internas, permitiendo evidenciar la comprensión conceptual del niño. Por tanto, representar también se refiere al acto de externalizar una abstracción mental interna (Goldin, 2020).

Como se ha podido mostrar en el análisis de los resultados obtenidos, la presencia del error es menor en el contexto de RM, mostrando una gran diferencia en comparación con el contexto de RG. Con base en estos datos, se ha puesto de manifiesto que cuando los niños tienen la oportunidad de manipular, explorar, transformar y modificar un patrón de manera tangible son más capaces de comprender, generalizar y transferir este conocimiento a otras situaciones de aprendizaje, evidenciándose que los fenómenos educativos son sensibles al contexto.

Estos hallazgos pueden ser un apoyo para guiar la acción docente del profesorado a través de la reflexión (Radford y Sabena, 2015). En este sentido, es necesario planificar y estructurar tareas de patrones que contemplen diferentes contextos y recursos de enseñanza desde lo concreto hacia lo abstracto (Alsina, 2020), para así ofrecer una intervención educativa que permita ir avanzando hacia la generalización y formalización del conocimiento, evitando un tratamiento de los patrones exclusivamente de papel y lápiz.

La principal limitación del estudio ha sido que, al realizar el análisis comparativo con un solo grupo de alumnos de una clase a lo largo de dos cursos escolares, los datos obtenidos son poco generalizables. Así, pues, en futuras líneas de investigación será necesario ampliar la muestra y, a su vez, seguir analizando de manera longitudinal y transversal cómo influyen los demás contextos y recursos propuestos por el EIEM (contextos reales, juegos, recursos literarios y tecnológicos) en la enseñanza de patrones de repetición, explorando a su vez las habilidades de modelado desde una visión dialógica y multimodal que contemple diversos escenarios educativos.

Agradecimientos

Este trabajo fue respaldado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes de España bajo la Subvención para Formación de Profesorado Universitario (FPU16-01856) y por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N° 72200447.

Referencias

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2021). Aprendiendo patrones en Educación Infantil: ¿Cómo influye el contexto de enseñanza? En P.D. Diago, D.F. Yáñez, M.T. González-Astudillo y D. Carrillo. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 101-108). Valencia: SEIEM.

Acosta, Y., Alsina, Á. y Ayala-Altamirano (en revisión). Beginning the representation of patterns in different contexts with 4-year-old children.

Alsina, Á. (2020). El enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué?, y ¿cómo aplicarlo en el aula? *Tangram, 3*(2), 127-159.

Bakker, A. (2019). *Design research in education*. Routledge

Callejo, M. J., García-Reche, A. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 5-25

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. ICME-13 Monographs (pp. 107-138). Chaim, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_5

Cetina-Vázquez, M. y Cabañas-Sánchez, G. (2022). Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(1), 65-86. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3096

Du Plessis, J. (2018). Early algebra: Repeating pattern and structural thinking at foundation phase. *South African Journal of Childhood Education, 8*(2), a578. https://doi.org/10.4102/sajce.v8i2.578

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Kluwer Academic Publishers.

Goldin, G. A. (2020). Mathematical representations. En S. Lerman (Eds), *Encyclopedia of mathematics education*. Springer

Korthagen, F. A. (2001). *Linking practice and theory. The pedagogy of realistic teacher education.* Lawrence Erlbaum Associates.

Lüken, M. (2018). Is patterning a mathematical activity? —An analysis of young children's strategies in working with repeating patterns. In *A mathematics education perspective on early mathematics learning—POEM*. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5_5

Lüken, M. M. y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competències. *Mathematical Thinking and Learning*. http://10.1080/10986065.2020.1719452

McGarvey, L. M. (2013). Is it a pattern? Teaching Children Mathematics, 19(9), 564-571. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.19.9.0564

Molina, M., Castro, E., Castro E. y Molina, J. L. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En P. D., Diago, D. F., Yáñez, M. T., González-Astudillo y D., Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83-97). SEIEM.

Mulligan, J. T., Prescott, A. y Mitchelmore, M. C. (2004). Children's development of structure in early mathematics. En M. Heines y A. Fuglestad (Eds.) *Proceedings of the 28th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 393-401). Bergen University College.

Mulligan, J. T., Oslington, G. y English, L. D. (2020). Supporting early mathematical development through a 'pattern and structure' intervention program. *ZDM—International Journal of Mathematics Education*, *52*, 663-676. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01147-9

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Papic, M. M., Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of pre-schoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*, 237-268.

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: A systematic review from the mkt perspective. *Mathematics, 9*(20), 2590. https://doi.org/10.3390/math9202590

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40*(1), 83-96. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L. y Sabena, C. (2015). The question of method in a Vygotskyan semiotic approach. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 157-182). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_7

Rahmawati, D., Purwanto, S., Hidayanto, E. y Bustanul, R. (2017). Process of mathematical representation translation from verbal into graphic. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 12*(3), 367-381.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Hofer, K. G. y Farran, D. C. (2017). Early math trajectories: Low-income children's mathematics knowledge from age 4 to 11. *Child Development*, *88*(5), 1727-1742. https://doi.org/10.1111/cdev.12662

Swan, M. (2020). Design research in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 192-195). Springer.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Harward University Press.

Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B. y Torbeyns, J. (2021). Associations between repeating patterning, growing patterning, and numerical ability: A longitudinal panel study in four- to six-year olds. *Child Development, 92,* 1354-1368. https://doi.org/10.1111/cdev.13490

ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DE LOS NÚMEROS DECIMALES

Exploratory study on the knowledge of the decimal numbers

Aguayo-Arriagada, C. G., Cango, M. L.ª, García, M. M.y López-Martín, M. M.

Universidad de Almería

Resumen

Nuestro estudio se orienta a la evaluación del conocimiento sobre los números decimales de un grupo de 198 futuros maestros de Educación Primaria. Para tal fin, se ha empleado un diseño mixto permitiéndonos identificar las limitaciones de los participantes y detectando los errores que presentan al abordar tareas centradas en la lectura y representación simbólica del número decimal. Los resultados revelan que gran parte de los futuros maestros tienen una comprensión débil sobre el conjunto de los números decimales, destacando un deficiente conocimiento del valor posicional.

Palabras clave: *Formación de maestros, sistema de numeración decimal, valor posicional, lectura y escritura de los* números *decimales.*

Abstract

Our study is aimed at assessing the knowledge of the decimal numbers of a group of 198 preservice Primary Education teachers. For this purpose, a mixed design has been carried out, allowing us to identify the limitations of the participants and to detect the errors they present when tackling tasks focused on the reading and symbolic representation of the decimal number. The results reveal that most of the preservice teachers have a weak understanding of the set of decimal numbers, highlighting a deficient knowledge of place value.

Keywords: *Teacher training, decimal number system, place value, reading and writing decimal numbers.*

INTRODUCCIÓN

Las directrices curriculares de Educación Primaria recogen los números decimales a partir del segundo ciclo de Educación Primaria dentro del bloque de "Números" (Real Decreto 126, 2014). A partir de entonces, se hace hincapié en la numeración y el cálculo con objeto de desarrollar un adecuado conocimiento de las matemáticas. Su gran aplicabilidad en situaciones de la vida cotidiana conlleva la necesidad de desarrollar un proceso de enseñanza-aprendizaje sólido para que los futuros ciudadanos adquieran correctamente dichos conocimientos. Es decir, se debe lograr desarrollar en los estudiantes una efectiva alfabetización numérica, entendida como la capacidad de afrontar con éxito situaciones en las que intervienen los números y sus relaciones (Real Decreto 126, 2014). Ante esta situación, no

Aguayo-Arriagada, C. G., Cango, M. L., García, M. M. y López-Martín, M. M. (2022). Estudio exploratorio sobre el conocimiento de los números decimales. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 129-137). SEIEM.

basta con dominar los algoritmos de cálculo escrito, sino que es necesario tener confianza con los números y las cantidades, utilizarlos siempre que sea necesario e identificar las relaciones básicas entre ellos.

En todo proceso de enseñanza y aprendizaje es importante asegurar que el docente posea tanto los conocimientos del contenido como los conocimientos didácticos de los temas que debe enseñar, pues la actuación de este en el aula influye en lo que aprenden los alumnos (Fennema y Franke, 1992; Yang, 2007).

El presente estudio tiene como objetivo profundizar en el conocimiento que poseen los futuros profesores de Educación Primaria con relación a los números decimales. Concretamente, nos preguntamos si los futuros maestros relacionan la representación verbal de un número decimal con su representación simbólica y viceversa. Por consiguiente, se pretende evaluar el conocimiento sobre la lectura y la escritura simbólica del número decimal y detectar cuáles son aquellos errores y dificultades que presentan.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR

En el ámbito de la Didáctica de la Matemática se ha prestado especial atención en caracterizar el conocimiento del profesor, describiendo diferentes modelos teóricos. Ejemplo de ello son: el modelo por Ball y colaboradores, mathematical knowledge for teaching (MKT) (Ball et al., 2008) y el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM) de Godino y colaboradores (Godino et al., 2007), entre otros. Como formadores de formadores nos preguntamos qué debe saber un futuro maestro de primaria sobre el tema de los números decimales. Para dar respuesta, nos apoyamos en el modelo de Carrillo et al. (2013) sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, de sus siglas en inglés) que está dividido en dos grandes dominios: conocimiento del contenido matemático (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK). En este trabajo nos centraremos en el MK, entendido como el conocimiento que engloba los contenidos matemáticos previos que debe tener el futuro maestro. Dicho dominio se estructura en tres subdominios del conocimiento: 1) el conocimiento de los temas (KoT), 2) el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) y 3) el conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM). Nos focalizaremos en el KoT, entendido como el conocimiento de las matemáticas escolares y su relación con las matemáticas como disciplina. Con la mirada puesta en el tema de los números decimales, en este subdominio podemos identificar entre otros: el conocimiento del valor posicional, la ordenación, la lectura y escritura, es decir, la estructura conceptual de los decimales; también el conocimiento de las relaciones entre sus diferentes formas de representación $0{,}5 = \frac{1}{2} = 50\%$. Se trata, por lo tanto, de conocer el contenido con una mayor profundidad que el que corresponde a un nivel educativo concreto (Montes et al., 2018).

ANTECEDENTES

Desde hace varias décadas, el conocimiento previo de los números naturales se ha considerado uno de los principales obstáculos en el aprendizaje de los números decimales (Brousseau, 1983) ya que se consideran como “números naturales con un punto decimal” (Bachelard, 1999, p. 92). De forma general, los trabajos desarrollados en torno a este tema destacan que dichas dificultades se deben en gran medida a que perduran los conocimientos de los números naturales aplicando las reglas, relaciones y propiedades de dicho conjunto al conjunto de los números decimales. Por ejemplo, en este conjunto no siempre se verifica que un número formado por más cifras siempre es mayor que otro, al multiplicar dos números siempre se tiene como resultado un número mayor o el resultado de una división siempre será menor que el dividendo.

Asimismo, la literatura muestra que los principales errores y dificultades relacionados con los números decimales están asociados con el concepto de número decimal, la escritura y las distintas representaciones de este, así como con las propiedades del conjunto de los números racionales y las operaciones con dichos números (Konic et al., 2010). Investigaciones llevadas a cabo por diversos autores sostienen que las dificultades en el aprendizaje del número decimal se muestran tanto en estudiantes de Educación Primaria como en profesores en formación o en activo. Centrándonos en investigaciones con futuros maestros de Educación Primaria, Konic (2011) evidenció una insuficiente comprensión sobre la estructura del sistema de numeración, particularmente en la representación de los números racionales, el papel del cero dentro de una expresión decimal, el concepto de valor posicional y sus relaciones. Resultados similares fueron obtenidos por Gairín (2003) manifestando que el profesorado en formación reconoce la notación decimal únicamente con su significado numérico, no asociándolo a otros usos de modelos (por ejemplo, las fracciones); las relaciones de los decimales con las fracciones se hacen exclusivamente mediante procesos algorítmicos y unos pocos establecen la relación de orden aplicando el principio de valor posicional.

En esta misma línea, González y Eudave (2018) evidencian la dificultad de la resolución de problemas con números decimales y fraccionarios, entendiendo que para su resolución se necesita el manejo de conceptos básicos de ambos tipos de números. En la realización de las operaciones, los autores señalan la existencia de errores vinculados al establecimiento del orden correcto de las cifras y la determinación de la posición de la coma. Estos resultados también se evidencian en el estudio de De Castro et al. (2008) presentando mayor dificultad en la colocación de la coma en multiplicaciones y divisiones con números decimales. Estas situaciones también ponen de manifiesto la falta de comprensión de la estructura del decimal.

De forma general, gran parte de las investigaciones han puesto el foco de atención en las operaciones y situaciones problemáticas con dicho conjunto numérico. Sin embargo, son pocos los trabajos que han abordado los procedimientos elementales de los números decimales como es la lectura y escritura de estos. Por esta razón, el interés de nuestro estudio radica en abordar esta debilidad identificando los errores y dificultades que presentan los futuros maestros ante este tipo de tareas.

MÉTODO

Dado que el objetivo principal del presente trabajo es explorar el conocimiento que poseen los futuros maestros de Educación Primaria en relación a la escritura y la lectura del número decimal, se hace uso de la metodología mixta. El uso del diseño mixto nos permitió averiguar cuáles son los problemas más frecuentes relacionados con el objeto de estudio, así como conocer la tipología de los mismos. Los resultados con este tipo de diseño nos permitieron obtener un conocimiento complementario sobre la realidad abordada (Ortí, 1995). Desde el paradigma cuantitativo, identificamos y analizamos las respuestas correctas e incorrectas y la metodología cualitativa nos dio la oportunidad de investigar los tipos de dificultades y errores a partir de las respuestas dadas. Por lo tanto, el diseño mixto contribuyó a profundizar el conocimiento y la comprensión del tema estudiado.

Muestra

La realización del presente trabajo se enmarca en la asignatura "Enseñanza y aprendizaje de la aritmética, la estadística y el azar" que se imparte en el tercer curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Almería. Al finalizar esta asignatura, los estudiantes conocen y establecen relaciones entre los principales conceptos, propiedades y procedimientos que conforman los temas de los bloques de contenidos de números y estadística y probabilidad. Además, reciben una formación específica sobre los fundamentos de la Didáctica de las Matemáticas, concretada en aspectos cognitivos (aprendizaje matemático, errores y dificultades) e instructivos (diseño y secuenciación de tareas, materiales y recursos). El estudio se llevó a cabo durante el curso académico 2020/2021, una semana antes de que los estudiantes comenzarán un periodo de prácticas en centros de Educación Primaria con una duración de dos meses y medio. El total de estudiantes matriculados en los tres grupos (A, B y C) era 226 alumnos, sin embargo, en el momento de la realización de la prueba se contó con una muestra de 198 futuros maestros. El resto que, por causas justificadas, no seguían un proceso de evaluación continua, fueron evaluados en otro instante del curso académico, por lo que no han sido contempladas sus respuestas en el presente estudio. La distribución de participantes según grupo fue de 72 en cada uno de los grupos de turno de mañana y 54 en el grupo de turno de tarde. La edad media de los participantes era de 21,15 años con una desviación estándar de 3,51 años. En el momento en el que se llevó a cabo la implementación del instrumento, los participantes no habían recibido formación sobre el conjunto de los números racionales y, más concretamente, sobre los números decimales. Se procedió de esta forma puesto que el objetivo era conocer sus conocimientos previos sobre este tema en cuestión. Los profesores responsables de la materia informaron previamente a los estudiantes sobre la realización de la prueba, recomendándoles repasar los contenidos matemáticos recogidos en el currículo de Educación Primaria.

Instrumento

El instrumento fue diseñado con la finalidad de evaluar los conocimientos matemáticos de los profesores en formación sobre los contenidos de aritmética, estadística y probabilidad recogidos en las normativas curriculares. Para ello, se utilizaron 10 tareas extraídas de libros de texto de matemáticas, similares a las que los maestros pueden encontrar para la enseñanza de las matemáticas. Dos de las tareas estaban relacionadas con los números decimales. Cada tarea se calificó en función del contenido matemático y no de su valor didáctico, por lo que las respuestas se calificaron como correctas o incorrectas.

En cada grupo se efectuaron tareas distintas pero similares entre sí (véase tabla 1). La primera tarea se orientó en evaluar la representación simbólica del número a partir de su representación verbal (en adelante CT) y la segunda, se centró en evaluar la representación verbal del número a partir de su representación numérica (en adelante NL). Cada tarea fue calificada con una puntuación de 0,5 puntos por cada apartado correcto, pudiéndose obtener como máximo 2 puntos.

Tabla 1. Tareas propuestas por grupo.

Grupo A	**Grupo B**	**Grupo C**
CT1. Escribe con cifra: a) Tres enteros y cinco décimas b) Cincuenta milésimas NL1. Escribe con letra: a) 6,004 b) 0,90	CT2. Escribe con cifra: a) Tres enteros y cinco centésimas b) Cuatro unidades y cuarenta milésimas NL2. Escribe con letra: a) 6,40 b) 0,003	CT3. Escribe con cifra: a) Cinco centésimas b) Cuatro decenas y cien milésimas NL3. Escribe con letra: a) 6,04 b) 0,03

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para el análisis cuantitativo de los datos se emplearon softwares específicos para tal fin (SPSS 27.0 y Excel). La figura 1 muestra las puntuaciones obtenidas en cada una de las actividades. Observamos que hay un mayor porcentaje (56%) de participantes con la máxima calificación en la tarea de escribir textualmente la representación simbólica de cada número decimal. Destacamos el hecho que las tareas en las que se solicita la escritura simbólica del número presentan mayor limitación, pues aproximadamente un cuarto de los participantes ha sido calificado con la puntuación mínima y un 44% de ellos ha resuelto correctamente un solo apartado.

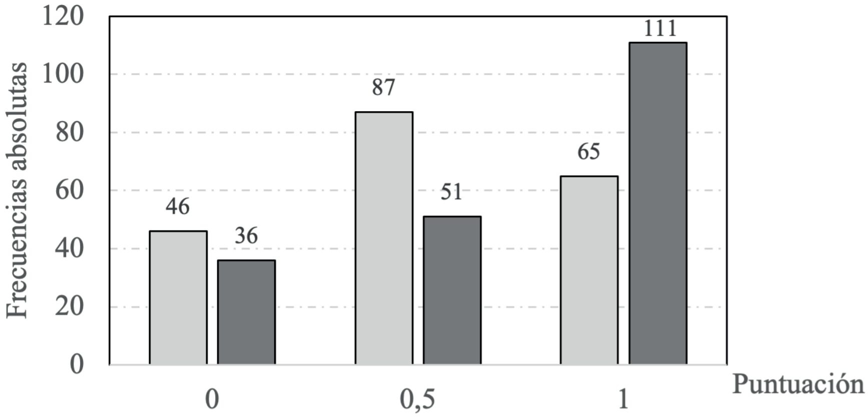


Figura 1. Distribución de las puntuaciones (Tarea CT, gris claro y Tarea NL, gris oscuro).

Un análisis cruzado de las puntuaciones de cada tarea ha permitido identificar que 27 participantes (13,6%) han tenido la mínima puntuación, siendo 5 los que no han respondido al menos a uno de los apartados solicitados. Únicamente 56 participantes (28%) han realizado correctamente ambas tareas dando la respuesta esperada. El análisis estadístico de las puntuaciones evidencia mejores resultados en NL, ya que las medidas de centralización en NL (media 0,69; D.T. 0,38; moda 1; mediana 1) son superiores a CT (media 0,55; D.T. 0,37; moda 0,5; mediana 0,5). Estos resultados son altamente preocupantes ya que la puntuación máxima a obtener en cada uno de los tipos de tareas era de 1 punto. Dado que el valor medio asociado a la representación numérica de la cifra decimal es inferior, nos hace pensar que los futuros maestros tienen mayor dificultad cuando abordan tareas con estas características.

Con objeto de analizar si existen o no diferencias significativas en las puntuaciones medias de ambos tipos de tareas, recurrimos a la prueba U de Mann-Whitney cuya hipótesis nula es $\mu_{CT}=\mu_{NL}$, pues los datos bajo estudio no verifican el supuesto de normalidad. El *p*valor asociado a dicha prueba es de 0,000 por lo que se rechaza la hipótesis nula concluyendo, a un nivel de significación del 5%, que existen diferencias entre las puntuaciones obtenidas en ambos tipos de tareas. Estos resultados muestran la presencia de ciertas barreras que impiden trabajar de forma bidireccional el número decimal, tanto en su expresión verbal como en su representación simbólica.

Para las respuestas que no alcanzaron la máxima puntuación (142) se realizó el análisis cualitativo con objeto de indagar sobre los errores y/o dificultades que tuvieron los EPM. Los errores encontrados los clasificamos en:

- *Incorporación de ceros al final de un número decimal*. Este error viene determinado por incorporar a la derecha de la parte decimal tantos ceros como llevaría el número si se considerara natural. EMP25 representa numéricamente las 40 milésimas colocando un cuatro acompañado de un cero en la posición de las milésimas.

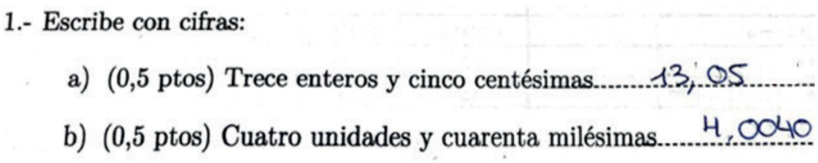


Figura 2. Respuesta de EPM25.

- *Tratamiento de la parte decimal como un número entero*. Se consideran aquellas respuestas en las que se hace uso de la estructura del número entero para representar verbal o simbólicamente la parte decimal del número. Por ejemplo, el participante EPM2 escribe el 0,40 como "cuarenta decenas" en lugar de 40 centésimas o, equivalentemente, cuatro décimas.

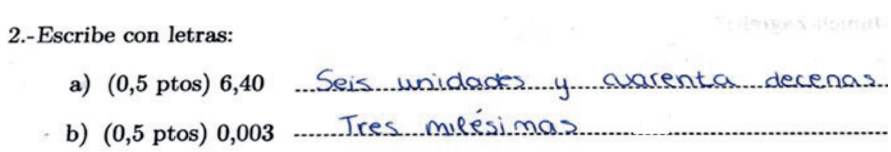

2.- Escribe con letras:
a) (0,5 ptos) 6,40 Seis unidades y cuarenta decenas.
b) (0,5 ptos) 0,003 Tres milésimas

Figura 3. Respuesta de EPM2.

- *Asociar incorrectamente el valor posicional del número decimal*. Los participantes manifiestan una dificultad de equivalencias entre los valores posicionales en la parte decimal. Por ejemplo, EPM132 indica que "cincuenta milésimas" son 0,005 y 6,004 lo representa verbalmente como "cuarenta milésimas" (véase figura 4).

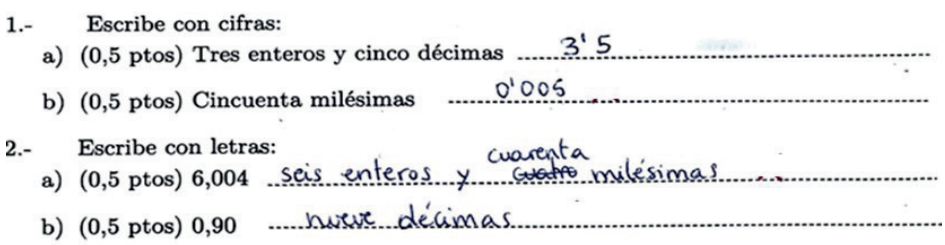

1.- Escribe con cifras:
a) (0,5 ptos) Tres enteros y cinco décimas 3'5
b) (0,5 ptos) Cincuenta milésimas 0'005
2.- Escribe con letras:
a) (0,5 ptos) 6,004 seis enteros y cuarenta ~~cuatro~~ milésimas
b) (0,5 ptos) 0,90 nueve décimas

Figura 4. Respuesta de EPM132.

- *Otros errores*. Se consideran aquellas respuestas que no se ajustan o no se relacionan con los dígitos a tratar en cada tarea. En la figura 5 se observa que EPM33 representa numéricamente "tres enteros y cinco décimas" como 123,5, incorporando cifras que no se contemplan en la representación verbal del número. De igual forma, en ambos apartados de la tarea dos realiza una lectura por dígitos en lugar de una lectura del número.

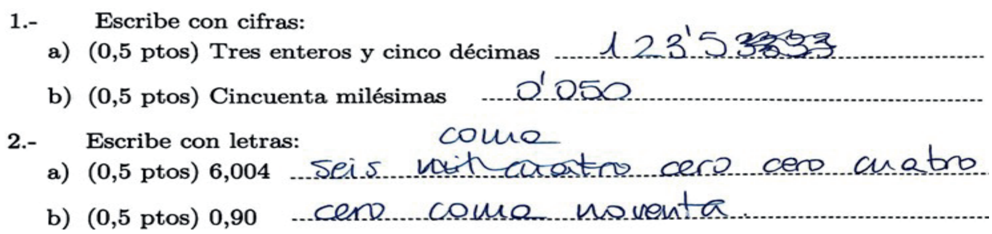

1.- Escribe con cifras:
a) (0,5 ptos) Tres enteros y cinco décimas 123'5 3333
b) (0,5 ptos) Cincuenta milésimas 0'050
2.- Escribe con letras:
a) (0,5 ptos) 6,004 seis coma ~~mil~~ cuatro cero cero cuatro
b) (0,5 ptos) 0,90 cero coma noventa

Figura 5. Respuesta de EPM33.

En la tabla 2 se recogen las frecuencias asociadas a cada uno de los errores descritos. Señalamos que el número total de errores analizados es superior al tamaño muestral, pues un mismo individuo puede haber presentado diferentes errores. Tal y como se mencionó anteriormente, se ha detectado un mayor número de errores asociados a la obtención de la representación simbólica del número a partir de su representación verbal. El error que ha tenido una mayor presencia es el asociado con el valor posicional, sin embargo, destacamos que este tipo de error adquiere un mayor protagonismo en la tarea 1, pues el 64% de los EPM que no alcanzaron la máxima puntuación en la tarea lo muestran. En el caso de la escritura del número, más de la mitad de los errores se ha englobado en la categoría de tratamiento de la parte decimal como un número entero.

Tabla 2. Tipos de errores cometidos por los participantes.

Tipos de errores	**CT**	**NL**	**Total**
Incorporación de ceros	61	0	61
Tratamiento como un número entero	37	57	94
Asociación incorrecta del valor posicional	94	25	119
Otros errores	25	16	41
No responde	7	7	14
Total	**224**	**105**	**329**

CONCLUSIONES

Los conocimientos matemáticos del profesor son un factor clave para asegurar un adecuado aprendizaje de los alumnos en la Educación Primaria (Pincheira y Alsina, 2021). Entre los diferentes contenidos matemáticos, las relaciones que se establecen entre las distintas representaciones de un número contribuyen a describir su significado como entidad conceptual y caracterizar sus propiedades algebraicas (Konic y Reynoso, 2017).

Al evaluar el conocimiento sobre lectura y escritura simbólica del número decimal, detectamos una discrepancia entre los resultados de ambos tipos de tareas, lo que indica que los profesores en formación tienen un conocimiento frágil del número decimal en su representación simbólica. Este hecho revela que, en general, los EPM aplicaron su conocimiento sobre el conjunto de los números naturales, dejando de lado las reglas de numeración decimal. Además, se ha observado las dificultades existentes en torno al principio de posicionalidad de las cifras dentro del número, situación que también se repite cuando se trabaja en el sistema decimal (Castro et al., 2015; Salinas, 2007). Si las personas implicadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje no son capaces de abordar los contenidos matemáticos de forma adecuada, las experiencias de aprendizaje que ofrecen en los centros escolares quedarán restringidas al nivel inferior de los contenidos (Taplin, 1998). Nuestra investigación trató de abordar esta debilidad identificando las dificultades y errores que presentan los futuros profesores a la hora de trabajar con distintas representaciones del número decimal.

En la formación del profesorado es necesario un equilibrio entre los conocimientos específicos y las habilidades prácticas (Nieto, 1996). En este sentido, de forma general, los formadores de futuros profesores asumen que estos dominan los contenidos de Educación Primaria, al haberlos estudiado en etapas anteriores, y se centran sobre todo en los conocimientos didácticos. Sin embargo, los resultados obtenidos en la presente investigación y en diversas investigaciones revelan que los "estudiantes muestran carencias significativas en el dominio de conocimientos elementales, incluso al nivel de lo requerido en la Educación Primaria" (SEIEM, 2014, p. 2). Este hecho sugiere que el proceso de aprendizaje de los futuros profesores no siempre fue exitoso, por lo que es necesario que en la formación inicial de futuros maestros se siga profundizando en los conocimientos de los temas matemáticos (KoT) que ellos van a enseñar. Consideramos que este tipo de investigaciones adquieren cierta importancia, pues permiten conocer el conocimiento del que parten los futuros docentes antes de iniciar su formación. Una limitación del presente estudio está relacionada con el hecho de que cada uno de los participantes realizó una única actividad de cada tipo, por lo que sería recomendable seguir esta línea de investigación abordando una mayor variedad actividades en las que se trabaje las características tanto escritas como simbólicas del número decimal.

Referencias

Bachelard, G. (1999). *La formación del espíritu científico (22ª ed.).* Siglo XXI.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University.

Castro, A., Gorgorió, N. y Prat, M. (2015). Conocimiento matemático fundamental en el Grado de Educación Primaria: Sistema de numeración decimal y valor posicional. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 221-228). SEIEM.

De Castro, C., Castro, E. y Segovia, I. E. (2008). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: un estudio con maestros en formación. *PNA, 2*(4), 191-205. https://doi.org/10.30827/pna.v2i4.6193

Fennema, E. y Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 147-164). Macmillan Publishing Co, Inc.

Gairín, J. (2013). Estudiantes para maestros: reflexiones sobre la instrucción en los números racionales positivos. *Contextos Educativos. Revista de Educación, 0*(6), 235-260. https://doi.org/10.18172/con.538

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

González, J. y Eudave, D. (2018). Conocimiento común del contenido del estudiante para profesor sobre fracciones y decimales. *Educación Matemática, 30*(2), 106-139. https://doi.org/10.24844/EM3002.05

Konic, P. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales.* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].

Konic, P., Godino, J. y Rivas, M. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Revista Números. Didáctica de las matemáticas, 74*, 57-74.

Konic, P. y Reynoso, D. (2017). Diseño de una tarea que pone en discusión las concepciones de número decimal, expresión decimal y aproximación decimal de un número. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Montes, M. A.; Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2018). Maestro, ¿Cuál es el número más grande que existe? Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 3,* 5-20. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.226

Nieto, L. J. B. (1996). Learning to teach mathematics: Types of knowledge. En J. Giménez, S. Llinares, V. Sánchez (Eds.), *Becoming a primary teacher: Issues from mathematics education (*pp. 159-177). Gracia Alvarez.

Ortí, A. (1995). La confrontación de modelos y nivels epistemológicos en la génesis e historia de la investigación social. En J. M. Delgado y J. Gutiérrez (Eds.), Métodos y Técnicas Cua*litativas de Investigación Social en CC.SS.* (pp. 85-95). Síntesis.

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: A systematic review from the MKT perspective. *Mathematics, 9*, 2590. https://doi.org/10.3390/math9202590

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, *52*, de 01 de marzo de 2014, 19349-19420.

Salinas, M. J. (2007). Errores sobre el sistema de numeración decimal en estudiantes de Magisterio. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 381-390). SEIEM.

SEIEM (2014). *Editorial. Boletín de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, *37*, 2.

Taplin, M. (1998). Preservice teachers' problem-solving processes. *Mathematics Education Research Journal, 10*(3), 59-75. https://doi.org/10.1007/BF03217058

Yang, D. (2007). Investigating the strategies used by pre-service teachers in Taiwan when responding to number sense questions. *School Science and Mathematics, 107*(7), 293-301. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2007.tb17790.x

UNA HERRAMIENTA PARA ANALIZAR RECURSOS EDUCATIVOS DE TELESECUNDARIA: EL CASO DE LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

A tool for analyzing Telesecundaria educational resources: The case of division of fractions

Angel, A.[a], Figueras, O.[a] y Valenzuela, C.[b]

[a]Cinvestav, [b]Universidad de Guadalajara

Resumen

Telesecundaria es una modalidad de la educación secundaria en México que cuenta con diversos recursos educativos. En este informe se describe el diseño de una herramienta que consiste en una red de conceptos para caracterizar problemas multiplicativos con fracciones. Su uso se ejemplifica al hacer un análisis de los recursos para el alumno y el maestro de Telesecundaria, tales como situaciones de enseñanza y aprendizaje incluidas en los libros de texto y los recursos digitales que en esos se refieren. Como parte de los resultados se identificaron tareas de resolución de problemas multiplicativos con diversas estructuras y contextos. Los modelos de la división de fracciones identificados son parte-todo, cuotición, aplicación por escala y composición de aplicaciones. Los usos y aspectos de las fracciones encontrados son descriptor, mensurador, comparador, operador razón, transformador y operador fracción.

Palabras clave: *división de fracciones, problemas multiplicativos, recursos educativos, telesecundaria.*

Abstract

Telesecundaria is a modality of secondary education in Mexico that has many educational resources. This report describes the design of a tool that consists of a network of concepts to characterize multiplicative problems with fractions. Its use is exemplified by analyzing the resources for the Telesecundaria student and teacher, such as teaching and learning situations included in textbooks and the digital resources referred in those. Multiplication problem solving tasks with diverse structures and contexts were identified. The models of division of fractions identified are part-whole, quotation, application by scale and composition of applications. The uses and aspects of fractions found are descriptor, measurer, comparator, ratio operator, transformer, and fraction operator.

Keywords: *division of fractions, multiplicative problems, educational resources, telesecundaria.*

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

La educación secundaria en México se imparte en varias modalidades, entre ellas la Telesecundaria (12- 14 años), en la que solo un profesor es responsable de impartir todas las asignaturas de un determinado grado escolar. Sin embargo, la falta de especialización de los profesores ha contribuido a que tengan dificultades con el dominio de los contenidos que enseñan (Flores y Rebollar, 2008), en particular de los matemáticos. Para preparar sus clases el profesor tiene a su alcance diversos recursos

Angel, A., Figueras, O. y Valenzuela, C. (2022). Una herramienta para analizar recursos educativos de telesecundaria: el caso de la división de fracciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 139-147). SEIEM.

educativos impresos y digitales que han sido elaborados por las autoridades educativas, como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje de esa modalidad. El profesor dispone, por un lado, de libros para el maestro para cada asignatura y recursos audiovisuales que tratan de las didácticas específicas de las materias que enseña, y por otro lado, de los libros de texto de los alumnos de cada una de las asignaturas, así como de los recursos audiovisuales e informáticos referidos en esos, disponibles en el portal de Telesecundaria (http://telesecundaria.sep.gob.mx/) (SEP, 2010). En los libros de texto de matemáticas de 1º y 2º grados del alumno, una parte considerable del contenido se refiere al estudio y uso de la aritmética de las fracciones. Temas que resultan difíciles tanto para estudiantes como para profesores de primaria y secundaria (Ball, 1990; Contreras y Gómez 2006; Valenzuela et al., 2017; Siegler y Lortie-Forgues, 2017).

Esta comunicación es parte de una investigación en curso, en la cual se tiene la hipótesis de que el profesor amplía sus conocimientos sobre multiplicación y división de fracciones, y su enseñanza con la integración de una variedad amplia de tecnologías, por un lado, al preparar su intervención haciendo uso de los recursos educativos que tiene disponibles, y por otro, al usar aquellos que están diseñados para favorecer el aprendizaje de sus alumnos. El objetivo de este informe es reportar: 1) la construcción de una herramienta de análisis para los problemas multiplicativos de división de fracciones; y 2) una caracterización del contenido matemático sobre división de fracciones, presente en los recursos educativos de Telesecundaria, que resulta del análisis que se hizo en virtud de que si se quiere probar la hipótesis mencionada es importante saber qué es lo que las autoridades educativas pretenden que el profesor sepa y enseñe sobre la división de fracciones.

MARCO TEÓRICO

El marco de los Modelos Teóricos Locales (MTLs) desarrollado por Filloy (1999) es un marco teórico y metodológico que se construye considerando cuatro componentes: 1) los modelos de competencia formal -que se abrevia como componente formal-; 2) los modelos de enseñanza, 3) los modelos de comunicación, 4) los modelos de procesos cognitivos, y sus relaciones. "Los MTLs los elaboramos para dar cuenta … de fenómenos que se producen en situaciones de enseñanza y aprendizaje, pero además concebimos las situaciones de enseñanza y aprendizaje como situaciones de comunicación y de producción de sentido" (Puig, 2008, p. 88).

La indagación global se estructura usando el marco de los MTLs y se enfoca en cómo los profesores de Telesecundaria amplían sus conocimientos sobre multiplicación y división de fracciones en la práctica. Al construir un MTL se busca dar una propuesta para analizar e interpretar cómo ocurre ese fenómeno. En este caso, el componente formal se relaciona con un análisis sobre la multiplicación y división de fracciones, mientras que el análisis de los textos matemáticos que se encuentran en los recursos educativos que usan los profesores, en el que se caracterizan los contenidos y modelos que se emplean para la enseñanza de esos conceptos, forma parte del componente de los modelos de enseñanza. El componente de modelos de comunicación se refiere a la descodificación que hacen los docentes de los mensajes emitidos por medio de los recursos educativos, y finalmente, el componente de modelos de procesos cognitivos versa sobre el conocimiento de los profesores. En esta comunicación se muestran avances de la construcción de los primeros dos componentes del MTL.

CONSTRUCCIÓN DEL COMPONENTE FORMAL

A continuación, se describen los elementos que integran el Componente Formal, a fin de analizar el objeto matemático de la investigación. Esos elementos se entretejen y constituyen las variables de análisis de la herramienta que los autores han construido.

Usos y aspectos de las fracciones. Principalmente se considera la fenomenología didáctica desarrollada por Freudenthal (1983) y los usos y aspectos de las fracciones que él mismo identificó. Estos se interpretaron y esquematizaron por Valenzuela et al. (2017). Los usos son descriptor, fracturador, mensurador, comparador, operador y número, mientras que los aspectos son operador fracturante, trasformador, operador razón, relación de fractura y relación razón.

Algoritmos de la división. Son las secuencias de pasos o procedimientos para dividir fracciones.

Modelos de la división. De acuerdo con Puig y Cerdán (1988) en algunos problemas aritméticos escolares verbales (PAEVs) se reflejan modelos para las operaciones aritméticas que nos permiten atribuirles varios significados. Como los modelos de partición y cuotición que refieren los investigadores en el caso de la división de números naturales, enteros y decimales. Además de esos modelos para la división, Greer (1992) menciona otros en los que se usan el mismo tipo de números. Se asume que el significado de la división de fracciones también está en función de un modelo y con esta variable se pretende indagar cuáles son los modelos de la división que corresponden a este tipo de números.

Estructura multiplicativa. Vergnaud (1991) llama relaciones multiplicativas a aquellas que se comportan como una multiplicación o una división, y hace una clasificación de los problemas multiplicativos con base en la forma de la relación multiplicativa que se encuentra en ellos. Cuando se trata de problemas aritméticos verbales, se deben considerar las relaciones entre las cantidades que intervienen en los enunciados. Los tipos de estructuras multiplicativas que propone son: 1) isomorfismo de medidas, para las relaciones entre cuatro cantidades; 2) producto de medidas, para las relaciones entre tres cantidades; y 3) un solo espacio de medida, cuando la relación es entre dos cantidades.

Estructura de las cantidades. Una cantidad es un número acompañado de una unidad de magnitud (Puig y Cerdán, 1988). Partiendo de la investigación de Schwartz (1988) se establece que una cantidad extensiva (E) expresa la extensión de una entidad o substancia y "responde a la pregunta cuánto o cuántos de una cantidad asociada a un tipo de objetos" (Gómez, 2011, p. 44), por ejemplo, 8 3/5 vueltas y 1/4 km. Una cantidad intensiva (I) es aquella que expresa "una cualidad, un aspecto intensivo … pero no nos dice cuántos hay de una cantidad en términos absolutos" (p. 44), además su magnitud se puede expresar en términos de una relación en la que interviene la palabra por, como en 1/2 kg por bolsa. En los PAEVs pueden aparecer escalares: números sin magnitud y se consideran cantidades intensivas porque se pueden escribir como una razón entre dos cantidades que se comparan, por ejemplo 3/2 veces.

Palabras clave de los PAEV. En el enunciado de un PAEV, Puig y Cerdán (1988) consideran como palabras clave los verbos, las palabras o grupos de palabras que funcionan como conectivos o que expresan relaciones que influyen en la elección de una operación aritmética. Al considerar esta variable se busca enriquecer el grupo de las palabras clave para la división que se han identificado previamente en la investigación.

METODOLOGÍA

El marco de los MTLs además de ser un marco teórico, es un marco metodológico. Desde la propia estructura metodológica de los MTLs se distinguen dos etapas para su construcción. La primera consiste en un análisis teórico para la construcción de los componentes del MTL, y la segunda en una etapa experimental, misma que para esta investigación se desarrollará con profesores. La parte de la investigación que se reporta en este documento corresponde a la primera etapa y trata de la construcción de los Modelos de Competencia Formal y Modelos de Enseñanza. Como resultados se tienen 1) el diseño de una herramienta conceptual para el análisis de los recursos educativos de Telesecundaria sobre la multiplicación y división de fracciones; y 2) una caracterización de los distintos recursos educativos de Telesecundaria sobre los temas mencionados.

En el siguiente apartado se describen los resultados de un análisis cualitativo sobre el contenido de una secuencia didáctica del libro de texto para el alumno de segundo grado de Telesecundaria (SEP, 2019, pp. 22-31), para ejemplificar el uso de la herramienta en la construcción del componente de Modelos de Enseñanza. El proceso de análisis se esquematiza en la figura 1, en la que, del lado derecho se muestra la herramienta de análisis y sus elementos, y del lado izquierdo cómo inicia el proceso de análisis de una actividad propuesta en cualquiera de los recursos audiovisuales, informáticos o libro de texto. Cada secuencia didáctica del libro de texto del alumno se organiza en sesiones. Una sesión incluye en promedio cinco actividades. Durante el análisis, los autores clasificaron primeramente el tipo de tarea propuesta en cada actividad, en virtud de que no todas las actividades comparten la misma estructura. En la figura 1 se muestra que para el análisis de las tareas de tipo 2 y 3, no se usan los elementos del inciso d). También se identifica el contexto en el que se propone la actividad, distinguiendo entre si los números se usan de forma abstracta o para hacer referencia a alguna situación o actividad cotidiana, esto con la intención de determinar cómo se problematiza el estudio de la división de fracciones en esos recursos.

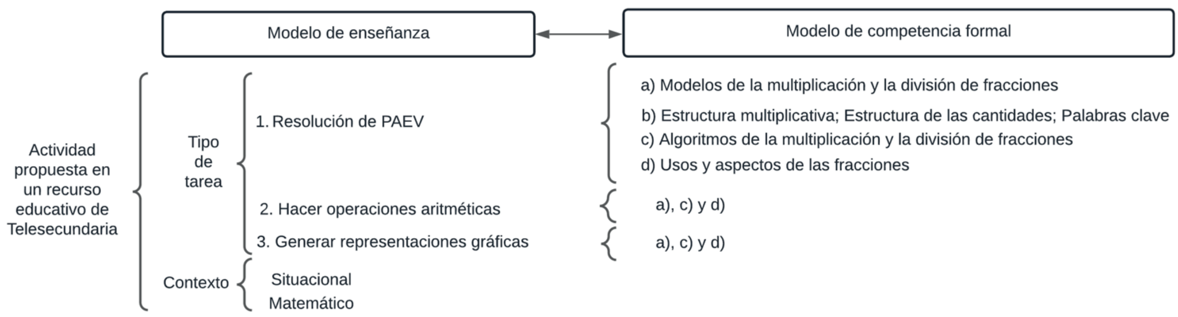


Figura 1. Esquema del análisis y las variables consideradas.

RESULTADOS

Al hacer el análisis de los textos matemáticos de los recursos educativos los autores encontraron dos elementos que se deben considerar como variables y que se refieren a características del diseño del Modelo de Enseñanza, estos son Tipos de tareas y Contextos, los cuales se describen a continuación.

Tipos de tareas. Las actividades propuestas en el libro de texto analizado (SEP, 2019) tienen un enfoque de resolución de problemas, sin embargo, no todas comparten la misma estructura, por ello se hizo una clasificación del tipo de tareas, en este caso los autores identificaron tres tipos: 1) resolver problemas aritméticos escolares verbales (PAEV), los cuales se plantean en enunciados y preguntas de varios incisos, algunos implican complementar tablas; 2) hacer operaciones aritméticas, como ejercicios de cálculo; y 3) generar representaciones gráficas, dada una figura se le aplica un factor de escala para trazar otra.

Contextos: Los contextos de las tareas se clasifican en: 1) situacionales, si se hace referencia a situaciones o actividaes cotidianas; y 2) matemáticos, si se usan los números de forma abstracta.

La secuencia didáctica analizada del libro de texto titulada: multiplicación y división de fracciones positivas, se divide en cinco sesiones. Al término de dos de las sesiones se indica el uso de un recurso audiovisual, y además, el empleo de un recurso informático al finalizar la secuencia. A continuación, se ejemplifica el análisis del contenido de una actividad del libro de texto del alumno y de un recurso informático referido en ese.

PAEV planteado en el libro de texto: Cuántas veces cabe

La sesión 2 inicia con una tarea de tipo resolución de un PAEV, cuyo contexto es distribuir una bebida. El enunciado dice lo siguiente: "Trabajen en pareja y resuelvan el siguiente problema. Para la fiesta de cumpleaños de su hija, Aidé ha preparado 24 litros de agua de jamaica. Usará vasos de 1/4 de litro. ¿Cuántos vasos podrá llenar?" (SEP, 2019, p. 24). Más adelante en el texto se comenta que una de las maneras de resolver el problema consiste en hacer una tabla como la que se muestra en la figura 2.

El algoritmo propuesto para la resolución del PAEV consiste en usar una tabla de proporcionalidad entre litros y vasos, como herramienta para determinar el resultado. Para ello, se debe considerar que con cada litro de agua es posible llenar 4 vasos, es decir, 1/4 litro cabe 4 veces en 1 litro, por lo que se identifica el uso de la fracción 1/4 litro como mensurador. El modelo de la división identificado es el que Puig y Cerdán (1988) llaman cuotición y afirman que la división se puede resolver haciendo una sustracción de manera reiterada. En este caso, esto consistiría en sustraer 1/4 litro de los 24 litros un total de 96 veces.

Litros	1	2														
Vasos	4	8														

Figura 2. Tabla que indica la cantidad de vasos de 1/4 litro que se pueden llenar con 1 y 2 l de agua (SEP, 2019, p. 24)

Finalmente, respecto a los elementos de los PAEV: la estructura multiplicativa identificada es la de isomorfismo de medidas, como se muestra en la figura 3. Por otro lado, dado que 24 litros es una cantidad extensiva (E) y 1/4 de litro por vaso es una cantidad intensiva (I), la estructura de las cantidades del PAEV es del tipo E/I=E', donde E' es otra cantidad extensiva que representa a 96 vasos. Finalmente, la palabra clave que se asocia a la división cuotitiva es: cuántos, que se encuentra en la pregunta del PAEV, y se relaciona con el contexto, es decir, cuántos vasos se pueden llenar. Más adelante en este informe se amplía el significado de esta palabra clave.

M_1: Vasos de $\frac{1}{4}\ l$	$\xrightarrow{\text{Regla de correspondencia}}$	M_2: Litros de agua de jamaica
1		$\frac{1}{4}$
4	$\times\frac{1\ litro}{4\ vaso}$	1
?		24

Figura 3. Estructura multiplicativa del PAEV: un isomorfismo de medidas.

Recurso informático referido en el libro de texto: multiplicar por el recíproco

Al finalizar la secuencia didáctica, en el libro de texto se propone el uso de un recurso informático en el que se plantean tres problemas de multiplicación de fracciones y dos de división de fracciones, uno de ellos se muestra en la figura 4.

La actividad consiste en la resolución de un PAEV cuyo contexto situacional es el embotellamiento de un producto. Se trata de arrastrar las opciones correctas a los recuadros que se muestran en pantalla. Para ello, se debe establecer en primer lugar cuál es la división de fracciones que resuelve el PAEV. Hay que elegir los números adecuados entre las ocho opciones posibles. En este caso se trata de las fracciones 21/1 litros de suavizante entre 3/4 de litro de suavizante por 1 botella. El uso de la fracción 21/1 es de descriptor de una medida, mientras que 3/4 se usa como mensurador porque es la unidad con la que se miden 21/1 litros.

En la primera igualdad de la figura 4, la división se resuelve usando el algoritmo de la división que implica multiplicar el dividendo por el recíproco del divisor. Después se hace la multiplicación de acuerdo con el algoritmo de la multiplicación de fracciones que ha sido referido en otros recursos educativos previamente. Se debe plantear una multiplicación de fracciones de tal manera que el producto sea la fracción 84/3. Finalmente, se simplifica la fracción y se obtiene el resultado 28 botellas. El modelo de la división de fracciones identificado es el que Puig y Cerdán (1988) denominan división cuotición y Greer (1992) llama modelo de medidas iguales. La palabra clave que se identifica es cuántos, vinculada al contexto del proceso de embotellar sustrayendo reiteradamente y preguntando cuántas veces fue posible hacerlo.

Enunciado del PAEV:

Una empresa quieren [sic] embotellar 21 litros de suavizante. Si cada botella tiene una capacidad de (3)/4 de litro [sic]. ¿Cuántas botellas necesitarán?

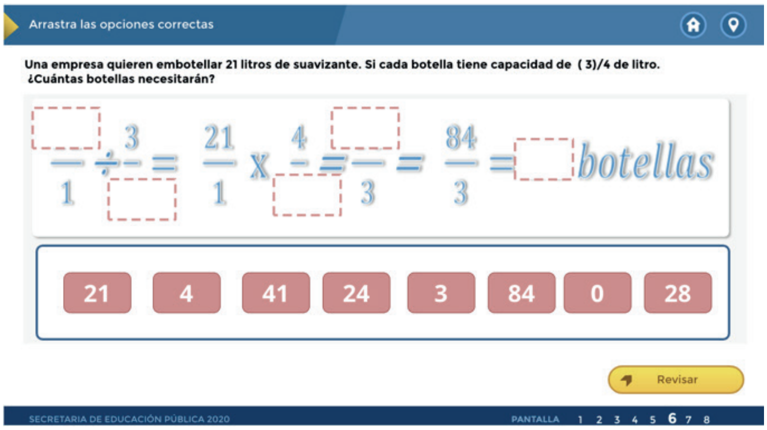


Figura 4. PAEV planteado en el recurso informático: Multiplicar por el recíproco (http://telesecundaria.sep.gob.mx/Content/Repositorio/informaticos2/Alumno/Material/Matematicas/B1_1_multiplicar_reciproco/)

Dado que se hace la división, 21 litros entre 3/4 litro por botella igual a 28 botellas, la estructura de las cantidades es del tipo E/I=E'. La estructura multiplicativa del PAEV es un isomorfismo de medidas y se representa en la figura 5. En este caso se pregunta por el multiplicador y se divide por el multiplicando, igual que lo esquematizan Puig y Cerdán (1988) y Contreras y Gómez (2006).

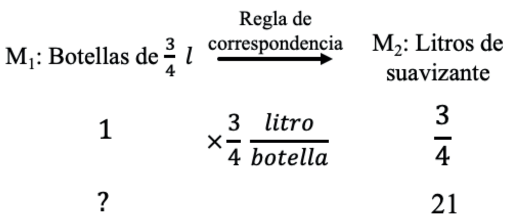


Figura 5. Estructura multiplicativa del PAEV: un isomorfismo de medidas.

Resultados generales del análisis de las actividades del libro de texto

Los usos y aspectos de las fracciones que se favorecen más en la secuencia didáctica analizada son el de descriptor, mensurador y operador fracción. El uso como operador fracción se observa en el momento en que se hace una división de fracciones en un contexto numérico, en el que la división se transforma en una multiplicación por el recíproco de la fracción divisor. Otro de los usos que se hace de las fracciones es el de comparador, esto se identificó en tres de las cinco sesiones de la secuencia didáctica analizada. En esas sesiones, situadas en un contexto geométrico, se muestran figuras equivalentes y la actividad consiste en determinar los factores de escala que permiten obtener una figura a partir de otra. Por eso, el aspecto de la fracción es el de transformador, cuando se trata de dibujar las figuras, ya que el factor de escala se aplica a la figura sin fracturarla, sino transformarla de manera uniforme. Cuando las figuras están dadas, y se debe encontrar el factor de escala, que es una fracción, su aspecto es el de operador razón.

En los recursos educativos de Telesecundaria se identificaron cuatro algoritmos distintos para hacer una división con fracciones: elaborar una tabla de proporcionalidad, multiplicar por el factor recíproco del divisor, hacer productos cruzados, y contar cuántas veces cabe el divisor en el dividendo en una representación gráfica. El algoritmo de productos cruzados se menciona solamente en el audiovisual dirigido al profesor de Telesecundaria.

Los esquemas de los isomorfismos de medidas con los que se han ejemplificado las estructuras multiplicativas de los PAEVs muestran la relación de proporcionalidad entre las cantidades involucradas. Además de ese tipo de estructura, se identificó otro de un solo espacio de medida. En ese, en lugar de establecer una regla de correspondencia, se usa un escalar para indicar la relación multiplicativa entre dos cantidades en dos sentidos. Para ir en un sentido se multiplica por el escalar y en el otro sentido por su recíproco. En los PAEVs planteados en la secuencia didáctica analizada del libro de texto de Telesecundaria y los recursos digitales referidos en ese, como ya se mencionó, se identificó la estructura del tipo E/I=E'. Este tipo de estructura también se encontró en las tareas de generar representaciones gráficas en las que, dada una figura se construye otra equivalente a escala. Otro tipo de estructura de las cantidades identificada en tareas en las que el modelo de la división es la composición de aplicaciones, es el de E/E'=I.

Los modelos de la división de fracciones que se identificaron son parte-todo, cuotición, aplicación por escala y composición de aplicaciones. Los primeros dos han sido identificados previamente por otros investigadores (Puig y Cerdán, 1988; y Greer, 1992), mientras que los segundos son nuevos en ese sentido. La palabra clave identificada en la secuencia analizada en el modelo de aplicación por escala y composición de aplicaciones es factor de escala. Mientras que, en el modelo de parte-todo es la palabra fracción, que también aparece en un PAEV referido por Greer (1992). En el caso del modelo de cuotición, los contextos situacionales de los ejemplos que aparecen en general en la secuencia analizada refieren acciones de llenar, hacer, embotellar, partir, y comunican la idea de distribuir mediante un proceso de sustraer reiteradamente lo que la fracción mensuradora indica. En todos los ejemplos se pregunta "cuántos" o "cuántas" se pueden llenar, hacer, embotellar y obtener respectivamente. Sin embargo, son las expresiones usadas en las preguntas: "cuántos vasos podrá llenar", "cuántas botellas necesitarán", etc., en las que se establece la relación entre las cantidades que desempeñan un papel relevante en el problema. Estas son las palabras clave identificadas, en relación con cuántas veces cabe la fracción mensuradora en la unidad.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El análisis de los recursos educativos que se llevó a cabo ha permitido ver el papel destacado que se le da en Telesecundaria al tipo de tarea de resolución de PAEVs para el estudio de la división de fracciones. En la secuencia didáctica analizada se considera mayormente a la división de fracciones como un caso especial de multiplicación de fracciones, un tema que se ha tratado en contenidos previos. El modelo para la división que más se usa en los recursos educativos es el de cuotición. Una de las fortalezas de este modelo es que es adecuado para números naturales, decimales como lo ejemplifican Puig y Cerdán (1988) y Greer (1992), y para fracciones como se ha ejemplificado en este informe. Además, las palabras clave que se asocian con este modelo, que tienen que ver con preguntar cuántas veces cabe un número en otro, son las que pueden favorecer a que el usuario de los recursos educativos amplíe sus conocimientos sobre la división al responder esta pregunta considerando otra clase de números. Estas características de los recursos educativos se consideran potenciales para ampliar el conocimiento de los profesores en particular, sobre la división de fracciones.

Con las actividades de generar representaciones gráficas se contribuye a que los usuarios de los recursos educativos puedan corroborar de manera visual que hay casos en los que la multiplicación da como resultado productos menores que los factores correspondientes. Asimismo, que hay casos en los que la división da como resultado un cociente mayor que el divisor y el dividendo. Para Siegler y Lortie-Forgues (2015) esto contribuiría a la comprensión de las operaciones aritméticas de multiplicación y división, ya que es necesario conocer la dirección de los efectos que producen. La herramienta empleada para analizar los recursos educativos ha permitido notar sus limitaciones, en términos de la ausencia de otros tipos de estructura de las cantidades, estructuras multiplicativas y modelos de la división.

La caracterización de los recursos educativos que se ha hecho será fundamental para el diseño de actividades en la segunda fase de la investigación. Además, de manera más amplia, esta es útil porque 1) describe la complejidad de la división de fracciones cuando se consideran más allá de los algoritmos, los fenómenos que organiza el concepto; 2) proporciona sugerencias para el diseño de actividades sobre división de fracciones; y 3) contribuye a enriquecer el estudio de los significados y estructuras de los problemas multiplicativos de división, hechos por Greer (1992), Puig y Cerdán (1988), Schwartz (1988) y Vergnaud (1991) en los que usan números naturales, enteros y decimales pero no fracciones.

Referencias

Ball, D. L. (1990). The mathematical understanding that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, *90*(4), 449-466. https://doi.org/10.1086/461626

Contreras, M. y Gómez, B. (2006). Sobre problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 171-184). Huesca.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del algebra educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Flores, R. C. y Rebollar, A. M. (2008). La telesecundaria ante la sociedad del conocimiento. *Revista Iberoamericana de Educación*, *44*(7), 1-11. https://doi.org/10.35362/rie4472187

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.

Gómez, B. (2011). Discontinuidad de los modelos de situación de las operaciones multiplicativas. *Educatio siglo XXI*, *29*(2), 41-66.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D. A. Grouws. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). National Council of Teachers of Mathematics.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, M. J. Gónzalez y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 107-126). Huesca.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades, 2*, 41-52). National Council of Teachers of Mathematics.

SEP (2010). *La telesecundaria en México: un breve recorrido histórico por sus datos y relatos*. Secretaría de Educación Pública. http://www.sepbcs.gob.mx/contenido/documentos/educativo/telesecundarias/Breve%20Historia%20de%20Telesecundaria%20en%20Mexico.pdf

SEP (2019). *Matemáticas. Telesecundaria. Segundo grado (2.a ed.).* Secretaría de Educación Pública. http://telesecundaria.sep.gob.mx/Content/Repositorio/Alumno/Libros/2/Matematicas/TS-LPA-MATE-2-BAJA.pdf

Siegler, R. S. y Lortie-Forgues, H. (2017). Hard lessons: Why rational number arithmetic is so difficult for so many people. *Current directions in Psychological Science*, *26*(4), 346-351. https://doi.org/10.1177/0963721417700129

Valenzuela, C., Figueras, O., Arnau, D. y Gutiérrez-Soto, J. (2017). Mental object for fractions of middle school students with absenteeism problems. En E. Galindo y J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 227-242). PME-NA.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Trillas.

IDENTIFICACIÓN DE ESTRUCTURAS POR NIÑOS DE CINCO AÑOS EN UNA TAREA QUE INVOLUCRA FUNCIONES LINEALES EN SUS FORMAS DIRECTA E INVERSA

Identification of structures by five-year-old students in their in a task which involves direct and indirect lineal functions

Anglada, M. L.[a], Cañadas, M. C.[b], Brizuela, B. M.[c]

[a] Centro Adscrito de Magisterio Mª Inmaculada de Antequera, [b]Universidad de Granada, [c]Universidad de Tufts

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación sobre el pensamiento funcional en niños de cinco años. Nuestro objetivo de investigación es describir las estructuras que estos niños identifican en tareas que involucran funciones lineales, trabajando con casos particulares, tanto en su forma directa como inversa. Diseñamos y aplicamos una tarea que involucraba las funciones $f(n) = n$, $f(n) = n + 2$, $f(n) = n - 1$ y $f(n) = 2n$. Analizamos las respuestas de ocho niños de 5 años. En los resultados apreciamos que la mayoría de los niños identificaron una estructura adecuada tanto para la forma directa como para la inversa para las tres primeras funciones. Para $f(n) = 2n$ dos estudiantes identificaron una estructura correcta tanto para la función directa como para la inversa.

Palabras clave: *estructuras, función inversa, pensamiento funcional, educación infantil.*

Abstract

This paper is part of a research about functional thinking in five years old children. Our main research goal is to describe the structures that these children identify in tasks that involve lineal functions, working with particular cases, both in their direct and inverse form. We designed and applied a task involving the functions $f(n) = n$, $f(n) = n + 2$, $f(n) = n - 1$ y $f(n) = 2n$. We analyzed the responses of eight 5 years old children. In the results we appreciate that the majority of the childrens identified adequate structures for both the direct and the inverse form for the first three functions. For $f(n) = 2n$ two children identified an adequate structure for both the direct and inverse functions.

Keywords: structures, inverse function, functional thinking, early childhood education.

INTRODUCCIÓN

En educación infantil se fundamentan los primeros conocimientos matemáticos que forman la base de conocimientos posteriores. Además, resulta el momento adecuado para identificar debilidades y fortalezas que puedan dar luz a estrategias educativas eficaces que apunten a mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje (Gardner, 2000).

Anglada, M. L., Cañadas, M. C. y Brizuela, B. M. (2022). Identificación de estructuras por niños de cinco años en una tarea que involucra funciones lineales en sus formas directa e inversa. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 149-157). SEIEM.

Desde la propuesta curricular *early algebra* se recomienda introducir el pensamiento algebraico en las primeras edades para, entre otras cosas, mitigar las dificultades con el álgebra que se han identificado en educación secundaria. Se busca promover el pensamiento algebraico desde la educación infantil. Uno de los enfoques del pensamiento algebraico es el pensamiento funcional, cuyo contenido matemático son las funciones. Algunos autores, como Carraher y Schliemann (2007), consideran este tipo de pensamiento como el punto de partida para avanzar hacia el álgebra. Desde la perspectiva funcional, nos centramos en las funciones lineales con dos variables y cuyos conjuntos dominio e imagen son los números naturales. En este estudio trabajamos tanto con la forma directa como con la inversa de estas funciones.

El pensamiento funcional se centra en las relaciones existentes entre cantidades que tienen capacidad de variación simultanea (Blanton y Kaput, 2004). Establecer estas relaciones supone identificar la regularidad en el comportamiento entre variables (Torres et al., 2021). En este contexto funcional, la forma en que se organiza esta regularidad se conoce como estructura.

En nuestro trabajo partimos de que la capacidad de los niños para establecer relaciones funcionales puede comenzar en educación infantil (Anglada y Cañadas, 2021; Blanton y Kaput, 2004; Castro et al., 2017; Warren et al., 2013). Para educación infantil, aunque escasas, podemos encontrar investigaciones sobre pensamiento funcional en las que se trabaja la relación directa entre las variables (e.g., Blanton y Kaput, 2004; Castro et al., 2017; Warren et al., 2013). Las investigaciones que incluyen el trabajo con la forma inversa de las funciones son muy escasas (Anglada y Cañadas, 2021; Warren et al., 2013; Willoughby, 1997). Respecto al estudio de estructuras encontramos trabajos en los primeros cursos de educación primaria (Pinto y Cañadas, 2017; Torres el al., 2021), pero no para educación infantil. Es por eso que, a la vista de los resultados obtenidos en este nivel educativo, nos planteamos extender el estudio de la identificación de estructuras a niños de cinco años.

Con este trabajo pretendemos contribuir a la investigación sobre el pensamiento funcional de niños de educación infantil. Nos centramos en analizar cómo los niños de último curso de educación infantil identifican estructuras al abordar tareas contextualizadas que involucran funciones lineales en sus formas directa e inversa.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico que se centra en las funciones, consideradas estas como la relación entre dos cantidades que varían conjuntamente. En este contexto, contemplamos dos tipos de relaciones entre las variables, la directa (de la variable dependiente con la variable independiente) y la inversa (en la que se intercambian los roles de las variables respecto a la relación directa), existentes entre cantidades que tienen capacidad de variación simultanea (Warren y Cooper, 2006). "Cuando hablamos de una función y = f(x), en general, se está haciendo referencia a su forma directa, pues es la manera usual en la que se representa la regularidad entre las dos variables en un contexto concreto. Esa función tiene una función inversa y = g(x), tal que g(f (x))= x" (Torres et al., 2021, p. 6).

Las investigaciones sobre pensamiento funcional en las que se considera la función inversa son escasas tanto en educación primaria como en educación infantil. Warren et al. (2013) trabajaron con niños de cinco años con una "máquina" que realizaba transformaciones cualitativas y cuantitativas; la transformación cuantitativa correspondía a la función $f(n) = n + 2$. De los seis niños que participaron en la investigación, cinco consiguieron establecer una relación tanto directa como inversa entre las variables. Estas máquinas, conocidas como *function machines* (máquinas de función) han sido utilizadas por otros investigadores para trabajar funciones con niños de los primeros cursos de educación primaria (Moss y McNab, 2011; Torres et al., 2018) y de educación infantil (e.g., Dienes, 1971; Willoughby, 1997). Con este material es muy intuitivo trabajar la función inversa. De hecho, los investigadores que la han utilizado suelen trabajar tanto la función directa como la inversa. La máquina tiene una entrada, una transformación y una salida. Para trabajar la función inversa se da el valor de la salida y se pregunta por la entrada.

Willoughby (1997) introdujo el concepto de *function machine* trabajando con niños de cinco años. Comenzó con la función $f(n) = n + 2$. Los niños a partir de dos ejemplos concretos predijeron qué ocurría en otros casos particulares y, más tarde, descubrieron y definieron verbalmente la regla que seguía la máquina. Análogamente, trabajaron con funciones de la forma $f(n) = n \pm a$, con $a = 0$, 1 y 3. A raíz de los resultados de la investigación concluye que "todos los niños participantes pudieron comprender conceptos abstractos pero importantes, como la función, si los conceptos se desarrollan primero a partir de actividades concretas y se abstraen gradualmente durante un largo período de tiempo" (Willoughby, 1997, p. 200).

Anglada y Cañadas (2021), en un estudio próximo al que presentamos en el actual trabajo, realizaron una investigación con niños de cinco años. Trabajaron en un contexto de resolución de problemas que involucraba la función $f(n) = n + 2$. Diez de los 15 niños establecieron correctamente una relación de correspondencia para la función directa y cinco identificaron la relación para la función inversa.

En el pensamiento funcional es fundamental el estudio de regularidades. Desde el marco del pensamiento funcional definimos como estructura, la forma en la que se organiza la regularidad entre valores concretos de las variables involucradas o la manera en que se expresa la generalización (Kieran, 1989; Pinto y Cañadas, 2017).

No hemos encontrado estudios sobre cómo niños de cinco años identifican estructuras trabajando con funciones. Las investigaciones encontradas son de educación primaria. Pinto y Cañadas (2017) abordaron la noción de estructura con niños de tercero de educación primaria (8-9 años). Estos trabajaron con la función lineal $f(n) = 2n + 3$ y concluyeron que los niños identificaron 17 estructuras diferentes para esta función, seis de ellas correctas. Torres et al., (2018) realizaron un estudio con niños de segundo de educación primaria (7-8 años) con una tarea que involucraba la función lineal $f(n) = n + 3$. Estos niños descubrieron cuatro estructuras diferentes a partir de casos particulares dados. En una investigación similar a la anterior, Torres et al., (2021) identificaron estructuras en el trabajo con la función $f(n) = n + 4$ en su forma directa e inversa; de los seis niños participantes todos evidenciaron estructuras adecuadas para la forma directa y cuatro para la inversa.

OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

El objetivo de nuestra investigación es identificar las estructuras evidenciadas por niños del último curso de educación infantil en tareas que involucran funciones lineales en sus formas directa e inversa, cuando trabajan con casos particulares.

MÉTODO

Este estudio es de tipo exploratorio y descriptivo (Hernández et al., 2010).

Los participantes de este estudio son ocho niños del último año de educación infantil de un colegio concertado del sur de España. La elección del centro escolar fue intencional, de acuerdo con los objetivos de investigación y la disponibilidad del centro y de los docentes.

En la recogida de datos participaron una investigadora (primera autora de este trabajo) y dos alumnas del Grado de Educación Infantil quienes se encargaron de la parte técnica de la recogida de información. No hubo instrucción directa ni antes ni durante el desarrollo de las sesiones.

Para la recogida de información utilizamos una cámara fija ubicada al final del aula y otra cámara que registraba el trabajo de algunos niños en concreto. Además, tomamos fotos e hicimos anotaciones sobre algunos resultados.

Con base en nuestros antecedentes, decidimos trabajar con las funciones lineales f(n) = n (Blanton y Kaput, 2004; Castro et al.,2017); f(n) = n + 2 (Anglada y Cañadas, 2021 Warren et al., 2013; Willoughby, 1997); f(n) = n – 1 (Willoughby, 1997) y f(n) = 2n (Castro et al., 2017), con dominios y codominios en los números naturales. Además, decidimos hacerlo en este orden, según la dificultad que les atribuimos.

Diseñamos e implementamos una primera sesión en la que participó toda la clase a la que pertenecen los ocho estudiantes. A continuación, dividimos a los niños en pequeños grupos (cuatro o cinco niños por grupo) y realizamos una sesión con cada uno. En la tercera y última sesión, realizamos ocho entrevistas individuales. En la tabla 1 se recoge la organización de las sesiones.

Tabla 1. Organización de las sesiones.

Sesiones	Agrupación	Duración	Función	Descripción
1ª sesión	Toda la clase	90 min.	f(n) = n directa e inversa f(n) = n + 2 directa e inversa	Introducimos a los niños en la realización de las tareas y en el uso de los materiales.
2ª sesión	Grupos de cuatro y cinco alumnos	± 60 min/ grupo	f(n) = n directa e inversa f(n) = n + 2 directa e inversa	Repasamos la función identidad que vieron en la sesión 1, y nos centramos en el trabajo con f(n) = n + 2
3ª sesión	Entrevistas individuales	± 45 min	f(n) = n directa e inversa f(n) = n + 2 directa e inversa f(n) = n - 1 directa e inversa f(n) = 2n directa e inversa	Trabajamos con las funciones f(n) = n y f(n) = n + 2 que vieron en las sesiones anteriores, y las funciones f(n) = n – 1 y f(n) = 2n

Junto con la maestra, el equipo de investigación seleccionó a ocho estudiantes según su trabajo durante las dos primeras sesiones. Los niños debían ser verbalmente expresivos y dispuestos a participar, En este trabajo nos vamos a centrar en las entrevistas de estos ocho niños a los que simbolizaremos por An, n=1...8 para salvaguardar su identidad.

Trabajamos en un entorno de resolución de problemas contextualizados, mediante un juego en el que dramatizamos la situación usando una marioneta y un material manipulativo. Este fue un elemento motivador y dinamizante (Ahlcrona, 2012) las marionetas daban a los niños la posibilidad de proyectarse e identificarse con ellas, pues permiten situarse en un plano de intersección entre lo lúdico y lo real (Firnkel, 1984). Además, en nuestro caso, permite asignar roles distintos a diferentes marionetas, con lo que el niño asocia una acción a cada una de ellas, de forma que podrá identificarlas con distintas funciones.

En las tareas utilizamos dos marionetas, una a la que damos el nombre de “Lina”, con la que trabajamos la función identidad; y otra a la que llamamos “Sara” y que utilizamos para el resto de funciones. Además, utilizamos un tablero con una hilera de casillas que se pueden tapar y destapar y un recortable de un tesoro que se puede esconder en ellas. Este material se puede observar en la figura 1.

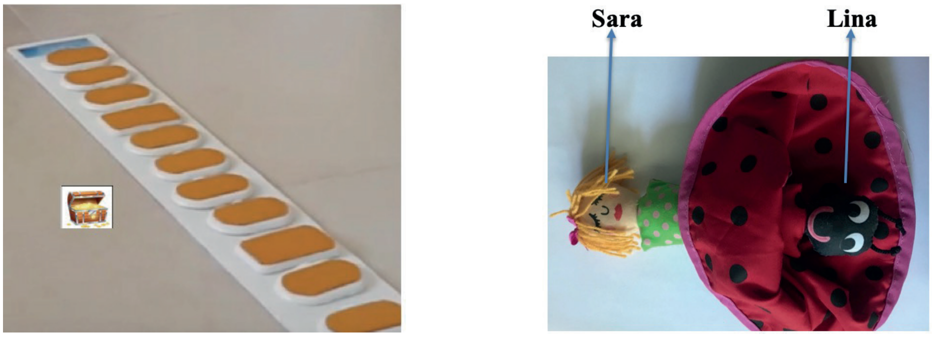


Figura 1. *Materiales: Tablero y marionetas.*

En la introducción de la tarea, la investigadora les dijo: Lina (o Sara, según el caso) ha escondido un tesoro. Estad atentos porque dice que nos va a dar una pista para que podáis encontrarlo. ¿Qué me dices Lina? (acercando la marioneta a su oído). Dice que la pista va a ser un número de palmadas, ella me las va a decir a mi y yo las voy a dar.

En este escenario, para cada una de las funciones se consideran las variables: (a) independiente (número de palmadas) y (b) dependiente (número de la casilla en la que está escondido el tesoro). Esta sería la forma directa de la función. Para la forma inversa, se invierten los roles de las variables (i.e., se conoce el número de la casilla y se desconoce el número de palmadas).

Comenzamos trabajando con la función identidad. La investigadora, sin explicar nada, pidió a los niños que cierren los ojos para que Lina escondiera el tesoro. Una vez escondido, pidió a los niños abrir los ojos, acercó a Lina a su oído y le preguntó: "Lina, por favor, danos la pista, ¿cuántas palmadas doy?". Una vez que dio un número de palmadas, los niños debían buscar el tesoro. Las primeras veces les dejamos levantar las casillas que necesiten, pero después de dos o tres ejemplos solo podían levantar una casilla.

En primer lugar, trabajamos con la forma directa y, a continuación, con la función inversa. Para trabajar con la función inversa, por turnos, un niño hizo el papel de profesor, imitando lo que había hecho la investigadora y la investigadora era entonces la que debía encontrar el tesoro. Simplemente dejamos que ellos escondieran el tesoro donde quisieran y decidieran el número de palmadas que debían dar como pista.

Para el resto de funciones trabajamos de la misma forma, pero utilizamos otra marioneta a la que llamamos Sara, la investigadora le decía a los niños que Sara daba las pistas de otra forma.

Trabajamos solo con casos particulares, dando a la variable independiente valores del uno al doce que son números con los que los alumnos estaban familiarizados y además son con los que podíamos trabajar con el tablero, permitiendo así la manipulación y la autocorrección.

Las tareas se presentaron de forma oral, utilizamos una narración, y se estableció un diálogo continuo basado en preguntas y respuestas. Consideramos que un niño identificaba una estructura cuando a partir de la primera vez que hallaba correctamente la solución para un caso concreto, tenía como máximo un error en los siguientes ejemplos; o bien, si daba verbalmente una expresión de la generalización.

El orden en que se trabajó durante la entrevista fue el siguiente: en primer lugar $f(n) = n$ directa y después inversa; a continuación $f(n)= n + 2$, primero directa y luego inversa; continuamos del mismo modo con $f(n) = n - 1$ y por último, con $f(n) = 2n$ directa e inversa. Este orden se estableció atendiendo al nivel de dificultad que se suponía a partir de los antecedentes. Decidimos no trabajar con la función $f(n) = 2n$ con los niños que no habían identificado estructuras para las funciones anteriores; así mismo para la forma inversa de esta función cuando no habían conseguido identificar una estructura para la forma directa.

ANÁLISIS DE DATOS

Transcribimos las grabaciones en video de las entrevistas y realizamos un análisis preliminar de los datos a partir de estas trascripciones para definir las categorías de análisis con base en el objetivo de investigación, el marco conceptual y los antecedentes. Partimos de las categorías definidas en Torres et al. (2021). Para las preguntas correspondientes tanto a la función directa como a la inversa, y con las distintas funciones, establecimos las siguientes categorías de análisis: (a) estructura identificada y si era correcta o incorrecta, (b) identifica una estructura correcta, ya que es capaz de mantener una regularidad, pero no podemos saber cuál es, (c) no identifica ninguna estructura.

Observamos la estructura identificada en la mayoría de los casos bien porque, de forma espontanea, expresaron verbalmente una generalización, bien por la observación de las acciones, gestos y lenguaje verbal utilizados en la manipulación. Por ejemplo, para $f(n)= n + 2$ dado un valor concreto de n, los niños contaban n sobre el tablero, se paran, y a continuación cuentan dos. Esto dificultó, en algunos casos, reconocer la estructura utilizada, aunque se podía ver que el niño seguía una regularidad y que era correcta.

RESULTADOS

Con base en las categorías definidas, en la tabla 2 presentamos las respuestas de los niños a los problemas que involucran las formas directa e inversa de cada una de las funciones. También recogemos el total de niños que identifican una estructura adecuada para cada función en su forma directa y en su forma inversa.

Tabla 2. Estructuras identificadas para las distintas funciones.

	f(n) = n		**f(n) = n + 2**		**f(n)= n -1**		**f(n)= 2n**	
	Directa	**Inversa**	**Directa**	**Inversa**	**Directa**	**Inversa**	**Directa**	**Inversa**
A1	$f(n) = n$	$g(n) = n$	$f(n) = n+2$	$g(n)= n-2$	$f(n)= n-1$	f(n)= n+1	$f(n) = n+n$	IE
A2	$f(n) = n$	$g(n) = n$	$f(n) = n+2$	$g(n)= n-2$	$f(n)= n-1$	f(n)= n+1	NE	NP
A3	$f(n) = n$	$g(n) = n$	$f(n) = n+2$	$g(n)= n-2$	$f(n)= n-1$	f(n)= n+1	NE	NP
A4	$f(n) = n$	$g(n) = n$	$f(n) = n+2$	$g(n)= n-2$	$f(n)= n-1$	f(n)= n+1	$f(n) = n+n$	IE
A5	$f(n) = n$	$g(n) = n$	$f(n) = n+2$	$g(n)= n-2$	$f(n)= n-1$	$f(n)= n+1$	NE	NP
A6	$f(n) = n$	$g(n) = n$	$f(n) = n+2$	$g(n)= n-2$	$f(n)= n-1$	$f(n)= n+1$	NE	NP
A7	$f(n) = n$	$g(n) = n$	$f(n) = n+2$	$g(n)= n-2$	$f(n)= n-1$	NE	NE	NP
A8	$f(n) = n$	$g(n) = n$	NE	NE	NE	NE	NP	NP
TEC	8	8	7	7	7	6	2	2

Nota. NE = no evidencia una estructura; NP = no se le ha preguntado; IE = identifica una estructura, que es correcta, pero no podemos saber cuál es; TEC= total de niños que identifican una estructura correcta

Lo primero que observamos en la tabla 2 es que en todos los casos en los que los niños identifican una estructura, esta es correcta.

Para la función $f(n) = n$, todos los niños identificaron la estructura, tanto en la forma directa como inversa. Esto lo veníamos observando desde el comienzo en gran grupo de la primera sesión, incluso entre todos llegaron a una expresión verbal de la generalización. De forma espontánea, identificaron que el número de palmadas y el de la casilla donde se escondía el tesoro eran el mismo.

Para la forma directa de la función, para $f(n)= n + 2$ y $f(n) = n - 1$, todos los niños salvo A8 identificaron correctamente la estructura subyacente. Los niños, rápidamente, a partir de un par de casos particulares, dieron la respuesta correcta para otros casos particulares.

Con $f(n) = 2n$, a A8 no le planteamos el trabajo con esta función a raíz de los resultados obtenidos en las anteriores. A1 y A4 identificaron una estructura aditiva, de la forma $f(n) = n + n$. Dado un valor concreto n, cuentan sobre el tablero n casillas, se paran y vuelven a contar n casillas.

Al trabajar con la forma inversa, para $f(n)= n + 2$ y $f(n) = n - 1$, siete de los ocho niños identificaron la estructura. En algunos casos no llegaron a expresar la estructura identificada verbalmente, pero se aprecia claramente como la identificaron en su acción con el material.

En el siguiente fragmento mostramos como A2 expresó la estructura identificada para la inversa de $f(n) = n - 1$.

> I (investigadora): A2, el tesoro está escondido en el uno, ¿cuántas palmadas te dirá Sara que tienes que dar?
>
> A2: Si está escondido en el uno, entonces tienes que dar dos palmadas y así te tienes que adelantar otro y allí estaría.

Además, este niño se acompañó de gestos que indicaban con claridad que identificaba la relación funcional subyacente y la expresaba.

Con $f(n) = 2n$, solo se ha planteado el problema a A1 y A4. Esto se debe, en el caso de A8, a los resultados obtenidos para las funciones anteriores y en el resto de casos a sus respuestas con la función directa.

En los siguientes fragmentos podemos observar la estructura identificada por A1 y A4 para $f(n) = 2n$.

> I: Sara me dice que de seis palmadas. ¿Dónde estará el tesoro?
>
> A1: Si das seis, cuento seis y otros seis.
>
> A1: Y si das cuatro, cuento cuatro y otros cuatro y son ocho.
>
> (.......)
>
> I: Sara me dice que de seis palmadas. ¿Dónde estará el tesoro?
>
> A4: Hay que sumarle el mismo número.

Observamos que A4 da una expresión general.

A1 y A4 con la función inversa descubren la regularidad, pero lo hacen sin hablar, solo manipulando, por lo que es complicado evidenciar la estructura que han identificado.

CONCLUSIONES

Este trabajo evidencia que los niños del último curso de educación infantil, a partir de casos particulares, son capaces de identificar estructuras, tanto para la forma directa como para la inversa de diferentes funciones lineales: $f(n)= n$, $f(n)= n + 2$, $f(n) = n- 1$, $f(n) = 2n$.

Encontramos unos resultados que difieren de los de nuestros antecedentes (Pinto y Cañadas, 2017; Torres et al., 2018; Torres et al., 2021). En estas investigaciones podemos observar que los niños utilizan distintas estructuras para una misma función, algunas de ellas incorrectas. En cambio, en nuestra investigación, destacamos que cuando identifican una estructura esta es correcta en todos los casos. Además, muestran una estabilidad ya que continúan identificando la misma estructura.

Los resultados obtenidos parecen evidenciar que el orden establecido para trabajar con las funciones es el adecuado porque es con las dos últimas con las cuales algunos niños no han conseguido identificar estructuras.

Los niños han estado motivados en todo momento, incluso pedían a su tutora volver a jugar con Lina y con Sara. Esto es de gran interés teniendo en cuenta lo complicado que es que los alumnos de estas edades mantengan el interés por una actividad durante tiempo y que estén atentos. Parece que la presentación de las tareas mediante la escenificación con las marionetas ha influido en los resultados obtenidos. Concretamente con la tarea planteada con la función inversa, ya que el hecho de tomar el rol de la profesora les ha motivado y podemos pensar que haya tenido mucho que ver en los resultados obtenidos.

Podría ser interesante que este tipo de investigación se llevara a cabo con problemas en otros contextos y situaciones como forma de complementar este estudio y así decidir si el contexto y las herramientas utilizadas influyen en las respuestas que los niños proporcionan.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte de los proyectos con referencias EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España.

Referencias

Ahlcrona, M. F. (2012). The puppet's communicative potential as a mediating tool in preschool education. *International Journal of Early Childhood*, *44*(2), 171-184.

Anglada, M. L. y Cañadas, M. C. (2021). Correspondencia y generalización de estudiantes de último curso de educación infantil. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 121-128). SEIEM.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. J. Hoines y A. Fuglestad (Eds.*), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). PME.

Carraher, D. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). NCTM.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la infancia, 6* (2) 1-13.

Dienes, Z. P. (1971). *Estados y operadores*. Teide.

Finkel, B. (1984). El títere y lo titiritesco de la vida del niño. Plus Ultra

Gardner, H. E. (2000). *Intelligence reframed: Multiple intelligences for the 21st century*. Hachette.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (6ª ed.). McGraw-Hill

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of alg*ebra (Vol. 4, pp. 33-56). NCTM.

Moss, J. y McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. En J. Cai, E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 277-301). Springer.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Functional thinking and generalisation in third year of primary *school*. En D., Thèrèse; G., Ghislaine (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 472-479). ERME

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM.

Torres, M., Cañadas, M., Moreno, A. y Gómez, P. (2021). Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años. *Uniciencia, 35*(2), 1-16. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.16

Warren, E., Cooper, T. J. y Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(3), 208-223.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.

Willoughby, S. S. (1997). Functions from Kindergarten through Sixth Grade. *Teaching Children Mathematics, 3*(6), 314-318.

ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE UNA LECCIÓN DE UN FUTURO PROFESOR DE SECUNDARIA

Analysis of the implementation of a lesson of a future secondary teacher

Aráuz, D. F.[a], Sánchez-Matamoros, G.[b], Moreno, M.[c] y Valls, J.[c]

[a]Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua-León, [b]Universidad de Sevilla, [c]Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de este estudio de caso es determinar la gestión de aula de un estudiante para profesor de matemáticas de secundaria, José, al implementar una lección, desde el modelo teórico de Stein et al. (2008) y el extendido de Mercer (1995). Se hizo un análisis cualitativo en tres etapas de la transcripción de la lección video-grabada en una clase de 10º grado (15-16 años). Los resultados indican que en la gestión de aula de José se contemplan las tres fases de Stein et al. (2008). Las interacciones fueron individuales y grupales durante la fase de discusión. José favoreció la discusión con los estudiantes a través de una variedad de explicaciones, preguntas y/o reformulaciones de estas, a partir de las respuestas de los estudiantes. La gestión de aula no fue todo lo productiva que cabía esperar por la riqueza del tipo de preguntas planteadas por José debido a que confirmó respuestas ambiguas y no respondió a dudas planteadas por una estudiante.

Palabras clave: *estudiante para profesor de matemáticas de secundaria, implementación de una lección, análisis del discurso, interacciones en el aula.*

Abstract

The aim of this case study is to determine the classroom management of a prospective secondary mathematics teacher, José, when implementing a lesson, from the theoretical framework of Stein et al. (2008) and the extended of Mercer (1995). A three-stage qualitative analysis of the transcript of the video-recorded lesson in a 10th-grade class (15-16 years old) was conducted. The results indicate that all three phases of Stein et al. (2008) were considered in José's classroom management. The interactions that took place in the discussion phase were individual and group interactions. José encouraged students' learning through a variety of explanations, questions, and/or reformulations of these, based on the students' answers. Classroom management was not as productive as we would hope due to the richness of the variety of questions proposed by José, because he confirmed ambiguous answers, and he did not respond to doubts raised by students.

Keywords: *prospective secondary mathematics teacher, implementation of a lesson, discourse analysis, classroom interactions.*

INTRODUCCIÓN

Una de las actividades propias del docente es la gestión de aula cuando este implementa lecciones. Siguiendo un modelo sociocultural de construcción del conocimiento surge la idea de discusiones

Aráuz, D. F., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Valls, J. (2022). Análisis de la implementación de una lección de un estudiante para profesor de secundaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 159-167). SEIEM.

productivas con la clase, entendidas estas como los momentos propiciados por el profesor para favorecer el aprendizaje de los contenidos matemáticos por los estudiantes (Stein et al., 2008). Los profesores y los alumnos contribuyen a la coproducción del conocimiento en el aula, pero los profesores tienen una contribución clave en la gestión del aprendizaje a través del discurso, denominado por Mercer (1995) construcción guiada del conocimiento. A través de las interacciones en el aula el profesor debe conducir a los estudiantes a una comprensión adecuada de las ideas matemáticas partiendo de los conocimientos previos de los estudiantes (Conner et al., 2014). Según Muijs y Reynolds (2001) un profesor favorece el aprendizaje de los estudiantes si su discurso se centra en tres factores: la explicación, el cuestionamiento y la interacción. Por ejemplo, una interacción entre el profesor y los estudiantes puede iniciarse con una pregunta o indicación del profesor que espera la contribución de los estudiantes. Si no recibe ninguna aportación, puede responder reformulando la pregunta o bien dando pistas, pero si recibe alguna contribución, puede responder confirmando o rechazando, reformulando las respuestas de los estudiantes, etc.

La enseñanza interactiva supone instrucción directa, esto es, el profesor escucha, responde a los estudiantes, proporciona instrucciones y/o da explicaciones claras (Muijs y Reynolds, 2001). Las interacciones en el aula entre el profesor-estudiante proporcionan una representación de la enseñanza (Conner et al., 2014 y Martin et al., 2005) que permiten evidenciar cómo los estudiantes construyen el conocimiento. Por otro lado, el discurso del profesor es analizable, interpretable y explicable. Analizable a través de las interacciones entre el profesor y los estudiantes; interpretable en función del propósito o intención pedagógica del profesor y explicable en la medida que un análisis detallado del discurso proporciona explicaciones de la construcción social del conocimiento generado en el aula (Glover, 2018).

La investigación sobre el discurso del profesor en el aula se inició a mediados del siglo XX (p. ej., Flanders, 1964) y se sigue desarrollando en la actualidad (p. ej., Mercer, 1995; Sfard, 2001; Glover, 2018). Algunas investigaciones se han focalizado en las explicaciones del profesor sobre un concepto (p. ej., Cantoral y Reséndiz, 2003), en la construcción del discurso de la práctica matemática (p. ej., Planas, 2005), en los tipos de preguntas que los profesores priorizan en la interacción con sus alumnos (p. ej., Radovic y Preiss, 2010), en los procesos de pensamiento matemático (p. ej., Preiss et al., 2011), en la selección, secuenciación de ejemplos y explicaciones durante la resolución de problemas (p. ej., Planas et al., 2016), etc. En general, las cuestiones abordadas en el discurso del profesor dan información tanto de cuestiones lingüísticas como didácticas: quién habla, de qué se habla, qué preguntas se plantean, etc. Principalmente estas investigaciones se han desarrollado sobre el discurso en el aula del docente de primaria y secundaria y, en menor medida, en el de futuros profesores.

En este trabajo se pone el foco de atención en la implementación de una lección realizada por un estudiante para profesor de secundaria durante sus prácticas profesionales a través de la gestión de la discusión en el aula y de las interacciones de este con los estudiantes.

Por tanto, el objetivo de este estudio es determinar la gestión de aula de un estudiante para profesor de matemáticas de secundaria, José, al implementar una lección, durante su práctica de enseñanza.

MARCO TEÓRICO

En este estudio utilizaremos dos lentes vinculadas a la teoría sociocultural para analizar la implementación de una lección de un futuro profesor en el aula: Stein et al. (2008) sobre la gestión de la discusión en el aula y una extensión de Mercer (1995) sobre la construcción guiada del conocimiento a partir de las interacciones en el aula.

Modelo teórico de Stein et al. (2008)

Este modelo proporciona una guía útil para involucrar a los estudiantes en discusiones productivas, las cuales se consideran claves en la enseñanza de las matemáticas. Según Stein et al. (2008), la gestión del aula se divide en tres fases: Presentación, Exploración y Discusión. En la fase de presentación, el profesor expone el contenido, objetivos de la lección y tareas matemáticas. En la fase de exploración, los estudiantes trabajan sobre las tareas matemáticas, a menudo, discutiéndolas en parejas o grupos pequeños, y el profesor les anima a resolverlas mientras monitoriza las resoluciones de los estudiantes. Es precisamente durante este momento cuando el profesor selecciona las respuestas y las secuencia para la fase de discusión. En la fase de discusión, se ponen en común las resoluciones de los estudiantes seleccionados y secuenciados por el profesor en la fase anterior, y esta fase concluye con las sugerencias del profesor a los estudiantes para que establezcan conexiones entre las ideas matemáticas surgidas de las estrategias usadas por los estudiantes en la resolución. A partir de aquí, el profesor puede proponer nuevas tareas que permitan al estudiante progresar en la comprensión del concepto abordado.

Modelo teórico extendido de Mercer (1995)

El marco de Mercer (1995) pone el foco en el profesor y se apoya en tres técnicas: provocar a los estudiantes para conocer su comprensión sobre un determinado concepto, responder a las contribuciones de los estudiantes y dar explicaciones sobre lo acontecido en el aula. En nuestro estudio hemos asumido estas técnicas como: Preguntas, Respuestas y Explicaciones, que constituirán nuestras categorías de análisis. Estas categorías a su vez se organizan en subcategorías.

Las Preguntas pueden ser: (1) con Pistas, en las que se proporciona una sugerencia para favorecer la contribución del estudiante; o (2) Directas, en las que no se proporciona ninguna sugerencia. Ambas pueden ser (a) cerradas, que no invitan ni a la reflexión ni al diálogo y se responden con un sí, un no o una breve respuesta; o (b) abiertas, que favorecen el feedback o retroalimentación e inciden en lo informativo, lo descriptivo y lo reflexivo. Suelen empezar con los pronombres interrogativos qué, cuándo, cuáles, cómo… (Mercer, 1995).

Dado que la intencionalidad de las preguntas del profesor no se puede establecer directamente con el modelo teórico de Mercer (1995), hemos adaptado algunas de las categorías de preguntas de Conner et al. (2014, p. 419) en apoyo de la argumentación colectiva. Las preguntas cerradas pueden ser, según su respuesta de: (i) sí o no, (ii) hechos matemáticos. Por su parte, las preguntas abiertas pueden requerir de: (i) explicación de cómo se hizo algo; (ii) comparación; (iii) interpretación de un hecho, diagrama, etc.; (iv) argumentación de alguna idea o hecho; (v) conjetura; (vi) generalización de alguna idea o hecho; (vii) reformulación de una idea o razonamiento anterior.

Las Respuestas del profesor pueden ser de: (1) Confirmación (sí, correcto, ok, etc.); (2) Rechazo (no, incorrecto, etc.); (3) Repetición de comentarios o ideas consideradas significativas, (4) Reformulación que ofrecen una versión revisada de lo dicho anteriormente; (5) Elaboración que ofrecen una versión extendida de lo dicho por un estudiante (Mercer, 1995).

Las Explicaciones que el profesor puede dar son: (1) Declarativas Nosotros, que se realizan sobre una experiencia anterior que es relevante para el momento en el que se hace la declaración; (2) Resúmenes, sobre aspectos del conocimiento compartido o conclusiones después de una discusión, pudiendo ser: (a) Literales, repiten el conocimiento compartido; (b) Reconstructivos, agregan más información (Mercer, 1995).

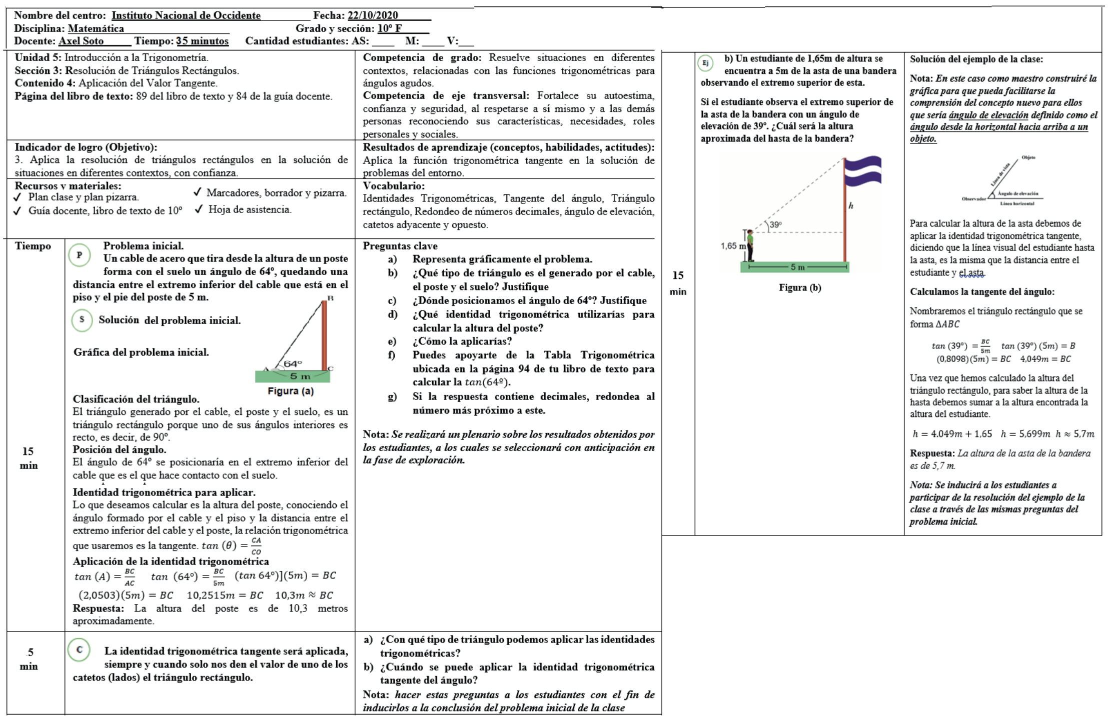
Las Explicaciones Declarativas Nosotros de Mercer (1995) han sido subcategorizadas por Glover (2018, p. 504) en: (a) Directas, en las que el profesor comparte los objetivos de la lección o aclara aspectos que requieren una atención particular; (b) Instructivas, en las que se proporciona a los estudiantes información de forma clara y estructurada; (c) Demostrativas, en las que se proporcionan evidencias; (d) Conectivas, en las que se dan indicaciones específicas, en momentos apropiados de la lección, para ayudar a los estudiantes a establecer relaciones; (e) De consolidación, en la que se refuerza, se desarrollan puntos y se fomenta la reflexión; (f) Evaluativas, en las que se identifican errores de los estudiantes como hechos positivos del aprendizaje o se examinan las justificaciones de las respuestas de los estudiantes.

En función del objetivo establecido nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Qué gestión de aula y tipos de interacciones se promueven por José en la enseñanza de una lección?

MÉTODO

En este estudio presentamos el caso de José, estudiante para profesor de secundaria, matriculado durante el curso 2020-2021, en la asignatura "Prácticas Profesionales IV" de tercer año de la carrera de Matemática Educativa y Computación de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua-León (UNAN-León). El objetivo de esta asignatura es aprender a planificar e implementar lecciones en aulas de secundaria. José, planificó una lección de una duración de 35 minutos para estudiantes de décimo grado (15-16 años), con el objetivo de aplicar la razón trigonométrica tangente de un ángulo a problemas del entorno, utilizando los recursos curriculares oficiales exigidos por el Ministerio de Educación. Para planificar la lección José usó los dos problemas de la guía docente, uno de ellos resuelto como ejemplo en el libro de texto (figura 1(a)), y que el profesor modificó añadiendo preguntas para guiar la reflexión del estudiante sobre la resolución. El otro (figura 1(b)) lo debían resolver los estudiantes, usando los conocimientos adquiridos en el problema anterior.


Nombre del centro: Instituto Nacional de Occidente **Fecha:** 22/10/2020
Disciplina: Matemática **Grado y sección:** 10º F
Docente: Axel Soto **Tiempo:** 35 minutos **Cantidad estudiantes:** AS: ____ M: ____ V:___

Unidad 5: Introducción a la Trigonometría.
Sección 3: Resolución de Triángulos Rectángulos.
Contenido 4: Aplicación del Valor Tangente.
Página del libro de texto: 89 del libro de texto y 84 de la guía docente.

Competencia de grado: Resuelve situaciones en diferentes contextos, relacionadas con las funciones trigonométricas para ángulos agudos.
Competencia de eje transversal: Fortalece su autoestima, confianza y seguridad, al respetarse a sí mismo y a las demás personas reconociendo sus características, necesidades, roles personales y sociales.

Indicador de logro (Objetivo):
3. Aplica la resolución de triángulos rectángulos en la solución de situaciones en diferentes contextos, con confianza.

Resultados de aprendizaje (conceptos, habilidades, actitudes): Aplica la función trigonométrica tangente en la solución de problemas del entorno.

Recursos y materiales:
✓ Plan clase y plan pizarra. ✓ Marcadores, borrador y pizarra.
✓ Guía docente, libro de texto de 10º ✓ Hoja de asistencia.

Vocabulario:
Identidades Trigonométricas, Tangente del ángulo, Triángulo rectángulo, Redondeo de números decimales, ángulo de elevación, catetos adyacente y opuesto.

Tiempo

15 min

P **Problema inicial.**
Un cable de acero que tira desde la altura de un poste forma con el suelo un ángulo de 64º, quedando una distancia entre el extremo inferior del cable que está en el piso y el pie del poste de 5 m.

S **Solución del problema inicial.**

Gráfica del problema inicial.

Figura (a)

Clasificación del triángulo.
El triángulo generado por el cable, el poste y el suelo, es un triángulo rectángulo porque uno de sus ángulos interiores es recto, es decir, de 90º.
Posición del ángulo.
El ángulo de 64º se posicionaría en el extremo inferior del cable que es el que hace contacto con el suelo.
Identidad trigonométrica para aplicar.
Lo que deseamos calcular es la altura del poste, conociendo el ángulo formado por el cable y el piso y la distancia entre el extremo inferior del cable y el poste, la relación trigonométrica que usaremos es la tangente. $tan\ (\theta) = \frac{CA}{CO}$
Aplicación de la identidad trigonométrica
$tan\ (A) = \frac{BC}{AC}$ $tan\ (64°) = \frac{BC}{5m}$ $(tan\ 64°)](5m) = BC$
$(2{,}0503)(5m) = BC$ $10{,}2515m = BC$ $10{,}3m \approx BC$
Respuesta: La altura del poste es de 10,3 metros aproximadamente.

Preguntas clave
a) **Representa gráficamente el problema.**
b) **¿Qué tipo de triángulo es el generado por el cable, el poste y el suelo? Justifique**
c) **¿Dónde posicionamos el ángulo de 64º? Justifique**
d) **¿Qué identidad trigonométrica utilizarías para calcular la altura del poste?**
e) **¿Cómo la aplicarías?**
f) **Puedes apoyarte de la Tabla Trigonométrica ubicada en la página 94 de tu libro de texto para calcular la** $tan(64º)$.
g) **Si la respuesta contiene decimales, redondea al número más próximo a este.**

Nota: ***Se realizará un plenario sobre los resultados obtenidos por los estudiantes, a los cuales se seleccionará con anticipación en la fase de exploración.***

5 min

C **La identidad trigonométrica tangente será aplicada, siempre y cuando solo nos den el valor de uno de los catetos (lados) el triángulo rectángulo.**

a) **¿Con qué tipo de triángulo podemos aplicar las identidades trigonométricas?**
b) **¿Cuándo se puede aplicar la identidad trigonométrica tangente del ángulo?**
Nota: ***hacer estas preguntas a los estudiantes con el fin de inducirlos a la conclusión del problema inicial de la clase***

15 min

Ej **b) Un estudiante de 1,65m de altura se encuentra a 5m de la asta de una bandera observando el extremo superior de esta.**

Si el estudiante observa el extremo superior de la asta de la bandera con un ángulo de elevación de 39º. ¿Cuál será la altura aproximada del hasta de la bandera?

Figura (b)

Solución del ejemplo de la clase:

Nota: ***En este caso como maestro construiré la gráfica para que pueda facilitarse la comprensión del concepto nuevo para ellos que sería ángulo de elevación definido como el ángulo desde la horizontal hacia arriba a un objeto.***

Para calcular la altura de la asta debemos de aplicar la identidad trigonométrica tangente, diciendo que la línea visual del estudiante hasta la asta, es la misma que la distancia entre el estudiante y el asta.

Calculamos la tangente del ángulo:

Nombraremos el triángulo rectángulo que se forma ΔABC

$tan\ (39°) = \frac{BC}{5m}$ $tan\ (39°)\ (5m) = B$
$(0{,}8098)\ (5m) = BC$ $4{,}049m = BC$

Una vez que hemos calculado la altura del triángulo rectángulo, para saber la altura de la hasta debemos sumar a la altura encontrada la altura del estudiante.

$h = 4.049m + 1{,}65$ $h = 5{,}699m$ $h \approx 5{,}7m$

Respuesta: *La altura de la asta de la bandera es de 5,7 m.*

Nota: Se inducirá a los estudiantes a participar de la resolución del ejemplo de la clase a través de las mismas preguntas del problema inicial.

Figura 1. Planificación realizada por José.

Instrumentos de recogida de datos

El instrumento de recogida de datos es la transcripción del vídeo de la implementación de la lección. En consecuencia, los datos son los diálogos de José con los estudiantes durante la resolución de los dos problemas que conforman la enseñanza de la lección planificada.

Análisis de los datos

Los datos se han analizado cualitativamente en tres etapas y han sido triangulados por los autores del estudio. En la primera etapa se identificaron las fases de gestión de aula (Stein et al., 2008) presentes en la implementación realizada por José. En la segunda se identificaron segmentos de la implementación que capturan interacciones entre el profesor y los estudiantes cuando construyen ideas o hechos matemáticos durante la fase de discusión. Estos segmentos los hemos denominado unidades de análisis (UA), identificando diez. En la tercera, se caracterizaron las preguntas, respuestas y explicaciones realizadas por José en función del marco teórico ampliado de Mercer (1995). Mostramos a continuación, un ejemplo del análisis de la UA1 en la tercera etapa, relativa a la pregunta realizada por José sobre el porqué de la representación del primer problema que se muestra en el libro. En esta unidad se da cuenta de la interacción entre José y Lesly (Tabla 1).

Tabla 1. Análisis de la UA1, sobre el porqué de la representación del primer problema.

1.	*José:* ¿Nos puede explicar lo que hizo?	Directa:explicativa/individual
2.	[Lesly no contesta]	No hay contribución
3.	*José:* Yo sé que ha hecho la gráfica que aparece en el libro de texto, pero ¿por qué hizo el gráfico así?	Con pista: argumentativa /Individual
4.	*Lesly:* Porque el cable tiene al poste y así se representa la altura del poste	Hay contribución
5.	*José*: Ok, como se tiene la altura del poste por eso se forma la gráfica.	Confirmación y Reformulación

RESULTADOS

En esta sección se describe la gestión de aula llevada a cabo por José durante la implementación de la lección, a través de las fases de la gestión de aula de Stein et al. (2008), centrándonos en la discusión en el aula mediante las interacciones entre el profesor y los estudiantes.

Fase de Presentación

Esta fase está presente en la gestión de los dos problemas. Inicialmente, José plantea a los estudiantes las preguntas guías para favorecer la reflexión sobre la representación del enunciado del primer problema (figura 1(a)), la pertinencia del uso de la razón trigonométrica tangente y del redondeo del valor obtenido. En la implementación del segundo problema, José usa nuevas preguntas guías, que no habían sido planificadas, para consolidar los aprendizajes adquiridos en el problema inicial aplicándolos a una nueva situación en la que se introduce el ángulo de elevación (figura 1(b)). En esta fase, el discurso de José se construye con explicaciones declarativas del tipo directas en las que aclara aspectos que requieren una atención particular, como por ejemplo: "Bien, entonces yo sé que la resolución está en el libro de texto, pero lo que quiero es que respondáis a las cinco preguntas"; y explicaciones de tipo resumen literal para explicar el concepto de ángulo de elevación, como por ejemplo: "Chicos, les explico la figura [figura 1(b)] porque he introducido un concepto nuevo y es el ángulo de elevación, ángulo formado con la horizontal y el objeto que se encuentra arriba".

Fase de Exploración

Esta fase solo se observa durante la resolución del primer problema cuando José da un tiempo para que los estudiantes individualmente contesten a las preguntas planteadas. Durante esta fase el profesor, observa que los estudiantes copian la resolución del libro. En esta fase su discurso es organizativo al dar instrucciones del tipo: tienen desde ahora 5 minutos para trabajar, yo pasaré por sus asientos observando su trabajo y mientras pasaré lista, o bien al hacer preguntas retóricas de seguimiento sobre el trabajo de los estudiantes, como, por ejemplo, ¿cómo vamos?, ¿vamos bien?, ¿ya terminaron todos?

Fase de Discusión

En la fase de discusión se perciben dos tipos de interacciones. Durante la discusión del primer problema las interacciones fueron individuales (José-estudiante) y grupales (José-grupo clase). Las interacciones grupales son fruto de la no contribución de la estudiante Lesly a las preguntas de José, lo que le obliga a trasladar la interacción individual a una grupal (figura 2).

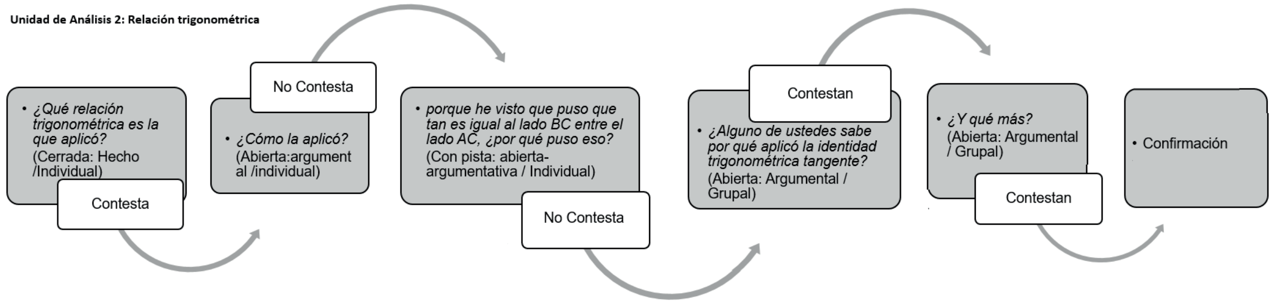


Figura 2. Ejemplo de interacciones individuales y grupales en el primer problema.

José inicia la interacción realizando preguntas individuales directas de hecho o directas de tipo explicativo o argumentativo a la estudiante Lesly. Cuando la interacción se inicia con una pregunta directa de hecho, tanto si obtiene o no respuesta de la estudiante, José plantea una nueva pregunta directa explicativa/argumentativa. Si obtiene respuesta a esta pregunta, José confirma y/o reformula la respuesta de la estudiante. Si no obtiene respuesta, plantea una pregunta con pista de tipo explicativo o argumentativo individual. Solo cuando no hay respuesta a esta pregunta individual se traslada la misma pregunta o parecida al grupo. Todas concluyen con una confirmación y/o reformulación por parte de José, iniciándose un nuevo ciclo de interacciones. Para representar la secuencia de interacciones tomamos la idea del diagrama de interacciones de Martin et al. (2005) (figura 3).

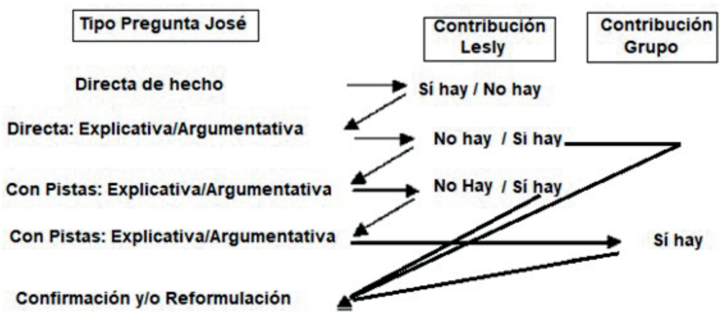


Figura 3. Diagrama de interacciones individuales y grupales.

Durante la discusión del segundo problema solo se dieron interacciones grupales. Todas las interacciones son iniciadas por José, excepto en una ocasión que la inicia una estudiante (figura 4 (c)). Las interacciones iniciadas por José pretenden objetivos distintos. Unas se focalizan en establecer las semejanzas y diferencias entre los dos problemas propuestos, para ello José inicia la interacción con las siguientes preguntas: ¿Cómo podemos encontrar a que altura está la bandera?, ¿Tiene alguna relación con el problema anterior? (preguntas directas: interpretativas, de sí-no), que generaron el diagrama de interacción que se muestra en la figura 4 (a). Otras, se centran en la obtención del cateto opuesto del triángulo rectángulo y en la altura del asta de la bandera, (figura 1 (b)), a través de preguntas del tipo: ¿cuánto vale la base del triángulo? (directa: de hecho); ¿a qué es igual la relación trigonométrica tan A, en este triángulo? (directa: explicativa); [...] hemos hallado el valor del cateto opuesto en el triángulo, pero ¿cómo encontrar la altura h del asta de la bandera? (con pistas: explicativas), que generaron el diagrama de interacción que se muestra en la figura 4 (b). Todas las interacciones terminan en confirmaciones y/o consolidación.

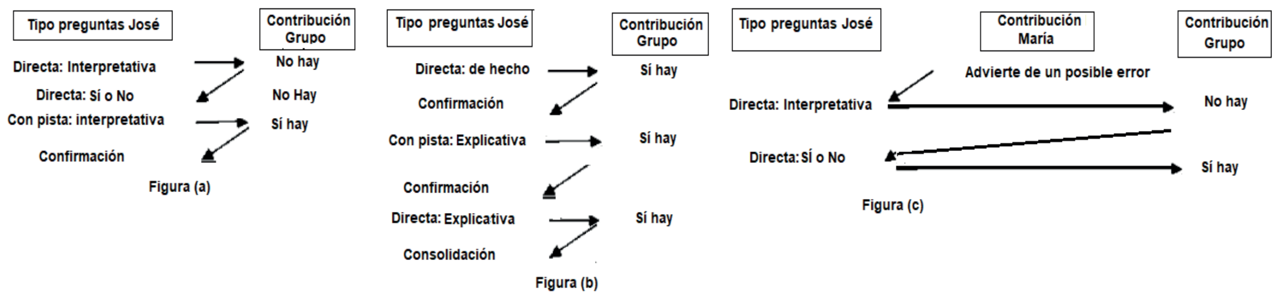


Figura 4. Diagrama de interacción grupal.

En la interacción iniciada por la estudiante María, sobre la falta de un cero en la respuesta de José, tal como se evidencia en la Tabla 2, este plantea una pregunta abierta interpretativa al grupo: **¿qué pasa con ese cero**?, al no tener respuesta, abandona esta pregunta interpretativa por una de sí-no: **¿**es necesario ponerlo?, y cierra esta interacción con la respuesta de Luis: no, sin responder a la duda de María. Esta interacción responde al diagrama mostrado en la figura 4 (c).

Tabla 2. Interacción iniciada por la estudiante María (UA9).

1.	José: Por tanto, 4.049 = co [*José resuelve la multiplicación en plenario con participación de los estudiantes]*	444 0,8098 x5 4,0490	Consolidación
2.	María: Falta un cero en la respuesta, profesor		Observación de la estudiante
3.	José: ¿Qué pasa con ese cero?		Directa: abierta/interpretativa/grupal
4.	[No contestan]		No contribución
5.	José: ¿Es necesario ponerlo?		Directa: cerrada/sí-no/grupal
6.	Luis: No		Contribución
7.	José: ahora, ¿el valor encontrado es la altura de la asta?		Directa: cerrada/sí-no/grupal

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio ha sido determinar la gestión de aula de un estudiante para profesor de matemáticas de secundaria, José, al implementar una lección, durante su práctica de enseñanza.

El futuro profesor durante su implementación de la lección ha tenido en cuenta las fases de gestión de aula de Stein et al. (2008). Según estos autores la fase de exploración debe permitir al profesor seleccionar y secuenciar respuestas variadas de estudiantes, además de interaccionar con ellos para apoyar la resolución de la tarea. Sin embargo, José, en la fase de exploración del primer problema, planteó preguntas retóricas que no ayudaron a los estudiantes a responder las preguntas guía propuestas en la fase de presentación y los estudiantes se dedicaron a trascribir la resolución del libro, en consecuencia, no pudo seleccionar y secuenciar las respuestas de los estudiantes para la fase de discusión. Este hecho podría explicarse desde la inexperiencia de José como profesor y desde el arraigo del modelo tradicional de enseñanza en las escuelas de secundaria del país, el cual no favorece las discusiones en el aula. Para la gestión de la resolución del segundo problema, José aprovechó su experiencia de la discusión del primer problema, para generar, sin planificación previa, nuevas preguntas guías, lo que evidencia la capacidad de toma de decisiones de José durante la enseñanza.

Las interacciones con sus estudiantes solo se realizaron en la fase de discusión y estas han estado sujetas a las decisiones que tomó en función de cómo los estudiantes iban respondiendo a cada una de sus preguntas, lo que le llevó a pasar de interacciones individuales y grupales a únicamente grupales, al considerar que podría contar con las contribuciones de algunos estudiantes. Este hecho favoreció la participación e integración del grupo clase, por la variedad y tipo de preguntas planteadas. No solo planteó preguntas directas cerradas: sí-no y/o, de hecho, que no favorecen la participación de los estudiantes, sino que también realizó preguntas directas: explicativas o argumentativas, recurriendo, cuando era necesario, a preguntas con pistas para provocar una mayor participación (Radovic y Preiss, 2010) y lograr una enseñanza efectiva (Glover, 2018).

Cantoral y Reséndiz (2003), Muijs y Reynolds (2001) y Planas et al. (2016) coinciden en que uno de los factores para favorecer el aprendizaje de los estudiantes son las explicaciones y/o respuestas que el profesor realiza durante la interacción en el aula. José realizó varias explicaciones y confirmó y/o reformuló las respuestas de los estudiantes, pero al no haber profundizado en algunas de las preguntas planteadas (Tabla 2) o haber confirmado y/o reformulado contribuciones incompletas o ambiguas (Tabla 1, Línea 4 y 5) ha impedido que la gestión de aula realizada no fuera lo productiva (Stein et al., 2008) que cabía esperar en función de la variedad de preguntas y explicaciones realizadas (Glover, 2018).

Los diagramas de interacciones dan cuenta del tipo de discusiones que ocurrieron en el aula entre José y los estudiantes y de la variedad de preguntas realizadas por José. Estas interacciones, en general, finalizaron con una confirmación o reformulación que daba respuesta a la idea matemática con la que se iniciaba la interacción, lo que permitió a los estudiantes progresar en el aprendizaje. No obstante, encontramos un diagrama de interacción que no favorece el aprendizaje (figura 4 (c)) en el que la interacción es iniciada con una aseveración incorrecta de una estudiante y que José finalizó al aceptar la respuesta de otro estudiante, la cual no permitió a la estudiante superar su error resolvía la duda planteada (Tabla 2).

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido ayuda del proyecto: PID2020-116514GB-I00 “Ministerio de Economía y Competitividad, Gobierno de España”.

Referencias

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(2), 133-154.

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A. y Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 401-429.

Flanders, N. A. (1964). *Interaction analysis in the classroom: A manual for observers*. School of Education, University of Michigan.

Glover, P. (2018). How to evaluate the effectiveness of teacher talk. *International Online Journal of Education and Teaching, 5*(3), 497-512. http://iojet.org/index.php/IOJET/article/view/473/249

Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W. y Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics, 60*(1), 95-124.

Mercer, N. (1995). *The guided construction of knowledge: Talk amongst teachers and learners*. Multilingual Matters Ltd.

Muijs, D. y Reynolds, D. (2001). *Effective teaching: Evidence and practice*. Sage.

Planas, N. (2005). El papel del discurso en la construcción del Discurso de la práctica matemática. *Cultura y Educación, 17(*1), 19-34. https://doi.org/10.1174/1135640053603283

Planas, N., Fortuny, J. M., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2016). El discurso matemático del profesor: Explicaciones, ejemplos y coherencia local. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 437-446). SEIEM.

Preiss, D., Larraín, A. y Valenzuela, S. (2011). Discurso y pensamiento en el aula matemática chilena. *Psykhe (Santiago)*, *20*(2), 131-146.

Radovic, D. y Preiss, D. (2010). Patrones de discurso observados en el aula de matemática de segundo ciclo básico de Chile. *Psykhe (Santiago)*, *19*(2), 65-79.

Sfard, A. (2001). Learning mathematics as developing a discourse. En R. Speiser, C. Maher y C. Walter (Eds.), *Proceedings of 21st Conference of PME-NA* (pp. 23-44). Clearing House for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

EL ESQUEMA DE DERIVADA EN LA RESPUESTA DE UN ESTUDIANTE A TAREAS DE CINEMÁTICA: ESTUDIO DE CASO

Derivative schema in the answer of a student to kinematic's tasks: study case

Bermejo-Luna, M. V. y Sánchez-Matamoros, G.

[a]Universidad de Sevilla

Resumen

El aprendizaje del concepto de derivada ha sido ampliamente estudiado en Didáctica de las Matemáticas, debido a que es fundamental en la construcción del aprendizaje del Análisis Matemático. Así mismo, son muchos los estudios que investigan el aprendizaje de este concepto aplicado a otras ramas de conocimiento. Nuestra investigación se centra, en particular, en la aplicación del concepto de derivada a la Cinemática. Nuestro objetivo es analizar el uso que hace los estudiantes de Bachillerato del concepto de derivada cuando resuelve tareas en el contexto de la Cinemática, para ello hemos adoptado la Teoría APOS como marco teórico. Presentamos en esta comunicación, un estudio de caso, en el que los datos proceden de las respuestas de un estudiante de 2º de Bachillerato a un cuestionario de cuatro tareas. Con él se muestra una evidencia de cómo el desarrollo del esquema de la derivada permite que se establezca la transferencia de conocimiento entre ambas materias.

Palabras clave: *cinemática, derivada, esquema, estudio de caso, teoría APOE, transferencia de conocimiento.*

Abstract

How the concept of the derivative is learnt has been widely studied in Didactics of Mathematics. It is essential in the process of learning Calculus. Likewise, there are many studies that investigate how this concept is learnt applied to other branches of knowledge. Our research focuses, in particular, on the application of the derivative concept to Kinematics (the branch of Physics that studies motion). Our aim is to analyze the use that high school students make of the concept of derivative when they solve tasks in the context of Kinematics. For this, we have adopted the APOE theory as a theoretical framework. We present in this communication a case study. The data comes from the answers of a last year high school student to a four-task questionnaire. Evidence is shown of how the development of the derivative schema allows the transfer of knowledge between both subjects.

Keywords: *APOS theory, derivative, kinematics, schema, study case, knowledge transfer.*

INTRODUCCIÓN

Si analizamos detenidamente el currículo español para las materias de Matemáticas y Física, observamos que la relación evidente que se establece de manera histórica entre ambas disciplinas aparece de forma poco explícita o incluso confusa. Un ejemplo claro lo encontramos en el estudio de la Cinemática (rama de la Física que estudia el movimiento sin atender a los motivos que lo provocan); donde pese a que el estudio del concepto de la velocidad media aparece en 2º de la ESO no es hasta 4º de la

Bermejo-Luna, M. V. y Sánchez-Matamoros, G. (2022). El esquema de derivada en la respuesta de un estudiante a tareas de cinemática: estudio de caso. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 169-177). SEIEM.

ESO, donde se estudia en Matemáticas el concepto subyacente al mismo de tasa de variación media (Real Decreto 1105/2014).

Dentro de las Didácticas de las Matemáticas hay conceptos matemáticos cuyo aprendizaje han sido muy estudiados, es el caso del concepto de derivada puesto que su aprendizaje es uno de los pilares que sustenta toda la construcción del Análisis Matemático (Fuentealba et al., 2019). Así mismo, son muchos los estudios que investigan el aprendizaje de este concepto aplicado a otras ramas de conocimiento como pudieran ser, la Economía (Ariza y Llinares, 2009) o la Física (Carli et al., 2020; Christensen y Thomson, 2012; Susac et al,, 2018).

En su estudio Christensen y Thomson (2012) investigan el uso que hacen los estudiantes de la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente cuando responden tareas en ambos contextos, matemático y físico; concluyendo que los estudiantes tienen dificultades en tareas matemáticas que son similares a las que se preguntan en el contexto de física, indicando que algunas de las dificultades para que se establezca la transferencia de conocimiento tienen su origen en la comprensión de los conceptos matemáticos. Asimismo, Susac et al. (2018) en su investigación concluyen que aquellos estudiantes que han estudiado Física tienen menos dificultades en la interpretación geométrica de la derivada que aquellos que no han estudiado Física. Por otra parte, Carli et al. (2020) en su estudio sobre el uso que hacen los estudiantes a los conceptos de derivada, integral y vector en ambos contextos, físico y matemático, concluyen que dominar el contexto de la matemática no es garantía de éxito en la resolución de estas tareas en el contexto físico.

El objetivo de nuestra investigación es estudiar el uso que hacen los estudiantes de 2º de Bachillerato (17-18 años) del esquema de derivada en la resolución de problemas de Cinemática. En particular, presentamos un estudio de caso en el que se muestra cómo el desarrollo del esquema de derivada nos da información de la transferencia de conocimiento entre ambas materias (Matemáticas y Física).

MARCO TEÓRICO

Teoría APOE

Para comprender cómo se desarrolla un concepto en la mente de un estudiante y cómo lo dota de sentido, en nuestra investigación consideramos la Teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) (Arnon et al., 2014). Acciones, procesos, objetos y esquemas, son las estructuras mentales que un estudiante construye a la hora de aprender un determinado concepto matemático, el paso por estas etapas no es necesariamente secuencial. El mecanismo para pasar de un estado de construcción de conocimiento matemático a otro es denominado como abstracción reflexiva. Los cinco tipos de mecanismos que propone este marco son: interiorización, coordinación, inversión, encapsulación y generalización; conllevan la construcción de las estructuras mentales de: acciones, procesos, objetos y esquemas.

Cuando una acción (transformación directa y externa) se repite y se interioriza da lugar a un proceso (estos se diferencian de las acciones de que pueden omitirse e imaginarse). El proceso se encapsula en un objeto (nuevas acciones se pueden aplicar sobre el mismo) sobre el que se puede observar de forma estática todas las características. Los objetos y procesos pueden coordinarse para formar nuevos objetos y procesos. Finalmente, el conjunto de acciones, procesos y objetos pueden agruparse en un esquema. Así mismo, todos estos mecanismos pueden darse de forma inversa.

Dentro de la teoría APOE, otro concepto fundamental es el de la descomposición genética, ésta es un modelo hipotético que describe las estructuras mentales que un estudiante debe construir en el aprendizaje de un concepto. En el caso del concepto de derivada hemos adaptado para esta investigación la descomposición genética del esquema de la derivada presentada por Font et al. (2016) al contexto de la Cinemática.

El esquema propuesto por el marco teórico APOE no es una estructura estática, se desarrolla de forma dinámica y progresiva en un orden denominado "la tríada": Intra-, Inter- y Trans-. En particular, en el nivel Intra el estudiante se concentra en la repetición de una acción y reconoce algunas relaciones o transformaciones entre acciones sobre diferentes elementos del esquema. En el nivel Inter, el estudiante es capaz de construir relaciones y transformaciones entre los procesos y objetos que componen el esquema. Finalmente, cuando el estudiante toma consciencia de las relaciones y transformaciones posibles en el esquema y les da coherencia, se considera que el esquema construido está en el nivel Trans (Clark et al., 1997; Sánchez-Matamoros et al., 2006).

Transferencia de conocimiento

En 1999, Evans define la transferencia de conocimiento en Educación Matemática como la aplicación de la materia académica de Matemáticas fuera de su dominio, en este caso en el dominio de la Cinemática. Tomando como referencia el marco teórico propuesto por Rebello et al. (2017), la transferencia de conocimiento puede dividirse en dos tipos de asociaciones distintas: horizontales y verticales. Ésta primera, la transferencia de conocimiento horizontal, consiste en la activación de una estructura interna de conocimiento previo con la lectura de información explícita de un problema. Es este tipo de transferencia la que se puede poner de manifiesto en un estudiante que haya desarrollado el esquema de derivada. Por ejemplo, si un problema indica que un móvil se está moviendo a 10 metros/segundo, la transferencia horizontal se produce si el estudiante reconoce que dicha magnitud como la velocidad y lo puede conectar a la derivada de una función posición (Rebello et al. 2005)

METODOLOGÍA

Este trabajo asume un enfoque cualitativo de carácter descriptivo. Se diseñaron dos instrumentos para la selección de datos: un cuestionario (figura 1) y una entrevista clínica semiestructurada. El cuestionario fue respondido por Miguel, estudiante de 2º de Bachillerato (17 años) de la modalidad de Tecnología (optativas de Física y Dibujo Técnico), este estudiante en el momento de contestar el cuestionario había estudiado el concepto de derivada en Matemáticas I (en el curso anterior) y había cursado la asignatura de 1º de Bachillerato Física y Química.

Cuestionario

El cuestionario se diseñó a partir de la descomposición genética del esquema de derivada de Font et al. (2016) adaptada para esta investigación al contexto de la Cinemática. Es un cuestionario de respuesta abierta y consta de cuatro tareas que estudian el concepto de derivada aplicado a la Cinemática en sus dos registros de representación (algebraico-numérico y gráfico) con el carácter global (en un intervalo) y local (en un punto) de la misma (véase figura 1). En dicho cuestionario se pedía al estudiante las respuestas a las tareas y la justificación de las mismas. La transferencia de conocimiento horizontal entre las Matemáticas y la Física puede observarse en la resolución de cada tarea cuando el estudiante interpreta el significado físico de lo que le piden, asociándose la velocidad a la derivada de la función de posición o la aceleración a la segunda derivada de dicha función. Además, también puede evidenciarse que reconoce dichas magnitudes cuando el estudiante usa las unidades correctas a las magnitudes pedidas (de la posición, velocidad o aceleración).

Las tareas han sido adaptadas de investigaciones previas y de libros de texto propios de la etapa educativa (Ariza y Llinares, 2009; Azcárate, 1990; Fuentealba, 2017; Sánchez-Matamoros, 2004; Vizmanos et al., 2011).

Entrevista semiestructurada

Tras la realización de este primer cuestionario, se realizó una entrevista semiestructurada sobre las respuestas del estudiante al cuestionario. La entrevista se respondió en días posteriores a la realización del cuestionario, pues las preguntas que se hicieron tenían un carácter confirmatorio y se centraban en pedir una mayor justificación de la respuesta o en profundizar en la misma para poder clarificar cual había sido el proceso de resolución de la tarea por parte del estudiante en el cuestionario. Para ello, previamente a la realización de la entrevista, se examinaron las respuestas dadas por el estudiante a las diferentes tareas del cuestionario.

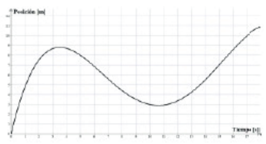
Además, en la entrevista se añadieron nuevas tareas en contexto de las matemáticas vinculadas a las tareas del cuestionario inicial en el contexto de la cinemática con el objetivo de confirmar si se estaba produciendo transferencia de conocimiento entre ambas materias, Matemáticas y Física (Planinic et al., 2012).

El procedimiento de análisis se ha realizado en dos fases considerando conjuntamente los datos procedentes de cuestionario y entrevista. En la primera fase, se analizó cada una de las tareas, considerando conjuntamente las respuestas dadas a cada una de las tareas del cuestionario y la entrevista. En la segunda fase del análisis, se analizó la resolución de todas las tareas.

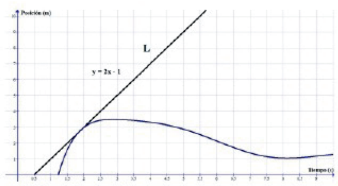
TAREA 1:
Indica la velocidad media de un móvil que se mueve en una única dimensión en los intervalos temporales [0,10], [10,20], [20,30] y [0,40] a partir de su posición en los distintos momentos:

Tiempo [s]	0	1 0	20	30	40
Posición [m]	0	33	41	56	100

TAREA 2:
A) Indica la velocidad media de un móvil que se mueve en una única dimensión en los siguientes intervalos temporales:
De 0 a 17 segundos.
De 0 a 11 segundos.
De 0 a 5 segundos.
De 0 a 2 segundos.
B)
a) ¿Hay algún intervalo dónde la velocidad media es nula? Si lo hubiera dibújalo sobre la gráfica. Justifica tu respuesta.
b) ¿Sabrías calcular la velocidad justo al comienzo del movimiento ? Justifica tu respuesta. ¿Podrías dibujarla?



TAREA 3:



Suponer que la recta L es tangente a la gráfica de la posición de un móvil respecto del tiempo en el punto (2,3). ¿Cuál sería su posición a los dos segundos? ¿Y su velocidad en dicho instante?

TAREA 4:
La distancia recorrida por un autobús en los cinco primeros segundos desde que sale de una parada viene dada por la función f(t)=t2+2 . ¿Qué velocidad llevará en el instante t=3 segundos?¿Y en el t=4 segundos?
¿Cuál será su velocidad instantánea para cualquier t? Justifica tu respuesta.

Figura 1. Cuestionario inicial para la recogida de datos.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos muestran que el desarrollo del esquema de la derivada, en el caso de Miguel, le permite establecer transferencia de conocimiento entre Matemáticas y Física.

El desarrollo del esquema de derivada de Miguel se evidencia a lo largo de la resolución de las diferentes tareas del cuestionario en las que el estudiante utiliza de forma correcta elementos matemáticos en el contexto de Cinemática (elementos de Cinemática) en diferentes registros de representación, y establece relaciones y coordinaciones lógicas entre ellos, poniéndose de manifiesto la síntesis entre los diferentes registros.

Así, tanto en la tarea 1 como en la tarea 2 (figura 1) aplica el elemento de la velocidad media como cociente incremental de la posición respecto al tiempo de forma correcta (figura 2).

Así mismo, en el apartado B de la tarea 2, cuando responde a la pregunta (apartado a, figura 1) de si hay algún intervalo donde la velocidad media sea nula afirma que "la velocidad media será nula $\leftrightarrow$ $\Delta x=0$, luego tendremos que buscar estos intervalos. Y son aquellos que tienen la misma posición inicial y final" (véase la figura 2). Muestra que domina el elemento de la Cinemática de la velocidad media, este elemento lo tiene encapsulado en un *objeto* del que hace uso para responder a dicho apartado.

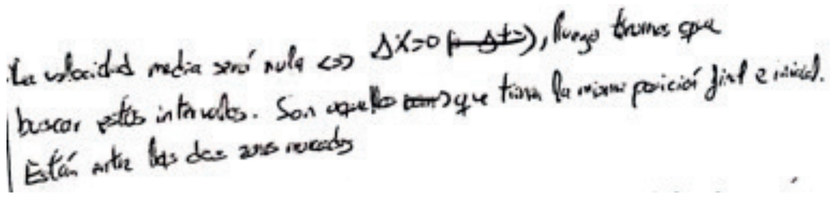


Figura 2. Respuesta del estudiante al apartado B de a la tarea 2.

Con respecto a la segunda pregunta del apartado B de la tarea 2, aunque el estudiante identifica la velocidad inicial como la pendiente de la recta tangente en el punto t=0 segundos, cuando se le pregunta sobre el valor que tiene dicha velocidad no responde a la pregunta.

En ambas tareas lee correctamente los datos de las magnitudes espacio y tiempo, y las relaciona para calcular la velocidad media. De igual forma, expresa todos los resultados con sus correspondientes unidades de medida, evidenciando la transferencia de conocimiento asociando la velocidad media a la tasa de variación media de la función de posición respecto al tiempo.

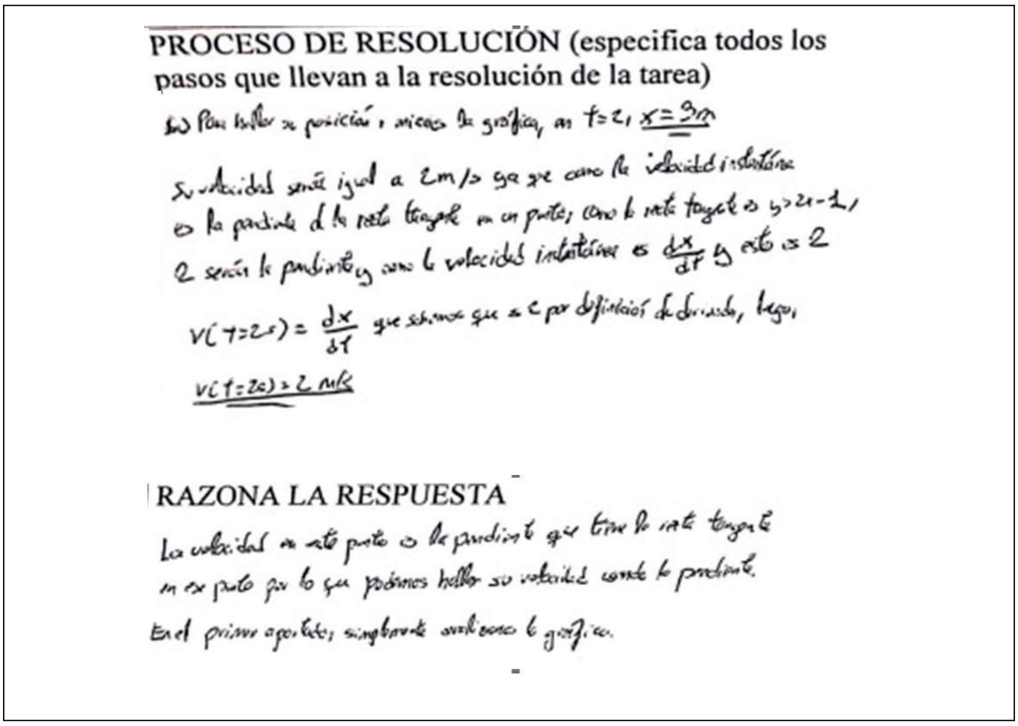
En la tarea 3, responde correctamente a la tarea preguntada (véase la figura 3). Utiliza el elemento de Cinemática en registro algebraico-numérico relativo a la velocidad instantánea; esto se evidencia cuando el estudiante escribe "la velocidad instantánea es dx/dt", también en el registro gráfico identificándola con la "pendiente de la recta tangente" en un instante determinado. En esta tarea se pone de manifiesto que el estudiante considera la velocidad en un instante dado tanto como la derivada de la posición con respecto al tiempo y como la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho instante en la gráfica Posición-Tiempo, manifestando la síntesis entre ambos registros algebraico-numérico y gráfico.

De igual forma, cuando se le pregunta en la entrevista por puntos de la gráfica con velocidades instantáneas negativas responde correctamente con el valor de un punto y lo justifica:

> Entrevistador (E): ¿Puedes decirme algún punto de la gráfica con velocidad instantánea negativa?
>
> Miguel (M): Cualquiera el que dx/dt sea menor que cero. A simple vista, supongo que estaría en este intervalo (2,75, 8).

Al igual que en las dos primeras tareas, Miguel contesta indicando las unidades de las medidas de las magnitudes correspondientes. Además, Miguel en su resolución, asocia la velocidad instantánea a la derivada de la función de posición respecto al tiempo, evidenciándose de nuevo la transferencia de conocimiento horizontal.

Pese a que en el cuestionario inicial deja la tarea 4 sin responder, justificándolo por "falta la velocidad, no tengo tiempo" en la entrevista responde correctamente a la tarea y escribe la solución a la misma. Utiliza los elementos de Cinemática algebraico-numéricos globales relativos a la velocidad instantánea en un cualquier instante de tiempo como la derivada de la posición para cualquier instante y las reglas de derivación, véase la figura 4, "$v=dx/dt=d(t^2+2)/dt=2t$".



PROCESO DE RESOLUCIÓN (especifica todos los pasos que llevan a la resolución de la tarea)

b) Para hallar su posición, miramos la gráfica, en $t=2$, $x=3m$

Su velocidad será igual a 2m/s ya que como la velocidad instantánea es la pendiente de la recta tangente en ese punto, como la recta tangente es $y=2x-1$, 2 será la pendiente y como la velocidad instantánea es $\frac{dx}{dt}$ y esto es 2

$v(t=2s)=\frac{dx}{dt}$ que sabemos que es 2 por definición de derivada, luego,

$v(t=2s)=2$ m/s

RAZONA LA RESPUESTA

La velocidad en este punto es la pendiente que tiene la recta tangente en ese punto por lo que podemos hallar su velocidad conociendo la pendiente.

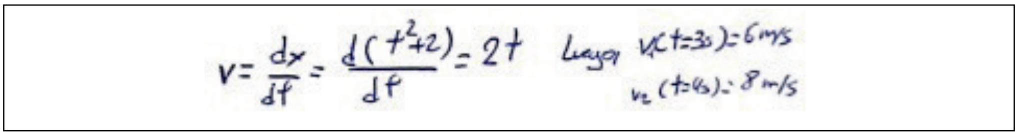
En el primer apartado, simplemente analizamos la gráfica.

Figura 3. Respuesta del estudiante a la tarea 3.

Así mismo, coordina estos elementos de Cinemática mediante la relación "y lógica" para resolver correctamente la tarea, sustituyendo en la función velocidad hallada el tiempo por 3s y por 4s, para encontrar la velocidad del móvil en los instantes que le pide la tarea. Aunque calcule también la posición, posteriormente es preguntado en la entrevista:

E: ¿Es necesario calcular la posición?

M: No, la calculo para que esté más completo



$v=\frac{dx}{dt}=\frac{d(t^2+2)}{dt}=2t$ Luego $v(t=3s)=6$ m/s $v_2(t=4s)=8$ m/s

Figura 4. Respuesta del estudiante a la tarea 4 en la entrevista.

La resolución correcta de la tarea 3 y 4 muestra que tiene los procesos de dichas tareas *encapsulados* en el objeto velocidad instantánea y que es capaz de aplicarlo en ambos registros tanto gráfico como algebraico-numérico.

En la entrevista, se le preguntó también:

> E: ¿Qué relación existe entre la posición y la velocidad?
>
> M: v=dx/dt la velocidad es la derivada de la posición respecto del tiempo.

Esto muestra que efectivamente tiene coordinado todos los elementos de la Cinemática necesarios para resolver estas tareas.

Así mismo, durante la entrevista se le facilitó al estudiante el enunciado de las tareas 1, 3 y 4 sin el contexto de la Cinemática. El estudiante identifica las tareas como similares a las originales exceptuando el cambio de contexto.

> M: Es exactamente la misma gráfica, pero en el primer cuestionario era una actividad con las derivadas aplicadas a un móvil y aquí te habla de una función cualquiera.

Miguel hace uso de diferentes elementos de la Cinemática, independientemente de su carácter local o global y su registro de representación gráfico o algebraico-numérico; por tanto, podemos categorizarlo en el nivel Trans de desarrollo del esquema. Además, este nivel también se caracteriza, por el establecimiento de relaciones en o entre los elementos que conforman el esquema, hecho que también se evidencia en la resolución de diferentes tareas del cuestionario en Miguel.

La transferencia de conocimiento entre las Matemáticas y la Física puede observarse en la resolución de cada tarea en la medida en la que Miguel interpreta el significado físico de lo que le piden, evidenciándose en el uso de las unidades correctas a las magnitudes pedidas (de la posición, velocidad o aceleración) y sólo utiliza los movimientos estudiados en la instrucción previa, movimiento rectilíneo uniforme y movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, cuando corresponde (tarea 4). Por tanto, Miguel transfiere horizontalmente el conocimiento entre la Física y la Matemática puesto que es capaz de leer las tareas propuestas de forma idéntica en ambos contextos, aplicar el concepto matemático subyacente al elemento de Cinemática y adecuar la respuesta según el contexto de la tarea.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El análisis de las respuestas al cuestionario de Miguel nos ha permitido inferir que se encuentra en el nivel Trans de desarrollo del esquema puesto que utiliza los elementos de Cinemática de velocidad media e instantánea en ambos registros de representación y establece relaciones entre ellos. Además, el desarrollo del esquema en este nivel le ha permitido transferir el conocimiento entre las dos áreas.

Tras el estudio de las respuestas de este estudiante, queda abierto al análisis de la tematización del esquema de derivada (Fuentealba et al., 2017) aplicado a la resolución de tareas de Cinemática por este estudiante.

Los resultados de este estudio están en coherencia con los concluidos por Christensen y Thompson (2012) y Susac et al. (2018), en sus investigaciones. Según Christensen y Thompson (2012) algunas de las dificultades para que se establezca la transferencia de conocimiento tienen su origen en la comprensión de los conceptos matemáticos; pero como se concluye en la investigación de Rebello et al. (2017) para que esta transferencia de conocimiento ocurra, es necesario que el estudiante tenga un esquema robusto en el contexto inicial pero además, debe saber cómo aplicar estos conceptos matemáticos a las tareas de física. Asimismo, respecto a la investigación de Susac et al. (2018), aquellos estudiantes que mostraban una mayor comprensión de los conceptos matemáticos, controlaban el contexto de la física y eran capaces de transferirlo a un contexto totalmente nuevo como el de las finanzas. Sin embargo, en otras investigaciones como la de Planinic et al. (2012) o la de Carli et al. (2020) consideran que tener un esquema robusto en el contexto inicial es insuficiente y que la dificultad de la transferencia de conocimiento entre ambas áreas radica en la separación de la Física y la Matemática en su enseñanza, haciendo que un mismo objeto sea identificado como distinto por los estudiantes dependiendo del contexto en el que se estudie. Para estos investigadores, reconocer las matemáticas en otro contexto requiere también entender bien el otro contexto (que a veces, falla), junto con conocimiento matemático (Planinic et al., 2012 p.1411). El estudio de esta cuestión será analizado con mayor profundidad en nuestra investigación.

Referencias

Ariza, Á. y Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de Derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 121-136.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory - A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Universitat Autònoma de Barcelona.

Carli, M., Lippiello, S., Pantano, O., Perona, M. y Tormen, G. (2020). Testing students ability to use derivatives, integrals, and vectors in a purely mathematical context and in a physical context. *Physical Review Physics Education Research*, *16*(1), 10111. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.010111

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., Tolias, G. y Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule? *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 345-364. https://doi.org/10.1016/s0732-3123(97)90012-2

Christensen, W. M. y Thompson, J. R. (2012). Investigating graphical representations of slope and derivative without a physics context. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *8*(2), 1-5. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.023101

Evans, J. (1999). Building bridges: Reflections on the problem of of transfer of learning in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *39*, 23-44. https://doi.org/10.1023/A:1003755611058

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E. y Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 107-122. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9639-6

Fuentealba, C. (2017). *Análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios*. *TDX (Tesis Doctorals en Xarxa)*. Universitat Autònoma de Barcelona.

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E. y Trigueros, M. (2017) Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(3), 374-392, https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1248508

Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G. y Cárcamo, A. (2019). The understanding of the derivative concept in higher education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(2). https://doi.org/10.29333/ejmste/100640

Planinic, M., Milin-Sipus, Z., Katic, H., Susac, A. y Ivanjek, L. (2012). Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(6), 1393-1414. https://doi.org/10.1007/s10763-012-9344-1

Real Decreto 1105/2014. *Boletín Oficial del Estado*, *Sec .I* (Num. 3), de 3 de enero de 2015, 169-546. https://www.boe.es/eli/es/rd/2014/12/26/1105/con

Rebello, N. S., Zollman, D. A., Allbaugh, A. R., Engelhardt, P. V., Gray, K. E., Hrepic, Z. e Itza-Ortiz, S. F. (2005). Dynamic Transfer: A Perspective from Physics Education Research. In J. P. Mestre (Ed.), *Transfer of Learning from a Modern Multidisciplinary Perspective*. Information Age Publishing Inc.

Rebello, N. S., Cui, L., Bennett, A. G., Zollman, D. A. y Ozimek, D. J. (2017). Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics. *Learning to Solve Complex Scientific Problems*, 223-246. https://doi.org/10.4324/9781315091938-10

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (Desarrollo del concepto).* Universidad de Sevilla.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, *24*(1), 85-98.

Susac, A., Bubic, A., Kazotti, E., Planinic, M. y Palmovic, M. (2018). Student understanding of graph slope and area under a graph: A comparison of physics and nonphysics students. *Physical Review Physics Education Research*, *14*(2), 20109. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.020109

Vizmanos, J., Hernández, J. y Alcaide, F. (2011). *Matemáticas I. Bachillerato.* Ediciones SM.

INTERACCIÓN ENTRE LA MAESTRA Y LOS ESTUDIANTES EN LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE CLASES DE POLÍGONOS

The interplay of teachers and student actions in the teaching and learning of polygons class

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S.

Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación fue caracterizar una enseñanza que responde al pensamiento matemático de los estudiantes de 3º de educación primaria sobre el aprendizaje de clases de polígonos. Identificamos características de las acciones de la maestra y los argumentos y procesos de justificación generados por los estudiantes cuando resolvían tareas sobre clases de polígonos, Tomamos un episodio de enseñanza dirigido a apoyar la capacidad de análisis de los estudiantes de figuras geométricas para ilustrar algunas de estas interacciones. Los resultados indican la relevancia de las relaciones entre las cuestiones planteadas por la maestra sobre los procedimientos de resolución de los estudiantes, el tipo de tareas presentadas y la naturaleza de los argumentos justificativos de los estudiantes para apoyar la relación entre la deconstrucción dimensional y las aprehensiones cognitivas, necesaria para el aprendizaje de clases de polígonos.

Palabras clave: *interacción entre estudiantes y maestra, geometría, clases de polígonos, demanda cognitiva de las tareas.*

Abstract

The aim of this research was to characterize teaching that responds to the mathematical thinking of students in the third grade of primary education about learning of polygon classes. We identified characteristics of the teachers' actions and the different types of arguments and justification processes generated by students when solving tasks about polygon classes. We selected a teaching episode addressed at supporting students' capacity to analyse geometrical figures to illustrate some of these interactions. Findings indicate the relevance of the relationships between the questions posed by the teacher about students' solving procedures, the type of tasks presented, and the nature of students' justificatory arguments to support the relationship between dimensional deconstruction and cognitive apprehensions, necessary for learning polygon classes.

Keywords: *interplay between students and teacher, geometry, polygon classes, cognitive demand of the assignments.*

INTRODUCCIÓN

La comprensión del concepto de polígono y de clases de polígonos se consideran aspectos claves en el desarrollo del pensamiento geométrico (Battista, 2017; Clements et al., 1999), ya que implica razonar con los significados matemáticos de los atributos de una figura. En particular, para determinar

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2022). Interacción entre la maestra y los estudiantes en la enseñanza aprendizaje de clases de polígonos. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 179-187). SEIEM.

la pertenencia de dos figuras perceptualmente diferentes a una misma clase de polígonos, reconocer ejemplos y no-ejemplos de una clase de polígono, o construir polígonos con condiciones (Bernabeu et al., 2021a, 2021b). Una característica del desarrollo de esta comprensión está vinculado a la forma en la que los estudiantes comunican matemáticamente sus ideas a través de *argumentos* que les permiten convencer a alguien de lo que se afirma o se niega. Los argumentos de los estudiantes, como parte del proceso de comunicación, combinan la coordinación de dos sistemas semióticos de representación: el discursivo (oral o escrito) y el no-discursivo (dibujos, bocetos, figuras geométricas, construcciones con material didáctico) (Duval, 2017). Cuando se produce la sinergia entre los registros discursivos y no-discursivos es cuando los estudiantes son capaces de hacer la *conversión* bidireccional entre ambos registros mediante las *transformaciones de representación que consisten en cambiar un registro sin cambiar los objetos que se denotan*. Esta conversión evidencia el proceso de dotar de significado matemático a partes de las figuras geométricas (*deconstrucción dimensional* (Duval, 2017)), generando argumentos para justificar. Por ejemplo, cuando un estudiante analiza una figura geométrica asignando significado matemático a sus partes relacionándolas con la definición de un concepto geométrico para determinar su pertenencia a una clase de polígono. En el desarrollo de la comprensión de los objetos geométricos, el papel del maestro y de las actividades propuestas son clave. Sin embargo, las interacciones entre el maestro, los estudiantes y las tareas para apoyar el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes es todavía poco conocido.

La naturaleza compleja de las interacciones que se dan en las clases de matemáticas dificulta la tarea de identificar aspectos relevantes de la enseñanza para el aprendizaje de los estudiantes (Hiebert y Grouws, 2017). Algunas investigaciones han identificado características de las situaciones de enseñanza que apoyan la progresión del pensamiento matemático de los estudiantes (Ambrose y Kenthan, 2009; Bartolini y Bacaglini-Frank, 2015, Jacobs y Empson, 2016) como, por ejemplo, el tipo de tarea planteada, las interacciones en el aula y las decisiones de la maestra sobre qué aspectos atender y cómo hacerlo para ajustar la enseñanza en respuesta al pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs y Empson, 2016). Estas investigaciones identifican aspectos de la enseñanza que caracterizan lo que la maestra hace cuando interactúa con los estudiantes y el contenido matemático para apoyar su aprendizaje (Franke et al., 2007). En este mismo sentido, Conner et al. (2014) han examinado el papel de los profesores de educación secundaria para apoyar la argumentación colectiva entre los estudiantes y cómo apoyar el razonamiento y argumentación de estos, el impacto de las acciones del maestro sobre las oportunidades de aprendizaje generadas para sus estudiantes (Martin et al., 2005). Investigaciones en educación primaria han abordado la enseñanza de los poliedros, subrayando la relevancia del maestro en las interacciones entre los estudiantes y el contenido geométrico al examinar ejemplos y contraejemplos de objetos geométricos para fijar la atención en sus partes componentes (Ambrose y Kenehan, 2009). Otras subrayan la relación entre el tipo de actividad propuesta a los estudiantes de primero de educación primaria (6-7 años) y el desarrollo del pensamiento geométrico (Bartolini y Baccaglini-Frank, 2015). Sin embargo, en esta etapa educativa son menos conocidas las características de las conexiones de las acciones de los maestros y las argumentaciones de los estudiantes cuando resuelven determinadas tareas geométricas que apoyan la construcción de la comprensión de los polígonos.

Las acciones de los estudiantes pueden ser relevantes si el maestro las identifica como tales cuando se dan en el momento y las puede usar para apoyar la progresión del pensamiento matemático de los estudiantes. Tener en cuenta el pensamiento matemático de los estudiantes durante la enseñanza es una tarea desafiante para los maestros pues deben considerar las características del contenido y de procesos geométricos implicados.

Apoyándonos en investigaciones previas que nos han proporcionado resultados sobre los niveles de sofisticación de los estudiantes de la comprensión de los polígonos en estudiantes de tercero de educación primaria (Bernabeu et al., 2021a, 2021b, 2022), surge esta investigación en la que queremos caracterizar la enseñanza que responde al pensamiento matemático de los estudiantes a través de los movimientos de la maestra que aprovecha los argumentos y procesos de pensamiento geométrico de los estudiantes durante la discusión grupal.

MARCO TEÓRICO

Las decisiones del maestro al decidir sobre las tareas en la planificación de una lección, las cuestiones que puede plantear y la gestión de la interacción con sus estudiantes cuando resuelven las tareas son aspectos que determinan el aprendizaje de los estudiantes. Conner et al. (2014) caracterizaron acciones del maestro vinculadas a las oportunidades de aprendizaje generadas para los estudiantes, entre ellas: (a) plantear *preguntas o demandar información* a los estudiantes, y (b) *acciones de apoyo* para facilitar el desarrollo de una argumentación. Por ejemplo, al *demandar* algún tipo de *información* a los estudiantes puede generar un contexto social para que estos generen diferentes tipos de argumentos que puedan vincularse a determinadas *acciones de apoyo* por parte del maestro (por ejemplo, ratificar los argumentos discursivos de los estudiantes para fijar ideas, realizar comprobaciones empíricas, o plantear cuestiones que generen conflictos cognitivos).

Por otra parte, desde las investigaciones previas (Sinclair et al., 2016) sabemos que los argumentos de los estudiantes, entendidos como lo que les permite *convencer a alguien de lo que se afirma o se niega,* pueden ser de diferentes tipos. Los argumentos de los estudiantes están vinculados a las aprehensiones cognitivas que evidencia el proceso de deconstrucción dimensional mediante la cual los estudiantes dotan de significado matemático a partes de las figuras geométricas (Duval, 1995, 2017). Diferenciamos dos tipos de argumentos: los *discursivos* y los *empíricos*. Un *argumento discursivo* implica justificar algún procedimiento o resolución cuando el maestro pregunta ¿por qué? o cuando el estudiante explica la pertenencia de un polígono a una determinada clase de polígono. Mientras que un *argumento empírico* implica la construcción de figuras geométricas. Por ejemplo, cuando los estudiantes construyen con *meccano* o *geoplano* (recursos didácticos), o dibujan en la pizarra un polígono con determinadas condiciones. La forma en la que los estudiantes generan estos argumentos está vinculada a la forma en la que se dan las interacciones con el maestro y la tarea propuesta, con el fin de lograr los objetivos de aprendizaje pretendidos.

Por tanto, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación

- ¿Qué oportunidades de aprendizaje apoyan los procesos de razonamiento geométrico de los estudiantes y aumentan la capacidad de análisis?

METODOLOGÍA

Participantes y contexto

29 estudiantes de 3º de educación primaria participaron en una instrucción que tenía por objetivo apoyar la construcción de la comprensión de las clases de polígonos. La instrucción constaba de 10 sesiones de 50 minutos (2 sesiones por semana) durante 5 semanas, basado en tres focos que representan referencias importantes en el aprendizaje del concepto de polígono y clases de polígonos (Sinclair et al., 2016): Foco 1. Reconocer atributos de las figuras. Reconocer y justificar cuándo una figura es un polígono. Transformar una figura que no es un polígono en un polígono; Foco 2. Reconocer y construir polígonos con determinados atributos; y, Foco 3. Identificar el atributo común en un conjunto de polígonos perceptualmente diferentes con el fin de reconocer y representar ejemplos de una clase de polígonos.

Instrucción

Las tareas de la instrucción fueron guiadas y complementadas por la maestra (preguntas y acciones de apoyo) y resueltas en gran grupo por los estudiantes. Estas estaban relacionadas con los tres focos indicados. Los objetivos de las tareas del Foco 1 eran consolidar los atributos relevantes del concepto de polígono (figura plana cerrada, con lados rectos y no cruzados). Para ello, los estudiantes tenían que reconocer ejemplos y no-ejemplos de polígonos (figura 1), usando los atributos del concepto de polígono y justificar por qué una figura era o no un polígono. El objetivo de las tareas del Foco 2, fue reconocer y usar atributos adicionales en los polígonos (cóncavos-convexos; según el número de lados; simétricos; clases de triángulos; y clases de cuadriláteros). Por ejemplo, construir con material didáctico (*meccano* o *geoplano*) un triángulo según la amplitud de sus ángulos (acutángulo, rectángulo u obtusángulo) para que otro estudiante reconociera qué triángulo se había construido y justificar su resolución. Por último, el objetivo del Foco 3 era identificar atributos comunes en polígonos perceptualmente diferentes. Por ejemplo, identificar a qué clase pertenecen un conjunto de triángulos perceptualmente diferentes. Los datos de la investigación provienen de las video-grabaciones de las 10 sesiones de la instrucción.

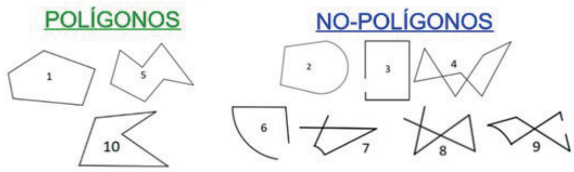


Figura 1. Tarea de reconocer polígonos y no-polígonos.

Análisis

Para el análisis, adoptamos el llevado a cabo por Martin et al. (2005) basado en el "análisis-en-tres-partes" propuesto por Miles y Huberman (1994). Este análisis consiste en simplificar los datos, organizarlos de forma comprimida e identificar patrones emergentes de los datos. Para ello, analizamos los vídeos de las sesiones segmentando estos desde que la maestra proponía una tarea, hasta que ratificaba el razonamiento de los estudiantes y/o proponía una nueva tarea, considerando cada segmento como una unidad de análisis. Cada segmento tenía un objetivo de aprendizaje vinculado a un aspecto geométrico específico. En cada uno de estos segmentos identificamos tres variables: (i) el tipo de tarea que estaba siendo resuelta; (ii) el tipo de acciones de la maestra, y (iii) el tipo de argumentos generados por los estudiantes. Esta forma de proceder permitió categorizar acciones individuales de la maestra y argumentos de los estudiantes antes de considerar la cadena de interacciones entre estos en diferentes momentos de la resolución de las tareas (identificar patrones emergentes de los datos). Las categorías que emergieron de los movimientos de la maestra se basan en las acciones del maestro tomadas de Conner et al. (2014) y las categorías de los estudiantes, en los argumentos generados por los estudiantes, los cuales evidencian las aprehensiones cognitivas en el proceso de deconstrucción dimensional (Duval, 1995, 2017). Posteriormente, discutimos semejanzas y diferencias entre los segmentos de enseñanza, considerando las tres variables anteriores, e intentamos identificar momentos clave para la progresión del pensamiento geométrico de los estudiantes y en el uso del lenguaje considerando cómo las interacciones entre los estudiantes y la maestra apoyaban estos progresos. En la sección de resultados ejemplificamos uno de estos momentos: Apoyar el desarrollo de la capacidad de análisis. Aunque fueron diversas las situaciones que ejemplifican este momento, estás se representan a partir de un diagrama en el que se muestra un patrón de intercambio de información entre la maestra y los estudiantes al resolver las tareas.

RESULTADOS

Apoyar el desarrollo de la capacidad de análisis

Este momento se caracteriza por la interrelación entre el tipo de cuestiones que plantea la maestra sobre las resoluciones de los estudiantes, el tipo de tareas y las argumentaciones de los estudiantes para justificar y explicar sus resoluciones que implicaban considerar diferentes atributos de las figuras. Por ejemplo, en la tarea de introducir los triángulos según sus ángulos (acutángulo, rectángulo y obtusángulo) (sesión 6) se plantea reconocer cómo son los ángulos que conforman un triángulo una vez fijado uno de estos (por ejemplo, si en el triángulo hay un ángulo recto, cómo son los otros dos). El objetivo de este tipo de tareas es desarrollar el proceso de deconstrucción dimensional que se evidencia a través de la aprehensión discursiva en la que se asigna significado matemático a partes de los triángulos; y la aprehensión operativa al transformar el triángulo construido para averiguar otros atributos (Duval, 1995). La tarea pide a los estudiantes que, a partir de la construcción de un triángulo rectángulo con el *geoplano*, los estudiantes lo analicen para reconocer otros atributos de esta clase. Así, la maestra plantea preguntas para averiguar cómo son los otros dos ángulos de los triángulos rectángulos construidos (*preguntas de indagación*). En la interacción que se genera, los estudiantes van modificando los ángulos del triángulo rectángulo construido para conjeturar que los otros dos ángulos deben ser agudos generando un *argumento* apoyado en las construcciones y modificaciones realizadas (argumentos discursivo y empírico) en respuesta a las preguntas de la maestra. En un momento dado, un estudiante llega a la conclusión que si hace dos ángulos rectos lo transforma en un cuadrilátero, el hecho de hacer dos ángulos rectos obliga a tener mínimo cuatro lados; de manera indirecta están comprobando la suma de los ángulos internos de los triángulos, si la suma de los tres es mayor a 180º (dos rectos y el agudo que falta), ya no puede ser un triángulo. Además, en esta interacción se observa cómo la maestra ofrece un vocabulario técnico de las matemáticas que se ve reflejado en las argumentaciones posteriores de los estudiantes (los ángulos pueden ser agudos). En este momento, la maestra *ratifica el argumento discursivo* de los estudiantes para subrayar que en un triángulo rectángulo los ángulos que no son rectos solo pueden ser agudos. La interacción producida se transcribe a continuación (E= todos los estudiantes; En= estudiante concreto)

> M: [Muestra un triángulo rectángulo construido en un *geoplano*] ¿cómo son los otros dos ángulos de un triángulo rectángulo? Tiene uno recto y los otros dos, ¿cómo son?
>
> E: [Tras observar sus triángulos rectángulos construidos en *geoplano*] acutángulos.
>
> M: Los ángulos pueden ser agudos, rectos u obtusos.
>
> E: Agudos.
>
> M: ¿Son siempre agudos? Comprobarlo.
>
> E: Sí, son siempre agudos.
>
> E15: Es que, si hago otro ángulo recto, se forma un cuadrado (refiriéndose a un cuadrilátero).
>
> M: Muy bien, no sería un triángulo. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto y dos agudos.

La figura 2 representa el esquema de las conexiones entre la maestra y los estudiantes al resolver una tarea que implicaba fijarse en otros atributos diferentes del ángulo recto en los triángulos rectángulos. Esta conexión muestra la comprensión de los atributos de los triángulos rectángulos.

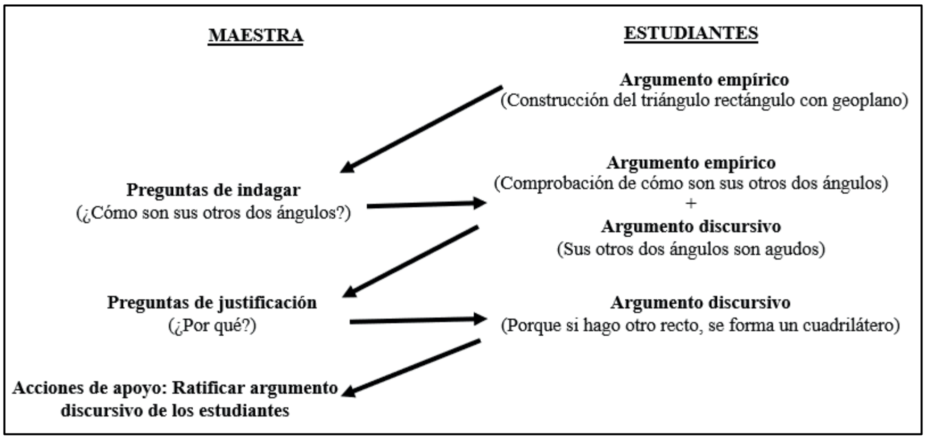


Figura 2. Secuencia de movimientos entre las preguntas y acciones de la maestra y los argumentos de los estudiantes en tareas de indagar sobre los atributos no presentes en la definición.

Otro ejemplo de este tipo de momento se da al introducir las definiciones de los triángulos según sus lados (equilátero, isósceles y escaleno) y al realizar la tarea de anticipar qué tipo de triángulo se puede construir a partir de dos segmentos dados con una longitud determinada (sesión 5). La resolución de esta tarea permite apoyar la deconstrucción dimensional a través de la aprehensión discursiva al pedir a los estudiantes que se fijen en la longitud de dos segmentos dados y los relacionen con las definiciones de los triángulos según sus lados. En esta interacción, la maestra comprueba cómo es la longitud de los lados de un triángulo (figura 3) midiendo con una regla dos de sus lados (por ejemplo, un lado mide 3'5 cm y el otro mide 3 cm). La maestra realiza una *pregunta de anticipación*: *¿qué triángulo se puede construir?* Los estudiantes, a través de un *argumento discursivo*, anticipan que puede ser un escaleno o un isósceles, dependiendo de la medida del tercer lado. La maestra mide el tercer lado del triángulo (por ejemplo, 1 cm), y pide a los estudiantes que digan qué clase de triángulo es y por qué (p*regunta de justificación)* para que los estudiantes *argumenten discursivamente* por qué pertenece a esa clase de triángulo. Finalmente, la maestra *ratifica el argumento discursivo de los estudiantes* para reiterar los atributos de la definición. La interacción producida se transcribe a continuación.

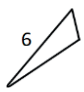


Figura 3. Triángulo para construir.

M: Vamos a medir los lados (figura 3). [La maestra con ayuda de una regla mide los lados]. Un lado mide 3'5 cm y otro mide 3 cm, ¿qué triángulo puede ser?

E: Isósceles o escaleno.

M: Muy bien, porque tenemos dos diferentes. [La maestra mide el tercer lado]. (El tercero mide) 1 cm. Tenemos 3'5 cm, 3 cm y 1 cm. Entonces ¿qué es?

E: Escaleno.

M: Escaleno. ¿Por qué?

E: Porque tiene tres lados diferentes.

M: Muy bien, porque tiene tres lados diferentes.

La figura 4 representa el esquema de las conexiones entre las preguntas de la maestra, y la generación de los argumentos de los estudiantes apoyados en la resolución de la tarea que tenía como objetivo aumentar la capacidad de análisis de los estudiantes al centrar su atención en la relación entre la longitud de los lados de los triángulos. Este esquema refleja cómo los estudiantes progresan en su comprensión de las clases de triángulos según sus lados.

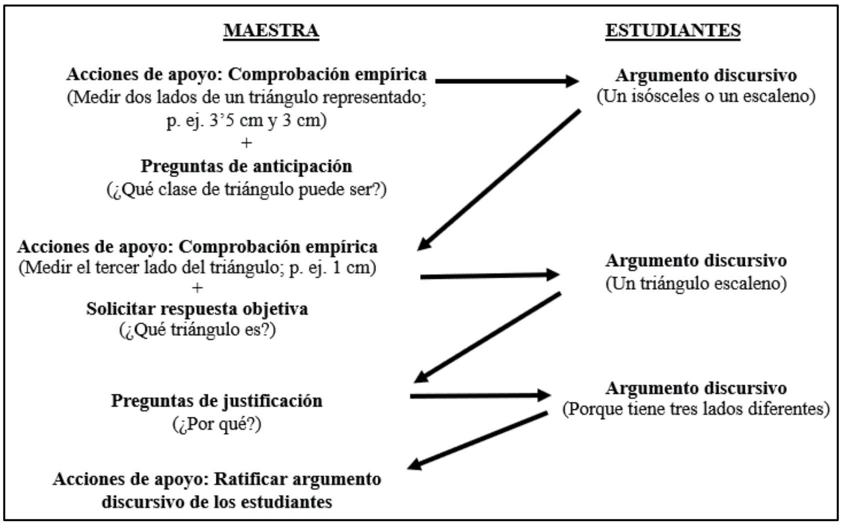


Figura 4. Secuencia de movimientos entre las preguntas y acciones de la maestra y los argumentos de los estudiantes en tareas de anticipar la clase de polígono a partir de algunos atributos.

En estos ejemplos de los momentos centrados en aumentar la capacidad de análisis de los estudiantes vinculados al desarrollo del proceso de deconstrucción dimensional y de las aprehensiones cognitivas se evidencia el papel de las cuestiones de la maestra al crear oportunidades de aprendizaje para que los estudiantes generen argumentos discursivos y empíricos. El tipo de tarea planteadas permite centrar la atención y establecer relaciones entre los diferentes atributos de los triángulos y sus definiciones, y la argumentación de los estudiantes se articula a través de los movimientos de la maestra (preguntas de justificación, indagación y anticipación; y la ratificación de los argumentos discursivos de los estudiantes), y las respuestas de los estudiantes a través de los argumentos discursivos y empíricos.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación es caracterizar una enseñanza que responde al pensamiento matemático de los estudiantes 3º de educación primaria sobre el aprendizaje de clases de polígonos. En este estudio mostramos uno de los momentos identificados mediante el análisis de las sesiones de enseñanza de una instrucción, que permite asumir que este apoyaba la construcción de la comprensión de la idea de clase de polígonos de los estudiantes a través del desarrollo de la capacidad de análisis. Este momento ha sido caracterizado por la naturaleza de las interacciones entre las acciones y cuestiones planteadas por la maestra y los argumentos y procesos de justificación generados por los estudiantes cuando resolvían tareas sobre clases de polígonos. El proceso de análisis seguido nos ha permitido centrarnos en los aspectos matemáticamente específicos de la interacción. Los ejemplos del momento que caracterizamos en este trabajo muestran las características de la enseñanza dirigida a potenciar el desarrollo de la capacidad de análisis y la adquisición de un vocabulario técnico de las matemáticas como rasgos característicos del pensamiento geométrico de los estudiantes. Este momento viene caracterizado por las interacciones de la maestra con los estudiantes al resolver tareas geométricas razonando con los significados matemáticos de los polígonos. Los estudiantes combinaron el uso de los argumentos discursivos (durante las interacciones grupales) y empíricos a través del uso de materiales didácticos como el *meccano*, sin cambiar el objeto que lo representa, lo cual apoya la idea de Duval (2017) sobre la comprensión de los conceptos geométricos.

Nuestros resultados nos permiten identificar características de las interacciones entre la maestra y los estudiantes cuando resuelven tareas que pueden ser consideradas matemáticamente exigentes para los estudiantes. Así, el tipo de situación de enseñanza que hemos categorizado como momento centrado en aumentar la capacidad de análisis de los estudiantes, está caracterizado por las acciones de la maestra al realizar preguntas de indagación y justificación centradas en las resoluciones de los estudiantes que podemos considerar productivas. Estas preguntas las consideramos productivas ya que apoyan la generación de procesos de deconstrucción dimensional vinculados al desarrollo de aprehensiones cognitivas que permiten a los estudiantes asignar significado matemático a partes de las figuras o transformar partes de una figura para indagar otros atributos, que son rasgos característicos del desarrollo del pensamiento geométrico. En este sentido, la gestión de la discusión realizada por la maestra en este tipo de momentos ha sido un elemento esencial de las oportunidades ofrecidas a los estudiantes para generar argumentos tanto discursivos como empíricos. Estas resoluciones han consistido en el reconocimiento de los atributos relevantes de las figuras, más allá de la dimensión perceptual, al exigirles justificar a través del discurso o la representación. De esta forma, la tríada de preguntas y acciones de la maestra-característica de la tarea- y los argumentos de los estudiantes se convierten en un todo inseparable, orquestados a partir de los objetivos de aprendizaje, que permite explicar el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes (Bernabeu et al., 2022) al favorecer la posibilidad de la coordinación de las aprehensiones cognitivas y el proceso de deconstrucción dimensional (Duval, 1995, 2017). Así, la mirada detallada a las interacciones entre maestra y estudiantes durante la resolución de tareas sobre polígonos nos permiten dar cuenta de aspectos matemáticamente relevantes en la enseñanza que pueden condicionar y/o apoyar al aprendizaje de los estudiantes.

Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo del Proyecto I+D+I – PGC del Ministerio de Ciencia e Innovación. Plan Nacional de Investigación (Ref.: PID2020-116514GB-I00).

Referencias

Ambrose, R. y Kenehan, G. (2009). Children's evolving understanding of polyhedra in the classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(3), 158-176. https://doi.org/10.1080/10986060903016484

Bartolini, M. G. y Baccaglini-Frank, A. (2015) Geometry in early years: sowing seeds for a mathematical definition of squares and rectangles. *ZDM Mathematics Education, 47*, 391-405. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0636-5

Battista, M. (2017). The development of geometric and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). NCTM-IAP.

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2021a). Levels of sophistication in elementary students' understanding of polygon concept and polygons classes. *Mathematics*, *9*(16), 1966. https://doi.org/10.3390/math9161966

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2021b). Primary school students' understandings of polygons and the relationships between polygons. *Educational Studies in Mathematics, 106*, 251-270. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10012-1

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2022). Cambios en la comprensión de las relaciones entre polígonos en estudiantes de 8-9 años. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(2), 49-70. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3208

Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M. y Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 192-212. https://doi.org/10.2307/749610

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A. y Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 401-429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_10

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Franke, M., Webb, N., Chan, A., Battey, D., Ing, M., Freund, D. y De, T. (2007). *Eliciting student thinking in elementary school mathematical classrooms*. NCRESST.

Hiebert, J. y Grouws, D. (2017). The effects of classroom mathematics teaching on students' Learning. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). NCTM-IAP.

Jacobs, V. y Empson, S. (2016). Responding to children's mathematical thinking in the moment: an emerging framework of teaching moves. *ZDM Mathematics Education, 48*, 185-197. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0717-0

Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W. y Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(1), 95-124. https://doi.org/10.1007/s10649-005-6698-0

Miles, M. B. y Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis*. Sage Publications.

Pirie, S., Kieren, T. y Gordon, C. (1999). Growing minds, growing mathematical understanding: Mathematical understanding, abstraction and interaction. En L. Burton (Ed.), *Learning Mathematics. From hierarchies to networks* (209-231). Falmer Press.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM*, *48*(5), 691-719. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6

COMPETENCIA REFLEXIVA EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS MEDIANTE EL ANÁLISIS DE LECCIONES DE LIBROS DE TEXTO[1]

Reflective competence in prospective mathematics teachers through the analysis of textbook lessons

Castillo, M. J.[a] y Burgos, M.[b]

[a] Universidad de Costa Rica, [b] Universidad de Granada

Resumen

Se describe y analiza una intervención formativa con 28 futuros profesores de secundaria, dirigida a desarrollar la competencia de análisis de libros de texto aplicando las facetas y componentes de la idoneidad didáctica. En la experiencia se analiza una lección de libro de texto de proporcionalidad. Se comparan las valoraciones dadas por los participantes sobre las idoneidades parciales y global del proceso instruccional propuesto por los autores del libro, con el análisis a priori realizado por las investigadoras. Los participantes reconocen debilidades y fortalezas de la lección fundamentándose en los resultados tras aplicar una guía específica de análisis. Más de la mitad de ellos valoran adecuadamente más de tres idoneidades parciales (fundamentalmente instruccional, ecológica y afectiva), pero sólo 11 de 28 participantes concluyen que la idoneidad global es baja. Se evidencia la potencialidad del instrumento para los formadores de profesores.

Palabras clave: *formación de profesores, análisis de libros de texto, idoneidad didáctica, proporcionalidad.*

Abstract

A training intervention with 28 prospective secondary school teachers is described and analyzed, aimed at developing the competence of textbook analysis by applying the facets and components of didactic appropriateness. The experience focuses on the analysis of a lesson on proportionality. The evaluations given by the participants on the partial and global suitability of the instructional process proposed by the authors of the textbook are compared with the a priori analysis carried out by the researchers. The participants recognize weaknesses and strengths of the lesson based on the results after applying a specific analysis guide. More than half of them rate more than three partial suitability (instructional, ecological, and affective), but only 11 out of 28 participants conclude that the overall suitability is low. The potential of the instrument for teacher educators is evident.

Keywords: *teacher training, textbook analysis, didactic suitability, proportionality.*

INTRODUCCIÓN

Los libros de texto escolares son un recurso instruccional importante y tienen una larga trayectoria como objeto de investigación en Educación Matemática (Fan et al., 2013; Schubring y Fan, 2018).

Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022). Competencia reflexiva en futuros profesores de matemáticas mediante el análisis de lecciones de libros de texto. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 189-198). SEIEM.

