



Universidade de Évora - Escola de Ciências Sociais

Mestrado em Gestão

Área de especialização | Finanças

Dissertação

**Risco e Rentabilidade no mercado de capitais em Portugal.
Abordagem do Downside Risk**

João Pedro Silva Santos

Orientador(es) | Carlos Manuel Vieira

Évora 2022



Universidade de Évora - Escola de Ciências Sociais

Mestrado em Gestão

Área de especialização | Finanças

Dissertação

**Risco e Rentabilidade no mercado de capitais em Portugal.
Abordagem do Downside Risk**

João Pedro Silva Santos

Orientador(es) | Carlos Manuel Vieira

Évora 2022



A dissertação foi objeto de apreciação e discussão pública pelo seguinte júri nomeado pelo Diretor da Escola de Ciências Sociais:

Presidente | Elisabete Gomes Santana Félix (Universidade de Évora)

Vogais | Andreia Teixeira Basílio (Universidade de Évora) (Arguente)
Carlos Manuel Vieira (Universidade de Évora) (Orientador)

Dedicatória

Gostava de dedicar este trabalho final de mestrado à minha família, que durante todo o meu percurso acadêmico e pessoal me apoiou, me incentivou a querer sempre mais e me encaminhou diariamente para poder fazer todo este trajeto com ambição, dedicação e foco. Muito obrigado por todo este apoio constante mãe, pai e madrinha.

Resumo

A relação rentabilidade/risco das carteiras de ativos financeiros é tradicionalmente representada no domínio da média/desvio-padrão. Esta investigação procura entender se a relação é retratada de forma mais adequada no plano da média/desvio-padrão ou no plano da média/semidesvio-padrão, bem como as diferenças na utilização de cada uma das abordagens. Para tal, foram estimadas e comparadas as fronteiras eficientes, com o modelo de Markowitz e com o modelo sugerido por Ballesterro (2005), e testada a hipótese de normalidade individual e conjunta das rentabilidades. As fronteiras eficientes estimadas apresentam uma relação positiva entre rentabilidade e risco, com diferenças sobretudo nas carteiras de menor risco. Os testes rejeitam a hipótese nula de distribuição normal, sugerindo assim que o modelo de Ballesterro é o mais adequado para analisar esta relação entre rentabilidade e risco. Vemos, igualmente, que restrições aos pesos dos ativos muito rigorosas levam a carteiras com mais risco e menos rentabilidade.

Palavras-chave:

Downside risk

Mercado acionista

Rentabilidade-risco

Semidesvio

Bolsa de Lisboa

Fronteira eficiente

Modelo de Markowitz

Abstract

Risk and Return in the Portuguese Stock Market: Downside Risk approach

The return/risk relation of financial asset portfolios is traditionally represented in the mean/standard deviation domain. This investigation seeks to understand if this relation is more adequately represented in the mean/standard deviation plane or in the mean/semideviation plane, as well as the differences in the utilization of each approach. For that, the efficient frontiers were estimated and compared, with the Markowitz's model and with the model suggested by Ballestero (2005), and the hypothesis of individual and joint normality was tested. The estimated efficient frontiers show a positive relation between returns and risk, with differences mainly in portfolios with lower risk. The tests reject the null hypothesis of normal distribution, thus suggesting that Ballestero's model is more suitable to analyze the relation between return and risk. We see, as well, that very strict restrictions on the assets' weights lead to portfolios with more risk and lesser returns.

Keyword:

Downside risk

Stock market

Return-risk

Semideviation

Lisbon Stock Exchange

Efficient Frontier

Markowitz's model

Agradecimentos

Gostava de agradecer à minha família por toda a ajuda e por todo o apoio. Sem vocês nada disto seria possível. Obrigado pelas longas noites em que, quando pedia ajuda, estavam sempre ao meu lado, obrigado por me fazerem ver que devo exigir sempre mais de mim e querer mais, mas acima de tudo obrigado por me terem ajudado a ser a pessoa que sou hoje e a ter chegado a este momento. Nunca será possível colocar em palavras aquilo que sinto.

Queria igualmente agradecer ao professor Carlos Vieira, que foi incansável. Um grande obrigado pela total disponibilidade que mostrou ao longo destes meses, estando sempre pronto para me ajudar, fosse em que dia fosse e a que horas fosse. Um obrigado não chega, mas espero que seja um bom começo. Obrigado por toda a paciência e por todos os conselhos.

Gostava, também, de agradecer à professora Cesaltina Pires e à professora Andreia Dionísio pela ajuda e pelos conselhos que me deram ao longo da elaboração deste trabalho.