[1] Investigación realizada en el marco del proyecto de investigación, PID2019-105601GB-I00/AEI/ 10.13039/501100011033 (Ministerio de Ciencia e innovación), con el apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

A pesar de ello, la mayoría de las investigaciones existentes en el área se limitan a identificar y describir las características de estos materiales (Fan et al., 2013), siendo cuestiones menos atendidas aquellas que permiten profundizar en los conocimientos movilizados por los usuarios de estos recursos (Januario, 2018).

El profesor que decida usar un libro de texto debe ser capaz de reflexionar críticamente sobre su gestión de uso y de analizarlos productivamente (Braga y Belver, 2016; Shawer, 2017). Sin embargo, investigaciones como las de Braga y Belver (2016) o Lloyd (2002), muestran que estas tareas pueden resultar inusuales y difíciles para los profesores, siendo relevante que desde los programas de formación se promuevan los conocimientos y las competencias necesarias para realizar con éxito estas acciones profesionales. Particularmente se recomienda formar en conocimientos sobre el contenido y pedagógicos, además de emplear modelos de reflexión que incluyan resultados de la investigación, para ayudar a los futuros docentes a tomar decisiones críticas en el desarrollo de su propia enseñanza (Shawer, 2017).

La necesidad de considerar el análisis de libros de texto como una competencia clave en la formación de profesores y las dificultades que el desarrollo de dicha competencia entraña, ha motivado el interés por indagar estrategias formativas que capaciten a los profesores para dicha tarea. Así, se han diseñado e implementado acciones formativas con futuros profesores (Castillo y Burgos, 2022; Castillo et al., 2021) empleando herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, et al., 2007), en concreto, la teoría de la idoneidad didáctica (Godino, 2013) para guiar el análisis reflexivo de lecciones de libros de texto.

El objetivo de esta comunicación es describir y analizar los resultados obtenidos por futuros profesores de secundaria costarricenses en la valoración de la idoneidad didáctica de una lección de libro de texto de proporcionalidad tras aplicar una guía de análisis especifica (GALT-proporcionalidad). La proporcionalidad es un tema difícil tanto para estudiantes como para profesores (Valverde y Castro, 2009), que no suele recibir un tratamiento adecuado en los libros de texto de matemáticas (Martínez et al., 2014). A continuación, hacemos referencia al marco teórico y el método empleado. Posteriormente describimos los resultados e incluimos reflexiones finales.

MARCO TEÓRICO

Adoptamos el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor desarrollado en el marco del EOS (Godino et al., 2017). En dicho modelo se asume que las competencias claves del profesor son la *competencia matemática* y la *competencia de análisis e intervención didáctica* que supone diseñar, implementar y evaluar secuencias de aprendizaje propias, y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, que permitan plantear propuestas de mejora. Esta última se compone de cinco sub-competencias, siendo una de ellas la de *análisis y valoración de la idoneidad didáctica* de los procesos de instrucción, que centra la atención en este trabajo.

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción (previsto, planificado o implementado) se entiende como el grado en que dicho proceso (o una parte de este) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (Breda et al., 2018). Supone la articulación coherente y sistémica de las idoneidades: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Godino, 2013).

La *idoneidad epistémica* de un proceso instruccional se determina por el grado en que los significados institucionales (entendidos como sistemas de prácticas operativas y discursivas) representan bien a un significado de referencia. Este debe considerar los diversos tipos de problemas y contextos, la diversidad y adecuación de las representaciones, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos que las sustentan. La *idoneidad cognitiva* viene determinada por el grado en que los significados implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como por la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados. Si existe disparidad entre significados institucionales (por ejemplo, entre el significado de referencia y el implementado en un libro de texto) se habla de *conflicto epistémico*; si el desajuste se da entre el significado manifestado por un sujeto y el de referencia se trata de un *conflicto cognitivo* (Godino, 2013).

La *idoneidad afectiva* alude al grado de implicación (intereses, emociones, actitudes, creencias) del alumnado en el proceso de estudio. Dicho proceso tendrá un mayor grado de *idoneidad interaccional* en la medida en que se identifiquen y resuelvan conflictos potenciales que se producen en el proceso de instrucción. El grado de adecuación de los recursos materiales y la secuenciación de los contenidos determina una menor o mayor *idoneidad mediacional*. Finalmente, la *idoneidad ecológica* refiere al grado en que el proceso de instrucción se ajusta al currículum, al proyecto educativo del centro, la sociedad y al entorno en que se desarrolla (Godino, 2013).

La consideración de la lección de un libro de texto como un proceso instruccional previsto o planificado por el autor para la enseñanza de un contenido, permite aplicar el constructo idoneidad didáctica como herramienta para su análisis. Para hacer operativos los criterios de idoneidad didáctica, se requiere que se precisen indicadores empíricos que actúen como rúbrica al analizar un proceso de estudio. Estos indicadores deben enriquecerse y adaptarse al contenido matemático que se pretende enseñar (Breda et al., 2018), pero también al tipo de medio instruccional, entendiendo que ambos condicionan aspectos de los distintos componentes en la idoneidad didáctica. Por ello, se desarrolló una Guía de Análisis de Lecciones de libros de Texto que se adaptó al tema de Proporcionalidad (GALT-proporcionalidad) (Castillo et al., 2022), basándonos en la revisión y síntesis de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la proporcionalidad. Con la acción se pretende que los participantes conozcan y apliquen de manera crítica y constructiva una metodología para analizar una lección de proporcionalidad de libro de texto, reforzando sus conocimientos didáctico-matemáticos sobre dicho contenido (Castillo y Burgos, 2022).

MÉTODO

La experiencia formativa se llevó a cabo con 28 futuros profesores de matemáticas (en adelante, FPM), estudiantes de la carrera de Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica, dentro de la asignatura MA-0007 Matemáticas en el Currículo Escolar. Aplicamos la metodología de análisis de contenido (Cohen et al., 2011) para examinar los protocolos de respuesta de los FPM que intervinieron en la experiencia formativa. Las valoraciones de la idoneidad didáctica elaboradas por los participantes se comparan con el análisis a priori para decidir su pertinencia.

Descripción del proceso formativo

La intervención formativa tuvo una duración de tres sesiones de clase (de dos horas cada una), virtuales y sincrónicas. Las primeras dos sesiones de clase se dedicaron a la presentación y discusión de la noción de *idoneidad didáctica* como herramienta teórico-metodológica para el análisis y valoración crítica de procesos de instrucción (en particular el pautado en la lección del libro de texto). La última sesión tenía como finalidad que los participantes se familiarizaran con la aplicación de la GALT-proporcionalidad (Castillo et al., 2022), para ello se ejemplificó su uso, recurriendo a la lección "Proporcionalidad" del libro de texto de Alvarado (2014, pp.100-107). Finalizada la formación teórica, se propuso a los participantes que considerando la lección del libro de texto sobre proporcionalidad de Porras et al. (2013) respondiera a las siguientes consignas:

1. Completar las tablas del Anexo que incluyen la GALT-proporcionalidad. Estas contienen los indicadores de idoneidad según las seis facetas que la componen. En la columna de "Valoración (0,1,2)" debes incluir una valoración numérica con relación al grado de cumplimiento del indicador según el siguiente criterio: 0: no se cumple el indicador nunca; 1: se cumple parcialmente, o a veces; 2: se cumple siempre y totalmente. En la columna de "justificación" debes incluir lo que te ha ayudado a decidir sobre la valoración numérica.

2. Teniendo en cuenta la valoración realizada en el punto 1, elabora un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección en cada una de las facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Indica para cada una de ellas y luego en general el grado de idoneidad como: como baja, media o alta según consideres.

Análisis de la tarea realizada por los FPM

Se considera que una respuesta a la consigna 2 es *pertinente* si se fundamenta en las descripciones dadas al completar las columnas "valoración", "justificación" o ambas, cuando se aplicó la GALT-proporcionalidad (consigna 1). En caso contrario se entiende no *pertinente*. El análisis de contenido de las valoraciones consideradas pertinentes permite inferir tres categorías de respuestas.

- *Únicamente cuantitativas.* La valoración se basa en la cantidad de indicadores según su grado de cumplimiento correspondiente (total:2, parcial:1, nulo:0) o bien al cálculo de sumas o promedios sobre las valoraciones numéricas de cada indicador en cada faceta, pero sin referir indicadores específicos. Ejemplos de respuesta en esta categoría son las de FPM19 al valorar la faceta epistémica: "La considero alta porque en la mayoría de los indicadores presentados en la tabla de idoneidad epistémica tienen una valoración de 1 y 2". También la de FPM18: "debido a que obtuvo 34 puntos de un total de 68 puntos".

- *Descriptivas.* Se mencionan una serie de indicadores con relación a sus valoraciones numéricas de grado de cumplimiento correspondientes (total:2, parcial:1, nulo:0) pero no se justifica la valoración. Un ejemplo es la opinión de FPM28 al valorar la faceta cognitiva:

> Se encontraron conflictos importantes en relación con conocimientos previos, progresión en la dificultad de aprendizaje y evaluación, tales como la ausencia de conocimientos previos o definiciones de conceptos necesarios, también la ausencia de instrumentos que le permitan al alumno autoevaluarse, entro otros conflictos, considero que el grado de idoneidad de esta faceta es baja.

- *Argumentativas*. Se describen grupos de indicadores en relación con sus valoraciones numéricas y se justifica la valoración. Un ejemplo es la respuesta de FPM22 al valorar la faceta cognitiva:

> En esta faceta, su puntaje fue de 8 respecto a los indicadores. Cabe resaltar, que hace uso de conocimiento previo para abarcar el tema y maneja una evaluación aceptable, no obstante, lo que le resta puntos es porque, no implementa diversos mecanismos para que el estudiante pueda desarrollar diferentes estrategias, así como, el nivel de dificultad de los problemas es muy corta ya que, con un solo método de resolución es necesario para responder todo.

Los criterios de idoneidad entendidos como "normas de corrección que establecen cómo debería realizarse un proceso de enseñanza y aprendizaje" (Breda et al., 2018, p. 264) y su precisión por medio de indicadores observables actúan como reglas de corrección emanadas del discurso consensuado por la comunidad interesada en educación matemática o un sector relevante de ésta. Las investigadoras junto con un experto externo emplearon los indicadores de la GALT-proporcionalidad (reflejo de dichas normas establecidas en la investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad) para realizar el análisis a priori de la lección (de manera independiente y consensuado después). Por tanto, este análisis actúa como referente institucional de valoración de la lección. Para determinar el grado de corrección de las respuestas de los participantes, se comparan estas con el análisis a priori realizado por el equipo investigador, de modo que si difieren de este referente las respuestas son consideradas incorrectas.

Los resultados del análisis a priori sobre el *grado de adecuación* (alto, medio, bajo) de cada idoneidad parcial permiten concluir que la idoneidad global de la lección es baja, ya que sólo se asocia un grado medio-bajo a la idoneidad cognitiva y ecológica, y bajo al resto de idoneidades. La valoración global, tiene en cuenta el carácter articulado de las facetas desglosadas por medio de los componentes. Se trata de que los participantes reflexionen sobre el nivel de cada idoneidad parcial para poder hacer un juicio general considerando cada parte y un equilibrio.

Finalmente, definimos tres niveles de corrección de las respuestas desarrolladas por los participantes. Las *adecuadas*, corresponden a las respuestas en las que el grado de adecuación (alto, medio, bajo) coincide con el juicio experto y cuya justificación es correcta. Las *poco adecuadas,* son aquellas respuestas en las que el grado de adecuación valorado coincide con el experto, pero cuya justificación no es correcta (incluimos aquí las no pertinentes). También son poco adecuadas aquellas cuyo grado de adecuación no coincide con el juicio experto, pero cuya justificación es correcta. Por último, en las respuestas *nada adecuadas,* el grado de adecuación no coincide con el juicio experto y la justificación no es correcta (incluimos aquí las no pertinentes).

RESULTADOS

En esta sección, se analizan las respuestas que han dado los FPM al valorar la idoneidad didáctica de la lección (consigna 2) tras haber aplicado la GALT-proporcionalidad (consigna 1). Se trata de conocer qué grado de idoneidad parcial y global asignan los FPM, cómo justifican esa asignación y cómo de adecuadas son sus respuestas con relación al análisis a priori. En la tabla 1 se presenta la frecuencia de justificaciones según las categorías descritas en el apartado anterior, indicando entre paréntesis la cantidad de valoraciones que son correctas según el análisis experto.

Tabla 1. Tipo y frecuencia de justificaciones a las idoneidades parciales.

	Idoneidades parciales					
	Epistémica	Cognitiva	Afectiva	Interaccional	Mediacional	Ecológica
Pertinente	25	25	25	22	27	25
Cuantitativa	5 (1)	6 (5)	3 (3)	5 (5)	5 (1)	8 (6)
Descriptiva	16 (12)	16 (16)	16 (14)	4 (1)	3 (3)	11 (10)
Argumentativa	4 (3)	3 (3)	6 (6)	13 (6)	19 (18)	6 (6)
No pertinente	2	2	2	5	0	2
No responde	1	1	1	1	1	1

En todas las idoneidades parciales, las categorías más frecuentes de justificaciones corresponden o bien a descriptivas (en las facetas epistémica, cognitiva, afectiva y ecológica) o argumentativas (en las facetas interaccional y mediacional) (tabla 1). Aunque no existe una clara relación entre el tipo de justificación y las respuestas finalmente correctas (el porcentaje de valoraciones correctas en las facetas cognitiva, afectiva y ecológica es similar en los tres tipos de justificación y en las facetas epistémica y mediacional, apenas hay diferencia entre las descriptivas y argumentativas), se observa que en todas las facetas salvo la afectiva e interaccional, es mayor la proporción de respuestas correctas en las justificaciones de tipo argumentativo o descriptivo. Además, el carácter descriptivo o argumentativo de la mayoría de las justificaciones, permite identificar los indicadores de idoneidad didáctica que mencionan los FPM con mayor frecuencia (7 o más participantes) y que valoran de modo negativo (tabla 2), si bien sólo en las argumentativas se descubre por qué consideran que no se cumplen dichos indicadores.

Es importante señalar que cuando las justificaciones de los FPM precisan los indicadores que no se cumplen (total o parcialmente) todas sus valoraciones han sido correctas en comparación con el análisis a priori. Las precisiones correctas que destacan en el contenido matemático refieren a la "poca manifestación de representaciones comparativas, tabulares y gráficas" (FPM26), o que no se definen o introducen términos como "…fracción, cantidad de magnitud, covarianza e invariancia, función y producto" (FPM1). En lo cognitivo indican la necesidad de variar las estrategias de solución correctas a las situaciones y de advertir de posibles errores conceptuales y procedimentales que pueden surgir y que son característicos del tema. En el aspecto afectivo, algunos FPM asocian la poca promoción de la participación a que no se contemplan trabajos grupales, u oportunidades para que los estudiantes puedan expresarse e intercambiar opiniones. En lo interaccional, los FPM mencionan como deficiencia la falta de tareas donde el alumno pueda comunicar y justificar los procedimientos que emplea para resolverlas, comparando su solución con la de otros compañeros. En lo mediacional los FPM mencionan que no se fomenta el uso de herramientas que mejoren el entendimiento en las representaciones gráficas u otras que sirvan de apoyo en la resolución de los diferentes ejercicios. Finalmente, en lo ecológico, los FPM opinan similar a FPM26 "los autores de este recurso no relacionan el contenido de proporcionalidad con temas transversales, sino más bien con contextos realistas".

La cantidad de FPM que indican alguna fortaleza en general (17 en total) y de modo específico en cada idoneidad parcial, es menor que la cantidad de FPM que indican deficiencias (22 en total). Cuando los FPM identifican alguna fortaleza del texto, los indicadores de idoneidad que mencionan con mayor frecuencia (lo indican 7 FPM) corresponden a la faceta interaccional: "el autor hace una presentación clara del tema" y "se contemplan momentos para que los estudiantes trabajan de forma autónoma", siendo ambas características positivas indicadas por los FPM incorrectas. En efecto, el análisis a priori puso de manifiesto que los autores del texto no hacen una presentación clara del tema debido a que emplean de forma inadecuada varios términos como sinónimos: razón-cociente, razón-proporción, indirecta-inversa, proporción-relación de proporcionalidad (Porras et al., 2013, p.127), la definición de proporcionalidad directa e inversa es circular ("incrementa de manera proporcional") y no definen conceptos fundamentales como el de constante de proporcionalidad. Por otro lado, no se proponen tareas que permitan explorar, investigar, conjeturar, o usar varias herramientas para resolver problemas, lo que limita el trabajo autónomo del alumno. En la faceta epistémica cuatro FPM señalan oportunamente que "la relación multiplicativa es explícita en diferentes contextos propuestos" y cinco indican que "el nivel de lenguaje es adecuado para los alumnos". Mientras que, en lo cognitivo cuatro FPM mencionan correctamente que "existen instrumentos de evaluación", y en lo ecológico cinco FPM indican que "los contenidos permiten la formación socio-profesional".

Tabla 2. Frecuencia (Fr.) de debilidades de la lección en cada faceta señaladas post-formación por los FPM.

Debilidades de la lección	**Fr.**
Idoneidad epistémica	
No hay situaciones que permitan distinguir las comparaciones multiplicativas de las aditivas	7
No existen situaciones de cálculo mental que involucre el razonamiento proporcional	7
No hay diversidad de representaciones para modelizar problemas	7
No se distinguen las relaciones multiplicativas *dentro* y *entre* las cantidades de magnitudes	8
No se definen los conceptos fundamentales en el tema de proporcionalidad	12
Idoneidad cognitiva	
No se promueve el uso de diversas estrategias de solución correctas	11
No existen advertencias de posibles errores o dificultades al resolver los ejercicios	11
Idoneidad afectiva	
No existe flexibilidad para explorar ideas o métodos alternativos para resolver los problemas	7
No se promueve la participación en las tareas propuestas, ni la perseverancia	10
Falta de elementos motivadores (sólo ilustraciones)	10
Ausencia de un espacio para que los alumnos expresen lo que sienten con respecto al tema	11
No se promueve la autoestima, evitando el rechazo o miedo a las matemáticas	11
Idoneidad interaccional	
No se presentan situaciones en donde buscar el consenso en base a argumentos	7
No se proponen tareas que motiven el diálogo, comunicación o debate entre alumnos	13
Idoneidad mediacional	
Falta de fuente de referencias que se emplean en el material didáctico	12
No se promueve el uso de materiales manipulativos, audiovisuales o informáticos	21
Idoneidad ecológica	
Carencias de contenido en relación con lo establecido en las directrices curriculares	7
No se contempla la formación en valores democráticos	8
Poca presencia de contenidos intra e interdisciplinares	9

En la tabla 3, mostramos la frecuencia de FPM según las categorías definidas en la sección de análisis, para determinar el grado de corrección de sus respuestas a la consigna 2. Se aprecia que más de la mitad de FPM responden *adecuadamente* en las facetas cognitiva, afectiva y ecológica. Sin embargo, en las facetas epistémica e interaccional destacan las valoraciones *nada adecuadas*. Finalmente, en la tabla 4, puede verse que, aunque la mayoría de los participantes hacen una valoración adecuada en más de la mitad de las facetas, sólo 11 de los 28 FPM concluyen que la idoneidad general es baja, coincidiendo con la valoración experta.

Tabla 3. Frecuencia de FPM según nivel de adecuación de sus respuestas a la consigna 2 (n=28).

Nivel de adecuación	Idoneidades parciales					
	Epistémica	Cognitiva	Afectiva	Interaccional	Mediacional	Ecológica
Adecuada	4	24	16	12	13	22
Poco adecuada	13	2	8	6	9	1
Nada adecuada	11	2	4	10	6	4

Tabla 4. Cantidad de respuestas adecuadas por facetas según grado de adecuación de idoneidad general.

	Idoneidad general			
Valoran adecuadamente	Media	Baja	No responde	Total
Todas las facetas	0	2	0	2
Al menos tres facetas, pero no todas	6	9	4	19
Menos de tres facetas	4	0	3	7

Para valorar el grado de adecuación global de la lección, 21 FPM se basan en las valoraciones otorgadas a las idoneidades parciales, siendo la mayoría de las respuestas (de 15 FPM) de tipo cuantitativo. Un total de 7 FPM mencionaron que ciertas facetas (normalmente la epistémica y la cognitiva) deben tener mayor peso, ya sea porque las consideran más relevantes o porque el número de indicadores que se incluyen en la guía es mayor. Por ejemplo, FPM27 indica al respecto:

> De forma general en consideración a las valoraciones de cada una de las 6 facetas, se puede observar como 3/6 son bajas y 2/6 son medias, presentando así una mayor inclinación en la evaluación general entre media y baja. Ahora bien, se ve de igual forma que la faceta epistémica tiene un grado de idoneidad bajo y esta cuenta con una mayor cantidad de indicadores que las otras facetas, por lo que se podría decir que altera con mayor fuerza el grado de idoneidad total, por lo que concluyo que la idoneidad de la lección es baja.

CONCLUSIONES

En esta comunicación se han analizado las respuestas de un grupo de futuros profesores de secundaria de matemáticas al valorar la idoneidad didáctica de la lección de proporcionalidad de Porras et al. (2013). En esta tarea, los participantes contaron con la GALT-proporcionalidad como herramienta para orientar su análisis y reflexión crítica. Los resultados muestran que los futuros docentes hacen valoraciones adecuadas (descriptivas esencialmente, pero también argumentativas) sobre las idoneidades parciales y que la mayoría (21 FPM) también realiza un análisis global pertinente. Destacamos la importancia de desarrollar herramientas que ayude a los futuros profesores a conocer qué aspectos del conocimiento didáctico-matemático del contenido son determinantes para que una lección se considere más o menos adecuada (Shawer, 2017).

La herramienta teórica empleada en esta intervención permite a los formadores de profesores filtrar aspectos esenciales sobre los que los FPM necesitan centrar su atención, y sobre los que es necesario replantear estrategias formativas para ayudarlos a reflexionar de manera más profunda y crítica. Por ejemplo, los resultados de esta experiencia nos permiten concluir que en la faceta epistémica sería necesario profundizar en la reflexión más puntual de indicadores relacionados con la presentación clara de los conceptos fundamentales del tema, así como la adecuación de las “proposiciones” y “argumentos". En efecto, los FPM no consideraron que no se establece con claridad las proposiciones suficientes y necesarias para identificar relaciones de proporcionalidad directa e inversa, y que no se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones matemática con diversos tipos de razonamientos o métodos de prueba, algo que es fundamental para un adecuado desarrollo del razonamiento proporcional. También ha de promoverse el análisis más profundo de las características de las situaciones-problemas, prestando atención a si las mismas promuevan momentos adidácticos, donde existan espacios para la acción, comunicación y validación (Godino, 2013).

Referencias

Alvarado, M. (2014). *Matemática 7, serie Ser competentes*. Santillana.

Braga, G. y Belver, J. L. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación, 27*(1), 199-218.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022). Developing reflective competence in prospective mathematics teachers by analysing textbooks lessons. *EURASIA, 18*(6), em2121. https://doi.org/10.29333/ejmste/12092

Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2021). Evaluación de una intervención formativa con futuros profesores de matemáticas de secundaria sobre análisis de libros de texto. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 197-204). Valencia: SEIEM.

Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022). Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. *Uniciencia, 36*(1), 1-21. https://doi.org/10.15359/ru.36-1.14

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Routledge.

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 45*(5), 633-646.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 111-132.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Januario, G. (2018). Investigações sobre livros didáticos de Matemática: Uma análise de suas questões de pesquisa. *Educação, Escola y Sociedade, 11*(12), 1-12.

Lloyd, G. (2002). Mathematics teachers' beliefs and experiences with innovative curriculum materials. The role of curriculum in teacher development. En G. C. Leder, E. Pehkonen, y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 149-159). Kluwer Academic Publishers.

Martínez, S., Muñoz, J. M. y Oller, A. M. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M. T., González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 435-444). SEIEM.

Porras, V., Porras, J. y Villegas, E. (2013). *Matemáticas 7°*. Compas ERV.

Schubring, G. y Fan, L. (2018). Recent advances in mathematics textbook research and development: an overview. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 50*(5), 765-771.

Shawer, S. (2017). Teacher-driven curriculum development at the classroom level: Implications for curriculum, pedagogy and teacher training. *Teaching and Teacher Education*, *63*, 296-313.

Valverde, A. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). Santander: SEIEM.

ANÁLISIS DE LA SELECCIÓN Y USO DE EJEMPLOS COMO VÍA DE ACCESO AL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR

Analysis of the selection and use of examples as a means of accessing the teacher's specialized knowledge

Cayo, H.[a], Contreras, L. C.[b] y Codes, M.[b]

[a]Universidad de Antofagasta, [b]Universidad de Huelva

Resumen

Este trabajo aborda el estudio del conocimiento especializado movilizado por un profesor de matemáticas durante la selección y el uso de ejemplos para la enseñanza de las sucesiones. A través de un estudio de caso experimental, analizamos dos de los ejemplos utilizados por un profesor en tercer curso de educación secundaria, a través del modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, identificando en ellos los diferentes subdominios del conocimiento movilizados. Diferenciamos entre ejemplos activos y pasivos, señalando la entidad matemática que se está ejemplificando y en qué aspecto de esta entidad se está enfatizando con el ejemplo. Como resultados, se presentan los subdominios y categorías evidenciadas, cuando el profesor selecciona y usa ejemplos, así como algunas relaciones observadas entre los distintos subdominios del conocimiento que forman parte del modelo.

Palabras clave: *conocimiento especializado, ejemplificación, sucesiones.*

Abstract

This paper deals with the study of the specialized knowledge mobilized by a mathematics teacher during the selection and use of examples for the teaching of sequences. Through an experimental case study, we analyze two of the examples used by a teacher in the third year of secondary education, through the analytical model of the mathematics teacher's specialized knowledge, identifying in them the different subdomains of knowledge mobilized. We differentiate between active and passive examples, pointing out the mathematical entity that is being exemplified and which aspect of this entity is being emphasized with the example. As results, we present the subdomains and categories evidenced when the teacher selects and uses examples, as well as some relationships observed between the different subdomains of knowledge that are part of the model.

Keywords: *specialized knowledge, exemplification, successions.*

INTRODUCCIÓN

La importancia de profundizar en el estudio del conocimiento profesional de los profesores radica en lo trascendental que este resulta para la calidad de la enseñanza (Ball et al., 2005). Es este conocimiento el que permite a los profesores decidir qué y cómo deben enseñar, qué tipo de representación elegir y cómo resolver los problemas generados al abordar un determinado contenido (Shulman, 1986). Desde el momento en que Shulman establece la existencia de este conocimiento, los ejemplos toman

Cayo, H., Contreras, L. C. y Codes, M. (2022). Análisis de la selección y uso de ejemplos como vía de acceso al conocimiento especializado del profesor. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 199-207). SEIEM.

gran relevancia, al ser considerados como una de las formas más útiles para representar una idea con el propósito de hacerla compresible para otros (Shulman,1986). Según Vinner (2011), los ejemplos tienen un papel crucial en los procesos cognitivos asociados a cómo se forman los conceptos y las conjeturas en nuestra mente.

En el campo de la educación matemática el conocimiento profesional de los profesores es visto como un elemento de gran importancia en el desempeño profesional y en la promoción del aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes (Zakaryan et al., 2018), y los ejemplos son considerados como una instancia que nos permite indagar en este conocimiento. Sosa et al. (2017) ven en los ejemplos un escenario favorable para el estudio del conocimiento del profesor que enseña matemáticas.

Los ejemplos siempre han tenido un rol central en la enseñanza de las matemáticas (Bills y Watson, 2008), han sido considerados como una herramienta de mediación entre los estudiantes y los conceptos matemáticos, teoremas y técnicas (Goldenberg y Mason, 2008). Según Pascual y Contreras (2018), los ejemplos matemáticos son uno de los principales recursos utilizados por los profesores en la enseñanza escolar; esta idea es compartida por Figueiredo y Contreras (2013), señalándose la selección y el uso de los ejemplos como las instancias más complejas para los profesores al momento de trabajar con este recurso (Zodik y Zaslavsky, 2007). Distintos autores concuerdan en que ambas instancias requieren que los profesores movilicen un conjunto de conocimientos especializados. Así, para Suffian y Abdul (2010) el conocimiento didáctico del contenido es determinante en la selección y uso de los ejemplos; según Zaslavsky (2008), un conocimiento sólido, tanto matemático como pedagógico, es necesario para la selección de ejemplos útiles; y para Zodik y Zaslavsky (2007) la selección y el uso de ejemplos depende del conocimiento del contenido matemático, del conocimiento didáctico del contenido relacionado con la ejemplificación y del conocimiento de las características del aprendizaje de los estudiantes.

Considerando que los ejemplos corresponden al recurso probablemente más utilizado por los profesores en las clases de matemáticas, y que su selección y uso requiere que el profesor movilice un conjunto de conocimientos especializados, con este trabajo buscamos analizar la selección y el uso de los ejemplos con el propósito de indagar en las relaciones que se generan en el conocimiento especializado que posee el profesor.

FUNDAMENTO TEÓRICO

El modelo de conocimiento que soporta nuestro estudio y que se utilizará como instrumento de análisis es el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), el cual nos permite comprender e interpretar el conocimiento especializado de profesor (Carrillo et al., 2018). Este modelo distingue dos dominios de conocimiento: el Conocimiento del Contenido (MK) considera los conocimientos de las matemáticas como disciplina en un contexto escolar; y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) contiene los conocimientos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje (Carrillo et al., 2018). El MTSK también considera las concepciones que el profesor posee en relación con las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, estas concepciones permean los dominios de conocimientos (Carrillo et al., 2018). Cada dominio considera tres subdominios, los cuales nos permiten organizar el MTSK. Las relaciones entre estos subdominios nos permiten obtener una compresión más profunda del conocimiento del profesor (Carrillo et al., 2018).

En el MK se incluye el Conocimiento de los temas (KoT), que es el conocimiento exhaustivo que el profesor posee de los contenidos matemáticos que enseña; el Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM), referido a las conexiones inter-conceptuales entre elementos matemáticos; y el Conocimiento de la práctica matemática (KPM), relativo a las distintas formas lógicas y sistemáticas que nos permiten abstraer reglas matemáticas (Carrillo et al., 2018). En el PCK se considera el Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), acerca de las características propias del aprendizaje matemático, derivadas de la interacción de los estudiantes con el contenido matemático; el Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), conocimiento de teorías personales o institucionales sobre la enseñanza de las matemáticas y acerca de los recursos; y el Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), que abarca el conocimiento sobre todo lo que el estudiante debe, o es capaz de, aprender en un determinado nivel escolar (Carrillo et al., 2018).

Los ejemplos son reconocidos como un recurso que nos permite ahondar en el conocimiento del profesor; según Sosa et al. (2016) hacen aflorar diferentes subdominios del MTSK, pudiéndose obtener por medio de la ejemplificación indicadores tanto del MK, como del PCK del profesor.

Se entenderá un ejemplo como un caso particular desde el cual se puede razonar y generalizar (Zodik y Zaslavsky, 2008). En la literatura encontramos diferentes tipos de categorizaciones para los ejemplos. Karaagac (2004) identifica dos tipos de ejemplos utilizados por profesores, ejemplos pasivos, que no buscan acción por parte de los estudiantes y se utilizan para ejemplificar un concepto o un procedimiento presentado previamente; y ejemplos activos, que son los que buscan la participación de la audiencia y requieren que los estudiantes o el profesor hagan uso de sus conocimientos previos. Por su parte, Zodik y Zaslavsky (2007) propusieron una categorización enfocada en el tipo de entidad matemática que se quiere ilustrar con el ejemplo: un concepto, un teorema, o un procedimiento/algoritmo. Por su parte, Figueiredo et al. (2007) elaboraron una categorización basada en el proceso que observaron en la adquisición del esquema conceptual de función, en el que identificaron cinco categorías: a) definición, corresponde a los ejemplos que se presentan inmediatamente después de la definición o a un grupo de ejemplos que se presentan antes de la definición con el propósito de manifestar las características necesarias para que los estudiantes establezcan la definición; b) representación, son los ejemplos que permiten los primeros contactos autónomos de los estudiantes con el concepto de estudio, los primeros ejercicios o problemas; c) características, son ejemplos que surgen después de la fase exploratoria, ayudan a los estudiantes a superar las dificultades y a aclarar las dudas; d) aplicaciones internas, considera ejemplos que involucran el tema que se está desarrollando con contenidos o conceptos que se han desarrollado o se desarrollaran posteriormente; y e) aplicaciones externas, referida a ejemplos de aplicaciones del tema en contextos de la vida real y en otras ciencias. Como explicaremos más adelante, sintetizaremos estas tres clasificaciones para categorizar los distintos ejemplos utilizados por el profesor.

METODOLOGÍA

El objetivo de nuestro estudio es mostrar cómo durante la selección y el uso de ejemplos, el profesor moviliza un conjunto de conocimientos cuyas relaciones pueden describirse a través del MTSK. Buscamos comprender, a partir de la observación y de la información que nos entregue el profesor, las distintas relaciones que se generan entre los subdominios del MTSK al trabajar con ejemplos.

Corresponde a una investigación cualitativa desarrollada mediante un estudio de caso instrumental (Bisquerra, 2009). El informante es un docente con más de 35 años de experiencia y los ejemplos seleccionados corresponden a una clase realizada en un tercer año de secundaria (estudiantes de 14–15 años), a finales del periodo académico 2019/2020, en la cual el profesor comenzó a desarrollar el concepto de sucesión.

Los medios utilizados para obtener la información fueron la observación de clase y la entrevista semiestructurada. La clase fue filmada y transcrita de forma literal, se seleccionaron aquellos fragmentos en los cuales se observaba el uso de ejemplos, estos fragmentos se analizaron con el propósito de identificar evidencias e indicios de los distintos subdominios de conocimiento (Carrillo, 2017). La entrevista semiestructura nos permitió convertir en evidencias los indicios de conocimiento movilizado detectados.

Los ejemplos se clasificaron de acuerdo con tres criterios, si se buscaba o no la participación de los estudiantes, la entidad matemática que se estaba ejemplificando y el aspecto de la entidad que se estaba abordando con el ejemplo. Para esta clasificación se utilizaron las tres categorizaciones presentadas anteriormente, algunas de ellas con adaptaciones.

Para el primer criterio se adaptó la categorización de Karaagac (2004), el que un ejemplo sea activo o pasivo dependerá únicamente de si se busca o no generar una interacción en los estudiantes. El segundo corresponde a la categorización presentada por Zodik y Zaslavsky (2007). El tercero considera la categorización de Figueiredo et al. (2007) con algunas adaptaciones; así, en la categoría "representación" consideraremos los ejemplos que enfaticen en cualquier tipo de representación (gráfica, algebraica, mental, etc.), y en la categoría "característica" los ejemplos con los cuales el profesor busque enfatizar alguna de las características de la entidad matemática o aborde la forma de operar con y en la entidad matemática (teorema o procedimiento/algoritmo).

Para analizar la información se comenzó categorizando los ejemplos de acuerdo con los tres criterios propuestos. La revisión de la transcripción de la clase y de la entrevista se realizó de forma lineal. Además, en cada fragmento identificamos los distintos subdominios del MTSK que el profesor movilizaba. En algunos casos, nos apoyamos en las respuestas obtenidas durante la entrevista, herramienta que también nos permitió identificar los distintos subdominios que el profesor movilizaba al momento de seleccionar los ejemplos. Por último, se buscó identificar las distintas relaciones entre subdominios, tanto en la selección como en el uso de los ejemplos.

Los conocimientos correspondientes a la selección del ejemplo son aquellos que sustentan su elección y que identificamos en la entrevista de forma directa o al contrastar las respuestas con lo realizado por el profesor en clases; y los conocimientos correspondientes al uso del ejemplo son los conocimientos que se evidencian en el actuar del profesor durante el desarrollo del ejemplo.

RESULTADOS

A continuación, presentaremos dos fragmentos de la clase, el primer fragmento nos describe el trabajo desarrollado con un ejemplo pasivo, y el segundo corresponde al uso de un ejemplo activo. En el análisis identificaremos primero el subdominio, con sus siglas, aclarando después la categoría específica.

En este primer fragmento (ejemplo 1) podemos ver al profesor mostrando a sus estudiantes la importancia de conocer el patrón que está detrás de una sucesión, busca justificar que esta información es la que nos permite continuar con la construcción de los términos de la sucesión. Corresponde a un ejemplo pasivo de un procedimiento, que enfatiza en una característica.

> P: Vosotros habéis trabajado ya las sucesiones cuando erais pequeñitos en primaria, muchas de las actividades que os han puesto eran experiencias de sucesiones por una razón, porque os pedían que descubrierais ustedes ¿cuál es la lógica?, a ti te dan unos datos, que no están puestos de cualquier manera y por cualquier cosa, sino que hay una lógica, y te decían "oye pon tú el siguiente" y tú te ponías a mirar, te dabas cuenta de la lógica que había ahí, de la razón que estaba detrás de lo que tú estabas viendo, y tú eras capaz de poner el siguiente y el siguiente.

Este fragmento nos da indicios de que, durante la selección de este ejemplo, el profesor habría movilizado conocimientos correspondientes a las categorías de conexiones de simplificación (KSM) y secuenciación con temas (KMLS). Con el propósito de indagar en estos y otros conocimientos que podrían haber influido en la selección de este ejemplo, en la entrevista le realizamos la siguiente pregunta:

I: ¿Por qué al momento de seleccionar los ejemplos apela constantemente a contenidos que los estudiantes han trabajado anteriormente?

P: Porque el conocimiento se basa en lo previo, si tú no tienes asimilado, no has comprendido bien cosas previas, es muy difícil que sigas construyendo….

La respuesta del profesor nos da evidencia de su concepción en relación con cómo se va construyendo el aprendizaje; es una idea general no exclusiva del ámbito de la educación matemática, pero influye en la elección del ejemplo y en los subdominios que moviliza. En este caso, esta concepción provoca que movilice conocimientos que le permiten seleccionar un ejemplo que se base en conocimientos previos de los estudiantes. Reconoce los patrones como un contenido que los estudiantes han trabajado en cursos anteriores y que se relaciona con las sucesiones (KMLS; secuenciación de temas), y sabe que el trabajo que han desarrollado al abordar los patrones, como la búsqueda de la regularidad para continuar con la construcción de los términos, puede favorecer la presentación del concepto término general (KSM; conexiones de simplificación). Por tanto, en la selección de este ejemplo vemos una relación entre su KMLS y su KSM (figura 1), los conocimientos que posee sobre los patrones como un contenido que se relaciona con las sucesiones (KMLS) y que aporta a la comprensión del término general (KSM), permiten la selección de un ejemplo que se basa en contenidos previos y por tanto pone de relieve la concepción del profesor en relación con la construcción del aprendizaje.

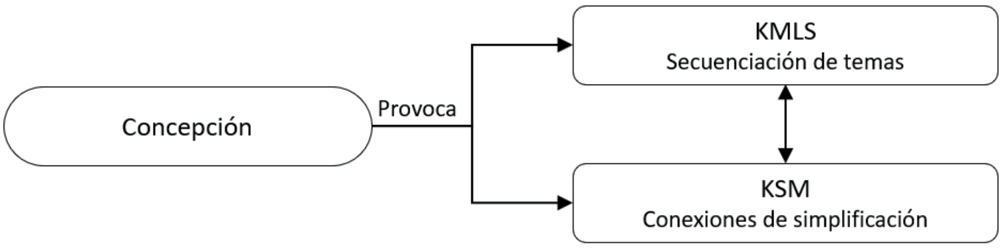


Figura 1. Relaciones entre los subdominios durante la selección del ejemplo 1.

Además, en este fragmento podemos observar que, al usar el ejemplo, el profesor moviliza conocimientos correspondientes a su conocimiento de los temas y a su conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas ; el profesor conoce la importancia de comprender el patrón que está detrás de la construcción de una sucesión para poder continuar con la construcción de los términos (KoT; procedimientos), y el procedimiento que los estudiantes han utilizado con anterioridad al estudiar patrones (KFLM; formas de interacción con el contenido matemático). Se evidencia, por tanto, en el uso de este ejemplo, una relación entre su KFLM y su KoT: el conocimiento que posee sobre la forma en que los estudiantes han interactuado con patrones en cursos anteriores le permite potenciar la enseñanza que desea transmitir, la importancia de conocer el patrón de la sucesión (figura 2).

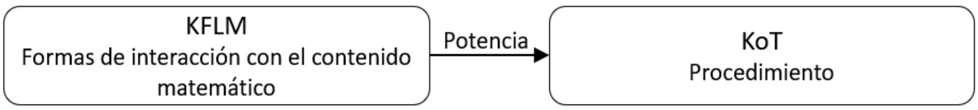


Figura 2. Relaciones entre los subdominios durante el uso del ejemplo 1.

En el segundo fragmento (ejemplo 2), el profesor presenta la primera sucesión numérica empleada en clase. La utiliza para ejemplificar cómo se representa algebraicamente el término general de una sucesión. Ha presentado a los estudiantes la sucesión 2, 4, 6, 8, …, y les ha pedido que determinen la expresión matemática que les permita calcular estos valores. Corresponde a un ejemplo activo de un concepto que enfatiza en una representación.

P: ¿Cuál es la llave? ¿Qué expresión matemática te permite calcular esto? (señalando la sucesión 2, 4, 6, 8, …)

A: Sumar – sumar dos

P: Pero qué expresión matemática

A: Dos por número menos uno – multiplica por dos

P: Multiplicar por dos, qué, el término que quieras ¿verdad? Muy bien esa es la llave, la has dicho en tu idioma, pero ahora vamos a decirlo matemáticamente. La llave de esta serie o de este cofre es multiplicar por dos el término que tú quieras ¿verdad? ¿Cómo le llamamos a un término que tú quieras? A sub-n, ¿no?

Con el propósito de obtener evidencias de los subdominios movilizados por el profesor durante la selección de este ejemplo, le realizamos las siguientes preguntas:

I: ¿Por qué selecciona esta sucesión (2, 4, 6, 8) como la primera sucesión numérica que presenta?

P: Numéricamente es simple, que empiecen con una sucesión simple y además que conocen y que han conocido desde mucho tiempo. La misma lógica de antes (no numérica), algo que está cercano, algo que han trabajado y que no es ajeno, luego si estás poniendo una sucesión más compleja, primero a lo mejor no ves siquiera que hay una sucesión porque no le ves…, es que mentalmente, de manera fácil ven que hay una relación entre un término y otro, es por la simplicidad del ejemplo

I: ¿Por qué utiliza metáforas al entregar nuevos conceptos?

P: Porque la metáfora en la memoria es más cómoda recordar, más cómodo de comparar, yo creo que didácticamente tiene más elementos gráficos o mentales porque tú cuando estás con una metáfora te haces imágenes mentales y eso luego ayuda mucho a recordar y a componer los conceptos de manera correcta

Las respuestas entregadas por el profesor nos permiten visualizar que, al momento de seleccionar el ejemplo, movilizó conocimientos correspondientes a su conocimiento de la estructura de las matemáticas y a todos los subdominios de su PCK. Sabe que el conocimiento que ya poseen los estudiantes sobre las tablas de multiplicar se puede vincular al tema de sucesiones (KMLS; secuenciación con temas) y que trabajar con la tabla del 2 facilitará la construcción del término general, favoreciendo la comprensión de este nuevo contenido (KSM; conexiones auxiliares). También se puede observar que conoce la potencialidad del ejemplo de sucesión que ha seleccionado, debido a su simplicidad (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y que con esta sucesión los estudiantes no tendrán problemas al momento de buscar el término general (KFLM; fortalezas y debilidades). En este caso se puede observar que todos los conocimientos movilizados contribuyen, de alguna forma, en la selección de un ejemplo activo, evidenciándose al menos tres relaciones. En primer lugar, su conocimiento de la multiplicación como un tema que se puede vincular con las sucesiones, pues se potencia el conocimiento sobre la tabla del dos como un tema que puede contribuir a la comprensión y construcción del término general de la sucesión , promoviendo la selección de la sucesión 2, 4, 6, 8. Se puede observar cómo esta primera relación favorece el KFLM movilizado por el profesor, ya que al tratarse de un ejemplo que se sustenta en un contenido desarrollado en cursos anteriores, fortalece la idea de que los estudiantes no tendrán problemas al determinar el término general de la sucesión. Por último, vemos una relación entre los tres subdominios ya mencionados y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (figura 3), pues que la sucesión se sustente en conocimientos previos y que los estudiantes no tengan problemas para determinar su término general, favorecen la idea de que este ejemplo es apropiado para el tema que se está desarrollando, debido a su simplicidad.

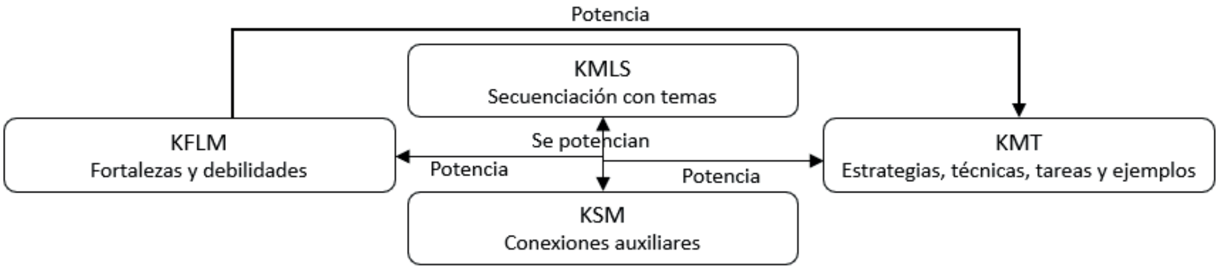


Figura 3. Relaciones entre los subdominios durante la selección del ejemplo 2.

En este segundo fragmento podemos observar que, al momento de utilizar este ejemplo, el profesor moviliza conocimientos correspondientes a su KoT y a su KMT. Sabe cuáles son los primeros términos de la sucesión (KoT; procedimientos) y sabe representar algebraicamente el término general (KoT; registro de representación), también es capaz de identificar la respuesta correcta entre todas las respuestas entregadas por los estudiantes (KoT; procedimientos). En la entrevista encontramos evidencia de su conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, pues sabe que el referirse al término general como "la llave" favorecerá la comprensión del concepto término general (KMT; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). En este caso se evidencia una clara relación entre su KoT y su KMT (figura 4), el conocimiento que posee con respecto a la expresión algebraica del término general le permite vincular ese concepto al concepto de llave mediante el uso de una metáfora, estrategia que utiliza para favorecer la compresión de los estudiantes.

Figura 4. Relaciones entre los subdominios durante el uso del ejemplo 2.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Al observar el MTSK movilizado por el profesor durante la selección y el uso de estos dos ejemplos, evidenciamos que, en ambas instancias, el profesor moviliza y relaciona conocimientos de los dos dominios del MTSK, lo que concuerda con lo planteado por Sosa et al. (2016), quienes concluyeron que la acción de ejemplificar hace aflorar diferentes subdominios del MTSK.

Si bien ambos ejemplos nos permiten profundizar en el estudio del conocimiento especializado del profesor (Sosa et al., 2016), hemos observado que el ejemplo activo parece posicionarse como un escenario más favorable para el estudio del PCK, pues en este tipo de ejemplos el profesor moviliza y relaciona los tres subdominios de conocimiento de este dominio.

Ambas instancias nos han permitido indagar en el conocimiento del profesor de matemáticas pero, según lo que hemos observado, el momento más apropiado para profundizar en el estudio del MTSK es durante la selección del ejemplo, ya que es cuando se generó la mayor cantidad de relaciones entre los distintos conocimientos movilizados por el profesor, relaciones que autores como Zakaryan et al. (2018) han señalado como necesarias de investigar para profundizar en el estudio de los distintos subdominios del MTSK.

Este estudio también ha puesto de manifiesto el rol que juegan las concepciones, que el profesor posee sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, en el uso de su MTSK durante la selección de los ejemplos. Condiciona el uso de determinados subdominios favoreciendo algunas relaciones entre ellos, evidenciándose de esta forma cómo las concepciones van permeando el conocimiento especializado que moviliza el profesor durante la enseña de las matemáticas (Carrillo et al., 2018). En relación con esto, cabe señalar que el hecho de que en los dos ejemplos mostrados el ejemplo pasivo sea el que muestre concepciones y el ejemplo activo solo muestre conocimientos, es mera coincidencia. En la investigación han surgido ejemplos activos con concepciones que permean el conocimiento y ejemplos pasivos en los cuales esto no se evidencia.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto RTI2018-096547-B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España, del centro de investigación COIDESO, del grupo de Investigación DESYM (HUM-168), y de la Red MTSK, auspiciada por la AUIP.

Referencias

Ball, D., Hill, H. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(3), 14-22, 43-46.

Bills, L. y Watson, A. (2008). Estudios educativos en matemáticas. *Introducción editorial, 69*(2), 77-78. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9147-z

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa.* La Muralla.

Carrillo, J. (2017). Idiosincracia del MTSK, Investigaciones realizadas y utilidades. En J. Carrillo, & L. Contreras, *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 7-10). CGSE.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., . . . Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Figueiredo, C. y Contreras, L. C. (2013). A função quadrática: variação, transparência e duas tipologias de exemplos. *AIEM, 3*, 45-68. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i3.62

Figueiredo, C., Blanco, L. y Contreras, L. C. (2007). La ejemplificación del concepto de función en estudiantes para profesores de Matemáticas en Secundaria. *Investigación en la Escuela, 61*, 53-67.

Goldenberg, P. y Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 183-194. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9143-3

Karaagac, M. K. (2004). Differences in teachers' selection and use of examples in classrooms: an institutional perspective on teacher practice. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 25*(2), 43-48.

Pascual, M. I. y Contreras, L. C. (2018). Un instrumento para el análisis de los ejemplos matemáticos para la enseñanza. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (p. 650). SEIEM.

Shulman, L. (1986). Aquellos que entienden. El crecimiento del conocimiento en la enseñanza. *Investigador Educativo, 15*(2), 4-14.

Sosa, L., Contreras, L., Goméz-Chacón, I., Flores-Medrano, E. y Montes, M. (2017). Síntesis, problemas abiertos, preguntas para la reflexión. En J. Carrillo y L. C. Contreras, *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 71-79). CGSE.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática, 28*(2), 151-174. https://doi.org/10.24844/EM2802.06

Suffian, H. y Abdul, S. (2010). Teachers' choice and use of examples in the teaching and learning of mathematics in primary school and their relations to teacher's Pedagogical Content Knowledge (PCK). *Procedia Social and Behavioral Sciences, 8*, 312-316.

Vinner, S. (2011). The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. *ZDM Mathematics Education, 43*(2), 247-256. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0304-3

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 105-123. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260

Zaslavsky, O. (2008). What knowledge is involved in choosing and generating use-ful instructional examples? *Paper submitted to WG2 of the Symposium for celebration of the centennial of ICMI.* ICME.

Zodik, I. y Zaslavsky, O. (2007). Exemplification in the mathematics classroom: What is it like and what does it imply? *Proceeding of the Fifth ERME Congress* (pp. 2024-2033). University of Cyprus.

Zodik, I. y Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 165-182. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9140-6

LA REPRESENTACIÓN TABULAR EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ALUMNADO SÍNDROME DE ASPERGER

Tabular representation in problem-solving with children diagnosed with Asperger Syndrome

Chico, A., Climent, N. y Gómez-Hurtado, I.

Universidad de Huelva

Resumen

Este estudio presenta una experiencia de resolución de problemas con 4 estudiantes de tercer ciclo de educación primaria diagnosticados con Síndrome de Asperger. *Se pretende trabajar con los estudiantes distintos heurísticos aplicando la representación tabular. Se analizan dos resoluciones, estableciendo un sistema de categorías que relaciona los heurísticos implementados a través de tablas organizadoras, con las habilidades y necesidades vinculadas al Síndrome de Asperger. La representación tabular permite afrontar las fases de identificación, comprensión, planificación, ejecución y comprobación desde la perspectiva visual y ayuda a mitigar dificultades generadas por la afectación de la función ejecutiva y la coherencia central asociadas a este síndrome.*

Palabras clave: *heurísticos, material TEACCH, representación, resolución de problemas, Síndrome de Asperger.*

Abstract

This study reports a problem-solving experience with 4 students in the last cycle of primary education, who have been diagnosed with Asperger Syndrome. It is intended to work on different heuristics by implementing the tabular representation. Two resolutions are described and analyzed, applying a system of categories that relates the heuristics thriven through the tables with the abilities and needs associated to the Asperger Syndrome. The tabular representation allows for coping with the solving phases (identification, comprehension, planification, execution and checking) from the visual perspective, as well as it supports to overcome the difficulties linked to deficits in central coherence and executive functioning, generally associated to Asperger Syndrome.

Keywords: *problem solving, Asperger Syndrome, representation, TEACCH material, heuristics.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de resolución de problemas (RP) se ve influida por la diversidad de pensamiento, habilidades e intereses de los estudiantes, pues las aulas, en palabras de Dewey, son un microcoscosmos reflejo de la propia sociedad. Una de las estrategias pedagógicas que se desarrollan para atender a esta diversidad es la representación. Esta permite abordar distintos contenidos matemáticos en varios niveles, sirviendo de puente entre docentes y alumnado en el proceso de enseñanza- aprendizaje (Goldin y Shteingold, 2001). De este modo, la representación es un potente recurso desde la perspectiva de educación inclusiva, al presentarse como un medio de comunicación alternativo para abordar

Chico, A., Climent, N., y Gómez-Hurtado, I. (2022). La representación tabular en la resolución de problemas con alumnado Síndrome de Asperger. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 209-217). SEIEM.

contenidos y procesos matemáticos. En estudios sobre RP en alumnado con Trastorno del Espectro Autista (TEA) y Síndrome de Asperger (SA) se ha investigado sobre todo sobre problemas aritméticos. En nuestro estudio nos centramos en el uso de algunos heurísticos desde la perspectiva de gestión en la RP, y a la posible ayuda que proporcionan en relación a algunas dificultades específicas del SA. Nos preguntamos: ¿Cómo influye el uso de representaciones tabulares en la implementación de heurísticos en resolución de problemas en alumnado Síndrome de Asperger? ¿Qué características frecuentemente asociadas al SA pueden vincularse con el uso de este tipo de representación?

MARCO TEÓRICO

La representación en la resolución de problemas

Aprender a resolver un problema (en el sentido de reto matemático) implica comprender las relaciones entre los datos presentados (Polotskaia et al., 2021). El uso de la representación visual transforma la información y los datos conocidos del problema, que se organizan creando un esquema visual que manifiesta dichas relaciones. Esto requiere de mecanismos de autorregulación, puesto que se necesita evaluar los pasos del proceso de resolución (Leikin y Ovodenko, 2021).

En este proceso, hemos de distinguir entre la representación externa, la que comunicamos (verbal, simbólica, etc), y la interna o cómo creamos en nuestra mente el objeto y proceso matemático, incluyendo la imagen mental, las actitudes y creencias respecto a la matemática y las estrategias y heurísticos en RP (Goldin y Shteingold, 2001). De acuerdo con estos autores, este sistema de representación no puede ser entendido como un fenómeno aislado y estático, sino que las representaciones interna y externa interaccionan, nutriéndose de las concepciones, relaciones y procesos de comprensión de cada estudiante. El docente debe reconocer las representaciones creadas por el alumnado y proporcionarle opciones ajustadas al significado o proceso implicado. Esto proporciona alternativas al sistema de representación interna del alumnado, que incrementa el nivel de desarrollo y flexibilidad (Goldin y Shteingold, 2001).

La RP permite abordar distintos tipos de representación, como los previamente mencionados heurísticos (Carrillo, 1998), por ejemplo, el ensayo y error o la búsqueda de regularidades. Pueden identificarse como sistemas de representación puesto que el estudiante desarrolla y organiza mentalmente su propio método para abordar el problema, incluso de manera inconsciente (Goldin y Shteingold, 2001). Los heurísticos permiten convertir el significado verbal y estático del enunciado en un conjunto de conexiones. No solo permiten designar los objetos del problema relevantes para la resolución, sino llevar a cabo un trabajo con ellos (Duval, 2016), experimentando, simplificando y manipulando la información desde lo visual (Novotná, 2014).

Representación en resolución de problemas y Síndrome de Asperger

El SA es un desorden del desarrollo dentro del TEA. Con el DSM-V, el autismo se engloba dentro de los trastornos del desarrollo neurológico diagnosticándose cuando: a) se observan deficiencias persistentes en la comunicación e interacción social en diversos contextos; b) se dan patrones restrictivos y repetitivos de comportamiento, intereses o actividades en dos o más de los siguientes aspectos: movimientos, utilización de objetos o habla; insistencia en la monotonía, excesiva inflexibilidad de rutinas o patrones ritualizados de comportamiento verbal o no verbal; c) los síntomas están presentes en las primeras fases del desarrollo; intereses muy restringidos y fijos que son anormales en cuanto a su intensidad o foco de interés e hiper- o hiporeactividad a los estímulos sensoriales o interés inhabitual por aspectos sensoriales del entorno; d) los síntomas causan un deterioro clínicamente significativo en lo social, laboral u otras áreas importantes del funcionamiento habitual; e) estas alteraciones no se explican mejor por la discapacidad intelectual (trastorno del desarrollo intelectual) o por el retraso global del desarrollo (DSM-V, p. 31-32). A las personas diagnosticadas con SA se les aplica el diagnóstico de TEA, sin déficit intelectual asociado.

La investigación de Stylianou (2011) describe la representación como herramienta de exploración, registro y monitorización en RP, al permitir examinar los datos, esquematizarlos visualmente y comprobar la coherencia de las conjeturas durante el proceso de resolución, lo que puede mitigar las dificultades en ocasiones asociadas al orden, organización y autorregulación del SA. Ejemplo de ello es la aplicación de organizadores gráficos (Delisio et al., 2018) en la fase de planificación y la revisión mediante diagramas (Llorca et al., 2009). También desde la fase de comprensión, que con alumnado SA parece ser una estrategia especialmente beneficiosa (Kribbs y Rogowsky, 2016), presentando los enunciados con pictogramas y apoyando la resolución con "pictomaterial" con el fin de reducir las dificultades derivadas de errores en la interpretación de los enunciados (Polo-Blanco et al., 2018a, 2018b) en línea con la metodología TEACCH al facilitar la secuenciación respaldada por guías visuales, incrementando la autonomía en la comprensión y resolución del problema de las personas con TEA (Schoppler et al., 2013). La representación tabular, foco de este estudio, facilita la construcción de la representación interna del alumnado, que debe ser consciente de su propio proceso de resolución, atendiendo a los datos relacionados visualmente a través de las filas y columnas (Cooper y Warren, 2008), para acomodar de manera esquemática las situaciones particulares respecto a la imagen general del problema (Steele y Johanning, 2004), lo que aflora nuevas estrategias. La visualización a través de tablas permite integrar diversos materiales manipulativos siguiendo el método TEACCH y otros heurísticos compatibles (figura 1) mediante dibujos o construcciones y apoya la comprensión gráfica de los datos del problema (Cooper y Warren, 2008). Nos preguntamos si el uso de representaciones puede ser un medio de propiciar en SA el avance en otras fases de la RP y la implementación de otros heurísticos (ensayo y error y búsqueda de regularidades), que pueden presentar dificultad por verse afectada la función ejecutiva, al requerir flexibilidad de razonamiento, habilidades de predicción y de inferir una situación global a través de los detalles (Bae et al., 2015).

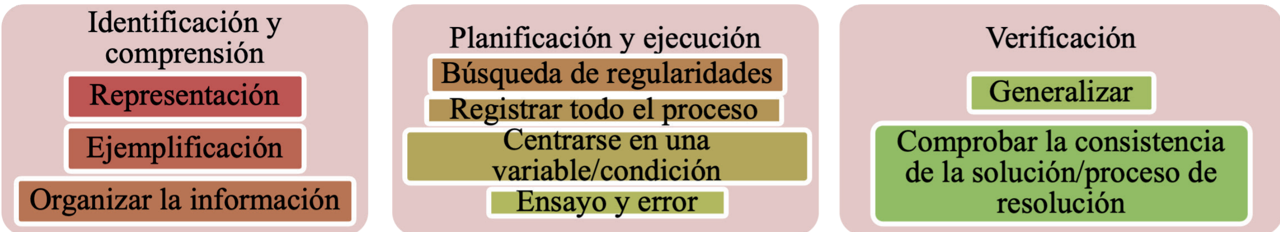


Figura 1. Relación de fases de resolución y heurísticos asociados (Carrillo, 1998).

METODOLOGÍA

Como parte de una tesis doctoral, se lleva a cabo un estudio cualitativo ligado a talleres grupales de RP realizados en colaboración con el proyecto INCLUREC y la Asociación Onubense del Síndrome de Asperger (AOSA), siguiendo una metodología de estudio de caso. Se trabaja en un contexto educativo con una muestra de 4 estudiantes de 3er ciclo de Ed. Primaria (cuyos nombres corresponden a pseudónimos), vinculados a AOSA. Colaborando con las familias y AOSA, se tiene acceso al diagnóstico y al informe psicopedagógicos, aunque la descripción que presentamos se centra en aspectos del aprendizaje matemático. Los niños han sido diagnosticados con TEA nivel 1 SA (DSM-V) y no presentan déficits cognitivos. La mayoría de dificultades derivan de afecciones de la función cognitiva, a excepción de Alejandro, que presenta un nivel inferior en matemática.

- Alejandro (A): 11 años. TEA Leve (F84.0). Dificultades a nivel de atención y visoespacial, al tomar de decisiones basadas en el razonamiento, lentitud en la planificación, organización y realización de actividades. Dificultades en razonamiento multiplicativo.

- Javier (J): 12 años. TEA (F.84.9); y espina bífida. Dificultad para planificar y organizar, agravada por la falta de conciencia temporal. Capacidad de tomar decisiones e inhibición afectadas, que interfiere en el control de sus pensamientos y distracción. Dificultades en las operaciones con números elevados, desordenando los datos y la información.

- Iván (Iv): 11 años. TEA Leve (F84.0). Impulsividad y monitorización afectada: no razona, reflexiona o supervisa, sino que contesta sin terminar de leer la pregunta. Puede establecer asociaciones entre los datos, pero le cuesta enlazar las fases de RP.

- Isaac (Is): 12 años. TEA leve y Trastorno de la Actividad y la atención (F84.0, F90.0). Dificultades de organización, planificación, gestión temporal, memoria de trabajo, toma de decisiones y monitoreo. Muy literal al interpretar los enunciados y explícito en la respuesta. Dificultades para expresar de forma clara y ordenada los datos y soluciones, para inferir información y buscar los procedimientos más adecuados en la RP.

Los problemas que analizamos aquí abarcan temáticas de interés (un videojuego y una misión de detectives) con el objetivo de motivar a los participantes, y se diseñan para abordar heurísticos (ensayo y error y búsqueda de regularidades), siendo la representación el núcleo de las resoluciones. Los enunciados se presentan con dibujos y pictogramas asociados a términos clave, puesto que la inclusión del lenguaje aumentativo beneficia la comprensión (Polo-Blanco et al., 2018). Una vez superada la fase de lectura e inmersos en la comprensión del problema, se les aportan materiales pictóricos y manipulativos (estrellas velcradas y relojes) y tablas organizadoras, que pueden emplear individualmente. La intervención, intentando minimizarse, se adapta a la actuación de los estudiantes, aportando guía y apoyo con el material cuando la estrategia escogida no es la adecuada.

- Problema 1 (P1): Al caer en la casilla de Bowser, este obliga a los jugadores a entregar todas las estrellas que habían conseguido, volviéndolas a repartir como él quiere (figura 2).
  - Bowser roba y reparte 5 estrellas. Mario tenía el triple de estrellas antes de encontrar a Bowser y Luigi ahora va ganando. ¿Cuántas estrellas tenían antes cada uno?
  - Bowser roba y reparte 5 estrellas en total. Yoshi tiene 2 estrellas más que antes de encontrarse a Bowser. Wario se queda sin ninguna. ¿Cuántas estrellas tenían?

- Problema 2 (P2): Para averiguar a qué hora has de comenzar la misión debes descifrar estos relojes ¿Qué hora es en el reloj sin manecillas?

Los talleres se desarrollaron durante 7 meses, adaptando los problemas y recursos a las necesidades. Se recogen las producciones de los niños y video y audio-grabaciones. Se categorizan y relacionan con la representación tabular respecto al heurístico puesto en marcha y las características del SA (tabla 1) y están relacionadas con las teorías explicativas del TEA (principalmente, las teorías de la Coherencia Central Cognitiva y de la Deficiencia en la función ejecutiva, Frith, 2004; Russel, 2000).

Tabla 1. Códigos de las habilidades y dificultades asociadas al SA.

Dificultad asociada al SA	Código
Dificultades de comprensión verbal	DCV
Habilidad de percepción de detalles	HPD
Predominancia del aprendizaje secuenciado	PAS
Habilidad visoespacial	HV
Dificultades para predecir e inferir	DPRI
Dificultades de organización	DO
Dificultades de planificación	DPL
Dificultades de memoria de trabajo	DMT
Dificultades para la autorregulación	DAR
Dificultades de atención centrada y sostenida	DACS
Literalidad y rigidez de pensamiento	DLRP

Nota: Elaboración propia a partir de Frith (2004), Bae *et al.*, (2015) y de Giambattista *et al.* (2019).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Problema de ensayo y error

En las tablas 2 y 3 se recoge una descripción de los aspectos del uso de la representación tabular que se ponen de manifiesto en cada fase de resolución y heurísticos asociados, así como su posible relación con características del SA. Se incluyen unidades de información referente a los diálogos durante la RP que se asocian a la puesta en marcha del heurístico y el descriptor SA.

Figura 2. Disposición en la tabla de las 5 estrellas antes y después de caer en la casilla de Bowser.

Tabla 2. Uso de la tabla respecto a la implementación de heurísticos y características del SA en cada fase: P1.

<table>
<tr><th>Heurístico</th><th>Descriptor</th><th>Aplicación del heurístico vinculada al material</th></tr>
<tr><td colspan="3">Fase de comprensión</td></tr>
<tr><td>Representación</td><td>DCV</td><td>La tabla dotada con Velcro posibilita la representación de los datos del problema, pudiendo identificar el número de estrellas de cada personaje en cada momento.</td></tr>
<tr><td></td><td>HV</td><td>Se distinguen dos estadios temporales, ambos relacionados por el número de estrellas que se reparten en total. La representación tabular permite abordar un término abstracto como el tiempo, reflejado visualmente en las dos columnas etiquetadas con rótulos y un picto de uno de los personajes que las divide.</td></tr>
<tr><td colspan="3">A: Antes de encontrarse a Bowser no sé cuántas estrellas tenían.
Profesora: No sabemos, ¿verdad? ¿Y sí sabemos qué pasó después de encontrarnos a Bowser?
A: Sí. Pues que Wario perdió todas sus estrellas, Yoshi consiguió 2 y Wario ninguna.
J: ¡Eso después! No dice que “antes tenía”, sino que cuando Bowser le ha repartido a Wario, él se ha quedado sin ninguna. Aquí (celda de DESPUÉS) no hay estrellas.</td></tr>
<tr><td>Organizar la información</td><td>DO
DPL
PAS</td><td>La división de la tabla en las columnas ANTES y DESPUÉS y en filas permite organizar los datos en los dos espacios temporales según lo que le ocurre a cada uno de los personajes que intervienen en el videojuego.</td></tr>
<tr><td></td><td>DACS</td><td>La tabla subdividida en personajes y espacios temporales permite focalizar la atención en alguno de los datos tapando las celdas que no interesan.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fase de planificación y ejecución</td></tr>
<tr><td>Centrarse en una condición</td><td>DMT
DO
DPL</td><td>El organizador ayuda a mantener un orden en el cálculo: la distribución en filas y columnas facilita fijar el número de estrellas a repartir, que se organizan por celdas y contribuyendo de manera visual a la descomposición numérica.</td></tr>
<tr><td>Ensayo y error</td><td>DPRI
DLRP</td><td>La estrategia, desarrollada de manera visual sobre la tabla, propicia que sean conscientes de sus errores y puedan establecer nuevas hipótesis a partir de ellos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Profesora: Entonces Wario ANTES, ¿cuántas tenía? Si Yoshi tenía 3, ¿Wario cuántas tenía?
Iv: Si hemos gastado ya las 5, sería 0.
P: ANTES. Tú imagínate que esto no está (Tapa la columna DESPUÉS) ¿Cuántas tenía Wario?
Iv: Podría haber tenido 1 más la que le dan.
P: Dice que reparte 5. Si aquí (celda de Yoshi) hemos puesto 3 estrellas, ¿cuántas tenía Wario?
Iv: ¡Ah, dos!</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fase de comprobación</td></tr>
<tr><td>Comprobar la consistencia de la solución</td><td>DAR
PAS</td><td>La representación tabular plasma las hipótesis del alumnado respecto al número de estrellas de cada personaje, por lo que pueden comprobar los errores cometidos y qué pista del enunciado se ha omitido.</td></tr>
<tr><td colspan="3">P: Busca un número que tú puedas poner como las estrellas que tiene después y que se respete que al multiplicarlo siga habiendo 5 estrellas en total.
J: Antes, Mario tenía 3, Luigi 2 (mueve estrellas a medida que cuenta la historia); luego, Mario 1 y Luigi 4.</td></tr>
</table>

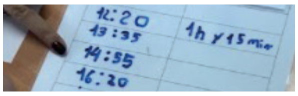
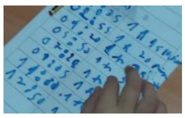
La disposición de las estrellas nos permite acercarnos a la comprensión del estudiante y dotarle de estrategias alternativas. Así, ante la tendencia a focalizarse en una única pista del enunciado (DACS), obviando las demás, se propone recurrir al enunciado para descartar cada ítem una vez se plasma en la tabla y mantener fijo el número de estrellas repartidas. Destacamos también la propensión a confundir el número de estrellas totales con las de cada personaje (DPRI). Alejandro, que reparte un total de 10 estrellas, muestra dificultades para saber que le sobran 5 y debe retirárselas a alguno de los personajes

(DMT). La organización en filas y columnas por personaje le facilita que, por turnos, retire una estrella a cada uno, contando hasta completar las 5, aunque acaba retirando más de las necesarias (DAR). Iván se quedó sin estrellas y tuvo que reutilizar las de la columna ANTES, lo que ocasionó que su respuesta final reflejara las que quedaron en su tabla y no el reparto realizado (DL y DMT). Sin embargo, se mostró más flexible gracias a poder intercambiar las estrellas entre columnas.

Problema de búsqueda de regularidades

A diferencia del anterior, en este problema la complejidad reside en relacionar las horas de los relojes más que en la comprensión del enunciado.

Tabla 3. Uso de la tabla respecto a la implementación de heurísticos y características del SA en cada fase: P2.

Heurístico	Descriptor	Aplicación del heurístico vinculado al material
		Fase de identificación y comprensión
Representación	DCV PAS	La representación tabular permite registrar visualmente, ordenar y organizar los datos.
		Fase de planificación y ejecución
Registrar todo el proceso	DMT DACS PAS	La organización en celdas permite anotar qué van descubriendo, tanto las horas que marcan los relojes, como el tiempo que pasa (figura 3).  Figura 3. Datos de los relojes ordenados por columnas
Expresar en otros términos	PAS	La representación tabular ayuda a ir recordando la hora de cada reloj (columna de la izquierda), establecer relaciones entre ellas y encontrar un patrón, al quedar los datos ordenados y conectados de manera visual.
Buscar regularidades	HPD	
P: ¿Entonces qué hora será? A: ¿Tenemos que sumarlo? P: No sumes. ¿Esto qué significa, 1h 15min? ¿De dónde ha salido? A: De este (señala la tabla). P: Claro, del primer reloj al segundo. […] Y del cuarto al quinto, ¿cuánto va a tardar? ¿Se repite algo? A: Puede ser una hora también, ¿no? P: Puede ser una hora porque todos son una hora. Y los minutos… 15, luego … (señala el organizador). A: 20, luego 25… Ah, aquí estará el 30.		
		Fase de comprobación
Generalizar	HPD DPRI	El registro de la tabla facilita comprobar la resolución, y proporciona la oportunidad de extender el problema (figura 4).  Figura 4. Descubrir el patrón a través de la tabla permite investigar qué pasaría si hubiera más relojes.
Comprobar la consistencia del proceso /solución	DLRP DAR	

Los participantes plasman en la tabla su comprensión de los relojes, lo que permite descubrir errores asociados al contenido. Mientras Alejandro tiene dificultades para identificar las manecillas y la hora en el dibujo de los relojes (DMT), Javier, que va explicando las horas de los relojes de manera oral e inicialmente también confunde las manecillas, muestra una representación sobre la tabla en la que alterna entre a.m. y p.m. (DO). Isaac compagina ambos recursos, descubriendo que de un reloj a otro siempre hay una vuelta (1 hora) más algunos minutos (HV y HPD), que va anotando en la tabla.

CONCLUSIONES

La utilización de tablas y material TEACCH en la RP ha permitido a los estudiantes comunicar su visión del problema y trabajar sobre sus ideas previas, de las que surgen hipótesis.

La naturaleza visual de las tablas, apoyadas por materiales pictóricos y manipulativos (estrellas velcradas y relojes), ha parecido contribuir a reducir las dificultades frecuentemente asociadas al SA, y permitido observar el uso de diferentes heurísticos. En especial, se han encontrado evidencias de su potencial para la simplificación del enunciado y los datos (Delisio et al., 2018), al codificar el primero con la distribución en la tabla, permitiendo la representación y manipulación contar el problema como una historia. Esto parece ayudar ante las dificultades de comprensión verbal y para predecir e inferir. El registro y organización de información en la tabla permite mantener el foco en cada uno de los datos y condiciones del enunciado y seguir la secuencia temporal. Lo anterior colabora ante las posibles dificultades de organización, planificación y de atención centrada y sostenida, y fortalece la usual facilidad del alumnado con SA para el aprendizaje secuenciado. El alumnado relaciona el conjunto de datos (Kribbs y Rogowsky, 2016), e.g. las estrellas ANTES y DESPUÉS en P1 y las horas de los relojes en P2. Por otro lado, la estructuración en fases que vincula la representación pictórica y simbólica (Cooper y Warren, 2008; de Giambattista et al., 2019) permite que se hayan observado diferentes heurísticos, al cambiar el registro de la hora y buscar patrones en los relojes, y resolver el reparto de estrellas mediante ensayo y error. De este modo, los estudiantes han resuelto situaciones problemáticas por observación de regularidades y ensayo y error, requiriendo ambos heurísticos de habilidades con a priori dificultades esperables en el SA.

La organización visual parece haber favorecido que los estudiantes sean conscientes de los objetivos marcados en el enunciado y su propio proceso, lo que potencia la autorregulación de su respuesta (habilidades asociadas a la función ejecutiva y frecuentemente afectadas en el SA). En este contexto, la enseñanza de estrategias asociadas a la representación contribuye al desarrollo de las capacidades de razonamiento y visualización (Duval, 2016). Además, nos sumergimos en un contexto de inclusión, al centrarnos en una metodología más que en las necesidades del alumnado (Roos, 2019), por lo que cualquier niña/o puede beneficiarse de la representación en la resolución de problemas.

Referencias

Bae, Y. S., Chiang, H. M. y Hickson, L. (2015). Mathematical word problem solving ability of children with Autism Spectrum Disorder and their typically developing peers. *Journal of Autism and Developmental Disorders, 45*(7), 2200–2208. https://doi.org/10.1007/s10803-015-2387-8

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Universidad de Huelva.

Cooper, T. y Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalise. *ZDM Mathematics Education. 40*, 23-37. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0066-8

Delisio, L., Bukaty, C. y Taylor, M. (2018). Effects of a graphic organizer intervention package on the mathematics word problem solving abilities of students with Autism Spectrum Disorders. *The*

Journal of Special Education Apprenticeship, 7(2), article 4. https://scholarworks.lib.csusb.edu/josea/vol7/iss2/4/

de Giambattista, C., Ventura, P., Trerotoli, P., Margari, M., Palumbi, R. y Margari, L. (2019). Subtyping the Autism Spectrum Disorder: Comparison of children with High Functioning Autism and Asperger Syndrome. *Journal of Autism and Developmental Disorders, 49*(1), 138-150. https://doi.org/10.1007/s10803-018-3689-4

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Énfasis.

Frith, U. (2004). *Autismo: Hacia una explicación del enigma. (2ª Ed.).* Alianza Editorial.

Goldin, G. y Shteingold, N. (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. En A. Cuoco, A. y F. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Kribbs, E. y Rogowsky, B. (2016). A review of the effects of visual-spatial representations and heuristics on word problem solving in middle school mathematics. *International Journal of Research in Education and Science, 2,* 65-74. https://doi.org/10.21890/ijres.59172

Leikin, R. y Ovodenko, R. (2021). Stepped tasks for complex problem solving: Top-down-structured mathematical activity, *Learning and Teaching Mathematics 40*(3), 30-35.

Llorca, M., Plasencia, I. y Rodríguez-Hernández, P. (2009). Diagramas para la comprensión matemática. Estudio de caso en personas con trastorno del espectro autista. *Revista Educación Inclusiva, 2*(1), 79-90. https://doi.org/10.35376/10324/35103

Novotná, J., Eisenmann, P., Přibyl, J., Ondrušová, J. y Břehovský, J. (2014). Problem solving in school Mathematics based on heuristic strategies, *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science, 7*(1), 1–6. https://doi.org/10.7160/eriesj.2014.070101

Polo-Blanco, I., Bruno, A. y Gónzalez, M. J. (2018). Errores en la resolución de problemas de división por un estudiante con Trastorno del Espectro Autista. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodriguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 467-476). SEIEM.

Polo-Blanco, I., Bruno, A., González, M. J. y Olivera, B. (2018). Estrategias y representaciones en la resolución de problemas aritméticos de división en estudiantes con Trastornos del Espectro Autista: Un estudio de caso. *Revista de Educación Inclusiva, 11*(2), 161-180.

Polotskaia, E., Savard, A. y Nadon, C. (2021). La resolution de problemes mathematiques et l'art de la representation, *For the Learning of Mathematics, 41*(3), 16-19.

Roos, H. (2019). Inclusion in mathematics education: an ideology, a way of teaching, or both? *Educational Studies in Mathematics, 100*, 25-41. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9854-z

Russell, J. (De.) (2000) *Autismo como Trastorno de la función ejecutiva.* Ed. Panamericana.

Schoppler, E., Mesibov, G. y Hearsey, K. (2013). Structured teaching in the TEACCH system. En E. Schoppler y G. Mesibov (Eds.), *Learning and cognition in autism: Current issues in autism, (*pp. 243-268). University of North Carolina. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-1286-2_13

Steele, D. y Johanning, D. (2004). A schematic-theoretic view of problema solving and development of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics 57*, 65-90. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000047054.90668.f9

Stylianou, D. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics,76,* 265-280. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9273-2

TRANSFORMACIONES DE LA INFORMACIÓN EN LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS: UNA MIRADA HACIA LOS FUTUROS MAESTROS

Information transformations in problem posing: a closer look at future teachers

Chico, J.[a], Montes, M.[b] y Badillo, E.[c]

[a]Universidad de las Islas Baleares; [b]Universidad de Huelva; [c]Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

El objetivo de este estudio es caracterizar las transformaciones de enunciados de problemas multiplicativos realizadas por futuros maestros. Para ello propusimos a estudiantes del Grado de Educación Primaria que modificaran el enunciado de un problema multiplicativo de un libro de texto. Desarrollamos un análisis de contenido sobre las modificaciones propuestas para caracterizar las transformaciones realizadas mediante un proceso deductivo-inductivo de codificación. Describimos en detalle la familia de transformaciones de la información, ilustrando los códigos de tres subcategorías emergentes. Los resultados señalan que, en conjunto, las transformaciones de la información realizadas por los futuros maestros cambian, añaden o eliminan elementos numéricos, gráficos, simbólicos o, relaciones entre datos, para promover u obstaculizar estrategias de resolución basadas en el conteo o en la suma reiterada o, incidir en la complejidad del problema.

Palabras clave: *formulación de problemas, formación de maestros, competencia profesional.*

Abstract

The aim of this study is to characterise the transformations of multiplicative word problems performed by future teachers. For this purpose, we proposed preservice primary teachers to modify a multiplicative word problem taken from a textbook. We developed a content analysis on the proposed modifications. By a deductive-inductive coding process we characterise the transformation performed by future teachers. We describe in detail the set of information transformations, illustrating the codes of three emerging subcategories. The results indicate that future teachers transform the information of a word problem by changing, adding, or eliminating numerical, graphic, or symbolic elements, or relationships between data. Overall, these transformations aim to promote or hinder resolution strategies based on counting or repeated addition, or to increase or decrease the complexity of the problem.

Keywords: *Problem posing, teacher education, professional competence.*

INTRODUCCIÓN

La formulación de problemas ha sido principalmente explorada desde la perspectiva de su potencial respecto de la construcción de conocimiento matemático de los estudiantes (p. ej., Kilpatrick, 1987), y también respecto del potencial que tiene para la construcción de conocimiento matemático y didáctico de futuros profesores (Tichá, Hospesová, 2015). Sin embargo, pese a que la resolución de problemas

Chico, J., Montes, M. y Badillo, E. (2022). Transformaciones de la información en la formulación de problemas: una mirada hacia los futuros maestros. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 219-227). SEIEM.

está presente en los currículos de todo el mundo, no se ha prestado apenas atención a la competencia de los profesores para formular problemas escolares de matemáticas para sus alumnos (Crespo, 2013). Al respecto, en esta comunicación presentamos resultados preliminares de una investigación en curso que tiene por objetivo a largo plazo caracterizar la competencia profesional en la formulación de problemas escolares. Entendemos esta competencia profesional como las habilidades cognitivas, así como los aspectos motivacionales y volitivos del profesor (Weinert, 2001) para proponer problemas a los alumnos con la intención de promover la construcción de conocimiento matemático. En esta comunicación no abordamos las dimensiones motivacional y volitiva. Esta competencia se descompone en tres destrezas: crear enunciados de problemas, seleccionar problemas y transformar enunciados de problemas ya existentes (Carrillo et al., 2021). En este estudio nos centramos en la última destreza. Concretamente, la pregunta de investigación que abordamos es: ¿cómo transforman enunciados de problemas futuros maestros? Para dar respuesta a esta pregunta, propusimos a 127 futuros maestros transformar problemas multiplicativos de libros de texto escolares. El objetivo de este estudio exploratorio es caracterizar las transformaciones de enunciados de problemas multiplicativos realizadas por futuros maestros.

En lo que sigue, presentamos antecedentes teóricos sobre la formulación y transformación de problemas. Después, introducimos el diseño y los métodos cualitativos aplicados en el análisis de los datos para dar paso a la descripción de los diferentes tipos de transformaciones de la información que emergen de los datos. Finalizamos con reflexiones en torno a los resultados, así como las líneas que darán continuidad a este estudio.

ANTECEDENTES TEÓRICOS

El responsable fundamental de promover que los estudiantes de Primaria y Secundaria desarrollen tareas de resolución de problemas es el profesor, que debe proponer actividades con esta naturaleza. Desde esta perspectiva, asumimos que el profesor debe ser competente en la formulación de problemas escolares. Dentro de esta competencia se identifican tres destrezas: crear nuevos problemas; seleccionar problemas de fuentes como libros de texto, webs, etc.; y, transformar problemas ya existentes (Carrillo et al., 2021). Esta última destreza implica modificar uno o varios elementos del enunciado con una intención didáctica (Carrillo et al., 2021), pudiendo tener dicha modificación un impacto significativo en el proceso de resolución (Lavy y Berkshadky, 2003).

Los elementos del enunciado de un problema que pueden ser transformados son diversos. Siguiendo la caracterización de Malaspina (2013) para las partes de un problema, organizamos las transformaciones en cuatro categorías: entorno matemático, contexto, información, y requerimiento. El entorno matemático hace referencia a los conceptos matemáticos que pueden ser usados en la resolución del problema. La información se vincula a los datos que el problema proporciona, sean útiles o no para su resolución, pudiendo ser expresados en diferentes registros de representación. El requerimiento, en caso de existir, consiste en la demanda que el problema establece como meta a conseguir, presentándose habitualmente en forma de pregunta. Finalmente, el contexto hace referencia a la situación a la que se vincula el problema, pudiendo ser matemática o extramatemática. En una modificación de un problema puede darse una o más transformaciones de uno o de varios de estos elementos (Milinkovic, 2015), y debe realizarse de forma coordinada.

En general, la formulación de problemas escolares es una tarea no trivial para los futuros profesores (Montes et al., 2022). Si a esto se le añade la necesidad de que el profesor sea consciente de las implicaciones que tiene una transformación sobre la resolución del problema, hecho que debe estar vinculado a una cierta intención didáctico-matemática, la complejidad aumenta. Por esto, diversos autores señalan la necesidad de proponer, en contextos de formación inicial de profesores, tareas de transformación y selección de problemas (Lavy y Hourigan, 2019). Existen diversas estructuras para organizar tareas de formulación de problemas. Una posibilidad es la estructuración libre, demandando que se haga una transformación, sin dar mayor indicación. Otra es una estructuración con base en la estrategia a seguir para transformar problemas. Por ejemplo, Lavy y Bershadsky (2003) proponen transformar problemas a través de la estrategia "¿y si no…?". Una tercera posibilidad es estructurar la tarea orientando la transformación hacia alguno de los elementos del problema, exigiendo, por ejemplo, que se modifiquen los datos de un problema de reparto para que éste no sea exacto.

METODOLOGÍA

Diseñamos un protocolo con cuatro tareas que demandan transformar problemas de estructura multiplicativa de libros de texto de Educación primaria usados en España. Restringimos el contenido matemático a la multiplicación y división por ser crucial en esta etapa, y porque los futuros maestros habían cursado una asignatura de contenido didáctico-matemático que contempla el pensamiento multiplicativo. Para cada tarea los participantes dispusieron de una semana para realizar, de forma individual y por escrito, una o más modificaciones de los enunciados, pudiendo proponer una o más transformaciones en cada modificación.

Los participantes son 127 estudiantes del tercer curso del Grado de Educación primaria de la Universidad Autónoma de Barcelona en el periodo académico 2020-2021. Presentamos resultados que se derivan del análisis de las 198 modificaciones propuestas a la primera tarea, que plantea modificar un problema para promover el aprendizaje matemático de los contenidos identificados (figura 1). Es un problema multiplicativo con estructura de isomorfismos de medidas, donde se establece la proporción entre dos espacios de medida (Vergnaud, 1983; Montero y Callejo, 2018). Se corresponde con una situación de grupos iguales con el número total de elementos desconocido. El enunciado presenta un modelo visual de grupos iguales que muestra todos los elementos agrupados.

Modifica los dos enunciados para que promuevan la comprensión de los contenidos matemáticos que identificas. Para cada cambio que realices indica en la tabla: qué tipo de cambio es; por qué lo harías; y, qué aporta al aprendizaje matemático de los alumnos.

Bruno tiene 10 cajas con canicas. Cada caja contiene 5 canicas.
¿Cuántas canicas tiene Bruno en total?

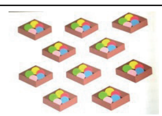


Figura 1. Primera tarea del protocolo diseñado.

Siguiendo una metodología cualitativa, realizamos un análisis de contenido en dos fases: preparación y organización (Elo y Kyngäs, 2008). En la primera fase nos familiarizamos con la totalidad de los datos y establecimos cada modificación como unidad de análisis. También determinamos las categorías centrales de codificación: información, contexto, requerimiento y entorno matemático (Malaspina, 2013). La revisión de los estudios de Lavy y Bershadsky (2003) y Milinkovic (2015) sirvió de inspiración para establecer a priori algunos códigos de las transformaciones de la información, que se refinaron en la segunda fase de análisis. En la fase de organización, realizamos la codificación de los datos donde los códigos a priori y los emergentes del análisis se refinan mediante métodos de comparación constante (Strauss y Corbin, 2002), comparando, contrastando y abstrayendo códigos en muestras cada vez más amplias de los datos. Como resultado de este proceso de codificación inductivo-deductivo, obtenemos códigos como 'cambiar a otro elemento numérico' o 'eliminar elemento gráfico', que organizamos en familias atendiendo las cuatro categorías centrales (Malaspina, 2013). Una vez establecido un conjunto de códigos estable, para cada código contamos las modificaciones donde al menos aparece una transformación etiquetada con ese código. En esta comunicación, nos centramos en describir la naturaleza de los códigos de la categoría más frecuente, transformaciones de la información, presente en el 81% de las modificaciones analizadas. Mostramos también la frecuencia de cada uno de los códigos.

TRANSFORMACIONES DE LA INFORMACIÓN

Organizamos las transformaciones de la información en cuatro subcategorías según si se transforman: i) elementos numéricos (presente en el 61,7% de las modificaciones), ii) gráficos (38,9%), iii) relaciones establecidas entre datos (30,6%) o, iv) elementos simbólicos (3,6%). Mostramos las frecuencias y algunas modificaciones junto con extractos de las justificaciones de los futuros maestros para ilustrar la naturaleza de los códigos más frecuentes de las tres primeras subcategorías.

Transformación de elementos numéricos

La transformación de elementos numéricos se compone de cuatro códigos no excluyentes: i) cambiar algún elemento numérico por otro (34,3%); ii) añadir elemento numérico (26,3%); iii) eliminar elemento numérico (22,2%); y, iv) cambiar algún elemento numérico por un rango de valores (1,5%).

Las transformaciones consisten en cambiar algún elemento numérico del enunciado por otro, o conllevan un cambio en la tipología de problema dentro de la estructura de isomorfismos de medida, o inciden en la complejidad, manteniendo la estructura multiplicativa. En el primer caso, se intercambian los elementos numéricos conocidos y desconocidos de la estructura multiplicativa. Así el nuevo enunciado se corresponde con un problema de medida, si se intercambia el número de cajas por el número total de canicas; o con un problema de reparto, si se intercambia el número de canicas de cada caja por el número total de canicas como en la modificación de FM38 (figura 2). En el segundo caso, el cambio del elemento numérico aumenta o disminuye la complejidad del problema, proponiendo, por ejemplo, una operación más difícil como en la modificación de FM102 (figura 2).

Modificación de FM38: Bruno tiene 50 canicas. Las quiere repartir en 10 cajas y que en cada caja haya la misma cantidad. ¿Cuántas canicas deberá guardar en cada caja?	Modificación de FM102: Bruno tiene 6 cajas con canicas. Cada caja contiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Bruno en total?
Justificación: …he querido modificar el enunciado para que él o la aprendiz deba hacer una división (y no una simple multiplicación), que es una operación que también pertenece al pensamiento multiplicativo.	Justificación: Nos es muy fácil multiplicar por 10 (o sumar x veces 10). Por eso, si en vez de haber 10 cajas hay 6, la multiplicación les pude causar más dificultad y por ende expandir su conocimiento de las multiplicaciones.

Figura 2. Modificaciones propuestas por FM38 y FM102.

La mayoría de las transformaciones que se basan en añadir algún elemento numérico, incorporan una nueva relación entre los datos que tiene implicaciones en la resolución del problema. Por ejemplo, en la modificación de FM102 (figura 3) se añade una relación aditiva que involucra el nuevo elemento y transforma el problema en uno de dos etapas que posibilita el uso de nuevas estrategias de resolución. Por otro lado, encontramos modificaciones en las que añadir un elemento numérico no implica una nueva relación. En estas modificaciones se introducen elementos numéricos irrelevantes para la resolución del problema. Así, no se alteran los posibles conceptos matemáticos involucrados en la resolución del problema, aunque sí se dificulta la comprensión del enunciado del problema (modificación de FM12, figura 3).

Modificación de FM102: Bruno tiene 10 cajas con canicas. Cada caja contiene 5 canicas. Ayer, Itziar, su prima, le cogió sin permiso 20 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Bruno?	Modificación de FM12: Bruno es un niño que tiene 11 años y desde los 6 colecciona canicas. Hoy las ha ordenado todas en 10 cajas diferentes de manera que en cada de una de estas cajas le ha puesto 5 canicas. ¿Cuántas canicas ha recopilado Bruno durante todos estos años?
Justificación: El alumno debe resolver un problema añadido al primer enunciado. En este caso debe restar 20 canicas a las 50 que ya tenía. He hecho el cambio para dificultar un poco más la comprensión del texto y su resolución.	Justificación: He realizado un cambio produciendo una contextualización del problema. De esta manera el alumnado se aproxima a una situación más común a su entorno y a la vez comprende que puede resolver problemas de la vida cotidiana con las matemáticas.

Figura 3. Modificaciones propuestas por FM102 y FM12.

Por último, la mayoría de las transformaciones de la información donde se eliminan uno o los dos elementos numéricos del enunciado inciden en la interpretación de la información suprimida en el elemento gráfico (modificación de FM9 en la figura 4). En menor grado, esta transformación aparece en combinación con otras, variando el conjunto de soluciones y los conceptos matemáticos involucrados en la resolución. Este es el caso de la modificación de FM36 (figura 4), donde se cambia un elemento numérico por otro de la misma estructura multiplicativa (ahora se da el número total de elementos) y se eliminan un elemento numérico y el gráfico. Como resultado se obtiene un problema nuevo con más de una solución, que requiere la combinación de los divisores de 50.

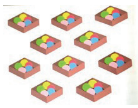
Modificación FM9:  Bruno tiene estas cajas de canicas. ¿Cuántas canicas tiene Bruno en total?	Modificación FM36: Bruno tiene 50 canicas. Las quiere agrupar en cajas, ¿cuántas maneras posibles tiene de hacerlo? Justifica tu respuesta.
Justificación: Si quitamos los datos del problema y no decimos ni cuantas cajas ni cuantas canicas hay, podemos potenciar la interpretación de la imagen que tiene que hacer el alumnado.	Justificación: Cambio a enunciado más generalista. Ahora el/la alumno/a no tiene que buscar un dato concreto, sino pensar y reflexionar. No se trata de aplicar un algoritmo, sino de reflexionar. Se les pide justificación.

Figura 4. Modificaciones propuestas por FM9 y FM36.

Transformación de elementos gráficos

La transformación del elemento gráfico del enunciado del problema revela cuatro códigos no excluyentes: i) cambiar internamente el elemento gráfico (14,6%); ii) eliminar el elemento gráfico (13,1%); iii) cambiar el elemento gráfico por otro (12,1%); y, iv) añadir otro elemento gráfico (0,5%).

Cambiar internamente el elemento gráfico describe transformaciones que inciden en el diseño del elemento gráfico sin cambiar el modelo matemático que representa, en nuestro caso el modelo multiplicativo de grupos iguales. Algunos son cambios estéticos que se fundamentan en cuestiones de atención a la diversidad, como la modificación de la gama cromática de los colores para mejorar la visualización del elemento gráfico en alumnos daltónicos, o que se producen como consecuencia de cambios en el contexto, como cambiar las cajas por mesas y las bolas por sillas (Chico et al., en prensa). Por otro lado, encontramos cambios internos del elemento gráfico que buscan incidir en el proceso de resolución, como eliminar las bolas de las cajas para obstaculizar estrategias de conteo o, cambiar la disposición de las cajas a una lineal para facilitar el conteo o la suma reiterada como estrategia de resolución (modificación de FM33 de la figura 5).

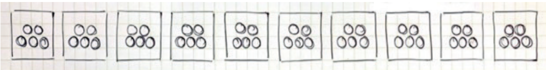
Modificación de FM33 Tienes 10 cajas con canicas. Cada caja contiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tienes en total? 	Modificación de FM17: Bruno tiene 10 cajas para guardar todas sus canicas. En cada caja caben 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Bruno? 
Justificación: De esta manera, los niños y las niñas ven más fácilmente que una multiplicación puede ser una suma reiterada	Justificación: Cambiaría el dibujo porque si ponemos el otro, el alumno tiene el resultado en la foto. Por lo tanto, tiene el recurso de sumar y dejar de hacer la multiplicación, que es lo que nos interesa.

Figura 5. Modificaciones propuestas por FM33 y FM17.

Las transformaciones que se basan en eliminar el elemento gráfico del enunciado del problema aparecen en combinación con otro tipo de transformaciones. En algunos casos se combina con un cambio de requerimiento donde se solicita la representación gráfica del problema como en la modificación de FM43 (figura 6). En otros, este cambio se combina con otras transformaciones para coordinar la información numérica y gráfica y, el requerimiento del nuevo enunciado (modificación de FM36 en figura 4).

Eliminar el dibujo de las canicas y pedir el dibujo para la comprobación
Justificación: Facilitar el razonamiento del problema y evitar que cuenten como primera opción. Luego, que dibujen las canicas para comprobar si lo han contado bien.

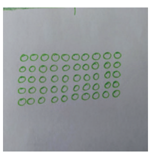
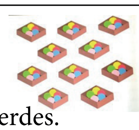
Figura 6. Modificación propuesta por FM43.

Por último, en la mayoría de las transformaciones donde se cambia el elemento gráfico por otro elemento gráfico, se sustituye el modelo de grupos iguales por otro modelo matemático y tan solo en una modificación se cambia el elemento gráfico a otro decorativo. El modelo de grupo representativo es el más escogido por los futuros maestros para dificultar estrategias de resolución basadas en el conteo o la suma reiterada (modificación de FM17 en la figura 5) aunque también encontramos algunas modificaciones con otros modelos como el rectangular (modificación FM18 en la figura 6).

Transformación de relaciones

La transformación de las relaciones entre datos, ya sean entre elementos numéricos o expresadas en el elemento gráfico, se organiza en dos códigos: i) añadir relaciones (28,2%) y, ii) eliminar relaciones (5,5%) en el enunciado del problema. Por la naturaleza de estos códigos, ambos aparecen mayoritariamente en combinación con otras transformaciones.

En el caso de eliminar relación, se presenta siempre con eliminar un elemento numérico y, con eliminar o cambiar el elemento gráfico. Por ejemplo, en la modificación de FM36 (figura 5) se elimina la relación que expresa el grupo representativo como resultado de eliminar un elemento numérico y el gráfico.

Modificación FM18 El Bruno ha ordenado las canicas y las ha colocado de esta manera. ¿Cuántas canicas tiene en total? 	Modificación de FM41:  Bruno tiene 10 cajas con 5 canicas cada una. Su hermana le coge, de cada caja, las canicas verdes. ¿Cuántas canicas tendrá ahora en total?

Justificación: De esta manera se trabaja el modelo rectangular de la multiplicación y se deja de forma libre que los alumnos multipliquen como les vaya bien, haciendo 10x5 o separando las canicas y después sumando, etc. (pensamiento multiplicativo y aditivo)	Justificación: Cambiando los datos se añade un grado más de dificultad al problema. No solo se trabaja el pensamiento multiplicativo, sino que también el aditivo, en este caso la resta.

Figura 7. Modificaciones propuestas por FM49 y FM41.

Respecto a añadir relaciones, esta transformación se presenta mayoritariamente en combinación con transformaciones del elemento numérico o con un cambio del elemento gráfico a otro modelo multiplicativo. Es frecuente que añadir una relación se combine con nuevos elementos numéricos, como en la modificación FM102 comentada anteriormente. Aunque estos dos códigos parecen tener un cierto grado de codependencia en el conjunto de los datos que necesita de mayor atención, también encontramos modificaciones en las que añadir relaciones se presenta en combinación con otros códigos. Por ejemplo, en la modificación de FM18 (figura 7), se eliminan los elementos numéricos y se introduce el modelo rectangular de la multiplicación expresando así nuevas relaciones del modelo que pueden incidir en la estrategia de resolución y los contenidos matemáticos sugeridos en el enunciado del problema. Por otro lado, encontramos algunas modificaciones donde añadir relaciones no se combina con otras transformaciones. En estos casos, además de añadir etapas y ampliar los posibles contenidos matemáticos del problema, se incide en la interpretación del elemento gráfico para extraer un nuevo dato (modificación de FM41 en la figura 7).

REFLEXIONES FINALES

Este trabajo supone una contribución significativa hacia la incipiente conceptualización de la competencia profesional en formulación de problemas escolares, en particular, lo relativo a la caracterización de la destreza “transformar problemas”, dado que complementa aproximaciones anteriores (Carrillo et al., 2021; Chico et al., en prensa). En este estudio se ha iniciado la caracterización de transformaciones de la información de enunciados de problemas, identificando cuatro subcategorías en función de si se transforman elementos numéricos, gráficos o simbólicos, o relaciones entre datos. El refinamiento de estas cuatro subcategorías ha permitido descomponer cada una de ellas en diversos tipos de transformaciones según si se cambian, se añaden o se eliminan elementos o relaciones.

Los resultados muestran que las transformaciones de los elementos numéricos son las más frecuentes en las modificaciones propuestas por los futuros maestros. Esencialmente, con este tipo de transformaciones los futuros maestros cambian la tipología del problema dentro de la misma estructura multiplicativa o inciden en la complejidad del problema añadiendo etapas, ampliando las soluciones del problema o, eliminando la información numérica ya expresada en el elemento gráfico. Respecto a las transformaciones del elemento gráfico, aparecen en casi el 40% de las modificaciones propuestas por los futuros maestros. Este tipo de transformaciones se dividen entre aquellas que se preocupan de aspectos sociales y culturales del aprendizaje de las matemáticas y, aquellas que inciden en las estrategias de resolución del problema, dificultando o facilitando estrategias de conteo y suma reiterada. Con menos frecuencia, los futuros maestros transforman las relaciones dadas en el enunciado del problema. Este tipo de transformaciones conlleva añadir etapas al problema o ampliar significados matemáticos en el enunciado del problema. En conjunto, cuando los futuros maestros transforman la información del enunciado, inciden en la complejidad del problema, promoviendo u obstaculizando ciertas estrategias de resolución o variando los contenidos matemáticos del problema. En contraposición, cuando transforman el contexto, los futuros maestros se basan esencialmente en aspectos socioculturales del aprendizaje con el objetivo de facilitar la inmersión del alumno en el problema (Chico et al., en prensa). La variación de la complejidad del problema (Stein et al., 2000) asociada al tipo de transformación realizada será objeto de estudio en futuros trabajos, dado que resulta interesante, de cara a la formación de maestros, proporcionarles herramientas que les permitan gestionar dicha complejidad.

El siguiente paso de esta investigación será explorar la combinación y la relación de diversos tipos de transformaciones en las modificaciones propuestas por los futuros maestros mediante análisis cuantitativos. En este sentido, observamos que algunos códigos aparecen simultáneamente, de forma habitual, en las modificaciones analizadas. Esto podría implicar relaciones de codependencia entre ciertos códigos, como por ejemplo entre eliminar elementos numéricos y eliminar relaciones. En otros casos, se combinan diversos tipos de transformaciones atendiendo a diversos aspectos, como complejizar el problema, promover el desarrollo de nuevas estrategias de resolución o variar los contenidos matemáticos del problema, entre otros aspectos. Esto nos informa de la capacidad de los futuros maestros para coordinar diferentes transformaciones con una intencionalidad didáctica dirigida a promover aprendizaje matemático.

A medio plazo, el objetivo es generar tareas formativas, para contextos de formación inicial y continua de maestros, que permitan desarrollar la destreza en la transformación de problemas escolares, siendo estas tareas a su vez un vehículo para construir conocimiento especializado necesario para la enseñanza de las matemáticas.

Agradecimientos

A los equipos de los grupos de investigación GIPEAM (SGR2017-101) y DESYM (HUM-168), los proyectos PID2019-104964GB-I00 (MINECO) y RTI2018-096547-B-I00. Al centro de investigación COIDESO de la Universidad de Huelva, y a la red MTSK, auspiciada por AUIP.

Referencias

Carrillo, J., Montes, M. y Contreras, L. C. (2021). La competencia profesional en formulación de problemas escolares. En GIDIMAT-UA (Ed.), *Ideas para la Educación Matemática* (pp. 162-183). Compobell.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 243-270.

Chico, J., Montes, M. y Badillo, E. (en prensa). Teachers' professional competence to pose school problems: the case of transformation of existing problems. En *Proceedings of the 12th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.* ERME

Elo S. y Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advancee Nursing*; *62*(1), 107-115.

Kilpatrick, J. (1987). *Problem formulating: Where do good problems come from*? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Lawrence Erlbaum Associates.

Lavy, I. y Bershadsky, I. (2003). Problem posing via "what if not?" strategy in solid geometry–a case study. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 369-387.

Lavy, I. y Hourigan, M. (2019). Posing mathematically worthwhile problems: developing the problem-posing skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*, 341-361.

Malaspina, U. (2013). Variaciones de un problema. El caso de un problema de R. Douady. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 34*, 141-49.

Milinkovic, J. (2015). Conceptualizing problem posing via transformation. En F. M. Singer, N. F. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing* (pp.47-70). Springer.

Montero, E. y Callejo, M. L. (2018). Cómo interpretan estudiantes para maestro respuestas de alumnos de primaria a problemas de división-medida con fracciones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 378-386). SEIEM.

Montes, M., Pascual, I., Carrillo, J. y Martín-Díaz, J. P. (2022). Caracterización de problemas multiplicativos de números enteros propuestos por futuros maestros. *Educaçao e Pesquisa, 48*, 1-19.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. y Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press.

Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Universidad de Antioquia.

Tichá, M. y Hošpesová, A. (2015). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 133-143.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (pp. 127-174). Academic Press.

Weinert, F. E. (2001). Concepts of competence: A conceptual clarification. En D. S. Rychen y L. H. Salgnik (Eds.), *Defining and selecting key competencies* (pp. 45-66). Hogrefe and Huber.

RESOLUCIONES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA EN FORMACIÓN A UN PROBLEMA DE FINAL ABIERTO

Solutions of secondary mathematics teachers in training to an open-ended problem

de-Armas-González, P., Perdomo-Díaz, J. y Sosa-Martín, D.

Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio sobre las resoluciones de futuros profesores de Matemáticas a un problema de final abierto donde debían encontrar rectas con dos puntos de intersección a una parábola dada. El análisis se centra, principalmente, en dos aspectos de las resoluciones. Por un lado, se estudió la estrategia elegida para su resolución: si intentaban encontrar condiciones generales para todas las rectas solución posibles o si, por el contrario, intentaban encontrar soluciones de rectas particulares. Por otro lado, se analizó si hacían uso de la representación gráfica de la parábola o si solo incluían representaciones algebraicas en todo el proceso. Los principales resultados muestran que la mayoría de los participantes obtiene soluciones particulares y, para ello, se apoya en la representación gráfica de la parábola, presentando dificultades para encontrar una expresión general para las rectas solución del problema.

Palabras clave: *resolución de problemas, problema de final abierto, formación docente.*

Abstract

This paper presents a study on the solutions of future Mathematics teachers to an open-ended problem. They had to find lines with two intersection points to a given parabola. The analysis focuses on two aspects of the resolutions. On the one hand, the strategy chosen: if they tried to find general conditions for all the possible solution lines or if, on the contrary, they tried to find solutions of particular lines. On the other hand, we analysed if they used the graphical representation of the parabola or if they only included algebraic representations. The main results show that most of the participants obtain particular solutions, and, for this, they rely on the graphic representation of the parabola. They also show that they present difficulties in finding a general expression for the lines that are solutions of the problem.

Keywords: *problem solving, open-ended problem, teacher training.*

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas (RP) es un aspecto fundamental tanto de la enseñanza de las matemáticas como de su aprendizaje (Liljedahl y Santos-Trigo, 2019), tanto que "se considera que la actividad matemática tiene como finalidad la RP" (Ledezma et al., 2021, p. 369). Es por ello que debería tener un papel relevante en la educación (Cai y Lester, 2010), tanto en la formación del alumnado como en la

de-Armas-González, P., Perdomo-Díaz, J. y Sosa-Martín, D. (2022). Resoluciones de profesores de matemáticas de secundaria en formación a un problema de final abierto. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 229-237). SEIEM.

formación de los docentes. Entre las actividades que desarrollan cada día los docentes en el aula se incluyen plantear problemas matemáticos para un objetivo específico, explicar y justificar las estrategias de resolución y seleccionar las representaciones apropiadas, todo ello para mejorar la comprensión matemática y la capacidad de razonamiento de su alumnado (Koellner et al., 2007). Es importante, por tanto, que los profesores conozcan y comprendan en profundidad los conceptos matemáticos que enseñan y sean capaces de aplicarlos a sus tareas de enseñanza (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000).

Silver et al. (2005) sostienen que los estudiantes pueden aprender más resolviendo un problema de maneras diferentes que resolviendo problemas diferentes con una sola estrategia. En particular, afirman que resolver problemas con múltiples soluciones otorga al alumnado una variedad de representaciones y estrategias de resolución que les proporcionará una mayor destreza en futuras situaciones de RP. Consideran también que el uso de problemas con múltiples soluciones contribuye a mejorar el nexo entre un problema y los conocimientos que el alumnado debe poseer para resolverlo, fortaleciendo la movilización y la conexión de conceptos relacionados. Otros estudios sobre problemas abiertos muestran que, además, este tipo de tareas ayudan a mejorar la comprensión matemática, la argumentación y las habilidades para la toma de decisiones (Chan y Clarke, 2017).

Esta investigación se centra en la resolución de problemas de final abierto, es decir, aquellos problemas que admiten infinitas soluciones y múltiples procesos de resolución (Chan y Clarke, 2017). Como actividades que contribuyen al desarrollo matemático, los problemas de final abierto deben pertenecer, tanto a la enseñanza de las matemáticas a nivel escolar, como a los programas de formación de futuros docentes. Ferrando et al. (2017) obtuvieron en su investigación que profesores de Matemáticas de Educación Secundaria, tras participar en un curso de formación, daban mayor importancia a la incorporación de problemas de final abierto en sus prácticas habituales de aula. Y Sánchez et al. (2019) concluyeron en su estudio que un 23% de futuros profesores de Matemáticas en formación consideraban que proponer problemas de final abierto puede contribuir a promover la creatividad y el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, una de las herramientas utilizadas por los docentes para trabajar problemas en el aula son los libros de texto y, sin embargo, el número de tareas de final abierto que se plantean en ellos es mínimo (Vargas et al., 2018).

En este contexto, se llevó a cabo una actividad de resolución de problemas de final abierto en la que participaron 16 futuros profesores de Matemáticas de Secundaria. El objetivo de esta investigación es analizar las estrategias de resolución seleccionadas, así como el tipo de soluciones que obtienen y las representaciones utilizadas para llegar a ellas. Más concretamente, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué estrategia de resolución siguen y qué tipo de soluciones presentan los futuros docentes?
- ¿Qué tipo de representaciones utilizan para resolver el problema?

La primera pregunta de investigación tiene que ver con el carácter abierto del problema, pues los problemas de final abierto permiten que cada persona aborde el problema desde una variedad más amplia de estrategias y se plantee distintas soluciones.

En la segunda pregunta nos centramos en las representaciones utilizadas por los futuros docentes para alcanzar las soluciones que presentan: representación gráfica y representación algebraica. La representación es una herramienta útil tanto para comunicar información como para comprender la información recibida (NCTM, 2000). El uso de distintas representaciones hace más efectivo el aprendizaje de las matemáticas, por lo que los estudiantes deberían ser capaces de aprender a resolver problemas mediante el uso de una variedad de representaciones (Stylianou, 2011), usándolas para organizar y comunicar las ideas matemáticas necesarias en la RP (NCTM, 2000).

MARCO CONCEPTUAL

En las últimas décadas la RP se ha convertido en una de las principales líneas de investigación en educación matemática (p. ej., Felmer et al., 2019; Liljedahl et al., 2016), lo que ha generado una diversidad de significados para el término resolución de problemas. En la actualidad, existe consenso en definirla como una tarea de la que no se conoce una forma directa de resolverla (Schoenfeld, 1992) pero que genera un interés de encontrar su solución (Szetela y Nicol, 1992). Además, debe tener el potencial de generar un desafío intelectual al resolutor (Cai y Lester, 2010) pero, al mismo tiempo, hacerle sentir capaz de afrontarla (Felmer y Perdomo-Díaz, 2016).

A través de la RP se desarrolla el pensamiento matemático (Schoenfeld, 1992), se promueven habilidades como la capacidad de razonar y de comunicarse matemáticamente, se desarrollan los conocimientos y se estimula el aprendizaje (Cai y Lester, 2010). Por ello es esencial convertir al alumnado en resolutores de problemas competentes y eficientes, capacitados para actuar, además de en matemáticas, en otros campos como la tecnología, la ingeniería, la biología, la física o la medicina, pues cada vez más empresas buscan perfiles con estas habilidades (Chan y Clarke, 2017).

Un tipo particular de problemas son los problemas de final abierto, definidos por Chan y Clarke (2017) como aquel que admite infinitas soluciones y puede ser resuelto con una variedad de procesos. Ärlebäck (2009) añade que son problemas en los que no existe una estrategia de resolución determinada y conocida y que obliga a los resolutores a poner en juego otras habilidades y conocimientos previos, lo que permite a los resolutores trabajar según sus posibilidades, aumentando sus probabilidades de obtener, al menos, una respuesta correcta (Ochoviet, 2020). Al encontrar una solución propia se eleva su autoestima y confianza en la resolución de problemas, pues se deja atrás la perspectiva de las matemáticas como una disciplina restrictiva y rígida, donde solo existe un método de resolución y una única respuesta correcta y se transforma en una materia más flexible y que admite diversidad (Martínez et al., 2017). Zaslavsky (1995) ya proponía transformar los problemas comunes en los que hay una sola respuesta correcta en problemas de final abierto, para crear tareas ricas que fomenten nuevas dinámicas en el papel del profesor y el alumno en el aula que promuevan el aprendizaje y la eficacia en la resolución de problemas.

Al tratarse de un problema en el que interviene una función cuadrática, las representaciones utilizadas cobran importancia. El concepto de representación se ha utilizado desde los años 80 en educación matemática como todos aquellos signos o gráficos que muestran conceptos o procedimientos matemáticos (Rico, 2009). En este trabajo nos enfocaremos en dos tipos de representaciones:

- Representación gráfica. Entendida como el dibujo o esbozo de la parábola.
- Representación algebraica. Entendida como un lenguaje matemático simbólico.

METODOLOGÍA

Participantes

Este estudio se realizó con los 16 profesores en formación matriculados en la especialidad de Matemáticas del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de la Universidad de La Laguna. La actividad de aula se llevó a cabo durante el curso académico 2019/2020 mientras los participantes cursaban la asignatura de *Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. A excepción de tres Graduados en Física, el resto de los participantes eran Graduados o Licenciados en Matemáticas. Además, la mayoría había obtenido el grado ese mismo año, dos de ellos en los últimos dos años y uno en el año 2010. Se trata de un estudio cualitativo, con una perspectiva descriptiva e interpretativa, basado en estudio de casos (Creswell, 2012).

Recogida de datos

Los datos se recogieron mediante una actividad en la que los futuros profesores debían resolver un problema de final abierto. En el problema se les pedía que encontraran rectas con dos puntos de intersección con una parábola dada (figura 1).

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y = x^2 + 4x + 5$.

Figura 1. Enunciado del problema.

Dispusieron de 25 minutos para resolver el problema individualmente, con papel y lápiz, y no se les dio ninguna indicación adicional a la aportada en el enunciado del problema.

Proceso de análisis de datos

Se analizaron las 16 resoluciones individuales obtenidas durante la actividad en el aula.

El problema planteado en este trabajo admite infinitas soluciones, pero tiene la particularidad de que se pueden obtener todas esas soluciones a través de la búsqueda de las condiciones generales que definen a todas las rectas que cumplen la condición del problema. Para el análisis de las resoluciones, en primer lugar, estas se clasificaron estudiando la estrategia elegida: si intentaban encontrar las condiciones generales que verifican todas las rectas que cortan dos veces a la parábola o si intentaban encontrar rectas particulares que cortan a la parábola en dos puntos. En segundo lugar, se clasificaron las resoluciones basándonos en la representación utilizada: si realizaban la representación gráfica de la parábola o si utilizaban únicamente la representación algebraica.

A continuación, se analizaron las soluciones finales que presentaban según la estrategia utilizada. Por un lado, se clasificaron las resoluciones que intentaban encontrar las condiciones generales para todas las rectas en dos grupos: si presentaban rectas particulares o si presentaban esas condiciones generales. Por otro lado, se clasificaron las resoluciones que intentaban encontrar rectas particulares en dos grupos: si las rectas presentadas eran horizontales o si las rectas presentadas eran otro tipo de rectas no horizontales.

Con estas clasificaciones se creó una tabla de doble entrada para analizar, de forma cualitativa, la relación existente entre las dos variables analizadas.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Las resoluciones se codificaron como Rx, donde x se corresponde con un número de 1 al 16 asignado a cada resolutor de manera aleatoria.

En la tabla 1 se muestran las clasificaciones de las resoluciones atendiendo a las estrategias utilizadas, las soluciones presentadas y las representaciones utilizadas.

Tabla 1. Clasificación de las resoluciones.

	Condiciones generales		**Rectas particulares**	
		Rectas particulares	*Rectas horizontales*	*Otras rectas*
Representación gráfica	R13	R1; R15	R4; R8; R14	R10; R11; R12
Representación algebraica	R2; R6; R16	R7	R3; R9	R5

Como puede observarse en la tabla 1, son más los participantes que presentaron rectas particulares que aquellos que intentaron buscar las condiciones generales para todas las rectas. Por otro lado, en cuanto a las representaciones utilizadas para alcanzar las soluciones, puede verse que el número de futuros profesores que utiliza la representación gráfica de la parábola es ligeramente mayor que aquellos que únicamente hacen uso de la representación algebraica. Si analizamos la relación entre la estrategia elegida y la representación utilizada, vemos que la mayoría utiliza la representación gráfica de la parábola para dar rectas particulares. Y, por otro lado, que entre aquellos que intentan encontrar las condiciones generales de todas las rectas predomina el uso único de la representación algebraica.

Si nos fijamos ahora en las soluciones que presentan, vemos que de las resoluciones cuya estrategia es buscar las condiciones para todas las rectas que cortan en dos puntos, la mitad detiene el proceso de búsqueda de estas condiciones para dar soluciones particulares. En las imágenes siguientes, podemos ver un ejemplo representativo de esta situación en la que el futuro profesor R7 comienza la búsqueda de las condiciones generales para todas las rectas (figura 2) y llegado a un punto de la resolución, detiene la búsqueda de condiciones generales para las soluciones particulares (figura 3).

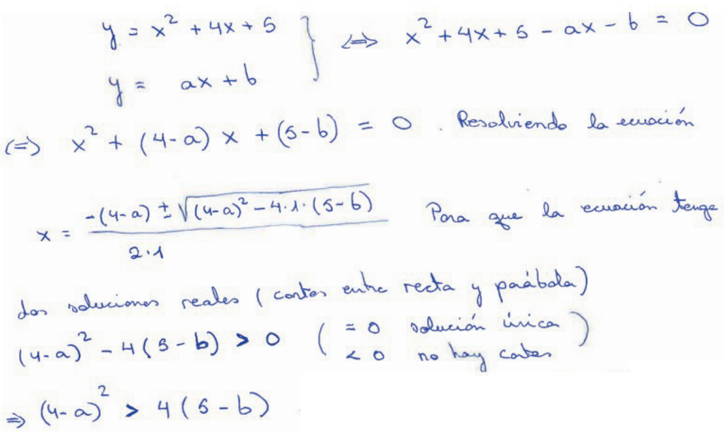


Figura 2. Resolución del futuro profesor R7.

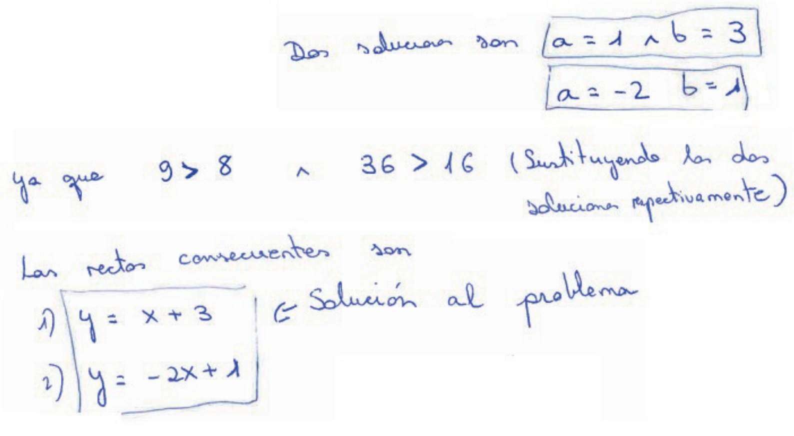


Figura 3. Solución del futuro profesor R7.

Entre las resoluciones cuya estrategia es encontrar rectas particulares, la mitad de ellas presentan como soluciones rectas horizontales por encima del vértice. En estas resoluciones encontramos resoluciones que, como la futura profesora R8, dan la expresión general (figura 4) y otras que únicamente dan rectas horizontales particulares, como, por ejemplo, la futura profesora R9 (figura 5).

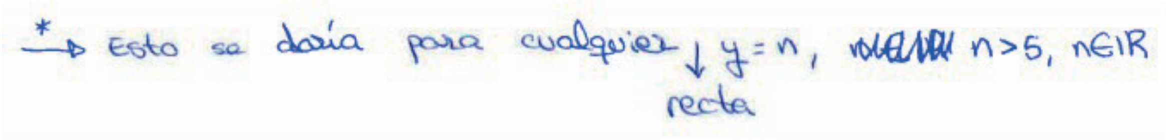


Figura 4. Solución de la futura profesora R8.

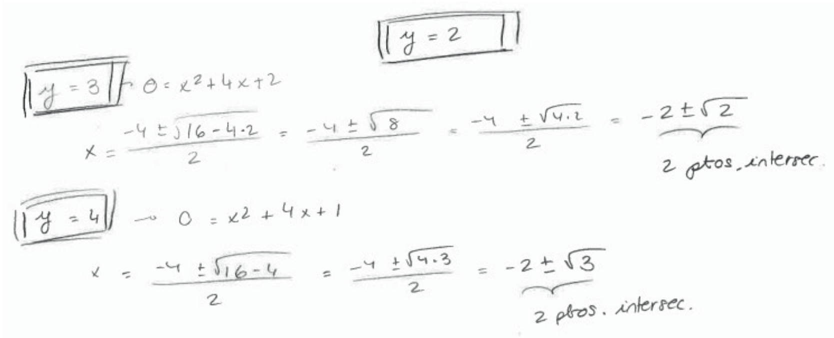


Figura 5. Solución de la futura profesora R9.

Por último, la mitad restante da como soluciones rectas particulares, pero no horizontales y, salvo una de ellas, todas lo hacen buscando rectas que pasen por dos puntos de la parábola, como vemos, por ejemplo, en la resolución de la futura profesora R12 (figura 6).

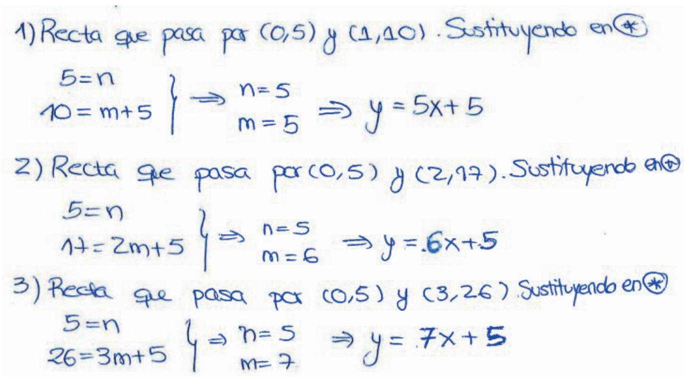


Figura 6. Resolución de la futura profesora R12.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo analizamos las resoluciones de futuros profesores de Matemáticas de Secundaria a un problema de final abierto con el objetivo de dar respuesta a dos preguntas: ¿Qué estrategia de resolución siguen y qué tipo de soluciones presentan los futuros docentes? y ¿Qué tipo de representaciones utilizan para resolver el problema?

El estudio muestra dos estrategias principales de resolución: búsqueda de condiciones generales para todas las rectas y búsqueda de soluciones particulares. En lo referente al tipo de soluciones que presentan, destaca que entre los que intentan encontrar esas condiciones generales para todas las rectas, la mitad, llegados a un punto del proceso, detenían esa búsqueda y presentaban soluciones particulares. De la otra mitad que intenta continuar hasta encontrar la expresión general, ninguno llega a presentar una solución completa y correcta al problema. Tal y como comentaron los propios participantes al final de la actividad de aula, para muchos de ellos era la primera vez que se enfrentaban a la resolución de un problema de final abierto, aunque sí estaban acostumbrados a resolver problemas en los que los conocimientos implicados eran los mismos. Este hecho corrobora los resultados de Montejo-Gámez et al. (2017) en los que futuros maestros de Educación Primaria mostraron dificultades en la resolución de problemas asociadas a carencias con los procesos de resolución y no con el contenido matemático asociado. Estos resultados refuerzan también los obtenidos por Guiraldo et al. (2013), en los que futuros profesores de secundaria no conciben los problemas como tareas que representan un reto e intentan resolverlos mecanizando y repitiendo los procedimientos explicados por el profesor. Por ello, es importante introducir en la formación docente los problemas de final abierto, pues la resolución de este tipo de problemas les va a proporcionar estrategias y habilidades para poder enfrentarse a problemas no rutinarios (Silver et al., 2005) y desarrollar los conocimientos y el aprendizaje de su futuro alumnado.

En cuanto a los tipos de representaciones, se concluye que el número de participantes que utiliza la representación gráfica de la parábola es mayor que el de aquellos que solo hacen uso de la representación algebraica. En este punto, destaca la elevada cantidad de futuros profesores que representan de forma incorrecta la parábola. Más de la mitad representa erróneamente el vértice, colocándolo sobre el eje de ordenadas de manera que la parábola queda simétrica respecto al eje. Resultado que se observa también en la investigación de Díaz et al. (2015), en la que muestran que un alto porcentaje de estudiantes cometió errores en la representación de las funciones cuadráticas, uno de los más destacados relacionado con la posición del eje de la parábola.

Se plantean futuras líneas de investigación como, por ejemplo, el análisis de los errores en la búsqueda de las condiciones generales o el estudio de la función que tiene la representación gráfica de la parábola en los procesos de resolución.

Referencias

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331-364. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1157

Cai, J. y Lester, F. (2010). *Why is teaching with problem solving important to student learning?* Problem Solving Research Brief. National Council of Teachers of Mathematics.

Chan, M. C. E. y Clarke, D. (2017). Structured affordances in the use of open-ended tasks to facilitate collaborative problem solving. *ZDM Mathematics Education 49*, 951-963. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0876-2

Creswell, J. W. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Pearson Education.

Díaz, M. E., Haye, E. E., Montenegro, F. y Córdoba, L. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 41*, 20-38.

Felmer, P., Liljedahl, P. y Koichu, B. (Eds). (2019). *Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7

Felmer, P y Perdomo-Díaz, J. (2016). Novice Chilean Secondary Mathematics Teachers as Problem Solvers En P. Felmer et al. (Eds.). *Posing and Solving Mathematical Problems, Research in Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_17

Ferrando, I., Segura, C. y Pla-Castells, M. (2017). Diseño y evaluación de un curso de formación continua en modelización. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 227-236). SEIEM.

Guirado, A. M., Mazzitelli, C. y Maturano, C. (2013). La resolución de problemas en la formación del profesorado en ciencias: análisis de las opiniones y estrategias de los estudiantes. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 10*, 821-835. http://dx.doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2013.v10.iextra.22

Koellner, K., Jacobs, J., Borko, H., Schneider, C., Pittman, M. E., Eiteljorg, E., Bunning, K. y Frykholm, J. (2007). The problem-solving cycle: A model to support the development of teachers' professional knowledge. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 273-303. https://doi.org/10.1080/10986060701360944

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2021). Un análisis onto-semiótico de la actividad matemática del proceso de modelización. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 367-375). SEIEM.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U. y Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics education*. Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2

Liljedahl, P. y Santos-Trigo, M. (2019). *Mathematical problem solving*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_4

Martínez, M., Araya, P. y Berger, B. (2017). Descripción del cambio del profesor de matemática desde su propia perspectiva a partir de una experiencia en torno a resolución de problemas de final abierto. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(59), 984-1004. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a07

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N. y León-Mantero, C. (2017). Modelización como proceso básico en la resolución de problemas contextualizados: un análisis de necesidades. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 347-356). Zaragoza: SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Ochoviet, C. (2020). *Los problemas de final abierto Oportunidades de aprendizaje para todos*. Camus Ediciones.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Sánchez, A., Font, V. y Breda, A. (2019). Análisis de las respuestas de futuros profesores a un cuestionario sobre el desarrollo de la creatividad en el aula de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 543-552). Valladolid: SEIEM.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). MacMillan.

Silver, E. A., Ghousseini, H., Gosen, D., Charalambous, C. y Font Strawhun, B. T. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 287-301. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.009

Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 265-280. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-010-9273-2

Szetela, W. y Nicol, C. (1992). Evaluating problem solving in mathematics. *Educational Leadership, 49*(8), 42-45.

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Tareas propuestas por los libros de texto de 1º de bachillerato para el tema de la derivada. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 594-603). Gijón: SEIEM.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 15-20.

EFECTO DE UNA INSTRUCCIÓN BASADA EN FLEXIBILIDAD INTRATAREA EN LA COMPETENCIA EN RESOLUCIÓN ARITMÉTICA DE PROBLEMAS VERBALES Y EN EL DISFRUTE Y UTILIDAD PERCIBIDA

Effect of intra-task flexibility-based instruction on arithmetic word problem-solving competence and on perceived enjoyment and usefulness

Del Olmo-Muñoz, J.[a], González-Calero, J. A.[a], Diago, P. D.[b], Arevalillo-Herráez, M.[b] y Arnau, D.[b]

[a]Universidad de Castilla-La Mancha, [b]Universitat de València

Resumen

Este estudio analiza el efecto sobre la competencia en la resolución de problemas verbales y el disfrute y utilidad percibidos de una secuencia de enseñanza orientada al desarrollo de la flexibilidad intratarea con un sistema tutorial inteligente. Para ello, 110 alumnos de 5.º y 6.º de primaria participaron en un estudio de método mixto de dos fases. La primera fase constó de seis sesiones de instrucción, además de un pre-test y post-test, para evaluar posibles ganancias en la competencia de los estudiantes. En la última sesión también se administró un cuestionario para valorar la satisfacción con la instrucción recibida. La segunda fase consistió en un estudio de casos en el que los participantes resolvieron problemas empleando flexibilidad intratarea. Los resultados revelan que esta flexibilidad mejora la competencia en la resolución de problemas verbales. Además, aunque los participantes consideran menos atractiva esta instrucción, la perciben como más útil.

Palabras clave: *educación primaria, flexibilidad intratarea, resolución de problemas, sistemas tutoriales inteligentes.*

Abstract

This study aims to analyse students' problem-solving proficiency and their perceived enjoyment and usefulness after an intra-task flexibility-based training with an intelligent tutoring system. For that purpose, 110 fifth and sixth grade students participated in a two-phase mixed-method study. The first phase consisted of six instructional sessions preceded and followed by test sessions in order to assess eventual problem-solving proficiency gains. Students also completed satisfaction tests with the purpose of analysing their perception towards the training sessions. The second phase consisted of a case study in which a selection of the students solved problems employing intra-task flexibility and answered questions related to the experience. The results reveal that intra-task flexibility improves students' word-problem proficiency. Besides, although participants do not consider this type of instruction as enjoyable, they evaluate it positively in terms of usefulness.

Keywords: *elementary education, intelligent tutoring systems, problem solving, intra-task flexibility.*

Del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A., Diago, P. D., Arevalillo-Herráez, M. y Arnau, D. (2022). Efecto de una instrucción basada en flexibilidad intratarea en la competencia en resolución aritmética de problemas verbales y en el disfrute y utilidad percibida. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 239-247). SEIEM.

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Los problemas verbales desempeñan un papel fundamental en el currículo de matemáticas en los niveles elementales (NCTM, 2000) y, por lo general, se consideran entre las actividades matemáticas más difíciles que los estudiantes deben afrontar en estos niveles (Verschaffel et al., 2020). A pesar de lo anterior, algunos autores hace años apuntaban a que el uso excesivo de este tipo de problemas podría favorecer una tendencia en los estudiantes a no recurrir al conocimiento del mundo real y a reducir la actividad matemática a un mero mecanismo procedimental (e,g, Verschaffel et al., 1994). En este sentido, en el marco de propuestas orientadas a devolver la conexión entre resolución de problemas y mundo real, Mellone et al. (2017) apuestan por la reformulación, por parte de los estudiantes, del enunciado de los problemas verbales. Esta técnica facilita el acto de reflexionar sobre los modelos de situación y puede funcionar como una herramienta para no excluir el conocimiento del mundo real en la resolución de problemas verbales. En la misma línea, propuestas encaminadas a promover la flexibilidad de los estudiantes en la resolución de problemas verbales —e.g., fomentando diferentes resoluciones de un mismo problema—, pueden ser también de utilidad a la hora de favorecer procesos reflexivos acerca de los modelos de situación posibles de un problema verbal.

Algunas investigaciones reflejan que los estudiantes con un buen desempeño en matemáticas tienen generalmente, entre otras cosas, la capacidad de pensar de manera flexible y emplear un conjunto amplio de herramientas y puntos de vista para abordar nuevos problemas y situaciones (Schoenfeld, 1992). De hecho, un aspecto crucial en el campo de la resolución de problemas es el desarrollo de conocimiento flexible (Star y Rittle-Johnson, 2008), cuya importancia se ha enfatizado en documentos normativos en todo el mundo (Star et al., 2015). Cabe en este punto hablar de las nociones de flexibilidad y adaptabilidad. Si bien algunos autores las tratan como sinónimos, otros establecen unan distinción en la que sugieren que el término "flexibilidad" se refiere a la capacidad para producir múltiples estrategias para resolver un problema, mientras que "adaptabilidad" consiste en la capacidad de decidir cuál es la estrategia más adecuada para ese problema concreto (Heinze et al., 2009). En el presente estudio nos centraremos en la primera de ellas. Silver (1997) argumenta que el uso de situaciones que permitan a los/as alumnos y alumnas encontrar múltiples soluciones —resolviéndolas sucesivamente de diferentes maneras— se asocia con el desarrollo de la flexibilidad representacional (definida por algunos autores de manera similar a la adaptabilidad, es decir, la capacidad de decidir la estrategia apropiada para cada tarea) y procedimental (conocer más de un tipo de procedimiento para resolver un tipo particular de problema) en los estudiantes. A este respecto, existe evidencia de que brindar a los estudiantes oportunidades para desarrollar múltiples métodos o estrategias de resolución de problemas puede mejorar su flexibilidad (e.g., Star y Seifert, 2006). A tenor de lo anterior, la selección de problemas que permitan realizar múltiples resoluciones se vincularía a la promoción de la flexibilidad de los estudiantes (Silver, 1997). Elia et al. (2009) distinguen dos tipos de estrategias de flexibilidad: la flexibilidad intertareas —que implica cambios de estrategias entre diferentes problemas— y la flexibilidad intratarea —relacionada con cambios de estrategias en un mismo problema.

Por otra parte, los diferentes estados emocionales que experimentan los estudiantes durante la resolución de problemas matemáticos tienen un impacto en sus procesos cognitivos, y éste, a su vez, en su desempeño en la resolución de problemas (Muis et al., 2015). En el ámbito de la promoción del desarrollo de la flexibilidad intratarea en resolución de problemas, el estudio de Schukajlow y Achmetli (2017) demostró que el grupo que resolvió problemas solo siguiendo un camino de resolución mostró un menor grado de aburrimiento que el grupo en el que se intentó desarrollar la flexibilidad con la resolución de un mismo problema siguiendo diferentes caminos. La presente comunicación analiza en qué medida secuencias de enseñanza diseñadas para promover la flexibilidad intratarea puede ser de utilidad para que los estudiantes de primaria mejoren su competencia en la resolución de problemas, y evalúa su percepción por parte de los estudiantes.

METODOLOGÍA

Objetivos

Atendiendo a lo anteriormente expuesto, se plantean las siguientes preguntas de investigación:

PI01: ¿Mejora la competencia de los estudiantes en la resolución aritmética de problemas verbales una secuencia enseñanza dirigida a promover la flexibilidad intratarea?

PI02: ¿Qué percepción tienen los estudiantes en términos de utilidad y disfrute acerca una propuesta de enseñanza dirigida a fomentar el desarrollo de la flexibilidad intratarea?

Diseño y participantes

La población de estudio comprendió 110 alumnos de seis grupos diferentes de quinto y sexto curso de Educación Primaria (10-12 años) de un colegio público situado en una zona rural de España. Los criterios de selección de los participantes estuvieron condicionados por la dificultad de aleatorizar la disposición de los participantes en diferentes grupos de estudio, exacerbada por las consecuencias de la pandemia (p. ej., grupos "burbuja" que permanecían aislados y con interacción limitada con otras personas del centro educativo). El diseño de la investigación es de tipo mixto, con una primera fase cuantitativa (estudio de grupos) y una segunda cualitativa (estudio de casos). Dado el contexto, la primera fase obedece a un diseño cuasi-experimental con tres grupos de estudiantes, conformados antes del estudio, siendo asignado cada uno de ellos a una diferente condición experimental:

Grupo A (36 alumnos): Grupo Experimental. Flexibilidad intratarea en la misma sesión.

Grupo B (37 alumnos): Grupo de control. Sin flexibilidad dentro de la tarea.

Grupo C (37 alumnos): Grupo Experimental. Flexibilidad intratarea en diferentes sesiones.

En el estudio de grupos se desarrolló una secuencia instruccional asistida por el sistema tutorial inteligente HINTS (véase siguiente sección), precedida y seguida de un pre-test y post-test. En total, se completaron ocho sesiones de 45 min desarrolladas durante un periodo de ocho semanas (a sesión por semana). Todos los problemas usados en el estudio eran adaptaciones de problemas de libros de texto. Las sesiones de la secuencia de enseñanza constaban de seis problemas que cada estudiante debía resolver individualmente con HINTS, pero diferían en términos de la flexibilidad intratarea. Así, el Grupo A resolvió tres problemas, dos veces cada uno, enfrentándose de nuevo al mismo problema inmediatamente después de la primera resolución con la exigencia de que debían seguir un camino de resolución diferente al empleado en primer lugar. El Grupo B se enfrentaba siempre a seis problemas diferentes, pero los problemas de las sesiones pares eran "isomorfos" a los presentados en las sesiones anteriores, esto es, las relaciones entre cantidades tenían la misma estructura matemática. Finalmente, el Grupo C debía resolver los mismos problemas que el Grupo A, pero en su caso, la obligación de plantear una segunda lectura de cada problema se hacía en la sesión siguiente.

Después del estudio de grupos, se seleccionaron 25 estudiantes de las tres condiciones para participar en un estudio de casos, en el que los participantes debían trabajar individualmente o en parejas resolviendo problemas en HINTS. Teniendo en cuenta que durante el estudio de casos se resolvieron problemas previamente abordados en el post-test, el criterio de selección procuró participantes de diferentes niveles de competencia. Durante el estudio de casos, se les solicitaba que resolvieran esos mismos problemas utilizando diferentes caminos de resolución, ya que el objetivo era observar el desempeño de los estudiantes en situaciones que implican emplear la flexibilidad intratarea. Además, al final del estudio de casos, los estudiantes respondieron oralmente, en una entrevista en profundidad, a varias preguntas relacionadas con el grado de satisfacción y utilidad de la experiencia. Las sesiones fueron videograbadas y, tras ello, las actuaciones de los participantes fueron transcritas para su posterior análisis. En la figura 1 se sintetizan las diferentes fases de la investigación.

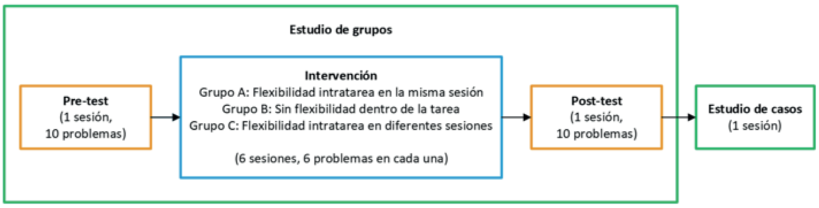


Figura 1. Diseño experimental.

Instrumentos

Antes y después de la intervención, se administraron en papel dos test para mensurar la competencia de los estudiantes en la resolución aritmética de problemas verbales. Los test fueron diseñados *ad hoc* y constaban de 10 problemas cada uno. Los problemas empleados en el post-test eran isomorfos a los del pre-test. A su vez, se diseñaron colecciones de problemas para cada una de las sesiones de la secuencia de enseñanza. Éstas fueron cargadas en el sistema HINTS y fueron abordadas por los estudiantes atendiendo a las características de cada condición experimental, tal y como se detalló en la sección anterior. Respecto a las características de los problemas empleados, tanto en pre-test y post-test, como en las sesiones con HINTS, se emplearon problemas verbales de varias etapas (entre dos y seis) con variedad de diferentes categorías semánticas, tanto aditivas (cambio, comparación aditiva, combinación) como multiplicativas (isomorfismo de medidas, comparación multiplicativa).

Por otra parte, en la última de las sesiones del estudio de grupos, se administró un segundo instrumento orientado a conocer la satisfacción de los estudiantes con la enseñanza recibida. El cuestionario estaba compuesto por 30 ítems, medidos mediante una escala tipo Likert de 5 niveles. Dado que uno de los propósitos de este trabajo es diagnosticar las percepciones de los estudiantes en términos de utilidad y disfrute hacia la situación en las que se les exige resolver un mismo problema usando más de una lectura, decidimos focalizar el análisis en los siguientes ítems: "Me gusta resolver el mismo problema de dos maneras diferentes" y "Resolver el mismo problema de dos maneras diferentes me ayuda a aprender".

En cuanto a la herramienta de trabajo, todos los participantes en este estudio trabajaron individualmente utilizando el sistema tutorial inteligente HINTS (ver Arnau et al., 2013). Este sistema es capaz de supervisar las resoluciones tanto aritméticas como algebraicas durante el proceso de resolución de un problema. En particular, HINTS puede inferir el camino que sigue un estudiante al resolver un problema verbal y ofrecer retroalimentación a través de lenguaje natural mediante ayudas personalizadas. Por el diseño de esta investigación, en este estudio se empleó una configuración del sistema en la que las ayudas a demanda estaban desactivadas. En nuestro caso, se optó por un escenario en el que todas las acciones de los estudiantes eran monitorizadas para ser validadas si eran correctas, mientras que, para las acciones incorrectas el sistema proporcionaba un mensaje de error en la pantalla. El resolutor no recibió, en ningún caso, información sobre lo que debía hacer o sobre la causa de sus errores.

Una de las principales características de HINTS es su capacidad para construir un modelo de estudiante y, en relación con la flexibilidad intratarea, la capacidad de almacenar información sobre las vías de resolución tomadas previamente por un resolutor. En este estudio, el sistema se configuró con el objeto de promover el desarrollo de la flexibilidad intratarea, de tal modo que a los estudiantes se les presentó cada problema dos veces, con la premisa de que la segunda vía de resolución debía ser diferente a la primera. Este tipo de restricciones sobre la tarea pueden ser difíciles, o incluso imposibles, de implementar en un entorno de papel y lápiz. No obstante, HINTS puede detectar que un estudiante está tratando de resolver un problema siguiendo una vía que ya ha sido utilizada en una resolución anterior. En estos casos –y en este estudio– cuando esto sucedía, HINTS reportaba un mensaje indicando que, si bien el paso era correcto, el resolutor debía intentar resolver el problema por otra vía.

Por último, cabe indicar que los estudiantes participaron voluntariamente en esta investigación sin recibir ningún tipo de recompensa externa, y que disponían de la libertad de abandonar la sesión en cualquier momento. En cuanto a la distribución de los participantes, la investigación fue llevada a cabo en una configuración individual, en la que cada estudiante disponía de su propio ordenador portátil con acceso al sistema HINTS. A pesar de que las sesiones se desarrollaron en el horario habitual dentro de la asignatura de matemáticas, las intervenciones de los docentes se restringieron a solucionar las dificultades técnicas que pudieron surgir en relación al uso del sistema. No hubo ayuda alguna por parte del profesorado en el proceso de resolución de problemas ni información sobre el progreso en las tareas, ya que estas funciones estuvieron a cargo del propio sistema HINTS.

Análisis de datos

Con respecto a la PI01, los datos del pre-test y post-test se analizaron mediante estadística descriptiva haciendo uso de la media y la desviación estándar para describir y resumir los datos recopilados del estudio grupal. Cada problema se puntuaba con 1 si el proceso de resolución del problema era correcto, o 0 si no lo era. Se compararon las ganancias obtenidas entre grupos, calculadas como la diferencia de puntuaciones entre el post-test y el pre-test para cada participante, para evaluar el impacto del uso de actividades de flexibilidad intratarea en la enseñanza de la resolución de problemas verbales.

Se emplearon dos fuentes de datos para responder a la PI02. En primer lugar, se realizó un análisis descriptivo de los dos ítems, previamente descritos, del cuestionario destinado a medir la percepción de los estudiantes sobre la utilidad y el disfrute en relación a las actividades basadas en flexibilidad intratarea. Estos datos se complementaron con datos cualitativos obtenidos mediante un estudio de casos. Los estudios de caso fueron transcritos y se realizó un análisis de contenido de las transcripciones para dar respuesta a la segunda pregunta de investigación.

RESULTADOS

La tabla 1 muestra los resultados cuantitativos del estudio grupal, para cada uno de los tres grupos. En concreto, se presentan la media y la desviación estándar de la puntuación obtenida en pre-test y post-test. Se incluye, además, la ganancia calculada como la diferencia entre ambas pruebas.

Tabla 1. Estadística descriptiva de la fase experimental.

		Pre-test		**Post-test**		**Ganancia**	
	N	*M*	*DE*	*M*	*DE*	*M*	*DE*
A: Flexibilidad intratarea en la misma sesión	36	3,22	2,74	4,08	2,49	0,86	1,74
B: No flexibilidad intratarea	37	2,59	2,17	2,73	2,32	0,14	1,36
C: Flexibilidad intratarea en diferentes sesiones	37	2,65	2,46	3,27	2,60	0,62	1,46

A nivel descriptivo, si bien las puntuaciones son dispersas en los tres grupos, éstas apuntan a que el uso de la flexibilidad intratarea, ya sea en la misma sesión o en la siguiente, se asocia con una mayor ganancia en el rendimiento de los estudiantes. En concreto, el uso de la flexibilidad intratarea en una misma sesión —es decir, pedir al alumnado que resuelvan el mismo problema de forma diferente justo después de completar una primera resolución— fue la estrategia instruccional más productiva desde el punto de vista de las puntuaciones obtenidas.

En cuanto a la utilidad percibida de la instrucción basada en flexibilidad intratarea, alrededor del 70 % de los participantes asignados a las condiciones de flexibilidad intratarea consideraron que esta actividad matemática les ayudó a aprender. De igual forma, menos del 10 % percibió este enfoque como negativo para su aprendizaje. Por otro lado, con relación al disfrute percibido, más del 60 % de los estudiantes indicaron que no disfrutan teniendo que resolver el mismo problema dos veces de forma diferente. Estos resultados revelan que, aunque la mayoría de los participantes perciben como útil enfrentarse a la resolución de un mismo problema de más de una forma, esta práctica no les resulta atractiva, desde el punto de vista del disfrute.

A continuación, describimos dos ejemplos del estudio de caso que involucra a estudiantes del Grupo A, ya que ilustran la tensión entre la utilidad y el disfrute percibidos. Todos los episodios de este trabajo comienzan cuando los estudiantes han terminado de resolver problemas utilizando el sistema tutorial inteligente HINTS. En ese momento, el entrevistador planta una serie de preguntas destinadas a recopilar más información sobre la experiencia de los estudiantes.

El caso de estudio de Jacobo

Inmediatamente antes del siguiente extracto, Jacobo había resuelto correctamente dos problemas, ambos de dos maneras diferentes, sin mostrar dificultad para encontrar vías de resolución diferentes.

> Entrevistador (E): ¿Mencionarías algún aspecto que te haya gustado menos o que mejorarías del programa?
>
> Jacobo (J): Lo de "aunque la solución es correcta, prueba otras opciones". Eso fastidia un poco a veces.
>
> E: Es decir, en la secuencia de enseñanza, y hoy mismo, has tenido que resolver el mismo problema de dos maneras distintas. ¿Eso no te ha gustado?
>
> J: Hacer el problema de dos maneras distintas pues… no, no me gusta mucho.
>
> E: Pero, ¿consideras que es útil?
>
> J: Pues sí, a veces sí. Así sabes todas las posibilidades que hay de resolver un problema.

Este breve extracto ilustra claramente que Jacobo, a pesar de ser un resolutor competente capaz de resolver problemas con flexibilidad, se sintió frustrado cuando el sistema tutorial muestra mensajes de advertencia recordándole que la segunda resolución debe ser diferente a la primera. A pesar de ello, el alumno reconoce que esta actividad matemática puede resultar útil.

El caso de estudio de Sofía y Luna

Antes de esta conversación, la pareja Sofía y Luna, trabajando conjuntamente en el mismo dispositivo, resolvieron exitosamente todos los problemas presentados en el caso de estudio, mostrando la capacidad de usar diferentes vías para resolver los problemas. De hecho, durante sus primeras resoluciones verbalizaron cómo iban a resolver el problema si tenían que hacerlo de nuevo.

> E: ¿Qué os ha parecido tener que resolver el mismo problema de dos formas diferentes?
>
> Sofía (S): A veces es muy fácil, porque cuando estás pensando, ya dices, ¡ah!, pues también se puede hacer de esta forma. Y yo, antes de hacer esto no tenía la otra forma de pensarlo, entonces, yo creo que ha estado muy bien porque te hace ver el problema de varias maneras.

Luna (L): Yo pienso igual. Aprendes más formas y tienes más opciones para hacerlo, y como (el resultado) va a dar siempre lo mismo…

E: ¿Consideráis que es útil resolver problemas de dos formas diferentes?

S: Yo creo que sí, porque te hace pensar. De esta manera, te obligan a pensar cómo lo puedes hacer de otra forma.

L: Yo creo que también es útil porque si, por ejemplo, te sabes las dos formas, pero crees que una no está bien, la puedes hacer, y si da lo mismo, es que las dos están bien (puedes comprobar el resultado).

E: ¿Hay algo que no os haya gustado del tutor (HINTS) o de repetir dos veces el mismo problema? ¿Se os ha hecho pesado?

S: Algunas veces sí que te cuesta más, pero al final siempre lo he sacado.

L: Yo a veces me he liado porque, como se puede hacer de más maneras, pues siempre piensas la más fácil, y tienes que pensar la otra también.

La primera intervención de Sofía revela que, durante la primera resolución del problema, pone en juego habilidades relacionadas con la flexibilidad intratarea, ya que evalúa los diferentes caminos que pueden conducir a la solución. Estas verbalizaciones apoyan la idea de que las actividades basadas en la flexibilidad dentro de la tarea pueden promover una reflexión más profunda sobre la estructura matemática de un problema verbal. Al mismo tiempo, Luna y Sofía coinciden en que este enfoque es útil, pues constituye una forma de comprobar que el problema se ha resuelto correctamente.

Schukajlow y Achmetli (2017) solicitaban más esfuerzos para entender el papel de los problemas con soluciones múltiples y su influencia en las medidas relacionadas con el afecto. Su intervención, consistente en estudiantes construyendo múltiples soluciones para problemas del mundo real, no tuvo efectos sobre el disfrute o el aburrimiento de los estudiantes. A diferencia de esos hallazgos, el presente estudio apunta a que resolver el mismo problema varias veces siguiendo diferentes vías podría conducir a niveles más bajos de disfrute experimentado por los estudiantes. Sin embargo, los estudiantes valoraron la utilidad de la instrucción y mejoraron su competencia para resolver problemas, lo que podría estar relacionado con un aumento en su flexibilidad, como han demostrado estudios previos (e.g., Silver, 1997; Star y Seifert, 2006).

CONCLUSIONES

En cuanto a la PI01, los grupos que resolvieron problemas empleando flexibilidad intratarea (A y C) obtuvieron mayores ganancias en la competencia de resolución de problemas después de la intervención que el grupo que resolvió problemas isomorfos sin exigir a los estudiantes que siguieran vías de resolución diferentes (B). Además, los resultados indicarían que pedir a los estudiantes que encuentren resoluciones diferentes en una misma sesión (A) es más productivo que hacerlo en sesiones posteriores consecutivas (C). Esto puede estar asociado a que la primera resolución implica la construcción de un primer modelo de situación –que ha sido validado como correcto por HINTS–, a partir del cual puede ser más fácil apreciar diferentes relaciones matemáticas y construir un segundo modelo de situación.

La PI02 se centró en evaluar la percepción de los estudiantes sobre una secuencia de enseñanza dirigida a fomentar su flexibilidad ofreciendo múltiples resoluciones para un mismo problema. A la vista de los resultados, a pesar de que encuentran esta secuencia poco atractiva, la reconocen como útil para su aprendizaje. Este hecho apuntaría a una tensión entre el disfrute autopercibido por los estudiantes y la utilidad de las actividades orientadas a promover la flexibilidad intratarea. Una posible explicación a este fenómeno puede tener su origen en el hecho de que a los estudiantes en condiciones de flexibilidad intratarea no siempre se les permitía utilizar la vía de resolución más intuitiva y directa para resolver un problema; y, en consecuencia, podrían percibir las tareas como una barrera artificial no asociada directamente con su capacidad para resolver un problema correctamente. En este sentido, futuros estudios deberían orientarse a analizar la consistencia de estos resultados a largo plazo. Resultaría también de interés analizar el efecto de la metodología aquí presentada en complemento con discusiones posteriores entre los estudiantes para comparar sus estrategias, reflexionando sobre ello en un entorno colaborativo (ver Star et al., 2021). Asimismo, una prueba trifásica permitiría analizar los niveles de flexibilidad (ver Joglar-Prieto et al., 2017).

La comprensión del afecto como un elemento integral del proceso de aprendizaje podría respaldar las estrategias de instrucción destinadas a mejorar la motivación, el interés u otros factores vinculados a mejores resultados de aprendizaje. En esta investigación, hemos presentado los resultados de un estudio en el que medimos, tanto la competencia en resolución de problemas de los estudiantes como su disfrute y utilidad percibidos, después de una secuencia de instrucción basada en la flexibilidad intratarea con un sistema tutorial inteligente. A la vista de estos resultados, la enseñanza basada en la flexibilidad intratarea es un enfoque que vale la pena considerar cuando se trata de resolver problemas, especialmente dado que los sistemas tutoriales inteligentes seguirán madurando y desempeñarán un papel privilegiado en la educación en el futuro.

Agradecimientos

Trabajo apoyado por los proyectos PGC2018-096463-B-I00 (MCIN/AEI/10.13039/501100011033-FEDER Una manera de hacer Europa), AICO/2021/019 (Generalitat Valenciana), SBPLY/19/180501/000278 (Junta de Castilla-La Mancha); y FPU19/03857 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España).

Referencias

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M., Puig, L. y González-Calero, J. A. (2013). Fundamentals of the design and the operation of an intelligent tutoring system for the learning of the arithmetical and algebraic way of solving word problems. *Computers & Education*, *63*, 119-130. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.11.020

Elia, I., den Heuvel-Panhuizen, M. y Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM*, *41*(5), 605-618. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0184-6es

Heinze, A., Star, J. R. y Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM, 41*(5), 535-540. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

Joglar-Prieto, N., Abánades, M. A. y Star, J. (2017). Flexibilidad matemática. Resolución de ecuaciones lineales de una variable en secundaria. En A. Codina, L. Puig, D. Arnau, M. T. Sánchez, A. B. Montoro, J. Claros, M. Arnal y M. A. Baeza (Eds.), *Investigación en pensamiento numérico y algebraico: 2017* (pp. 39-48). Universidad Rey Juan Carlos, SEIEM.

Mellone, M., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2017). The effect of rewording and dyadic interaction on realistic reasoning in solving word problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *46*, 1-12. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.02.002

Muis, K. R., Psaradellis, C., Lajoie, S. P., Di Leo, I. y Chevrier, M. (2015). The role of epistemic emotions in mathematics problem solving. *Contemporary Educational Psychology*, *42*, 172-185. https://doi.org/10.1016/J.CEDPSYCH.2015.06.003

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). MacMillan.

Schukajlow, S. y Achmetli, K. (2017). Multiple solutions for real-world problems, and students' enjoyment and boredom. *CERME 10*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01935829

Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM*, *41*(5), 619-625. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0203-7

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, *29*(3), 75–80. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x

Star, J. R., Jeon, S., Comeford, R., Clark, P., Rittle-Johnson, B. y Durkin, K. (2021). Compare and discuss multiple strategies. *mathematics teacher: Learning and teaching PK-12, 114*(11), 853-859. https://doi.org/10.5951/MTLT.2021.0051

Star, J. R., Newton, K., Pollack, C., Kokka, K., Rittle-Johnson, B. y Durkin, K. (2015). Student, teacher, and instructional characteristics related to students' gains in flexibility. *Contemporary Educational Psychology*, *41*, 198-208. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.03.001

Star, J. R. y Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, *18*(6), 565-579. https://doi.org/10.1016/J.LEARNINSTRUC.2007.09.018

Star, J. R. y Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology*, *31*(3), 280-300. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2005.08.001

Verschaffel, L., De Corte, E. y Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, *4*(4), 273-294. https://doi.org/10.1016/0959-4752(94)90002-7

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J. y Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM*, *52*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4

HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN EN LAS EVALUACIONES ESCRITAS EN SECUNDARIA

Visualization skills in written assessments in secondary school

Elvas, I., Ramírez, R. y Flores, P.

Universidad de Granada

Resumen

En esta comunicación presentamos parte de un estudio piloto sobre las evaluaciones escritas que se realizan para medir el aprendizaje geométrico, para ver las habilidades de visualización demandadas a los estudiantes de 15 años que cursan primer año de bachillerato uruguayo. Se analizan las actividades de evaluación propuestas por tres docentes referidas a lugares geométricos y se contrastan con las planteadas en evaluaciones internacionales, con las actividades de PISA para el contenido espacio y forma. Los resultados muestran diferencias en las habilidades de visualización requeridas para su resolución.

Palabras clave: *evaluación, evaluaciones escritas, sentido espacial, habilidades de visualización.*

Abstract

In this communication we present part of a pilot study on the written assessments that are made to measure geometric learning, to see the visualization skills demanded to 15-year-old students who are in the first year of baccalaureate in Uruguay. The evaluation activities proposed by three teachers referring to geometric places are analyzed and contrasted with those proposed in international evaluations, whit the PISA activities for the space and shape content. The results show differences in the visualization skills required for its resolution.

Keywords: *assessment, written assessments, spatial sense, visualization skills.*

INTRODUCCIÓN

Varias reformas del currículo en matemáticas en los últimos tiempos, según los investigadores, provienen de los estudios internacionales que se enfocan en los logros de los estudiantes y dan lugar a hablar de las competencias del siglo XXI, una de ellas es la competencia y la alfabetización matemática (Shimizu et al., 2018). La alfabetización espacial y el desarrollo de las habilidades espaciales son consideradas como aprendizajes fundamentales en el mundo tecnológico en el que vivimos (Diezmann y Lowrie, 2009). En relación con el desarrollo de las habilidades espaciales, algunos investigadores consideran que una línea de interés en la investigación es analizar la interacción entre la visualización y la didáctica de la matemática, considerando el beneficio del uso de la visualización en la mejora de la educación matemática (Presmeg, 2006). Dado que la evaluación a gran escala y en el aula se basan en principios similares de evaluación sólidos, es un desafío la mejora de la interacción y coherencia entre los dos tipos de evaluación, para ayudar al éxito de los aprendizajes de los estudiantes (Suurtamm et al., 2016).

Elvas, I., Ramírez, R. y Flores, P. (2022). Habilidades de visualización en las evaluaciones escritas en secundaria. En En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 249-257). SEIEM.

El National Council of Teachers of Mathematics (2000) enfatiza el aspecto funcional del aprendizaje geométrico, que dirige a desarrollar el sentido espacial de los estudiantes, proponiendo con ello que cada uno deba "utilizar la visualización, el razonamiento espacial y el modelado geométrico para resolver problemas" (p. 43). La OCDE en el proyecto PISA considera los contenidos propuestos en los estándares curriculares de NTCM (2000) y, en geometría, define el contenido espacio y forma, relacionando el estudio de las formas con el espacio cercano y su construcción conceptual. El objetivo general de PISA es informar en qué medida los estudiantes son capaces de utilizar conocimientos y habilidades desarrolladas durante la escolarización para resolver problemas que le permitan participar en la sociedad, que requieren para ser superados desarrollar el razonamiento espacial, que en el contenido espacio y forma implica reconocer patrones y figuras, buscar diferencias y semejanzas entre los componentes de las formas, entender las propiedades y las posiciones relativas de los objetos geométricos (ANEP, 2017b).

En Uruguay, primero de bachillerato es considerado un año de articulación entre la enseñanza básica y los cursos posteriores de bachillerato, y en él, la enseñanza de la geometría está centrada en el método de los lugares geométricos. Los diferentes aspectos que buscan ser trabajados en los cursos de geometría en los currículos oficiales de la enseñanza secundaria uruguaya enfatizan los conceptos geométricos, las propiedades de las figuras y su correspondiente formalización. Las pruebas de evaluación que proponen los docentes se basan en algunos documentos nacionales que entienden la evaluación como una herramienta pedagógica donde "la valoración conceptual, junto con la calificación pertinente, motiva a los estudiantes a seguir aprendiendo" (CES, 2020, p. 2); y permite "establecer apreciaciones acerca de los procesos de aprendizaje" (ANEP, 2017a).

En el puntaje promedio obtenido en matemáticas por Uruguay en PISA se observa cierta tendencia a la baja ya que en 2003 fue 422, en 2006 y 2009 fue 427 puntos, en 2012 fue 409 puntos y en 2015, último año de informe de resultados publicado en el país, fueron 418 puntos. Esto significa que el estudiante promedio accede al nivel 1 de desempeño, de los seis niveles definidos en orden creciente de puntajes, mostrando que el estudiante uruguayo es capaz de responder a preguntas que involucran contextos familiares donde la información está toda presente y las preguntas están bien definidas (ANEP, 2017b). Si miramos los resultados en el contenido espacio y forma, el puntaje obtenido por Uruguay es 413, siendo el mejor puntaje promedio por área de contenido y únicamente el 8,6 % de los estudiantes alcanza un nivel 4 o superior.

Por lo dicho anteriormente se puede observar que el currículo uruguayo no hace constar el enfoque funcional que pretende desarrollar el sentido espacial propuesto por el NCTM y la OCDE a través de los lineamientos de PISA. El interés de esta comunicación es analizar si esta situación da lugar a diferencias y similitudes, en relación con las habilidades de visualización, en las pruebas de evaluación en geometría propuestas por algunos docentes de Uruguay y las pruebas de evaluación formuladas por la OCDE en PISA.

A partir de los intereses planteados se realizan las siguientes preguntas: ¿qué habilidades de visualización se demandan para resolver las actividades correspondientes a lugares geométricos, para alumnos de 15 años, en las evaluaciones escritas de los docentes de matemáticas del estudio y cuáles en las actividades de evaluación PISA del dominio de la cultura matemática? ¿Cuáles son comunes y cuáles difieren?

El aporte de este trabajo a las investigaciones actuales pretende brindar información acerca de cómo la formulación de los contenidos geométricos del currículo, en particular, la ausencia de alusión a las habilidades de visualización requeridas en las resoluciones de las actividades propuestas puede afectar a los resultados de evaluaciones externas, y comprender los resultados aportados por las evaluaciones internacionales. Se espera determinar las habilidades de visualización que se requieren en cada una de las pruebas para explorar la coherencia entre ambas evaluaciones, además de identificar qué habilidades deberían estar presentes en el currículo para planificar el currículo de geometría que favorezca la competencia matemática desde el desarrollo del sentido espacial.

MARCO TEÓRICO

Para responder a estas preguntas se van a atender las destrezas requeridas para resolver las actividades y vamos a desarrollar aspectos teóricos referidos a dos elementos: sentido espacial y actividades de evaluación en matemáticas.

Evaluación en educación matemática y en geometría

Según Santos y Cai (2016), la evaluación establece el vínculo entre el currículo implementado y el logrado. El currículo implementado alude a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de acuerdo con la experiencia y perspectiva del docente en su clase. Mientras que el currículo alcanzado atiende a lo que aprenden los estudiantes, se manifiesta a través de sus logros y se observa o infiere de sus acciones en respuesta a tareas y actividades de evaluación. Los estándares curriculares (NCTM, 2000) afirman que la evaluación debe apoyar el aprendizaje de las matemáticas significativas y proporcionar información útil tanto a los profesores como a los estudiantes; PISA destaca el papel de la competencia matemática porque mejora las oportunidades de vida de los estudiantes y la considera como esencial para describir, explicar y predecir el mundo (OCDE, 2016). Por otro lado, los documentos de educación secundaria uruguayos entienden la evaluación desde una perspectiva comprensiva y formativa, como componente integrado a la enseñanza y al aprendizaje; como un medio para la acreditación de los aprendizajes y de los procesos de enseñanza; y debe ser acorde con los objetivos provistos en cada asignatura y actividad (ANEP, 2017a; CES, 2020).

En relación con la evaluación en geometría, Alsina et al. (1997) sugieren que para conocer el proceso de maduración y aprendizaje de los conceptos y relaciones geométricas será necesario diseñar diferentes métodos y técnicas de evaluación. Asimismo, el NCTM (2000) plantea que el estudio de la geometría debe permitir a los estudiantes utilizar la visualización, el razonamiento espacial y el modelado geométrico para resolver problemas y la evaluación en geometría propone, entre otros aspectos, analizar características y propiedades de formas geométricas y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas.

Sentido espacial

Las continuas investigaciones en educación de la geometría han abarcado el pensamiento y razonamiento espacial y un aspecto que ha recibido atención es la visualización en geometría (Jones y Tzekaki, 2016). Distintos trabajos han enfatizado la necesaria relación entre aspectos visuales para la resolución de problemas (Stylianou, 2001). En esta línea, el concepto de sentido espacial sugiere un enfoque funcional de aplicación a resolución de problemas de la vida cotidiana.

Flores et al. (2015), describen el sentido espacial como una forma intuitiva de "entender el plano y el espacio, para identificar cuerpos, formas y relaciones entre ellos, que implica manejar relaciones y conceptos de geometría de forma no convencional, incluyendo la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas" (pp.129-130). Consideran las destrezas necesarias para la visualización de los conceptos geométricos como una de las componentes del sentido espacial, entendida como "un amplio conjunto de imágenes, capacidades y habilidades necesarias y útiles para elaborar, analizar, transformar y comunicar información relativa a las posiciones entre figuras objetos y modelos geométricos" (Flores et al., 2015, p. 133). Para caracterizar la visualización, utilizan el marco teórico de Gutiérrez (1996), que considera la visualización compuesta por cuatro elementos: las imágenes mentales, las representaciones externas, los procesos de visualización y las habilidades de visualización.

Algunos estudios refieren a la interacción entre las representaciones externas e internas como parte fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La representación interna o imaginería visual se infiere a partir de las interacciones con la producción de la representación externa, subyace a la creación de una disposición espacial o a un dibujo o diagrama (Goldin, 2007; Presmeg, 2006).

En cuanto a los procesos, Bishop (1989) señala los procesos de manipulación de las imágenes mentales, visuales y físicas: la interpretación de información figurativa (IFI) y el procesamiento visual (VP). En este trabajo se pone el foco en las habilidades de visualización.

Habilidades del sentido espacial

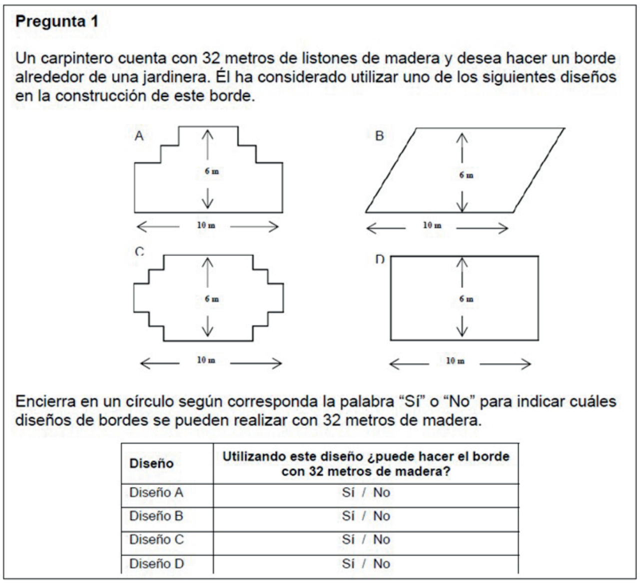
Del Grande (1990) establece siete habilidades espaciales de visualización que parecen tener mayor relevancia en el desarrollo académico de la percepción espacial: coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción de las relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual.

La habilidad *coordinación ojo-motor* la entiende como la capacidad de coordinar la visión con el movimiento del cuerpo. La *percepción figura-contexto* permite identificar un componente en una situación e implica apreciar cambios en la percepción de las figuras contra fondos complejos. La *conservación de la percepción* es la capacidad de reconocer un objeto pese a sufrir variaciones de tamaño y posición. La *percepción de la posición en el espacio* es la capacidad de determinar la relación de un objeto con otros objetos o con el observador. *La percepción de las relaciones espaciales* es la capacidad de ver dos o más cualidades que caracterizan objetos relacionados con uno mismo o entre sí. La *discriminación visual* es la capacidad de identificar las similitudes y diferencias entre objetos. La *memoria visual* es la capacidad de recordar con precisión objetos que ya no están a la vista y relacionar sus características con otros objetos que están o no a la vista.

METODOLOGÍA

Se ha llevado a cabo un estudio piloto, con enfoque cualitativo de carácter descriptivo mediante un análisis de contenido que investiga el significado simbólico, el esfuerzo de interpretación de un mensaje y permite analizar el contenido latente en un texto (Rico y Fernández, 2013). En educación matemática, se emplea como método para estudiar los diversos significados escolares de los conceptos y procedimientos matemáticos que aparecen en un texto, en nuestro caso en las actividades escritas que emplean los docentes de matemática de primero de bachillerato para evaluar a los estudiantes y las actividades estandarizadas que ha liberado PISA.

La selección y recolección de las actividades analizadas en este estudio piloto implica dos procesos diferentes. Con relación a las actividades liberadas por PISA, en Uruguay el informe de resultados sólo libera actividades del área en que se focaliza, que para matemática corresponden a 2003 y 2012, mediciones en las que el país participa (en la figura 1 se presenta un ejemplo). Para el proceso de recolección y selección de las actividades de los docentes, se determina el curso de primero de bachillerato porque en ese nivel se encuentran la mayoría de los alumnos con 15 años correspondiente a uno de los cortes etarios en la que se lleva a cabo la evaluación de PISA.



Pregunta 1

Un carpintero cuenta con 32 metros de listones de madera y desea hacer un borde alrededor de una jardinera. Él ha considerado utilizar uno de los siguientes diseños en la construcción de este borde.

Encierra en un círculo según corresponda la palabra "Sí" o "No" para indicar cuáles diseños de bordes se pueden realizar con 32 metros de madera.

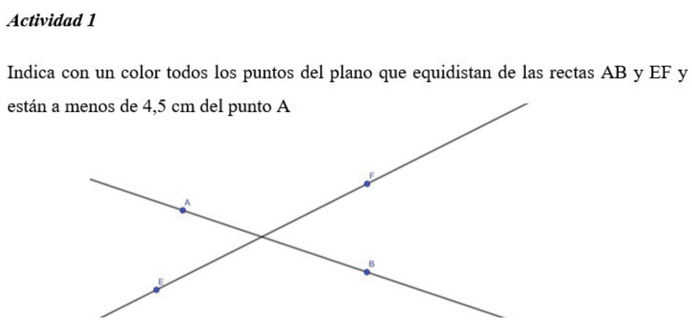
Diseño	Utilizando este diseño ¿puede hacer el borde con 32 metros de madera?
Diseño A	Sí / No
Diseño B	Sí / No
Diseño C	Sí / No
Diseño D	Sí / No

Figura 1. Carpintero. Actividad PISA 2003.

De las actividades liberadas por PISA Uruguay interesan sólo siete, las referidas al contenido espacio y forma. En 2003 son tres, que llevan por título: escalera, dados y carpintero; mientras que las correspondientes a 2012 son cuatro: garaje (pregunta 1 y 2) y puerta giratoria (pregunta 1 y 2). En este trabajo se nombran con las iniciales y números de sus títulos, E, D, C, G1, G2, PG1, PG2, respectivamente.

Para la recolección de las actividades de los docentes, se seleccionan las actividades de evaluación correspondientes al contenido curricular de geometría, por tanto, actividades que evaluarán el aprendizaje de los lugares geométricos (CES, 2010). Se ha solicitado a la dirección de una institución privada de Montevideo el acceso a las evaluaciones realizadas por los tres profesores de primero de bachillerato. Las actividades de los docentes fueron planteadas en el año lectivo 2020, en una situación de examen durante clase en modalidad presencial y corresponden al contenido curricular de geometría, referente a lugares geométricos.

Nuestro interés está en el sentido espacial, evitando las inclusiones de aspectos relacionados con la medida de magnitudes geométricas. Es por este motivo que para la selección se tuvo en cuenta que la resolución de la actividad no requiera principalmente una medida, sea como cantidad de longitud, superficie o volumen, como de amplitud de ángulo; además se selecciona solo una de las que teniendo igual enunciado, cambian los valores de los datos proporcionados, de este modo, de las 24 actividades de evaluación de los docentes a las que se acceden, son nueve las seleccionadas. Se nombran con la inicial de la palabra actividad seguida de un número: A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 y A9. En la figura 2 se muestra un ejemplo de las actividades de los docentes.



Actividad 1

Indica con un color todos los puntos del plano que equidistan de las rectas AB y EF y están a menos de 4,5 cm del punto A

Figura 2. Actividad de los docentes.

En síntesis, las actividades de evaluación consideradas como objeto de análisis en esta investigación son 16, entre las nueve actividades de los docentes en torno al contenido lugares geométricos, propuestas en primero de bachillerato y las siete actividades liberadas de PISA en los dos años 2003 y 2012 cuyo dominio fue la cultura matemática, específicamente en el contenido espacio y forma.

La recolección de datos. El trabajo abarca las habilidades de visualización requeridas para resolver las actividades. La recolección de datos se realiza a través de la resolución amplia y detallada de cada una de las 16 actividades que son sujetos de este estudio, por parte de dos de los investigadores quienes resuelven separadamente, ponen en común apreciaciones y consultan con un tercer revisor experto en caso de discrepancia. Los análisis fueron triangulados por una tercera persona experta y cualificada que permitió agregar nuevas resoluciones en las actividades.

No fueron considerados los procedimientos que no conducen a encontrar la solución de cada una de las actividades porque no atienden a los objetivos de la investigación. Interesa señalar que las actividades propuestas deben ser resueltas a lápiz y papel, sin usar programas de geometría, como GeoGebra.

Descripción del análisis. Se establecen como categorías las habilidades de visualización: coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción de las relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual. Se realiza un análisis de contenido de las resoluciones de las 16 actividades que forman parte de este estudio, poniendo la mirada en identificar en cada paso de la resolución, las habilidades requeridas al estudiante de primero de bachillerato en el momento que las resuelve. Para todas las actividades se confeccionan tablas donde se describen y contabilizan las manifestaciones de cada habilidad. Se muestran ejemplos en la tabla 1. Para dar mayor validez al estudio, los análisis fueron puestos en consideración, recibieron agregados y correcciones de parte de dos docentes externos.

Tabla 1. Análisis de las habilidades de visualización en dos actividades.

Habilidades de visualización	**Carpintero**	**Actividad 1**
Coordinación ojo-motor	--	Conocer y lograr el trazado del procedimiento de construcción de la circunferencia y de las dos bisectrices.
Percepción figura-contexto	Considerar las figuras A y C insertas en un rectángulo, y apreciar la igualdad de trozos escalonados con sus paralelos en el "contexto"/rectángulo.	Considerar los segmentos de bisectrices incluidos en el círculo.
Conservación de la percepción	Aunque varíe la forma se conservan las medidas.	--
Percepción de la posición en el espacio	--	--
Percepción de las relaciones espaciales	Se conserva el perímetro en las diferentes figuras. Identificación de los segmentos que forman la "escalera" con los correspondientes del rectángulo en que se inscriben las figuras A y C.	Determinación de todos los puntos que cumplen con estar a menos de 4,5cm y equidistantes de las rectas AB y EF.
Discriminación visual	Tres figuras conservan el perímetro: A, C y D y una cuarta figura no: B. Especialmente, apreciación de que la longitud del lado oblicuo es mayor que el vertical.	--
Memoria visual	--	--

RESULTADOS

Para presentar los resultados en esta comunicación se elabora la tabla 2 que sintetiza la información acerca de las habilidades de visualización que fueron definidas en el marco teórico, en ella se señala ausencia o presencia de la habilidad en la resolución.

Tabla 2. Habilidades de visualización en las actividades de PISA y de los docentes.

Habilidades de visualización	C	E	D	G1	G2	PG1	PG2	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Coordinación ojo-motor								x	x	x	x	x	x	x	x	x
Percepción figura-contexto	x			x				x	x	x	x	x	x	x	x	x
Conservación de la percepción	x	x	x	x		x										
Percepción de la posición en el espacio		x	x	x	x	x	x							x	x	
Percepción de las relaciones espaciales	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Discriminación visual	x		x	x		x										
Memoria visual																

Habilidades de visualización en actividades de PISA. Las habilidades visuales más requeridas para resolver las actividades de PISA son tres: conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio y percepción de las relaciones espaciales, que aparecen en cinco o en seis de las actividades para su resolución. La discriminación visual es requerida en cuatro actividades.

De los resultados de la tabla 2 se puede afirmar que no hay una habilidad que sea necesaria para la resolución de todas las actividades. Asimismo, la habilidad ojo-motor y memoria visual no resultaron evidenciadas para resolver las actividades; y una habilidad poco requerida es la percepción figura-contexto que sólo aparece en dos actividades.

Habilidades de visualización en actividades de los docentes. Tres son las habilidades de visualización requeridas a la hora de resolver todas las actividades de los docentes: coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto y percepción de relaciones espaciales, necesarias para construir, en particular cuando se trabaja con regla y compás. Menos requerida es la percepción de la posición en el espacio que aparece en dos actividades. Las otras dos habilidades de visualización: conservación de la percepción y memoria visual, parecieran no ser requeridas en las construcciones solicitadas.

CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados, se establece que las habilidades más requeridas, por tanto, evaluadas en las actividades seleccionadas de PISA son: conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio y percepción de las relaciones espaciales, y en menor medida la discriminación visual. Las habilidades necesarias en las actividades de los docentes y por tanto evaluadas son: coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto y percepción de las relaciones espaciales (Del Grande, 1990; Flores et al., 2015).

Como se evidencian diferencias podemos concluir a partir de los resultados de este trabajo que, en relación con las habilidades de visualización, las actividades de las evaluaciones escritas de los docentes uruguayos requieren el desarrollo de habilidades diferentes de las actividades propuestas en PISA y por tanto que la ausencia en el currículo oficial uruguayo de primero de bachillerato de aspectos relativos a visualización puede influir en la obtención de altos resultados en PISA, sin que se pueda afirmar que su inclusión oficial cambiara el currículo implementado por los profesores en sus aulas, es decir, la enseñanza de la geometría que se realiza habitualmente en Uruguay.

Para dar mayor sustento a los resultados de este estudio se podrían indagar otras componentes del sentido espacial, las características de las tareas de enseñanza que se llevan a cabo, incluyendo el proceso de enseñanza, las expectativas de los profesores, etc., que pueda aportar más información sobre posibles causas de que el estudiante promedio uruguayo alcance el nivel uno de desempeño, por debajo del nivel básico de competencia definido por PISA.

Se ha realizado un estudio piloto, con lo que se identifican algunas limitaciones de la investigación, como el tamaño reducido de la muestra: de actividades, debido a las pocas actividades de PISA liberadas en Uruguay y la restricción al contenido de lugares geométricos; y de docentes, por centrar el estudio en una sola institución educativa. Se reconoce como aporte la categorización de las habilidades de visualización y el método de análisis que permite trabajar con muestras mayores, respuestas de estudiantes, comparaciones con otros países para brindar elementos objetivos en posibles reformas curriculares.

Agradecimientos

Este trabajo forma parte de unas de las líneas del proyecto PID2020-117395RB-I00.

Referencias

ANEP. (2017a). *Marco curricular de referencia nacional (MCRN). Una construcción colectiva*. ANEP.

ANEP. (2017b). *Uruguay en PISA 2015. Informe de resultados.* División de investigación, evaluación y estadística (DIEE).

Alsina, C., Burgués, C y Fortuny, J. M. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría* (4ª Ed.). Síntesis.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 7-16.

CES (2010). *Programa de matemática primer año. Bachillerato, reformulación 2006, ajuste 2010*. ANEP.

CES (2020). *Orientaciones vinculadas con la evaluación de los aprendizajes: la calificación.* ANEP.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *The Arithmetic Teacher, 37*(6), 14-20.

Diezmann, C. y Lowrie, T. (2009). Primary students' spatial visualization and spatial orientation: an evidence base for instruction. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis, (Eds.). *Proceedings of the 33rd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 417-424). PME.

Flores, P., Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 127-146). Pirámide.

Goldin, G. A. (2007). Representation in school mathematics a unifying research perspective. En J. Kilpatrick (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.275-285). NCTM.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME conference* (pp. 3-19). Universidad de Valencia.

Jones, K., y Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp.109-149). Sense Publishers.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

OCDE (2016). PISA 2015. *Assessment and analytical framework: science, reading, mathematic and financial literacy*. OCDE.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future,* (pp.205-236). Sense Publishers.

Rico, L. y Fernández, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática*, (pp.1-22). Comares.

Santos, L. y Cai, J. (2016). Curriculum and assessment. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education*, (pp.153-185). Sense Publishers.

Shimizu, Y., Vithal, R., Arzanello, F., Ruiz, A., Cuoco, A., Bosch, M., Gholam, S., Morony, W. y Zhu, Y. (2018). Discussion document. En Y. Shimizu y R. Vithal (Eds.), *Proceedings the 24th ICMI study* (pp. 571-588). University of Tsukuba.

Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME international conference* (pp.225-232). Utrecht University.

Suurtamm, C., Thompson, D. R., Kim, R. Y., Moreno, L. D., Sayac, N., Schukajlow, S., Silver, E., Ufer, S. y Vos, P. (2016). *Assessment in mathematics education: large-scale assessment and classroom assessment* (pp. 27-33). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32394-7

LOS CORPÚSCULOS PITAGÓRICOS PARA MEDIR LONGITUDES FINITAS

Pythagorean corpuscles for measuring finite lengths

Esteve-Blasco, M. y González-Astudillo, M. T.

Universidad de Salamanca

Resumen

En este trabajo se aborda la formación inicial de futuros docentes de matemáticas de educación secundaria sobre la medida de longitudes finitas mediante el método empleado en la escuela pitagórica. Tras un minucioso análisis histórico se ha diseñado una ingeniería didáctica con el fin de utilizar la historia del cálculo para lograr una formación más profunda de los futuros docentes. Esto ha permitido abordar aspectos como la descomposición infinita de un segmento y el concepto de magnitud infinitamente pequeña en el caso de que dicha longitud sea un número irracional. Las conclusiones indican que, aunque inicialmente los sujetos no barajaron el uso de procesos infinitos, cuando se enfrentaron a la medición de longitudes irracionales se logra una mirada crítica a los procesos usados por los pitagóricos.

Palabras clave: *formación, historia, ingeniería didáctica, medida.*

Abstract

This paper deals with the initial training of future secondary school mathematics teachers about the measurement of finite lengths using the method employed in the Pythagorean school. After a thorough historical analysis, a didactic engineering was designed with the aim of using the history of calculus to achieve a more in-depth training of future teachers. This has made possible to deal with aspects such as the infinite decomposition of a segment and the concept of infinitely small magnitude in the case where this length is an irrational number. The conclusions indicate that, although initially the subjects did not consider the use of infinite processes, when they were confronted with the measurement of irrational lengths, they took a critical look at the processes used by the Pythagoreans.

Keywords: *training, history, didactical engineering, measurement.*

INTRODUCCIÓN

Investigaciones previas (Ma, 1999; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008) señalan la necesidad de que los docentes de matemáticas tengan un conocimiento profundo de las mismas. Esto implica que no sólo deben conocer las matemáticas, sino que tienen que tener conocimiento sobre su origen, cambios y desarrollo (Kim, 2013). Es decir, el profesor debe "demostrar conocimiento sobre el desarrollo histórico de los tópicos" (NCATE, 2003, p. 4). Kline (1978) pone de manifiesto que debemos tener en cuenta los procedimientos utilizados y las dificultades que se encontraron los matemáticos a la hora de definir los conceptos matemáticos tal como actualmente los conocemos. El estudio de la historia nos permitirá

Esteve-Blasco, M. y González-Astudillo, M. T.(2022). Los corpúsculos pitagóricos para medir longitudes finitas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 259-267). SEIEM.

conocer los problemas e ideas que dieron lugar a los diferentes conceptos, profundizando en aquellos aspectos que bajo una fórmula perfectamente formulada pasan inadvertidos. A su vez, se potenciará el carácter social y cultural de la matemática, pues saldrán a la luz las diferentes ideas surgidas para resolver un problema, los fenómenos físicos o sociales que las explican, además del marco espacial y temporal en que aparecieron. En definitiva, su evolución temporal permitirá a los docentes evitar una transmisión de conocimientos cerrada, estereotipada y como una verdad absoluta, donde se impone el estilo deductivo, el cual oculta la verdadera construcción original del concepto a tratar (Maza, 1994).

Esta comunicación forma parte de un estudio más amplio centrado en la construcción del concepto de integral a lo largo de la historia y su aplicación en el aula. En ella se pretende comprobar si la historia de la matemática permite completar y fortalecer los saberes de los futuros docentes de matemáticas y si, a través de ella, salen a la luz aspectos inherentes al cálculo integral que se esconden bajo un cálculo mecánico carente, en muchos casos, de significado. En concreto, en esta comunicación el objetivo es diseñar tareas relativas a los procesos de medición de los pitagóricos a través de corpúsculos y analizar si los futuros docentes son conscientes de la ineficacia de estos procesos cuando se trata de longitudes irracionales. Estas tareas involucrarán, por lo tanto, aspectos como: la aceptación del concepto de infinito, la aparición de segmentos que necesitan una descomposición infinita y, en consecuencia, aparición de magnitudes con desarrollo continuo, trabajar razonamientos infinitesimales, uso de unidades de medida infinitamente pequeñas y entender la longitud/área como suma de corpúsculos.

Por lo tanto, la pregunta de investigación a la que se pretender responder es:

¿Los procesos utilizados por la escuela pitagórica para la medición de longitudes/áreas se pueden usar como una herramienta para el diseño de tareas de forma que los futuros docentes comprendan las limitaciones de dichos procesos y la necesidad de desarrollar nuevas herramientas matemáticas?

ANTECEDENTES

Dos son los aspectos centrales en esta investigación. Por un lado, recurrir a la historia de la matemática como fuente de ideas para la construcción de los conceptos matemáticos que le permitan dotarles de sentido y, por tanto, una necesidad en la formación de futuros docentes. Y por otro, las dificultades que entraña la comprensión del concepto de integral.

En relación con el primero de los puntos anteriores, González (2004) afirma que mediante la historia de la matemática el profesor llega a una comprensión más profunda de los problemas matemáticos y de los elementos que de ellos se derivan. Además, tal y como se testimonia en Gil (1993) permite revelar y volver a descubrir conocimientos que se transmiten ya elaborados. Ho (2008), Panasuk y Horton (2012) analizaron si los profesores de matemáticas utilizan la historia de las matemáticas para enriquecer los conceptos y desarrollos expuestos. Concluyeron que la mayoría de los docentes no la emplean. Sus razones varían entre falta de conocimiento de la historia de la matemática, la falta de recursos para poder aplicarla, la falta de tiempo y la falta de concordancia entre los desarrollos históricos y las exigencias curriculares actuales.

En cuanto al concepto de integral, diversas investigaciones (Artigue, 2001; Orton, 1983 y 1984) han dado cuenta de la dificultad que entraña dicho concepto en relación con su aprendizaje. Estas dificultades están ligadas a la conceptualización del límite de una función (Tall y Rashidi Razali, 1993), a la notación, a los métodos procedimentales para el cálculo de integrales que ocultan los aspectos conceptuales y el significado de dichos procesos o el uso de representaciones que permiten una imagen adecuada del concepto (Fiangga, 2018). En este sentido, los corpúsculos pitagóricos nos ayudarán a mejorar la visión infinitesimal y, por tanto, nos permitirá entender de manera completa el concepto de partición del intervalo.

En las enseñanzas del cálculo integral se tiende a las explicaciones mecánicas y dogmáticas (Artigue, 1995), las cuales no solo esconden todo proceso de construcción, sino que ensanchan la brecha entre la parte conceptual y la parte algorítmica del cálculo (Muñoz, 2000). Se expone el cálculo integral mediante la integral de Riemann, la cual es transmitida como un concepto completo y acabado, alejándola de su significado geométrico, aspecto que dificulta la comprensión completa del concepto de cantidad infinitamente pequeña (Schneider-Gilot, 1987).

Algunos investigadores (Doorman y van Maanen, 2008; Katz, 1993) han abordado la enseñanza del cálculo en general y del cálculo integral, en particular, para estudiantes de diferentes niveles educativos a través de la historia con el fin de que superen las dificultades anteriormente mencionadas. En esta investigación abordamos el uso de la historia para la formación de futuros docentes de matemáticas de educación secundaria. Para iniciarla se realizó inicialmente un estudio pormenorizado de la historia, lo que nos permitió identificar ciertos momentos clave en la evolución del concepto de integral. Por otro lado, para comprobar los conocimientos de futuros docentes acerca de la historia del cálculo integral, se pasó, en el año 2021, un cuestionario a futuros docentes (Esteve-Blasco y González-Astudillo, 2021). Las respuestas testimoniaron cierto pensamiento infinitesimal, algunas dificultades en la construcción y significado del concepto y una gran dependencia en la regla de Barrow para resolver tareas sobre el cálculo de áreas. Tanto el estudio histórico realizado como los resultados de este cuestionario fueron el punto de partida para abordar la presente investigación.

METODOLOGÍA

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo, ya que está orientada a comprobar si las tareas diseñadas sobre los procesos de medición pitagóricos han cumplido los objetivos para los cuales fueron diseñadas. Se recurrió a una ingeniería didáctica, la cual se centra en modelar las situaciones de enseñanza, para así permitir una elaboración y gestión controlada (Artigue, 1995). Como metodología de investigación, se caracteriza por seguir un esquema experimental en el cual destacamos las siguientes fases: concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Su validación es interna, es decir, basada en la confrontación entre un análisis a priori y uno a posteriori. Su pretensión no es solamente el comprender los procesos de investigación-acción, sino también la definición de variables de control para controlar los fenómenos didácticos resultantes.

En el caso de esta investigación se ha estructurado en cuatro etapas bien diferenciadas:

- Análisis preliminar: Donde se realizó estudio pormenorizado de la historia y evolución del concepto de integral, lo que permitió establecer cuatro hitos en su desarrollo hasta que alcanzó en cierta forma el concepto. A continuación se indican brevemente cada uno de estos hitos:
  1- La noción de divisibilidad del espacio desarrollada en Grecia, que involucra los primeros acercamientos al concepto de infinito (potencial) y definición del método de exhausción; primer método general para calcular áreas curvas.
  2- Durante el medievo matemático aparece una prematura idea de infinitesimal, se considera un área barrida por perpendiculares con cierta intensidad y por ende figuras geométricas compuestas por colecciones de líneas (indivisibles) tratando de encontrar la razón entre ellas.
  3- Las cuadraturas del XVII se convierten en técnicas generales para calcular áreas sin la necesidad de establecer una congruencia con figuras conocidas lo que implica el paso a un indivisible dinámico.

4- Las fluxiones y diferencias constituyen el primer puente entre cuadraturas y tangentes, base del Teorema Fundamental del Cálculo lo que permite definir la integración como anti-diferenciación.

En la presente comunicación nos centraremos en el primero de estos hitos, y más concretamente en los procesos de medición pitagóricos para abordar la divisibilidad del espacio. En la escuela pitagórica todo estaba formado por números y sus razones finitas (Kline, 2000). Podemos decir que dotaron a su matemática de una estructura corpuscular, es decir, cada segmento se podía construir con un número finito de átomos (Dalcín y Olave, 2012).

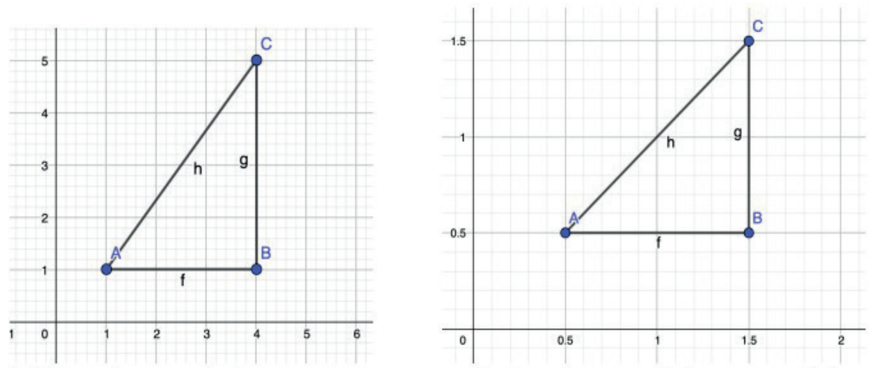
- Análisis a priori: Donde se realizó un análisis predictivo de la investigación y se describió de forma detallada la ingeniería a realizar. Se diseñaron las tareas, se definieron los recursos necesarios para llevarlas a cabo y se marcaron los objetivos que con ellas se pretendían alcanzar. Las dos primeras tareas (figuras 1 y 2) que se presentaron y cuyos resultados se tratan en la presente comunicación fueron las siguientes:

Actividad 1.1. Razone la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

«Todo segmento real de longitud finita aceptará una descomposición corpuscular».

Figura 1. Enunciado de la actividad 1.

Actividad 1.2. Descompón corpuscularmente los 3 lados de los triángulos de las figuras 2a y 2b. ¿En qué caso la descomposición de los catetos vale para la hipotenusa? ¿Por qué? ¿Existen segmentos inmedibles?



(a) Triangulo rectángulo de catetos 3 y 4. (b) Triangulo rectángulo de catetos unidad.

Figura 2. Enunciado de la actividad 2.

Los objetivos de estas tareas fueron:

- Tomar conciencia de que el cálculo de áreas y volúmenes no nace con la integral de Riemann.
- Analizar, mediante problemas clásicos, las diferentes percepciones sobre la divisibilidad del espacio y del tiempo (analogías con las particiones del intervalo).
- Acercarse, de una manera informal, a la idea de convergencia, aspecto clave en la definición del concepto de integral.
- Potenciar en los estudiantes el pensamiento infinitesimal, el cual será clave para entender plenamente como se construyó y, por lo tanto, para darle mayor sentido al concepto de integral.

- Experimentación: Etapa correspondiente a la formación de los futuros docentes y a la recogida de datos. Las dos primeras tareas, junto con otras tres relacionadas con el método de exhausción, se realizaron a lo largo de una sesión de dos horas el día 17 de enero de 2022 con once estudiantes del Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas en la especialidad de matemáticas. Inicialmente se realizó una presentación de las ideas de la escuela pitagórica en gran grupo donde se les indicó que para los componentes de esa escuela todo estaba formado por números y que en sus procesos de medición utilizaban una estructura corpuscular, es decir, cada segmento se dividía en un número finito y entero de corpúsculos. Posteriormente, los estudiantes formaron 4 grupos para discutir las tareas: 1 grupo de 4 personas, 1 grupo de 3 personas y 2 grupos de 2 personas. La recogida de los datos se realizó por medio de grabaciones de audio y vídeo de la presentación en gran grupo (para lo que se solicitó previamente su autorización) y de la discusión en pequeños grupos en relación con las tareas. También se recogieron las producciones escritas de los estudiantes.
- Análisis a posteriori: Última fase de la de la investigación donde se analizaron los datos obtenidos confrontándolos con los objetivos establecidos en el análisis a priori. Las intervenciones orales de los estudiantes fueron codificadas asignando a cada actividad una A seguida un número, una G junto con el número del grupo del que formaba parte y una L junto con un número final correspondiente a la línea en la que aparece dicha intervención. Este análisis se presenta en la sección de resultados.

RESULTADOS

Dada la extensión limitada de este documento, para organizar los resultados no diferenciaremos los resultados por grupos, sino que los expondremos al confrontar las respuestas de los diferentes grupos con los objetivos marcados a priori.

Tal como estaban diseñadas las actividades, los alumnos debían razonar, primeramente, si todo segmento real de longitud finita aceptaría una descomposición corpuscular y seguidamente, tratar de descomponer corpuscularmente dos triángulos, uno de catetos 3 y 4 e hipotenusa 5 y otro de catetos unitarios y, por tanto, hipotenusa raíz de 2.

Inicialmente, los estudiantes asumieron que el radio del corpúsculo podía ser irracional y, por lo tanto, cualquier segmento, al ser de longitud finita, siempre aceptaría una descomposición corpuscular finita.

> Si tienes un segmento finito, siempre vas a poder meter bolitas y que lo completen. (A1G2L14)
>
> Si el segmento es de longitud π también puedes dividirlo cogiendo la unidad adecuada. Un segmento de longitud π es un segmento de longitud π y siempre lo puedes dividir en un medio cogiendo la unidad adecuada. (A1G1L5)
>
> Pues yo creo que es verdadero también. Porque dice aquí que cada segmento, cada área y por extensión cada figura n-dimensional se podría construir con un número finito y entero de átomos. Entonces un segmento real también. (A1G4L4)

Al aceptar plenamente que pueden construir corpúsculos de radio irracional, no aparece la problemática de una posible descomposición infinita, ni tampoco aparece el concepto de desarrollo continuo (figura 3). Para ellos todo segmento finito, sea de la longitud que sea (racional o irracional) se va a poder descomponer con un número finito de corpúsculos, de radio adecuado. Incluso se llega a plantear la hipótesis de hacer un único corpúsculo de diámetro, el propio segmento.

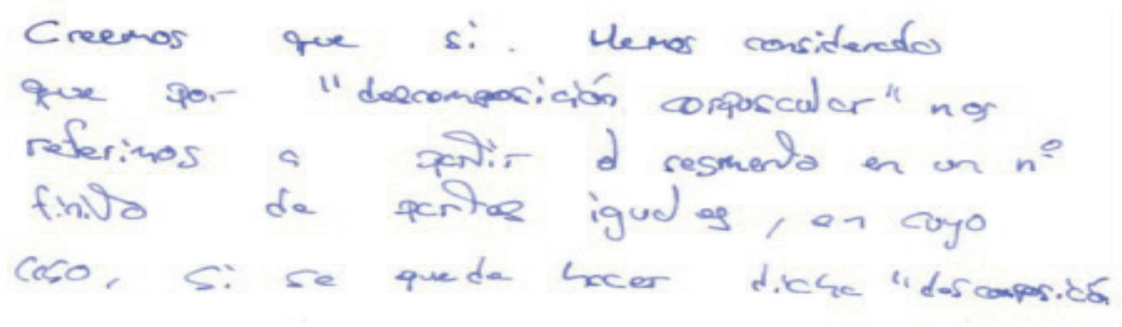

Creemos que sí. Hemos considerado
que por "descomposición corpuscular" nos
referimos a partir el segmento en un nº
finito de partes iguales, en cuyo
caso, sí se puede hacer dicha "descomposición

Figura 3. Producción escrita del grupo1.

Los estudiantes parece que tienen claro que todo segmento real de longitud finita acepta una descomposición corpuscular y que, por lo tanto, siempre será medible como suma de corpúsculos. Bajo esta visión afrontan la segunda actividad, en la cual deberán descomponer la diagonal de un triángulo rectángulo con la misma estructura corpuscular que han utilizado en sus catetos. El primer triángulo, tiene todas sus longitudes racionales, por lo que no les conduce a contradicciones.

> Por tanto, aplicando Pitágoras, la diagonal vale 5 y se puede descomponer en 5 unidades. (A2G2L31)
>
> Claro, esto quiere decir que mide 5 corpúsculos de diámetro 1. (A2G2L32)
>
> Sí, mira aquí (figura 2a) lo puedes descomponer en bolas de diámetro 1, porque este lado es 3, este es 4 y la hipotenusa es 5. Efectivamente, puedes hacer bolas de diámetro 1. (A2G3L8)

Los alumnos descomponen los segmentos con un número finito de corpúsculos percibiendo la longitud como una agregación de corpúsculos. Su visión es clara, cuando tenemos una longitud racional, el segmento siempre aceptará una descomposición corpuscular exacta (radio racional) y, por tanto, la suma de sus corpúsculos nos dará su longitud.

Es el segundo de los triángulos donde la longitud de la hipotenusa es un número irracional donde aparecen las primeras contradicciones con su pensamiento finito.

> Pero con este (raíz de 2) tienes un número infinito de corpúsculos. Salvo que el corpúsculo mida raíz de 2. (A2G2L44)
>
> El b) no se puede porque no forma un número entero. (A2G4L25)
>
> Raíz de 2 es distinto de x por un número entero. (A2G3L13)

Se empieza a abandonar su pensamiento finito en favor pensamiento infinito, en el cual se aceptan segmentos con una descomposición infinita de corpúsculos.

> Pero tienes que contar infinitas veces para llegar al resultado. (A2G2L64)
>
> No llegas al resultado exacto, siempre tienes que perder información. (A2G2L65)

Esto supone que se ha despertado la mirada crítica acerca de los procedimientos de medición pitagóricos. Se ha comprendido que si el segmento tiene longitud irracional, con un planteamiento pitagórico, solo vamos a poder aproximar su longitud, nunca alcanzaremos su exactitud, ya que el número irracional no se puede construir como razón de números enteros. Se plantean una posible descomposición infinitamente pequeña de un segmento.

> Yo creo que este (hipotenusa del triángulo unitario) sería inmedible porque no se puede construir con un número entero y finito de átomos. (A2G4L1)

Bueno a no ser que el corpúsculo que sea lo suficientemente pequeño.(A2G4L16)

Esto conduce a la necesidad de plantearse nuevos métodos de medición, los cuales puedan abordar la problemática irracional y en consecuencia se cuestiona claramente los procesos de medición pitagóricos. Existirán segmentos que no se podrán medir de manera exacta y, por tanto, existirán segmentos que bajo la perspectiva pitagórica serán inmedibles.

Figura 4. Producción escrita del grupo 2.

Es cuando se enfrentan a longitudes irracionales cuando se evidencia el abandono de un pensamiento finito para empezar a abrazar un pensamiento infinito, en el cual se aceptan segmentos con una descomposición infinita de corpúsculos (figura 4).

Pero con este (raíz de 2) tienes un número infinito de corpúsculos. (A2G2L44)

No existe un entero (nº de corpúsculos) que sea eso (raíz de 2). (A2G3L19)

Se evidencia un pensamiento infinitesimal en términos de particiones o descomposiciones infinitamente pequeñas. Se argumenta que raíz de 2 puede aceptar un número infinito de corpúsculos y, por lo tanto, se entrevé una visión en términos de particiones infinitas de un intervalo. Aparece el infinito en sus razonamientos y, como resultado, el concepto de desarrollo continuo, concepto esencial para entender la integral como agregación infinitamente pequeña de rectángulos. Se testimonia un razonamiento en términos de descomposición infinita, pues se ha aceptado que la finitud de un segmento no implica una finitud en la descomposición y se advierten procesos infinitos asociados a segmentos de longitud finita.

CONCLUSIONES

Las actividades diseñadas han permitido alcanzar los objetivos propuestos. Se ha conseguido despertar la mirada crítica acerca de los procedimientos de medición pitagóricos. Se ha comprendido que, si el segmento tiene longitud irracional, con un planteamiento pitagórico, solo vamos a poder aproximar su longitud. Por lo tanto, se ha comprobado la ineficacia de los procesos de medición pitagóricos cuando nos enfrentamos a longitudes con desarrollo numéricamente continuo, es decir, a longitudes irracionales. Se ha evidenciado un pensamiento infinitesimal en términos de particiones o descomposiciones infinitamente pequeñas. Aparece el infinito en los razonamientos y, no únicamente como un ente abstracto, sino que se advierten procesos infinitos asociados a un segmento de longitud finita. Se acepta plenamente el concepto de magnitud con desarrollo continuo. Se testimonia una visión constructivista de la matemática, puesto que los estudiantes experimentan y construyen ideas a través de desarrollos históricos. Por último, se observa una concepción de longitud como agregación de entes, en este caso corpúsculos, la cual, favorecerá la comprensión completa del concepto de integral.

En respuesta a la pregunta de investigación planteada, se ha utilizado la historia del cálculo integral como una herramienta para el diseño de tareas que contribuyeran a una comprensión más completa (Ma, 1999) de los conceptos involucrados, en este caso la división en corpúsculos de segmentos finitos. A través del estudio de los procesos de medición pitagóricos se ha fortalecido un pensamiento infinitesimal necesario para comprender el cálculo integral. Se han trabajado los conceptos de partición infinita de un intervalo y de longitud como suma de entes (corpúsculos). En definitiva, se ha establecido, sin emplear ningún tipo de formalismo, las primeras asociaciones entre longitud y su suma infinita.

Referencias

Artique, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the university level? En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp.207-220). Kluwer Academic Publishers.

Castro, A. y Li, W. (2014). Exploring the mathematical knowledge needed for teaching teachers. *Journal of teacher education, 65*(4), 303-314.

Dalcín, M. y Olave, M. (2012). *Gente en obra. Historia interactiva de los orígenes de la matemática.* Montevideo: Ediciones Palíndromo.

D'Amore, B. (2004). El papel de la epistemología en la formación de profesores de matemáticas en la escuela secundaria. Épsilon, *60*, 413-434.

Doorman, M. y van Maanen, J. (2008). A historical perspective on teaching and learning calculus. *Australian senior mathematics journal, 22*(2), 4-14.

Esteve-Blasco, M. y González-Astudillo, M. T. (2021). Conocimiento de los futuros docentes sobre la historia de la integral definida. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 648). SEIEM.

Fiangga, S. (2018). Using historical perspective in designing discovery learning on Integral for undergraduate students. En *IOP Conference series: materials science and engineering, 296*(1), 012042. IOP Publishing.

Galadí, A. y Enríquez, D. (1997). La trigonometría del almagesto. Una aplicación didáctica de la historia de la ciencia. *Revista de didáctica de las matemáticas, 4*(13), 115-120.

Gil, D. (1993). Contribución de la historia y de la filosofía de las ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza/aprendizaje como investigación. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *11*(2), 197-212.

González, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma, 45*, 17-28.

Goodwin, D. M. (2007). *Exploring the relationship between high school teacher mathematics history knowledge and their images of mathematics.* University of Massachusetts Lowell.

Ho, W. K (2008). *Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore.* Paper presented at the 1st RICE. Raffles Junior College.

Katz, V. J. (1993) Using the history of calculus to teach calculus. *Science & Education, 2*(3)*,* 243-9.

Kim, Y. (2013). *Teaching mathematical knowledge for teaching: curriculum and challenges.* [Tesis doctoral, Universidad de Michigan].

Kline, M. (1978). *El Fracaso de la Matemática Moderna*. Siglo xxi.

Kline, M. (2000). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. México: Siglo xxi.

Lupiáñez, J. L. (2002). Reflexiones Didácticas sobre la Historia de la Matemática. *Suma*, *40*, 59-63.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers understanding of fundamental mathematics in China and in the United States*. Lawrence Erlbaum Associates.

Maza, C. (1994). Historia de las matemáticas y su enseñanza: un análisis. *Suma*, *17*, 17-26.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. *Relime 3* (2), 131-170.

National Council for the Accreditation of Teacher Education (2003). *Program standards: programs for initial preparation of mathematics teacher*. N.C.T.M..

Orton, A. (1983). Student's understanding of integration. *Educational studies in mathematics, 14*(1), 1-18.

Panasuk, R. M. y Horton, L. B. (2012). Integrating history of mathematics into curriculum: What are the chances and constraints*? International electronic journal of mathematics education, 7*(1), 3-20.

Tall, D. y Rashidi Razali, M. (1993) Diagnosing students' difficulties in learning mathematics. *International. Journal of mathematics education, science and technology, 24*, 209-222

Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Horsori.

Scheider-Gilot. (1988). *Des objects mentaux aire et volumen au calcul des primitives*. [Tesis Doctoral, Université Catholique de Louvain].

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Sense Publishers.

EVIDENCIAS DE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN UNA NIÑA DE 4 AÑOS: ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES

Evidences of functional thinking in a four-year-old girl: strategies and representations

Fuentes, S. y Cañadas M. C.

Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo se enmarca en una investigación más amplia sobre pensamiento funcional en infantil y primaria realizada en España (www.pensamientoalgebraico.es). Analizamos y describimos las representaciones y estrategias evidenciadas por una niña de 4 años al resolver dos tareas de generalización, las cuales involucran a las funciones f(x)=x y f(x)=3x, respectivamente. Se le presenta una situación cotidiana, una fiesta de cumpleaños que relaciona la cantidad de invitados y la cantidad de elementos (gorros o piruletas) necesarios. Cada una de las tareas se compone de varias preguntas (ítems) relativas a casos particulares y a la generalización. La recogida de información se realizó mediante una entrevista semiestructurada para la que existía un protocolo. Observamos que la niña respondió a la mayoría de los ítems planteados, utilizando principalmente la representación pictórica, dibujando los elementos necesarios; y la simbólica, escribiendo el número de elementos. En cuanto a las estrategias utilizadas, utilizó el conteo de dibujos para casos cercanos y consecutivos para x=2, 3, 4 y 5; y la conformación de grupos de elementos para casos lejanos, cuando x toma los valores 8 y 10, los cuales no están dentro de su ámbito numérico.

Palabras clave: *Educación infantil, estrategias, pensamiento funcional, representaciones.*

Abstract

This work is part of a broader research on functional thinking in kindergarten and primary school carried out in Spain (https://pensamientoalgebraico.es). We analyse and describe the representations and strategies evidenced by a 4-year-old girl when solving two generalisation tasks, which involve the functions f(x)=x and f(x)=3x, respectively. We introduced an everyday situation, a birthday party, relating the number of guests and the number of items (hats and lollipops) needed. Each of the tasks is made up of several questions (items) concerning particular cases and generalisation. Information was collected through a semi-structured interview for which there was a protocol. We observed that the girl answered to most of the items posed, using mainly pictorial representation, drawing the necessary elements; and symbolic representation, writing the number of elements. As for the strategies used, he used the counting of drawings for close and consecutive cases, for x=2, 3, 4 and 5; and the formation of groups of elements for distant cases, when x takes de values 8 and 10. which are not within their numerical scope

Keywords: *functional thinking, Kindergarten, representation, strategies*.

INTRODUCCIÓN

La propuesta curricular *early algebra* propone trabajar el álgebra desde educación infantil, lo que significa trabajar en el aula con actividades que desarrollen la habilidad de generalización en los alumnos.

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2022). Evidencias de pensamiento funcional en una niña de 4 años: Estrategias y representaciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 269-276). SEIEM.

En concreto, la aproximación de pensamiento funcional de esta propuesta nos lleva a la covariación entre dos o más conjuntos numéricos, particularmente los números naturales en los primeros cursos.

En países como Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile, se incorporan el sentido algebraico y las relaciones entre conjuntos en el currículo (Pincheira y Alsina, 2021). En España, en educación primaria se ha incluido el "sentido algebraico" (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022a). Por el momento, en la educación infantil se incluye identificar las características de materiales y objetos y establecer relaciones entre elementos de diferentes conjuntos. Todo esto a través del juego y de la enseñanza no formal del contenido. Para ello, es importante la exploración, observación de patrones, regularidades y la argumentación de los hallazgos. Así, el tránsito hacia las matemáticas formales se inicia en estos niveles y va en incremento en los niveles que le suceden (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022b). Se pretende crear una cultura en el aula donde se le permita al niño explorar, argumentar, modelizar, hacer predicciones y discutir (Blanton y Kaput, 2004).

Las investigaciones que encontramos en la literatura sobre pensamiento funcional en educación infantil son escasas, aunque en España ha habido un auge en los últimos años y encontramos investigaciones centradas en el último curso de educación infantil (p. ej., Acosta y Alsina, 2018; Anglada y Cañadas, 2021; Castro et al., 2017), y primeros años educación primaria (Cañadas y Fuentes, 2015; Fuentes y Cañadas, 2021; Morales et al., 2018).

El objetivo que abordamos en este trabajo es describir las estrategias y representaciones que emplea una niña de 4 años al resolver una tarea de generalización que involucra las funciones $f(x)=x$ y $f(x)=3x$.

ANTECEDENTES Y MARCO CONCEPTUAL

El pensamiento funcional, un enfoque del *early algebra*, propone el introducir en las aulas actividades donde el foco de estudio sean las funciones. Esto se puede hacer mediante actividades que promuevan el análisis de la interacción entre las variables involucradas en las tareas propuestas, las cuales deben ser desafiantes para los alumnos, pero cercanos a su entorno. Asumimos que el pensamiento funcional es un proceso cognitivo que forma parte del pensamiento algebraico, "basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 211).

Estrategias

Asumimos la definición general de estrategia de Rico (1997), quien considera que son las formas de actuación de los alumnos frente a una tarea matemática. Por lo tanto, consideraremos las diferentes formas y caminos seguidos por los niños a cabo la resolución de una tarea planteada.

En un estudio con niños de último año de infantil (5 y 6 años), Castro et al. (2017) propusieron tareas que involucraron las funciones $y=x$, $y=2x$ e $y=x+1$. Las estrategias para la tarea que implicó la función $y=2x$ fueron "sumar el mismo número dos veces" o "duplicar la cantidad", "continuar la serie de 2 en 2" o "sumar de 2 en 2", dependiendo del número de elementos por el que se les preguntaba.

Formar grupos también es una estrategia que emerge en algunos alumnos cuando los resultados consultados escapan al ámbito numérico que les resulta familiar. Por ejemplo, en Cañadas y Fuentes (2015), algunos alumnos de primero de primaria (6 y 7 años) utilizaron la estrategia de organizar grupos de 5 elementos. Estos grupos los hacían por filas, por columnas, utilizan también la representación de series de números 5, para encontrar la respuesta a la tarea planteada, escribiendo tantos números cincos como elementos se le solicitaban, aunque la mayoría de los alumnos dibujó los elementos que son requeridos o a dieron una respuesta numérica directa (sin evidencia de cómo llegaron a ella).

En cursos superiores, podemos observar que utilizan estrategias más elaboradas. Ureña (2017) utilizó información proveniente de un experimento de enseñanza con 8 alumnos de cuarto de primaria (9 y 10 años). El autor analizó las generalizaciones establecidas por los alumnos. Para ello, consideró las medicaciones de la investigadora para que los alumnos lograran la generalización, las tareas involucran en un contexto cotidiano la función $f(x)=x+2$. El autor distinguió varios niveles de generalización en el trabajo de los alumnos: (a) no generalizan, (b) generalización numérica, (c) generalización condicionada, (d) generalización verbal y (e) generalización simbólica.

Representaciones

El estudio de las representaciones data de los años 80 (p. ej., Janvier, 1987), sobre todo en el estudio de las funciones y las diferentes representaciones que podemos hacer de ellas (Duval, 1993). Así, Duval plantea que, cuanto mayor es el número de representaciones distintas de un concepto matemático, más robusto es el significado que tenemos de él. En la literatura encontramos diferentes definiciones de representaciones, por ejemplo, Rico (2009) hace referencia a la representación como la externalización del concepto. El contenido matemático protagonista en el ámbito del pensamiento funcional son las funciones, según los autores antes mencionados (Duval, 1993, y Rico, 2009), este contenido tiene asociado una serie de representaciones como la pictórica, la simbólico, la verbal o la tabular, entre otras.

La representación pictórica suele estar presente en el trabajo de los niños de los primeros cursos (p. ej., Brizuela et al., 2015; Cañadas y Fuentes, 2015). Brizuela et al. (2015), trabajaron con tareas que involucran el pensamiento funcional. Los alumnos (3-5 años) tendieron a utilizar en primera instancia, la representación verbal. Los alumnos trabajaron junto a los investigadores con otros tipos de representaciones, especialmente el simbolismo algebraico, con la introducción de letras. Cañadas y Fuentes (2015), trabajaron con un grupo de 32 alumnos de primero de primaria (6-7 años) en una tarea que involucró la función $f(x)=5x$. Los alumnos utilizaron la representación pictórica en el trabajo con casos cercanos y consecutivos (x=1, 2, 3, 4 y 5). A medida que los casos eran más lejanos (8, 10, 20 y 100), los alumnos recurrieron a representaciones simbólicas como la utilización de tantos números 5 como niños asistían a la fiesta. La representación empleada en la respuesta también tuvo relación con la representación de origen.

Cuando los alumnos son de educación primaria, la representación que utilizan con mayor frecuencia es la numérica (p. ej., Pinto et al., 2016). Pinto et al. (2016) trabajaron con un grupo de alumnos de tercer curso de primaria con el problema de las baldosas, observando que las representaciones más utilizadas son la respuesta directa (numérica) y verbal. También se evidenciaron las representaciones manipulativa y pictórica. Se destaca el uso de representaciones múltiples, las cuales consisten en utilizar dos o más representaciones que se complementan, para dar una respuesta al problema planteado.

METODOLOGÍA

Esta investigación es de carácter exploratorio y descriptivo (Hernández et al., 2010), porque el análisis de los datos pretende describir los procesos del alumno en torno a su pensamiento funcional. Es exploratorio, ya que encontramos escasas evidencias en la literatura de investigación para niños de educación infantil.

Previo a una investigación más amplia que desarrollaremos a medio plazo, trabajamos con una niña de 4 años, elegida de forma intencional, por tiempo y disponibilidad, para aplicarle una prueba piloto. Tiene un manejo básico de lecto-escritura, reconoce y escribe algunas letras, algunos números y su nombre. Esto es acorde a lo que se espera en esa edad. La niña había trabajado con patrones figurales anteriormente. Cabe destacar que la alumna destaca en clase por sus aportaciones y trabajo.

Entre varios investigadores del proyecto en el que se encuentra inmersa esta investigación, diseñamos e implementamos una prueba escrita con dos tareas. Enmarcamos las tareas en el contexto de una fiesta de cumpleaños. La aplicación de la prueba tuvo una duración de 1 hora y 10 minutos y estuvo a cargo de las autoras de este trabajo. Cada tarea tuvo una extensión de dos hojas y se compone de 8 ítems (A-H). Cada tarea se trabajó de forma individual, se dieron explicaciones generales de cada una de las ellas para que desarrollara la prueba escrita autónomamente. En la entrevista se le pidió que verbalizara lo que había escrito en la prueba, también se indagó en la generalización, al proponerle otros casos o preguntarle por "muchos". Por la edad de la niña, la investigadora anotó en la prueba escrita las explicaciones que daba verbalmente.

La variable independiente es el número de alumnos invitados a la fiesta y las dependientes los números de gorros y piruletas, respectivamente. Las funciones involucradas en cada tarea fueron $f(x)=x$, $f(x)=3x$, respectivamente.

A continuación, presentamos las tareas propuestas a los niños.

Tarea 1: Relación entre el número de niños y número de gorros necesarios para la fiesta de cumpleaños (figura 1). Se le da explícita la relación 1 niño - 1 gorro ($f(x)=x$) y se le pregunta por el número de gorros para x=1, 2, 3, 4, 5, 8 y 10 niños, y por la relación que observa entre las variables.

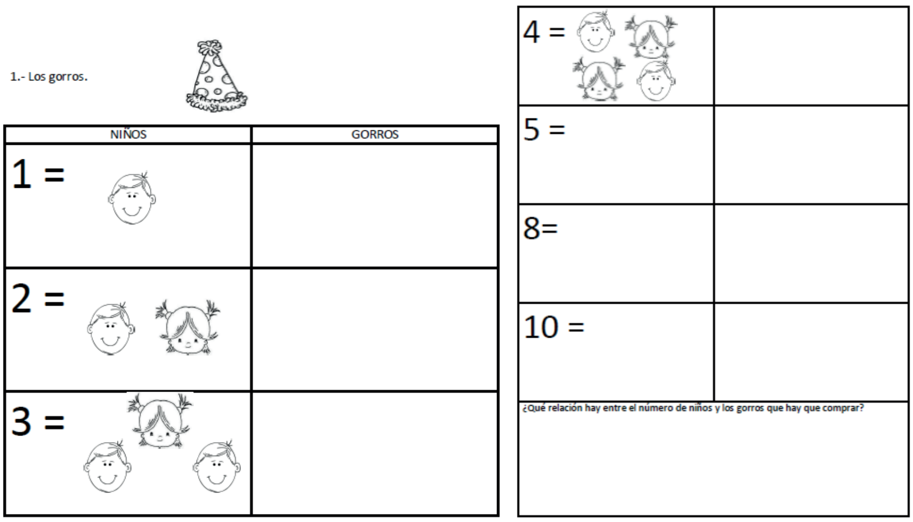


Figura 1: Tarea 1.

Tarea 2: Relación entre el número de niños y el número de piruletas necesario para la fiesta de cumpleaños. Se le da escrita la relación 1 niño - 3 piruletas ($f(x)=3x$), quedando como apartados de esta tarea preguntas sobre el número de piruletas para x= 1, 2, 3, 4, 5, 8 y 10 niños, además de la relación que observa entre las variables.

Utilizamos las categorías de análisis de Fuentes (2014), que detallamos a continuación.

En cuanto a los valores de la categoría estrategias, utilizamos las que emergieron del análisis de la prueba escrita:

(a) Respuesta directa: Un número, una expresión aritmética o una secuencia numérica.

(b) Conteo de dibujos: Dibujo de los elementos que corresponden al apartado solicitado.

(c) Asociación de elementos en grupos: Ordenamiento de los elementos que necesita en filas, columna o grupos.

En la categoría representaciones, utilizamos las siguientes:

(a) Pictórica: Presencia de dibujos.

(b) Simbólica: Números, operaciones o símbolos matemáticos

(c) Verbal: Expresiones escritas o verbalizaciones.

La categoría representación no es excluyente, ya que la alumna podía dar una respuesta directa (simbólico), hacer dibujos (pictórico) o verbalizar sus hallazgos (verbal), en cambio la categoría de estrategias es excluyente, ya que la respuesta del alumno podía corresponder a una única estrategia.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Analizamos y describimos las respuestas de la alumna a través de las dos categorías definidas para dar respuesta al objetivo de investigación: estrategias y representaciones.

Estrategias

En la tabla 1, recogemos algunos ejemplos de las estrategias empleadas por la alumna en la resolución de las tareas dadas.

Tabla 1. Estrategias y ejemplos.

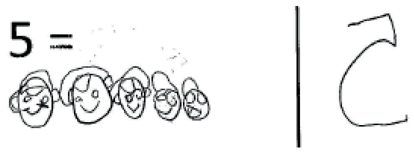
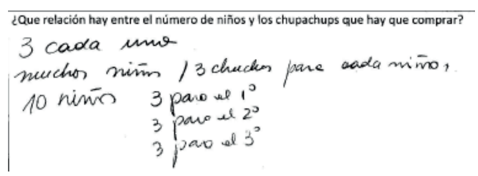
Descripción de la categoría estrategias	Sub-categorías	Respuestas
(a) Respuesta directa.	Relación 1-1	 (Ítem F, Tarea 1)
(b) Conteo de dibujos.	Relación 1-1	 (Ítem D, Tarea 1)
	Relación 1-3	 (Ítem C, Tarea 2)
(c) Asociación de elementos en grupos.	Todos los grupos correctos (1-3)	 (Ítem E, Tarea 2)

En la tabla 1 se aprecia la variedad de estrategias que la alumna estableció, todas ellas de forma correcta. Observamos que en los primeros casos, cercanos y consecutivos (x = 1, 2, 3 y 4), utilizó el conteo de dibujos, en el ítem D de la tarea 1 vemos que dibujó 4 gorros cuando hay 4 niños y en la tarea 2, en el ítem C, al preguntarle por 3 niños dibujó 9 piruletas. Al cambiar de hoja también cambió de estrategia. En la resolución de la tarea 1, utilizó la representación simbólica al encontrar la regularidad. Esto lo categorizamos en la estrategia de respuesta directa, ya que presentó el número de gorros necesarios para esa cantidad de niños. En el ejemplo de la tabla 1, se muestra el ítem F, el cual pregunta por los gorros necesarios para 8 niños, las caras en este ítem no estaban dibujadas y la alumna las dibujó, entregó por respuesta el número 8. En cambio, en la tarea 2 utilizó la agrupación de forma escrita, en el ejemplo de la respuesta al ítem E se ven dibujadas las caras y las piruletas que le correspondió a cada individuo de su familia, podemos observar la M de mamá, P de papá y las letras R, V y U correspondientes a las iniciales de los nombres de sus hermanas y al suyo. Esto se observa solo en este ítem, ya que se corresponde al número de integrantes de su familia, también agrupó de forma verbal cuando se indagó en las respuestas entregadas.

Representaciones

En cuanto a las representaciones que utilizó la niña, fueron la pictórica, la simbólica y la verbal. A continuación, en la tabla 2 presentamos un ejemplo para cada uno de los tipos de representaciones que empleó.

Tabla 2. Representaciones y ejemplos.

Descripción de la categoría	Produccion escrita del alumno
(a) Pictórica.	 (Ítem A, Tarea 1)
(b) Simbólica.	 (Ítem E, Tarea 1)
(c) Verbal.	 (Ítem H, Tarea 2)

En la mitad de los ítems, utilizó la representación pictórica, realizando dibujos para dar una solución al problema planteado. Utilizó la representación simbólica en la tarea 1, en 3 de los ítems y la verbalización de la respuesta en el ítem H de la tarea 1 y en los ítems G y H de la tarea 2, la cual fue escrita en el folio por la investigadora.

CONCLUSIONES

Nuestro objetivo de investigación era describir las representaciones y las estrategias utilizadas por una niña de 4 años al trabajar con tareas de generalización que involucran una función lineal. En particular, diseñamos un contexto cercano y llamativo para la niña, que involucraba las funciones lineales $f(x)=x$ y $f(x)=3x$. Hemos dado respuesta al objetivo, describiendo diferentes representaciones y estrategias que le ayudaron a resolver las tareas propuestas. Destacamos que en la mayoría de las preguntas utilizó más de una representación para corroborar su respuesta.

Esta investigación aporta al enfoque funcional del *early algebra* en varios sentidos. Por un lado, por desarrollarse en educación infantil, donde los estudios son escasos. Por otro lado, dispone de una variedad de estrategias y de representaciones utilizadas por una niña de 4 años, que arroja luz para futuras investigaciones y también tiene implicaciones para la docencia. Esta investigación es una invitación para los maestros, para incluir en las clases de infantil actividades de pensamiento funcional y generalización, como ya existen en otros países y es de esperar que ocurra en no muchos años, como ya ha ocurrido con el currículo de educación primaria, donde el currículo actual incluye el sentido algebraico.

Al comparar estos resultados con los obtenidos por Cañadas y Fuentes (2015) y Castro et al. (2017), observamos que la alumna de 4 años estableció la relación funcional sin dificultad y respondió correctamente a cada ítem y a las preguntas realizadas sobre las funciones inversas, contrastando con las investigaciones antes mencionadas, con alumnos de primero de primaria y de infantil de 5 años, donde algunos niños llegan a la generalización. Esto se puede deber a que la niña tiene un desempeño alto respecto a su clase. Por otro lado, también puede deberse al trabajo individual realizado en nuestra investigación, en contraste con el realizado en el aula con todos los alumnos en los otros trabajos citados. Esta cuestión metodológica es interesante tenerla en cuenta para futuros trabajos.

Los alumnos tratan de encontrar una explicación a la dependencia entre las variables involucradas en las situaciones problemáticas a las que son expuestos. Por lo tanto, las diferentes actividades a las que los niños se enfrenten en clases, será determinante para explorar las nociones intuitivas que tengan sobre pensamiento algebraico y, específicamente, sobre pensamiento funcional. Se pretende que sean actividades desafiantes para su edad, contextualizadas y cercanas. Esto nos permitirá comenzar a trabajar nociones algebraicas que pueden continuarse y reflejarse en cursos superiores.

Sabemos que los resultados de este estudio no son generalizables a todos los niños de 4 años, pero sí entregan evidencias de que el trabajo con nociones algebraicas en las aulas de 4 años es posible y la variedad de estrategias y representaciones que observamos es notable. Esto abre opciones de trabajo interesantes para el futuro.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte de los proyectos con referencias EDU2016-75771 y PID2020-113601GB-I00, financiados por la Agencia Española de Investigación y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional y Beca de doctorado en el extranjero n° 72210402, Gobierno de Chile.

Referencias

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2018). Alfabetización algebraica a partir de 3 años: el caso de los patrones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 111-120). SEIEM.

Anglada, M. L. y Cañadas, M. C. (2021). Correspondencia y generalización de estudiantes de último curso de Educación Infantil. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 125-132). SEIEM.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Jonsen Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 135-142.

Brizuela, B., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. y Gardiner, A. (2015). Children's use of variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17,* 34-63.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6*(2), 1-13.

Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en didáctica de la matemática: Escuela Francesa* (pp. 118-144). Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio* [Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada]. Universidad de los Andes.

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2021). Funciones f(x) = 3x y f(x) = 5x en primero de primaria: estrategias y representaciones utilizadas por alumnos. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 269-277). SEIEM.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). Metodología de la investigación, 5° edición. McGraw Hill.

Janvier, C. (Ed.) (1987). Problems of representations in the teaching and learning of mathematics. Lawrence Erlbaum Associated.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022a). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 56*, 24386-24504.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022b). Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *BOE, 28*, 1-33.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(3), 59-78.

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, *33*, 153-180.

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). SEIEM.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Ed.). *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Horsori.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Ureña, J. (2017). *Manifestación de niveles de generalización en estudiantes de primaria durante la resolución de una tarea que involucra relaciones funcionales* [Trabajo fin de máster]. Universidad de Granada.

CREENCIAS E IDEAS DE LOS FUTUROS MAESTROS SOBRE EL USO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS COMO RECURSO DIDÁCTICO

Pre-service teachers' beliefs and ideas about the use of History of Mathematics as a didactic resource

Fuertes-Prieto, M. A.[a], Santágueda-Villanueva, M. [b] y Lorenzo-Valentín, G.[b]

[a] Universidad de Salamanca, [b] Universitat Jaume I

Resumen

Con el fin de conocer cuáles son las actitudes, conocimientos y creencias de los futuros maestros y maestras sobre el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico, se ha llevado a cabo un estudio entre 146 estudiantes de 2º y 3º del Grado en Maestro/a de Educación Primaria en las universidades Jaume I y Salamanca, recopilando también información sobre su formación inicial, sus calificaciones en matemáticas y sus conocimientos de Historia de las Matemáticas.

Los resultados muestran que la mayoría de los futuros docentes son proclives a utilizar la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico y son conscientes de sus ventajas. Pero la mayoría no sabe cómo integrarlo en sus futuras clases y consideran necesario recibir más formación sobre ello. Estos resultados son, en general, independientes de sus estudios previos, de sus conocimientos sobre Historia de las Matemáticas y de sus resultados en matemáticas.

Palabras clave: *Didáctica, creencias, historia, formación de maestros.*

Abstract

In order to know the attitudes, knowledge and beliefs of future teachers about the use of the History of Mathematics as a didactic resource are, a study was carried out among 146 students in the 2nd and 3rd years of the Bachelor's Degree in Primary School in two Spanish universities, Jaume I and Salamanca, collecting information on their initial training, their usual grades in mathematics and their knowledge of the History of Mathematics.

The results show that most of the future teachers are inclined to use the History of Mathematics as a teaching resource and are aware of its advantages. But most of them do not know how to integrate it into their future classes and consider it necessary to receive more training on it. These results are, in general, independent of their previous studies, their knowledge of the History of Mathematics and their results in mathematics

Keywords: *Didactics, beliefs, history, teacher training.*

INTRODUCCIÓN

Estudios previos han señalado la importancia y las ventajas que la Historia de las Matemáticas puede tener como recurso didáctico (González Urbaneja, 1991; Vázquez, 2000, Lupiáñez, 2002) no solo para enseñar conceptos matemáticos, sino también para demostrar que el conocimiento matemático forma parte de nuestra cultura (Maz, 1999; Gónzález Urbaneja, 2004). Entre las ventajas de incorporar la Historia de las Matemáticas tanto en la escuela primaria como en la secundaria está el aumento de motivación del alumnado y de las actitudes favorables hacia las matemáticas (Fauvel, 1991). La Histo-

Fuertes-Prieto, M. A., Santágueda-Villanueva, M., Lorenzo-Valentín, G. (2022). Creencias e ideas de los futuros maestros sobre el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 277-284). SEIEM.

ria de las Matemáticas sirve para reflexionar sobre aspectos cognitivos y educativos, permitiendo también trabajar las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas y su enseñanza, promoviendo flexibilidad y apertura mental (Furinghetti, 2000).

Las ventajas de incorporar la Historia de las Matemáticas en la escuela primaria y secundaria en los currículos escolares han sido ampliamente discutidas por autores como Fasanelli et al. (2000). Pero, pese a las orientaciones metodológicas propuestas por algunos autores (Gómez, 2003; Jankvist, 2009; Puig 2019) y los resultados positivos de algunas intervenciones realizadas (p. ej., Santágueda-Villanueva, y Lorenzo-Valentín, 2019; Mac an Bhaird, 2009; Furinghetti 2000; Knoebel et al. 2007), el papel que puede jugar la Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática y cómo integrarla en la formación docente sigue siendo una pregunta abierta (Clark et al., 2018, Fauvel y van Maanen, 2000; Puig, 2019; Schubring, 2019).

Flores (1998) considera que la conducta cognitiva del profesor está guiada por el sistema profesional de creencias y valores que le confieren sentido. Las creencias tienen un poderoso impacto en la enseñanza a través de los procesos de selección y énfasis en los contenidos, estilos de enseñanza y modelos de aprendizaje (Ernest, 1989; Gil Cuadras, 2000). Por ello, teniendo en cuenta que las actitudes y creencias de los futuros docentes tienen gran relevancia a la hora de determinar la formación del profesorado y su futuro comportamiento como docentes (Valcke et al., 2010), teniendo un papel destacado en las teorías sobre la formación de la identidad profesional de los docentes (Beijaard et al., 2004), en el presente trabajo se ha buscado cuáles son los conocimientos y creencias de docentes en formación. Ya que como afirman Clark y Peterson (1990) y Gil Cuadras (2000) hay que ayudar al profesorado a describir el marco de referencia constituido por sus concepciones y creencias, dado el carácter inconsciente e impreciso de estas, para ir formando profesorado cada vez más reflexivo y racional. En el caso concreto de las matemáticas, modelos como el MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018) sitúan las creencias como elementos centrales que permean y definen la organización y el uso del conocimiento, señalando que es necesaria su comprensión para explorar dicho conocimiento. Las creencias son una componente que permite al investigador considerar la relación entre las concepciones sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje, y el propio conocimiento del profesor (Carrillo et al., 2014), influyendo significativamente en la toma de decisiones respecto de las intenciones curriculares (Pascual et al, 2020).

Existen diversos estudios sobre las creencias que tiene el profesorado en formación sobre el uso de la historia. Como ejemplo, en el estudio de Villalon-Galvez, el al. (2019), en el que se estudian las creencias de los futuros docentes de historia de secundaria, se observa que sus creencias están relacionadas con su experiencia escolar y que sus referentes son sus antiguos profesores. También hacen referencia a que es necesario saber del pasado, para comprender el presente y reflexionar sobre el futuro.

Este tema también es estudiado en la actualidad en el campo de la Educación Matemática, encontramos el trabajo de Dalcín et al. (2017) en Montevideo donde realizan un estudio sobre las creencias del profesorado en formación de matemáticas y sobre sus creencias acerca de cómo se originó el conocimiento matemático, las matemáticas y sus características, llegando a resultados inconsistentes. En este estudio se observó que la utilización de la historia de la matemática en secuencias de enseñanza en la formación de profesores se perfila como una herramienta útil para favorecer visiones dinámicas de la matemática y para que los futuros docentes extraigan algunos elementos útiles para las prácticas de enseñanza, como pueden ser aquellos que favorecen la comprensión de las ideas: en este caso, el uso de diversos registros de representación o la posibilidad de utilizar aproximaciones a los conceptos en lugar de presentar los conceptos en su forma más depurada, tal como los conocemos hoy en día.

Desde este punto de vista, el presente estudio tiene como fin conocer cuáles son las actitudes y creencias que tienen los maestros en formación sobre el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico, buscando si existe una relación entre dichas creencias y la formación inicial que han cursado antes de acceder a la universidad, las notas que han obtenido en la asignatura de matemáticas en su etapa escolar y el grado de conocimientos relacionados con la Historia de las Matemáticas.

METODOLOGÍA

Participantes y contexto: Se ha realizado un estudio transversal (cross-sectional) con una muestra formada por 146 alumnos y alumnas, de segundo y tercer curso de del Grado en Maestro o Maestra en Educación Primaria de las Universidad Jaume I y la Universidad de Salamanca.

Instrumento de recogida de datos: Tras una primera fase de revisión bibliográfica en busca de estudios similares, se elaboró un cuestionario a partir del desarrollado por Alpaslan et al. (2014) para maestros en formación. Las preguntas utilizadas por Alpaslan fueron traducidas y únicamente se adaptaron aquellas que hacían referencia a contextos nacionales, como la formación previa antes de entrar en la universidad, o nombrar algún matemático español relevante. El formulario consta de tres partes diferenciadas: la primera parte estaba dedicada a recoger datos referentes a variables sociodemográficas (universidad en la que cursa los estudios, curso y género), formación inicial (antes de la universidad cursaste…) y nivel de matemáticas previo a entrar en la universidad (¿Qué notas solías sacar en la asignatura de matemáticas en Secundaria? y ¿Qué notas solías sacar en la asignatura de matemáticas en Bachillerato/FP?); otra parte estaba centrada en las actitudes y creencias sobre el uso de la Historia de la Matemática como recurso didáctico (formada por 35 cuestiones que se podrían contestar en una escala de tipo Likert modificada, que pueden consultarse en la figura 1) con cinco niveles –totalmente en desacuerdo, parcialmente en desacuerdo, sin opinión/con incertidumbre, parcialmente de acuerdo, totalmente en desacuerdo y la tercera parte estaba dedicada a medir el grado de conocimientos relativos a la Historia de las Matemáticas (10 cuestiones, entre las que se incluyeron tanto de respuesta múltiple como de respuesta abierta). Algunas de estas preguntas incluían el conocer a matemáticos relevantes como Fibonacci, Pascal o Pitágoras a partir del enunciado de sus aportaciones a la matemática, decir el nombre de algún matemático español relevante o reconocer los sistemas de numeración romano o babilonio.

El cuestionario se implementó en la aplicación Forms de Google, siendo accesible mediante un teléfono móvil, realizando una captura de un código QR, o mediante un ordenador, accediendo al enlace facilitado por los investigadores. Fue contestado de manera individual, sin límite de tiempo, durante las primeras jornadas del segundo semestre del curso 2021/2022.

Análisis: Los datos fueron descargados primeramente a Excel y posteriormente importados a SPSS versión 25, donde fueron analizados. Las preguntas dedicadas a medir el grado de conocimientos propios de la Historia de las Matemáticas fueron corregidas y evaluadas, asignando un uno a cada respuesta correcta y un cero a cada respuesta incorrecta. Con la suma de estas puntuaciones se constituyó una nueva variable, a la que nos referiremos en adelante como el grado de conocimientos de Historia de la Matemática.

Se ha realizado un análisis de medias y correlaciones entre las respuestas a las diversas preguntas del formulario y las variables que recogían la nota de matemáticas antes de entrar en la universidad y el grado de conocimientos relativos a la Historia de las matemáticas, seguido de un análisis de varianza, ANOVA, con el fin de determinar si existen diferencias estadísticamente significativas entre los diferentes grupos.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

La muestra ha sido de 146 alumnos y alumnas, de segundo y tercer curso de del Grado en Maestro o Maestra en Educación Primaria de la Universidad Jaume I y la Universidad de Salamanca. El presente estudio hace referencia a los datos agrupados, no habiendo diferencias significativas entre ambas universidades.

En la figura 1 se recogen las respuestas a algunas de las preguntas incluidas en el formulario, las correspondientes al bloque centrado en las actitudes y creencias sobre el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico, con las respuestas dadas en una escala tipo Likert modificada.

Entre las respuestas recogidas en la figura 1, se puede destacar el hecho de que la mayoría de los y las futuras maestras son conscientes de las posibles ventajas que podría tener la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico: la mayoría se muestran total o parcialmente de acuerdo con afirmaciones tales como que el uso de la historia de las matemáticas en la educación matemática es una contribución positiva para el aprendizaje de las matemáticas, al proporcionar un punto de vista y un modo de presentación diferentes (71%); mejora la motivación de los y las estudiantes por el aprendizaje de las matemáticas (80%); enriquece el repertorio profesional de los y las maestras en formación (69%); ayuda al estudiantado a comprender las matemáticas en profundidad mediante la introducción de enfoques alternativos y ejemplos variados (72%); hace que los y las estudiantes se den cuenta de que las matemáticas son un producto universal de varias culturas (82%) y muestra una imagen más realista y completa sobre lo que son las matemáticas (77%).

La gran mayoría (85%) considera que los docentes de matemáticas en formación deben tener conocimientos sobre la evolución histórica de los conceptos matemáticos y más del 60% consideran que deberían incluirse en el plan de estudios de Matemáticas de Primaria actividades de aprendizaje basadas en la Historia de las Matemáticas.

Los futuros maestros y maestras reconocen que la Historia de las Matemáticas es una herramienta práctica para la enseñanza de las matemáticas (60%). Pero a su vez reconocen que no saben cómo integrar la Historia de las Matemáticas en los procesos de enseñanza de las matemáticas (65%) y reconocen la necesidad de recibir formación específica sobre ello: agrupando los que responden estar total o parcialmente de acuerdo, el 66% considera que los profesores en formación deben recibir cursos sobre cómo utilizar la Historia de las Matemáticas en la educación matemática, frente al 10% que se muestra en desacuerdo.

Se ha realizado un análisis de correlaciones entre las respuestas a las diversas preguntas del formulario y las variables que recogían la nota de matemáticas antes de entrar en la universidad y entre el grado de conocimientos relativos a la Historia de las Matemáticas, sin aparecer correlaciones destacables; en ningún caso el coeficiente de correlación de Pearson ha sido superior a 0,4. Este resultado indicaría que las respuestas a las diversas preguntas son independientes tanto de los conocimientos que el alumnado tenga sobre la Historia de las Matemáticas, como de las notas que tuvieran antes de acceder a la universidad, e incluso de la opción de bachillerato o FP que cursaran.

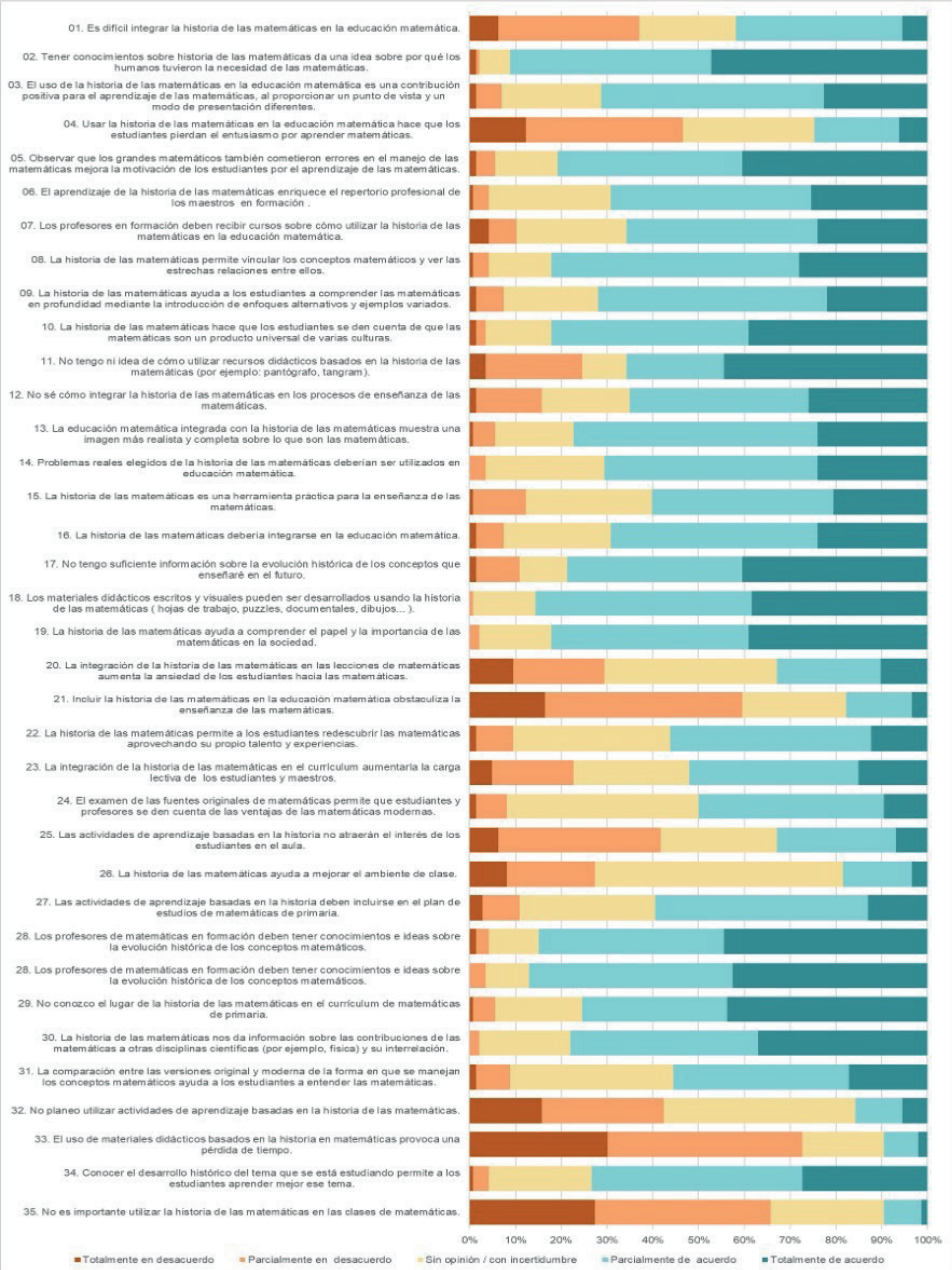


Figura 1. Respuestas al bloque de preguntas sobre uso de la Historia de las Matemática como recurso didáctico. N = 146.

De manera consistente con ello, se ha realizado un análisis de varianza, ANOVA. Cuando se analizan las varianzas de los valores obtenidos en cada una de las cuestiones respecto a los conocimientos relativos a la Historia de las Matemáticas, en casi todos los casos se obtienen valores para el estadístico F cercanos o superiores a 1, con significación (p factor) que varía entre 0,06 y 0,94 lo que indicaría que no hay diferencias significativas y las medias son similares en todos los grupos. La única pregunta en la que aparece un factor ligeramente superior al que se suele considerar para hablar de diferencias significativas ($p<0{,}05$) es en la pregunta 17 (No tengo suficiente información sobre la evolución histórica de los conceptos que enseñaré en el futuro), en el que el p factor es de 0,03. De manera contraria a lo que cabría esperar, en esa pregunta el alumnado con mayores conocimientos de Historia de las Matemáticas son los que más se muestran de acuerdo con la afirmación de que no tienen suficiente información sobre la evolución histórica de los conceptos que enseñarán en el futuro.

Si realizamos el análisis ANOVA tomando como factor independiente la nota obtenida en matemáticas, de nuevo se observa que no hay diferencias significativas entre grupos, salvo en la pregunta 5 ("Observar que los grandes matemáticos también cometieron errores en el manejo de las matemáticas mejora la motivación de los estudiantes por el aprendizaje de las matemáticas"), en la que se obtiene un valor del p factor de 0,031. En esa pregunta, los y las alumnas con peores notas en matemáticas en su etapa escolar se mostraron más de acuerdo con la afirmación de que "observar que los grandes matemáticos también cometieron errores en el manejo de las matemáticas mejora la motivación de los estudiantes por el aprendizaje de las matemáticas".

El análisis de varianza entre las respuestas a las diversas preguntas y los estudios cursados antes de entrar en la Universidad no ha mostrado diferencias significativas entre grupos.

CONCLUSIONES

Los resultados del presente estudio muestran cómo, pese a ser conscientes de las ventajas que puede tener el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico y considerar que actividades basadas en la Historia de las Matemáticas deberían incluirse en el plan de estudios de Primaria, los maestros y maestras en formación reconocen que no saben cómo integrar la Historia de las Matemáticas en los procesos de enseñanza y manifiestan la necesidad de recibir formación específica sobre ello. Consideramos que esta es la principal conclusión que podemos extraer y responde a parte de nuestro objetivo inicial "conocer cuáles son las actitudes y creencias que tienen los maestros en formación sobre el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico".

A la segunda parte del objetivo planteado, "buscando si existe una relación entre dichas creencias y la formación inicial que han cursado antes de acceder a la Universidad, las notas que han obtenido en la asignatura de matemáticas en su etapa escolar y el grado de conocimientos relacionados con la Historia de las Matemáticas", constatamos que no se han encontrado relaciones relevantes, lo que es coherente con el estudio realizado por Dalcín et al. (2017).

Consideramos que estos resultados deben ser motivo de reflexión entre el profesorado encargado de la formación de los futuros maestros y maestras, con vistas a valorar la integración de la Historia de las Matemáticas en su formación académica, continuando con esa pregunta abierta, tal y como constatan (Clark et al., 2018, Fauvel y van Maanen, 2000; Puig, 2019; Schubring, 2019), y considerando que puede ser necesario ampliar el estudio con una muestra mayor.

Referencias

Alpaslan, M., Işıksal, M. y Haser, Ç. (2014). Pre-service mathematics teachers' knowledge of history of mathematics and their attitudes and beliefs towards using history of mathematics in mathematics education. *Science & Education*, *23*(1), 159-183.

Beijaard, D., Meijer, P. C. y Verloop, N. (2004) Reconsidering research on teacher´s professional identity. *Teaching and Teacher's Education*, *20*, 107-128.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. A. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S. y Tzanakis, C. (2018). *Mathematics, education and history. Towards a harmonious partnership. ICME-13 monographs.* Springer.

Clark, Ch. y Peterson, P. (1990). Procesos de pensamiento de los docentes. En M. Witrock (Ed.), *La investigación de la enseñanza, III: profesores y alumnos*. Paidós

Dalcín, M., Ochoviet, C. y Olav, M. (2017). *Un estudio de las creencias de los estudiantes de profesorado sobre la matemática y sus orígenes: qué puede aportar la historia de la matemática en la formación inicial*. Consejo de Formación en Educación. Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores. Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores, Montevideo.

Ernest, P. (1989) The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: A Model, *Journal of Education for Teaching*, *15*(1), 13-33.

Fasanelli, F. (2000). The political context. En J. Fauvel y J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: An ICMI study*, (pp. 1-38). Kluwer

Fauvel, J. (1991) Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, *11*(2), 3-6.

Fauvel, J., y van Maanen, J. (Eds.) (2000). History in Mathematics Education: The ICMI. Study,*New ICMI Study Series*, *6*, 22-24.

Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matematicas, su enseñanza y aprendizaje. Evolucion durante las practicas de enseñanza*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada] Universidad de Granada.

Furinghetti, F. (2000). The History of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(1), 43-51.

Gil-Cuadras, F. (2000). *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre evaluación en matemáticas. (1ª ed.).* Ed. Universidad de Almería.

Gómez, B. (2003). La investigación Histórica en Didáctica de la Matemática. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 79-85). Universidad de Granada.

González Urbaneja, P. M. (1991). Historia de la matemática: Integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 9(3) 281-9.

González Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma, 45*, 17-28.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*, 235-261.

Knoebel, A., Laubenbacher, R., Lodder, J. y Pengelley, D. (2007). *Mathematical masterpieces – Further chronicles by the explorers*. Springer.

Lupiáñez, J. L. (2002). Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática. *SUMA*, *40*, 59-63

Mac an Bhaird, C. (2009) Introducing the history of mathematics to third level students with weak mathematical backgrounds: a case study. En P. Bidgood, B. Craven, S. Crighton y D. Green (Eds.), *CETL-MSOR Conference 2008* (pp. 63-68). The Maths, Stats & OR Network.

Maz, A. (2019). La historia de las matemáticas en clase ¿por qué? y ¿para qué? En M. I. Berenger, J. M. Cardeñoso y M. Toquero (Eds.) *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad* (pp. 205-209). Sociedad Thales y Departamento de didáctica de la matemática.

Pascual, M. I., Gago, J. F., García, M., Prieto, J. M. M. y Sáez, A. M. (2020). El dominio afectivo y MTSK. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 32-40). Universidad de Huelva.

Puig, L. (2019). Observaciones acerca de la historia de las matemáticas en la matemática educativa. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 117- 130). SEIEM.

Santágueda-Villanueva, M. y Lorenzo-Valentín, G. (2019). Historia de las matemáticas para la formación inicial de maestros. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *2*(2), pp. 19-32

Schubring, G. (2019). "Mathematics is not a stalactite hanging over a stalagmite" (W. Kuyk) – The productive role of teaching. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 131-140). SEIEM.

Vázquez, M. S. (2000). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. *Números-Revista de Didática de las Matemáticas*, 43-44.

Valcke, M., Sang, G., Rots, I. y Hermans, R. (2010). Taking prospective teachers' beliefs into account in teacher education. *International encyclopedia of education* (pp. 622-628). Elsevier.

Villalon-Galvez, G., Zamorano-Vargas, A. y Moraleda-Albornoz, E. (2019). Creencias del profesorado de secundaria básica en formación sobre la enseñanza de la historia en Chile, *15*(3), 244-262.

EL TRATAMIENTO DE LA DERIVADA EN EL PLAN DE ESTUDIOS DE INGENIERÍA COMERCIAL EN CHILE

The treatment of the derivative in the study plan of Commercial Engineering in Chile

Galindo-Illanes, M.[a] y Breda, A.[b]

[a]Universidad San Sebastián, [b]Universitat de Barcelona

Resumen

El objetivo de este trabajo es identificar los significados pretendidos de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. Para ello, por medio de la noción de configuración epistémica del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos, se analizaron ocho programas de asignaturas, de diferentes universidades chilenas, que contemplan la derivada como objeto de enseñanza. Los resultados indican que, si bien la mayor parte de las propuestas curriculares presentan similitudes en la organización de contenidos y en los elementos lingüísticos utilizados para la construcción del objeto derivada, se observan diferencias importantes en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y en los campos de problemas abordados.

Palabras clave: *estudio de la derivada, programas de asignaturas, Ingeniería Comercial.*

Abstract

The objective of this work is to identify the intended meanings of the derivative in the programs of the subjects of the Commercial Engineering careers in Chile. To do this, through the notion of epistemic configuration of the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction, eight subject programs from different Chilean universities were analyzed, which contemplate the derivative as an object of teaching. The results indicate that, although most of the curricular proposals present similarities in the organization of contents and in the linguistic elements used for the construction of the derivative object, important differences are observed in the preponderance of the derivative interpreted as a reason for change. and in the fields of problems addressed.

Keywords: *study of the derivative, subject programs, Commercial Engineering.*

INTRODUCCIÓN

En el año 1924 se inicia la carrera de Administración de Empresas en la Universidad Católica de Chile y en el año 1935 con la creación de la Escuela de Ingeniería Comercial de la Universidad de Chile, nace la carrera de Ingeniería Comercial. Actualmente, aproximadamente 49 universidades entre estatales y privadas imparten la carrera de Ingeniería Comercial en Chile.

La Comisión Nacional de Acreditación de Chile (CNA) define la carrera de Ingeniería Comercial como una profesión universitaria orientada hacia la aplicación de un conjunto de competencias (conocimientos, habilidades y actitudes) que se generan a partir del estudio de las ciencias de la adminis-

Galindo-Illanes, M. y Breda, A. (2022). El tratamiento de la derivada en el plan de estudios de ingeniería comercial en Chile. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 285-293). SEIEM.

tración y de la economía, apoyadas por las tecnologías de la información, los métodos cuantitativos, otras ciencias sociales y las disciplinas que les sean conexas. Se establece que su plan de estudios debe considerar tres áreas de formación, sin perjuicio de la flexibilidad e integración curricular que determine cada unidad, éstas son: formación básica, formación profesional y formación general o complementaria.

Un análisis exploratorio de los planes de estudio de Ingeniería Comercial vigentes en Chile reveló, por un lado, que éstos poseen una estructura según el tipo de asignaturas (obligatorias, optativas y de estudios generales), una inclinación formativa hacia el área administrativo-financiera, con una fuerte orientación cuantitativa y económica (López y Paredes, 2007). Por otro lado, los planes determinan que la mayor cantidad de asignaturas corresponden al área de estudio de Finanzas, Contabilidad y Costos, totalizando un 12,8% y al área de Matemática, Estadística y Econometría, en un total de 12,3%. De esta última, el 7% corresponde a asignaturas del área Matemáticas.

La CNA considera que los programas de las asignaturas de matemáticas deben permitir que el estudiante adquiera los conocimientos necesarios para su desempeño profesional. En los criterios de evaluación contemplados en esta estructura curricular, se requiere que los programas integren actividades teóricas y prácticas, que las asignaturas permitan la adquisición de habilidades y capacidades inherentes a un ingeniero comercial para: trabajar e integrarse eficazmente en equipo, enfrentar los problemas con visión holística y estratégica, liderar, comunicar y motivar eficazmente, seleccionar, integrar y aplicar conocimientos. Esto conlleva al desafío de articular las ciencias básicas y las ciencias de la ingeniería, favoreciendo el desarrollo de las competencias profesionales y la formación matemática del ingeniero (Alvarado et al., 2018).

Las matemáticas son fundamentales para un ingeniero comercial, en particular, el objeto matemático derivada es un tópico complejo del cálculo que conjuga muchos significados asociados: función real, plano cartesiano, pendiente, ecuación de una recta, recta secante, recta tangente, límite de una función real, etc. Por otra parte, posee una representatividad de campos de problemas, diversas representaciones, diversas propiedades, procedimientos y argumentos que transitan constantemente entre un lenguaje descriptivo, geométrico, gráfico, tabular y simbólico, lo que complejiza aún más la comprensión de este objeto matemático por parte de los estudiantes (Fuentealba et al., 2015). La articulación de los componentes en los que estalla esta complejidad está presente en casi todos los marcos teóricos emergentes en el área de la Educación Matemática. En este trabajo se toma como referente teórico el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS, a partir de ahora) (Godino, et al., 2007; Godino et al., 2019). Trabajar los distintos significados de un objeto matemático es un aspecto propuesto en el EOS, donde se plantea analizar la complejidad de los objetos matemáticos por medio de sus pluri significaciones (significados parciales).

La complejidad de la derivada se hace presente en los cursos de Ingeniería Comercial, una vez que puede comprender la derivada como el estudio de la función producto marginal, ingreso total y marginal, entre otras. Además, considerar sus diferentes modos de representación, es un aspecto muy utilizado en el área de microeconomía, lo que ha generado el desarrollo de diversas investigaciones en torno a su aprendizaje y sobre la relación de comprensión entre los conceptos económicos y matemáticos (Butler, et al., 1998; Ballard y Johnson, 2004; Hey, 2005; García, et al., 2006; Ariza y Llinares, 2009). A partir de lo anterior, resulta de interés investigar, ¿cuál es el tratamiento de la derivada en los planes de estudio de la asignatura de cálculo de los cursos de Ingeniería Comercial en Chile? En ese sentido, el objetivo de este trabajo es identificar los significados pretendidos de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile.

MARCO TEÓRICO

Los desarrollos teóricos propuestos por el EOS, explicados recientemente en Godino et al. (2019), tienen como objetivo dar respuesta a algunos problemas generados en el campo de la Educación Matemática. En el EOS, se asume que la actividad matemática es una actividad humana centrada en la resolución de problemas, que tiene lugar en un tiempo-espacio determinado, a través de una secuencia de prácticas que, a menudo, se consideran procesos (de significación, conjeturar, argumentar, etc.). Para ello, el EOS propone las nociones de situación-problema de práctica matemática (secuencia de prácticas) que tiene lugar durante la resolución de estas situaciones problema. Tales secuencias tienen lugar en el tiempo y se suelen considerar, en muchos casos, como procesos. En particular, el uso y/o la emergencia de los objetos primarios de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos), tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (creación de algoritmos y rutinas) y argumentación (aplicando la dualidad proceso-producto). Por otra parte, las dualidades antes descritas, dan lugar a los siguientes procesos: institucionalización–personalización, generalización–particularización, análisis/descomposición– síntesis/reificación, materialización/concreción–idealización/abstracción, expresión/representación–significación.

El EOS también asume el principio de que el conocimiento de un objeto, por parte de un sujeto (ya sea individuo o institución), es el conjunto de funciones semióticas que este sujeto puede establecer en las que el objeto interviene como expresión o contenido. Además, la correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde tal objeto interviene, se interpreta como el "significado de ese objeto" (institucional o personal). Por ejemplo, cuando un sujeto realiza y evalúa una secuencia de prácticas matemáticas, activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en lo que, en términos del EOS, se llama una configuración de objetos primarios (Font, et al., 2013). Para delimitar los significados de un objeto matemático, el EOS propone la herramienta denominada "análisis de sistemas de prácticas" (personales e institucionales) y las configuraciones ontosemióticas involucradas en ellas (Godino, 2014; Godino y Batanero, 1994).

En Font et al. (2013) se analiza la noción de complejidad del objeto matemático (y de la articulación de los componentes de dicha complejidad) en términos de pluralidad de significados. Se trata de una visión pragmatista sobre el significado que se asume en el EOS. Desde un punto de vista pragmatista, el significado de un objeto matemático se entiende como el conjunto de prácticas en la que dicho objeto interviene de una manera determinante (o no). Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevos procedimientos, relacionar el objeto (y, por tanto, definir) de manera diferente, utilizar nuevas representaciones, etc. De esta manera, con el paso del tiempo, aparecen nuevos subconjuntos de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

Para el objeto matemático derivada, Pino-Fan et al. (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve significados parciales (SP): SP1) tangente en la matemática griega; SP2) variación en la edad media; SP3) métodos algebraicos para hallar tangentes; SP4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; SP5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; SP6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; SP7) cálculo de fluxiones; SP8) cálculo de diferencias; y SP9) derivada como límite. En Pino-Fan et al. (2013) se utilizan estas nueve configuraciones para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México (a partir de las configuraciones de objetos primarios activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel). La caracterización de la complejidad de la derivada realizada en Pino-Fan et al. (2011) permite diseñar cuestionarios para caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la derivada (Pino-Fan et al., 2015). El objetivo de este estudio es identificar los significados pretendidos de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile.

METODOLOGÍA

En este apartado se explica el contexto del estudio, los instrumentos de colecta de datos y el análisis de los mismos.

Contexto del estudio e instrumentos de colecta de datos

Participaron de la investigación, de manera anónima, 8 universidades chilenas (3 públicas y 5 privadas) que imparten la carrera de Ingeniería Comercial. Fueron solicitados programas de 30 universidades de diferentes regiones del país, sin embargo, solo ocho de ellas compartieron sus programas de asignatura que incluyen como objeto de enseñanza la derivada. Las universidades participantes están identificadas como UN1, UN2, UN3, UN4, UN5, UN6, UN7 y UN8.

Análisis de los datos

Para realizar el análisis de los programas se considera el modelo teórico conocido como Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2019), el cual considera un modelo epistemológico, cognitivo e instruccional de análisis de la actividad matemática. Para realizar el análisis de contenido de los programas de asignaturas, se utilizó como categorías previas de análisis, la noción de configuración epistémica, que nos ha permitido analizar y describir los objetos primarios que intervienen en las prácticas matemáticas sobre la derivada propuestas en los programas de las asignaturas (Font et al., 2013).

Para ejemplificar cómo se ha realizado el análisis de los programas de las asignaturas que incluyen como objeto de enseñanza la derivada, se ha tenido en cuenta, en cada uno de los programas, la organización de los contenidos de la asignatura correspondiente (a ejemplos, tabla 1) y un posterior análisis de la complejidad de la derivada considerando la configuración de los objetos primarios del EOS (significados parciales, procedimientos, proposiciones, representaciones y campos de problemas). Por ejemplo, la propuesta curricular de UN1 para la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios, tiene como propósito que el estudiante use conceptos y procedimientos de derivación e integración con apoyo de recursos tecnológicos en problemas de tipo analítico del área de la economía y los negocios. A continuación, se presenta la distribución de los contenidos en la tabla 1.

Tabla 1. Organización de los contenidos de la asignatura de Cálculo Aplicado a los Negocios de UN1.

Unidad de aprendizaje 1	**Derivada de una función**
Resultados de aprendizaje	Resuelve problemas de tasas de cambio, marginalidad y optimización aplicando derivadas de primer y segundo orden, en funciones de una variable
Contenidos	La derivada de una función y su interpretación geométrica; Algebra de derivadas; Regla de la Cadena; Derivadas de primer orden; Derivadas de segundo orden; Puntos críticos; Puntos de inflexión; Criterio de primera derivada para extremos relativos; Criterio de la primera derivada para establecer monotonía; Criterio de la segunda derivada para extremos relativos; Criterios de la segunda derivada para establecer concavidades; Trazado de curvas; Optimización de una función; Tasa de cambio y marginalidad.
Unidad de aprendizaje 2	**Integral de una función**
Resultados de aprendizaje	Aplica métodos de integración en la resolución de problemas del mundo de la administración o economía.
Contenidos	Definición de integral indefinida; Propiedades e interpretación geométrica de la integral; Métodos de integración (sustitución simple y por partes); Teorema fundamental del Cálculo; Integral definida; Aplicaciones de la integral a problemas de valores iniciales y excedentes.
Unidad de aprendizaje 3	**Funciones de varias variables**
Resultados de aprendizaje	Aplica derivadas de primer y segundo orden resolviendo problemas de tasas de cambio, marginalidad y optimización con y sin restricciones en funciones de dos variables.
Contenidos	Definición de funciones de varias variables; Dominio y recorrido de funciones de varias variables gráficamente utilizando software matemático; Derivadas parciales de primer y segundo orden; Regla de la Cadena; Optimización de funciones sin restricciones utilizando Hessiana; Optimización algebraica de funciones con una restricción utilizando multiplicadores de Lagrange; Optimización de funciones con dos o más restricciones utilizando multiplicadores de Lagrange y apoyo tecnológico.

De la tabla 1 podemos observar que sólo la unidad 1 considera el estudio de la derivada de una función y que su propósito es que el estudiante resuelva problemas de tasas de cambio, marginalidad y optimización de funciones reales. De acuerdo con los recursos conceptuales declarados se encuentran: definición de la función derivada y su interpretación geométrica, álgebra de derivadas, regla de la cadena, derivadas de primer y segundo orden, trazado de curvas, optimización, tasas de cambio y marginalidad, etc. Los recursos procedimentales involucran el cálculo de derivadas de una función, haciendo uso del álgebra y reglas de derivación, para calcular razón de cambio en problemas de marginalidad y para el esbozo y optimización de funciones. Dentro de las proposiciones consideradas se encuentran, las reglas de derivación, los criterios de primera y segunda derivada para extremos relativos, criterios de concavidad y de monotonía de una función real. En cuanto al lenguaje se observa que se privilegia el lenguaje algebraico (definición de derivada y uso de reglas de derivación) y gráfico (al interpretar geométricamente la derivada y realizar el gráfico de funciones).

Con respecto a los campos de problemas presentes en el programa de la asignatura, se observan (B) problemas sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio, (D) problemas sobre aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones y (E) problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Finalmente, tanto en el programa curricular de las asignaturas como en las asignaturas previas, se observa la ausencia de límite de funciones reales.

Por otro lado, el ejemplo del programa de la asignatura de Cálculo I de la UN2, tiene como propósito que el estudiante aplique los conocimientos del cálculo diferencial en una viable, para la resolución de problemas de optimización aplicados a las ciencias económicas y administrativas. De acuerdo con los recursos conceptuales declarados se encuentran: propiedades de la función derivada, reglas de derivación, razón de cambio y razón de cambio instantánea, extremos relativos, monotonía de funciones reales, optimización de funciones, variaciones relacionadas, etc. Los recursos procedimentales involucran el cálculo de derivadas de una función, haciendo uso de las reglas de derivación, para calcular razón de cambio, ecuación de la recta tangente, gráfica y optimización de funciones. Dentro de las proposiciones consideradas se encuentran, las reglas de derivación, el criterio de la primera derivada para extremos relativos, criterios de concavidad y de monotonía de una función real. En cuanto al lenguaje se observa que se privilegia el lenguaje algebraico (definición de derivada y uso de reglas de derivación) y el gráfico (al resolver problemas geométricos en el plano cartesiano y realizar el gráfico de funciones). Con respecto a los campos de problemas (CP) presentes en el programa de la asignatura, se observan: A) campos de problemas sobre tangentes; B) campos de problema sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio; C) campos de problemas sobre tasas instantáneas de variación; (D) problemas sobre aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones y; E) problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación.

Al comparar los campos de problemas presentes en los programas de asignatura de UN1 y UN2, se observa, por ejemplo, que en el programa de UN1 no se contemplan campos de problemas sobre tangentes, ni campos de problemas sobre tasas instantáneas de variación, aspectos considerados en el programa de la asignatura de Cálculo I de la UN2.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El análisis de los significados de la derivada pretendidos en los 8 programas curriculares de las asignaturas que contemplan la unidad de aprendizaje de la derivada indica que, si bien la mayor parte de las propuestas curriculares presentan similitudes en la organización de contenidos y en los elementos lingüísticos utilizados para la construcción del objeto derivada, se observan diferencias importantes en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y en los campos de problemas abordados. A continuación, se mencionan algunos resultados.

En cuanto a los campos de problemas, todos los programas consideran campos de problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación. Sin embargo, por una parte, UN1 no considera campos de problemas sobre tangentes, es decir, no se contemplan los problemas en los que la pendiente de la recta tangente (significado geométrico de la derivada) tiene un papel relevante en su resolución (Galindo-Illanes y Breda, 2020). Por otra parte, UN6 y UN8 no consideran tasas instantáneas de cambio, UN4 y UN6 no consideran tasas instantáneas de variación, aspectos defendido por Orts et al., (2016) y Santi (2011), y UN7 no aplica la derivada para el cálculo de extremos relativos y trazados de curvas. Lo que nos revela las diferencias en los campos de problemas propuestos en los programas curriculares. A continuación, se presenta la tabla 2 que indica con una x la presencia de los campos de problemas en los programas de las asignaturas, que consideran el objeto derivada para la enseñanza, de las 8 universidades participantes en el estudio.

Tabla 2. Presencia de los campos de problemas en los programas.

CP	UN1	UN2	UN3	UN4	UN5	UN6	UN7	UN8
A	Campos de problemas sobre tangentes							
		x	x	x	x	x	x	x
B	Campos de problema sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio							
	x	x	x	x	x		x	
C	Campos de problemas sobre tasas instantáneas de variación							
		x	x		x		x	x
D	Campos de problemas sobre aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, etc.							
	x	x	x	x	x	x		x
E	Campos de problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación							
	x	x	x	x	x	x	x	x

Relación a los significados parciales (SP), los programas de UN2, UN3, UN4, UN5, UN6, UN7 y UN8, por un lado, introducen el concepto de límite para luego construir la definición de derivada, resultado que corrobora con un de los significados parciales de la derivada presentados en Pino-Fan et al. (2013). Sin embargo, UN1 no considera dentro de su programa teoría de límite, por lo que se construye la derivada utilizando una idea intuitiva de límite (aproximación), a través de su interpretación geométrica, construyendo el significado parcial de la derivada a partir del cálculo de tangentes y subtangentes mediante métodos infinitesimales y algebra. Este resultado, en particular, difiere de lo encontrado en Pino-Fan et al. (2013). Por otro lado, las UN1, UN2, UN3, UN4, UN5, UN7 y UN8, conceden mayor preponderancia a la derivada interpretada como una razón de cambio. Sin embargo, UN6 acentúa su interpretación geométrica como pendiente de una recta tangente. A continuación, se presenta la tabla 3, donde se pueden percibir los significados parciales de la derivada, que asignan las distintas universidades.

Tabla 3. Presencia de los SP de la derivada en los programas.

SP	UN1	UN2	UN3	UN4	UN5	UN6	UN7	UN8
SP1	Trazado de tangentes en la matemática griega							
SP2	Problemas sobre variación en la edad media							
SP3	Cálculo de subtangentes y tangentes con el álgebra							
	x							
SP4	Trazado de tangentes mediante consideraciones cinemáticas							
SP5	Cálculo de Máximos y mínimos mediante la idea intuitiva de límite							
SP6	Cálculo de tangentes y subtangentes mediante métodos infinitesimales							
	x							
SP7	Cálculo de fluxiones							

Tabla 3. (Continuación)

SP8	Cálculo de diferencias						
SP9	Derivada como límite						
	x	x	x	x	x	x	x

Con respecto a las proposiciones y teoremas, la mayor parte de los programas consideran, las reglas de derivación, criterios de la primera y segunda derivada para extremos relativos, criterios de concavidad, criterios de monotonía de una función real y regla de la cadena. En menor medida se observan el teorema de la función implícita, teorema del valor medio, teorema del valor intermedio y el teorema de Rolle.

Como conclusiones, se observa que el estudio realizado proporciona resultados novedosos con relación a algunas características del significado de la derivada presentes en el currículo de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile, permitiendo, de esta forma, ampliar el estudio realizado en Pino-Fan et al. (2013), lo cual se centra en el análisis del significado pretendido de la derivada del currículo de bachillerato de México. Para profundizar este estudio, el próximo paso es analizar el significado pretendido de la derivada en los libros de texto contemplados como referencia obligatoria y complementaria en los ocho planes de estudio de la asignatura de cálculo de los cursos de Ingeniería Comercial en Chile. Este panorama motiva la indagación en cuestiones en torno a la idoneidad epistémica del significado pretendido de la derivada para la formación de futuros ingenieros comerciales. El aspecto valorativo de la idoneidad epistémica de la derivada en los programas es otra línea futura de investigación que se pretende realizar.

Agradecimientos

Este estudio fue realizado en el marco del Proyecto de Investigación en Formación de Profesorado PID2021-127104NB-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias

Alvarado, H., Galindo, M. y Retamal, L. (2018). Evaluación del aprendizaje de la estadística orientada a proyectos en estudiantes de ingeniería. *Revista Educación Matemática*, *30*(3), 151-183. https://doi.org/10.24844/EM3003.07

Ariza, A. y Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económico en estudiantes de bachillerato y universidad. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 121-136. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3667

Ballard, C. y Johnson, M. (2004). Basic math skills and performance in an introductory economics class. *Journal of Economic Education, 35*(1), 3-23. https://doi.org/10.3200/JECE.35.1.3-23

Butler, J., Finegan, T. y Siegfried, J. (1998). Does more calculus improve student learning intermediate micro- and macroeconomic theory? *Journal of applied econometrics*, *13*(2), 185-202. https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1255(199803/04)13:2%3C185::AID-JAE478%3E3.0.CO;2-1

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Fuentealba, C., Badillo, E. y Sánchez-Matamoros, G. (2015). Fases en la tematización del esquema de la derivada: comprensión en alumnos universitarios. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 259-268). SEIEM.

Galindo-Illanes, M. y Breda, A. (2020). Interpretación geométrica de la derivada en estudiantes de ingeniería comercial. *V Encuentro Internacional en Educación Matemática*, 158-163. Universidad del Atlántico.

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñanza cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *9*(1), 85-116.

Godino, J. D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas*. Universidad de Granada. http://www. ugr. es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14. pdf.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in Mathematics education. En *ZDM-. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 37- 42.

Hey, J. (2005). I Teach economics, not algebra and calculus. *Journal of Economic Education*, *36*(3), 292-304. https://doi.org/10.3200/JECE.36.3.292-304

López, S. y Paredes, L. (2007). Análisis exploratorio de los planes de estudio de ingeniería comercial en Chile. *Pensamiento y Gestión*, *23*, 58-71.

Orts, A., Llinares, S. y Boiges, F. (2016). Elementos para una descomposición genética del concepto de recta tangente. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 111-134. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.164

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma, 34*(2), 123-150.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Bolema, 29*(51), 60-89. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04

Santi, A. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2-3), 285-311. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9296-8

PROBLEMAS DE FRACCIONES FORMULADOS POR FUTUROS PROFESORES: ALGUNAS CARACTERÍSTICAS

Preservice teacher posing fraction problems: some characteristics

García-Alonso, I., Bruno, A., Almeida, R., Sosa-Martín, D. y Perdomo-Díaz, J.

Universidad de La Laguna

Resumen

Se presentan los resultados de un estudio sobre formulación de problemas de fracciones por parte de futuros profesores de Educación Primaria. Se analizan 52 problemas formulados por 18 futuros profesores, desde tres perspectivas: 1) plausibilidad del enunciado; 2) demanda cognitiva; y 3) significado y estructura matemática. Los resultados indican que los futuros profesores participantes en este estudio presentan un alto número de problemas plausibles, con demanda cognitiva en la categoría "aplicar", en los que predomina el significado de fracción parte-todo y operador y, mayoritariamente, de estructura aditiva. Los significados de cociente y razón, y la estructura multiplicativa son muy poco frecuentes cuando formulan problemas.

Palabras clave: *formulación de problemas, futuros profesores, fracciones.*

Abstract

This study is about posing fraction problems by future Primary Education teachers. We analyze 52 problems posed by 18 future teachers, from three perspectives: 1) plausibility of the statement; 2) cognitive demand; and 3) meaning and mathematical structure. Results indicate that the future teachers present a high number of plausible problems, in which the meaning of fraction part-whole and operator predominate and, mostly, additive structure. But, the meanings of quotient and reason, and the multiplicative structure are very rare when they pose problems.

Keywords: *problem posing, prospective teachers, fractions.*

INTRODUCCIÓN

En el currículo de Matemáticas de Educación Primaria de la ley educativa LOMLOE que se pone en funcionamiento en España el curso 2022-23 (RD 157/2022), la resolución de problemas se sitúa como uno de los cinco ejes metodológicos fundamentales para la construcción del conocimiento matemático. Se señala que esta actividad pone en marcha otros ejes, como el razonamiento, el pensamiento computacional, la representación de objetos matemáticos y la comunicación. Resolver problemas ofrece la oportunidad de combinar conceptos y procesos matemáticos, y establecer conexiones razonadas entre distintos elementos de la matemática.

Sin duda, una tarea básica del trabajo de los docentes de matemáticas es la elección de problemas adecuados para su alumnado, la cual puede hacerse, bien usando problemas ya existentes en diferentes

García-Alonso, I., Bruno, A., Almeida, R., Sosa-Martín, D. y Perdomo-Díaz, J. (2022). Problemas de fracciones formulados por futuros profesores: algunas características. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 295-304). SEIEM.

materiales curriculares, o bien, creando nuevos problemas o reformulando otros existentes (Crespo, 2003; Olson y Knott, 2013). Esta última actividad se ha denominado *formulación de problemas* (*invención de problemas* o *planteamiento de problemas*).

La *formulación de problemas* también puede utilizarse como una metodología de aula, proponiendo a los propios estudiantes que inventen problemas relacionados con los conceptos que están tratando (Kilpatric et al., 2001). Esto supone para el alumnado activar relaciones asociadas a los contenidos matemáticos (Crespo, 2015), y para el profesorado, valorar cómo de profundo son estas relaciones.

En la década de los 80 del siglo xx, la resolución de problemas fue un campo de una fructífera investigación en educación matemática, produciéndose importantes avances en aspectos heurísticos, afectivos, actitudinales y de metacognición (Schoenfeld, 1992; Stanic y Kilpatrick, 1988). Aunque, la formulación de problemas es un campo con menos resultados, ya existe un amplio cuerpo de investigación a nivel internacional, como se refleja en la revisión de Singer et al. (2015), y también en España (Piñeiro et al., 2019; Torregrosa et al., 2021).

Respecto al profesorado (en activo y en formación) se afirma que una escasa efectividad en la resolución de problemas puede ser un obstáculo para que los implementen con éxito en las aulas (Chapman, 2015) y, equivalentemente, con respecto a la formulación de problemas. Tanto si los futuros docentes van a generar problemas, como si van a fomentar su creación en el aula, es importante que hayan experimentado esta práctica previamente (Singer et al., 2013), sin embargo, se sabe poco acerca de cómo se produce ese proceso de formulación de problemas (Cai y Hwang, 2020). El trabajo que se presenta forma parte de una investigación más amplia cuyo objetivo es evaluar y desarrollar la capacidad de los futuros profesores de Educación Primaria para plantear problemas de fracciones.

MARCO TEÓRICO

Los resultados de investigaciones indican que la formación inicial de los docentes influye en la habilidad para la creación de problemas y, muchas veces, estos no son de una alta calidad matemática (Cai et al., 2015). Se ha encontrado que los futuros docentes hacen mejores propuestas de problemas cuando se les da información previa, por ejemplo, a partir de imágenes o de datos numéricos (Crespo, 2003; Leung y Silver, 1997). También se ha observado que los futuros docentes tienen más éxito cuando reformulan problemas ya dados, que cuando deben plantearlos sin información previa (Stickles, 2011). Estos resultados nos han llevado a plantear en esta investigación una propuesta de estudio en la que los futuros docentes planteen problemas con información previa.

En otra línea, un resultado reiterado en diferentes estudios es que la capacidad para crear problemas, tanto para el profesorado de primaria como de secundaria, está condicionada por su comprensión de los conceptos matemáticos implicados en la tarea (Isik y Kar, 2012; Ma, 1999). Para el caso de las fracciones, objeto de estudio de este trabajo, Ma (1999) realizó una comparación entre profesores de primaria de China y EEUU sobre su capacidad para crear problemas de división de fracciones. Concluyó que los profesores de EEUU fueron incapaces de producir problemas apropiados y mostraron concepciones inadecuadas de las fracciones, mientras que los de China plantearon al menos un problema basado en diferentes conceptos de fracción. En su estudio con futuros profesores de primaria, Xie y Masingila (2017) resaltaron las dificultades, tanto para resolver como para proponer problemas con fracciones que asociaron a una falta de experiencia en la formulación de problemas y con una escasa comprensión de las fracciones y sus operaciones. Por último, Kilic (2015) realizó un estudio con 90 futuros profesores de primaria en el que les propuso crear problemas usando las fracciones ½ y/o ¾, concluyendo que los problemas que inventaron fueron, principalmente, de suma y multiplicación, y en contextos simbólicos, más que contextualizados. Los resultados poco exitosos de los futuros docentes en la formulación de problemas de fracciones pueden atribuirse a que muchas veces presentan mejores habilidades procedimentales (algoritmos y reglas) que de comprensión de los significados y tienen dificultades para usar, de manera efectiva, representaciones adecuadas (Lee, 2017).

Hay diferentes características que influyen en la formulación de los problemas y que se han utilizado para analizar la calidad y riqueza de los mismos (Crespo, 2015; Leavy y Hourigan, 2020; Grundmeier, 2015). En este trabajo nos centramos en los significados que subyacen a los conceptos, la estructura matemática, la demanda cognitiva y la plausibilidad de los problemas creados. En lo que sigue detallamos estos aspectos para el caso de las fracciones.

Para la creación de problemas de fracciones, los futuros docentes deben tener una comprensión conceptual del significado de fracción. Los significados asociados al concepto de fracción son los siguientes (Behr et al., 1993):

- *Parte-todo:* se da en situaciones en las que un todo (continuo o discreto), se divide en partes equivalentes. El todo es designado como la unidad y la fracción expresa la relación que existe entre el número de partes y el número total de partes en que ha sido dividido el todo.
- *Medida:* consiste en utilizar una fracción unitaria repetidamente para averiguar la distancia desde un punto inicial. Por ejemplo, hacer corresponder ¾ con la distancia de 3 veces ¼-unidades desde un punto de partida.
- *Cociente:* se da en fenómenos asociados con la operación de dividir un número natural por otro, estableciendo una acción de reparto.
- *Razón:* las fracciones son un índice comparativo entre dos cantidades o conjuntos de unidades, otorgándose entonces un significado de razón a la fracción.
- *Operador:* la fracción es interpretada como algo que actúa y modifica una situación, es decir, asume un papel transformador realizando una operación de multiplicación o división.

Desde el punto de la estructura matemática, los problemas de fracciones que se plantean pueden hacer referencia: al *concepto* (describir una situación que se exprese mediante una fracción); al *orden* (ordenar fracciones de menor a mayor o viceversa); a lo *aditivo* (suma o resta de fracciones); a lo *multiplicativo* (multiplicar o dividir fracciones); o bien, combinaciones de las estructuras anteriores.

Por su parte, el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por sus siglas en inglés) establece niveles de demanda cognitiva que gradúan la dificultad ante la resolución de las tareas matemáticas (Mullis et al., 2021): *conocer,* identificar conceptos y reproducir procedimientos (por ejemplo, ordenar unas fracciones dadas); *aplicar*, utilizar el conocimiento y los conceptos y determinar la estrategia a seguir para la resolución de problemas (por ejemplo, plantear un problema en un contexto cotidiano); *razonar*, realizar acciones más allá de la resolución de problemas con razonamientos, conclusiones e inferencias sobre el proceso o resultados (por ejemplo, pedir la justificación a la respuesta dada a un problema). Estos niveles de demanda cognitiva se utilizarán en el análisis de los datos de esta investigación.

Por último, para valorar la adecuación de los problemas formulados, tendremos en cuenta la clasificación de Grundmeier (2015), quien distingue entre problema: *no plausible*, si contiene afirmaciones no válidas y no resoluble, aun cuando se añada más información; *plausible sin información suficiente*, si puede resolverse aunque el enunciado sobreentiende (o no hace explícita) parte de la información; *plausible con información suficiente de una o varias tareas matemáticas*, según el número de pasos para su resolución.

OBJETIVO Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo queremos conocer la capacidad de los futuros docentes para crear problemas de fracciones con coherencia matemática, analizando las siguientes características: plausibilidad, demanda cognitiva, significado y estructura matemática. Nos planteamos las siguientes preguntas de investigación respecto a los problemas que plantean:

1. ¿Qué características presentan en relación con la plausibilidad y demanda cognitiva?
2. ¿Qué significados y estructura matemática asocian a las fracciones?

METODOLOGÍA

Presentamos los resultados de un estudio realizado con 18 estudiantes de cuarto curso del Grado en Maestro en Educación Primaria, que respondieron a una prueba escrita con tres actividades en las que debían plantear problemas de fracciones. Los futuros profesores, a punto de finalizar su formación matemática y didáctica del Grado, completaron el cuestionario en una sesión de clase de una hora y media. Por cuestiones de extensión del documento, presentamos los resultados a la primera actividad del cuestionario, cuyo enunciado se indica a continuación.

> ***Actividad 1.*** *Formula tres problemas, de diferente dificultad, en los que aparezcan los números 1/4 y 3/8. Cada uno de estos números puede ser un dato o una solución. Puedes añadir cualquier tipo de información (numérica, de contexto...).*

En total se analizaron 52 respuestas (ya que dos estudiantes sólo escribieron dos enunciados de problemas en vez de tres) y se ha seguido una metodología cualitativa, en la que se han establecido categorías de respuestas.

Para el análisis de los problemas planteados por los futuros maestros se han utilizado las categorías de análisis descritas en la tabla 1. No se analizan los problemas no plausibles o que no están relacionados con fracciones.

Tabla 1. Categorías de análisis de los problemas formulados.

Características	**Categorías**
Plausibilidad	*P-1:* Problema con información insuficiente para su resolución *P-2:* Problema con información suficiente, que plantea una única tarea matemática *P-3:* Problema con información suficiente, que plantea varias tareas matemáticas
Demanda Cognitiva	*Conocer, Aplicar, Razonar*
Significados	*Parte-Todo, Medida, Cociente, Razón, Operador*
Estructura	*Concepto, Orden, Aditiva, Multiplicativa, Combinada (anteriores)*

ANÁLISIS DE RESULTADOS

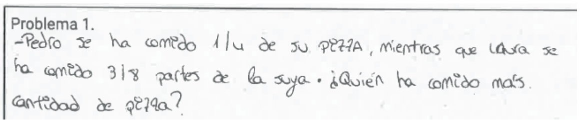
Los 18 futuros profesores plantearon un total de 52 problemas a partir del enunciado de la actividad 1, anteriormente citada. De estos, tres problemas fueron *no plausibles*, dado que contenían errores matemáticos que impedían su resolución; y seis problemas no trabajan las fracciones. Por tanto, las categorías de la tabla 1 se aplicaron a un total de 43 problemas plausibles de fracciones (tabla 2).

Tabla 2. Análisis de la plausibilidad de los problemas planteados por futuros profesores.

Plausibilidad	***Demanda Cognitiva***			***Cantidad (%)***
	Conocer	*Aplicar*	*Razonar*	
P-1 – Información insuficiente	1	14	-	15 (34.9)
P-2 – Tarea matemática única	3	12	-	15 (34.9)
P-3 – Multitarea matemática	1	12	-	13 (30.2)
Total	5	36	-	43

Los resultados muestran que, casi un 35% de los problemas no explicitan u omiten parte de la información necesaria para poder abordar su resolución. Entre ellos encontramos muchos problemas que no ponen de manifiesto en su enunciado que las fracciones utilizadas representan partes de una misma cantidad o figura. Un ejemplo de esto lo encontramos en la figura 1, donde el problema clasificado como P-1, no explicita que ambas fracciones provienen de pizzas iguales, dato que resulta fundamental en el trabajo con ellas. El resto de problemas propuestos sí presentaba información suficiente para su resolución. La principal diferencia entre estos estaba en el número de tareas matemáticas necesarias para resolverlos. Los resultados muestran que hubo, aproximadamente, el mismo porcentaje de problemas que involucran una sola tarea matemática (34.9%) o más de una (30.2%). Un ejemplo de problema clasificado como P-3, puede verse en la figura 2, donde se muestra un enunciado que incluye dos preguntas con tareas diferentes. En la primera pregunta se debe buscar la parte de un total y en la segunda, una vez conocida la parte, se pide averiguar el total.

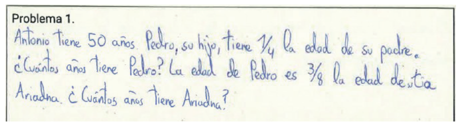
Cuando pasamos a estudiar la demanda cognitiva de los problemas planteados (tabla 2) observamos que mayoritariamente son de la categoría *aplicar* (88.4%), y ninguno de los problemas está en la categoría *razonar*, cuya demanda cognitiva es más avanzada. Cabe destacar también que los problemas de demanda cognitiva *aplicar* se reparten de forma equilibrada entre las distintas categorías de plausibilidad.



Problema 1.
-Pedro se ha comido 1/4 de su pizza, mientras que Laura se ha comido 3/8 partes de la suya. ¿Quién ha comido más cantidad de pizza?

Pedro se ha comido ¼ de su pizza, mientras que Laura ha comido 3/8 de la suya. ¿Quién ha comido más cantidad de pizza?

Figura 1. P-1 (Alumno-215). Demanda: *aplicar*.



Problema 1.
Antonio tiene 50 años. Pedro, su hijo, tiene 1/4 la edad de su padre. ¿Cuántos años tiene Pedro? La edad de Pedro es 3/8 la edad de su tía Ariadna. ¿Cuántos años tiene Ariadna?

Antonio tiene 50 años. Pedro, su hijo, tiene ¼ la edad de su padre. ¿Cuántos años tiene Pedro? La edad de Pedro es 3/8 la edad de su tía Amalia. ¿Cuántos años tiene Amalia?

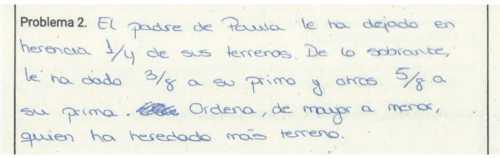
Figura 2. P-3 (Alumno-210) Demanda: *aplicar*.

En cuanto al análisis del significado que presenta la fracción en el problema planteado (tabla 3) encontramos que en la mayor parte de los enunciados utilizan los significados *parte-todo* (34.9%) y *operador* (41.9%). Mientras que, son muy escasos los ejemplos de problemas con el significado de *medida, cociente*, de *razón* o combinaciones de varios significados (*Otro*). Además, en el significado *parte-todo* observamos que la mayoría de dichos problemas sobreentienden u omiten parte de la información necesaria cuando trabajan con fracciones (P-1). Frecuentemente no indican que los tamaños de las partes son iguales. Mientras que, en los problemas que se resuelven con más de una tarea matemática, el significado que más aparece es el de *operador*.

Tabla 3. Significado de la fracción en los problemas planteados por futuros profesores.

Significados	**Plausibilidad**			**Demanda Cognitiva**		**Cantidad (%)**
	P-1	*P-2*	*P-3*	*Conocer*	*Aplicar*	
Parte-todo	9	5	1	1	14	15 (34.9)
Medida	-	-	3	-	3	3 (7)
Cociente	1	1	-	1	1	2 (4.6)
Razón	-	1	-	-	1	1 (2.3)
Operador	5	6	7	-	18	18 (41.9)
Otro	-	2	2	3	1	4 (9.3)
Cantidad %	15 34.9	15 34.9	13 30.2	5 11.6	38 88.4	43

A modo de ejemplo, el problema de la figura 3 presenta un problema con los significados de *parte-todo* y *operador*. Además, su resolución requiere más de una tarea matemática (P-3): calcular lo sobrante y ordenar las fracciones.


Problema 2. El padre de Paula le ha dejado en herencia 1/4 de sus terrenos. De lo sobrante, le ha dado 3/8 a su primo y otros 5/8 a su prima. Ordena, de mayor a menor, quien ha heredado más terreno.

El padre de Paula le ha dejado en herencia ¼ de sus terrenos. De lo sobrante, le ha dado 3/8 a su primo y otros 5/8 a su prima. Ordena, de mayor a menor, quién ha heredado más terreno.

Figura 3. P-3, tres tareas matemáticas (Alumno-217). Significado: *parte-todo* y *operador*. Estructuras: concepto, orden y aditiva. Demanda: *Aplicar*.

En la tabla 3, se observa que los problemas con demanda cognitiva *aplicar* se reparten de forma semejante entre el significado *parte-todo* y *operador*.

Atendiendo a la estructura utilizada en los problemas (tabla 4), observamos que *orden, aditiva* y la combinación de varias estructuras son las más frecuentes. En la figura 3 se presenta un problema que posee tres estructuras en su configuración: *concepto, orden y aditiva*. Es importante destacar que son muy pocos los problemas que utilizan la estructura *multiplicativa* de las fracciones o combinaciones de esta estructura con otras.

Observamos también que, en aquellos problemas en los que se requieren varias tareas matemáticas (P-3), predomina el uso de varias estructuras (*combinada*), siendo *concepto* y *aditiva* la combinación más frecuente (6 problemas).

Tabla 4. Clasificación según la estructura de los problemas planteados por futuros profesores.

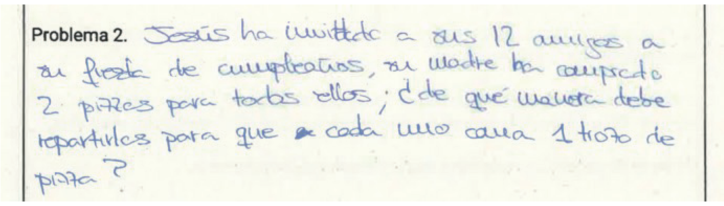
Estructura	**Plausibilidad**			**Demanda Cognitiva**		**Cantidad (%)**
	P-1	*P-2*	*P-3*	*Conocer*	*Aplicar*	
Concepto	2	5	1	2	6	8 (18.6)
Orden	5	4	1	2	8	10 (23.3)
Aditiva	6	6	2	-	14	14 (32.5)
Multiplicativa	-	-	1	-	1	1 (2.3)
Combinada	2	-	8	-	10	10 (23.3)
	15	15	13	4	39	43

Finalmente, hemos contrastado los resultados sobre el significado de fracción con la estructura matemática del problema (tabla 5). Este análisis nos muestra que los problemas con significado de *cociente* o *razón* están presentes, exclusivamente, en problemas de estructura *concepto*, en los que no se requieren operaciones para llegar a su solución.

Tabla 5. Estructura frente a significado de las fracciones.

Estructura	Significado						Cantidad (%)
	Parte-Todo	*Medida*	*Cociente*	*Razón*	*Operador*	*Otro*	
Concepto	1	-	2	1	4	-	8 (18.6)
Orden	5	-	-	-	3	2	10 (23.3)
Aditiva	9	-	-	-	5	-	14 (32.5)
Multiplicativa	-	-	-	-	-	1	1 (2.3)
Combinada	-	3	-	-	6	1	10 (23.3)
	15 (34.9)	3 (7)	2 (4.6)	1 (2.3)	18 (41.9)	4 (9.3)	43

En la figura 4, el problema formulado es de estructura concepto y significado razón. Esto es así porque para resolver el problema el estudiante deberá aplicar el significado de la fracción para realizar el reparto, pero el significado que se presenta en este problema es la comparación entre dos conjuntos (pizza y amigos) y, por tanto, debe conocer el significado de razón.


Problema 2. Jesús ha invitado a sus 12 amigos a su fiesta de cumpleaños, su madre ha comprado 2 pizzas para todos ellos; ¿de qué manera debe repartirlos para que cada uno coma 1 trozo de pizza?

Jesús ha invitado a sus 12 amigos a su fiesta de cumpleaños, su madre ha comprado 2 pizzas para todos ellos, ¿de qué manera debe repartirlas para que cada uno coma 1 trozo de pizza?

Figura 4. Concepto-razón (A-207).

Aunque no ha sido objeto del análisis realizado, se observó que el contexto más común cuando formulan problemas se relaciona con pizzas, tartas o quesos, seguido de contextos relacionados con medidas de superficie, tiempo, peso o longitud. Lo que sugiere cierta preferencia por situaciones que guían a los estudiantes a la utilización de figuras geométricas continuas y circulares.

CONCLUSIONES

Plantear problemas pone de manifiesto qué comprenden y qué saben los futuros docentes (Xie y Masingila, 2017). En este trabajo hemos presentado el análisis de los problemas formulados por estudiantes del grado en Maestro en Educación Primaria, al término de sus estudios, en una tarea donde construyen tres problemas utilizando dos fracciones dadas.

La mayoría de los problemas analizados han sido plausibles, aunque, uno de cada tres problemas sobreentiende u omite parte de la información (por ejemplo, no indican que las partes son iguales). Los futuros docentes construyen problemas con demanda cognitiva *aplicar*, pero no formulan problemas de mayor demanda (*razonar*) en los que se fomente una reflexión sobre el proceso de resolución o sobre distintas soluciones del problema, es decir, los futuros docentes formulan problemas que no van más allá de la resolución de una operación, con o sin contexto. En relación con los significados de fracción, los futuros maestros formulan con frecuencia problemas con el significado *parte-todo* y *operador* y, escasamente, utilizan al significado de *medida*, coincidiendo con los resultados de Kilic (2015). Llama la atención que entre los problemas planteados sólo hay un problema de estructura *multiplicativa*. Algunas de las categorías ausentes, como son los significados de *cociente o razón*, o la estructura *multiplicativa*, señalan la dirección a la que puede orientarse una formación sobre formulación de problemas de fracciones, que pretenda mayor calidad matemática.

Se sabe que comprender las fracciones como *operador* mejora la comprensión de la estructura *multiplicativa* (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007), sin embargo, los resultados de este estudio muestran que la estructura *multiplicativa* no se ha utilizado en relación con ninguno de los significados.

La actividad de plantear problemas no es frecuente en la enseñanza matemática. Por tanto, será necesario promover situaciones formativas entre los futuros docentes para que desarrollen estas habilidades, y adquieran seguridad al implementarla con sus estudiantes (Ellerton, 2013). Este trabajo ha servido para identificar aspectos a desarrollar en la formación dirigida a la formulación de problemas con fracciones.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto ProID2021010018, del Gobierno de Canarias, cofinanciado por el Programa Operativo FEDER Canarias 2014-2020.

Referencias

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis -emphasis on the operator construct. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). Lawrence Erlbaum Associates.

Cai, J. y Hwang, S. (2020). Learning to teach mathematics through problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *102*, 1-8.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. y Silber, S. (2015). Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. En F.M. Singer, N. Ellerton y J. Cai. (Eds.) *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice* (pp. 3-34). Springer.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT: International Journal on Maht, Science and Technology Education, 3*(1), 10-36.

Charalambous, C. y Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 293-316.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 243-270.

Crespo, S. (2015). A collection of problem-posing experiences for prospective mathematics teachers that make a difference. En F.M. Singer, N. Ellerton y J. Cai. (Eds.), *Mathematical problem posing. From research to effective practice* (pp. 493-511). Springer.

Ellerton, N. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 87-101.

Grundmeier, T. A. (2015). Developing the problem-posing abilities of prospective elementary and middle school teachers. En F. M. Singer et al. (Eds), *Mathematical problem posing* (pp. 411-431). Springer.

Isik, C. y Kar, T. (2012). An error analysis in division problems in fractions posed by pre-service elementary mathematics teachers. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *12*(3), 2303-2309.

Kilic, C. (2015). Analyzing pre-service primary teachers' fraction knowledge structures through problem posing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(6), 1603-1619.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* National Academy Press.

Leavy, A. y Hourigan, M. (2020). Posing mathematically worthwhile problems: Developing the problem-posing skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*, 341-361.

Lee, M. Y. (2017). Pre-service teachers' flexibility with referent units in solving a fraction division problem. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(3), 327-348.

Leung, S. y Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *9*(1), 5-24.

Ma, L. (1999). *Knnowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Erlbaum.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O. y von Davier, M. (2021). TIMSS 2023 Assessment Frameworks. En I. V. S. Mullis, M. O. Martin y M. von Davier. (Eds.), *TIMSS 2023 Assessment Frameworks*. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study.

Olson, J. C. y Knott, L. (2013). When a problem is more than a teacher's question. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 27-36.

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Conocimiento sobre los estudiantes como resolutores de problemas manifestado por futuros profesores de Educación Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 483-492). SEIEM.

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, Nº 52*, 1-109.

Singer, F. M., Ellerton, N. y Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, *83*, 1-7.

Singer, F. M., Ellerton, N. y Cai, J. (Eds.) (2015). *Mathematical problem posing. From research to effective practice.* Springer.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). Macmillan.

Stanic, G. M. A. y Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. En R. I. Charles y E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving.* (1-22). NCTM.

Stickles, P. R. (2011). An analysis of secondary and middle school teachers' mathematical problem posing. *Investigations in Mathematics Learning, 3* (2), 1-34.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2021). Resolución e invención de problemas: la estrategia de resolución con relación al problema inventado. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 595 - 602). SEIEM.

Xie, J. y Masingila, J. O. (2017). Examining interactions between problem posing and problem solving with prospective primary teachers: A case of using fractions. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 101-118.

EL IMPACTO DE LOS ESTUDIOS MUSICALES EN LA COMPETENCIA MATEMÁTICA. UN ESTUDIO PRELIMINAR

The impact of musical training in mathematical competence. Preliminary study

García-García, J. y Nortes, R.

Universidad de Murcia

Resumen

Diversos estudios analizan la relación entre formación musical y rendimiento académico en matemáticas obteniendo resultados contradictorios, o con limitaciones que impiden sacar conclusiones. Para estudiar el impacto de los estudios musicales en la competencia matemática se han analizado los resultados de 269 alumnos de 3.º de secundaria, de ellos 62 combinan estudios obligatorios con enseñanzas musicales en un programa especial de horarios integrados. Los resultados indican diferencias estadísticamente significativas en el rendimiento matemático entre alumnos músicos y no-músicos. La correlación entre rendimiento y nivel socioeconómico es positiva pero baja (r = 0,267) lo que no justifica las diferencias. También se encuentran diferencias en su nivel de ansiedad y actitud hacia las matemáticas.

Palabras clave: *ansiedad y actitud hacia las matemáticas, estudios musicales, rendimiento en matemáticas.*

Abstract

Several studies analyse the relationship between musical training and academic performance in mathematics, obtaining contradictory results, or with limitations that prevent drawing conclusions. To study the impact of music studies on mathematical competence, the results of 269 students in the 3rd year of secondary school have been analysed, 62 of them combine compulsory studies with musical education in a special program of integrated timetables. The results indicate statistically significant differences in mathematical performance between musical and non-musical students. The correlation between performance and socioeconomic level is positive but low (r = 0.267), which does not justify the differences. Differences are also found in their level of anxiety and attitude towards mathematics.

Keywords: *attitude and anxiety towards mathematics, music studies, performance in mathematics.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años diversos autores han investigado acerca de los efectos de los estudios musicales en el rendimiento académico con resultados, en ocasiones, contradictorios.

El presente estudio forma parte de una investigación más amplia en la que se investiga el impacto de los estudios musicales profesionales en la competencia matemática (a partir de ahora CM), analizando también el papel de la creatividad matemática. La primera fase del estudio, que es la que aquí presen-

García-García, J. y Nortes, R. (2022). El impacto de los estudios musicales en la competencia matemática. Un estudio preliminar. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 305-314). SEIEM.

tamos, tiene por objetivo principal observar si los estudiantes que reciben formación musical tienen mejor CM que aquellos que no reciben tal formación. Para este análisis, se hace preciso controlar otros factores que pudieran interferir en la toma de conclusiones, por lo que se han tenido en cuenta variables tales como el nivel socioeconómico y cultural, la cantidad y tipología de actividades extraescolares realizadas, así como la actitud y ansiedad del alumnado hacia las matemáticas. En una segunda fase, aún en proceso, se estudiará el efecto de la creatividad matemática en la hipotética relación entre la formación musical y el rendimiento en matemáticas, así como la propia relación entre creatividad matemática y rendimiento en matemáticas.

MARCO TEÓRICO

Álvaro-Mora y Serrano-Rosa (2019) analizaron 34 estudios sobre la influencia de la formación musical en el rendimiento académico, agrupándolos en tres áreas de desarrollo: el rendimiento académico, la cognición y la neuroanatomía. Las relacionadas con el rendimiento académico sugieren que la formación musical fomenta la excelencia académica obteniendo puntuaciones académicas más altas. Sin embargo, el estudio de Costa-Giomi (1999) lo contradice.

Entre las distintas disciplinas, despierta especial interés la relación que puede tener el aprendizaje musical con el rendimiento en matemáticas debido al especial vínculo entra ambas áreas. Música y matemáticas formaban parte del quadrivium pitagórico e importantes conceptos musicales, tales como el sistema de afinación, las escalas musicales o el ritmo, se basan en términos matemáticos. La existencia de estas relaciones entre música y matemáticas hace interesante observar la relación entre los estudios musicales y el rendimiento en la CM.

Nagy y Malone (2020), Mato-Vázquez et al. (2019), Azaryahu et al. (2019) encuentran diferencias significativas en el rendimiento matemático al integrarlo con actividades musicales. Tai et al. (2018) encuentran relación entre el tiempo de formación musical y el logro académico en matemáticas, y Vert-Alcover (2017) encuentra correlación entre la aptitud musical y la numérica. Sin embargo, Yang et al. (2014), en un estudio longitudinal, no observan tal relación y aseveran que la relación formación musical - destrezas matemáticas necesita ser más evaluada.

Los estudios previos a este proyecto son bastante diversos en cuanto a la edad de los participantes, el tipo de entrenamiento musical y la duración del mismo. La mayoría se centran en la etapa Infantil y Primaria, sólo unos pocos (Gouzouasis et al., 2007, citados en Álvaro-Mora y Serrano-Rosa, 2019; Hallam y Rogers, 2016; Helmrich, 2010; Southgate y Roscigno, 2009;) trabajan con adolescentes. Respecto al tipo de entrenamiento musical, los estudios varían entre unas pocas sesiones musicales a varios años, y desde una formación básica auditiva (seguimiento de ritmos, palmadas, etc.) a la enseñanza completa de un instrumento, ya sea en grupo o individual. De acuerdo con Willis (2016), es necesario un mínimo de 6 meses de formación musical para que se produzcan cambios significantes en la neuroplasticidad cerebral, lo que puede justificar mejoras en el rendimiento, por lo que es interesante analizar los cambios en estudiantes con una formación media-alta.

Sesgos y limitaciones

Tenti-Fanfani (2002) señala que el rendimiento académico no es producto de una causa única, sino que existen diversas variables que inciden en el mismo tales como habilidades, expectativas de logro, rasgos de personalidad, factores genéticos, socioeconómicos, culturales o educativos, entre otras. Todas estas variables limitan los resultados de las distintas investigaciones en las que se trabaja con el rendimiento académico, destacando, entre las que relacionan el rendimiento con la formación musical, las características socioeconómicas-culturales y la motivación.

Algunos autores (Fitzpatrick, 2006; Schellenberg y Weiss, 2013) señalan la importancia del nivel socioeconómico como factor de confusión en la relación entre formación musical y rendimiento. El alumnado procedente de un contexto económico familiar más aventajado tiene mayor posibilidad de recibir formación musical al tener esta, generalmente, un alto coste. Sin embargo, estudios como los de Wetter et al. (2008) que incluyen, en la comparativa formación musical – rendimiento académico, el ingreso familiar como predictor del nivel socioeconómico, no encontraron diferencias significativas entre ambos grupos al mantener los ingresos constantes.

También en relación con el contexto familiar, hay posibles sesgos relativos al acceso a los estudios musicales según el nivel educativo de los padres. Los padres con mayor formación muestran mayor interés en que sus hijos reciban formación complementaria. A eso se le añade que, de acuerdo con Schellenberg (2011), los alumnos con mayores capacidades son más propensos a participar en múltiples actividades extraescolares, y estos alumnos, a su vez, obtienen mejores resultados en cualquier evaluación que se les realice.

La motivación tiene un papel importante, en especial al tratar el rendimiento en matemáticas. Mato y de la Torre (2009) señalan que el aprendizaje de la Matemática puede verse afectado de manera positiva o negativa de acuerdo a cómo el alumno forme sus actitudes frente a ella. De igual forma, Nortes y Nortes (2019) indican que tanto la ansiedad como la actitud hacia las matemáticas juegan un papel fundamental dentro del dominio afectivo y tienen una gran influencia en el rendimiento en matemáticas. De acuerdo con Hallam y MacDonald (2013) tocar un instrumento puede llevar a un aumento de la autoestima, confianza en uno mismo y perseverancia ante las dificultades, lo que a su vez puede conducir a un aumento de la motivación por el aprendizaje en general.

Tras la revisión de la literatura y visto el efecto que diversos factores pueden tener en el rendimiento matemático, este estudio preliminar tiene como objetivo general: analizar qué tipo de alumnos presentan mayor competencia y creatividad matemática (objetivo de la investigación de la que forma parte este estudio preliminar) y si esta tiene relación con la realización de estudios musicales profesionales. Para ello nos planteamos las siguientes cuestiones:

- ¿Qué nivel de CM tienen los alumnos participantes en el estudio? ¿Existen diferencias significativas en el nivel de CM entre los alumnos que realizan estudios musicales y los que no?
- ¿Pueden las características socioeconómicas y culturales del alumnado justificar las posibles diferencias?
- ¿Existe relación entre el tipo de actividad extraescolar realizada, el número de horas dedicadas a ellas y el rendimiento en CM?
- ¿Qué niveles de ansiedad y actitud hacia las matemáticas tienen los alumnos participantes? ¿Existen diferencias en dichos niveles al comparar al alumnado músico y no músico?

METODOLOGÍA

Participantes

Los participantes son 269 alumnos de 3.º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) de cuatro centros públicos de la Región de Murcia, de los que 116 son hombres, 148 son mujeres y 5 no se manifiestan al respecto. De ellos, 62 alumnos participan en un Programa de Horarios Integrados (PHI) destinado a quienes estudian simultáneamente las Enseñanzas Profesionales de Música y la ESO o el Bachillerato.

Se opta por alumnado de ESO con una formación musical mínima de 4 años pues entendemos que en ellos se pueden apreciar mejor los efectos que, de esta formación, surgen a medio-largo plazo, y que realizan sus estudios musicales a través de conservatorios oficiales de música, y en concreto por los que los realizan dentro del PHI, ya que son enseñanzas públicas que en su mayor parte se desarrollan en horario de mañana. De esta forma el bajo coste de estas enseñanzas y la facilidad de adaptación horaria amplían la tipología del alumnado de música y minoran las limitaciones que podrían conllevar la situación socioeconómica y familiar del alumnado.

Instrumentos

Tanto los grupos participantes del programa PHI como en los grupos que no realizan enseñanzas musicales realizan las siguientes pruebas y cuestionarios:

1. *Prueba de diagnóstico de competencia matemática*, ajustada al currículo de 2.º de la ESO de la Región de Murcia. Consta de 10 preguntas incluyendo preguntas abiertas y cerradas.

2. *Test de habilidad creativa matemática en la resolución de problemas*. Adaptación realizada por Zapatera (2019). Consta de 4 juegos-problemas de respuesta abierta. Se puntúa en función de la fluidez, flexibilidad y originalidad de las respuestas.

3. *Cuestionario de Ansiedad ante las Matemáticas de Fennema-Sherman (1976)*, tipo Likert, de 1 a 5, que consta de 12 cuestiones, seis redactadas en positivo y seis en negativo en donde se han puntuado de forma complementaria para que a mayor puntuación mayor ansiedad. Es una de las subescalas de actitudes hacia las matemáticas formada por 108 cuestiones.

4. *Cuestionario de Actitud hacia las Matemáticas de Auzmendi* (1992), tipo Likert de 1 a 5, que consta de 25 cuestiones, quince redactadas en forma positiva y diez en forma negativa en donde se han puntuado de forma complementaria, para que a mayor puntuación mayor actitud. Los 25 ítems se reparten en cinco factores: ansiedad, agrado, utilidad, motivación y confianza.

Además, los participantes han completado un cuestionario de contexto que recopila otras variables a tener en cuenta en el proceso de investigación: género, edad, actividades extraescolares realizadas y datos socioeconómicos. Asimismo, el cuestionario recoge, para los estudiantes de conservatorio, información sobre el instrumento (o familia) del que reciben formación y en qué nivel.

Procedimiento

La prueba de diagnóstico y los cuestionarios se realizaron en el mes de octubre de 2021 mientras que el test de habilidad creativa se pasó en el mes de febrero de 2022, estando a fecha de redacción de este artículo en proceso de vaciado. En el tratamiento estadístico se utilizó SPSS 26.

RESULTADOS

Nivel de competencia matemática y diferencias entre alumnos músicos y no músicos

Los resultados de la prueba de CM, diferenciando entre aquellos que reciben formación musical de los que no la reciben, se aprecian en la tabla 1:

Tabla 1. Media (M) y desviación típica (DT) de los grupos SÍ y NO.

Conservatorio	N	M	DT
SÍ	62	6,496	2,166
NO	207	4,123	2,172

Clasificando estos resultados en los siguientes intervalos: [0, 5) = Suspenso, [5, 6) = Suficiente, [6, 7) = Bien, [7, 9) = Notable y [9, 10] = Sobresaliente. Los porcentajes de alumnos atendiendo a cada dos variables se presentan en la tabla 2:

Tabla 2. Porcentaje de alumnos según intervalos de rendimiento en CM.

	CM				
Conservatorio	*[0,5)*	*[5,6)*	*[6,7)*	*[7,9)*	*[9,10]*
SI	29,03	8,06	12,90	33,87	16,13
NO	62,80	12,56	12,08	11,11	1,45
Total	55,02	11,52	12,27	16,36	4,83

La media aritmética de los alumnos con perfil musical es de 6,496, frente a una media de 4,123 en los alumnos no músicos. La desviación típica para ambos grupos es bastante similar (2,166 frente a 2,172). El porcentaje de alumnos suspensos supera el 62 % en los no-músicos, mientras que en los músicos no llega al 30 %. Realizadas las pruebas de normalidad de Kolmogrov-Smirnov y Shapiro-Wik se rechaza la hipótesis de que la variable CM siga una distribución Normal, por lo que realizamos la U de Mann-Whitney de muestras independientes, cuyo valor es 2885,5 y el valor de p (Sig. asintót. (bilateral)) es 0,000 por lo que se rechaza la hipótesis nula y se concluye que el nivel de CM difiere entre estudiantes de música y no-músicos, con un nivel de significación del 5 %.

Rendimiento académico y características socioeconómicas y culturales

Una de las limitaciones más frecuentes a estos estudios se dirige a las características socioeconómicas del alumnado que recibe formación musical. Generalmente estas enseñanzas tienen un alto coste económico por lo que estudiantes con menor nivel adquisitivo pueden tener dificultades de acceso a ellas. También ocurre en el caso de alumnos cuyos padres tienen un nivel educativo bajo. En base a las respuestas realizadas en el formulario de contexto se ha construido un Índice Socioeconómico y Cultural – ISEC – siguiendo un proceso similar al realizado para las pruebas PISA y de evaluación de competencias en las distintas Comunidades Autónomas. Este índice está formado, a su vez, por tres indicadores: PARED (indicador del nivel educativo de los padres), HISEI (indicador de los ingresos familiares en función de la ocupación laboral de los padres) y HOMEPOS (indicador de posesiones y acceso a medios en el hogar). Cada uno de estos indicadores toma valores comprendidos entre 0 y 20. La tabla 3 compara los valores de estos parámetros distinguiendo entre alumnado músico (SÍ), no músico (NO) y Total.

Tabla 3. Media (M) y desviación típica (DT) de indicadores ISEC en los grupos SÍ, NO y Total.

	ISEC		**PARED**		**HISEI**		**HOMEPOS**	
	M	DT	M	DT	M	DT	M	DT
SÍ	11,96	2,33	16,33	3,11	10,99	3,78	8,63	2,84
NO	9,39	2,87	12,62	4,21	8,81	3,70	6,11	3,10
Total	10,03	2,96	13,62	4,22	9,45	3,90	7,02	2,55

En promedio, se observa que los alumnos músicos provienen de familias con un nivel socioeconómico mejor. Además, tras aplicar la U de Mann-Whitney a la variable ISEC, así como por separado a cada uno de los indicadores, se rechaza en cada caso que la distribución sea la misma entre músicos y no músicos. Sin embargo, al realizar un análisis de correlación entre los resultados de la prueba de CM y su nivel socioeconómico observamos una correlación positiva y significativa, con valor 0,267. La correlación se mantiene positiva al analizar cada uno de los tres indicadores (PARED, r = 0,290; HISEI r = 0,154; HOMEPOS r = 0,183), siendo el nivel educativo de los padres el que tiene mayor peso.

Actividades extraescolares y rendimiento académico

Como limitación a estudios previos, Schellenberg (2011) indica que los alumnos que estudian música tienen mayor capacidad de organización al realizar esta formación como tarea extraescolar. Al preguntar a los participantes sobre su asistencia a otros tipos de actividades extraescolares, un 82,8% afirman sí realizarlas, con un promedio de 4,99 horas semanales y una desviación típica de 3,278. Los tipos de actividades extraescolares realizadas se pueden observar en la tabla 4 (un alumno puede realizar más de un tipo).

Tabla 4. Tipo de actividades extraescolares realizadas y porcentaje.

	N	%
Actividades deportivas	154	57,2
Cursos de Idiomas	62	23
Estudios artísticos	31	11,5
Clases de Repaso	57	21,2
Clases de Ampliación	5	1,9
Ninguna	48	17,8

Al igual que con el alumnado de enseñanzas musicales, se ha analizado si existen diferencias significativas en el rendimiento en matemáticas en los alumnos que realizan otras extraescolares. El alumnado que realiza actividades deportivas extraescolares obtiene mejor puntuación que aquellos que no las realizan, pero la U de Mann-Whitney no nos permite rechazar la hipótesis nula (p = 0,284), por lo que no existe una diferencia estadísticamente significativa. Sin embargo, para los casos de los alumnos que asisten al resto de actividades las distintas pruebas U realizadas sí nos permite concluir que presentan una distribución significativamente distinta a quienes no asisten a dichas actividades (Idiomas, p = 0,002; Estudios artísticos, p = 0,016; Clases de Repaso, p = 0,001). Asimismo, al analizar la correlación entre la CM y el Número de horas extraescolares realizadas, se obtiene un coeficiente de correlación r = 0,078, que es un valor positivo pero muy bajo.

Niveles de Ansiedad y Actitud hacia las Matemáticas

Por otro lado, se ha analizado el nivel de Ansiedad ante las Matemáticas (ANM) y Actitud hacia las Matemáticas (ACT) del alumnado, observando si existen diferencias entre los alumnos que estudian música y aquellos que no lo hacen, y estudiando la relación de estas variables con la variable que mide la CM del alumnado. Los resultados se observan en la tabla 5.

El nivel de ansiedad medio entre el alumnado es de 3,467, valor que, de acuerdo a los intervalos de ansiedad de Pérez-Tyteca (2012) se sitúa en un nivel Alto. La media del alumnado que combina sus enseñanzas obligatorias con la formación musical es de 3,728, ligeramente superior a la de alumnos no músicos con una media de 3,389. Realizado el contraste de hipótesis, se rechaza que el nivel de ansiedad tenga igual distribución entre ambos grupos. Además, al comparar las distintas subescalas de la variable: Ansiedad hacia las matemáticas Global (ANG), Ansiedad hacia la resolución de problemas (ANP) y Ansiedad hacia los Exámenes (ANE), se mantiene la diferencia de distribuciones entre ambos grupos, excepto en la subescala ANE donde no se aprecian diferencias.

Respecto a la variable ACT, el nivel de actitud entre el alumnado es de 3,286, valor que Pérez-Tyteca (2012) sitúa como actitud positiva. Al comparar entre alumnos-músicos y no-músicos la media de los músicos es de 3,529 frente a 3,214 de los no-músicos. La U de Mann-Whitney indica que ambos grupos no siguen la misma distribución. De igual forma, siguen distinta distribución en cada una de las subescalas: Ansiedad hacia la materia (ANT), Agrado de las matemáticas (AGM), Utilidad percibida (UTM) y Motivación (MOT), y únicamente la subescala relativa a la Confianza (COM) al trabajar con matemáticas sigue la misma distribución en ambos grupos.

Tabla 5. Media (M) y desviación típica (DT) de cada escala, diferenciando entre músicos (SÍ) y no músicos (NO), valor p de prueba U y coeficiente de regresión r de Pearson con CM.

		Puntuación		**Prueba U**	**r**
Escala	**Conservatorio**	**M**	**DT**	**p**	
ANM	SÍ	3,737	0,950	0,03	0,427
	NO	3,389	0,846		
ANG	SÍ	3,960	1,006	0,01	0,423
	NO	3,572	0,855		
ANP	SÍ	3,695	1,029	0,014	0,399
	NO	3,364	0,999		
ANE	SÍ	3,333	1,179	0,71	0,298
	NO	3,048	1,103		
ACT	SÏ	3,551	0,682	0,01	0,395
	NO	3,214	0,615		
ANT	SÍ	3,517	0,820	0,01	0,425
	NO	3,172	0,722		
AGM	SÍ	3,034	1,090	0,01	0,275
	NO	2,488	0,973		
UTM	SÍ	3,580	0,849	0,02	0,294
	NO	3,200	0,799		
MOT	SÍ	3,742	0,978	0,048	0,294
	NO	3,462	0,856		
COM	SÍ	4,109	0,810	0,268	0,096
	NO	4.088	0,966		

CONCLUSIONES GENERALES

Respondiendo a las cuestiones que nos planteábamos al principio, las principales conclusiones son:

¿Qué nivel de CM tienen los alumnos participantes en el estudio? ¿Existen diferencias significativas en el nivel de CM entre los alumnos que realizan estudios musicales y los que no?

Los resultados del estudio están en concordancia con los autores Álvaro-Mora y Serrano Rosa (2019) que afirman que existe una influencia positiva de los estudios musicales en el rendimiento en matemáticas. Más de la mitad de los participantes obtienen resultados no satisfactorios en cuanto a CM, siendo el grupo de los no músicos los que obtienen peores resultados. Podemos afirmar que hay diferencias significativas entre ambos grupos, siendo el porcentaje de alumnos músicos que obtienen "Suficiente" o más casi el doble de los no músicos y, respecto al de alumnos con muy alto rendimiento, esta relación alcanza una razón de 11 a 1.

¿Justifican las características socioeconómicas y culturales del alumnado las posibles diferencias?

Los resultados apuntan a que, efectivamente, hay una influencia en el rendimiento matemático. En todos los indicadores los resultados obtenidos por los alumnos músicos son mayores que los de los no músicos, especialmente respecto al nivel educativo de los padres. Si bien, los resultados obtenidos nos hacen ser cautos a este respecto y, quizá sería interesante profundizar en este aspecto en futuros trabajos para poder dar una respuesta más fundamentada a la cuestión planteada.

¿Existe relación entre el tipo de actividad extraescolar realizada, el número de horas dedicadas a ellas y el rendimiento en CM?

Dado que un amplio porcentaje de la muestra realiza actividades extraescolares los resultados nos permiten afirmar que parece haber una relación entre ambos focos de estudio, si bien no con todo tipo de extraescolar. Se aprecia que los alumnos que hacen extraescolares sí obtienen mejores resultados, pero que las diferencias sean significativas se aprecia en todas menos en las deportivas.

Esta parte de la caracterización de los participantes, aunque nos permite un primer acercamiento, es de las que más debilidades presenta. No se ha profundizado en los distintos agrupamientos de extraescolares (varios alumnos realizan más de un tipo) ni en el tiempo que llevan realizándolas ni en otros factores, que, sin duda, podrían alterar los resultados. Sin embargo, al no ser el foco principal de la investigación global de la que forma parte este trabajo, no se ha profundizado, pudiendo quedar este aspecto como foco de estudio para posteriores trabajos.

¿Qué niveles de ansiedad y actitud hacia las matemáticas tienen los alumnos participantes? ¿Existen diferencias en dichos niveles al comparar al alumnado músico y no músico?

Respecto a la Ansiedad hemos obtenido un nivel alto. En contra de lo esperado, los músicos presentan niveles de ansiedad mayores que los no músicos, siendo estas diferencias significativas en todas las subescalas excepto ante los exámenes. Respecto a la Actitud, el resultado global es positivo. Nuevamente los músicos presentan valores algo superiores. Los resultados, especialmente en el caso de la Ansiedad, nos plantean la necesidad de indagar más.

Referencias

Álvaro-Mora, C. y Serrano-Rosa, M. A. (2019). Influencia de la formación musical en el rendimiento académico: una revisión bibliográfica. *Anuario de Psicología, 49*, 18-31. https://doi.org/10.1344/ANPSIC2019.49.3

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Ediciones Mensajero.

Azaryahu L., Courey S. J., Elkoshi R. y Adi-Japha, E. (2019). 'MusiMath' and 'Academic Music' – Two musicbased intervention programs for fractions learning in fourth grade students. *Developmental Science*. https://doi.org/10.1111/desc.12882

Costa-Giomi, E. (1999). The effects of three years of piano instruction on children's cognitive development. *Journal of Research in Music Education*, *47*(3), 198-212. https://doi.org/10.2307/3345779

Fennema, E. y Sherman, J. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitudes: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. *JSAS Catalog of Selected Documents in Psychology, 6, 31* (Ms. No. 1255). *Journal for Research in Mathematics Education, 7*, 324-326.

Fitzpatrick, K. R. (2006). The effect of instrumental music participation and socioeconomic status on ohio fourth-, sixth-, and ninth-grade proficiency test performance. *Journal of Research in Music Education, 54*(1), 73-84. https://doi.org/10.2307/3653456

Hallam, S. y MacDonald, R. (2013). Introduction: Perspectives on the power of music. *Research Studies in Music Education*, *35*(1), 83-86. https://doi.org/10.1177/1321103x13488485

Mato-Vázquez, D., Chao-Fernández, R. y Chao-Fernández, A. (2019). Efectos de enseñar matemáticas a través de las enseñanzas musicales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *22*(2), 163-184. https://doi.org/10.12802/relime.19.2222

Mato-Vázquez, M. D. y de la Torre-Fernández, E. (2009). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 285-300). SEIEM.

Nagy, I. y Malone, J. (2020). Melody of functions and graphs: improving senior secondary mathematics students' Understanding of the Function Concept by Active Integration of Mathematics and Music. *The Educational Review, 4*(8), 157-165. https://doi.org/10.26855/er.2020.08.001

Nortes-Martínez-Artero, R. y Nortes-Checa, A. (2019). ¿A mayor ansiedad menor rendimiento en Matemáticas? En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (453-462). SEIEM.

Pérez-Tyteca, P. (2012). *La ansiedad matemática como centro de un modelo predictivo de la elección de las carreras*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Schellenberg, E. G. (2011). Examining the association between music lessons and intelligence. *British Journal of Psychology*, *102*, 283-302. http://dx.doi.org/10.1111/j.2044-8295.2010.02000.x

Schellenberg, E. y Weiss, M. (2013). Music and cognitive abilities. En D. Deutsch (Ed.), *Psychology of music* (pp. 499-550). Academic Press.

Tai, D. M., Phillipson, S. N. y Phillipson, S. (2018). Music training and the academic achievement of Hong Kong students. *Research Studies on Music Education*, *40*(2) 244-264.

Tenti-Fanfani, E. (2002). El rendimiento escolar en la Argentina. *Revista Colombiana de Educación*, *43*.

Vert-Alcover, C. (2017) La aptitud musical y numérica durante la adolescencia: Aplicación del test de seashore y el factor -n- del bat-7 a un estudio comparativo. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Wetter, O. E., Koerner, F. y Schwaninger, A. (2008). Does musical training improve school performance? *Instructional Science, 37*(4), 365-374. https:/doi.org/10.1007/s11251-008-9052-y

Willis, C. G. (2016). Impact of music education on mathematics achievement scores among middle school students. Tesis Doctoral, Walden University.

Yang, H., Ma, W., Gong, D., Hu, J. y Yao, D. (2014). A longitudinal study on children's music training experience and academic development. *Scientific Reports, 4*(1). https://doi.org/10.1038/srep05854

Zapatera, A. (2019). Desarrollo de una prueba para identificar habilidad creativa en matemáticas. *REIDOCREA*, *8*, 267-281.

SENTIDO NUMÉRICO ACERCA DE LOS NÚMEROS REALES: CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES USADOS EN OPERACIONES DE FORMA GENERAL

Number sense about real numbers: Knowledge and skills used in operation in a general way

Garrido, V., Figueras, O. y Martínez, M.

Cinvestav

Resumen

Hacer operaciones de forma general, sin conocer los números con los cuales se hacen cálculos o estimaciones, requiere de un buen sentido numérico. En este informe se proporciona una caracterización del sentido numérico acerca de los números reales, misma que fue utilizada como herramienta para identificar conocimientos y habilidades que estudiantes recién ingresados al bachillerato –jóvenes de 15 y 16 años de edad– usaron para resolver operaciones de forma general. Los resultados obtenidos muestran que los alumnos recurren a la estrategia de asignar valores numéricos a los puntos representados con literales; a través de este acercamiento se observaron habilidades aplicadas y dificultades enfrentadas. Por lo cual es relevante continuar con el desarrollo y fortalecimiento del sentido numérico para mejorar el desempeño en matemáticas de estos estudiantes.

Palabras clave: *sentido numérico, números reales, estimación, operaciones de forma general, bachillerato.*

Abstract

Performing operations in a general way, without knowing the numbers with which calculations or estimates are made, requires good numerical sense. This paper provides a characterization of number sense about real numbers, which was used as a tool to identify knowledge and skills that newly enrolled high school students – 15 and 16-year-olds – used to solve in a general way. The results obtained show that the students resort to the strategy of assigning numerical values to the points represented with literals, through this approach applied skills and difficulties faced were observed. Therefore, it is important to continue developing and strengthening number sense to improve the performance of these students in mathematics.

Keywords: *number sense, real numbers, estimation, operations in a general way, high school.*

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Si a los estudiantes de educación media superior –jóvenes de 15 a 18 años de edad–se les planteara: a) dado un número positivo y otro negativo, ¿el producto de estos es mayor o menor que cero?, o bien, b) al dividir un número cualquiera entre 3/5 ¿el resultado es menor o mayor que el número que dividiste? se esperaría, en el primer caso, que se percataran de que el resultado debe ser un número negativo, por lo tanto, menor que cero; en el segundo caso, deberían notar que la división no siempre implica

Garrido, V., Figueras, O. y Martínez, M. (2022). Sentido numérico acerca de los números reales: conocimientos y habilidades usados en operaciones de forma general. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 315-323). SEIEM.

hacer más pequeño al dividendo. Sin embargo, ¿la mayoría de los alumnos reconocerá el efecto de las operaciones en estos casos?

El desarrollo del sentido numérico ha sido estudiado por investigadores de diferentes países. La mayoría de las indagaciones se han hecho con alumnos de educación básica –niños de 5 a 14 años de edad– (ver, por ejemplo, Reys y Yang, 1998; Löwenhielm et al., 2017; Almeida y Bruno, 2014). Los sistemas numéricos estudiados en este nivel educativo son los números naturales, enteros y racionales. Sin embargo, en el nivel medio superior es necesario que los estudiantes conozcan los números reales y sus propiedades, que sepan usarlos para hacer operaciones, que los representen de diferentes maneras y los utilicen para resolver problemas.

De acuerdo con los documentos oficiales, a saber, NCTM (2000), SEP (2020), MEFP (2022), por mencionar algunos, se espera que los estudiantes al concluir la educación primaria y secundaria hayan reflexionado sobre los números que usan, así como hecho actividades y resuelto problemas con la intención de desarrollar su habilidad para hacer operaciones con números concretos. En el caso de los jóvenes que estudian el nivel medio superior se espera que hagan operaciones de forma general, es decir, operaciones sin conocer los números con los cuales se hacen cálculos o estimaciones, como ab o a/b donde a y b son números reales.

Por lo que surge una pregunta de investigación: ¿qué conocimientos y habilidades acerca de los números reales usan los alumnos al resolver operaciones de forma general? Estos conocimientos y habilidades pueden ayudar a notar la presencia del sentido numérico que han desarrollado los estudiantes hasta antes de iniciar su educación media superior. Como objetivo se establece identificar el uso de los números reales que hacen los alumnos cuando efectúan operaciones de forma general. Es necesario aclarar que esta investigación es parte de un estudio más amplio, y que lo descrito en el documento está centrado solo en una parte del proyecto.

MARCO DE REFERENCIA

La importancia del sentido numérico en el aprendizaje de las matemáticas ha sido clara en todo momento; sin embargo, a qué se refiere la expresión sentido numérico ha dado lugar a que varios investigadores hayan propuesto una definición.

Greeno (1991) lo definió como una 'expertez' cognitiva, es decir, como el conocimiento que resulta de una actividad extensa a través de la cual las personas aprenden a interactuar exitosamente en diversos dominios conceptuales. Él describe al sentido numérico como un conocimiento situado dentro de un dominio conceptual y plantea metáforas con las cuáles es posible entender que el sentido numérico es diferente a los temas que regularmente se enseñan; pertenece a otra dimensión, si se imagina que las operaciones básicas están en un plano, el sentido numérico debería estar en una tercera dimensión; como un dron desde el cual se pueden ver y seleccionar las operaciones más convenientes para lograr un propósito.

A su vez Sowder (1992a) define el sentido numérico como una red conceptual bien organizada que le permite a uno relacionar las propiedades de los números y las operaciones, así como resolver problemas numéricos de formas flexibles y creativas. Para Marshall (1989), el sentido numérico es la riqueza de conexiones del conocimiento matemático.

Estas definiciones versan sobre los números naturales, enteros y racionales principalmente y han sido referenciadas en investigaciones como Alajmi (2009), Bracho-López et al. (2014), Fariña y Bruno (2021) porque son trabajos fundamentales sobre sentido numérico.

Las definiciones propuestas por Greeno, Sowder y Marshall han tenido gran aceptación por parte de la comunidad científica, empero son muy generales. Un investigador puede imaginar la 'expertez', la red conceptual o la riqueza de conexiones; pero observar ese tipo de cosas en el aula no es tarea fácil por lo que las autoras de este documento decidieron formular una caracterización que fuese operativa. La propuesta es: *El sentido numérico es el conjunto de conocimientos y habilidades acerca de los números reales que usa una persona para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias numéricas al resolver problemas.* Los conocimientos son las propiedades de dicho sistema numérico y las habilidades son sobre su uso y las diferentes formas de representarlos. En la tabla 1 se muestran las habilidades que se han propuesto para la investigación que se lleva a cabo.

Las primeras diez habilidades tienen como base los comportamientos que demuestran la presencia del sentido numérico sugeridos por Sowder (1992b). Las siguientes cuatro habilidades están relacionadas con conocimientos específicos de los números reales, tales como la densidad, la operación racionalización y la potenciación que tienen características distintas a las de los otros sistemas numéricos. La última habilidad fue propuesta por Resnick (1989), se refiere a que una persona debe reconocer cuando en un procedimiento es mejor detenerse e iniciar otro camino para encontrar la solución de algo.

Tabla 1. Habilidades asociadas al sentido numérico acerca de los números reales.

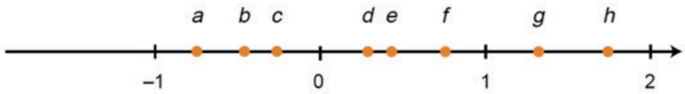
1.	Habilidad para componer, descomponer y recomponer números
2.	Habilidad para identificar cuál representación de un número es más conveniente que otra
3.	Habilidad para comparar números
4.	Habilidad para ordenar números
5.	Habilidad para lidiar con el orden de magnitud de un número en situaciones concretas
6.	Habilidad para usar puntos de referencia
7.	Habilidad para vincular símbolos de operación y relación de manera significativa
8.	Habilidad para reconocer los efectos de las operaciones en los números
9.	Habilidad para hacer cálculos mentales mediante estrategias propias
10.	Habilidad para hacer estimaciones
11.	Habilidad para asociar los números con el contexto en el que aparecen
12.	Habilidad para ubicar números en la recta numérica
13.	Habilidad para reconocer hechos dados
14.	Habilidad para distinguir diferencias y semejanzas entre los sistemas numéricos
15.	Habilidad para autorregularse

Estas habilidades podrían ser las que usen los estudiantes al resolver operaciones de forma general con los números reales, para observarlas se siguió la metodología descrita en la siguiente sección.

METODOLOGÍA

En la figura 1, se muestra un ítem en el que se requiere hacer operaciones de forma general, en lugar de hacer cálculos particulares; este también permite a los estudiantes reflexionar sobre las propiedades de los números involucrados, así como juzgar la razonabilidad de sus respuestas.

Dados los puntos como se muestran en la imagen:



1. ¿Qué punto está más cerca del producto ab? Justifica tu respuesta.
2. ¿Cuál punto correspondería al $|c|$? ¿Por qué?
3. ¿Qué punto de la recta representaría $\frac{1}{f}$? Argumenta tu respuesta.
4. ¿Qué punto está más cerca de $\sqrt{e}$? ¿Por qué?
5. ¿Cuál de los puntos está más cerca de $\sqrt{h}$? Justifica tu respuesta.

Figura 1. Adaptación del ítem propuesto por NCTM (2000).

El ítem anterior fue incluido en un examen inicial sobre sentido numérico que contestaron 56 estudiantes, cuya edad oscila entre los 15 y 16 años de edad y que en agosto del 2021 iniciaron su educación media superior.

En el marco de referencia se propusieron 15 habilidades que permiten identificar el uso del sentido numérico por parte de los estudiantes (ver tabla 1). La relación entre cada pregunta del ítem y las habilidades se puede observar en la tabla 2, esta es una guía para analizar los datos.

Tabla 2. Habilidades relacionadas con cada pregunta del ítem.

Pregunta	Habilidades relacionadas	Explicación
1. ¿Qué punto está más cerca del producto ab?	8, 10, 12	Notar que el producto de dos números negativos es un número positivo forma parte de reconocer el efecto de las operaciones, decidir qué punto a la derecha del cero está más cerca de *ab* está relacionado con la habilidad de ubicar ese producto en la recta. Hacer estimaciones también es necesario.
2. ¿Cuál punto correspondería al $|c|$?	6, 7, 12	El número cero es un punto de referencia para ubicar en la recta el valor absoluto de un número, vincular este símbolo con su significado ayuda a determinar el punto correspondiente.
3. ¿Qué punto de la recta representaría 1/f ?	3, 6, 8, 10	Es importante comparar el punto *f* con el número 1, porque este último es un punto de referencia. Dado que *f* está entre 0 y 1el efecto de las operaciones es importante para hacer una estimación.
4. ¿Qué punto está más cerca de $\sqrt{e}$?	6, 8, 10	En las preguntas 4 y 5, el número 1 es un punto de referencia que permite reconocer el efecto de las operaciones y con esta información hacer estimaciones.
5. ¿Cuál de los puntos está más cerca de $\sqrt{h}$?	6, 8, 10	

Recolección de datos

La aplicación del examen inicial se llevó a cabo de forma presencial en octubre de 2021 en dos sesiones. Por cuestiones de espacio no es posible comentar las otras preguntas del examen, pero esta en específico se planteó en la segunda sesión y el tiempo disponible para contestarla era de 30 minutos. De acuerdo con la organización de la escuela, los estudiantes estaban separados en dos grupos de 28 alumnos; a un grupo se le permitió el uso de calculadora y al otro no. Esta variante se propuso porque en investigaciones como la de Bobis (1991), Alajmi (2009) y Lyublinskay (2009) se plantea la posibilidad de usar recursos tecnológicos para desarrollar el sentido numérico; se decidió iniciar la exploración con la calculadora por ser un recurso de fácil acceso.

Se tomaron fotografías de ambos grupos y se grabó, un video de la sesión del grupo que usó calculadora con previa autorización de los alumnos. Como no fue posible enfocar la cámara y grabar qué tecleaban o qué cálculos hacían los estudiantes con ella, al final se les pidió que en una hoja blanca escribieran cómo usaron la calculadora y qué tipo de operaciones habían hecho con ella.

Análisis de los datos

El análisis de los datos se llevó a cabo bajo dos perspectivas. Una fue para determinar en cuáles preguntas se tuvo mayor o menor éxito, concentrando en tablas el conteo de respuestas correctas e incorrectas. En todo momento se tuvo cuidado de separar las respuestas que fueron dadas usando calculadora y aquellas en las que no; con la intención de obtener conclusiones sobre el uso de esta herramienta.

La otra mirada fue con el propósito de analizar los conocimientos y habilidades acerca de los números reales que los estudiantes evidenciaron al resolver las operaciones de forma general. En este análisis se usó la caracterización propuesta en el marco de referencia.

RESULTADOS

La tabla 3 es un ejemplo del registro que se hizo de las respuestas de los estudiantes, por cuestiones de espacio sólo se presenta esta.

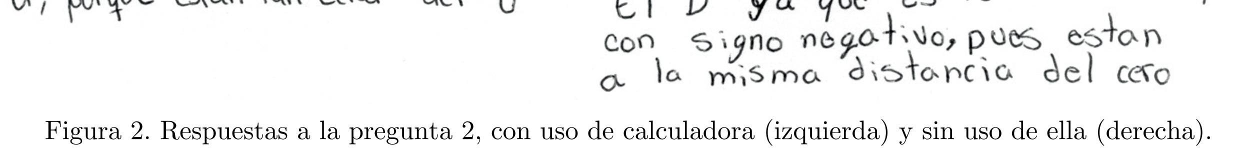
Tabla 3. Análisis de la pregunta ¿qué punto está más cerca del producto ab?

Número de estudiantes	Con calculadora	27	Contestaron	26	Correctamente	3
					Incorrectamente	23
			No contestaron	1		
	Sin calculadora	29	Contestaron	29	Correctamente	0
					Incorrectamente	29
			No contestaron	0		

En las cinco preguntas se obtuvieron porcentajes de éxito menor al 10%. Por otro lado, se puede notar que no hay una diferencia significativa entre el número de respuestas correctas con uso de calculadora y sin ella.

Respecto a los conocimientos y habilidades que los estudiantes manifestaron para resolver operaciones de forma general, se tienen las siguientes observaciones.

La pregunta 2 fue contestada correctamente por 6 estudiantes, en sus respuestas se puede ver que usan como punto de referencia el número cero, vínculan el símbolo de valor absoluto adecuadamente y que interpretan este signo como una distancia (ver figura 2).


¿Cuál punto correspondería al $|c|$? ¿Por qué?
d, porque estan tan cerca del 0

¿Cuál punto correspondería al $|c|$? ¿Por qué?
El D ya que es lo mismo solo que con signo negativo, pues estan a la misma distancia del cero

Figura 2. Respuestas a la pregunta 2, con uso de calculadora (izquierda) y sin uso de ella (derecha).

Solo un estudiante respondió acertadamente la pregunta 3, el conocimiento sobre el inverso multiplicativo de un número real parece ser tomado en cuenta al asegurar que *1/f*, o sea 1 entre 8/10 era igual a 5/4 (ver figura 3). La habilidad de comparar números es usada porque para proponer un posible valor de *f* es necesario determinar si el número elegido es mayor a cero y menor a 1. Sin embargo, no hay evidencia de que el estudiante haya reconocido el efecto de las operaciones y tampoco de haber hecho una estimación.

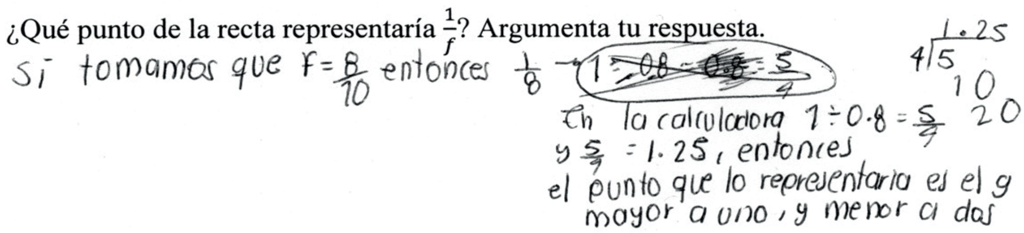


Figura 3. Respuesta a la pregunta 3 con uso de calculadora.

Además de los conocimientos y habilidades usados por los estudiantes para resolver operaciones de forma general, fue posible notar las dificultades que los alumnos enfrentaron al hacer estas operaciones. En la figura 4, se puede ver como un estudiante que podía usar su calculadora y recurre a la estrategia de asignar números decimales a los puntos no la utiliza para responder la pregunta 1 y tampoco logra reconocer el efecto de las operaciones porque da como resultado un número negativo. De hecho, tampoco ubica adecuadamente los números en la recta, enseguida del número 0.6 aparece el 1, situación que se repite en la parte de la recta que corresponde a los números negativos.

Otro ejemplo de que la habilidad de ubicar números en la recta numérica no se ha desarrollado con números concretos, ni de forma general, se muestra en la figura 5; en esa respuesta se puede ver como el número −1/4 está más cerca de −1 que de 0; incluso del lado de los números positivos el 1/5 está más cercano a 1 que el 1/2.

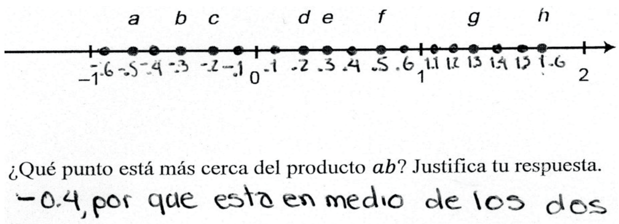


Figura 4. Respuesta de un estudiante que podía usar calculadora.

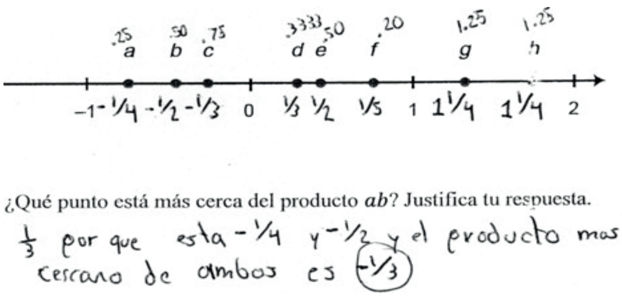
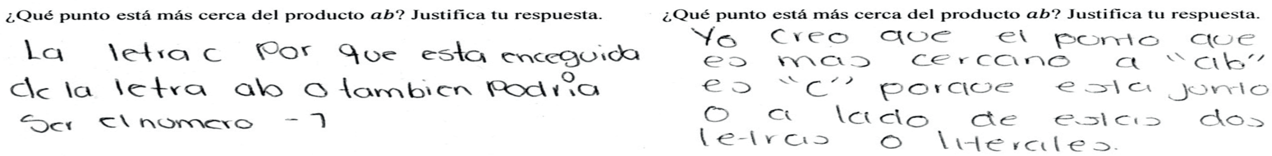


Figura 5. Respuesta de un estudiante que no podía usar calculadora.

En la pregunta 1, la mayoría de los estudiantes no reconoció que la expresión *ab* representaba el producto de dos números (ver figura 6) eso quiere decir que los alumnos al ingresar al nivel medio superior tienen dificultades para reconocer la operaciones de forma general.


¿Qué punto está más cerca del producto *ab*? Justifica tu respuesta.

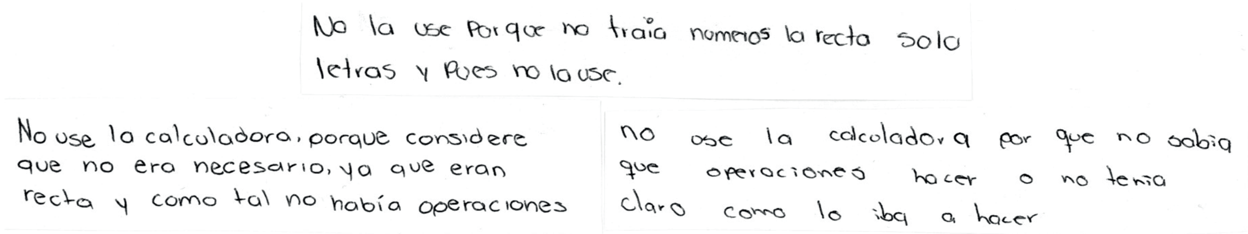
La letra c Por que esta enceguida de la letra ab o tambien Podria Ser el numero -1

¿Qué punto está más cerca del producto *ab*? Justifica tu respuesta.

Yo creo que el punto que es mas cercano a "ab" es "C" porque esta junto o a lado de estas dos letras o literales.

Figura 6. Respuesta de dos estudiantes que podían usar calculadora.

Al analizar los datos, se tomó en cuenta si las respuestas eran de un estudiante que usó o no la calculadora para ver si el uso de este recurso tecnológico implicaba un cambio significativo. En la figura 7 se muestran los comentarios de algunos estudiantes.


No la use Porque no traia numeros la recta solo letras y Pues no la use.

No use la calculadora, porque considere que no era necesario, ya que eran recta y como tal no había operaciones

no use la calculadora por que no sabia que operaciones hacer o no tenia claro como lo iba a hacer

Figura 7. Manuscritos de tres estudiantes sobre el uso de la calculadora.

Responder a la pregunta qué conocimientos y habilidades usan los estudiantes que ingresan al nivel medio superior al resolver operaciones de forma general es difícil, porque la mayoría de ellos asignan valores concretos a los puntos de la recta que aparece como parte del ítem. Entonces en lugar de resolver operaciones de forma general, intentan aproximar los resultados con números concretos. Al parecer los estudiantes todavía no tienen las herramientas necesarias para hacer este tipo de operaciones, por lo que es necesario llevar al aula de clases tareas como la mostrada en la figura 1 para motivar la reflexión sobre el efecto de las operaciones con números reales.

Algunos estudiantes al resolver operaciones con valores concretos retomaron conocimientos como la existencia de inversos multiplicativos, leyes de los signos, el número cero es neutro, el valor absoluto de un número se refiere a una distancia. Las habilidades que usaron para dar sus respuestas fueron: comparar números; usar los números -1, 0 y 1 como puntos de referencia; vincular símbolos de operación y relación; y hacer estimaciones de la raíz cuadrada de un número.

Sin embargo, los alumnos tuvieron dificultades para leer e interpretar la raíz cuadrada de una fracción, al parecer identifican qué significa el radical de un número natural pero no de una fracción o un número decimal. También tuvieron complicaciones para ubicar en la recta los números mayores a -1 y menores a 1, así como para compararlos y ordenarlos. Además, tuvieron conflictos para hacer operaciones con números negativos y fracciones, lo que dificultó reconocer el efecto de las operaciones.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Para que los estudiantes de nivel medio superior hagan operaciones de forma general, es necesario que tengan un buen sentido numérico, lo que cual significa que los alumnos desarrollen habilidades para usar los números reales (ver tabla 1). Razón por la cual, en la investigación global, de la cual forma parte este informe, se aborda cómo desarrollar el sentido numérico acerca de los números reales.

Existen investigaciones en las que se enfatiza el desarrollo del sentido numérico de estudiantes de nivel básico (ver Lyublinskay, 2009; Bracho et al., 2014; Sanfiel, Perdomo y Bruno, 2021); sin embargo, ese énfasis versa sobre actividades donde se usan los números naturales, enteros y racionales y los alumnos de bachillerato requieren desarrollar el sentido numérico acerca de los números reales para mejorar su desempeño en matemáticas, tal como lo describe Nguyen (2016).

En los cálculos escritos de los estudiantes se pueden ver errores, sin embargo, parece que los alumnos no son conscientes de ellos. La tarea propuesta, era un enunciado en el que la razonabilidad de las respuestas dadas jugaba con papel importante de acuerdo con NCTM (2000). Empero, hubo escasas alusiones en esa dirección, lo que podría estar relacionado con una falta de comprensión conceptual de los números según Fariña y Bruno (2021).

Con respecto al uso de la calculadora, una posible explicación de que no haya sido una herramienta que les ayudara a resolver operaciones de forma general es porque la reflexión sobre las propiedades de los números que se están usando debe ser hecha por los estudiantes previamente. Es probable que con los valores concretos tampoco usaron la calculadora porque como mencionan Figueras, Valenzuela y Martínez (2021) los profesores en México han recomendado tímidamente el uso de esta herramienta.

Bobis (1991) propuso que el uso de la calculadora podía contribuir al desarrollo del sentido numérico si se enseñaba a los estudiantes a hacer estimaciones antes de ver el resultado de una operación en la calculadora; además, en caso de ser necesario, que se cuestionara sobre la diferencia entre su estimación y el resultado obtenido con este artefacto. Como antes de proponer la tarea analizada no se dio ningún tipo de instrucción a los estudiantes sobre el funcionamiento o ventajas que ofrecía la calculadora, esta no fue una herramienta significativa.

Por otro lado, las habilidades propuestas en el marco de referencia permitieron identificar el desarrollo del sentido numérico que hasta el momento tienen los estudiantes; así que su uso como indicadores parece plausible. Es pertinente continuar investigando acerca del desarrollo y fortalecimiento del sentido numérico de alumnos de nivel medio superior.

Referencias

Alajmi, A. (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: Teachers' views. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*, 263-283.

Almeida, R. y Bruno, A. (2014). Respuestas de estudiantes de secundaria a tareas de sentido numérico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 127-136). SEIEM.

Bobis, J. (1991). Using a calculator to developing number sense. *The Arithmetic Teacher*, *38(5)*, 42-45.

Bracho-López, R., Adamuz-Povedano, N., Gallego-Espejo, M. C. y Jiménez-Fanjul, N. (2014). Alternativa metodológica para el desarrollo integral del sentido numérico en niños y niñas de primer ciclo de educación primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 167-176). SEIEM.

Fariña, M. y Bruno, A. (2021). Respuestas numéricas razonables en alumnado de secundaria. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 261-268). SEIEM.

Figueras, O., Valenzuela, C. y Martínez, M. (2021). ¿Debemos usar calculadoras en un examen? *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *92 (1)*, 45-53.

Greeno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22 (3)*, 170-218.