ÍNDICE

Índice de Anexos	8
Índice de Figuras	10
Índice de Tabelas.....	12
1. Introdução.....	14
1.1 Enquadramento do Tema e Justificações da Escolha	14
1.2 Formulação do Problema e dos Objetivos	15
1.3 Metodologia	16
1.4 Estrutura do Trabalho	16
2. Revisão Bibliográfica	18
2.1 A relação rentabilidade-risco	18
2.2 Medidas de risco	21
3. Metodologia de Investigação.....	29
4. Estimação das fronteiras eficientes e testes ao pressuposto de normalidade.....	36
4.1 Cotações ajustadas para stock-splits.....	36
4.2 Cotações ajustadas para stock-splits e dividendos	46
4.3 Distribuição das rentabilidades.....	54
5. Conclusões.....	60

Bibliografía 62

Anexos I

ÍNDICE DE ANEXOS

Anexo 1 Rentabilidades médias das 25 ações - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para stock-splits	I
Anexo 2 Matriz das variâncias/covariâncias, matriz V , das 25 ações - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para <i>stock-splits</i>	II
Anexo 3 Betas das 25 ações - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para stock-splits	III
Anexo 4 Matriz B , cujo elemento genérico é $\beta_i\beta_jv(E_M < R_{Mt})$ – 19/05/2011 a 07/05/2021 - – Cotações ajustadas para stock-splits	IV
Anexo 5 Matriz das semivariâncias/cosemivariâncias, matriz V_s – 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para stock-splits	V
Anexo 6 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Markowitz, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 5% da carteira – Cotações ajustadas para stock-splits	VI
Anexo 7 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Ballestero, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 5% da carteira – Cotações ajustadas para stock-splits	VI
Anexo 8 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Markowitz, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 10% da carteira – Cotações ajustadas para stock-splits	VII
Anexo 9 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Ballestero, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 10% da carteira – Cotações ajustadas para stock-splits	VII
Anexo 10 Rentabilidades médias das 25 ações - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para stock-splits e dividendos.....	VIII
Anexo 11 Matriz das variâncias/covariâncias, matriz V , das 25 ações - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para stock-splits e dividendos	IX
Anexo 12 Betas das 25 ações - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para stock-splits e dividendos	X
Anexo 13 Matriz B , cujo elemento genérico é $\beta_i\beta_jv(E_M < R_{Mt})$ – 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para stock-splits e dividendos	XI
Anexo 14 Matriz das semivariâncias/cosemivariâncias, matriz V_s – 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para stock-splits e dividendos	XII
Anexo 15 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Markowitz, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 5% da carteira – Cotações ajustadas para stock-splits e dividendos.....	XIII
Anexo 16 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Ballestero, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 5% da carteira – Cotações ajustadas para stock-splits e dividendos.....	XIII

Anexo 17 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Markowitz, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 10% da carteira – Cotações ajustadas para stock-splits e dividendos.....XIV

Anexo 18 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Ballester, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 10% da carteira – Cotações ajustadas para stock-splits e dividendos.....XIV

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/desvio-padrão, com restrições a 5%, cotações ajustadas para stock-splits – 19/05/2011 a 07/05/2021	40
Figura 2 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/semidesvio-padrão, com restrições a 5%, cotações ajustadas para stock-splits – 19/05/2011 a 07/05/2021.....	41
Figura 3 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/desvio-padrão, com restrições a 10%, cotações ajustadas para stock-splits – 19/05/2011 a 07/05/2021.....	43
Figura 4 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/semidesvio-padrão, com restrições a 10%, cotações ajustadas para stock-splits – 19/05/2011 a 07/05/2021.....	43
Figura 5 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/desvio-padrão, com restrições a 5% e a 10%, cotações ajustadas para stock-splits – 19/05/2011 a 07/05/2021.....	45
Figura 6 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/semidesvio-padrão, com restrições a 5% e a 10%, cotações ajustadas para stock-splits – 19/05/2011 a 07/05/2021.....	45
Figura 7 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/desvio-padrão, com restrições a 5%, cotações ajustadas para stock-splits e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021.....	49
Figura 8 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/semidesvio-padrão, com restrições a 5%, cotações ajustadas para stock-splits e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021	49
Figura 9 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/desvio-padrão, com restrições a 10%, cotações ajustadas para stock-splits e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021.....	51
Figura 10 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/semidesvio-padrão, com restrições a 10%, cotações ajustadas para stock-splits e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021	51

Figura 11 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/desvio-padrão, com restrições a 5% e a 10%, cotações ajustadas para stock-splits e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021	53
Figura 12 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/semidesvio-padrão, com restrições a 5% e a 10%, cotações ajustadas para stock-splits e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021	53

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 Ilustração das rentabilidades diárias das 25 ações, cotações ajustadas para stock-splits - 19/05/2011 a 07/05/2021	36
Tabela 2 Rentabilidades médias das 25 ações, cotações ajustadas para stock-splits - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Versão completa no Anexo 1	37
Tabela 3 Matriz das variâncias/covariâncias, matriz V, das 25 ações, cotações ajustadas para stock-splits - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Versão completa no Anexo 2	37
Tabela 4 Ilustração do cálculo da semivariância positiva do PSI-20 - 19/05/2011 a 07/05/2021	38
Tabela 5 Betas das 25 ações, cotações ajustadas para stock-splits - 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 3	39
Tabela 6 Matriz B, cujo elemento genérico é $\beta_i\beta_j\nu(E_M < R_{Mt})$, cotações ajustadas para stock-splits – 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 4	39
Tabela 7: Matriz das semivariâncias/cosemivariâncias, matriz V_s , cotações ajustadas para stock-splits – 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 5	39
Tabela 8 Ilustração das rentabilidades diárias das 25 ações, cotações ajustadas para stock-splits e dividendos - 19/05/2011 a 07/05/2021	46
Tabela 9 Rentabilidades médias das 25 ações, cotações ajustadas para stock-splits e dividendos - 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 10	47
Tabela 10 Matriz das variâncias/covariâncias, matriz V, das 25 ações, cotações ajustadas para stock-splits e dividendos - 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 11	47
Tabela 11 Betas das 25 ações, cotações ajustadas para stock-splits e dividendos - 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 12	47
Tabela 12 Matriz B, cujo elemento genérico é $\beta_i\beta_j\nu(E_M < R_{Mt})$, cotações ajustadas para stock-splits e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 13	48
Tabela 13 Matriz das semivariâncias/cosemivariâncias, matriz V_s , cotações ajustadas para stock-splits e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 14	48
Tabela 14 Estatísticas descritivas das rentabilidades das 25 ações em estudo e respetivos testes de normalidade individual, cotações ajustadas para stock-splits – 19/05/2011 a 07/05/2021 – 2550 observações.....	56
Tabela 15 Estatísticas descritivas das rentabilidades das 25 ações em estudo e respetivos testes de normalidade individual, cotações ajustadas para stock-splits e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021 – 2550 observações.....	57

Tabela 16 Testes de normalidade conjunta das 25 ações, cotações ajustadas para stock-splits – 19/05/2011 a 07/05/2021.....	59
Tabela 17 Testes de normalidade conjunta das 25 ações, cotações ajustadas para stock-splits e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021	59

1. INTRODUÇÃO

1.1 ENQUADRAMENTO DO TEMA E JUSTIFICAÇÕES DA ESCOLHA

O tema escolhido e sobre o qual se irá debruçar esta dissertação é o da identificação da variável que melhor representa o risco de um investimento no mercado de capitais, neste caso no mercado de capitais português. O presente trabalho visará investigar se o risco de um investimento em ações, cotadas na Bolsa de Lisboa, é mais bem representado pela dimensão rentabilidade/desvio-padrão ou pela dimensão rentabilidade/semidesvio-padrão. Pretendem-se averiguar, igualmente, as diferentes escolhas que podem ser feitas mediante a variável *proxy* do risco que utilizamos, mais concretamente na forma como escolhemos a nossa carteira de investimentos e qual a rentabilidade relativa que podemos esperar dessa mesma carteira.

A escolha deste tema surge do facto de, tradicionalmente, na teoria financeira, serem explorados modelos de rentabilidade/risco como o modelo de Markowitz, o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), o modelo APT, entre outros, onde se tem por base uma representação do risco que assenta na variância, ou no desvio-padrão, ou na medida beta, que não diferenciam variações positivas da cotação de um ativo de variações negativas, assumindo, intrinsecamente, que os investidores veem de igual modo, em termos de risco, tanto a subida da cotação de um ativo como a sua descida. Para alguns autores, como Estrada (2000), esta perspetiva não corresponde exatamente às expectativas e comportamentos de um investidor com uma posição longa nestes ativos, já que, quem deseja investir no mercado de capitais, ao comprar uma ação, por exemplo, deseja que aquele ativo que comprou se aprecie, para que, no futuro, caso deseje vender a posição que detém, consiga receber uma quantia superior àquela que pagou inicialmente, quando assumiu o risco de deter aquele ativo, em vez de manter na sua posse o dinheiro que gastou para passar a deter parte do capital social de uma empresa.