Lyublinskay, I. (2009). Developing number sense with technology-based science experiments: Reflections on classroom practice in primary grades and pre-service education. *Mathematics Teaching-Research Journal*, *3(2)*, 1-14.

Löwenhielm, A., Marschall, G., Sayers, J. y Amdrews, P. (2017). *Opportunities to acquire foundational number sense: A quantitative comparison of popular English and Swedish textbooks*. CERME 10.

Marshall, S. P. (1989). Retrospective paper: Number sense conference. En J. T. Sowder y B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 40-42). San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Madrid, España.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA. NCTM.

Nguyen, V. L. (2016). *Number sense in high school mathematics students.* Trabajo de Final de Master, University of Texas.

Resnick, L. B. (1989). Defining, assessing, and teaching number sense. En J. T. Sowder y B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 35-39). San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.

Reys, R. y Yang, D. (1998). Relationship between Computational Performance and Number Sense among Sixth- and Eighth-Grade Students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 225-237. https://doi.org/10.2307/749900

Sanfiel, L., Perdomo-Díaz, J. y Bruno, A. (2021). Relaciones numéricas establecidas por alumnado de Primaria. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 563 - 570). SEIEM.

Secretaría de Educación Pública (2020). *Aprendizajes clave para la educación integral*. Ciudad de México, México. https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx

Sowder, J. T. (1992a). Estimation and number sense. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 371-395). National Council of Teachers of Mathematics.

Sowder, J. T. (1992b). Making sense of numbers in school mathematics. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching.* (pp. 1-51). Lawrence Erlbaum Associates.

EL PAPEL DE LA VISUALIZACIÓN Y LA ARGUMENTACIÓN EN EL CONOCIMIENTO DE FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

The role of visualisation and argumentation in the knowledge of prospective elementary school teachers

Giménez, J.[a], Vargas-Herrera, J.[a] y Vanegas, Y.[b]

[a]Universitat de Barcelona, [b]Universitat de Lleida

Resumen

La argumentación y la visualización son procesos relevantes de la actividad matemática. El objetivo de esta comunicación es describir el conocimiento matemático de un grupo de futuros maestros de educación primaria cuando se involucran en situaciones de argumentación a través de procesos visuales. Se diseña una tarea profesional e implementa con 138 futuros maestros. Se usan como herramientas de análisis la noción de configuración epistémica del enfoque onto-semiótico y los tipos de validación. Se encuentra que los futuros maestros reconocen el potencial del proceso de visualización, pero la mayoría de ellos está en un nivel de generalidad bajo, en donde priman prácticas matemáticas y procedimientos mecánicos no siendo capaces de establecer criterios de validación adecuados.

Palabras clave: *argumentación, competencias profesionales, educación primaria, formación de profesores visualización.*

Abstract

Argumentation and visualisation are relevant processes in mathematical activity. The aim of this paper is to describe the mathematical knowledge of a group of prospective primary school teachers when they engage in argumentation situations through visual processes. A professional task is designed and implemented with 138 prospective teachers. The notion of epistemic configuration of the onto-semiotic approach and the types of validation are used as tools of analysis. It is found that future teachers recognise the potential of the visualisation process, but most of them are at a low level of generality, where mathematical practices and mechanical procedures prevail, not being able to establish adequate validation criteria.

Keywords: *argumentation, elementary education, professional competencies, teacher training, visualisation.*

INTRODUCCIÓN

Autores como Ginsburg et al. (2005) plantean que para funcionar y enfrentar los desafíos de la sociedad actual se necesita una amplia comprensión de las matemáticas y esto implica trabajar tanto los contenidos que se deben aprender como las formas de adquisición y uso de estos contenidos. Las propuestas curriculares actuales para la educación primaria remarcan la importancia y la necesidad del desarrollo de competencias. Respecto a la competencia matemática de Castro et al. (2012) ponen

Giménez, J., Vargas, J. y Vanegas, Y. (2022). El papel de la visualización y la argumentación en el conocimiento de futuros maestros de educación primaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 325-333). SEIEM.

de relieve el papel de los procesos matemáticos en su adquisición desde edades iniciales. Estos autores también señalan que procesos y competencias matemáticas enfatizan una misma idea: la capacidad de usar de forma comprensiva y eficaz las matemáticas que se aprenden en la escuela en una variedad de contextos.

En el caso de la actividad geométrica dos procesos relevantes son la visualización y la argumentación. Hershkowitz et al. (1996) recalcan la fuerte relación que tiene la visualización con muchos aspectos del currículo tanto en la educación infantil como en primaria (razonamiento deductivo/inductivo, razonamiento proporcional, formación de conceptos matemáticos, etc.). Según Fernández (2013) hay dos razones fundamentales que han orientado las investigaciones sobre visualización en las últimas décadas: la consideración de nuevos elementos y entornos de aprendizaje propios de un mundo altamente tecnológico y los cambios en la concepción de la propia naturaleza de las matemáticas, en donde la visualización es asumida como una herramienta fundamental para el reconocimiento patrones. Por otro lado, Mariotti (2006) plantea que los futuros docentes deben reconocer la importancia y dificultades en el desarrollo de la visualización y la argumentación.

En esta comunicación se pretende realizar una aproximación al conocimiento matemático inicial de futuros maestros de educación primaria (en adelante FM). Concretamente se plantean dos objetivos: a) describir aspectos de la actividad matemática desarrollada por los FM relativos a los procesos de argumentación y visualización y b) caracterizar niveles de generalización seguidos por los FM.

MARCO TEÓRICO

El conocimiento didáctico-matemático de los profesores de matemáticas ha sido estudiado con especial interés durante las últimas décadas. Este interés ha llevado al desarrollo de modelos para el análisis y la mejora de la interacción y práctica educativa en el aula. Uno de éstos es el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas CCDM (Godino et al., 2016). En este modelo, que se propone desde el enfoque onto-semiótico (EOS), se considera que dos competencias clave que el profesor de matemáticas debe desarrollar son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. Se considera que el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas implica un conocimiento profundo de la matemática y su enseñanza, es decir, un conocimiento didáctico-matemático, ya que el conocimiento meramente matemático de los objetos no es suficiente para una práctica adecuada del profesor de matemáticas (Pino-Fan et al., 2015).

Desde el modelo CCDM se plantea que para lograr una enseñanza idónea el profesor de matemáticas debe poseer distintos tipos de conocimiento. Por un lado, tiene que conocer las matemáticas escolares del nivel educativo en el que imparte la enseñanza. Además, debe conocer elementos de niveles posteriores, lo que se denomina como el "conocimiento del contenido matemático *per-se*". Este conocimiento se divide en dos tipos: *conocimiento matemático común* y *conocimiento matemático extendido*. El primero hace referencia al conocimiento sobre el objeto matemático que es necesario poner en juego para resolver problemas y/o actividades relacionadas con un tema (matemático) específico en un nivel educativo determinado. Generalmente se asocia al nivel en que se enseña. El segundo se refiere a que el docente además de saber enfrentar problemas/actividades sobre un tema determinado debe poseer conocimientos más avanzados, que hacen parte de niveles superiores.

El EOS como teoría de la cognición e instrucción matemática, ha consolidado y explicado ampliamente lo que se entiende por significado y su relación con las nociones de práctica matemática y objetos matemáticos (Godino et al., 2007; Godino, et al, 2019). Desde este enfoque se asume que las prácticas matemáticas son cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver un problema matemático, para comunicar la solución a otras personas o para validar y generalizar la solución a otros contextos y problemas. Y, que los argumentos son un objeto que ayuda a comprender el nivel de generalidad o consistencia de las visualizaciones.

Son diversos los tópicos que se han investigado vinculados al conocimiento profesional docente, pero pocos de estos trabajos analizan cómo futuros maestros de primaria reconocen la importancia de discutir sobre la validación de las ideas matemáticas basados en elementos visuales. Gutiérrez (2006) caracteriza la visualización como el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos. Según Hanna y Sidoli (2007) los procesos visuales, implican el uso de elementos lógicos en los razonamientos en relación a la naturaleza de la deducción, y sugieren la existencia de conflictos semióticos debidos a la interpretación de las relaciones geométricas observadas. Desde el EOS, los procesos visuales involucran un razonamiento diagramático que se analiza mediante la configuración de objetos y procesos ostensivos y no ostensivos (Godino et al., 2016). El razonamiento diagramático según Bakker y Hoffmann (2005) implica tres pasos: construir un diagrama mediante un sistema de representación; experimentar con el diagrama y observar los efectos, reflexionando sobre ellos.

La validación es un proceso en el que se utilizan recursos de tipo técnicos, teóricos, disciplinares y argumentativos -por parte del que aprende-para garantizar la validez de un resultado formulado. La validación, como la actividad tendiente a justificar la eficacia o corrección de un procedimiento o un resultado, o a justificar el carácter de verdadero de una propiedad. Autores como Richard (2004) resaltan que son diversas las relaciones entre visualización, argumentación y prueba. Resulta importante por tanto analizar cómo justifican determinadas situaciones los FM basados en representaciones gráficas. Así como determinar el nivel de generalidad de dichas justificaciones.

Manouchehri y Sriraman (2015) señalan que la generalización se puede dividir en dos categorías principales, empírica y teórica. En la generalización empírica, el proceso básico consiste en detectar una característica o propiedad común a dos o más objetos o situaciones basándose en la percepción y luego definir esas características como generalmente presentes en todos los objetos o situaciones respectivas. Según Haj-Yahya y Herskovitz (2013) la generalidad se expresa con mayor o menor sofisticación según el grado de contracción de los medios semióticos utilizados. En el presente estudio se usan las categorías de Balacheff (1987) sobre tipos de validación: *empirismo ingenuo*, *ejemplo crucial* y *ejemplo genérico* para diferenciar los niveles de generalización que alcanzan los FM cuando se involucran en procesos de razonamiento y análisis de validación de ciertas relaciones. La primera de estas categorías refiere a la situación en la que el estudiante considera algunos pocos casos particulares, los cuales le son suficientes para validar una proposición. En la segunda, el estudiante pretende verificar una propiedad, permitiendo antever algún tipo de generalización. Finalmente, el ejemplo genérico indica una situación que consiste en dejar claras las razones que validan una propiedad.

METODOLOGÍA

Se sigue una metodología mixta (Cohen et al., 2007), en donde se realiza un análisis de contenido sobre cómo los FM desarrollan procesos de argumentación y visualización. Se diseña e implementa una tarea profesional con un total de 18 grupos de FM (108 estudiantes) de segundo curso del Grado de Educación Primaria de una universidad española. Cabe señalar que consideramos que las producciones grupales son representativas del conocimiento matemático de los FM dado que emergen de la discusión y acuerdos de todos los miembros. La tarea profesional enfrenta a los FM a tres situaciones de demostración visual, de las cuales sólo se analizará en esta comunicación la primera de ellas. En esta situación se pide justificar mediante registros visuales que el área de un triángulo se puede expresar como el producto de la base por la mitad de su altura. En la tabla 1, se muestran las preguntas planteadas a los FM según los tipos de conocimiento planteados por el CCDM.

Tabla 1. Preguntas, tipo de conocimiento involucrado e intencionalidad.

Preguntas	Conocimiento	Intencionalidad
1. En una cuadrícula dibuja un triángulo rectángulo de 7 cm de base y 6 cm de altura. Comprueba que el área hace 21 cm^2.	Común	Identificar conocimiento o dificultades sobre cómo determinar el área de un triángulo.
2. Dibujando, recortando, componiendo y descomponiendo, muestra ahora que, si tienes un triángulo cualquiera, su área es igual a multiplicar la base por la mitad de la altura.	Común Extendido	Identificar conocimiento sobre la relación b x (h/2). Distinguir lo particular de lo general Promover el análisis sobre la validez de una relación.
3. ¿Por qué decimos que en la actividad del ítem 1 estamos haciendo una comprobación y en el ítem 2 una demostración visual?	Extendido	Diferenciar entre comprobación y validación (mediante demostración visual)

Para identificar aspectos del conocimiento matemático de los FM se usan herramientas de análisis planteadas por el EOS. Inicialmente se realiza la configuración epistémica de la situación planteada (ver tabla 2).

Tabla 2. Prácticas y objetos encontrados en la tarea.

Situación Problema	
Determinar que el área de cualquier triángulo se puede obtener como producto de la medida de su base por la mitad de su altura. Hacerlo mediante demostración visual	
Prácticas Matemáticas	
P1: Dibujar un triángulo rectángulo con medidas específicas. P2: Dibujar, recortar, componer y descomponer triángulos con papel o en formato digital. P3: Determinar área de un triángulo rectángulo a partir una cuadrícula. P4: Determinar área como relación entre la base del triángulo y la mitad de la longitud de su altura correspondiente. P5: Comprobar de forma algebraica, aritmética y visual relaciones entre los lados de un triángulo y su área. P6: Comprobar la relación b x h/2 determina el área para un caso particular de triángulo (rectángulo). P7: Comprobar que la relación b x h/2 determina el área de cualquier tipo de triángulo. P8: Diferenciar entre una comprobación y una demostración visual: identificar la comprobación como la validez en algunos casos particulares; demostración como argumentación que valida de forma general para todos los casos posibles.	
Lenguaje	**Definiciones -conceptos**
Verbal L1: Triángulo. L2: Triángulo Rectángulo. L3: Triángulo acutángulo. L4: Triángulo obtusángulo. L5: Triángulo Isósceles. L6: Triángulo escaleno. L7: Cuadrícula. L8: Conteo. L9: Dobleces, L10: Composición. L11: Comprobación. L12: Demostración. L13: Validación. L14: Cálculo. L15: Área. L16: Mitad. L17: Cuantificadores. L18: Independencia de la posición. L19: Fórmula. L20: Figura. L21: Gráfico. L22: Rectángulo. *Gráfico* G1. Uso de cuadriculas, G2 gráfico de triángulos en cuadriculas	D1 Elementos de un triángulo (altura, base) D2 Tipos de triángulos D3 Área de un triángulo D4 Generalización de una propiedad D5 Equivalencia.

Procedimientos
PR1: Dibujar un triángulo rectángulo.
PR2: Construir cuadriculas para contar cantidad de cuadrados unitarios interiores al triángulo.
PR3: Utilizar material tangible para proponer relaciones entre la altura y la base de un triángulo cualquiera.
PR4: Explicación de la diferencia entre comprobación y demostración.
PR5: Justificación del uso de material tangible para la presentación de ideas geométricas en estudiantes de educación primaria.
PR6: Justificación mediante el uso de un triángulo escaleno, (considerado como genérico).
PR7: Interpretación de la prueba visual como demostración por pasos dado su nivel de generalización respecto las posiciones, las medidas y los diferentes tipos de triángulos.
Proposiciones (implícitas o no)
PO1: El área de un triángulo se puede calcular mediante el conteo de los cuadrados unitarios que están en su interior.
PO2: El conteo de cuadrados unitarios puede hacerse mediante la descomposición de figuras en triángulos más pequeños que a su vez, componen cuadrados a contar.
PO3: El producto de la longitud de la base de un triángulo por la mitad de la longitud de su altura corresponde al área.
PO4: El área de cualquier triángulo es el resultado de multiplicar la longitud de una de sus bases por la mitad de la longitud de su correspondiente altura. (Y eso es equivalente a la expresión clásica de base x altura dividido por dos).
PO5: El uso de varios ejemplos relativos a alguna propiedad geométrica NO permite generalizar la misma y admitirla como "demostración".
PO6: Para cualquier triángulo es posible componer un rectángulo, haciendo uso de un triángulo congruente (haciendo el doble) de tal forma que se construya un rectángulo
Argumentos (explícitos o no)
A1: Uso de material tangible para hacer un conteo, en un caso determinado.
A2: Justifico el área de un triángulo determinado a través de conteo de cuadrados internos en una situación específica. (Si tengo una cuadrícula, puedo determinar el área del triángulo mediante reagrupaciones en el conteo interno).
A3: Comprobación aritmética de la relación del área de un triángulo determinado (El área del triángulo da 21 porque lo verifiqué en la fórmula). A4: Argumenta que la verificación de uno o varios ejemplos de tipos de triángulo sobre el cálculo del área no permite generalizar la propiedad para cualquier triángulo. A5: Puedo justificar el área de un triángulo rectángulo determinado (mediante equivalencia de áreas o composición/descomposición) como la mitad de un rectángulo, con la misma base y altura. A6: Puedo justificar el área de un triángulo rectángulo cualquiera (mediante equivalencia de áreas o composición/descomposición) como la mitad de un paralelogramo, con la misma base y altura. Posteriormente justifica que la mitad del paralelogramo, puede obtenerse, como un paralelogramo que tenga la misma base, y la mitad de la altura. A7: Puedo justificar el área de cualquier triángulo mediante descomposición y composición, quitando el triángulo superior (hasta la paralela media) y añadiendo al otro lado, para hacer un paralelogramo equivalente.

Posteriormente tomando como base la configuración epistémica (tabla 2) se analizan las producciones de los 18 grupos de FM, identificando las prácticas matemáticas, lenguajes, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos evidenciados en las producciones de los FM. En la tabla 3, se muestra a manera de ejemplo, la sistematización realizada de la configuración epistémica de uno de los grupos.

Tabla 3. Configuración epistémica del grupo 10.

Grupo	Práctica Matemática	Lenguaje		Definiciones	Procedimientos	Proposiciones	Argumentos
G10	P1 P3 P4 P5 P6	V1 V2 V7 V8 V10	V15 V16 V19 L22 G1 G2	D1 D2	PR1 PR2 PR5	PO1 PO2 PO4	A2 A3 A5

Para reconocer el nivel de generalidad alcanzado por los FM, observamos las formas visuales propuestas y sus descripciones correspondientes. En la figura 1 se muestran ejemplos de respuestas asociadas a los tres niveles de generalidad considerados. En el nivel más bajo relacionado con el empirismo ingenuo (N1) se consideran justificaciones que se centran en el conteo para el caso particular, y el uso de la fórmula en el caso general. En el nivel de grado intermedio (N2) se consideran justificaciones en las que se toma un triángulo no rectángulo, que se duplica, para conseguir un paralelogramo. Posteriormente se busca un rectángulo equivalente, que no es el que corresponde con el producto pedido, sino el que muestra que el área del triángulo es el producto de la base por la altura y luego hacer la mitad. En un nivel alto, se sitúan las propuestas que consideran un cierto nivel de generalidad y que no centran su explicación en simples comprobaciones, como el caso del grupo G12, que argumenta: "*Hemos hecho una demostración visual porque el objetivo era que, mediante estrategias visuales y prácticas, se entendieran y demostraran evidencias lógicas, dando sentido o significando un hecho o teorema matemático. De esta manera la demostración tiene un valor más empírico ya que sirve como una verificación de una hipótesis…*"

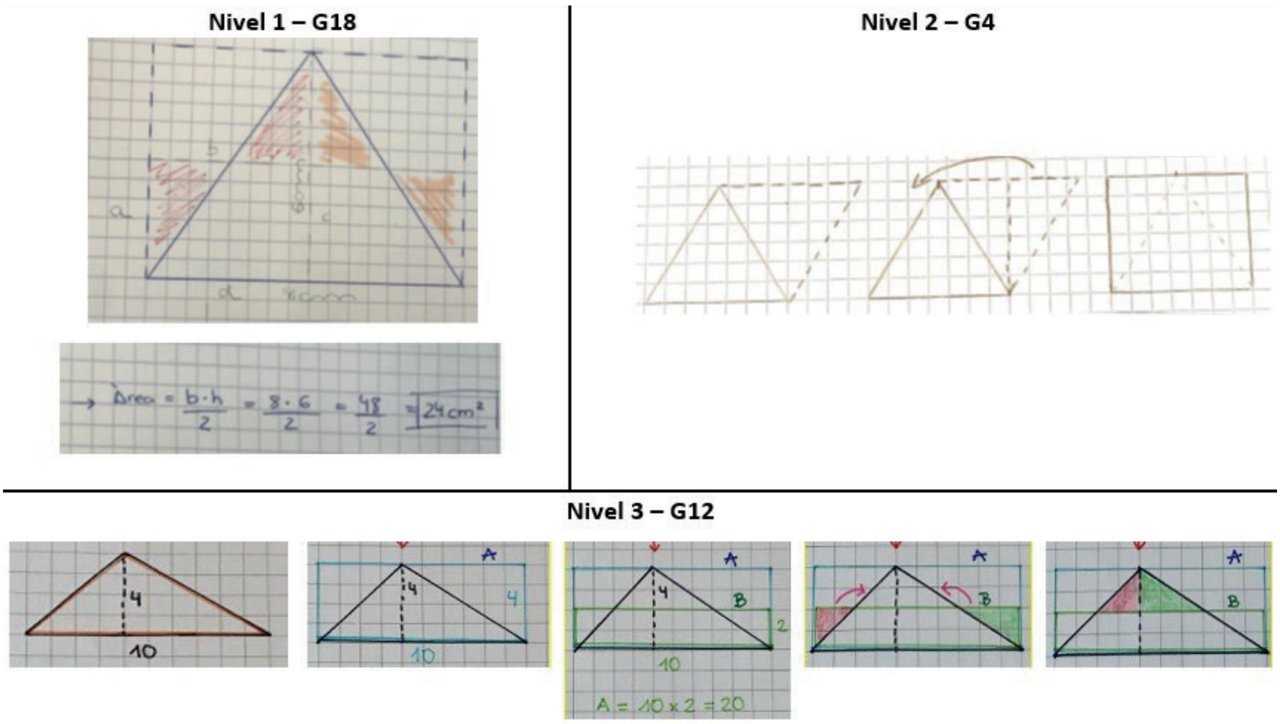


Figura 1. Ejemplos de respuesta para los niveles de generalidad.

RESULTADOS

Los resultados se organizan en dos partes. En la primera se describen aspectos relevantes de la actividad matemática desarrollada a partir de los diferentes elementos de la configuración epistémica. En la segunda se presentan los niveles de generalización conseguidos por los FM. Se refiere en todos los resultados a elementos observados porcentual y descriptivamente respecto de la cantidad total de grupos de FM (18) participantes en este estudio.

En cuanto a las *prácticas matemáticas*, se observa que los FM mayoritariamente desarrollan prácticas referidas a la situación con medidas determinadas (P1, P2, P3 y P5). Su actividad matemática se basada en seguir instrucciones y realizar procedimientos como contar y comprobar de forma aritmética que se cumple alguna propiedad, en este caso, el área del triángulo.

En relación a *los procedimientos* el 88.9% utilizan PR1 y PR2. Estos procedimientos se centran en el dibujo de triángulos en cuadriculas para obtener su área mediante conteo. El *concepto* más utilizado es el D1, relativo a los elementos de un triángulo como su altura y su base. Finalmente, las proposiciones que más aparecen son la PO1 (77,8%) y la PO2 (72,2%).

En cuanto al *lenguaje verbal o gráfico,* se constata el uso de las formas prototípicas y la alusión a términos *triángulo* (94,4%), *triángulo rectángulo* (83,3%), *rectángulo* (72,2%) *área* (100%) *cuadrícula* (88,9%) y *conteo* (83,3%). Sólo el grupo G12 justifica considerando distintos tipos de triángulos, y habla de "siempre" como expresión de los *cuantificadores*. En dos grupos más se muestran representaciones gráficas que buscan "alejarse" del triángulo rectángulo, pero no se explici*ta la generalidad.*

El 55,6% de los grupos, usan *argumentos* como A1, A2, A3 y A5 (referidos al conteo, la comprobación aritmética del área y la justificación de área como equivalencia con la mitad de un rectángulo) para justificar cómo obtener el área del triángulo rectángulo. En otros casos, se muestra como mitad de un paralelogramo, que luego se ve como equivalente a un rectángulo (27,7%). En estos grupos se sigue estrictamente la fórmula del área del triángulo como base por altura sobre dos y no se encuentra evidencia de que se entienda la fórmula como la longitud de la base por la mitad de la longitud de la altura. Cuatro grupos (22,2%) proponen procedimientos generalizables, con argumentos como A6 y A7, para validar sus explicaciones, aunque sea de forma implícita. Uno de estos grupos (G12) justifica su respuesta usando además el argumento A4. El grupo G14 usa un triángulo isósceles y el G16 usa dos casos (triángulo rectángulo isósceles y no isósceles). Estos grupos establecen equivalencias generales mediante descomposición y composición. El grupo G4 afirma que la simple verificación de uno o más ejemplos para el cálculo de área no permite generalizar la relación.

En cuanto a la validación, se constata que el 83,3% de los grupos realizan justificaciones que se sitúan en el *empirismo ingenuo* en el sentido de Balacheff (1987). Estos grupos sustentan la validez de sus respuestas en la verificación de la relación en algunos casos con medidas particulares o bien no llegan a justificar la relación. Y se basan en la comprobación aritmética. Se asigna a estos grupos en el N1 de generalización. Un 11,2% de los grupos propone justificaciones que podemos asimilar a la noción de *experiencia crucial*. Estos grupos situados en el N2 de generalidad, verifican sus proposiciones en un caso o dos, asumiendo que, si la relación se cumple en dicho caso, funcionará siempre. Estos grupos (G4, G14 y G16) se separan del ejemplo inicial (triángulo rectángulo) y hacen comprobaciones en otro tipo de triángulos (ver figura 2). Finalmente, se encuentra que sólo un grupo (G12) es asignado al N3 de generalización. Este grupo realiza un proceso de validación que puede considerarse como *ejemplo genérico* (Balacheff, 1987) En efecto, este grupo selecciona un caso "genérico" (triángulo obtusángulo escaleno) y explica sus razones mostrando diversas transformaciones para justificar la validez de la relación: el área de un triángulo equivale a multiplicar la base por la mitad de su altura (figura 1). El grupo G12, es el único que consigue visualizar el área del triángulo como producto de la base por la mitad de la altura, estableciendo paso a paso una descomposición y composición en el caso de un triángulo escaleno como ejemplo genérico.

CONSIDERACIONES FINALES

El análisis realizado (elementos de la configuración epistémica- tipos de validación) han permitido caracterizar el conocimiento matemático de los futuros maestros, particularmente los procesos de validación. Se ha observado que las prácticas, argumentos y estrategias visuales puestas en acción por los futuros maestros mayoritariamente son las correspondientes a un empirismo ingenuo. Un único grupo supera la simple comprobación empírica como forma de validación. Balacheff (1987) indica que la expresión de una experiencia mental, refiriendo a la última categoría de su clasificación (ejemplo genérico) requiere construcciones cognitivas y lingüísticas complejas. Quizás eso explica que en nuestro estudio ningún grupo se ubica en dicha categoría. Se constata un conocimiento débil de los futuros maestros respecto la demostración, así como la complejidad onto-semiótica al relacionar los procesos de argumentación, visualización y prueba (Fernández, 2013; Haj-Yahya, y Hershkowitz, 2013). Se reconoce la limitación de la mirada sobre el trabajo en grupo en cuanto no ha permitido reportar resultados individualizados. Se espera seguir profundizando en el tema del uso de procesos visuales, analizando su significado, para brindar oportunidades de aprendizaje a los futuros maestros de manera que consideren estos procesos como una herramienta poderosa para estudiar la validez de las afirmaciones matemáticas y la necesidad de involucrar a los niños en estos estudios desde la educación primaria.

Agradecimientos

Este estudio se ha desarrollado en el marco de los proyectos PID2019- 104964GB-I00 (MICINN) / PID2021-127104NB-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE)/ 2017-SGR-101 y 2017-SGR-1353.

Referencias

Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Bakker, A. y Hoffmann, M. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 333-358. https://doi.org/10.1007/s10649-005-5536-8

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research methods in education.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203029053

De Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M. L., Martínez, S. y Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 53-70.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). SEIEM.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). SEIEM.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the learning of Mathematics, 39*(1), 38- 43.

Ginsburg, A., Leinwand, S., Anstrom, T. y Pollock, E., (2005). *What the United States can learn from Singapore's world-class mathematics system (and what Singapore can learn from the United States): An Exploratory Study*. American Institutes for Research.

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz y M. De la Fuente. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Hanna, G. y Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives, *ZDM Mathematics Education, 39*, 73-78. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0005-0

Haj-Yahya, A. y Hershkowitz, R. (2013). When visual and verbal representations meet-The case of geometrical figures. En A.M. Lindmeier, A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 409-416).

Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* (pp. 161-204). Springer https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_6

Manouchehri, A. y Sriraman, B. (2015). Mathematical Cognition: In Secondary Years (13-18). En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 505-520). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100015

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Sense Publishers.

Pino-Fan, L. Assis, A. y Castro, W. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11*, 1429-1456. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a

Richard, P. (2004). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques.* Serge Lang.

PERCEPCIÓN Y REFLEXIÓN DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS SOBRE ACCIONES QUE PROMUEVEN UN APRENDIZAJE AUTORREGULADO EN EL AULA

Perception and reflection of future mathematics teachers on actions that promote self-regulated learning in the classroom

Hidalgo-Moncada, D.[a], Díez-Palomar, J.[b] y Vanegas, Y.[c]

[a,b] Universidad de Barcelona, [c] Universidad de Lleida

Resumen

Dentro de las competencias profesionales que los docentes deben desarrollar y monitorear durante su vida, las competencias transversales como la autorregulación, han tomado relevancia debido a los cambios constantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este estudio se analiza y describe la percepción de un grupo de futuros profesores de matemáticas respecto a la promoción del aprendizaje autorregulado en sus clases, utilizando una metodología mixta con datos recogidos mediante un cuestionario previamente elaborado y validado. Los resultados indican que los futuros profesores promueven más frecuentemente el trabajo cooperativo y la identificación de errores, y menos frecuentemente que sus estudiantes analicen su estado y forma de aprendizaje. El desarrollo del cuestionario permitió que este grupo muestra reflexionara respecto a su práctica en el aula, identificando aspectos de la autorregulación que implementarán en su quehacer docente futuro.

Palabras clave: *aprendizaje autorregulado, enseñanza de las matemáticas, prácticas docentes, reflexión docente.*

Abstract

Within the professional skills that teachers must develop and monitor during their lives, transversal skills such as self-regulation have become relevant due to the constant changes in the teaching and learning processes. This study analyzes and describes the perception of a group of future mathematics teachers regarding the promotion of self-regulated learning in their classes, using a mixed methodology with data collected through a previously prepared and validated questionnaire. The results indicate that future teachers more frequently promote cooperative work and the identification of errors, and less frequently that their students analyze their state and way of learning. The development of the questionnaire allowed this sample group to reflect on their practice in the classroom, identifying aspects of self-regulation that they will implement in their future teaching work.

Keywords: *self-regulated learning, mathematics teaching, teacher reflection, teaching practices.*

INTRODUCCIÓN

Desde su formación inicial, los profesores deben adquirir y desarrollar una serie de competencias y conocimientos para una eficaz práctica profesional. Una de estas competencias es la autorregulación, la cual es muy relevante hoy en día dados los cambios recientes producidos en los procesos de ense-

Hidalgo-Moncada, D., Díez-Palomar, J. y Vanegas, Y. (2022). Percepción y reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre acciones que promueven un aprendizaje autorregulado en el aula. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 335-343). SEIEM.

ñanza y aprendizaje. El docente de matemáticas ha dejado de promover exclusivamente contenidos técnicos, integrando nuevos aspectos como la autonomía y pensamiento crítico, guiando a sus estudiantes hacia una actitud reflexiva (Perrenoud, 2005). Entre las competencias transversales, la autorregulación permite a los docentes reflexionar, reorientar y modificar sus propias prácticas, para ayudar a los estudiantes a obtener un mayor éxito académico en las matemáticas, promoviendo acciones que les permiten organizar y estructurar mejor sus aprendizajes (Díaz-Vicario et al., 2020). Diversos marcos teóricos han estudiado la importancia de la autorregulación del aprendizaje en la educación, coincidiendo todos en que los estudiantes obtienen mejores resultados cuando utilizan estrategias apropiadas para regular sus procesos y resultados de aprendizaje (Zimmerman, 2000).

El objetivo de esta comunicación es analizar y describir las acciones de autorregulación que futuros profesores de matemáticas (FP) dicen promover en las clases realizadas durante su prácticum en el master de formación de profesores de secundaria en una universidad catalana.

MARCO TEÓRICO

Durante su vida profesional los docentes deben desarrollar constantemente diversas competencias, las cuales les permiten identificar tanto sus necesidades como las de sus estudiantes. Para este objetivo el docente debe reflexionar sobre su práctica utilizando herramientas adquiridas desde la autorregulación (Timperley, 2008). Diversos autores han resaltado la importancia de la reflexión docente (Alsina et al., 2019; Godino et al., 2016), representándola como una herramienta para valorar la eficiencia y profundidad en que se llevan a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje (Font et al., 2018). Un carácter reflexivo en la labor docente permite analizar la calidad de las matemáticas desarrolladas en el aula (Vanegas et al., 2017), y puede contribuir a que el docente promueva un aprendizaje autorregulado con mayor frecuencia (Hidalgo-Moncada et al., 2021).

En este estudio compartimos la definición de Pintrich (2000) sobre el aprendizaje autorregulado, considerándolo como un proceso activo en el cual los estudiantes regulan su cognición, motivación y conducta, siendo guiados por sus metas de aprendizaje y por aspectos contextuales. Autores como De Corte et al. (2011); Schunk y Greene, (2018) han demostrado que enseñar a los estudiantes cómo autorregular su aprendizaje tiene un impacto positivo en su rendimiento. Sin embargo, hay evidencias de que muchos docentes no promueven o casi no promueven la autorregulación del aprendizaje en sus alumnos (Darmawan et al., 2020; Hidalgo-Moncada et al., 2021).

Existe una serie de prácticas docentes que promueven el aprendizaje autorregulado en las matemáticas, permitiendo a los estudiantes y al docente desarrollarse de forma autónoma, lo que es indispensable en la toma de decisiones frente a diversos contextos (Hidalgo-Moncada et al., 2020). Entendemos las prácticas de autorregulación como acciones que realiza el docente para regular su propia formación, y posteriormente, para guiar a sus estudiantes hacia un aprendizaje autorregulado. Kaiser et al. (2017) señalan que la autorregulación permite al docente convertirse en un buen maestro, siendo aquel que reflexiona y gestiona su propio proceso de aprendizaje. Es fundamental que dicha competencia se aborde desde la formación inicial docente (Díaz-Vicario et al., 2020).

Diferentes marcos teóricos estudian las competencias profesionales que debe desarrollar el profesor de matemáticas. Uno de ellos es el Enfoque Onto-semiótico (EOS), que es un modelo teórico sobre la cognición e instrucción matemática, que propone una serie de herramientas para la reflexión y práctica profesional (Godino et al., 2016). Entre tales herramientas se encuentran los criterios de idoneidad didáctica, que permiten al docente reflexionar sobre su práctica a través de seis facetas: epistémica; cognitiva; interaccional; mediacional; emocional y ecológica. En este estudio, dichos criterios se utilizan para caracterizar las prácticas de autorregulación en la clase de matemáticas (Hidalgo-Moncada et al., 2020).

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este estudio sigue una metodología mixta (Creswell, 2014). En él se describe la percepción que tienen 100 FP acerca de cómo promueven acciones de autorregulación en sus clases de matemáticas durante el prácticum realizado en el máster de formación de profesores de secundaria de una universidad catalana el año académico 2020- 2021. Dicho prácticum tiene una duración de dos meses aproximadamente, en el cual los FP quedan a cargo de las sesiones de matemáticas de una de las clases de educación secundaria, para las cuales diseñan he implementan una unidad didáctica. Cabe señalar que 82 de los 100 FP dicen tener algún tipo de experiencia previa (enseñando matemáticas). Para describir la percepción de los FP se ha diseñado, construido y validado el cuestionario "Promoción de la autorregulación en la clase de matemáticas". Este instrumento consta de 23 ítems con una escala Likert de 0 a 5 (donde 0 = nunca y 5 = siempre) y dos preguntas de respuesta abierta. Los ítems describen acciones que promueven la autorregulación en las matemáticas, mientras que las preguntas de respuesta abierta permiten conocer qué argumentos usan los docentes para justificar por qué promueven más o menos cada una de las acciones de autorregulación planteadas. Tales acciones se han clasificado previamente según los seis criterios de idoneidad didáctica del EOS (Hidalgo-Moncada et al., 2020). En figura 1, se muestra un ejemplo de esta caracterización.

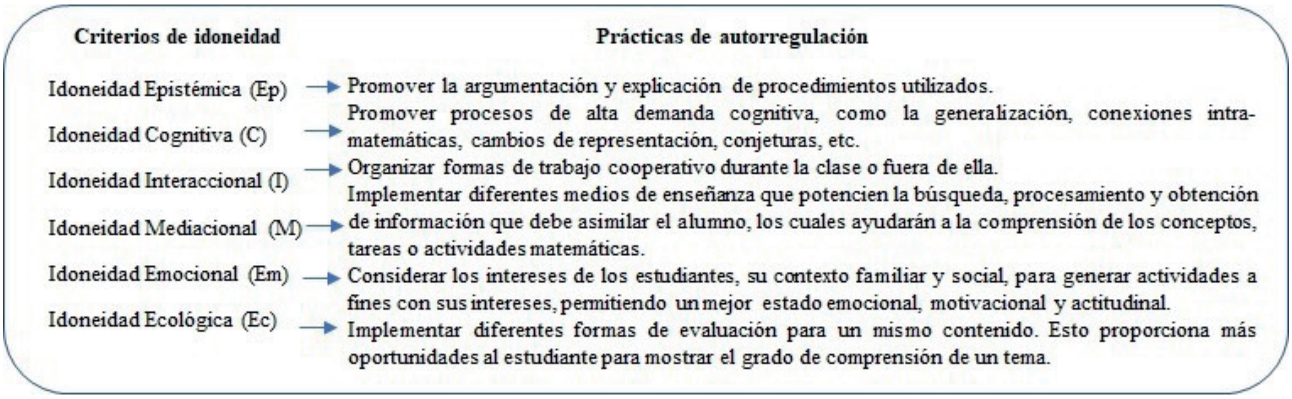


Figura 1. Caracterización de prácticas de autorregulación según los criterios de idoneidad didáctica.

Seguido de esto, se muestra un extracto del instrumento aplicado (figura 2).

	Acciones	0	1	2	3	4	5
1	Propongo a mis estudiantes la búsqueda y comparación de diferentes vías de solución para un mismo problema						
2	Invito a mis estudiantes a identificar los errores cometidos, causas de estos y cómo evitarlos						
3	Las actividades que realizo exigen a mis estudiantes argumentar y explicar los procedimientos utilizados						

Figura 2. Extracto del cuestionario "Promoción de la autorregulación en la clase de matemáticas".

Las dos preguntas de respuesta abierta fueron las siguientes: I) "*Elige 4 de las 23 afirmaciones antes mencionadas y justifica tu respuesta. Elige dos donde tu respuesta haya sido menor a 3 y dos en las que tu respuesta fue mayor a 3. Muestra un ejemplo de la forma en que lo has aplicado o justifica por qué no lo has aplicado*"; II) *Justifica tu respuesta de las últimas cuatro afirmaciones del cuestionario (20, 21, 22* *y 23). Muestra un ejemplo de la forma en que has aplicado tales acciones o argumenta por qué no las has aplicado".*

Los datos recogidos se han sistematizado y procesado utilizando la planilla Excel y el programa SPSS (25.0.0.1). Se ha cuantificado la frecuencia con la que los FP dicen promover cada una de las 23 prácticas, para luego calcular la frecuencia promedio de cada grupo de prácticas (según los seis criterios de idoneidad didáctica). Para esta contribución además de los 23 ítems con escala Likert, se ha analizado solo la primera pregunta de respuesta abierta, para la cual primeramente se han organizado las respuestas en dos grupos. El primero con aquellas justificaciones a las prácticas con valores menores a tres y el segundo con los argumentos a las prácticas con valores mayores a tres. Posteriormente, se identifica cada argumento con su práctica correspondiente. Luego se designan palabras observadas en los argumentos y finalmente se agrupan según sus características en común. A continuación, se muestra, a manera de ejemplo, un extracto de este análisis (figura 3):

Criterio de idoneidad	nº de práctica	Práctica de autorregulación	Argumento del docente	Palabras clave	Interpretación
Idoneidad interaccional	14	Invito a mis estudiantes a analizar su estado y forma de aprendizaje de las matemáticas, orientándolos a que se hagan preguntas tales como: ¿Con qué frecuencia estudio matemáticas? ¿Qué resultados obtengo? ¿cómo organizo mi estudio? ¿qué aspectos debo reforzar o cambiar de mi forma de estudio? ¿a quién le puedo pedir ayuda? ¿Por qué cometo errores? ¿cómo evitar equivocarme?	En mi unidad en concreto no lo he realizado por falta de tiempo y conocimiento, pero ahora que he finalizado la unidad y he podido ver la importancia de hacerles reflexionar y escuchar sus opiniones y poderlas debatir, creo que merece mucho la pena dedicar tiempo a reflexionar sobre estos puntos.	Tiempo y desconocimiento	El FP no implementa esta práctica y argumenta que es por falta de tiempo y desconocimiento. Sin embargo, la considera importante. Resalta la importancia de reflexionar, debatir, escuchar a los alumnos. De acuerdo a lo que dice, se reconoce una intencionalidad de implementar esta práctica en el futuro

Figura 3. Extracto de la sistematización y análisis de los datos.

RESULTADOS

Los resultados se organizan en dos partes: en la primera se muestra cómo el instrumento aplicado permitió reconocer globalmente las prácticas de autorregulación que los futuros profesores de matemáticas dicen promover según las seis idoneidades y los resultados arrojados en cada una de las 23 prácticas (P_x). En la segunda parte se profundiza en una de las idoneidades analizando los argumentos dados por los FP.

Prácticas de autorregulación promovidas por los futuros FP

A partir del análisis estadístico se pudo observar que los FP promueven la autorregulación en sus clases de matemáticas a través de acciones relacionadas con las seis idoneidades. Las acciones que los FP manifiestan promover más frecuentemente son aquellas relacionadas con la idoneidad epistémica con un promedio (m) de 3.71, seguida de la ecológica (m=3.49) y la cognitiva (m=3.19), y en menor medida aquellas acciones relacionadas con las idoneidades interaccional (m=2.95), mediacional (m=2.42) y emocional (m=2.41).

En la figura 4 se presenta de forma global los resultados obtenidos en las 23 prácticas (Px), separadas en las seis idoneidades.

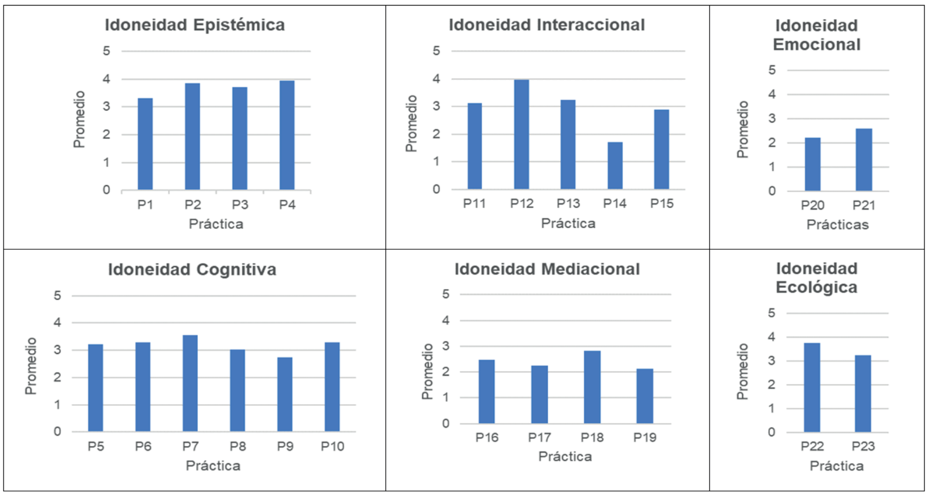


Figura 4. Frecuencia de promoción de las 23 prácticas de autorregulación.

Entre las prácticas que los FP dicen promover con mayor frecuencia se encuentran aquellas relacionadas con los criterios de idoneidad epistémico e interaccional, por ejemplo:

P2.Ep: *Invito a mis estudiantes a identificar los errores cometidos, causas de estos y cómo evitarlo.*

P4.Ep: *Muestro a mis estudiantes un ejemplo de cómo razonar un determinado tipo de problema y/o ejercicio.*

P12.I: *Planteo actividades donde se fomente el trabajo cooperativo entre mis estudiantes.*

Entre las prácticas que los FP dicen promover con menor frecuencia se encuentran aquellas relacionadas con los criterios de idoneidad mediacional y emocional, por ejemplo:

P17.M: *Oriento a mis estudiantes sobre los tiempos de estudio para ayudarlos en su organización. Por ejemplo: les digo cuanto tiempo se ocupará en la clase para la teoría y cuánto para la práctica. Cuanto tiempo se requerirá en el estudio individual para realizar alguna tarea o repasar lo aprendido o especificar que algún contenido requiere de mayor o menor tiempo de estudio.*

P19.M: *Oriento a mis estudiantes en el planteamiento de metas u objetivos en la asignatura de matemáticas. Muestro ejemplos de metas a corto y largo plazo en la asignatura de matemáticas, de manera que les sirvan de guía para que ellos se planteen otras o las complementen.*

P20.Em: *Incorporo en las clases o actividades, preguntas a mis estudiantes que fomenten su autoevaluación emocional, motivacional y/o actitudinal. Por ejemplo, ¿Cómo te sentiste durante la clase o al desarrollar la actividad? (estresado, angustiado, divertido, concentrado) ¿En qué parte de la clase o con qué conceptos te sentiste más seguro y con confianza?*

Justificaciones de los FP relativas a las prácticas de la idoneidad interaccional

En esta segunda parte de los resultados se profundiza en la *idoneidad interaccional,* ya que en ella se presenta la práctica con mayor frecuencia y aquella con menor frecuencia. Aquí daremos a conocer los argumentos que los FP dan a la alta o poca frecuencia de ciertas prácticas de autorregulación en sus clases de matemáticas.

En la figura 5, se presentan algunas justificaciones de los FP respecto a la baja promoción de la práctica de autorregulación 14, relacionada con el criterio de idoneidad interaccional. P14: "*Invito a mis estudiantes a analizar su estado y forma de aprendizaje de las matemáticas…*".

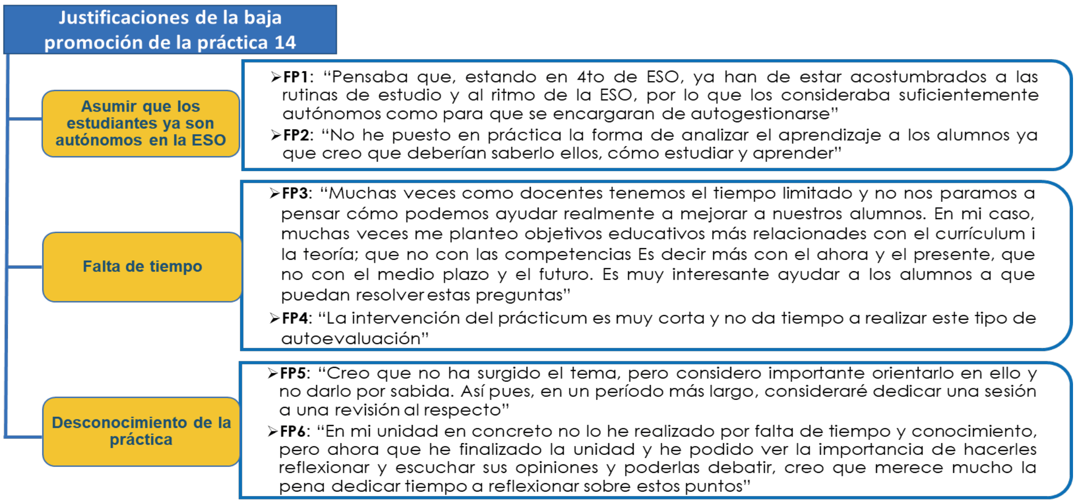


Figura 5. Argumentos de los FP a la baja promoción de P14.

Entre los argumentos que han planteado los FP se identifican tres tipos. En el primero, los docentes declaran que los estudiantes deberían saber cómo estudiar o aprender, sobre todo en el nivel de la ESO. Se observa, por un lado, que los FP asumen que sus estudiantes deberían desarrollar de manera intuitiva la habilidad de autoevaluar, monitorear o corregir su forma de aprendizaje. Por otro lado, asumen que sus estudiantes deberían haber aprendido a autorregularse en niveles anteriores a la ESO. El segundo tipo de argumentos se refiere a la falta de tiempo. Algunos FP dicen que el prácticum es demasiado breve para abordar este tipo de reflexiones con los estudiantes. Otros mencionan la propia responsabilidad al no abordar estos temas con los estudiantes por la prisa que llevan y a centrarse más en los contenidos que en este otro tipo de competencias.

El tercer tipo de argumentos se enfoca en el desconocimiento de este tipo de prácticas de autorregulación, de la importancia para sus estudiantes y cómo fomentarlas. En estos argumentos, se observa que los FP se dan cuenta de la importancia de fomentar este tipo de reflexión con sus estudiantes y manifiestan la intencionalidad de incorporar este tipo de acciones en sus futuras clases. También señalan que este es un aspecto a mejorar de su práctica docente.

En la figura 6 se muestran algunas de las razones que los FP expresan respecto a la alta promoción de la práctica de autorregulación 12, relacionada con el criterio de idoneidad interaccional P12: "Planteo actividades donde se fomente el trabajo cooperativo entre mis estudiantes".

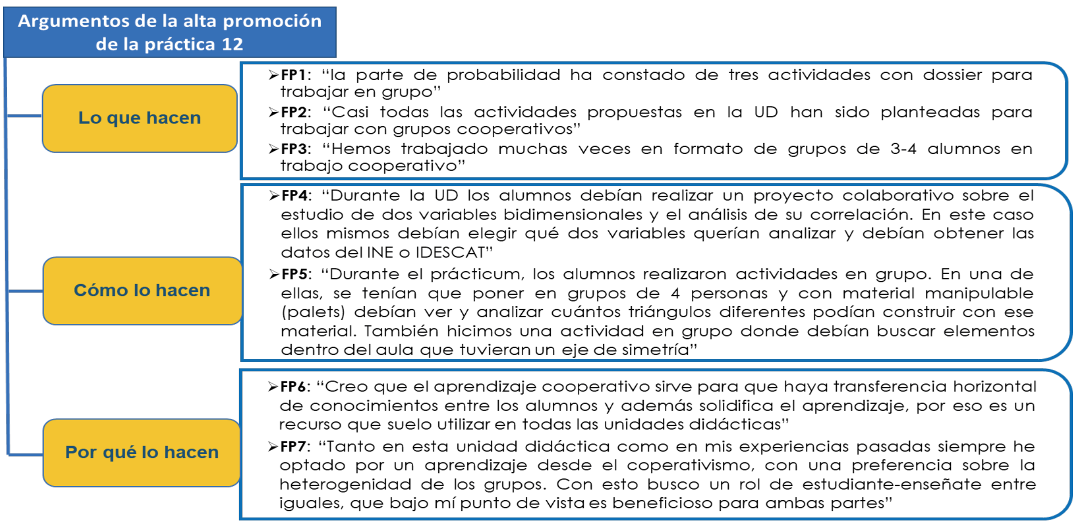


Figura 6. Argumentos de los FP de la alta promoción de la práctica 12.

Los argumentos presentados por los FP respecto a alta promoción de la práctica 12, se agrupan igualmente en tres tipos. El primero considera aquellos argumentos en los que los FP señalan “lo que hacen” respecto a esta práctica, es decir, hacen alusión a que en su unidad didáctica sí plantean actividades a sus estudiantes para trabajar de forma cooperativa, mencionan la frecuencia con que lo han hecho y en algunos casos dan a conocer en que contenido lo han planteado.

El segundo tipo agrupa aquellos argumentos en los que los FP señalan “cómo” han fomentado esta práctica, a través de qué tipo de actividades y cómo la han desarrollado con sus estudiantes. Por ejemplo, el FP5 describe la actividad, el contenido a tratar, cómo sus estudiantes debían desarrollarla y que disponían de material manipulativo.

En el tercer tipo, se ubican los argumentos de los FP que justifican “por qué” creen ellos que es importante fomentar estas prácticas con los estudiantes. Señalan que el trabajo cooperativo es beneficioso para el aprendizaje. Por ejemplo, el FP6 alude a que el trabajo cooperativo permite solidificar el aprendizaje. Por otro lado, el FP7 indica que en el trabajo cooperativo el estudiante toma el doble rol de estudiante-enseñante, que es beneficioso para su aprendizaje.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Como plantean De Corte et al. (2000), la autorregulación es una habilidad indispensable en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues permite al docente guiar a sus estudiantes en la elección de estrategias para el desarrollo de diversas tareas matemáticas, fomentando la autonomía y reflexión. Sin embargo, la investigación muestra que los estudiantes no aprenden a autorregular su aprendizaje de forma espontánea. Este estudio ha descrito la percepción de un grupo de FP respecto a la promoción del aprendizaje autorregulado en las matemáticas. Se ha observado que estos FP fomentan la autorregulación desde distintos aspectos involucrados en la práctica docente. Con mayor frecuencia promueven en sus estudiantes la identificación de errores y la argumentación de los procedimientos utilizados, aspectos relacionados con la idoneidad epistémica. Y en menor medida promueven que sus estudiantes aprendan a analizar su estado y forma de aprendizaje, así como también los aspectos emocionales. Reforzar estos aspectos en la formación de los profesores para que ellos luego los promuevan con sus estudiantes se vuelve esencial. Como señala Sanmartí (2006; 2007) “lo más importante es aprender a autoevaluarse” (p.9), refiriéndose a que los estudiantes reflexionen sobre sus objetivos, las estrategias de pensamiento y de acción para llevar a cabo su aprendizaje, además de apropiarse de los criterios de evaluación. Según Sanmartí (2019) pocas veces el alumnado tiene claro lo que aprenderá con las tareas de clase y por qué las realiza. Ella sugiere que el profesor use el portafolio para compartir los objetivos de aprendizaje y recoger las percepciones de los estudiantes para que ellos puedan autorregularse.

Se ha observado que la propia aplicación del cuestionario ha permitido a los FP reflexionar respecto a su práctica en el aula, ya que en sus argumentos señalan que no conocían estas prácticas de autorregulación, su importancia y cómo fomentarlas en sus estudiantes. Añaden además que son aspectos que mejorarían de su prácticum y que implementarán este tipo de acciones en sus clases futuras, fomentando así la reflexión en sus estudiantes.

Por otra parte, los argumentos que dan los FP sobre su alta promoción del trabajo cooperativo en sus estudiantes se relacionan con la caracterización planteada por Johnson et al. (1999) respecto a los grupos cooperativos. En sus argumentos los FP describen como llevan a cabo el trabajo cooperativo, desde la frecuencia con que lo hacen, hasta el tipo de actividades planteadas. Según estas y otras características estos autores describen a grupos informales (tiempo de ejecución inferior a una clase), grupos formales (tiempo de ejecución superior a una clase) y grupos base (tiempo de ejecución anual). En trabajos futuros se profundizará en este tipo de análisis, ya que tal y como la literatura lo indica, el trabajo cooperativo es impulsor del aprendizaje autorregulado (Sánchez y Casal, 2016). Esperamos seguir indagando sobre la autorregulación como competencia transversal en el desarrollo profesional del profesor de matemáticas y cómo abordarla en los programas de formación docente.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos: PID2019-104964GB-100 y PID2021-127104NB-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y de las actividades del grupo: SGR-2017-101. Además, agradecemos el financiamiento de ANID/PFCHA nro. 72200072 (Chile).

Referencias

Alsina, Á., Batllori, R., Falgàs, M. y Vidal, I. (2019). Marcas de autorregulación para la construcción del perfil docente durante la formación inicial de maestros. *Revista Complutense de Educación, 30*(1), 55-74. https://doi.org/10.5209/RCED.55466

Creswell, J. W. (2014). *A concise introduction to mixed methods research*. SAGE publications.

Darmawan, I. G. N., Vosniadou, S., Lawson, M. J., Van Deur, P. y Wyra, M. (2020). The development of an instrument to test pre-service teachers' beliefs consistent and inconsistent with self-regulation theory. *British Journal of Educational Psychology*, *90*(4), 1039-1061. https://doi.org/10.1111/bjep.12345

De la Fuente, J. y Justicia, F. J. (2003). Regulación de la enseñanza para la autorregulación del aprendizaje en la Universidad. *Aula abierta*, *82*, 161-172.

De Corte, E., Verschaffel, L. y Op 'T Eynde, P. (2000). Self-regulation: A Characteristic and a Goal of Mathematics Education. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, y M. Zeidner (Eds.), *Handbook of Self-regulation* (pp. 687-726). Academic Press.

De Corte, E., Mason, L., Depaepe, F. y Verschaffel, L. (2011). Self-regulation of mathematical knowledge and skills. En B. J. Zimmerman y D. H. Schunk (Eds.), *Handbook of self-regulation of learning and performance* (pp. 155-172). Routledge.

Díaz-Vicario, A., Mercader, C., Boixader, M., Cano, E. y Pons, L. (2020). *Pràctiques per a l'autoregulació de la tasca docente dels i les mestres. Material de suport*. Universitat de Barcelona.

Font, V., Breda, A., Seckel, M. y Pino-Fan, L. (2018). Análisis de las reflexiones y valoraciones de una futura profesora de matemáticas sobre la práctica docente. *Revista de Ciencia y Tecnología, 34*(2), 62-75.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM.

Hidalgo-Moncada, D., Díez-Palomar, J. y Vanegas, Y. (2020). Formación de maestros de educación primaria en el contexto de confinamiento: la importancia del aprendizaje autorregulado en las matemáticas. *Magister: Revista de Formación del Profesorado e Investigación Educativa*, *32*(1), 40-48. https://doi.org/10.17811/msg.32.1.2020.40-48

Hidalgo-Moncada, D., Vanegas, Y. y Díez-Palomar, J. (2021). Prácticas de autorregulación del aprendizaje de las matemáticas promovidas por futuros profesores. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 335-342). SEIEM.

Johnson, D. W., Johnson, R. T. y Holubec, E. J. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Paidós.

Kaiser, G., Jentsch, A., Meyer, D. y Yang, X. (2017). Professional competencies of (future) teachers – the teds-m studies. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh y B. H. Choy, (Eds.), *Procceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 90-95).

Perrenoud, P. (2005). *Escola e cidadania: O papel da escola na formação para a democracia*. Artmed.

Pintrich, P. R. (2000). Multiple goals, multiple pathways: The role of goal orientation in learning and achievement. *Journal of Educational Psychology, 92*(3), 544-555. https://doi.org/10.1037/0022-0663.92.3.544

Sanmartí, N. (2007). *10 Ideas clave. Evaluar para aprender*. Ed. Graó

Sanmartí, N. (2019). Avaluar la competència, avaluar per ser més competent. *Anuari de l'Educació de les Illes Balears*, (2019), 16-27.

Sanmartí, N., Simón, M. y Márquez, C. (2006). La evaluación como proceso de autorregulación: diez años después. *Alambique: Didáctica de las Ciencias Experimentales*, *48*, 32-41.

Sánchez, I. y Casal, S. (2016). El desarrollo de la autonomía mediante las técnicas de aprendizaje cooperativo en el aula de l2. *Porta Linguarum*, *25*, 179-190. https://doi.org/10.30827

Schunk, D. H. y Greene, J. A. (Eds.) (2018*). Handbook of self-regulation of learning a performance* (2nd ed.). Routledge.

Timperley, H. (2008). *Teacher professional learning and development*. International Academy of Education. International Bureau of Education.

Vanegas, Y., Giménez, J. y Font, V. (2017). Conexiones matemáticas en la reflexión sobre prácticas escolares. En Serna, L. Arturo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1114-1124).

Zimmerman, B. J. (2000). *Self-efficacy: An essential motive to learn. Contemporary Educational Psychology*, *25*(1), 82-91. https://doi.org/10.1006/ceps.1999.1016

PRINCIPIOS DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DESDE LA PERSPECTIVA DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA

Principles of mathematical modelling from the perspective of didactic suitability

Ledezma, C., Font, V., Sala-Sebastià. G. y Breda, A.

Universitat de Barcelona

Resumen

El objetivo de este trabajo, de corte teórico-reflexivo, es establecer potenciales relaciones entre dos tipos de principios: por una parte, los principios específicos que orientan la incorporación de la modelización matemática en los procesos instruccionales y, por otra parte, los Criterios de Idoneidad Didáctica como una propuesta de principios generales de la Educación Matemática. Para ello, primero se realizó una revisión de la literatura especializada en modelización para identificar los argumentos y principios sobre este proceso y su incorporación en la enseñanza de la matemática; luego, estos argumentos y principios se organizaron en principios más generales; y finalmente, estos principios se relacionaron con los Criterios de Idoneidad Didáctica. Como resultado principal, se sentaron las bases para el diseño de una pauta de Criterios de Idoneidad Didáctica específicos para los procesos instruccionales que incluyan la modelización matemática.

Palabras clave: *argumentos, criterios de idoneidad didáctica, modelización matemática, principios.*

Abstract

The aim of this – reflective on theory – work is to establish potential relationships between two types of principles: on one hand, the specific principles that guide the incorporation of mathematical modelling in the instructional processes and, on the other hand, the Didactic Suitability Criteria as a proposal of general principles of Mathematics Education. To do this, firstly a review on specialised literature in modelling was carried out, in order to identify the arguments and principles on this process and its incorporation in mathematics teaching; then, these arguments and principles were organised in more general principles; and finally, these principles were related to the Didactic Suitability Criteria. As a main result, the foundations for the design of a guideline of specific Didactic Suitability Criteria for the instructional processes which include mathematical modelling were laid.

Keywords: *arguments, didactic suitability criteria, mathematical modelling, principles.*

INTRODUCCIÓN

Existe un consenso internacional sobre la importancia de desarrollar competencias que permitan utilizar la matemática para la resolución de problemas del mundo real, entre las que se destaca la competencia en modelización matemática (Kaiser, 2020). Para lograr este consenso, en la literatura se han documentado una serie de argumentos, basados en los hallazgos y resultados obtenidos a partir de la investigación en modelización, a favor de su incorporación en la enseñanza de la matemática (Blum,

Ledezma, C., Font, V., Sala-Sebastià, G. y Breda, A. (2022). Principios de la modelización matemática desde la perspectiva de la idoneidad didáctica. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 345-354). SEIEM.

2011). Esto se ha manifestado, por ejemplo, en la evaluación internacional PISA, donde la modelización se considera como un aspecto central para la resolución de problemas (Organisation for Economic Co-operation and Development, 2019).

Por su parte, la Educación Matemática también ha logrado ciertos consensos sobre el quehacer de la disciplina, lo que se ha materializado en propuestas de estándares y principios generales, realizadas por diferentes investigadores e instituciones, para orientar la práctica del docente hacia su mejora. En otras palabras, se trata de una recopilación de criterios que gozan de un amplio consenso en la Educación Matemática (por ejemplo, National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Praetorius y Charalambous, 2018) y, en esta línea, es que el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) (Godino et al., 2007) ha propuesto los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) (Godino, 2013). Una de las líneas de desarrollo de este constructo es su concreción para contenidos y procesos específicos (Breda et al., 2018). En cuanto a los contenidos se destacan, entre otros, los trabajos de Aroza y colaboradores (2016) para la proporcionalidad, y de Posadas y Godino (2017) para la ecuación cuadrática. En cuanto a los procesos, en este estudio se pretende seguir una línea similar para la modelización matemática.

REFERENTES TEÓRICOS

En esta sección se presentan los dos referentes teóricos considerados en este estudio.

Modelización matemática

En términos generales, la modelización matemática es entendida como un proceso que transita desde el mundo real hacia el matemático para dar solución a una situación-problema tomada desde la realidad. Desde el plano teórico se han diseñado diferentes herramientas para su análisis, conocidas como ciclos de modelización (Borromeo, 2006), así como también han emergido distintas perspectivas sobre su implementación (Abassian et al., 2020). A lo largo de la construcción del corpus teórico sobre el que se fundamenta la modelización – donde coexisten diversas posturas al respecto (Borromeo, 2013) – se han planteado una serie de *argumentos* a favor de su inclusión en la enseñanza de la matemática – y de otras disciplinas – para favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

A modo de ejemplo, un *argumento* sería «Trabajar la modelización en la enseñanza de la matemática desarrolla la competencia en modelización matemática» (Niss y Højgaard, 2019); o, también, una serie de *argumentos* clásicos que se retoman en el trabajo de Blum (2011), en donde se plantea que el trabajo con modelización "ayuda a los estudiantes a comprender mejor el mundo; da soporte al aprendizaje matemático […]; contribuye al desarrollo de varias competencias matemáticas y actitudes apropiadas; contribuye a una imagen adecuada de la matemática" (p. 19, traducción de los autores). A su vez, estos *argumentos* han dado lugar a algunos *principios* que orientan la incorporación de la modelización en los procesos instruccionales como, por ejemplo, que una tarea de modelización debe ser «'abierta', 'compleja', 'realista', 'auténtica', así como también un 'problema' que sea 'solucionable mediante un ciclo de modelización'» (véase Borromeo, 2018, pp. 46-47).

Criterios de idoneidad didáctica

En el EOS (Godino, 2013) se entiende la *idoneidad didáctica* de un proceso instruccional como el grado en que éste (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los *significados personales* logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los *significados institucionales* pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Los CID son un constructo multidimensional que se descompone en seis *criterios* o *idoneidades* parciales, cada uno de los cuales cuenta con sus respectivos componentes, y su operatividad exige definir un conjunto de indicadores observables que permitan valorar el grado de idoneidad de cada una de las facetas del proceso instruccional. En la tabla 1 se describen los CID y se presentan los componentes de cada uno, con base en la pauta de Breda y colaboradores (2017).

Tabla 1. Criterios de idoneidad didáctica y sus componentes. Adaptado desde Breda et al. (2017).

Criterios	Descripción	Componentes
Epistémico	Para valorar si la matemática que se enseña es una 'buena matemática'.	– Errores. – Ambigüedades. – Riqueza de procesos. – Representatividad de la complejidad del objeto matemático.
Cognitivo	Para valorar, antes de iniciar el proceso instruccional, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los estudiantes.	– Conocimientos previos. – Adaptación curricular a las diferencias individuales. – Aprendizaje. – Alta demanda cognitiva.
Interaccional	Para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los estudiantes.	– Interacción docente-discente. – Interacción entre discentes. – Autonomía. – Evaluación formativa.
Mediacional	Para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso instruccional.	– Recursos materiales. – Número de estudiantes, horario, y condiciones del aula. – Tiempo.
Afectivo	Para valorar la implicación (interés, motivación) de los estudiantes en el proceso instruccional.	– Intereses y necesidades. – Actitudes. – Emociones.
Ecológico	Para valorar la adecuación del proceso instruccional al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc.	– Adaptación al currículo. – Conexiones intra e interdisciplinares. – Utilidad sociolaboral. – Innovación didáctica.

Los criterios, componentes, e indicadores de los CID se basan en los principios y estándares del NCTM, así como en las tendencias y resultados de la investigación en Educación Matemática, tal como se explica en Breda y colaboradores (2018). De este modo, constituyen una herramienta consensuada que se utiliza para estructurar la reflexión docente en los programas de formación de profesores (véase Sánchez et al., 2021) y que, en términos de este trabajo, juegan el papel de *principios* generales de la Educación Matemática. Finalmente, en el EOS se considera que potenciar la modelización es un aspecto que mejora la idoneidad didáctica del proceso instruccional (Sala et al., 2017).

Objetivos de la investigación

En este trabajo se propone como objetivo general establecer potenciales relaciones entre los *principios* generales de la Educación Matemática con los específicos de la modelización matemática. Para su concreción, se han dispuesto los siguientes objetivos específicos (OE):

- OE1: Generar, a partir de la revisión de la literatura sobre modelización matemática, un banco de *argumentos* que justifican y *principios* que guían su incorporación en los procesos instruccionales.
- OE2: Relacionar los *argumentos* y *principios* generados a partir del cumplimiento del OE1 con los criterios, componentes, e indicadores de los CID.

METODOLOGÍA

En este estudio, de corte teórico-reflexivo, se ha dispuesto de una metodología para cada OE.

Metodología del OE1

En un *primer paso* se analizaron las diferentes maneras de entender la modelización que ofrece la literatura, y se adoptó así una posición propia (véase Ledezma et al., 2021, 2022). En un *segundo paso* se realizó una revisión de la literatura especializada en modelización matemática, para así identificar los *argumentos* y *principios* consensuados por la comunidad de investigación en Educación Matemática sobre este proceso. Para este *paso*, la metodología consistió en un análisis documental (Bowen, 2009) de diferentes estudios teóricos sobre modelización matemática (Blomhøj y Jensen, 2007; Blum, 2011; Blum y Niss, 1991; Borromeo, 2018; Doerr y English, 2003; English, 2003; Kaiser, 2020; Lesh y Doerr, 2003; Niss y Højgaard, 2019; entre otros), los que se seleccionaron por su relevancia e impacto dentro de la literatura sobre este proceso. En un *tercer paso* se elaboró un banco de *argumentos* y *principios*, seleccionando los más representativos para, posteriormente, ser revisados por los autores y, de este modo, depurar y unificar los *argumentos* y *principios* similares.

Metodología del OE2

En un *cuarto paso* se agruparon los *argumentos* y *principios* obtenidos del OE1 en *principios* más generales que guíen la incorporación de la modelización matemática en los procesos instruccionales. En un *quinto paso*, estos *principios* se relacionaron con los criterios, componentes, e indicadores de los CID, para ver si estaban incluidos en ellos. Para ello, se consideraron los *principios* específicos de la modelización que no quedaron incluidos en los CID.

PRINCIPIOS DE LA MODELIZACIÓN DESDE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA

Con relación al OE1, en el *segundo paso* de la metodología se realizó una selección que, sin ser exhaustiva, es bastante amplia en cuanto a los *argumentos* y *principios* extraídos de la literatura que justifican y guían la incorporación de la modelización matemática en los procesos instruccionales. Hay que hacer constar que en esta comunicación no se pretende abarcar la totalidad de *argumentos* y *principios* existentes, sino hacer énfasis en aquéllos que tienen más amplio consenso en la comunidad de investigación en modelización matemática.

Resultados del OE1

Como un primer resultado se obtuvo, en el *tercer paso* de la metodología, un extenso banco de *argumentos* y *principios* que, en algunos casos, eran muy similares entre sí. Por ejemplo, había un ítem que decía «Prepara a los estudiantes para utilizar la matemática para la resolución de problemas, o describir aspectos de áreas o situaciones extra-matemáticas», que es muy similar al ítem «Trabajar la modelización permite a los estudiantes 'ver y juzgar' (reconocer, comprender, analizar, y evaluar) ejemplos representativos del uso de la matemática para resolver problemas del mundo real», por lo que se optó por unificarlos. Otro caso fue con los ítems «Lograr un balance entre la mínima guía del docente y la máxima independencia de los estudiantes», «Lograr un balance entre el trabajo independiente en grupos y las actividades con el grupo curso», y «Promover la enseñanza de la autonomía dirigida», los que también se optó por unificar. Después de realizar una depuración y posterior unificación de los ítems similares, se obtuvo como un segundo resultado la tabla 2.

Tabla 2. Argumentos y principios en la literatura sobre modelización matemática. Elaboración de los autores.

Argumentos y principios de la modelización matemática
01. Las aplicaciones matemáticas, la modelización matemática, y la resolución de problemas son medios idóneos para desarrollar competencias generales y actitudes en los estudiantes.
02. Realizar tareas de modelización fomenta las capacidades de exploración, creatividad, resolución de problemas, apertura mental, autosuficiencia, y autoconfianza.
03. Trabajar la modelización prepara a los estudiantes para vivir y desenvolverse como ciudadanos íntegros.
04. Trabajar la modelización permite a los estudiantes 'ver y juzgar' (reconocer, comprender, analizar, y evaluar) ejemplos representativos del uso de la matemática para resolver problemas del mundo real, además de prepararlos para utilizar la matemática en la resolución de problemas, o describir aspectos de áreas o situaciones extra-matemáticas.
05. Trabajar la modelización desarrolla la competencia en modelización matemática en los estudiantes, pues la resolución de problemas y la modelización matemática se consideran competencias fundamentales para el siglo XXI.
06. Se le debe asignar una posición apropiada a la modelización en los currículos de matemática.
07. Las tareas de modelización deben generar una imagen enriquecedora y completa de la matemática en todas sus facetas.
08. La incorporación de la modelización es adecuada para ayudar a los estudiantes a adquirir, aprender, y conservar conceptos, nociones, métodos, y resultados matemáticos.
09. La modelización proporciona motivación y relevancia a los estudios matemáticos, ya que prepara a los estudiantes para que piensen matemáticamente.
10. Una tarea de modelización debe ser 'abierta', 'compleja', 'realista', y 'auténtica', así como también un 'problema' que sea 'solucionable mediante un ciclo de modelización'.
11. El trabajo con modelización se suele desarrollar en pequeños grupos de estudiantes, a quienes se les plantea una situación-problema del mundo real.
12. El trabajo con modelización involucra un proceso cíclico, con diversos caminos para obtener una solución plausible y coherente con el contexto de la situación-problema planteada, en que se promueva una estrategia de cuatro pasos (entender la tarea; buscar la matemática en juego; utilizar la matemática; explicar los resultados) para el desarrollo de tareas.
13. Se debe lograr un balance entre la mínima guía del docente y la máxima independencia de los estudiantes, así como un balance entre el trabajo independiente en grupos y las actividades con el grupo curso, promoviendo la enseñanza de la autonomía dirigida.

La tabla 2 se puede considerar como un conjunto de justificaciones (*argumentos* y *principios*) sobre la incorporación de la modelización matemática en los procesos instruccionales, bajo el *principio* general «Se debe incorporar la modelización matemática», entre otras razones, porque es un proceso que permite la realización de otros procesos relevantes de la actividad matemática.

Resultados del OE2

Con relación al OE2, en el *cuarto paso* de la metodología – dada la amplitud de *argumentos* y *principios* obtenidos – se agruparon los ítems de la tabla 2 en *principios* más generales. Para ello, se distinguió entre los ítems con una estructura *argumentativa* de aquéllos con una estructura de *principios*. Por ejemplo, el ítem 09 de la tabla 2, tal como está formulado, es un *argumento* para que se incorpore la modelización, basado en un el presupuesto de que «es bueno motivar a los estudiantes» y, por tanto, implementando la modelización hay más posibilidades de motivarlos. En esencia, el *principio* que se extrae de este ítem es uno de tipo motivacional. Por otra parte, cuando el ítem está formulado como un *principio* como, por ejemplo, el ítem 10 de la tabla 2, se puede concluir que se debe procurar que los estudiantes realicen una actividad matemática con: a) una alta demanda cognitiva (Aprendizaje); b) una riqueza de procesos; y c) con problemas relacionados al contexto extra-matemático. De este modo, partir de la agrupación de los ítems de la tabla 2, se obtuvo como un tercer resultado la tabla 3.

Tabla 3. Principios generales de la modelización matemática. Elaboración de los autores.

Principios	**Ítems**
Aprendizaje	07, 08, 09, 10
Competencial	01, 05
Curricular	01, 06, 07
Extra-matemático	04, 10, 12
Formación ciudadana	03
Interaccional	11, 13
Motivacional	01, 02, 09
Riqueza de procesos	01, 02, 04, 05, 09, 10, 12

A continuación, en el *quinto paso* de la metodología se relacionaron los resultados de la tabla 3 con los criterios, componentes, e indicadores de los CID. Para ello, se tuvo en cuenta cuál fue el proceso de generación de los CID (como se ha declarado en la sección teórica, son una propuesta de *principios* basados en consensos de la comunidad educativa) y el papel relevante de la investigación en modelización matemática para su construcción. De este modo, fue posible relacionar los *principios* e ítems de la tabla 3 con los criterios, componentes, e indicadores de los CID (ver tabla 1).

Así como en la Educación Matemática hay una tendencia a la incorporación de la modelización en los procesos instruccionales, del mismo modo la hay por la resolución de problemas, las conexiones, la argumentación, la creatividad, etc. Este consenso, en términos de los CID, se ha recogido por el criterio epistémico, específicamente, por el componente 'Riqueza de procesos', mediante el indicador «La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática». En la tabla 2 se pueden encontrar, por una parte, algunos ítems que no aportan demasiada concreción a los criterios, componentes, e indicadores de los CID. Por ejemplo, el ítem 13 sugiere, en síntesis, que se debe desarrollar la autonomía de los estudiantes; sin embargo, este aspecto ya ha sido recogido por el criterio interaccional, específicamente, por el componente 'Autonomía'. Por otra parte, sí se encuentran otros que aportan una concreción relevante cuando se está implementando el proceso de modelización, en particular, el ítem 10, ya que permite caracterizar una tarea de este tipo y, como indicador específico, no ha sido recogido por los CID. Esto se debe a que gran parte de los *argumentos* y *principios* propuestos desde la perspectiva de la modelización matemática han sido tomados en cuenta y, por lo tanto, se han asimilado como parte de los criterios, componentes, e indicadores de los CID. De este modo, a partir de la relación establecida entre la tabla 3 con los CID, se obtuvo como un cuarto resultado la tabla 4.

Tabla 4. Relación entre los principios de la modelización matemática con los CID.

Criterio	**Componente**	**Indicador**	**Indicador específico para la modelización**
Epistémico	Riqueza de procesos	Se debe incorporar el proceso de modelización matemática.	10. Una tarea de modelización debe ser 'abierta', 'compleja', 'realista', y 'auténtica', así como también un 'problema' que sea 'solucionable mediante un ciclo de modelización.

Por una parte, este indicador específico se puede utilizar como retroalimentación. Concretamente, los estudiantes del Máster en Formación de Profesores de Educación Secundaria y Bachillerato (impartido por las universidades públicas de Cataluña) utilizan los CID para valorar la unidad didáctica implementada durante sus prácticas educativas. En este contexto, se han encontrado trabajos finales de máster en que los futuros profesores declaran haber trabajado la modelización en su unidad didáctica, aspecto que mejora la idoneidad epistémica del proceso instruccional. Con este indicador específico, un tutor puede retroalimentar a su estudiante para hacerle notar si, realmente, la actividad que propuso en su unidad didáctica es de modelización o es un problema matemático común.

Por otra parte, los resultados obtenidos de la tabla 4 permitieron sentar las bases para concretar el diseño de una pauta de CID específicos para los procesos instruccionales que incluyan la modelización matemática.

DISCUSIÓN Y REFLEXIONES FINALES

La construcción de la tabla 4 tuvo en consideración, como se declaró anteriormente, el proceso de generación de los CID. En particular, para el CID epistémico se ha tenido en cuenta un *principio* fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es – o puede ser – asumido por otros marcos teóricos del área. Este *principio* se puede formular como «Los *objetos matemáticos* emergen de las *prácticas matemáticas*, lo cual conlleva su complejidad» (Font et al., 2013; Rondero y Font, 2015). A partir de este *principio* es que se deriva el componente 'Representatividad de la complejidad del objeto matemático', cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas. Este componente, a su vez, se concreta en diferentes indicadores (véase Breda et al., 2017, p. 1903), cada uno de los cuales se puede considerar como un criterio específico. En otros términos, los componentes tienen un papel clasificatorio de indicadores, es decir, cada componente es un conjunto de indicadores (los cuales se pueden entender como criterios específicos de cada CID) que, globalmente, permiten conseguir el objetivo de, en el caso del componente 'Representatividad…', que en el proceso instruccional de un determinado objeto matemático se deba tener en cuenta su complejidad.

En el CID epistémico también se tiene en cuenta el componente 'Riqueza de procesos', el cual resulta de un cierto consenso en la Educación Matemática que considera que «enseñar matemática» no es simplemente enseñar resultados, sino que, también, es «enseñar a hacer matemática». En esta línea, una de las tendencias actuales es la importancia que se le da a la enseñanza de los procesos de pensamiento propios de la matemática, pues ya no se considera que la enseñanza sea una mera transferencia de contenidos. Dado que se considera que la matemática es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido, se concede una gran importancia al estudio de los procesos matemáticos y, como el caso de esta comunicación, al proceso de modelización matemática.

Como se mencionó con anterioridad, los resultados que aquí se reportan no pretenden abarcar la totalidad de *argumentos* y *principios* existentes, sino que se consideran aquéllos con más amplio consenso en la comunidad de investigación en modelización matemática. Es por esta razón que, a partir de los resultados aquí reportados, se sientan las bases para concretar el diseño de una pauta de CID específicos para los procesos instruccionales que incluyan la modelización matemática en sus secuencias didácticas, y no representan un trabajo –hasta el momento– totalmente finalizado. Dicho esto, la ampliación de esta pauta dependerá, por una parte, de la continuación de la revisión de literatura que se realice y, por otra parte, de la consiguiente depuración de los *argumentos* y *principios* que se encuentren en dicha literatura.

Agradecimientos

Este estudio fue realizado en el marco del Proyecto ANID/PFCHA nro. 72200458 (Chile), y del Proyecto de Investigación en Formación del Profesorado PID2021-127104NB-I00 (MINECO/FEDER, UE).

Referencias

Abassian, A., Safi, F., Bush, S. y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning, 12*(1), 53-65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360

Aroza, C. J., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. *AIRES: Avances en Innovación e Investigación – Revista de Educación Secundaria, 6*(1).

Blomhøj, M. y Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study* (pp. 45-56). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_3

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA 14* (pp. 15-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37-68. https://doi.org/10.1007/bf00302716

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 86-95. https://doi.org/10.1007/bf02655883

Borromeo, R. (2013). Mathematical modelling in European education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 4*(2), 18-24.

Borromeo, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal, 9*(2), 27-40. https://doi.org/10.3316/QRJ0902027

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA: Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Doerr, H. M. y English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), 110-136. https://doi.org/10.2307/30034902

English, L. (2003). Mathematical modelling with young learners. En S. J. Lamon, W. A. Parker y K. Houston (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life – ICTMA 11* (pp. 3-17). Horwood.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education, 39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2da ed.) (pp. 553-561). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_101

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2021). Un análisis onto-semiótico de la actividad matemática del proceso de modelización. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 367-375). SEIEM.

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2022). Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. *Mathematics Education Research Journal*. Artículo individual. https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3

Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-33). Lawrence Erlbaum.

Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics, 102*(1), 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Autor.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/b25efab8-en

Posadas, P. y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae: Revista de Investigación en Didácticas Específicas, 1*, 77-96. https://doi.org/10.1344/did.2017.1.77-96

Praetorius, A. K. y Charalambous, C. Y. (2018). Classroom observation frameworks for studying instructional quality: Looking back and looking forwards. *ZDM – Mathematics Education, 50*(3), 535-553. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0946-0

Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 29-49. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

Sala, G., Font, V., Giménez, J. y Barquero, B. (2017). Inquiry and modelling in a real archaeological context. En G. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 325-335). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_28

Sánchez, A., Font, V. y Breda, A. (2021). Significance of creativity and its development in mathematics classes for preservice teachers who are not trained to develop students' creativity. *Mathematics Education Research Journal*. Artículo individual. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00367-w

DESARROLLO DE LA AUTOEFICACIA PERCIBIDA A TRAVÉS DEL ESTUDIO DE CLASES EN FORMACIÓN INICIAL DE DOCENTES DE EDUCACIÓN INFANTIL

Development of self-efficacy perceived through the lesson study in early childhood preservice teacher education

Lendínez, E. M., García, F. J., Lerma, A. M. y Abril, A. M.

Universidad de Jaén

Resumen

Como docentes universitarios a cargo de la formación inicial del profesorado de Educación Infantil estamos interesados en el desarrollo de dispositivos de formación profesional, así como en los instrumentos que permitan mostrar la eficacia de estos dispositivos. En esta comunicación pretendemos mostrar cómo el estudio de clases, bajo el paradigma didáctico de la Teoría de las Situaciones Didácticas, permite desarrollar el grado de la autoeficacia percibida de futuros docentes. Para ello, se organiza un proceso de estudio de clases basado en la Teoría de las Situaciones Didácticas y se estudia el impacto que este dispositivo de formación profesional tiene en la autoeficacia percibida de los futuros docentes a través de un cuestionario de carácter cuantitativo.

Palabras clave: *autoeficacia percibida, Educación Infantil, estudio de clases, formación inicial de maestros, Teoría de las Situaciones Didácticas.*

Abstract

As university teachers in charge of the initial education of prospective Early Childhood Education teachers, we are interested in the development of professional education devices, as well as in the instruments that allow us to show the effectiveness of these devices. In this paper we intend to show how the Lesson Study, under the didactic paradigm of the Theory of Didactic Situations, allows to develop the degree of perceived self-efficacy of prospective teachers. For this purpose, we organize a process of Lesson Study based on the Theory of Didactic Situations and we study the impact that this professional education device has on the perceived self-efficacy of prospective teachers by means of a quantitative questionnaire.

Keywords: *early childhood education, lesson study, perceived self-efficacy, preservice teacher education, Theory of Didactical Situation.*

INTRODUCCIÓN

La formación profesionalizante en el ámbito de la formación inicial de los docentes es crucial para mejorar el aprendizaje de los estudiantes (*European Commission*, 2010). En consecuencia, es una de las cuestiones más relevantes en la investigación educativa, lográndose importantes avances tanto en la comprensión del crecimiento profesional de los docentes (Clarke y Hollingsworth, 2002), como en

Lendínez, E. M., García, F. J., Lerma, A. M. y Abril, A. M. (2022). Desarrollo de la autoeficacia percibida a través del estudio de clases en formación inicial de docentes de Educación Infantil. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 355-362). SEIEM.

los factores que lo favorecen (Tirosh y Graeber, 2003). Un subdominio específico y significativo es el dedicado al aprendizaje docente en entornos colaborativos y, en particular, a través de comunidades profesionales orientadas a la indagación (Robutti et al., 2016).

Entre los diferentes enfoques, el estudio de clases (EC en adelante) ha sido reconocido como una poderosa estrategia para el desarrollo del aprendizaje docente (Lewis et al., 2012), y el número de publicaciones en los últimos 20 años en torno a esta práctica profesional es cada vez mayor.

El EC en Japón es una práctica profesional docente que se ha desarrollado durante más de un siglo y que comúnmente se interpreta como una parte de la vida escolar cotidiana (Fujii, 2016; Shimizu, 2014). Esta práctica atrajo el interés de los formadores de maestros a finales de los años noventa, principalmente a partir del estudio TIMSS y el trascendente trabajo de Stigler y Hierbert (1999).

En el intento de implementar el EC fuera de Japón, los investigadores han detectado múltiples dificultades (Fujii, 2014). Stigler y Hiebert (2016) consideran que no se trata sólo de importar una práctica, sino que se trata de un verdadero proceso de adaptación y de rediseño, que a menudo da lugar a versiones más o menos distorsionadas. En una revisión sistemática de casi 100 artículos sobre EC fuera de Japón, Seleznyov (2018) concluye que no hay un consenso internacional sobre el EC, en relación a cómo este se interpreta en Japón. De hecho, cuando se implementa el EC en otros países, encuentra que faltan componentes importantes del mismo, precisamente aquellos que distinguen al EC, como un proceso de investigación, de un simple proceso de desarrollo profesional colaborativo.

A pesar de que originalmente el EC estaba más conectado con el desarrollo profesional de docentes en ejercicio, actualmente existe una sólida agenda de investigación que explora esta práctica también para la formación inicial de docentes, en el contexto de estrategias de formación docente que podrían contribuir a superar la brecha existente entre el conocimiento teórico (construido, principalmente, en el aula universitaria) y el conocimiento práctico (construido, principalmente, en la escuela). En este sentido, Helgevold y Wilkins (2020) argumentan que esta polarización es simplista, pues los resultados de investigaciones muestran que los programas de formación de docentes son más efectivos si están basados en fuertes sinergias teoría-práctica y relaciones colaborativas entre universidades y escuelas.

En el campo de la formación inicial del profesorado, Larssen et al. (2018) realizaron una revisión de la literatura sobre el uso del EC. Entre otras cuestiones, estos autores identificaron una falta de claridad en la definición del aprendizaje docente y el uso de las teorías del aprendizaje (aunque están muy orientadas hacia las nociones de perspectivas sociales y colaborativas sobre el aprendizaje, con un enfoque en los procesos de investigación y reflexión). Por lo tanto, sugirieron que la investigación debería ser más explícita en cuanto a cómo se define y se observa el aprendizaje en los procesos de EC.

En otra revisión de la literatura, centrada en la formación inicial del profesorado de matemáticas, Da Ponte (2017) señala varias cuestiones que merecen más atención, como la definición de los objetivos y los resultados esperados del proceso de EC, el establecimiento de las relaciones entre los participantes, el problema de la escala, o las cuestiones conectadas con la adaptación y simplificación del proceso de EC. Este autor sugiere que, dado que un solo EC no puede lograr todo el espectro de objetivos de la preparación de los futuros maestros, el EC en formación inicial debe tener un objetivo formativo que debe definirse explícitamente. Esto es consistente con el informe de la OCDE de 2011, que señaló que los programas de formación inicial de profesorado deben basarse en perfiles claros y concisos sobre lo que se espera que los docentes sepan y sean capaces de hacer (Helgevold y Wilkins, 2020).

Nuestra investigación se centra en la formación inicial de docentes de Educación Infantil, pero, de acuerdo con lo anterior, adoptamos explícitamente, por un lado, la Teoría del Aprendizaje Social de Bandura, como modelo de aprendizaje profesional de los futuros maestros y, en particular, el constructo de la autoeficacia percibida (Bandura, 1977). Por otro lado, la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD en adelante) (Brousseau, 2002), como marco de referencia del conjunto de conocimientos y destrezas profesionales a desarrollar en los futuros docentes.

Teniendo en cuenta que el nivel de autoeficacia percibida de un profesor se interpreta como un juicio acerca de su capacidad para hacer que los alumnos se involucren en un cierto tipo de actividad (matemática), dando lugar a un determinado aprendizaje (Tschannen-Moran y Hoy, 2001), en esta comunicación nos preguntamos sobre el impacto del EC en la autoeficacia percibida de futuros maestros para involucrarse en el diseño y la implementación de procesos de aprendizaje matemático en la escuela infantil según el modelo de la TSD. Además, nos interesamos por las bondades del EC frente a otras experiencias de iniciación profesional (prácticum).

EL ESTUDIO DE CLASES BAJO EL PARADIGMA DE LA TSD

Todo proceso de EC activa un proceso de investigación que culmina con el diseño de una intervención en el aula, la implementación efectiva de la misma y una discusión posterior. De forma más o menos explícita, diseñar y llevar a cabo una intervención implica asumir ciertos principios sobre qué son las matemáticas y cómo enseñarlas, es decir, sobre cierto modelo epistemológico y didáctico (García et al., 2019). Por ejemplo, en la forma en la que el EC se desarrolla de forma mayoritaria en Japón, se asumen un conjunto de principios epistemológicos y didácticos básicos, que se describen como la resolución estructurada de problemas (Fujii, 2016).

Cuando el EC se implementa fuera de Japón, observamos una gran variedad de aproximaciones a las matemáticas y su enseñanza. Por ejemplo, en ocasiones se intenta replicar el EC manteniendo la aproximación japonesa mientras que, en otras ocasiones, se diseñan procesos de EC bajo otras concepciones de las matemáticas y su enseñanza.

La noción de paradigma didáctico, recientemente introducida por Gascón y Nicolás (2021), permitiría hacer explícitas estas 'concepciones' para así poder cuestionar cómo influyen en el diseño e implementación de procesos de EC, así como para poder determinar qué tipo de conocimiento profesional desarrollarían los docentes que en ellos participan.

Brevemente, un paradigma didáctico, vigente o potencial en una institución, está caracterizado por cuatro componentes: un modelo epistemológico (ME) de las matemáticas que este asume; los fines educativos (F), relativos a la educación matemática, que propugna; los medios didácticos (MD) que supone adecuados para alcanzar estos fines; y los fenómenos didácticos (φ) a los que el paradigma responde (Gascón y Nicolás, 2021).

En nuestra investigación, en la medida en que pretendemos desarrollar el conocimiento profesional de los estudiantes para maestro (E_m en adelante) de acuerdo con los principios del paradigma didáctico de la TSD, consideramos que tanto el diseño del proceso mismo de EC como de las herramientas que nos permitan indagar acerca de tal desarrollo, deben considerar, de forma explícita, los elementos que definen este paradigma. Señalamos como rasgos importantes de la TSD, la interpretación del conocimiento matemático en términos de la solución óptima a un conjunto de situaciones, de las que emana el sentido de dicho conocimiento (ME); la intención de una construcción autónoma, y con sentido, de los conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes (F); la noción de situación adidáctica como medio didáctico para lograr estos fines, que establece un conjunto roles determinados del docente (devolución de la situación, gestión de las variables didácticas, institucionalización de los saberes) (MD).

Como argumentamos en García et al. (2019), diseñar e implementar un EC bajo este paradigma afectaría al tipo de cuestiones de investigación que los E_m pueden formular, al proceso de indagación que conduciría al diseño de una intervención en el aula, a la estructura y el contenido de dicha intervención (plan de clase), a qué observar durante la implementación de la clase, a qué es valioso discutir acerca de lo acontecido en ella y, finalmente y en conjunto, al tipo de aprendizaje profesional que de todo el proceso se deriva (figura 1).

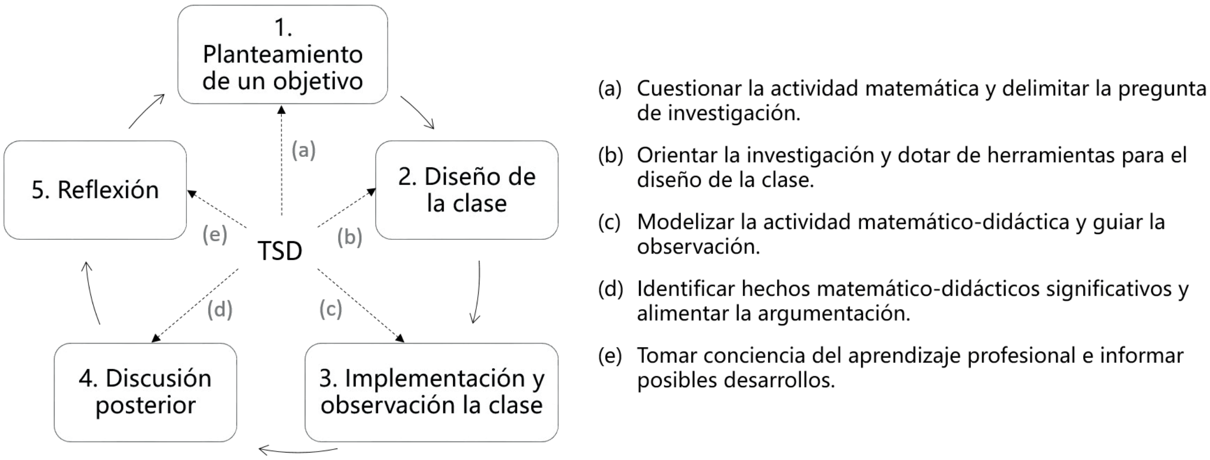


Figura 1. Influencia, en las diferentes etapas del estudio de clases, del paradigma didáctico asumido (adaptado de Fujii, 2016).

En particular, y en relación con el problema de investigación que abordamos, implica identificar tareas profesionales propias del paradigma de la TSD para indagar si el EC afecta al nivel de autoeficacia percibida de los E_m para involucrase en estas tareas, dando lugar al tipo de actividad matemática y al tipo de aprendizajes matemáticos que este paradigma propugna.

METODOLOGÍA

Se formaron 8 grupos de EC de entre 5 y 7 E_m de 4º curso del Grado en Educación Infantil en la Universidad de Jaén. En total participaron 47 E_m. Todos habían tenido acceso al *logos* de la TSD, pues ya habían cursado la asignatura "Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil", organizada bajo una estructura de clases teóricas y clases prácticas, próxima al paradigma monumentalista (Chevallard, 2015). En particular, los E_m tuvieron acceso a cómo se interpreta y se organiza la enseñanza de los primeros conocimientos numéricos en la escuela infantil (situaciones fundamentales, variables didácticas, estrategias de los niños…), incluyendo tanto conocimiento de tipo teórico como ejemplos concretos de situaciones adidácticas, pero sin la posibilidad de experimentar dicho modelo en la escuela infantil.

Durante 10 semanas (3 horas/semana), cada grupo de EC abordó conjuntamente las tareas profesionales propias del EC en los diferentes sistemas paradidácticos (García et al., 2019; Lendínez et al., 2018), centrados en el aprendizaje de los primeros conocimientos numéricos por parte de niños de 3, 4 y 5 años, y asesorados por los autores del presente trabajo en el papel de expertos externos (*koshi*). Recopilamos datos a partir de plantillas prediseñadas facilitadas a cada grupo de EC, en las que los E_m tenían que registrar sus discusiones y las decisiones adoptadas. En particular, la formulación de la pregunta de investigación (conectada con un conocimiento matemático concreto propio de la escuela infantil) y el diseño del plan de clase (que debía incluir una estructura en fases de la situación adidáctica, así como las variables didácticas y la anticipación de las estrategias de los niños). Posteriormente, los E_m implementaron la clase (en dos escuelas públicas de la ciudad de Jaén) y tuvieron una discusión posterior, en la que también intervenimos como expertos externos.

Según hemos argumentado en el apartado precedente, desarrollamos un cuestionario ad hoc que recogía características esenciales del paradigma de la TSD. De acuerdo con Bandura (2006), formulamos cada ítem como oraciones “Puedo hacer...”, que incluían un tipo de tarea propia del diseño de situaciones y de la enseñanza de conocimientos matemáticos bajo el paradigma de la TSD. Los E_m tuvieron que expresar su grado de confianza para llevar a cabo la tarea descrita dentro de cada ítem, indicando un valor de la escala representada en la figura 2.

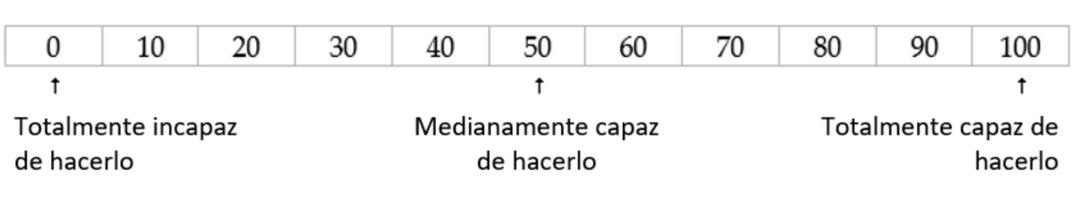


Figura 2. Escala de respuesta (Bandura, 2006, p. 312).

La versión inicial del cuestionario incluía 29 ítems y se administró a 139 E_m. Tras someter este cuestionario a un análisis estadístico de componentes principales (utilizando SPSS, versión 24), se reformularon o eliminaron algunos ítems para mejorar la consistencia estadística. Así, se obtuvo una versión final con 26 ítems.

A partir del análisis estadístico los ítems se agruparon en dos factores que se asocian con dos dominios fundamentales de la actividad docente: diseño (*alfa de Cronbach* 0,96) e implementación (*alfa de Cronbach* 0,95). Además, aunque no se obtuvieron estadísticamente, para profundizar en el análisis, en cada dominio se consideraron dos dimensiones: profesor-*medio* (P-M) y profesor-alumno (P-A), atendiendo a criterios teóricos propios de la TSD (tabla 1).

Tabla 1. Estructura del cuestionario: dimensiones, dominios y tipos de tareas.

	Dominio Diseño	**Dominio Implementación**
Dimensión P-M	Diseñar *medios*. Organizar la *devolución* de situaciones adidácticas. Identificar y controlar variables didácticas. Conectar las variables didácticas y las estrategias de los alumnos.	Llevar a cabo la *devolución* de una situación a-didáctica. Controlar y adaptar las variables didácticas *in situ* para provocar el desarrollo de la actividad matemática del alumnado.
Dimensión P-A	Anticipar las estrategias de los alumnos. Identificar la estrategia base y la estrategia óptima.	Identificar las estrategias utilizadas por el alumnado. Detectar la progresión del alumnado hacia la estrategia óptima.

En nuestro estudio analizamos dos grupos que habían cursado la asignatura “Didáctica de las matemáticas en Educación Infantil”, obligatoria de tercer curso en la Universidad de Jaén. Uno de los grupos, estudiantes de 4º curso, fue el que participó en la experiencia de EC (en adelante G_{EC}), mientras que el otro grupo, estudiantes de 3er curso, realizó, paralelamente, el primer prácticum de la titulación (en adelante G_P).

La versión validada del cuestionario se administró a ambos grupos, tanto al comienzo como al término de sus respectivas experiencias (EC y prácticum).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para evaluar el impacto del proceso de EC, se llevó a cabo un exhaustivo análisis estadístico. Nuestro estudio ha demostrado que no existían diferencias significativas en el grado de autoeficacia percibida entre el G_P y el G_{EC} en el momento *pretest*. Sin embargo, tanto el G_{EC} como el G_P experimentaron un aumento en el grado de autoeficacia percibida en el momento *postest*, detectándose diferencias significativas entre el momento *pretest* y el *postest* en cada grupo. Aun así, el grado de autoeficacia percibida en el momento *postest* fue mayor en el G_{EC} que en el G_P, observándose diferencias significativas entre ambos grupos.

Atendiendo a estos resultados, nos planteamos en qué sentido podríamos explicar, de forma más precisa, que la ganancia de autoeficacia percibida al término del proceso de EC fuese mayor para el G_{EC}. Para ello, recurrimos al estudio del tamaño del efecto, que permite evidenciar de una forma más clara las diferencias significativas que existen entre el G_{EC} y el G_P. En otras palabras, calculamos el tamaño del efecto del EC en el G_{EC} en comparación con la evolución del G_P. Para ello, utilizamos el coeficiente *d de Cohen* (Cohen, 1988).

Los resultados obtenidos demuestran que el tamaño del efecto en el G_{EC} es mayor que en el G_P en todas las dimensiones analizadas (figura 3). Por lo tanto, podemos decir que, si bien el G_P mejoró su autoeficacia percibida, el G_{EC} lo hizo, significativamente, en mayor medida.

En cuanto al crecimiento del grado de autoeficacia percibida por parte del G_P, podríamos interpretar que este hecho se debe a que los E_m de este grupo estuvieron inmersos en el primer prácticum de la titulación, pudiéndose considerar como una experiencia práctica similar a la del G_{EC}. No obstante, los E_m del G_{EC} ya habían cursado los dos prácticums de la titulación en el momento *pretest*, sin que se observasen diferencias significativas entre los grupos en este momento del estudio. Por tanto, considerar este aspecto en futuras investigaciones podría ser muy interesante.

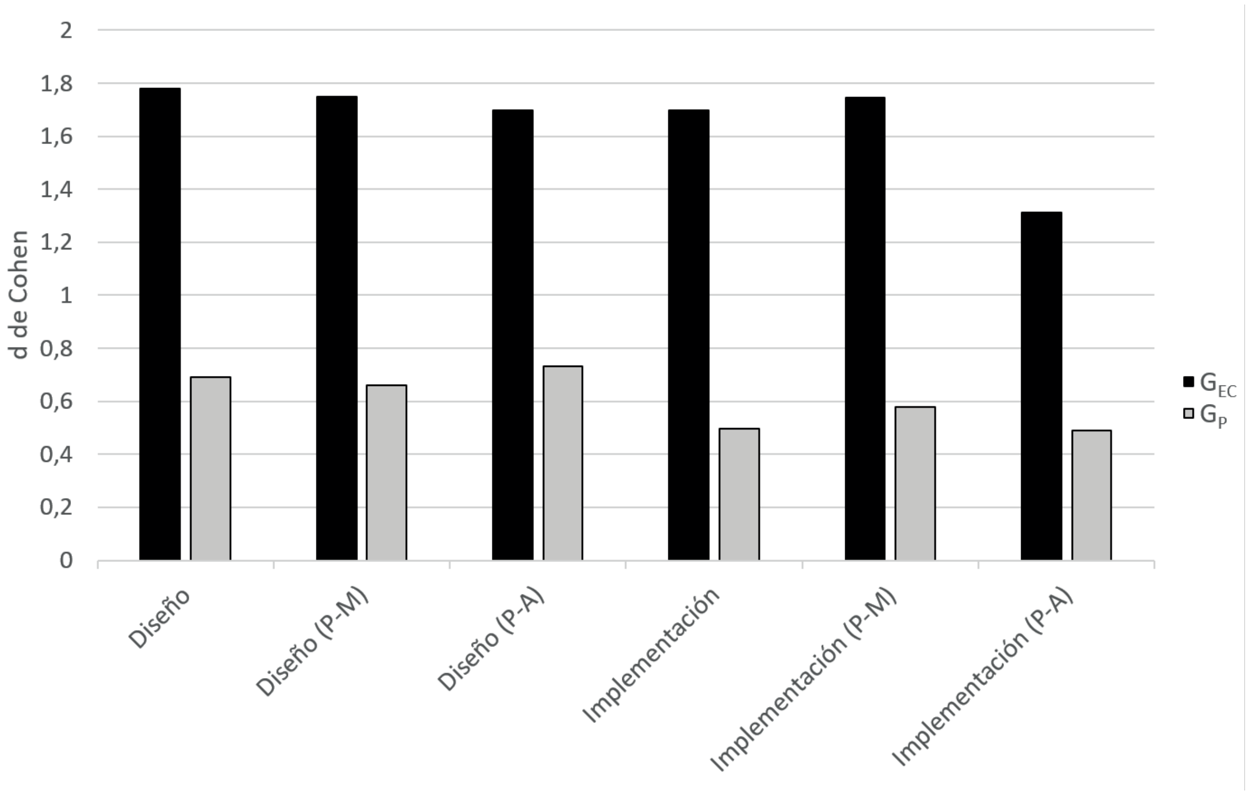


Figura 3. Tamaño del efecto *prepost* dentro de cada grupo (G_{EC} y G_P) en los dominios de diseño e implementación y sus correspondientes dimensiones (P-M y P-A).

CONCLUSIONES

Podemos afirmar que el EC siempre está conectado, implícita o explícitamente, con un paradigma didáctico. El paradigma didáctico asumido tiene un impacto directo en la forma en que se organiza y lleva a cabo el EC y en el tipo de conocimiento profesional que los docentes construyen a partir de él (García et al., 2019). Por lo tanto, cualquier investigación sobre el aprendizaje docente a través de EC debe considerar explícitamente el paradigma didáctico en el que se integra.

En consecuencia, creemos necesario considerar marcos teóricos para el conocimiento docente que puedan modelar tanto el conocimiento docente como las prácticas docentes relacionadas con el paradigma didáctico asumido.

Después de realizar un proceso de EC con E_m de Educación Infantil, en primer lugar, podemos determinar que la experiencia del EC provocó un impacto positivo en la autoeficacia percibida por E_m para diseñar e implementar situaciones matemáticas bajo el paradigma de la TSD. En segundo lugar, el crecimiento de E_m en EC es mayor, a pesar de que el G_P también participó en una actividad práctica (prácticum). En tercer lugar, una posible razón que explicaría el mayor crecimiento del G_{EC} es que EC fue diseñado e implementado de forma explícita en torno a un paradigma didáctico específico (TSD).

Como en cualquier otro estudio, también podemos identificar limitaciones, que podrían ser abordadas en investigaciones futuras, como el uso del constructo de autoeficacia: por un lado, porque es algo difícil de medir; por otro lado, porque podría considerarse que lo que un E_m se siente capaz de hacer no implica que realmente puede hacerlo. En este sentido, estamos realizando, además, un análisis cualitativo de los ciclos de EC vividos, con el objetivo de identificar el grado de desarrollo de sus equipamientos praxeológicos para diseñar y enseñar según la TSD. La comparación de estos resultados cuantitativos y cualitativos nos permitirá profundizar en nuestra comprensión del aprendizaje docente a través del dispositivo de EC bajo el paradigma de la TSD.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco del contrato predoctoral para la Formación de Profesorado Universitario FPU014/06496 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte).

Referencias

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review, 84*(2), 191-215. https://doi.org/10.1037/0033-295X.84.2.191

Bandura, A. (2006). Guide for constructing self-efficacy scales. En F. Pajares y T. C. Urdan (Eds.), *Self-Efficacy Beliefs of Adolescents* (pp. 307-337).

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2

Chevallard, Y. (2015). Enseñar matemáticas en la sociedad del mañana: un caso para un contraparadigma que se aproxima. En S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Salmer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_13

Clarke, D. y Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a Model of Teacher Development. *Teaching and Teacher Education, 18*(8), 947-967. https://doi.org/10.1016/S0742-051X(02)00053-7

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd edition). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203771587

Da Ponte, J. P. (2017). Lesson studies in initial mathematics teacher education. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *6*(2), 169-181. https://doi.org/10.1108/IJLLS-08-2016-0021

European Commission (2010). *Common European principles for teacher competences and qualifications*. http://www.pef.uni-lj.si/bologna/dokumenti/eu-common-principles.pdf

Fujii, T. (2014). Implementing Japanese lesson study in foreign countries: Misconceptions revealed. *Mathematics Teacher Education and Development, 16*(1), 65-83.

Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: A critical process of lesson study. *ZDM Mathematics Education, 48*(4), 411-423. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0770-3

García, F. J., Wake, G., Lendínez, E. M. y Lerma, A. M. (2019). El papel de los modelos epistemológicos y didácticos en la formación del profesorado a través del dispositivo del estudio de clase. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 37*(1), 137. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2512

Gascón, J. y Nicolás, P. (2021). Relaciones entre la investigación y la acción en didáctica de las matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20*, 23-39. https://doi.org/10.35763/aiem20.4033

Helgevold, N., y Wilkins, C. (2020). International changes and approaches in initial teacher education. En P. Wood, D. L. S. Larssen, N. Helgevold y W. Cajkler (Eds.), *Lesson study in initial teacher education: Principles and practices* (pp. 1-16). Emerald publishing.

Larssen, D. L. S., Cajkler, W., Mosvold, R., Bjuland, R., Helgevold, N., Fauskanger, J., Wood, W., Baldry, F., Jakobse, A., Bugge, H. E., Næsheim-Bjørkvik, G. y Norton, J. (2018). A Literature review of lesson study in initial teacher education perspectives about learning and observation. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 7*(1), 8-22. https://doi.org/10.1108/IJLLS-06-2017-0030

Lendínez, E., García, F. J. y Lerma, A. M. (2018). El estudio de clases en la formación inicial del profesorado de educación infantil: combinando teoría y práctica profesional. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 280-289). SEIEM.

Lewis, C. C., Perry, R. R., Friedkin, S. y Roth, J. R. (2012). Improving teaching does improve teachers: Evidence from lesson study. *Journal of Teacher Education, 63*(5), 368-375. https://doi.org/10.1177/0022487112446633

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M. y Joubert, M. (2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration: June 2016. *ZDM Mathematics Education, 48*(5), 651-690. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0797-5

Seleznyov, S. (2018). Lesson study: An exploration of its translation beyond Japan. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *7*(3), 217-229. https://doi.org/10.1108/IJLLS-04-2018-0020

Shimizu, Y. (2014). Lesson study in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 358-360). https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_91

Stigler, J. y Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving in the classroom*. The Free Press.

Stigler, J. y Hiebert, J. (2016). Lesson study, improvement, and the importing of cultural routines. *ZDM Mathematics Education, 48*(4), 581-587. https://doi.org/10.1007/S11858-016-0787-7

Tirosh, D. y Graeber, A. O. (2003). Challenging and changing mathematics teaching classroom practices. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 643-687). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0273-8_22

Tschannen-Moran, M. y Hoy, A. (2001). Teacher efficacy: Capturing an elusive construct. *Teaching and Teacher Education, 17*(7), 783-805. https://doi.org/10.1016/S0742-051X(01)00036-1

CATEGORIZACIÓN DE LOS ERRORES DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE PRIMARIA EN TAREAS DE MEDIDA DE MAGNITUDES

Categorisation of pre-service teachers' errors in measurement tasks

López-Serentill, P.

Universitat de Girona

Resumen

Este estudio pretende analizar los errores que cometen un grupo de estudiantes para maestro cuando resuelven actividades que involucran tareas de medida, en particular se centra en las estimaciones que hacen sobre medidas de objetos reales, y en categorizar los errores cometidos al realizar mediciones de cantidades continuas y hacer cálculos de medidas. A partir de una actividad de aula, se analizan las justificaciones dadas y los procedimientos utilizados por los estudiantes para maestro durante la actividad. Los resultados indican que los estudiantes realizan mejores estimaciones de magnitudes de longitud y temperatura, pero muestran muchas dificultades en estimaciones de área de superficies, volúmenes y capacidad. Por otra parte, muestran dificultades para hacer mediciones sin la utilización de fórmulas y no son conscientes de los errores que cometen cuando realizan mediciones.

Palabras clave: *estudiantes para maestro, medida, estimación, educación primaria.*

Abstract

This study aims to analyse the errors made by a group of pre-service teachers when solving activities involving measurement tasks, in particular focusing on the estimations they make about measurements of real objects, and categorising the errors made when measuring continuous quantities and making measurement calculations. Based on a classroom activity, we analyse the justifications given and the procedures used by the pre-service teachers during the activity. The results indicate that students perform better estimations of length and temperature magnitudes but show many difficulties in estimations of surface area, volumes and capacity. On the other hand, they show difficulties in making measurements without the use of formulas and are not aware of the mistakes they make when making measurements.

Keywords: *pre-service teachers, measurement, estimation, primary education.*

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de las matemáticas está relacionado con una enseñanza eficaz, y los profesores tienen un papel crucial en este proceso (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). En este sentido, los conocimientos del profesorado desempeñan un papel fundamental en la enseñanza adecuada de las matemáticas (Hill et al., 2005). Es por ello que se planteó el estudio TEDS-M (Teacher Education Study in Mathematics) de la IEA (INEE, 2012) que analizó el conocimiento matemático que han adquirido los estudiantes para maestro al terminar su formación. El conocimiento matemático del profesor aparece como la principal causa entre aquellas no relacionadas directamente con el

López-Serentill, P. (2022). Categorización de los errores de los estudiantes para maestro de primaria en tareas de medida de magnitudes. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 363-371). SEIEM.

alumno, con una incidencia mayor que el contexto social o el tiempo dedicado a la enseñanza de las matemáticas (Rico et al., 2014). Para poder focalizar mejor la formación de futuros maestros, debemos comprender el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro al inicio de su formación, y no solo al final.

Por otro lado, el concepto matemático de medida, entendido como el conocimiento de los diferentes atributos mesurables, las formas de medirlos y las unidades necesarias para expresar el resultado, es uno de los temas relevantes en la educación matemática. Tanto en los Principios y Estándares del NCTM (2000) como en el currículum español (Real Decreto 157/2022), la medida es uno de los bloques o estándares de contenido presentes, debiéndose trabajar en todos los cursos de la Educación Primaria y dentro de este bloque, la estimación, la utilización correcta de instrumentos de medida y la comprensión de las unidades de medida tienen una especial relevancia.

Según Godino et al. (2003) se entiende el concepto de magnitud como los atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (longitud, peso, densidad, etc.). Al medir cantidades de magnitudes continuas cometemos errores por diversas causas que van desde el propio procedimiento hasta fallos de la persona que mide. Por tanto, los valores que obtenemos son aproximados. El error de una medida también puede estar motivado por los errores sistemáticos del instrumento, que pueden deberse a defectos de fabricación, variaciones de la presión, la temperatura o la humedad. Es necesario que los alumnos tomen conciencia de estos errores, de que no pueden eliminarse totalmente y cómo pueden minimizarse.

Por las razones descritas anteriormente, el objetivo de nuestra investigación se centra por un lado en determinar qué estrategias utilizan los estudiantes para maestro de educación primaria (EMP) cuando hacen estimaciones de medida y, por otro lado, categorizar los errores que cometen al hacer mediciones. Para ello, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿cuáles son las dificultades y errores más comunes que hacen los futuros maestros de primaria en la estimación y cálculo de medidas?

MARCO TEÓRICO

El bloque de medida ha sido estudiado desde hace décadas por muchos investigadores desde diferentes puntos de vista y en las distintas etapas educativas (Baturo y Nason, 1996; Pizarro et al., 2014; Riera y Ruiz-Aguilera, 2015), destacando en muchos casos la importancia de trabajar la estimación dentro de este bloque (Hildreth, 1983; Segovia et al., 1989;) y de ir más allá de la utilización de fórmulas (Luelmo, 2001; Caviedes et al., 2019, entre muchos otros).

El desarrollo del sentido de la medida en los escolares supone un proceso complejo que se inicia con la percepción y comparación de cualidades medibles y se completa con técnicas de medición y estrategias de estimación en situaciones contextualizadas y significativas (Moreno et al., 2015). Pero en muchos casos, se centra la enseñanza de la medida en las unidades del sistema métrico decimal y las conversiones entre ellas, o en la utilización de fórmulas para el cálculo de magnitudes, perdiendo el contacto con elementos clave en la construcción del sentido de la magnitud como por ejemplo, conocer las principales magnitudes medibles de manera experimental, adquirir la noción de unidad de medida, practicar con contenidos realistas, descubrir el significado de las medidas aproximadas o utilizar la estimación e instrumentos de medida (Alsina, 2004).

El estudio que presentamos trata por un lado sobre la estimación de cantidades, en particular de longitud, superficie, volumen, capacidad y temperatura. Segovia et al. (1989) definen la estimación como el “juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad en función de circunstancias individuales que emite” (p. 18). En nuestro caso, nos centraremos en la estimación en medida. Castillo et al. (2011) indican que la estimación de medida implica diferentes factores: comprender la cualidad que se va a estimar, percibir qué será estimado, comprender el concepto de unidad de medida, poseer una imagen mental de la unidad de medida a utilizar, poseer una imagen mental de referentes utilizados en la tarea, adecuar la unidad de medida a utilizar, poseer una imagen de referentes utilizados en la tarea, adecuar la unidad de medida a utilizar con lo que se va a estimar, conocer y utilizar términos apropiados de la estimación en medida, seleccionar y usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones y verificar la adecuación de la estimación. Pizarro et al. (2014) proponen como definición para estimación de una medida "asignar perceptivamente un valor o un intervalo de valores y la unidad correspondiente a una magnitud discreta o continua, por medio de los conocimientos previos o por comparación no directa a algún objeto auxiliar" (p. 528). Esta definición se sustenta sobre tres elementos esenciales: asignar un valor numérico, realizar la tarea perceptivamente y relacionar la percepción con los conocimientos previos o con la imagen mental del objeto auxiliar.

Por otro lado, este estudio pretende indagar en los errores que cometen los EMP cuando realizan mediciones y cálculos de medidas. El error forma parte del conocimiento científico, y en el caso de la medida y por supuesto de la estimación, su aceptación y el tratar de controlarlo constituye una parte esencial en el proceso enseñanza-aprendizaje (Castillo-Mateo et al., 2012). Riera y Ruiz-Aguilera (2015) destacan como uno de los objetivos en la enseñanza-aprendizaje de la medida la utilización adecuada de los instrumentos de medida y el análisis de los errores que se pueden derivar de su uso y cómo corregirlos.

Tanto en NCTM (2000) como en el currículo español, tal como se ha dicho en la introducción, la medida es uno de los bloques o estándares de contenido presentes, remarcando la necesidad de trabajar la estimación de medidas, tomar conciencia sobre los errores que cometemos al hacer mediciones y la importancia de escoger correctamente las unidades de medida en función de lo que se quiera medir. Por tanto, es necesario detectar qué conocimientos tienen los EMP sobre estos contenidos y así poder mejorar su formación, para que ellos a su vez puedan formar a sus futuros alumnos en concordancia a lo expuesto en los puntos anteriores. En la tabla 1, que se muestra a continuación, se pueden ver algunos ejemplos de cómo estos contenidos aparecen en los estándares de contenido del NCTM (2000) y en el nuevo currículo español:

Tabla1. Ejemplos de contenidos sobre medida en el NCTM y currículum español.

	Estándares de contenido (NCTM, 2000)	**Saberes Básicos (Currículo español, 2022)**
Estimación de medidas	Seleccionar y utilizar referencias para hacer estimaciones de medida (Etapas 3-5 y 6-8)	Estimación de medidas por comparación directa con otras medidas (Primer ciclo)
Errores en las mediciones	Comprender que las medidas son aproximaciones y cómo afectan a la precisión las distintas unidades (Etapa 6-8)	
Selección de unidades de medida	Seleccionar un instrumento y una unidad idónea para el atributo que queremos medir. (Etapa Pre-K2)	Instrumentos y unidades adecuadas para medir longitudes, objetos, ángulos y tiempos: selección y uso. (Tercer ciclo)

Cabe destacar que en el nuevo currículo español en ningún ciclo se ha podido encontrar algún saber básico que hable de forma explícita sobre la comprensión de los errores que se cometen al realizar mediciones, utilizar instrumentos de medida o sobre la precisión de estas mediciones según las unidades de medida utilizadas.

METODOLOGÍA

Para responder a nuestra pregunta de investigación, nos posicionamos en un paradigma interpretativo: queremos observar e interpretar una realidad en su entorno, ya que conocer no consiste en la interiorización de una copia de la realidad exterior, sino que implica una interacción con el objeto del conocimiento, a través del cual el sujeto interpreta y reconstruye los significados puestos en juego (Muñoz-Catalán, 2021). Nuestro diseño de investigación consiste en el estudio de casos partiendo de una categorización que nos ha permitido agrupar las distintas acciones de los EMP ante el problema planteado.

Con el objetivo de detectar y categorizar las dificultades y errores que cometen los estudiantes que ingresan a los estudios de formación de maestros de primaria relativos a la medida, en particular en la estimación de magnitudes, se analizó una actividad llevada a cabo con tres grupos de entre 25 y 30 estudiantes del Grado de Educación Primaria que aún no habían recibido formación durante el Grado relativa a los bloques de contenido de Medida y Espacio y Forma.

La actividad consistía en un cuestionario con preguntas de respuesta abierta para ser resuelto por grupos de cuatro estudiantes y por escrito (18 grupos en total). Se pidió a los estudiantes justificar por escrito cada procedimiento y las dificultades presentadas durante la realización de la actividad. Los alumnos debían realizar en un primero momento distintas estimaciones de magnitudes de la plaza de delante la facultad (como se puede ver en la figura 1: longitud de la plaza, altura de las escaleras, área de la superficie de la plaza, volumen de una pilona, capacidad de una papelera y temperatura). Seguidamente, debían hacer las mediciones utilizando instrumentos de medida y/o haciendo cálculos a partir de fórmulas. Se debían justificar los resultados de cada pregunta con base a los procedimientos utilizados. Los estudiantes tenían a su disposición distintos instrumentos de medición (reglas, metros, cuerdas, varios metros cuadrados en papel, botella de agua de 1 l y 6 l, termómetro y un odómetro de rueda) a fin de que los utilizaran en la segunda parte de la forma que estimaran conveniente. También se les pedía redondear los resultados y calcular los errores relativos cometidos en sus estimaciones. La actividad duró una hora y media por cada grupo. Posteriormente, a la siguiente sesión con los alumnos, se llevó a cabo un análisis, reflexión y valoración conjunta de las tareas realizadas.

Figura 1. Fotografías que muestran los objetos referidos en la actividad.

Para definir las categorías usadas para analizar los procesos de estimación de los EMP, nos hemos basado en el trabajo sobre estrategias de estimación en medida que realizan Segovia et al. (1989) y Castillo-Mateo (2017). Las categorías usadas finalmente han sido:

- Estimación por comparación con la unidad de medida: El sujeto compara la cantidad a estimar directamente con una unidad de medida del Sistema Métrico Decimal de forma mental. Por ejemplo, para estimar la capacidad de la papelera piensa mentalmente cuantos litros de agua pueden caber.
- Estimación por comparación a partir de referentes ya conocidos: El sujeto compara la cantidad a estimar con otra cantidad conocida o un múltiplo. Por ejemplo, para estimar la

longitud de la plaza la compara con una piscina olímpica o con un campo de fútbol, o para la estimación de la altura de las escaleras se fija cuantas personas necesitaría para llegar hasta arriba.

- Estimación sin comparación, de forma aleatoria o intuitiva: El sujeto hace una estimación sin explicar cómo la ha hecho o indicando que la ha hecho "a ojo".

Para el análisis de los errores cometidos en las tareas de medición y cálculo, hemos hecho una adaptación de las categorías que Castillo-Mateo et al. (2012) utilizaron para categorizar los errores en la estimación de cantidades de longitud y superficie. Las categorías que finalmente se han utilizado han sido:

- Errores conceptuales en términos propios de la magnitud: Cuando se confunde algún término relacionado directamente con la magnitud que está midiendo o confunde una magnitud con otra. Por ejemplo, confunde volumen con capacidad. O por ejemplo en la medición de la altura de la escalera, no mide la altura, mide la longitud (en diagonal) de las escaleras.
- Errores en la medición: No toma correctamente las medidas. Por ejemplo, en la medición de la altura de la escalera mide la altura desde la baranda de las escaleras y no desde el suelo o en la medición de la longitud de la plaza mide la distancia entre pilonas, pero no añade la longitud de cada pilona o en la medición del diámetro de la papelera no pasa por el centro.
- Errores en el uso de los instrumentos de medida: Utilización incorrecta de los instrumentos de medida. Por ejemplo, inclinación de la cinta métrica a la hora de tomar medidas.
- Errores en las unidades de medida seleccionadas o ausencia de ellas: Realiza erróneamente la conversión entre unidades de medida, utilización de unidades de medida inadecuadas o no especifica las unidades de medida utilizadas. Por ejemplo, errores en la conversión entre centímetros cúbicos y decímetros cúbicos o metros cúbicos.
- Errores de cálculo o uso de procedimientos de cálculo incorrectos: En la utilización de las fórmulas se equivoca en los cálculos que debe realizar. Por ejemplo, en el cálculo del área de la superficie de la plaza suma en vez de multiplicar.

Estos errores a su vez se pueden clasificar según si son evitables o inevitables. Por ejemplo, los errores conceptuales o de unidades de medida se pueden evitar si se tiene un buen dominio del contenido, en cambio los errores de medición o errores en el uso de los instrumentos de medida, se pueden minimizar, pero no evitar. Dentro de los errores de cálculo, nos encontramos algunos que se pueden evitar; por ejemplo, utilización errónea de la fórmula y otros que no se pueden evitar; por ejemplo, utilización del número pi irracional de forma aproximada.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos a partir del análisis de las respuestas de los alumnos y de las observaciones hechas durante la realización de la actividad se han agrupado en dos bloques. El primer bloque hace referencia a las tareas sobre estimación y el segundo a las tareas de medición y cálculos de medidas.

Estimación de medidas

Este primer apartado de resultados hace referencia a la primera parte de la actividad que consistía en realizar estimaciones de medidas de longitud de un lado de la plaza, área de la superficie de la plaza, altura total de las escaleras, volumen de una pilona, capacidad de una papelera de la plaza y temperatura en el momento que se realizó la prueba. A continuación, la figura 2 resume los resultados agrupados teniendo en cuenta las tres categorías descritas en el apartado anterior según los métodos que los EMP han utilizado para realizar sus estimaciones.

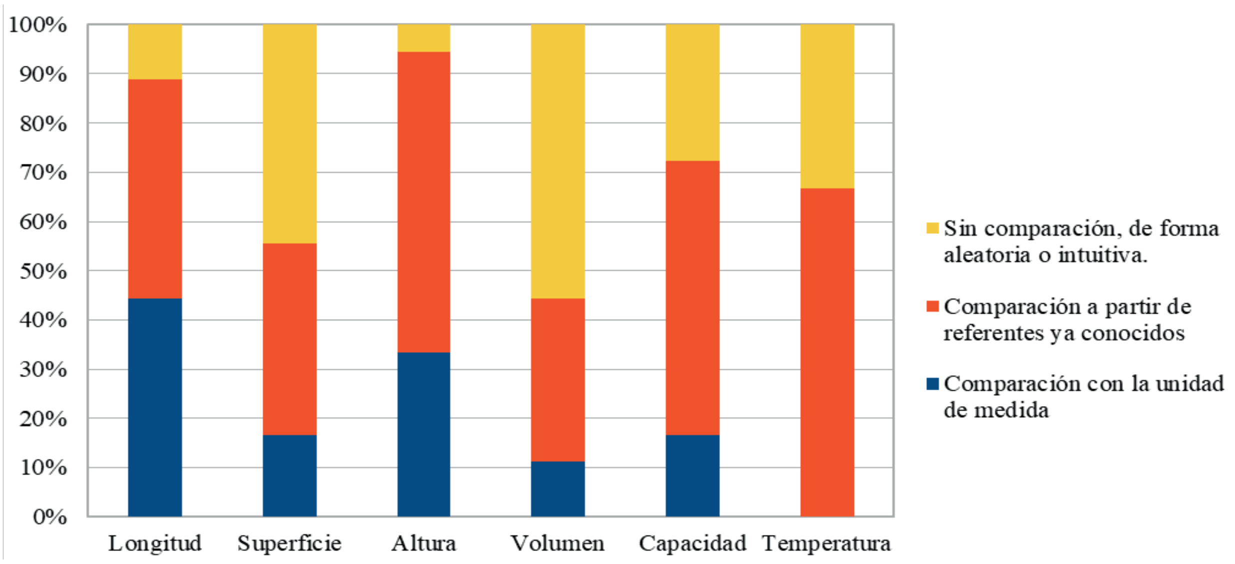


Figura 2. Frecuencias relativas de los métodos usados en las estimaciones.

Según se puede observar en el gráfico, en las medidas de longitud del lateral de la plaza y altura de las escaleras (que de hecho también se puede entender como una longitud vertical) es donde los alumnos utilizan más la comparación con la unidad de medida y donde nos encontramos menos grupos que realizaran las estimaciones de forma aleatoria. Esto se debe a que tienen más conocimiento y están más acostumbrados al uso de las unidades de medida de longitud (en este caso, el metro). Además, en estos dos casos, cuando realizaban comparaciones a partir de referentes conocidos había más variedad (altura de una persona, distancia de los brazos extendidos, un paso grande de una persona, longitud de una piscina, longitud del campo de futbol…).

En cambio, en las estimaciones de superficie, volumen y capacidad, solo uno o dos grupos han utilizado la comparación a partir de la unidad de medida (metro cuadrado, metro cúbico o litro) y, en estos casos, las estimaciones dadas han sido muy erróneas. Para estimar la superficie la mayoría de grupos no ha utilizado ningún referente y ha dado una estimación de forma intuitiva, los grupos que han utilizado referentes lo han hecho a partir de la superficie de sus casas o pisos. En el caso de la capacidad y volumen, la mayoría de grupos ha utilizado como referencia la capacidad de una garrafa de agua de 6 litros, excepto un grupo que ha pensado en la capacidad de las bolsas de basura utilizadas en casa (50 l). Para el volumen, más de la mitad de grupos ha hecho estimaciones sin comparación de forma aleatoria y en muchos casos (7 grupos) ha confundido las unidades de volumen con las de capacidad.

Para las estimaciones de la temperatura, en el momento de la realización de la actividad la mayoría de grupos ha hecho la estimación a partir de referentes que tenía sobre las temperaturas en los días o horas anteriores. Los grupos que lo han hecho de forma intuitiva indican que se han basado en la sensación de frío que tenían en ese momento.

Los EMP indican que han tenido mayor dificultad para estimar las medidas de superficie, capacidad y volumen porque no están tan acostumbrados a trabajarlas y utilizarlas ni como alumnos (la mayoría solo recuerda cálculos a partir de las fórmulas y conversión de unidades) ni en su día a día, es decir, les faltan referentes.

Análisis de errores en cálculos y medidas

En esta segunda parte se muestran los resultados que se han obtenido a partir del análisis de los errores que han cometido los EMP al realizar las actividades relacionadas con el cálculo de las medidas descritas en el primer apartado. Estos errores se han clasificado según las categorías descritas en la metodología (figura 3).

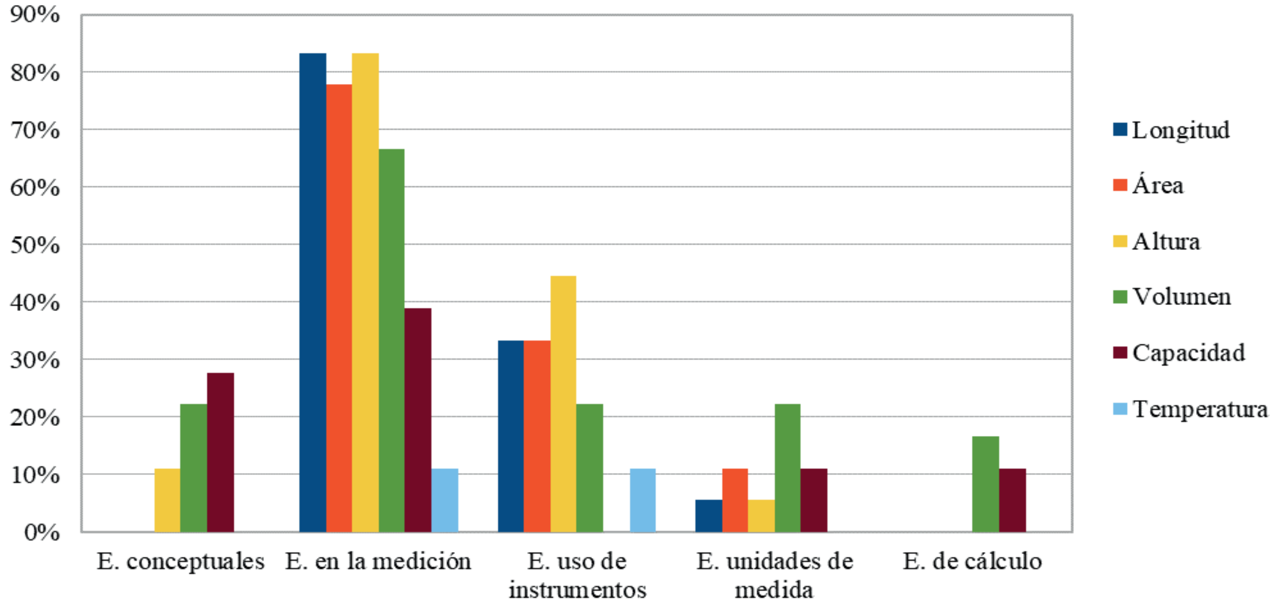


Figura 3. Frecuencias relativas de los errores cometidos en las mediciones.

En el análisis de los resultados se puede ver que los errores conceptuales se deben sobre todo en confundir las magnitudes de volumen y capacidad; por ejemplo, dan la respuesta de la capacidad de la papelera en centímetros cúbicos. Dos grupos han realizado errores conceptuales a la hora de medir la altura puesto que han confundido altura con longitud de la escalera. Igualmente, los errores de cálculo se centran sobre todo en la utilización de la fórmula para el cálculo del volumen de la pilona y de la capacidad de la papelera que no elevan al cuadrado o no multiplican por la altura. En cuanto a los errores cometidos en relación a las unidades de medida, la mayoría se deben a no convertir adecuadamente en múltiplos o divisores sobre todo en el cálculo del área y del volumen y capacidad porque proceden de igual forma que en el cambio de unidades de longitud, suponiendo por ejemplo que 1 metro cuadrado equivale a 100 centímetros cuadrados. Por último, tal como se puede observar en la figura 3, en la mayoría de casos, han realizado errores en la medición y en el uso de los instrumentos de medida, en muchos casos inevitables, tal como se ha indicado anteriormente. Pero cuando en la sesión posterior, donde se analizó la actividad con los alumnos, se preguntó sobre los posibles errores cometidos, solo dos grupos de los 18 que realizó la actividad, se dieron cuenta que cuando se hacen mediciones se cometen errores inevitables y que por tanto las medidas son aproximadas. El resto solo indica como posibles errores los de cálculo o conceptuales, aunque como se ve en la gráfica, estos no son los mayoritarios.

CONCLUSIONES

Los resultados expuestos son fruto de una experiencia realizada con una muestra de conveniencia y, por tanto, con una representatividad limitada. En consecuencia, las conclusiones que se derivan pueden no ser aplicables a otras poblaciones con características diferentes.

Para el caso de las magnitudes de longitud, los EMP muestran mejor capacidad de estimación que para magnitudes de área y sobre todo de volumen o capacidad. Esto es debido sobre todo por el dominio o no de referentes ya conocidos. Los resultados y el posterior análisis realizado conjuntamente con los EMP en la sesión posterior a la realización de la actividad, indican que no están acostumbrados a trabajar las magnitudes de área, volumen y capacidad más allá de las fórmulas, con escaso conocimiento y manejo de las unidades de medida de forma experimental. Además, se ha constatado que muchos alumnos confunden las magnitudes de volumen y capacidad.

Los resultados de este estudio han hecho aflorar las carencias que tienen los EMP en tareas de medida y sugieren la necesidad de incorporar en la formación de maestros más tareas prácticas de medida y de estimación. También se evidencia la necesidad de reforzar los conceptos de área, coincidiendo con Caviedades et al. (2019) y de volumen y capacidad a fin de que puedan entender estos conceptos de forma experimental, evitando centrar el proceso de enseñanza-aprendizaje del bloque de medida a cuestiones puramente mecánicas, descontextualizadas y exclusivamente formulísticas (Riera y Ruiz-Aguilera, 2015). Aunque, tal como indica Pla-Castells et al (2021), existen estudios de análisis de errores matemáticos de estudiantes de magisterio, la utilización de este tipo de tareas de estimación de magnitudes con estudiantes de magisterio y del conocimiento que tienen de los errores que cometen al realizar mediciones es una línea de investigación novedosa.

Desde la formación de maestros debemos contribuir a que los EMP gestionen en su actividad profesional actividades que promuevan en sus futuros alumnos la comprensión, no sólo del concepto de longitud, sino también de área, volumen y capacidad, más allá del uso de las fórmulas. Por último, este estudio evidencia la necesidad de trabajar el concepto del error, tal como indica el NCTM (2000), tomando conciencia de los errores inevitables que se cometen al hacer mediciones y cómo estos se pueden minimizar. Además, el análisis de estos errores permitirá incidir en aquellos aspectos en los que los futuros maestros muestren deficiencias competenciales matemáticas.

Referencias

Alsina, Á. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos para niños y niñas de 6 a 12 años.* Narcea S.A. de Ediciones.

Baturo, A. y Nason, R. (1996). Student teachers’ subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational studies in mathematics*, *31*(3), 235-268.

Castillo J., Segovia, I., Castro, E. y Molina, M. (2011). Estudio sobre la estimación de cantidades continuas: longitud y superficie. En J. L. Lupiáñez, M .C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de la matemática y educación matemática – 2011* (pp. 165-172). Dpto. Didáctica de la Matematica, Universidad de Granada.

Castillo-Mateo, J., Segovia, I., Castro, E. y Molina, M. (2012). Categorización de errores en la estimación de cantidades de longitud y superficie. En D. Arnau, J. Lupiáñez y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática – 2012* (pp. 63-74). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Castillo-Mateo, J, Segovia, I. y Molina, M. (2017). Estudio comparativo de la estimación de cantidades continuas que hacen los estudiantes de secundaria y futuros maestros. *PNA, 12*(1), 45-62.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019). Aproximación a las conexiones matemáticas que establecen futuros maestros de primaria en tareas de medida y comparación de áreas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII*, (pp. 233-242). SEIEM.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2003). *Medida y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Hildreth, D. J. (1983). The use of strategies in estimating measurements. *The Arithmetic Teacher, 30*(5), 50-54.

Hill, H. C., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42* (2), 371-406.

INEE (2012). *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español*. Secretaría General Técnica. Centro de Publicaciones. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Luelmo, M. J. (2001). Medir en Secundaria: algo más que fórmulas. En *Actas de X JAEM* (pp.727-737)

Ministerio de Educación y Formación Profesional «BOE» núm. 52, de 02 de marzo de 2022.

Moreno, M. F., Gil, F., y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida. En P. Flores y L. Rico. (Coords.) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 147-168). Pirámide.

Muñoz-Catalán, M. C. (2012). *El desarrollo profesional de una maestra novel. Un estudio de caso en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las Matemáticas*. LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Pla-Castells, M., Melchor, C. y Chaparro, G. (2021). Errores y dificultades de los futuros maestros de educación primaria al afrontar un problema de modelización asociado a la medida de magnitudes. *Revista Números, 109*, 33-49.

Pizarro, N., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2014). Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII*, 523-532. SEIEM.

Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, *363*, 35-59.

Riera, J. V. y Ruiz-Aguilera, D. (2015). La medida en la formación inicial de maestros. En P. Á. Sánchez (Ed.), *17 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas,* (pp. 1-12). Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia, SEMRM.

Segovia, I., Castro, E. y Rico, L. (1989) *Estimación en cálculo y medida.* Síntesis.

CONCEPCIONES SOBRE LAS MATEMÁTICAS Y LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN EL *CORREO DE MADRID* (1786-1791)

Conceptions about mathematics and mathematics education in *Correo de Madrid* (1786-1891)

Madrid, M. J.[a], León-Mantero, C.[b], Casas-Rosal, J. C.[b] y Maz-Machado, A.[b]

[a]Universidad Pontificia de Salamanca, [b]Universidad de Córdoba

Resumen

Las concepciones o creencias sobre las matemáticas y la educación matemática ocupan un papel relevante en la agenda de investigación en educación matemática y también en la de la historia de las matemáticas y la educación matemática. Teniendo esto en cuenta, el objetivo de este estudio es conocer las concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje manifestadas en una publicación periódica del siglo XVIII que no estaba especialmente dedicada a las matemáticas ni a las ciencias: el Correo (de los ciegos) de Madrid. Para ello, se ha realizado una investigación descriptiva considerando como técnica el análisis de contenido y enfocada en tres aspectos: las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje. Los resultados muestran como en una publicación de carácter general se incluyen conceptos matemáticos que reflejan algunas ideas interesantes en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.

Palabras clave: *concepciones, historia de las matemáticas y educación matemática, siglo XVIII, prensa.*

Abstract

Conceptions or beliefs about mathematics and mathematics education occupy a relevant role in the research agenda on mathematics education and also on the history of mathematics and mathematics education. Considering so, this study aims to find out the conceptions about mathematics and its teaching and learning expressed in an 18th century periodical publication, which was not specialized in mathematics nor in sciences: Correo (de los ciegos) de Madrid. In order to do so, a descriptive research has been carried out using content analysis as a research technique and focusing on three aspects: mathematics, its teaching and its learning. The results show that this general publication included mathematical concepts that reflect some interesting ideas regarding to the teaching and learning of this discipline.

Keywords: *conceptions, history of mathematics and mathematics education, 18th century, press.*

INTRODUCCIÓN

La identificación de las concepciones o creencias de profesores y alumnos sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje ocupa un lugar relevante en la investigación en Educación Matemática. Ejemplo de ello son estudios como Carrillo y Contreras (1995), Flores, Batanero y Godino (2000), Donoso, Rico y Castro (2016), entre otros. Las creencias desempeñan un papel crucial en el desarrollo del conocimiento matemático y abren un campo de posibles conexiones con la historia de las matemáticas (Spies y Wizke, 2018).

En este ámbito, también en las investigaciones en historia de las matemáticas y la educación matemá-

Madrid, M. J., León-Mantero, C., Casas-Rosal, J. C. y Maz-Machado, A. (2022). Concepciones sobre las matemáticas y la educación matemática en el Correo de Madrid (1786-1791). En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 373-381). SEIEM.

tica se ha abordado el estudio de las creencias y concepciones de los autores sobre las matemáticas y su enseñanza, pues como señala Furinghetti (2000) la historia puede ser una fuente útil de reflexiones didáctico-epistemológicas. Por ejemplo, Maz-Machado y Rico (2015) analizaron los principios didácticos considerados por distintos autores españoles en sus libros de matemáticas escritos durante los siglos XVIII y XIX. Oller-Marcén y Muñoz-Escolano (2019) analizaron las concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje en el *Compendio Matemático* (1707) de Tomás Vicente Tosca. También Oller-Marcén (2018) estudia las obras dedicadas a la enseñanza de la matemática escritas por Ventura de Ávila, considerando que las ideas de este autor acerca de la enseñanza de las matemáticas resultan, en algunos aspectos, innovadoras para la época.

Los libros de texto han destacado en las investigaciones en historia de matemáticas y educación matemática como fuente de información y son numerosos los trabajos centrados en ellos (González y Sierra, 2004). Pero por supuesto, no se trata de las únicas fuentes, por ejemplo, encontramos trabajos en esta área basados en el análisis de informes educativos gubernamentales (Matos y Almeida, 2021). Asimismo, las historias de vida generan gran interés en las investigaciones en este campo ya que permiten a los sujetos reconstruir sus vivencias y acciones a través de sus propias narraciones y a su vez, facilitan al investigador la vinculación con el contexto que las rodea (Moriña, 2016). Ejemplo de ello es el estudio sobre la historia de vida de María Antònia Canals y la influencia de la Escuela Nueva en su trayectoria pedagógica personal (Sotos y López, 2015).

Teniendo esto en cuenta, en este estudio consideramos el papel de la prensa como fuente de información para la investigación en este campo, centrándonos en la prensa española del siglo XVIII. En la época de la Ilustración la prensa periódica cobra gran relevancia, y es un importante cauce para difundir los distintos ideales, en España sobre todo a partir de la mitad del siglo se publican en ciudades como Madrid, Barcelona, Granada, Cádiz, Sevilla, etc. distintos periódicos (Aguilar Piñal, 1978).

Además, la prensa favorece también la difusión de conocimientos de tipo científico, ya que algunas publicaciones periódicas de carácter general incluyen entre sus páginas contenidos de tipo científico y también matemático (Clément, 2017).

La relevancia de la prensa en este siglo y la inclusión en la prensa de ideas científicas, nos lleva a plantearnos qué tipo de concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje aparecen en las distintas publicaciones periódicas publicadas en este siglo, de este modo podremos ver si las matemáticas se conciben con un carácter instrumental, si la concepción de su aprendizaje se basa en lo memorístico o en la investigación, el papel que se le otorga al alumno en el proceso de aprendizaje, …

Para ello nos hemos centrado en la publicación: el *Correo de los ciegos de Madrid*, que pasaría en abril de 1787 a llamarse simplemente *Correo de Madrid*. Este comenzó a publicarse el 10 de octubre de 1786 y finalizó su publicación el 24 de febrero de 1791, fecha en la que se prohibieron todos los periódicos a excepción de la *Gaceta,* el *Mercurio* y el *Diario* de Madrid (Aguilar Piñal, 1978).

Durante sus más de cuatro años de publicación se publicaron 422 números, cambio su extensión pasando de 4 a 8 paginas, siempre a doble columna, y su periodicidad: bisemanal hasta finales de 1790, cuando pasó a publicarse solamente una vez por semana.

Su nombre inicial se debe a que estaba destinado a la venta callejera por parte de los ciegos (Aguilar Piñal, 1978), aunque también se difundió mediante suscriptores, entre los que en pequeño porcentaje se incluyen mujeres como se muestra por ejemplo, en la lista de subscriptores del tomo sexto del Correo de Madrid entre los cuales aparecen por ejemplo la Excelentísima Sra. Condesa de Benavente, la Excelentísima Sra. Condesa de Villesca, la Excelentísima Sra. Condesa de Aranda, la Sra. Doña Antonia de Villar y Martínez, entre otras (Correo de Madrid (o de los Ciegos) Obra Periódica, 1790).

Los artículos que se publicaban en el mismo abordaban una variedad de temas, incluyendo artículos de opinión sobre distintas cuestiones enviadas por los diferentes colaboradores que participaban en él *Correo*, algunos de ellos conocidos y destacados, por ejemplo, se publicaron en el *Correo de Madrid* de forma póstuma las *Cartas marruecas* de José Cadalso (Cañas Murillo, 2016).

Por ello, el objetivo de este trabajo es identificar y categorizar las concepciones y creencias acerca de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje que reflejan los contenidos matemáticos incluidos en la publicación periódica madrileña *Correo de los ciegos de Madrid – Correo de Madrid.* Esto nos permitirá conocer más sobre cómo se concebían las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje en el siglo XVIII en España desde la perspectiva de la educación no reglada e informal.

METODOLOGÍA

Se presenta una investigación exploratoria, descriptiva y ex post facto, centrada en un estudio de caso (Yin, 2003). Se trata de una investigación de tipo histórico basada en el análisis de textos antiguos desde la perspectiva de la historia de las matemáticas y la educación matemática.

Para realizar este trabajo se ha utilizado la técnica de análisis de contenido, siguiendo el instrumento planteado en Madrid, León-Mantero, Maz-Machado y López-Esteban (2021). Las unidades de análisis que se definieron han sido cada una de las entradas de las publicaciones que incluyen contenidos matemáticos o sobre educación matemática. Estas se leyeron, analizaron y posteriormente se categorizaron adaptando el instrumento planteado por Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2020) tal y como se muestra en la tabla 1:

Tabla 1. Instrumento de análisis adaptado a partir de Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2020).

Categoría	**Pregunta**
	Matemáticas
Concepto	¿Qué son las matemáticas?
Estado – Avances	¿En qué estado están las matemáticas? ¿Qué avances se han producido en matemáticas?
Utilidad – Uso	¿Qué utilidad y qué usos tienen las matemáticas?
Dificultad	¿Qué dificultad tienen las matemáticas?
	Enseñanza de las matemáticas
Cómo enseñar	¿Cómo deben los maestros enseñar matemáticas?
Cómo aprender a enseñar	¿Cómo deben los maestros aprender a enseñar matemáticas?
	Aprendizaje de las matemáticas
Cómo aprender	¿Cómo deben los alumnos aprender matemáticas?
Cuándo aprender	¿Cuándo deben aprenderse las matemáticas?
Dificultad	¿Por qué no se poseen conocimientos matemáticos?

Para la selección de la publicación se consideraron como criterios que estuviera escrita en castellano, que hubiese sido publicada de forma periódica en España durante el siglo XVIII y que incluyese publicaciones que hablasen específicamente sobre matemáticas. Además, se consideró necesario que los distintos números estuvieran disponibles cuando fuese necesario. Esto hizo que la muestra elegida fuera intencional y por conveniencia. La búsqueda y localización de los distintos números se realizó a través de la Biblioteca Digital Hispánica de la Biblioteca Nacional de España y la Biblioteca Digital de Madrid, dónde se encontraron 420 de los 422 números publicados.

RESULTADOS

Los contenidos de tipo matemático no son en general habituales ni demasiado numerosos en los distintos números del *Correo (de los ciegos) de Madrid*, pero a pesar de ello sí es posible encontrar ocasionalmente distintas reflexiones sobre las matemáticas, problemas matemáticos, biografías sobre matemáticos, etc., y a través de ellos, conocer las distintas concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje que se difundían en la época.

Concepciones sobre las matemáticas

En ocasiones se incluyen opiniones sobre qué son las matemáticas o alguna de sus ramas. Entre ellas encontramos posturas diferenciadas, algunas positivas como:

- "Las matemáticas, ciencias de ciencias, le hacen al hombre amante de la verdad" (Correo de Madrid, 8/4/1789, p. 602).
- En una biografía sobre el matemático Vieta se dice: "[Vieta] enamorado de la belleza de esta ciencia pensó en arrancar sus espinas y hacerla facil á todos los buenos talentos" (Correo de Madrid, 23/1/1790, p. 2649).

Mientras que para otros se trata de algo confuso, escabroso, obscuro, …:

- Un autor que se hace llamar El Señorito dice: "Ya sabrá Vm. que la tal Algebra es una ciencia de algarabia, rayitas, crucecitas, haspas, &c. y un lenguaje de mas y menos raices incognitas, logarithimos, y demas voces que parecen de confuso" (Correo de Madrid, 1/4/1789, p. 1587).
- "Otro penetrado de sentimiento de ver quan poco adelantan las artes, y algunas ciencias por las escabrosidades de las mathematicas, se resolvió á escribir unas lecciones facilitando aclarar aquellas obscuridades" (Correo de Madrid, 20/6/1789, p. 2163).
- "Pobre de ti si le hablas de matematicas. Embuste y pasatiempo te dira el muy grave" (Correo de Madrid, 24/6/1789, p. 2169).

Así mismo, vemos en estos ejemplos como la dificultad de las matemáticas es valorada desde las distintas posturas.

En cuanto a la utilidad nuevamente encontramos posturas diferenciadas:

> Empleese en aquellas diversas ciencias necesarias o útiles […] las utilísimas Matematicas, que aunque se lisongean y hallan en posesion de ser las únicas ciencias, no faltan sabios que de esta quieran despojarlas; y vea si puede darles un nuevo esplendor con la cuadratura del circulo, la duplicacion del cubo y el movimiento perpetuo que aun no se han encontrado. (Correo de Madrid, 13/6/1789, p. 2150)

En una entrada sobre Pedro Poliniere se indica que este autor escribió unos *Elementos de matemáticas* que comenzaban con un discurso sobre la utilidad de las matemáticas: "haciendo ver quan útiles son para disipar las tinieblas del error y para el bien de la Sociedad" (Correo de Madrid, 27/2/1790, p. 2729).

Mientras que El Señorito dice:

> como ni de acertar á despejar una incognita, ni á resolver un problema, daba al diablo la leccion [...] que no habia querido estudiar, porque veia que no tiraba mas que á llenarme la cabeza de especiotas y frioleras inutiles, haciendome perder asi el tiempo mas precioso de mi juventud. (Correo de Madrid, 1/4/1789, p. 1586)

Los usos y las aplicaciones de las matemáticas en distintos campos son contemplados en muchas ocasiones en el *Correo*, entre ellos se habla de la conexión entre la física y las matemáticas en varias ocasiones, por ejemplo:

> Esta ciencia [física] en el dia está en la mayor perfeccion; los auxilios que le han prestado otras, con las quales tiene grande conexion, no la han servido de poco provecho, apoyada con los grandes progresos que hace y ha hecho la Matematica, va extendiendo al infinito sus conocimientos. (Correo de Madrid, 11/7/1789, n.275, p. 2210)

También con el arte: "No se puede negar que hay pocos artistas, á quienes no sean necesarias las matemáticas" (Correo de Madrid, 24/10/1787, p. 495) o "De modo que el carpintero, albañil, y los demas artesanos hasta los sastres y zapateros pudiesen aprenderlas [las matemáticas] y aplicarlas en beneficio del arte que profesase cada particular" (Correo de Madrid, 20/6/1789, p. 2163).

O con el comercio: "cuyo estudio [el de la aritmética] es tan necesario como el escribir para el Comercio civil" (Correo de Madrid, 29/12/1790, p. 91).

En cuanto a la evolución y los avances de las matemáticas, en el *Correo de Madrid* (21/02/1789, p.1499) se incluye entre otros la denominada carta 6 de Cadahalso. Esta comienza afirmando que es indudable que el atraso de las ciencias en dicho siglo se debe a la falta de protección a sus profesores, afirmando que quien se entrega a las ciencias en general se muere de hambre. Indica mencionando entre otras disciplinas las matemáticas que, si por ejemplo hubiese premios de honor, de interés o de ambos para los profesores o si al menos tuvieran quien los protegiese, podrían hacer mayores progresos.

Concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas

En el *Correo de Madrid* (29/12/1790) se incluye una entrada completa sobre la enseñanza de la aritmética en la que se muestran distintas sugerencias metodológicas. El autor considera la tabla pitagórica uno de los fundamentos de las operaciones aritméticas y por eso debe saberse de memoria y por hábito. Para ello propone que los niños la repitan en voz alta en la escuela dos veces a la semana, indicando que de esta manera cuando tengan que hacer uso de ella, la sabrán perfectamente o les costará poco trabajo aprenderla.

Se indica que la aritmética no debe enseñarse por el mismo método que el de leer y escribir (cuya enseñanza se había incluido en anteriores números del *Correo*), porque ese método requiere mucho tiempo y gasta mucho papel, y por ello se utilizará el encerado. Así tras la explicación de cada uno de los siguientes conceptos: "Que es Aritmetica, unidad, numero, guarismo y numeracion, aprenderán las quatro operaciones principales de la Aritmetica por numeros enteros, y despues por quebrados con todas las demás reglas anexas" (Correo de Madrid, 29/12/1790, p. 91).

El método de enseñanza indicado es el siguiente: todos los jóvenes de cada una de estas clases recibirán sus lecciones juntos y se presentarán, por ejemplo, delante de la pizarra todos los de la clase de multiplicar, se le pondrá a cada uno de ellos una cuenta, que los demás igualmente deberán atender, el alumno en el encerado intentará sacarla delante de todos, y si se equivoca, se preguntará a otro que error ha cometido y si no lo sabe a otro y así sucesivamente hasta que se pregunte a todos. Según sus respuestas, se les advertirá de sus errores y se les explicarán las dificultades. Después seguirá otro con otra cuenta, hasta que todos hayan hecho la suya, y de este modo, cada uno recibirá tantas lecciones como individuos haya en su clase, lo que sin duda hará que adelanten mucho. Cuando ya se hayan formado suficientemente en una operación, se les pondrá en un cuaderno una, dos o más cuentas de lo mismo, para que, en lo sucesivo, y en su casa les puedan servir de gobierno.

También en el *Correo de Madrid* (18/9/1790, p. 355) se incluye el siguiente comentario:

> Tampoco se debe usar del castigo de los azotes por faltas que involuntariamente comenten los muchachos aprehendiendo á leer, á escribir, contar &c. Las mas de estas faltas que las atribuyen los maestros á la falta de aplicacion y cuidado, proceden las mas veces de un mal método, poca paciencia, ó ninguna reflexion, mas bien que de la incapacidad y voluntad de sus dicipulos.

Algunas entradas reflexionan sobre la enseñanza de las matemáticas a los maestros. Así un autor que se hace llamar "El maestro de valde" propone para la instrucción de los maestros la creación en la Corte de una Escuela o Pública Academia a costa del público o de todos los maestros del Reino, en la cual se enseñaría el método de enseñanza que debería seguirse en todas las escuelas de primeras letras. Entre otras cuestiones, indica que aquellos que quisieran examinarse para maestros deberían asistir a dicha Academia durante 4 años y en este periodo disertar en numerosas ocasiones sobre distintos temas relevantes para su profesión. La academia debía constar de un presidente y cuatro catedráticos, uno de ellos de aritmética. Sobre este dice:

> Este explicaria en su tercer año su curso Aritmético, demostrando todas las operaciones principales de esta arte: pudiendo adornarse las paredes de esta sola con sus mas esenciales teoremas; obligando á sus alumnos igualmente á explicarlos en un encerado para ver su desembarazo y explicacion. (Correo de Madrid, 10/7/1790, p. 194)

Concepciones sobre el aprendizaje de las matemáticas

Si nos centramos en el cuándo y en el cómo se deben aprender matemáticas, en el *Correo de Madrid* (29/12/1790) se especifica en primer lugar, que los niños deben empezar a aprender las reglas de la aritmética después de saber formar la letra de mediana grandeza. A su vez, el autor indica que "por experiencia se sabe que no hay ingenio tan rudo que con paciencia y práctica, no llegue á aprender bien las primeras cuentas" (Correo de Madrid, 29/12/1790, p. 91).

En cuanto a otras concepciones sobre el aprendizaje en un discurso sobre la educación se expresa la siguiente opinión sobre:

> Dice al mismo tiempo que para cada talento hay su ciencia particular, y que aquellos que se dice son aptos y dispuestos para muchas cosas, son obras imperfectas de la naturaleza, no acabadas y hechas de prisa. Bien sabido es el cxemplo de Claudio: entró en un Colegio de Jesuítas, y despues de haber perdido ya mucho tiempo en diferentes estudios, dexabanle por negado absolutamente, quando pensó un padre experimentarle en la Geometria, y descubrio para ella tal genio y aficion, que llegó á ser uno de los mejores matematicos de su tiempo. (Correo de Madrid, 2/5/1789, p. 2051)

Sobre las dificultades y razones por las que no son capaces de resolver problemas matemáticos, en uno de los números del *Correo*, un autor que se hace llamar *El Andaluz Alto de fantasía* proponía el siguiente problema: "Quatro vendedoras tienen limas en proporcion, la primera y quarta tienen 81, la segunda y tercera 69: ¿quantas cada una?" (Correo de los ciegos de Madrid, 5/1/1787, p. 104). E indicaba dos razones por las que no sabe resolverlo: la falta de trato con académicos y tener pocos autores de aritmética.

También en la carta marrueca 8 de Jose Cadalso se indica: "De matemáticas? Tampoco: esto quiere un estudio muy seguido, y yo le abandoné desde los principios" (Correo de Madrid, 28/02/1789, p. 1513).

CONCLUSIONES

Este estudio nos ha permitido conocer más sobre cómo se concebían las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje en el siglo XVIII en España, continuando la línea de investigación sobre las matemáticas y la educación matemática en la prensa de este siglo.

La publicación considerada no se dedica exclusivamente a las matemáticas ni a las ciencias, sino que tiene carácter general e incluye gran variedad de contenidos. En ella la presencia de las matemáticas no es algo habitual, se trata en general de apariciones puntuales.

A pesar de ello, ocasionalmente sí es posible encontrar menciones a matemáticos, reflexiones sobre educación matemática, problemas matemáticos, … En ella se muestran diferentes posturas acerca del concepto que se tiene sobre estas, su dificultad y su utilidad, así como algunos de los usos y aplicaciones que se le consideraban.

En cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, aparecen ideas interesantes sobre la enseñanza de las matemáticas en la época, como por ejemplo adornar las paredes del aula con teoremas o que los alumnos expliquen teoremas o resuelvan operaciones en el encerado. Además, los autores también reflexionan sobre el cuándo y el cómo deben aprenderse las matemáticas.

En definitiva, el trabajo muestra la importancia de las matemáticas y la educación matemática más allá de la educación formal o reglada, y como estas fueron fuente de distintas opiniones y debates que se mostraban en las publicaciones periódicas a priori no especializadas en ciencia del siglo XVIII. Considerando esto, tal y como plantea Oller-Marcén (2018) este tipo de trabajos pueden resultar valiosos en la formación de los maestros puesto que enfatizan la faceta cultural y evolutiva de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje. Así mismo, las ideas que afloran pueden complementar las propuestas didácticas de Quiroga (1999) sobre cómo implementar el uso de la prensa en la enseñanza de las matemáticas.

Referencias

Aguilar, F. (1978). La prensa española en el siglo XVIII. Diarios, revistas y pronósticos. *Cuadernos Bibliográficos*, *35*.

Cañas, J. (2016). Una inconfesa novela de la Ilustración: Cartas marruecas, del Coronel Cadalso. *Cuadernos de Ilustración y Romanticismo: Revista Digital del Grupo de Estudios del Siglo XVIII- 2016, 22,* 205-227.

Carrillo, J. y Contreras, L. C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación Matemática*, *7*(3), 79-92.

Clément, J. P. (2017). La Ciencia en la prensa periódica hispanoamericana del siglo XVIII. *El Argonauta Español*, *14*. https://doi.org/10.4000/argonauta.2617

Correo de los ciegos de Madrid. (5/1/1787). *26*, 101-104.

Correo de Madrid. (24/10/1787). *105*, 489- 496.

Correo de Madrid. (21/02/1789). *235*, 1498-1499.

Correo de Madrid. (28/02/1789). *237*, 1513-1520.

Correo de Madrid. (1/4/1789). *246*, 1585 – 1592.

Correo de Madrid. (8/4/1789). *248*, 601-608.

Correo de Madrid. (2/5/1789). *255*, 2049- 2056.

Correo de Madrid. (13/6/1789). *267,* 2145- 2152.

Correo de Madrid. (20/6/1789). *269*, 2161-2168.

Correo de Madrid. (24/6/1789). *270,* 2169-2176.

Correo de Madrid. (11/7/1789). *275*, 2209-2216.

Correo de Madrid. (23/1/1790). *330*, 2649-2656.

Correo de Madrid. (27/2/1790). *340,* 2729-2736.

Correo de Madrid. (10/7/1790). *377*, 193-200.

Correo de Madrid. (18/9/1790). *397*, 353-360.

Correo de Madrid. (29/12/1790). *414*, 89-96.

Correo de Madrid (o de los Ciegos) Obra Periódica. (1790). Tomo Sexto. Imprenta de Joseph de Herrera.

Donoso, P., Rico, N. y Castro, E. (2016). Creencias y concepciones de profesores chilenos sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, *20*(2), 76-97.

Flores, P., Batanero, C. y Godino, J. D. (2000). Aplicación del análisis de textos mediante técnicas multivariantes al estudio del cambio de concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(3), 339-356.

Furinghetti, F. (2000). The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*, 43-51.

González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *22*(3), 389–408.

Madrid, M. J., León-Mantero, C., Maz-Machado, A. y López-Esteban, C. (2021). Matemáticas y educación matemática en la prensa española del siglo XVIII: un instrumento para su análisis. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 401-408). SEIEM.

Matos, J. M. y Almeida, M. C. (2021). Evaluación del currículo de matemáticas modernas. *Matemáticas, educación y Sociedad, 4*(1), 57-72.

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 49-76. https://doi.org/10.12802/relime.13.1812

Moriña, A. (2016). *Investigar con historias de vida: Metodología biográfico-narrativa*. Narcea Ediciones.

Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2020). Paratextos de libros españoles de matemáticas del siglo XVIII. El caso de los prólogos. En A. Maz-Machado y C. López-Esteban (Eds.), *Las Matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores* (pp. 63-92). Universidad de Salamanca.

Oller-Marcén, A. M. (2018). Aspectos didácticos de las obras matemáticas del ilustrado Ventura de Ávila. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. G. García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 417-426). SEIEM.

Oller-Marcén, A. M. y Muñoz-Escolano, J. M. (2019). Conceptions about mathematics, its teaching and learning in Compendio Mathematico (1707) written by the Spanish Thomas Vicente Tosca (1651-1723). *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(64), 635-648. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a09

Quiroga, A. G. (1999). *Propuesta didáctica: El uso de la prensa en la enseñanza de la matemática*. [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Nuevo León].

Sotos, M. y López, M. C. (2015). El proceso del saber pedagógico en Educación Matemática: el caso de María Antònia Canals. *Épsilon, Revista de Educación Matemática, 32*(2), 59-69.

Spies, S. y Witzke, I. (2018). Making domain-specific beliefs explicit for prospective teachers. En K. M. Clark, T.H. Kjeldsen, S. Schorcht, y C. Tzanakis (Eds.), *Mathematics, Education and History* (pp. 283-304). Springer, Cham.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: design and methods (3th ed.).* SAGE Publication, Inc.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE SOBRE ISOMETRÍAS EN UNA DISCUSIÓN EN GRAN GRUPO CON GEOGEBRA

Oportunities to learn isometries in a whole discussion with GeoGebra

Martín-Nieto, M.[a] y Ruiz-López, N.[b]

[a]CES Don Bosco, [b]Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

Este es un estudio de perspectiva discursiva e instrumental, en el que se analizan las oportunidades de aprendizaje generadas en una discusión en gran grupo con el uso de GeoGebra. Se aplican métodos cualitativos e interpretativos para el estudio de datos de clase en el Grado de Magisterio de Educación Primaria. Los alumnos resuelven un problema de contenido geométrico relacionado con isometrías. Los datos se analizan a partir de un documento entregado por parejas y de videograbaciones. La discusión se divide en episodios que se clasifican según el tipo de orquestación y según la naturaleza de sus acciones. El Software de Geometría Dinámica crea un entorno formal para abordar las isometrías y el diálogo resulta esencial para la generalización de resultados.

Palabras clave: *discusión en gran grupo, investigación de diseño, isometrías, magisterio, oportunidad de aprendizaje.*

Abstract

This paper, which is a discursive and instrumental perspective study, analyzes the opportunities to learn that are generated in a whole group discussion with the use of GeoGebra. The method has been qualitative and interpretative. Future primary teachers who are studying at university solve a problem related with isometries and the data is analyzed from a document delivered in pairs and from video recordings. The discussion is divided into episodes that are classified according to the type of orchestration and to the nature of their actions. Dynamic Geometry Software generates a formal environment to deal with isometries and the dialogue is essential for the generalization of results.

Keywords: *big group discussion, design research, isometries, primary teachers, opportunities to learn.*

INTRODUCCIÓN

El estudio de las oportunidades de aprendizaje matemático es una herramienta crucial para planificar y gestionar secuencias didácticas efectivas. Por ello, la investigación en didáctica de las matemáticas experimenta una fuerte preocupación en este sentido (Planas y Boukafri, 2019).

Este trabajo surge dentro de un proyecto de tesis doctoral en el que utilizamos métodos cualitativos e interpretativos aplicados al análisis de datos de clase, en el grado de Magisterio de Educación Primaria. Se trata de una contribución al estudio de la enseñanza y el aprendizaje de los movimientos rígidos en el plano a partir de discusiones en gran grupo con el uso de la tecnología. Para este estudio, se ha diseñado una secuencia didáctica formada por cuatro problemas, tres de ellos de contenido matemático

[a b] Martín-Nieto, M. y Ruiz-López, N. (2022). Oportunidades de aprendizaje sobre isometrías en una discusión en gran grupo con GeoGebra. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 383-390). SEIEM.

y el último de corte didáctico. En este artículo exponemos la clasificación en episodios de la discusión en gran grupo sobre el primer problema.

La comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas está interesada en el desarrollo del conocimiento profesional en los estudios de Magisterio en el área de geometría, en la que se vienen detectando ciertas carencias (Ruiz-López y Sáenz de Castro, 2013). La mayoría de los estudios abarcan distintas problemáticas en torno a la adquisición de conocimientos geométricos (Bustos Rubilar y Zubierta Badillo, 2019), así como la influencia que pueden desempeñar las creencias y concepciones de los profesores sobre el aprendizaje de los alumnos (Giacomone et al., 2018). Podemos encontrar numerosas investigaciones dentro del grupo de trabajo *Aprendizaje de la Geometría* de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). El análisis de las oportunidades de aprendizaje, desde las perspectivas discursiva e instrumental, en un contexto de formación de maestros de Educación Primaria es clave por el elevado interés que suscita en el momento actual.

El propósito general del diseño formativo es responder a la pregunta "¿Cómo se pueden potenciar las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías en futuros maestros de primaria, mediante la orquestación de discusiones en gran grupo con el uso de la tecnología?". Para aproximar respuestas a la pregunta de investigación se plantean los siguientes objetivos fundamentales:

- Estudiar la anticipación, puesta en práctica y evaluación de una secuencia didáctica con discusiones en gran grupo utilizando la herramienta GeoGebra.
- Detectar oportunidades de aprendizaje de contenidos relacionados con movimientos rígidos en el plano en el contexto de la secuencia didáctica.

MARCO TEÓRICO

El aprendizaje matemático generalmente se produce cuando hay evidencias explícitas del aprovechamiento de alguna oportunidad de aprendizaje matemático (Morera, 2013). Luego, pocos temas de la práctica educativa dentro del aula de matemáticas afectan tan directamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje como la generación de oportunidades de aprendizaje matemático.

Según Cobb y Whitenack (1996) el aprendizaje matemático es un proceso de auto organización conceptual y de enculturación. Morera (2013) añade la modificación de estructuras procedimentales, de gestión del conocimiento y de participación en el entorno de enseñanza-aprendizaje. Así, consideramos *oportunidades de aprendizaje* todas las situaciones que se dan durante un proceso de resolución de un problema en las que se presenta la posibilidad de que los alumnos puedan construir nuevas conexiones o relacionarlas con el aprendizaje de nuevas formas de proceder. Se trata de situaciones donde el contraste entre diferentes interpretaciones de la resolución o de las normas de clase es aprovechado como hilo conductor en la discusión. La relación entre obstáculos y oportunidades de aprendizaje está presente en la base de experimentos de enseñanza que hacen aflorar interpretaciones diversas de normas socio matemáticas (Planas y Boukafri, 2019).

Morera et al. (2013) caracterizan las oportunidades de aprendizaje en tres tipos, según la orientación de sus acciones. El primer tipo son las orientadas a conocer un contenido matemático concreto, por ejemplo, identificar un vector de traslación. Otro tipo son las oportunidades orientadas al aprendizaje de una estrategia, por ejemplo, aprender a recurrir a casos particulares. Por último tenemos oportunidades orientadas a actividades de autorregulación, por ejemplo, aprender la necesidad de justificar mediante argumentos.

Según Bustos Rubilar y Zubierta Badillo (2019), el hecho de que los estudiantes tengan la oportunidad de intercambiar ideas o puntos de vista ayuda, no solo a mejorar sus validaciones, sino también a conocer el significado de justificar en el contexto de las matemáticas. El análisis de interacciones en clase puede utilizarse para detectar oportunidades de aprendizaje y continuidades en la participación (Planas y Boukafri, 2019). La matemática escolar se construye en la actividad diaria en el aula y debe respetar la manera en la que el alumno se expresa. Esto abre la posibilidad de generar oportunidades de aprender interpretaciones significativas.

Entendemos por *orquestación* la manera que tiene un profesor de gestionar cada uno de los elementos de una discusión (Morera, 2013). En nuestro caso estos elementos son los alumnos, el Software de Geometría Dinámica (SGD) y la propia profesora. Todos deben interactuar para conseguir una producción común. Según Drijvers et al. (2010) los tipos de orquestación presentes en estas discusiones son:

- Demostración técnica: Exposición por parte del profesor de elementos técnicos de la herramienta.
- Explicación de la pantalla: Esclarecimiento de lo que sucede en la pantalla por parte del profesor.
- Conexión pantalla-pizarra: El profesor establece la relación entre lo que ocurre en el entorno dinámico y su representación en un entorno estático.
- Discusión de la pantalla: Diálogo en gran grupo sobre lo que ocurre en la pantalla.
- Descubrir y mostrar: Utilización deliberada del trabajo realizado por un estudiante, identificado durante la preparación de la discusión.
- Trabajo del sherpa: La tecnología es utilizada por uno o varios alumnos para presentar su trabajo delante del resto o para responder preguntas planteadas por el profesor.

En el análisis de los datos del estudio utilizaremos los siguientes estadios propuestos por Morera (2013), que aprecia modelos de actuación potencialmente interesantes para la discusión en gran grupo: situación del problema, presentación de una solución (argumentada), estudio de las diferentes estrategias, estudio de casos particulares o extremos, contraste entre diferentes soluciones, conexión con otras situaciones, generalización y contextualización, reflexión sobre el progreso matemático.

En relación al esquema que adoptan algunas de las discusiones en gran grupo, Morera (2013) detecta que cuando la orquestación se centra en el profesor los estadios suceden de manera más ordenada que cuando se centra en los alumnos. Además, si un problema trata un gran número de estadios es probable que sea fecundo en oportunidades de aprendizaje. Para que se traten todos los estadios, una buena anticipación del problema es fundamental; aunque pueden influir otros factores como la dinámica de participación de los alumnos. Igualmente, la tecnología puede ocasionar que un ejercicio se transforme en problema, así puede influir en su riqueza (Hershkowitz y Schwarz, 1999).

METODOLOGÍA

La metodología de la investigación es cualitativa. A grandes rasgos, nuestra investigación se encuentra dentro del paradigma denominado "investigación de diseño" ("design research") con métodos interpretativos aplicados al análisis de datos de clase (Molina, 2021). Así, hemos planificado secuencias formativas que implican el diseño de tareas, su implementación efectiva y el análisis retrospectivo de la experiencia. Tras cada implementación, hemos realizado un proceso de reflexión iterativa que ha permitido re-adaptar el diseño inicial. (Cobb, Jackson y Dumlap, 2016).

Los participantes son los 21 estudiantes de 4º curso de Grado de Magisterio de Educación Primaria (modalidad bilingüe) del Centro de Estudios CES Don Bosco (Adscrito a la Universidad Complutense de Madrid), dentro de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III. La profesora que dirige el taller es a su vez la investigadora. Además, tiene relación con los participantes en el estudio, ya que es la profesora de la asignatura. La información se obtiene a partir del análisis de las actividades de GeoGebra entregadas por cada pareja a través del campus virtual y de videograbaciones de las discusiones en grupo realizadas en las sesiones de clase.

La secuencia didáctica está formada por cuatro problemas, los tres primeros sobre contenidos relacionados con movimientos rígidos en el plano y el último de corte didáctico, ya que un problema importante en educación matemática consiste en dilucidar qué tipo de conocimiento didáctico-matemático debería tener un profesor de matemáticas (Giacomone et al., 2018). En esta comunicación exponemos la caracterización de los episodios que se suceden durante la discusión en gran grupo del problema 1:

Una empresa ha diseñado un juego para niños que permite armar figuras como el dibujo siguiente (figura 1).

Figura 1. Problema 1.

Construye la figura anterior, aplicando un giro, una traslación, una simetría y una simetría deslizante a las piezas siguientes, según corresponda (figura 2).

Señala en cada pieza, mediante un cuadro de texto, el nombre del movimiento que has aplicado y su(s) elemento(s).

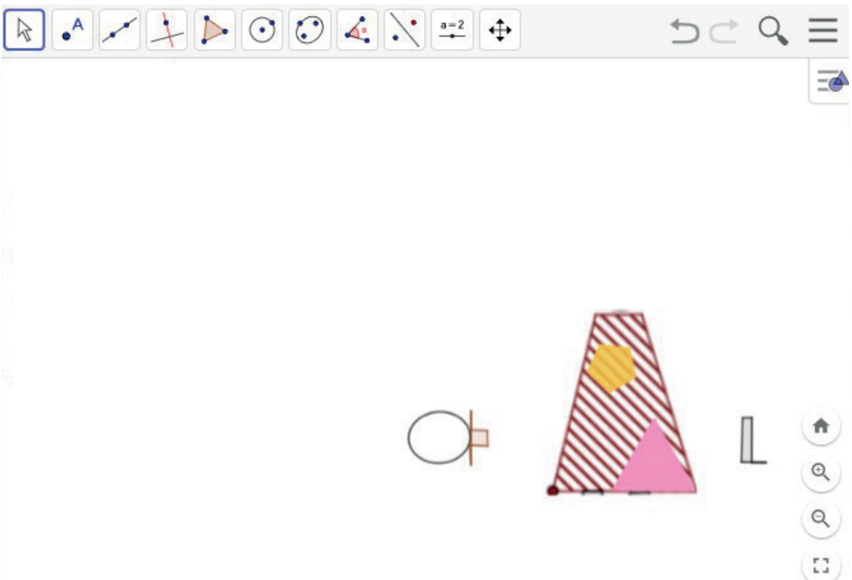


Figura 2. Imagen del SGD.

La aplicación de esta actividad se llevó a cabo en dos sesiones. En la primera, los estudiantes trabajaron en parejas, que formaron por afinidades personales, en el aula de informática con el uso del

SGD GeoGebra. En la segunda, tuvo lugar la discusión en gran grupo en el aula-clase que dispone de Pizarra digital interactiva (PDI), donde se proyecta la solución de una pareja que realiza el *trabajo del sherpa* (Drijvers et al., 2010).

Para el análisis de los resultados nos centramos en los elementos que pueden influir en el aprendizaje de los estudiantes y dividimos la discusión en gran grupo en episodios, fijándonos en la interacción entre los participantes y en la influencia de la tecnología. Todas las acciones pertenecerán a un episodio y serán analizadas. La naturaleza de los episodios está caracterizada por dos elementos: tipos de orquestación (Drijvers et al., 2010) y estadios de la discusión (Morera, 2013). Estudiamos los segmentos mirando solo una dimensión, luego repetimos el procedimiento mirando la otra dimensión. Así, los episodios estarán caracterizados por elementos de cada componente.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El problema 1 tiene dos apartados con cierto paralelismo. El objetivo del primer apartado es trabajar la elección y la construcción de movimientos rígidos con la excusa de formar una figura geométrica. En el segundo apartado se pide identificar con su nombre a cada uno de los elementos construidos. Para el análisis, ponemos atención a los diálogos que tuvieron lugar durante la discusión en gran grupo.

Dividimos las acciones en diez episodios como se muestra en la tabla 1. Los episodios van acompañados de un subíndice, que conserva el orden cronológico en el que se sucedieron.

Tabla 1. Clasificación de los episodios del Problema 1.

DISCUSIÓN EN GRAN GRUPO	Situación del problema	Presentación de una solución (argumentada)	Estudio de las estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre diferentes soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre el progreso matemático	*(Tipos de estadio)*
Demostración técnica						e_{10}		e_7	
Explicación de la pantalla	e_1								
Conexión pantalla-pizarra						e_6			
Discusión de la pantalla		e_2	e_2	e_8		e_3, e_9	e_5, e_8		
Descubrir y mostrar		e_3			e_3				
Trabajo del Sherpa			e_4						
(Tipos de orquestación)									

Los estadios en los que la acción se centra en la orquestación de la profesora se sitúan en las tres primeras líneas de la tabla 1. Es ella quién, explicando en pantalla, sitúa los alumnos para empezar la discusión conjunta después del trabajo en parejas en el aula de informática en la sesión anterior (e_1). A continuación, invita a Cristina y Radhika a exponer su solución. Para colocar una de las piezas han aplicado un giro con un ángulo determinado, pero tenían total libertad para elegir el centro de giro. En el segundo episodio surge una discusión sobre la amplitud del ángulo de giro. La profesora y Cristina concluyen que es importante indicar el sentido de giro cuando se hace referencia a la amplitud del ángulo (e_2). En la tabla 1, este episodio se ha considerado *discusión en pantalla* ya que tiene lugar una discusión conjunta sobre lo que ocurre en el SGD. Cristina comienza presentando una solución y después se estudian distintas estrategias para argumentar.

En el siguiente episodio (e_3) Radhika continúa contando cómo han construido la figura que se pedía. Han aplicado a otra pieza una simetría axial. La clase se hace consciente de que no existe libertad para colocar el eje de simetría, pues depende de dónde se haya colocado el centro de giro de la pieza anterior. Se revisa la noción de simetría, el elemento fundamental es el eje e invierte la orientación. Este episodio se ha clasificado en la tipología *descubrir y mostrar*, pues Radhika expone una solución que se utiliza deliberadamente para discutir sobre la libertad de elección del eje. Se conecta con otras situaciones en las que la pieza podría haber sido la primera en moverse, por lo que existiría libertad total de colocación del eje. También se podrían haber realizado previamente otros movimientos que condicionaran a colocar el eje en otra posición.

Cristina explica que han aplicado una simetría deslizante a otra pieza (e_4). Esto da la oportunidad de revisar la definición de este movimiento. Poniendo en común otras soluciones, los alumnos tienen la oportunidad de aprender qué puede surgir de la composición de simetría y traslación o traslación y simetría. La profesora dice que los movimientos no son conmutativos (volverá sobre ello en el episodio 10). En este episodio, se concluye que no existe una única solución y se hace necesario expresarse con el lenguaje matemático adecuado. Lo clasificamos como *trabajo del sherpa* porque Cristina utiliza la tecnología para presentar su trabajo al resto de los participantes y responder las dudas de la profesora. Además, se estudian diferentes estrategias para resolver o argumentar.

En el episodio 5 (e_5) se recuerda el nombre del "centro de giro" y se recalca la importancia de diferenciar entre recta y segmento. Es fundamental saber cuáles son las características del vector: módulo, dirección y sentido. Utilizando el carácter dinámico del software, Cristina y Radhika son conscientes de que han representado dos veces el mismo vector cuando no habían tenido intención de que fuera así durante la elaboración de la actividad en el aula de informática. De nuevo, se hace esencial expresarse con el leguaje matemático adecuado. Este episodio es una discusión conjunta sobre lo que está ocurriendo en la pantalla que genera un ambiente idóneo para la generalización de un resultado encontrado.

Cristina y Radhika vuelven a sentarse en sus sitios en clase. En el episodio 6 (e_6) tiene lugar *conexión pantalla-pizarra* ya que la profesora utiliza una pizarra tradicional para anotar los resultados obtenidos en el entorno dinámico. Entre todos, recuerdan que los únicos movimientos rígidos posibles en el plano son traslación, giro, simetría o simetría deslizante. Debido a esto, la composición de movimientos cualesquiera en el plano originará uno de los cuatro. Varias alumnas plantean dudas y se pone de manifiesto la necesidad de justificar las propiedades que se enuncian. En este episodio se conecta con conocimientos matemáticos que aún se tienen que introducir.

La profesora, en el episodio 7 (e_7) vuelve a recordar la noción de simetría deslizante que ya había aparecido en el episodio 4. Es una *demostración técnica* que sirve como balance de la puesta en común para que los alumnos reflexionen sobre aspectos matemáticos trabajados.

Se estudia un caso particular de composición de simetría y traslación en el episodio 8 (e_8): Cuando el eje de simetría y el vector de traslación son perpendiculares. En ese caso, la composición origina una nueva simetría. La discusión que la profesora provoca permite recordar las características de una simetría. Los alumnos afirman que les resulta visualmente más sencillo si se sitúa el eje de simetría en posición vertical y una alumna es capaz de auto-corregir un argumento equivocado. Este episodio se considera una *discusión en pantalla* que permite la generalización y conceptualización.

El episodio 9 (e_9) vuelve a ser una *discusión en pantalla*. En este caso se produce la conexión con otros conceptos matemáticos. Cuando la composición de una simetría y una traslación es una nueva simetría, el nuevo eje de simetría es paralelo al inicial. La profesora argumenta este hecho empíricamente, utilizando el arrastre. Cristina no se conforma con esta evidencia, pregunta dudas y así, ejemplifica, haciendo patente la importancia de preguntar dudas.

En el último episodio (e_{10}) se comprueba algo que ya se había enunciado en el episodio 4: la composición de una simetría y una traslación no es conmutativa, aunque genere un movimiento rígido con el mismo nombre. Para ello, la profesora vuelve a utilizar el arrastre. Es una *demostración técnica* en la que se conecta con conocimientos matemáticos previos.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Según Morera (2013) la buena anticipación del problema está relacionada con el número de estadios que se tratan y esto influye en que podamos considerar que el problema sea rico. Se puede comprobar, observando la tabla 1, que en este caso están presentes todos los estadios.

Asumiendo la complejidad de analizar todos los factores que influyen en la riqueza de un problema, consideramos que las dos características fundamentales del diseño experimental de esta investigación son claves: el entorno tecnológico y el entorno colaborativo. Por un lado, el SGD crea un contexto formal para abordar las isometrías. En diferentes episodios, la tecnología ha permitido justificar empíricamente, mediante la modificación de los elementos que intervenían en el problema. Por ejemplo, si imaginamos el mismo problema en un entorno tradicional de lápiz y papel, el sentido de comparar vectores (e_5) se pierde si no se tienen conocimientos de geometría analítica, ya que se compararían usando sus expresiones en coordenadas. Por tanto, es difícil un tratamiento de vectores de forma intuitiva en un entorno no dinámico, lo cual sí se ha llevado a cabo en la secuencia utilizando la tecnología. Por otro lado, el entorno colaborativo ha sido esencial para la gestión del problema. Los alumnos han llegado a formalizar con un detalle que no hubiera sido posible sin la discusión conjunta. Concluimos, como Bustos Rubilar y Zubierta Badillo (2019), que el hecho de intercambiar ideas o puntos de vista los ayuda a mejorar sus validaciones y a comprender el significado de justificar en matemáticas. En la mayoría de las ocasiones ha sido la profesora quien ha guiado al grupo a tratar el problema de una determinada forma y es quién ha conectado con otras situaciones, pasando a ejemplos distintos a los del problema. Podríamos pensar que es una discusión centrada en la profesora. No obstante, como señala la distribución de la tabla 1, muchos estadios han sido agrupados en las tres líneas inferiores, lo cual demuestra que los alumnos han tenido un gran protagonismo. La profesora ha llevado a cabo la orquestación de la situación, aunque si nos fijamos en la sucesión de los episodios, observamos que hay saltos en el orden en lugar de seguir uno tras otro los estadios planteados.

A lo largo de este estudio se han abordado varios aspectos de los que extraemos recomendaciones didácticas para profesores de matemáticas. Consideramos fundamental que el profesor haga una planificación adecuada de la clase de forma minuciosa, teniendo en cuenta las diferentes estrategias que pueden seguir los alumnos y que el uso del SGD puede modificar las características del problema. Durante el trabajo en parejas, el profesor debe permanecer atento a las diferentes actuaciones de los alumnos, teniendo presente la anticipación y los contenidos que se quieren conectar en la discusión. Después, se deben seleccionar procesos de resolución que ayuden a encaminar el diálogo hacia los objetivos que se habían propuesto. Se recomienda orquestar la discusión en gran grupo desde el andamiaje de la solución seleccionada para ser expuesta y de las intervenciones de los participantes. Asimismo, deben introducirse preguntas que guíen hacia los diferentes contenidos a tratar, pero permitiendo a los alumnos actuar e intervenir por propia iniciativa.

Referencias

Bustos, Á. S. y Zubierta Badillo, G. (2019). Desarrollo y cambios en las maneras de justificar matemáticamente de estudiantes cuando trabajan en un ambiente sociocultural. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(3), 129-148. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2506

Cobb, P., Jackson, K. y Dumlap, C. (2016). Design research: An analisis and critique. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education.*

Cobb, P. y Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom videorecordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 213-228. https://doi.org/10.1007/BF00304566

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 70,* 213-234. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación, 29*(4), 1109-1131. https://doi.org/10.5209/RCED.54880

Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (1999) The emergent perspective in rich learning environments: Some roles of tools and activities in the construction of sociomathematical norms. *Educational Studies in Mathematics, 39,* 149-166. https://doi.org/10.1023/A:1003769126987

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83 - 97). SEIEM.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. [Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona].

Morera, L., Planas, N. y Fortuny, J. M. (2013). Design and validation of a tool for the analysis of whole group discussions in the mathematics classroom. En B. Uhuz (Ed.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. ERME.

Planas, N. y Boukafri, K. (2019). *Construcción de normas generadoras de oportunidades para el aprendizaje matemático.*

Ruiz-López, N. y Sáenz, C. (2013). Influencia de GeoGebra en la adquisición de competencias geométricas y didácticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en educación matemática XVII* (pp. 483-491). SEIEM.

¿QUÉ APRENDEMOS SOBRE EL CONOCIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO A PARTIR DE SU AUTOCONCEPTO?

What do we learn about student teachers' knowledge from their self-concept?

Muñiz-Rodríguez, L.[a], Valenzuela-Molina, M.[b], Aguilar-González, Á. [a] y Rodríguez-Muñiz, L. J. [a]

[a]Universidad de Oviedo, [b]Universidad Alberto Hurtado

Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar qué subdominios del conocimiento especializado eligen los estudiantes para maestro (EPM) en el marco de una tarea formativa sobre suma y resta de fracciones y estudiar la relación de esta elección con su autoconcepto, con el propósito de reforzar su formación inicial en aquellos aspectos donde perciben mayores inseguridades. En la tarea los EPM debían responder a dos de seis bloques de preguntas definidas en el marco de cada uno de los subdominios de conocimiento del modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). Los resultados revelan que los EPM tienen un mayor autoconcepto sobre su conocimiento de los temas (KoT) y su conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). Además, se identificó cierta asociación entre ambos subdominios.

Palabras clave: *autoconcepto, conocimiento del profesor, estudiantes para maestro, fracciones, MTSK.*

Abstract

The purpose of this work is to analyze which subdomains of the specialized knowledge student teachers choose in the framework of a formative task on addition and subtraction of fractions and to study the relationship of this choice with their self-concept, in order to reinforce their initial training in those aspects where they perceive greater insecurities. The data collection was carried out through a formative task on addition or subtraction of fractions in which student teachers had to answer two of six blocks of questions defined within the framework of each of the knowledge subdomains of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model. The results reveal that student teachers have a higher self-concept about their knowledge of topics (KoT) and their knowledge of the mathematics learning standards (KMLS). In addition, a certain association between both subdomains was identified.

Keywords: *fractions, MTSK, self-concept, student teachers, teacher knowledge.*

INTRODUCCIÓN

Es indiscutible que para enseñar matemáticas un docente necesita tener un conocimiento especializado de la materia, pero también coincidimos con otros autores (García González y Pascual Martín, 2017; Montes, 2016) en la importancia de considerar su conocimiento desde un punto de vista emocional, pues además de añadir información sobre lo anterior, permite comprender la naturaleza de sus prácticas educativas e identificar otros factores que puedan estar afectando a su configuración, como por ejemplo, su formación inicial.

Muñiz-Rodríguez, L., Valenzuela-Molina, M., Aguilar-González, Á., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022). ¿Qué aprendemos sobre el conocimiento de los estudiantes para maestro a partir de su autoconcepto? En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 391-399). SEIEM.

Sin ánimo de simplificar la complejidad del conocimiento emocional del profesor, enfocamos este estudio desde el autoconcepto, definido como una organización de cualidades que un individuo se atribuye a sí mismo (Kinch, 1963). El autoconcepto de los futuros docentes puede desencadenar ansiedad matemática, entendida en este ámbito como un conjunto de emociones negativas, como el estrés o el miedo por enseñar esta asignatura, derivadas en mayor medida tanto de las experiencias emocionales de los docentes cuando eran estudiantes, como de su conocimiento especializado (García González y Pascual Martín, 2017). Entendemos que la inseguridad sobre su conocimiento especializado es una emoción ligada a su autoconcepto y que como tal tiene un impacto significativo sobre su práctica docente (Zembylas, 2005).

Asumiendo que cuanto menor sea su autoconcepto, menor será su conocimiento especializado (García González y Pascual Martín, 2017), el objetivo de esta investigación es analizar qué subdominios del conocimiento especializado eligen los estudiantes para maestro (EPM) en el marco de una tarea formativa sobre suma y resta de fracciones y estudiar la relación de esta elección con su autoconcepto.

MARCO TEÓRICO

Desde el punto de vista del conocimiento especializado que debe construir un maestro en su formación inicial, en este estudio tomamos como marco de referencia el modelo MTSK (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*) propuesto por Carrillo et al. (2018). El modelo MTSK se presenta como un marco teórico que modela el conocimiento especializado de un profesor que enseña matemáticas (Climent et al., 2014), por medio de las categorías e indicadores que propone en cada uno de sus subdominios. El modelo está estructurado en tres dominios de conocimiento especializado del profesor de matemáticas:

- El conocimiento matemático (*Mathematical Knowledge*, MK), donde se integran los conocimientos de la propia disciplina matemática que se enseña. Este dominio considera a su vez tres subdominios: el conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics*, KoT), el conocimiento de la estructura de las matemáticas (*Knowledge of the Structure of Mathematics*, KSM), y el conocimiento de la práctica matemática (*Knowledge of Practices in Mathematics*, KPM).
- El conocimiento didáctico del contenido (*Pedagogical Content Knowledge*, PCK), cuyo interés es profundizar en el contenido de la matemática cuando hay una intención de enseñanza y aprendizaje. Este dominio se divide en tres subdominios: el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (*Knowledge of Mathematics Teaching*, KMT), el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (*Knowledge of Features of Learning Mathematics*, KFLM), y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (*Knowledge of Mathematics Learning Standards*, KMLS).
- El dominio de las creencias y concepciones, en el que está inmerso el dominio afectivo, que permea el conocimiento que el profesor tiene de cada uno de los subdominios anteriores (Pascual et al., 2020).

En este estudio se considera el autoconcepto como una parte integrada de los afectos que articula las creencias del profesor de matemáticas y que a su vez permea su conocimiento especializado. En McLeod (1992) se profundiza en la caracterización de las creencias, las actitudes y las emociones, como dimensiones que se articulan de forma que todas ellas influyen para que surjan emociones en los EPM. Considerar el autoconcepto como una parte integradora del dominio afectivo implica situar las características inherentes a este como elemento de análisis para comprender las creencias del profesor como resultado de las interrelaciones con las demás componentes.

Las tareas formativas juegan un rol fundamental en la formación inicial docente, pues permiten no solo desarrollar el conocimiento especializado de los EPM, sino también acceder a él, y por tanto investigarlo (Ribeiro et al., 2021). Para cumplir con este doble objetivo, estas tareas deben ser similares a las que se presentarían a los estudiantes, pero con un enfoque más reflexivo y discursivo, ligado a elementos de la práctica docente. Según estos autores, un esquema típico de tarea formativa toma como punto de partida una situación-problema adecuada para estudiantes de un determinado nivel (que los EPM deben saber resolver), a partir de la cual se plantean preguntas para los EPM formuladas sobre la base de un modelo de conocimiento del profesor, como podría ser el MTSK.

METODOLOGÍA

Dentro de la asignatura "Matemáticas y su didáctica I", impartida en el segundo curso del Grado en Maestro/a en Educación Primaria de la Universidad de Oviedo, se diseñó una tarea formativa sobre suma y resta de fracciones que los EPM debían realizar de manera individual y que tenía un peso del 10% en la calificación final. En esta asignatura se aborda, por primera vez en el grado, el estudio de los contenidos de los bloques curriculares de Números y Medida y su didáctica. La tarea se propuso tras los contenidos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en Educación Primaria. La tarea fue presentada en una sesión de clase, si bien debía ser realizada fuera del horario lectivo y en un plazo máximo de veinte días. Los estudiantes podían consultar tanto el material utilizado durante el desarrollo de la asignatura como cualquier otra referencia que considerasen de interés. La tarea debía ser entregada mediante un documento de texto a través del campus virtual. Las instrucciones eran las siguientes:

- Buscar en medios de comunicación una situación en la que aparezca el concepto de fracción.
- A partir de la situación anterior, diseñar un problema que permita trabajar la suma o la resta de fracciones heterogéneas con alumnado de Educación Primaria.
- Resolver el problema explicando el razonamiento seguido para llegar a la solución.
- Responder a todas las cuestiones que se plantean en dos de los seis bloques propuestos (tabla 1) teniendo en cuenta el problema diseñado.

Tabla 1. Bloques de preguntas para cada subdominio.

Subdominio	Bloques de preguntas
KoT	a. ¿De qué tipo son las fracciones que aparecen en el problema diseñado? ¿Qué situación de uso de fracciones (i.e., reparto, medida, trueque, transformación…) se refleja? ¿Qué técnica has utilizado para reducir a común denominador? Justifica tus respuestas. b. ¿Cómo definirías formalmente la suma/resta de fracciones? Escribe tu propia definición. ¿Qué propiedades aritméticas se reflejan en el problema diseñado? Justifica tu respuesta. c. ¿Qué modelo gráfico utilizarías para resolver el problema? Justifica tu respuesta. ¿Cómo resolverías el problema utilizando dicho modelo? Justifica tu respuesta. d. ¿Qué tipo de problema aritmético (i.e., cambio, combinación, comparación…) se refleja? ¿A qué estructura pertenece el problema diseñado? ¿Qué tipo de contexto (i.e., personal, profesional, social, científico…) se pone en juego? Justifica tu respuesta.

Subdominio	Bloques de preguntas
KSM	a. Identifica una variable didáctica del problema diseñado y modifícala de tal forma que aumente la complejidad de la resolución. Justifica tu respuesta. b. Identifica una variable didáctica del problema diseñado y modifícala de tal forma que disminuya la complejidad de la resolución. Justifica tu respuesta. c. ¿Qué otros contenidos matemáticos comparten características comunes con la suma/resta de fracciones? ¿Cómo se pueden trabajar a partir del problema diseñado? Justifica tu respuesta. d. ¿En la enseñanza y el aprendizaje de qué otros contenidos matemáticos se requiere la suma/resta de fracciones? ¿Se pueden trabajar a partir del problema diseñado? Justifica tu respuesta.
KPM	a. ¿Qué heurísticos aplicables a la resolución de situaciones de suma/resta de fracciones heterogéneas se podrían aplicar en la resolución del problema diseñado? Justifica tu respuesta.
KMT	a. ¿Qué teorías de enseñanza de las matemáticas se relacionan con la suma/resta de fracciones? ¿Cómo las implementarías en el aula? Justifica tu respuesta. b. ¿Qué recursos didácticos se pueden emplear para la enseñanza de la suma/resta de fracciones? ¿Qué características matemáticas tienen estos recursos que justifican la idoneidad de los mismos para el contenido matemático a enseñar? Justifica tu respuesta. c. ¿Qué estrategias, técnicas y tareas se pueden emplear para la enseñanza de la suma/resta de fracciones? ¿Qué potencialidad matemática, limitaciones u obstáculos presentan? Justifica tu respuesta.
KFML	a. ¿Qué teorías de aprendizaje de las matemáticas se relacionan con la suma/resta de fracciones? ¿Cómo? Justifica tu respuesta. b. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumnado para comprender la suma/resta de fracciones? Justifica tu respuesta. ¿Qué errores o dificultades se pueden presentar en la resolución del problema diseñado? Propón algunos ejemplos. c. ¿Qué preguntas plantearías para guiar la enseñanza y el aprendizaje de la suma/resta de fracciones? Especifica en tu resolución paso a paso dichas preguntas. ¿Qué respuestas esperas para cada una de ellas? Justifica tu respuesta. d. ¿Plantea el problema diseñado una situación de interés para el alumnado? Si tuvieras que cambiar el problema diseñado, ¿con qué intereses del alumnado lo relacionarías? Justifica una situación particular.
KMLS	a. ¿En qué nivel de aprendizaje es adecuado trabajar este tipo de situaciones? Indica la edad y el curso y justifica tu respuesta. b. Propón un objetivo de aprendizaje para la clase en la cual se trabajaría el problema diseñado con sus respectivos indicadores de evaluación. c. ¿Qué contenidos matemáticos se deben trabajar con anterioridad a la resolución del problema diseñado? ¿Qué contenidos matemáticos se pueden trabajar con posterioridad a la resolución del problema diseñado? Justifica tu respuesta.

Las preguntas fueron diseñadas por dos de las autoras de este trabajo tomando como referencia la definición propuesta por los autores del modelo para cada subdominio (Carrillo et al., 2018). Junto con una fase previa de validación mediante juicio de expertos, se espera que las respuestas de los EPM aporten información para adecuar el instrumento a su objeto de estudio (i.e., diseñar una tarea profesional que sirva como documento teórico para que el profesorado en formación sea capaz de diseñar tareas de enseñanza-aprendizaje) y permita su validación en una fase de estudio posterior.

De cara a la interpretación de las respuestas, entendemos que los EPM eligieron aquellos dos bloques de preguntas en los que su seguridad a la hora de responder era mayor, por lo que es pertinente considerar esta variable como informante de su nivel de confianza, es decir, de su autoconcepto matemático, junto con otros factores como las expectativas de logro, el deseo de profundizar en la materia o la atribución de las causas del éxito o fracaso (Gil Ignacio et al., 2006).

RESULTADOS

De los 256 alumnos matriculados en la asignatura, 231 entregaron la tarea, lo que supone una tasa de respuesta del 90.2%. Se debe mencionar que dos tareas solo incluían respuestas a uno de los dos bloques y otra presentaba un error en el archivo. Esta última no fue considerada para el análisis. La figura 1 muestra el porcentaje de EPM que eligieron responder a cada uno de los bloques de preguntas asociado a los diferentes subdominios del modelo MTSK. Se observa que los subdominios con mayor representación son el KoT y el KMLS, seguidos con una diferencia significativa por el KSM, el KPM, el KMT y el KFML.

Al analizar la distribución de los pares de subdominios (figura 2) elegidos por los EPM, se observa un claro predominio (53.1%) del par KoT-KMLS, seguido con un 15.4% del par KoT-KSM. Se detectan otros pares menos representados (KoT-KPM 8.8%, KPM-KMLS 7.9%, KSM-KMLS 6.6%, KMT-KMLS 3.5%, KSM-KPM 1.8%, KFML-KMLS 1.3%, KoT-KFML 0.9%, KSM-KFML y KPM-KMT 0.4%), y otras combinaciones ausentes (KoT-KMT, KSM-KMT, y KPM-KFML).

Figura 1. Número de EPM que eligieron cada subdominio.

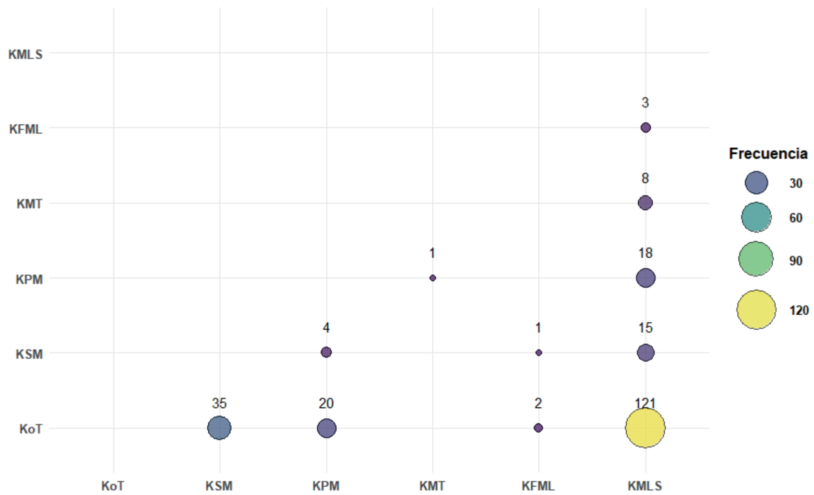


Figura 2. Distribución de los pares de subdominios elegidos por los EPM.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Uno de los primeros aspectos de interés que se extrae del análisis es una mayoritaria preferencia por elegir los bloques de preguntas relacionados con el KoT y el KMLS. Estos subdominios son, junto con el KMT, de los más observados en la literatura científica que experimenta el modelo MTSK considerando como sujeto los EPM (Climent Rodríguez et al., 2016; Hernández Gutiérrez y Lizarde Flores, 2016; Ferretti, 2020; Valenzuela-Molina y Ramos-Rodríguez, 2019; Vergara et al., 2021). Al contrario que en estos trabajos, el tipo de análisis planteado aquí no es observacional, sino que se pide una elección a los EPM (sin considerar la propia naturaleza de las respuestas dentro de las elecciones). No obstante, cabe señalar la consistencia entre los hallazgos.

En el ámbito de la investigación en el modelo MTSK no se encuentran, en nuestro conocimiento, estudios que analicen las causas de esta preferencia por el KoT y el KMLS, por lo que resulta difícil vincular este resultado con la literatura existente. No obstante, se puede relacionar con dos aspectos. Por un lado, hasta su llegada a la asignatura en el Grado en Maestro/a en Educación Primaria, los EPM no han tenido una aproximación didáctica a la matemática, por lo que los subdominios del PCK relacionados con enfoque de la instrucción (KMT) o características del aprendizaje (KFML) les resultan, razonablemente, más ajenos. Sin embargo, los EPM sí tienen relación, como discentes, con los estándares de aprendizaje y su distribución por curso, por lo que el KMLS sí resulta más familiar. Además, en el primer curso del grado han tenido asignaturas de carácter generalista, por lo que creemos que al realizar las preguntas en el ámbito de la didáctica de la matemática puede darnos unos indicios de que la formación en estos subdominios tenga una especial relevancia.

Por otro lado, dentro del dominio MK hay más equilibrio, puesto que el KPM y el KSM no están tan infrarrepresentados respecto al KoT como lo estaban el KFML y el KMT respecto al KMLS. No obstante, también creemos que es lógico que el KoT tenga una representación mayor y, en este sentido, la literatura sobre los enfoques y las tendencias didácticas en España (Castro, 2008; López-Beltrán et al., 2020) muestra que los contenidos siguen teniendo un papel preponderante sobre otros aspectos como los procesos, que están más relacionados con el KPM (argumentación, razonamiento y prueba, etc.) y con el KSM (conexiones, matematización, etc.). Los datos en torno al subdominio del KoT evidencian que los futuros maestros, además de buscar su seguridad para poder responder las preguntas (y hacerlo de la mejor manera posible), buscan tener un apoyo en los conocimientos matemáticos que traen de su etapa como discentes, aunque en ocasiones suelen demostrar debilidades al terminar su formación inicial en este subdominio (Montes et al., 2015).

Además, el resultado es también consistente con investigaciones recientes (Rodríguez-Muñiz et al., 2022) que muestran cómo las tendencias didácticas asumidas por los EPM se han desplazado en los últimos años de posiciones más tradicionales a otras más investigativas. De hecho, la segunda asociación más frecuente, tras KoT-KMLS, es la de KoT-KSM.

Otra posible causa de la infrarrepresentación de algunos subdominios está relacionada con el propio instrumento de elección: ante la obligación de escoger dos bloques, la presencia de preguntas no tan habituales como las del KoT o el KMLS (y, en menor medida, KPM y KSM) puede incrementar la sensación de inseguridad ante preguntas relacionadas con el KMT o el KFML. En este sentido, la seguridad llevaría a la elección de las preguntas señaladas en la figura 1, indicando un mayor autoconcepto en lo relacionado con el KoT, el KMLS, el KSM y el KPM, respectivamente. Es evidente que, al ser una tarea evaluable en la calificación final de la asignatura, los maestros quieran responder a la mayor parte de preguntas posibles de cada bloque, y que no van a elegir un bloque en las que no conozcan la respuesta a la (casi) totalidad de las preguntas. También el hecho de el número de preguntas en cada bloque no fuese el mismo pudo influir la elección de los participantes hacia responder menos preguntas o aquellas que podían responder de manera más rápida o inmediata. Además, que la tarea estuviese pensada para ser realizada fuera del horario lectivo, no limitó el intercambio de opiniones entre compañeros.

Un segundo aspecto de interés que se extrae de los hallazgos es la relación que se establece entre los subdominios del MTSK. Distintas investigaciones han analizado qué relaciones y de qué tipo se evidencian entre los subdominios del MTSK (Aguilar-González et al., 2018, 2019; Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez, 2021) pero, de nuevo, se trata de relaciones evidenciadas a partir de la observación. En este sentido, sin pretensión de generalización, ya que no se trata de un estudio experimental, de los hallazgos emerge la necesidad de indagar sobre los paralelismos (o divergencias, si se encontraran) y sus causas entre las observaciones y las elecciones de los EPM.

En cuanto a la fundamentación en el modelo MTSK de esta tarea, este se ha mostrado útil y funcional para estructurar tanto las preguntas como su naturaleza. En esta línea, sería interesante seguir desarrollando tareas de estas características con el modelo MTSK. En cuanto a las preguntas de cada uno de los subdominios, somos conscientes de que la propia naturaleza de cada uno ha contribuido a focalizar la atención de los EPM, es decir, si en una pregunta existe un término lingüístico con el que el EPM no está familiarizado, pueda descartar de facto ese bloque.

Señalamos una tercera idea que surge de los hallazgos. Al tratarse de una asignatura de formación inicial a nivel de grado, se consideró que hacer explícito el modelo MTSK sería excesivamente complejo. Por ello, la elección del bloque de preguntas fue opaca respecto a los subdominios del MTSK. La cuestión de hasta qué punto un conocimiento del propio modelo, haciéndolo explícito en los procesos de instrucción, puede fomentar la metacognición y reforzar el autoconcepto y la identidad docente fue abordada en EPM a nivel de máster universitario en Aguilar-González y Rodríguez-Muñiz (2020). Sin embargo, no encontramos en la literatura formulaciones explícitas a nivel de grado. Es, por lo tanto, una línea de investigación que se abre a partir de este trabajo.

Otras líneas futuras pasan por la implementación de una tarea similar en otro contexto educativo (en concreto, en Chile, con EPM con especialidad en matemáticas, titulación que no existe como tal en España) que permita un estudio comparado o realizar varias tareas, en este sentido, con diferentes contenidos para conocer si tanto las elecciones de los bloques de preguntas, como las relaciones entre los subdominios se vuelven a producir. En esta línea, se espera agregar una instrucción final a la tarea que exija a los participantes justificar los motivos que le llevaron a elegir los dos subdominios para así mejorar nuestra interpretación de los resultados.

Finalmente, señalamos las limitaciones del estudio. La primera es que la muestra no aleatoria impide la generalización de los resultados, a pesar de tener un tamaño considerable. La segunda pasa por la propia estructura del instrumento. Se ha señalado su opacidad respecto al modelo MTSK, pero, además, a posteriori reparamos en que habría sido interesante incluir una pregunta sobre las razones que llevaron a los EPM a elegir los bloques considerados. Además, con el instrumento usado es imposible afirmar que estos resultados se vayan a mantener en el tiempo y tengan un impacto en el desempeño diario de su profesión en el futuro. Esta limitación supone un desafío pendiente, que podría abordarse desarrollando estudios de carácter longitudinal, que permitan conocer cómo se ha ido produciendo un desarrollo profesional en los EPM.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto TIN2017-87600-P del Ministerio de Ciencia e Innovación de España. Los autores pertenecen a la Red MTSK

Referencias

Aguilar-González, Á., Muñoz-Catalán, C., Carrillo, J. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA, 13*(1), 41–61. https://doi.org/10.30827/pna.v13i1.7944

Aguilar-González, Á., Muñoz-Catalán, C. y Carrillo, J. (2019). An example of connections between the mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(2), 1–15. https://doi.org/10.29333/ejmste/101598

Aguilar-González, Á. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2020). Mathematics teachers' specialized knowledge model as a metacognitive tool for initial teacher education. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.) (2020). *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)* (pp. hal-02430408). ERME y Freudenthal Institute.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á, Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo González, B. Gómez Alfonso, M. Camacho Marín y L. J. Blanco Nieto (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII.* SEEM "Ventura Reyes Prósper" y SEIEM.

Climent, N., Escudero-Ávila, D., Rojas, N., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M. C. y Sosa, L. (2014). El conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas. En J. Carrillo, N. Climent, L. C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila y E. Flores-Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK* (pp. 43–70). Universidad de Huelva.

Climent Rodríguez, N., Montes Navarro, M. Á., Contreras González, L. C., Carrillo Yáñez, J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Barrera, V. J. y León Moriales, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las Matemáticas a través del análisis de vídeos. *Avances De Investigación en Educación Matemática*, *9*, 85–103. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i9.108

Delgado-Rebolledo, R. y Espinoza-Vásquez, G. (2021). ¿Cómo se relacionan los subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas? En J. G. Moriel Junior (Ed.), *Actas del V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 288–295). Congresse-me.

Ferretti, F. (2020). Mathematics teacher's specialised knowledge of prospective primary teachers: An explorative study. *PNA*, *14*(3), 226–240. https://doi.org/10.30827/pna.v14i3.10272

García González, M. S. y Pascual Martín, M. I. (2017). De la congoja a la satisfacción: el conocimiento emocional del profesor de matemáticas. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH, 8*(15), 133–148.

Gil Ignacio, N., Guerrero Barona, E. y Blanco Nieto, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *4*(1), 47–72.

Hernández Gutiérrez, F. J. y Lizarde Flores, E. (2016). Caracterización del MTSK de los docentes en formación: aproximación desde sus concepciones sobre el KFLM y el KMLS. En E. Mariscal (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1190–1198). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Kinch, J. W. (1963). A formalized theory of the self-concept. *American Journal of Sociology, 68*(4), 481–486. https://doi.org/10.1086/223404

López-Beltrán, M., Albarracín, L., Ferrando-Palomares, I., Montejo-Gámez, J., Ramos, P., Serradó, A., Thibaut, E. y Mallavibarrena, R. (2020). La Educación Matemática en las enseñanzas obligatorias y el Bachillerato. En D. Martín De Diego, T. Chacón, G. Curbera, F. Marcellán y M. Siles (Eds.), *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 1–94). Editorial Centro de Estudios Ramón Areces.

McLeod, D. (1992) Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 97–101). Macmillan.

Montes, M. A. (2016). Las creencias en MTSK. En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor*. *Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 55–59). SGSE.

Montes, M., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación*, *367*, 36–62.

Pascual, M. I., Fernández-Gago, J., García, M., Marbán, J. M., y Maroto, A., (2020). El dominio afectivo y MTSK. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 32–40). Universidad de Huelva.

Ribeiro, M., Almeida, A. y Mellone, M. (2021). Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Revista Do Programa De Pós-Graduação Em Educação Matemática Da Universidade Federal De Mato Grosso Do Sul (UFMS), 14*(35), 1-32. https://doi.org/10.46312/pem.v14i35.13263

Rodríguez-Muñiz, L. J., Aguilar-González, Á., Lindorff, A. y Muñiz-Rodríguez, L. (2022). Undergraduates' conceptions of mathematics teaching and learning: an empirical study. *Educational Studies in Mathematics*, *109*(3), 523–547. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10105-5

Valenzuela-Molina, M. y Ramos-Rodríguez, E. (2019). Transformación del conocimiento especializado de futuras profesoras de primaria sobre división de fracciones. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *Actas del IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 228–238). Universidad de Huelva.

Vergara, L., Climent, N. y Codes, M. (2021). Construcción de conocimiento especializado a partir de una tarea formativa sobre visualización. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 629–636). SEIEM.

Zembylas, M. (2005). Beyond teacher cognition and teacher beliefs: The value of the ethnography of emotions in teaching. *International Journal of Qualitative Studies in Education, 18*(4), 465–487. https://doi.org/10.1080/09518390500137642

UN ESTUDIO DE LAS ENCICLOPEDIAS ESCOLARES ESPAÑOLAS (1901-1965). EL CASO DEL PORCENTAJE

A study of Spanish school encyclopedias (1901-1965). The case of percentage

Muñoz-Escolano, J. M.[a], Oller-Marcén, A. M.[b] y Santágueda-Villanueva, M.[c]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, [c]Universitat Jaume I

Resumen

El carácter cíclico según el que se organizó la enseñanza primaria en España durante la mayor parte del siglo XX contribuyó a la popularización del género textual de las enciclopedias escolares. Así, este tipo de manuales son una fuente importante e interesante que ha sido poco estudiada desde la perspectiva de la historia de la educación matemática. En el presente trabajo realizamos un análisis de contenido de 29 enciclopedias escolares publicadas desde el inicio del siglo XX y hasta la aparición de la Ley General de Educación. Nuestro estudio se centra en un concepto importante desde el punto de vista de la alfabetización matemática, con gran recorrido histórico y muy vinculado a la proporcionalidad aritmética: el porcentaje. Más en particular, realizamos un análisis descriptivo de los aspectos conceptuales, tipos de problemas, contextos, etc. teniendo en cuenta la posible influencia de la publicación, en 1953, de los primeros cuestionarios nacionales.

Palabras clave: *enciclopedias escolares, porcentaje, historia de la educación matemática, siglo XX, análisis de contenido.*

Abstract

The cyclical nature according to which Spanish primary education was organized during the most part of the 20th century, contributed to the popularization of the textual genre of school encyclopedias. Thus, this kind of manuals are an important and interesting source that has been barely studied from the perspective of the history of mathematics education. In this work, we carry out a content analysis of 29 school encyclopedias published between the beginning of the 20th century and the enactment of the General Law of Education. Our study focuses on an important concept from the point of view of mathematical literacy, with a long history, and closely related to arithmetic proportionality: the percentage. More in particular, we perform a descriptive analysis of the conceptual aspects, types of problems, contexts, etc. taking into account the eventual influence of the publication, in 1953, of the first national syllabus.

Keywords: *school encyclopedias, percentage, history of mathematics education, 20th century, content analysis.*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

En 1901 se introduce en España un modelo de enseñanza elemental obligatoria de 6 a 12 años, organizada de forma cíclica en tres grados. Esta estructura de la educación primaria española se mantuvo en líneas generales a lo largo de todo el siglo XX hasta la reforma de 1965 y la posterior Ley General

Muñoz-Escolano, J. M., Oller-Marcén, A. M. y Santágueda-Villanueva, M. (2022). Un estudio de las enciclopedias escolares españolas (1901-1965). El caso del porcentaje. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 401-409). SEIEM.

de Educación de 1970 que reorganizó y modernizó el sistema educativo (Galera Pérez, 2018). Aunque los nombres de las etapas sufrieron algunos cambios y la duración del periodo obligatorio varió en distintas ocasiones, podemos decir que, a grandes rasgos, y simplificando la complejidad del proceso, la educación primaria en España durante la época considerada se organizaba en cuatro grados o ciclos: primer grado (elemental, 6 a 8 años), segundo grado (medio, 8 a 10 años), tercer grado (superior, 10 a 12 años) e iniciación profesional (12 a 14 años). Este carácter cíclico supuso una popularización de las enciclopedias escolares que, especialmente en un contexto de escuela unitaria, se explica también por su bajo precio y por las facilidades ofrecidas a los docentes (Viñao, 2001; Escolano Benito, 1997).

Los contenidos de los libros de texto, y de las enciclopedias en particular, atendían a dicha organización. Además en España no existieron cuestionarios oficiales hasta 1953, por lo que es indispensable estudiar estas fuentes para realizar una aproximación a la educación matemática de la época (Schubring, 1987). La investigación histórica ha prestado cierta atención a las enciclopedias escolares. Encontramos trabajos centrados en aspectos ideológicos de los textos (González García, 2020) o estudios centrados en el estudio del tratamiento de disciplinas específicas como la historia o de la lengua española (Silvestre Salas, 2015). Sin embargo, desde el punto de vista de la historia de la educación matemática, existen pocas investigaciones centradas en el análisis de enciclopedias escolares, y son muy recientes (Santágueda-Villanueva y Gómez, 2021).

Maz y Gutiérrez (2008) afirman que el porcentaje es un concepto matemático útil, muy utilizado y de gran presencia en la vida cotidiana. Este uso frecuente hace que sea un concepto importante en la alfabetización matemática como la define Rico (2005) y explica su presencia en textos dedicados a la enseñanza de las matemáticas desde la antigüedad (Smith, 1958).

En consecuencia, surge el siguiente problema de investigación, poco abordado en la literatura: estudiar desde un punto de vista histórico el tratamiento de las ideas asociadas al concepto de porcentaje en libros de texto y manuales españoles. En este trabajo nos centramos en el caso de las enciclopedias escolares españolas, de modo que nuestro objetivo principal consiste en describir y comparar el tratamiento del porcentaje en este tipo de manuales y, en particular, en las publicadas durante el siglo XX antes de la entrada en vigor de la Ley General de Educación de 1970.

MARCO TEÓRICO

El uso de la centena como cantidad de referencia es un fenómeno muy antiguo. En su revisión sobre el concepto de porcentaje, Parker y Leinhardt (1995) ubican el origen histórico del porcentaje en problemas de tasas, impuestos e intereses y señalan que su evolución está íntimamente ligada a contextos monetarios y comerciales. Su significado original está vinculado a la idea de razón entre cantidades empleando la centena como base privilegiada, en situaciones con estructura parte-todo. A partir del siglo XIX, aparecen los usos no monetarios del porcentaje asociados a la estadística y los basados en una estructura parte-parte-todo. Aunque la normalización de una razón con base 100 es la empleada mayoritariamente, también se encuentran razones que priorizan otros referentes como por ejemplo 1000 (tanto por mil), trabajados de manera análoga. Además de la descripción de una relación de proporcionalidad, Parker y Leinhardt (1995) señalan diferentes interpretaciones del porcentaje. Por ejemplo, el porcentaje puede ser entendido bien como una fracción con significado de parte-todo (que expresa la relación entre un subconjunto y el conjunto total) o como una razón de comparación o de cambio entre dos conjuntos distintos. Además, atendiendo a su uso, también señalan la importancia del porcentaje como operador funcional multiplicativo. Esta variedad de interpretaciones es señalada como motivo de las dificultades en su aprendizaje (Martínez-Juste, 2022).

En muchas ocasiones estas interpretaciones están fuertemente vinculadas a los sistemas de representación empleados. Valverde (2012) distingue los sistemas de representación asociados a la razón y proporción en verbales, simbólicos e icónicos. En el caso del porcentaje, además de las representaciones simbólicas de la razón, existe una representación propia (%) originada en expresiones abreviadas utilizadas desde el siglo XV (Smith, 1958). Lembke y Reys (1994) señalan que una adecuada comprensión del concepto requiere que los escolares relacionen las representaciones simbólicas propias, fracciones y decimales en tareas de porcentajes. Estos autores también estudian el uso de estas representaciones por escolares de distintos cursos y distintos niveles de instrucción. Existen clasificaciones de contextos generales referidos a la razón y la proporcionalidad (Oller-Marcén y Gairín, 2015) y clasificaciones de contextos específicas sobre otros conceptos relacionados, como la proporcionalidad compuesta (Martínez-Juste et al., 2015) o la aligación (Santágueda-Villanueva y Gómez, 2021). Sin embargo, no hemos encontrado trabajos en los que se presenten contextos específicamente referidos al porcentaje.

En el contexto de tareas asociadas al porcentaje, Parker y Leinhardt (1995) distinguen distintos tipos de tareas (conversiones, ejercicios, tareas de sombreado y problemas). La distinción entre ejercicios y problemas se realiza en base a la existencia o no de un contexto extra-matemático y a la necesidad de extraer información para matematizar la situación. Habitualmente tanto los ejercicios como los problemas de valor perdido asociados al porcentaje se clasifican en tres categorías dependiendo de los datos y la incógnita, que Dole (2000) denomina: Tipo I (cálculo del n% de A), Tipo II (cálculo del porcentaje que representa A respecto de B) y Tipo III (cálculo de la cantidad de la que un n% es A). Estas categorías pueden ser adaptadas fácilmente al caso de los aumentos y disminuciones porcentuales y también a algunos casos concretos de cálculo de interés simple.

Para resolver estos problemas, diversos estudios han caracterizado estrategias de resolución a través del análisis de libros de texto o bien analizando producciones de escolares. Parker y Leinhardt (1995) distinguen entre el método de los tres casos, el método de la ecuación, el método de la fórmula, el del análisis unitario y el de la proporción. Lembke y Reys (1994), además de las estrategias de estimación y ensayo y error, añaden la estrategia de la razón y los métodos gráficos para apoyar los cálculos.

METODOLOGÍA

El trabajo se ha desarrollado según las fases del método de investigación histórico (Ruiz Berrio, 1976): heurística, crítica (externa e interna) y hermenéutica. Estas fases se corresponden, respectivamente, con la búsqueda y selección de fuentes, la comprobación de su autenticidad y exactitud, la extracción de datos, y su interpretación. Este método es de amplia utilización en el ámbito de la historia de la educación matemática (González Astudillo, 2009).

Para la selección de la muestra (tabla 1) en la fase heurística se han seleccionado, mediante un muestreo por conveniencia, 29 enciclopedias publicadas durante el periodo considerado (1901-1965).

Tabla 1. Textos analizados (editorial y año de publicación). Con asterisco incluyen porcentaje.

	Previas a 1953	**Posteriores a 1953**
1.º Grado (6-8 años)	(Dalmau, 1922)*, (APMN, 1923), (HSR, 1930), (Edelvives, 1932), (Camí, 1933)	(Álvarez, 1955), (Edelvives, 1955), (Dalmau, 1958), (HSR, 1958)
2.º Grado (8-10 años)	(APMN, 1925), (Edelvives, 1931)*, (Cami, 1933)*, (HSR, 1939)*, (Dalmau, 1944)*	(Edelvives, 1957)*, (Dalmau, 1962), (HSR, 1964), (Álvarez, 1964)
3.º Grado (10-12 años)	(APMN, 1920)*, (Edelvives, 1939)*, (HSR, 1941)*, (Dalmau, 1947)*	(Edelvives, 1957)*, (Dalmau, 1958)*, (HSR, 1960)*, (Álvarez, 1966)*
In. Profesional (12-15 años)		(Dalmau, 1959)*, (HSR, 1962)*, (Álvarez, 1971)*

En todos los casos se han seleccionado las series completas (todos los grados existentes) de cada enciclopedia. Estos manuales fueron clasificados según el nivel al que iban dirigidos de acuerdo al sistema educativo de la época y según su publicación anterior o posterior al año 1953. Se consideró esta fecha como hito relevante porque en ese año se publicaron en España los primeros cuestionarios nacionales oficiales de Educación Primaria. Para estudiar el posible impacto de la aparición de los cuestionarios nacionales, en tres casos (Dalmau, Edelvives y HSR) se analizaron ediciones previas y posteriores a 1953. En la fase de crítica externa, el trabajo de selección de las enciclopedias y su carácter de documentos originales garantizan los criterios de representatividad, autenticidad, credibilidad y significado señalados por Scott (1990) para investigaciones de tipo documental.

Por su parte, en las fases de crítica interna y hermenéutica hacemos uso de la herramienta metodológica del análisis didáctico en el sentido señalado por Rico (2013), que ya ha sido utilizada provechosamente en investigaciones de carácter histórico (Madrid et al., 2021), en el que las unidades de análisis son las lecciones dedicadas a la aritmética. En primer lugar, se han tenido en cuenta aspectos estructurales y de organización de las lecciones vinculadas a la presencia del porcentaje (Santágueda-Villanueva y Gómez, 2021). Una vez identificada esta presencia, realizamos un análisis conceptual y de contenido (Rico y Fernández-Cano, 2013) centrado en la estructura conceptual, los sistemas de representación y en aspectos fenomenológicos Las variables concretas y las categorías para el análisis se han descrito en el marco teórico y se presentan en la tabla 2. En el caso las dos últimas, restringimos el análisis a los problemas de porcentajes que puedan considerarse como problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad directa. La codificación de los datos se realizó manualmente y de modo independiente por parte de cada miembro del equipo investigador. Se orquestó un proceso de triangulación de investigadores para resolver las posibles discrepancias y mejorar la validez.

Tabla 2. Variables y categorías para el análisis.

Variable	Categorías
Aspectos conceptuales	Emergentes, siguiendo a Parker y Leinhardt (1995) y a Maz y Gutiérrez (2008).
Sistemas de representación	Tomadas de Valverde (2012): Simbólico, verbal, icónico.
Contextos	Emergentes, siguiendo a Oller-Marcén y Gairín (2015), y a Santágueda-Villanueva y Gómez (2021).
Tipos de problemas	Tipo I, Tipo II y Tipo III según (Dole, 2000)
Estrategias de resolución	Tomadas de Parker y Leinhardt (1995): Proporciones, fórmula, reducción a la unidad.

RESULTADOS

Aspectos estructurales y de organización. Presencia del porcentaje

En términos generales, las lecciones poseen una misma estructura y tienen como extensión aproximada entre una y tres páginas. En primer lugar, se presenta o define el concepto a trabajar, después se ejemplifica y se proponen algunos problemas resueltos. Finalmente, para finalizar la lección, o al final de un conjunto de lecciones, se ofrece un listado más o menos extenso de ejercicios y problemas para la práctica del alumnado.

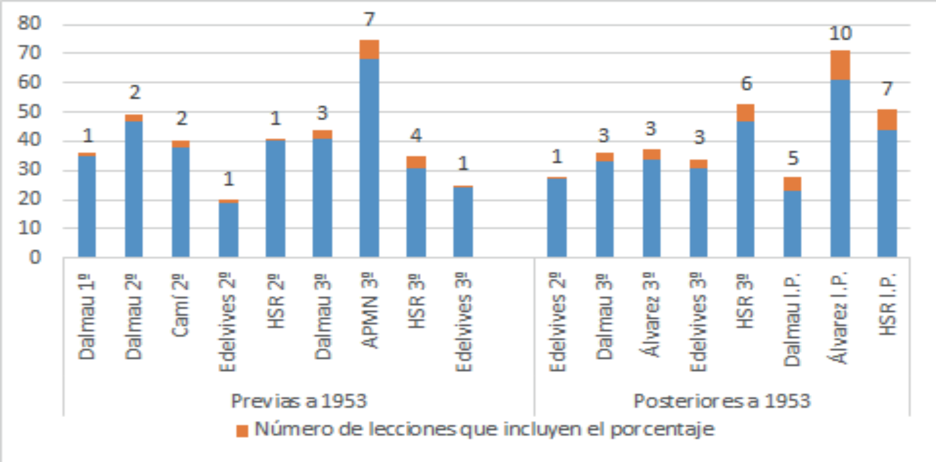


Figura 1. Número total de lecciones de aritmética y lecciones incluyendo el porcentaje.

De las 29 enciclopedias analizadas, 17 contienen lecciones en las que aparecen ideas relacionadas con los porcentajes (señaladas con un asterisco en la tabla 1). Las ideas vinculadas al concepto de porcentaje pueden aparecer en los temas iniciales de aritmética o en los temas dedicados a la proporcionalidad (ya sea con entidad propia o en relación con la regla del interés). Se aprecia claramente que la publicación de los cuestionarios oficiales en 1953 supuso un desplazamiento de los porcentajes, que pasaron de introducirse en el segundo grado a hacerlo en el tercero (figura 1). Esto se corresponde con el hecho de que los cuestionarios nacionales prescribían la introducción del porcentaje en el segundo curso del tercer grado. Con posterioridad a 1953, la presencia del porcentaje parece tener un peso relativo algo mayor.

Aspectos conceptuales y sistemas de representación

Se distinguen distintas maneras de introducir el "porcentaje" o "tanto por ciento":

- General. En siete enciclopedias se presenta el porcentaje de forma abstracta. Se distinguen tres definiciones explícitas, todas posteriores a 1953. Edelvives (1957) define el "tanto por ciento" como "la cantidad proporcional referida a 100" (p. 143), mientras que Dalmau (1958) y HSR (1960) definen el tanto por ciento de una cantidad o un número dado como "la cantidad que corresponde a la misma, con la condición de que a 100 unidades de la cantidad dada, corresponda un tanto conocido o determinado" (Dalmau, 1958, p. 308).
- Precio. En tres enciclopedias previas a 1953 (Dalmau, 1922, 1947; HSR, 1939), la aparición del "tanto por ciento" en el texto aparece vinculada a la resolución de problemas de compraventa en los cuales se conoce el precio de 100 unidades. Por ejemplo: "Estos problemas tienen por objetivo averiguar el valor de un número determinado de unidades, conociendo el precio de 100, 1000, 12, 144, etc., de ellas" (Dalmau, 1922, p. 179).
- Interés. En quince enciclopedias el tanto por ciento también se vincula al concepto de interés, como rédito o tasa de interés. De hecho, en ocho de las diecisiete estudiadas, aparece únicamente vinculado a este aspecto. Por ejemplo: "las pesetas que en cierto tiempo producen cada cien prestadas" (Álvarez, 1966, p. 243).

Cuando aparece el porcentaje, todos los textos estudiados utilizan tanto el lenguaje verbal ("15 por ciento" o "15 por 100") como la representación simbólica (15%). En algunos casos, (Dalmau, 1922;

1947), el discurso solo incluye la representación verbal, apareciendo el símbolo de porcentaje sin mayor explicación en los enunciados de los problemas. El sistema de representación fraccionario está presente en todas las enciclopedias, mientras que la *representación habitual* (Valverde, 2012) (a:b::c:d) está presente en todas las enciclopedias de 2º y 3º grado previas a 1953 y únicamente en las de Álvarez (1966; 1971) del periodo posterior. En ambos casos, estas representaciones aparecen vinculadas exclusivamente a los procesos de resolución de los problemas. No aparecen representaciones icónicas o gráficas en las enciclopedias analizadas.

Contextos

Con la excepción de 23 problemas (de 825), hemos clasificado los enunciados en cuatro categorías. A continuación damos ejemplos de cada una de ellas:

- Compraventa: "¿Cuánto valen 684 huevos a 3,25 pesetas la docena?" (HSR, 1941, p. 241).
- Industrial o laboral: "Un obrero recibe semanalmente 166'25 pesetas. Esta cantidad representa la paga de los 7 días a 25 pesetas uno, con un tanto por ciento de descuento para la vejez. Calcula ese tanto por ciento" (Edelvives, 1957, p. 146).
- Bancarios: "Presto 4862 pesetas al 5 por 100 anual. ¿Qué ganancia me producirán en un año?" (HSR, 1941, p. 241).
- Descontextualizados: "Hallar el 5 por 100 del número 8427" (HSR, 1941, p. 241).

El contexto más utilizado es el bancario, seguido del de compraventa. Casi todos los problemas contextualizados en la industria aparecen en el periodo posterior a 1953 (figura 2).

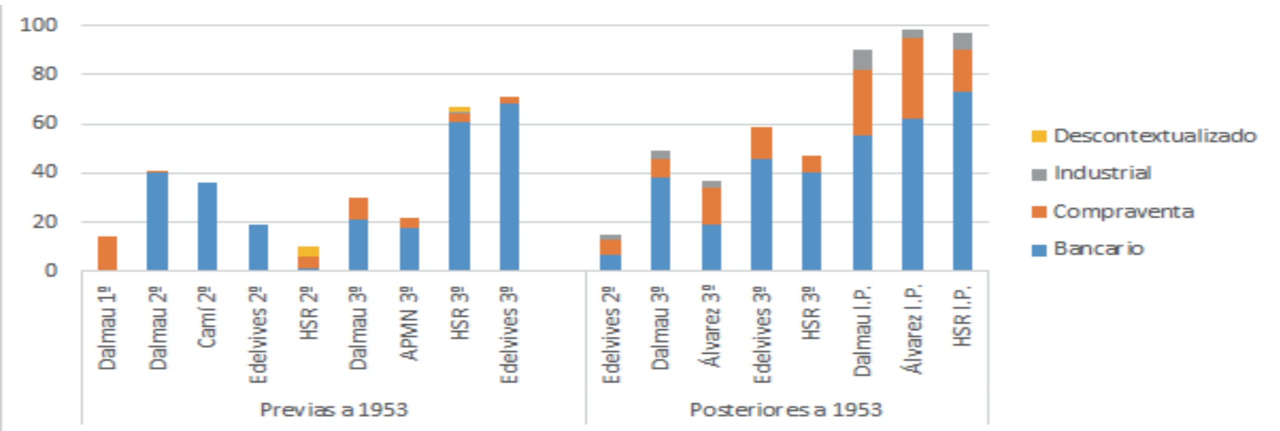


Figura 2. Contextos de los problemas analizados.

Tipos de problemas y métodos de resolución

La mayoría de problemas propuestos son de Tipo I. La presencia de problemas de Tipo II y Tipo III es similar. En cuatro enciclopedias se proponen problemas de tipos no resueltos (tabla 3).

Tabla 3. Problemas propuestos (PP) y resueltos (PR) según Dole (2000).

		Tipo I		**Tipo II**		**Tipo III**	
		PR	PP	PR	PP	PR	PP
Previas a 1953	Dalmau 1º	2 (14,3%)	12 (85,7%)	-	-	-	-
	Dalmau 2º	1 (2,4%)	19 (46,3%)	-	8 (19,5%)	-	10 (24,4%)
	Cami 2º	3 (8,3%)	5 (13,9%)	2 (5,6%)	3 (8,3%)	4 (11,1%)	12 (33,3%)
	Edelvives 2º	2 (10,5%)	15 (78,9%)	-	2(10,5%)	-	-
	HSR 2º	3 (30%)	7 (70%)	-	-	-	-
	Dalmau 3º	5 (16,7%)	13 (43,3%)	-	4 (13,3%)	-	3 (10%)
	APMN 3º	7 (31,8%)	2 (9,1%)	2 (9,1%)	2 (9,1%)	5 (22,7%)	2 (9,1%)
	HSR 3º	9 (13,2%)	20 (29,4%)	4 (5,9%)	6 (8,8%)	5 (7,4%)	6 (8,8%)
	Edelvives 3º	2 (2,8%)	34 (47,9%)	2 (2,8%)	9 (12,7%)	2 (2,8%)	12 (16,9%)
Posteriores a 1953	Edelvives 2º	2 (12,5%)	9 (56,3%)	4 (25%)	-	1 (6,3%)	-
	Dalmau 3º	3 (6%)	24 (48%)	-	8 (16%)	-	12 (24%)
	Álvarez 3º	7 (18,9%)	10 (27%)	2 (5,4%)	7 (18,9%)	2 (5,4%)	6 (16,2%)
	Edelvives 3º	10(14,7%)	36 (52,9%)	1 (1,5%)	4 (5,9%)	1 (1,5%)	12 (17,6%)
	HSR 3º	8 (14,3%)	28 (50%)	-	3 (5,4%)	-	3 (5,4%)
	Dalmau I.P.	7 (7,8%)	22 (24,4%)	4 (4,4%)	15(16,75%)	6 (6,7%)	14 (15,6%)
	Álvarez I.P.	18 (18%)	18 (18%)	2 (2%)	16 (16%)	3 (3%)	16 (16%)
	HSR I.P.	16 (16,5%)	23 (23,7%)	3 (3,1%)	11 (11,3%)	3 (3,1%)	10 (10,3%)

En aquellos casos en los que no se relaciona el porcentaje con la regla del interés o descuento, encontramos tres métodos de resolución: método de las proporciones (mediante regla de tres), método de la fórmula (habitualmente enunciado en lenguaje natural), y reducción a la unidad. Estos métodos suelen aparecer de manera conjunta a lo largo de la misma lección en las enciclopedias. Por otro lado, en el ámbito de la regla de interés o descuento, la mayoría de las enciclopedias presentan una proporción con una regla de tres para resolver el problema. En algunas de ellas, la resolución mediante proporciones se utiliza para justificar fórmulas que se presentan generalmente con lenguaje natural en grados intermedios, o en forma algebraica en iniciación profesional.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El tipo de análisis realizado nos ha resultado de utilidad para obtener una visión sobre el tratamiento del porcentaje en las fuentes consideradas (Madrid et al., 2021). Se observa una clara influencia de la publicación de los cuestionarios nacionales en 1953, que homogeneizaron en gran medida el curso de introducción del porcentaje. Desde un punto de vista conceptual, observamos que las definiciones presentadas están muy influenciadas por el contexto en que se presentan (general, precio, interés). Los contextos en los que se presentan los problemas se corresponden en su mayoría con los que históricamente motivan la aparición del porcentaje (Parker y Leinhardt, 1995). Interesa señalar la aparición de contextos industriales a partir de 1953, hecho explicable en parte por la situación económica del país y también por la aparición del ciclo de iniciación profesional.

Los problemas más frecuentes son los de Tipo I, que generan una menor dificultad a los estudiantes (Maz y Gutiérrez, 2008; Martínez-Juste, 2022). A este respecto se aprecia en algunas enciclopedias un desequilibrio entre los discursos docente y discente (Martínez-Juste et al., 2015) al proponer tipos de problemas no resueltos previamente. En cualquier caso, debemos señalar que solo hemos analizado los problemas considerados por Dole (2000). Resultaría necesario desarrollar nuevas categorías para considerar los no clasificados (149 de 825, generalmente en contextos de regla de interés con tiempo). Los métodos de resolución son variados, sobre todo en problemas planteados al margen de la regla de interés. En este último caso se aprecia una tendencia a la mecanización (Gairín y Oller, 2012). No hemos encontrado el método de los tres casos (Parker y Leinhardt, 1995), quizás por la escasa utilización de decimales salvo en la expresión de la solución.

Como ya apuntaban algunas investigaciones anteriores (Santágueda-Villanueva y Gómez, 2021), las enciclopedias escolares resultan ser una interesante fuente, poco explorada desde el punto de vista de la historia de la educación matemática. Esto abre la puerta a nuevas líneas de investigación, como por ejemplo establecer comparativas entre el tratamiento de los contenidos en las enciclopedias y en otros tipos de manuales de la época (Villanueva Baena, 2015).

Agradecimientos

Los dos primeros autores han sido parcialmente financiados por el grupo “Investigación en Educación Matemática” (S60_20R) del Gobierno de Aragón. La tercera autora ha disfrutado de una beca para la realización de estancia temporal en otros centros de investigación para el personal docente investigador de la Universitat Jaume I (ref. E-2020-04).

Referencias

Dole, S. (2000). Promoting percent as a proportion in eighth-grade mathematics. *School Science and Mathematics, 100*(7), 380-389.

Escolano Benito, A. (1997). Libros escolares para programas cíclicos: epítomes, compendios y tratados: las primeras enciclopedias. En A. Escolano (Dir.), *Historia ilustrada del libro escolar en España: del Antiguo Régimen a la Segunda República* (pp. 425-448). Fundación Germán Sánchez Ruipérez.

Gairín, J. M. y Oller, A. M. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 249-259). SEIEM.

Galera Pérez, A. D. (2018). Escuela pública durante la I Restauración (1875-1931): Aspectos administrativos y curriculares. *Cabás, 19*, 17-42.

González Astudillo, M. (2009). La investigación en historia de la educación matemática. *Educación y Ciencia*, *36*(1), 37-58.

González García, E. (2020). La Enciclopedia Álvarez: recurso adoctrinador de una identidad nacional esencialista. *Historia y Memoria de la Educación*, *12*, 137-165.

Lembke, L. O. y Reys, B. J. (1994). The development of, and interaction between, intuitive and school-taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics education*, *25*(3), 237-259.

Madrid, M. J., León-Mantero, C., Maz-Machado, A. y López-Esteban, C. (2021). Matemáticas y educación matemática en la prensa española del siglo XVIII: un instrumento para su análisis. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 401-408). SEIEM.

Martínez-Juste, S. (2022). *Diseño, implementación y análisis de una propuesta didáctica para la proporcionalidad en el primer ciclo de secundaria*. [Tesis doctoral, Universidad de Valladolid].

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J.M. y Oller-Marcén, A.M. (2015). Un estudio comparativo sobre la proporcionalidad compuesta en los libros de texto españoles de Educación Secundaria Obligatoria durante la LOGSE-LOE-LOMCE. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 95-115.

Maz, A. y Gutiérrez, M.P. (2008) Errores de los estudiantes de magisterio frente a situaciones que implican porcentajes. *Investigación, 17*(1), 59-69.

Oller-Marcén, A. M. y Gairín, J. M. (2015). Proportionality problems in some mathematical texts prior to fourteenth century. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 1859-1865). Charles University y ERME.

Parker, M. y Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, *65*(4), 421-481.

Rico, L. (2005). La alfabetización matemática y el Proyecto PISA de la OCDE. Padres y Madres de Alumnos. *Revista de la CEAPA, 82*, 7-13.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Unión*, *33*, 11-27.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Universidad de Granada.

Ruiz Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la Educación. *Revista Española de Pedagogía*, *134*, 449-475.

Santágueda-Villanueva, M. y Gómez, B. (2021). Los modelos de enseñanza de los problemas de aligación en las enciclopedias escolares españolas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 35*(69), 365-388.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the learning of mathematics*, *7*(3), 41-51.

Scott J. (1990). *A matter of record, documentary sources in social research*. Polity Press.

Silvestre Salas, M. S. (2015). *La didáctica de la lengua española en los «Manuales Enciclopédicos Escolares» del grado o nivel elemental de educación primaria:(1845-1970)*. [Tesis doctoral, Universidad de La Rioja]. https://dialnet.unirioja.es/descarga/tesis/46495.pdf

Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics*. Dover Publications.

Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. https://digibug.ugr.es/handle/10481/23890

Villanueva Baena, M. C. (2015). *La Editorial Luis Vives, una empresa de mediación cultural. Valores, modelos de socialización y contenidos en los manuales de lectura (1890-1975)*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Zaragoza.

Viñao, A. (2001). El libro escolar. En J. A. Martínez Martín (Dir.), *Historia de la Edición en España (1836-1936)* (pp. 309-336). Marcial Pons.

NIVELES DE GENERALIZACIÓN DE ESTUDIANTES DE CUARTO DE PRIMARIA DURANTE UNA SESIÓN DE CLASE

Generalizations in fourth grade students during a classroom session

Narváez, R.[a], Brizuela, B. M.[b], Torres, M. D.[a] y Cañadas, M. C.[a]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Tufts

Resumen

Este estudio forma parte de una investigación más amplia centrada en explorar el pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria y aborda los niveles de generalización de 22 estudiantes de cuarto de primaria (9-10 años) cuando trabajan con una tarea que incluye una relación funcional (y=2x). Identificamos los distintos niveles de generalización evidenciados durante una sesión de clase. En esta sesión, los estudiantes participaron activamente, respondiendo a distintos casos con cantidades cercanas, lejanas e indeterminadas. Encontramos que los estudiantes utilizaron distintos niveles de generalización, desde el recursivo particular hasta el funcional particular emergente, según las categorías previamente establecidas. Además, identificamos que estos niveles de generalización estuvieron asociados al momento de la clase y al caso presentado.

Palabras clave: *generalización, niveles de generalización, pensamiento funcional.*

Abstract

This study is part of a broader research project focused on studying the functional thinking of elementary school students and addresses generalization among 22 fourth grade students (9-10 years old) when working on a task that includes a functional relationship (y=2x). We identified different levels of generalization among the students during a class session. In this session, students participated actively, responding to different cases with close, distant, and indeterminate quantities. We found that students used different levels of generalization, from particular recursive to particular emergent functional, according to previously established categories. In addition, we identified that these levels of generalization were associated with the moment of the class and the case presented.

Keywords: *functional thinking, generalization, levels of generalization.*

INTRODUCCIÓN

El interés por la investigación en torno al pensamiento algebraico sigue tomando terreno en la literatura actual (Pinnock, 2020; Ventura et al., 2021). Específicamente, la generalización, que es nuestro foco en este estudio, sigue abordándose y está presente en distintos estudios que forman parte de las actas de los últimos simposios de la Sociedad Española de Educación Matemática (SEIEM) (p. ej., Anglada y Cañadas, 2021; Pinto y Cañadas, 2017; Polo-Blanco y Goni-Cervera, 2019; Torres et al., 2018).

En el ámbito del pensamiento algebraico, la generalización es un proceso clave en la investigación con los primeros cursos (Mason et al., 1985) siendo considerada como una práctica algebraica (p. ej., Blanton y Kaput, 2011; Cañadas y Castro, 2007). Nos centramos aquí en un enfoque funcional al

Narváez, R., Brizuela, B. M., Torres, M. D. y Cañadas, M. C. (2022). Niveles de generalización entre estudiantes de cuarto de primaria durante una sesión de clases. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 411-419). SEIEM.

pensamiento algebraico considerado como una opción para abordar la enseñanza del álgebra a través de la generalización y la representación de relaciones entre cantidades covariantes, así como el razonamiento con estas (Blanton y Kaput, 2011; Blanton et al., 2011).

Actualmente el currículo español de educación primaria incluye el sentido algebraico, destacando en los contextos funcionales los saberes conectados con las relaciones y las funciones (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). Esto justifica desde el punto de vista curricular, la necesidad de trabajar nociones algebraicas, como la generalización, en este nivel educativo.

En este estudio nos planteamos las siguientes preguntas de investigación: ¿Cómo generalizan los estudiantes de cuarto de primaria la relación funcional implicada? ¿Qué asociaciones existen entre las formas de generalizar y momentos determinados de una sesión de clase y los tipos de casos (números cercanos, lejanos y cantidades indeterminadas) planteados? Nuestro problema de investigación gira en torno a caracterizar los niveles de generalización que utilizan estudiantes de cuarto de primaria al trabajar en tareas que involucran el reconocimiento de una relación funcional. Entendemos por niveles como estados mentales a través de los cuales los estudiantes se mueven bidireccionalmente a medida que avanzan en su aprendizaje (Clements y Sarama, 2014).

El objetivo que nos planteamos es identificar los niveles de generalización evidenciados por los estudiantes según el momento de la clase, según la sesión diseñada y según los casos presentados (casos cercanos, lejanos e indeterminados) durante el desarrollo de la sesión.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

La generalización es una actividad en la que las personas en contextos sociomatemáticos específicos identifican lo que es común para todos los casos, extendiendo su razonamiento más allá del ámbito en el que se originó u obtienen resultados más amplios a partir de casos particulares (Ellis, 2011). La generalización, su representación, el sentido de variabilidad y la relación que se puede establecer entre variables destacan en la literatura de investigación como elementos clave para promover el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes (Kaput, 2008; Kieran et al., 2016; Radford, 2018). Este enfoque funcional es una vía curricular para el desarrollo de la capacidad de generalización en los estudiantes (Blanton y Kaput, 2011). En este enfoque, asumimos que la generalización hace referencia a las diferentes maneras que tienen los estudiantes de expresar una relación funcional que involucra dos cantidades que covarían (Pinto y Cañadas, 2017). En los primeros cursos, la generalización puede ser expresada de diferentes formas, transitando desde el uso del lenguaje verbal hasta llegar a emplear elementos más simbólicos (Radford, 2002). La generalización es considerada como una construcción cognitiva individual. Esto ha ayudado a distinguir diferentes tipos de generalización e identificar las competencias y dificultades que los estudiantes presentan para generalizar (Ellis, 2011). Específicamente en el estudio sobre generalización, son varios los autores que han profundizado en la sofisticación de la expresión de la generalidad con estudiantes en edades tempranas (Radford 2018; Ureña et al., 2019).

En concreto, en este estudio destacamos el trabajo de Blanton et al. (2015), por desarrollarse con estudiantes de los primeros cursos de primaria, y por referirse a tareas en contextos cercanos a los estudiantes, similares a los que empleamos aquí. Los autores identificaron y caracterizaron niveles de sofisticación de la generalización sobre las relaciones funcionales con niños de seis años. Estos niveles son: (a) preestructural, los estudiantes no describen ni utilizan implícitamente ningún tipo de relación matemática al hablar sobre los datos del problema; (b) recursivo particular, conceptualizan un patrón recursivo como una secuencia de instancias particulares; (c) recursivo general, conceptualizan un patrón recursivo como una regla generalizada entre valores sucesivos arbitrarios sin referencia a instancias particulares; (d) funcional particular, conceptualizan una relación funcional como un conjunto de relaciones particulares entre valores correspondientes específicos; (e) funcional primitivo general, conceptualizan una relación general entre dos cantidades a través de un conjunto de casos, con representaciones primitivas; (f) funcional general emergente, reflejan la aparición de atributos clave de una relación funcional generalizada, aunque su representación de la relación es incompleta; (g) funcional general condensado, conceptualizan las funciones como una relación generalizada entre dos cantidades arbitrarias y señaladas explícitamente; y (h) función como objeto, el estudiante sabe que generalizar implica comprender lo que se conserva y lo que se pierde entre las estructuras específicas que tienen algún isomorfismo. Para este estudio utilizaremos las categorías de estos autores para describir los niveles de generalización evidenciados a lo largo de una sesión de clase por un grupo de estudiantes de cuarto de primaria (9-10 años).

METODOLOGÍA

Llevamos a cabo una investigación cualitativa de carácter explicativo cuyo objetivo era explicar cómo ocurre una situación (generalización) y en qué condiciones (Hernández et al., 2014).

La sesión que analizamos en este estudio forma parte de un experimento de enseñanza con un total de cinco sesiones, en las que planteamos tareas con diferentes contextos y funciones lineales. Nos centramos específicamente en la sesión que trabajaba la relación funcional $y=2x$. Esta fue precedida por sesiones donde implicamos las funciones $y= 2x+1$; $y= x+3$. Elegimos analizar la sesión $y=2x$ por representar solamente una estructura multiplicativa no trabajada previamente por ellos.

Participantes y centro escolar

Los participantes de este estudio fueron un grupo de 22 estudiantes de cuarto de primaria (9-10 años) de un colegio concertado de niveles socio-económico y cultural bajos en el sur de España. La selección del centro educativo y de los estudiantes fue intencional, según la disposición del centro y los docentes. Los estudiantes habían trabajado con numeración hasta el millón, además de las operaciones básicas (sumas, restas, multiplicación y división). Los estudiantes no habían recibido instrucción previa sobre generalización.

Un investigador del proyecto estuvo a cargo de la sesión de clase. Su rol fue de investigador- docente, quien introdujo la tarea planteada y guio el desarrollo de la sesión. Otros miembros del proyecto estaban presentes, tanto para grabar la sesión como para apoyar su desarrollo.

Sesión de trabajo

La sesión de trabajo tuvo una duración de una hora aproximadamente. La disposición habitual de los asientos en el aula era en grupos de 4-5 miembros, lo cual se mantuvo para esta sesión. Esto permitió que, al momento de grabar la sesión, se pudiera tener una visión completa de los participantes.

La sesión se desarrolló en tres momentos:

- Momento inicial de la clase: El docente investigador introdujo la tarea. "Isabel está preparando su fiesta de cumpleaños. Comienza organizando las mesas y las cajas de sorpresas para sus invitados. Ella junta algunas mesas formando una fila y coloca una caja a cada lado de la mesa" (ver figura 1).

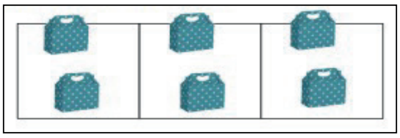


Figura 1. Representación pictórica de la tarea propuesta.

- Momento central de la clase: Se trabajó con casos particulares con cantidades cercanas (menores a 50), aquellas que se pueden encontrar por conteo (p. ej., Torres et al., 2021). En este momento de la clase los estudiantes resolvieron distintas situaciones sobre la cantidad de cajas o de mesas que había para cada caso. Durante la sesión la investigadora docente realizó preguntas como, por ejemplo: "¿Cuándo tengo dos mesas?" o "¿Cuántas cajas tendré?".
- Momento final de la clase: Se realizó una revisión de los casos trabajados durante los momentos anteriores de la sesión (casos cercanos), se trabajó con cantidades lejanas (hasta 500.000.000) y con cantidades indeterminadas ("cualquier número"), incrementando así el rango numérico de las situaciones. Un ejemplo de esta situación lo presentamos: "qué me decías cuando calculábamos este número 500.000.000 o cualquiera de los que está aquí, ¿qué teníamos que hacer para llegar al número de cajas? ¿alguien me podría explicar eso? ¿yo les puedo decir cualquiera de estos números?".

Análisis de datos

Para la obtención de datos, la sesión fue videograbada y transcrita. Para este trabajo analizamos las expresiones orales de los estudiantes que tuvieron lugar durante el desarrollo de la sesión de trabajo, cuando respondían a los distintos casos presentados durante la sesión. Con esa información identificamos las generalizaciones evidenciadas por los estudiantes. Utilizamos las categorías de análisis de Blanton et al. (2015) para analizar en qué niveles se encontraba cada generalización observada. Estos niveles de sofisticación son graduales, que van desde no generalizar (preestructural) hasta hacerlo de forma funcional. Las categorías aparecen en la figura 2.

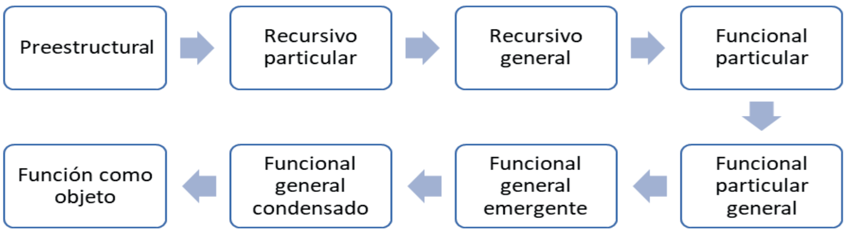


Figura 2. Categorías de generalización.

RESULTADOS

Niveles de generalización

En la figura 3 mostramos los distintos niveles de generalización durante el desarrollo de la sesión.

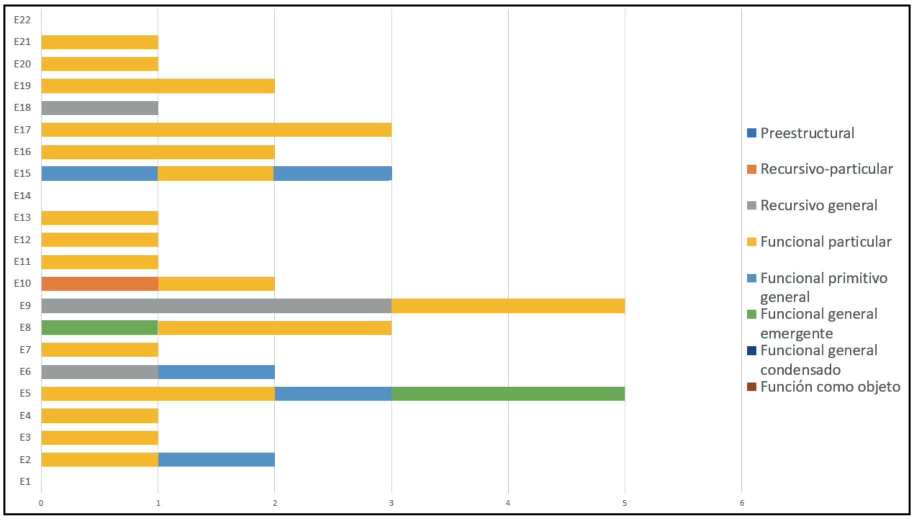


Figura 3. Número y tipo de generalizaciones por estudiantes en orden de uso durante el desarrollo de la sesión.

En la figura 3 observamos que de los 22 estudiantes generalizaron 19 y tres no lo hicieron (E1, E14 y E22). Los que generalizaron lo hicieron en los niveles recursivo particular, recursivo general, funcional particular, funcional primitivo general y funcional general emergente. Los otros tres niveles de generalización no se evidenciaron durante esta sesión (preestructural, funcional general condensado y función como objeto). La cantidad total de generalizaciones evidenciadas por los estudiantes durante la sesión fueron 38. El nivel de generalización que más se evidenció fue funcional particular. Al expresarla, los estudiantes utilizaron frases como "porque he multiplicado las dos mesas por 6"; "Es que hay seis y le sumé otros seis y me salió 12", etc.

En la figura 3 también observamos que 12 estudiantes utilizaron el mismo nivel de generalización durante toda la sesión (E3, E4, E7, E11, E12, E13, E16, E17, E18, E19, E20 y E21). En el caso de E18 utilizó el nivel recursivo general y los otros once estudiantes utilizaron el nivel funcional particular.

En cuanto a los cambios en el nivel de generalización, siete estudiantes (E2, E5, E6, E8, E9, E10 y E15) avanzaron en el nivel de generalización, desde funcional particular hasta el funcional primitivo general. E6, E9 y E10 comenzaron generalizando en un nivel recursivo y avanzaron hacia los niveles funcional particular y funcional primitivo emergente. E2 y E5 empezaron generalizando dentro del nivel funcional particular y avanzaron hacia el funcional primitivo general. Además, E5 avanzó hacia el nivel funcional general emergente.

En el caso de E8 comenzó en un nivel más alto (funcional general emergente) y luego utilizó un tipo de generalización menos sofisticado, el funcional particular. Así también es el caso de E15 que comenzó generalizando en el nivel funcional primitivo general, después utilizó el funcional particular y por último nuevamente generalizó en el nivel funcional primitivo general.

Por último destacamos que solo dos estudiantes (E5 y E8) generalizaron en el nivel de funcional general emergente, nivel de sofisticación más alto identificado dentro de esta sesión.

Generalizaciones realizadas en los distintos momentos de la clase

Durante la realización de la sesión se observaron distintos tipos de generalización. En la figura 4 se observan los niveles de generalizaciones según el momento de la clase en el que se identifican.

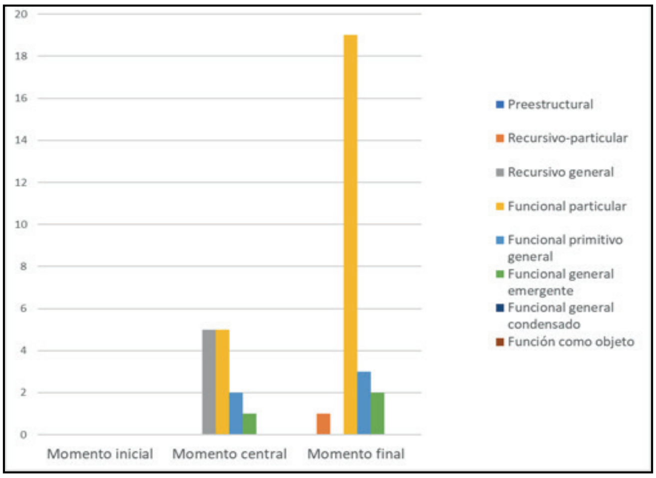


Figura 4. Generalizaciones evidenciadas en los distintos momentos de la clase.

En el momento inicial de la sesión no se evidenciaron generalizaciones; a diferencia del momento central y final de la sesión. En el momento central de la sesión, se dieron un total de 13 generalizaciones de las cuales cinco fueron recursivo general, cinco sobre funcional particular, dos funcional primitivo general y una de función general emergente. En el momento final de la sesión, momento donde más generalizaciones se realizaron, se dieron un total de 25, de las cuales una fue recursivo particular, 19 funcional particular, tres funcional primitivo general y dos funcional general emergente.

Generalizaciones evidenciadas según los casos presentados

Aquí nos referimos a los diferentes casos involucrados en las preguntas (cantidades cercanas, lejanas e indeterminadas). Destacamos que, en la mayor parte de esta sesión, se trabajó con cantidades cercanas. En el momento final, se trabajó con cantidades lejanas y cantidades indeterminadas. En la figura 5 detallamos la información obtenida, indicando los tipos y cantidad de generalizaciones por caso presentado durante la sesión.

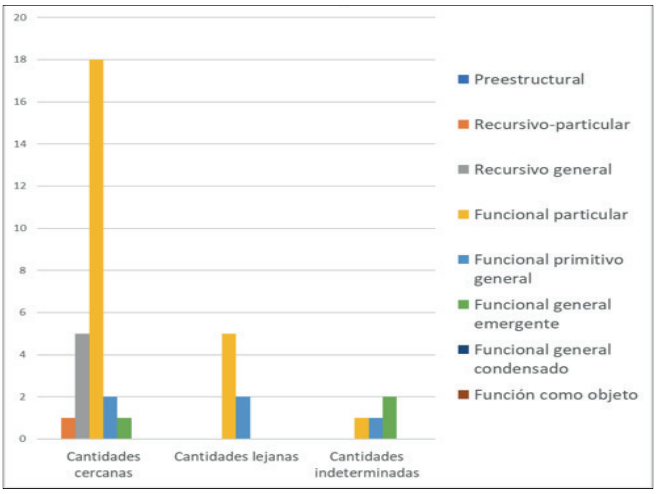


Figura 5. Generalizaciones evidenciadas según los casos presentados.

Evidenciamos que cuando se trabajó con cantidades cercanas hubo una mayor variedad de niveles de generalización, siendo el más evidenciado el nivel funcional particular. Respecto al uso de casos lejanos y casos indeterminados, permitió que los estudiantes generalizaran en niveles funcionales.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En primer lugar, destacamos que esto es una primera aproximación al problema de investigación planteado, sin pretensión de generalizar los resultados.

Hemos encontrado que los niveles de generalización no se presentan en un orden fijo: hay casos en los que los estudiantes avanzaron y otros donde retrocedieron una vez que habían expresado la generalización de una determinada forma. Con esto coincidimos con uno de los resultados obtenidos en el trabajo de Blanton et al. (2015), quienes describieron el caso de una estudiante cuyo pensamiento cambió bidireccionalmente entre niveles (a veces regresando a un nivel "anterior"). Esta situación se repitió con otros estudiantes. Los niveles de generalización se dieron en distintos momentos, respondiendo a diferentes preguntas sobre los casos presentados, como el nivel de participación que tuvo el estudiante durante el desarrollo de la sesión.

La mayoría de los estudiantes generalizaron de forma funcional particular. Esto puede deberse a que en la mayor parte de la sesión se trabajó con casos particulares. Este es un hallazgo destacable pues los niveles de sofisticación estudiados prevén dos formas de generalizar más simples (recursivo general y recursivo particular), los cuales fueron poco evidenciados durante toda la sesión. Con esto expresamos que este grupo de estudiantes tuvieron un nivel de generalización más funcional que uno recursivo. Con esto concordamos con lo expuesto en el trabajo de Blanton et al. (2015), quienes señalaron en sus resultados que los niños podían eludir el pensamiento recursivo y razonar sobre las relaciones funcionales.

Los dos niveles de generalización superiores (funcional general condensado y función como objeto) no se evidenciaron. Esto puede ser debido a que los estudiantes no habían recibido instrucción sobre generalización y simbolismo algebraico y, por tanto, tenían recursos limitados para expresar la generalización de forma más sofisticada.

En cuanto a la relación entre estos hallazgos y los momentos de la sesión y casos implicados, durante el momento inicial no se evidenciaron generalizaciones. En el momento central y final de la sesión sí se evidenciaron generalizaciones. En el momento central de la sesión se produjeron menos cantidad de generalizaciones en relación al momento final de la sesión. Esto puede deberse a que los estudiantes estuvieron familiarizándose con los casos particulares. En el momento final hay más cantidad de generalizaciones debido que en este momento de la clase revisaron los casos particulares trabajados y además discutieron sobre los casos lejanos e indeterminados.

Finalmente, encontramos que a los estudiantes parece resultarles más fácil generalizar a partir de preguntas con casos cercanos, donde identificamos una mayor cantidad de niveles de generalización. También, trabajar con casos lejanos e indeterminados permitió que los niveles de generalizaciones de los estudiantes fueran más sofisticados. En este sentido proponemos fomentar más el trabajo con casos lejanos e indeterminados como motor para llegar a esos niveles de generalización. Por lo mismo, consideramos relevante planificar las actividades planteadas para la clase, desde casos con cantidades que permitan familiarizarse con el problema y casos que los desafíe para llevar más allá ese conocimiento. Estas actividades deben ser graduales, teniendo en cuenta que deben ser facilitadoras para el aprendizaje. Como lo expresó Da Ponte et al. (2017), el desafío planteado debe ser armonioso (ni fácil ni difícil). Aquí observamos que comenzar con casos más cercanos desde el inicio ayudó a que los estudiantes adquirieran seguridad en la realización de la tarea y así continuarán con nuevos desafíos.

Finalizamos planteando algunas líneas abiertas a partir de este trabajo: (a) estudiar la interacción del docente con los estudiantes, ya que el investigador-docente motivó la participación de los estudiantes, actuando de mediador y guía en la generación de la generalización en diferentes niveles. ¿Qué ayudas o apoyos son necesarios para fomentar la generalización? y (b) estudiar en profundidad las diferentes justificaciones que dan los estudiantes en el proceso de generalización.

Agradecimientos

Proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU201675771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. Beca de Doctorado en el extranjero, Becas Chile, Folio 72210075.

Referencias

Anglada, M. L. y Cañadas, M. C. (2021). Correspondencia y generalización de estudiantes de último curso de educación infantil. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en educación matemática XXIV* (pp. 125-132). SEIEM.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for research in mathematics education, 46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education: A global dialogue from multiple perspective* (pp. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2014). Learning trajectories: Foundations for effective, research-based education. En A. P. Maloney, J. Confrey y K. H. Nguyen (Eds.), *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education* (pp. 1-30). Information Age Publishing

Da Ponte, J. P., Quaresma, M. y Mata-Pereira, J. (2017). The challenge of mathematical discussions in teacher's professional practice. *Didacticae, 1*, 45-59.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(4), 308-345. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.4.0308

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª ed.). McGraw-Hill.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). LEA. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258- 2

Mason, J., Grahamn, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. The Open University Press.

Pinnock, E. (2021). Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: the global evolution of and emerging field of research and practice. *Research in mathematics education, 23*(2), 226-230. https://doi.org/10.1080/14794802.2020.1725613

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM.

Polo-Blanco, I. y Goni-Cervera, J. (2019). Estrategias de generalización cercana y lejana en niños de 6 y 7 años. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p.642). SEIEM.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 3-25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la educación primaria. *BOE, 52* (24.386- 24.504). https://www.boe.es/buscar/pdf/2022/BOE-A-2022-3296-consolidado.pdf

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en educación matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM.

Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematics, 9*(10), 1109.

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Infancia y aprendizaje, 42*(3), 570-614. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604020

Ventura, A. C., Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Gardiner, A. M. y Newman-Owens, A. (2021). A learning trajectory in kindergarten and first grade students' thinking of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities. *The Journal of Mathematical Behavior, 62,* 100866. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100866

CONDICIONES PARA IMPLEMENTAR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL AULA: PERCEPCIONES DOCENTES

Conditions to implement problem solving in the classroom: Teachers' perceptions

Olivares, D.[a], Lupiáñez, J. L.[b] y Segovia, I.[b]

[a]Universidad de La Serena, [b]Universidad de Granada

Resumen

El objetivo de este trabajo es conocer la percepción de maestros de primaria sobre la presencia de condiciones del sistema educativo que, según la literatura, promueven una implementación más auténtica de la resolución de problemas en el aula. Para eso, identificamos en la literatura un conjunto de condiciones, organizadas según el modelo de dimensiones del currículo de Rico (2016). A partir de estas, elaboramos un cuestionario de preguntas tipo Likert que aplicamos a 48 docentes chilenos de educación primaria. Posteriormente entrevistamos a ocho de ellos para identificar factores que influyen en sus percepciones. Como resultado obtuvimos que el profesorado percibe escasa presencia de condiciones que faciliten la implementación de la resolución de problemas. Concluimos que los resultados sugieren líneas de acción tanto teóricas como empíricas. En lo práctico, se requiere atender a algunas necesidades urgentes del profesorado.

Palabras clave: *currículo de matemáticas, educación primaria, profesorado, resolución de problemas, sistema educativo.*

Abstract

The objective of this work is to know the perception of primary school teachers about the presence of conditions in the educational system that, according to the literature, promote a more authentic implementation of problem solving in the classroom. For this, we identify in the literature a set of conditions, organized according to the curriculum dimensions model of Rico (2016). From these, we elaborated a questionnaire of Likert-type questions that we applied to 48 Chilean teachers of primary education. We then interviewed eight of them to identify factors that influence their perceptions. As a result, we obtained that teachers perceive little presence of conditions that facilitate the implementation of problem solving. We conclude that the results suggest both theoretical and empirical courses of action. In practice, it is necessary to attend to some urgent needs of the teaching staff.

Keywords: *mathematics curriculum, primary education, teachers, problem solving, educational system.*

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas los sistemas educativos han realizado esfuerzos explícitos por incorporar la resolución de problemas al currículo, obteniendo resultados diversos y no siempre esperados (Burkhardt, 2014). Eso hace que sigan siendo objeto de estudio alternativas y propuestas de diversa naturaleza (Blažec y Pech, 2022). Investigaciones como la de Cheeseman (2018) han reportado que los maestros

Olivares, D., Lupiáñez, J. L. y Segovia, I. (2022). Condiciones para implementar la resolución de problemas en el aula: percepciones docentes. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 421-430). SEIEM.

de primaria suelen percibir una serie de obstáculos para incorporar la resolución de problemas a su enseñanza, relacionados con la pedagogía, la planificación, los recursos, las tareas, el tiempo y los propios estudiantes. En el contexto chileno se ha encontrado que los docentes comprenden al concepto de problema como una tarea en contexto que se resuelve a través de procedimientos matemáticos (Piñeiro et al., 2019). Otros estudios informan sobre condiciones que la investigación en Didáctica de la Matemática, a lo largo del tiempo, ha ido identificando como elementos importantes a la hora de implementar la resolución de problemas (Olivares et al., 2021).

En este trabajo nos preguntamos, ¿en qué grado el profesorado de matemáticas de educación primaria percibe la presencia de estas condiciones en su práctica cotidiana? Tomando en cuenta que de estas percepciones depende la forma en que implementan la resolución de problemas, también nos preguntamos, ¿qué elementos o factores pueden influir en la percepción de la presencia o ausencia de estas condiciones?

Objetivos

El objetivo general de este trabajo es conocer la percepción de maestros de educación primaria sobre la presencia de condiciones del sistema educativo que, según la literatura, facilitan o promueven una implementación más auténtica de la resolución de problemas en el aula de matemáticas. Es decir, si existen las condiciones para trabajar los problemas como reales desafíos que permiten desarrollar el razonamiento en vez de simples ejercicios.

Para alcanzar este objetivo general, establecimos los siguientes objetivos específicos:

- Determinar el grado en que los docentes perciben la presencia de un conjunto de condiciones, sugeridas por la investigación en Didáctica de la Matemática.
- Identificar posibles factores que incidan en sus percepciones.

MARCO TEÓRICO

Entendemos a la resolución de problemas como la implicación en una tarea que tiene potencial para provocar desafíos intelectuales y promover la comprensión y el desarrollo de nuevas ideas matemáticas en los estudiantes (Cai y Lester, 2010). La resolución de problemas es un campo amplio dentro de la Didáctica de la Matemática. Al intentar determinar qué condiciones debe tener el sistema educativo para favorecer su implementación, nos encontramos con un cuerpo de conocimiento extenso, que es necesario articular. Para ello tomamos como referencia el modelo de dimensiones del currículo de Rico (2016). Según este modelo, el currículo se manifiesta en las dimensiones: cultural/conceptual, social, ética/formativa y cognitiva.

A nivel de sistema educativo, en la dimensión cultural/conceptual, resulta relevante la forma en que se aborda el conocimiento matemático. La resolución de problemas es un área de la enseñanza de las matemáticas que requiere de un conocimiento especializado. Los profesores necesitan tener conocimientos sobre la resolución de problemas, para ellos mismos como resolutores y también para ayudar a los estudiantes a convertirse en mejores resolutores (Chapman, 2015).

A su vez, esto se vincula con las condiciones de la dimensión cognitiva, relacionada con la forma en que se aborda el aprendizaje. La literatura reporta que para una mejor implementación de la resolución de problemas, es necesario que el currículo propenda al desarrollo del razonamiento (Burkhardt, 2014; Liljedahl, 2019). Otro aspecto de esta dimensión son los procesos metacognitivos. Los docentes necesitan acceder a información sobre estos procesos, pues implementar el enfoque de resolución de problemas requiere que los estudiantes los pongan en práctica (Chapman, 2015). Y una última condición es el acceso del profesorado a formas de promover en los estudiantes el desarrollo de estrategias de resolución propias (NCTM, 2003).

La dimensión ética/formativa implica para la resolución de problemas definir el rol del profesor en sus procesos de implementación. Para eso, el sistema educativo, a través de herramientas como las guías docentes, o de instancias como cursos de perfeccionamiento sobre resolución de problemas, debe fomentar el desarrollo de sus habilidades de observación y escucha de los estudiantes (Lester y Cai, 2016)the author, who has written extensively about mathematical problem solving over the past 40 years, discusses some of his current thinking about the nature of problem-solving and its relation to other forms of mathematical activity. He also suggests several proficiencies teachers should acquire in order for them to be successful in helping students become better problem solvers and presents a framework for research on problem-solving instruction. He closes the article with a list of principles about problem-solving instruction that have emerged since the early 1970s.”,”author”:[{“dropping-particle”:””,”family”:”Lester”,”given”:”Frank”,”non-dropping-particle”:””,”parse-names”:false,”suffix”:””}],”container-title”:”The Mathematics Enthusiast”,”id”:”ITEM-1”,”issue”:”1”,”issued”:{“date-parts”:[[“2013”]]},”page”:”245-278”,”title”:”Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction”,”type”:”article-journal”,”volume”:”10”},”uris”:[“http://www.mendeley.com/documents/?uuid=f3650013-a0ea-34d2-8660-fceeb96605db”]},{“id”:”ITEM-2”,”itemData”:{“DOI”:”10.1007/978-3-319-28023-3_8”,”abstract”:”In this chapter, the authors note that during the past 30 years there have been significant advances in our understanding of the affective, cognitive, and metacognitive aspects of problem solving in mathematics and there also has been considerable research on teaching mathematical problem solving in classrooms. However, the authors point out that there remain far more questions than answers about this complex form of activity. The chapter is organized around six questions: (1 para poder acceder y tener comprensión sobre sus procesos de razonamiento. También se deberían promover instancias para la reflexión entre pares en aspectos como la influencia de sus creencias sobre la resolución de problemas en su manera de implementarla en clases (Gómez, 2018; Saadati et al., 2018).

Además, desde la administración educativa se puede promover distintas condiciones mencionadas en la literatura como relevantes para que la resolución de problemas pueda ser aprovechada como medio de aprendizaje en todo su potencial. Una de ellas es la flexibilidad curricular. Trabajos como los de Cheeseman (2018) o Leong et al. (2016) sugieren que el profesorado necesita un currículo suficientemente flexible en tiempos y contenidos para incorporar tareas de resolución de problemas y trabajarlas en profundidad. Esto implica el poder hacer adaptaciones de los problemas para responder a las distintas necesidades del alumnado. Pero para poder hacer este tipo de adaptaciones, el profesorado requiere de suficiente autonomía y acceso a instancias de desarrollo profesional. Según Burkhardt (2014), el desarrollo profesional se reconoce sólo retóricamente. De acuerdo al autor, las administraciones educativas optan más bien por políticas de presión. Por otro lado, puede que en un primer momento los docentes cuenten con apoyo de asesoría experta, pero luego tienen que ser capaces de integrar la resolución de problemas regularmente y de forma autónoma (Leong et al., 2016).

En el ámbito de la planificación para el profesorado, las dimensiones cultural/conceptual y cognitiva se relacionan con los contenidos y objetivos de aprendizaje, respectivamente. Para que un docente pueda apreciar el rol de los problemas como medio de enseñanza, en primer lugar, se precisa una secuencia de contenidos que sea clara y coherente. De esta forma se puede saber qué conocimientos previos tendrían los estudiantes para enfrentar un problema y anticipar su razonamiento de acuerdo a esa información (Fujii, 2018). También se pueden identificar otros conceptos con los cuales conectar un problema, y así abordar las matemáticas como un sistema de ideas interrelacionadas (Burkhardt, 2014; Fujii, 2018; Lester y Cai, 2016). Además, se resalta la necesidad del uso regular de problemas. Los estudiantes se benefician de un currículo bien planificado, brindando múltiples y bien planeadas oportunidades para resolver problemas (NCTM, 2003). Esto implica, en primer lugar, que la resolución de problemas sea usada para la enseñanza habitual (Lester y Cai, 2016). En segundo lugar, su uso debe servir para el logro de objetivos relacionados con habilidades específicas o básicas (NCTM, 2003). Y, en tercer lugar, que los estudiantes puedan desarrollar habilidades que sólo se pueden conseguir a largo plazo (van Zanten y van den Heuvel-Panhuizen, 2018).

La dimensión ética/formativa también se relaciona con la metodología. Uno de los aspectos más estudiados en este ámbito son los tipos de problemas que se pueden encontrar en materiales como los libros de texto (p. ej. Zhu y Fan, 2006). Contar con tareas ejemplares de resolución de problemas, no rutinarias, variadas, de alta demanda cognitiva, en distintos contextos, con distintos tipos de datos, permite al profesorado diseñar experiencias donde los estudiantes puedan desarrollar su creatividad, razonamiento y conocimiento sobre matemáticas relevantes (van Zanten y van den Heuvel-Panhuizen, 2018).

Por último, la dimensión social se manifiesta a través de la evaluación. Estudios han encontrado que la falta de éxito en la implementación de la resolución de problemas se debe a que esta no se evalúa, por lo que los estudiantes prefieren poner atención a otros aspectos que sí son evaluados (Leong et al., 2016). La resolución de problemas debiera ser incorporada en la evaluación así como en el resto del currículo. Según Chanudet (2019), se necesita un nuevo enfoque que vaya más allá de la aplicación de evaluaciones en momentos puntuales. Además, la autora señala que los docentes requieren información sobre prácticas de evaluación de la resolución de problemas y especialmente de criterios para la evaluación.

MÉTODO

La metodología de esta investigación fue mixta, aunque preponderantemente cualitativa-interpretativa. Combinamos técnicas de recogida y análisis de datos tanto cuantitativas como cualitativas, pero teniendo presente una perspectiva interpretativa para comprender el punto de vista del profesorado. La investigación constó de dos partes que describimos a continuación.

Primera parte

La primera parte del estudio fue de tipo cuantitativa. A través de la aplicación de un cuestionario de preguntas tipo Likert, buscamos un primer acercamiento a las percepciones de los docentes. Seguimos un diseño no experimental, de tipo transeccional exploratorio, es decir, realizamos una recolección de datos en un único momento y con unos resultados exclusivamente válidos para el contexto en que fue efectuado el estudio (Hernández-Sampieri et al., 2014).

La muestra, de tipo no probabilística, por conveniencia y de máxima variación estuvo compuesta por 48 docentes chilenos de educación primaria que imparten clases de Matemática. Decimos que la muestra fue por conveniencia ya que estuvo compuesta por los sujetos a los que tuvimos acceso, después de aplicar distintas estrategias de búsqueda (contacto con administraciones educativas, colegios en convenio con una universidad formadora de docentes, coordinadores de microcentros rurales, etc.). Y de máxima variación ya que nos aseguramos de contar con profesorado de características diversas (en cuanto a años de experiencia, ubicación geográfica del centro, centros púbicos/privados y formación especializada en resolución de problemas).

La elaboración del cuestionario implicó: (1) una revisión sistemática de la literatura para identificar condiciones del sistema educativo que favorecen al implementación de la resolución de problemas en el aula, (2) un primer borrador del cuestionario, (3) la realización de un juicio de expertos (doctores españoles y chilenos) para su validación, incluyendo modificaciones de acuerdo a sus observaciones

(4) la aplicación de una prueba piloto y (5) el ajuste y aplicación a la muestra final.

A partir de un análisis utilizando estadística descriptiva, organizamos los resultados en base a cuatro perfiles docentes: profesores noveles, con pocos años de experiencia y sin perfeccionamiento en resolución de problemas (P-Novel); profesores con más de siete años de experiencia, que han vivenciado más de una reforma educativa, pero sin formación especializada en resolución de problemas (F-General); profesores con más de siete años de experiencia y con tres o más cursos de perfeccionamiento en resolución de problemas (F-RP); y profesorado que ha desempeñado toda su carrera en la educación rural (P-Rural).

Segunda parte

La segunda parte del estudio fue de tipo cualitativa-interpretativa. Nuestro objetivo fue indagar con mayor profundidad en las percepciones docentes e identificar posibles factores que influyeran en ellas. Como medio de recolección utilizamos la entrevista semiestructurada. El método de análisis fue la teoría fundamentada (Strauss y Corbin, 2002).

La muestra estuvo conformada por ocho docentes, y corresponde a una combinación entre muestra de participantes voluntarios, de máxima variación y muestra homogénea (Hernández-Sampieri et al., 2014). Se trata de una muestra de participantes voluntarios porque estos fueron seleccionados de entre aquellos docentes que en el cuestionario expresaron su voluntad de participar en las entrevistas. De máxima variación porque seleccionamos sujetos de cada grupo que establecimos en la primera parte del estudio. Y de muestra homogénea ya que en cada grupo seleccionamos un par de docentes, con el mismo perfil o rasgos similares, para poder contrastar la información y encontrar perspectivas que fueran características del grupo y no solo de un individuo.

Las entrevistas tuvieron una duración de entre una hora y una hora y media. Estas fueron grabadas y transcritas. Inmediatamente después de cada entrevista, esta fue analizada usando las técnicas de comparación constante y análisis microscópico (Strauss y Corbin, 2002). Al finalizar el análisis de las ocho entrevistas, organizamos las categorías generadas con apoyo de tablas y mapas conceptuales. Como resultado obtuvimos un conjunto de categorías que identificamos como elementos que influyen en la forma en que el profesorado percibe la presencia de condiciones para implementar la resolución de problemas, y que presentamos en el siguiente apartado.

RESULTADOS

A continuación, presentamos los resultados organizados según nuestros objetivos específicos.

Percepción de condiciones para implementar la resolución de problemas

En la tabla 1 presentamos los resultados de la primera parte de la investigación. Los resultados representan la media de los puntajes asignados a la percepción de la presencia de cada condición, según la escala Likert de 1 a 4.

Tabla 1. Percepción del profesorado respecto a la presencia de condiciones para realizar acciones educativas relacionadas con la resolución de problemas.

Condición	P-Novel	F-General	F-RP	P-rural
Aprender sobre formas de enseñar la RP en el aula.	2,25	2,00	2,00	2,00
Ofrecer una enseñanza basada en el razonamiento mediante la RP.	2,63	2,05	1,82	2,50
Aprender sobre los procesos de metacognición que llevan a cabo los estudiantes al resolver problemas.	2,13	1,90	1,91	1,75
Aprender a fomentar el desarrollo de estrategias de resolución propias de los estudiantes.	2,13	2,00	1,82	1,88
Desarrollar sus habilidades de observación y escucha hacia los estudiantes mientras estos resuelven problemas.	2,38	2,00	1,91	2,13
Reflexionar sobre cómo influyen las creencias personales al incorporar la RP en la enseñanza.	1,88	1,86	1,82	1,75
Implementar el currículo de manera flexible (en cuanto a tiempo, cantidad y contenido de los objetivos de aprendizaje, etc.).	2,38	1,86	1,82	1,88
Ejercer la autonomía profesional respecto a la enseñanza de la RP.	2,63	1,86	1,91	2,38
Acceder a oportunidades de desarrollo profesional en relación al trabajo con la RP	2,00	2,05	1,82	2,00
Aprender a enseñar distintos contenidos usando la RP.	2,25	2,05	2,00	1,88
Conocer cómo trabajar distintos tipos de problemas.	2,25	2,05	1,91	1,88
Incorporar la RP como parte de la evaluación.	2,50	2,14	2,00	1,88

Nota. Las puntuaciones muestran el promedio de cada grupo en una escala de 1 a 4, donde 1=No se perciben condiciones y 4=Se perciben todas las condiciones necesarias.

En todos los ítems los cuatro grupos asignaron en promedio menos de 3 puntos. Excepto un par de ítems, la mayoría obtuvo puntuaciones bajo los 2,5 en promedio. Esto indica que, en general, el profesorado encuestado percibe escasa presencia de condiciones en el sistema educativo que faciliten o impulsen la implementación del enfoque de resolución de problemas en el aula.

En cuanto a los aspectos más destacados, llama la atención que el grupo P-Novel sea el que asigne, dentro de todo, un puntaje más alto a la presencia de condiciones tales como oportunidades para desarrollar la autonomía profesional o apoyos para implementar una enseñanza que promueva el razonamiento. Por otro lado, el profesorado encuestado, de los cuatro grupos, percibe que las condiciones menos presentes son aquellas que promueven la reflexión sobre sus creencias personales y su influencia al incorporar la resolución de problemas en la enseñanza.

Elementos que influyen en la percepción de las condiciones

Los resultados de la sección anterior indican que, en general, el profesorado considera que se proveen pocas condiciones para implementar la resolución de problemas. Sin embargo, dentro de lo bajo de los puntajes, existen diferencias relevantes en algunos ítems. Por ejemplo, aprender formas de enseñar la resolución de problemas, obtuvo 2 puntos o más en promedio en todos los grupos. En cambio, condiciones para reflexionar sobre las creencias personales obtuvo bajo los dos puntos en todos los grupos. Por ello, en la segunda parte de la investigación buscamos profundizar en algunos factores que pudieran influir en las diferentes percepciones, más allá de las características de cada grupo en particular. Los resultados del análisis cualitativo dieron como resultado cuatro categorías: (1) la modalidad del centro donde se desempeña el o la docente, (2) la condición geográfica del centro, (3) el nivel de formación en resolución de problemas, (4) factores afectivos.

La modalidad del centro se refiere a si la escuela es pública, privada con aportes del Estado o completamente privada. En las entrevistas, docentes de las tres modalidades señalaron que en las escuelas públicas existen mayores dificultades para acceder, por ejemplo, a material instruccional de calidad (textos, tareas ejemplares de resolución de problemas, material manipulativo para trabajar los problemas sugeridos por el currículo) y cursos de perfeccionamiento para el aprovechamiento de la resolución de problemas como método de enseñanza:

> Muchos colegas decían que no les llegaba el material a ellos. No tenían el material impreso, solamente contaban con el material digital y sus niños eran de escasos recursos. Ese tipo de cosas no pueden estar pasando. O sea, todos los niños tienen el derecho a acceder a los distintos materiales, a los distintos libros. [...]. (F-RP_2)

La condición geográfica se refiere a si en centro se ubica en un área urbana o rural. Tanto los dos profesores P-Rural, como profesoras de otros grupos que han trabajado en algún momento en una escuela rural, señalaron que el acceso a recursos en este tipo de centros es más difícil. Incluso consideran que el propio currículo oficial y los libros de texto son difíciles de adaptar a la ruralidad, tanto por la falta de problemas adecuados al contexto como por la escasez de orientaciones metodológicas que faciliten el trabajo con problemas en aulas multigrado.

El nivel de formación en resolución de problemas resultó clave para definir la percepción de la presencia de condiciones. Las profesoras F-RP fueron críticas, por ejemplo, con lo extenso del currículo. Pero, por otro lado, ambas reconocieron que su formación en resolución de problemas les ha ayudado a buscar métodos de trabajo y a adecuar problemas según las características de su alumnado. Esto les hace percibir de forma menos adversa la falta de unas condiciones que el resto del profesorado acusa con más gravedad. También reconocieron que, sin el conocimiento que han ido desarrollando, les sería más difícil superar los obstáculos que, en numerosas ocasiones, el mismo currículo impone para trabajar adecuadamente la resolución de problemas (por ejemplo, la falta de tiempo o de flexibilidad en el tratamiento de los contenidos).

Finalmente, detectamos que factores afectivos como la motivación, el agobio laboral o el interés por la asignatura de matemáticas, hace que los docentes perciban que es más difícil implementar un enfoque basado en resolución de problemas. Por ejemplo, una de las profesoras F-General señaló:

> Creo que tiene que ver con el interés del profe igual. O sea, a un profe, claro, se le puede hacer mucho más fácil que pase el estudiante y que no importa cómo hagan los problemas. Y una de las cosas que dificulta eso, creo yo, es el tiempo. Queremos avanzar, no queremos estar a final de semestre o a final de año revisando pruebas o con actividades pendientes. Entonces la idea es que vayamos rápido. Porque también nuestros jefes nos piden lo mismo. (F-General_02)

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las administraciones educativas suelen ejercer presión sobre el profesorado para llevar a la práctica lineamientos curriculares, como por ejemplo una incorporación más plena de la resolución de problemas (Burkhardt, 2014). Sin embargo, como hemos visto en este trabajo, los profesores no siempre cuentan con las condiciones necesarias para hacerlo, o al menos no las perciben lo suficiente en su ámbito de actuación.

En la primera parte de la investigación observamos que, de un conjunto de condiciones sugeridas por la literatura, la mayoría son percibidas como poco presentes. En las 4 dimensiones del currículo (Rico, 2016) identificamos necesidades, algunas factibles de resolver en lo inmediato, y otras que requieren cambios estructurales. Por ejemplo, en la dimensión metodológica, los docentes reconocieron pocas condiciones para incorporar a su enseñanza problemas de distinto tipo. En Chile, el Ministerio de Educación regula la elaboración de los libros de texto. Sería factible incluir más criterios que obliguen a las editoriales a incluir más variedad de tareas de resolución de problemas. Por otro lado, condiciones para el desarrollo profesional docente o la autonomía profesional, requieren cambios estructurales y culturales del sistema educativo. Este tipo de condiciones necesitan de un esfuerzo más sostenido en el tiempo.

También es conveniente, en el ámbito del diseño curricular, prestar atención a las necesidades al profesorado de características diversas. El caso más destacado es el de los profesores rurales, quienes necesitan, de manera más urgente, acceso a material más adecuado a su contexto, a la metodología multigrado, más orientaciones metodológicas, material didáctico para trabajar cierto tipo de problemas, y acceso a instancias de perfeccionamiento en resolución de problemas.

En la segunda parte de la investigación observamos cómo, al igual que señala Gómez (2018), factores provenientes de distintos contextos influyen en la forma que tienen los docentes de concretar las disposiciones curriculares, en este caso, sobre la resolución de problemas. En los docentes entrevistados, la modalidad del centro educativo, su condición geográfica, su nivel de formación en resolución de problemas y factores afectivos como la motivación o el estrés laboral, inciden en su forma de percibir facilitadores u obstaculizadores de una mejor enseñanza de la resolución de problemas. Dentro de estos cuatro grupos, nuestros resultados coinciden con los de Cheeseman (2018) al identificar elementos como los recursos, las tareas o el tiempo.

Para la investigación, estos resultados aportan ampliando la perspectiva de lo que significa enseñar la resolución de problemas. Más allá de enfocarse en el proceso mismo, nos ubica en un escenario previo, que da soporte a los procesos de resolución y al conocimiento especializado del profesor. A su vez, estos resultados abren nuevas líneas de investigación. Consideramos necesario seguir indagando en otros contextos, con muestras más amplias, con profesorado de características aún más diversas. Finalmente, concluimos que estos resultados, que calificamos como exploratorios, pueden sugerir líneas de acción, tano empíricas como teóricas, que ayuden a mejorar la implementación de la resolución de problemas en el aula.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el seno del proyecto PGC2018-095765-B-I00 (PROFESTEM) del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades de España.

Referencias

Blažek, J. y Pech, P. (2022). Interaction between subject and DGE by solving geometric problems. En P. R. Richard, M. P. Vélez y S. Van Vaerenbergh (Eds.), *Mathematics education in the age of artificial intelligence. Mathematics education in the digital era 17*, 193-212. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_9

Burkhardt, H. (2014). Curriculum design and systemic change. En Y. Li y G. Lappan (Eds.), *Mathematics curriculum in school education* (pp. 13-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7560-2_2

Cai, J. y Lester, F. (2010). Why is teaching with problem solving important to student learning. *National Council of Teachers of Mathematics*, *13*(12), 1-6.

Chanudet, M. (2019). Assessing inquiry-based mathematics education with both a summative and formative purpose. En P. Liljedahl y M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical problem solving* (pp. 177-207). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_9

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *Lumat*, *3*(1), 19-36. http://www.lumat.fi/index.php/lumat-old/article/view/38

Cheeseman, J. (2018). Teachers' perceptions of obstacles to incorporating a problem solving style of mathematics into their teaching. *Making waves, opening spaces: Proceedings of the 41st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 210-217.

Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. En M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. Da Ponte, A. Shúilleabháin y A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world. Theoretical and methodological issues* (pp. 1-21). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_1

Gómez, P. (2018). Currículo de matemáticas. En Autor (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y prácticas de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 11-52). Universidad de Los Andes.

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. del P. (2014). *Metodología de la investigación (Sexta Ed.).* Mc-Graw Hill.

Leong, Y. H., Tay, E. G., Toh, T. L., Quek, K. S., Toh, P. C. y Dindyal, J. (2016). Infusing mathematical problem solving in the mathematics curriculum: replacement units. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems. Research in Mathematics education* (pp. 309-325). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_18

Lester, F. y Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 117-135). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_8

Liljedahl, P. (2019). Conditions for supporting problem solving: Vertical non-permanent surfaces. En P. Liljedahl y M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical problem solving* (pp. 289-310). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_13

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM Thales.

Olivares, D., Lupiáñez, J. L. y Segovia, I. (2021). Roles and characteristics of problem solving in the mathematics curriculum: A review. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(7), 1079-1096. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1738579

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Concepciones y creencias de profesores de primaria sobre problemas matemáticos, su resolución y enseñanza. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (16), 57–72. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i16.253

Rico, L. (2016). Matemáticas escolares: fines educativos y estructura curricular. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 31-44). Ediciones Pirámide.

Saadati, F., Cerda, G., Giaconi, V., Reyes, C. y Felmer, P. (2018). Modeling Chilean mathematics teachers' instructional beliefs on problem solving practices. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(5), 1009-1029. https://doi.org/10.1007/S10763-018-9897-8

Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Universidad de Antioquia.

van Zanten, M. y van den Heuvel-Panhuizen, M. (2018). Opportunity to learn problem solving in Dutch primary school mathematics textbooks. *ZDM*, *50*(5), 827-838. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0973-x

Zhu, Y. y Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: a comparison of selected mathematics textbooks from mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *4*, 609-626.

CONOCIMIENTOS SOBRE LAS MATEMÁTICAS INFORMALES EN LA ESCUELA INFANTIL (0-3 AÑOS): ANALIZANDO EL EFECTO DE UNA ACTIVIDAD DE FORMACIÓN

Informal mathematical knowledge in nursery schools (0-3 years): Analysing the impact of continuous training

Olmos-Martínez, G.[a] y Alsina, Á.[b]

[a]Escoles Bressol Municipals de Vic, [b]Universidad de Girona

Resumen

Las orientaciones contemporáneas sobre educación matemática infantil destacan la importancia de favorecer el desarrollo de conocimientos matemáticos informales desde el primer ciclo (0-3 años), ya que son un eslabón necesario para acceder a las matemáticas formales. Desde este punto de vista, a través de un diseño cuasi-experimental (Pre-Post), se realiza un análisis de los conocimientos sobre las matemáticas informales que movilizan 28 profesionales de la Escuela Infantil, antes y después de una actividad de formación. Estos primeros datos cuantitativos muestran un incremento de los conocimientos acerca de las matemáticas informales después de la formación, con algunas diferencias según el tipo de conocimiento. Se concluye que se debe complementar el análisis con datos cualitativos para comprender mejor los aspectos que facilitan el incremento y, de modo general, se destaca la importancia de seguir potenciando la formación para promover el desarrollo de las matemáticas informales.

Palabras clave: *conocimientos para enseñar matemáticas, Escuela Infantil, formación continua, matemáticas informales.*

Abstract

Contemporary guidelines on early childhood mathematics education stress the importance of encouraging the development of informal mathematical knowledge in the 0-3 years period, as it is a necessary link to access formal mathematics. From this point of view, through a quasi-experimental design (Pre-Post), an analysis is carried out of the knowledge of informal mathematics mobilised by 28 nursery school professionals, before and after a training activity. These first quantitative data show an increase in knowledge about informal mathematics after the training, with some differences according to the type of knowledge. It is concluded that the analysis needs to be complemented with qualitative data to identify the aspects that facilitate the increase and, in general, the importance of further enhancing training to promote the development of informal mathematics is highlighted.

Keywords: *mathematics teaching skills, nursery school, in-service training, informal mathematics.*

INTRODUCCIÓN

Durante los tres primeros años de vida, los niños muestran mayor plasticidad cerebral y establecen todos los fundamentos que posibilitan los posteriores aprendizajes (Bueno, 2019). Desde este punto de vista, diversos organismos y autores han subrayado la importancia de promover el desarrollo de

Olmos-Martínez G. y Alsina, Á. (2022). Conocimientos sobre las matemáticas informales en la escuela infantil (0-3 años): analizando el efecto de una actividad de formación. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 431-439). SEIEM.

las matemáticas informales desde estas primeras edades, es decir, las primeras matemáticas que los niños aprenden y usan en situaciones de exploración, manipulación y juego (Baroody, 1987), por ser el eslabón imprescindible para el acceso a las matemáticas más formales (NCTM, 2003).

En este estudio se asume que es necesario contar con profesionales formados y conscientes de la importancia de ofrecer contextos educativos de alta calidad que promuevan el desarrollo de estas primeras matemáticas. Geist (2014) y Clements y Sarama (2015), por ejemplo, subrayan la importancia del conocimiento matemático de los profesionales por ser los agentes que estructuran y preparan los contextos educativos de los niños en función de sus necesidades evolutivas. Björklund y Barendregt (2016) señalan también que el desarrollo del pensamiento y las competencias matemáticas de los niños depende de los conocimientos, competencias y habilidades de los profesionales que los acompañan. En este sentido, en el intento de concreción de los focos en los que se debería centrar la investigación en educación matemática infantil en las próximas décadas, Alsina (2019) menciona que una de las agendas debería ser el análisis del conocimiento y destrezas útiles para enseñar matemáticas (Parks y Wager, 2015; Ribeiro et al., 2015).

Con base en estos antecedentes, el objetivo de este estudio es analizar los conocimientos sobre las matemáticas informales de los profesionales de la Escuela Infantil (0-3 años), antes y después de una actividad de formación.

¿QUÉ CONOCIMIENTOS NECESITA MOVILIZAR EL PROFESORADO DE EDUCACIÓN INFANTIL PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS?

Diversos modelos de conocimiento han establecido dominios y/o facetas de conocimiento del profesorado para enseñar matemáticas: el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) de Ball et al., (2008); el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) de Godino et al. (2017) o el Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) de Carrillo et al., (2018). A partir de estos modelos, junto con una revisión de las características de la enseñanza de las matemáticas en infantil (Alsina, 2020), Alsina y Delgado (2022) han tratado de sintetizar los conocimientos que necesita el profesorado de infantil para enseñar matemáticas, sobre todo con la intención de "facilitar la identificación, el análisis y las posibles falencias en la propia práctica que deberían ser subsanadas a través de la formación" (p. 19). Considerando los modelos de conocimiento indicados, distinguen los Conocimientos Matemáticos en Educación Infantil (CM-EI) y los Conocimientos Didácticos de las Matemáticas para la Educación Infantil (CDM-EI).

Dentro de los CM-EI consideran: 1) el Conocimiento Matemático Intuitivo e Informal (C-IeI), que se refiere al conocimiento que debe poseer el profesorado acerca de las primeras matemáticas que los niños aprenden en situaciones informales de exploración, manipulación y juego; 2) el Conocimiento de los Contenidos Matemáticos (C-CM), que se refiere al conocimiento de los temas matemáticos que señala la investigación en educación matemática infantil **(álgebra temprana, números y operaciones, geometría, medida, estadística y probabilidad), junto con el conocimiento de relaciones entre temas matemáticos (conexiones intraconceptuales)** y relaciones entre distintos temas (conexiones interconceptuales); y, finalmente, 3) el Conocimiento de los Procesos Matemáticos (C-PM), que se refiere a las formas como se adquieren los contenidos (NCTM, 2003). Este estudio, como se ha indicado, se focaliza **únicamente** en los C-IeI: por un lado, los conocimientos matemáticos intuitivos se refieren a un tipo de conocimiento autoevidente, basado en la certeza intrínseca, más global, metafórico, no analítico (Fischbein, 1987); mientras que los conocimientos matemáticos informales se desarrollan a partir de las interacciones con el medio físico y social, donde se presentan escenarios como los juegos que generan aprendizajes de una manera más natural y espontánea (Baroody, 1987; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014). Alsina (2015), a partir de un estudio longitudinal de cinco años con más de 700 niños menores de 3 años, señala inicialmente que los C-IeI giran en torno a las cualidades sensoriales (álgebra temprana), las cantidades discretas y continuas (números y operaciones), las posiciones y las figuras (geometría) y los atributos mensurables (medida); sin embargo, no se identifican conocimientos asociados a la estadística y la probabilidad.

Estos primeros conocimientos intuitivos e informales, como se ha indicado, son el enlace necesario para el acceso a la matemática formal, que se refiere a las habilidades y conceptos que se aprenden en las escuelas, y suele caracterizarse por una matemática más simbólica y escrita (Baroody, 2000). De acuerdo con Ginsburg et al. (1998), estas formas de aprendizaje se relacionan entre sí para ir dando un sentido al desarrollo de los conocimientos matemáticos.

METODOLOGÍA

Este estudio forma parte de una investigación de mayor envergadura en el marco de una Tesis Doctoral. Para la obtención de datos relativos al objetivo planteado, se ha diseñado un estudio cuasi-experimental (Creswell, 2009) en el que, antes y después de una actividad de formación, se han analizado los conocimientos acerca de las matemáticas intuitivas e informales de los 28 profesionales que integran el equipo educativo de la Red de Escuelas Infantiles Municipales de Vic-EBMV. La muestra ha sido seleccionada por conveniencia, incluyendo a todos sus miembros: 16 maestras, 1 maestro y 11 técnicas de Educación Infantil, de entre 23 y 60 años. Por esta razón, no se han podido considerar cuestiones como la equidad de género o edad.

La formación previa del equipo acerca de la Didáctica de las Matemáticas en la Escuela Infantil era escasa o nula. Por esta razón, se ha propuesto la actividad de formación “Observación, documentación e interpretación de acciones matemáticas en la Escuela Infantil (0-3 años)”, con los siguientes objetivos y contenidos: 1) aprender a observar, documentar e interpretar acciones asociadas a las matemáticas intuitivas e informales de los niños de 0 a 3 años; 2) profundizar en el significado actual de la educación matemática infantil y las principales líneas de innovación; 3) conocer las orientaciones curriculares acerca de las matemáticas de Educación Infantil y dominar los contenidos que lo integran; y 4) contemplar las nociones básicas de Didáctica de las Matemáticas. La formación ha sido de 15 horas: 9 horas presenciales y 6 horas no presenciales de trabajo en equipo. De forma presencial, se han llevado a cabo tres sesiones de tres horas cada una: en las dos primeras sesiones se han presentado los contenidos propios de la formación y se han analizado las prácticas educativas de otras Escuelas Infantiles reconocidas por sus buenas prácticas; en las 6 horas de trabajo no presencial, por un lado, los profesionales han conceptualizado las acciones matemáticas presentes en las propuestas que ya se llevaban a cabo; y, por otro lado, han enriquecido los espacios para promover los conocimientos matemáticos intuitivos e informales; finalmente, en la tercera sesión presencial los profesionales han mostrado el análisis de sus prácticas a través de presentaciones con imágenes de los diferentes espacios y materiales, junto con presentar tanto los cambios en los materiales y espacios como nuevos materiales creados.

Para recoger los conocimientos de los profesionales, se ha diseñado y validado el Cuestionario “Conocimientos Didáctico-Matemáticos en la Escuela Infantil” (CDM 0-3), que contiene dos tipos de ítems: a) preguntas cerradas, para controlar las variables a las que se ha dado un trato propio de la investigación cuantitativa; y b) preguntas abiertas, para determinar los conocimientos matemáticos a partir de un análisis categórico mixto. De acuerdo con los objetivos de este estudio, se analizan los datos correspondientes a dos preguntas: una pregunta cerrada en la que, a partir de imágenes de diversos espacios de las Escuelas Infantiles, los profesionales anotan qué conocimientos identifican; y una pregunta abierta en la que definen las matemáticas informales.

Previamente, se han establecido las categorías sobre las matemáticas informales en la Escuela Infantil (0-3 años), de acuerdo con la literatura previa: álgebra temprana, números y operaciones, geometría y medida (Alsina, 2015). Las respuestas se han transformado en datos numéricos y, dándoles un tratamiento estadístico mediante el programa SPSS, se ha desarrollado el análisis. Las categorías se han descrito según el número y el porcentaje de casos de cada categoría. Las variables continuas han sido descritas mediante estadísticos de tendencia central como la mediana y la desviación estándar.

RESULTADOS

Los datos recogidos en el cuestionario muestran que antes de la formación los profesionales tenían la necesidad de conocer qué matemáticas corresponden a los niños y las niñas de los 0 a los 3 años. A partir de la pregunta del cuestionario: ¿Has tenido la oportunidad en alguna ocasión de leer/escuchar información acerca del término "matemáticas informales"? los resultados, desde un punto de vista cuantitativo, muestran que antes de la formación solo seis profesionales (21%) manifestaban haber leído o escuchado algo respecto a las matemáticas informales versus el 22 (79%) que expresaron no haber tenido oportunidad. En el caso de responder afirmativamente, se pedía que aportasen una definición del concepto, pero únicamente dos profesionales (7%) apuntaron algunas ideas vinculadas a las matemáticas informales, sin ser capaces de desarrollar una definición completa.

Después de la formación, la mayoría de los profesionales (89%) mostraron haber incorporado nuevos conocimientos específicos entorno a qué refieren las matemáticas intuitivas, manifestaban haber leído o escuchado algo respecto a las matemáticas informales y eran capaces de aportar una definición más completa. Además, ya no expresaban la necesidad de comprender qué matemáticas podían desarrollar los niños y las niñas de 0 a 3 años y expresaban tener muy claros los contenidos y capacidades, los describían y detallaban qué propuestas de juego y experimentación podían plantear para facilitarlos.

De acuerdo con nuestro objetivo, en las tablas 1 a 4 se presentan los datos correspondientes a las categorías según si corresponden al álgebra temprana, los números y las operaciones, la geometría o los atributos mensurables, respectivamente.

Álgebra temprana

La tabla 1 muestra diferencias entre el pre y el post. Por un lado, encontramos contenidos con una fuerte recurrencia y otros poco frecuentes. Ejemplo de ello son las ordenaciones, seriaciones y observaciones de cambios cualitativos que, ni antes ni después de la formación, aparecen de manera recurrente. Por el contrario, la identificación de cualidades sensoriales aparece de forma mayoritaria tanto en el primer cuestionario como en el segundo: 24 profesionales (86%) y 26 (93%), respectivamente, identificaban este contenido.

Tabla 1. Contenidos de Álgebra Temprana.

Categorías según contenidos	PRE		POST	
	Sí	No	Sí	No
1. Reconocimiento de las cualidades sensoriales	24 (86%)	4 (14%)	26 (93%)	2 (7%)
2. Agrupaciones de elementos de las cualidades sensoriales	1 (3%)	27 (97%)	20 (72%)	8 (28%)
3. Correspondencias cualitativas	1 (3%)	27(97%)	10 (36%)	18 (64%)
4. Clasificaciones cualitativas	6 (21%)	22 (79%)	20 (72%)	8 (28%)
5. Ordenaciones cualitativas	2 (7%)	26 (93%)	6 (21%)	22 (79%)
6. Seriaciones cualitativas	1 (3%)	27 (97%)	5 (18%)	23 (82%)
7. Cambios cualitativos en los objetos y el entorno inmediato.	2 (7%)	26 (93%)	7 (25%)	21(75%)
Total	37		94	

Se destaca también que la detección de todos los contenidos de este bloque aumenta después de la formación, con una tasa de crecimiento que, en términos generales, corresponde a un 154,05% (de 37 contenidos detectados antes de la formación se pasa a 94 después). Los contenidos cuya detección ha aumentado más son las agrupaciones de elementos, que han pasado de solo un participante (3%) a veinte (72%), seguido de las clasificaciones, que ha pasado de seis (21%) a veinte (72%).

Números y operaciones

La tabla 2 muestra que no existen tantas diferencias como en el bloque anterior entre los datos pre y post, y que la detección de los distintos contenidos es bastante desigual: en algunos casos se produce un aumento y en otros se observa incluso una ligera tendencia a disminuir. Los contenidos cuya detección aumenta más son las correspondencias cuantitativas, que pasa de siete participantes (25%) a once (39%), y las acciones de juntar, sumar, añadir, restar, sacar y separar, en los que de tres participantes (10%) se pasa a once (39%). En términos generales, este aumento corresponde a una tasa de crecimiento de un 31,7% (de 41 contenidos detectados antes a de la formación se pasa a 54 después).

Tabla 2. Contenidos de Números y Operaciones.

Categorías según contenidos	PRE		POST	
	Sí	No	Sí	No
8. Comprensión de los principales cuantificadores y algunas cantidades elementales.	15 (54%)	13 (46%)	17 (61%)	11 (39%)
9. Inicio del conteo con una colección de elementos.	16 (57%)	12 (43%)	12 (43%)	16 (57%)
10 Distinción entre los nombres escritos y otros tipos de representaciones.	0 (0%)	28 (100%)	1 (3%)	27 (97%)
11. Correspondencias cuantitativas.	7 (25%)	21(75%)	11 (39%)	17 (61%)
12. Seriaciones cuantitativas.	0 (0%)	28 (100%)	2 (7%)	26 (93%)
13. Juntar, añadir, unir o reunir, agrupar, sumar… Sacar, separar, restar.	3 (10%)	25 (90%)	11 (39%)	17 (61%)
Total	41		54	

Geometría

La tabla 3 muestra que, en términos globales, no existen diferencias relevantes entre los contenidos detectados antes y después de la formación. De 67 contenidos detectados antes de la formación se pasa a 79 después de dicha formación, presentando una tasa de crecimiento del 17,91%. Los datos muestran también cierta disparidad: por un lado, dos de los contenidos que mayoritariamente detectan los profesionales son el reconocimiento de la posición relativa y la distancia y el reconocimiento de las formas que, aunque bajan sensiblemente después de la formación, pasando de 23 participantes (82%) a 20 (72%) y de 21 participantes (75%) a 16 (57%), respectivamente; por otro lado, otros contenidos del bloque, aunque su detección aumenta sensiblemente, siguen siendo muy poco visibles y, en ningún caso, llegan a superar el 35% de identificación. Como excepción, la observación de cambios de posición tiene más recurrencia tanto antes como después de la formación, de 10 (36%) pasa a 13 (46%) profesionales.

Tabla 3. Contenidos de Geometría.

Categorías según contenidos	PRE		POST	
	Sí	No	Sí	No
14. Reconocer la posición relativa a la dirección y la distancia	23 (82%)	5 (18%)	8 (28%)	0 (0%)
15. Reconocer algunas propiedades geométricas elementales	21 (75%)	7 (25%)	16 (57%)	12 (43%)
16. Relaciones espaciales elementales	0 (0%)	28 (100%)	4 (14%)	24 (86%)
17. Clasificaciones por forma	4 (14%)	24 (86%)	9 (32%)	19 (68%)
18. Correspondencias por forma	4(14%)	24 (86%)	6 (21%)	22 (79%)
19. Seriaciones por forma	0 (0%)	28 (100%)	5 (18%)	23 (82%)
20. Observación de algunos cambios en la posición	10 (36%)	18 (64%)	13 (46%)	15 (54%)
21. Observación de algunos cambios de forma	5 (18%)	23 (82%)	6 (21%)	22 (79%)
Total	67		79	

Atributos mensurables

La tabla 4 muestra que los contenidos de este bloque presentan unas frecuencias de detecciones muy dispares. Por un lado, destaca el reconocimiento de los atributos mensurables porque antes de la formación, los 28 participantes lo identifican (100%) y, después de la formación, lo siguen haciendo una extensa mayoría, en total 24 participantes (86%). Por otro lado, hay contenidos que no se han identificado o se han identificado de manera muy débil, como por ejemplo "identificación del tiempo", que no se reconoce ni antes ni después de la formación, siendo este el único contenido que no han identificado los participantes, mientras que las clasificaciones, las ordenaciones, las correspondencias, las seriaciones y las secuencias temporales presentan frecuencias de aparición muy bajas (inferiores al 20%).

Tabla 4. Contenidos de Atributos Mensurables.

Categorías según contenidos	PRE		POST	
	Sí	No	Sí	No
22. Reconocimiento de los atributos mensurables	28 (100%)	0 (0%)	24 (86%)	4(14%)
23. Identificación del tiempo	0 (0%)	28 (100%)	0 (0%)	28 (00%)
25. Clasificaciones según atributos mensurables	4(14%)	24 (86%)	6 (21%)	22 (79%)
25. Ordenaciones según atributos mensurables	0 (0%)	28 (100%)	3 (10%)	25 (90%)
26. Correspondencias según atributos mensurables	0 (0%)	28 (100%)	2 (7%)	26 (93%)
27. Seriaciones según atributos mensurables	0 (0%)	28 (100%)	5 (18%)	23 (82%)
28. Secuencias temporales.	0 (0%)	28 (100%)	3 (10%)	25 (90%)
29. Observaciones de cambios sencillos	16 (57%)	12 (43%)	10 (36%)	18 (64%)
Total		48		53

CONSIDERACIONES FINALES

En este estudio se ha analizado cómo afecta una actividad de formación continua en los conocimientos que poseen 28 profesionales de la Escuela Infantil (0-3 años) acerca de las matemáticas informales. Los datos obtenidos muestran que identifican conocimientos referentes al álgebra temprana, números y operaciones, geometría y atributos mensurables, pero la facilidad y frecuencia con la que los profesionales los identifican es diferente.

Respecto al álgebra temprana, los resultados muestran que, después de la formación, han aumentado los conocimientos que detectan los participantes, siendo este el bloque de contenido con mayor tasa de crecimiento y el único en el que detectan todos los contenidos. Estos datos están en sintonía con las aportaciones de diversos autores que señalan como a través de la observación, la manipulación, la experimentación y el juego libre, los niños desarrollan desde edades muy tempranas conocimientos asociados a las acciones de agrupar, clasificar, seriar, ordenar, comparar, etc. cualidades sensoriales (i.e., Alsina, 2015; Alsina y Berciano, 2016; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014).

Los datos sobre los contenidos de números y operaciones detectados han puesto de manifiesto un menor impacto de la formación. De hecho, todos los contenidos exceptuando el reconocimiento de los principales cuantificadores, son reconocidos por menos de un 45% de los participantes. Esta aparente dificultad puede estar vinculada a las creencias que ciertos contenidos son propios de edades más avanzadas (Castro y Castro, 2016) o que la construcción del concepto de número y el conteo va por etapas y, antes de integrar la noción de conservación del número, el niño debe integrar en un solo sistema la capacidad de clasificar y de seriar (Piaget y Inhelder, 2007). Según Clements y Sarama (2015) esta argumentación piagetiana tiene su lógica inicial porque los niños deben conocer con profundidad estas capacidades (clasificar y seriar) para entender muy bien los números y llegar a ser muy habilidosos con ellos. Aun así, no debe tomarse como redundante y concluyen que los niños aprenden acerca del conteo y de los números mucho antes de dominar estas capacidades y añaden, también que, la práctica del conteo puede ayudar significativamente a desarrollar la habilidad de clasificar y seriar.

Referente a los conocimientos vinculados a los contenidos de geometría, los contenidos vinculados a las capacidades de relacionar y observar posiciones o formas no llegan a superar el 35% de frecuencia de aparición y, son los contenidos vinculados al reconocimiento de la posición y la forma los altamente recurrentes. Este es un dato preocupante, considerando que la literatura muestra que los niños pequeños son sensibles a las formas de las figuras desde el primer año (Clements y Sarama, 2015) y que los bebés antes de los dos años son capaces de identificar algunas formas y sus propiedades básicas (Geist, 2014) llegando a, entre los 24 y 36 meses, tener mucha información sobre la forma de los objetos y las distancias, reconociendo el espacio a partir de los diferentes puntos de referencia que han identificado y juzgando las distancias.

Por lo que refiere a los atributos mensurables, se observa que los contenidos de este bloque presentan unas frecuencias de aparición muy dispares destacando que todos los participantes identifican el reconocimiento de los atributos mensurables frente a contenidos como las clasificaciones, las ordenaciones, las correspondencias, las seriaciones y las secuencias temporales que presentan frecuencias de aparición muy bajas, inferiores al 20%. Estos datos contrastan con los datos de diversos autores, que exponen que de los 0 a los 3 años, los niños viven muchas experiencias con los atributos mensurables mientras juegan, exploran y manipulan los objetos y los materiales (Alsina, 2015; de Castro et al., 2015).

A pesar de las divergencias descritas, los primeros datos obtenidos han puesto de manifiesto que la actividad de formación ha enriquecido y ampliado los conocimientos de todos los profesionales acerca de las matemáticas intuitivas e informales; sin embargo, será preciso complementar estos datos con un análisis cualitativo más detallado que permita comprender mejor los factores que han permitido mejorar los conocimientos. Adicionalmente, para futuras investigaciones se contempla la necesidad de ampliar la muestra de estudio para poder explorar de forma más amplia los conocimientos matemáticos de los profesionales y poder desarrollar generalizaciones y diseñar un programa de formación más amplio en el tiempo que ayude a implementar y consolidar los conocimientos, puesto que se observa que después de la formación siguen apareciendo conocimientos que solo identifican algunos profesionales. La finalidad seria dar nuevas oportunidades para implementar y analizar las prácticas educativas mediante nuevos procesos de reflexión donde los profesionales puedan seguir entrenando la mirada sobre qué, cómo y cuándo pueden facilitar estar primeras acciones matemáticas y cómo las pueden reforzar mediante su intervención.

Referencias

Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años: Elementos para empezar bien*. Narcea Ediciones.

Alsina, Á. (2019). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? *NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 100,* 187-192.

Alsina, Á. (2020). Revisando la educación matemática infantil: una contribución al Libro Blanco de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 9*(2), 1-20.

Alsina, Á. y Berciano, A. (2016). Una aproximación a las acciones matemáticas de niños de 1 a 3 años. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 137-146). SEIEM.

Alsina, Á. y Delgado, R. (2022). *¿Qué conocimientos necessita el profesorado de Educación Infantil para enseñar matemáticas?* Matemáticas, Educación y Sociedad.

Ball, D., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baroody, A. (1987). *Children's Mathematical Thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers.* Teachers College Press.

Baroody, A. J. (2000). Does mathematics instruction for three- to five-year-olds really make sense? *Young Children*, *55*(4), 61-67.

Björklund, C. y Barendregt, W. (2016). Teachers' pedagogical mathematical awareness in Swedish early childhood education. *Scandinavian Journal of Educational Research, 60*(3), 359-377. https://doi.org/10.1080/00313831.2015.1066426

Bueno, D. (2019). *Neurociencia para educadores*. Ediciones Octaedro.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*, 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Clements, H. D., y Sarama J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El enfoque de las trayectorias de aprendizaje.* Learning Tools LLC.

Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. SAGE Publications, Inc.

de Castro, C. (2011). Buscando el origen de la actividad matemática: Estudio exploratorio sobre el juego de construcción infantil. *Escuela Abierta*, *14*, 47-65.

de Castro, C., Flecha, G., y Ramírez, M. (2015). Matemáticas con dos años: buscando teorías para interpretar la actividad infantil y las prácticas docentes. *Tendencias Pedagógicas*, *26,* 89-108.

Castro, E. y Castro, E. (Coords.) (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil*. Pirámide.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* Holland Reidel Pub.

Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: Supporting mathematical development, birth to age 8.* Pearson.

Ginsburg, H. P., Klein, A. y Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: connecting research with practice. En W. Damon, I. E. Sigel y K. A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology: Child psychology in practice* (pp. 401-476). John Wiley y Sons Inc.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* National Council of Teachers of Mathematics (traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES).

Parks, A. N. y Wager, A. A. (2015) What Knowledge is Shaping Teacher Preparation in Early Childhood Mathematics? *Journal of Early Childhood Teacher Education, 36*(2), 124-141, https://doi.org/10.1080/10901027.2015.1030520

Piaget, J. e Inhelder, B. (2007). *Psicología del niño.* Morata.

Ribeiro, C. M., Muñoz-Catalán, M. C. y Liñán, M. M. (2015). Discutiendo el conocimiento matemático especializado del profesor de Infantil como génesis de aprendizajes futuros. En I. M. Gómez-Chacón. (Eds.). *MWS, Proceedings Fourth ETM Symposium* (pp. 575-589). Universidad Complutense de Madrid.

CONSTRUCCIÓN DE SISTEMAS DE REFERENCIA ESPACIALES EN EDADES TEMPRANAS: RECONOCIMIENTO DE MACROESPACIOS

Constructing spatial frames of reference in early ages: recognizing macrospaces

Ortiz-Rocha, Y. A.[a], Sandoval-Cáceres, I.[b] y Sacristán-Rock, A. I.[a]

[a] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav), México,
[b] Universidad Pedagógica Nacional – Ajusco, México

Resumen

Presentamos resultados parciales de una investigación que indaga cómo estudiantes de ocho años interpretan, en una representación (fotografía) de un macroespacio, la ubicación de objetos y sujetos, y cómo establecen relaciones de proximidad entre ellos: tareas integradas a una trayectoria de aprendizaje que fomenta el tránsito entre distintos espacios y la interpretación de representaciones. Esta se implementó en un experimento de enseñanza con estudiantes de tercero de una escuela pública en una zona socioeconómicamente vulnerable de la Ciudad de México. En un primer ciclo la implementación fue virtual (COVID-19) y en un segundo ciclo, presencial. Los resultados muestran dos acciones realizadas por los niños cuando analizaron representaciones de macroespacios: imaginar y tomar perspectiva. Además, usaron marcos de referencia relativos e intrínsecos, y construyeron representaciones espaciales egocéntricas, alocénticas y descentradas.

Palabras clave: *razonamiento espacial, sistemas de referencia, macroespacios, representaciones estáticas, experimento de enseñanza.*

Abstract

We present partial results of a research that investigates how eight-year-old students perceive macrospaces through a learning trajectory. Some tasks of the trajectory consist of analyzing two-dimensional static representations and interpreting the relationships between them and their corresponding physical spaces. These have been implemented in a teaching experiment with third grade students in a public elementary school located in a socioeconomically vulnerable area of Mexico City. In a first cycle, the implementation was virtual due to the COVID-19 pandemic; in the second cycle, it was face-to-face. The results show two actions carried out by children when they analyze representations of macrospaces: imagining and perspective taking. Furthermore, they used relative and intrinsic frames of reference, and constructed egocentric, allocentric, and decentered spatial representations.

Keywords**:** *spatial reasoning, frames of reference, macrospaces, static representations, teaching experiment.*

INTRODUCCIÓN

Todo ser humano, desde edades tempranas, requiere de oportunidades para construir, reconocer y representar diferentes tamaños del espacio que le rodea, esto es, a nivel de micro, meso y macro espacio (Galves, 1985). Resultado de una revisión de literatura inferimos una tensión entre si el razonamiento

Ortiz-Rocha, Y. A., Sandoval-Cáceres, I. y Sacristán-Rock, A. I. (2022). Construcción de sistemas de referencia espaciales en edades tempranas: reconocimiento de macroespacios. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 441-449). SEIEM.

espacial se considera como algo innato o que se puede desarrollar; según Sorby (1999) esto se debe a confundir destreza (innato) con habilidad (se desarrolla).

En la investigación educativa, uno de los principales objetos de estudio ha sido evaluar, a través de tests, habilidades espaciales como, por ejemplo, la rotación espacial (e.g., Nagy-Kondor, 2017; Roura y Ramírez, 2021). Sin embargo, estudios relacionados con el aprendizaje de este tipo de habilidades en contextos escolares no son tan comunes (e.g., Davis et al., 2015); más aún, actividades escolares sólo tienden a enfocarse en el uso de dichas habilidades en lugar de desarrollarlas. Autores como Uttal et al. (2013) y Francis y Whiteley (2015) resaltan la importancia de desarrollar habilidades de razonamiento espacial, pues estas permiten a los estudiantes construir y leer mapas, planificar rutas, diseñar planos y representar espacios físicos. En particular, el reconocimiento y representación de diferentes tamaños del espacio implica en los sujetos al menos dos acciones, por un lado, cambios de dimensión (2D ↔ 3D) y, por otro, establecer sistemas de referencia (e.g., Battista, 2007; Gutiérrez, 1991; Job et al., 2021).

Respecto al primero, algunas actividades que promueven cambios de dimensión involucran la construcción de formas bi- y tri-dimensionales e interpretación de sus correspondientes representaciones (e.g., Gonzato y Díaz-Godino, 2010; Galves, 1985). En específico, para la elaboración de mapas (representaciones bidimensionales) el sujeto requiere reconocer convenciones, técnicas de proyección y coordenadas aceptadas entre distintas comunidades (Gonzato y Díaz-Godino, 2010). En cuanto a la interpretación de representaciones, Battista (2007) enfatiza en la integración de acciones más allá del “ver”; es decir, es importante establecer relaciones del todo (objeto) con sus partes (y la relación entre ellas) y viceversa, dando cabida al análisis de posibles transformaciones. Con relación a la construcción de formas bi- y tridimensionales, autores como Gutiérrez (1991), resalta la necesidad de potenciar habilidades de comunicación expresiva con actividades en las que solicite, por ejemplo, descripción de pasos para realizar una construcción, indicaciones de desplazamiento de objetos o sujetos en un determinado espacio, descripciones de posiciones relativas, orientaciones o convenciones entre objetos, sujeto-objetos o entre sujetos.

Respecto a la segunda acción, esto es, el establecimiento de sistemas de referencia es indispensable actividades que permitan reconocer relaciones de posición/ubicación entre objetos/sujetos. Los objetos/sujetos pueden percibirse y representarse desde diferentes perspectivas respecto al observador, a saber, alocéntrica (*allocentric*), egocéntrica (*egocentric*), y descentrada (*decentred-altercentric*) (Tversky y Hard, 2009; Job et al., 2021). Sin embargo, desde el campo de la educación matemática, según Bruce et al. (2016), se tiende a ignorar investigaciones relacionadas con toma de perspectiva (e.g., dibujar estructuras tridimensionales desde múltiples perspectivas) las cuales son relevantes para el trabajo relacionado con el desarrollo del pensamiento espacial.

Consideramos que hay una falta de actividades que aborden el reconocimiento y representación de los diferentes tamaños del espacio tanto en clases de geometría, en otras áreas académicas como en situaciones cotidianas, como lo sugieren Bruce et al. (2016). Entonces es necesario dejar de ver el razonamiento espacial como un apoyo e incluirlo en la investigación y en el currículo escolar como un proceso central (Davis et al., 2015). Siguiendo esa línea, en nuestra investigación diseñamos una trayectoria de aprendizaje para niños de tercero de primaria (ocho años) que implica el tránsito entre distintos espacios (micro, meso y macro) y la interpretación de representaciones bi- y tridimensionales (dinámicas y estáticas) y su construcción. Una parte de nuestros objetivos ha sido analizar cómo los estudiantes interpretan dichas representaciones –en particular las estáticas (fotografías) de un macroespacio (tema de esta comunicación)–, la ubicación de objetos y sujetos, y cómo establecen relaciones de proximidad entre ellos; es decir, cómo construyen un *sistema de referencia* (Levinson, 1996) y una *toma de perspectiva* (Davis et al., 2015; Tversky y Hard, 2009).

MARCO CONCEPTUAL

El marco conceptual de nuestra investigación integra tres vertientes: tamaños del espacio (micro, meso y macro), razonamiento espacial (acciones del sujeto tanto cognitivas como físicas) y sistemas de referencia (incluido dentro las acciones "cognitivas" del sentir).

Respecto al tamaño del espacio, Galves (1985) distingue tres tipos. En el microespacio (por ejemplo, una construcción con multicubos), los objetos pueden percibirse y manipularse directamente. En el mesoespacio (por ejemplo, una casa), los objetos están fijos, no son manipulables y son vistos desde diferentes puntos de referencia; es decir, el sujeto puede tener una visión global del lugar/objeto a partir de percepciones sucesivas y puede recorrerlo por el interior y el exterior. En el macroespacio (una ciudad, una zona rural, etc.), no se tiene acceso global simultáneo, sino que la percepción de este es a través de visiones locales sucesivas.

Respecto al razonamiento espacial, se retoma el modelo propuesto por Davis et al. (2015) quienes representan la complejidad de este a través de un sistema que integra tanto comprensiones "mentales" como transformaciones "físicas" (lo que interpretamos como acciones cognitivas y corporizadas). Al explicar su modelo, estos autores describen algunos de los elementos que podrían estar involucrados, por ejemplo, cuando los niños reconocen relaciones entre una superficie curva y una proyección plana:

> moverse entre [...] representaciones implica transformaciones múltiples y simultáneas [...], incluidos movimientos (e.g., rotaciones), alteraciones (p. ej., distorsiones y escalas) y ubicaciones (p. ej., localización y orientación). Al mismo tiempo, se invocan varios elementos de comprensión [...], como interpretar (e.g., comparar y relacionar) y sentir (e.g., tomar perspectiva, visualizar), dicho de otra manera, el acto de transferir y transformar información espacial de una representación a otra, aunque claramente es un acto de razonamiento espacial, también parece operar en un plano conceptual diferente al de, digamos, deslizar (trasladar) (traducido de Davis et al., 2015, pp 142-143).

En actividades que implican interpretar representaciones de macroespacios están presentes al menos dos de los elementos del modelo de Davis et al. (2015): interpretar y sentir. Interpretar, según estos autores, son acciones relacionadas con los procesos cognitivos de relacionar, comparar y representar. El proceso de interpretación puede ocurrir al estudiar representaciones bidimensionales de un espacio y sus relaciones con el espacio representado. Sentir se refiere a las acciones que realiza un sujeto al interactuar con un objeto o en un espacio, como "propioceptir", imaginar, tactilizar, visualizar y tomar perspectiva (Davis et al., 2015). En particular, la toma de perspectiva involucra identificar la posición, orientación y ubicación de un lugar u objeto en un espacio determinado, utilizando algún sistema de referencia.

Levinson (1996) identificó tres tipos de sistemas de referencia: a) el *relativo* donde la ubicación de un objeto se expresa en relación con el punto de vista del perceptor y la posición de otro objeto; b) el *intrínseco* que involucra un sistema de coordenadas centrado en el objeto determinado por las características inherentes a este; y c) el *absoluto* donde la ubicación de un objeto se define en relación con rumbos fijos arbitrarios, como direcciones cardinales (Norte, Sur, Este, Oeste). La anterior tipificación podría interpretarse de acuerdo a lo planteado por Tversky y Hard (2009): la representación espacial egocéntrica está centrada en el observador y por ende las descripciones están en primera persona lo cual implica el establecimiento de un sistema de referencia relativo; en la alocéntrica las relaciones entre los objetos/sujetos están centradas en el entorno que los contiene; mientras en la representación descentrada se describen las relaciones entre objetos/sujetos desde la perspectiva de otro, lo que significa descripciones en tercera persona.

METODOLOGÍA

En nuestro estudio diseñamos un experimento de enseñanza bajo el enfoque de investigación de diseño de Cobb y Gravemeijer (2008); estos autores definen un experimento de enseñanza como aquel que involucra ciclos de diseño y análisis de actividades de una trayectoria de aprendizaje. Cada ciclo involucra la preparación de la trayectoria, su implementación y un análisis retrospectivo de los datos. Se llevaron a cabo dos ciclos de diseño e implementación con niños de tercer año (ocho años) de una escuela primaria pública en una zona socioeconómicamente vulnerable de México. El primer ciclo se implementó en un entorno de aprendizaje a distancia (debido a la pandemia de COVID-19) durante el año escolar 2020-2021 con un grupo de 16 niños; el número de estudiantes participantes fluctuó debido a problemas de acceso (e.g., falta de Internet). Las sesiones fueron a través de *Google Meet* y los estudiantes utilizaron tabletas y teléfonos inteligentes. Las producciones de los estudiantes se documentaron en fotos y/o videos enviados por correo electrónico. El segundo ciclo se realizó en modalidad presencial en los primeros meses del año 2022 y con un grupo de 24 niños. Todas las sesiones fueron grabadas.

La primera autora de este informe actuó como docente-investigador participante, guiando las sesiones; y las otras dos coautoras actuaron como observadores tomando notas de campo. Después de cada sesión se discutieron las observaciones y acciones necesarias para adaptar las siguientes sesiones, y así informar los ciclos de diseño y análisis de este experimento. En las descripciones de los resultados presentados se usan seudónimos y, en las fotografías, sólo son visibles expresiones corporales de los niños que ilustran acciones de cómo reconocen macroespacios a través de representaciones.

Ejemplo de trayectoria de aprendizaje: exploraciones y tareas relacionadas con terremotos

Una trayectoria de aprendizaje, como señalan Sarama y Clements (2009), debe promover la construcción de ideas y acciones, dar cuenta de los procesos involucrados en esa construcción y, en base a esos procesos, especificar tareas de aprendizaje y estrategias de enseñanza.

Nuestra trayectoria se centra en el fenómeno de los terremotos, un evento familiar para los estudiantes de la Ciudad de México. Nuestra hipótesis es que, si los niños analizan fotografías que representan vistas ortogonales superiores o aéreas relacionando el tamaño entre los objetos de la imagen y la ubicación del fotógrafo, entonces se favorece reconocer más fácilmente macroespacios y relacionar las representaciones bidimensionales usadas con su espacio real. Las tareas de aprendizaje están enmarcadas por las siguientes preguntas: i) ¿Cuáles son los riesgos en su escuela?; ii) ¿Por qué ocurren los terremotos?; iii) ¿Qué zonas son más sísmicas?; iv) ¿Qué instrumentos se utilizan para detectar los movimientos de la tierra? La tabla 1 describe las cuatro actividades y la duración de su ejecución (45 min. por sesión).

Tabla 1. Actividades fenómeno de los sismos.

	Actividad	Número de sesiones	
		Primer ciclo	Segundo ciclo
i)	Introducción a los terremotos y compartir las experiencias de los niños durante el terremoto de 2017.	2.5	1
ii)	Interactuar con macroespacios (capas de la corteza terrestre; espacios creados a través de movimientos sísmicos y terrestres: por ejemplo, cadenas montañosas como el Himalaya, la falla de San Andrés y el Valle del Rift) a través de representaciones estáticas (imágenes) y dinámicas (en Google Earth). Análisis de los sistemas de referencia.	2.5	3
iii)	Uso de mapas para identificar las zonas sísmicas de México. (Incluye familiarizarse con convenciones).	2	2
iv)	Construcción de un sismógrafo con materiales reciclados y experimentación para registrar movimientos.	1	2

DESCRIPCIÓN DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los datos presentados aquí corresponden a la segunda actividad relacionada con la pregunta "¿por qué ocurren los terremotos?" donde se exploran representaciones estáticas (fotos) de macroespacios. Las preguntas para promover la reflexión sobre los puntos de referencia para la toma de perspectiva fueron: "¿Desde dónde crees que fue tomada esta fotografía?" y "¿Dónde crees que se encontraba el fotógrafo?" Ilustramos los hallazgos derivados de esta tarea a través de dos episodios donde los estudiantes interpretan fotografías del Himalaya (figura 1a y figura 1b) y el Valle de Rift (Fig. 1c).

a. b. c.

Figura 1. Representaciones estáticas del macroespacio. a) Los Himalayas (Historia y Biografías, 2014). b) La cordillera del Himalaya (Portillo, n.d.). c) Gran Valle de Rift (KLM, n.d.).

Primer episodio. Exploración de montañas en el Himalaya a través de fotografías

El siguiente diálogo corresponde al primer ciclo (modalidad remota a distancia).

> Profesora: ¿Desde dónde crees que fue tomada esta fotografía?
>
> Daniel: Yo pienso que [el fotógrafo] está en el suelo [figura 1a].
>
> Ricardo: Yo también digo que desde el suelo.
>
> Profesora: Y, ¿por qué piensan eso?
>
> Daniel: Está parado, pero la toma hacia arriba. Toma un ángulo para arriba.
>
> Profesora: Ok. Y [en] la segunda foto figura 1b], ¿dónde creen que se encontraba el fotógrafo?
>
> Ricardo: Como que se ve la cámara un poquito arriba y como que siento que está parado [Luego usó sus manos para mostrar la posición de la cámara en las manos del fotógrafo, véase figura 2].
>
> Daniel: Yo también pienso que está en el piso, tomando el ángulo para el frente nada más, mirando todo derecho.

Figura 2. Ricardo indica cómo el fotógrafo probablemente sostuvo la cámara.

En el diálogo anterior, Daniel y Ricardo consideraron que el fotógrafo estaba en "el suelo" para el caso de la figura 1a, y "parado" para el caso de la figura 1b. Ellos también tuvieron en cuenta el ángulo de visión del fotógrafo, como se evidencia en lo expresado por Daniel "[el fotógrafo] toma un ángulo para arriba" (al referirse a la figura 1a) y, "tomando el ángulo para el frente" (respecto a la figura 1b). Nuestra interpretación es que Daniel imaginó el ángulo de visión y lo indica con el gesto hecho con sus manos (figura 2) junto con la expresión simultánea: "se ve la cámara un poquito arriba". Las descripciones (lenguaje oral y corpóreo) realizadas por Daniel y Ricardo nos permite inferir que cada uno de ellos construyó un sistema de referencia relativo (Levinson, 1996). Pareciera que ellos percibieron la posición del fotógrafo desde una perspectiva egocéntrica (Tversky y Hard, 2009), al referirse a los objetos desde su propio punto de vista, ellos toman el lugar del fotógrafo.

El siguiente fragmento corresponde al segundo ciclo (modalidad presencial).

> Profesora: ¿Desde dónde crees que fue tomada esta fotografía?
>
> Luis: Desde una montaña.
>
> Profesora: ¿Por qué dices que desde una montaña?
>
> Luis: Porque en la parte de esta imagen [se refiere a la figura 1a] parece que hay más montañas [usó sus manos para representar las montañas vistas (figura 3B) y no vistas en la foto (figura 3A) desde donde imagina la ubicación del fotógrafo].
>
> Omar: La segunda foto sería en el piso [se refiere a la figura 1b].
>
> Profesora: ¿Por qué desde el piso?
>
> Omar: Porque se ve la tierra [el suelo] muy cerca.
>
> Alicia: Porque se ven las nubes.

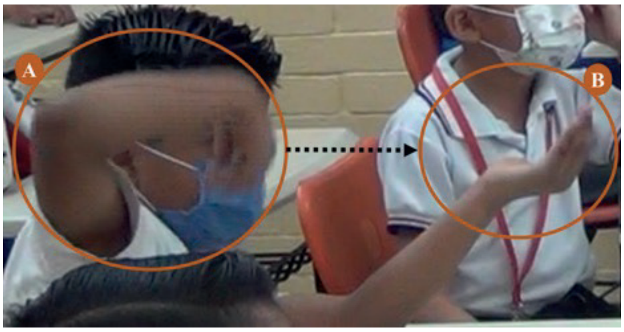


Figura 3. Luis representa con sus manos la ubicación del fotógrafo (A) y de las montañas (B).

Luis imaginó la posición del fotógrafo en una montaña que no se percibe en la fotografía, puesto que él considera que la está tomando de frente y esto lo interpretamos por la posición de sus manos (figura 3A). Aunque no lo menciona explícitamente, parece que Luis enfocó su atención en relaciones de proximidad entre elementos de la foto (más cerca, más lejos, más grandes, más pequeños) para establecer relaciones de distancia del fotógrafo (figura 3A) a las montañas (figura 3B); esto nos permite inferir que Luis estableció un sistema de referencia intrínseco (Levinson, 1992). Además, él construyó una representación descentrada (Tversky y Hard, 2009): no se posicionó como el fotógrafo, sino que imaginó la ubicación de este en el macroespacio (otra montaña). Omar y Alicia también construyeron un sistema de referencia intrínseco y, a diferencia de Luis, sus representaciones fueron alocéntricas (Tversky y Hard, 2009) estableciendo relaciones entre el tamaño de los objetos. Creemos que sus expresiones "la tierra [suelo] se ve muy cerca", "se ven las nubes" están basadas en sus propias experiencias de cómo perciben visualmente los diferentes objetos en términos de relaciones de proximidad (cerca/lejos).

Segundo episodio. Exploración del Valle de Rift a través de su fotografía

El diálogo siguiente corresponde al primer ciclo del experimento de enseñanza (modalidad remota) en el que se analizó el Valle de Rift (figura 1c) mediante la pregunta: "¿Desde dónde crees que fue tomada esta fotografía?"

> Nadia: Como que la están tomando desde una montaña.
>
> Jaime: Tal vez la tomaron desde el helicóptero.
>
> Profesora: ¿Por qué piensas eso?
>
> Jaime: La personita que se ve ahí, o al menos ese punto, es como una persona, y el pasto y las grietas se ven muy pequeñas para estar cerca.
>
> Nadia: Yo digo que sí se tomó desde una montaña porque se ve pasto donde toman la foto.

En el segundo ciclo (modalidad presencial), las respuestas a la pregunta "¿Desde dónde crees que fue tomada esta fotografía?" fueron similares a las del ciclo 1, como se muestra a continuación:

> Ernesto: Desde el piso, desde una montaña.
>
> Nicol: En el cielo porque la grieta se ve muy chiquita.
>
> Ernesto: Abajo se ve como si hubiera más pasto [Ernesto imagina que el pasto visto en la parte inferior izquierda de la figura 1c es más largo].

Nadia y Ernesto identificaron elementos cercanos a la cámara como el pasto (ver figura 1c, parte inferior) para deducir que el fotógrafo estaba en una montaña. Por su parte, Jaime y Nicol se fijaron en el tamaño de los objetos para reconocer relaciones de distancia entre la ubicación del fotógrafo y el tamaño de los objetos (más lejos, más pequeños). En efecto, todos ellos establecieron relaciones de proximidad –la cercanía o lejanía de los objetos respecto a la posición del fotógrafo– interpretando los elementos de la imagen, lo que les permitió establecer un marco de referencia intrínseco (Levinson, 1996). También construyeron una representación alocéntrica (Tversky y Hard, 2009) por la manera como expresan la correspondencia entre elementos (e.g., grietas, pasto) como parte de un todo (el entorno completo).

REFLEXIONES FINALES

En los dos episodios anteriores presentamos ejemplos de cómo niños de 8 años, tanto en modalidad remota –debido a la pandemia de COVID-19– como presencial, interpretaron macroespacios a través de representaciones bidimensionales estáticas. Afirmamos que las dos preguntas guías permitieron a los niños situarse en diferentes sistemas de referencia (relativos e intrínsecos) así como diferentes representaciones espaciales (egocéntrica, alocéntrica y descentrada-altercéntrica). La pregunta "¿Desde dónde crees que fue tomada esta fotografía?", enfocó la atención de los estudiantes a notar relaciones de distancia-tamaño entre algunos de los elementos de las imágenes respecto a la posición del fotógrafo. La otra, "¿Dónde crees que se encontraba el fotógrafo?", provocó en los niños imaginar la posición del fotógrafo desde una perspectiva egocéntrica respecto al macroespacio representado, considerando –implícitamente– el campo de visión. Nuestros resultados muestran que, para inferir el sistema de referencia construido por los niños, es necesario analizar tanto el lenguaje oral como el gestual para dar cuenta de relaciones establecidas entre la ubicación del fotógrafo, la foto y sus elementos. En resumen, identificamos dos acciones realizadas por los niños al analizar los tres macroespacios representados: i) *imaginar* la posición del fotógrafo: qué vería, cómo colocaría su cuerpo y sus manos, cómo sujetaría la cámara, cuál sería su campo de visión; y ii) *toma de perspectiva* para identificar cómo sería visto un objeto o lugar desde un determinado sistema de referencia.

La interpretación de representaciones bidimensionales de un macroespacio es un proceso complejo. Para desarrollar habilidades de razonamiento espacial, como lo destacan investigadores como Francis y Whiteley (2015) y Davis et al. (2015), es importante promover, en los primeros años de escolaridad tareas que impliquen cambios de dimensión y establecimiento de sistemas de referencia. A pesar de las dificultades, relacionadas con COVID-19 y por las limitaciones socioeconómicas de nuestros participantes, para la implementación de la trayectoria de aprendizaje propuesta, los hallazgos apuntan a la viabilidad de promover el desarrollo de habilidades de razonamiento espacial en contextos escolares. Sin embargo, se requiere más investigación en las aulas para documentar los resultados de trayectorias de aprendizaje como la propuesta, tanto en términos del diseño de tareas, su implementación y la formación de docentes para ello.

Agradecimientos

Esta investigación se ha realizado dentro del proyecto [SAc-ST-CPS-083-2021] y en el marco del programa de vinculación 'Aprendizaje de las matemáticas en contextos diversos' entre la Escuela Primaria Alfredo V. Bonfil y la Universidad Pedagógica Nacional, Ajusco, México.

Referencias

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Bruce, C., Davis, B., Sinclair, N., McGarvey, L., Hallowell, D., Drefs, M., Francis, K., Hawes, Z., Moss, J., Mulligan, J., Okamoto, Y., Whiteley, W. y Woolcott, G. (2016). Understanding gaps in research networks: using "spatial reasoning" as a window into the importance of networked educational research. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(2), 143-161. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9743-2

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education* (pp. 68-95). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315759593.ch4

Davis, B., Okamoto, Y. y Whiteley, W. (2015). Spatializing school mathematics. En B. Davis y Spatial Reasoning Study Group (Eds.), *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 139-150). Routledge.

Francis, K. y Whiteley, W. (2015). Interactions between three dimensions and two dimensions. En B. Davis y Spatial Reasoning Study Group (Eds.), *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 131-146). Routledge.

Galves, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria.* Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN.

Gonzato, M. y Díaz-Godino, J. (2010). Aspectos históricos, sociales y educativos de la orientación espacial. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *23*, 45-58.

Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. En E. Filloy y L. Puig (Eds.), *Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 44-59). Cinvestav-IPN.

Historia y Biografías (2014). *Los Himalayas: Formación cadena montañosa* [Fotografía]. https://historiaybiografias.com/himalayas/

Job, X. E., Kirsch, L. y Auvray, M. (2021). Spatial perspective-taking: insights from sensory impairments. *Experimental brain research*, *240*, 27-37. https://doi.org/10.1007/s00221-021-06221-6

KLM (n.d.). *The natural wonder of the Great Rift Valley* [Fotografía]. https://img.static-kl.com/images/media/2F6BEBB4-4854-42D5-B65D82D698547093?aspect_ratio=1:1&min_width=456

Levinson, S. C. (1996). Frames of reference and Molyneux's question: Cross-linguistic evidence. En P. Bloom, M. Peterson, L. Nadel, y M. Garrett (Eds.), *Language and space* (pp. 109-169). MA: MIT press.

Nagy-Kondor, R. (2017). Spatial ability: Measurement and development. En M. S. Khine (Ed.), *Visual-spatial ability in STEM Education: Transforming Research into Practice* (pp. 35-58). Cham, Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44385-0_3

Portillo, G. (n.d.). *La cordillera del Himalaya* [Fotografía]. https://images.app.goo.gl/oroWuCjTqmTMqrpz9

Roura, R. y Ramírez, R. (2021). Sentido espacial en futuros maestros. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 537544). Valencia: SEIEM.

Sarama, J. y Clements, DH. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge

Sorby, S. (1999). Developing 3-D spatial visualization skills. *Engineering Design Graphics Journal, 63*(2), 21–32.

Tversky, B. y Hard, B. M. (2009). Embodied and disembodied cognition: Spatial perspective-taking. *Cognition*, *110*(1), 124-129. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2008.10.008

Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C. y Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: a meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, *139*(2), 352–402. https://doi.org/10.1037/a0028446

INSTRUMENTO PARA LA VALORACIÓN DIDÁCTICA DE LA NOCIÓN (EMPÍRICA) DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Instrument for the didactic assessment of the (empirical) notion of congruence of triangles

Peña Acuña, C. A. y Rigo-Lemini, M.

Cinvestav

Resumen

Se propone un Instrumento (IC) cuyas categorías permiten analizar y valorar, desde múltiples perspectivas, los significados que los alumnos, a partir de consideraciones empíricas, asocian a la congruencia de triángulos. El IC es útil para profesores e investigadores y es pertinente pues no parece existir alguno semejante en la literatura. Se ilustra la aplicación didáctica del IC con un ejemplo y se presenta en formato tabular para facilitar su uso; se precisan las ideas históricas y epistemológicas que orientaron la construcción del IC, alineada con la Teoría Fundamentada.

Palabras clave: *congruencia de triángulos, instrumento de evaluación didáctica, Teoría Fundamentada.*

Abstract

An Instrument (IC) is proposed whose categories allow analyzing and assessing, from multiple perspectives, the meanings that students, based on empirical considerations, give to the congruence of triangles; the IC is useful for teachers and researchers and is pertinent because there does not seem to be any similar one in the literature. The didactic application of the IC is illustrated with an example and is presented in a tabular format to facilitate its use; the historical and epistemological ideas that guided the construction of the IC, aligned with the Grounded Theory, are specified.

Keywords: *congruence of triangles, instrument for didactic evaluation, Grounded Theory.*

ANTECEDENTES, JUSTIFICACIONES Y OBJETIVOS

El concepto de congruencia de triángulos (y el de polígonos en general, pero aquí se hará referencia solo a los triángulos) es central en la edificación de la geometría, tanto para la que se enseña a partir de los niveles básicos de educación como para la geometría disciplinar.

En distintas versiones axiomáticas de la geometría euclidiana, el concepto de congruencia se incluye al comienzo de la construcción deductiva. En el caso de *Los Elementos de Euclides* (Heath, 1956), el concepto de igualdad se introduce en la Noción Común 4 (Heath, 1956) y las condiciones suficientes para la congruencia de triángulos se encuentran 'demostradas' en las proposiciones I.4; I.8 y I.26. Por otro lado, Hilbert (1996), en sus *Fundamentos de Geometría*, incluye la congruencia en su sistema formal como una noción primitiva y define propiedades de esa relación a través de diversos postulados (de los cuales desprende, entre otras cosas, la condición lado-ángulo-lado para congruencia de triángulos).

En el ámbito de la didáctica de la geometría, la noción de congruencia entre triángulos aparece desde el inicio de la enseñanza de la disciplina. Los planes curriculares de matemáticas de distintos países

Peña Acuña C. A. y Rigo-Lemini M. (2022). Instrumento para la valoración didáctica de la noción (empírica) de congruencia de triángulos. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 451-459). SEIEM.

lo corroboran: en el de México (SEP, 2017), el de Colombia (MEN, 2006) o en los NCTM (2000) de Estados Unidos se sugiere introducir (implícitamente) la noción de congruencia desde los primeros años de escolaridad y se indica que, a lo largo del ciclo básico de educación, se aplique explícitamente el concepto y los criterios de congruencia en la resolución de problemas o eventualmente, en la formulación de conjeturas y de pruebas sobre relaciones de congruencia entre objetos geométricos, como lo hace el NCTM (2000).

De modo que la congruencia entre triángulos es un puntal de la geometría disciplinar y escolar. Por ello, les puede resultar útil a profesores y a investigadores educativos contar con herramientas analíticas que les permitan examinar y valorar las respuestas que los estudiantes dan a tareas sobre congruencia, analizar sus comprensiones al respecto y dar cuenta de las dificultades que ellos tienen para entender y aplicar esa relación, con el objetivo de orientar a los alumnos sobre temas relacionados y/o diseñar intervenciones didácticas de manera fundamentada.

En la indagación que los autores de este documento hicieron sobre la investigación en didáctica de la geometría no encontraron marcos interpretativos referidos a la congruencia de triángulos, que ofrezcan esas herramientas analíticas. En torno a la congruencia, lo que abunda en la bibliografía son propuestas de intervención didáctica (p. ej., Carbó y Mántica, 2010; Piatek-Jimenez, 2008; Zakiz y Leron, 1991), que son valiosas en sí mismas pero que no brindan esas herramientas de análisis.

De cara a la inexistencia de dichas herramientas, los autores de este documento elaboraron un Instrumento para la Valoración Didáctica de la Noción de Congruencia de Triángulos (IC) aplicable en los ámbitos educativos en donde se conciba a la congruencia desde un enfoque empírico.

En la literatura especializada se puede consultar una propuesta en la que se caracterizan niveles de razonamiento de los alumnos para el caso de la semejanza en el plano (Gualdrón y Gutiérrez, 2007; Gualdrón, 2011), basada en los niveles del Modelo de pensamiento geométrico de los van Hiele. Esta propuesta es conceptualmente cercana al presente estudio (ya que la congruencia es un caso particular de la semejanza), afín en objetivos y concordante en ciertas orientaciones metodológicas.

Sin embargo, los autores de este documento consideraron que la relación de congruencia, por su lugar en la estructura geométrica, posee sus propias singularidades; optaron por esto elaborar el IC, dándole a las concepciones sobre la congruencia un tratamiento por separado.

El primer objetivo de este documento consiste en exponer el IC. El IC está integrado por un conjunto de categorías; estas se describen en los incisos del 1 al 7 del apartado Hallazgos… y se resumen en la figura 7. Debido a los límites de espacio, las categorías no se ilustran en Hallazgos sino en Aplicación Didáctica (dado que en el primer apartado se expone el IC y en el segundo se sugiere una aplicación). Para dejar ver el significado de algunas de las categorías del IC, en Aplicación Didáctica se introducen ejemplos de algunas respuestas dadas por un estudiante que participó en la muestra y de algunas preguntas introducidas en los cuestionarios utilizados en este estudio. El segundo objetivo consiste en presentar el IC en formato tabular y sugerir, con el ejemplo antes mencionado, algunas ideas para facilitar al docente los procesos de evaluación del concepto.

METODOLOGÍA, MÉTODOS ANALÍTICOS Y RECOLECCIÓN DE DATOS

Consideraciones metodológicas

Para la construcción del IC se siguieron principios de la Teoría Fundamentada (TF) en la versión que proponen Corbin y Strauss (2015). La TF permite construir, entre otras cosas, instrumentos para el análisis de datos empíricos y para la evaluación didáctica (aunque en última instancia, su objetivo es ofrecer herramientas para construir teorías). Esos instrumentos se integran por un conjunto de categorías analíticas. La TF propone una serie de herramientas y técnicas precisas para llevar a cabo la definición de las categorías y su integración en un instrumento. En los reportes de investigación orientados por la TF no se introducen marcos teóricos porque de lo que se trata en esas investigaciones es justo construir marcos teóricos originales (y no partir de marcos teóricos previamente dados) a partir de un conjunto de datos empíricos. Recordemos que un marco teórico sirve de referente para el análisis de datos empíricos. Dado que el objetivo del IC es justamente servir de referente para el análisis de datos empíricos, el IC (que constituyen los hallazgos de esta investigación) cumple la misma función que un marco teórico. Es por esto que en esta comunicación se ha omitido el marco teórico. Si el lector está interesado en conocer cómo se emplearon las herramientas de la TF para hacer la construcción del IC, consulte Peña (2019). Aquí no se hace esta exposición por exceder los límites del espacio.

Métodos de recolección de datos empíricos y elección de actores

Como el propósito de la TF es construir marcos teóricos y validarlos constantemente con nuevos datos empíricos, en las investigaciones orientadas por la TF constantemente "se recurre a lugares, personas y situaciones que proporcionarán información sobre los conceptos que desea aprender" (Corbin y Strauss, 2015, p.135), es por esto que se recolectan datos deliberadamente elegidos y que concuerden con los propósitos de la investigación en curso, para eventualmente corroborar la validez de las categorías que integran esos marcos o para modificar esas categorías con el fin de que se vayan ajustando cada vez mejor a los datos empíricos. En resumen, de lo que se trata en la TF es de tener un amplio bagaje de datos empíricos que puedan darle validez a las categorías construidas. Es por esto que en la presente investigación se trabajaron con dos poblaciones distintas.

Una primera, integrada por 11 estudiantes de tercero de secundaria (14 a 15 años) de una escuela pública (de México). Se eligieron a aquellos que argumentaban de manera activa en sus clases de geometría. Todos ellos habían trabajado previamente los criterios de congruencia. Para la recolección de los datos se hizo uso de 4 cuestionarios que los alumnos resolvieron en 6 sesiones de 50 minutos. En la figura 1 se muestra ítems del cuestionario más significativo para el presente reporte (para el cuestionario completo v. Peña, 2019). En Aplicaciones también aparecen algunos ítems de los cuestionarios empleados. Los alumnos respondieron de forma individual los dos últimos cuestionarios, integrados por preguntas de tipo abierto con el propósito de darle al estudiante la oportunidad de expresar libremente sus ideas sobre la congruencia de acuerdo con sus posibilidades cognitivas, sus conocimientos y sus exigencias de racionalidad. La segunda población estuvo integrada por 16 maestros en formación en la Licenciatura en Educación Matemática (de Colombia), 8 de los cuales se encontraban en el último semestre de la licenciatura. Se trabajó con los estudiantes que voluntariamente participaron en el estudio. Para la recolección de datos se hizo uso de un cuestionario consistente de dos preguntas abiertas referidas a la congruencia de polígonos; no se estableció un límite de tiempo para la resolución del cuestionario ni se restringió el uso de herramientas tales como compás, softwares especializados o la consulta de libros de texto. Con el fin de ahondar en los significados que ellos pusieron en juego durante sus resoluciones se les realizó después una entrevista semiestructurada.

1. Dibuja dos triángulos ABC y DEF de tal manera que $\overline{AB} \cong \overline{DE}\ y\ \overline{BC} \cong \overline{EF}$ (es decir, que dos de sus lados sean congruentes).

1.2 ¿Los dos triángulos que dibujaste en el punto 1 son congruentes? Si tu respuesta es SI, ¿qué te permite asegurar la congruencia?, si tu respuesta es NO, ¿Es posible dibujar dos triángulos ABC y DEF congruentes sabiendo que $\overline{AB} \cong \overline{DE}\ y\ \overline{BC} \cong \overline{EF}$ (que dos de sus lados son congruentes) y sin saber nada entre la relación de $\overline{CA}\ y\ \overline{DF}$?.

1.3. Esas dos condiciones (es decir, dos lados congruentes) ¿son suficientes para garantizar la congruencia de los dos triángulos?

Figura 1. Fragmento del Cuestionario 3.

HALLAZGOS: INSTRUMENTO PARA LA VALORACIÓN DIDÁCTICA DE LA NOCIÓN DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

El IC permite analizar, desde múltiples perspectivas, las resoluciones que los estudiantes dan a tareas de congruencia. en lo que sigue se describen las categorías que integran el IC.

(1) Enfoque de la idea de congruencia, considerando niveles de formalización

1.a) Enfoque empírico de la idea de congruencia. Para caracterizar la congruencia o delimitar sus propiedades, en este enfoque los alumnos involucran objetos geométricos de carácter físico (i.e., una entidad física real, tal como una imagen, un dibujo, un diagrama o una figura dinámica de computadora (Battista, 2007)) y suelen utilizar verbos de acción y movimiento (como superponer, aplicar o hacer coincidir) (cf. Balacheff, 2000).

1.b) Enfoque (localmente) deductivo de la idea congruencia. En las respuestas incluidas en esta categoría, los alumnos dan muestra de razonar en contextos localmente deductivos o a través de pruebas pre-formales (De Villiers y Hanna, 2012) sobre objetos geométricos teóricos o conceptuales.

Esta categoría no define el pensamiento global del alumno sino sus producciones puntuales. Este documento está centrado en el Enfoque empírico de la idea de la Congruencia.

(2) Relación entre las figuras geométricas que subyace a la idea de congruencia

En esta categoría se incluyen dos sub-categorías: congruencia intra y congruencia entre.

Esta pareja de categorías se inspiró en el concepto de etapa intrafigural -proveniente de la epistemología y la psicología genética-, etapa que se asocia a la del desarrollo de la geometría euclidiana. En esta geometría se estudian las propiedades de figuras y de cuerpos geométricos considerando relaciones internas entre sus elementos. No se toma en consideración el plano o el espacio que las contiene ni su organización formal (como ya sucede en la geometría cartesiana). Si se llegan a dar movimientos de figuras (p. ej., la superposición), no se explicitan, ni se reflexiona sobre ellos, ni forman parte de los conceptos que intervienen en la teoría (Piaget y García, 1982).

2.a) Congruencia intra. En esta categoría la congruencia se concibe como relación entre los componentes de un mismo triángulo.

2.b) Congruencia entre. Se concibe a la congruencia como relación entre dos o más triángulos.

(3) Consideración de los *componentes* del triángulo para definir la congruencia

3.b) Congruencia desde la perspectiva del análisis. Se entiende el término 'análisis' como un proceso cognitivo consistente en: a) separar las partes del objeto que se quiere entender; b) procurar comprender el comportamiento de las partes tomadas por separado y c) integrar esas comprensiones parciales en una comprensión integral o del todo (Ackoff, 1972). En esta subcategoría la noción de congruencia entre triángulos se conceptualiza con base en la congruencia (u otras relaciones) que se da(n) entre los componentes de los dos triángulos.

*3.a) Congruencia como réplica***.** En esta caracterización no se consideran propiedades relativas a los componentes de los triángulos en ciernes. Partiendo de la representación gráfica de un triángulo, los estudiantes recrean otra, replicándola y considerándola como un todo (no descomponible).

(4) Condiciones necesarias para la congruencia

El estudiante establece explícitamente condiciones que, desde su entender, caracterizan las relaciones de congruencia entre triángulos. Estas condiciones necesarias pueden ser expresadas o aplicadas a partir de un tratamiento instrumental de la idea de congruencia (i. e., como resultado de un aprendizaje memorístico en el que está ausente la reflexión sobre su significación general o incluso no hay toma de conciencia de estarlo empleando (Piaget y García, 1982)) o bien, a partir de un concepto de congruencia que se ha alcanzado a tematizar como resultado de la reflexión sobre sus características y propiedades (Piaget y García, 1982). Esta categoría incluye dos subcategorías.

4.a) Condiciones necesarias de la congruencia definidas de manera asistemática y/o errónea

4.b) Condiciones necesarias de la congruencia matemáticamente correctas

(5) Pautas (o condiciones suficientes) para la congruencia

En esta categoría el alumno intenta definir condiciones mínimas para que se dé la congruencia entre dos triángulos. Estas pautas (o condiciones suficientes, cuando se da el caso) pueden ser concebidas por el alumno a partir de un tratamiento instrumental de la idea de congruencia o bien a partir de un concepto de congruencia que se ha alcanzado a tematizar. Se distinguen dos subcategorías.

5.a) Criterios incorrectos por carecer de relevancia desde el punto de vista matemático o por ser incompletos.

5.b) Criterios de suficiencia correctos, sin justificación

(6) Procesos dinámicos en la caracterización de la congruencia

En una larga porción de la historia de la geometría la idea de congruencia se fundamentó en procesos dinámicos, si bien Hilbert prescindió ya del movimiento, como se aprecia en la figura 2:

<table>
<tr><td colspan="3">Definición de congruencia mediante procesos dinámicos, con menor o mayor nivel de formalización:</td><td rowspan="3">Congruencia como noción primitiva (relación binaria aplicada a segmentos y ángulos). Postulados de congruencia; del Postulado 11 se desprende como corolario el criterio de congruencia entre triángulos ‘lado-ángulo-lado’ (Hilbert, 1996)</td></tr>
<tr><td colspan="2">A través de procesos de superposición de figuras, en donde se busca la coincidencia de puntos o segmentos (Cfr. Balacheff, 2000).</td><td rowspan="2">Tomando como base los movimientos rígidos. Se trata de transformaciones isométricas del plano en sí mismo (traslaciones, rotaciones, reflexiones). Bajo esta perspectiva, introducida en la geometría proyectiva, la verificación de la congruencia se deriva de las propiedades de figuras y relaciones que quedan invariantes bajo transformaciones rígidas (Zubieta, s.f.).</td></tr>
<tr><td>Superposición no definida. En la ‘demostración’ de las proposiciones I.4 y I.8 (basada implícitamente en la noción común 4: “las cosas que coinciden una con otra son iguales una con otra” (Heath, 1956, p. 225)), Euclides no habla directamente de superposición, de movimiento de figuras o de coincidencia; sin embargo, él emplea una fraseología (mediante expresiones como “se aplica”) que, de acuerdo con la interpretación de Heath (1956, p. 225), no deja lugar a dudas de que él estaba suponiendo que una figura se estaba moviendo (mental o simbólicamente) para colocarse sobre la otra.</td><td>Superposición definida explícitamente. Meray (1874), por ejemplo, busca explícitamente integrar el movimiento dentro de la geometría, haciendo referencia al proceso de superposición, de coincidencia y de desplazamiento (Cfr. Balacheff, 2000).</td></tr>
</table>

Figura 2. Procesos dinámicos en la caracterización de la congruencia vistos en la historia.

Con base en las anteriores consideraciones se definieron las siguientes categorías:

6. a) Congruencia sin referencia a la superposición y al movimiento. En este caso, el proceso de superposición no resulta relevante para la comprobación de la congruencia (ni siquiera en la comparación de triángulos concretos manipulables); para este fin se suele acudir a otros procesos como lo es la comparación “a simple vista”.

6.b) Congruencia con base en la superposición (implícita)

6.c) Congruencia con base en la superposición (definida)

6.d) Congruencia con base en los movimientos rígidos

(7) Formas de conceptualizar la congruencia: Implícita o explícita

Un rasgo del conocimiento implícito es que la persona dispone de representaciones activas de las que no puede informar o de las que solo puede informar parcialmente, aunque estén influyendo en su conducta, la cual eventualmente puede ser visible para otros (Pozo, 2001).

7.a) Noción implícita de la congruencia. No hay referencias directas a la congruencia, aunque se deja ver que el alumno dispone de representaciones que él activa durante su resolución.

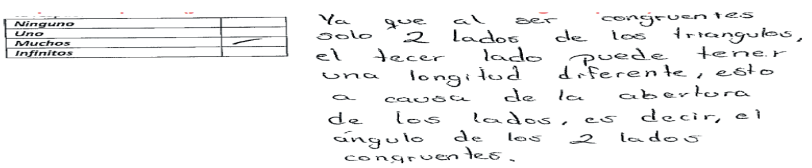
7.b) Noción explícita de la congruencia. Hay referencias directas a la congruencia y eventualmente el concepto ya se ha tematizado, dejando ver una reflexión sobre el concepto y sus propiedades.

UNA APLICACIÓN DIDÁCTICA DE LOS HALLAZGOS: INSTRUMENTO PARA LA EVALUACIÓN DE LA NOCIÓN DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Las categorías y subcategorías antes descritas se pueden integrar en una tabla que puede servir como instrumento didáctico para analizar y evaluar los significados, el nivel de comprensión o el de complejidad cognitiva que, en torno a la relación de congruencia, se dejan ver en las producciones de los estudiantes. En lo que sigue se ilustra esa posible aplicación, para lo cual se acude a las producciones de un estudiante (Felipe) que participó en la primera muestra del estudio.

(1) Nivel de formalización:

El Nivel de Formalización reflejado en la respuesta que Felipe da en la figura 3 corresponde al de Localmente Deductivo. En esa producción se puede reconocer una prueba pre-formal (De Villiers y Hanna, 2012) que hace referencia a objetos geométricos teóricos (generales): el alumno parte de las condiciones dadas en la tarea y de teoremas en acción de la geometría euclidiana que, aunque no hace explícitos se pueden entrever, y aplica un razonamiento inferencial lógico del cual deduce una conclusión genérica (son muchos los triángulos que se pueden formar bajo las condiciones dadas).



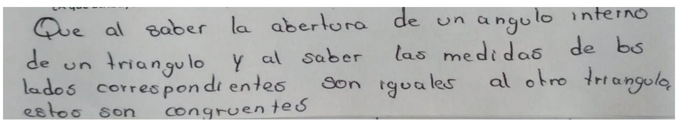
Ninguno	
Uno	
Muchos	✓
Infinitos	

Ya que al ser congruentes solo 2 lados de los triangulos, el tecer lado puede tener una longitud diferente, esto a causa de la abertura de los lados, es decir, el ángulo de los 2 lados congruentes.

Figura 3. Respuesta de Felipe al ítem 1.1, cuestionario 3 (1.1, C3) a la pregunta ¿Cuántos posibles triángulos puede formar con dos pares de lados correspondientes congruentes?

(2) Relación entre las figuras geométricas que subyace a la idea de congruencia:

En la respuesta que Felipe da a (1.1, C3) (figura 3) deja ver que él establece Relaciones de Congruencia Entre figuras, pues cuando menciona “ya que al ser solo 2 lados de los triángulos congruentes”, explicita la relación de congruencia entre dos pares de lados correspondientes de los triángulos. Es posible reconocer este tipo de Relaciones entre figuras en muchas otras de sus respuestas, a manera de ejemplo está la respuesta dada por Felipe que se presenta en la figura 4.



Que al saber la abertura de un angulo interno de un triangulo y al saber las medidas de los lados correspondientes son iguales al otro triangulo estos son congruentes

Figura 4. Respuesta de Felipe a (1.8, C3).

(3) Consideración de los componentes del triángulo para definir la congruencia:

Muchas de las producciones de Felipe se pueden caracterizar bajo la categoría Congruencia desde la perspectiva del Análisis ya que es posible reconocer ahí que él lleva a cabo un proceso de análisis (Ackoff, 1972). Por ejemplo, en la respuesta que da a (1.1, C3) (figura 3), se observa que él separa los triángulos en sus componentes (sus lados); establece relaciones de congruencia entre estos componentes (en particular, entre 2 pares de lados correspondientes congruentes); e integra las relaciones entre los componentes para establecer una conclusión sobre los triángulos (son muchos los triángulos que se pueden formar bajo las condiciones dadas).

(4) Condiciones necesarias para la congruencia:

Felipe establece Condiciones Necesarias de la Congruencia matemáticamente correctas (figura 5), porque, en sus propios términos, ofrece una definición de la relación de congruencia de triángulos.

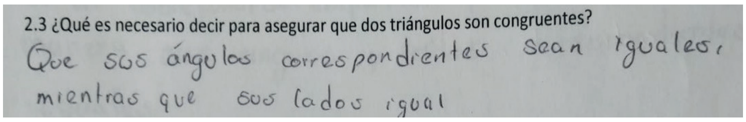

2.3 ¿Qué es necesario decir para asegurar que dos triángulos son congruentes?
Que sus ángulos correspondientes sean iguales, mientras que sus lados igual

Figura 5. Respuesta de Felipe a (2.3, C2).

(5) Pautas (o condiciones suficientes) para la congruencia:

Se intuye que cuando Felipe escribe Lado, Angulo, Lado (figura 6) hace referencia al Criterio de Suficiencia Correcto de congruencia LAL y es que hay producciones (v. figura 3 y 4) en las que él justifica con sus palabras la razón de validez del criterio y deja ver que él lo comprende.

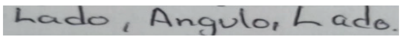

Lado, Angulo, Lado.

Figura 6. Respuesta Felipe ítem 1.4, cuestionario 3.

(6) La presencia de procesos dinámicos en la caracterización de la congruencia:

La respuesta de Felipe a (2.6, C2) (figura 7) se ha ubicado en la subcategoría Superposición Definida ya que ahí él hace referencia directa al proceso de comparar haciendo uso de la superposición; especifica lo que debe ocurrir al sobreponer los polígonos (empalmar perfectamente); y, partiendo del proceso de superposición, deriva conclusiones relacionadas con los componentes del triángulo ("sus ángulos y lados correspondientes son iguales").

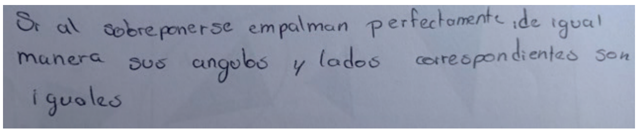

Si al sobreponerse empalman perfectamente, de igual manera sus angulos y lados correspondientes son iguales

Figura 7. Respuesta de Felipe (2.6, C2) a la pregunta ¿Cómo dirías que dos polígonos son congruentes?

(7) Formas de conceptualizar la congruencia:

Felipe hace Explícita su concepción de congruencia, como se puede observar en todas sus respuestas ahí hace referencia directa a la congruencia y eventualmente al concepto.

De las anteriores consideraciones se obtiene el IC, que aparece en la figura 8, asociado a Felipe.

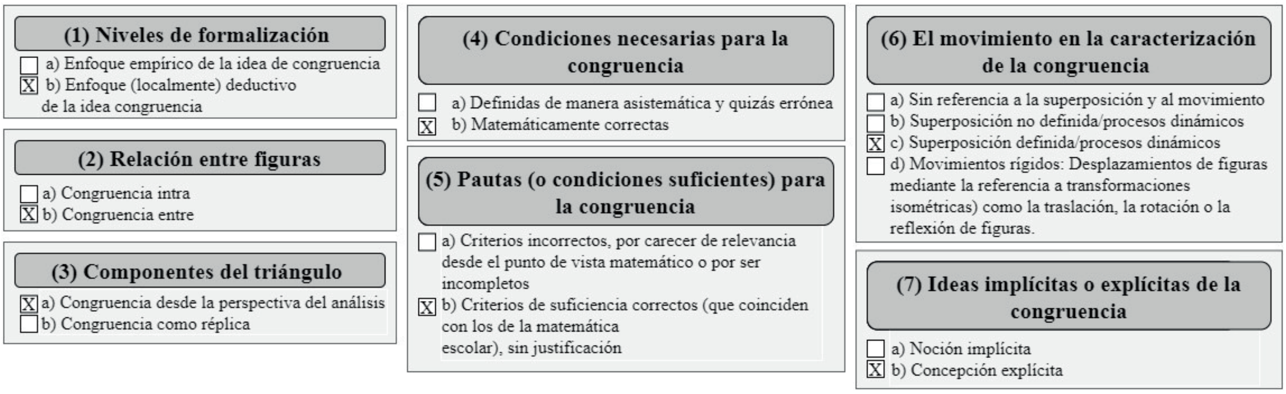


Figura 8. Instrumento Didáctico para la evaluación de las ideas de Congruencia (IC).

COMENTARIO FINAL: UTILIDAD Y PERTINENCIA DEL IC

El IC, basado en las interpretaciones que estudiantes dan a la relación de congruencia de triángulos, puede resultar útil a profesores e investigadores en tanto que permite analizar y evaluar significados (que parten de una perspectiva empírica) que estudiantes de distintos niveles educativos puedan expresar sobre la congruencia; valorar la complejidad cognitiva de sus respuestas a tareas sobre este concepto o identificar sus dificultades. El IC es, además, una propuesta novedosa, ya que no parece existir en la literatura en educación matemática una herramienta teórica, basada en datos empíricos, semejante. Por las dos consideraciones anteriores, el IC es también un instrumento pertinente.

Referencias

Ackoff, R. (1972). *El arte de resolver problemas*. Limusa

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. U. de los Andes.

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Age.

Carbó, A. y Mántica, A. (2010). Una propuesta para trabajar congruencia de triángulos en la escuela secundaria priorizando la validación. *Memorias de la III Reunión Pampeana de Educación Matemática,* 376-386.

Corbin, J. y Strauss, A. (2015). *Basics of qualitative research: techniques and procedures for developing grounded theory* (4th ed.). SAGE Publications.

De Villiers, M. y Hanna, G. (2012). Aspects of Proof in Mathematics Education. En M. De Villiers y G. Hanna (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 1-10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_1

Gualdrón, E. y Gutiérrez, Á. (2007). Una aproximación a los descriptores de nivel de razonamiento de Van Hiele para la semejanza. En M. Camacho, P. Flórez y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 369-380).

Gualdrón, E. (2011). *Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas* [Tesis doctoral, Universitat De València]. Universitat De València.

Heath, T. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary*. Dover.

Hilbert, D. (1996). *Fundamentos de la geometría*. Bouncopy. S.A.

MEN [Ministerio de Educación Nacional]. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*.

Meray, Ch. (1874). Nouveaux eléments de géométrie.

NCTM [National Council of Teachers of Mathematics]. (2000). *Principles standards and for school mathematics*. EE. UU.

Peña, C. A. (2019). *Categorías para valorar el desempeño de estudiantes sobresalientes de tercero de secundaria ante tareas de congruencia de polígonos: una propuesta de ordenamiento conceptual*. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Piatek-Jimenez, K. (2008). Building intuitive arguments for the triangle congruence conditions. *The Mathematics Teacher, 101*(6), 463-466. https://doi.org/10.5951/MT.101.6.0463

Piaget, J y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo veintiuno.

Pozo, J. (2001). *Humana mente: el mundo, la conciencia y la carne*. Ediciones Morata, S.L.

SEP (2017). *Aprendizajes clave para la Educación Integral plan y programas de estudio para la educación básica*. Ciudad de México, México.

Zakiz, R. y Leron, U. (1991). Capturing congruence with a turtle. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 285-295. https://doi.org/10.1007/BF00368342

Zubieta, G. (s.f.). *Movimientos rígidos*. Cinvestav.

SIGNIFICADOS Y SENTIDOS DE OBJETOS ALGEBRAICOS POR MEDIO DE TAREAS DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Meanings and senses of algebraic objects through mathematical modelling tasks

Peña, F., Solares, A. y Rojano, T.

CINVESTAV (México)

Resumen

En este documento presentamos el diseño de una secuencia de enseñanza para la introducción de un método algebraico para la solución de sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas por medio de una tarea de modelización matemática. La aplicación de esta secuencia tiene por objetivo caracterizar momentos de producción de sentido y construcción de significados que estudiantes de primero de secundaria (entre 12 y 13 años) despliegan durante su solución, así como el rol que juega en esos procesos la modelización matemática. Entre los resultados se resalta que las primeras etapas del proceso de modelización matemática posibilitan la resignificación de las ideas de incógnita e igualdad, así como la apropiación de métodos exploratorios y algebraicos.

Palabras clave: *modelización matemática, álgebra, pensamiento algebraico.*

Abstract

In this document we present the design of a teaching sequence for the introduction of an algebraic method for the solution of two unknowns linear equations systems through a mathematical modelling task. The application of this sequence aims to characterize moments of sense production and construction of meanings that first high school students (between 12 and 13 years) deploy during their activity, as well as the role that mathematical modelling plays in those processes. Among the results, it is highlighted that the early stages of the mathematical modelling process allow the resignification of unknown and equality ideas, as well as the appropriation of exploratory and algebraic methods.

Keywords: *Modelling, algebra, algebraic thinking.*

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con Filloy et al. (2010), para los estudiantes que se acercan por primera vez a la solución de *sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas* es necesaria una reconceptualización de las nociones de *incógnita* e *igualdad*. Al llevar a cabo un estudio con alumnos de secundaria (13 a 14 años) en que se introdujeron los métodos tradicionales para la solución de estos sistemas, identificaron que la necesidad de expresar una de las incógnitas en términos de la otra (es decir despejar una de las incógnitas) implica reinterpretarla e involucrarse en nuevas maneras de operar con ella que no son naturalmente asimiladas por los estudiantes.

Peña, F., Solares, A. y Rojano, T. (2022). Significados y sentidos a objetos algebraicos por medio de tareas de modelización matemática. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 461-469). SEIEM.

Tomando en consideración el auge que desde las últimas décadas ha tenido la modelización matemática en el campo de la investigación y de la educación matemática (Socas et al., 2016), en el este escrito, presentamos un estudio en que se elige a la modelización matemática como una alternativa para el diseño de secuencias de enseñanza, que introduzcan a los estudiantes en la solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Consideramos también que los procesos de modelización matemática proporcionan significados (Filloy et al., 2010) para los objetos algebraicos involucrados en la secuencia y sentido (Filloy et al., 2010) a las maneras en que se opera con ellos.

La pregunta de investigación que se aborda es *¿cuál es el rol de la actividad de modelización matemática en la construcción de significados y producción de sentidos durante la adquisición de métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas?*. Para contestarla, planteamos un modelo de enseñanza que fue aplicado a estudiantes de primer año de secundaria (12 a 13 años) y que presenta, por primera vez para ellos, una situación de modelización que implica dos valores desconocidos (incógnitas) y dos formas de relacionarlos (ecuaciones). En este documento presentamos los resultados principales del estudio.

REFERENTES TEÓRICOS

Filloy (1999) introduce la noción de Sistema Matemático de Signos (SMS) para referirse a los conjuntos de signos matemáticos socialmente establecidos, junto con sus significados y las formas en las que interactúan. Para Filloy, Rojano y Puig (2008) el SMS del álgebra, por ejemplo, incluye no sólo el conjunto de los signos que usa, también sus aspectos semánticos y sintácticos; así, es el sistema en su totalidad lo que se considera matemático y no sólo los signos de lo componen.

Hemos adoptado el marco teórico de los Modelos Teóricos Locales (MTL) (Filloy, 1999; Filloy et al., 2008), pues permiten el estudio del actuar de los estudiantes con SMS de distinto nivel de formalidad, a medida que se van acercando a un uso competente de niveles cada vez más formales de los mismos. Los MTL constituyen entonces una herramienta teórica, metodológica y analítica que embona con los intereses de este estudio en la medida que permite rastrear la evolución de los SMS intermedios con los que, estudiantes con un dominio básico en la solución de ecuaciones lineales, se apropian de métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Filloy et al. (2008) consideran cuatro componentes para enfocar el objeto de estudio, en nuestro caso los sistemas de ecuaciones lineales, estas componentes (o modelos) son: i) la de competencia formal, es decir, el conocimiento matemático formal del estudio; ii) la de enseñanza, que constituye la secuencia de enseñanza que se pone a prueba (de esta componente se ofrecen mayores detalles en el apartado de metodología); iii) la de procesos cognitivos: que permite describir las acciones de los sujetos al trabajar en el *modelo de enseñanza* y iv) la de comunicación, que caracteriza las interacciones docente-estudiante y estudiante-estudiante que surgen a lo largo del trabajo en el *modelo de enseñanza*.

Para efectos de responder a la pregunta de investigación que orienta este estudio, conviene precisar los términos de "significado" y "sentido", así como el uso de éstos como categorías para el análisis de las producciones de los estudiantes.

Significados y sentidos: un marco analítico

El término "significado" es comúnmente usado en la investigación en educación matemática, por ejemplo, en el trabajo de Martín Fernández et al. (2016), se menciona que dotar de significado a un objeto matemático implica "disponer de una definición, representarlo, identificar sus operaciones, relaciones y propiedades, sus modos de uso, su interpretación y aplicación" (p. 9). La definición que estamos usando para nuestro estudio coincide con la de Martín Fernández en el hecho de que el sentido se confiere a los objetos matemáticos, pero, consideramos que el proceso mediante el cual estos significados se van construyendo se puede rastrear si se toman en cuenta los cuatro tipos de fuentes de significado propuestas por Filloy (1999), éstas son:

1. De transformaciones dentro de un SMS sin referencia a otro SMS;
2. De traducciones a través de SMS distintos;
3. De traducciones entre SMS y sistemas de signos no matemáticos;
4. Con la consolidación, simplificación, generalización y rectificación de acciones, procedimientos y conceptos de los SMS intermedios creados durante el desarrollo de las secuencias de enseñanza/aprendizaje.

Las fuentes de significado recién mencionadas se constituyen en categorías de análisis para esta investigación.

Respecto del término "sentido", si bien algunos estudios lo asocian a las habilidades numérica, espacial, de medida y estocástica (véase, por ejemplo, Flores y Rico, 2015), en nuestro caso, este término se lo conferimos a la apropiación, por parte de los estudiantes, de un proceso de naturaleza matemática que sea nuevo para ellos, en esta línea Filloy (1999) menciona que:

> El sentido es conferido, en el nuevo SMS, por la utilización de nuevos signos de las maneras que los requieren cada uno de los pasos del proceso de análisis y resolución, visto todo el sistema de signos ligado por la concatenación de acciones desencadenadas por el proceso de solución de las diversas situaciones problemáticas que, con anterioridad, se consideraban irreductibles unas a las otras y que, ahora, gracias al uso del nuevo SMS, se resuelven con procesos que se establecen como los mismos, esto es, se transfieren de la resolución de un problema a otro, convirtiendo lo que antes era una diversidad de problemas en lo que, ahora, se puede llamar una familia de problemas cuyos miembros todos se pueden resolver con el mismo proceso. (p. 77)

Tomando esto en cuenta, en nuestro análisis observamos los procesos de producción de sentido tomando como categorías de análisis cuando: i) las acciones de los estudiantes conllevan al uso de nueva simbología; ii) el análisis del problema conlleva a la concatenación de acciones y iii) existe transferencia de los procesos de solución de un problema a otro similar.

METODOLOGÍA

La metodología propia de los MTL propone dos fases para el desarrollo de las investigaciones, primero una fase de diseño de la experimentación y luego una de desarrollo empírico. Respecto de la fase de diseño, una vez definida una problemática (en nuestro caso la apropiación de métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2) se elabora un modelo teórico local que contempla las cuatro componentes previamente señaladas. Presentamos, a continuación, una descripción del modelo de enseñanza pues para este documento nos interesa presentar un análisis que siga el orden cronológico que marca la secuencia de actividades.

El modelo de enseñanza

Un modelo de enseñanza es definido por Filloy (1999) como:

> Un conjunto de secuencias de textos matemáticos T_{an} cuya elaboración y decodificación por el aprendiz le permite al fin interpretar todos los textos T_n en un SMS más abstracto cuyo código hace posible descodificar los textos T_n como mensajes con un código matemático socialmente bien establecido (p.78).

Tomando en cuenta lo anterior, entendemos que el modelo de enseñanza presume el conjunto de las tareas que llevan al estudiante a hacerse cada vez más competente en un SMS. En nuestro caso, el modelo de enseñanza consiste en una secuencia de actividades llevadas al aula cuyo interés era introducir problemas que se solucionaran con un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, por primera vez para los estudiantes.

Para esta investigación usamos un contexto de mezcla de productos que permitiera a los estudiantes identificar de manera directa la presencia de dos valores desconocidos (cantidades a mezclar) así como dos formas de relacionar los datos y valores faltantes del problema (total de la mezcla y precio). En este artículo nos centraremos en la solución y el análisis de la siguiente tarea.

> El costo de un kilo de cacahuates al mayoreo es de $40 mientras que la nuez Wichita tiene un valor de $120 el kilo, un empresario desea crear 25 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $60 por kilo ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Usamos el ciclo de modelización matemática propuesto por Blum y Leiß (2007) (ver figura 1) para construir una secuencia de trabajo que permitiera a los estudiantes abordar progresivamente las distintas fases del proceso de modelización. Esta ruta de diseño para la secuencia nos permitió observar de manera separada las fases del ciclo de modelización y con esto identificar la relación que estas fases tienen con los procesos de producción de sentido y construcción de significados. Así, nuestro modelo de enseñanza se compone de 3 hojas de trabajo, cada una con distintos énfasis y cuyo objetivo final de enseñanza era la introducción del método de igualación como estrategia para resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero con un objetivo para la investigación relacionado con los significados y sentidos que surgen a medida que los estudiantes la trabajan y el rol que la modelización matemática desempeña para ello.

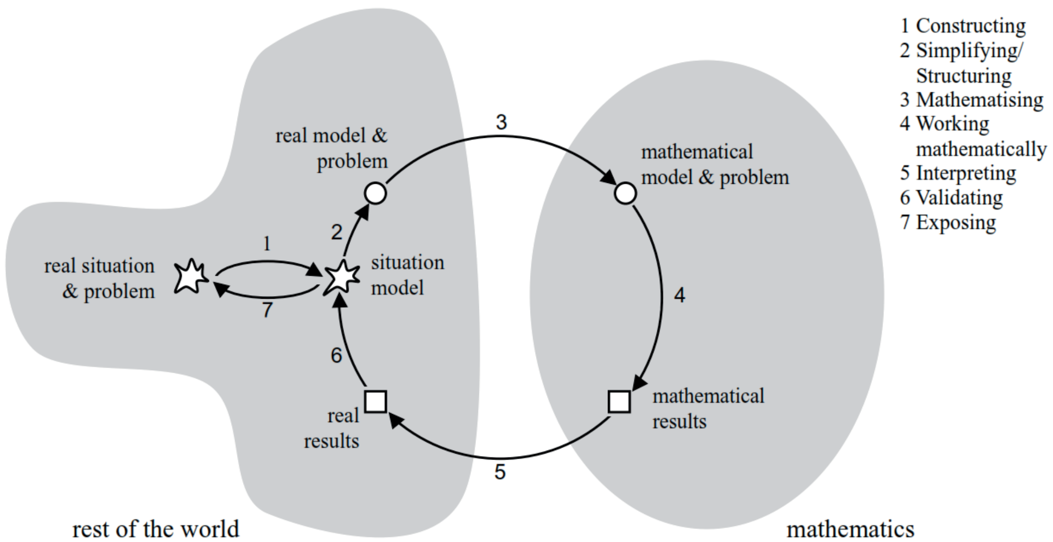


Figura 1. Ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß (2007).

Hoja de trabajo 1 (Entender el problema): En la primera hoja de trabajo se sugiere a los estudiantes el uso de una hoja de cálculo en la que puedan hacer explícitos los datos y relaciones que el problema les presenta. Así, se espera que los estudiantes hagan uso de una hoja de cálculo previamente etiquetada, en la que puedan, libremente, relacionar los datos del problema según ellos los hayan interpretado. La hoja de cálculo ofrece una alternativa de solución para los sistemas de ecuaciones que no se rige por un método sintáctico, por lo que su uso, previo a la introducción de métodos algebraicos, nos pareció conveniente. Las relaciones que se espera que los estudiantes construyan en la hoja de cálculo se muestran en la figura 2:

	A	B	C	D	E	F
1	Cacahuates	Nuez	Costo total cacahuate	Costo total nuez	Costo total	Costo por kilo
2	N1	N2	=A2*40	=B2*120	=C2+D2	=E2/25

Figura 2. Relaciones esperadas en la hoja de cálculo.

Con esta hoja de cálculo, los estudiantes pueden explorar diferentes valores para N1 y N2 y verificar, de manera automática, si el costo de la mezcla se acerca a la que el problema solicita (en este caso $60). La elaboración de este mecanismo de comprobación presume que los estudiantes identifican dos datos desconocidos y las relaciones de precio que los rigen.

Hoja de trabajo 2 (Construir el modelo): La segunda hoja de trabajo pone énfasis primero en la matematización del modelo real a un modelo matemático y luego en trabajar matemáticamente sobre ese modelo para solucionar el sistema (fases 3 y 4 del ciclo de modelización, ver figura 1). En esta hoja se presentan otros tres problemas con similar estructura que el de la primera hoja, pero cuyas soluciones implicaban valores decimales periódicos.

Siguiendo las ideas de Rojano y Sutherland (2001) para la incorporación de literales en problemas trabajados con hoja de cálculo, se sugiere a los estudiantes asignar nombres (X y Y) a los conjuntos de datos de las dos primeras columnas. Con este cambio, se les solicita reescribir las demás fórmulas.

La escritura de las fórmulas haciendo uso de las literales X y Y se constituye en la representación algebraica del sistema de ecuaciones lineales. Así pues, la segunda parte de la hoja de trabajo se encarga de orientar a los estudiantes en la manipulación de este modelo para poder solucionar el sistema por medio del método de igualación.

Hoja de trabajo 3 (Aplicar el modelo): El trabajo que se propuso en la tercera hoja de trabajo busca que los estudiantes apliquen el modelo matemático en problemas similares para interpretar y validar los resultados en términos del contexto del problema (fases 5 y 6 del ciclo de modelización, ver figura 1). Así, la tercera hoja de trabajo se constituye en un compilado de 6 problemas que tienen la misma estructura que el original, pero con cambios en los datos para presentar situaciones "atípicas" en un contexto real, como, por ejemplo:

- *Que el costo de uno de los productos a mezclar coincida con el costo esperado*: Ello implica que el resultado para la cantidad del otro producto será cero.
- *Que el costo esperado y los costos de ambos productos sean iguales*: Con esta condición, el sistema se vuelve dependiente, lo que implica que cualquier distribución de cantidades es una respuesta válida para el problema.

El modelo de enseñanza recién descrito fue implementado durante la segunda de las fases de la metodología, correspondiente al desarrollo empírico. A continuación, se presenta una síntesis de los elementos más relevantes de esta fase.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

A continuación, se presenta, de manera cronológica, un resumen de las producciones de los estudiantes enfatizando tanto las fases del ciclo de modelización que estaban desarrollando, así como los procesos de construcción de significados y producción de sentido que identificamos. Acompañamos esta descripción con un análisis en términos teóricos que permita dilucidar cómo los procesos de modelización matemática, que enmarcan el diseño del modelo de enseñanza, apoyan la construcción de significados y producción de sentido de elementos propios de un nuevo SMS para los estudiantes, el de la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 por el método de igualación.

La hoja de cálculo para cristalizar relaciones y dependencias

La lectura inicial del problema suscitó que los estudiantes reconocieran los datos relevantes, así como el objetivo al que se deseaba llegar, esto se hace evidente en el siguiente fragmento de conversación del estudiante L, ocurrido justo después de que terminara de leer el problema.

> L: Estamos hablando de que los tendría que combinar para que saliera cada uno a $60, entonces tendría que haber más parte de los cacahuates, porque estamos hablando de que la nuez Wichita nada más va a agregar sus $20

El uso de la frase "los tendría que combinar", da cuenta de que L reconoce cuál es el propósito del problema (obtener una mezcla con un costo de $60 el kilo). Además, la frase "tendría que haber más parte de los cacahuates" también da cuenta de que reconoce los datos principales del problema (costos unitarios) y su relación con la respuesta que busca.

Es de suponer que L realizó una traducción del texto del problema a un SMS de tipo aritmético en el que se van construyendo los significados de: i) variación, en la medida en la que puede especular sobre la posibilidad de tener más de un producto que de otro y ii) dependencia al reconocer que estas cantidades se restringen por una condición de precio.

En el trabajo posterior de los estudiantes, las relaciones que reconocieron en los datos les permitieron la elaboración de una herramienta de validación de los resultados que suponían para el problema. La hoja de cálculo que crearon los estudiantes se corresponde con la esperada en el diseño de la secuencia, y los estudiantes usaron varias filas (17 en total) para aproximarse cada vez más a la respuesta del problema. La tabla 1 muestra la respuesta a la que llegaron.

El proceso de exploraciones sucesivas con diferentes datos, que los estudiantes llevaron a cabo para encontrar la respuesta del problema, ratifica la construcción de los significados de *variación* y *dependencia*, pero esta vez haciendo uso del SMS de la hoja de cálculo, el cual, en este caso, se considera intermedio entre el SMS aritmético en el que los estudiantes interpretan inicialmente el problema y el SMS algebraico al que se pretende llegar con el modelo de enseñanza.

Tabla 1. respuesta de los estudiantes en la hoja de cálculo.

Kilos nuez	Kilos cacahuates	Costo nuez	Costo cacahuates	Costo total	Costo por kilo
6.25	18.75	750	750	1500	60

La necesidad de un método algebraico provisto de sentido

Cuando los estudiantes desarrollaron los problemas de la segunda hoja intentando replicar la estrategia del uso de la hoja de cálculo, no pudieron encontrar una respuesta exacta para estos, pues como se mencionó en la sección de metodología, las respuestas a los problemas implicaban expresiones decimales periódicas. No obstante, esta transferencia de procesos refleja producción de sentido sobre la estrategia de exploraciones sucesivas y fue clave para que los estudiantes reconocieran la necesidad de establecer un método de solución más directo para abordar esta familia de problemas.

La estrategia para introducir las literales X y Y que usó la hoja de trabajo 2 fue exitosa, dado que los estudiantes habían elaborado por su propia cuenta las fórmulas que regían la hoja de cálculo, y no tuvieron mayor inconveniente para reescribirlas en términos de X e Y. La figura 3 muestra la producción de los estudiantes para esta parte.

Una vez que los estudiantes tuvieron a su disposición una representación algebraica para el problema (nueva simbología) se introdujo el método de igualación como estrategia de manipulación de las expresiones algebraicas (trabajo matemático) con miras a obtener la solución del sistema. Sin embargo, reconociendo los resultados del estudio de Filloy et al. (2010), gran parte del trabajo tuvo que ser orientado por el investigador ya que los estudiantes tenían un dominio muy básico en la solución de ecuaciones lineales con una incógnita.

Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
x	y=25-x	=40×X	=120×y	40×100y / 25

=40x+120 y   60

Figura 3. Reescritura de las fórmulas de la hoja de cálculo.

Del trabajo de los estudiantes en esta segunda etapa del modelo de enseñanza deducimos que: i) las estrategias de trabajo del primer problema pueden ser transferidas a problemas con estructura similar; y ii) el sentido que los estudiantes habían producido sobre las interacciones que gobiernan el problema, permite traducir las relaciones de la hoja de cálculo al planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales escrito algebraicamente.

Los datos en contexto

Las situaciones "atípicas" que se presentaron en la tercera hoja de trabajo tenían la intención de detonar reflexiones sobre el modelo matemático y los resultados que ofrece versus la naturaleza misma de la situación en el "mundo real". No obstante, los estudiantes no lograron dar sentido al método de igualación para la solución de sistemas de ecuaciones lineales, aún cuando los problemas tenían la misma estructura. Este hecho se puede evidenciar con el uso progresivo de recursos alternativos a las herramientas sintácticas en los cuatro primeros problemas (ver figura 4).

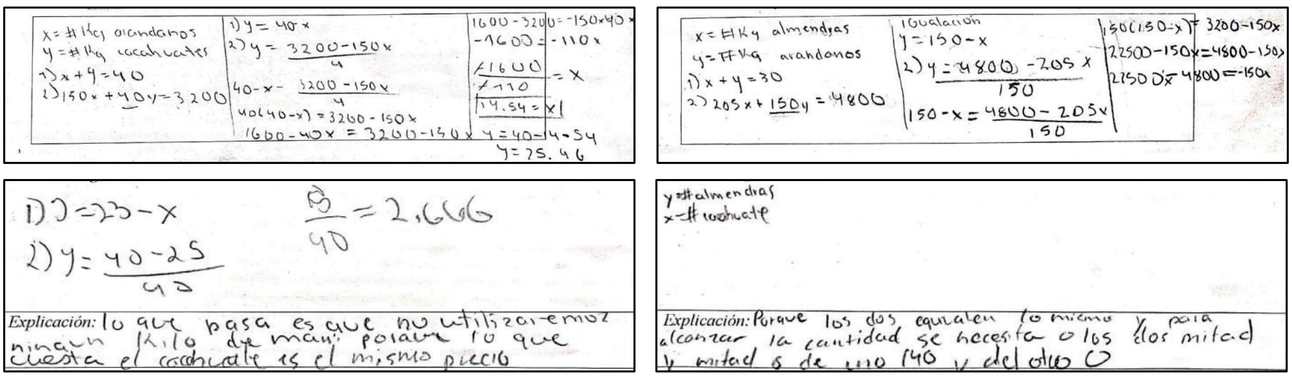


Figura 4. solución de los estudiantes a los 4 primeros problemas de la tercera hoja de trabajo.

La figura 4 muestra la aplicaron el método de igualación satisfactoriamente en el primero de los problemas. Esto se debe a que ese procedimiento fue realizado de manera plenaria en el tablero con la orientación por el investigador. No obstante, en los problemas siguientes, replicar los procedimientos no les fue suficiente para solucionarlos. De manera que en los problemas 3 y 4 la presencia de herramientas sintácticas fue prácticamente nula, lo que llevó a los estudiantes a recurrir a referentes semánticos provenientes del contexto del problema para encontrar las soluciones.

En resumen, las fases iniciales del ciclo de modelización de este estudio brindan a los estudiantes herramientas coherentes para dar respuestas a problemas particulares, aun cuando dispongan de recursos sintácticos para su solución. Además, el retorno a situaciones más concretas (la hoja de cálculo o el contexto del problema) generó algunas obstrucciones en la apropiación de los métodos algebraicos formales por su nivel más abstracto de representación.

DISCUSIÓN

Retomando la pregunta que orientó esta investigación, podemos afirmar que en este estudio las fases iniciales del proceso de modelización matemática juegan un rol importante para que los estudiantes reconstruyan los significados de variación y dependencia como parte de sus procesos de reconceptualización de las nociones de incógnita e igualdad. Además, estas primeras fases del ciclo de modelización y el uso de la hoja de cálculo permitieron a los estudiantes la producción de sentido del uso del método de exploraciones sucesivas. Sin embargo, encontramos también la necesidad de rediseñar el modelo de enseñanza propuesto para lograr que los estudiantes den mayor sentido al método de igualación.

Finalmente, consideramos que la elaboración de modelos de enseñanza que hagan uso de tareas de modelización matemática puede promover que los estudiantes (re)construyan y consoliden significados de las nociones de incógnita e igualdad, y que doten de sentido a los procedimientos que utilizan para la solución de los sistemas de ecuaciones.

Agradecimientos

Esta investigación se desarrolló en el marco del proyecto "Construcción de significados en procesos de modelación matemática. Una aproximación basada en el uso de herramientas de simulación computacional desde una perspectiva semiótica" (Conacyt, Mexico. A1-S-33505) en conjunto con el proyecto Exploring Mathematical Modeling Knowledge for Teaching Through Simulation and Coding (SSHRC, Canada. ref.: 430-2019-00382).

Referencias

Blum, W. y Leiβ, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics - ICTMA 12* (pp. 222-231). Elsevier.

Filloy, E. Y. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach.* Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-0-387-71254-3

Filloy, E., Rojano, T. y Solares, A. (2010). Problems dealing with unknown quantities and two different levels of representing unknowns. *Journal of Research in Mathematics Education, 41*(1), 52-80. https://doi.org/10.2307/40539364

Flores, P. y Rico, L. (Coords.) (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*. Ediciones Pirámide.

Martín Fernández, E., Ruiz Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(3), 51-71.

Rojano, T. y Sutherland, R. (2001). Arithmetic world-algebraic world. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12 ICME Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 515-522). The University of Melbourne. http://hdl.handle.net/11343/35000

Socas, M., Ruano, M.R. y Hernández, J. (2016). Análisis Didáctico del proceso matemático de Modelización en alumnos de Secundaria. *AIEM*, 9, 21-41. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i9

HABILIDADES PARA HACER PATRONES EN TAREAS DISEÑADAS POR FUTURAS MAESTRAS DE EDUCACIÓN INFANTIL

Patterning skills in tasks designed by pre-service Early Childhood Education teachers

Pincheira, N., Alsina, A. y Acosta, Y.

Universidad de Girona

Resumen

Se analizan las habilidades para hacer patrones de un conjunto de tareas matemáticas diseñadas por futuras maestras de Educación Infantil. A partir de la técnica de análisis de contenido, se han analizado 18 tareas elaboradas durante una sesión de clase de la asignatura "Didáctica de las Matemáticas", del tercer año de Educación Infantil de una universidad chilena. Los resultados obtenidos muestran una variedad de habilidades para hacer patrones en las tareas diseñadas, predominando mayoritariamente la habilidad "extender un patrón de repetición", seguida de la habilidad "copiar el patrón". Se concluye que es necesario brindar experiencias de formación al profesorado que permitan enriquecer el diseño de tareas incorporando un nivel de dificultad creciente de acuerdo a la edad de los niños y la progresión de las habilidades para hacer patrones, con la finalidad de promover la generalización: copiar, interpolar, extender, abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear.

Palabras clave: *Educación Infantil, futuros maestros, habilidades para hacer patrones, patrones, tarea matemática.*

Abstract

The patterning skills of a set of mathematical tasks designed by pre-service Early Childhood Education teachers are analysed. Using the content analysis technique, 18 tasks developed during a class session of the subject "Didactics of Mathematics" in the third year of Early Childhood Education at a Chilean university were analysed. The results obtained show a variety of patterning skills in the tasks designed, with the skill "extending a repeating pattern" predominating, followed by the skill "copying the pattern". It is concluded that it is necessary to provide training experiences for teachers to enrich the design of tasks by incorporating an increasing level of difficulty according to the age of the children and the progression of patterning skills to promote generalisation: copying, interpolate, extending, abstracting or translating, recognising the unit of repetition and create.

Keywords: *mathematical task, patterns, patterning skills, pre-service teachers, Early Childhood Education.*

INTRODUCCIÓN

El estudio de los patrones matemáticos en las primeras edades ha sido discutido ampliamente en la literatura durante los últimos años, puesto que diversos autores han informado que contribuyen al desarrollo de la representación y la abstracción matemática proporcionando una base crucial para fomentar el pensamiento algebraico en general (Acosta y Alsina, 2021; Papic, 2015) y el pensamiento funcional en particular (Castro et al., 2017).

Pincheira, N., Alsina, Á. y Acosta, Y. (2022). Habilidades para hacer patrones en tareas diseñadas por futuras maestras de educación infantil. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 471-478). SEIEM.

Los currículos contemporáneos de Educación Infantil no han quedado ajenos a esta iniciativa y han asumido la importancia de incorporar los patrones matemáticos de manera progresiva a partir de esta etapa escolar (Pincheira y Alsina, 2021).

Según Rittle-Johnson et al. (2015), el conocimiento de los patrones tiene relación con la capacidad de identificar y utilizar secuencias predecibles. Mulligan y Mitchelmore (2009) señalan que el desarrollo temprano del patrón y una comprensión de su estructura, facilita el rendimiento matemático y promueve el proceso de generalización.

La enseñanza de los patrones comprende una amplia gama de tareas para evaluar y fomentar las habilidades de los niños con la repetición de patrones (Lüken y Sauzet, 2020), que se pueden llevar a cabo con arreglos regulares de elementos, tales como objetos, sonidos o símbolos, en el entorno (Wijns et al., 2019). Desde este prisma, el trabajo con patrones desarrolla una habilidad cognitiva esencial en las matemáticas tempranas, puesto que permite identificar y describir atributos de objetos, así como similitudes y diferencias entre ellos (Papic, 2007).

Lüken y Sauzet (2020) definen las habilidades para hacer patrones como las competencias que se adquieren al desarrollar patrones de repetición. Tales habilidades son un predictor del rendimiento matemático posterior (Rittle-Johnson et al., 2015).

En este contexto, las tareas que propone el profesorado para abordar la enseñanza de los patrones en Educación Infantil son fundamentales, puesto que el aprendizaje de los estudiantes está determinado por el tipo de tarea que se les plantea. En este estudio, asumiremos por tarea matemática la información que impulsa el trabajo con los estudiantes, incluyendo representaciones, contexto, preguntas e instrucciones (Sullivan et al., 2013).

De esta manera, nos focalizamos en el diseño de tareas que realizan las futuras maestras de Educación Infantil sobre patrones, puesto que esta actividad forma parte del desarrollo de la práctica docente para organizar la enseñanza (Wake, 2018). De acuerdo con Liljedahl et al. (2007), el diseño de una tarea matemática constituye un proceso recursivo que implica tanto la creación de tareas completamente nuevas como la adaptación o refinamiento de tareas existentes.

Con base en ello, nos preguntamos ¿qué habilidades para hacer patrones movilizan las tareas diseñadas por futuras maestras de Educación Infantil?

Para dar respuesta a esta pregunta de investigación, nuestro objetivo consiste en analizar las habilidades para hacer patrones de las tareas matemáticas diseñadas por futuras maestras de Educación Infantil. Para ello, nos situaremos desde la categorización de las habilidades para hacer patrones propuestas en la literatura (Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019)

PATRONES MATEMÁTICOS Y HABILIDADES PARA HACER PATRONES

El desarrollo de los patrones es una actividad matemática común para los niños y es un componente central del conocimiento matemático temprano (Rittle-Johnson et al., 2013). La capacidad de observar regularidades es desarrollada por los niños de forma intuitiva desde los primeros años de escolarización (Carpenter et al., 2003; Morales et al., 2015), a través de acciones, comportamientos, representaciones visuales, melodías musicales, entre otros, (Clements y Sarama, 2009). De esta forma, "los patrones constituyen una manera de reconocer, ordenar y organizar los niños su mundo" (NCTM, 2000, p. 95).

Bock et al. (2018) señalan que en Educación Infantil se abordan principalmente los patrones repetitivos que consideran diferentes formas, colores o tamaños. Los patrones de repetición son lineales y tienen una estructura cíclica, por tanto, cualquier elemento desconocido de la secuencia puede predecirse (Mulligan y Mitchelmore, 2009).

En este contexto, existen diferentes tareas que permiten operacionalizar el trabajo con los patrones y desarrollar habilidades. Estas tareas se diferencian de acuerdo a si requieren o no de la comprensión de la estructura o regla subyacente al patrón. Las tareas más comunes son: a) duplicar un patrón, lo que implica una réplica exacta del patrón; b) encontrar elementos faltantes de una secuencia; c) ampliar o continuar el patrón, que significa encontrar el siguiente elemento de una secuencia; d) construir el mismo patrón con diferentes elementos; e) identificar la unidad o núcleo del patrón; e f) inventar un patrón. Las habilidades para hacer patrones que movilizan estas tareas son: copiar, interpolar, extender, abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear, respectivamente (Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019).

El nivel de dificultad entre las tareas es creciente y su aplicación permite que los niños progresen en el desarrollo de sus habilidades para hacer patrones (Clements y Sarama, 2014). De acuerdo con Rittle-Johnson et al. (2013) la habilidad de copiar presenta un bajo nivel de dificultad y es manejable para niños de tres-cuatro años. Le sigue la habilidad de interpolar y extender que es posible de desarrollar de manera exitosa a partir de los cuatro años (Wijns et al., 2019). Las habilidades de traducir, reconocer la unidad de repetición y crear un patrón son las más complejas, sin embargo, son factibles para los niños a partir de los cinco-seis años (Lüken y Sauzet, 2020).

El desarrollo de las tareas de patrones hace posible distinguir entre dos niveles de pensamiento, el recursivo y el funcional (McGarvey, 2012). El tránsito entre el pensamiento recursivo y funcional es un hito importante en el desarrollo de las habilidades para hacer patrones. El pensamiento recursivo atiende sólo a la relación entre elementos consecutivos de un patrón y sólo permite predecir el elemento siguiente de la secuencia; mientras que el pensamiento funcional advierte la estructura subyacente al patrón, permitiendo predecir cualquier elemento de la secuencia (Wijns et al., 2019).

METODOLOGÍA

De acuerdo con el propósito de la investigación, se ha diseñado un estudio cualitativo de carácter descriptivo (Hernández et al., 2010) en el que han participado 18 futuras maestras del tercer año de Educación Infantil que cursaban la asignatura de Didáctica de las Matemáticas en una universidad chilena. La formación de esta asignatura es didáctica y disciplinar sobre álgebra y otros ejes de contenidos. Cabe destacar que las participantes sólo han recibido con anterioridad un curso disciplinar sobre el pensamiento lógico matemático, alcanzado un conocimiento previo sobre las secuencias y los tipos de patrones de repetición, pero no de las tareas y habilidades para hacer patrones.

En el contexto de una sesión de clase de 90 minutos, se propone a las futuras maestras diseñar una tarea matemática que promueva la enseñanza de patrones. Se indica que la tarea debe estar dirigida a niños y niñas de 5-6 años de edad y atender al objetivo del currículo chileno de Educación Parvularia: "Crear patrones sonoros, visuales, gestuales, corporales u otros, de dos o tres elementos" (MINEDUC, 2018, p. 99).

Las tareas diseñadas por las futuras maestras de Educación Infantil constituyen las unidades de análisis el estudio.

Categoría y procedimiento de análisis

Las unidades de análisis se han clasificado de acuerdo con la categorización de las habilidades de para hacer patrones (Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019), como se aprecia en la tabla 1.

El análisis de las tareas se ha realizado utilizando la técnica de análisis de contenido, que establece "un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y la verificación de los contenidos de datos escritos" (Cohen et al., 2011, p. 563), en nuestro caso, las producciones escritas correspondientes a las tareas diseñadas por las futuras maestras en Educación Infantil.

Tabla 1. Categorías e indicadores utilizados en el proceso de codificación (Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019).

Habilidades para hacer patrones	Indicador
Copiar	La tarea requiere duplicar el mismo patrón
Interpolar	La tarea precisa encontrar los elementos faltantes de una secuencia
Extender	La tarea se focaliza en ampliar una secuencia
Traducir	La tarea implica construir un mismo patrón con diferentes materiales
Reconocer la unidad de repetición	La tarea requiere identificar la unidad o núcleo del patrón
Crear	La tarea implica inventar un patrón

La codificación de las tareas matemáticas se ha realizado de acuerdo con las categorías e indicadores antes descritos, asignando puntuaciones en caso de presencia (1 punto) o ausencia (0 punto). Para establecer las habilidades para hacer patrones que movilizan cada tarea matemática se presta especial atención a la instrucción de la tarea y los requerimientos que demanda para ser resuelta.

Por otra parte, las tareas se han analizado aplicando revisiones cíclicas e inductivas. Posteriormente, se ha realizado una triangulación y discutido los desacuerdos de la codificación hasta establecer un consenso.

RESULTADOS

Considerando nuestro objetivo de estudio, se describen los datos obtenidos a partir de las habilidades para hacer patrones (Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019) señaladas en la tabla 1.

Se han analizado un total de 18 tareas matemáticas de patrones. Cabe destacar que una tarea matemática puede atender a más de una habilidad.

La tabla 2 muestra las habilidades para hacer patrones que movilizan las tareas diseñadas por las futuras maestras de Educación Infantil.

Tabla 2. Distribución de las tareas de patrones de acuerdo con las habilidades que movilizan.

Habilidades de para hacer patrones	Frecuencia (%)
Copiar	8 (24.2%)
Interpolar	2 (6.1%)
Extender	13 (39.4%)
Traducir	3 (9.1%)
Reconocer la unidad de repetición	4 (12.1%)
Crear	3 (9.1%)
Total	33(100%)

A nivel general, se observa una concentración mayor de tareas que movilizan la habilidad de extender (39.4%), puesto que son tareas focalizadas en ampliar una secuencia de dos o tres elementos. Una segunda habilidad para hacer patrones que destaca en las tareas es copiar (24.2%), en este caso, las tareas sólo implican duplicar el patrón.

Por último, se observa una menor presencia de tareas que consideran encontrar elementos faltantes en una secuencia, construir un mismo patrón con diferentes elementos, identificar la unidad o núcleo del patrón, e inventar un patrón. Por tanto, las habilidades para hacer patrones de interpolar, traducir, reconocer la unidad de repetición y crear, son las que se desarrollan con menor frecuencia.

Las figuras 1 y 2 muestran ejemplos de tareas matemáticas y las habilidades para hacer patrones que movilizan:

Se presenta una serie de imágenes con caras que representan emociones, por ejemplo:
cara sonriente – cara triste, cara sonriente – cara triste, cara sonriente – cara triste.
Los niños observan las imágenes y luego continúan la secuencia de los patrones gestuales, verbalizando sus respuestas.
Posteriormente, a esta actividad introductoria, se forma un círculo con los niños y niñas, donde observan y describen un patrón de movimiento, por ejemplo, manos en la cabeza, manos en la cintura, manos en las rodillas. En conjunto con la profesora se repiten varias veces los movimientos y al detenerse, se realizan las siguientes preguntas: ¿Qué movimientos debemos hacer para continuar el patrón?, ¿cómo lo saben?
Finalmente, los estudiantes se reúnen en parejas y crean un patrón de movimiento con el cuerpo.
Cada pareja presenta su seriación, al terminar la ronda la profesora pregunta ¿pueden hacer un patrón diferente con los mismos movimientos?, ¿cómo sería?

Figura 1. Tarea matemática Nº 5.

En la primera parte de la tarea matemática, se requiere que los niños y niñas continúen una secuencia con patrones de repetición gestuales de dos elementos (AB). Posteriormente, la tarea demanda ampliar una secuencia con un patrón corporal de tres elementos (ABC). En el desarrollo de ambas seriaciones, se moviliza la habilidad para hacer patrones de extender.

La instrucción final de la tarea implica inventar un patrón de repetición utilizando movimientos corporales. Para inventar un patrón, los niños y niñas deben identificar la unidad de repetición. Por tanto, las habilidades para hacer patrones que se movilizan hacia el término de la tarea son reconocer la unidad de repetición y crear.

Para iniciar la experiencia se observarán patrones en diferentes elementos y los niños dibujarán en su cuaderno:

tela con diseños repetidos

papel de regalo con figuras

En pequeños grupos, observarán una secuencia presentada con policubos a la que le falta un elemento: "cubo rojo-cubo azul- cubo verde", "cubo rojo-cubo azul- cubo verde", "cubo rojo-cubo verde"
Cada grupo comenta la secuencia y reflexionan a partir de preguntas que guiará la educadora durante el desarrollo de la clase:

a) ¿Qué observaron?
b) ¿cómo es esta secuencia?
c) ¿qué podríamos cambiar para mejorar la secuencia?

Completan la secuencia y continúan la serie con los policubos.
Para finalizar la experiencia, los niños pueden crean patrones con este mismo material.

Figura 2. Tarea matemática Nº 14.

Para responder a la primera parte de la tarea, se requiere que los niños y niñas dupliquen los patrones de repetición observados en los distintos materiales, desarrollando la habilidad de copiar.

En una segunda parte, para responder a las preguntas que plantea la maestra, la tarea precisa encontrar el elemento que falta en una secuencia con un patrón de núcleo ABC y posteriormente continuar la serie con el material manipulativo (policubos). En este caso, las habilidades para hacer patrones que se movilizan son interpolar y extender, respectivamente.

Para finalizar la tarea, se promueve la habilidad de crear patrones, puesto que la instrucción plantea inventar un patrón con el material manipulativo. Asimismo, para desarrollar esta instrucción se requiere identificar la unidad de repetición del patrón, movilizando la habilidad de reconocer.

CONSIDERACIONES FINALES

En este estudio se han analizado las habilidades para hacer patrones de un conjunto de 18 tareas matemáticas, diseñadas por futuras maestras chilenas de Educación Infantil para niños de cinco-seis años. Dicho análisis se ha realizado a partir de la categorización de las habilidades para hacer patrones propuesta por Lüken y Sauzet (2020), Rittle-Johnson et al. (2013) y Wijns et al. (2019).

El análisis de las tareas matemáticas ha permitido evidenciar que, para promover la enseñanza de patrones, las futuras maestras de Educación Infantil diseñan principalmente tareas que requieren ampliar una secuencia de dos o tres elementos, movilizando la habilidad de extender, seguidas de tareas que requieren duplicar el mismo patrón, desarrollando la habilidad de copiar. Considerando que estas habilidades son manejables para niños de tres-cuatro años (Rittle-Johnson et al., 2013), es inquietante encontrar una menor cantidad de tareas que movilicen habilidades para hacer patrones tales como, traducir, reconocer la unidad de repetición y crear, factibles de desarrollar para niños a partir de los cinco-seis años (Lüken y Sauzet 2020).

Rittle-Johnson et al. (2013) afirma que el desarrollo de las habilidades de copiar y extender ayuda a hacer coincidir los elementos nuevos con los elementos existentes en el modelo del patrón y secuenciarlos correctamente, impulsando de esta forma, el pensamiento recursivo (McGarvey, 2012). Sin embargo, es necesario que los maestros consideren el desarrollo de tareas más complejas como identificar la unidad de repetición y crear patrones, puesto que permiten transitar hacia el desarrollo del pensamiento funcional (Wijns et al., 2019).

Los resultados de nuestro estudio reportan semejanzas con otras investigaciones (e.g., Tirosh et al., 2017) en relación con la enseñanza de los patrones. Así, se confirma que las tareas propuestas por los maestros de Educación Infantil demandan principalmente la aplicación de la estrategia de alternancia con los elementos del patrón, en lugar de identificar la estructura o regla subyacente al patrón (Lynn, 2012).

Threlfall (2005) señala que comprender la unidad de repetición de una secuencia es un paso crucial para el desarrollo matemático de los niños. No obstante, identificar la unidad de repetición puede resultar una de las tareas más difíciles, incluso para niños de Educación Primaria (Warren y Cooper, 2007).

En esta línea, Mulligan (2013) señala que es importante que los maestros implementen experiencias de aprendizaje apropiadas para promover la conciencia de los patrones. Por tanto, consideramos que es necesario brindar experiencias de formación al profesorado que permitan enriquecer el diseño de tareas matemáticas vinculadas con el estudio de los patrones, incorporando un nivel de dificultad creciente de acuerdo a la edad de los niños que están dirigidas las tareas y la progresión de las habilidades de para hacer patrones. Esto último, contribuirá al desarrollo del proceso de generalización que, de acuerdo con Papic et al. (2011), ocurre cuando es posible determinar que el patrón tiene una unidad que se repite cíclicamente y reconocer su estructura.

Respecto de las limitaciones del estudio, en primer lugar, cabe señalar que las conclusiones obtenidas no son generalizables debido al número de participantes y, en segundo lugar, se limitan a una edad (5-6 años). En futuras investigaciones, pues, será necesario: a) ampliar el tamaño de la muestra; b) indagar en las tareas sobre patrones que diseñan los futuros maestros de Educación Infantil para niños de 4 a 5 años y las habilidades para hacer patrones que estas movilizan y c) analizar como se lleva a cabo la implementación de dichas tareas.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N° 72200447 y el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España en el marco de la beca de Formación del Profesorado Universitario (FPU16-01856).

Referencias

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2021). Aprendiendo patrones en Educación Infantil: ¿Cómo influye el contexto de enseñanza? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 101-108). SEIEM.

Bock, A. M., Cartwright, K. B., McKnight, P. E., Patterson, A. B., Shriver, A. G., Leaf, B. M., Mohtasham, M. K., Vennergrund, K. C. y Pasnak, R. (2018). Patterning, Reading, and Executive Functions. *Frontiers in Psychology*, *9*, 1802. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01802

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school. Heinemann.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6*(2), 1-13.

Clements D. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

Clements, D. y Sarama, J. (2014). Other content domains. En D. Clements y J. Sarama (Eds.), *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (pp. 214–229). Routledge.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Routledge.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. 5. Ed.: McGraw-Hill Interamericana.

Liljedahl, P., Chernoff, E. y Zazkis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: A tale of one task. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 239-249. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9047-7

Lüken, M. y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 28-48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452

Lynn, M. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. Mathematical Thinking and Learning, *14*(4), 310-337. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.717380

McGarvey, L. M. (2012). What Is a Pattern? Criteria Used by Teachers and Young Children. *Mathematical Thinking and Learning, 14*, 310-337. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.717380

MINEDUC (2018). *Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

Morales R., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Construcción de seriaciones en Educación Primaria: Un estudio de caso. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 401-411). SEIEM.

Mulligan, J. (2013). Reconceptualizing early mathematics learning. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* , *1*, 139-142. PME.

Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M.C. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* NCTM

Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children-more than just alternating colors! *Australian Primary Mathematics Classroom*, *12*, 8-12.

Papic, M. M. (2015). An early mathematical patterning assessment: Identifying young Australian Indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal, 27*(4), 519-534.

Papic, M. M., Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*, 237-268. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática, 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E. y McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 14*(3), 376–396. http://dx.doi.org/10.1080/15248372.2012. 689897

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Loehr, A. M. y Miller, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly*, *31*, 101-112. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.01.005

Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. Springer Science & Business Media.

Threlfall, J. (2005). Repeating patterns in the early primary years. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18–30). Continuum.

Tirosh, D., Tsamir, P., Barkai, R. y Levenson, E. (2017). Preschool teachers' variations when implementing a patterning task. *Paper presented at the 10th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 1917-1924). CERME.

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B. y Verschaffel, L. (2019). Young children's patterning competencies and mathematical development: A review. En K. Robinson, H. Osana y D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (pp. 139–161). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1 9

Wake, G. C. (2018). A case study of theory-informed task design: what might we, as designers, learn? En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 94-109). SEIEM.

Warren, E. y Cooper, T. (2007). Repeating patterns and multiplicative thinking: Analysis of classroom interactions with 9-year-old students that support the transition from the known to the novel. *The Journal of Classroom Interaction Research Library, 4142*(7), 7–17.

RETOS DE ALUMNOS DE 11-15 AÑOS EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ÁNGULO: UNA REVISIÓN DE LITERATURA PARA DISEÑAR TAREAS PROFESIONALES

11-15-year-old students' challenges in the learning of the angle concept: A literature review to design professional tasks

Rave-Agudelo, J. y Planas, N.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Este estudio se enmarca en una investigación más amplia orientada a diseñar, implementar y evaluar un taller con profesores de matemáticas de secundaria sobre el discurso en la enseñanza del ángulo. El objetivo preliminar es identificar retos comunes en el aprendizaje de este concepto documentados para alumnos en la transición de la primaria a la secundaria y en la secundaria, con edades aproximadas entre 11 y 15 años. Nuestra revisión de literatura empírica sobre el aprendizaje de ángulos indica la prevalencia de tres retos en el aprendizaje: la participación en el discurso del ángulo al resolver tareas matemáticas, la concepción estática del ángulo y la reducción del ángulo a su medida. Hemos iniciado el diseño de tareas profesionales para el trabajo con profesores sobre vocabulario, explicaciones y ejemplos gráficos en la enseñanza del ángulo con potencial para contribuir a minimizar o superar los retos identificados en la literatura.

Palabras clave: *alumnos en la transición de primaria a secundaria y en secundaria, concepto de ángulo, retos de aprendizaje, diseño de tareas profesionales, revisión de literatura.*

Abstract

This study is framed within a broader investigation aimed at designing, implementing and assessing a workshop with secondary school mathematics teachers on the angle discourse in teaching. The preparatory objective is to identify common challenges in the learning of this concept documented for learners in the transition from primary to secondary and in the secondary, whose ages tend to vary from 11 to 15 years old. Our review of empirical literature about the learning of angles shows the prevalence of three learning challenges: the participation in the angle discourse to solve mathematical tasks, the static conception of the angle, and the reduction of the angle to its measure. We have started the design of professional tasks for developmental work with teachers around vocabulary, explanations and graphical examples in the teaching of angles with potential to contribute to either minimizing or overcoming the challenges identified in the literature.

Keywords: *learners in the primary-secondary transition and in the secondary school, angle concept, learning challenges, design of professional tasks, literature review.*

CONTEXTO DEL ESTUDIO

Este estudio responde a la etapa inicial de una investigación sobre mirar profesionalmente el recurso del discurso en la enseñanza de ángulos en aulas de educación secundaria (ver, e.g., Boukafri y

Rave-Agudelo, J. y Planas, N. (2022). Retos de alumnos de 11-15 años en el aprendizaje del concepto de ángulo: una revisión de literatura para diseñar tareas profesionales. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 479-487). SEIEM.

Planas, 2018, para un estudio sobre el discurso en la enseñanza de matemáticas en aulas de secundaria con otros contenidos curriculares). En la siguiente etapa, que ya se ha iniciado, pretendemos diseñar tareas para trabajar con profesores este aspecto de su mirada profesional. El objetivo preparatorio ha sido identificar, en la literatura especializada, retos comunes en el aprendizaje escolar del concepto de ángulo que el profesor de matemáticas debe conocer y considerar en su práctica de enseñanza, y que están siendo el punto de partida en la elaboración de las tareas profesionales. Si bien la investigación sobre el aprendizaje del concepto de ángulo con alumnos de primaria es extensa, con alumnos de secundaria es en comparación escasa (Hardison, 2018). La decisión de realizar una revisión de la literatura ha de permitir que los retos de aprendizaje que explicaremos a los profesores puedan ser pensados como retos comunes en sus aulas de secundaria. Dicho esto, consideramos relevante incluir las últimas edades de las etapas de primaria, a pesar de variar ligeramente según el sistema educativo, por ser representativas de retos de aprendizaje que persisten en las primeras edades de las etapas de secundaria.

A fin de realizar una revisión de la literatura que permitiera resumir evidencias científicas sobre retos en el aprendizaje del concepto de ángulo en la etapa de secundaria y en la transición de la primaria a la secundaria (con edades aproximadas entre 11 y 15 años), hemos aplicado criterios y procedimientos recomendados por Siddaway et al. (2019), en torno a los procesos de identificación, cribado, elección e inclusión de estudios. Además, hemos consultado otros trabajos en educación matemática que han utilizado criterios y procedimientos similares en sus revisiones de literatura (e.g., Santagata et al., 2021). La pregunta que ha guiado nuestra revisión es la siguiente: *¿Con qué retos se acostumbran a enfrentar los alumnos ya sea en secundaria o en la transición de la primaria a la secundaria durante su aprendizaje del concepto de ángulo?* Tras explicar el proceso de revisión seguido y los resultados obtenidos, acabamos con comentarios sobre el diseño de las tareas profesionales, para lo cual nos preguntamos: *¿Qué vocabulario, explicaciones y ejemplos gráficos del discurso matemático pueden ser útiles en el trabajo con profesores orientado a una enseñanza que apoye a los alumnos en la minimización o superación de los retos identificados?*

PROCEDIMIENTOS PARA UNA REVISIÓN DE LITERATURA

En nuestra revisión hemos utilizado criterios de una guía para conducir y reportar revisiones de literatura narrativas, meta-análisis y meta-síntesis (Siddaway et al., 2019), especialmente los referidos a cómo decidir y documentar de manera transparente qué se hace, cómo y para qué, por un lado, y qué se encuentra y para qué se utiliza, por otro. Tras priorizar algunos criterios en la lista recomendada por la guía, hemos establecido procedimientos que no pretenden abarcar o rastrear 'todos' los estudios sobre el aprendizaje del concepto de ángulo con alumnos en la etapa de secundaria y en la transición de la primaria a la secundaria llevados a cabo en el contexto de distintos sistemas educativos. Dado el objetivo último de presentar, a los profesores de matemáticas con los que trabajaremos, retos comunes en alumnos de estas edades en distintos países, buscamos documentar retos que no parezcan ni sean específicos o únicos de un aula o de una pedagogía o propuesta didáctica en particular. De este modo, tendrá sentido discutir acerca de usos del discurso del profesor en la enseñanza de ángulos con base en las complejidades epistémicas, didácticas, semánticas, cognitivas... intrínsecas a la comprensión del concepto de ángulo.

Procedimiento de selección de publicaciones

Para la selección de publicaciones, donde indagar acerca de retos comunes en el aprendizaje del concepto de ángulo, nos inspiramos en las fases de Siddaway et al. (2019). Dado que queremos documentar retos hallados en distintos países y contextos pedagógicos y didácticos, tomamos como fuentes dos bases internacionales de datos: *Web of Science* (*WoS*) y *Scopus*, consultadas entre enero y marzo de 2022. Generamos cadenas de búsqueda a partir de palabras en inglés para *ángulo*, *reto*, *alumno*, *matemáticas* y *aprendizaje*, en combinación con otras expresiones con significados no iguales pero similares en distintas tradiciones en educación matemática (e.g., *challenge, difficulty, obstacle, gap*). No distinguimos año de publicación para no perder posibles registros pertinentes a nivel de contenido. En WoS, por ejemplo, la búsqueda se realizó por TOPIC (tema) mediante la cadena *(TS=(angle* OR "concept of angle" OR "angle concept") AND TS=(difficult* OR challenge* OR bias* OR gap* OR obstacle* OR disabilit* OR misconception*) AND TS=(student* OR learner* OR pupil* OR "high school" OR secondary OR young) AND TS=(mathematic* OR geometr*) AND TS=(learning))*. Se identificaron 120 registros, 55 en *WoS* y 65 en *Scopus*. Intencionadamente, no marcamos *primary* or *primary school*, a sabiendas de que podíamos perder algunos registros con datos de alumnos en las edades de la transición a la primaria, para no identificar cientos de artículos con alumnos en las edades más tempranas de la primaria.

La fase de cribado consistió en la lectura del título de cada registro a fin de descartar registros duplicados, y también las producciones que no estuvieran en castellano o en inglés porque con otras lenguas no hubiéramos tenido acceso directo a la información. Así se excluyeron tres registros en portugués y ruso y hasta 25 registros duplicados. Esta fase terminó con 92 registros. Las fases de idoneidad y de inclusión supusieron la lectura del resumen de las publicaciones seleccionadas. Se excluyeron 71 publicaciones por no reportar estudios con datos sobre el aprendizaje del concepto de ángulo y 13 por no referirse a alumnos con edades en el intervalo 11-15. En algunos casos, fue necesaria la lectura completa de la publicación porque los resúmenes no aportaban el detalle de la situación empírica y de los participantes. Finalmente, llegamos a ocho registros indexados (marcados con asterisco en la lista de referencias de esta comunicación), con resultados de estudios empíricos en distintos países sobre el aprendizaje del concepto de ángulo de alumnos entre 11 y 15 años.

Métodos de análisis de las publicaciones

Las ocho publicaciones seleccionadas se leyeron y examinaron con métodos de análisis cualitativo y cuantitativo del contenido (Krippendorff, 1990). A nivel cualitativo, el análisis tuvo dos momentos y generó dos conjuntos de resultados en torno a unidades empíricas (sobre el aprendizaje del concepto de ángulo con alumnos de 11-15 años) y a unidades teóricas (sobre la naturaleza del concepto de ángulo y/o aspectos vinculados a su enseñanza). Las unidades de contenido empírico se crearon para que informaran sobre los participantes, la tarea asignada y resultados para cada estudio documentado. Estas unidades no corresponden necesariamente a un texto continuo en la publicación. Lo mismo ocurre con las unidades de contenido teórico, que se crearon para que informaran sobre fundamentos teóricos respecto al concepto de ángulo o a su enseñanza para cada estudio. La lectura de las publicaciones mostró resultados empíricos de carácter incremental ya que confirman resultados señalados por otros autores o por el mismo equipo en estudios previos que nuestro procedimiento no rastreó. A nivel cuantitativo, se contaron las frecuencias de aparición de los dos tipos de unidades y, más tarde, se examinó la distribución de frecuencias de acuerdo a subunidades de contenido para destacar temas conectados empírica o teóricamente. Siguen unidades de contenido para ambos tipos:

i) Ejemplos de unidades de contenido empírico (CE) (total 250):

- CE1. "In the playground, an opaque screen and a chair may be placed. While one student sits in the chair, the others stay on other side of the opaque screen with their school bags arranged in a way that the student in the chair cannot see any of them. One by one, students holding their bags may be asked to move sideways and put their bag on the ground as soon as they can be observed by the student sitting in the chair ... students may be asked to identify the created geometric shape and its features ... students will be able to visualize the angle concept" (Bütüner y Filiz, 2017, pp. 550-551).

- CE2. "Nine girls and four boys in seventh grade constitute the ... informants, while the entire class consisted of 18 students … the students' drawn mathematising of climbing from the end of day two … The angles in his explanation are categorised into angle as static shape. He applies angles as a tool in a climbing context" (Fyhn, 2008, pp. 24, 28).
- CE3. "The study was conducted with two volunteer students … [student] was asked to measure an angle, he tried to measure it with his fingers … but he did not continue, and said I forgot… doing so by having a length measurement in mind can lead to the opinion that he answered without thinking" (Güven-Akdeniz et al., 2022, pp. 108, 113).

ii) Ejemplos de unidades de contenido teórico (CT) (total 180):

- CT1. "By making students have high-level geometric thinking skills in the 2006 curriculum for junior high school units, geometry has a charge of about 42% of the entire content of mathematical material viewed according to competency standards" (Annisa et al., 2018, p. 1).
- CT2. "Static definition refers to an intersection of two rays at the same end point looking like the opening of a pair of scissors … On the other hand, the dynamic definition specifies the angle as a rotation referring to change in direction" (Bütüner y Filiz, 2017, p. 534).
- CT3. "Other authors have preferred to base their classifications on physical properties of angle, noting in particular the difference between dynamic (involving movement) and static (configurational) aspects of the concept" (Mitchelmore y White, 2000, p. 209).
- CT4. "Since reflex angles ... are met and studied at the primary and secondary levels, the geometric figure 'angle' cannot be defined as the union of two half-lines sharing their endpoint, without facing the problem of a figure having two different measurement" (Tanguay y Venant, 2016, p. 876).

RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LAS PUBLICACIONES

Aquí mostramos consideraciones empíricas y teóricas halladas en las publicaciones. Del total de unidades de contenidos teóricos y empíricos, presentamos a modo de temas las consideraciones que aparecen en más de una unidad y en más de una publicación. Estos temas se han delimitado de manera inductiva a partir de la comparación y asociación entre unidades. Por ejemplo, en varias unidades de contenido empírico se han detectado datos y resultados sobre las tareas matemáticas de aula diseñadas y experimentadas en la enseñanza de ángulos. En otras unidades de este tipo, se han detectado datos y resultados sobre procesos de aprendizaje del concepto de ángulo, ya sea relativos a la dificultad por comprender distintos significados de ángulos o a confusiones del concepto con alguna de sus partes. Dado el método de construcción de unidades con contenidos no excluyentes, en una unidad podemos encontrar el tema de las tareas matemáticas y uno o los dos temas sobre aprendizaje.

Consideraciones empíricas sobre el aprendizaje del concepto de ángulo

Para unidades de contenido empírico en más de una publicación, hemos hallado consideraciones explícitas sobre el aprendizaje del concepto de ángulo en las edades de secundaria o en la transición de la primaria a la secundaria, que apuntan a distintos niveles o perfiles de comprensión y de participación en la construcción del discurso matemático asociado a este concepto. Esto nos ha llevado a generar subunidades de contenido empírico que agrupan consideraciones acerca de tres temas interrelacionados (se puede observar que la suma de frecuencias de las subunidades no coincide con la frecuencia del tipo de unidad de contenido empírico):

Participación en el discurso del ángulo al resolver tareas matemáticas

[CE1, total 89] La investigación especializada que hemos revisado señala la posibilidad de desarrollar distintos significados matemáticos para el concepto de ángulo al participar en la resolución de tareas con situaciones físicas que modelan configuraciones estáticas y en movimiento de ángulos (Mitchelmore, 1998; Mitchelmore y White, 2000). La relación con situaciones físicas permite reconocer y aplicar el concepto matemático de manera práctica, además de establecer similitudes entre situaciones y entre significados (Bütüner y Filiz, 2017). La resolución de algunas tareas de medida y de operaciones con ángulos favorece el reconocimiento y la manipulación del concepto (Özen-Ünal y Ürün, 2021; Tanguay y Venant, 2016).

Comprensión conceptual del ángulo como objeto estático y como giro

[CE2, total 101] La investigación revisada pone de relieve el sesgo hacia la concepción estática del ángulo, mientras que el ángulo como giro es un significado matemático que los alumnos no acostumbran a pensar de manera espontánea o que directamente no relacionan con otros significados matemáticos del concepto (Mitchelmore, 1998). Además, las definiciones comunes en libros de texto y en el discurso del profesor en la enseñanza de ángulos favorecen el desarrollo de una concepción estática (Özen-Ünal y Ürün, 2021). La dificultad para pensar el ángulo como giro parece a la vez generar dificultades para pensar medidas de ángulos que son superiores a 360º (Güven-Akdeniz et al., 2022) o con valores negativos (Fyhn, 2008), e incluso, para comprender el ángulo nulo y el ángulo llano (Bütüner y Filiz, 2017). Esta distinción entre aspectos estáticos y dinámicos del ángulo justifican el uso constante de definiciones y ejemplificaciones relacionadas con el concepto de ángulo como forma, figura, intersección, inclinación, área, giro o medida (Fyhn, 2008; Tanguay y Venant, 2016).

Confusión entre el ángulo, su valor de medida y su unidad de medida

[CE3, total 103] La investigación revisada muestra la prevalencia en alumnos de entre 11 y 15 años del sesgo hacia la definición y la caracterización del ángulo a partir de la medida (Fyhn, 2008). Se tiene dificultad para distinguir entre el ángulo como figura y el ángulo como número (Tanguay y Venant, 2016), o bien para distinguirlo de las unidades de medida, donde prevalece el uso de la unidad grado sobre la comprensión de la unidad radián (Tanguay y Venant, 2016). También, existe dificultad para referirse a los ángulos sin los valores numéricos de sus medidas (Fyhn, 2008). Esto lleva a reducir la clasificación de los tipos de ángulo a su medida por delante de otras cualidades y clases de equivalencia (Fyhn, 2008; Tanguay y Venant, 2016). Los alumnos no acostumbran a comprender cuál es la magnitud que se mide cuando se habla de la medida de un ángulo (Özen-Ünal y Ürün, 2021), por lo que algunos confunden la medida de la amplitud con la medida de la longitud de los lados (Tanguay y Venant, 2016), o incluso con la medida de la longitud del arco marcado en su representación (Bütüner y Filiz, 2017).

Consideraciones teóricas sobre el concepto de ángulo y/o su enseñanza

En unidades de contenido teórico en más de una publicación, hemos hallado consideraciones explícitas acerca del concepto de ángulo o de aspectos sobre su enseñanza, en el marco de distintas tradiciones teóricas y con distintos énfasis. Una vez más, esto nos ha llevado a generar subunidades de contenido, que agrupan consideraciones acerca de cuatro temas nuevamente interrelacionados entre ellos tal como sugiere la suma de frecuencias de estas subunidades:

Relevancia curricular

[CT1, total 39] La investigación revisada señala que la presencia del concepto de ángulo se justifica en varios currículos de educación secundaria por su conexión con situaciones físicas, figuras planas y mediciones (Annisa et al., 2018), y por la contribución del trabajo en torno a ángulos al desarrollo del pensamiento geométrico y a la comprensión de conceptos matemáticos avanzados más allá del hecho de nombrar figuras (Fyhn, 2008). La presencia del concepto en los currículos institucionales se traduce en una presencia clara en los materiales de enseñanza habituales, en particular al presentar las definiciones, explicaciones, representaciones y ejemplos de naturaleza estandarizada proporcionados en los libros de texto (Bütüner y Filiz, 2017).

Complejidad epistémica

[CT2, total 79] La investigación revisada indaga formas de conocer y abstraer el concepto de ángulo a partir de situaciones estáticas y dinámicas (Mitchelmore y White, 2000) y de manera indirecta con situaciones de medición de rotaciones y de regiones en el plano o en el espacio (Annisa et al., 2018; Özen-Ünal y Ürün, 2021; Tanguay y Venant, 2016). Se destaca el papel problemático de las definiciones de ángulo en el acceso al conocimiento del concepto, atendiendo a su presentación en los libros de texto y otros materiales de enseñanza y a su representación en el discurso del profesor en clase. Ni histórica ni pedagógicamente se acostumbra a relacionar definiciones de ángulos, ni a discutirse o problematizarse estas definiciones (Özen-Ünal y Ürün, 2021), cuya utilización se decide según el contexto curricular y un conjunto estandarizado de representaciones (Fyhn, 2008).

Complejidad semántica

[CT3, total 48] La investigación revisada alude a la diversidad de significados matemáticos vinculados al nombre (en distintas lenguas) para el concepto de ángulo, con un campo semántico amplio en torno a situaciones físicas y abstractas (Mitchelmore y White, 2000; Özen-Ünal y Ürün, 2021), además de otros significados cotidianos externos al registro matemático (Fyhn, 2008). Varios autores han discutido la polisemia del nombre con respecto a los significados matemáticos, entre ellos: cantidad de giro alrededor de un punto desde una línea hasta otra, par de semirrectas con un punto en común, región formada por la intersección de dos semiplanos e inclinación de una línea en el plano con respecto de otra (Mitchelmore, 1998; Mitchelmore y White, 2000).

Complejidad cognitiva

[CT4, total 96] La investigación revisada muestra alumnos de entre 11 y 15 años que asocian el concepto de ángulo con representaciones gráficas estáticas en las que los lados del ángulo están dibujados, pero no reconocen el concepto en otras representaciones gráficas menos estandarizadas o en representaciones dinámicas, entre otras dificultades de naturaleza cognitiva (Mitchelmore, 1998). Los procesos de comprensión del concepto de ángulo requieren un desarrollo cognitivo que, por lo general, se prolonga hasta la etapa avanzada de secundaria, e incluso hasta la educación universitaria donde los alumnos deben enfrentarse a nuevas interpretaciones del ángulo y su medida para el estudio de la trigonometría, el cálculo vectorial o la física (Annisa et al., 2018; Fyhn, 2008).

DISCUSIÓN DE LOS TEMAS PARA EL DISEÑO DE TAREAS PROFESIONALES

Una vez identificados temas de naturaleza empírica y teórica en la literatura seleccionada sobre el aprendizaje del concepto de ángulo con alumnos de entre 11 y 15 años aproximadamente, nuestra discusión conjunta de estos temas ha estado guiada por la finalidad última del estudio preliminar: disponer de un conocimiento fundamentado en la literatura especializada sobre retos en el aprendizaje del concepto de ángulo en estas edades, que los profesores de matemáticas deben tener en cuenta en su enseñanza y que nosotros les presentaremos como punto de partida en el taller con ellos. Hemos decidido que los tres temas empíricos sobre la participación en el discurso del ángulo al resolver tareas matemáticas y sobre los sesgos en el aprendizaje son, por si mismos, tres retos en el aprendizaje del concepto de ángulo que fundamentarán el diseño de las tareas profesionales a implementar en el trabajo con profesores de secundaria. Estos tres temas se relacionan de distintas maneras entre ellos y con los temas teóricos, los cuales, a su vez, también están sirviendo para diseñar las tareas profesionales. Ahora que sabemos tres retos importantes que los alumnos en la secundaria y en la transición de la primaria a la secundaria enfrentan en su aprendizaje del concepto de ángulo, nos planteamos qué vocabulario, qué explicaciones y qué ejemplos gráficos son útiles en el discurso del profesor cuando enseña ángulos en las clases de secundaria obligatoria.

Junto con los tres aspectos del discurso que priorizamos (vocabulario, explicaciones y ejemplos gráficos) y de acuerdo con los resultados de nuestra revisión, vemos importante diseñar tareas profesionales que relacionen estos aspectos del discurso en la enseñanza en el contexto de tareas matemáticas interesantes en el sentido de promover la comprensión del concepto de ángulo desde su complejidad epistémica, semántica y cognitiva. Por un lado, la superación del sesgo hacia la concepción estática del ángulo conlleva una demanda cognitiva importante asociada a las complejidades epistémica y semántica que son inherentes al concepto y que deben explicarse en la enseñanza. Por otro lado, la superación de la confusión entre el ángulo y la medida de su amplitud vuelve a conllevar una demanda cognitiva importante igualmente asociada a cuestiones de complejidad epistémica y semántica que deben nombrarse y explicarse mediante una diversidad de representaciones. Ambos sesgos pueden trabajarse desde la enseñanza mediante la resolución de tareas matemáticas que contribuyan a que los alumnos reconozcan los significados matemáticos para el concepto de ángulo y sus conexiones con otros conceptos matemáticos.

Así pues, una enseñanza del concepto de ángulo que apoye a los alumnos en el reconocimiento y la superación de los retos identificados en edades de 11 a 15 años, será una enseñanza que apoye el desarrollo de su participación en el discurso del ángulo mediante:

i) La resolución de tareas específicas en torno a:

- Significados no estáticos del concepto de ángulo.
- Cualidades no mensurables del ángulo.

ii) La exposición al discurso matemático del profesor con:

- Explicaciones de significados y cualidades del concepto de ángulo.
- Ejemplos gráficos no estandarizados de ángulos.

Con esta base, estamos diseñando los documentos teóricos y prácticos para el taller con un grupo de seis profesores de matemáticas en un centro público de secundaria. En otoño de 2022, el taller se iniciará con una presentación del reto general de lograr una enseñanza del concepto de ángulo en la que los alumnos participen por ellos mismos en la construcción del discurso matemático durante la resolución de tareas con el potencial de comunicar significados no estáticos para el concepto de ángulo y cualidades distintas a la medida. En los documentos teóricos, se proporcionarán contextos con tareas matemáticas y se ilustrará vocabulario, explicaciones y ejemplos gráficos que se podrían dar en clase a fin de promover la minimización o superación de los dos sesgos específicos identificados en nuestra revisión. En los documentos prácticos, se proporcionarán otros contextos con tareas matemáticas y conversaciones de aulas de secundaria en torno al concepto de ángulo. Aquí, las tareas profesionales buscarán que los profesores:

- Identifiquen significados matemáticos de ángulo que se comunican mediante vocabulario, explicaciones y ejemplos gráficos proporcionados a los alumnos durante su participación en la resolución de tareas matemáticas.
- Interpreten riesgos potenciales, en el conjunto de vocabulario, explicaciones y ejemplos gráficos utilizados por el profesor, de fomentar el sesgo hacia la concepción estática del ángulo y la confusión entre el ángulo y su medida.
- Decidan, para vocabulario, explicaciones, ejemplos gráficos y eventualmente tareas matemáticas, modificaciones o ampliaciones que permitan comunicar también significados dinámicos y no métricos del ángulo.

Esperamos compartir las tareas profesionales y los resultados de su implementación en el taller con profesores en futuras ediciones más adelante. En Alfonso (2022) se pueden consultar tareas profesionales y resultados de un taller con profesores de matemáticas en torno al discurso en la enseñanza de la probabilidad, con atención a la facilitación de tareas matemáticas, vocabulario, explicaciones y ejemplos para la superación de los sesgos de equiprobabilidad y de representatividad (ver Planas et al., 2022, para el proyecto de referencia). Somos conscientes de que una revisión de la literatura con otros procedimientos, métodos y decisiones nos podría haber llevado a la identificación de retos distintos o de otros retos igualmente relevantes a los seleccionados para el trabajo con los profesores. Del mismo modo que en el aprendizaje de la probabilidad se ven involucrados otros retos además del sesgo de equiprobabilidad y el de representatividad. Ahora bien, creemos que los retos finalmente destacados y que están guiando el diseño de las tareas profesionales, si bien no son los únicos que se deben atender, son de suma importancia en las edades aquí consideradas, tal como revela la evidencia de la investigación revisada sobre el aprendizaje del concepto de ángulo.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco del Programa de Doctorado en Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona.

PID2019-104964GB-100 y PRE2020-094574, MICINN. Grupo GIPEAM, Govern de Catalunya.

Referenicas

Alfonso, J. M. (2022). *Aprendre a mirar professionalment la llengua en l'ensenyament de la probabilittat.* Trabajo de Tesis de Maestría. Universitat Autònoma de Barcelona.

Annisa, A. M., Suryadi, D. y Rosjanuardi, R. (2018). Design development of determinant lines materials and angles on math learning for junior high school. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research, 160*, 1-9. https://doi.org/10.2991/incomed-17.2018.1

Boukafri, K. y Planas, N. (2018). *Métodos para el análisis de la lengua del profesor de matemáticas en clase*. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 171-180). SEIEM

Bütüner, S. Ö. y Filiz, M. (2017). Exploring high-achieving sixth grade students' erroneous answers and misconceptions on the angle concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(4), 533-554. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1256444

Fyhn, A. B. (2008). A climbing class' reinvention of angles. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(1), 19-35. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9087-z

Güven-Akdeniz, D., Gürefe, N. y Arikan, A. (2022). Angle conceptions of students with learning disabilities and hearing impairments. *Hacettepe University Journal of Education*, *37*(1), 106-124. http://doi.org/ 10.16986/huje.2020064476

Hardison, H. L. (2018). *Investigating high school students' understandings of angle measure.* Tesis Doctoral. University of Georgia.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: Teoría y práctica* (Trad. L. Wolfson). Paidós.

Mitchelmore, M. C. (1998). Young students' concepts of turning and angle. *Cognition and Instruction*, *16*(3), 265-284. https://doi.org/10.1207/s1532690xci1603_2

Mitchelmore, M. C. y White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(3), 209-238. https://doi.org/10.1023/A:1003927811079

Özen-Ünal, D. y Ürün, O. (2021). Sixth grade students' some difficulties and misconceptions on angle concept. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, *27*, 125-154. https://doi.org/10.14689/enad.27.7

Planas, N., Alfonso, J. M. y Rave-Agudelo, J. (2022). Initiating a project for language-and-learner responsiveness in mathematics content teaching. En C. Fernández, S. Llinares, Á. Gutiérrez y N. Planas (Eds.), *Proceedings of PME45* (Vol. 3). PME.

Santagata, R., König, J., Scheiner, T., Nguyen, H., Adleff, A. K., Yang, X. y Kaiser, G. (2021). Mathematics teacher learning to notice: A systematic review of studies of video-based programs. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(1), 119-134. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01216-z

Siddaway, A. P., Wood, A. M. y Hedges, L. V. (2019). How to do a systematic review: A best practice guide for conducting and reporting narrative reviews, meta-analyses, and meta-syntheses. *Annual Review of Psychology*, *70*, 747-770. https://doi.org/10.1146/annurev-psych-010418-102803

Tanguay, D. y Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. *ZDM–Mathematics Education*, *48*(6), 875-894. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0789-5

¿CUÁL ES EL "CONTENIDO" DE LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES QUE ENSEÑARÁN MATEMÁTICA? CONCEPCIONES DE FORMADORES

What is the "content" of the initial training of teachers who will teach mathematics? Conceptions of teacher educators

Reyes-Bravo, M., Estrella, S. y Tarisfeño-Vásquez, S.

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen

La investigación indaga en las concepciones de un grupo de formadores de profesores que enseñarán matemática en primaria, acerca de cuál es el contenido de la formación inicial de profesores. El estudio exploratorio, bajo el paradigma cualitativo, aplicó un cuestionario online de preguntas abiertas, y a través del análisis de contenido se categorizaron las respuestas a una de las preguntas que cumple con el objetivo de este estudio. Como resultado se observa una tendencia a privilegiar el conocimiento matemático frente a otros elementos que pudiesen constituir el contenido de la formación inicial, en desmedro del conocimiento sobre prácticas de enseñanza e identidad profesional.

Palabras clave: *formador de profesores, contenido de la formación inicial de profesores, conocimiento profesional, prácticas profesionales, identidad profesional.*

Abstract

The research inquires into the conceptions of a group of teacher educators who will teach mathematics in elementary school, specifically about what is the content of initial teacher education. It is an exploratory study, under the qualitative paradigm, in which an online questionnaire of open questions was applied, and through content analysis the answers to one of the questions that meets the objective of this study were categorized. As a result, there is a tendency to privilege mathematical knowledge over other elements that could constitute the content of initial training, to the detriment of knowledge about teaching practices and professional identity.

Keywords: *teacher educator, content of initial teacher education, professional knowledge, professional practices, professional identity.*

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre profesores de matemática en formación y en ejercicio se ha desarrollado fuertemente, elaborándose enfoques específicos para comprender sus conocimientos (Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018; Rowland, 2005) y sus prácticas, como el desarrollo de la mirada profesional (p.ej., Llinares et al., 2019). Sin embargo, la investigación sobre el formador de profesores de matemática ha sido escasa (Beswick y Goos, 2018).

El estudio de UNESCO (2012) aborda las políticas docentes de los países de América Latina y el Caribe, y presenta recomendaciones generales para la formación inicial de profesores, indicando que, para

Reyes-Bravo, M., Estrella, S. y Tarisfeño-Vásquez, S. (2022). ¿Cuál es el "contenido" de la formación inicial de profesores que enseñarán matemática? Concepciones de formadores. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 489-497). SEIEM.

robustecerla, uno de los puntos clave es la calidad de los formadores, haciendo un llamado a contribuir en investigación a nivel regional.

Casi una década después de dicho estudio, y considerando la escasa producción científica sobre el formador de profesores, UNESCO (2021) publica un informe denominado "Formadores de docentes en seis países de América Latina", en el que perfila a los encargados de acompañar el proceso de formación inicial del profesorado. Este estudio contempló a 740 formadores de profesores de primaria y 21 autoridades de instituciones formadoras, permitiendo una aproximación al contexto latinoamericano.

Entre los hallazgos sobre el perfil de los formadores encuestados, destaca la predominancia de las mujeres con título de profesora ejerciendo como formadoras y, en la mayoría de los casos, con postgrado y experiencia escolar. Los directivos entrevistados plantean los desafíos que enfrentan las instituciones formadoras, mencionando entre uno de ellos el robustecimiento del conocimiento disciplinar de los futuros profesores y su articulación con la formación pedagógica. En relación a la práctica de los formadores, se destaca como tendencia el trabajo individual y poco tiempo al trabajo colaborativo; y respecto a la identidad docente, se rescata la visión de los formadores sobre la "docencia como profesión, en la que el talento y la vocación no son suficientes, sino que se requiere el dominio de conocimientos pedagógicos y disciplinarios y de estrategias pedagógicas efectivas" (UNESCO, 2021, p. 70).

Desde las informaciones entregadas por estos estudios UNESCO, surgen algunas interrogantes sobre los formadores, en este caso de profesores que enseñarán matemática: ¿cuál es el contenido de la formación inicial de profesores que enseñarán matemática?, ¿qué priorizan los formadores en su práctica con los estudiantes de pedagogía?, ¿hay otros tipos de conocimiento que no refieren solamente a lo disciplinar y/o pedagógico en la formación inicial?, ¿qué otras dimensiones son relevantes para formar profesores que enseñarán matemática? Considerando la incipiente investigación sobre el formador de profesores y las exigencias de los países en torno a la mejora en la formación inicial docente, se vuelve relevante estudiarlo para aportar con evidencias que permitan comprender su quehacer y alcance en los futuros profesores que enseñarán matemática.

El objetivo del presente estudio exploratorio es indagar en las concepciones que posee un grupo de formadores de profesores que enseñarán matemática en primaria, particularmente con la intención de dilucidar qué conciben como "contenido" a enseñar en la formación inicial docente.

ANTECEDENTES SOBRE EL FORMADOR DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Jaworski (2008) señalaba que los encargados del desarrollo del conocimiento en la enseñanza son los formadores de profesores, especificando que son "profesionales que trabajan con profesores en ejercicio y/o futuros profesores para desarrollar y mejorar la enseñanza de las matemáticas" (p. 1). La autora, que estudia la formación del profesorado de matemática, incluyendo al formador de profesores, plantea una serie de conocimientos exigibles a este profesional, tales como, conocimiento de la matemática y su enseñanza, de la didáctica de la matemática para transformar la matemática en un saber a enseñar, del sistema educativo en que trabajarán los futuros profesores, del sistema social y cultural en que se enmarca este quehacer, de las investigaciones en educación matemática, de teorías de enseñanza y aprendizajes, y de metodologías para investigar en las escuelas. Además, afirma que en algunos casos los formadores han sido profesores de matemática en escuela, por lo tanto, podrían contribuir desde la propia experiencia en aula.

Zopf (2010) estudió en qué consiste el trabajo de enseñar matemática a profesores, proponiendo un modelo llamado Mathematical Knowledge for Teaching Teachers (MKTT, por sus siglas en inglés), entendido como el conocimiento matemático para la enseñanza de profesores. En su trabajo doctoral, postula tres diferencias principales entre el conocimiento disciplinar del profesor de matemática y el formador de profesores. La primera, consigna que el enseñar a niños es distinto que enseñar a profesores, porque estos últimos ya poseen conocimiento matemático; la segunda, señala que los propósitos de la formación escolar y la formación inicial de profesores son diferentes ya que el objetivo cambia (de conocimiento matemático a conocimiento matemático para la enseñanza); y la tercera, es la diferencia entre el trabajo de un profesor y un formador, en el sentido que este último debe descomprimir el conocimiento matemático del profesor para el trabajo de enseñar a niños.

En las conferencias anuales de International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) celebradas el año 2013 y 2014, los grupos de trabajo discutieron sus proyectos de investigación –manuscritos– sobre el conocimiento del formador de profesores de matemática, prestando atención a los marcos conceptuales propuestos, las metodologías empleadas y los resultados y conclusiones obtenidas (Beswick et al., 2014). Como fruto de esta instancia, los trabajos se presentaron en un número especial del Journal of Mathematics Teacher Education, y se trataron tres temas en específico: la naturaleza del conocimiento de los formadores de profesores de matemáticas; la adquisición y/o desarrollo de sus conocimientos; y cuestiones relacionadas con la investigación en el área (Beswick y Goos, 2018).

En línea con la noción propuesta por Shulman (1986), Pedagogical Content Knowledge (PCK, por sus siglas en inglés), Chick y Beswick (2018) propusieron un marco para el conocimiento pedagógico del “contenido” de los formadores de profesores de matemática, declarando que el “contenido” que enseñan los formadores no se encuentra exclusivamente supeditado al conocimiento de la disciplina, sino que al “conocimiento para enseñar dicha disciplina”. Con base en ello, se cuestionan los conocimientos manifestados por los formadores al desarrollar el PCK de los futuros profesores, y lo denominan meta-PCK (PCK para enseñar PCK), ofreciendo un modelo que propone aspectos clave presentes en el trabajo de formación docente. En concordancia con Zopf (2010), Chick y Beswick (Op. cit.) determinan diferencias de conocimiento entre profesores y formadores de profesores, haciendo hincapié en que el “contenido” de la formación es lo que cambia, pasando de ser un conocimiento matemático para la enseñanza en el caso de profesores, a un conocimiento de la enseñanza del conocimiento matemático, en el caso de los formadores.

El grupo de investigación del modelo Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge (MTSK, por sus siglas en inglés) de la Universidad de Huelva, también ha puesto su atención en generar investigación sobre el formador de profesores. El año 2021, integrantes de este grupo contribuyeron con un capítulo de libro en The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators. Su primer cuestionamiento versa sobre la diferencia del “contenido” de la formación de profesores; mientras para los profesores se supedita a la matemática como disciplina científica en un contexto de enseñanza (Carrillo et al., 2018), los formadores se ciñen a la matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje (Escudero-Ávila et al., 2021). Para ellos “el ‘contenido’ investigado pasa de ser ‘matemáticas’ a ‘aquellos elementos que permiten entender las matemáticas como objeto de enseñanza y aprendizaje’” (p.24). Esta afirmación no se contrapone, sino más bien refuerza la idea de “contenido” planteada en los antecedentes previos de este escrito (Chick y Beswick, 2018).

En consecuencia, cabe preguntarse cuál es el “contenido” de la formación inicial de profesores que enseñarán matemática. Para intentar dilucidarlo, Escudero-Ávila et al. (2021) consideran el trabajo de Ponte (2011), quien agrupa las investigaciones sobre formación en educación matemática en tres temáticas: conocimiento profesional (del contenido, del currículum, de los estudiantes, de la enseñanza, etc.); prácticas y habilidades profesionales (qué y cómo lo hacen en su rol de profesores); e identidad profesional (quienes son, individual y comunitariamente). En consecuencia, el autor postula estos tres focos como elementos necesarios para el logro del contenido de formación inicial de profesores que enseñarán matemática (figura 1).

La investigación sobre el formador de profesores es reciente, razón por la que la producción de referentes teóricos es escasa. En ese sentido, se considera un corpus teórico basado en antecedentes que contribuyen en la comprensión del sujeto formador, su conocimiento y el contenido a trabajar en la formación inicial docente. Este estudio pretende aportar en este último punto, considerando autores y sus propuestas para indagar en estas temáticas, como es el caso del aporte de Ponte (2011).

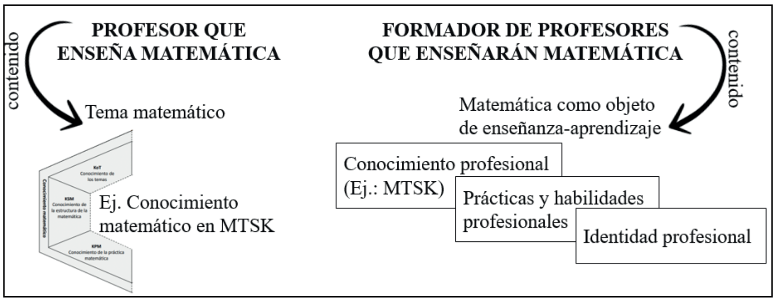


Figura 1. "Contenido" que enseña un profesor y un formador. Elaboración propia.

MÉTODO

Este estudio exploratorio se sitúa en un paradigma interpretativo con enfoque cualitativo (Navarro et al., 2017), y es parte de un estudio doctoral más amplio sobre el formador de profesores de matemática. Se empleó un cuestionario de tres preguntas que fueron validadas por dos expertos en investigación en Didáctica de la Matemática, y que apuntan a investigar el conocimiento del formador de profesores de matemática. En el caso de esta comunicación, y de acuerdo a lo planteado en antecedentes, se presenta el análisis de una pregunta cuyo objetivo fue indagar en las concepciones del "contenido" de la formación inicial de profesores de matemática.

La recogida de datos se realizó el año 2022, consultando en formato online a 12 formadores de profesores de educación primaria que realizan clases en algún curso referente a educación matemática, en distintas universidades chilenas. De la muestra, ocho formadores estudiaron Pedagogía en Educación Básica en el pregrado; y cuatro estudiaron Educación Matemática. Respecto a su formación de postgrado, ocho tienen grado de Magíster relacionado con la enseñanza y/o aprendizaje de la Matemática; y cuatro poseen el grado de Doctor en la misma área.

Respecto a los años de experiencia realizando clases de matemática a estudiantes de primaria (1° a 6° año básico en Chile), nueve formadores declaran haber ejercido entre 1 a 12 años; solo uno de ellos indica una experiencia de 25 años. Solo un formador encuestado no tiene dicha experiencia. En relación a los años de experiencia formando profesores de primaria en el área de matemática, ocho han ejercido entre 2 a 9 años, mientras que los cuatro restantes han realizado clases en la formación inicial durante más tiempo, uno de ellos indicando una experiencia mayor a 20 años.

La pregunta que se analiza en esta comunicación es: *En el PCK de un profesor que realiza clases de matemática en primaria, el contenido "C" está determinado por temas matemáticos. En su caso como formadora o formador, ¿qué considera como "C" en la formación inicial de profesores que enseñarán matemática en primaria?*

Mediante un análisis de contenido (Fiorentini y Lorenzato, 2015) se interpretaron las respuestas otorgadas por los formadores. Las categorías fueron determinadas a priori, basadas en la interpretación de contenido de la formación planteado por Ponte (2011). La tabla 1 sistematiza las categorías y subcategorías empleadas en el análisis.

Tabla 1. Contenido de la formación inicial de profesores de matemática.

Categorías	Subcategorías
Conocimiento profesional	Conocimiento matemático Conocimiento didáctico del contenido
Prácticas y habilidades profesionales	—
Identidad profesional	—

En las respuestas, se identificaron apartados o declaraciones que sirvieran como unidades de significado, es decir segmentos de información (una palabra, una frase, un párrafo) que tengan estrecha relación con las características descritas por Ponte (2011) sobre el contenido de la formación inicial.

En el caso de la categoría Conocimiento Profesional, se emplea el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) ya que sistematiza el conocimiento del profesor de matemática en su carácter de especializado, entregando categorías y descriptores que permiten su identificación. En esa línea, esta categoría se divide en dos subcategorías, para ser fiel al modelo teórico seleccionado.

Respecto a las siguientes categorías, no se ha considerado un modelo en específico para su análisis ya que, si bien existe literatura sobre estos temas, no se ha profundizado aún el estudio sobre ellos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación, se analizan las respuestas entregadas por los formadores y se categorizan sus afirmaciones. A partir de ello, se plantea una discusión frente a los hallazgos con el fin de analizar las concepciones sobre el contenido que desarrollan los formadores de profesores que enseñarán matemática en primaria. Las afirmaciones que se esbozan no son generalizables, pues los resultados corresponden solo a un grupo de formadores encuestados, dada la muestra por conveniencia (n=12).

Conocimiento profesional

Esta categoría refiere a aquellas concepciones de los formadores que declaran que el contenido de la formación inicial de profesores de primaria que enseñarán matemática, está supeditado al conocimiento matemático o al conocimiento didáctico del contenido. Para su interpretación, aplicamos el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas MTSK (Carrillo et al., 2018).

Conocimiento matemático

En el modelo MTSK, el conocimiento matemático es concebido como "una red de conocimientos sistémicos estructurada según sus propias reglas [… que] permite al profesor enseñar los contenidos de forma conectada y validar sus propias conjeturas matemáticas y las de sus alumnos." (Carrillo et al., 2018, p. 243).

Seis de los 12 formadores encuestados manifiestan que el contenido de la formación inicial se concentra en desarrollar conocimientos del tipo matemático, tal como lo declara uno de los formadores, "Aquellas elaboraciones que la sociedad ha creado y que los matemáticos han formalizado, por ejemplo: definiciones, propiedades, teoremas, etc.".

Los otros cinco formadores cuyas respuestas se clasifican en esta categoría, plantean el conocimiento matemático sustentado en los ejes temáticos definidos en el currículo nacional de educación primaria chileno, encontrándose respuestas como:

> "Números naturales, sus operaciones y propiedades; números fraccionarios y decimales positivos y sus distintas interpretaciones y representaciones; el espacio y la medida; patrones, ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita; tratamiento, organización y gráficas de datos e información relevante; medidas de tendencia central; probabilidades, azar y juegos."

De los 6 formadores que afirman que el contenido de la formación inicial es netamente matemático, 4 de ellos son profesores de educación básica de formación.

Cabe recordar que no se busca en este estudio el conocimiento matemático del formador, sino el conocimiento sobre qué debe desarrollar en la formación inicial de profesores de primaria.

Conocimiento didáctico del contenido

En esta categoría se observan afirmaciones que centran el contenido de la formación en el conocimiento didáctico de contenidos matemáticos, entendido como "los conocimientos relativos al contenido matemático en términos de enseñanza-aprendizaje" (Carrillo et al., 2018, p. 243). Algunas afirmaciones sustentan el contenido de la formación inicial en el conocimiento didáctico del futuro profesor, por ejemplo:

> "Aquellos temas disciplinares, desde el conocimiento profundo, que involucra la matemática (como campo de estudio), la evolución de los temas a tratar (desde la historia) y los aspectos didácticos y metodológicos involucrados en el aprendizaje de estos temas."

En esta categoría, los formadores hacen referencia al conocimiento didáctico del contenido de los futuros profesores; pero también, se observan afirmaciones que entregan evidencias de comprensión del contenido de la formación como un meta-PCK en el sentido de Chick y Beswick (2018).

> "Además de los contenidos disciplinares considerados para la formación, como números naturales, fracciones (números racionales), enteros, sistema de numeración decimal, contenidos de geometría y los otros ejes matemáticos, que se deben enseñar en la escuela primaria, el profesor debe conocer en profundidad esos contenidos para la enseñanza, es decir además dentro de su conocimiento debe estar incluido el como [cómo] enseñar esos conceptos, lo que le da un saber más profundo, por lo que el saber enseñar los distintos temas matemáticos deben se [ser] parte de estos contenidos de formación."

La respuesta anterior alude al contenido de la formación inicial, cuyo fin es que los futuros profesores que enseñarán matemática sepan enseñarla. Se desprende que el formador concibe el contenido de la formación inicial como contenido matemático en tanto objeto de enseñanza-aprendizaje.

Sin embargo, aunque los casos presentados relevan la importancia del acompañamiento en la construcción del conocimiento profesional de los futuros profesores, no referencian explícitamente otros tipos de contenidos que como formadores pueden desarrollar en la formación inicial.

Prácticas y habilidades profesionales

Esta categoría refiere a aquellas concepciones de los formadores que declaran que el contenido de la formación inicial de profesores de primaria que enseñarán matemática incluye, además del conocimiento profesional, el qué y cómo se debe llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Para Ponte (2011) las prácticas y habilidades profesionales responden al hacer del profesor (futuro profesor en este caso) en su rol profesional y al cómo lo ejecuta. En su tesis doctoral sobre el conocimiento del formador de profesores de matemática, Pascual (2021) concibe la práctica profesional "más allá del conocimiento matemático y didáctico-matemático que sustenta las acciones del maestro, la formación inicial debe configurarse como un espacio donde tenga lugar la construcción de ese conocimiento en acción que es *el hacer* o el *ser capaz de*" (p. 27).

Uno de los formadores responde que se pueden identificar dos prácticas que ponen el conocimiento profesional en acción, en que el formador tiene conocimiento sobre escenarios que le permitan desarrollar habilidades de enseñanza.

> "Primero debe existir la relación entre lo pedagógico, didáctico y metodológico, para ello la enseñanza de la matemática requiere del conocimiento especializado de la matemática para desarrollar el conocimiento didáctico del contenido, además trabajar situaciones de caso del dominio c que permita situar el conocimiento del futuro docente entendiendo a la FID [formación inicial docente]. Otro punto a destacar es la reflexión de la práctica educativa, también en consideración al uso de la matemática como conocimiento especializado, pero como este conocimiento llega a la escuela para ser enséñale [enseñable] por este profesional o futuro profesional."

En esta respuesta, el formador indica el trabajo con situaciones de caso enfocadas en un contenido matemático, situando al futuro profesor. Además, plantea la instancia de reflexión de la práctica educativa como un componente esencial del contenido a trabajar como formador en la formación inicial, y la importancia de trabajar en instancias en que el futuro profesor pueda transponer el conocimiento profesional en un conocimiento a enseñar.

Otro formador señala la importancia del desarrollo del conocimiento profesional (matemático y didáctico del contenido), añadiendo "el qué se debe trabajar, cómo trabajarlo y de qué manera planearlo y evaluarlo". Estas acciones forman parte de las prácticas habituales de un profesor que enseñará matemática, por lo que se interpreta que el formador la considera como una habilidad profesional constitutiva del contenido de la formación inicial.

Identidad profesional

Otro de los contenidos de la formación inicial es la identidad profesional de los futuros profesores que realizarán clases de matemática, por lo que se desprende la necesidad de que el formador tenga conocimiento sobre ello. Para Escudero-Ávila et al. (2021), los formadores no solo contribuyen con lo que saben o hacen los futuros profesores, sino también en lo que se convierten, individual y colectivamente, considerando factores como "creencias, interacción con el entorno, actitudes y emociones" (p. 31).

El conocimiento que posea el formador sobre estos factores en la formación inicial es clave en tanto le permite diseñar situaciones que la potencien; por ejemplo, la creación de simulaciones en que los futuros profesores puedan tomar una postura como un profesor que enseña matemática, generando beneficios en la construcción de la identidad profesional (Pascual, 2021).

En esa línea, podemos retomar la respuesta presentada previamente, en que un formador destaca la importancia de la reflexión de la práctica educativa, específicamente en cómo el conocimiento (profesional) llega al aula escolar.

En las respuestas entregadas, no se encontraron más afirmaciones relacionadas con la identidad profesional de los futuros profesores, lo que desprende que, para estos formadores de profesores, el desarrollo de la identidad profesional no está siendo considerada como un contenido de la formación inicial de profesores. Esta situación puede deberse al incipiente desarrollo de investigaciones sobre el tema, o también a que los formadores asocian la palabra "contenido" con conocimiento solo del tipo disciplinar

REFLEXIÓN

Este estudio exploratorio entrega información de las concepciones de un grupo de formadores de profesores de matemática en primaria, sobre quienes, como ya se ha declarado, la investigación ha sido escasa. Comprender el objeto de enseñanza que estos profesionales manifiestan al plantarse frente a cursos de futuros profesores, permite un acercamiento a su concepción sobre los profesionales de la educación que se espera formar en las universidades, en particular, en Chile.

Si bien la mitad de los formadores encuestados (n=12) considera solo el desarrollo del conocimiento matemático, otros formadores conciben el contenido de la formación como el conocimiento de la matemática tanto objeto de enseñanza-aprendizaje, lo que podría implicar una distinción en su quehacer en las aulas universitarias. Si bien hay una baja representatividad de respuestas que propongan otros contenidos en la formación inicial –como las prácticas y la identidad profesional–, los resultados del estudio manifiestan una oportunidad para avanzar en fortalecer dominios más allá del necesario conocimiento matemático y didáctico del contenido.

Este trabajo se enmarca en un trabajo doctoral y se espera a futuro seguir profundizando en los conocimientos del formador de profesores que enseñarán matemática. Asimismo, se espera contribuir sobre las concepciones que poseen acerca del contenido de la formación inicial y a la investigación sobre el formador de profesores, con elementos constitutivos del contenido de la formación inicial.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID)/ Subdirección de Capital Humano / DOCTORADO NACIONAL 21191968.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177%2F0022487108324554

Beswick, K., Goos, M. y Chapman, O. (2014). Mathematics teacher educators' knowledge. (Working Session 4). En S. Oesterle, C. Nichols, P. Liljedahl y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the joint meeting of PME 38 and PME-NA 36, 1*, 254. PME.

Beswick, K. y Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here? *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(5), 417-427.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco-Mora, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A. Ribeiro, M. y Muñoz-Catalan, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Chick, H. y Beswick, K. (2018). Teaching teachers to teach Boris: a framework for mathematics teacher educator pedagogical content knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Educator, 21*, 475-499. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9362-y

Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Contreras, L.C. (2021). What do mathematics teacher educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. En M. Goos, y K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators: international perspectives and challenges*. Springer. https://:doi.org/10.10007/978-3-030-62408-8_2

Fiorentini, D. y Lorenzato, S. (2015). *Investigación en Educación Matemática: recorridos históricos y metodológicos*. Editora Autores Associados LTDA.

Jaworski, B. (2008). Mathematics teacher educator learning and development. En B. Jaworski y T. Woods (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (pp. 1-11). Sense Publishers.

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, À. y Groenwald, C. (2019). Mirar profesionalmente» las situaciones de enseñanza: una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 177–192). Ediciones Universidad de Salamanca.

Navarro, E., García, E. , Rappoport, S. y Thoilliez, B. (2017). *Fundamentos de la investigación y la innovación educativa*. Unir Editorial.

Pascual, M. (2021). *El conocimiento del formador de maestros en la etapa de formación inicial, en relación con la enseñanza de la Didáctica de las Matemáticas. Un estudio de caso*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva. http://hdl.handle.net/10272/20208

Ponte, J. P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: Essential aspects of teachers' learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(6), 413–417.

Rowland, T. (2005). The knowledge quartet: A tool for developing mathematics teaching. En A. Gagatsis (Ed.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 69-81). Cyprus Mathematical Society.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

UNESCO. (2012). *Antecedentes y Criterios para la Elaboración de Políticas Docentes en América Latina y el Caribe*. OREALC-UNESCO

UNESCO. (2021). *Formadores de docentes en seis países de América Latina*. OREALC-UNESCO

Zopf, D. A. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education*. Tesis doctoral. University of Michigan.

CONDICIONES Y EFECTOS DE LA SEGURIDAD EN TORNO A RESULTADOS MATEMÁTICOS

Conditions and effects of security on mathematical results

Rigo-Lemini, M., Bernal-Pinzón, A. y Orozco-del-Castillo, C.

CINVESTAV

Resumen

Se analiza la seguridad sobre resultados matemáticos (e. g., seguridad en el resultado final de una tarea) que experimentan agentes educativos durante la resolución de una tarea de proporcionalidad directa. Se definen categorías —y se ilustran con un caso— que permiten describir las condiciones que, en ese contexto, detonan la seguridad que el agente experimenta en torno a los resultados matemáticos que deriva, así como los efectos que la seguridad tiene sobre decisiones y acciones matemáticas que se realizan durante la resolución.

Palabras clave: *condiciones y efectos de la seguridad, seguridad en torno a resultados matemáticos.*

Abstract

Security of mathematical results (e.g., security in the final result of a task) experienced by educational agents during the resolution of a direct proportionality task is analyzed. Categories are defined —and illustrated with a case— that allow describing the conditions that, in that context, trigger the security that the agent experiences around the mathematical results that he derives, as well as the effects that security has on decisions and mathematical actions that are performed during the resolution.

Keywords: *security conditions and effects, security on mathematical results.*

ANTECEDENTES Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

La comunicación versa sobre el tema de la seguridad (o estados afines como confianza, convencimiento y certeza) que estudiantes, profesores o profesionales de las matemáticas experimentan en torno a resultados matemáticos: por ejemplo, la seguridad que los alumnos suelen tener en el algoritmo de la suma, o la confianza que un profesor experimenta al aplicar la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado, o la certeza que experimentaron los matemáticos en torno a la veracidad del V postulado de Euclides. Lo que aquí se reporta forma parte de los hallazgos derivados en el marco de un Programa Interdisciplinario de Investigación, el 'Programa' (coordinado por una de las autoras) sobre estados como la seguridad y la duda. A la seguridad o duda (en algún resultado matemático) en el Programa se le llaman 'estados epistémicos de convencimiento' (EEC) (Rigo-Lemini, 2013).

¿Por qué debiera interesar a la educación matemática el estudio de los EEC y, en particular, el de la seguridad? En principio, porque la experiencia de seguridad que sienten las personas durante los trabajos matemáticos (e.g., resolución de tareas, demostración de conjeturas) no solo es constante

Rigo-Lemini, M., Bernal-Pinzón, A. y Orozco-del-Castillo C. (2022). Condiciones y efectos de la seguridad en torno a resultados matemáticos. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 499-507). SEIEM.

sino también inevitable: ¿cuántas veces el lector, sin siquiera proponérselo, ha sentido certeza en la aplicación de una fórmula matemática o confianza en el resultado de un problema? Esta presencia de la seguridad en las actividades matemáticas ha sido ya documentada por los expertos: si un estudiante confía en una regla matemática, es muy probable que la utilice durante la resolución de un problema (Fischbein, 1987; Foster, 2016); si un matemático no estuviera de alguna manera convencido de la verdad de una conjetura difícilmente dedicaría tiempo para comprometerse con su prueba, como dice de Villiers (1990). Así que la seguridad funge como impulso imprescindible de los trabajos matemáticos. Sin embargo, también se ha visto que la seguridad puede llegar a representar un impedimento para el avance del conocimiento: el caso de la certeza incuestionada que Saccheri experimentó en torno a la verdad del V Postulado es un ejemplo paradigmático (Kline, 1985).

Para encarar este problema de la seguridad (i.e., que este EEC puede funcionar como un impulso pero también como un freno y para enfrentar otros que aquí no se mencionan), sería deseable comprender aspectos diversos relacionados con los EEC en general y con la seguridad en particular (por ejemplo, cómo surge y cuáles son sus efectos sobre los trabajos matemáticos que las personas realizan).

Expertos en el tema han reflexionado sobre diversos fenómenos didácticos relacionados con los EEC, pero más específicamente sobre la incertidumbre (la confusión y la duda). Algunos sostienen, por ejemplo, que la incertidumbre y la confusión surgen ante la presencia de algún conflicto cognitivo no resuelto (Zaslavsky, 2005): aparece incertidumbre cuando un alumno no puede elegir entre dos resultados contrapuestos o cuando carece de herramientas para verificar una respuesta (Brown, 2014; Muis et al, 2015; Zaslavsky, 2005). Otros autores hacen referencia a una 'confusión productiva' que favorece el aprendizaje, cuando el alumno activa herramientas metacognitivas y cognitivas para hacerle frente al conflicto que generó la confusión, a diferencia de la 'confusión no productiva', estado en el que no hay ganancia en el aprendizaje porque la imposibilidad de resolver el conflicto cognitivo genera en el estudiante frustración, ansiedad o aburrimiento y así, pasividad cognitiva.

A pesar de estos resultados sin duda relevantes, muy poco se sabe con respecto a diversos aspectos de la seguridad. En este reporte se pretende comenzar a llenar este hueco en la investigación en educación matemática (aunque solo sea muy parcialmente). Específicamente, en la comunicación se plantean dos objetivos: i) identificar las condiciones que detonan la seguridad en el contexto de la resolución de tareas e ii) identificar los efectos o consecuencias que la seguridad tiene sobre los trabajos matemáticos. Para concretar, se enfocará el estudio en una tarea de proporcionalidad directa. Para conseguir los objetivos, en lo que sigue se introducen categorías teórico-empíricas que permiten describir esas condiciones y efectos, categorías que se ilustran acudiendo a la resolución que una de las participantes en el estudio (Hannia) dio a una de las tareas propuestas.

MARCO TEÓRICO: CATEGORÍAS INTRODUCIDAS EN LA INVESTIGACIÓN

Como resultado de investigaciones sobre los EEC realizadas en el Programa, se definieron categorías teórico-empíricas asociadas a los EEC. La construcción de dichas categorías se realizó siguiendo los principios de la Teoría Fundamentada (Corbin y Strauss, 2015) y se basó en los datos empíricos recabados durante esos estudios. No se introducen aquí los detalles de la construcción por exceder los objetivos de este escrito. Las categorías se describen en lo que sigue y se resaltan en itálicas.

Categorías relacionadas con las condiciones que detonan la seguridad

Dada la situación de resolver una tarea de valor faltante en algún contexto escolar, el estudiante se suele proponer, entre otras, el logro de la *Meta Matemática* de resolver la tarea, lo que significa encontrar el valor de la cantidad desconocida. Para alcanzar esa meta, el estudiante toma decisiones y realiza acciones, apoyado en conocimientos previos, con el propósito de conseguir metas matemáticas intermedias, entre otras: representar las relaciones entre las variables e identificar el concepto que modela la situación problemática; elegir las técnicas procedimentales y realizar las operaciones. Específicamente, el estudiante se suele plantear las metas de producir *Resultados Matemáticos* del tipo: "el valor de la incógnita es 4.5m"; "[el concepto que modela la situación problemática] es el de proporcionalidad directa simple", o "[la técnica con la que se puede resolver] la tarea es la Regla de tres". Los estudiantes suelen utilizar expresiones incompletas o inexactas pero generalmente su intención es representar los resultados que se derivan de acciones como las antes mencionadas. Las Metas Matemáticas que el profesional de las matemáticas se suele plantear son el verificar computacionalmente una conjetura; el buscar derivar una prueba; el examinar y sancionar las pruebas que sus pares han generado, entre otras.

Es frecuente que, asociadas a las metas matemáticas, el agente (el estudiante o el profesional de las matemáticas) se plantee explícita o implícitamente Metas diversas (como la de resolver rápido la tarea) pero también, algunas metas epistémicas; por ejemplo, la Meta Epistémica de resolver correctamente un ejercicio o una tarea o el reto matemático asumido, es decir, la meta de que los resultados matemáticos obtenidos sean verdaderos, o bien, la Meta Epistémica de saber si los resultados matemáticos son verdaderos.

Para cubrir sus metas epistémicas, el agente posiblemente buscará contar con alguna garantía, justificación o razón que sustente o verifique la verdad de los resultados en juego; el conjunto de métodos de sustentación elegidos por el agente conforma lo que en el Programa se llaman los *Requerimientos de Veracidad*, los cuales dependen de cada contexto (de hecho, los Requerimientos de Veracidad son semejantes a los esquemas de prueba definidos por Harel y Sowder (1998)). En el caso de los matemáticos, los requerimientos de veracidad coinciden con los criterios de rigor imperantes en la comunidad de matemáticos. En el caso de los alumnos, los requerimientos de veracidad que ellos se suelen plantear pueden llegar a coincidir con (pero no son necesariamente iguales a) las razones y justificaciones que se establecen para su nivel educativo.

El agente cubrirá sus metas epistémicas (de saber que derivó un resultado correcto) cuando valora que aplicó satisfactoriamente los requerimientos de veracidad elegidos para demostrar la verdad de dicho resultado. En el marco del programa se considera que en esos casos él experimentará un estado de *Seguridad* en torno a la veracidad del resultado obtenido.

Por ejemplo, un matemático se puede plantear la meta epistémica de garantizar (casi al 100%) la veracidad de una conjetura C. Es posible que él llegue a sentir altos grados de seguridad en la verdad de C (casi del 100%) cuando llegue a valorar que alcanzó su meta epistémica por haber aplicado satisfactoriamente Requerimientos de veracidad que (de acuerdo a lo que reportan Weber, Mejía-Ramos y Volpe [2022]) incluyen tres tipos de justificaciones: la comprobación empírica de la verdad de C a través de la verificación de algunos casos; la prueba deductiva y la corroboración de la prueba por parte de los expertos; en suma, él se sentirá seguro de C como consecuencia de valorar que justificó satisfactoriamente su verdad mediante ciertos requerimientos de verdad (empíricos, prueba, pares). En el apartado de la presentación del caso empírico se pretende mostrar que Hannia experimenta seguridad bajo condiciones semejantes.

Categorías relacionadas con los efectos de la seguridad sobre los trabajos matemáticos

A su vez, la experiencia de la seguridad en torno a un resultado tiene efectos sobre las acciones matemáticas que se realizan durante dicha resolución, efectos que en esta investigación se denotan también con categorías, específicamente, las que a continuación se describen.

Por una parte, se da una tendencia de actuar en consecuencia con la aceptación de la verdad de los resultados matemáticos. Por otra, se diseña un plan matemático, que se refiere a los planes específicos que el alumno traza relacionados con las acciones que llevará a cabo en lo subsiguiente y que son consecuencia de la Tendencia.

POBLACIÓN, MÉTODOS DE RECUPERACIÓN DE DATOS Y METODOLOGÍA

La investigación cuyos resultados parciales aquí se exponen es de tipo cualitativo y por tanto, es de carácter interpretativo. Para el análisis se emplearon distintas técnicas de la teoría fundamentada (en la versión de Corbin y Strauss (2015)), entre ellas, el microanálisis, herramienta con la que se busca examinar a profundidad el significado de algunas piezas de datos y que se suele utilizar en estadios de exploración temprana.

Lo que se reporta en este manuscrito está centrado en el microanálisis de un caso, el de Hannia. Ella, al igual que sus cinco compañeros (de entre 14 y 15 años) que participaron en la investigación, cursaba el 3º de secundaria en una escuela pública cuando se realizó el estudio. La elección de los sujetos la realizó la maestra de matemáticas, a quien se le solicitó que fueran estudiantes con excelencia académica; se les eligió por ser los que podrían ofrecer más información sobre el tema a investigar, siguiendo lo que se recomienda en las investigaciones cualitativas (Morse, 2007). La recolección de los datos se realizó con dos cuestionarios y una entrevista. Aquí se reportan solo los resultados del cuestionario 1.

En el cuestionario 1 se plantearon 6 tareas aritméticas de valor faltante (tomadas de Block et al., 2010 y de Vergnaud, 1991) de las que se espera un resultado numérico; cinco son de proporcionalidad. Se eligieron tareas que están al alcance de los alumnos (porque ellos debieran de poseer, dado su nivel educativo, las herramientas conceptuales y técnicas para resolverlas) pero que les podrían representar un reto cognitivo (porque si bien es probable que ellos iban a confiar en que las resolverían con éxito, posiblemente no lo lograrían, por el uso indiscriminado que suelen hacer de la regla de tres en tareas de valor faltante). Al final de cada reactivo se pidió a los alumnos que reportaran el EEC que experimentaron en relación con su respuesta (eligiendo una opción en una escala) y que explicaran, en una pregunta abierta, en qué basaban su nivel de seguridad. Después de los cuestionarios se aplicó, de manera individual, una entrevista no estructurada (Birks y Mills, 2015; Corbin y Strauss, 2015), la cual se grabó en audio y se transcribió enumerando cada participación (en la reconstrucción que abajo se expone, el numeral que aparece entre paréntesis hace referencia a esta numeración. Aunque no es posible transcribir en este documento esas entrevistas, es posible consultarlas en Bernal (2022)). Los datos se recolectaron en la escuela. Cada estudiante dio solución a los cuestionarios de manera individual. Las entrevistas se realizaron inmediatamente después de que los alumnos terminaron de resolver los cuestionarios. Las tareas se pilotearon con estudiantes de tercero de secundaria de una escuela pública.

PRESENTACIÓN DEL CASO EMPÍRICO

En lo que sigue se expone un microanálisis de la resolución que Hannia dio a la tarea 1 del primer cuestionario. Se eligió este caso ya que ilustra de manera satisfactoria y puntual las categorías introducidas en el marco teórico. Se inicia con el esquema de resolución de la tarea, en el que se describe cómo ella la resuelve. Esto sirve de base para la reconstrucción de la resolución, en la que se propone una interpretación de la producción de la estudiante considerando sus trabajos matemáticos así como los EEC que ella fue experimentando en torno a los resultados involucrados. Para el análisis de los EEC se consideran las categorías antes descritas, es decir, las incluidas en las condicionantes de los EEC (metas epistémicas, requerimientos de veracidad y valoración) y en los efectos (tendencias y planes matemáticos). El análisis se basa en las evidencias explícitas que Hannia proporcionó en el cuestionario así como en las reflexiones metacognitivas que compartió durante la entrevista. Sin embargo, también se consideraron eventos o incidentes que la alumna solo insinuó de manera implícita. Para interpretarlos las investigadoras se dieron la licencia de hacer algunas inferencias bajo la consideración de que un rasgo de la cognición implícita es que la persona dispone de representaciones activas que, aunque no puede informar o solo lo puede hacer parcialmente, están influyendo en su conducta, la cual eventualmente puede ser visible para otros (Pozo, 2001).

Esquema de resolución de la tarea (T1)

En la T1 (de proporcionalidad simple directa) se plantea lo siguiente: "Tres madejas de lana pesan 200 gramos. Se necesitan 8 para hacer un suéter ¿Cuánto pesa el suéter?". En la figura 1 aparece la resolución que Hannia produjo en el Cuestionario.

En la entrevista (en 310) Hannia explicó cómo resolvió la T1: "... pues aquí dice que eran 3 y eran 200 gr. entonces nada más saqué lo unitario y me salió el valor de uno, entonces el valor de uno lo multipliqué por 8 y eso me dio la respuesta de cuánto pesaba el suéter". En el cuestionario, Hannia explícitamente distinguió las cantidades conocidas y la incógnita y sus respectivas unidades de magnitud (casi en todos los casos); dichas cantidades las relacionó ahí mediante igualdades, de manera idiosincrática y errónea, evocando quizás relaciones de proporcionalidad directa. En la entrevista (310) explicó fluida y correctamente la técnica con la que resolvió la tarea (el cálculo del valor unitario) y dejó ver cómo la aplicó; en el cuestionario dejó registro de las operaciones realizadas y del resultado final (ambos correctos). En el cuestionario y en la entrevista, Hannia hace referencia explícita a los procedimientos, a los cálculos y al resultado del ejercicio y expresa EEC que experimentó en torno a estos resultados. Por esto, el análisis que a continuación se expone se centra en estos resultados.

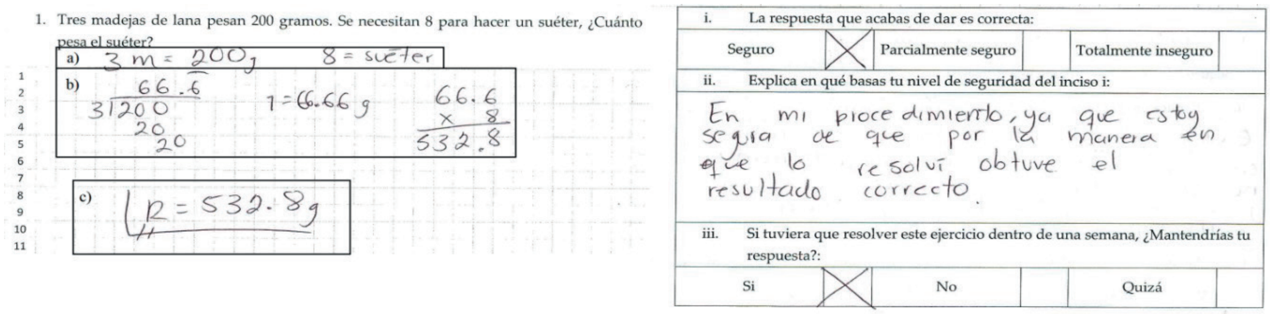


Figura 1. Resolución propuesta por Hannia en el cuestionario.

Reconstrucción de la resolución

Primer segmento: seguridad en el procedimiento

Hannia distingue entre procedimiento y cálculos y asocia (en el cuestionario) el procedimiento con "la manera en la que resolví [la tarea]". Así, es posible que ella incluya en el procedimiento: las relaciones de igualdad que registró en el cuestionario (en a) (haciendo quizás referencia a una relación de proporcionalidad); la elección del valor unitario (como técnica para resolver la T1) y su aplicación.

En 312 ella afirma: "sé que el procedimiento que realicé para solucionarlo, sé que pues fue correcto". Esta afirmación sugiere dos cosas: por un lado, que en algún momento del proceso de resolución (antes, durante o después) Hannia se planteó la Meta Epistémica de poder saber que su procedimiento era correcto; por la otra, que también en algún momento ella valoró como cubierta esa Meta, lo que deja ver con la expresión "Sé que…".

Hannia no explicita las razones en las que sustentó ese saber (o por las cuales consideró satisfecha su meta epistémica); sin embargo, en la entrevista hace algunas aclaraciones que dan pauta para hacer algunos supuestos razonables. Al preguntarle: "Para ti ¿Qué es estar segura?" (317.1) ella responde: "(...) estar… como segura… con lo que tú realizaste, que te sientas satisfecha" (320.1); a esto se le pregunta: "¿Satisfecha de qué? (321.1) y ella responde: "…de lo que ya hice, [que hice] lo que me pidieron, [y] lo que hice estuvo bien…" (324.1). De esto se puede desprender que 'hacer lo que le pidieron' es posiblemente la razón (o una entre otras) en la que ella sustentó la corrección de su procedimiento. En otra parte de la entrevista, sobre la resolución que ella realizó para la Tarea 4, Hannia recurre a razones semejantes como sustento, en este caso, de su inseguridad: en (340) comenta: "(...) [cuando] no (...) sigo un procedimiento que me enseñaron sí me siento más insegura del resultado que obtuve" (i.e., me siento segura cuando sigo un procedimiento que me enseñaron). Se puede entonces colegir que este tipo de razones, hacer lo que le pidieron o lo que le enseñaron, forma parte del acervo de razones y justificaciones que integran sus requerimientos de veracidad en los que sustenta sus EEC y de las que Hannia dispone cuando lo necesita.

Con respecto al EEC que experimentó Hannia en torno al procedimiento, en el cuestionario y en la entrevista hace referencia a un estado de seguridad: A la pregunta de "¿en qué basas tu nivel de seguridad?", ella responde: "En mi procedimiento, ya que estoy segura de que por la manera en que lo resolví, obtuve el resultado correcto" (cuestionario). En la entrevista (312), las investigadoras retoman esa misma pregunta y Hannia vuelve a responder (que basa su seguridad) "en el procedimiento". En 310 (ver párrafos arriba), por otra parte, describe la aplicación de la razón unitaria de manera asertiva, clara y correcta, sin titubeos ni dudas ni mitigadores del lenguaje, dejando ver un EEC de seguridad en su procedimiento (que incluye la aplicación de la razón unitaria) (Martínez y Rigo (2014) exponen criterios lingüísticos para identificar estados de seguridad y duda).

Hilando lo anterior, se puede inferir que la seguridad que Hannia experimentó en torno a los resultados matemáticos (en este caso, el procedimiento) tuvo su origen en que ella valoró como satisfechas sus Metas Epistémicas (de saber que su procedimiento era correcto) por haber aplicado los requerimientos de veracidad (hacer lo que le pidieron) que en ese contexto consideró pertinentes.

La seguridad en torno al procedimiento llevó a Hannia a realizar las operaciones conducentes (Tendencias) y a definir y realizar las operaciones de acuerdo con el procedimiento (Plan matemático), como se verá en lo que sigue.

Segundo segmento: Inseguridad en las operaciones (realizadas en un primer intento) / seguridad en las operaciones (después de la verificación) y conclusión de la tarea con un eec de seguridad

Siguiendo el procedimiento elegido, Hannia realizó las operaciones correspondientes (ver figura 1).

En la entrevista Hannia afirma que su seguridad (en el resultado del ejercicio) la basa -como antes se dijo- en el procedimiento realizado, pero completa el comentario precisando que "estuvo [estuvieron] bien los cálculos que yo hice, entonces en eso se basa mi seguridad" (312). Al preguntarle sobre cómo sabe que sus cálculos están bien, ella aclara: "(...) los rectifiqué varias veces cuando ya había obtenido el resultado final y ya fue que pude hacer mis conclusiones y ya" (314). Esta respuesta llevó a las investigadoras a preguntarle si eso es algo que ella suele hacer (315), a lo que respondió: "sí, cuando no me siento muy segura, o cosas así, de que se me fue un número, a veces sí rectifico mis operaciones" (316), lo que se pudiera parafrasear como: "si rectifico, me siento segura". Es posible que la rectificación de las operaciones sea solo una práctica rutinaria en Hannia, pero también es posible que sea respuesta a una necesidad o meta epistémica -que la estudiante se plantea en algún momento de su resolución-, de saber si los resultados de sus operaciones son los correctos, seguramente con el propósito de corregirlos, si fuera el caso. Esos procesos de verificación-corrección son los requerimientos de veracidad que ella se impone, en el caso de las operaciones, para poder satisfacer esa Meta Epistémica, o lo que es lo mismo, para poder sustentar la veracidad de los resultados de las operaciones, en el caso de tareas como la T1.

Hannia comenta en 314 que en la resolución de la T1 ella rectificó varias veces sus operaciones. Por lo antes dicho, es muy probable que lo haya hecho porque en un primer momento ella se sintió insegura de sus resultados (por haber considerado que sus Metas Epistémicas no estaban resueltas porque no se satisficieron sus requerimientos de veracidad). Pero una vez realizado ese ejercicio de verificación, en un segundo momento, ella "… pudo hacer sus conclusiones y ya" (31.4), conclusiones de las que ella reportó haber experimentado seguridad (en el cuestionario). La seguridad en torno a los resultados de las operaciones y al resultado final tuvo entonces su origen en la valoración positiva que ella hizo de que su Meta Epistémica (la de saber si los resultados son verdaderos) fue cubierta, ya que pudo aplicar satisfactoriamente los Requerimientos de Veracidad correspondientes (verificar los resultados varias veces). Como consecuencia de su seguridad, aceptó los resultados (marcando la Tendencia) y el Plan Matemático a seguir fue dar por terminada la tarea.

En la figura 2 se representa gráficamente la posible trayectoria de la resolución que Hannia dio a T1. Ahí se distinguen las condiciones que detonan los estados de seguridad experimentados por Hannia (segunda columna) así como los efectos que esos estados de seguridad tuvieron sobre los trabajos matemáticos que ella realizó (cuarta columna). La seguridad y la duda que ella experimentó forman parte de un flujo dinámico que influye de manera muy específica y significativa (a través de las Metas Epistémicas que se plantea la alumna y los requerimientos de veracidad que buscan cumplirlas, y de las tendencias y los planes) sobre los trabajos matemáticos realizados durante la resolución, trabajos matemáticos que a su vez forman parte de los detonadores que condicionan a esos EEC.

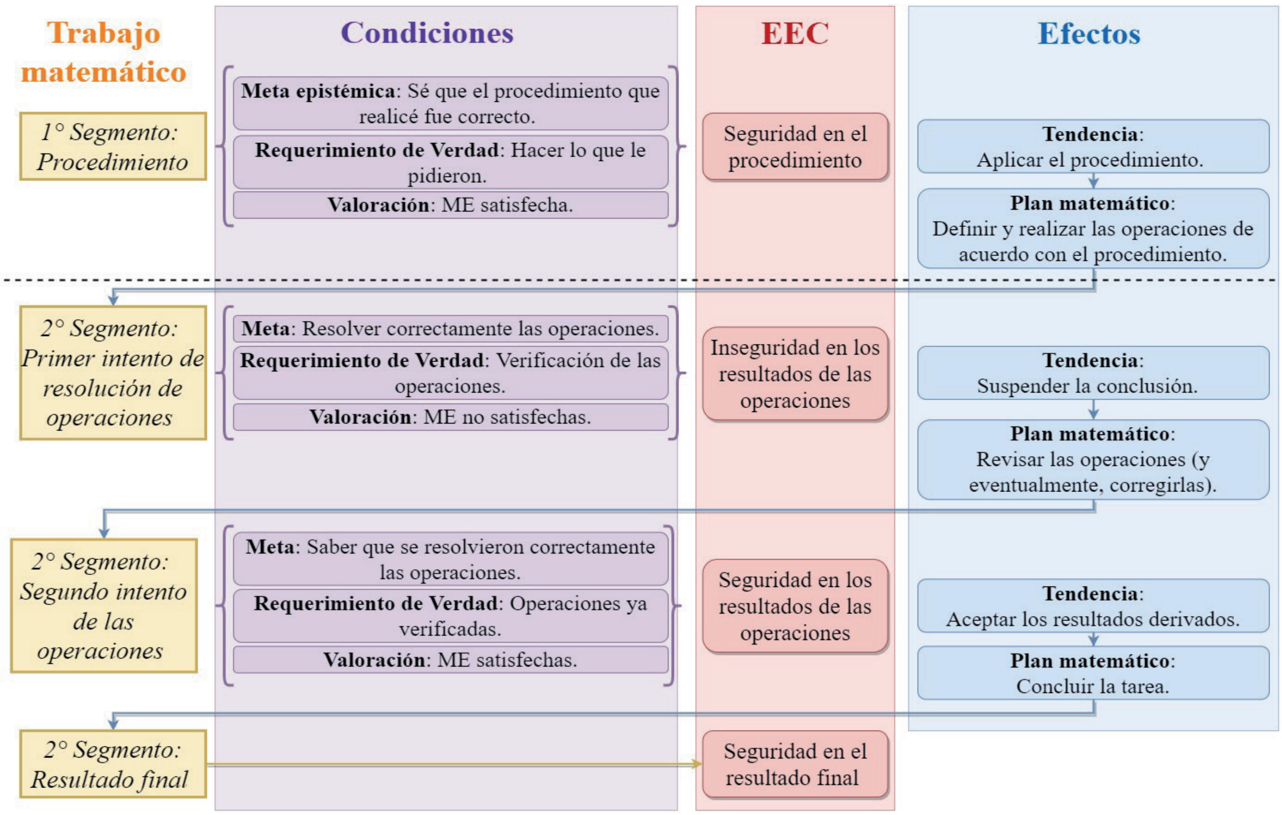


Figura 2. Trayectoria de la resolución de Hannia a la T1, organizada en torno a sus EEC.

DISCUSION DE RESULTADOS Y CONSIDERACIONES FINALES

El caso de Hannia y lo expuesto en el marco teórico sobre cómo adquieren los matemáticos seguridad en una conjetura, sugieren la hipótesis de que las condiciones que detona la seguridad en torno a algún resultado matemático se dan cuando el agente valora que ha alcanzado las Metas Epistémicas que se propuso porque ha aplicado satisfactoriamente los Requerimientos de Verdad que él se impuso. Esto cubre el primer objetivo de este escrito. Las Tendencias y los Planes matemáticos son algunos de los efectos que la seguridad tiene sobre los trabajos matemáticos. Esto cubre el segundo.

Brown (2014) observó en un grupo de alumnos (de un curso sobre la prueba) una disposición a dudar (que llama escepticismo) de la evidencia empírica y detectó en ellos una 'necesidad intelectual' de generar pruebas (argumentos generales) como medio para sustentar la verdad de proposiciones matemáticas universales. Estas necesidades intelectuales a las que hace referencia Brown equivalen a las metas epistémicas aquí definidas. Y la prueba que menciona Brown, constituye el requerimiento de veracidad con el que sus alumnos satisfacen sus metas epistémicas (o necesidades). Hemos dicho ya también que los requerimientos de verdad corresponden a los esquemas de prueba de Harel y Sowder (1998). De modo que aunque las categorías aquí definidas para describir la seguridad, sus condiciones y sus efectos, puedan resultarle extrañas al lector, están en consonancia con las ideas introducidas en la literatura. ¿Por qué entonces acuñar estas nuevas categorías? Porque con base en ellas se puede caracterizar, de manera fundamentada y coherente, a la seguridad y a los EEC como emociones que se activan o detonan a partir de metas epistémicas resueltas, en el caso de la seguridad (o de metas epistémicas no resueltas, en el caso de la duda). Esto permitirá ofrecer una respuesta (siempre hipotética) sobre la posible naturaleza de los EEC. Con base en la hipótesis de que los EEC son emociones (epistémicas) será posible explicar fundadamente ciertos fenómenos y problemáticas relacionadas con la presencia de los EEC en las actividades matemáticas (como el efecto adverso de la seguridad y la duda en los aprendizajes, entre otros) lo que será la base para el diseño y la aplicación de intervenciones didácticas en donde los EEC, y en particular la seguridad, funcionen como un motor de los aprendizajes y no como un freno. Esa es la agenda de trabajo que en el Programa se ha delineado para desarrollar en lo futuro.

Referencias

Bernal, A. (2022). *Las condiciones y los efectos de los estados epistémicos de convencimiento (seguridad o duda en torno a hechos de las matemáticas) que surgen durante la resolución de tareas matemáticas*. Tesis de maestría. Cinvestav.

Birks, M. y Mills, J. (2015). *Grounded theory: A practical guide.* Jai Seaman. https://doi.org/10.1123/apaq.28.3.277

Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. Ediciones SM.

Brown, S. A. (2014). On skepticism and its role in the development of proof in the classroom. *Educational Studies in Mathematics, 86*(3), 311–335. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9544-4

Corbin, J. y Strauss, A. (2015). Basics of qualitative research. *Journal of Marketing Research*. Sage.

de Villiers, M. (1190). The role and function of proof in Mathematics. *Pythagoras, 24*, 17-24.

Fischbein, E. (1987). *Intuituion in science and mathematics: An educational approach.* Reidel Publishing Company.

Foster, C. (2016). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics, 91*(2), 271–288. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9660-9

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes (Vol. III). En E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research on collegiate mathematics education* (pp. 234-283). Americal Mathematical Association.

Kline, M. (1985). *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*. Siglo XXI.

Martínez, B. y Rigo, M. (2014). ¿La certeza implica comprensión? En M. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XVIII (pp. 445–454). SEIEM.

Morse, J. M. (2007). Sampling in grounded theory. En A.B.D. Bryant y K. Charmaz (Eds.*), Handbook of Grounded Theory* (pp. 229-244). SAGE.

Muis, K. R., Psaradellis, C., Lajoie, S. P., di Leo, I. y Chevrier, M. (2015). The role of epistemic emotions in mathematics problem solving. *Contemporary Educational Psychology*, *42*, 172–185. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.06.003

Pozo, J. (2001). *Humana mente: el mundo, la conciencia y la carne*. Morata.

Rigo-Lemini, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 71–91. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9466-6

Vergaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. Trillas.

Weber, K., Mejía-Ramos, J. P. y Volpe, T. (2022). The relationship between proof and certainty in mathematical practice. *The Journal for Research in Mathematics Education, 53*(1), 65-84.

Zaslavasky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *60*, 297-321

LAS MATEMÁTICAS DESDE EL ABORDAJE STEAM EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA: UNA REVISIÓN SISTEMÁTICA DE LA LITERATURA

Mathematics embedded in STEAM approach in primary education: a systematic literature review

Rodrigues-Silva, J.[a,b] y Alsina, À.[b]

[a]Instituto Federal de Minas Gerais *Campus* Arcos, [b]Universitat de Girona

Resumen

La Educación STEAM requiere la interdisciplinariedad entre Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Artes/Humanidades y Matemáticas como estrategia para afrontar problemas complejos. Desde este punto de vista, se propone una revisión sistemática de la literatura siguiendo la Declaración de los Elementos de Información Preferidos para Revisiones Sistemáticas y Meta-Análisis (PRISMA), con el objetivo de explorar el aprendizaje de las matemáticas en los estudios empíricos sobre STEAM en la Educación Primaria. Se han revisado 19 artículos indexados en Web of Science o Scopus. Como resultado se observa que casi la mitad de los artículos no abordan el aprendizaje de las matemáticas de una manera consistente. Se concluye que existe un potencial para explicitar y desarrollar más las habilidades y conocimientos matemáticos en la educación STEAM, por supuesto, teniendo en cuenta los conocimientos que moviliza el alumnado de Educación Primaria.

Palabras clave: *matemáticas, educación STEAM, interdisciplinariedad, educación primaria.*

Abstract

STEAM Education calls for interdisciplinarity between Science, Technology, Engineering, Arts/Humanities and Mathematics as a strategy to face complex problems. From this point of view, we propose a systematic review of the literature following the Statement of Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses (PRISMA), to explore mathematics learning in empirical STEAM studies in Primary Education. We reviewed 19 articles indexed on the Web of Science or Scopus. As a result, we observed that almost half of the articles do not consistently address the learning of mathematics. In conclusion, there is a potential to further explicit and develop mathematical skills and knowledge in STEAM education, of course, taking into account the knowledge level of Primary Education students.

Keywords: *mathematics, STEAM education, interdisciplinarity, primary education.*

INTRODUCCIÓN

La educación STEAM, acrónimo del inglés que se refiere a la interdisciplinaridad entre Ciencias, Tecnologías, Ingeniería, Artes/humanidades y Matemáticas, es bastante defendida en cuanto al desarrollo de conocimientos y habilidades necesarios para que los individuos puedan afrontar la complejidad de los desafíos del siglo XXI (Fernández y Romero, 2020).

El eje de la educación STEAM consiste, pues, en la unión de las áreas que la conforman, y eso relacionado a experiencias y o contextos significativos del alumnado. Las Matemáticas suelen ser percibidas

Rodrigues-Silva J. y Alsina Á. (2022). Las matemáticas desde el abordaje steam en la educación primaria: una revisión sistemática de la literatura. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 509-518). SEIEM.

como omnipresentes o como un lenguaje universal entre las áreas. Si por un lado, las Matemáticas tienen una naturaleza que parece facilitar la interdisciplinaridad, por otro lado, los investigadores señalan el riesgo de perderse como área del conocimiento y tener sus objetivos de aprendizaje de conceptos y habilidades suprimidos, justificados por un sentimiento "ya garantizado" dentro de las actividades STEAM.

Considerando estas cuestiones, nos planteamos la pregunta de investigación: ¿Cómo se entiende, se practica y se investiga la enseñanza de las matemáticas desde un abordaje STEAM en la Educación Primaria? Para responder a esta pregunta, se desarrolla una revisión sistemática de la literatura con el objetivo de explorar el aprendizaje de las matemáticas en los estudios empíricos de STEAM en la Educación Primaria.

MÉTODO

Partiendo de nuestro objetivo de estudio, se ha seguido la metodología de revisión sistemática de la literatura de acuerdo con la Declaración de Elementos de Información Preferidos para Revisiones Sistemáticas y Meta-Análisis (PRISMA), donde se explica el proceso de investigación para posibilitar su reproducibilidad (Moher et al., 2015).

El proceso de investigación se ha definido en cuatro fases: 1) los elementos de búsqueda y la lógica booleana; 2) las fuentes de información; 3) los criterios de elegibilidad; 4) la extracción y el tratamiento de los datos. En los párrafos siguientes se profundiza en cada fase:

Fase 1. Elementos de búsqueda y lógica booleana

A partir del concepto clave de nuestro estudio, STEAM, y del nivel educativo que se pretende abordar, la Educación Primaria, se han formulado los elementos de búsqueda y se ha establecido la lógica booleana "*STEAM*" AND "*Primary*" OR "*Elementary*".

Fase 2. Fuentes de información

Se han elegido como fuente de información las bases de indexación *Web of Science* (WoS), de Clarivate Analytics, y *Scopus,* de Elsevier. Estas bases de datos han sido seleccionadas por su rigor y prestigio en la ciencia, y en particular por su relevancia en el campo de la investigación educativa.

Fase 3. Criterios de elegibilidad

En la tabla 1 resumimos los criterios de elegibilidad establecidos para esta revisión. Como tipo de documento, se ha establecido el criterio de inclusión de artículos de acceso abierto publicados en revistas científicas, ya que se someten a revisión por pares. El periodo de publicación abarca desde 2007, año en que se estableció el acrónimo STEAM, hasta diciembre de 2021, momento en que se realizó la búsqueda.

Tabla 1. Criterios de elegibilidad.

Criterios	Inclusión	Exclusión
Tipo de documento	Artículo	No artículos
Acceso a los documentos	Acceso abierto	Acceso restringido
Periodo de publicación	2007 - 2021	2006 o antes
Área de investigación	Educación	No educativo

Idioma	Inglés o español	Otros idiomas
Diseño de la investigación	Empírico	Teórico
Población estudiada	Práctica con estudiantes	No centrado en los estudiantes
Enfoque pedagógico	STEAM	Otros enfoques

Otro criterio ha sido incluir sólo los estudios registrados en el área de investigación educativa, de acuerdo con nuestro interés de investigación, evitando STEAM referente a "vapor". Además, respecto al idioma, se han seleccionado los documentos escritos en inglés, porque los artículos se publican mayoritariamente en este idioma; y en español, para incluir trabajos de países hispanohablantes.

Los tres últimos criterios se han establecido para refinar la selección de documentos a través de la lectura de los títulos y resúmenes de los artículos. Sólo se han incluído estudios empíricos, centrados en los estudiantes y que citasen explícitamente la Educación STEAM. Luego, con la lectura integral de los documentos, se ha verificado si todos los criterios elegibilidad se cumplían para garantizar que los estudios realmente estuviesen alineados con el objetivo de la investigación.

Los criterios de exclusión han sido básicamente antónimos a los de inclusión. Es decir, documentos que no sean artículos o de acceso restringido. También, documentos publicados antes de 2006, en ámbitos no educativos, escritos en idiomas distintos al inglés o al español. Por último, se ha adoptado el criterio de excluir los estudios teóricos y no centrados en el alumno, o centrados en enfoques educativos distintos de STEAM.

Fase 4. Extracción y tratamiento de datos

La lógica booleana establecida ha sido usada para escaneos en los títulos, resúmenes y palabras clave de los documentos. Encontramos inicialmente 12378 documentos localizados en *Web of Science* y *Scopus*. A continuación, se han usado los filtros de las plataformas para aplicación de los criterios de elegibilidad, como se muestra en la parte izquierda de la figura 1. De esta forma, se llega a 116 documentos.

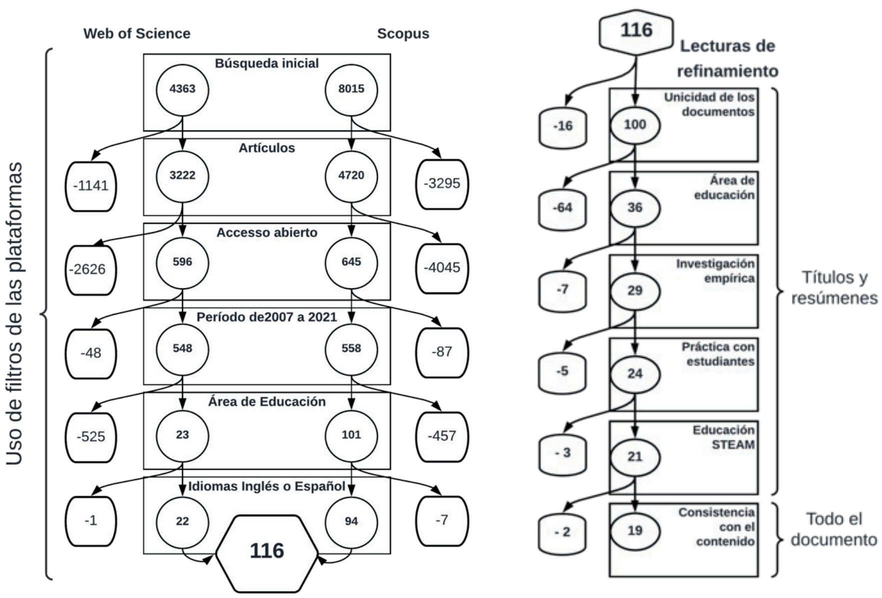


Figura 1. Filtrado mediante los motores de búsqueda de las plataformas *Web of Science* y *Scopus* y posteriores lecturas de refinamiento.

Como se puede apreciar en la parte derecha de la figura 1, a partir de los 116 artículos se ha realizado un refinamiento con la lectura de títulos y resúmenes. A partir de la unicidad de los documentos (excluyendo los repetidos), se han mantenido aquellos del ámbito educativo, con diseños empíricos, centrados en los estudiantes y que citen explícitamente la Educación STEAM. Seguidamente se ha realizado la lectura integral de los textos. En este proceso se han excluído dos artículos más, el estudio de Sengupta-Irving y Vossoughi (2019), porque no se trata de Educación Primaria, y el estudio de Bureekhampun y Mungmee (2020) porque se centra en el diseño de robots y la participación de los estudiantes se aborda de forma periférica.

Por lo tanto, culminamos con una lista de 19 artículos para esta revisión de literatura. Estos artículos han sido analizados mediante una primera lectura para conocimiento general de los textos; una segunda lectura para establecimiento de categorías de análisis; y lecturas posteriores para revaluación de las categorías y hasta la saturación del análisis.

RESULTADOS

Los resultados se presentan en dos partes: primero, se describen los artículos seleccionados en la revisión a partir de informaciones generales (zona geográfica del estudio, muestra, diseño metodológico etc.); seguidamente, se sitúa el foco en el aprendizaje de las matemáticas explicitado en algunos trabajos, seguido de una descripción sucinta de las prácticas pedagógicas desarrolladas.

Empezamos, pues, presentando informaciones generales de los estudios revisados en la tabla 1. En ella, podemos observar el listado de artículos, país, muestra, diseño metodológico, instrumento de recogida de datos, análisis y método de enseñanza. Se observa que los artículos se concentran temporalmente en los años más recientes, uno publicado en 2019, diez en 2020 y ocho en 2021. La distribución geográfica es heterogénea: gran parte de estudios han sido desarrollados en España (7), seguido por Finlandia (4), Corea (3) y China (2). Mientras Chile, Indonesia, Malasia aportan a esta revisión con apenas un estudio cada uno.

Metodológicamente, se observan estudios con muestras muy pequeñas, de 8 participantes, hasta muestras más amplias de 790 participantes. Sobre el diseño metodológico, casi la mitad de los artículos consisten en estudios de caso (9). Los otros pueden ser clasificados como cuasi-experimental (5) o experimental (5). El instrumento de recogida de datos preferido entre los autores es, sin duda, el cuestionario (10), seguido de vídeo (6) y notas de campo (6). Algunos trabajos usan más instrumentos asociados. El análisis de contenido es la estrategia de análisis más frecuente (8), seguida de estadística con tests paramétricos (7).

Las metodologías de enseñanza empleadas se concentran en el aprendizaje basado en proyectos (10), seguido de Aprendizaje Basado en Problemas (3). El juego, el aprendizaje experimental o artístico y la robótica están frecuentes respectivamente en dos estudios.

Ocho trabajos no abordan de manera consistente el papel o el aprendizaje de las matemáticas en sus planteamientos o resultados. Un mismo grupo de autores, por ejemplo, hizo grabaciones del alumnado mientras desarrollaban retos STEAM, focalizándose en el comportamiento y diálogo de los alumnos (Kajamaa y Kumpulainen, 2020), satisfacción (Kumpulainen y Kajamaa, 2020) y constructos de liderazgo (Leskinen et al., 2021). Aunque aparecieron situaciones como el ajuste de ángulos de un rayo láser, estas no fueron abordadas en profundidad. Cabello et al. (2021), por ejemplo, reportan que ellos tuvieron dificultad en la integración de contenidos o habilidades matemáticas en las actividades.

Por otro lado, 11 artículos han abordado las Matemáticas. Estos estudios se muestran en la tabla 2, con la descripción de la actividad pedagógica desarrollada. De estos artículos, se observa que muchos proponen actividades pedagógicas relacionadas a la electricidad, como la construcción de una casa en miniatura con un generador eléctrico (Adriyawati et al., 2020), el diseño de iluminación de una habitación (Greca et al., 2021) o la creación de una iluminación con imágenes cortadas en papel (Lu et al., 2021).

Algunas descripciones de los aprendizajes matemáticos consisten en mediciones de tiempo, longitud (como en Adriyawati et al., 2020; Bassachs et al., 2020; Lu et al., 2021), comprensión o clasificación del movimiento (Bassachs et al., 2020; Tan et al., 2020). Algunos explicitaron aspectos relacionados a formas geométricas (Espigares-Gámez et al., 2020; Fernández-Oliveras et al., 2021; Song et al., 2019).

Tabla 2. Lista de artículos con información sobre el país, muestra, el diseño metodológico, instrumentos de recogida y análisis de datos de los estudios.

			Diseño metodológico			Instrumento de recogida de datos							Análisis				Método de enseñanza				
Artículo	País	Muestra	Estudio de caso	Cuasi-experimental	Experimental	Entrevista	Narración reflexiva	Cuestionario	Grabaciones de Vídeo	Producto final	Notas de campo	Análisis de contenido	Interacción multimodal	Estad. paramétrica	Estad. no paramétrica	Estad. descriptiva	Proyecto	Juego	Experimental/artística	Problemas	Robótica
Adriyawati et al. (2020)	Indonesia	30	x			x	x			x	x	x					x				
Bassachs et al. (2020)	España	90			x	x					x	x			x				x		
Cabello et al. (2021)	Chile	95	x				x	x			x	x		x					x		
Fernández y Romero (2020)	España	57		x				x		x				x							x
Cervera et al. (2020)	España	24		x				x								x					x
Espigares-Gámez et al. (2020)	España	16	x						x		x	x						x			
Fernández-Oliveras et al. (2021)	España	32	x						x		x	x						x			
Greca et al. (2021)	España	121	x				x				x	x								x	
Jang et al. (2020)	Corea	58			x			x						x						x	
Kajamaa y Kumpulainen (2020)	Finlandia	8	x						x				x				x				
Kumpulainen y Kajamaa (2020)	Finlandia	94	x						x				x				x				
Kwack y Jang (2021)	Corea	270			x			x						x						x	
Leskinen et al. (2021)	Finlandia	20	x						x				x				x				
Lu et al. (2021)	China	21		x				x	x	x		x					x				
Song et al. (2019)	Corea	790			x	x		x						x			x				
Tan et al. (2020)	Malasia	59		x				x						x			x				
Tran et al. (2021)	China	66			x			x						x			x				
Ruiz Vicente et al. (2020)	España	30		x				x								x	x				
Yliverronen et al. (2021)	Finlandia	19	x						x			x					x				

Tabla 2. Descripción de la actividad pedagógica y el abordaje de las matemáticas en los estudios.

Artículo	**Descripción de la actividad pedagógica**	**Abordaje de las Matemáticas**
Adriyawati et al. (2020)	Construcción de una casa en miniatura con un generador eléctrico de fuente manual o solar	Cálculos de tiempo en la fabricación de herramientas, conceptos matemáticos para encontrar el tamaño (medición) adecuado para cada campo requerido
Bassachs et al. (2020)	Experimentos científicos y traslación de conceptos físicos al movimiento-danza	Medidas de longitud y tiempo, clasificación de movimiento
Cabello et al. (2021).	Retos con distintos problemas de investigación	Recopilar, analizar y representar datos matemáticamente
Fernández y Romero (2020)	Programación y construcción de los robots	Pensamiento computacional, descomposición, abstracción, iteración y generalización
Espigares-Gámez et al. (2020)	Juegos tradicionales jamaicanos	Enfoque etnomatemático: matemáticas cotidianas interculturales en juegos. Identificación de formas, figuras planas, rotaciones, relaciones topológicas espaciales, longitudes o distancias vacías, ángulos en trayectorias hipotéticas, elaboración y percepción de estructuras espaciales
Fernández-Oliveras et al. (2021)	Juegos tradicionales	Enfoque etnomatemático: Identificar formas planas y cuerpos tridimensionales, situarse en el plano y el espacio, ordenar, clasificar, reconocer patrones, mensurar y aproximar. Plantear cuestiones numéricas y determinar aspectos geométricos
Greca et al. (2021)	Diseño de iluminación de una habitación	Recoger, clasificar, representar e interpretar datos obtenidos sobre el consumo de electricidad
Lu et al. (2021)	Luminaria con imágenes cortadas en papel: programación lógica con conexión de sensores, luces, altavoz	Medición simple, cálculo del tiempo, álgebra, pensamiento lógico, función.
Song et al. (2019)	Programación de pantalla flexible de LED	Identificación de distintas formas geométricas y creación de patrones
Tan et al. (2020)	Diseño de juegos e historias animadas centrado en conceptos sobre electricidad	Calcular y modificar los pasos de los personajes
Tran et al. (2021)	Diseño de un cofre en forma de casa	Principios matemáticos de la cerradura (explicación no profundizada), identificar y separar monedas

En contrapartida, hay trabajos que exploran el uso de las matemáticas de manera más profunda, como asociado al proceso investigativo, en la recogida, análisis y representación de dados (Cabello et al., 2021; Greca et al., 2021), o bien relacionado con la programación y el pensamiento computacional, por la descomposición, abstracción, iteración y generalización. Espigares-Gámez et al. (2020) y Fernández-Oliveras et al. (2021) explotan el carácter etnomatemático en el uso de juegos tradicionales. Explicitan una serie de procesos cognitivos matemáticos, como identificar formas planas y cuerpos tridimensionales, situarse en el plano y el espacio, ordenar, clasificar, reconocer patrones, mensurar y aproximar.

CONCLUSIONES

Las investigaciones empíricas de STEAM en Educación Primaria de esta revisión han sido, en su gran mayoría, publicadas en 2020 o 2021, y concentradas en España. En estos estudios, se desarrollan metodologías de aprendizaje activas, especialmente el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP). Casi la mitad de los artículos no abordan el aprendizaje de las Matemáticas de una manera mínimamente consistente. Entre los que sí lo trabajan, algunos se restringen a usos más sencillos, como mediciones de tiempo y de longitud. Mientras otros trabajan las matemáticas de manera más profunda e interdisciplinar, como asociado al proceso investigativo: en la recogida, análisis y representación de dados. También trabajan las Matemáticas desde el contexto cotidiano intercultural, como en la perspectiva de la Eetnomatemática. La revisión bibliográfica puede ser útil para informar la agenda de investigación en torno a las matemáticas en STEAM. Se concluye que existe un potencial, pero aún poco explotado, de argumentación matemática en el marco de las conexiones interdisciplinares (Alsina et al., 2021) y de desarrollo de las habilidades y conocimientos matemáticos en la educación STEAM, por supuesto, teniendo en cuenta el nivel del alumnado en Educación Primaria. En el futuro se pretende expandir la revisión añadiendo con nuevos trabajos y con publicaciones de revistas con acceso restringido.

Referencias

Adriyawati, A., Utomo, E., Rahmawati, Y. y Mardiah, A. (2020). STEAM-project-based learning integration to improve elementary school students' scientific literacy on alternative energy learning. *Universal Journal of Educational Research*, *8*(5), 1863-1873. https://doi.org/10.13189/ujer.2020.080523

Alsina, Á., Cornejo-Morales, C. y Salgado, M. (2021). Argumentación en la matemática escolar infantil: Análisis de una actividad STEM usando la situación argumentativa en conexión interdisciplinar. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *20*, 141–159. https://doi.org/10.35763/aiem20.3999

Bassachs, M., Cañabate, D., Nogué, L., Serra, T., Bubnys, R. y Colomer, J. (2020). Fostering critical reflection in primary education through STEAM approaches. *Education Sciences*, *10*(12), 384. https://doi.org/10.3390/educsci10120384

Bureekhampun, S. y Mungmee, T. (2020). A study of STEAM education patterns to design activities for children at age 6. *Journal for the Education of Gifted Young Scientists*, *8*(3), 1201-1212. https://doi.org/10.17478/jegys.775835

Cabello, V. M., Martinez, M. L., Armijo, S. y Maldonado, L. (2021). Promoting STEAM learning in the early years: "Pequeños Científicos" Program. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, *9*(2), 33-62. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.2.1401

Cervera, N., Diago, P. D., Orcos, L. y Yáñez, D. F. (2020). The acquisition of computational thinking through mentoring: an exploratory study. *Education Sciences*, *10*(8), 202. https://doi.org/10.3390/educsci10080202

Espigares-Gámez, M. J., Fernández-Oliveras, A. y Oliveras Contreras, M. L. (2020). Games as STEAM learning enhancers. Application of traditional Jamaican games in early childhood and primary intercultural education. *Acta Scientiae*, *22*(4), 28-50. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6019

Fernández-Oliveras, A., Espigares-Gámez, M. J. y Oliveras, M. L. (2021). Implementation of a playful microproject based on traditional games for working on mathematical and scientific content. *Education Sciences*, *11*(10). https://doi.org/10.3390/educsci11100624

Fernández, R. C. y Romero, M. C. (2020). Robotics and STEAM projects: Development of creativity in a primary school classroom. *Pixel-Bit, Revista de Medios y Educacion*, *58*, 51-69. https://doi.org/10.12795/pixelbit.73672

Greca, I. M., Ortiz-Revilla, J. y Arriassecq, I. (2021). Diseño y evaluación de una secuencia de enseñanza-aprendizaje STEAM para Educación Primaria. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, *18*(1), 1-20. https://doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2021.v18.i1.1802

Jang, J., Hong, J. W. y Kim, J. (2020). Career development of upper elementary students through steams-based gardening programs. *Journal of People, Plants, and Environment*, *23*(2), 221-231. https://doi.org/10.11628/ksppe.2020.23.2.221

Kajamaa, A. y Kumpulainen, K. (2020). Students' multimodal knowledge practices in a makerspace learning environment. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, *15*(4), 411-444. https://doi.org/10.1007/s11412-020-09337-z

Kumpulainen, K. y Kajamaa, A. (2020). Sociomaterial movements of students' engagement in a school's makerspace. *British Journal of Educational Technology*, *51*(4), 1292-1307. https://doi.org/10.1111/bjet.12932

Kwack, H. R. y Jang, E. J. (2021). Development and application of a STEAM program using classroom wall gardens. *Journal of People, Plants, and Environment*, *24*(4), 365-376. https://doi.org/10.11628/ksppe.2021.24.4.365

Leskinen, J., Kumpulainen, K., Kajamaa, A. y Rajala, A. (2021). The emergence of leadership in students' group interaction in a school-based makerspace. *European Journal of Psychology of Education*, *36*(4), 1033-1053. https://doi.org/10.1007/s10212-020-00509-x

Lu, S.-Y., Lo, C.-C. y Syu, J.-Y. (2021). Project-based learning oriented STEAM: the case of micro–bit paper-cutting lamp. *International Journal of Technology and Design Education*, *0123456789*. https://doi.org/10.1007/s10798-021-09714-1

Moher, D., Shamseer, L., Clarke, M., Ghersi, D., Liberati, A., Petticrew, M., Shekelle, P. y Stewart, L. A. (2015). Preferred reporting items for systematic review and meta-analysis protocols (PRISMA-P) 2015 statement. *Systematic Reviews*, *4*(1), 1. https://doi.org/10.1186/2046-4053-4-1

Ruiz Vicente, F., Zapatera Llinares, A. y Montés Sánchez, N. (2020). "Sustainable City": A STEAM project using robotics to bring the city of the future to primary education students. *Sustainability*, *12*(22), 9696. https://doi.org/10.3390/su12229696

Sengupta-Irving, T. y Vossoughi, S. (2019). Not in their name: re-interpreting discourses of STEM learning through the subjective experiences of minoritized girls. *Race Ethnicity and Education*, *22*(4), 479-501. https://doi.org/10.1080/13613324.2019.1592835

Song, H.-S., Kim, S.-H., Song, Y.-J., Yoo, P.-R., Lee, J.-Y. y Yu, H. (2019). Effect of STEAM Education Program Using Flexible Display. *International Journal of Information and Education Technology*, *9*(8), 559-563. https://doi.org/10.18178/ijiet.2019.9.8.1266

Tan, W.-L., Samsudin, M. A., Ismail, M. E. y Ahmad, N. J. (2020). Gender differences in students' achievements in learning concepts of electricity via STEAM integrated approach utilizing scratch. *Problems of Education in the 21st Century*, *78*(3), 423-448. https://doi.org/10.33225/pec/20.78.423

Tran, N.-H., Huang, C.-F., Hsiao, K.-H., Lin, K.-L. y Hung, J.-F. (2021). Investigation on the Influences of STEAM-Based Curriculum on Scientific Creativity of Elementary School Students. *Frontiers in Education*, *6*, 1-8. https://doi.org/10.3389/feduc.2021.694516

Yliverronen, V., Rönkkö, M.-L. y Kangas, K. (2021). Learning everyday technologies through playful experimenting and cooperative making in pre-primary education. *FormAkademisk - forsknings-tidsskrift for design og designdidaktikk*, *14*(2), 1-10. https://doi.org/10.7577/formakademisk.4198

ANÁLISIS DE UNA TAREA DE INVENCIÓN DE PROBLEMAS REALIZADA POR ALUMNOS CON TALENTO MATEMÁTICO

Analysis of a problem posing task proposed to mathematical talented students

Ruiz-Socolado, G. R. y Lupiáñez, J. L.

Universidad de Granada

Resumen

La invención de problemas es una actividad que permanece un segundo plano en las aulas y puede ser utilizada para fines diversos como la detección y el estímulo del talento matemático. En este trabajo fueron analizadas 15 respuestas a una tarea de invención de problemas propuesta a estudiantes con talento matemático de entre 13 y 15 años. Se hizo un análisis cualitativo atendiendo a la resolubilidad de los problemas planteados, el contexto usado en el enunciado y la complejidad sintáctica y matemática de estos. El objetivo fue encontrar algunas de las características de los problemas generados por este tipo de estudiantes. Se concluye que las producciones de los alumnos con talento son notablemente ricas y originales, muestran una actitud positiva hacia las matemáticas como herramienta para entender la realidad y generan problemas de elevada complejidad respecto a su nivel curricular.

Palabras clave: *análisis de tareas, invención de problemas, talento matemático.*

Abstract

Problem posing is an activity that stay in the background in the classroom and it can be useful for several purposes such as the identification and stimulation of mathematical talent. In this research we analysed 15 answers from gifted students between 13 and 15 years of age to a problem posing task. We did a qualitative analysis that studies the possibility of resolution, the context and syntactic and mathematical complexity. The purpose was to find some of the characteristics of the problems generated by this type of students. It can be conclude that the problems posed by mathematical gifted students are very rich and original, and they show a positive attitude toward maths as a tool to understand the reality and they generate problems with a high level of complexity in comparison with the curriculum.

Keywords: *gifted students, problem posing, task analysis.*

INTRODUCCIÓN

Los problemas son uno de los elementos vertebradores de los currículos de matemáticas pero suelen ser enfocados desde el punto de vista de la resolución, bien sea para poner en práctica los contenidos estudiados, o bien para basar el aprendizaje en los mismos. Uno de los tipos de tareas relacionadas con los problemas que suelen quedar en un segundo plano son las relacionadas con la creación de estos.

Las tareas de invención de problemas movilizan en los estudiantes procesos cognitivos complejos que deben concretarse en la formulación de un enunciado utilizando los contenidos y procesos matemáticos que conocen. Además de ser tareas ricas, son tareas accesibles y fácilmente adaptables a todo el

Ruiz-Socolado, G. R. y Lupiáñez, J. L. (2022). Análisis de una tarea de invención de problemas realizada por alumnos con talento matemático. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 519-527). SEIEM.

alumnado, y pueden poner de manifiesto los conocimientos que el alumno posee, las relaciones que es capaz de observar entre ellos, las representaciones que domina y la actitud hacia las matemáticas que tiene.

Este carácter accesible de las tareas de invención de problemas podría servir para atender a la diversidad presente en todas las aulas. En concreto, en nuestra investigación nos centraremos en alumnos con talento matemático.

La pregunta de investigación que abordamos en esta investigación es: ¿qué características poseen los problemas inventados por estudiantes con talento matemático del primer ciclo de secundaria? Para tratar de responder se analizaron problemas creados por este tipo de alumnos para conocer los rasgos que presentan, atendiendo a su resolubilidad y a su complejidad, tanto matemática como sintáctica.
Marco teórico

Talento matemático

Existe un problema conceptual en la investigación educativa respecto a los términos alta capacidad, superdotación y talento (Tourón, 2020). Aunque sí existe un alto grado de consenso respecto a la diferenciación entre dotación y talento

> El término dotado corresponde a una capacidad claramente por encima de la media en uno o más dominios de la aptitud humana, en relación con su grupo de iguales (en edad o en capacidad). El término talento se concibe como una competencia especial para determinadas áreas de la actividad humana. (Tourón, 2020, p. 23)

Esta investigación se apoyó en la teoría de los tres anillos de Renzulli, que concibe la dotación como la interacción entre tres grupos básicos de rasgos humanos: capacidad por encima de la media, fuertes niveles de compromiso con la tarea y creatividad (Renzulli, 2012). Además, esta teoría está enfocada a la productividad creativa, cuestión que es de especial relevancia en las tareas de invención de problemas.

Este trabajo se centra en el talento en un área concreta del conocimiento, el talento matemático. Así, dentro del marco presentado se utilizó la siguiente definición que incluye una serie de características identificadas en investigaciones previas:

> El alumno con talento matemático es aquel que pregunta espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean, busca patrones y relaciones, construye nexos, lazos y estructuras matemáticas, localiza la clave de los problemas, produce ideas originales, valiosas y extensas, mantiene bajo control los problemas y su resolución, presta atención a los detalles, desarrolla estrategias eficientes, cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra, piensa de modo crítico y persiste en la consecución de los objetivos que se propone. (Ramírez, 2012, pp. 23-24)

Cabe destacar que la investigación centrada en el talento matemático y realizada desde el campo de la didáctica de las matemáticas en España es relativamente reciente y no muy abundante en número (Jaime y Gutiérrez, 2017).

Invención de problemas

El termino invención de problemas se usa para referirse tanto a la reformulación de un problema dado como a la creación de un problema nuevo. En este trabajo se usará el segundo de los significados, creación de problemas nuevos.

Las tareas de creación de problemas pueden clasificarse en tres tipos atendiendo a las condiciones que se plantean, teniendo así situaciones libres, estructuradas y semiestructuradas. En las situaciones libres no hay restricciones para inventar el problema, mientras que en las situaciones estructuradas y semiestructuradas se deben crear problemas partiendo de una información, contexto o experiencia siendo más restrictiva la situación estructurada que la semiestructurada (Stoyanova, 1998).

En la actualidad hay un interés creciente en la investigación sobre invención de problemas desde varios puntos de vista como la integración de esta actividad en la educación matemática de forma sistemática, su uso para explorar la comprensión de los estudiantes o la percepción que estos tienen sobre las matemáticas (Klaassen y Doorman, 2015)

Talento matemático e invención de problemas

Según Cai et al. (2015), una de las preguntas que debe responder la investigación en educación matemática respecto a la invención de problemas es su capacidad para medir la creatividad, pero ya ha habido autores que han utilizado este tipo de tareas en el trabajo con alumnado con talento matemático. Uno de los primeros estudios al respecto fue el de Ellerton (1986) donde los estudiantes más talentosos proponen problemas más complejos (más operaciones y de complejidad mayor y datos más elaborados) que los estudiantes con capacidad media. Jaime y Gutiérrez (2017) muestra varias investigaciones que ilustran que los problemas producidos por estudiantes con talento son ricos en la variedad de tipos de números usados y que necesitan varias operaciones para ser resueltos.También hay investigaciones que comparan las producciones de estudiantes con talento frente a las realizadas por grupos estándar, algunos de los elementos que caracterizan las producciones de los estudiantes con talento son la riqueza de los problemas y la flexibilidad exhibida durante el proceso de creación (Espinoza, 2018).

METODOLOGÍA

Este estudio, de carácter exploratorio, se enmarca dentro de un diseño mixto aunque predominantemente cualitativo. Además, es de tipo descriptivo transversal que busca ampliar información relacionada con los sujetos con talento matemático a través el análisis de los problemas que inventan. En nuestro caso, los estudiantes ya han sido identificados con talento pues forman parte del programa ESTALMAT. Para ingresar en este programa se requiere superar una serie de entrevistas que requerían la resolución de diferentes problemas matemáticos, que como muestra Fernández et al. (2008) son un buen método para identificar el talento matemático.

Descripción de la muestra

Los participantes en esta investigación fueron 15 alumnos con talento matemático con edades comprendidas entre los 13 y los 15 años.

Recogida de información

Se propuso una tarea de invención de problemas semiestructurada mediante un formulario en línea durante una sesión del programa ESTALMAT supervisada por dos profesores. El enunciado propuesto fue el siguiente: “Inventa un problema de matemáticas que te parezca difícil de resolver y que esté relacionado con el coronavirus”. Había dos opciones para resolver la tarea, bien utilizando el cuadro de texto del formulario en línea, o bien subiendo una imagen de un papel manuscrito indicando que de esta manera se podían añadir dibujos, gráficas o expresiones matemáticas. El tiempo disponible para realizar la tarea fue de diez minutos.

La tarea presenta dos condiciones, la referente al coronavirus puede condicionar la temática o contexto y la otra sobre la percepción de complejidad busca la producción de problemas elaborados a la par que presenta un reto. Esta última condición ha sido usada en otras investigaciones en este campo (Espinoza, 2011, 2018).

Una vez recogida la información se asignó a cada problema una letra mayúscula para hacer referencia a el durante el proceso de análisis de respuestas. Los problemas fueron analizados por los dos autores de este trabajo.

Categorías de análisis

Uno de los principales problemas encontrados en la investigación sobre invención de problemas es la dificultad para valorar las producciones. Las categorías usadas en el análisis fueron seleccionadas de Espinoza (2018), adaptadas a las condiciones de la tarea y simplificadas para su uso en esta investigación. Las categorías elegidas se centran en la resolubilidad del problema, el contexto y la complejidad sintáctica y matemática del mismo.

Fueron catalogados como resolubles aquellos problemas que pueden ser resueltos usando exclusivamente los datos del enunciado, es decir, se consideraron no resolubles producciones que podrían ser resueltas como tareas de investigación. También se clasificaron como no resolubles enunciados que no contuvieran una cuestión y aquellos con datos contradictorios o incoherentes.

Respecto al contexto del problema se evaluó su vinculación directa con las matemáticas, el tipo y relevancia del contexto. Un problema se consideró con vinculación directa con las matemáticas si su contexto era exclusivamente matemático.

Para clasificar el tipo de contexto usamos la clasificación expuesta en Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2019) que distingue cuatro contextos: personal, ocupacional, social y científico. Un contexto es personal cuando atañe a la propia vida del individuo o a la de sus círculos cercanos (familia, amigos, escuela…). Un contexto es ocupacional se centran en el mundo del trabajo en cualquiera de sus niveles de complejidad. Un contexto es considerado social si hace referencia a la comunidad local, nacional o global del estudiante. Un contexto es científico si requiere que las matemáticas se apliquen al mundo natural o cuestiones de ciencia y tecnología.

Con la variable relevancia del contexto se valoró cuan importante era este en la resolución del problema. Se establecieron tres órdenes de relevancia. Un problema fue considerado de orden 0 si el contexto es accesorio a la resolución del problema, es decir, si el contexto es una excusa para proponer un ejercicio matemático. Los problemas catalogados como de orden 1 fueron aquellos que sí necesitaron del contexto para ser resueltos o para analizar los resultados obtenidos pero no requirieron una matematización profunda. Por último, aquellos problemas catalogados como de orden 2 requirieron un proceso elaborado de matematización para ser resueltos.

En la categoría complejidad sintáctica se estudió la capacidad de los estudiantes para proponer problemas con un discurso coherente, ordenados y con unas relaciones equilibradas entre palabras y símbolos matemáticos (Puig y Cerdán, 1990). Se estudió la longitud del enunciado y la coherencia del mismo, la flexibilidad numérica evidenciada (tipos de números que aparecen) y el tipo de pregunta empleada.

Los indicadores usados para valorar la coherencia del enunciado fueron: contiene todas las partes necesarias (información, contexto y pregunta), no hay contradicciones en la información proporcionada, existe relación entre la pregunta y la información del problema, las expresiones matemáticas utilizadas son coherentes, no contiene errores semánticos y contiene la información necesaria para resolver el problema.

Para estudiar el tipo de pregunta consideramos tres tipos de proposiciones interrogativas: de asignación, relacionales y condicionales. Las preguntas de asignación son aquellas que esperan ser respondidas con una cantidad. Las cuestiones relacionales requieren la comparación dos variables. Las interrogativas condicionales son aquellas precedidas de una proposición condicional (antecedente). De acuerdo con Silver y Cai (2005), asumimos que las preguntas del tipo condicional o relacional son más complejas que las de asignación.

En la categoría de complejidad matemática se estudia la demanda cognitiva que presenta el problema propuesto a la hora de ser resuelto. Las variables consideradas fueron las siguientes: cantidad de pasos diferentes para ser resuelto, empleo de ideas complejas, nivel de complejidad PISA y campos del conocimiento matemático empleados. Consideramos que un problema requería de ideas complejas para ser resuelto si se han tenido que utilizar herramientas que no aparecen en el currículo del curso de los estudiantes. Los niveles de complejidad PISA considerados fueron: reproducción, conexión y reflexión y se definieron en base al documento de Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (2006).

RESULTADOS

Resolubilidad de los problemas

Todas las producciones de los estudiantes fueron problemas matemáticos, es decir, todas los enunciados se ajustan a cuestiones que podrían resolverse empleando las matemáticas. Aunque no todos los problemas planteados fueron resolubles, concretamente, 6 de los 15 fueron considerados no resolubles. Un ejemplo de ellos fue el problema D, "La situación está muy mal. Los infectados suben cada vez más rápido. Si el primer día hubo 10 infectados, se curaron 5, y cada día se infectan un 150% más de los que estaban el día anterior, y sólo se consiguen curar cada día 125% más personas que el día anterior, ¿Cuánto tardará en infectarse toda la humanidad teniendo en cuenta que la nueva cepa resiste toda posibilidad de vacuna?"; este problema sería resoluble si se pudiera acceder al dato de la población mundial."

La proporción de no resolubles es similar a la documentada por Espinoza (2011) en el grupo de estudiantes con talento matemático, Espinoza apuntaba diversas causas para ello como no tener que resolver los problemas que proponían, no tener miedo a equivocarse o una buena disposición hacia las matemáticas.

Contexto del problema

Ninguno de los 15 problemas analizados posee una relación directa con las matemáticas, es decir, son problemas que van más allá del contexto matemático. Aunque se consideró que este resultado está muy influenciado por la restricción temática con la que se enunció la tarea.

Respecto a los contextos PISA se observó un predominio del contexto social (7) y científico (6), frente a la ausencia de problemas con contexto ocupacional y sólo 2 producciones enmarcadas en el contexto personal. Todas las producciones tenían un claro componente social pero se consideró el lenguaje utilizado para diferenciar las cuestiones meramente sociales de las científicas, por ejemplo el problema B ("En la Península Ibérica se han desarrollado dos vacunas la "Campo Arenosillo" española y la "Valira" andorrana. La vacuna española tiene un 80% de eficacia en menores, 85% en adultos de 18-65 años y un 75% en jubilados, con un 3% de margen de error. La vacuna andorrana tiene un 60% de eficacia en menores, un 80% de eficacia en adultos de 18-65 años y un 90% en jubilados, con un margen de error del 5%. La vacuna andorrana es ligeramente más cara que la española. ¿Cuál es más eficaz?") se catalogó dentro del contexto científico porque atañe a la eficacia de las vacunas diferenciando rangos de edad.

El contexto fue especialmente relevante en la mayoría de los problemas puesto que solo 2 producciones se consideraron de orden 0 frente a 4 problemas de orden 1 y 9 problemas de orden 2. Uno de los problemas de orden 0 fue el C "Si en España la sanidad pública cuenta con 112.219 camas y actualmente solo quedan el 40% de las camas libres. ¿Cuantos enfermos hay en las camas hospitalarias?", en el que el contexto no es relevante en el proceso de resolución. En el extremo contrario, relevancia del contexto de orden 2, encontramos problemas como el G "En un pueblo de 150.000 habitantes, Hay una incidencia de 360 infectados por cada 1000 habitantes. Además, han vacunado al 30% de la población sana y van a un ritmo medio de 30 vacunas al día. Aunque el covid tampoco se queda atrás, ya que por cada habitante, 1.2 personas son infectadas al día. Suponiendo que la vacuna solo se le pondría a aquellos que no estuviesen ya infectados, y que los infectados tardarían un máximo de 30 días en curarse. ¿Cuántas vacunas necesitará el gobierno en total?¿Cuánto tiempo pasará hasta que todo el mundo halla recibido la vacuna o se halla curado del covid?", donde en cada proceso de la resolución debe acudirse al contexto del problema.

Complejidad sintáctica

Atendiendo a la longitud del enunciado se obtuvieron 7 problemas cortos (tres proposiciones o menos) y 8 problemas largos (cuatro o más proposiciones). Es decir, se observó una tendencia a formular problemas breves pero que expresaban la cuestión de forma precisa o problemas largos con un gran número de condiciones a tener en cuenta.

Salvo uno de los problemas, todos cumplían alguna de las variables sobre la coherencia del enunciado. Además, el nivel general de coherencia de las producciones es elevado puesto que 13 de las 15 producciones cuenta de manera simultánea con los siguientes indicadores: la información no presenta contradicciones, existe relación entre la pregunta y la información del problema, las expresiones matemáticas utilizadas son coherentes y no contiene errores semánticos.

Respecto a la flexibilidad numérica encontramos 7 problemas que sólo emplean un tipo de número, números naturales, 7 de ellos que emplean dos o tres tipos de número destacando los racionales en distintas representaciones (tanto por ciento, tanto por mil, fracción y decimal) y 1 producción en la que no aparecen ningún número en el enunciado, el problema I ("¿Cuál es la sucesión que refleja el número de personas infectadas por COVID mensualmente desde que empezó la pandemia? (No tenemos datos reales a nuestra disposición)"). Este último problema muestra una ruptura con lo esperado, que aparezcan números en un problema de matemáticas, evidenciando creatividad y una visión de las matemáticas que va más allá de lo numérico. También es destacable la buena adecuación al contexto que poseen los números empleados, ejemplo de ello es el problema A ("Si la tasa de mortalidad en España fue de 8,83‰ en 2019, ¿cuánto porcentaje habrá subido en 2020?") en el que el dato de la mortalidad aparece en la unidad oficial, el tanto por mil, que no es una representación de los racionales frecuente en la matemática escolar.

En cuanto al tipo de pregunta empleada se observan 7 problemas de asignación, 7 problemas condicionales y solo 1 enunciado de tipo relacional. Aunque debemos señalar que la mayoría de cuestiones de asignación fueron enunciadas tras describir una serie de condiciones, es decir, son cuestiones con un claro componente condicional.

Complejidad matemática

Para analizar esta variable se resolvieron también aquellos problemas que, aun siendo catalogados como no resolubles podrían resolverse como tarea de investigación consultando los datos que faltaban. Así, se analizaron en esta categoría 13 problemas. Hubo 8 problemas que requirieron tres o cuatro pasos diferentes para ser resueltos, mientras que los 5 restantes requirieron de cinco pasos o más. Además, 12 de los 13 analizados requirieron de ideas complejas para su resolución, como el problema

E "Teniendo en cuenta la cantidad de aire que una persona expulsa durante 10 segundos y la cantidad de virus, ¿cuánto puede tardar una persona en contraer el coronavirus estando sin mascarilla en un espacio cerrado?", puesto que requiere una modelización profunda y una selección cuidada de las variables a tener en cuenta.

Si atendemos a los niveles de complejidad PISA, únicamente encontramos 1 tarea de reproducción, 3 enunciados de conexión y 9 problemas de reflexión. Un ejemplo de enunciado de conexión es el problema O "Una persona asintomática infecta a 2 personas cada 15min. Si está en una habitación con 30 personas durante 2 horas y de estas un tercio no va a ser infectadas, ¿cuál es la probabilidad de que los tres quintos de las personas no se infecten?". Como enunciado de reflexión encontramos el problema N "Tenemos tres vacunas distintas contra el coronavirus: 200 dosis de la marca Pfizer, 400 dosis de la marca Moderna y 600 dosis de la marca Astrazeneca. Si tenemos que vacunar a 600 personas contra el coronavirus y para que la vacuna funcione hay que ponerse dos dosis, ¿de cuántas maneras distintas se pueden repartir? Si esas 600 personas están repartidas en tres grupos iguales en tres hospitales y teniendo en cuenta que cada hospital prefiere poner la misma vacuna a todos los pacientes (si es posible), ¿de cuántas maneras distintas se podría hacer la distribución ahora? Si los mayores de 80 solo pueden ser vacunados con la primera vacuna y suponen el 20% de los pacientes de cada hospital, ¿como deberíamos realizar el reparto ahora?¿Habría suficientes vacunas para vacunar a todos los mayores de 80?". Comparando los enunciados O y N puede verse que el enunciado O requiere tener en cuenta menos condiciones y tomar menos decisiones en cuanto a la matematización que el problema N.

Entre los campos del conocimiento requeridos para resolver los problemas predominan la aritmética y la modelización (8), también aparecen la combinatoria, el análisis, la probabilidad y la demografía. Destaca que 9 de los problemas planteados abarcan al menos dos campos del conocimiento diferentes, frente a 4 que se restringen solo a uno.

Balance general

Uno de los problemas creados puede servirnos para hacer un pequeño resumen de los resultados obtenidos. El problema J dice lo siguiente: "En una reunión, hay un infectado de COVID-19. En la reunión, hay 10 personas, 5 a cada lado de la mesa. El infectado se ha sentado justo en el medio de uno de los lados de la mesa. Las 3 personas que están en frente del infectado tienen un 70% de infectarse transcurrido exactamente un minuto sin poderse contagiar antes. Las 2 personas que se sientan alrededor del enfermo tienen un 40% de probabilidad de enfermar pasado también un minuto sin poderse contagiar antes de que pase el minuto entero. Una vez otra nueva persona se infecta, se le aplican las reglas como al primer infectado, es decir, tiene un 70% de probabilidad de contagiar a los 3 de en frente y un 40% a los de al lado. Si la reunión dura 10 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que todo el mundo se contagie en la reunión?"

Este es un problema resoluble enmarcado en un contexto social pero con rasgos científicos, además, el contexto es muy importante a la hora de resolver el problema. Su enunciado es largo, elemento que podría favorecer las contradicciones o dificultar su resolubilidad, sin embargo es coherente y completo. Los números que aparecen están usados de forma adaptada al tipo de dato que expresan y la pregunta está expresada de forma condicional. Para resolverlo, se requieren ideas complejas y se calificó dentro de la complejidad PISA de reflexión. Este problema evidencia una buena disposición hacia las matemáticas como herramienta para resolver problemas que aparecen en un contexto potencialmente real.

También cabe destacar la aparición de problemas inesperados que no tienen la relación esperada con la restricción temática establecida, como el problema H "Con el coronavirus, las conexiones interpersonales se han aumentado mucho, cada persona de málaga en Estalmat habla con 9 personas de otras provincias. Los de Almería hablan con 4 cada uno y los de Granada hablan con 2 personas de otras provincias cada uno. ¿Cuántas personas de Jaén hay?". Esta características también era esperable pues ya había sido documentada en estudios cuya muestra era más numerosa (Espinoza, 2011, 2018).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en esta investigación son coherentes con otros estudios similares cuya muestra era mayor, es decir, los problemas inventados por alumnos con talento matemático tienen unas características que pueden ser reconocidas utilizando las categorías empleadas.La invención de problemas es un tipo de tarea que pone de manifiesto la capacidad del alumnado con talento para establecer relaciones entre la realidad en la que viven y las matemáticas, a la par que deja observar la visión positiva que tienen sobre ellas. Destaca el uso que se hace de los números que no se toman como elemento para añadir dificultad al problema, es decir, el alumnado con talento sugiere tener una visión de la complejidad en matemáticas alejada de que aparezcan números que no dominan con solvencia o que han trabajado con frecuencia en el aula. También, se observó la capacidad para formular problemas complejos y relevantes, sin miedo a no saber resolverlos o a que el proceso de resolución sea de un nivel más elevado del que dominan.

La tarea de inventar problemas supone un reto especialmente interesante para el alumnado con talento matemático y le presta un escenario para desplegar su potencial debido a que permite expresarse matemáticamente con bastante libertad al no haber un resultado concreto esperado. Quedan muchas preguntas por resolver en la investigación en invención de problemas y su potencial aplicación para la detección y estímulo del talento matemático, los resultados de esta investigación podrían servir de apoyo para, tras analizar las producciones de alumnos estándar, realizar una comparativa.

Referencias

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. y Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. En F. Singer, F. Ellerton y J. Cai (Eds.) *Mathematical problem posing. Research in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1

Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems: A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(3), 261-271.

Espinoza, J. (2011). *Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático: un estudio exploratorio*. Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada.

Espinoza, J. (2018). *Caracterización de estudiantes con talento en matemática mediante tareas de invención de problemas.* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].

Fernández, O. D., Castaño, M. T. S., Tojo, C. M. P. y Barreiros, M. F. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *Faisca: Revista de Altas Capacidades*, *13*(15), 30-39.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2019). *Marco para pruebas de matemáticas PISA 2021*. Versión preliminar.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). SEIEM.

Klaassen, K. y Doorman, M. (2015). Problem posing as providing students with content-specific motives. En F. Singer, F. Ellerton y J. Cai (Eds). *Mathematical problem posing. Research in mathematics education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_10

Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (2006). *El programa PISA de la OCDE. ¿Qué es y para qué sirve?*

Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. *Actas de la Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática.*

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada].

Renzulli, J. (2012). Reexamining the role of gifted education and talent development for the 21st Century: A four-part theoretical approach. *Gifted Child Quarterly*, *56*(3), 150-159. https://doi.org/10.1177/0016986212444901

Silver, E. A. y Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing [Valoración de problemas inventados por estudiantes de matemáticas]. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 129-135. https://doi.org/10.5951/TCM.12.3.0129

Stoyanova, E. (1998) Problem possing in mathematics classrroms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in mathematics education: A contemporary perspective* (pp. 164-185). Edith Cowan University.

Tourón, J. (2020). Las altas capacidades en el sistema educativo español: reflexiones sobre el concepto y la identificación. *Revista de Investigación Educativa*, *38*(1), 15-32. http://dx.doi.org/10.6018/rie.38.1.396781

¿QUÉ CONFLICTOS SEMIÓTICOS DETECTAN LOS FUTUROS PROFESORES EN LAS CLASES DE MATEMÁTICAS QUE IMPARTEN?

What semiotic conflicts do prospective teachers detect in their mathematics lessons?

Sánchez, A., Breda, A., Ledezma, C., Sala-Sebastià, G. , Sol, T. y Font, V.

Universitat de Barcelona

Resumen

En esta comunicación se presentan algunos resultados de una investigación en curso, cuyo objetivo es caracterizar los conflictos semióticos detectados por futuros profesores al reflexionar sobre su propia práctica. Para ello, realizamos un análisis temático de trabajos finales de máster, donde los futuros profesores valoran y rediseñan la implementación de una unidad didáctica diseñada por ellos utilizando los criterios de idoneidad didáctica para inferir categorías emergentes de tipos de ambigüedades. El principal resultado es un primer esbozo de tipología de conflictos semióticos.

Palabras clave: *ambigüedad, conflicto semiótico, criterios de idoneidad didáctica, reflexión del profesor de matemáticas.*

Abstract

In this communication we present some results of an ongoing research whose objective is to characterise the semiotic conflicts detected by prospective teachers when reflecting on their own practice. To this end, we carried out a thematic analysis of master's degree final projects, where prospective teachers assess and redesign the implementation of a didactic unit designed by them using the didactic suitability criteria to infer emerging categories about types of ambiguities. The main result is a first sketch of a typology of semiotic conflicts.

Keywords: *ambiguities, didactic suitability criteria, mathematics teacher's reflection, semiotic conflict.*

INTRODUCCIÓN

Diversos autores señalan el análisis y la reflexión de los profesores sobre su propia práctica como un aspecto clave para el desarrollo de sus competencias profesionales y para la mejora los procesos de instrucción – por ejemplo, Schön (1983) con la práctica reflexiva; Elliot (1991) con la investigación-acción; o Hart et al. (2011) con el estudio de clases.

En esta línea de potenciar la reflexión del profesor sobre su propia práctica, el constructo criterios de idoneidad didáctica (CID) y su desglose en componentes e indicadores, propuesto en el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino et al., 2007), puede ser utilizado como una herramienta para organizar la reflexión del profesor –tal como se está haciendo en diferentes procesos de formación en Iberoamérica (Font et al., 2021).

Sánchez, A., Breda, A., Ledezma, C., Sala-Sebastià, G., Sol, T. y Font, V. (2022). ¿Qué conflictos semióticos detectan los futuros profesores en las clases de matemáticas que imparten?. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 529-537). SEIEM.

El contexto de este estudio es un máster de formación de profesorado de secundaria, en la especialidad de matemáticas. En este máster, los futuros profesores realizan un trabajo final de máster (TFM) donde reflexionan sobre la unidad didáctica que han implementado durante el período de prácticas en los centros educativos. El objetivo del TFM es que los futuros profesores analicen su propia práctica y propongan mejoras de la unidad didáctica. En particular, dentro del análisis que realizan, han de reflexionar sobre si propiciaron ambigüedades durante la implementación de su unidad didáctica.

El objetivo de este estudio es iniciar la caracterización de las ambigüedades (entendidas como un tipo de conflicto semiótico) que identifican los futuros profesores en su propia práctica. La pregunta de investigación a la que nos planteamos dar una primera respuesta es: ¿Qué tipos de ambigüedades matemáticas identifican? Este trabajo se enmarca en un estudio más amplio con TFMs de varias promociones de un máster de formación del profesorado de educación secundaria (especialidad de matemáticas).

MARCO TEÓRICO

En esta sección explicamos, de manera breve, la noción de conflicto semiótico y su relación con la de ambigüedad, así como también el constructo criterios de idoneidad didáctica.

Conflictos semióticos

Los análisis semióticos pormenorizados que se proponen en el EOS permiten poner de manifiesto posibles conflictos semióticos (Godino et al., 2007), esto es, la posible disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos –persona o institución– en interacción comunicativa. Entre estos conflictos semióticos destacan, por su relevancia, aquellos que pueden ser originados en un libro de texto cuando los autores dejan a cargo del lector la realización de determinadas funciones semióticas que son básicas para la correcta interpretación del texto, o bien, las ambigüedades presentes en las explicaciones del profesorado.

Un ejemplo de conflicto semiótico del primer tipo se ilustra en Font y Contreras (2008) donde, al analizar la definición de derivada dada en un texto utilizado en el nivel de Bachillerato en España, se concluye que los autores del libro dejan a cargo del alumno el establecimiento de funciones semióticas que son clave para la comprensión de esta definición, lo cual puede conducirle a un conflicto semiótico potencial.

Por otra parte, la ambigüedad es un fenómeno que ocurre en las lenguas naturales, y consiste en el hecho de que una sola construcción lingüística expresa más de un sentido o contenido semántico, esto es, cuando posee más de un significado (lo cual puede generar un conflicto semiótico). Técnicamente, una construcción lingüística o emisión es ambigua si puede ser interpretada de más de una manera (Löbner, 2002). Esta misma caracterización de ambigüedad se puede aplicar cuando en lugar de la lengua natural nos referimos a la lengua utilizada en las clases de matemáticas. En este trabajo nos interesan, en particular, las emisiones del futuro profesor que son interpretadas por los alumnos de manera diferente a la que espera al realizar esta emisión en las clases de matemáticas (sean textos escritos o emisiones orales).

Lo primero que hay que destacar es que la noción de ambigüedad –en sí misma– es ambigua, ya que en muchos casos no tendremos claro si el episodio que se analiza lo es o no. Lo segundo que hay que destacar es que, dado que en última instancia hay un contexto que juega un papel central en la desambiguación, nos interesan aquellas ambigüedades en las que el contexto no ha sido suficiente para evitarlas (al menos para algunos alumnos), generando así un conflicto semiótico, según la opinión de los futuros profesores cuyos TFMs se han analizado.

Criterios de idoneidad didáctica (CID)

En el EOS (Godino et al., 2007) se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción como el grado en que éste reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados (aprendizaje) y aquellos institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Este constructo multidimensional se desglosa en criterios de idoneidad parcial que pueden ser útiles para guiar procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y valorar su implementación (Breda et al., 2018).

En el EOS se consideran seis criterios de idoneidad parcial: 1) Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son "buenas matemáticas"; 2) Idoneidad cognitiva, para valorar si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, si los aprendizajes logrados se acercan a los pretendidos; 3) Idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; 4) Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales usados en el proceso de instrucción; 5) Idoneidad emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso; y, 6) Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, directrices curriculares, condiciones del entorno social y profesional, entre otros. (Font et al., 2010).

Para la operatividad de los CID se define un conjunto de componentes e indicadores observables que sirven de guía para el análisis y valoración del proceso de instrucción en cualquier etapa educativa (Breda et al., 2017; Godino, 2013). En la tabla 1 se detallan los componentes e indicadores del criterio de idoneidad epistémica. En este estudio, nos centramos en el componente 'Ambigüedades' de este criterio.

Tabla 1. Componentes e indicadores de la Idoneidad Epistémica (Breda et al., 2017, p. 11).

Componentes	Indicadores
Errores	• No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	• No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo al que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	• La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático a enseñar	• Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. • Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar. • Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas? • Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos?

METODOLOGÍA

En ese apartado presentamos, primero, el contexto del estudio (tipo de máster y características del TFM); en segundo lugar, se muestra un análisis temático del cual emergen algunas de las categorías de conflicto semiótico obtenidas.

Contexto de la investigación

En el Máster de Formación del Profesorado de Secundaria de Matemáticas analizado, el uso de los CID ha tenido un papel relevante, ya que son un contenido a enseñar con el objetivo de que sean usados como pauta para organizar la reflexión sobre la propia práctica.

En el TFM se realiza el análisis y valoración de la unidad didáctica implementada y se formula una propuesta de mejora justificada de esta. Para ello, en las diferentes asignaturas que intervienen en el ciclo se presentan elementos de valoración de la calidad de los procesos de estudio, en concreto los CID propuestos por el EOS, así como la versión adaptada (Breda et al, 2017) de la pauta de componentes y descriptores propuesta en Godino (2013), que permite aplicarlos. En particular, en el criterio de idoneidad epistémica se contempla el componente 'Ambigüedades'.

Análisis temático

En sus TFMs, los futuros profesores escriben comentarios de tipo valorativo que se relacionan con los diferentes componentes e indicadores de los CID (Font et al., 2017). Se trata de una valoración que han hecho los futuros profesores y que ha sido discutida con sus tutores. Estos comentarios son el foco de nuestro análisis mediante un análisis temático en que, por una parte, hay categorías fijadas previamente (ambigüedades) y, por otra parte, categorías que surgen del análisis de los datos (tipología de ambigüedades). Se trata de un análisis temático, que es "un método para identificar, analizar y reportar patrones (temas) dentro de los datos" (Braun y Clarke, 2006, p. 79), de los comentarios sobre ambigüedades que aparecen en los TFMs analizados. Se trata de un análisis en el que las categorías (temas) se establecen de manera inductiva a partir de los datos recogidos y de forma consensuada entre los autores del estudio. Primero, registramos algunos datos identificativos de cada TFM (autor, contenido matemático de la unidad didáctica, nivel de los alumnos) y miramos si se incluyen comentarios sobre ambigüedades. Después, con los TFMs que contienen comentarios sobre ambigüedades, elaboramos fichas con los extractos del texto relacionadas con el tipo de ambigüedad, que nos permitan establecer su agrupación en temas. Comprobamos que los temas sean coherentes con los extractos codificados y, si se considera conveniente, se refinan los temas. Los resultados de la clasificación que aquí presentamos son susceptibles de modificaciones a partir del análisis de más TFMs.

Ejemplo de análisis temático

En su TFM, Ruiz (2014) comenta dos categorías de conflictos semióticos: por una parte, posibles conflictos semióticos por el uso de metáforas y gestos dinámicos (el alumno puede considerar que los puntos se mueven o que la gráfica es un camino, por ejemplo) y, por otra parte, posibles conflictos semióticos por el uso de notaciones ambiguas, en este caso, además de las tablas triples, el uso de la letra *f* para representar dos funciones diferentes (que el alumno puede considerar que son la misma). En el primer caso consideramos que se trata de un tipo de conflicto semiótico de tipo semántico causado por el uso de expresiones metafóricas. En el segundo caso lo consideramos un conflicto semiótico de tipo semántico causado por el uso de representaciones que posibilitan diferentes interpretaciones:

> En cuanto a las ambigüedades, comentar que durante las prácticas me sorprendió la complejidad semiótica del registro tabular. La propuesta de triple tablas, que yo la consideraba de dificultad evidente, ha creado confusión en los estudiantes generada por una ambigüedad mía, ya que he sido yo misma la que ha producido esta confusión en el alumno. No he encontrado ninguna referencia en la literatura que trate sobre este tipo de dificultades en los alumnos. Para solucionar este problema, he decidido suprimir de la unidad didáctica este tipo de tablas y volver a simplificar las actividades con tablas dobles (variable independiente y dependiente). (cont.)

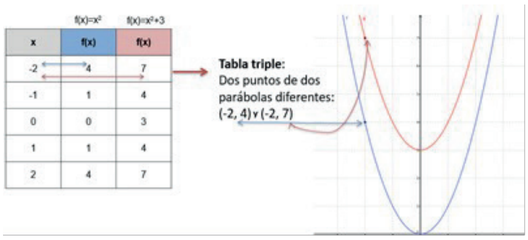


Figura 1. Evidencia de Ruiz (2014, p. 15) en la valoración de su TFM.

> Aunque se han intentado evitar/controlar las ambigüedades y metáforas que pueden crear confusión relacionadas con el tema, el uso del programa dinámico GeoGebra ha propiciado la metáfora de gráfica de una función como camino que deja un punto que se mueve sobre la misma. (Ruiz, 2014, pp. 14-15)

ALGUNAS CATEGORÍAS QUE EMERGEN DEL ANÁLISIS DE LOS DATOS

Un primer resultado es que, a pesar de presentar los CID en las clases del máster y explicar su uso, algunos participantes confunden ambigüedades con errores matemáticos.

El segundo resultado es que se han encontrado reflexiones de los futuros profesores sobre ambigüedades propiciadas por el profesor que derivan en interpretaciones de los alumnos inesperadas por el profesor que no son erróneas desde el punto de vista de las matemáticas y reflexiones sobre ambigüedades que derivan en interpretaciones de los alumnos inesperadas por el profesor que sí son erróneas desde el punto de vista de las matemáticas.

Un tercer resultado es que hay ambigüedad sintácticas y semánticas. Las ambigüedades de tipo sintáctico son emisiones del profesor que permiten interpretaciones diferentes ligadas a la relación que se establezca entre los términos, mientras que las semánticas son emisiones del profesor que permiten muchas interpretaciones diferentes ligadas al significado de un término. Por ejemplo, el problema siguiente de un examen: "Dos personas separadas por una distancia de 5 km observan un avión con ángulos de 23° y 18° respectivamente. ¿A qué altura se halla el avión y quién se halla más cerca del avión?" (Mancebo, 2021, p. 4), fue propuesto por el profesor pensando que el avión estaba entre las dos personas, pero también es posible pensar que el avión queda a un lado de las dos personas, por lo que en su reflexión dice: "Además, consideré las dos posibles resoluciones como correctas" (Mancebo, 2021, p. 5). En este caso, consideramos que se trata de una ambigüedad sintáctica. En cambio, cuando un futuro profesor dice, por ejemplo, "*b* es la raíz de 60", la consideramos una ambigüedad de tipo semántico, dado que no se especifica el grado de la raíz (suponiendo que el contexto permita la posibilidad de considerar raíces de grados diferentes).

Conflictos semióticos por ambigüedades sintácticas

Hay diferentes tipos de ambigüedades sintácticas:

1) Ambigüedades sintácticas que dan pie a interpretaciones de los alumnos no previstas por el profesor que, de hecho, incluso son más pertinentes que las que espera si no se toma en consideración el contexto de la secuencia didáctica en la que emerge la ambigüedad.

Un ejemplo sería la siguiente reflexión sobre el siguiente problema formulado en el marco de una unidad didáctica sobre trigonometría:

> Un avión despega con un ángulo respecto de tierra de 25° a una velocidad de 240 km/h, ¿a qué distancia estará al cabo de 60 segundos? El objetivo era que los alumnos buscasen la distancia en la horizontal, tal como está presentado el ejercicio se puede entender que se pregunta la distancia euclidiana entre dos puntos, transformando el problema de trigonometría en un problema simple de movimiento rectilíneo uniforme. (Marcual, 2021, p. 11)

Se trata de ambigüedad de tipo sintáctico (es decir, ambigüedades que se deben a las relaciones de dependencia o de determinación que se dan entre los componentes de una construcción lingüística) ya que el término "distancia" se puede referir a la distancia en horizontal recorrida por el avión, pero también puede ser la distancia euclídea entre el punto de salida y el avión. De hecho, en este caso, si dejamos de lado que estamos en el contexto de una unidad didáctica de trigonometría, parece más pertinente la interpretación que hacen los alumnos que la que hace el futuro profesor.

2) Ambigüedades sintácticas que dan pie a interpretaciones de los alumnos no previstas por el profesor, pero que no son tan pertinentes como las que espera.

Un ejemplo de esta categoría es el siguiente comentario:

> Las diagonales de un rectángulo miden 12 cm y forman un ángulo de 50º. Calcula el perímetro del rectángulo. El enunciado estaba expresado para que los 50º fuesen el ángulo que formaran las diagonales al cruzarse. Muchos de los alumnos entendieron que lo formaban con la horizontal. En la figura 2 podemos ver a la izquierda el enunciado esperado y a la derecha el enunciado como resultado de la ambigüedad. (Marcual, 2021, p. 11)

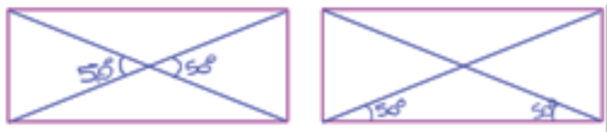


Figura 2. Evidencia de Marcual (2021, p. 11) en la valoración de su TFM.

En este caso la interpretación más plausible es que el ángulo de 50º es el ángulo menor que forman las dos diagonales, pero el texto del problema no dice que es el ángulo que forman "entre sí" las diagonales ni tampoco hace referencia a que las diagonales, al cortarse, forman dos ángulos, por tanto, hay un cierto margen para interpretar que pueda ser otro ángulo diferente. Ahora bien, aunque la interpretación que hace el alumno no es, seguramente, la más pertinente, el alumno no comete un error matemático al considerar que el ángulo de 50º es el que forma la diagonal con el lado del rectángulo, simplemente hace una interpretación diferente de la esperada de la información dada e intenta resolver un problema diferente al propuesto por el profesor. Esta conversión entre el registro verbal y el geométrico no lo consideraríamos un error matemático del alumno ya que el registro verbal se podría redactar de manera más precisa de forma que se evitase esta ambigüedad sintáctica.

Conflictos semióticos causados por ambigüedades semánticas

Hay diferentes tipos de ambigüedades semánticas:

1) Ambigüedades de tipo semántico en las que el propio contexto permite la desambiguación.

Por ejemplo, cuando el profesor dice "*b* es la raíz de 60", no especifica que se trate de la raíz cuadrada, pero está explicando a alumnos de unas edades que no conocen otro tipo de raíces.

2) Emisiones del profesor que permiten muchas interpretaciones diferentes, aunque, por el contexto, el profesor esté pensando en solo una de ellas, pero los alumnos hacen una diferente.

Por ejemplo, cuando el profesor pregunta "¿de qué tipo creen que son los triángulos que se obtienen al dibujar las diagonales de un hexágono regular?", y espera que, por el contexto en que se hace la pregunta, el alumno entienda que la palabra "tipo" busca una respuesta en la que se use una clasificación de los triángulos en función de los ángulos del triángulo (antes estaban trabajando el Teorema de Pitágoras). Ahora bien, el alumnado puede usar otros tipos de clasificaciones de triángulos para responder (según los lados o según los ejes de simetría, por ejemplo). Dicho de otra manera, no hay ambigüedad en el sentido de que queda claro que hay que decir algo relacionado con el tipo de triángulo que se forma al dibujar las diagonales del hexágono regular, pero este "algo" puede tener varias interpretaciones diferentes. Ahora bien, si el alumno usa otra clasificación de los triángulos (por ejemplo, con base a los lados), no comete un error matemático.

3) Ambigüedades relacionadas con la notación utilizada.

Por ejemplo, la reflexión de Ruiz (2014) comentada en la sección de metodología (ver figura 1).

4) Ambigüedades relacionadas con el uso de metáforas.

El uso de expresiones metafóricas es uno de los ejemplos paradigmáticos de ambigüedades semánticas ya que por naturaleza tiene al mismo tiempo dos significados: el metafórico y el literal. El profesor espera que el alumno entienda el significado metafórico y hay alumnos que se quedan con el literal. Un ejemplo, son las explicaciones sobre los vectores. Ya que si, por ejemplo, el profesor se ayuda de la idea de desplazamiento y explica que con un vector podíamos representar gráficamente el desplazamiento que se ha realizado desde un punto a otro, puede ser que cuando pregunte qué es un vector, el alumno le responda: un vector es el camino que se hace desde un punto a otro, tiene dirección, sentido y módulo. También resulta problemática la explicación del vector libre:

> (…) al responder a un alumno, con "...porque somos libres de ponerlo donde queramos, siempre que no le cambiemos el módulo ni el sentido…". Al darme cuenta, rectifiqué inmediatamente con un ejemplo práctico. (Rodríguez, 2021, p. 9)

5) Ambigüedades relacionadas con el uso de material concreto

El uso de material concreto presenta muchas ventajas al facilitar el paso de lo particular a lo general, pero también puede ser fuente de ambigüedades (figura 3). Por ejemplo, encontramos la siguiente reflexión:

> A veces queriendo hacer unas matemáticas más ilustrativas con el fin de hacerlas más significativas para los alumnos, se cometen ambigüedades. Y creo que este ha sido mi caso. Una de mis actividades trataba sobre el teorema de Pitágoras con material manipulativo. Este estaba construido a partir de prismas de base cuadrada con un triángulo en el medio. Aunque les remarqué mucho que la vista que estaban viendo al utilizarlo era en dos dimensiones, creo que a alguien se le podría haber quedado esta ambigüedad: "el teorema de Pitágoras sirve para cuerpos con volumen". (García, 2020, p. 8)

Figura 3. Evidencia de García (2020, p. 8) en la valoración de su TFM.

CONSIDERACIONES FINALES

La aparición de ambigüedades en el discurso del profesor es habitual e inevitable. Ahora bien, muchas de estas ambigüedades se resuelven por el contexto, pero otras no y pueden ser la causa de errores matemáticos. Por tanto, es importante que el docente sea consciente de estas ambigüedades porque le puede ayudar a detectar e interpretar los errores matemáticos de sus alumnos.

En este trabajo se presentan resultados preliminares de una investigación más amplia, similar a la realizada en Sánchez et al. (2021), que pretende responder a las siguientes preguntas: 1) ¿Identifican ambigüedades los futuros profesores al reflexionar sobre su implementación? 2) ¿qué tipos de ambigüedades identifican?, a partir del análisis de los TFMs de varias promociones de alumnos del máster de formación del profesorado de educación secundaria de matemáticas.

Una conclusión de este trabajo es que, a pesar de presentar los criterios de idoneidad didáctica en las clases del máster y explicar su uso, algunos participantes confunden ambigüedades con errores matemáticos. Consideramos que, en el proceso de reflexión de los futuros profesores, sería conveniente conseguir un mayor detalle en el análisis de las ambigüedades presentes en sus implementaciones didácticas. Por lo tanto, estos resultados pueden ser útiles para desarrollar una rúbrica que ayude a los profesores a distinguir entre error y ambigüedad y también a identificar tipos de ambigüedades, así como para que sean conscientes de las situaciones en las que se suelen producir; y, también, distinguir entre los errores de los alumnos que tienen un origen en la forma en la que el profesor hace el discurso, y otros cuyo origen es las matemáticas mismas o los usos lingüísticos convencionales.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto PID2021-127104NB-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias

Braun, V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology*, *3*(2), 77-101.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA: Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Elliot, J. (1991). *Action research for educational change*. Open University Press.

Font, V., Breda, A., Hummes, V., Diez-Palomar, J. y Seckel, M. J. (2021). Un currículum por competencias en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En M. A. Campos (Ed.), *Representaciones, conocimientos y prácticas curriculares en educación matemática* (pp. 237-271). Universidad Nacional Autónoma de México.

Font, V., Breda, A. y Pino-Fan, L. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 247-256). SEIEM.

Font, V. y Contreras, Á. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*(1), 33-52. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9123-7

García, N. (2020). *Com treballar les figures planes en una aula per a tots* [Trabajo final de máster no publicado]. Universitat Autònoma de Barcelona.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education, 39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Hart, L. C., Alston, A. S. y Murata, A. (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9

Löbner, S. (2002). *Understanding semantics*. Routledge.

Mancebo, A. (2021). *Reflexió sobre la millora d'una unitat didàctica de trigonometria a 4t d'ESO* [Trabajo final de máster no publicado]. Universitat Autònoma de Barcelona.

Marcual, J. (2021). *Trigonometria a 4t d'ESO. Proposta de millora d'una unitat didáctica*. Trabajo final de máster no publicado. Universitat Autònoma de Barcelona.

Rodríguez, C. (2021). *Vectors en el pla a 4º ESO*. Trabajo final de máster no publicado. Universitat Autònoma de Barcelona.

Ruiz, E. (2014). *Funcions quadràtiques*. Trabajo final de máster no publicado. Universitat Autònoma de Barcelona.

Sánchez, A., Font, V. y; Breda, A. (2021). Significance of creativity and its development in mathematics classes for preservice teachers who are not trained to develop students' creativity. *Mathematics Educatioanl Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00367-w

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Basic Books.

IDONEIDAD DIDÁCTICA DE UNA TAREA DE MEDIDA CON FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL

Didactic Suitability of a measurement task with in-service early childhood teachers

Sala Sebastià, G.[a], Breda, A.[a] y Farsani, D.[b]

[a]Universitat de Barcelona, [b] Norwegian University of Science and Technology

Resumen

Se presenta un estudio sobre la idoneidad didáctica del diseño e implementación de una tarea de medida basada en la resolución de un problema abierto de contexto real. La implementación se realizó en el curso 2018-19 con 49 estudiantes de la asignatura de Didáctica de las Matemática del Grado de Educación Infantil de una universidad catalana. El análisis requirió de la aplicación sistemática de los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) y de un análisis temático. Los resultados muestran que la tarea presenta una alta valoración para los indicadores correspondientes a las idoneidades interaccional, afectiva, mediacional y ecológica y permiten plantear un rediseño focalizado en la mejora de su idoneidad epistémica y cognitiva.

Palabras clave*: criterios de idoneidad didáctica, diseño e implementación de tareas, formación de profesorado, medida.*

Abstract

A study on the didactic suitability of the design and implementation of a measurement task based on the resolution of a real context open problem is presented. The implementation was carried out in the 2018-19 academic year with 49 students of the Didactics of Mathematics subject of a Catalan university's Early Childhood Education Degree. The analysis required the systematic application of the Criteria of Didactic Suitability (CDS) and thematic analysis. The results show that the task presents a high valuation for the indicators corresponding to the interactional, emotional, mediational, and ecological suitability and allow to propose a redesign focused on the improvement of its epistemic and cognitive suitability.

Keywords: *didactic suitability criteria, design and implementation of tasks, teacher training, measurement.*

INTRODUCCIÓN

Las tareas matemáticas promueven el desarrollo cognitivo de los estudiantes, potencian el aprendizaje de diferentes conceptos y representaciones y fomentan la creatividad (Moreira et al., 2020; Rodrigues y Gusmão, 2020). Así pues, estudios sobre el diseño, implementación y valoración de tareas matemáticas han centrado la atención tanto en las respuestas de los estudiantes, las estrategias y formas de resolverlas, como en el trabajo del profesor que concibe, diseña, implementa, analiza y valora las tareas ya que, según estas investigaciones, es un aspecto clave que el futuro profesor debe desarrollar en su proceso formativo.

Sala Sebastià, G., Breda, A. y Farsani, D. (2022). Idoneidad didáctica de una tarea de medida con futuros maestros de educación infantil. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 539-547). SEIEM.

Las tareas, dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, son la propuesta de trabajo que un docente realiza a sus alumnos y alumnas, intencional y cuidadosamente planificada, para lograr un determinado objetivo de aprendizaje y ocupan un lugar central en el aprendizaje de los estudiantes (Ponte, 2014).

Para Gusmão y Font (2020), las tareas pueden ser clasificadas, con relación a la tipología, de tipo ejercicio, problema o proyecto de investigación. Los ejercicios son útiles para que los estudiantes pongan sus conocimientos en práctica (Ponte, 2005). Los problemas requieren que los estudiantes busquen elementos desconocidos, interpreten información, identifiquen elementos relevantes y realicen conexiones entre conceptos e ideas matemáticas (conexiones intramatemáticas) y con otros componentes curriculares y situaciones de lo cotidiano (conexiones extramatemáticas). Es decir, los estudiantes deben usar diferentes estrategias para resolver una misma situación y eso ayuda en la promoción del desarrollo de su autonomía y de su competencia comunicativa. Las tareas de tipo investigación suponen un nivel de desafío alto, y fomentan un alto grado de comunicación y argumentación, lo que justifica las conjeturas y las negociaciones en la búsqueda de una solución (Ponte et al, 2003).

Las tareas también pueden clasificarse, según su duración, como de corta duración (unos minutos), de media duración (una clase, una semana) y de larga duración (semanas, meses). Por lo que se refiere al contexto, Ponte (2005) considera tres posibles contextos en el trabajo con tareas: vida real o realidad, matemáticas puras y semi-realidad. Las tareas, según su naturaleza, pueden ser abiertas o cerradas. Las de carácter abierto admiten varias respuestas correctas, varían la duración entre media y larga, ofrecen espacios para argumentos, justificaciones y tienen un alto grado de impugnación. Las tareas de carácter cerrado admiten una única respuesta correcta (Gusmão, 2019) y el enunciado suele dar pistas o especifica claramente lo que se da y lo que se pide (Ponte, 2005).

Otro aspecto relevante es la gestión de la tarea —planificación, implementación y evaluación en el aula que, según Sousa (2018), involucra la preparación inicial, contextualización, preguntas, provocaciones y problematización, distribución del tiempo, interacción profesor-alumno y alumno-alumno, entre otros.

En este sentido, en el marco de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS) ha desarrollado los Criterios de Idoneidad Didáctica (en adelante, CID) (Godino et al., 2007), para guiar el diseño y la valoración de tareas matemáticas (Gusmão y Font, 2020), resultando una herramienta útil en la formación de futuros profesores de matemáticas o de profesores de matemáticas en servicio.

En esa línea, el objetivo de este trabajo es estudiar la idoneidad didáctica de una tarea de medida (longitud), implementada con futuros maestros de educación infantil. En la tarea, los futuros maestros tuvieron que reconocer mediante la experimentación los elementos (conceptos, procedimientos, recursos, estrategias, etc.) necesarios para la adquisición del conocimiento de la enseñanza de la medida a partir de un problema de contexto real. También se les pidió que reflexionasen sobre ello desde un punto de vista profesional.

MARCO TEÓRICO

Construcción de magnitudes y su medida en educación infantil

Los estudios piagetianos indican que la construcción de la noción de magnitud se basa fundamentalmente en la de conservación, noción que los niños van adquiriendo de forma progresiva durante la escolaridad como resultado de una adecuada maduración evolutiva y de las experiencias vividas. En relación con la construcción de la noción de medida, Piaget define que los niños, en primer lugar, realizan comparaciones perceptivas directas (visuales, táctiles…), aunque pueden también utilizar intermediarios, como pueden ser partes de su cuerpo (manos, pies, etc.), como apoyo a la percepción. De hecho, en las primeras edades aparece un uso espontáneo de unidades naturales relacionadas con las distintas partes del cuerpo y empieza a constatarse que la medida depende de la unidad escogida (Chamorro, 2007). En un posterior estadio evolutivo, los niños desplazan los objetos para precisar más en las comparaciones y, si esto no es posible, se ayudan de intermediarios independientes de las partes de su cuerpo. Posteriormente, cuando los niños ya dominan el principio de conservación de las cantidades, pueden realizar comparaciones indirectas basadas en razonamientos sobre la equivalencia de la medida del objeto intermediario en relación con el objeto de que se quiere medir. Como indica Belmonte (2006), al final de esa evolución los niños desarrollan la noción de unidad. En un principio, la unidad está asociada a un único objeto, con relación incluso con el objeto que se quiere medir. Posteriormente, aunque la unidad depende todavía del objeto que se va a medir, se va cambiando para otros objetos, en función de la relación existente entre los mismos. Por ejemplo, prefiere unidades más pequeñas para medir objetos de menor tamaño. No será hasta que la unidad se libere totalmente de la figura, tamaño y objeto a medir que se podrá considerar que se ha realizado la construcción de la verdadera noción de unidad. La unidad es una cantidad de magnitud particular pero no una figura concreta. Cualquiera que sea la magnitud, son indispensables muchas manipulaciones, ya que es lo que permite que los alumnos puedan crearse un bagaje de experiencias sensibles de referencia. Aunque, según Berdonneau (2008), la experiencia no basta para que las nociones se asienten y es necesario sobre todo proponer situaciones que hagan necesaria una anticipación para ser comprobada.

Por lo que respecta a longitud, cabe precisar que este estudio se focaliza en las dimensiones en línea recta de un cuerpo —la primera noción a la que el niño debe aproximarse según Belmonte (2006)—y no en la noción (complementaria) de distancia, entendida como el espacio vacío entre dos objetos.

Belmonte (2006) propone en una primera etapa, actividades para conocer las propiedades de los materiales que denomina, actividades de estimación sensorial, donde se trata de aislar el atributo que define la magnitud por medio de los sentidos. Posteriormente, Berdonnaeau (2008) propone la realización de actividades de comparar objetos de apariencia distinta para establecer su equivalencia desde el punto de vista de la magnitud considerada, o bien sobre su orden jerárquico. Son actividades, que Belmonte (2006) denomina, de *comparación directa*, donde el alumnado debe construir los criterios de equivalencia y orden respecto de las magnitudes lineales. Más tarde, se abre la posibilidad de escoger un modelo de referencia y usarlo para establecer una medida de la magnitud en función de ese modelo. Los cambios de modelos y la incidencia de ese cambio en el número que expresa esa medida contribuirán a dar sentido a la actividad. Actividades de *comparación indirecta* (Belmonte, 2006), donde los estudiantes no pueden desplazar los objetos para compararlos directamente (porque son muy pesados, por ejemplo) y deben servirse de un intermediario, aunque esto no suponga aun una medida común.

De acuerdo con Belmonte (2006), la comparación indirecta de longitudes, en la que se basa la experiencia de aula estudiada en este trabajo, puede realizarse de las dos formas siguientes: 1) Usando como intermediario un objeto más grande que la magnitud que se quiere medir: para realizar la comparación se marca en el intermediario la cantidad (que no tiene porqué ser numérica) de uno de los objetos que se va a comparar y luego se compara esta marca con la correspondiente al otro objeto; 2) Usando un objeto intermediario más pequeño que la magnitud que se quiere medir: para realizar la comparación es necesario disponer de una cantidad de objetos intermediarios iguales suficientes para poder reproducir con éstos una cantidad de magnitud equivalente a cada uno de los objetos que se quiere comparar. En la segunda forma de realizar la comparación aparece el uso de un patrón, que puede ser antropométrico (ya que los primeros patrones que se usan son las manos o palmos, los pies, los antebrazos, etc.) siendo ésta una noción que podrá evolucionar hacia el concepto de unidad de medida. El uso de estas primeras unidades de medida no estandarizadas, como es lógico, por su falta de homogeneidad, dan lugar a ciertas dificultades a la hora de, por ejemplo, comunicar la medida (por ejemplo, no todo el mundo tiene un palmo exactamente igual). Desde un punto de vista didáctico, esa misma dificultad, nos brinda un recurso para que el alumnado, por un lado, como se ha mencionado, se acerque a la noción de unidad con el uso de patrones antropométricos y, por otro lado, se pueda dar cuenta por si mismo de una propiedad esencial que debe cumplir toda unidad de medida para que cumpla su función. La unidad de medida, aunque pueda ser arbitraria, debe ser uniforme y debe estar convenida entre todos.

Criterios de Idoneidad Didáctica

Para valorar las implementaciones de las tareas y guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje, en el EOS se consideran los siguientes CID (Breda et al., 2018): 1) Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son "buenas matemáticas"; 2) Idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben y, después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar; 3) Idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; 4) Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; 5) Idoneidad afectiva, para valorar la implicación —intereses y motivaciones— de los alumnos durante el proceso de instrucción; 6) Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, a las directrices curriculares, y a las condiciones del entorno social y profesional. Para que los CID sean operativos en la valoración de la idoneidad de cada una de las facetas de los procesos de enseñanza y aprendizaje fue necesario caracterizarlos definiendo un conjunto de componentes e indicadores observables. Esta caracterización, mostrada parcialmente en la tabla 1 por cuestiones de espacio (sólo se muestran los correspondientes a la idoneidad epistémica) puede consultarse en Breda y Lima (2016).

Tabla 1. Criterios de idoneidad didáctica: componentes e indicadores (Breda y Lima, 2016).

Componentes	**Indicadores**
	Criterio Idoneidad Epistémica
Errores	• No se observan prácticas que se consideren incorrectas matemáticamente.
Ambigüedades	• No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	• La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad	• Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo. • Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas. • Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos.

METODOLOGÍA

La primera autora de este trabajo, actuando como formadora de futuros maestros de educación infantil, diseñó una tarea de medida de resolución abierta, basada en un contexto de semi-realidad y problemático. Esta tarea, de duración media, fue implementada durante dos sesiones, en un total de 4 horas más 1 hora de trabajo autónomo de los estudiantes. Los participantes del estudio fueron 49 estudiantes de la asignatura de Didáctica de las Matemáticas que se realiza en el 2º curso del Grado de Educación Infantil de una universidad pública catalana durante el año académico 2018-2019.

La tarea, de tipo problema, de resolución abierta y durada media, que se presentó a los estudiantes, como un ejemplo de actividad para alumnado de educación infantil (Reggio Children, 1997), consistió en medir una de las mesas del aula para poder encargar por escrito a un carpintero que construyera una mesa nueva idéntica a la que tenían que medir. Se les puso la condición que actuaran como alumnado de 5 años para que vivenciaran la actividad y empatizaran con su futuro alumnado. El alumnado de 5 años, normalmente, no conoce el uso de los instrumentos estándares o convencionales de medición como la cinta métrica o la regla y, en todo caso, se les indicó que no era un material disponible. La actividad se desarrolló en un contexto de semi-realidad, ya que, aunque los estudiantes manipulaban objetos reales para responder a una demanda que podría ser real, eran conocedores de que el encargo de la mesa al carpintero realmente no se iba a realizar.

Se esperaba que los participantes realizaran comparaciones indirectas de longitudes (y/o de superficies) usando un objeto intermediario no convencional para establecer una medida (numérica). Así como, "redescubrieran" las propiedades esenciales de una unidad de medida y las dificultades a las que el alumnado de infantil se enfrenta para poder construir criterios de equivalencia y orden y, finalmente, la noción de magnitud y medida.

Durante la primera sesión, los estudiantes trabajaron en grupos de 4, 5 o 6 personas en el aula (en total había 9 grupos de trabajo), realizando las medidas de su mesa y registrándolas con notas y fotografías para el informe que tuvieron que presentar. Posteriormente, como trabajo en grupo autónomo, pero fuera del aula, realizaron el informe escrito que incluía: a) una explicación del proceso de medida de la mesa seguido por el grupo, justificando la selección de las unidades de medida y de los instrumentos que decidieron utilizar; b) una definición propia de "medir" y c) una breve reflexión, como futuros maestros, sobre la tarea. En la segunda sesión, cada grupo de trabajo realizó una breve presentación oral para explicar su informe a los participantes y hacer una puesta en común. La profesora gestionó esa sesión con el objetivo de hacer notar que las medidas realizadas dependían todas ellas de la unidad escogida (que a la vez dependía del instrumento) y que las medidas realizadas por los diversos grupos no eran iguales, aunque las mesas sí lo eran (y, así, constatar la necesidad de establecer equivalencias entre ambas). Esta sesión fue grabada en audio. Después de esta sesión, cada grupo de estudiantes entregó a la profesora su informe, donde podían incluir cualquier reflexión o cambio sobre el informe presentado.

La investigación, de característica cualitativa, buscó describir y analizar la idoneidad didáctica de una tarea diseñada e implementada con los participantes mencionados (Chizzotti, 2017). Para estudiar y clasificar las evidencias de idoneidad según los CID, los autores siguieron una adaptación de las fases de análisis temático propuesto por Braun y Clarke (2012). En la primera fase, fueron revisados cada uno de los informes entregados por los 9 grupos de trabajo, las notas de campo de la profesora y las grabaciones en audio de sus presentaciones. Ello nos permitió familiarizarnos con los datos, conocer el desarrollo de la tarea realizado por cada grupo y completarlo con sus explicaciones orales de las presentaciones. Después, la primera autora identificó evidencias de idoneidad didáctica en las reflexiones y afirmaciones realizadas en los informes, que recogió en un Excel, realizando una primera clasificación de éstas. En una segunda fase, se aplicaron sistemáticamente los indicadores de la tabla

1 y se clasificaron las evidencias según los distintos componentes de los CID. Creemos conveniente aclarar que, aunque los indicadores de Breda y Lima (2016) (ver tabla 1) son una adaptación de los CID para secundaria y la etapa analizada no se corresponde con ésta, teniendo en cuenta que actualmente no existe una adaptación de los CID para la etapa de educación infantil, la decisión de escoger la adaptación de Breda y Lima (2016) para el análisis de nuestro trabajo se basó en que ésta ofrece ciertas concreciones que hacen más operativos los CID que en su versión original (Godino et al, 2007). En la tercera fase, los dos autores, junto a un experto en el EOS y en el uso de los CID, revisaron la clasificación con los datos y la refinaron. Esta persona experta también participó en la última fase de discusión e interpretación de los resultados.

RESULTADOS

La tarea obtuvo una buena valoración respecto a la *idoneidad epistémica*, ya que se obtuvieron evidencias de la riqueza de procesos y de la representatividad, no incurriendo en errores en prácticas matemáticas. La mayoría de los grupos de trabajo utilizaron unidades e instrumentos diferentes entre si para realizar las medidas, aunque nadie utilizó unidades antropométricas. Tres de los grupos coincidieron en utilizar tarjetas de transporte como instrumento de medida (y como unidad) y el resto utilizaron, por ejemplo: monedas de un euro, bolígrafos de una marca muy comercializada, clips sujetapapeles, etc. Las estrategias de medida, al depender del uso del instrumento escogido, fueron muy diversas y cada grupo explicó como las habían desarrollado y justificaron la selección del instrumento y la unidad de medida, así como, si realizaron subdivisiones de la unidad para aumentar la precisión de la medida. En este aspecto, se puede afirmar que la tarea ha promovido activamente los procesos de argumentación y justificación. No obstante, en el análisis se evidenció que la tarea había podido contemplar posibles ambigüedades ya que algunos de los estudiantes utilizaban indistintamente el concepto de unidad de medida y el de instrumento de medida cuando se requería de una subdivisión de la unidad de medida para realizar la medición de una longitud menor a la unidad escogida.

En cuanto a la *idoneidad cognitiva* de la tarea, en principio, ésta no debía suponer absolutamente ninguna dificultad en cuanto a los conocimientos previos necesarios para realizar los procesos de medida de la mesa del aula y comunicar las medidas según la unidad escogida debido a que es un contenido curricular perteneciente a las primeras edades. No obstante, se observaron algunos errores conceptuales en cuanto a la medida de la base de las patas cilíndricas de las mesas en los grupos 1, 3, 7 y 9 (dicen que dan el diámetro, pero lo representan como media circunferencia, por ejemplo). Casi todos los grupos comunicaron las medidas necesarias para poder construir una mesa igual, excepto los grupos 2, 4 y 9. Aunque en algunos casos la unidad de medida no estaba definida con suficiente precisión. Las estrategias de resolución fueron distintas en cada grupo y, en alguna medida, creativas y originales.

Cabe destacar que para los futuros maestros lo que sí que resultó ser un reto fue "desaprender" todo lo sabido sobre medida para poder actuar durante el desarrollo de la tarea como un niño o una niña de 5 años. Ello se hizo explícito en el hecho de que, por ejemplo, en ningún grupo se hizo un uso espontáneo de unidades antropométricas, tal y como sucede en las primeras edades.

Con las dos sesiones de la tarea —la primera manipulativa y la segunda de presentación y puesta en común— se consiguió que los estudiantes se dieran cuenta de aspectos centrales de los objetivos didácticos para el alumnado de educación infantil. Por ejemplo, el Grupo 1 escribe en su informe:

> A través de esta actividad los niños pueden empezar a construir su concepto de medida. Los niños descubrirán, a través de la experimentación propuesta, que es necesaria la utilización de un sistema de medida estándar y universal ya que, si usamos las manos, habrá mucha diferencia entre lo que mida el niño y lo que mida el carpintero, debido a que las medidas de sus manos son diferentes. Lo mismo pasa con los pies, los zapatos y muchos otros objetos o elementos (Grupo 1).

Desde el punto de vista de la *idoneidad interaccional,* en la sesión manipulativa de realización de las mediciones, en el aula se creó un clima de mucho movimiento y el nivel de ruido aumentó en relación con otras sesiones magistrales, aunque se debía a las discusiones entre los miembros del grupo y a conversaciones entre grupos y con la profesora, sobre diferentes aspectos de la tarea (dudas, contraste de ideas, pedir materiales, etc.). Fue fomentado así el diálogo y discusión entre los alumnos y la profesora, lo cual conllevó a procesos de exploración, formulación y validación y a su resolución colectiva. En la sesión de puesta en común, con la interacción con los otros grupos de forma ordenada, los estudiantes pudieron escuchar mutuamente sus reflexiones profesionales sobre la enseñanza de la medida y contrastar ideas. Con ello, los grupos enriquecieron sus informes antes de presentarlos definitivamente a la profesora.

Respecto a la *idoneidad emocional*, la experiencia de medida de las mesas del aula fue aceptada con mucho interés y motivación y eso se percibió en el clima que se creó en el aula, comentado anteriormente. Todos los grupos, en general, se esforzaron en utilizar unidades de medida distintas a las que utilizaban los otros grupos. Además, quedó explícito en la mayoría de los informes como, por ejemplo, en este párrafo del informe del grupo 2:

> Esta tipología de actividades nos permite ver las matemáticas no como una cosa que tienes que realizar en el aula sentado en la silla y concentrado, sino como un acto divertido que nos servirá para la vida cotidiana, y que podemos realizar de forma cooperativa para aprender más los unos de los otros. Rompemos con el estereotipo que las matemáticas son complicadas, porque les damos una vuelta y ofrecemos actividades donde los niños tienen que actuar directamente con el objeto y tienen que pensar de verdad, no memorizando unas tablas y escribiéndolas luego en un examen. Aprenden el concepto "medida" de manera más vivencial y significativa, por lo tanto, favorecemos su aprendizaje significativo y garantizamos que los niños sean capaces de poner en práctica este concepto y no solo saberse la teoría. (Grupo 2).

En cuanto se refiere a la *idoneidad mediacional,* los estudiantes utilizaron objetos de su elección como instrumentos para realizar las medidas de su mesa y registrarlas. Todos ellos seleccionaron objetos más pequeños que la longitud que querían medir, apareciendo un patrón de repetición y tuvieron que buscar objetos iguales (o pedirlos a sus compañeros y compañeras de clase) para colocarlos a lo largo del objeto que querían medir, o bien aplicar una estrategia para ir cambiando de posición el instrumento de medida. La mayoría de los grupos no dieron importancia a la pérdida de precisión de los instrumentos de medida generada con la necesidad de un cambio de posición del instrumento —al no disponer de suficiente cantidad del instrumento para ir poniéndolo uno a continuación del otro hasta cubrir la distancia que se quería medir. El único grupo que da cuenta de ello en su informe es el grupo 8, cuyo instrumento de medida era el bolígrafo, que explica que para evitar la imprecisión fueron pidiendo prestados bolígrafos a todos los participantes. Los estudiantes utilizaron sus smartphones para dejar el proceso de medida registrado y, aunque la mayoría se sirvieron de un dibujo a mano alzada de la mesa para apuntar sus medidas, los grupos 4 y 6, utilizaron un programa de dibujo para obtener la imagen de las partes del objeto medido.

La naturaleza de la tarea propuesta estaba basada en un contexto de semi-realidad, es decir, se presentaba un problema que podría ser real (tener que comunicar las medidas de un objeto a un profesional para que lo construya) aunque se desarrollaba en un contexto escolar, y los estudiantes eran conscientes que así era. No obstante, la actividad estaba altamente conectada con la realidad y con el currículo del segundo ciclo de educación infantil, porque se presentó como una actividad que los futuros profesores podrían implementar con su futuro alumnado para la enseñanza y aprendizaje de la medida. En este sentido la *idoneidad ecológica* fue bien valorada.

CONCLUSIONES

El análisis de la implementación de la tarea, donde los participantes actuaron como alumnos (realizando las medidas, registrándolas y confeccionando el informe) y también como futuros maestros (con la puesta en común, las reflexiones sobre las implicaciones del desarrollo de la tarea y la redacción del informe) evidenció una alta idoneidad ecológica, interaccional y emocional, al articular el contenido de medida y su didáctica en una misma tarea de forma contextualizada, motivadora y significativa. Es una tarea altamente manipulativa y de experimentación (indicadores de idoneidad mediacional y epistémica) cuya resolución abierta —rica en procesos matemáticos— requirió momentos de diálogo y discusión para ponerse de acuerdo en la selección del instrumento de medida y las estrategias a seguir (idoneidad interaccional). La idoneidad cognitiva y epistémica tuvieron una valoración más baja ya que, aunque se partió de los conocimientos previos de los estudiantes, se observó ciertas dificultades en el proceso de medida de las patas cilíndricas de la mesa, así como, las reflexiones expuestas, mostraron que no se consiguió alcanzar algunos de los objetivos de aprendizaje. El análisis desde la idoneidad didáctica permitió realizar una propuesta de rediseño de la tarea, focalizada en la mejora de su idoneidad cognitiva y epistémica, en particular, en los aspectos de hacer un paso previo para verificar los conocimientos previos de los futuros maestros de infantil con relación a la noción de magnitud y a los diferentes significados de la medida y establecimiento de relaciones y, también, conversiones. Igual que en el estudio de Sala-Sebastià et al. (en prensa), nos dimos cuenta de que sería muy útil disponer de unos CID específicos para las tareas de la etapa de educación infantil y, en este sentido, se abre una nueva línea de investigación.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto PID2021-127104NB-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias

Belmonte, J. M. (2006). La construcción de magnitudes lineales en Educación Infantil. En M. C. Chamorro (Coord.) *Didáctica de las Matemáticas*. Pearson Prentice Hall.

Berdonneau, C. (2008). *Magnitudes geométricas: longitudes, áreas y volúmenes. Matemáticas activas (2-6 años).* Editorial Graó.

Braun, V. y Clarke, V. (2012). Thematic analysis. En H. Cooper, P. M. Camic, D. L. Long, A. T. Panter, D. Rindskopf y K. J. Sher (Eds.), *APA handbook of research methods in psychology, Vol. 2. Research designs: Quantitative, qualitative, neuropsychological, and biological* (pp. 57–71). American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/13620-004

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Breda A. y Lima, V. M. R. Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, *5*(1), 74-103. http://hipatiapress.com/ hpjournals/index.php/redimat/article/view/1955/pdf

Chamorro, M.C. (2007). De la comparació a la mesura i els seus costos cognitius associats. *Perspectiva Escolar, 314,* 16 – 22.

Chizzotti, A. (2017). *Pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais-estudo de caso*. Editora Vozes.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Gusmão, T. C. R. S. (2019). Do desenho à gestão de tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. En *Anais do XVIII Encontro Baiano de Educação Matemática*. Ilhéus, Bahia: XVIII EBEM.

Gusmão, T. C. R. S. y Font, V. (2020). Ciclo de estudo e desenho de tarefas. *Educação Matemática Pesquisa*, *22*(3), 666-697.

Moreira, C. B., Gusmão, T. C. R. S. y Font, V. (2018). Tarefas Matemáticas para o Desenvolvimento da Percepção de Espaço na Educação Infantil: potencialidades e limites. *Bolema, 32*(60), 231-254.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. En GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular.* APM.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. En Ponte, J. P. (Org.). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 13-27). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., Brocardo, J., y Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula* (Vol. 7). Autêntica Editora.

Reggio Children (1997). *Scarpa e metro*. Italia: Reggio Children Paperback.

Rodrigues, G. S. S., y Gusmão, T. C. R. S. (2020). Desenho de tarefas matemáticas na perspectiva da criatividade. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, 5(2), 343-363.

Sala-Sebastià, G., Breda, A. y Farsani, D. (en prensa). Criteria of future early childhood teachers to design problem-solving activities. *In Proceedings of the 12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12).* Bozen-Bolzano, Italy, 2022

Sousa, J. R. de. (2018). (*Re)desenho de tarefas para articular os conhecimentos intra e extramatemáticos do professor*. Tesis de maestria no publicada. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Jequié, Brasil.

ANÁLISIS DE LA REFLEXIÓN DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS SOBRE LOS ERRORES QUE COMETEN EN SU PRÁCTICA DOCENTE

Analysis of the mathematics pre-service teachers' reflection on the errors that they make in their teaching practice

Sol, T., Sánchez, A., Breda, A., Font, V. y Hummes, V.

Universitat de Barcelona

Resumen

El objetivo de este trabajo es profundizar en el análisis de los errores que identifican futuros profesores de matemáticas en su propia práctica y distinguir niveles de argumentación en la reflexión sobre el error. El trabajo se basa en el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas, en particular, en el desarrollo de la subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción. En los trabajos de fin de máster, los futuros profesores valoran su práctica docente considerando seis criterios de idoneidad didáctica. Los errores son un componente del criterio de idoneidad epistémica. Tomando en cuenta los comentarios sobre errores de los futuros profesores que aparecen en sus trabajos de fin de máster, se establecen categorías de errores y se generan diagramas de sus argumentos. Las reflexiones sobre errores son diversas, pero algunas tienen elementos en común (causas, gestión del error, etc.).

Palabras clave: *argumentación, diagramación, error, futuros profesores, reflexión.*

Abstract

The aim of this work is to delve into the analysis of the errors identified by pre-service teachers of mathematics in their own practice and to distinguish levels of argumentation in the reflection on the error. The work is based on the model of didactic-mathematical knowledge and competences, in particular, on the development of the subcompetence of assessment of the didactic suitability of instructional processes. In their master's final projects, pre-service teachers assess their teaching practice considering six didactic suitability criteria. Errors are a component of the epistemic suitability criterion. Considering the pre-service teachers' comments about errors that appear in their master's final projects, several categories of errors are suggested and the diagrams of their arguments are generated. The reflections on errors are diverse, but some of them have some elements in common (causes, error management, etc.).

Keywords: *argumentation, diagramming, error, preservice teachers, reflection*.

INTRODUCCIÓN

La reflexión sobre la propia práctica por parte de los docentes es una estrategia clave para la mejora de los procesos de instrucción (Schon, 1983; Elliott, 1993; Hart et al., 2011). Un aspecto relevante de esta reflexión es el reconocimiento de sus propios errores matemáticos, ya que estos pueden ser la causa de que sus alumnos cometan, a su vez, errores matemáticos (Moro et al., 2017).

Sol, T., Sánchez, A., Breda, A., Font, V. y Hummes, V. (2022). Análisis de la reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre los errores que cometen en su práctica docente. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 549-557). SEIEM.

Este trabajo es parte de una investigación más amplia cuyo objetivo es caracterizar los errores y ambigüedades que detectan futuros profesores de matemáticas de educación secundaria en su práctica docente. Para ello, se consideran las reflexiones que realizan en sus trabajos finales de máster (TFM) al valorar la implementación de una unidad didáctica que diseñaron e implementaron en la asignatura de prácticas. En particular, en este trabajo, pretendemos profundizar en el análisis de su reflexión sobre sus errores matemáticos (un componente del criterio de idoneidad epistémica, criterio que forma parte del constructo idoneidad didáctica propuesto por el Enfoque Ontosemiótico), diferenciando niveles de argumentación en dicha reflexión. En concreto, nos planteamos las siguientes preguntas: ¿Qué tipos de errores señalan? ¿Qué nivel de argumentación muestran en su reflexión sobre los errores?

MARCO TEÓRICO

En relación a la formación de profesores, el referente teórico de este trabajo es el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM) del profesor de matemáticas (Godino et al., 2016), desarrollado en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS). En este apartado, se explica brevemente el modelo centrándonos en la subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción, ya que el desarrollo de esta subcompetencia va ligado a la tarea que realizan los participantes de esta investigación al valorar su práctica docente en sus TFM. También se resumen los aportes de investigaciones previas sobre el análisis de errores.

Modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticos (CCDM)

En el modelo CCDM (Breda et al., 2017), se consideran dos competencias generales del profesor de matemáticas: la competencia matemática y la de análisis e intervención didáctica. Dentro de la segunda competencia, se distinguen varias subcompetencias (Godino et al., 2016): análisis de significados globales, análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas, análisis y gestión de configuraciones didácticas, análisis normativo y análisis y valoración de la idoneidad didáctica. El EOS ofrece herramientas analíticas para desarrollar los diferentes tipos de análisis asociados a cada subcompetencia. En particular, para analizar y valorar la idoneidad didáctica, sugiere el uso de los criterios de idoneidad didáctica (CID).

Los CID (Breda et al., 2017) contemplan seis criterios para valorar el proceso de instrucción: epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, afectivo y ecológico. Cada criterio tiene asociados componentes e indicadores que permiten valorar en la práctica un proceso de instrucción. Por ejemplo, la tabla 1 muestra los componentes e indicadores del criterio de idoneidad epistémica.

Tabla 1. Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica (adaptado de Breda et al., 2017, p. 1903).

Componentes	Indicadores
Errores	No se observan prácticas que se consideren no válidas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo al que se dirigen; uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad de la complejidad del objeto matemático a enseñar	Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. Para uno o varios significados parciales, se ofrece una muestra representativa de problemas. Para uno o varios significados parciales, se usan diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…) y conversiones entre los mismos.

Errores

En esta investigación, de acuerdo con el EOS, entendemos el error matemático como práctica no válida desde el punto de vista de la institución matemática (tabla 1). Investigaciones recientes analizan los errores matemáticos de futuros profesores (por ejemplo, Galligan y Hobohm, 2015; Işik y Kar, 2012). En Galligan y Hobohm (2015), incluso se pide a los participantes que expliquen por qué creen que cometieron sus errores. Sin embargo, los trabajos donde son los propios (futuros) profesores quienes detectan sus errores matemáticos en su práctica docente no son frecuentes.

Diversas investigaciones (Fernández-Plaza et al., 2019; Hacisalihoğlu-Karadeniz et al., 2017; Moro et al., 2017; Sapire et al., 2016) estudian cómo los profesores identifican los errores que cometen sus alumnos, considerando posibles causas y desarrollando estrategias para gestionarlos. Entre estas investigaciones destacamos la de Hacisalihoğlu-Karadeniz et al. (2017), donde se identificaron errores de los futuros profesores cuando se les pidió que explicaran los errores de los alumnos. En este sentido, la capacidad que tengan los docentes para detectar también errores matemáticos propios puede ser fundamental para evitarlos y/o gestionarlos en la práctica (Moro et al., 2017).

METODOLOGÍA

Se utiliza, sobre todo, una metodología cualitativa. A partir de la interpretación de los comentarios que aparecen en los TFM de los futuros profesores sobre los errores matemáticos detectados en su propia práctica, emergen categorías inductivas de tipos de errores y argumentos sobre ellos.

Contexto y muestra

La muestra está formada por 57 TFM de futuros profesores que realizaban un máster de formación del profesorado de educación secundaria (especialidad de matemáticas) en el curso 2014-2015. Durante el máster, hay dos períodos de prácticas en los institutos. En el primero, los futuros profesores conocen el centro de prácticas, el alumnado y acuerdan con el mentor del centro qué unidad didáctica deben preparar. En el segundo período, implementan la unidad didáctica que han diseñado. Después, en el TFM, los futuros profesores valoran la idoneidad didáctica de su implementación utilizando los CID y proponen mejoras. En particular, al valorar la idoneidad epistémica, reflexionan sobre los errores y las ambigüedades matemáticos presentes en su práctica docente. En esta investigación consideramos las reflexiones sobre los componentes de errores y ambigüedades de los TFM, ya que algunos participantes confunden errores con ambigüedades y viceversa.

Fases de análisis

Primero, se registraron los extractos de los TFM donde había comentarios sobre los errores cometidos durante la práctica docente. Estos extractos constituyen las unidades de análisis de la investigación.

Segundo, se realizó un análisis temático (Braun y Clarke, 2006) de estos extractos y se establecieron categorías de tipos de errores de manera inductiva, consensuadas entre los autores. Aparte de identificar el error, algunos futuros profesores ofrecen más información en su reflexión. Por ejemplo, explican cómo gestionaron el error. En algunos casos, esta reflexión presenta una cierta estructura argumentativa, la cual permite inferir niveles de argumentación en la reflexión de los profesores.

Tercero, para identificar las diferentes estructuras de estos argumentos se ha adaptado la técnica de diagramación de argumentos (Guevara, 2011). En esta técnica, se consideran cuatro estructuras básicas de argumentos: convergente, indica que dos o más premisas apoyan la conclusión de manera independiente; dependiente, las premisas están unidas para apoyar a la conclusión, es decir, ambas premisas (o todas ellas) se necesitan mutuamente para inferirse la conclusión; divergente, una misma premisa está apoyando a más de una conclusión, se puede decir que hay dos o más argumentos unitarios; y encadenada, donde una de las proposiciones está como conclusión de una premisa y a su vez está como premisa de otra conclusión. Los pasos para la diagramación son: 1) encerrar entre corchetes todas las proposiciones del texto; 2) enumerar la proposiciones en orden de aparición; 3) estructurar el argumento ubicando espacialmente el lugar de la conclusión; 4) proponer una manera en que las premisas se relacionan y 5) marcar en rojo las proposiciones que hacen referencia al error; en verde, las proposiciones que hacen referencia al tratamiento del error; y en amarillo, las proposiciones que hacen referencia a las posibles implicaciones del error. Cabe mencionar que las premisas implícitas se representan en la diagramación entre círculos punteados y se tiene en cuenta la información del contexto, por ejemplo: quién halla el error y el momento en que se ubica el error (en la misma clase, después de la clase y se puede corregir al día siguiente o posteriormente).

Por último, a partir de los diagramas que informaban sobre la complejidad del argumento implícito en la reflexión de los futuros profesores, emergieron, mediante un proceso de triangulación de los autores, diferentes niveles de argumentación en la reflexión. En el nivel 1, se incluyeron los participantes que simplemente indican que hubo errores. En el nivel 2, se incluyeron los participantes que explican cuál fue el error, sin ofrecer más detalles. En el nivel 3, se incluyeron los participantes que, además de explicar cuál fue el error que cometieron, comentan posibles causas, consecuencias en el aprendizaje de los alumnos o cómo gestionaron el error. Los TFM donde no se incluyen comentarios sobre sus errores matemáticos estarían en un nivel 0. Aunque no está claro si estos participantes no explican errores porque no los cometieron o porque no los detectaron.

RESULTADOS

Al valorar si cometieron errores en su práctica docente, algunos futuros profesores explican malas opciones didácticas en vez de errores matemáticos propiamente. Una mala opción didáctica es una práctica que no favorece o incluso dificulta la comprensión de los alumnos, pero no se puede considerar un error matemático. Por ejemplo, FP11 explica que un error que cometió fue "no apuntar escrupulosamente quién había hecho los deberes los dos primeros días". Este comentario no se tuvo en cuenta en el análisis posterior porque no se refiere a un error de carácter matemático. También hay cierta confusión entre error y ambigüedad. Por ejemplo, FP12 explica:

> Así, los estudiantes tenían problemas para diferenciar entre las variables cuantitativas discretas y continuas en algunos casos, como cuando se pedía clasificar el siguiente ítem: "libros más vendidos". Este fue un error que cometí en la elaboración de la prueba, ya que daba lugar a equivocaciones, pues no es lo mismo el número de libros más vendidos (que hace referencia a la cantidad, y, por tanto, es una variable cuantitativa discreta) que el nombre de estos libros (que se refiere a su título, y, por tanto, es una variable cualitativa).

Aunque el participante lo considere un error, lo interpretamos como ambigüedad (dado que se presta a dos interpretaciones) y no se incluyó en el análisis posterior. En definitiva, en 25 TFM, se identifican comentarios sobre errores que han detectado los futuros profesores en su práctica docente.

Tipos de errores

Se distinguen cinco categorías de errores, como se muestra en la tabla 2. Cuatro errores no se han cuantificado porque no se ha podido identificar en los comentarios el tipo de error matemático, no está claro si se refieren a errores de notación.

Tabla 2. Categorías de errores.

Categoría	Número de errores detectados
Error de definición o vocabulario	11
Error de representación o notación	7
Error de procedimiento/en la resolución de un ejercicio	4
Error en el enunciado de un ejercicio	5
Error de argumentación matemática	1

La primera categoría la constituyen errores que comete el futuro profesor al definir un concepto matemático, porque no incluye todos los casos o por falta de precisión y rigor; y donde el futuro profesor utiliza incorrectamente el vocabulario matemático. Por ejemplo, el FP27 explica en su TFM:

> […] el día que el tutor presenció la clase que impartí en los alumnos de 1º de Bachillerato, donde se trabajaba la composición de funciones y la función inversa, cometí algún error cuando un alumno me preguntó sobre algún concepto que no había quedado suficientemente claro. Mi aclaración fue incorrecta y yo no me di cuenta hasta que el tutor me lo comentó al finalizar la sesión. […] Cabe mencionar también que al inicio de la siguiente sesión aclaré a nivel grupal mi error cometido en la sesión anterior.

En la segunda categoría, se incluyen errores de notación y errores de representación (por ejemplo, en la gráfica de una función). Por ejemplo, FP6 comenta un error en el uso de los signos positivo y negativo. Aquí la fuente del error es un libro, pero se considera error docente ya que fue validado por el profesor al presentarlo en el aula. De hecho, fueron los estudiantes quienes detectaron el error:

> Más adelante, cuando cogimos enunciados, había un ejercicio típico de casi todos los libros en el apartado de cónicas. Al menos he encontrado dos editoriales diferentes con el mismo error. Se trata de un ejercicio de elipses donde en las ecuaciones aparecen x^2 e y^2 con signos contrarios; es decir, como si fueran hipérbolas. Pero no fui yo quien encontró el error en esta ocasión, sino los alumnos.

Los errores que se refieren a aplicar mal una fórmula o método o a la obtención de un resultado incorrecto forman la tercera categoría. FP52 detecta un error de este tipo: "tan solo comentar un error en una de las soluciones de la lista de problemas de combinatoria detectado por el profesorado".

En la cuarta categoría, se incluyen los errores que aparecen en los enunciados de los ejercicios que los futuros profesores han propuesto a los alumnos para que los resuelvan. Por ejemplo, FP7 explica el siguiente error y ofrece un ejemplo de la tabla de valores para completar:

> El error más grave que cometí fue en la realización del examen. Hice un ejercicio de proporcionalidad directa en forma de tabla y en el enunciado cometí un error que hacía que las magnitudes expuestas no fuesen directamente proporcionales. […] Por suerte, vi este error antes de que los alumnos llegasen a este ejercicio y pude decir que cambiasen el enunciado.

Por último, un futuro profesor explica que cometió un error al dar a los alumnos una explicación intuitiva y poco rigurosa de un resultado matemático, en vez de hacer una demostración formal. Es el único error que se ha detectado de este tipo. El comentario aparece en el TFM de FP23:

> El uso de técnicas heurísticas de apoyo no debe ser en detrimento de una buena demostración formal. En aquella clase tenía la ventaja de que los alumnos ya estaban acostumbrados a las demostraciones, como pude comprobar al corregir mi error. […] Para hacer más comprensibles las matemáticas, com-

probaba que los nuevos conceptos tenían lógica. Un ejemplo de esto fue hacer ver ("mostrar") que el baricentro ocupa aproximadamente el punto medio de un triángulo. Lo que me pedía el mentor era una demostración formal y no solo la aportación de intuiciones que clarificasen los conocimientos.

Nivel de argumentación en la reflexión

Los comentarios sobre errores fueron analizados también con la técnica de diagramación. Los diagramas permiten dar forma al razonamiento que hacen los participantes al reflexionar sobre sus errores. Además, se utilizaron colores para facilitar la visualización e interpretación respecto a si hacen referencia a alguno de los siguientes aspectos: identificación del error, implicación del error, quién lo detecta y cómo se soluciona. Algunas veces, cuando la reflexión es breve solo se menciona el error y el diagrama es un punto rojo. A partir de este análisis, se definieron cuatro niveles: nivel 0, no se incluyen comentarios sobre errores; nivel 1, se indica que hubo algún error sin especificar cuál fue; nivel 2, se explica el error y no se va más allá de especificar quien lo detecta; y nivel 3, se explica el error y se incluyen posibles causas, consecuencias y/o cómo se gestionó. En la tabla 3, se muestra la distribución de los participantes por niveles de argumentación.

Tabla 3. Distribución por niveles de argumentación en la reflexión.

Nivel	**Número de futuros profesores**
3	13
2	8
1	3
0	33

A continuación, se incluyen ejemplos de diagramación de la argumentación en la reflexión sobre errores. El primer ejemplo corresponde al nivel 3. Del TFM de FP5, se tiene el siguiente párrafo, en el cual ya se han identificado y numerado las proposiciones:

> Hacia el final de la unidad didáctica, cuando ya estábamos practicando las reglas de derivación, 1{quise resolver la siguiente función en la pizarra para practicar la regla de la división: $f(x) = (3x-2) / (\sqrt{(3x)})$}. Cuando llegué a casa y 2{repasé lo que había explicado durante aquel día}, 3{me di cuenta de que en vez de hacer la derivada de esta función (que era el enunciado que estaba escrito en la pizarra), derivé la siguiente: $f(x) = (3x-2) / (3x2)$}, 4{ningún alumno se dio cuenta en aquel momento}. Aproveché este error y 5{al día siguiente pedí a un alumno que copiara en la pizarra el desarrollo de la derivada que habíamos hecho y les dije que había un error, que lo buscaran}. Finalmente, después de un rato que estuvieron repasando los cálculos, 6{una alumna encontró que no cuadraba la derivada de la raíz con lo que yo había escrito en la pizarra}.

En el diagrama de este ejemplo (ver figura 1), se marca en rojo la proposición donde se menciona el error; y en verde, la forma de gestionar el error. En este caso no se mencionan posibles implicaciones del error, pero queda claro cuándo y quién detectó el error.

Figura 1. Diagrama del comentario de FP5.

El segundo ejemplo corresponde al nivel 2. En el TFM de FP25, se tiene el siguiente párrafo y se genera el diagrama de la figura 2, considerando en rojo la proposición donde se menciona el error:

> […] "6{Un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 cm. gira por ésta engendrando un cono. Halla la longitud de sus lados para que el cono tenga volumen máximo}"
>
> 7{Aquí nos encontramos con claro error de expresión, al querer referirme a que el triángulo gira por la altura y no por la hipotenusa}

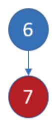


Figura 2. Diagrama del comentario de FP25.

Un ejemplo del nivel 1 es el siguiente comentario de FP9. En la figura 3 se muestra el diagrama, considerando en azul con contorno rojo la proposición donde se menciona que existen algunos errores, y en azul con contorno verde donde se comenta que se corrigieron.

> 1{La unidad didáctica presenta algunos errores asociados a su edición}. 2{Estos errores se han ido corrigiendo durante el transcurso de las sesiones} y 3{no han representado ningún tipo de problema para el correcto desarrollo de la unidad didáctica}.

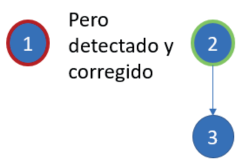


Figura 3. Diagrama del comentario de FP9.

El cuarto ejemplo se asoció al nivel 0 porque el futuro profesor FP13 no explica en su TFM ningún error cometido durante la implementación:

> Observaciones: Puedo determinar que no hay errores matemáticos respecto a los ejercicios, problemas, presentaciones y fichas, este hecho está contrastado con mi mentora, ya que ha ido revisando mis propuestas didácticas.

Una relación entre los diagramas y los niveles de argumentación en la reflexión asignados es que los diagramas para el nivel 2 tienen al menos una proposición de color rojo y los diagramas para el nivel 3 tiene una proposición de color rojo más otra proposición de color verde (gestión del error) o amarillo (implicaciones del error) y se relacionan, de alguna manera, en la argumentación. Además, los diagramas permiten visualizar cuándo la argumentación en la reflexión de los profesores sobre los errores es más superficial. Por ejemplo, la figura 3 muestra que el participante habla de manera general sobre un error y su gestión sin explicitarlos. Por otro lado, se observó que algunos diagramas tienen sus elementos más relacionados (figura 1) que otros; algunos participantes reflexionan sobre varios aspectos de los errores, pero no se relacionan claramente las ideas que mencionan.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el análisis de los TFM, se observan diferentes niveles de argumentación en la reflexión sobre los errores cometidos en la práctica por los futuros profesores. Para realizar su reflexión, los futuros profesores disponen de la pauta de los CID, donde se definen los errores como prácticas que se consideran no válidas desde el punto de vista matemático (ver tabla 1). A pesar de ello, algunos participantes confunden los errores con ambigüedades o malas opciones didácticas. Esto coincide con otras investigaciones, por ejemplo, Hummes (2022) observa que profesores que conocen los CID, al aplicarlos en su reflexión, tienen más dificultades para analizar los componentes de la idoneidad epistémica que los de otras idoneidades. En nuestra investigación, incluso cuando los participantes reconocen haber cometido errores, se observa que el nivel de argumentación en su reflexión sobre el error varía (desde solamente mencionar que hay un error, hasta describir el error, analizar causas, consecuencias y cómo gestionarlo). De manera similar, Fernández-Plaza et al. (2019) observan cierta diversidad en las explicaciones que hacen los participantes de su investigación (futuros profesores de educación primaria) de los errores de los alumnos; algunos participantes intentan buscar las causas del error, aunque no se les pidiera explícitamente. Basándonos en la información recogida en los comentarios sobre errores más elaborados, la pauta que tienen los participantes del componente de errores del criterio de idoneidad epistémica se podría complementar con ciertas preguntas para promover la reflexión de los futuros profesores: ¿Qué tipo de error es (error de definición, de representación, de procedimiento, de enunciado, de argumentación…)? ¿Cuáles fueron las causas del error? ¿Este error ha tenido consecuencias para los alumnos (aprendizaje de contenido/procesos, resolución de otros ejercicios…)? ¿Cómo se podría corregir el error? ¿Se puede aprovechar el error con fines didácticos? ¿Cómo se pueden evitar errores similares?

La diagramación permite visualizar más fácilmente la estructura de la argumentación implícita en la reflexión de los errores. Esto facilita identificar limitaciones en la argumentación de los futuros profesores, por ejemplo, falta de conexión entre los elementos del discurso o información repetida. También se observa que algunos argumentos, como en el ejemplo de la figura 1, contienen propuestas de acciones a considerar una vez que se identifica el error, lo cual se define como argumentación práctica (Gómez, 2017). Así, algunas preguntas planteadas para la reflexión podrían promover la argumentación práctica. Cabe mencionar que, en nuestra investigación, la mayoría de futuros profesores no explican cómo se podría aprovechar el error como estrategia didáctica (Hacisalihoğlu-Karadeniz et al., 2017; Sapire et al., 2016).

Los resultados de este trabajo se pretenden ampliar con el análisis de más generaciones del máster. La distribución en niveles de argumentación en la reflexión es una primera propuesta para caracterizar la argumentación de los futuros profesores sobre los errores que cometen en su propia práctica. Los niveles pueden modificarse a partir de la ampliación de la muestra. Como limitación, se observan diferencias entre los comentarios del nivel 3 que podrían implicar una segmentación de este.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto de investigación PID2021-127104NB-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias

Braun, V. y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Elliott, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Morata.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Castro-Rodríguez, E., Segovia, I., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2019). Identificación de errores escolares en matemáticas por maestros en formación. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 293-302). SEIEM.

Galligan, L. y Hobohm, C. (2015). Investigating students' academic numeracy in 1st level university courses. *Mathematics Education Research Journal, 27*, 129-145. https://doi.org/10.1007/s13394-014-0132-9

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). SEIEM.

Gómez, J. (2017). ¿Qué es la argumentación práctica? *Revista Co-herencia, 14*(27), 215-243. https://doi.org/10.17230/co-herencia.14.27.9

Guevara, G. (2011). Estructuras de Argumentos. En L. Vega y P. Olmos, *Compendio de lógica, argumentación y retórica* (pp. 239-243). Trotta.

Hacisalihoğlu-Karadeniz, M., Baran-Kaya, T. y Bozkuş, F. (2017). Explanations of prospective middle school mathematics teachers for potential misconceptions on the concept of symmetry. *International Electronic Journal of Elementary Education, 10*(1), 71-82. https://dx.doi.org/10.26822/iejee.2017131888

Hart, L. C., Alston, A. y Murata, A. (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together*. Springer.

Hummes, V. (2022). *Uso combinado del Lesson Study y de los Criterios de Idoneidad Didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas*. Tesis doctoral. Universidad de Barcelona.

Işik, C. y Kar, T. (2012). An error analysis in division problems in fractions posed by pre-service elementary mathematics teachers. *Educational Sciences: Theory and Practice, 12*(3), 2303-2309.

Moro, M. L. F., Soares, M. T. C. y Spinillo, A. G. (2017). Que ações didáticas escolher diante de erros de alunos em problemas matemáticos? *Zetetiké, 25*(3), 418–439. https://doi.org/10.20396/zet.v25i3.8649678

Sapire, I., Shalem, Y., Wilson-Thompson, B. y Paulsen, R. (2016). Engaging with learners' errors when teaching mathematics. *Pythagoras, 37*(1), a331. http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v37i1.331

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action.* Basic Books.

LA CONVERSACIÓN ENTRE PROFESOR Y ESTUDIANTE: UNA FORMA DE APOYAR EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA

Conversation between teacher and student: A way to support the learning of proof in geometry

Sua, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A.

Universitat de València

Resumen

Como parte de una investigación doctoral, cuyo objetivo es analizar el aprendizaje de la demostración en el contexto de la geometría tridimensional a través de problemas de construcción resueltos en un ambiente de geometría dinámica, queremos estudiar el apoyo e impacto de las intervenciones del profesor al conversar con un estudiante sobre las demostraciones elaboradas por él. En este documento ilustramos la relevancia de las intervenciones dirigidas a profundizar en las ideas del estudiante y guiar su trabajo cuando se presentan bloqueos. De esta forma resaltamos la importancia de la gestión y participación del profesor en el aprendizaje de la elaboración de demostraciones.

Palabras clave: *aprendizaje de la demostración, apoyo del profesor, geometría dinámica, geometría tridimensional, problemas de construcción.*

Abstract

As part of a doctoral research, whose objective is to analyze the learning of proof in the context of three-dimensional geometry through construction problems in a dynamic geometry environment, we want to study the support and impact of the teacher's interventions when he talks to the students about the proofs elaborated by them. In this document we illustrate the relevance of interventions aimed at deepening students' ideas and guiding their work when blockages occur. We highlight the importance of teacher's management and participation in the learning of elaboration of the proofs.

Keywords: *learning of proof, teacher support, dynamic geometry, 3-dimensional geometry, construction problems.*

INTRODUCCIÓN

Uno de los campos más interesantes y desafiantes en didáctica de las matemáticas es el que tiene que ver con aprender a demostrar (Marrades y Gutiérrez, 2000). De acuerdo con estos autores, alcanzar este objetivo toma tiempo e involucra hacer frente a distintas problemáticas de los estudiantes al involucrarse en esta práctica matemática. Esto ha hecho que la investigación en esta área se mantenga vigente, siendo una de sus líneas de trabajo la que estudia el apoyo de los ambientes de geometría dinámica (AGD, en adelante) en el aprendizaje de la demostración (en este texto usaremos como equivalentes las expresiones aprender a demostrar y aprendizaje de la demostración).

Sua, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2022). La conversación entre profesor y estudiante: una forma de apoyar el aprendizaje de la demostración en geometría. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 559-567). SEIEM.

Ya se ha documentado cómo los AGD influyen positivamente en aspectos de la demostración como la exploración inicial, la formulación de una conjetura y la validación de esta (Gutiérrez, 2005; Sinclair y Robutti, 2013). La mayoría de los estudios en esta dirección han sido realizados en contextos de geometría bidimensional, pero es muy diferente el trabajo en contextos de geometría tridimensional (Gutiérrez y Jaime, 2015). Bajo esta premisa, hemos elaborado una propuesta para facilitar el aprendizaje de la demostración con el apoyo de un AGD, en el contexto de la geometría tridimensional y los problemas de construcción. Nuestro interés por conocer el impacto de este recurso en el aprendizaje de la demostración nos ha llevado a analizar la influencia de las representaciones 2D en configuraciones 3D, la analogía que se puede establecer entre ambos dominios y beneficios de algunas características del AGD al realizar construcciones geométricas.

En estas aproximaciones al objeto de estudio hemos reconocido el rol relevante del profesor a través de su gestión. Más concretamente, la forma en que la conversación que él sostiene con los estudiantes sirve como motor para la verbalización de ideas y argumentos, lo cual deriva en la producción por los estudiantes de demostraciones de propiedades geométricas. La literatura ha mostrado la importancia del profesor al ayudar al estudiante a producir soportes y datos relevantes para su argumentación (Singletary y Conner, 2015; Conner y Singletary, 2021), así como manejar las producciones de los estudiantes, pues en estas se puede reconocer la comprensión que ellos tienen respecto al tema de conversación (Solar et al., 2021). También se ha mostrado la influencia de los cuestionamientos del profesor a los estudiantes, argumentando los cambios conceptuales que estos producen en el pensamiento de ellos (van Zee y Minstrell, 1997).

En este contexto, el objetivo de este documento es ilustrar y analizar la forma en que las intervenciones del profesor, en conversación individual con un estudiante durante la resolución de un problema de construcción en un AGD, apoyan la elaboración de una demostración de una propiedad geométrica.

REFERENTES CONCEPTUALES

Resolución de problemas de construcción y aprendizaje de la demostración

Los AGD apoyan el aprendizaje de la demostración (Mariotti, 2012). En nuestro estudio, hacemos énfasis en el aprendizaje de la demostración mediante problemas de construcción. Este tipo de problemas consiste en (i) crear en el AGD una figura geométrica con determinadas propiedades, planteadas en el enunciado, que se conserven bajo arrastre y (ii) explicar y validar el procedimiento empleado para construir la figura (Mariotti, 2019). Consideramos una demostración como un argumento matemático, empírico o deductivo, cuya intención es convencer a alguien sobre la verdad de algún hecho matemático. En el contexto de los problemas de construcción, la demostración tiene la finalidad de convencer sobre la validez de la construcción realizada.

Al emplear herramientas del AGD en la construcción de objetos geométricos, se producen significados personales gracias a las relaciones de dependencia que se descubren y verifican mediante acciones de arrastre. Sin embargo, estas herramientas también están relacionadas con elementos teóricos de la geometría euclidiana que podrían apoyar a los estudiantes al elaborar demostraciones de sus construcciones (Mariotti, 2012). En este escenario, resolver problemas de construcción permite que los estudiantes aprovechen las posibilidades que provee el AGD, así como del sistema lógico que subyace a este. Por lo tanto, las construcciones geométricas tienen también una naturaleza puramente teórica, donde su validez está ligada a la demostración de algún teorema. Resolver este tipo de problemas en un AGD puede hacer que los estudiantes evoquen significados teóricos de las herramientas utilizadas (Mariotti, 2019).

Las intervenciones del profesor: apoyo para el aprendizaje de la demostración

Estudiar la conversación entre el profesor y sus alumnos en la clase de matemáticas ha permitido analizar el efecto de las intervenciones del profesor en la elaboración de argumentos en clase, diferenciando quién aporta cada elemento del argumento, el profesor o los estudiantes (Conner y Singletary, 2021; Singletary y Conner, 2015). Como resultado de este tipo de estudio, Conner et al. (2014) proponen un conjunto de categorías y subcategorías de las intervenciones del profesor, a saber: *Contribución directa*, cuando el profesor provee elementos del argumento y los estudiantes no tienen intervención. Estas contribuciones provienen de afirmaciones realizadas por el profesor o de la escritura en la pizarra de información tomada como parte de un argumento. *Formulación de requerimientos* (requerir una propiedad, una idea, un método, una elaboración o una evaluación), cuando el profesor solicita a los estudiantes desarrollar ideas con profundidad, comunicar los procedimientos empleados en su resolución, proveer hechos matemáticos, u otros similares. En este tipo de apoyo prima la intención del profesor al requerir algo de los estudiantes, más que la respuesta misma que ellos ofrezcan. *Otras acciones de apoyo* (direccionar, promover, evaluar, informar, repetir), en las que se ubican las acciones del profesor no contempladas en las anteriores categorías; estas acciones pueden consistir en dirigir la atención de los estudiantes a elementos particulares, fomentar la exploración de alguna situación, evaluar la pertinencia y validez de las propiedades matemáticas declaradas por ellos, o retomar temas de la conversación que puedan ser necesarios.

Aunque Conner et al. (2014) han desarrollado esta categorización analizando las interacciones entre un profesor y sus alumnos en una clase ordinaria, la categorización puede aplicarse también cuando solo interviene en el diálogo un estudiante, sea en una clase o en un experimento individual como el nuestro.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

El contenido de este documento es parte de una investigación basada en una metodología de estudio de caso, en el que analizamos el aprendizaje de la demostración en el contexto de la geometría tridimensional con la mediación de GeoGebra, por parte de cuatro estudiantes con alta capacidad matemática (11 a 14 años) que cursaban entre primero y cuarto año de ESO. Además de su formación escolar, ellos participaban en programas de atención al talento (AVAST) y al talento matemático (ESTALMAT).

Diseñamos e implementamos una secuencia de 18 problemas de construcción en sesiones de 60 minutos aproximadamente. Algunos problemas solicitaban la construcción de un objeto geométrico que satisficiera alguna propiedad asociada a la equidistancia, primero en 2D y luego en 3D (por ejemplo, un triángulo equilátero). Otros problemas solicitaban la construcción de un objeto en 2D y uno análogo en 3D (por ejemplo, el centro de la circunferencia en 2D y de la esfera en 3D). La resolución de cada problema brindaba elementos instrumentales y conceptuales útiles para resolver los problemas planteados posteriormente.

Los estudiantes inicialmente resolvían cada problema y después dialogaban con el primer autor del documento, quien dirigía la conversación para justificar los resultados. Estas sesiones se grabaron en audio y video. Debido a que los estudiantes estaban en diferentes cursos escolares y tenían diferentes experiencias escolares, las sesiones se realizaron como entrevistas clínicas individuales.

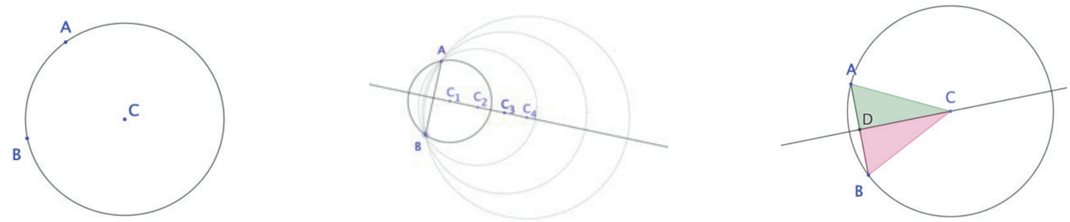
A continuación, presentamos algunos episodios de la resolución del sexto problema de la secuencia y la conversación entre el profesor (el primer autor) y un estudiante a quien llamaremos Diego (pseudónimo). El problema y los episodios seleccionados ilustran cómo las reacciones del profesor a las intervenciones de Diego le apoyaban en la explicitación y organización de su pensamiento, de cara a la demostración para validar la construcción realizada.

Este problema, que presentamos a continuación, tiene el objetivo de introducir la mediatriz y el plano mediador como conjuntos de puntos que equidistan de dos puntos fijos en el plano y el espacio, respectivamente. El enunciado del problema es el siguiente:

- Abre GeoGebra y selecciona la vista *Gráficos*. Construye los puntos A, B y C. Construye ahora una circunferencia con centro en C que contenga el punto A. Arrastra el punto C hasta que la circunferencia contenga el punto B. Arrastra C manteniendo B en la circunferencia hasta donde te sea posible.
- Activa la vista *Gráficos 3D* y cierra la vista *Gráficos*. Verás la construcción que has realizado en 2D. Arrastra el punto C fuera del plano, a distintos lugares del espacio, manteniendo la propiedad de estar a la misma distancia de los puntos A y B.

APOYO DEL PROFESOR: ANÁLISIS DE UN EJEMPLO

Al resolver la primera parte del problema, Diego construyó los puntos A, B y C y la circunferencia con centro en C que contenía el punto A. Después, arrastró C hasta que B llegó a pertenecer a la circunferencia (figura 1a) y luego arrastró C conservando dicha pertenencia. Diego construyó el segmento AB, su mediatriz y vinculó el punto C a la mediatriz con la herramienta *Vincular/desvincular puntos*. Luego arrastró el punto C sobre la mediatriz, mientras la representación en pantalla mostraba que se mantenía la pertenencia de B a la circunferencia (figura 1b). Diego aseguró haber completado lo que pedía el problema.



a. b. c.

Figura 1. Resolución del sexto problema en la configuración 2D.

Diego expresó que ubicó el punto C en la mediatriz al observar su comportamiento mientras lo arrastraba y se conservaba la pertenencia del punto B a la circunferencia. Él expresó conocer ya la mediatriz, definiéndola como "una recta perpendicular que pasa por el centro de un segmento". El profesor intervino validando la respuesta de Diego y añadiendo:

1. Profesor: Cuando colocas al punto C en la mediatriz, ves que en cualquier lugar de la mediatriz donde se ubique el punto C, la circunferencia va a contener al punto A y B… ¿Podrías explicarme por qué ese punto C, al estar en la mediatriz, siempre va a estar a la misma distancia de A y B?
2. Diego: Siempre va a tener la misma distancia estando en la mediatriz y una demostración en parte es lo que estamos haciendo ahora del círculo, porque significa que A y B ahora mismo son el radio de C. Y si siempre son el radio de C, de la circunferencia C, significa que [sus distancias a C] son iguales.
3. Prof.: …Yo quisiera que me dijeras por qué esos puntos deben estar en la circunferencia, más allá de "porque se ve que están ahí". ¿Podrías decirme el motivo de ello?
4. Diego: Sí. Siempre están a la misma distancia… no sé cómo explicarlo exactamente… yo diría que es porque la mediatriz pasa por el punto medio del segmento entre A y B, y es

una recta que se mueve, o sea, que tiene la misma inclinación, que es perpendicular al segmento AB, entonces, como está al medio y al ser perpendicular, el punto C nunca se puede acercar más a un punto que a otro. Entonces… es por eso por lo que yo creo…

A petición del profesor, Diego construyó D, el punto medio del segmento AB, y los triángulos ADC y CDB (figura 1c). También le pidió recordar elementos usados al resolver anteriores problemas que pudieran ser útiles ahora, en particular los relacionados con congruencia de triángulos.

5. Diego: Ya, pues, ha de ser la misma distancia porque el triángulo CDB y CDA siempre son congruentes, aunque yo mueva C [arrastra C a lo largo de la mediatriz].
6. Prof.: ¿Por qué crees que esos dos triángulos siempre son congruentes?
7. Diego: Sé que tienen la misma base, porque es la mitad del segmento AB, y tienen la misma altura que es DC. Entonces, sabemos que tenemos este lado [señala el segmento DB] y este lado [señala el segmento DC] … y este ángulo de aquí [señala el ángulo CDB] siempre va a ser de 90º, así que tenemos dos lados y un ángulo… y así ya sabemos que son congruentes.

La solución en 2D dejó ver una primera aproximación de Diego en la que proponía una demostración que vinculaba elementos empíricos y teóricos [2, 4]. En este caso, Diego sustentaba gráficamente la pertenencia de los puntos A y B a la circunferencia, pero luego evocaba la congruencia de los radios de esta para concluir la equidistancia. La reacción del profesor a esta aproximación (*formulación de requerimientos: elaboración*) [3] y la sugerencia de emplear congruencia de triángulos (*otras acciones de apoyo: direccionar*) [6] llevó a Diego a explotar las propiedades de la mediatriz que él conocía y otras dadas por el protocolo de construcción [7], con lo que ofreció una explicación formal de la equidistancia solicitada.

Diego procedió a resolver la segunda parte del problema. En la vista 3D de GeoGebra se veían el segmento AB, su punto medio D y su mediatriz. Diego declaró su interés en construir un plano o recta perpendicular al plano XY (plano gris) que contuviera la mediatriz. Él no conocía las herramientas de GeoGebra 3D suficientemente, por lo que el profesor le ayudó a construir la recta perpendicular al plano XY que pasa por C y el plano que determinan esta recta y la mediatriz (figura 2a).

8. Diego: Si C está en ese plano [verde], B y A estarán dentro de esa circunferencia [la construida en el plano XY al resolver el problema en 2D]… a la misma distancia.
9. Prof.: Listo. ¿Por qué crees que ese plano es el que soluciona la tarea?
10. Diego: Porque en el 2D solo nos teníamos que preocupar de que estuviera en la perpendicular [mediatriz], pero ahora también nos tenemos que preocupar de la altura [desplazamiento vertical de C, figura 2b]. Pero en realidad la altura prácticamente no influye en nada. Por muy alto que esté C dentro de este plano [verde], que esté arriba o debajo de la mediatriz, pues siempre habrá la misma distancia.
11. Prof.: ¿Podrías mostrarme de alguna manera por qué ese plano funciona?
12. Diego: Voy a mover a C (en el plano verde) …

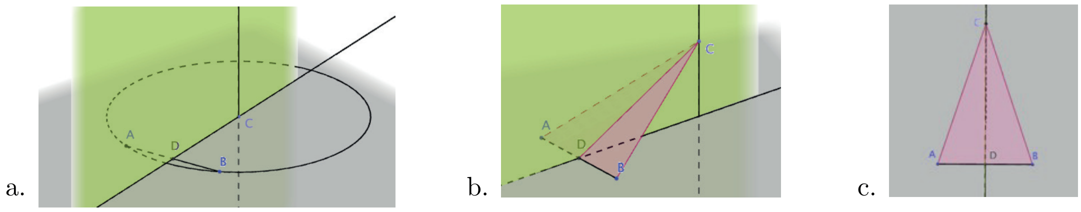


Figura 2. Resolución del problema en la configuración 3D.

Al arrastrar C fuera del plano XY la circunferencia de la que era centro desapareció y el plano construido quedó vinculado a la recta perpendicular al plano XY que contenía C y un punto en la mediatriz. Debido a esto, Diego arrastró horizontalmente C, hasta que el plano verde contuviera a la mediatriz. Luego, Diego construyó los triángulos CDA y CDB (figura 2b) y determinó las longitudes de los segmentos AC y CB. El profesor le pidió explicar la validez del plano construido.

13. Diego: Porque lo que cambia de aquí [3D] al 2D es la altura. Pero solo con que esté a la misma altura que cualquier punto de una mediatriz… Yo creo que funciona porque la altura no influye, lo único que influye es que esté en el mismo plano, que se pueda hacer una perpendicular con la mediatriz que hemos hecho.
14. Prof.: ¿Como así? ¿Eso último que dijiste cómo es?
15. Diego: Lo único que importa es que los puntos…, que el punto C sea coplanar a la recta [mediatriz]. Porque la altura, lo que es la dimensión Z no importa, lo único que importa es la X e Y del plano. La Z puede estar donde quiera.

El profesor le recordó a Diego que en 2D había usado la congruencia de triángulos para validar su construcción y le preguntó si era posible replicar dicha estrategia en 3D. Observado la construcción desde arriba (figura 2c), Diego aseguró que sí era posible, pues las condiciones para establecer la congruencia entre los triángulos eran iguales a las que había en 2D. Aunque Diego cambió de perspectiva para modificar la posición de C en el plano verde, regresó a la vista superior de la construcción para afirmar que, en cualquier posición de C en el plano, el razonamiento era igual.

El profesor reaccionó a las ideas de Diego, mencionándole que la congruencia de lados era algo que sí se mantenía de 2D a 3D, pero que la perpendicularidad era algo solamente válido en 2D, dado que allí se apoyaba en la propiedad de perpendicularidad de la mediatriz. Por lo anterior, le preguntó a Diego por la validez de la perpendicularidad en la configuración 3D.

16. Diego: Lo que yo creo que es porque el propio plano [verde] actúa como perpendicular. Es decir, como… esta mediatriz infinitas veces hacia arriba y hacia abajo. Porque… para que el punto C pueda estar a la misma distancia de A y B, como son, entre comillas, infinitas mediatrices, siempre va a estar en una [la figura 3a representa la idea de Diego]. Entonces va a estar a la misma distancia de A y B. Entonces, lo que hace aquí la perpendicular con el triángulo sería el propio plano.
17. Prof.: Hay dos o tres cosas que dijiste que me llamaron mucho la atención. La primera: dijiste que había infinitas mediatrices. Cuando dices infinitas mediatrices, ¿te refieres que para el segmento AB existen infinitas mediatrices?
18. Diego: No exactamente. Me refería a que la mediatriz de A y B…, lo que quería hacer con este plano [verde] era duplicarla y copiarla en el eje Z, crear infinitas para que el punto C estuviera a la misma distancia al estar en una mediatriz, aunque no fuera la original [figura 3a].

19. Prof.: Entonces tú dices no, para un segmento, solamente hay una mediatriz.

…

20. Diego: Bueno…, la mediatriz puede estar igual en el espacio también. No solo puede haber una, puede haber infinitas también.
21. Prof.: Ah, o sea que sí hay infinitas mediatrices para un segmento.
22. Diego: Sí, porque la mediatriz… el punto que estamos usando ahora mismo es el C. Pero para hacer una recta necesitamos dos puntos. Entonces el punto puede estar… este es el punto medio [punto D], entonces está el punto medio y cualquier otro punto [del plano verde].

a. b.

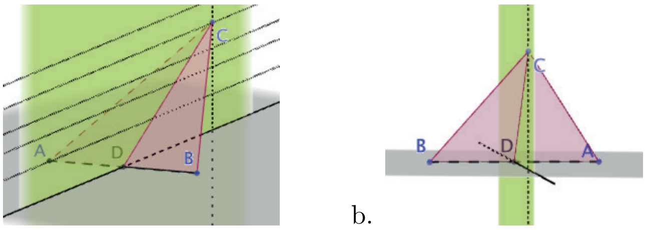


Figura 3. Manipulación de representaciones gráficas.

El profesor cuestionó a Diego por los motivos que le llevaron a asegurar que el plano construido gozaba de la propiedad de perpendicularidad y con respecto a qué era perpendicular.

23. Prof.: Dijiste que ese plano era como perpendicular, ¿te acuerdas que dijiste eso? ¿perpendicular a qué?
24. Diego: Al otro plano gris.
25. Prof.: ¿Tu qué entiendes de que dos planos sean perpendiculares?
26. Diego: Por ejemplo… que sus infinitas rectas sean perpendiculares. A ver, he dicho perpendicular, pero lo he dicho por la forma esta, no que fuera que tenía que ser perpendicular sí o sí.
27. Prof.: ¿Qué forma?
28. Diego: La forma que hacen de cruz (figura 3b). Y que sé que este ángulo [señala la intersección entre los planos] es de 90º.

El profesor propuso a Diego considerar lo que pasaría si la mediatriz del segmento AB rotaba alrededor de su punto medio. Diego aseguró que esta recta estaría en el plano construido. Ante esta respuesta, el profesor pidió a Diego explicar por qué en los triángulos ADC y BDC se contaba con un ángulo recto, propiedad mencionada al justificar la pertinencia del plano construido.

29. Diego: El ángulo que sabemos que es recto… porque hay una mediatriz… una de las infinitas del plano…
30. Prof.: En este caso, ¿cuál podría ser? ¿Podríamos saber cuál es?
31. Diego: La que pasa por D y por C.
32. Prof.: Esa recta DC es mediatriz del segmento AB, ¿por qué?
33. Diego: Sí, porque está dentro del plano de todas las mediatrices y porque corta de forma perpendicular al segmento AB por su punto medio.

34. Prof.: Esa recta DC es una mediatriz. ¿Qué pasa con que sea una mediatriz?

35. Diego: Pues que está en perpendicular al segmento AB.

En la configuración 3D, la primera justificación que Diego produjo sobre la pertenencia del punto C al plano construido se sustentaba en la conservación de la equidistancia a través del desplazamiento vertical de este punto [10, 13]. Para Diego, tomar un punto en la mediatriz y desplazarlo verticalmente no afectaba la igualdad de distancias. En un segundo momento, el profesor enfocó la atención de Diego en la justificación dada en 2D (*otras acciones de apoyo: direccionar*), cuestionándolo sobre la posibilidad de que esta pudiera ser replicada en 3D. La respuesta positiva de Diego frente a esto, en particular la perpendicularidad entre AB y CD que él declara, llevó al profesor a profundizar en el pensamiento del estudiante (*formulación de requerimientos: elaboración*), lo que favoreció que Diego mencionara la infinitud de mediatrices del segmento AB en el espacio [20, 22] y su pertenencia al plano mediador como justificación de la perpendicularidad entre los segmentos mencionados [33, 35]. Al final, Diego organizó sus ideas y explicó por qué C equidistaba de A y B apoyándose en la congruencia de triángulos.

CONCLUSIONES

La forma en que Diego resuelve el problema se caracteriza por un distanciamiento de las acciones con el AGD esperadas por el profesor. Aunque el problema pedía arrastrar un punto en 2D o 3D para que equidistara de dos puntos fijos, como contexto para el descubrimiento de la mediatriz y el plano mediador, Diego anticipó en ambos casos el objeto geométrico que se obtendría, expresando su conocimiento previo de la mediatriz y su propiedad de perpendicularidad. Esto permitió dirigir la conversación hacia la demostración de que los puntos en la recta y el plano equidistan de A y B.

En las conversaciones presentadas se evidencia un constante apoyo por parte del profesor hacia Diego, con la intención de que este elaborara con mayor detalle las ideas que exponía o que centrase su atención en aspectos particulares que había dejado de lado y que podían llegar a ser útiles al construir la demostración de alguna propiedad. El resultado de esta conversación deja ver que este apoyo es favorable, no solo por el logro de una demostración cercana a la formal sino también por la forma como la comprensión de Diego sobre los objetos de discusión es exhibida y manejada por el profesor de acuerdo con el objetivo del problema abordado.

La interpretación que hemos realizado sobre la conversación entre el profesor y el estudiante que resuelve un problema de construcción brinda evidencia sobre la relevancia y efecto de las intervenciones del profesor en la actividad matemática de demostrar realizada por el estudiante. La combinación de acciones del profesor dirigidas a conocer en profundidad las ideas que el estudiante expresa, así como la ayuda que le brinda cuando es necesario, dejan ver su utilidad cuando se pretende involucrar al estudiante en el razonamiento deductivo. En nuestro caso, es además interesante que el profesor nunca realizó una *contribución directa*, lo que permite decir que este dio prioridad al desarrollo y guía de las ideas del estudiante de acuerdo con el objetivo de aprendizaje del problema y no a la elaboración de la demostración de la propiedad involucrada.

Agradecimientos

Esta publicación es parte del proyecto PID2020-117395RB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y de la ayuda predoctoral EDU2017-84377-R, financiada por FSE Invierte en tu futuro.

Referencias

Conner, A. y Singletary, L. M. (2021). Teacher support for argumentation: An examination of beliefs and practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *52*(2), 213-247. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0250

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A. y Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 401-429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Gutiérrez, Á. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática* (pp. 27-44). SEIEM.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). Analysis of the learning of space geometry in a 3-dimensional geometry environment. *PNA*, *9*(2), 53-83. https://doi.org/https://doi.org/10.30827/pna.v9i2.6106

Mariotti, M. A. (2012). Proof and proving in the classroom: Dynamic geometry systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 163-185. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694282

Mariotti, M. A. (2019). The contribution of information and communication technology to the teaching of proof. En G. Hanna, D. A. Reid y M. de Villiers (Eds.), *Proof technology in mathematics research and teaching* (pp. 173-195). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-3), 87-125.

Sinclair, N. y Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y K. F. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 571-596). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_19

Singletary, L. M. y Conner, A. (2015). Focusing on mathematical arguments. *The Mathematics Teacher*, *109*(2), 143-147. https://doi.org/10.5951/mathteacher.109.2.0143

Solar, H., Ortiz, A., Deulofeu, J. y Ulloa, R. (2021). Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(7), 977-1005. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1733686

van Zee, E. y Minstrell, J. (1997). Using questioning to guide student thinking. *Journal of the Learning Sciences*, *6*(2), 227-269. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0602_3

¿QUÉ OPORTUNIDADES BRINDAN LOS CURRÍCULOS DE MATEMÁTICAS PARA EDUCAR EN SOSTENIBILIDAD?

What opportunities do mathematics curricula provide for sustainability education?

Vásquez, C.[a], Piñeiro, J. L.[b] y García-Alonso, I.[c]

[a]Pontificia Universidad Católica de Chile, [b]Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, [c]Universidad de La Laguna

Resumen

Este estudio analiza las orientaciones curriculares de Educación Matemática de Chile, México, Costa Rica y Colombia en relación con sus posibles vínculos con la Educación para el Desarrollo Sostenible o a su potencial desarrollo y las implicaciones que estas tienen sobre el conocimiento del profesor. Para ello, se ha realizado un análisis de contenido que examina el sentido que se otorga a la enseñanza y aprendizaje de la matemática que permitiría un desarrollo de las competencias clave de sostenibilidad. Los resultados muestran una enseñanza y aprendizaje de la matemática poco alineada con el desarrollo sostenible, con una baja presencia de las competencias clave de sostenibilidad. Estos resultados constituyen una hoja de ruta tanto para las instituciones formadoras de profesores como para otorgar un nuevo enfoque educativo que permita contribuir a educar en sostenibilidad en la Educación Primaria desde la Educación Matemática.

Palabras clave: *educación para el desarrollo sostenible, objetivos de desarrollo sostenible, enfoque de desarrollo sostenible, conocimientos del profesorado, planes de estudio de matemáticas de primaria.*

Abstract

This study analyses the Mathematics Education curricular guidelines of Chile, Mexico, Costa Rica and Colombia in relation to their possible links with Education for Sustainable Development or their potential development and the implications they have on teachers' knowledge. To this end, a content analysis has been carried out to examine the meaning given to the teaching and learning of mathematics that would enable the development of the key competences of sustainability. The results show that the teaching and learning of mathematics is poorly aligned with sustainable development, with a low presence of key sustainability competences. These results constitute a roadmap both for teacher training institutions and for providing a new educational approach to contribute to educating in sustainability in Primary Education through Mathematics Education.

Keywords: *education for sustainable development, sustainable development goals, sustainable development approach, teacher knowledge, primary mathematics curricula.*

INTRODUCCIÓN

Actualmente el profesorado tiene el desafío de ser un agente de cambio en un mundo que se encuentra en medio de una crisis global, climática, sanitaria, ambiental y social sin precedentes. Este hecho nos

Vásquez, C., Piñeiro, J. L. y García-Alonso, I. (2022). ¿Qué oportunidades brindan los currículos de matemáticas para educar en sostenibilidad? En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 569-577). SEIEM.

lleva a repensar la manera de educar en las distintas disciplinas y en todos los niveles educativos con el propósito de cambiar la manera de relacionarnos con nuestro entorno y el mundo. Es en esta dirección, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, en inglés) plantea la necesidad de fomentar una *Educación para el Desarrollo Sostenible* (EDS) en todos los niveles educativos. Esto sin duda es un desafío global que implica impulsar acciones prácticas para construir juntos un futuro mejor, que permita acabar con la pobreza, las desigualdades, y alcanzar la paz y la justicia, para proteger los derechos humanos y nuestro planeta (UNESCO, 2017). Por tanto, es imperativo que "todas las instituciones educativas -desde la educación preescolar hasta la superior y en la educación formal, no formal e informal- fomenten el desarrollo de competencias de sostenibilidad" (Cebrián et al., 2021, p. 2). Estas últimas entendidas como un conjunto de habilidades cognitivas, conocimientos prácticos, valores y actitudes que se deben movilizar en situaciones que involucran contextos relacionados con la sostenibilidad (Cebrián y Junyent, 2015). Pero ¿cómo podemos abordar este desafío en la clase de matemática de Educación Primaria? Sin duda no es una tarea fácil, pues requiere de una nueva manera de afrontar la enseñanza de las matemáticas, enfocada en una enseñanza en conexión con la sostenibilidad. De esta manera, se permitiría a los estudiantes alcanzar aprendizajes cognitivos, socioemocionales y conductuales específicos vinculados a los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), y en especial, desarrollar competencias para la sostenibilidad (UNESCO, 2017). Un elemento clave en este proceso es el profesorado, sus conocimientos y competencias, pues estos "son agentes de cambio poderosos, que pueden dar con la respuesta educativa necesaria para alcanzar los ODS" (UNESCO, 2017, p. 51). Por tanto, la Educación Matemática y específicamente, la formación del profesorado es un terreno fértil para ayudar a crear conciencia, comprender, reflexionar y actuar en torno a uno de los desafíos más apremiantes del mundo actual: la Educación para el Desarrollo Sostenible (EDS). Esto debido a que es un conocimiento crucial que todo ciudadano puede utilizar para contribuir en el desarrollo de una sociedad mejor, tanto en lo económico, como en lo social y lo medioambiental (Vásquez y García-Alonso, 2020). Así, abordar la formación del profesorado en concordancia con una EDS requiere investigar sobre los conocimientos que deben incorporar para ser competentes en la enseñanza de las matemáticas en conexión con la sostenibilidad. Esto se fundamenta en que las actividades que implemente el profesorado en el aula depende mucho de su conocimiento profesional (Ball et al., 2001) e impacta directamente en el aprendizaje de sus estudiantes (Hill et al., 2005).

Considerando estos antecedentes, en este estudio nos centramos en indagar en las oportunidades que ofrecen los currículos de matemática para la Educación Primaria y las exigencias que estos implican al conocimiento del profesorado. Para la primera acción relativa a identificar qué oportunidades brindan los currículos de matemáticas para la Educación Primaria seleccionamos las directrices curriculares de Chile, México, Costa Rica y Colombia. La selección se hace teniendo en cuenta que son países de la región de América Latina y el Caribe miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), por tanto, adhieren a la Agenda 2030 para el desarrollo sostenible (UNESCO, 2015). Desde nuestra perspectiva, tener claridad respecto a las metas curriculares y su oportunidad para desarrollar competencias clave del desarrollo sostenible permitiría, en un segundo paso, dar luz acerca de los desafíos que esto supone al conocimiento que requiere el profesorado para fomentar la EDS. Además, contar con dicho análisis dará claridad respecto un campo de acción prioritario de la EDS para el 2030: el desarrollo de conocimientos y competencias en el profesorado para la consecución de los 17 ODS (figura 1) (Schweizer et al., 2019).

Figura 1. Objetivos de Desarrollo Sostenible. Fuente: UNESCO (2017).

En este sentido, este trabajo en este estudio nos centramos en indagar en las oportunidades que ofrecen los currículos de matemática para la Educación Primaria de incorporar la EDS (enfoques y competencias claves) para discutir las exigencias que esto implica al conocimiento del profesorado.

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA, EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR Y LA EDUCACIÓN PARA EL DESARROLLO SOSTENIBLE

Los docentes hoy tenemos el reto de llevar a cabo una enseñanza que permita responder a los desafíos del siglo XXI, sobre todo en asignaturas como matemática que en muchos casos se caracterizan por una enseñanza centrada en la resolución de ejercicios descontextualizados (Alsina, 2019). Este escenario exige que los profesores promuevan sus competencias profesionales y que éstas les permitan desarrollar en sus estudiantes lo que esperan las sociedades actuales. En este contexto, el conocimiento profesional del profesor se convierte en un elemento central. Desde el aporte de Shulman (1986), han surgido múltiples marcos que tratan de representar el conocimiento del profesor de matemáticas. Destacamos el trabajo de Carrillo y colaboradores (2018), referido al modelo del conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK), pues a diferencia de los otros marcos, hace explícito el conocimiento de procesos tan fundamentales como la resolución de problemas. Estos autores consideran en los docentes dos grandes áreas de conocimiento: conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido, ambas imbricadas en las creencias que poseen los docentes y con subdominios específicos. Por tanto, se muestra como un constructo teórico útil pues permite identificar conocimientos relativos a la enseñanza de las matemáticas (Rojas et al., 2013). No obstante, estos modelos se ven desafiados frente a la EDS en el sentido de qué se necesita conocer y comprender, qué conocimientos implica llevar el currículo de matemáticas a las aulas y a la vez cumplir con las demandas de sostenibilidad. Así, además de desarrollar un conocimiento ligado a la matemática como objeto de enseñanza, las sociedades actuales abogan por enfocar la enseñanza hacia el desarrollo de competencias clave para la sostenibilidad que, por su naturaleza, conllevan la resolución de problemas que abordan temáticas diversas, con el propósito de "empoderar y equipar a las generaciones presentes y futuras para satisfacer sus necesidades mediante un enfoque equilibrado e integrado de las dimensiones económica, social y ambiental del desarrollo sostenible" (Leicht et al., 2018, p. 7). Si bien es cierto que aún no existe un marco común en relación con las competencias en materia de sostenibilidad (Cebrián et al., 2021), sí hay claridad respecto de cuáles son las competencias que los profesores deben desarrollar y poner práctica en los entornos educativos con sus estudiantes para transitar aun mundo sostenible. Así, de acuerdo con la UNESCO (2017, p. 10), se consideran las siguientes competencias clave para la sostenibilidad y que incluyen las competencias de: a) pensamiento sistémico; b) anticipación; c) normativa; d) estratégica; e) colaboración: f) de pensamiento crítico; g) de autoconciencia; y h) integrada de resolución de problemas.

En concreto, la UNESCO, a través de su programa de acción mundial para el desarrollo sostenible, establece cuatro enfoques a considerar al momento de distinguir elementos básicos para su puesta en marcha. Lo anterior con el fin de desarrollar estudiantes alfabetizados en sostenibilidad, es decir, "empoderados para tomar decisiones conscientes y actuar responsablemente en aras de la integridad ambiental, la viabilidad económica y una sociedad justa para generaciones presentes y futura" (UNESCO, 2017, p. 7). Entendemos que la EDS desarrollada tiene un enfoque integrador cuando presenta una perspectiva holística que integra diversos aspectos de la sostenibilidad. Esto tiene lugar cuando la enseñanza se dirige al conocimiento de los factores que promueven la sostenibilidad desde diferentes perspectivas, económica, medioambiental y social, por ejemplo. Pero no sólo se lleva a cabo la descripción sino el análisis de su interrelación para comprender las razones que contribuyen en la sostenibilidad. El enfoque de la EDS crítico centra su atención en el pensamiento crítico con el que cuestiona el paradigma dominante, como pueden ser los modelos de producción-consumo o energía-bienestar, por ejemplo, y a través de la toma de conciencia promueve alternativas en sintonía con los ODS. El tercer enfoque, transformador, está próximo a los anteriores, pero en este caso tiene una mirada más pragmática y busca la transformación real y la responsabilidad y capacitación para lograr cambios en los estilos de vida, valores, empresas, … con objeto de lograr la sostenibilidad. Finalmente, el enfoque contextual centra la enseñanza en el estudio de las implicaciones que tiene el contexto sobre la sostenibilidad. No existe un modelo de sostenibilidad universal y cada lugar y cada comunidad podrá aproximarse al desarrollo de los ODS de forma distinta y adaptada a los recursos naturales y necesidades que posea. El enfoque contextual pone en valor lo que está a nuestro alcance para promover las competencias en sostenibilidad.

MÉTODO

Para identificar qué aspectos de las competencias claves se encuentran presentes en los currículos de Educación Primaria y cómo desafían al conocimiento del profesor, en este estudio utilizamos un enfoque cualitativo no interactivo (Hernández et al., 2014), en el sentido que se analizan documentos curriculares. Además, es importante señalar el carácter descriptivo, desprendido del análisis de contenido (Rico y Fernández-Cano, 2013).

La muestra está compuesta por las orientaciones curriculares para educación primaria (1º a 6º grado) oficiales publicadas por organizaciones gubernamentales de los cuatro países de la región de América Latina y el Caribe miembros de la OECD (OECD, 2021): México (Secretaría de Educación Pública, 2017), Chile (Ministerio de Educación, 2012), Colombia (Ministerio de Educación Nacional, 2006, 2017) y Costa Rica (Ministerio de Educación Pública, 2012). En el caso de las guías curriculares de Colombia se utilizaron dos documentos: el documento del 2006 para analizar los enfoques presentes en el currículo, y el documento del 2017 para analizar los objetivos de aprendizaje y su relación con las competencias clave. Dado que nuestro objetivo es identificar el potencial de los currículos para desarrollar la EDS y, en segundo lugar, identificar los requerimientos que dichos documentos realizan a profesores de la manera más amplia posible, el procedimiento de muestreo fue diseñado para obtener riqueza, profundidad y calidad de la información mediante un *muestreo de casos tipo* (Hernández et al., 2014). Desde nuestra perspectiva, al seleccionar países de la región de América Latina y el Caribe miembros de la OCDE, nos aseguramos de que adhieren a la Agenda 2030 para el desarrollo sostenible (UNESCO, 2015) y, por tanto, son representativos de la información que se quiere analizar.

El procedimiento de selección de las unidades de análisis implicó dos enfoques. En el primero se realizaron dos acciones: a) identificar la sección de cada documento donde se establecen los fines generales de la asignatura para la etapa de educación primaria; y b) identificar los objetivos que establecen los aprendizajes para cada nivel de Educación Primaria. Para el primero de ellos, se utilizaron dos tipos de unidades de análisis de manera conjunta, sintácticas y temáticas, con el propósito de mejorar la fiabilidad. Así, las unidades de análisis fueron las frases y oraciones que se refieren explícitamente a los términos que comprenden los enfoques para la EDS y sus competencias clave. Con respecto a la identificación de objetivos, se establecieron los contenidos propuestos por el currículo y se organizaron según el nivel al que correspondían y al eje matemático al que aludían (Números y operaciones, Geometría, Medida, Álgebra y Estadística y Probabilidad). Tales análisis requieren una regla de numeración que los oriente. Aplicamos la regla de la presencia (Bardin, 1996), ya que la presencia/ausencia es significativa para nuestro objetivo de describir un tipo específico de conocimiento en su totalidad.

RESULTADOS

Enfoques de enseñanza

El análisis a los enfoques que están presentes en los respectivos currículos arroja que el enfoque que mayor presencia tiene en los diferentes documentos es *contextual, con frases como que en la asignatura "lo que se pretende es el desarrollo de mayores capacidades del ciudadano para enfrentarse a los retos del mundo del que forma parte" (Ministerio de Educación Pública, 2012, p. 11).* Por su parte, el enfoque que menor presencia tiene es el *transformador*, con alusiones como que "la Educación Matemática que se brinde en las aulas escolares debe encontrar su significado general en el desarrollo de las capacidades de los individuos para intervenir de una mejor manera en la vida" (Ministerio de Educación Pública, 2012, p. 13). Asimismo, los resultados dan cuenta que cada lineamiento curricular tiene focos diferentes. Por ejemplo, los documentos de Colombia y Chile focalizan en el enfoque *contextual*, mientras que los documentos de Costa Rica y México se centran en los enfoques *críticos y contextual*.

Competencias claves para la sostenibilidad

A partir del análisis de los documentos curriculares de los cuatro países se observa que no se hace mención explícita a las competencias clave para la sostenibilidad. No obstante, se debe considerar que estos documentos curriculares no fueron diseñados bajo dicha lógica. Desde esta perspectiva, lo que si es posible identificar son los objetivos de aprendizaje que en su implementación muestran la capacidad de promover potencialmente el desarrollo de competencias clave para la sostenibilidad. Por ejemplo, observemos el siguiente objetivo de aprendizaje para el 5º grado del currículo de Colombia: "Formula preguntas que requieren comparar dos grupos de datos, para lo cual recolecta, organiza y usa tablas de frecuencia, gráficos de barras, circulares, de línea, entre otros. Analiza la información presentada y comunica los resultados" (Ministerio de Educación Nacional, 2017, p. 42). En él no es posible identificar una competencia clave para la sostenibilidad de manera explícita. No obstante, el proceso de un ciclo de investigación estadístico implica necesariamente desarrollar un aprendizaje de manera colectiva entre los estudiantes, ya sea desarrollando los instrumentos, recogiendo los datos, analizando o compartiéndolos con la comunidad. Además, esto permite visualizar que este proceso se puede desarrollar en contextos locales enfocados a conseguir soluciones sostenibles a problemas reales, logrando así contribuir al desarrollo de, al menos, las siguientes competencias clave: pensamiento sistémico, normativa, estratégica, colaborativa, pensamiento crítico y resolución de problemas.

Desde tal posicionamiento, a partir de la codificación y la frecuencia de las unidades de análisis es posible identificar intensidades diferentes de aproximación hacia las distintas competencias en los documentos curriculares (tabla 1). A nivel general se observa que la resolución de problemas es la que goza de una mayor aproximación, pues gran parte de los objetivos de aprendizaje se centra en aplicar conceptos y/o propiedades matemáticas a la resolución de problemas provenientes de contextos cotidianos o bien que emergen desde la matemática. Tal es el caso del siguiente objetivo de aprendizaje definido para 3º grado del currículo de Chile: "Resolver problemas rutinarios en contextos cotidianos, que incluyan dinero e involucren las cuatro operaciones (no combinadas)" (Mineduc, 2012, p. 108). Al igual que en el caso anterior, en este objetivo de aprendizaje no se evidencia de manera explícita una competencia clave para la sostenibilidad. Sin embargo, dicho objetivo está centrado en la resolución de problemas, y si se contextualiza en entornos cotidianos vinculados a problemáticas locales que incluyan las cuatro operaciones básicas y el uso del dinero, se situaría en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas; se podría gatillar una aproximación a la resolución de problemas, que conlleven a una educación financiera en el entorno familiar, por ejemplo, como un contexto para educar a los estudiantes en sostenibilidad.

En cambio, a partir de la tabla 1, se observa que, en los currículos de Colombia, Chile y México, no hay objetivos de aprendizaje que permitan aproximarse a la competencia de autoconciencia. Mientras que, en el currículo de Costa Rica, se muestra con potencial para detonar la competencia de autoconciencia, concretamente el objetivo de aprendizaje propuesto para el 6º grado: "Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones" (Ministerio de Educación Pública, 2012 p. 261). Así, este objetivo de aprendizaje, contextualizando el cálculo de probabilidades en situaciones reales que aborden problemáticas con sentido para los estudiantes, puede favorecer, a partir de los datos utilizados, la reflexión en torno a dichas problemáticas, y en cómo las acciones personales pueden influir en la comunidad, y cambiar (incidir) en la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso o evento.

Si realizamos el análisis por país de los resultados obtenidos en los documentos curriculares, observamos que, en el caso de Colombia, en el que se analizaron 67 objetivos de aprendizaje propuestos para la asignatura de matemática, se constata que la totalidad de los objetivos de aprendizaje tienen potencial para promover la competencia de resolución de problemas y, aunque algo menor, también las competencias normativa y estratégica. Mientras que, las competencias que presentan una menor cantidad de objetivos de aprendizaje que potencialmente las puedan promover son las competencias de colaboración y de anticipación.

Tabla 1. Distribución de las competencias de sostenibilidad según país.

Competencias de sostenibilidad	**Chile (n = 146)**	**México (n = 84)**	**Costa Rica (n = 377)**	**Colombia (n = 67)**
Pensamiento sistémico	25%	50%	56%	42%
Anticipación	27%	31%	6%	36%
Normativa	92%	92%	93%	91%
Estratégica	78%	58%	81%	76%
Colaboración	5%	8%	2%	12%
Pensamiento crítico	41%	30%	47%	60%
Autoconciencia	0%	0%	1%	0%
Resolución de problemas	100%	99%	81%	100%

Por su parte, en el currículo de Chile se analizaron 146 objetivos de aprendizaje. En ellos se identifica potencial para desarrollar, principalmente, las mismas competencias que en Colombia. Mientras que las competencias con un porcentaje de alusión menor corresponden a la competencia de colaboración y pensamiento sistémico. En el caso de México, se analizaron los 84 objetivos de aprendizaje propuestos en sus documentos curriculares que se deben abordar en la asignatura de matemática. Los resultados a nivel general (tabla 1), muestran que tales objetivos de aprendizaje cuentan con potencial para aproximarse al desarrollo de todas las competencias de resolución de problemas y anticipación. En este caso, la competencia estratégica tiene menos objetivos de aprendizaje que la aluden que en los países mencionados anteriormente. Finalmente, en el caso del documento curricular de Costa Rica, se analizaron 377 objetivos de aprendizaje definidos para la asignatura de matemática. Se evidencia, a nivel global, potencial para detonar, en mayor medida, las competencias clave para la sostenibilidad normativa, estratégica y de resolución de problemas. Además, es en el único currículo analizado en el que se encuentran objetivos de aprendizaje con potencial para promover la competencia de autoconciencia, tal y como señalamos antes. Cabe destacar de este país, comparado con los tres anteriores, que la competencia de resolución de problemas no es la que presenta mayor cantidad de objetivos de aprendizaje relacionados.

DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES FINALES

A lo largo de este estudio se han analizado los currículos de cuatro países iberoamericanos con doble objetivo: analizar el enfoque de enseñanza en sostenibilidad que predomina y, la potencialidad de los objetivos de aprendizaje para desarrollar las competencias clave en sostenibilidad. Como consecuencia directa del resultado de estos dos estudios, y utilizando el modelo de conocimiento del profesor (MTSK), se puede describir el conocimiento del profesor necesario para poder orientar su enseñanza hacia una EDS, a partir de los currículos estudiados. Globalmente, se observa que los resultados en los cuatro currículos han sido muy semejantes, y para todos se puede afirmar que no son currículos orientados al desarrollo pleno de una EDS.

Del primer objetivo, relacionado con los enfoques de la EDS en los currículos analizados, observamos que, aunque se pueden extraer alusiones a todos los enfoques de los currículos analizados, el enfoque contextual ha sido el predominante. Esto es coherente con unos currículos que se hallen situados en su entorno y que pretendan desarrollar un conocimiento anclado en la contextualización de la matemática. Seguidamente, el enfoque transformador es minoritario en tres países estudiados, salvo en Chile, siendo en este país el enfoque integrador el minoritario. En el desarrollo de una EDS parece necesario avanzar hacia una visión más pragmática que busca la transformación real de los estilos de vida, hacia la alfabetización en sostenibilidad (Stibbe, 2009). En Chile existe esta visión pragmática pero no se fomenta el enfoque holístico, que ofrezca una realidad con sus elementos conectados. Desde la perspectiva del conocimiento del profesor observamos que es necesario que los profesores incorporen un conocimiento de la estructura matemática (KSM) y de las características del aprendizaje (KFLM), que les capacite para el desarrollo de los enfoques menos presentes en el currículo. Pues si se pretende promover la EDS y debido a que no son enfoques predominantes en los currículos este conocimiento debe incorporarse a la formación inicial o continua del profesor (Ball et al., 2015). Sólo de esta manera serán capaces de promover estos enfoques. Lo que es coherente con otras investigaciones que ponen de manifiesto la necesidad de desarrollar una formación específica en los docentes acerca de la EDS (Vásquez y García-Alonso, 2020).

Del análisis de las competencias clave en sostenibilidad y su alusión en los objetivos de aprendizajes presentes en los currículos estudiados, hemos podido observar que los ejes de contenido de estadística y probabilidad, así como el de números y operaciones son los que poseen mayor cantidad de objetivos relacionables con las competencias clave para la sostenibilidad. En el otro extremo se encuentran los demás ejes, con un comportamiento similar entre los diferentes currículos estudiados. Esto apunta a que, de nuevo, queda en manos del docente y de su capacidad para conectar con las competencias clave de sostenibilidad, cuando el currículo no lo facilita. Destaca por su ausencia o muy poca presencia, la competencia clave en autoconciencia. Esto es significativo pues no se alude desde los currículos a aspectos relacionados con la responsabilidad de las decisiones que llevan a cabo los futuros ciudadanos sobre nuestro entorno, que es de especial relevancia en la formación en sostenibilidad. Y a esta se añaden dos competencias con poca presencia, como son la competencia de colaboración y normativa. Este vacío que aparece con estas competencias se debe suplir con formación del docente en el conocimiento relacionado con ellas, según el modelo MTSK: de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), de la estructura matemática (KSM) y de la práctica matemática (KPM).

El estudio presentado ha profundizado en el conocimiento del profesorado y las competencias necesarias para el desarrollo de los ODS en las aulas (Schweizer et al., 2019). Por un lado, ofrece información acerca de los ejes de contenido matemático que facilitan la promoción de las competencias clave en sostenibilidad. Esto ayudará en la construcción de futuras actividades matemáticas encaminadas a construir ciudadanos competentes en sostenibilidad. Y, por otro lado, determina un marco de formación de los futuros profesores incidiendo en aquellos conocimientos que, según el modelo MTSK, son necesarios para el desarrollo de una EDS en el aula. La universidad debe ser el centro de desarrollo de los ciudadanos que liderarán el planeta en el futuro y, tratándose de futuros docentes, la responsabilidad es aún mayor, pues deben poseer la capacidad de promover y consolidar las competencias clave del resto de los ciudadanos. La EDS es fundamental para lograr ciudadanos comprometidos con los ODS en el siglo XXI. Los docentes y formadores de futuros docentes somos los responsables en primera instancia, pues cada uno en su área de actuación, debe lograr docentes con capacidad de cambio social y formar ciudadanos competentes en sostenibilidad.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco del FONDECYT Nº 1200356 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Graó.

Aznar, P., Martínez-Agut, M. P., Palacios, B., Piñero, A. y Ull, M. A. (2011). Introducing sustainability into university curricula: An indicator and baseline survey of the views of university teachers at the University of Valencia. *Environmental Education Research, 17*(2), 145-166.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). AERA.

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido (2a ed.*). Akal.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Cebrián, G., Junyent, M. y Mulà, I. (2021). Current practices and future pathways towards competencies in education for sustainable development. *Sustainability*, *13*, 8733.

Cebrián, G. y Junyent, M. (2015). Competencies in education for sustainable development: Exploring the student teachers' views. *Sustainability*, *7*, 2768-2786.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación (6th ed.).* McGraw-Hill.

Hill, H. C., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*, 371-406.

Leicht, A., Heiss, J. y Byun, W. J. (2018). *Issues and trends in education for sustainable development*. UNESCO.

Ministerio de Educación. (2012). *Bases curriculares educación básica*. Unidad Curriculum y Evaluación.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Autor.

Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Derechos básicos de aprendizaje. Matemáticas*. Autor.

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programa de estudio de matemáticas*. Autor.

OECD. (2021). *OECD welcomes Costa Rica as its 38th Member*.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Comares.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 4*, 47-64.

Schweizer, C., Di Giulio, A. y Burkhardt-Holm, P. (2019). Scientific support for redesigning a higher-education curriculum on Sustainability. *Sustainability*, *11*, 6035.

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. Autor.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research, 15*(2), 4-14.

UNESCO (2015). *Transforming our world: The 2030 agenda for sustainable development*; UNESCO.

UNESCO (2017). *Education for sustainable development goals: Learning objectives*; UNESCO.

Vásquez, C., Seckel, M. J. Y Alsina, Á. (2020). Belief system of future teachers on education for sustainable development in math classes. *Uniciencia, 34*, 1-15.

Wals, A. E. J. (2015). *Más allá de dudas no razonables. Educación y aprendizaje para la sostenibilidad socioecológica en el Antropoceno.* Universidad de Wageningen.

Vásquez, C., García-Alonso, I. (2020). La educación estadística para el desarrollo sostenible en la formación del profesorado. *Profesorado*, *24*, 125-147.

CARACTERIZACIÓN DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA

Characterization of statistics and probability in the early childhood education and primary education curricula

Vásquez, C.

Pontificia Universidad Católica de Chile

Resumen

En este estudio se caracteriza cómo algunas de las principales orientaciones curriculares a nivel internacional abordan la estadística y la probabilidad en Educación Infantil y Educación Primaria. Para ello, en primer lugar, se analiza la presencia explícita de la estadística y la probabilidad en las orientaciones curriculares; luego, se examina el sentido que se otorga a su enseñanza y aprendizaje; y, por último, se identifica la presencia de las ideas fundamentales de la estocástica. Los resultados muestran, en el caso de la Educación Infantil, una escasa presencia de nociones y contenidos vinculados al estudio de la estadística y la probabilidad. Por su parte, en la Educación Primaria, la presencia de este bloque de contenido es mayor. No obstante, es baja en comparación con otros ejes de contenido. Por otro lado, se observa la importancia otorgada al trabajo con datos en contexto y con significado para los estudiantes.

Palabras clave: *sentido estocástico, enseñanza de la estadística, enseñanza de la probabilidad, educación infantil, educación primaria.*

Abstract

This study characterizes how some of the main curricular orientations at the international level address statistics and probability in Early Childhood Education and Primary Education. To do this, first, the explicit presence of statistics and probability in the curricular orientations is analyzed; then, the meaning given to their teaching and learning is examined; and, finally, the presence of the fundamental ideas of stochastics is identified. The results show, in the case of Early Childhood Education, a scarce presence of notions and contents linked to the study of statistics and probability. For its part, in Primary Education, the presence of this block of content is greater. However, it is low compared to other content axes. On the other hand, the importance given to working with data in context and with meaning for students is observed.

Keywords: *stochastic sense, teaching of statistics, teaching of probability, early childhood education, primary education.*

INTRODUCCIÓN

A nivel internacional, la inclusión de la estadística y de la probabilidad en el plan de estudio de la matemática escolar de la Educación Secundaria (ES) no es algo reciente y se remonta, por ejemplo, en el caso de Estados Unidos, al año 1923 cuando el *National Committee on Mathematical Requirements of the Mathematical Association of America* recomienda por primera vez el estudio de la estadística en

Vásquez, C. (2022). Caracterización de la estadística y la probabilidad en el currículo de educación infantil y primaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 579-587). SEIEM.

los grados 7-12 en *The Reorganization of Mathematics in Secondary Education* (NCRM, 1923). Desde entonces, numerosos han sido los esfuerzos realizados por diversos países por incorporar temáticas de estadística y probabilidad en sus currículos, cuyo foco hasta finales de la década de los años 80 estaba puesto en la ES. Es en marzo de 1989, cuando el Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos (*National Council Teachers of Mathematics* [NCTM]) publica los *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989). En dicho documento se recomienda incorporar temas de estadística y probabilidad como una rama del currículo de Educación Matemática desde los 5 años, con el propósito de que los estudiantes den sentido a los datos, a fin de desarrollar su conciencia social. Luego, durante la década de los años 90, el NCTM revisa y actualiza su plan de estudios obteniendo como resultado los *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2003), en los que se propone adelantar el estudio de la estadística y la probabilidad al pre-kínder (3 años), haciendo aún más explícita la necesidad de que los estudiantes requieren de conocimientos y habilidades vinculadas al análisis de datos y probabilidad. Desde entonces, estos lineamientos han influido en los currículos de diversos países, provocando que estos temas ganen terreno en los currículos de Educación Matemática desde temprana edad. En consecuencia, en los últimos años son cada vez más los estudios que se ocupan de indagar en diversos aspectos vinculados a la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y la probabilidad en los niveles de Educación Infantil (EI) y Educación Primaria (EP), por ejemplo en los conocimientos disciplinares y didácticos del profesorado sobre estos temas en estas etapas educativas (Vásquez y Alsina, 2015), o bien sobre experiencias en estadística y probabilidad en edades tempranas (Alsina, 2012; Vásquez y Alsina, 2016), o en cómo los libros de texto abordan la enseñanza de estos contenidos (Vásquez et al., 2022). Sin embargo, los estudios que analizan el tratamiento otorgado a la estadística y la probabilidad en las orientaciones curriculares es un campo poco explorado y que reclama atención en especial, en los primeros niveles educativos. Aún más si consideramos que las orientaciones curriculares enmarcan el conocimiento del profesorado. Por tanto, se sitúan como una línea de investigación en Educación Matemática (Reys et al., 2010). Por otro lado, la interpretación que realiza el profesorado sobre el currículo impacta en sus prácticas de enseñanza y en su desarrollo profesional (Choppin et al., 2018). Así y todo, la literatura comienza a reportar algunos trabajos centrados en el análisis curricular de este tema en los currículos de EP y ES en diferentes países como: España, México, Brasil y Chile entre otros. Tales estudios evidencian una diversidad de perspectivas respecto de la enseñanza de la estadística y la probabilidad (p. ej., Batanero et al., 2012; Castro y Moreno, 2021).

En este escenario, surge la necesidad de avanzar en el desarrollo de estudios que permitan ampliar los resultados de investigación hacia los niveles de EI y EP, e informar acerca de, por ejemplo, cuáles son las grandes ideas generadoras de aprendizaje en los temas de estadística y probabilidad en EI y EP. En torno a ello, se plantea el objetivo de caracterizar la presencia del contenido de estadística y probabilidad propuesto en las orientaciones curriculares de EI y EP de Australia, Chile, España, Estados Unidos, Nueva Zelanda y Singapur. Esta selección se fundamenta en que corresponden a orientaciones curriculares que tienen una fuerte influencia en los currículos de Educación Matemática a nivel internacional (Vásquez y Cabrera, en prensa) y, además, son países con distintos niveles de desempeño en la prueba PISA 2018 de matemática. Para alcanzar el objetivo planteado, en primer lugar, se analiza la presencia de la estadística y la probabilidad en las orientaciones curriculares de los países indicados. Luego, se explora el sentido propuesto para su enseñanza y, por último, se estudian las ideas fundamentales de la estocástica (Burrill y Biehler, 2011) presentes ya sea explícita o subyacentemente en las orientaciones curriculares.

EL SENTIDO ESTOCÁSTICO Y LAS IDEAS FUNDAMENTALES DE LA ESTOCÁSTICA

Uno de los grandes desafíos del estudio de la estadística y la probabilidad en el aula escolar es ayudar a los estudiantes en la adquisición de una comprensión profunda del sentido estocástico, que les permita interpretar y valorar críticamente los datos para una toma de decisiones fundamentada; y al mismo tiempo favorecer la comprensión de fenómenos aleatorios en contextos cotidianos. Por consiguiente, es de gran importancia sentar las bases para la adquisición del sentido estocástico en las edades tempranas. A pesar de ello, las investigaciones en torno a la estadística, la probabilidad y su enseñanza, se centran mayoritariamente en estudiantes de EP y ES, siendo escasas aquellas respecto de experiencias de enseñanza de la estadística y probabilidad en EI y primeros cursos de EP (Vásquez y Alsina, 2016). Sin embargo, gran parte de tales investigaciones indican que los niños de EI, pese a su corta edad, cuentan con ideas intuitivas asociadas a conceptos fundamentales de estadística y probabilidad (Shaughnessy, 1992). Ideas que les servirán de base para, poco a poco, alcanzar un aprendizaje formal de tales conceptos en los niveles superiores. Por tanto, resulta de especial interés identificar aquellas ideas vinculadas a la estadística y la probabilidad que deberían abordarse con distintos grados de profundidad desde las primeras edades. Aún más si consideramos que estas debieran "enseñarse en las matemáticas escolares y todo alumno debería conocerlas al salir de la escuela secundaria" (Burrill y Biehler, 2011, p. 58), se hace necesario pues, llevar su enseñanza al aula escolar de manera tal que los niños adquieran progresivamente una comprensión en profundidad de nociones y conceptos asociados a su estudio, en pos de desarrollar una alfabetización estadística y probabilística. En este sentido, es necesario indagar en la presencia de estas ideas en los currículos de EI y EP y, más específicamente, en cómo éstas se desarrollan y profundizan a lo largo del currículo escolar en tales niveles educativos. Las ideas fundamentales de la estocástica han sido estudiadas por diversos autores (p. ej., Batanero y Borovnick, 2016; Burrill y Biehler, 2011), identificando conjuntos de ideas en relación con la estadística y la probabilidad. Este estudio se sitúa desde la perspectiva de Burrill y Biehler (2011), quienes consideran a las ideas de: datos (D), variación (V), distribución (Dis), representación de datos (RD), asociación y correlación (AC), probabilidad (P), muestreo e inferencia (MI), como fundamentales para llevar a cabo procesos de instrucción idóneos en relación con la estadística y la probabilidad. Por consiguiente, es importante que los profesores conozcan y comprendan estas ideas, para poder transmitirlas adecuadamente en los procesos de instrucción (Burrill y Biehler, 2011). Tales ideas deberán constituirse en un tejido de significancia que inicia gradualmente en edades tempranas, transcurre y se profundiza en la EP y ES en pos de la alfabetización estadística y probabilística, el pilar fundamental para el desarrollo del sentido estocástico.

METODOLOGÍA

El enfoque general de este estudio es cualitativo-interpretativo, ya que considera técnicas cualitativas y cuantitativas para la recolección y el análisis de los datos. En concreto, se realizó un análisis de contenido (Krippendorff, 2013), además del recuento de indicadores u objetivos de aprendizaje presentes en los currículos y que se relacionan con temas de estadística y probabilidad. La muestra fue intencionada y está conformada por las 11 propuestas curriculares que se indican en la tabla 1. Las unidades de análisis corresponden a los ejes temáticos de estadística y probabilidad, junto a sus respectivos descriptores y objetivos de aprendizaje. Cabe señalar que, en el caso de Estados Unidos, consideramos el análisis de las dos opciones de orientaciones curriculares que rigen actualmente en dicho país: los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003) y los Estándares Comunes para las Matemáticas (CCSSM, 2010).

Tabla 1. Documentos curriculares analiados.

País	Referencia	Documento
Australia	ACARA (2020)	The Australian Curriculum: Mathematics.
Chile	MINEDUC (2018)	Bases Curriculares: Educación Parvularia.
	MINEDUC (2012)	Bases Curriculares: Educación Básica Matemática.
España	BOE (2022)	Real Decreto 95/2022
	BOE (2022)	Real Decreto 157/2022
Estados Unidos	NCTM (2003)	Principles and Standards for School Mathematics.
	CCSSM (2010)	Common core state standars for mathematics.
Nueva Zelanda	MOE (2017)	Early childhood curriculum guidelines.
	MOE (2015)	The New Zealand Curriculum: Mathematics Standards for years 1–8.
Singapur	MOE (2012)	Mathematics Syllabus: Primary on to six.
	NEL (2013)	Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Singapore

Para el análisis se consideraron las siguientes categorías: a) presencia explicita de la estadística y la probabilidad en los currículos de Educación Matemática para EI y EP, lo que informa sobre la presencia o ausencia de un eje de contenido vinculados al estudio de estos temas; b) sentido propuesto para llevar a cabo la enseñanza de la estadística y la probabilidad en los currículos. Para ello, se realizó un análisis de cada una de las descripciones otorgadas al eje de estadística y probabilidad en los distintos currículos, en busca de patrones acerca del sentido y el énfasis otorgado a su enseñanza y aprendizaje, que permitiera caracterizar dicho sentido; y c) ideas fundamentales de la estocástica presentes explícitamente o de manera subyacente en los currículos: en este aspecto se identifican y analizan las ideas fundamentales de la estocástica.

RESULTADOS

Presencia explicita de la estadística y la probabilidad

A nivel general y a partir del análisis de las orientaciones curriculares, se observa que la presencia de la estadística y probabilidad no está de manera explícita y continua en todos los currículos de EI y EP de los países considerados en este estudio (figura 1).

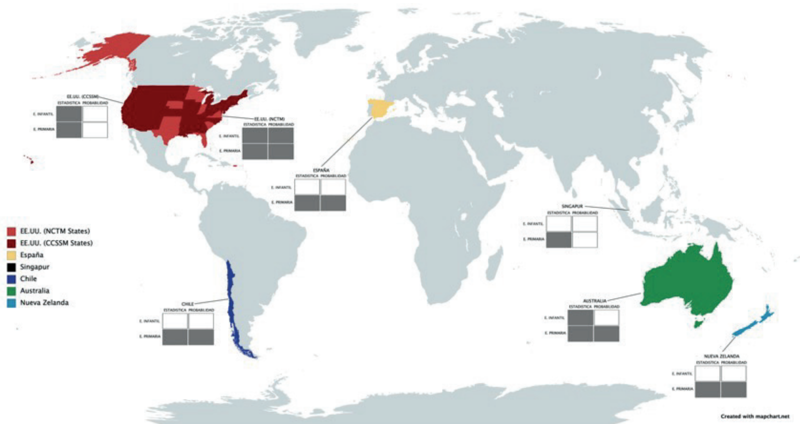


Figura 1. Presencia de la estadística y la probabilidad en los currículos analizados.

Concretamente, en lo que respecta a la presencia de nociones y conceptos vinculados a estadística y probabilidad en los currículos de EI, estas gozan de una escasa presencia limitándose, por ejemplo, en el caso del currículo de Australia (ACARA, 2020), a la importancia de que los estudiantes de esta etapa educativa "respondan a preguntas de sí/no para recoger información y hacer inferencias sencillas" (p. 13). De igual modo, el currículo de Estados Unidos (CCSSM, 2010) señala la necesidad de que los estudiantes "clasifiquen y cuenten el número de objetos en categorías" (p. 10). Por su parte, el NCTM (2003) aborda la estadística en este nivel educativo con el propósito de que los estudiantes propongan preguntas estadísticas que los lleven a la recolección, organización, representación e interpretación de datos. Por último, es importante señalar que en esta etapa educativa el currículo de Estados Unidos (NCTM, 2003) es el único que hace alusión explícitamente a la probabilidad, señalando la necesidad de capacitar a los estudiantes para "discutir sucesos probables e improbables relacionados con las experiencias de los alumnos" (p. 112).

Ahora bien, en lo que concierne a la presencia de la estadística en los currículos de EP, se evidencia que esta se encuentra presente en la totalidad de ellos. A través de un eje o bloque de contenido que inicia en los primeros cursos con el planteamiento de preguntas de investigación estadística, la recolección e interpretación de datos, hasta llegar, por ejemplo, en el caso del currículo chileno (MINEDUC, 2012), a "comparar distribuciones de dos grupos, provenientes de muestras aleatorias, usando diagramas de puntos y de tallo y hojas. Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento, de manera manual y/o usando software educativo" (p. 126), en el último curso de primaria.

En el caso de la probabilidad, su presencia en las orientaciones curriculares de EP es bastante menor en comparación con las nociones y conceptos de estadística, puesto que solo se incluye explícitamente en los currículos de Australia, Chile, España, Estados Unidos y Nueva Zelanda. Lo anterior, a partir de trayectorias de objetivos de aprendizaje fuertemente centradas en el desarrollo del lenguaje asociado a la probabilidad, que favorezcan el tránsito por ejemplo en el caso del currículo de Nueva Zelanda, a la "investigación de situaciones sencillas que involucren el azar comparando los resultados experimentales con los teóricos, reconociendo que las muestras varían" (MOE, 2015, p. 61). Por último, es importante indicar que en los currículos de Singapur y Estados Unidos (CCSSM, 2010), la probabilidad es abordada en la ES.

Sentido propuesto para llevar a cabo la enseñanza de la estadística y la probabilidad

En primer lugar, se observa que los currículos de Australia, Chile, Estados Unidos (NCTM, 2003), España y Nueva Zelanda, indican explícitamente el propósito de enseñar estadística y, en su caso, probabilidad. Un ejemplo es el currículo de España (BOE, 2022) que incorpora temas de estadística y probabilidad, con la finalidad de desarrollar el sentido estocástico y "se orienta hacia el razonamiento y la interpretación de datos y la valoración crítica, así como la toma de decisiones a partir de información estadística. También comprende los saberes vinculados con la comprensión y la comunicación de fenómenos aleatorios en situaciones de la vida cotidiana" (p. 93). Ahora bien, al contrario de los currículos antes señalados, en el caso de los currículos de Singapur y Estados Unidos (CCSSM, 2010), sólo se advierte una orientación general para la asignatura de matemática, que es transversal y se aplica a la estadística y, en su caso, a la probabilidad, al igual que a otras áreas de la matemática. A modo de ejemplo, en el currículo de Singapur, se enfatiza en el desarrollo de habilidades matemáticas a través de la resolución de problemas, que permita a los estudiantes "adquirir conceptos y habilidades matemáticas para el aprendizaje diario y continuo de las matemáticas; desarrollar el pensamiento, el razonamiento, la comunicación, la aplicación y las habilidades metacognitivas a través de un enfoque matemático centrado en la resolución de problemas; para crear confianza y fomentar el interés por las matemáticas" (MOE, 2012, p. 30).

Las ideas fundamentales de la estocástica

Para identificar las ideas fundamentales de la estocástica presentes en las orientaciones curriculares, se realizó un análisis transversal de las propuestas curriculares, a través de los indicadores de contenido u objetivos de aprendizaje vinculados a estadística y probabilidad para cada uno de los cursos que conforman el nivel educativo en cuestión. Se contemplaron aquellos rasgos claramente identificables, y que se pueden vincular con las ideas fundamentales de la estocástica.

En lo que respecta a los currículos de EI que abordan temas de estadística y probabilidad se analizó la totalidad de los indicadores de contenidos u objetivos de aprendizaje encontrados únicamente en los currículos de Estados Unidos (NCTM, 2003; CCSSM, 2010) y de Australia. En la tabla 2 se resume el recuento del número de veces que se hace alusión a ideas o conceptos que se pueden vincular con ideas fundamentales de la estocástica. Es importante tener en cuenta que un mismo indicador puede atender a una o más de dichas ideas. A partir de dicha tabla, se observa que la idea de datos está presente en la totalidad de los indicadores. También, se evidencia la presencia de la representación, pues no solo deberán plantear preguntas estadísticas, sino que también deberán representar tales datos, para así poder hacer inferencias sencillas, utilizando representaciones acordes al nivel educativo en que se encuentran. Igualmente, en el caso del currículo de Estados Unidos (NCTM, 2003) se observa la presencia de la probabilidad, afirmando que los estudiantes deberán "discutir sucesos probables e improbables relacionados con sus experiencias" (p. 112). Ahora, es importante destacar que, si bien estas ideas están presentes en el currículo de EI, lo están a un nivel muy inicial e incipiente. No obstante, su presencia es de gran importancia, pues da pie para comenzar a sentar las bases del estudio de nociones vinculadas a la estadística y probabilidad.

Tabla 2. Presencia de las ideas fundamentales de la estocástica en los currículos de EI.

Ideas	**Estados Unidos**		**Australia**
	(NCTM, 2003) n=5	(CCSSM, 2010) n=1	(ACARA, 2020) n=1
D	3	1	1
V	1	1	1
Dis	1	1	0
RD	2	1	1
AC	0	0	0
P	1	0	0
MI	0	0	1

En lo que respecta a los currículos de EP, se analizó la totalidad de indicadores que hacen alusión a contenidos u objetivos de aprendizajes relativos a temas de estadística y probabilidad. En la tabla 3, se resume el recuento del número de veces que se hace alusión a ideas o conceptos que se pueden vincular con las ideas fundamentales de la estocástica, evidenciándose la presencia de la totalidad de ellas en los currículos de Estados Unidos (NCTM, 2003), Australia y Nueva Zelanda. Cabe señalar, que al igual que en el análisis de los currículos de EI, es importante tener en cuenta que un mismo indicador puede atender a una o más de dichas ideas.

Tabla 3. Presencia de las ideas fundamentales de la estocástica en los currículos de EP.

Ideas	Estados Unidos (NCTM, 2003) n=16	Estados Unidos (CCSSM, 2010) n=7	Australia (ACARA, 2020) n=27	Singapur (MOE, 2012) n=13	Nueva Zelanda (MOE, 2015) n=20	España (BOE, 2022) n=22	Chile (MINEDUC, 2012) n=20
D	16	7	26	13	20	14	20
V	7	3	9	1	10	7	14
Dis	7	3	1	2	7	9	14
RD	8	6	15	13	13	10	16
AC	1	0	1	1	3	3	0
P	4	0	11	0	13	5	9
MI	3	0	3	2	5	5	7

A partir de los hallazgos, podemos señalar que la idea de datos es la con mayor presencia entre los currículos analizados. Del mismo modo, encontramos un gran número de alusiones a la idea de representación de datos entre los indicadores analizados. Esto nos sugiere que más allá de construir distintos tipos de gráficas, los estudiantes deben ser capaces de comunicar sus hallazgos (datos), así como evaluar la pertinencia de distintos tipos de representaciones a utilizar. Otra idea a la que se hace alusión es la de variación, al proponer que los estudiantes deben plantear preguntas estadísticas que permitan dar respuesta al problema planteado, que anticipe una respuesta basada en datos y la variación de estos. Por otro lado, dentro de las ideas menos presentes, se encuentran la probabilidad, y la distribución. Por último, solo en algunos currículos aparece la idea de muestreo.

CONCLUSIONES

Respecto de la presencia de los temas de estadística y probabilidad, en el caso de la EI, se evidencia que el estudio de la estadística no está siempre presente en este nivel educativo, observándose su presencia solo en los currículos de Estados Unidos y Australia. Por su parte, en caso de la probabilidad, esta aparece explícitamente solo en el currículo de Estados Unidos (NCTM, 2003). Por tanto, la presencia de la estadística y probabilidad en este nivel educativo es aún muy es escasa. Esta ausencia puede ir en desmedro de un adecuado desarrollo de la alfabetización estadística y probabilística desde edades tempranas, coartando en dichos niveles el desarrollo de oportunidades de aprendizaje que permitan iniciar a los niños en estos temas.

En el caso de la EP, el panorama es un poco más alentador, pues en los currículos de Estados Unidos (NCTM, 2003), España, Nueva Zelanda y Chile se observa la presencia de la estadística y la probabilidad, lo que favorece poder brindar oportunidades de aprendizaje a los estudiantes de esta etapa para desarrollar de manera gradual y continua la alfabetización estadística y probabilística desde los primeros años de EP. Por otro lado, al examinar el sentido propuesto por las orientaciones curriculares para la enseñanza de la estadística y probabilidad, se observa que el enfoque se centra mayoritariamente en que los estudiantes adquieran competencias y habilidades que les permitan apreciar el rol de la estadística y la probabilidad como una herramienta para comprender el mundo, y a la vez necesaria para una toma de decisiones de manera informada. Reconociendo su potencial de aplicación a diversos campos de conocimiento y a una variedad de contextos. Para ello, se resalta tanto la importancia de adquirir conocimientos matemáticos como el desarrollo de habilidades. En definitiva, en los currículos analizados, se observa que la enseñanza de la estadística y la probabilidad es concebida como un terreno fértil para resolver problemas con sentido y significado para los estudiantes, provenientes de situaciones cotidianas. Este es un aspecto muy positivo y que favorece su enseñanza y valoración en el aula escolar. Sin embargo, es necesario avanzar más y enfatizar el potencial de centrar la enseñanza de la estadística y la probabilidad como una herramienta para ayudar a los ciudadanos de hoy a tomar conciencia, comprender, reflexionar. Finalmente, a partir del análisis de la presencia de las ideas fundamentales de la estocástica, se observa que algunas de ellas están presentes en los currículos de Infantil, mientras que la totalidad de estas ideas están presentes en mayor o menor medida en los currículos de EP. Más específicamente, en el caso de la EI, el énfasis se encuentra en los datos, la representación de datos, la variación, la distribución, la probabilidad y el muestreo e inferencia. Cabe señalar que, dada la edad de los estudiantes de esta etapa escolar, tales ideas se abordan a un nivel muy inicial y ligado a los conocimientos intuitivos y a las ideas numéricas y de conteo propias de la edad, para luego ir progresando y enriqueciéndose a medida que los estudiantes avanzan en su etapa escolar. Mientras que, para el caso de la EP, destacan de mayor a menor énfasis las ideas de datos, representación de datos, variación, probabilidad, distribución, muestreo e inferencia, y asociación y correlación.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco del FONDECYT Nº 1200356 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias

ACARA (2020). *The Australian Curriculum: Mathematics*.

Alsina, Á. (2012). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Revista de Didácticas Específicas, 7*, 4-22.

Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. M. (2012). El currículo de estadística: reflexiones desde una perspectiva internacional. *UNO, 59*, 9-17.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de didáctica de las Matemáticas*, *83*, 7-18.

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Springer.

BOE (2022). Real Decreto 157/2022, de 01 de marzo, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

BOE (2022). Real Decreto 95/2022, de 01 de febrero, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil.

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Springer.

Castro, D. y Moreno, A. (2021). Ideas estocásticas fundamentales en el currículo colombiano. *Yupana*, (13), 28-47. https://doi.org/10.14409/yu.v0i13.10825

Choppin, J., McDuffie, A., Drake, C. y Davis, J. (2018). Curriculum ergonomics: Conceptualizing the interactions between curriculum design and use. *International Journal of Educational Research, 92*, 75-85.

Common Core State Standars for Mathematics (2010). *Common Core State Standards Initiative*.

Krippendorff, K. (2013). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Paidos.

MINEDUC (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

MINEDUC (2018). *Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia.* Unidad de Curriculum y Evaluación.

MOE (2012). *Mathematics Syllabus: Primary on to six.* Curriculum Planning and Development Division. Ministry of Education. Republic of Singapore.

MOE (2015). *The New Zealand curriculum: Mathematics standards for years 1-8.* New Zealand.

MOE (2017). *Early childhood curriculum guidelines.* New Zealand.

National Committee on Mathematical Requirements [NCMR] (1923). *The reorganization of mathematics in secondary education*. The Mathematical Association of America.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

NEL (2013). Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Singapore. *Ministry of Education, 6.*

Reys, B., Reys, R. y Rubenstein, R. (2010). *Mathematics Curriculum Issues, Trends, and Future Directions.* NCTM.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 465–494). Macmillan Publishing Co, Inc.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Revista Avances de Investigación en Educación Matemática*, *7*, 27-48.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2016). Aproximación a la probabilidad en el aula de Educación Primaria. Un estudio de caso sobre los primeros elementos lingüísticos. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), (2016). *Investigación en Educación Matemática XX*. (pp. 529-538). SEIEM.

Vásquez, C. y Cabrera, G. (en prensa). La estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de educación infantil y primaria de seis países representativos en el campo. *Revista Educación Matemática*.

Vásquez, C., Arredondo, E., y García-García, J. (2022). Representaciones estadísticas a temprana edad: una aproximación desde los libros de texto de Chile y México. *Bolema, 36*(72), 116-145.

Pósteres

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS: ELECCIÓN Y DIFICULTADES

Statistical Graphics: choices and difficulties

Anasagasti, J., Berciano, A. e Izagirre, A.

Euskal Herriko Unibertsitatea/Universidad del País Vasco

La enseñanza de la estadística fomenta el razonamiento crítico y es importante trabajar el tratamiento de la información desde Educación Infantil. Esto conlleva la necesidad de una adecuada formación del futuro profesorado (Alsina, 2016), y con este propósito se ha llevado a cabo un estudio para detectar si el futuro docente de primaria hace una correcta elección del gráfico según el tipo de variable y el tipo de error frecuente que comete.

En cuanto a la representación gráfica de los datos, son muchas las investigaciones centradas en analizar la construcción (Arteaga y Batanero, 2010). Es común que el alumnado haga una selección incorrecta del gráfico estadístico para el tipo de variable que se le presenta. Li y Shen (1992) destacan como error la selección del gráfico de líneas para representar variables cualitativas o el diagrama de barras para representar la evolución en el tiempo. Es un error común también la construcción del histograma para variables cuantitativas discretas sin agrupar (Arteaga et al., 2016).

Para este estudio, la muestra la componen 69 estudiantes de la asignatura Matemáticas y su Didáctica II del curso académico 2019-2020 del Grado de Educación Primaria de la UPV/EHU. Esta asignatura anual abarca cuatro bloques curriculares: Números y operaciones, geometría, la medida y estadística y probabilidad. A la estadística y probabilidad se le destinan 24 horas que es todo el contenido del bloque curricular que reciben en el grado. Los datos se tomaron una vez cursado este bloque por medio de la realización de un cuestionario ad hoc de 4 ítems y la participación fue voluntaria y totalmente anónima.

Los resultados muestran que: 1) Cuando la variable es cualitativa, la elección correcta del gráfico se da en el 73.91% de los casos (diagrama de barras, 56.52%; diagrama de sectores, 17.39%). Los gráficos erróneamente seleccionados son: histograma (10.15%), gráfico de líneas (8.7%), polígono de frecuencias (1.44%) y diagrama de barras apilado (1.5 %). El 4.3% del alumnado no ha contestado el ítem. 2) Cuando la variable es cuantitativa discreta, la elección del gráfico es correcta en el 78.27% de los casos (diagrama de barras, 55.8%; gráfico de líneas, 19.57%; diagrama de sectores, 2.9%). Los gráficos erróneos están conformados por: histogramas (13.77%), polígono de frecuencias (2.9%) y otros (2.16%). El 2.9% del alumnado no ha respondido el ítem.

Como conclusión, destacamos que el futuro profesorado de primaria, a pesar de la formación recibida, sigue mostrando dificultades en la elección del gráfico; por lo que sería conveniente profundizar en los motivos que le llevan a una selección incorrecta de los mismos según el tipo de variable.

Referencias

Alsina, A. (2016). La estadística y la probabilidad en educación primaria. ¿Dónde estamos y hacia dónde debemos ir? *Aula de Innovación Educativa*, 251, 12-17.

Arteaga, P. y Batanero, C. (2010). Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 211-221). SEIEM.

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 19*(1), 15-40.

Li, K.Y. y Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics*, *14*(1), 2-8.

Anasagasti, J., Berciano, A. e Izagirre, A. (2022). Gráficos estadísticos: elección y dificultades. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 591). SEIEM.

ÉRASE UNA VEZ UN CUENTO…UNA MANERA DIFERENTE DE CONSTRUIR EL CONOCIMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

'Once upon a time a tale…' A different way to build logical-mathematical knowledge

Antequera-Barroso, J. A.

Facultad de Formación del Profesorado. Universidad de Extremadura

En cualquier clase de Educación Infantil uno de los recursos más utilizados por los docentes consiste en los cuentos. Cuentos de distintas tipologías como indica Toledo Morales (2005), cuentos infantiles o populares, fantásticos, fábulas o leyendas, más extensos o más cortos, con protagonistas humanos, animales o seres fantásticos… historias que estimulan la imaginación y la creatividad de los niños y niñas (González López (2006) citando a Sáez (1999)). Siguiendo esta línea Amar (2018, p.13) citando a Romero (2011) indica que "… teniendo a nuestro alumnado como la verdadera red de receptores, poliédrica y diversa, con diferentes ritmos de imaginar, disfrutar y, por tanto, de aprender."

Los conceptos imaginación, creatividad, disfrutar y aprender aparecen ligadas al cuento especialmente en Educación Infantil. Este hecho nos hizo plantear un minitaller a estudiantes del Grado de Educación Infantil en el que poder analizar las características que debería tener un cuento, según su criterio, para ser adecuado para la etapa educativa en la que van a ser docentes. Se les pidió también desarrollar o confeccionar un cuento que permita a su futuro alumnado identificar y movilizar las nociones lógico-matemáticas siguiendo los propios criterios marcados por ellos y ellas. La metodología para el desarrollo del taller se encuentra en consonancia a lo indicado por Lyons (1999) y Crismán et al. (2017).

Los cuentos, resultantes del minitaller, eran un reflejo de sus ideas y planteamientos sobre el cuento, el conocimiento lógico-matemático y la aplicación del mismo en el aula de Educación Infantil. Los cuentos resultantes pretendían que el alumnado fuera participe del desarrollo de la historia junto a los protagonistas. Personajes fácilmente reconocibles e identificables con ellos mismos y en el que las actividades fuesen motivantes y un reto en el que identificar y movilizar nociones como clasificación, ordenación, seriación, números, formas geométricas o magnitudes/medidas.

Referencias

Amar, V. (2018). Déjame que mire un cuento: Narración, familia y educación infantil. Una investigación narrativa. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, *22*(2), 389-405. https://doi.org/10.30827/profesorado.v22i2.7729

Crismán, R., Cardeñoso J. M. y García-González, E. (2017). La evaluación del trabajo por proyectos por los estudiantes: un estudio a partir de un proyecto de innovación docente universitario. *REDU: Revista de Docencia Universitaria, 15*(2), 35-55.

González López, I. (2006). El valor de los cuentos infantiles como recurso para trabajar la transversalidad en las aulas. *Campo Abierto*, *1*(25), 11-29.

Lyons, N. (1999). *El uso del portafolio para el aprendizaje y la evaluación*. Amorrortu.

Toledo Morales, P. (2005). El cuento: concepto, tipología y criterios para su selección. En P. Toledo, (Eds.) *El valor educativo del cuento: didáctica y evolución histórica* (pp. 7-29). Aprende Idea.

Antequera-Barroso, J. A. (2022). Érase una vez un cuento...una manera diferente de construir el conocimiento lógico-matemático. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Edu-cación Matemática XXV* (p. 592). SEIEM.

MODELO 5E. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO A UNA PROPUESTA STEM

5E Model. Analysis of High School Students' responses to a STEM proposal

Arnal-Palacián, M.[a] y Johnson, J. M.[b]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Metropolitan State University of Denver

Los resultados obtenidos por España en las pruebas PISA 2018, situándolos por debajo de la media de la OCDE (INEE, 2019) tanto en matemáticas como en ciencias, dan lugar a la reflexión por parte del profesorado sobre las deficiencias de su alumnado al tratar de aplicar lo aprendido en las aulas en diferentes situaciones. Asimismo, e intentando dar respuesta a ello en las aulas, la nueva legislación educativa (MEFP, 2022), LOMLOE, considera como competencia clave la Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM). En el caso particular de este estudio focalizamos en la competencia específica STEM 2 en la que el alumnado debiese ser capaz de utilizar el pensamiento científico para entender y explicar los fenómenos que ocurren a su alrededor, plantearse preguntas y comprobar hipótesis mediante la experimentación y la indagación. Asimismo, se han tenido en cuenta las dificultades con las nociones matemáticas surgidas en la primera fase del estudio al plantear un problema contextualizado en las ciencias experimentales (Arnal-Palacián y Rodríguez-Arteche, 2021).

Por todo lo anteriormente descrito, en este trabajo pretendemos analizar cómo el alumnado integra las matemáticas, las ciencias y la lengua, a partir de un problema contextualizado sobre el crecimiento de bacterias y la decisión del uso de dos fármacos, es decir, a partir de una tarea concreta y lo suficientemente abierta como para fomentar el pensamiento científico.

Esta investigación sigue una metodología cualitativa, utilizando el modelo de indagación 5E de Bybee (2009). El modelo 5E (*Engage*, *Explore*, *Explain*, *Elaborate*, *Evaluate*) contribuye a la instrucción coherente del profesor y a la construcción por parte de los alumnos de una mejor comprensión, además de permitir analizar propuestas STEM en el aula. En este estudio participaron 24 estudiantes de 1º de Bachillerato de un instituto público de la Comunidad de Madrid (España), organizados por parejas. Sus respuestas arrojaron los siguientes resultados: la mayor parte de los estudiantes obtiene un pequeño grado de desarrollo en *Explain* y *Elaborate* dentro del modelo 5E, casi la mitad logra alcanzar alguno de los índices de *Explore*, y solamente una pareja demuestra alguna de las componentes de *Engage.*

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Grupo de Investigación en Educación Matemática (S60_20R) del Gobierno de Aragón y desarrollado dentro del Noyce Program (#1660506)-National Science Foundation de EEUU.

Referencias

Arnal-Palacián, M. y Rodríguez-Arteche, I. (2021). STEM in the classroom through problem solving on bacteria and drugs. *International Conference New perspectives in Science Education*. Italy.

Bybee, R. W. (2009). *The BSCS 5E Instructional model and 21st Century skills*. BSCS.

INEE (2019). *PISA 2018. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe español*. Ministerio de Educación y Formación Profesional.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE, 76*, 41571- 41789.

Arnal-Palacián, M. y Johnson, J. M. (2022). Modelo 5E. Análisis de las respuestas de estudiantes de bachillerato a una propuesta STEM. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 593). SEIEM.

CREENCIAS SOBRE LAS MATEMÁTICAS. UNA COMPARATIVA ENTRE PROFESORADO EN FORMACIÓN DE EDUCACIÓN PRIMARIA Y EDUCACIÓN INFANTIL

Beliefs about mathematics. A comparison between pre-service teachers in primary education and early childhood education

Begué, N. y Arnal-Palacián, M.

Universidad de Zaragoza

Las creencias son verdades personales que surgen a partir de una determinada experiencia, y se presentan tanto de manera verbal como a través de acciones (Pajares, 1992). En el caso particular de las matemáticas, las expectativas y el autoconcepto del alumnado determinan su motivación e implicación hacia ellas, siendo las creencias una variable que influye en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Gómez-Chacón, 2000). Estas reflexiones son extensivas al profesorado, quien debe tomarlas como el punto de partida para la toma de sus decisiones. Por todo ello, el objetivo de este trabajo es identificar las creencias de los estudiantes para maestros (EPM), es decir, estudiantes del Grado de Magisterio en Educación Primaria y del Grado de Magisterio en Educación Infantil, quienes siguen una carrera universitaria cuya profesión se ocupa, entre otros aspectos, por el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, al considerar EPM que cursan estudios diferentes se establece un análisis comparativo de sus respuestas según la titulación.

Esta investigación sigue un análisis cuantitativo, en la que se ha construido un instrumento que combina ítems de los cuestionarios de Gil et al. (2006), modificado a escala tipo Likert 1-5 y Op't Eynde y De Corte (2003). Esta adaptación aunando ítems de ambos cuestionarios queda justificada por el cambio en la edad de los individuos de la muestra, ya que en los cuestionarios anteriores se evaluaba a alumnado de Educación Secundaria y en este trabajo es objeto de estudio los EPM. La muestra la componen 58 EPM de Educación Primaria y 50 EPM de Educación Infantil durante el curso 2021-2022. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos en relación con el autoconcepto como aprendiz de matemáticas. Por un lado, el 50% de los EPM de Ed. Infantil presentan poca confianza hacia la materia de matemáticas, siendo este porcentaje del 38% en el caso de los EPM de Ed. Primaria. Por otro lado, los resultados empeoran en relación a cómo se identifican durante la resolución de la tarea donde el 35% de los EPM de Ed. Infantil indican que no se sienten tranquilos, siendo este porcentaje del 19% en el caso de los EPM de Ed. Primaria.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Grupo de Investigación en Educación Matemática (S60_20R) del Gobierno de Aragón.

Referencias

Gil, N., Guerrero, E. y Blanco, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *4*(1), 47-72.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). Matemática emocional. *Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea.

Op't Eynde, P. y De Corte, E. (2003). *Students' Mathematics-Related Belief Systems: Design and Analysis of a Questionnaire*. [Conference] American Educational Research Association, Chicago, Illinois.

Pajares, M. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307-332.

Begué, N. y Arnal-Palacián, M. (2022). Creencias sobre las matemáticas. una comparativa entre profesorado en forma-ción de educación primaria y educación infantil. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 594). SEIEM.

EXPLORANDO LAS EMOCIONES DE FUTUROS DOCENTES FRENTE AL USO DE TECNOLOGÍAS EMERGENTES EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Future teacher emotions in the learning of geometry through emerging technologies

Blanco, T. F., Fernández-López, A., Martínez-Albella, J. y Rodríguez-Raposo, A.

Universidad de Santiago de Compostela

Además de aportar beneficios a nivel cognitivo, la introducción de la tecnología en el aula presenta efectos positivos en la dimensión afectiva (García y Romero, 2009; Radović et al., 2019). El afecto, como sistema de representación de los individuos y determinado tanto a nivel biológico como social, se ve condicionado por las emociones, las creencias, las actitudes y los valores (Gómez-Chacón, 2003). En este trabajo nos centraremos en las emociones, entendidas estas como cambios rápidos de sentimiento en respuesta a un evento que tiene una carga de significado positivo o negativo para los individuos (Gómez-Chacón, 2000). Se presenta aquí un estudio exploratorio que permite describir las emociones relacionadas con el aprendizaje de la geometría a través del uso de tecnologías emergentes en el futuro profesorado de Educación Primaria. La muestra está formada por 101 estudiantes de tercer curso del grado en maestro/a. Se ha seguido una metodología de investigación de diseño, en la que se han distribuido las sesiones atendiendo al tipo de tecnología aplicada: robótica, diseño e impresión 3D y realidad aumentada. La robótica se ha dirigido hacia el aprendizaje de nociones bidimensionales, y el diseño e impresión 3D y la realidad aumentada hacia nociones de carácter tridimensional. El instrumento de recogida de datos se ha adaptado a nuestro contexto del Mapa de Humor de los estados emocionales de Gómez-Chacón (2000). En cada sesión, los estudiantes tenían que marcar aquellas emociones que habían sentido en el transcurso de esta, relacionadas con el tipo de tecnología empleada. Los resultados del estudio muestran mayor prevalencia de emociones positivas que negativas en los tres tipos de tecnología. De entre todas estas emociones, sobresalen las de 'curiosidad' y 'aburrimiento' como las que presentan, para los tres tipos de tecnología, mayor y menor frecuencia, respectivamente. La tecnología mejor valorada fue la robótica y la que suscitó mayor número de emociones negativas fue el diseño e impresión 3D, destacando entre estas la 'desesperación'. Esta desesperación se manifestó en desconfianza en la propia capacidad e impaciencia por no saber abordar la tarea, llegando incluso al bloqueo. Más estudios serán necesarios para poder extraer resultados concluyentes.

Referencias

García, M. M., y Romero, I. M. (2009). The influence of new technologies on learning and attitudes in mathematics in secondary students. *Electronical Journal of Research in Educational Psychology, 7*(17), 369 – 396.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea.

Gómez-Chacón, I. M. (2003). La tarea intelectual en matemáticas. Afecto, Meta-afecto y los Sistemas de Creencias. *Boletin de la Asociacion Matematica Venezolana*, *10*(2), 225–248.

Radović, S., Marić, M., y Passey, D. (2019). Technology enhancing mathematics learning behaviours: Shifting learning goals from "producing the right answer" to "understanding how to address current and future mathematical challenges". *Education and Information Technologies, 24*(1), 103-126.

Blanco, T. F., Fernández-López, A., Martínez-Albella, J. y Rodríguez-Raposo, A. (2022). Explorando las emociones de futuros docentes frente al uso de tecnologías emergentes en el aprendizaje de la geometría. En T. F. Blanco, C. Nú-ñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 595). SEIEM.

IDONEIDAD COGNITIVA EN PRÁCTICAS MATEMÁTICAS INCLUSIVAS CON TECNOLOGÍA EDUCATIVA

Cognitive suitability in inclusive mathematical practices with educational technology

Blanco, T. F., Gorgal-Romarís, A., Fernández-López, A., Núñez-García, C. y Sequeiros, P. G.

Universidad de Santiago de Compostela

En la actualidad, el incremento en la ratio de dispositivos tecnológicos por alumno ha sido notable. Sin embargo, no todos los estudiantes disponen de recursos económicos para poder disponer de ellos en casa. En este trabajo se analiza la idoneidad cognitiva de prácticas matemáticas con tecnología educativa en un contexto de inclusión. Esta idoneidad evalúa el grado en que los significados pretendidos están en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes, así como la medida en que los significados personales logrados convergen a ellos (Godino, 2013).

El estudio sigue una metodología basada en el diseño experimental y es de corte cualitativo. La muestra está formada por 15 estudiantes del primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria (12 a 13 años) que están en riesgo de abandono escolar por sus condiciones familiares. En el diseño de las prácticas se utilizaron robots, diseño e impresoras 3D, apps matemáticas y GeoGebra, y su implementación se realizó fuera del horario escolar. Como instrumentos de recogida de datos se emplearon las grabaciones de vídeo de las sesiones de implementación, el diario de campo y los cuestionarios de satisfacción de los estudiantes. Para analizar los datos se han tomado los indicadores de las tres componentes de la Idoneidad Cognitiva de Godino (2013). Los resultados obtenidos con respecto a la primera componente revelan que, en todas las prácticas, los estudiantes conocen los conceptos matemáticos que se van a trabajar, sin embargo, muestran dificultades a la hora de aplicarlos. Por ejemplo, en la construcción de ángulos durante una práctica de robótica o al construir triángulos de igual área con GeoGebra. En cuanto a las adaptaciones curriculares, estas tuvieron más espacio en las prácticas realizadas con las apps y con el diseño e impresión 3D, al dar libertad a los estudiantes para avanzar de nivel siguiendo su propio ritmo y al dejar libertad para la creatividad en el diseño 3D, respectivamente. Para finalizar, la evaluación del aprendizaje se realiza a través del producto final que obtienen en las diferentes prácticas. Por ejemplo, en la práctica de diseño 3D, analizando la impresión de la figura creada por cada estudiante. Como conclusión, este tipo de prácticas presentan un grado medio-alto de idoneidad cognitiva, proporcionando además un contexto para que los estudiantes desfavorecidos se familiaricen con la tecnología fuera del aula y reducir así la brecha digital (Blanco et al., 2022).

Referencias

Blanco, T. F., Gorgal-Romarís, A., Núñez-García, C. y Sequeiros, P. G. (en prensa). Digital education for approaching the affective domain in mathematics learning. En L. Daniela (Ed.), *Inclusive Digital Education.* Springer.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 111-132.

García, M. M., Romero, I. M. y Gil, F. (2021). Efectos de trabajar con GeoGebra en el aula en la relación afecto-cognición. *Enseñanza de las ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 39* (3), 177-198.

Blanco, T. F., Gorgal-Romarís, A., Núñez-García, C., Fernández-López, A. y Sequeiros, P. G. (2022). Idoneidad cognitiva en prácticas matemáticas inclusivas con tecnología educativa. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 596). SEIEM.

CREACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS DE PRIMARIA

Mathematical problem posing in primary school teacher training

Burgos, M.[a], Chaverri, J.[b] y Castillo, M. J.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Costa Rica

Mientras que en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas se ha situado en el centro de los planes de estudio y la práctica educativa, el planteamiento de problemas ha recibido menor atención (Castro, 2008; Ellerton, 2013). Sin embargo, invención y resolución de problemas deben verse como propuestas complementarias que coordinadas permiten incrementar las habilidades matemáticas de los estudiantes (Ayllón et al., 2011; Castro, 2008). Por este motivo, investigaciones recientes sobre creación de problemas en la formación de profesores de matemáticas la sitúan tanto como medio como objeto de instrucción, centrado en el desarrollo de la competencia para formular problemas con fines didácticos destacando la importancia de desarrollar herramientas teórico-metodológicas que los guíen en dicha tarea (Espinoza et al., 2014).

El propósito de este trabajo es describir, por medio de un estudio de caso, el diseño, implementación y resultados de una intervención formativa con futuros maestros de primaria, con la que se pretende desarrollar la competencia para crear problemas con fines didácticos, fundamentada en el Enfoque Ontosemiótico (Godino et al., 2007) y siguiendo el modelo de Malaspina (2013). Para este autor, la creación de nuevos problemas puede darse a través de la variación, modificando información, requerimiento, contexto o entorno en el problema inicial, o por elaboración, bien de forma libre, a partir de una situación dada o configurada por el autor, o bien, por un requerimiento específico, que puede tener énfasis matemático o didáctico. En la intervención que se describe en este trabajo se pide a los maestros en formación que creen problemas por variación a partir de una tabla de proporcionalidad. A continuación, se presentan las soluciones de alumnos de primaria a un problema propuesto por un profesor y se pide que elaboren problemas que faciliten la comprensión y la solución del problema del episodio por parte de los estudiantes.

Referencias

Ayllón, M. F., Castro, E. y Molina, M. (2011). Invención de problemas y tipificación de problema “difícil” por alumnos de Educación Primaria. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 277-286). SEIEM.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 113-140), SEIEM.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. y Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 14*(2), 1-12.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 87-101.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Malaspina, U. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. En *Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), VII CIBEM* (pp. 129-140). SEMUR.

Burgos, M., Chaverri, J. y Castillo, M. J. (2022). Creación de problemas matemáticos en la formación de maestros de primaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 597). SEIEM.

ANALIZANDO EL PENSAMIENTO CRÍTICO DE FUTUROS MAESTROS Y PROFESORES: NOTICIAS FALSAS DE TIPO ESTADÍSTICO GRÁFICO EN LOS MEDIOS

Analyzing Critical Thinking of Preservice Teachers: Graphic Statistical Fake News in the Media

Casas-Rosal, J. C.[a], León-Mantero, C.[a], Madrid, M. J.[b] y Viña-Palomino, N. A.[c]

[a]Universidad de Córdoba, [b]Universidad Pontificia de Salamanca, [c]Universidad de Guayaquil

La información que llega a todos los ciudadanos a través de los medios de comunicación puede suponer un peligro si estos no han desarrollado destrezas asociadas al denominado pensamiento crítico. Este otorga la capacidad de interpretar y analizar de forma adecuada si la información estadística es creíble y fiable y de extraer y hacer uso de información organizada en gráficos elementales (Ennis, 2018). El objetivo de este trabajo es el de indagar en el pensamiento crítico de futuros maestros y profesores cuando reciben información de tipo estadístico gráfico que ha sido manipulada de forma intencionada, así como analizar la influencia que pueden tener en este, la actitud y la ansiedad hacia las matemáticas y el nivel de cultura estadística. Para ello se diseñó una investigación de corte cuantitativo en el que participaron 390 futuros maestros de Infantil y Primaria y profesores de Secundaria y Bachillerato antes de abordar contenidos de estadística durante el curso 2021/2022. La muestra, seleccionada por conveniencia y disponibilidad, está constituida por un 65,4% de mujeres y, con respecto a las titulaciones, el grado de Educación Primaria e Infantil representan el 75,5% y 14,7% respectivamente. Para la recogida de información fueron elegidos el *Survey of Attitudes towards Statistics* para medir las actitudes hacia la estadística (Schau, 2003), el *Statistical Anxiety Rating Scale* para la ansiedad hacia la estadística (Cruise et al., 1985), un cuestionario elaborado a partir del *Statistics Concept Inventory* para la evaluación del razonamiento estadístico (Allen, 2006) y un cuestionario elaborado ad-hoc para identificar la capacidad de pensamiento crítico ante cinco informaciones gráficas manipuladas. Los resultados totales muestran que los niveles de razonamiento estadístico son sorprendentemente bajos especialmente en estadística descriptiva y en interpretación de gráficos. Asimismo, no se observan diferencias significativas con respecto al género, excepto en la interpretación de gráficos. Por otro lado, se puede observar una reducida capacidad de pensamiento crítico, además de diferencias significativas en la comprensión de la información, la identificación de contextos y en la suficiencia de la información entre hombres y mujeres. Por último, el modelo creado para explicar los factores que influyen en el pensamiento crítico indica que tanto la actitud como la ansiedad hacia la estadística influyen en este de manera significativa.

Referencias

Allen, K. (2006). *The statistics concept inventory: Development and analysis of a cognitive assessment instrument in statistics* [Tesis Doctoral, Universidad de Oklahoma]. SSRN Electronic Journal. https://bit.ly/3N3luZh

Cruise, R. J., Cash, R. W. y Bolton, D. L. (1985). Development and validation of an instrument to measure statistical anxiety. En Annual Meeting of the American Statistical Association, *Proceedings of the Section on Statistical Education*, (pp. 92-97). American Statistical Association

Ennis, R. H. (2018). Critical thinking across the curriculum: A vision. *Topoi, 37*, 165–184. https://doi.org/10.1007/s11245-016-9401-4

Schau, C. (2003). *Students' attitudes: The "Other" important outcome in statistics education* [Conference] Joint Statistical Meeting, Section on Statistics Education. San Francisco, California.

Casas-Rosal, J. C., León-Mantero, C., Madrid, M. J. y Viña-Palomino, N. A. (2022). Analizando el pensamiento crítico de futuros maestros y profesores: noticias falsas de tipo estadístico gráfico en los medios. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 598). SEIEM.

GESTIÓN DE LA DEMANDA COGNITIVA CON ESTUDIANTES CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES

Cognitive demand management on students with special educational needs

Codes, M., Chico, A. y Fernández, I.

Universidad de Huelva

Partimos de la matemática inclusiva, asumiendo que un concepto matemático puede aprenderse a partir de la creación de conexiones entre elementos vinculados a dicho concepto empleando diferentes tipos de representación, donde el método prima sobre las características del alumnado (Roos, 2019). El papel del docente es esencial como guía de ese aprendizaje (Rico y Ertmer, 2015), poniendo en juego un conocimiento profundo sobre el contenido y sobre aspectos didácticos de ese contenido (Carrillo, et al. 2018; Stein y Smith, 1998). La selección de tareas de alta demanda cognitiva es una de las estrategias que un docente puede emplear para promover la construcción de conocimiento matemático creando un contexto de diversidad de pensamiento, pero requiere de una buena gestión en el aula para mantener dicha demanda sin perder eficacia (Stein y Smith, 1998).

En un contexto de resolución de problemas con estudiantes con Trastorno del Espectro autista nivel 1 Síndrome de Asperger (SA) en una situación de laboratorio, analizamos la gestión de la conservación de la demanda cognitiva de tareas por parte de una maestra que no ha recibido formación específica en este ámbito. Presentamos resultados de la gestión de la maestra con uno de los problemas que resuelve un niño con dificultades de atención, planificación y habilidad de visualización y toma de decisiones, vinculadas al SA y que afectan a su razonamiento y lentitud en la tarea. El problema se plantea como un reto para conseguir un código numérico y se proporciona material visual y manipulativo acorde a su perfil compuesto por piezas con las formas de los dígitos del 0 al 9. Analizando cómo el niño resuelve exitosamente la tarea empleando el material que se le proporciona y con el apoyo de la maestra, observamos patrones de acción de la maestra como los descritos por Stein y Smith (1998): (i) se fuerza a que se aporten justificaciones, explicaciones y sentido a través de preguntas, comentarios y retroalimentación; (ii) se establecen conexiones con frecuencia; (iii) se facilita el tiempo suficiente para la exploración: ni muy poco, ni demasiado.

Agradecimientos

Este trabajo está asociado a un contrato predoctoral FPU20-05070 y se ha desarrollado en el marco del proyecto RTI2018-096547-B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España, del centro de investigación COIDESO, del grupo de Investigación DESYM (HUM-168), y de la Red MTSK, auspiciada por la AUIP.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores, E., Escudero, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Rico, R. y Ertmer, P. A. (2015). Examining the Role of the Instructor in Problem-centered Instruction. *Techtrends tech trends 59*, 96-103. https://doi.org/10.1007/s11528-015-0876-4

Roos, H. (2019). Inclusion in mathematics education: An ideology, a way of teaching, or both? *Educational Studies in Mathematics, 100*, 25-41. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9854-z

Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 268-275.

Codes, M., Chico, A. y Fernández, I. (2022). Gestión de la demanda cognitiva con estudiantes con necesidades educativas especiales. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas Y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en educación matemática XXV* (p. 599). SEIEM.

LA TEORÍA DEL CAOS: SU ENSEÑANZA Y SU IMPLICANCIA EN LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

Chaos theory: Its teaching and its implication in educational research

Costa, V. A.

Universidad Nacional de La Plata

Esta presentación tiene el foco en la Teoría del Caos, rama de la matemática contemporánea que gracias a la tecnología ha logrado grandes avances y progresos, además de su utilidad en diversas disciplinas ya que permite modelar matemáticamente diversos fenómenos.

Se propone reflexionar sobre dos aspectos de esta teoría. Uno, es el que mencionan algunos investigadores sobre enseñar matemática contemporánea en cursos de grado universitario, formación de profesorado y nivel secundario. En este sentido se plantea adelantar aspectos básicos de la Teoría del Caos, Geometría Fractal, Conjuntos Borrosos y Teoría de Catástrofes, en vez de relegarlos exclusivamente a cursos de posgrado, permitiendo introducir nociones de dinámica no lineal y herramientas computacionales, y acercar a los estudiantes a una matemática más actual (Seoane, Zambrano, San Juan, 2008; Wenzelburger, 1992). Esto sería posible de realizar, presentando aspectos básicos de la Teoría del Caos mediante el estudio del sistema dinámico discreto conocido como Mapa Logístico, ya que sólo requiere de conocimientos básicos del Cálculo Diferencial en una variable real y del concepto de algoritmos iterativos que generan sucesiones numéricas. Además, es muy simple de simular su comportamiento en el tiempo, utilizando las distintas Vistas y comandos de GeoGebra.

La otra mirada es considerar a la Teoría del Caos como marco investigativo para comprender los fenómenos que se producen en los sistemas educativos pensándolos para ello como sistemas dinámicos complejos. Calvo (2005), Colom (2003) y Reigeluth (2004) mencionan que la Teoría del Caos procura una aproximación a la comprensión de la realidad más acorde con las características de la realidad a la que se aplica (o realidad social desordenada, compleja, contingente, incierta, dinámica, cambiable, etcétera), por lo que se conformaría como la gramática de una nueva narración acerca de la realidad, fundamentalmente de la realidad compleja, que supone aceptar el desorden, la innovación y el movimiento como aspectos inherentes a cualquier situación caótica.

Referencias

Calvo, C. (2005). Complejidad, caos y educación. En A. Arellano (Coord.), *La educación en tiempos débiles e inciertos* (pp. 115-136). Anthropos.

Colom, A. (2003). La educación en el contexto de la complejidad: la teoría del caos como paradigma educativo. *Revista de Educación, 332*, 233-248.

Reigeluth, C. M. (2019). Chaos theory and the sciences of complexity: Foundations for transforming educational systems. En *Learning, Design, and Technology* (pp. 1–12). Springer International Publishing.

Seoane, J. M., Zambrano, S. y San Juan, M. A. (2008). Teaching nonlinear dynamics and chaos for beginners.*Latin-American Journal of Physics Education*, *2*(3), 10.

Wenzelburger, E. (1992). La matemática contemporánea y su papel en la enseñanza del nivel medio superior. *Educación Matemática*, *4*(02), 55-60.

Costa, V. A. (2022). La teoría del caos: su enseñanza y su implicancia en la investigación educativa. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 600). SEIEM.

DISCALCULIA Y DISCAPACIDAD AUDITIVA

Dyscalculia and hearing impairment

Espina, E.[a], Marbán, J. M.[a], Ayuba, J. M.[b] y Maroto, A. I.[a]

[a]Universidad de Valladolid, [b]University of Western Cape

El alumnado con problemas de audición encuentra barreras específicas para el aprendizaje de las matemáticas cuando se manifiesta una pobre o insuficiente posesión y adquisicióndе habilidades comunicativas (Ray, 2001). Si a esta problemática se le añade algún tipo de trastorno específico del aprendizaje, el riesgo de fracaso escolar y de exclusión puede ser ciertamente elevado. El objetivo de la presente investigación es llevar a cabo una primera aproximación, de carácter exploratorio, a la producción científica existente sobre el efecto combinado de discapacidad auditiva y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, con especial atención a la discalculia como trastorno específico. Para ello, se realizó una búsqueda bibliográfica apoyada en el uso de software especializado de carácter bibliométrico tanto en Web of Science como en Scopus apoyada en los términos *deafness, hearing impairment* y *hearing disability* en combinación con *dyscalculia, math disability, math disorder, math learning disability* y *math learning disorder*. Los criterios de inclusión que se fijaron fueron lingüísticos (estudios en inglés y español), temporales (publicados hasta 2022) y contextuales (realizados con estudiantes en edad escolar), excluyendo aquellos en los que la discalculia únicamente se mencionaba como un síntoma de una enfermedad. El resultado de esta primera búsqueda fue el conjunto vacío lo que llevó a refinar la misma incluyendo ahora también el término *learning disability*. Como resultado de esta segunda búsqueda se obtuvieron inicialmente un total de 100 documentos, reducidos a 15 tras la aplicación de los criterios de exclusión mencionados. La lectura detenida de estos estudios ha permitido conocer de forma general las características de la relación existente entre los diferentes trastornos del aprendizaje, entre los que se encuentra la discalculia, y las dificultades auditivas, en particular y de forma muy especial la sordera. Así, se ha podido observar cómo los trastornos del neurodesarrollomás comunes entre este colectivo de niños son los trastornos específicos del aprendizaje, cuya prevalencia se encuentra entre el 7 y el 8%, situándose en torno a un 10% el porcentaje de quienes presentan dislexia (Nelson y Bruce, 2019). Por otro lado, documentos como la Ley de Educación para Individuos con Discapacidades, pieza clave de la legislación estadounidense, indica que los trastornos específicos del aprendizaje no pueden ser identificados si el rendimiento de los niños es el resultado de una discapacidad auditiva. Sin embargo, muchos estudios y profesores reconocen la posibilidad de que los niños sordos o con problemas de audición puedan presentar trastornos de aprendizaje (Wiley *et al.*, 2022). Como consideración final, se puede concluir que hasta la fecha el efecto combinado de la discalculia con problemas de audición ha sido un tema poco estudiado, siendo una cuestión aún abierta si posee características propias y si su impacto es mayor que la suma del impacto de ambas problemáticas por separado, lo que ayudaría en el diseño de procesos adecuados de inclusión educativa en el aula de matemáticas para niños con estas dificultades.

Referencias

Ray, E. (2001). Discovering mathematics: The challenges that deaf/hearing-impaired children encounter. *ACE Papers, 11,* 62-76.

Nelson, C. y Bruce, S. M. (2019). Children who are deaf/hard of hearing with disabilities: Paths to language and literacy. *Education Sciences, 9*(2). https://doi.org/10.3390/educsci9020134

Wiley, S., Saint John, R. y Lindow-Davies, C. (2022). Children who are deaf or hard of hearing PLUS. En National Center for Hearing Assessment and Management (Eds.), *A resource guide for early hearing detection and intervention* (pp. 1-6). The NCHAM e-Book.

Espina, E., Marbán, J. M., Ayuba, J. M. y Maroto, A. I. (2022). Discalculia y discapacidad auditiva. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 601). SEIEM.

DOMINIO AFECTIVO Y ANSIEDAD MATEMÁTICA: ROMPIENDO BARRERAS POR LA EQUIDAD EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Affective domain and maths anxiety: Breaking down barriers for equity in Mathematics Education

Fernández-Cézar, R.[a], Marbán, J. M.[b], García-Monge, A.[b] y Rabelo-Procopio, M.[a]

[a]Universidad de Castilla-La Mancha, [b] Universidad de Valladolid

Las matemáticas son cruciales para el desarrollo económico, social y humano. Sin embargo, las carencias aún presentes a la hora de plantear una auténtica perspectiva inclusiva en la educación matemática contribuyen al decrecimiento de matrículas en carreras de ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas, CTIM (Martín Carrasquilla et al., 2022). Por otra parte, los últimos informes PISA constatan la idea de que un dominio afectivo matemático negativo está también entre las causas del bajo rendimiento en matemáticas de algunos alumnos. Uno de los elementos de este dominio especialmente relevante tanto en su relación con el rendimiento matemático como en la determinación de posteriores elecciones de estudios es la ansiedad (Lee, 2009; Jenßen et al., 2015). La ansiedad matemática afecta la conectividad cerebral (Battista et al., 2018), por lo que en los estudiantes que la sufren, principalmente chicas y personas con discalculia, se establecerán conexiones cerebrales que pueden bloquear o impedir el aprendizaje de las matemáticas y, de forma muy relevante, en el desarrollo del sentido numérico. Por ello, se ha planteado un proyecto que pretende abordar la ansiedad matemática en niños de 6 a 8 años persiguiendo estos objetivos: 1. Adaptar y validar escalas de ansiedad para alumnado español en edades tempranas; 2. Analizar las correlaciones con biomarcadores y crear una herramienta digital para detectar la ansiedad mediante EEG, ECG y GSR; 3. Comparar los efectos de la ansiedad frente a tareas aritméticas propuestas de formas variadas, con el foco en posibles diferencias entre chicos y chicas, y personas con discalculia; 4. Diseñar una intervención basada en propuestas aritméticas inclusivas para minimizar la ansiedad matemática. Se proponen, a su vez, las siguientes hipótesis de investigación: H1. Existirá correlación positiva entre los biomarcadores y los resultados de ansiedad encontrados con las escalas; H2. La correlación será más intensa en chicas y en personas con discalculia; H3. La intervención que se diseñe contribuirá a disminuir la ansiedad hacia las matemáticas. Los productos de esta investigación serán: un instrumento validado y en español para medir ansiedad matemática en niños de 6 a 8 años, una herramienta digital para detectarla y la intervención diseñada. Los dos últimos serán útiles para que los docentes puedan mitigar o evitar la aparición de ansiedad matemática, contribuyendo al mismo tiempo a una educación matemática más inclusiva.

Referencias

Battista, C., Evans T. M., Ngoon, T. J., Chen, T., Chen, L., Kochalka, J. y Menon, V. (2018). Mechanisms of interactive specialization and emergence of functional brain circuits supporting cognitive development in children. *NPJ science of learning*, *3*(1), 1-11. https://doi.org/10.1038/s41539-017-0017-2

Martín Carrasquilla, O., Santaolalla Pascual, E. y Muñoz San Roque, I. (2022). La brecha de género en la Educación STEM. *Revista de educación, 396*, 151-175. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2022-396-533

Jenßen, L., Dunekacke, S., Eid, M., y Blömeke, S. (2015). The relationship of mathematical competence and mathematics anxiety. *Zeitschrift* für *Psychologie*, *223*(1), 31-38.

Lee, J. (2009). Universals and specifics of math self-concept, math self-efficacy, and math anxiety across 41 PISA 2003 participating countries. *Learning and individual differences*, *19*(3), 355-365.https://doi.org/10.1016/j.lindif.2008.10.009

Fernández-Cézar, R., Marbán, J. M., García-Monge, A. y Rabelo-Procopio, M. (2022). Dominio afectivo y ansiedad matemática: rompiendo barreras por la equidad en educación matemática. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 602). SEIEM.

ADAPTACIÓN DE METODOLOGÍAS DE INSTRUCCIÓN EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA ALUMNADO CON AUTISMO

Adaptation of methods to teach problem solving to autistic students

Fernández-Cobos, R.[a], Polo-Blanco, I.[a], Goñi-Cervera, J.[a] y Bruno, A.[b]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Universidad de la Laguna

En general, el alumnado con trastorno del espectro autista (TEA) manifiesta rendimientos matemáticos bajos en comparación con aquellos que registran sus pares de desarrollo típico. Diversos estudios (*v. g.*, Ozonoff y Schetter, 2007; Polo-Blanco *et al.*, en revisión) revelan rasgos presentes en la mayoría de los casos, como alteraciones en las funciones ejecutivas, en la velocidad de procesamiento y en las habilidades de comunicación; que podrían tener repercusión en el aprendizaje matemático. En particular, la resolución de problemas aritméticos verbales se considera uno de los contextos afectados por mayor número de factores, debido al amplio abanico de habilidades que moviliza.

El empleo de ciertas metodologías de instrucción, como el aprendizaje basado en esquemas (SBI) o el modelo conceptual de resolución de problemas (COMPS), se ha mostrado beneficioso para mejorar la capacidad de resolución de problemas en estudiantes con TEA (*v. g.*, Root *et al.*, 2021). Sin embargo, dada la variabilidad observada en este trastorno, cualquier intervención genérica repercute de manera desigual en los resultados de aprendizaje. En este sentido, la instrucción personalizada representa una medida necesaria para optimizar la eficacia de cualquier metodología que se adapte a las características de las personas con TEA.

Este póster recoge un marco de investigación para el diseño de intervenciones didácticas personalizadas dirigidas a mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje en resolución de problemas aritméticos verbales con alumnado TEA. En primer lugar, se contempla una evaluación del perfil psicológico de los estudiantes. En segundo lugar, se tienen en cuenta una serie de asociaciones previamente identificadas entre algunas funciones cognitivas afectadas por el TEA y las dificultades presentadas por los alumnos (Polo-Blanco *et al.*, en revisión) para incorporar medidas específicas concretas. Estas pueden referirse al uso de apoyos visuales, temáticas de interés o listas de tareas. En tercer lugar, se recomienda evaluar las adaptaciones metodológicas mediante técnicas de diseño de línea de base múltiple entre sujetos con grupos de al menos tres estudiantes. Por último, se muestra la necesidad de seguir diseñando propuestas que tengan en cuenta las características individuales de cada estudiante.

Referencias

Polo-Blanco, I. Suárez-Pinilla, P., Goñi-Cervera, J., Suárez-Pinilla, M. y Payá B. (en revisión). Comparison of mathematics problem-solving abilities in autistic and non-autistic children: the influence of cognitive profile.

Ozonoff, S. y Schetter, P. L. (2007). Executive dysfunction in autism spectrum disorders: From research to practice. En L. Meltzer (Ed.), *Executive Function in Education: From Theory to Practice* (pp. 287-308). Guilford.

Root, J. R., Ingelin, B. y Cox, S. K. (2021). Teaching mathematical word problem solving to students with autism spectrum disorder: a best-evidence synthesis, *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities, 56*(4), 420-436.

Fernández-Cobos R., Polo-Blanco, I., Goñi-Cervera, J., y Bruno A. (2022). Adaptación de metodologías de instrucción en resolución de problemas para alumnado con autismo. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 603). SEIEM.

PERCEPCIÓN DEL ALUMNADO DE SECUNDARIA HACIA LA UTILIDAD E INTERÉS DE LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS

Secondary students' perceptions towards usefulness and interest of algebraic problem posing

Ferrando, L.[a,b], González-Calero, J. A.[b] y Arnau, D.[c]

[a]Universitat Jaume I, [b]Universidad de Castilla-La Mancha, [c]Universitat de València

En las últimas décadas se ha constatado una asociación positiva entre la invención de problemas y la resolución de problemas (p. ej., Silver y Cai, 1996). En el campo de la invención de problemas es habitual distinguir, en función de la información que recibe el estudiante, tres enfoques: invención libre, semiestructurada y estructurada (Stoyanova y Ellerton, 1996), siendo necesario actualmente un mayor número de investigaciones para dilucidar cuál de estos planteamientos es más beneficioso. El presente estudio se orienta a evaluar si, en primer lugar, una secuencia instruccional basada en tareas de invención de problemas a partir de una ecuación promueve un incremento en la competencia en la resolución algebraica de estudiantes de secundaria. En segundo lugar, se pretende analizar si el efecto de la instrucción puede estar condicionado por el enfoque de invención de problemas. En concreto, se comparan dos planteamientos: i) invención de problemas libre, en la cual el estudiante debe inventar un enunciado que sea resoluble mediante una ecuación que le es dada; y, ii) invención de problemas semiestructurada, donde el estudiante, dada una ecuación, debe completar un enunciado incompleto, del cual se han omitido determinadas partes –aquéllas donde se declaran las relaciones matemáticas–. En la fase experimental participaron 60 estudiantes de 2º y 3º de ESO, separados en dos condiciones experimentales: invención libre (IL) e invención estructurada (IE). En el presente trabajo se evalúa el efecto de las secuencias de enseñanza en la percepción de los participantes acerca de la utilidad e interés de la invención de problemas. Con este fin se administró antes y después de la instrucción un cuestionario *ad hoc* compuesto de siete ítems de respuesta con escala *Likert* de cinco niveles. El cuestionario indagaba en el interés y el disfrute del alumnado en tareas de invención de problemas, así como en la utilidad percibida por las y los participantes en este tipo de actividad matemática. Los resultados revelaron que, tras la instrucción, las y los participantes del grupo IL pasaron a concebir la invención de problemas como motivadora, mientras que en el grupo IE se produjo una valoración neutra, sin apenas mejora. En ambos grupos se documentó una valoración final positiva acerca de la utilidad de las tareas de invención de problemas, observándose una tendencia general a considerar la invención de problemas como un tipo de actividad matemática más productiva que la propia resolución de problemas.

Agradecimientos

Investigación realizada al amparo de los proyectos PGC2018-096463-B-I00 y AICO/2021/019 y del contrato MGS/2021/26.

Referencias

Silver, E. y Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 19-27. https://doi.org/10.2307/749846

Stoyanova, E. y Ellerton, N.F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. En P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518–525). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Ferrando, L., González-Calero, J. A. y Arnau, D. (2022). Percepción del alumnado de secundaria hacia la utilidad e interés de la invención de problemas algebraicos. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 604). SEIEM.

EL USO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS COMO RECURSO DIDÁCTICO. CREENCIAS E IDEAS DE LOS FUTUROS MAESTROS

The use of History of Mathematics as a didactic resource. Pre-service teachers' beliefs and ideas

Fuertes-Prieto, M. A.[a], Santágueda-Villanueva, M.[b] y Lorenzo-Valentín, G.[b]

[a]Universidad de Salamanca, [b]Universitat Jaume I

El papel que la Historia de las Matemáticas puede tener en la educación matemática y cómo integrarla en la formación del profesorado es aún un asunto abierto (Clark et al., 2018, Fauvel y Maanen, 2000). Por ello, el presente estudio tiene como fin conocer cuáles son las ideas y creencias que tienen los maestros en formación sobre el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico, buscando si existe una relación entre dichas creencias y la formación inicial que han cursado antes de acceder a la universidad, las notas que han obtenido en la asignatura de matemáticas en su etapa escolar y el grado de conocimientos relacionados con la Historia de las Matemáticas.

Para ello, tras una primera fase de revisión bibliográfica en busca de estudios similares, se elaboró un cuestionario a partir del desarrollado por Alpaslan et al. (2013) para maestros en formación, con tres partes diferenciadas: la primera parte dedicada a recoger datos referentes a variables sociodemográficas, formación inicial y nivel de matemáticas previo a entrar en la universidad; otra parte centrada en las ideas y concepciones sobre el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico y la tercera parte estaba dedicada a medir el grado de conocimientos relativos a la Historia de las Matemáticas.

Con el fin de conocer cuáles son las actitudes, conocimientos y creencias de los futuros maestros y maestras sobre el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico, se ha llevado a cabo un estudio entre 146 estudiantes de 2º y 3º del Grado en Maestro/a de Educación Primaria en la Universidad Jaume I y la Universidad de Salamanca, recopilando también información sobre su formación inicial, sus calificaciones en matemáticas y sus conocimientos de Historia de las Matemáticas.

Los resultados muestran que la mayoría de los futuros docentes son proclives a utilizar la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico y son conscientes de sus ventajas. Pero la mayoría no sabe cómo integrarlo en sus futuras clases y consideran necesario recibir más formación sobre ello. Estos resultados son, en general, independientes de sus estudios previos, de sus conocimientos sobre Historia de las Matemáticas y de sus resultados en matemáticas.

Referencias.

Alpaslan, M., Işıksal, M. y Haser, Ç. (2014). Pre-service mathematics teachers' knowledge of history of mathematics and their attitudes and beliefs towards using history of mathematics in mathematics education. *Science & Education*, *23*(1), 159-183.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S. y Tzanakis, C. (2018). *Mathematics, education and history. Towards a harmonious partnership*. Springer.

Fauvel, J., y van Maanen, J. (2000). *History in Mathematics Education: The ICMI Study.* Kluwer Academic Publishers.

Fuertes-Prieto, M. A, Santágueda-Villanueva, M. y Lorenzo-Valentín, G. (2022). Creencias e ideas de los futuros maestros sobre el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 605). SEIEM.

ADAPTACIÓN DE MATERIALES DEL PROYECTO MATESGG PARA ALUMNADO CON AUTISMO

Adaptation of materials from the MatesGG project for students with autism

Gómez Casanueva, C.[a], Polo-Blanco, I.[a], Lázaro, C.[a], Recio, T.[b] y Van Vaerenbergh, S.[a]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Universidad Nebrija

Distintos estudios muestran los beneficios del uso de recursos tecnológicos en alumnos que siguen una escolarización ordinaria. Sin embargo, los alumnos con Necesidades Educativas Especiales (NEE) a menudo no pueden sacar partido de estos recursos porque no están adaptados a sus necesidades. Entre ellos se encuentran los diagnosticados con Trastorno del Especto Autista (TEA) (Santos et al., 2020).

En este trabajo se adaptan materiales del proyecto MatesGG (https://intef.es/recursos-educativos/recursos-para-el-aprendizaje-en-linea/matesgg) diseñados con software de geometría dinámica GeoGebra sobre contenidos de 1º de la ESO (como medida de ángulos y superficie de polígonos regulares) para que puedan ser utilizados por alumnado con NEE, poniendo el foco en alumnado TEA. En las adaptaciones se han tenido en cuenta algunos aspectos característicos del trastorno, siguiendo lo expuesto en otros trabajos sobre metodologías de aprendizaje matemático adaptadas a este alumnado (Bruno et al., 2020; Rockwell et al., 2011). Por ejemplo, se ha considerado el buen procesamiento visual (proporcionando apoyos con imágenes), los déficits de planificación (pautando las tareas), y las dificultades de comprensión verbal (apoyando las instrucciones con pictogramas). Además, se describe el desempeño de un estudiante con diagnóstico TEA escolarizado en 1º de la ESO al trabajar con los materiales diseñados. Tras una sesión de intervención, el estudiante mostró comprender algunos de los conceptos y propiedades geométricas que no conocía o recordaba. Además, en línea con otras investigaciones sobre entornos digitales en alumnado TEA (Santos et al., 2020), el estudiante se mostró interesando y se implicó durante todo el proceso.

Dado el creciente uso que se está haciendo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en el ámbito educativo, creemos que es importante adaptar los recursos tecnológicos de manera que puedan ser utilizados para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de todo el alumnado.

Agradecimientos

Trabajo realizado bajo el proyecto PID2019-105677RB-I00 financiado por MCIN/ AEI /10.13039/501100011033 y el proyecto SUBVTC-2021-0012 financiado por Universidad de Cantabria/Gobierno de Cantabria.

Referencias

Bruno, A., Polo-Blanco, I. y González, M. J. (2020). Metodologías para la resolución de problemas aritméticos en alumnado con trastorno del espectro autista. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 90*, 51-58.

Rockwell, S. B., Griffin, C. C. y Jones, H. A. (2011). Schema-based strategy instruction in mathematics and the word problem-solving performance of a student with autism. *Focus on Autism & Other Developmental Disabilities, 26*(2), 87-95.

Santos, M. I. G., Breda, A. M. y Almeida, A. M. P. (2020). Promover o raciocínio geométrico em alunos com perturbação do espectro do autismo através de um ambiente digital. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*(67), 375-398.

Gómez Casanueva, C., Polo-Blanco, I., Lázaro, C., Recio, T. y Van Vaerenbergh, S. (2022). Adaptación de materiales del proyecto matesgg para alumnado con autismo. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 606). SEIEM.

ANÁLISIS DE LA RELACIÓN ENTRE LOS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD Y LA ILUSIÓN DE LINEALIDAD

Analysis of the relationship between the resolution methods for proportionality problems and the illusion of linearity

García-Bayona, I., Diago, P. D. y Arnau, D.

Universitat de València

Freudenthal (1983) afirmó que "la linealidad es una propiedad tan sugerente de relaciones que uno cede fácilmente a la seducción de tratar cada relación numérica como si fuese lineal" (p.267). En este sentido, se conoce como "ilusión de la linealidad" a la tendencia a aplicar modelos lineales o proporcionales en situaciones en las que no son aplicables (de Bock et al., 2007).

Hay muchos métodos para resolver problemas de proporcionalidad, como son la igualación de razones, la reducción a la unidad, el uso de fracciones equivalentes, la construcción progresiva o la regla de tres (Avcu y Avcu, 2010). Existe una tendencia a considerar este último método como una fuente de errores y en particular como una causa de la caída en la ilusión de la linealidad por parte de los estudiantes.

En este estudio se pretende comparar el desempeño en la identificación y resolución de problemas de proporcionalidad en estudiantes que han recibido formaciones previas distintas focalizadas en ciertos métodos de resolución de problemas de proporcionalidad. Los sujetos del estudio fueron dos grupos de estudiantes del Grado en Educación Primaria (78 personas en total). El primero de ellos recibió una sesión de introducción a la proporcionalidad en la cual se usaron métodos como la igualación de razones y la reducción a la unidad (obviando por completo la regla de tres), mientras que el segundo tuvo una sesión similar, con la diferencia de que el único método de resolución presentado fue la regla de tres. Tras la sesión, ambos grupos se enfrentaron a un mismo cuestionario que incluía problemas de proporcionalidad y otros problemas con una estructura de relaciones no lineal.

Los datos sugieren que la formación recibida, en efecto, condiciona la elección del método, pero que el método empleado no genera importantes variaciones en la tasa de éxito ni en los problemas de proporcionalidad ni en los de no proporcionalidad.

Referencias

Avcu, R. y Avcu, S. (2010). 6th grade students' use of different strategies in solving ratio and proportion problems. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *9*, 1277–1281.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssesn, D. y Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. Springer.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel.

García-Bayona, I., Diago, P. D. y Arnau. D. (2022). Análisis de la relación entre los métodos de resolución de problemas de proporcionalidad y la ilusión de linealidad. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 607). SEIEM.

EL DISCURSO DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y LA PRÁCTICA MATEMÁTICA DE DEFINIR

Pre-service secondary mathematics teachers' discourse and the mathematical practice of defining

Gavilán-Izquierdo, J. M. [a], González-Regaña, A. J. [a], Martín-Molina, V. [a] y Fernández-León, A. [a]

[a]Universidad de Sevilla

La práctica matemática de definir (PMD) es un tema relevante de investigación en educación matemática, ya que esta y las demás prácticas matemáticas se deben aprender a la vez que se desarrolla la comprensión conceptual (Kobiela y Lehrer, 2015). La investigación que estamos desarrollando pretende caracterizar la actividad discursiva de estudiantes para profesor de matemáticas de Educación Secundaria (EPS) cuando se involucran en la PMD en un contexto de Geometría 3D. El marco teórico utilizado en esta investigación es la teoría de la comognición (Sfard, 2008). Esta teoría permite la caracterización del discurso matemático a través de sus palabras clave, mediadores visuales, narrativas y rutinas, y permite también reconocer oportunidades de aprendizaje a nivel objeto y a nivel meta mediante la identificación de conflictos comognitivos.

Los participantes en este estudio son 34 EPS. Estos EPS respondieron a un cuestionario que constaba de 15 preguntas sobre la PMD en geometría 3D. Las discusiones de los EPS respondiendo al cuestionario se grabaron y transcribieron y además se recogieron las respuestas escritas.

El análisis de los datos se llevó a cabo en dos fases. En la primera, se identificaron las características del discurso matemático de los EPS. En la segunda, a partir de las rutinas y narrativas de los EPS, se infirió la existencia de varios conflictos comognitivos. Algunos de ellos se produjeron debido a que había estudiantes que usaban las mismas palabras con diferentes significados. Otros conflictos surgieron por diferencias en los discursos didáctico-matemáticos de los EPS. Estos resultados contrastan con los de González-Regaña et al. (2021), que estudiaron el discurso de los estudiantes para maestro (EPM). Avanzar en esta investigación permitirá contrastar los discursos de los EPS y de los EPM sobre la PMD y hacer algunas sugerencias para la enseñanza de la PMD en los procesos de desarrollo profesional de ambos colectivos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado con la Ayuda PPIIV.4/2021/005 (Universidad de Sevilla) y con la ayuda 2021/FQM-226 (Junta de Andalucía).

Referencias

González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Toscano, R., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). El discurso de estudiantes para maestro cuando describen y definen cuerpos geométricos. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 81-97.

Kobiela, M. y Lehrer, R. (2015). The codevelopment of mathematical concepts and the practice of defining. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(4), 423-454.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge University Press.

Gavilán-Izquierdo, J. M., González-Regaña, A. J., Martín-Molina, V. y Fernández-León, A. (2022). El discurso de estudiantes para profesor de matemáticas de Educación Secundaria y la práctica matemática de definir. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 608). SEIEM.

FLIPPED CLASSROOM Y FLIPPED LEARNING. ¿SABEMOS LO QUE SON?

Flipped classroom and flipped learning. Do we know what they are?

Gil, E. y Lupiáñez, J. L.

Universidad de Granada

El modelo Flipped Learning está recibiendo más atención en la investigación en los últimos años como muestran estudios como los de Fornons y Palau (2021) o Fung, Besser y Poon (2021). Sin embargo, autores como Santiago y Bergmann (2018) diferencian entre Flipped Learning y su versión más primitiva, Flipped Classroom. Según Bergmann y Sams (2012), los llamados padres del Flipped Classroom, definen este como el enfoque que intercambia los tiempos de trabajo en el aula con los tiempos de trabajo autónomo del estudiante. Esto es solo el primer ladrillo del Flipped Learning que según Hamdan et al. (2013), este debe incluir los principios FLIP: Flexible enviroment, Learning culture, Intentional content y Professional Educator. Por otra parte, Santiago y Bergmann (2018) incluyen como característica adicional del Flipped Learning el hecho de que este enfoque permite realizar actividades de mayor nivel cognitivo según la taxonomía de Bloom. Para este estudio, vamos a tomar la diferencia que marcan estos autores, presencia de los principios FLIP y mención a la taxonomía de Bloom, y realizar una revisión sistemática de la literatura siguiendo la metodología PRISMA. Las bases de datos escogidas para esta revisión han sido Web of Sciences y Scopus y se han buscado aquellos artículos en acceso abierto que hagan mención a cualquiera de estos enfoques metodológicos, a las matemáticas y a la formación de futuros docentes. Doce han sido los artículos que han sido seleccionados y se ha analizado la definición que aportan del enfoque empleado, Flipped Learning o Flipped Classroom. También se han observado las referencias que utilizan en estos artículos observando que, más de la mitad de los artículos que definen un enfoque como el otro recogen pocas referencias sobre Flipped Learning. Esto plantea la hipótesis de que aquellos autores que utilizan indistintamente Flipped Learning y Flipped Classroom desconozcan la diferencia entre estos.

Referencias

Bergmann, J. y Sams, A. (2012) *Flipped your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day*. International Society for Technology in Education.

Fornons, V. y Palau, R. (2021) Flipped Classroom en la enseñanza de las matemáticas: Una revisión sistemática. *Education in the Knowledge Society (EKS), 22*, e24409. https://doi.org/10.14201/eks.24409.

Fung, C-H., Besser, M. y Poon, K-K. (2021) Systematic literature review of flipping classroom in mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *17*(6), em1974. https://doi.org/10.29333/ejmste/10900

Hamdan, N, McKnight, P, McKnight, K. y Arfstrom, K. (2013). *A review of flipped learning*. Retrieved May 20, 2021, from Flipped Learning Network: http://www.flippedlearning.org

Santiago, R. y Bergmann, J. (2018) *Aprender al revés. Flipped learning 3.0 y metodologías activas en el aula*. Paidós Educación.

Gil, E. y Lupiáñez, J. L., (2022). Flipped Classroom y Flipped Learning, ¿sabemos lo que son? En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 609). SEIEM.

GENERALIZACIÓN EN UN ALUMNO DE 9 AÑOS CON AUTISMO

Generalization in a 9-years-old-student with autism

Goñi-Cervera, J.[a], Bruno, A.[b], Polo-Blanco, I.[a] y Cañadas, M. C.[c]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Universidad de La Laguna, [c]Universidad de Granada

La inclusión del alumnado con trastorno del espectro autista (TEA) en las aulas regulares es frecuente. Dado que muchos presentan dificultades en matemáticas, han aumentado las investigaciones sobre su aprendizaje (Bae et al., 2015). La enseñanza de patrones numéricos o gráficos en edades tempranas promueve la capacidad para generalizar, pero tenemos poca información sobre cómo los estudiantes con TEA realizan este tipo de tareas (Goñi-Cervera et al., 2021). Esta investigación tiene como objetivo describir la generalización de un estudiante con TEA en tareas de patrones lineales en configuraciones crecientes. Se muestra un estudio de caso, con un estudiante diagnosticado con TEA (9 años y 5 meses, CI = 88), escolarizado en 4º de Educación Primaria en un centro ordinario y con adaptación curricular en matemáticas de 3º. Analizamos sus razonamientos en una intervención individual donde se le requirió trabajar sobre patrones lineales crecientes, involucrando las relaciones n+1 y n+2. Pedimos al estudiante obtener términos consecutivos, intermedios y la generalización de configuraciones dadas. La intervención constó de seis sesiones: dos de evaluación inicial, dos de instrucción y dos de evaluación final. La fase de instrucción tuvo en cuenta las características del TEA del estudiante: la tarea estuvo pautada, la instructora realizó modelizaciones previas con tareas similares y se fomentó el uso de tablas para organizar los datos, de forma que ayudara al razonamiento hacia la generalización. En el análisis de datos, tuvimos en cuenta los niveles de generalización de relaciones funcionales propuestos por Blanton et al. (2015). Los resultados muestran una mejoría en la obtención de términos consecutivos, intermedios y generalización entre las sesiones iniciales y finales, realizadas sin apoyo de la instructora. El empleo de tablas resultó una estrategia eficaz que el estudiante integró en los casos consecutivos y que continuó usando en los casos intermedios, pues necesitaba conocer el resultado del paso anterior, para llegar a la generalización. Incluso cuando no se le proporcionó la tabla, el estudiante creó una propia para obtener la solución. En la mayoría de las respuestas mostró razonamientos de nivel pre-estructural o recursivo particular (Blanton et al., 2015), con escasos razonamientos de niveles superiores. La modelización previa por parte de la investigadora le ayudó en sus déficits de planificación y ejecución, que son propios de las personas con TEA.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en los proyectos: PID2020-113601GB-I00 y PID2019-105677RB-I00 financiados por la AEI (España) y por las Ayudas Concepción Arenal del Gobierno de Cantabria.

Referencias

Bae, Y. S., Chiang, H. M. y Hickson, L. (2015). Mathematical word problem solving ability of children with autism spectrum disorder and their typically developing peers. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, *45*(7), 2200-2208.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015) A learning trajectory in 6-years-old's thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558. https://www.doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Goñi-Cervera, J., Cañadas, M. C. y Polo-Blanco, I. (2021). Estrategias por alumnos con trastorno del espectro autista al resolver una tarea que involucra una relación funcional. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 311-318). SEIEM.

Goñi-Cervera, J., Bruno, A., Polo-Blanco, I. y Cañadas, M. C. (2022). Generalización en un alumno de 9 años con autismo. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas Y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en educación matemática XXV* (p. 610). SEIEM.

DISEÑO DEL ESTUDIO SOBRE LA ELECCIÓN DE LOS NOMBRES DE LAS CANTIDADES AL RESOLVER PROBLEMAS VERBALES

Study design on the choice of quantity names when solving word problems

Gutiérrez-Soto, J., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M.

Universitat de València

Numerosas investigaciones muestran una relación entre la comprensión lectora y la competencia en resolución de problemas verbales (e.g., Vilenius-Tuohimaa et al., 2008). En la etapa de traducción del enunciado el alumnado identifica cantidades conocidas y desconocidas y las incorpora dentro del modelo de situación del problema. En este sentido la falta de precisión a la hora de asignarle un nombre a una cantidad es el origen de errores en la resolución de problemas (Küchemann, 1978). Navas (2013) proporcionó a alumnado de tercer ciclo de primaria un conjunto de problemas verbales con un listado de nombres de cantidades (conocidas y desconocidas). Los sujetos participantes debían asociar o calcular un valor para cada uno de estos nombres hasta completar la resolución del problema. Se evidenciaron importantes dificultades para dar sentido a estas etiquetas y hubo actuaciones en las que una misma etiqueta se utilizaba con sentidos diferentes. En este trabajo tiene dos objetivos. El primero es obtener información sobre la forma en que los estudiantes construyen nombres para las cantidades y cómo la elección y/o precisión de los nombres pueden influir en el éxito en la resolución de los problemas. El segundo es determinar de qué manera influye la precisión de los nombres construidos en la resolución del problema. Con este fin, planteamos un estudio donde alumnado de tercer ciclo de primaria, dividido en dos condiciones experimentales, resuelve problemas de manera aritmética usando una versión del programa HINTS (Arnau et al., 2014). Los sujetos deberán introducir las operaciones aritméticas que consideren correctas en una interfaz similar a la de los botones de una calculadora. El sistema determinará si la operación introducida es correcta. En este caso, en la condición experimental, el sistema solicitará que le asignen un nombre de manera escrita a la cantidad para la que se acaba de determinar un valor. En la condición de control, el sistema asignará un nombre construido por los investigadores. Estos nombres formarán parte de los mensajes de error y de ayuda generados por el programa y una mala elección de las etiquetas podría provocar que los mensajes no tuvieran efecto.

Agradecimientos

Esta publicación es parte del proyecto de I+D+i PGC2018-096463-B-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa".

Referencias

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M. y González-Calero, J. A. (2014). Emulating human supervision in an intelligent tutoring system for arithmetical problem solving. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, *7*(2), 155-164.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School, 7*(4), 23-26.

Navas, B. (2013). *Un estudio exploratorio sobre la influencia de proporcionar nombres de cantidades en la resolución aritmética de problemas*. [Trabajo de investigación no publicado]. Universitat de València, España.

Vilenius-Tuohimaa, P. M., Aunola, K. y Nurmi, J.E. (2008). The association between mathematical word problems and reading comprehension. *Educational Psychology*, 28(4), 409-426.

Gutiérrez-Soto, J., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M (2022). Diseño del estudio sobre la elección de los nombres de las cantidades al resolver problemas verbales. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 611). SEIEM.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL: ESTUDIO DE GÉNERO DE UNA EXPERIENCIA EN EL AULA DE INFANTIL CON ROBOTS EDUCATIVOS BEE-BOT

Problem solving through computational thinking: a gender study of a kindergarten classroom experience with Bee-bot educational robots

Labrada-Berga, A.[a], Pérez-Suay, A.[a], Van Vaerenbergh, S.[b] y Pascual-Venteo, A. B.[a]

[a]Universitat de València, [b]Universidad de Cantabria

El pensamiento computacional está estrechamente ligado a las destrezas matemáticas (Wing, 2006). En particular, guarda relación con muchos de los procesos asociados a la resolución de problemas, que tiene una gran presencia en los documentos curriculares referentes a las edades que comprenden el periodo educativo infantil. Los diversos efectos de la estimulación temprana aparecen entre otros en el trabajo de Clements y Sarama (2007), y en la construcción del currículum en edades tempranas (Mengmeng et al., 2019). Concretamente, el desarrollo y la estimulación del pensamiento computacional en edades tempranas es de crucial importancia para crear en el individuo situaciones relacionadas con problemas y entornos de la computación. Además, las aulas de educación infantil resultan ser el entorno idóneo para el desarrollo de situaciones que estimulan favorablemente la resolución de problemas mediante el desarrollo de estrategias heurísticas. Bajo esta perspectiva se presentan i) una secuencia de aprendizaje basada en el uso de robots Bee-Bot (robots programables en forma de abeja), y ii) una secuencia de trabajo sobre la secuencia numérica para enfrentarse a las primeras resoluciones de problemas en la etapa preoperacional. Para la primera secuencia se han diseñado tres actividades de complejidad ascendente utilizando un tablero bidimensional y disponiendo elementos a alcanzar en el mismo. La complejidad de la secuencia solución se interpreta mediante la longitud de la secuencia y la cantidad de movimientos a combinar. En la segunda secuencia se ha utilizado un tablero unidimensional, donde se ha representado la secuencia numérica. La intención es introducir las estrategias de la suma ("sumar a partir de"), y dar solución a la operación mediante los robots Bee-Bot. Se ha realizado un experimento con un grupo reducido de 16 estudiantes (4 femeninas, 12 masculinos). Los resultados obtenidos reflejan la graduación de la complejidad de la primera tarea, donde las tasas de acierto han sido 94%, 81% y 69%, respectivamente, por género femenino: 100%, 100%, 75%; y género masculino: 92%, 75%, 67%. En cuanto a las operaciones realizadas sobre la secuencia numérica, el alumnado comprendía la operación suma, pero carece de destrezas para desarrollar la suma conceptualmente utilizando los robots. A pesar de que el número de alumnos es reducido, este estudio representa una primera aproximación en el aula que ha permitido adquirir datos para realizar una primera validación de la secuencia de resolución y estimar en el aula las dificultades derivadas de implementar las estrategias de suma mediante robots Bee-Bot.

Agradecimientos

Trabajo apoyado por el proyecto AICO/2021/019 (Generalitat Valenciana).

Referencias

Clements, D. H. y Sarama, J. (2007). Effects of a preschool mathematics curriculum: Summative research on the Building Blocks project. *Journal for research in Mathematics Education, 38*(2), 136-163.

Mengmeng, Z., Xiantong, Y. y Xinghua, W. (2019). Construction of STEAM curriculum model and case design in kindergarten. *American Journal of Educational Research, 7*(7), 485-490.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33-35.

Labrada-Berga, A., Pérez-Suay, A., Van Vaerenbergh, S. y Pascual-Venteo, A. B. (2022). La resolución de problemas mediante el pensamiento computacional: estudio de género de una experiencia en el aula de infantil con robots educativos Bee-Bot. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 612). SEIEM.

PERFILES DE AUTORREGULACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EL ALUMNADO DEL GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Self-regulation profiles and mathematical problem solving of primary education students

Landa, J.[a], Berciano, A.[a] y Marbán, J. M.[b]

[a]Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, [b]Universidad de Valladolid

La autorregulación es un constructo complejo y multidimensional que, de acuerdo con la Teoría del Aprendizaje Autorregulado de Zimmerman (2002), que sirve como marco teórico y conceptual a nuestra investigación, queda caracterizado como un proceso activo a través del cual el alumnado intenta controlar su cognición, su comportamiento, su motivación, así como sus emociones y afectos orientándolos sistemáticamente hacia la consecución de metas previamente establecidas. Sin embargo, a pesar de la importancia de este constructo en educación matemática, siguen siendo escasos los estudios sobre autorregulación en contextos de resolución de problemas matemáticos, si bien sí hay algunos trabajos muy consistentes que establecen la autorregulación como predictor potencial del logro académico en matemáticas (Harding et al., 2019).

En este contexto, los resultados que aquí se muestran proceden de un trabajo de investigación orientado, entre otras metas, a identificar perfiles de autorregulación presentes en el alumnado del Grado en Educación Primaria en contextos de resolución de problemas matemáticos. Para ello, se parte del diseño y validación de un instrumento con una escala Likert de 7 puntos (Landa, Berciano y Marbán, 2021), instrumento que, posteriormente, es aplicado a una muestra de 402 estudiantes.

A partir de los resultados obtenidos es posible establecer 3 perfiles caracterizados como nivel bajo, medio y alto de autorregulación. El perfil bajo, conformado por el 23% de la muestra, tiene poca motivación para realizar la tarea y poca capacidad de controlar sus emociones ante las dificultades que le presente la resolución del problema matemático. Asimismo, la tarea de resolver problemas no le resulta agradable y tampoco cree que sea importante para su formación. El perfil medio, representado por el 45% de la muestra, se caracteriza por tener motivación moderada hacia la tarea y una actitud positiva, aunque también moderada como reacción ante el enunciado del problema. Además, asume su responsabilidad y no evita el trabajo a realizar en la resolución de problemas. El perfil alto, constituido por el 32% de la muestra, se caracteriza por una motivación alta ante la tarea y a pesar de las dificultades, intenta resolver el problema con perseverancia. A la vista de estos resultados, consideramos interesante para futuras investigaciones testear mediante el diseño de una propuesta didáctica la evolución de dichos perfiles.

Referencias

Harding, S.-M., English, N., Nibali, N., Griffin, P., Graham, L., Alom, B., y Zhang, Z. (2019). Self-regulated learning as a predictor of mathematics and reading performance: A picture of students in grades 5 to 8. *Australian Journal of Education*, *63*(1), 74-97. https://doi.org/10.1177/0004944119830153

Landa, J., Berciano, A. y Marbán, J. M. (2021). Autorregulación y resolución de problemas matemáticos en el alumnado del grado en Educación Primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 662). SEIEM.

Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a self-regulated learner: An overview. *Theory into practice*, *41*(2), 64-70.

Landa, J., Berciano, A. y Marbán, J.M. (2022). Perfiles de Autorregulación y Resolución de Problemas Matemáticos en el alumnado del Grado en Educación Primaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 613). Santiago de Compostela: SEIEM.

ANÁLISIS DE TAREAS DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA INSPIRADAS EN EL MÉTODO DE HEJNY

Analysis of elementary mathematics tasks inspired by the Hejny method

López Centella, E.

Universidad de Granada

El método de Hejny es una forma no tradicional de enseñar y aprender matemáticas escolares basada en la noción de esquema (*scheme-oriented education*). Esta modalidad de educación consiste en «la construcción de esquemas mentales que se entrelazan, combinan y forman una red dinámica del conocimiento y de las habilidades matemáticas de un estudiante» (Hejny, 2012, p. 47). Impulsado por Milan Hejny —profesor en el Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad Charles y fundador de la organización H-MAT, dedicada a la alfabetización matemática—, este método ha sido adoptado por más de 750 de las 4100 escuelas checas de educación primaria y secundaria, suscitando interés en Canadá, Eslovaquia, Finlandia, Grecia, Italia, Polonia y Suecia, implementándose en múltiples escuelas alternativas y en la educación en el hogar (https://www.h-mat.cz). Asimismo, la edición checa de los libros de texto inspirados en el método de Hejny para primaria ha sido aprobada por el Ministerio de Educación checo, y el método se presenta a estudiantes para maestros en la formación universitaria de la Universidad Charles de Praga y la Universidad de Ostrava. Con objeto de indagar en el método de Hejny para la enseñanza y aprendizaje de matemáticas escolares y examinar su propuesta instruccional, en este póster presentamos un trabajo de investigación en curso, de corte cualitativo, enmarcado en la Teoría de Modelos Genéricos (Hejný, 2012) y centrado en el análisis de una selección de tareas de los libros de texto de 1º y 6º cursos de primaria basados en el método de Hejny (Hejný, 2018). Categorizamos las tareas según los criterios: (1) contenidos matemáticos estructurales y funcionales involucrados en el enunciado y promovidos en la resolución; (2) sistemas de representación empleados en el enunciado; (3) actividad matemática requerida; y (4) contexto en que se plantea. A través del análisis de las tareas se descubren los principios del método: promoción de construcción de esquemas mentales, trabajo en entornos familiares para los escolares («Father Woodland's Animals», «Stepping», «Wooden sticks», «Building blocks», «Tessellations», «Multiplicative squares», «Spider webs», etc.), interconexión entre temas, apoyo al pensamiento autónomo, trayectoria de aprendizaje y construcción del conocimiento, estímulo de la motivación y exaltación del carácter lúdico de las matemáticas, percepción y experiencia de las matemáticas en la actividad cotidiana, adaptación del nivel de dificultad según necesidades y situaciones individuales, fomento de la colaboración. En las tareas de ambos cursos se aprecia un claro compromiso con el estímulo y desarrollo del pensamiento algebraico, contando la literatura con evidencias de estrategias y capacidades desarrolladas por escolares cuya instrucción ha sido inspirada en este método (López Centella et al., 2021).

Referencias

Hejný, M. (2012). Exploring the cognitive dimension of teaching mathematics through scheme-oriented approach to education. *Orbis scholae, 6*(2), 41-55.

Hejný, M. (2018). *Matematika – Hejného Metoda, Učebnice pro 1 & 6 stupeň základní školy* [Libro de texto de matemáticas de 1º y 6º cursos de primaria – Método de Hejny]. H-MAT.

López Centella, E., Slezáková, J. y Jirotková, D. (2021). ¿Esta ecuación describe esta situación? Explorando el pensamiento algebraico de estudiantes de primaria. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 393-400). SEIEM.

López Centella, E. (2022). Análisis de tareas de matemáticas de primaria inspiradas en el método de Hejny. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 614). SEIEM.

DIAGNÓSTICO DE ERRORES COMUNES EN EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS DECIMALES EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Detection of common misconceptions in decimal learning in Primary Education

Mínguez-Pardo, R.[a], del Olmo-Muñoz, J.[a], González-Calero, J. A.[a], Arnau, D.[b], y Sánchez-Pérez, M. C.[a]

[a]Universidad de Castilla-La Mancha, [b]Universitat de València

Las concepciones erróneas asociadas a los números decimales constituyen una parte inherente dentro de su aprendizaje. Estas han sido identificadas y recogidas en la literatura, apuntando a una repetición sistemática de las mismas y a su perduración en el tiempo (Stacey et al., 2001). La delimitación de estos errores y su conocimiento adquieren especial relevancia dentro de la enseñanza, pues su detección y consideración por parte del profesorado suponen un primer paso hacia una mejor comprensión y adquisición de los números decimales (Seinle, 2004). El presente trabajo, con el objetivo de explorar las concepciones erróneas más comunes en el aprendizaje de los números decimales, plantea una investigación de carácter cuantitativo para los cursos de 5º y 6º de Educación Primaria. Para el desarrollo del trabajo se ha contado con una muestra de 141 estudiantes. Por su parte, se ha tomado como instrumento de evaluación una adaptación de un cuestionario ya validado (Durking, 2012), compuesto por un total de 61 ítems. Estos pueden ser agrupados en 3 dimensiones en base al tipo de tarea planteada: comparación –compuesta por 2 subdimensiones (identificar el número mayor y establecer relaciones de orden entre diferentes cantidades)– densidad y recta numérica. Esta última queda conformada por 4 subdimensiones: situar un número decimal en la recta numérica, situar el decimal dado otro como referencia, identificar un decimal en la recta e identificar un decimal representado en la recta dado otro en la recta como referencia. Así mismo, las actividades están diseñadas para identificar tres de las concepciones erróneas más comunes en el aprendizaje de los números decimales: las ligadas a la interpretación de un número decimal como un número entero (*whole number thinking*) o como una fracción (*reciprocal thinking*), y a la dificultad de gestionar ceros en cifras decimales (*role of zero*). Los resultados obtenidos señalan como tareas más accesibles para el alumnado aquellas relacionadas con la identificación del número mayor entre dos dados. Por el contrario, son las actividades de recta numérica las que suponen un reto mayor; especialmente aquellas en las que es el propio alumnado quien debe representar los números decimales. Desde una perspectiva más general, comparando con datos de investigaciones previas (Steinle, 2004), podrían establecerse algunas concordancias relativas a la frecuencia con la que aparecen los errores, siendo común en nuestro estudio el error asociado a la interpretación como número entero, en contraposición con el vinculado a la interpretación como fracción.

Agradecimientos

Investigación realizada al amparo de los proyectos SBPLY/19/180501/000278, PGC2018-096463-B-I00 y AICO/2021/019; y la ayuda FPU19/03857.

Referencias

Durkin, K. y Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction, 22*(3), 206–214.

Stacey, K., Helme, S., Steinle, V., Baturo, A., Irwin, K. y Bana, J. (2001). Preservice teachers' knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4(*3), 205-225.

Steinle, V. (2004). Detection and remediation of decimal misconceptions. En B. Tadich, S. Tobias, C. Brew, B. Beatty, y P. Sullivan (Eds.), *Towards excellence in mathematics* (pp. 460-478). The Mathematical Association of Victoria.

Mínguez-Pardo, R., del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A., Arnau, D. y Sánchez-Pérez, M. C. (2022). Diagnóstico de errores comunes en el aprendizaje de los números decimales en educación primaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 615). SEIEM.

LA PERSPECTIVA DE GÉNERO EN LAS TESIS ANDALUZAS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA (2010-2020)

Gender perspective in Andalusian theses on mathematics education (2010-2020)

Madrid, M. J.[a], Maz-Machado, A.[b], León-Mantero, C.[b] y Pedrosa-Jesús, C.[b]

[a]Universidad Pontificia de Salamanca, [b]Universidad de Córdoba

La producción científica en Educación Matemática aumenta cada día y eso hace que sean cada vez más frecuentes los estudios que buscan analizar qué se investiga en el área. Por ejemplo, Camacho Machín (2021) presenta una revisión sobre algunas de las diferentes investigaciones relativas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Universidad o Marco-Buzunáriz et al. (2016) analizan los trabajos relativos a la investigación sobre libros de texto publicados en las actas de los Simposios de la SEIEM entre 1997 y 2015.

El análisis de la producción de tesis doctorales en Educación Matemática también ofrece información relevante sobre lo que ocurre en la producción científica en el área y por ello, el objetivo de este estudio es analizar el papel de la mujer en la realización y dirección de tesis doctorales de educación matemática en Andalucía desde el punto de vista bibliométrico.

Para ello, se descargaron de la base de datos TESEO todas las tesis doctorales realizadas entre 2010 y 2020 en los departamentos que incluyen el área de conocimiento de Didáctica de la matemática en las universidades andaluzas. Posteriormente, a partir de la lectura del título y del resumen se determinó mediante triangulación entre expertos en Educación matemática qué tesis pertenecían al área de educación matemática. Finalmente se constató que 90 tesis correspondían específicamente a esta área y para cada una de estas se identificaron autores y directores.

Atendiendo al género en la autoría de las tesis, se observa que en este periodo las mujeres son quienes han realizado más tesis (50) en el área respecto a los hombres (40). Esto cambia en la dirección de las tesis doctorales, pues 50 fueron dirigidas por uno o varios directores (hombres), 23 por una o varias directoras (mujeres) y 17 en equipos mixtos. Además, de los 54 investigadores diferentes que han participado, los hombres son mayoría con un porcentaje mayor al 60%. En particular, en este periodo José Carrillo de la Universidad de Huelva fue el más productivo, seguido por Juan Díaz Godino de la Universidad de Granada, y Carmen Batanero y Encarnación Castro, ambas de la Universidad de Granada.

La realización de una tesis doctoral supone un punto de partida en la trayectoria de cualquier investigador, mientras que la participación en la dirección de tesis doctorales supone el reconocimiento a la experiencia formadora e investigadora. El estudio presentado nos permite valorar el papel de la mujer en la producción científica en educación matemática en Andalucía.

Agradecimientos

Este estudio ha sido financiado por el proyecto de investigación 1381149-R del Plan Andaluz de Investigación y Fondos FEDER.

Referencias

Camacho Machín, M. (2021). Agenda de investigación para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 33-48). SEIEM.

Marco-Buzunáriz, M. A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2016). Investigación sobre libros de texto en los Simposios de la SEIEM (1997-2015). En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 325-334). SEIEM.

Madrid M. J., Maz-Machado A., León-Mantero C. y Pedrosa-Jesús C. (2022). La perspectiva de género en las tesis andaluzas de educación matemática (2010-2020). En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 616). SEIEM.

TRANSFERENCIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: UN EJEMPLO BASADO EN OBJETOS LIMÍTROFES

Knowledge transfer in Mathematics Education: A case based on boundary objects

Marbán, J. M., Arce, M., Conejo, L., Cuida, A., Maroto, A. I. y Novo, M. L.

Universidad de Valladolid

Las instituciones de educación superior juegan un papel cada vez más relevante como agentes activos de cambio y de desarrollo económico y social. "La universidad debe incorporar a su misión un tercer aspecto: El compromiso con la sociedad y con su tiempo, por lo que ha de depurar un tipo de talento para saber aplicar la ciencia y estar a la altura de los tiempos" (Ortega y Gasset, 1930). Tras esta idea está el concepto de transferencia que, cuya evolución en el ámbito educativo muestra que sigue resultando complejo y que está menos asentado y reconocido aún que en otros contextos.

El resultado que se presenta emana de una experiencia de colaboración entre el Grupo de Investigación Reconocido "Educación Matemática" de la Universidad de Valladolid y la empresa Smartick, como respuesta a una necesidad planteada por esta última de diseño de una estructura curricular y de asesoría en la preparación de una prueba adaptativa para evaluar competencia matemática de sus usuarios.

Una respuesta satisfactoria a la demanda planteada solo se antojaba posible bajo un enfoque curricular que situara la evaluación en el centro, como herramienta fundamental de aprendizaje y que fuese fácilmente acomodable a diferentes entornos de aplicación, marcos curriculares y necesidades o intereses de profesorado y alumnado. Atendiendo a este principio, al contexto y a los marcos de ejecución en los que debía desarrollarse la colaboración, se apostó por elaborar una propuesta dotada de una amplia flexibilidad interpretativa apoyada en un constructo flexible al que se denominó "sensibilidad matemática", y que surgió como resultado de un proceso riguroso de investigación apoyado en el concepto de *objeto limítrofe* (Star y Griesemer, 1989). La idea de objeto limítrofe nació en el intento de producir representaciones de la naturaleza en la comprensión del hecho de que las entidades naturales son simultáneamente concretas y abstractas, específicas y generales, convencionalizadas y personalizadas. Esta noción parecía adecuada a nuestro propósito al proporcionar un elemento tan plástico para adaptarse a necesidades locales como robusto para mantener una identidad común, facilitando así el desarrollo de la prueba deseada en un formato sensible y flexible a los contextos en los que se pretende implementar la acción de evaluación, así como la potencial permeabilidad a cambios provocados por procesos no lineales, sino más bien circulares y recursivos como, por ejemplo, cambios en los marcos legislativos curriculares.

Para ello se recurrió a un diseño metodológico en tres etapas: revisión sistemática de la literatura apoyada en técnicas de mapeo de la ciencia, identificación de conglomerados y análisis de resultados basado en la Teoría Fundamentada (Charmaz, 2014) a través de esquemas de codificación inductivos.

Referencias

Charmaz, K. (2014). *Constructing Grounded Theory (2ª ed.).* SAGE.

Ortega y Gasset, J. (1930). *Misión de la Universidad.* Revista de Occidente.

Star, S. L. y Griesemer, J. R. (1989). Institutional ecology, translations and boundary objects: Amateurs and professionals in Berkeley's Museum of Vertebrate Zoology, 1907-39. *Social Studies of Science*, *19*(3), 387-420.

Marbán, J. M., Arce, M., Conejo, L., Cuida, A., Maroto, A. I. y Novo, M. L. (2022). Transferencia en Educación Matemática: un ejemplo basado en objetos limítrofes. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 617). SEIEM.

EVALUANDO EL IMPACTO DE INNOVACIONES METODOLÓGICAS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS: UNA EXPERIENCIA REGIONAL

Assessing the impact of methodological innovations in the mathematics classroom: a regional experience

Marbán, J. M., Arce, M., Conejo, L., Cuida, A., Maroto, A. I., Novo, M. L., Palacios, A. y Palop, B.

Universidad de Valladolid

Estudios internacionales de evaluación como TIMSS (Mullis et al., 2020) o PISA (Schleicher, 2018) muestran cómo nuestro país presenta niveles de competencia matemática en su alumnado que no se corresponden con su potencial cultural, social y económico. La respuesta social ante esta situación suele traducirse en una relativa preocupación que se disipa pasado un corto período de tiempo, así como en una actitud de aceptación de la realidad amparada en una percepción de las matemáticas como "difíciles" e "inaccesibles" para la mayoría. Una de las respuestas que la Comunidad Autónoma de Castilla y León ofreció ante esta situación, con un claro propósito de mejora en mente, fue el diseño y puesta en marcha de un Programa de Mejora de las Matemáticas, enmarcado en un plan global más ambicioso de mejora de los resultados escolares (Consejería de Educación de Castilla y León, 2018). Una de las medidas del mencionado programa es impulsar la formación del profesorado en metodologías innovadoras que impulsen el desarrollo de la competencia matemática fundamentadas en la innovación, concretada en propuestas metodológicas, la evaluación basada en evidencias procedentes de la investigación, para contrastar las propuestas de innovación educativa y, finalmente, la mejora de la práctica docente y la dinamización del papel de las familias. En el caso de la evaluación, el Grupo de Investigación Reconocido "Educación Matemática" de la Universidad de Valladolid recibió el encargo de llevar a cabo tal proceso entre los años 2019 y 2021 bajo las coordenadas y condiciones del propio plan de mejora y de las cinco innovaciones "piloto" puestas en marcha, vinculadas a las siguientes propuestas: método Singapur (a través de la propuesta editorial Piensa Infinito), ABN, Numicon, JUMP-Math y Smartick. Este proceso resultó ser complejo y poliédrico, debiendo abordar objetivos que, si bien son complementarios, requirieron para su materialización de planteamientos metodológicos variados. En este póster se presenta el marco metodológico resultante del diseño de la evaluación, que también tuvo que adaptarse a las circunstancias y contingencias propiciadas por la situación pandémica provocada por la COVID-19. Se recurrió al uso de enfoques tanto cuantitativos como cualitativos, así como al uso de instrumentos de toma de datos fiables, válidos y suficientemente contrastados partiendo del análisis del contexto en el que habrían de ser aplicados, vinculados tanto a aspectos cognitivos y afectivos como de percepción sobre las innovaciones. Además, se utilizaron técnicas diversas de análisis de datos para facilitar una mejor comprensión de una realidad tan compleja.

Referencias

Consejería de Educación de Castilla y León (Ed.) (2018). *Plan Global de Mejora de los Resultados Escolares de Castilla y León*. https://www.educa.jcyl.es/es/temas/calidad-evaluacion/plan-global-mejora-resultados-escolares-castilla-leon

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L. y Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science.* IEA.

Schleicher, A. (2018). *PISA 2018: Insights and interpretations.* OCDE.

Marbán, J. M., Arce, M., Conejo, L., Cuida, A., Maroto, A. I., Novo, M. L., Palacios, A. y Palop, B. (2022). Evaluando el impacto de innovaciones metodológicas en el aula de matemáticas: una experiencia regional. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 618). SEIEM.

ESTRATEGIAS DE LUDIFICACIÓN PARA EL DESARROLLO DE LA MOTIVACIÓN INTRINSECA EN GEOMETRÍA

Gaming Strategies for the development of intrinsic motivation in geometry

Moral-Sánchez, S. N.[a,b], Sánchez-Compaña, M. T.[a] y Romero-Albaladejo, I. M.[b]

[a]Universidad de Málaga, [b]Universidad de Almería

Las metodologías activas, entre ellas los procesos ludificados, parten del concepto de la teoría constructivista del aprendizaje, con el foco sobre la motivación y el aprendizaje (Quintana y Jurado, 2019). Pantziara y Philippou (2015) y Moral-Sánchez (2019) afirman en sus investigaciones que la motivación intrínseca en matemáticas está relacionada con el tipo de actividades teniendo como consecuencia un aprendizaje más duradero de los conceptos tratados, al resolver el alumnado problemas con un nivel de dificultad superior, que ni siquiera fueron planteados originalmente. En su estudio, Buil et al. (2019) demuestran que se tiende a desarrollar la motivación intrínseca en cuanto se percibe la experiencia como divertida y hace que se retenga más información y disfrute en el proceso. La experiencia que se presenta aquí se llevó a cabo con un grupo de 30 estudiantes, durante 2 años en 2º ESO y 3º ESO. Se trata de una investigación-acción educativa donde se pretende analizar la motivación extrínseca e intrínseca que se genera al aplicar los entornos gamificados en contextos educativos de la asignatura de matemáticas, concretamente en geometría. Para ello, se han utilizado herramientas de gamificación y aprendizaje basado en retos mediante el uso de plataformas educativas con sistema de puntos e insignias, se elaboraron juegos adaptados a los diferentes contenidos. Además, el propio alumnado diseñó sus juegos, elaborando las normas y las características de estos, partiendo de los contenidos y los objetivos del tema de los cuerpos geométricos. En la experiencia, se utilizaron diversas herramientas tecnológicas de geometría, destacando en su aplicación al proceso de gamificación, en su rama de simuladores, software de realidad aumentada (Moral-Sánchez et al., 2020) y realidad virtual con poliedros. Los instrumentos utilizados para la recogida de datos han sido un cuestionario con escala tipo Likert, una entrevista semiestructurada al alumnado y el diario de observación de la docente-investigadora. La triangulación y el análisis mixto de dichos datos pone de manifiesto no solo el desarrollo de la visualización espacial a través del uso del software de realidad inmersiva y el aprendizaje producido, sino también la evolución desde la motivación extrínseca a la motivación intrínseca durante el proceso, haciéndose está más patente al usar metodologías activas con TIC en geometría.

Referencias

Buil, I., Catalán, S. y Ortega, R. (2019). Gamification and motivation: New tools for talent acquisition. *UCJC Business and Society Review*, *16*(3), 146-179. https://doi.org/10.3232/UBR.2019.V16.N3.04

Quintana, J. G. y Jurado, E. P. (2019). Juego y gamificación: Innovación educativa en una sociedad en continuo cambio. *Revista ensayos pedagógicos*, *14*(1), 91-121. https://doi.org/10.15359/rep.14-1.5

Moral-Sánchez, S. N. (2019). Una experiencia inclusiva de gamificación en el aula de matemáticas. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas, 84*, 45-50.

Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compaña, T. y Romero-Albaladejo, I. (2020). Construyendo sólidos arquimedianos con ayuda de la realidad aumentada: una experiencia innovadora en Educación Secundaria. En G. G. García, M. R. Navas-Parejo, C. R. Jiménez y J. C. de la Cruz Campos (Eds.), *Teoría y práctica en investigación educativa: una perspectiva internacional* (pp. 1931-1938). Dykinson, S.L. https://doi.org/10.2307/j.ctv2gz3t39.161

Pantziara, M. y Philippou, G. N. (2015). Students' motivation in the mathematics classroom. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(2), 385-411.

Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compaña, M. T. y Romero-Albaladejo, I. M. (2022). Estrategias de ludificación para el desarrollo de la motivación intrinseca en geometría. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 619). SEIEM.

HEURÍSTICOS EMPLEADOS POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES

Heuristic used by high school students with special educational needs

Motero, V. y Codes, M.

Universidad de Huelva

Numerosas investigaciones han remarcado la importancia de la resolución de problemas (RP) por su papel en el desarrollo de determinadas capacidades que son propias del quehacer matemático. Pero, a pesar del interés que en las tres últimas décadas se ha mostrado en las investigaciones sobre resolución de problemas, todavía se asocia a la RP en el aula con la realización de ejercicios enmarcados en un tema concreto, en los que el alumnado debe aplicar y repetir una serie de reglas que ha aprendido (Carrillo, 2018).

El objetivo de este trabajo es aportar un punto de partida en la enseñanza de la resolución de problemas a estudiantes con necesidades educativas especiales (NEE). Se han analizado los protocolos de dos problemas matemáticos realizados por una alumna con adaptación curricular significativa y un alumno con un programa de refuerzo del aprendizaje, ambos cursando segundo de ESO. Los dos problemas elegidos cumplen que su resolución implica el uso de heurísticos que muestran parte de la esencia del quehacer matemático (Schoenfeld, 1992). El primer problema puede resolverse con el heurístico de *ensayo-error* y, el segundo, con el de *marcha atrás.* En el análisis prestaremos atención a si los estudiantes aplican con éxito o no los dos heurísticos nombrados, además de otros seleccionados de la lista de heurísticos desarrollada por Carrillo (1998), que está organizada según las cuatro fases de resolución de problemas de Pólya (1945). Para esta selección tuvimos en cuenta los heurísticos usados en la resolución de problemas que propone la editorial del libro de texto empleado en la formación de los estudiantes.

Ambos alumnos resolvieron el primer problema aplicando con éxito el heurístico de *ensayo-error*, usando la alumna todos los heurísticos salvo uno de los seleccionados en la lista y el alumno dos de ellos. El segundo problema solo lo resolvió el alumno, aplicando con éxito el heurístico de *marcha atrás*, usando los mismos heurísticos de la lista que para el primero. Los resultados obtenidos dejan ver que la capacidad de resolver problemas en un contexto no tradicional no se ha visto mermada en nuestros informantes por las adaptaciones debidas a las NEE.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del centro de investigación COIDESO y del grupo de Investigación DESYM (HUM-168).

Referencias

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J. (2018). Resolución y formulación de problemas. *REnCiMa, 9*(1), 158-169.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *NCTM Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). Macmillan.

Motero, V. y Codes, M. (2022). Heurísticos empleados por estudiantes de secundaria con necesidades educativas especiales. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 620). SEIEM.

LA ROBÓTICA EDUCATIVA PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESPACIAL EN INFANTIL: CONSTRUCCIÓN Y VALIDACIÓN DE UN PRETEST

Educational robotics for the development of spatial thinking in kindergarten: Pretest construction and validation

Nogueira, L.[a b], Blanco, T. F.[a] y Maia-Lima, C.[b]

[a] Universidade de Santiago de Compostela, [b] Escola Superior de Educação do Politécnico do Porto

La presencia de la tecnología en la vida cotidiana de los niños es una realidad inevitable, al igual que su influencia en la forma en que estos juegan y aprenden (Berson et al, 2019). La investigación en curso tiene como objetivo comprender los efectos a corto y medio plazo de las actividades de robótica educativa que forman parte de un programa de desarrollo del razonamiento espacial en la educación infantil. En este trabajo presentamos la construcción y validación de un pretest para explorar el potencial de la robótica educativa que será aplicado en los grupos experimental y de control antes de la implementación del programa.

En la construcción del pretest se seleccionaron siete desafíos para cubrir diferentes habilidades de orientación y visualización espacial adecuadas a esta etapa educativa como conceptos topológicos, lateralidad, itinerarios, perspectivas y lectura de mapas (Silva et al., 2016). La validación del test se realizó mediante juicio de expertos (Fernández, 2004). Para ello se elaboró un formulario teniendo en cuenta las siguientes categorías de indicadores: i) los conceptos que se proponen evaluar; ii) la edad de los niños; iii) la ayuda prevista a su ejecución. Este formulario se aplicó a una muestra de seis expertos cuya formación y actividad profesional está vinculada a la educación infantil, a las tecnologías educativas y a la didáctica de las matemáticas.

Los resultados obtenidos muestran la adecuación de todos los ítems, tanto a los conceptos a evaluar como a la edad de los niños. Sin embargo, los expertos hacen algunas recomendaciones en el sentido de optar por un mayor predominio de las tareas manipulativas y del movimiento del niño por el espacio, reformular algunas preguntas para evitar interpretaciones erróneas, incorporar ayuda extra para permitir su realización por los niños más pequeños y repensar el contexto de las tareas con el fin de asegurar un ambiente afectivamente seguro para ellos. Este proceso de validación por expertos ha dado una contribución esencial a la investigación, resultando no solo en la reformulación de aspectos de contenido del pretest, sino que también elevó nuestra reflexión sobre aspectos contextuales y relacionales a tener en cuenta en su realización, con el fin de asegurar la fiabilidad de los datos recogidos.

Referencias

Berson, I., Murcia, K., Berson, M., Damjanovic, V. y McSporran, V. (2019). Tangible digital play in Australian and US Preschools. *Kappa Delta Pi Records*, *55*(2), 78-84.

Fernández, J. M. (2004). La validación de los tests. *Metodología de las ciencias del comportamiento*. *5*(2), 121-141.

Silva, I. L., Marques, L., Mata, L. y Rosa, M. (2016). *Orientações curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Direção-Geral da Educação - Ministério da Educação.

Nogueira, L., Blanco, T. F. y Maia-Lima, C. (2022). La robótica educativa por el desarrollo del pensamiento espacial en infantil: Construcción y validación de un pretest. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 621). SEIEM.

VISUALIZACIÓN Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: UN ESTUDIO CON ESTUDIANTES DEL GRADO DE MATEMÁTICAS

Visualization and mathematics learning: A study with undergraduate Mathematics student

Olano-Tela, C. P. y Camacho-Machín, M.

Universidad de La Laguna

Para Eisenberg y Dreyfus (1991), los estudiantes presentan una resistencia a visualizar en matemáticas debido a tres razones fundamentales: cognitivas (el pensamiento visual es más difícil), sociológicas (la transposición didáctica necesaria para enseñar necesita mayor preparación de materiales de enseñanza) y las creencias sobre las matemáticas (la visualización de una prueba o propiedad no es "matemático"). Profundizando en este último aspecto, Eisenberg (1994) presentó los resultados de una investigación en la que se pedía a un grupo de 40 profesores experimentados tres métodos para resolver una inecuación racional de segundo grado: dos de ellos visuales, y el método de casos, habitualmente enseñado en cursos de álgebra (que no funciona siempre). Ante la pregunta "¿qué método elegirías para enseñar a tus alumnos?", el 10% eligieron un método visual. González-Martín y Camacho-Machín (2004) constataron una resistencia de estudiantes de un curso de Cálculo integral en el análisis de la convergencia de integrales impropias, después de hacer uso de una secuencia de enseñanza en la que se utilizaron demostraciones visuales y se potenciaron los diagramas y las gráficas. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos en un estudio realizado con 29 estudiantes de cuarto curso del Grado en Matemáticas interesados en la enseñanza. Durante su formación, se utilizaron argumentos que hacían uso de diagramas y gráficas para resolver diferentes actividades, haciendo hincapié en la necesidad del uso de argumentos visuales para justificar propiedades. El objetivo de este estudio consistió en explorar sus creencias sobre la importancia del uso de consideraciones visuales para utilizarlas como recursos para la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria. Para ello se adaptó el instrumento de Eisenberg (1994), tomando sus resultados como referentes para este estudio. Del análisis de los resultados, se concluye que, prácticamente la mitad de los estudiantes siguen considerando que el método de casos "es el más sistemático y fácil de entender y explicar", así como "el más usual". La otra mitad de los estudiantes consideraron uno de los otros dos métodos (visuales) y algunos de ellos señalaron que podría ser utilizado ese método, aunque solamente como "complemento del método de casos, pero no de forma única". Concluimos que sigue existiendo la idea, arraigada entre muchos, de que las argumentaciones analíticas son más válidas que las visuales.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado ProID2021010018 del Gobierno de Canarias, RIS-3, cofinanciado por el Programa Operativo FEDER Canarias 2014-2020.

Referencias

Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *ZDM, 26*(4), 109-113.

Eisenberg, T. y Dreyfus,T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunnigham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-37). MAA.

González-Martín, A. S. y Camacho, M. (2004). Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2*, 479-486. PME.

Olano-Tela, C. P. y Camacho-Machín, M. (2022). Visualización y aprendizaje de las matemáticas: un estudio con estudiantes del grado de matemáticas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 622). SEIEM.

LA CONCEPTUALIZACIÓN DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN EL CURRÍCULO LOMLOE DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Conceptualization of computational thinking in the elementary school mathematics syllabus under the LOMLOE

Palop, B.[a], Santaengracia, J. J.[a] y Rodríguez-Muñiz, L. J.[b]

[a] Universidad de Valladolid, [b] Universidad de Oviedo

El reciente desarrollo curricular derivado de la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE) ha introducido el pensamiento computacional tanto en la materia de matemáticas como dentro de la denominada competencia digital. Esta es, junto con la competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería, una de las señaladas como competencias clave en la nueva ley. La introducción se produce en los cuatro reales decretos que regulan el currículo desde Infantil a Bachillerato. A pesar de que la definición más aceptada es la de Wing (2006), las fronteras de la conceptualización del pensamiento computacional son difusas y, en el ámbito que nos ocupa, su relación con pensamiento matemático, y, en concreto, con la resolución de problemas, no aclara suficientemente a qué se refiere el nuevo currículo, ni cuál es el alcance de la introducción de este paradigma en el currículo de matemáticas.

En este trabajo se analiza la conceptualización de pensamiento computacional que se trasluce del currículo de Primaria (MEFP, 2022), prestando atención a su relación y encaje con el currículo de matemáticas. Se establecen conexiones con las diferentes dimensiones que, en la literatura, caracterizan el pensamiento computacional, utilizando como punto de partida el trabajo de Bocconi et al. (2022) que redefinimos según Palop (2022) clasificando en los dominios de Datos, Problemas y Algoritmos las dimensiones siguientes: depuración, implementación, descomposición de problemas, paralelización, abstracción, reconocimiento de patrones, modelización, recogida, representación y análisis de datos, simulación y generalización.

Como se comprueba, el pensamiento computacional en el currículo de matemáticas introduce, por un lado, nuevas necesidades en la formación inicial y continua del profesorado de todas las etapas educativas y, por otro, la emergencia de diseñar situaciones de aprendizaje acordes con las exigencias del nuevo currículo y coherentes con el desarrollo de las competencias matemática, en ciencia, tecnología e ingeniería y digital.

Referencias

Bocconi, S., Chioccariello, A., Kampylis, P., Dagienė, V., Wastiau, P., Engelhardt, K., Earp, J., Horvath, M. A., Jasutė, E., Malagoli, C., Masiulionytė-Dagienė, V. y Stupurienė, G. (2022). *Reviewing Computational Thinking in Compulsory Education*. Publications Office of the EU. https://doi.org/10.2760/126955

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP]. (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52*(2/III/2022), 24386-24504.

Palop, B. (abril, 2022). *Diez propuestas de aula para el desarrollo del pensamiento computacional* [Ponencia]. VII Congreso Internacional de Docentes de Ciencia y Tecnología. Madrid, España. https://doi.org/10.5281/zenodo.6332483

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Palop B., Santaengracia J. J. y Rodríguez-Muñiz L. J. (2022). La conceptualización del pensamiento computacional en el currículo LOMLOE de matemáticas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 623). SEIEM.

LA DIDÁCTICA DE LA MEDIDA COMO MEDIO PARA VISIBILIZAR LA DIVERSIDAD AFECTIVO-SEXUAL

Didactics of measurement as a means to make affective-sexual diversity visible

Raya-Fernández, Á., Sánchez-Cruzado, C. y Sánchez-Compaña, M. T.

Universidad de Málaga

La educación matemática debe ir más allá del aprendizaje de conceptos puramente instrumentales, de hecho, se debería invertir esa tendencia para dedicar más atención a la funcionalidad de los contenidos y a las necesidades formativas de las personas (González Marí, 2020). En esta línea se lleva trabajando en la asignatura Didáctica de la Medida del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Málaga durante los últimos años, en un proceso de investigación-acción. En los primeros ciclos de dicho proceso, como resultado se consiguieron promover actividades en el aula más funcionales y formativas (tipo cuidado medio ambiente, vida saludable, cine, etc.), y no solo instrumentales (Sánchez-Cruzado y Sánchez-Compaña, 2020). El equipo docente-investigador, continuando la investigación-acción, ha realizado en el curso 2021-22 una propuesta didáctica que profundiza en el aspecto formativo, concretamente en la visibilización de la diversidad afectivo-sexual, para observar si así el alumnado toma conciencia de la necesidad de incluir este aspecto en su futura práctica docente. De esta forma, se les puede ayudar en su proceso de crecimiento, permitiéndoles conocer, relacionarse y tener como referentes a personas que valoren su propia diversidad afectivo-sexual, porque a pesar de los avances en este sentido, la discriminación sigue siendo una realidad. En esta propuesta didáctica se creó un conjunto de estaciones de aprendizaje, sujetas a estrategias de resolución de problemas y modelización matemática, profundizando en el estudio de la medida de diferentes magnitudes (Godino et al., 2002). Esta propuesta se llevó a cabo, en la localidad de Torremolinos, concretamente en La Nogalera. Se trata de una zona que cuenta con diferentes construcciones de gran valor arquitectónico, que permitía estudiar la medida de algunas magnitudes en un contexto real, acercando la funcionalidad de la matemática, y visibilizando la diversidad afectivo-sexual, encontrándonos en el primer lugar de España considerado cuna de los derechos de este colectivo, el Pasaje Begoña.

Como primer resultado de este ciclo de investigación-acción, el alumnado tomó conciencia de estar trabajando la medida de forma funcional en un lugar de memoria histórica, y además de superar algunos de los obstáculos conceptuales en el aprendizaje de las magnitudes trabajadas, inspiró algunos de los proyectos finales presentados en la asignatura, en los que intentaron visibilizar la diversidad afectivo-sexual a través de la didáctica de la medida, uno de los objetivos deseados.

Agradecimientos

Este trabajo se ha llevado a cabo dentro del grupo de investigación HUM 324 y el proyecto PGC2018-094114-A-I00, financiado por el MINECO/MICIU.

Referencias

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

González Marí, J. L. (2020). Claves para una educación matemática humanista. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 88*, 49-59.

Sánchez-Cruzado, C y Sánchez-Compaña, M. T. (2020). El modelo flipped classroom, una forma de promover la autorregulación y la metacognición en el desarrollo de la educación estadística. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *95*, 121-142.

Raya-Fernández, Á., Sánchez-Cruzado, C. y Sánchez-Compaña, M. T. (2022). La didáctica de la medida como medio para visibilizar la diversidad afectivo-sexual. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 624). SEIEM.

APROXIMACIÓN AL SENTIDO NUMÉRICO DE PROFESORES DE PRIMARIA

Approach to number sense for primary school teachers

Reyes-Bravo, M. y Tarisfeño-Vásquez, S.

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

La literatura sobre sentido numérico muestra un carácter polisémico del concepto, siendo necesario un posicionamiento sobre el tema (Whitacre et al., 2020). En este estudio se considera como "la comprensión general de una persona sobre el número y las operaciones junto con la capacidad e inclinación de usar esta comprensión de manera flexible para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para manejar números y operaciones" (McIntosh et al., 1992, p. 3).

Considerando la importancia del desarrollo del sentido numérico en la formación de estudiantes preparados para el mundo y la escasa investigación sobre el tema en Latinoamérica, esta investigación explora si profesores chilenos de primaria recurren al sentido numérico al responder a situaciones diseñadas para su uso, o prevalece el empleo de algoritmos estandarizados en sus estrategias de resolución, en el contexto de cursos de perfeccionamiento sobre números y operaciones.

Se presenta un estudio exploratorio de corte cualitativo, contemplando una muestra de 32 profesores de diversas regiones del país. Se diseñó un cuestionario en Google Forms y se aplicó sincrónicamente. Constó de 8 ítems en total, entre preguntas abiertas y cerradas, adaptadas de diversos instrumentos aplicados internacionalmente. Cada una de ellas contó con un tiempo determinado para responder, solicitando no utilizar papel, lápiz ni calculadora. Las respuestas fueron analizadas a través de la triangulación de expertos, empleando las categorías: basadas en sentido numérico; basadas en reglas; razonamiento incompleto; y razonamiento erróneo.

Respecto a las preguntas que solicitaron justificación, si bien se observa porcentajes altos de respuestas correctas, como en el caso de *comparación entre fracciones*, solo un 28% de los profesores utiliza sentido numérico en su justificación, y en algunos casos hay profesores que declaran no poder determinar la respuesta. Otro ejemplo de pregunta fue *colocar la coma al producto entre dos números decimales*; un 72% de los profesores contesta erróneamente, utilizando principalmente la regla de "mover la coma en el producto de acuerdo los espacios después de la coma en los factores", sin considerar el sentido de la respuesta que entregaron.

La investigación entrega información sobre el sentido numérico, considerando la carencia de estudios sobre el tema en el país. Los hallazgos se condicen con los encontrados por investigadores internacionales y sirven de antecedente para continuar ahondando en el estudio sobre este constructo en distintos niveles educativos.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por ANID (Chile) / DOCTORADO NACIONAL 21191968

Referencias

McIntosh, A., Reys, B., y Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2–8.

Whitacre, I., Henning, B., y Atabaş, Ş. (2020). Disentangling the research literature on Number Sense: Three constructs, one name. *Review of Educational Research, 90*(1), 95-134. https://doi.org/10.3102/0034654319899706

Reyes-Bravo, M. y Tarisfeño-Vásquez, S. (2022). Aproximación al sentido numérico de profesores de primaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 625). SEIEM.

VALORAR POSIBILIDADES DE ACERCAMIENTO A LA NOCIÓN DE LOS NÚMEROS Y EL CERO DESDE PREESCOLAR

Evaluate possibilities of approaching the notion of numbers and zero from preschool

Rodríguez González, M. L.[a] y Gómez Alfonso, B.[b]

[a]Cinvestav-IPN, México, [b]Universidad de Valencia, España.

Resumen

Este proyecto de investigación se inicia en educación primaria (Rodríguez et. al., 2020) donde la intención fue identificar dificultades de aprendizaje de los números incluyendo el cero, cuando trabajan con un modelo de enseñanza con base en la estructura matemática de John von Neumann (Hamilton y Landin, 1961). Como resultado se observó que desde el primer grado lograron un acercamiento a la noción de cero y de sucesor; en los siguientes grados les permitió descubrir con mayor facilidad las propiedades aritméticas, propiciando un pensamiento tendiente a la abstracción, abriendo un abanico de posibilidades para reconceptualizar la enseñanza.

Derivado de este proyecto, la experiencia se trasladó a educación preescolar, con la finalidad de valorar y analizar las posibilidades que se pueden generar con los infantes e infantas para acercarlos a la noción de números incluyendo el cero (Wellman y Miller, 1986); partiendo de una base formal matemática, construir cada número usando procesos de iteración y recursión. Pregunta de investigación: ¿Qué posibilidades existen de acercar a las y los preescolares a los números incluyendo el cero, a partir de los procesos de conteo y secuencias de actividades basadas en el modelo de Von Neumann? Objetivo: Valorar las posibilidades de acercamiento a la noción de los números naturales incluyendo el cero, en educación preescolar, a partir de los procesos de conteo y trabajo con secuencias de actividades basadas en el modelo de Von Neumann. El Marco teórico lo constituyen los Modelos Teóricos Locales (MTL) y sus componentes, (Filloy, Rojano y Puig, 2008): a) Formal.- estructura de Von Neumann; b) Cognitiva.- procesos cognitivos y de conteo (Fuson, 1982); c) Comunicación.- indicios de producción de sentido de las nociones de los números; d) Enseñanza.- secuencia de actividades con base en el juego y uso de material manipulable. El Modelo de enseñanza se experimentó durante 4 meses, se analizó la experiencia empírica con las categorías diseñadas con base en el MTL, los resultados permitieron identificar que, en las acciones y discurso de las niñas y niños, hay algunos indicios relacionados con la noción de cero como vacío y ausencia de elementos, la construcción del sucesor la relacionaron con el "siguiente".

Referencias

Filloy, E. Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra: a theoretical and empirical approach*. Springer.

Fuson, K. (1982). An analysis of counting-on solution procedure in addition. En Carpenter, Moser y Romberg (Eds). *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Lawrence Erlbaum Associates.

Hamilton y Landin. (1961). *Seth theory and the structure of arithmetic*. Allyn and Bacon, Inc.

Rodríguez, M. L., Filloy, E. y Gómez, B. (2020). Dificultades en la construcción de los números naturales incluyendo el cero con estudiantes de 6 a 8 años. *Enseñanza de la Ciencias, 38*(3), 55-80. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2881

Wellman, H.M. y Miller, K. F. (1986). Thinking about nothing: Development of concepts of zero. *British Journal of Developmental Psychology, 4*(1), 31-42. https://doi.org/10.1111/j.2044-835X.1986.tb00995.x

Rodríguez González, M. L. y Gómez Alfonso, B. (2022). Valorar posibilidades de acercamiento a la noción de los números y el cero desde preescolar. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 626). SEIEM.

INDICIOS DE TRANSICIÓN HACIA LA GENERALIZACIÓN ARITMÉTICA CON BASE EN VON NEUMANN EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Sings of transition towards arithmetic generalization in elementary education, based on Von Neumann.

Rodríguez, M. L.[a] y Gómez, B.[b]

[a]Cinvestav – IPN, México, [b]Universidad de Valencia, España.

En México los bajos resultados obtenidos en evaluaciones nacionales e internacionales; en matemáticas están centrados en las nociones de la aritmética. En Matemática Educativa se sostiene que las dificultades de aprendizaje están en la matemática misma. Para tal efecto, se diseñó un Modelo de Enseñanza para la construcción de los números naturales, con base en el modelo matemático formal de John von Neumann (Hamilton y Landin, 1961). El Marco Teórico lo conforman los Modelos Teóricos Locales (MTL) y sus cuatro componentes (Filloy, Rojano y Puig, 2008). El objetivo: Analizar la viabilidad de introducir un modelo de enseñanza, con base en un modelo formal matemático para la construcción de los números naturales, dirigido a estudiantes de primero a cuarto grado de educación primaria, trabajando simultáneamente la cardinalidad y la ordinalidad incluyendo el cero. Metodología: 1. Se diseñó un MTL para la construcción de los números naturales incluyendo el cero con base en Von Neumann. 2. Se experimentó el modelo de enseñanza, identificando y analizando las dificultades, a partir de categorías diseñadas con base en el Marco Teórico. 3. Se entrevistó a estudiantes previamente seleccionados de acuerdo con los criterios establecidos en el análisis cualitativo y cuantitativo del diagnóstico (Rojano, 1985). Como resultado de la investigación se encontró que las maneras de cómo han aprendido las nociones numéricas influyen en el aprendizaje, pero no lo determinan. La experimentación permitió identificar indicios de transición hacia la generalización aritmética: identificación del cero como número, conjunto vacío y como punto origen en la recta, el cero es el único número que pertenece a todos los sucesores, es el único número que no es sucesor; acercamiento conceptual a la noción de sucesor; acercamiento al sentido de ordinalidad para reconocer que todo sucesor contiene a los anteriores; uso del número cero como elemento neutro en la resolución de problemas aditivos, uso de las propiedades asociativa y conmutativa en la operación de suma e introducción de las operaciones multiplicativas; transformación del modelo aritmético A + B =C, en la resolución de problemas aditivos. Se concluyó: 1. Hay posibilidades de consolidar las nociones numéricas, cuando tienen la oportunidad de trabajar con un modelo de enseñanza diseñado con una base matemática formal. 2. La construcción de los números naturales no es trivial, operativa ni memorística, pero incorporar la componente formal para la conceptualización de los números desde el primer grado de educación primaria, facilita el desarrollo conceptual antes del uso del simbolismo. 3. La experimentación de este MTL, permitió aportar elementos para el análisis de las dificultades de aprendizaje de los números naturales con especial atención al cero como número, lo que abre un abanico de posibilidades para reconceptualizar la enseñanza. 4. Se propone recuperar la tradición formal matemática en la enseñanza, para potenciar el pensamiento matemático abstracto que les permita a las y los infantes acceder a niveles superiores de conocimiento matemático.

Referencias

Filloy, E. Rojano, T. y Puig, L.(2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. Springer.

Hamilton, N. y Landin, J. (1961). *Seth theory and the structure of arithmetic*. Allyn and Bacon, Inc.

Rojano, T. (1985). *De la aritmética al álgebra*. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN.

Rodríguez, M. L. y Gómez, B. (2022). Indicios de transición hacia la generalización aritmética con base en Von Neumann en educación primaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 627). SEIEM.

ANÁLISIS DE LA FLEXIBILIDAD EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS REALISTAS POR FUTUROS MAESTROS

Analysis of flexibility in solving realistic problems by future teachers

Sánchez-Barbero, B., Rodríguez, R., Cáceres, M. J. y Chamoso, J. M.

Dpto. Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca

En este trabajo entendemos por flexibilidad la capacidad para resolver un problema de diferentes formas, teniendo en cuenta la estrategia utilizada y la forma de llevarla a cabo (Leikin y Lev, 2013) y por problemas verbales realistas (PVR) aquellos que reproducen situaciones del mundo real y cuya resolución exige un razonamiento basado en la información situacional además del matemático (Vicente y Orrantia, 2007). De hecho, la utilización de procedimientos matemáticos puede conducir a una solución que, siendo correcta desde el punto de vista matemático, carezca de sentido para la situación real planteada (Verschaffel et al., 1994). Vicente y Orrantia (2007) proponen una clasificación de los PVR según cinco tipos de razonamiento: juntar o separar conjuntos que pueden tener elementos comunes (R1); considerar elementos relevantes que no aparecen explícitamente en el problema (R2); sumar o restar uno al resultado (R3); interpretar el resto de una división no exacta (R4); y decidir una solución de proporcionalidad directa o no (R5). Para analizar la flexibilidad de futuros docentes de Educación Primaria en la resolución individual de PVR, el primer día de clase se les pidió la resolución de todas las maneras posibles que encontraran de dos PVR extraídos de Verschaffel et al. (1994), cuyo razonamiento para la resolución es del tipo R1. Para ello tuvieron 120 minutos. Según el sistema de categorías establecido por Leikin y Lev (2013), a cada resolución en cada uno de los problemas se les asignó la puntuación de 10, 1 y 0.1, según la estrategia utilizada y la forma de llevarla a cabo. A partir de estas, se obtuvo el valor de la flexibilidad de cada estudiante en cada uno de los problemas como la suma de las puntuaciones. Los resultados muestran que el tipo de razonamiento del PVR no determina la flexibilidad. Llama la atención que la cantidad de estrategias de resolución para cada problema (2.05 vs. 1.89, de media), no coinciden con las puntuaciones de flexibilidad (16.81 vs. 17.49). Esto puede deberse a que los alumnos realizan diversas resoluciones de un mismo problema, partiendo casi siempre de una misma estrategia. Sin embargo, la flexibilidad en la resolución de PVR es superior que la obtenida en otros tipos de tareas (ver Martínez-Lastras et al., 2021). Estos resultados invitan a profundizar en el estudio de la flexibilidad y creatividad en resoluciones de PVR con muestras mayores y que requieran otros tipos de razonamiento, y a valorar las implicaciones educativas en la formación de docentes.

Agradecimientos

Trabajo financiado por el Ministerio de Educación y Formación Profesional a través de una beca de colaboración en Departamentos Universitarios para el curso 2021/2022.

Referencias

Leikin, R. y Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: what makes the difference? *ZDM, 45*(2), 183-197.

Martínez-Lastras, S., Cáceres, M. J., González, M. T., Rodríguez-Sánchez, M. M. y Sánchez-Barbero, B. (2021). Análisis de la flexibilidad en la resolución de una tarea de modelización por futuros maestros. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 664). SEIEM.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Lassure, S. (1994). Realistic consideration in mathematical modelling of school work problems. *Learning and Instruction, 4*(4), 273-294.

Vicente, S. y Orrantia, J. (2007). Resolución de problemas y comprensión situacional *Cultura y Educación, 19*(1), 61-85.

Sánchez-Barbero, B, Rodríguez, R., Cáceres, M. J. y Chamoso, J. M. (2022). Análisis de la flexibilidad en la resolución de problemas realistas por futuros maestros. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 628). SEIEM.

ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS DESDE UNA PERSPECTIVA DE GÉNERO

Analysis of mathematics textbooks from a gender perspective

Sánchez-Compaña, M. T[a]., Sánchez-Cruzado, C.[a], Macías-García, J. A.[a], Duarte Tosso, I.[a], Arnal Palacián, M.[b], Moral-Sánchez, S[a]., Raya-Fernádez, A[a]. y Jurado-Ropero, L.[a]

[a]Universidad de Málaga, [b]Universidad de Zaragoza

Como responsables de la formación inicial del profesorado de matemáticas, entre nuestras prioridades debe estar el concienciar sobre la necesidad de conseguir una sociedad inclusiva, innovadora y reflexiva que proporcione a las futuras generaciones una formación matemática de calidad (González-Marí, 2020). La perspectiva de género resulta un enfoque esencial, cuya incorporación en los contenidos de investigación e innovación se considera elemento fundamental para introducir factores actitudinales, emocionales y formativos. Situamos esta perspectiva en el epicentro, para fomentar la presencia de mujeres en carreras universitarias de Ciencia y Tecnología.

Como se viene afirmando desde hace décadas, es necesario reconocer el papel protagonista que los libros de texto tienen en todo proceso didáctico y que ha hecho de ellos un objeto de interés tradicional en la investigación didáctica, se considera el recurso docente fundamental y la referencia básica que se utiliza a la hora de realizar las programaciones, Sánchez y Valcárcel (2000).

En el trabajo que aquí presentamos se muestran los primeros resultados tras analizar mediante un instrumento diseñado por el grupo de investigación, (Sánchez et al., 2021), distintas unidades didácticas, contenidas en libros de textos de secundaria de diversas editoriales, para valorar la potencialidad formativa de las mismas desde una perspectiva de género. Se pretende averiguar las principales carencias y limitaciones de las unidades analizadas y establecer prioridades y recomendaciones para mejorar la calidad de la Educación Matemática en nuestro entorno y optimizar el material curricular creado por las editoriales. De forma general, los primeros resultados, muestran que, de acuerdo con la primera categoría de análisis, "imagen de la ciencia", los libros de texto están lejos de mostrar una imagen colaborativa, no estereotipada, profesional, conectada con la vida real y más allá de lo empírico; con respecto a la segunda "conocimiento de referentes femeninos", no se visibiliza a las mujeres, sus aportaciones y los contextos sociales en los que se crearon. Y por último respecto a la categoría de "lenguaje e imagen no sexista", observamos que no se emplean alternativas al masculino genérico, y que tanto el lenguaje como en la imagen, siguen apareciendo, mayoritariamente, sin cuidar los rasgos sexistas.

Agradecimientos

Este trabajo forma parte del proyecto PGC2018-094114-A-I00, financiado por el MINECO/MICIU.

Referencias

González Marí, J. L. (2020). Claves para una educación matemática humanista. *UNO*, 88, 49-59.

Sánchez, G. y Valcárcel, M. V. (2000). ¿Qué tienen en cuenta los profesores cuando seleccionan el contenido de enseñanza? Cambios y dificultades tras un programa de formación. *Enseñanza de las Ciencias, 18*(3), 423-437.

Sánchez-Compaña, M. T., Sánchez-Cruzado, C., Macías-García, J. A. y Duarte-Tosso, I. (2021). Adaptation and update of a curricular didactic analysis instrument from STEM teaching and learning units. En E. Pixel (Ed.), *Conference Proceedings. New Perspectives in Science Education* (pp. 33-38). Libreriauniversitaria.it Edizioni.

Sánchez-Compaña, M. T., Sánchez-Cruzado, C., Macías-García, J. A., Duarte Tosso, I., Arnal Palacián, M., Moral-Sánchez, S., Raya-Fernádez. A. y Jurado-Ropero, L. (2022). Análisis de libros de texto de matemáticas desde una perspectiva de género En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 629). SEIEM.

ANÁLISIS EMPÍRICO DE LA COMPLEJIDAD EN UNA THA SOBRE RAZONAMIENTO EN SUDOKUS

Empirical analysis of complexity in a HLT on reasoning in sodokus

Sanz-Herranz, H. y Cuida, A.

Universidad de Valladolid

La tarea de completar cuadrados latinos, en particular, la de resolver sudokus se supone relevante para desarrollar los procesos de razonamiento y prueba (Křížek y Solcova, 2021), procesos estos considerados por el NCTM como cuestiones fundamentales de las matemáticas (2000). Por su parte, el problema de decidir si existe solución para un cuadrado en general es NP-completo (Colbourn, 1984), por lo que la valoración de las actividades se viene haciendo de acuerdo con aspectos como la dimensión de la tabla, el número de celdas vacías u otras más como el número de estados intermedios para su solución automática (Jones, Roach y Perkins, 2008).

Más allá de la complejidad de la tarea se encuentra la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) que en el sentido de Clemens y Sarama (2012) contempla unos objetivos, una secuencia y unas hipótesis de aprendizaje. Así, el análisis de la complejidad empírica se puede utilizar para redefinir la THA y mejorarla. Para llevar a cabo esta investigación, se ha desarrollado una secuencia de actividades en un entorno virtual que ha sido presentada a un total de 47059 niños de entre 6 y 13 años, de un total de 72 países diferentes.

Entre las conclusiones más llamativas, se ha encontrado que aumentar la dimensión del sudoku no supone una mayor complejidad en lo relativo a las tasas de efectividad y tiempos de respuesta. Asimismo, sí que se observa un impacto significativo en la complejidad de la tarea a consecuencia del tipo de elemento involucrado, esto es, cuando el sudoku se realiza utilizando cifras numéricas resulta empíricamente más complejo que cuando en su lugar aparecen otros objetos presentados en formato pictórico tales como colores, animales, frutas… Por último, también se ha advertido que el número de celdas inicialmente vacías no resulta el factor más determinante a la hora de predecir la complejidad de la tarea en términos de sus tasas de efectividad.

Referencias

Clements, D. H., y Sarama, J. (2012). Learning trajectories in mathematics education. *Hypothetical Learning Trajectories* (pp. 81-90). Routledge.

Colbourn, C. J. (1984), The complexity of completing partial Latin squares. *Discrete Applied Mathematics*, *8*(1), 25-30.

Křížek, M., Somer, L. y Solcova, A. (2021). *From great discovreries in number theory to applications*. Springer.

Jones, S. K., Roach, P. A. y Perkins, S. (2008). Construction of Heuristics for a Search-Based Approach to Solving Sudoku. En Bramer, M., Coenen, F., Petridis, M. (Eds.) *Research and Development in Intelligent Systems XXIV* (pp. 37-49).

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Sanz-Herranz, H. y Cuida, A. (2022). Análisis empírico de la complejidad en una tha sobre razonamiento en sudokus. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 630). SEIEM.

ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO EN LA VALORACIÓN DE LA SUBJETIVIDAD EN PROPOSICIONES MATEMÁTICAS

Performance analysis in the assessment of subjectivity in mathematical propositions

Sanz-Herranz, H.[a], Marbán, J. M.[a] y Frápolli, M. J.[b]

[a]Universidad de Valladolid, [b]Universidad de Granada

Valorar la subjetividad de una proposición es una tarea que involucra diferentes habilidades de pensamiento de orden superior (Ennis, 2011; Jensen et al., 2014). Desarrollar esta habilidad en el alumnado implica, entre otros aspectos, potenciar su pensamiento crítico, el cual, a la postre, se utiliza para juzgar los procesos de razonamiento y prueba, considerados por el NCTM como procesos clave a desarrollar en la enseñanza de las matemáticas (NCTM, 2000). Se presenta a continuación cómo, en el marco de una investigación basada en diseño aún en curso, se han implementado en un entorno virtual componentes de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), en el sentido dado por Clements y Sarama (2012), en forma de actividades orientadas a trabajar y evaluar la subjetividad de proposiciones en diferentes contextos y dirigidas a alumnado de edades comprendidas entre los siete y los doce años. Los ocho contextos considerados refieren directamente a la normativa vigente en ese momento, la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. A saber: matemático, ciencias de la naturaleza, ciencias sociales, lengua castellana y literatura, educación artística, aspectos relacionados con la salud, aspectos relacionados con la competencia digital y aspectos relacionados con la economía. Las actividades a las que se ha hecho referencia fueron presentadas a un total de 1733 alumnos, aleatorizando su orden de presentación en lo relativo a los contextos. Del análisis de los resultados exhibidos se desprende que la edad del alumno no es determinante a la hora de predecir o explicar su desempeño en las actividades propuestas. Sí se observa, sin embargo, un efecto notable de la variación contextual a la hora de explicar la efectividad y el tiempo de respuesta en todas ellas. Ahora bien, no es el contexto matemático uno de aquellos en los que los alumnos exhiben mejores resultados, a pesar de ser considerado de antemano como un contexto eminentemente poco subjetivo. De hecho, las tasas de efectividad exhibidas en la resolución de las tareas presentadas en un contexto matemático no son significativamente diferentes al resto. No obstante, sí que se encuentra una asociación clara entre el contexto matemático y un menor tiempo de respuesta.

Referencias

Clements, D. H. y Sarama, J. (2004). *Hypothetical Learning Trajectories: A Special Issue of Mathematical Thinking and Learning*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203063279

Ennis, R. (2011). Critical thinking: Reflection and perspective Part II. *Inquiry: Critical thinking across the Disciplines, 26*(2), 5-19.

Jensen, J., McDaniel, M., Woodard, S. y Kummer, T. (2014). Teaching to the test... or testing to teach: exams requiring higher order thinking skills encourage greater conceptual understanding. *Educational Psychology Review, 26*(2), 307-329.

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado, 340*, de 30 de diciembre de 2020, 122868 a 122953. https://www.boe.es/boe/dias/2020/12/30/pdfs/BOE-A-2020-17264.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Sanz-Herranz, H., Marbán, J. M. y Frápolli, M. J. (2022). Análisis del desempeño en la valoración de la subjetividad en proposiciones matemáticas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 631). SEIEM.

REPRESENTACIÓN DE FRACCIONES CON DIAGRAMAS CIRCULARES POR FUTURO PROFESORADO DE PRIMARIA

Representation of fractions using circle diagrams by prospective elementary teachers

Sotos, M. A.[a] y Bruno, A.[b]

[a]Universidad de Castilla-La Mancha, [b] Universidad de La Laguna

Las fracciones pueden representarse de manera manipulativa o gráfica con diferentes modelos, continuos y discreto. Tunç-Pekkan (2015) analiza el éxito para representar e interpretar fracciones con modelos continuos (circular, rectangular y recta numérica) de alumnado de 4º y 5º de Primaria en EEUU. Los resultados indicaron una fuerte influencia del modelo y del tipo de fracción (propia o impropia), siendo la recta numérica la que resultó más compleja para el alumnado. También el futuro profesorado de primaria presenta dificultades en el concepto, orden y operaciones con fracciones y por ello, conocer y saber utilizar diferentes representaciones de las fracciones constituye una parte fundamental de su conocimiento matemático y didáctico (Whitacre y Nickerson, 2016). Este trabajo tiene como objetivo evaluar su comprensión del diagrama circular para representar e interpretar fracciones propias e impropias.

Se presentan resultados de una prueba escrita realizada con ítems que provienen del estudio de Tunç-Pekkan (2015), contestada por 138 estudiantes de la Universidad de La Laguna y 123 de la Universidad de Castilla La Mancha que cursaban tercer curso y segundo curso, respectivamente, del Grado en Maestro en Educación Primaria. En ambas universidades, la prueba se realizó al finalizar la asignatura dedicada a la didáctica de los números. Se analizan las respuestas a seis ítems en los que se les requirió, tanto interpretar como construir representaciones de fracciones con diagramas circulares, con las siguientes características: it1) expresar con símbolo una fracción propia dada gráficamente; it2) representar una fracción propia dada simbólicamente; it3) reconstruir la unidad a partir de la representación de una fracción unitaria; it4) reconstruir la unidad a partir de una representación de una fracción propia no unitaria; it5) expresar con símbolo una fracción impropia, dada gráficamente; it6) reconstruir la unidad, dada una representación de una fracción impropia.

Los porcentajes de éxito en cada uno de los ítems fueron los siguientes: it1) 98.5%; it2) 89.7%; it3); 68.6%; it4) 81.6%; it5) 57.9%; it6) 37.9%. Los futuros docentes mostraron un alto grado de eficacia en la representación e identificación de fracciones propias (unitarias o no) y presentaron deficiencias con las representaciones de fracciones impropias, en especial, en la reconstrucción de la unidad. Las principales dificultades se producen en la identificación de las partes y el todo, en los casos en los que la unidad no es el círculo completo. Se presentan reflexiones y conclusiones que podrían incidir en la formación didáctica del futuro profesorado de primaria.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto ProID2021010018, del Gobierno de Canarias, cofinanciado por el Programa Operativo FEDER Canarias 2014-2020.

Referencias

Tunc-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics, 89*(3), 419-441.

Whitacre, I. y Nickerson, S. D. (2016). A investigating the improvement of prospective elementary teachers' number sense in reasoning about fraction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*, 57-77.

Sotos, M. A. y Bruno, A. (2022). Representación de fracciones con diagramas circulares por futuro profesorado de primaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 632). SEIEM.

ACTIVIDADES PARA APRENDER SOBRE DENSIDAD NUMÉRICA: UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Tasks for learning number density: a hypothetical trajectory with high school students

Suárez Rodríguez, M. y Sacristán Rock, A. I.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav), México

Se muestran datos de una investigación que ilustran cómo estudiantes de bachillerato pueden aprender sobre la propiedad de densidad de los números reales a través de diversas actividades. La propiedad de densidad se puede resumir como "dados dos números cualesquiera, existe un número entre ellos" lo que implica que en un conjunto denso ningún número, elemento de dicho conjunto, tiene un sucesor (i.e., no hay números consecutivos). Investigaciones (p. ej., Tirosh et al., 1998; Vamvakoussi y Vosniadou, 2010) señalan que algunos estudiantes llegan al nivel de educación superior (universidad) con concepciones deficientes sobre la propiedad de densidad, tales como que: (i) en cualquier conjunto de números, diferente al de los naturales o enteros, existe un sucesor para cualquiera de sus elementos; o (ii) hay una cantidad finita de números en un intervalo de números racionales. Vamvakoussi y Vosniadou (2010) sugieren realizar actividades usando diferentes contextos para facilitar la comprensión de esta propiedad. Por ello, en una investigación basada en el diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008), diseñamos una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) con actividades donde los estudiantes tuvieran la oportunidad de usar diversas representaciones semióticas en varios registros como el gráfico, el algebraico y el geométrico. Las preguntas de investigación fueron: 1) ¿cómo integrar diferentes representaciones semióticas en el diseño y actividades de una THA para promover el aprendizaje de la propiedad de densidad de los números reales?, y 2) ¿cómo estudiantes de bachillerato comprenden la propiedad de densidad de los números reales durante la secuencia propuesta? Las actividades que propusimos buscan promover diferentes formas (en diferentes registros y contextos) de hallar números en un intervalo. Específicamente diseñamos algunas en torno a temas como construcciones de triángulos semejantes en el plano cartesiano, progresiones aritméticas y geométricas, o la propiedad de continuidad de los números reales. Nuestros resultados, con un grupo de cuatro estudiantes de bachillerato, revelaron que éstos emplearon tanto lenguaje coloquial, como escrituras fraccionaria y decimal, para expresar sus ideas durante las actividades de la THA. En algunas situaciones los estudiantes parecieron comprender la existencia de infinitos números en un intervalo real. Sin embargo, en otras, no pudieron superar la creencia de que cualquier número tiene un sucesor (o tal vez entienden por "sucesor" a cualquier número mayor). Por ello, se sugiere la realización de actividades enfocadas a superar esta dificultad en una próxima investigación.

Referencias

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.). *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, (pp. 68-95). Lawrence Erlbaum Associates.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O. y Wilson, J. W. (1998). *Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers*. United States-Israel Binational Science Foundation.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181-209. https://doi.org/10.1080/07370001003676603

Suárez Rodríguez, M. y Sacristán Rock, A. I. (2022). Actividades para aprender sobre densidad numérica: una trayectoria hipotética con estudiantes de bachillerato. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 633). SEIEM.

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA APRENDER Y COMPRENDER SOBRE DENSIDAD NUMÉRICA: UN ESTUDIO CON PROFESORES EN FORMACIÓN

A didactic sequence for learning and understanding numeric density: a study with pre-service teachers

Suárez-Rodríguez, M. y Figueras, O.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav), México

Mostraremos cómo estudiantes para ser profesores de matemáticas de educación básica secundaria, de la Ciudad de México, aprendieron diversas formas de hallar números racionales en un intervalo con extremos racionales para comprender la propiedad de densidad en este conjunto numérico (dados dos números racionales existe un número racional entre ellos). La comprensión de esta propiedad conlleva un proceso de cambio conceptual, una resignificación de conceptos de "lo discreto" y de "lo denso". Vamvakoussi y Vosniadou (2010) recalcan que los términos "discreto" y "denso" se usan con respecto a la relación de orden habitual, por ende, los números naturales son discretos (lo que implica que un número natural tiene un sucesor) y los números racionales son densos (los números racionales no son consecutivos). Estas autoras aclaran esta distinción porque a veces el término discreto se relaciona con la numerabilidad del conjunto de los números racionales, en la que se establece una correspondencia biunívoca entre naturales y racionales. Atendiendo a la necesidad de superar algunas dificultades respecto al aprendizaje y la comprensión del concepto densidad numérica que tienen profesores en formación (Merenlouto y Lehtinen, 2004), se diseñó y se implementó una secuencia didáctica que ayudara a mitigar estos escollos. Con base en esta problemática se plantearon preguntas de investigación como: 1) ¿cuáles son las concepciones que apropia un profesor en formación en matemáticas con respecto a la propiedad de densidad de los números racionales?, y 2) ¿el modelo de enseñanza, propuesto a través de una secuencia didáctica, promueve una resignificación conceptual por parte de los profesores en formación de las concepciones relacionadas con la propiedad de densidad?, ¿por qué? Al inicio de la secuencia didáctica, diez profesores en formación evidenciaron un pensamiento relacionado con la propiedad de lo discreto de los números naturales cuando mencionaron que existía una cantidad finita (o nula) de números racionales en un intervalo con extremos racionales. Posteriormente, los diez profesores en formación usaron estrategias para hallar números en un intervalo y una de ellas fue la expansión de cifras decimales de un número, de esta manera, hallaban cada vez números distintos. No obstante, varios participantes continuaron con la concepción de la existencia de un sucesor en el conjunto de los números racionales. Finalmente, creemos que la secuencia didáctica constituye un modelo de enseñanza que promueve un cambio conceptual, una resignificación de los conceptos discreto y denso, pero de manera paulatina, que puede ir acompañada de otras tareas. Consideramos que estas tareas pueden estar relacionadas con localizaciones de números racionales en la recta numérica, comparación de números racionales, series numéricas, entre otras.

Referencias

Merenluoto, K. y Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: Outlines for new teaching strategies. *Learning and Instruction*, *14*, 519-534. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.016

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181-209. https://doi.org/10.1080/07370001003676603

Suárez-Rodríguez, M. y Figueras, O. (2022). Una secuencia didáctica para aprender y comprender sobre densidad numérica: Un estudio con profesores en formación. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 634). SEIEM.

APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL TEMA PATRONES: UN ANÁLISIS DE CONTENIDO

Approximation to the specialized knowledge of the topic patterns: an analysis of content

Tarisfeño-Vásquez S. y Reyes-Bravo M.

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

La algebrización del currículo desde la incorporación del Álgebra Temprana (AT) ha entregado vasta evidencia de las capacidades de los estudiantes de primaria, lo que aporta información relevante para la toma de decisiones, en la formación de profesores de este nivel. Lo anterior nos lleva al cuestionamiento sobre qué características debe tener el conocimiento especializado del profesor de primaria. Este estudio centra su interés en el conocimiento sobre Patrones, elemento basal del AT.

Se emplea el modelo MTSK ya que supone un referente para la visualización sistemática de los conocimientos del profesor que enseña matemática (Carrillo et al. 2018), con el propósito de realizar una aproximación teórica del conocimiento especializado de un profesor de primaria, específicamente en el tema Patrones, a través de la identificación de descriptores para las categorías de los subdominios KoT y KMT.

Para ello, utilizamos como metodología el análisis de contenido (Arbeláez y Onrubia, 2014) revisando literatura referida al estudio de Patrones –ya sea implementaciones en el aula o estudios relativos al conocimiento de profesores de primaria– en que se observan elementos asociados a la generalización. En la primera fase se clasifican los documentos recopilados; en la segunda, estos son analizados buscando elementos de las categorías mencionadas que permitan identificar descriptores para ellas; en la fase tres, se realiza una interpretación y discusión global de los hallazgos. Se pretendió con esto identificar descriptores comunes atendiendo al conocimiento de los temas y el conocimiento de la enseñanza.

A continuación, se muestran algunos resultados obtenidos. En el subdominio KoT, para la categoría *definiciones y propiedades*, emergieron los descriptores: definición de patrón; definición de secuencia; y definición de sucesión. En el subdominio KMT, para la categoría *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*, emergieron los descriptores: ejemplos de patrones en lo cotidiano; estrategias de cuestionamiento; estrategias para el uso y tránsito entre representaciones; y tareas de identificación, extensión, combinación y cálculo de términos lejanos/cercanos. Este estudio nos permite una aproximación teórica al conocimiento especializado que debe poseer un profesor que enseña o enseñará patrones, con el fin de caracterizar los elementos esenciales de dicho conocimiento, y de esta manera explicitar el tema Patrones en AT para la formación de profesores.

Referencias

Arbeláez, M. y Onrubia, J. (2014). Análisis bibliométrico y de contenido. Dos metodologías complementarias para el análisis de la revista colombiana Educación y Cultura. *Revista de Investigaciones UCM, 14*(23), 14-31.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Tarisfeño-Vásquez S. y Reyes-Bravo M. (2022). Aproximación al conocimiento especializado del tema patrones: un análisis de contenido. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 635). SEIEM.

APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS PROFESORES SOBRE GENERALIZACIÓN DE PATRONES

Approach to the specialized knowledge of future teachers on generalization of patterns

Tarisfeño-Vásquez, S. y Reyes-Bravo, M.

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

La incorporación del Early Algebra (Álgebra Temprana) al currículo escolar chileno desde el año 2012, no solo generó cambios en la enseñanza primaria y secundaria en Chile, también las universidades formadoras de profesores debieron modificar sus programas de formación e incorporar este tópico a sus planes de estudio. Un tema central de esta propuesta es el estudio de Patrones; en ese sentido, este estudio pretende caracterizar el conocimiento especializado de futuros profesores de primaria (FPP), desde el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018), manifestado en la resolución de una tarea de generalización de patrones.

Para alcanzar el objetivo, analizamos los subdominios conocimiento de los temas, de la estructura y de la enseñanza de las matemáticas del modelo, junto con las relaciones que se observen entre ellos. En cuanto al análisis de la generalización realizada por cada profesor tomamos como referencia la definición y clasificación dada por Radford (2006), quien separa la generalización de Patrones en Aritmética y Algebraica. En el caso de la primera, solo se utilizan términos numéricos, de los que no se deduce una conjetura para otro término de la secuencia. Respecto a la segunda, el pensamiento algebraico se involucra en tres niveles de generalidad: fáctica, contextual y simbólica.

Este estudio se enmarca en el enfoque cualitativo de un estudio de caso de tipo instrumental, para el que se diseña e implementa una tarea sobre generalización de Patrones a 10 FPP de noveno semestre, quienes ya cursaron todas las asignaturas de la disciplina, incluida la referida al eje Patrones y Álgebra. La tarea está compuesta por dos ítems: el primero con preguntas dirigidas a obtener información de los subdominios conocimiento de los temas y de la estructura; y el segundo, de los subdominios conocimiento de los temas y de la enseñanza.

Respecto a los resultados, las respuestas de los FPP fueron contrastadas con los tipos de generalización, identificando elementos que permitieron establecer descriptores para estos los subdominios declarados. Además, se obtuvieron evidencias para distintas categorías del conocimiento de la enseñanza, predominando en éste las estrategias de enseñanza. El uso de distintas representaciones, integrado con los procesos de naturaleza aritmética y las conexiones de simplificación permite establecer relaciones entre los subdominios mencionados. Este estudio podría servir de referente para el análisis y diseño de tareas en la formación de profesores, específicamente en el tema Patrones. Se mostrarán más detalles del estudio en la exposición.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). *The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK)* model. Research in Mathematics Education, 20(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th PME-NA* (pp. 2-21). http://www.luisradford.ca/pub/60_pmena06.pdf

Tarisfeño-Vásquez, S. y Reyes-Bravo, M. (2022). Aproximación al conocimiento especializado de futuros profesores sobre generalización de patrones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 636). SEIEM.

ANALÍTICAS DE APRENDIZAJE PARA LA EVALUACIÓN FORMATIVA DURANTE LA ENSEÑANZA DE FRACCIONES

Learning analytics for formative assessment during the teaching of fractions

Tirado-Olivares, S.[a], del Olmo-Muñoz, J.[a], López-Fernández, C.[a], Rodríguez-Martínez, J. A.[a], Arnau, D.[b] y González-Calero, J. A.[a]

[a]Universidad Castilla-La Mancha, [b]Universtitat de València

En los últimos años, ha cobrado gran interés el diseño de nuevos planteamientos evaluativos alternativos a las pruebas sumativas tradicionales (p. ej. exámenes). En esta línea, destaca la implementación de sistemas de evaluación continuos, pues ofrece retroalimentación de manera continua e inmediata a los estudiantes, y la recogida de información posibilita, si procede, tomar medidas adaptativas en la secuencia instruccional sin tener que esperar a los resultados de tales pruebas sumativas (Tirado-Olivares, et al., 2021). Esto es relevante en el área de matemáticas, pues la identificación temprana de concepciones erróneas es fundamental en la provisión de secuencias de enseñanza efectivas a la hora de subsanar estas dificultades. Si bien la implementación de sistemas de evaluación formativos de forma manual es ardua para el profesorado, las nuevas tecnologías han habilitado nuevas formas de recoger información acerca de las actuaciones de los estudiantes de manera automatizada. En este contexto, se está produciendo un importante auge de las analíticas de aprendizaje, entendiendo éstas como como la medición, recogida, análisis y reporte de datos sobre los estudiantes y su contexto (Long et al., 2011). En el presente estudio, la implementación de las analíticas de aprendizaje se realizó a través de dispositivos *clickers*, un sistema de respuesta del estudiante. En concreto, 45 estudiantes de 5º de Primaria (21 niños y 24 niñas) completaron una secuencia de enseñanza de cuatro sesiones focalizada en los diferentes constructos asociados al concepto de fracción (Behr et al., 1983). Tras cada sesión, se planteaban actividades matemáticas que los participantes debían responder mediante *clickers*, recibiendo una retroalimentación de los aciertos y errores cometidos en problemas similares a los aprendidos durante la sesión. Al finalizar las cuatro sesiones, los estudiantes completaron una prueba final en lápiz y papel. El análisis de los datos recopilados mostró que, con independencia del género de los estudiantes, las puntuaciones obtenidas con estos dispositivos durante la secuencia de enseñanza pueden ser un predictor fiable de las calificaciones en la prueba final. Los resultados obtenidos apuntarían al potencial de las analíticas de aprendizaje para recoger sistemáticamente información del aprendizaje de los estudiantes durante el proceso de enseñanza, por lo que podría articularse como un elemento de utilidad en sistemas de evaluación formativos.

Agradecimientos

Investigación realizada al amparo de los proyectos SBPLY/19/180501/000278 y AICO/2021/019, y las ayudas FPU20-02375 y FPU19/03857.

Referencias

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). Academic Press.

Long, P., Siemens, G., Conole, G. y Gašević, D. (2011). Proceedings of the 1st International Conference on Learning Analytics and Knowledge. https://dl.acm.org/doi/proceedings/10.1145/2090116

Tirado-Olivares, S., González-Calero, J. A., Cózar-Gutiérrez, R. y Toledano, R. M. (2021). Gamificando la evaluación: una alternativa a la evaluación tradicional en educación primaria. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 19*(4).

Tirado-Olivares, S., del Olmo-Muñoz, J., López-Fernández, C., Rodríguez-Martínez, J. A., Arnau, D. y González-Calero, J. A. (2022). Analíticas de aprendizaje para la evaluación formativa durante la enseñanza de fracciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 637). SEIEM.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO EN EDADES TEMPRANAS A TRAVÉS DEL APRENDIZAJE DE LA MÚSICA MEDIANTE UN *TEACHING EXPERIMENT*

Development of mathematical logical thinking in early childhood through learning music with a teaching experiment

Torrejón Marín, M. F. y Ventura-Campos, N.

Departamento de Educación y Didácticas Específicas, Universitat Jaume I de Castellón

La investigación tiene como objetivo desarrollar el pensamiento lógico-matemático en edades tempranas mediante la elaboración de un modelo de enseñanza a través de situaciones propuestas por el investigador-docente. Se engloba en un *teaching experiment* que proporciona un aprendizaje significativo fomentando una enseñanza matemática y desarrollo del pensamiento computacional de forma transversal a través de actividades musicales y con robótica educativa, que sirve como lenguaje de expresión del alumnado para resolver los problemas propuestos. Las actividades musicales se analizan desde el punto de vista del desarrollo del pensamiento lógico-matemático y del pensamiento computacional permitiendo iniciar al alumnado en las estructuras básicas de la programación secuencial y el uso de heurísticos (Diago et. al, 2018). Además, en la secuencia de enseñanza del *teaching experiment*, el investigador es el docente encargado de llevar a cabo el estudio, fomentando la ruptura de la diferenciación entre ambos, para experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento del alumnado (Kelly y Lesh, 2000).

Los participantes son 14 niños y niñas de edades entre los seis y siete años que han realizado actividades musicales que desarrollan los conceptos lógico-matemáticos como: aplicaciones biyectivas (reconocimiento y asociación de instrumentos o figuras musicales); formación de conjuntos (familias de instrumentos); relaciones binarias de equivalencia (clasificar instrumentos o ritmos); conteo (pulsos). Las actividades son revisadas periódicamente y el conocimiento se va construyendo a partir de la experimentación. La robótica educativa, mediante el uso del Beebot y los tableros creados para trabajar los contenidos musicales, sirve de nexo entre el desarrollo del pensamiento matemático y computacional y la resolución de problemas musicales.

Los resultados utilizando el *teaching experiment* muestran que el alumnado consolida las características musicales aprendidas e interioriza las clasificaciones, los conjuntos, las correspondencias y el conteo. Además, la mayoría del alumnado resuelve los problemas propuestos en un intento, teniendo más dificultad cuando los retos contenían instrumentos poco conocidos o con más de dos giros. Finalmente, en el test sobre el aprendizaje de los ritmos obtuvieron una nota media de 8, destacando cuatros alumnos/as con un 10. Concluyendo, el diseño de un *teaching experiment* ayuda a la construcción de un modelo educativo que explica cómo se plantean las actividades y se desarrolla el conocimiento lógico-matemático a través de la enseñanza de la música y la robótica en edades tempranas. Además, su carácter cíclico implica poner en práctica lo planificado y favorece la toma de decisiones sobre los cambios necesarios mediante análisis continuos y retrospectivos, favoreciendo un aprendizaje significativo.

Referencias

Kelly. A. E. y Lesh, R. A. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. Lawrence Erlbaum Associates.

Diago, P. D., Arnau, D., Molina, J. L. y González-Calero, J. A. (2018). La resolución de problemas matemáticos en primeras edades escolares con Bee-bot. *Matemáticas, educación y sociedad*, *1*(2), 36-50.

Torrejón Marín, M. F y Ventura-Campos, N. (2022). Desarrollo del pensamiento lógico matemático en edades tempranas a través del aprendizaje de la música mediante un teaching experiment. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 638). SEIEM.

DESARROLLO DEL CONCEPTO DE NÚMERO: ADAPTACIONES A ALUMNADO CON AUTISMO

The development of the concept of number: Adaptations for autistic students

Tregón, N.[a], Goñi-Cervera, J.[b], Bruno, A.[c] y Polo-Blanco, I.[b]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Universidad de Cantabria, [c]Universidad de La Laguna

Las investigaciones sobre aprendizaje en alumnado con trastorno del espectro autista (TEA) han crecido en los últimos años, aunque escasean las que se centran en las primeras edades escolares. El alumnado con TEA muestra con frecuencia mayores dificultades que sus compañeros de desarrollo típico en la adquisición de habilidades de conteo, recitado de la serie numérica y reconocimiento de la cardinalidad de una colección (Ingelin et al., 2021). Evaluamos la efectividad de una instrucción basada en la secuencia Concreto-Representacional-Abstracto (CRA) para la adquisición de habilidades asociadas al desarrollo del concepto de número, en tres estudiantes de entre 4 y 5 años (dos niños y una niña), diagnosticados con TEA y escolarizados en un centro ordinario de Aragón (España). La secuencia CRA ha sido implementada con éxito en estudios previos con alumnado con TEA para la enseñanza de otros contenidos matemáticos (Polo-Blanco et al., 2019). La secuencia CRA diseña la instrucción comenzando con el uso de material manipulativo, a continuación, con las representaciones gráficas (imágenes, esquemas o dibujos…) para finalmente, introducir los símbolos. Previo a la instrucción realizamos una evaluación de las dificultades de comprensión en distintas habilidades numéricas. Se llevaron a cabo entre 6 y 10 sesiones de unos 15 minutos de instrucción con cada niño. Cada sesión se estructuró en tres fases: modelización (la instructora resolvía la tarea, mostrando al estudiante cómo hacerlo), guía (la instructora guiaba al estudiante en la resolución de la tarea, proporcionándole ayuda y retroalimentación) y práctica independiente (el estudiante resolvía la tarea sin ayuda ni retroalimentación por parte de la instructora). La secuencia CRA se implementó adaptándola a las dificultades y fortalezas características del TEA que pueden influir en el aprendizaje, como: (1) mostrar temas de interés de cada niño, (2) favorecer la concentración (instrucciones cortas y claras, recompensas, cambio frecuente de actividades y materiales, eliminación de distractores como variedad de colores), (3) facilitar la comprensión y expresión verbal con vocabulario conocido, (4) fomentar su buen procesamiento visual (uso de pictogramas para indicar las habilidades numéricas a desarrollar: contar, dar el cardinal, recitar la serie numérica) y (5) ayudarles en la planificación (pautar cada tarea).

La secuencia y adaptaciones favorecieron el aprendizaje de las habilidades numéricas objeto del estudio y cada estudiante mostró su propio avance respecto a su conocimiento numérico inicial. Discutimos la importancia de una intervención temprana en alumnado TEA para la adquisición de fundamentos numéricos que les permita abordar futuros aprendizajes.

Agradecimientos

Realizado bajo el proyecto PID2019-105677RB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por las Ayudas Concepción Arenal del Gobierno de Cantabria.

Referencias

Ingelin, B. L., Intepe-Tingir, S. y Hammons, N. C. (2021). Increasing the number sense understanding of prechool student with ASD. *Topics in Early Childhood Special Education*, 1-13.

Polo-Blanco, I., González, M. J. y Bruno, A. (2019). An exploratory study on strategies and errors of a student with autism spectrum disorder when solving partitive division problems. *Brazilian Journal of Special Education, 25*(2), 247-264.

Tregón, N., Goñi-Cervera, J. Bruno, A. y Polo-Blanco, I. (2022). Desarrollo del concepto de número: adaptaciones a alumnado con autismo. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 639). SEIEM.

FORMACIÓN EN NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES PARA FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA: UNA EXPERIENCIA EN DIDÁCTICA DE LA ARITMÉTICA

Special-needs education training for pre-service primary school teachers: An experience in teaching arithmetic

Van Vaerenbergh, S. y Fernández-Cobos, R.

Universidad de Cantabria

En la mayoría de los países europeos, la formación inicial que se ofrece al profesorado de Primaria acerca de las necesidades educativas especiales (NEE) no se particulariza en distintas áreas de conocimiento específicas, como las matemáticas, dado el carácter generalista del grado en Educación Primaria. En España, los planes de estudio del grado recogen contenidos específicos de didáctica de las matemáticas en contextos de NEE en el seno de asignaturas que ya cubren un amplio rango de temas relacionados con los procesos de enseñanza-aprendizaje en alguna rama de las matemáticas, como aritmética o geometría. Teniendo en cuenta estas limitaciones, una manera de compensar carencias del currículo relacionadas con NEE en matemáticas podría consistir en impartir una formación exprés, en la que se problematiza la enseñanza-aprendizaje de un contenido matemático concreto con estudiantes diagnosticados de un trastorno o síndrome particular. En este trabajo, presentamos una experiencia en el aula de Didáctica de la Aritmética en la que se lleva a cabo una formación exprés de 6 horas, repartidas a lo largo de una semana, para mostrar a futuros profesores de Primaria cómo afrontar la resolución de problemas aritméticos verbales con alumnado con trastorno del espectro autista (TEA). Dicha formación se estructura de la siguiente manera. En primer lugar, los docentes de la asignatura presentan una breve introducción sobre NEE en el currículo de matemáticas y dan a conocer el instrumento TEMA-3 (Ginsburg y Baroody, 2007) para detectar posibles dificultades de aprendizaje relacionadas con diferentes aspectos de la competencia matemática. A continuación, se muestran metodologías específicas cuya eficacia ha sido demostrada para mejorar la capacidad de resolución de problemas aritméticos verbales en alumnado TEA; en particular, la instrucción basada en esquemas. Finalmente, se ejemplifica una secuencia concreta de enseñanza de problemas de cambio aditivo para este alumnado.

Tras la intervención docente, evaluamos la formación exprés a través de un cuestionario orientado a determinar si los futuros profesores han desarrollado conocimientos relacionados con los componentes KMT y KFLM del modelo MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018). El póster presenta una descripción detallada de la experiencia docente junto con los resultados de la evaluación relativos a los conocimientos desarrollados por los profesores en formación.

Agradecimientos

Trabajo realizado bajo el proyecto PID2019-105677RB-I00 financiado por MCIN/ AEI /10.13039/501100011033.

Referencias

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Ginsburg, H. y Baroody, A. (2007). *Tema-3. Test de Competencia Matemática Básica manual. Adaptación española*. TEA Ediciones.

Van Vaerenbergh, S. y Fernández-Cobos, R. (2022). Formación en necesidades educativas especiales para futuros maestros de primaria: Una experiencia en didáctica de la aritmética. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 640). SEIEM.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN NIÑOS CON TEA A TRAVÉS DEL APRENDIZAJE-SERVICIO

Developing computational thinking in children with ASD through Service-Learning

Ventura-Campos, N.

Universitat Jaume I

La inclusión en Educación debe garantizar una educación de calidad y en igualdad de condiciones para todos/as. Con el fin de garantizar esta inclusión se debe trabajar curricularmente teniendo en cuenta el alumnado con trastornos del neurodesarrollo. Este estudio, se centra en el trastorno del espectro autista (TEA) y cómo enseñar a este tipo de alumnado. Las universidades, por tanto, deben desarrollar competencias en esta materia y una metodología que puede ayudar a futuros/as maestros/as a obtenerla puede ser el aprendizaje-servicio (APS). Una metodología que ha venido para quedarse en las aulas es la robótica educativa. Con ella se adquieren competencias en resolución de problemas y pensamiento computacional. Es más, el recién publicado Real Decreto 95/2022 de Educación infantil, en el Área 2, Descubrimiento y Exploración del Entorno, establece, por primera vez, la adquisición de competencias específicas en pensamiento computacional. Esto hace, si cabe, todavía más importante dotar al futuro/a maestro/a en este contenido y cómo instruirlo en niños/as con trastornos del neurodesarrollo.

El programa APS lo desarrollaron dos estudiantes del Grado de Maestro/a en Educación Infantil y cuatro niños de entre 5 y 7 años diagnosticados de TEA grado 1 con diferentes temáticas de interés. La metodología se basó en el aprendizaje basado en problemas. La intervención se llevó a cabo usando el robot educativo Beebot, considerado para este tipo de niños/as como un buen recurso para comprender, hacer y aprender la realidad (Fernández y Martínez-Figueira, 2020), así como la creación de diversos materiales: alfombra con distintos trayectos y laberintos, disfraz del Beebot según temática, tarjetas pictograma con indicaciones no-verbales y diferentes niveles de dificultad. Las sesiones fueron de 2 horas, 2 días a la semana durante tres meses. Los dos primeros, se utilizaron para conocer a los niños, sus intereses y la familiarización con el Beebot. En el último mes, se llevó a cabo el trabajo de programación en recorridos marcados y libres, trabajando de manera transversal los cuerpos geométricos y la identificación de estos en imágenes de objetos del entorno, trabajado previamente con el material didáctico *Figuras geométricas en el entorno*. Los resultados mostraron las diferentes estrategias de los niños para realizar los recorridos. En una solo secuencia, solo tres de ellos realizaron los recorridos con 1 giro y uno consiguió realizar el recorrido más complejo con 3 giros. Todos fueron capaces de reconocer los nombres de los cuerpos geométricos y estos en las imágenes de objetos del entorno. Además, se observó el aumento del tiempo de atención de 10 a 20 min con la robótica como instrumento. En cuanto a las estudiantes, el APS les proporcionó un aprendizaje de cómo afecta este trastorno al aprendizaje y las diferentes conductas según el niño, ayudándoles a ver cómo funcionan sus mentes y la mejor forma de instruirlos. Concluyendo, el programa resultó ser una experiencia de aprendizaje significativo para ambas partes y en el que las estudiantes tuvieron la oportunidad de aunar teoría y práctica.

Referencias

Fernández, C. y Martínez-Figueira, E. (2020). Una intervención con TEA utilizando robótica. En Junta de Andalucía (Eds.) *Tecnologías emergentes y estilos de aprendizaje para la enseñanza* (pp. 197-208).

Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de laEducación Infantil. *Boletín Oficial del Estado, 2 de febrero de 2022*.

Ventura-Campos, N. (2022). Desarrollo del pensamiento computacional en niños con TEA a través del Aprendizaje-Servicio. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 641). SEIEM.

REPRESENTACIONES USADAS POR ESTUDIANTES DE 6º DE EDUCACIÓN PRIMARIA CUANDO RESUELVEN PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

6th grade Primary School students' representations when solving multiplicative structure problems

Zorrilla, C.[a], Cañadas, M. C.[b], Ivars, P.[a] y Fernández, C.[a]

[a]Universidad de Alicante, [b]Universidad de Granada

Este estudio se deriva de un trabajo más amplio centrado en analizar la transición desde los números naturales a las fracciones cuando estudiantes de Educación Primaria resuelven problemas de estructura multiplicativa. Diferentes investigaciones han identificado estrategias que utilizan los estudiantes en estos problemas (Empson y Levi, 2011; Zorrilla et al., 2022). Sin embargo, en esta transición, los modos de representación y los cambios entre estos (numérico, algebraico, verbal y gráfico; véase Mainali, 2021) pueden jugar un papel importante, ya que pueden aportar información sobre las distintas formas de razonar de los estudiantes. Por tanto, este póster se centra en identificar los diferentes modos de representación que estudiantes de 6º curso de Educación Primaria (11-12 años) utilizan en sus estrategias para resolver estos problemas.

Sesenta y un estudiantes resolvieron nueve problemas de estructura multiplicativa: tres de multiplicación, tres de división-partitiva y tres de división-medida. Asimismo, en cada tipo de problema, se variaron los conjuntos numéricos obteniendo: un problema con números naturales, un problema con una fracción implicada y un problema con dos fracciones implicadas. Partiendo de las estrategias identificadas en un estudio previo (Zorrilla et al., 2022): representar cada grupo y realizar un conteo (modelización directa o adición/resta repetida), estrategias aditivas de agrupamiento y combinación (únicamente representar las cantidades necesarias hasta alcanzar "números amigables"- normalmente números naturales), y estrategias multiplicativas; se han analizado los modos de representación utilizados por los participantes de acuerdo con los cuatro modos de representación (Mainali, 2021). Los resultados muestran que los estudiantes en las estrategias de representar cada grupo utilizaron los modos de representación gráfico y numérico (con números naturales, fracciones o números decimales) o usaron ambos. En las estrategias aditivas de agrupamiento y combinación apareció el modo de representación numérico con fracciones, y en las estrategias multiplicativas los estudiantes usaron el modo de representación numérico con números naturales, decimales o fracciones, también combinado con los otros modos.

Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo del Ministerio de Universidades (FPU19/02965) y el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00.

Referencias

Empson, S. B. y Levi, L. (2011). *Extending children's mathematics: Fractions and decimals.* Heinemann.

Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *9*(1), 1-21.

Zorrilla, C., Fernández, C., Cañadas, M. C. e Ivars, P. (2022). How primary school students perform multiplicative structure problems with natural and rational numbers. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. PME.

Zorrilla, C., Cañadas, M. C., Ivars, P. y Fernández, C. (2022). Representaciones usadas por estudiantes de 6º de educación primaria cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 642). SEIEM.

Índice de autores

Palabras Clave

Keywords