No seguimento deste raciocínio feito em volta da variância e do desvio-padrão, bem como do beta, que advém de variáveis como a variância e a covariância, vários autores propuseram formas alternativas de medir o risco de uma determinada aplicação de capital, sendo que uma das alternativas apresentadas é a representação da relação rentabilidade/risco no plano da média/semidesvio-padrão. É de notar que, neste trabalho, sempre que se fala simplesmente de semidesvio-padrão estaremos a falar do semidesvio-padrão negativo em relação à média da amostra, ou seja, as flutuações abaixo da média das observações. Esta abordagem apenas considera como risco as rentabilidades que ficam abaixo da rentabilidade esperada para uma determinada ação. Esta medida de risco, do ponto de vista teórico, parece, à partida, mais

adequada quando tentamos quantificar o risco em que estamos a incorrer ao comprarmos um ativo.

É extremamente importante para um indivíduo singular que se deseja iniciar no mundo dos investimentos, para empresas que desejam alocar e rentabilizar parte dos seus lucros, para fundos de investimento e fundos de pensões, que desejam criar diversas carteiras de investimento e montar estratégias de cobertura de risco, compreender realmente quais os perigos associados à aquisição de uma ação. Nesse sentido, esta investigação poderá ajudar a identificar a melhor forma de avaliar a relação rentabilidade/risco, em particular no mercado de capitais português. Este trabalho, do ponto de vista social e empresarial, acrescentará ao conhecimento existente sobre este tema, visto que poderá ajudar na forma como são pensadas/estruturadas carteiras de investimento, poderá auxiliar os investidores e empresas a fazer uma melhor cobertura do risco a que estão expostos, bem como facilitar a compreensão de qual a rentabilidade ótima que podemos esperar, face à quantidade de risco que assumimos ao tomarmos uma posição no mercado acionista português. Além de tudo o que já foi enumerado, também acrescentará, do ponto de vista académico, dados relevantes à literatura financeira existente sobre o mercado de ações português e à literatura em volta dos cuidados que devemos ter, quando escolhemos uma variável como representativa do risco.

1.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E DOS OBJETIVOS

Como já foi mencionado anteriormente, o presente estudo pretende perceber se a relação rentabilidade/risco é mais bem representada pela abordagem tradicional da média/desvio-padrão ou se, por outro lado, quando se pensa investir em ações cotadas na Bolsa de Lisboa, a abordagem mais adequada a usar é a da média/semidesvio-padrão, bem como identificar, para um investidor que decida aplicar as suas poupanças neste mercado, quais as diferentes decisões de investimento que podem advir da utilização de uma abordagem e de outra.

Deste modo, o principal objetivo desta investigação é fazer uma comparação entre a dimensão da média/desvio-padrão e a dimensão da média/semidesvio-padrão, através da comparação das fronteiras eficientes estimadas no domínio rentabilidade/desvio-padrão e no domínio rentabilidade/semidesvio-padrão.

Em específico, serão analisadas as diferenças das fronteiras eficientes estimadas em cada um destes domínios, tendo em atenção qual é a carteira de variância mínima estimada por cada abordagem, qual é o risco e qual é a rentabilidade associada a essa mesma carteira, comparar a proximidade e a semelhança das fronteiras obtidas, usando a metodologia de Markowitz e a

metodologia do *downside risk*, bem como, concretamente, averiguar qual das duas dimensões é a melhor representação da relação rentabilidade/risco para o mercado de capitais português.

1.3 METODOLOGIA

Com o intuito de se atingirem os objetivos previamente mencionados, a investigação adiante apresentada terá por base as rentabilidades diárias de um conjunto de ações portuguesas cotadas na Bolsa de Lisboa. Estas rentabilidades serão o ponto de partida para calcular as matrizes necessárias para se estimar o modelo média/desvio-padrão e o modelo média/semidesvio-padrão. Feito isto, proceder-se-á à obtenção das fronteiras eficientes, através da minimização da variância das carteiras para cada nível de rentabilidade estimado, quando desejamos obter a fronteira eficiente no domínio da média/desvio-padrão, e da minimização da semivariância, quando desejamos obter a fronteira eficiente no domínio da média/semidesvio-padrão, utilizando-se para tal os softwares *Solver* e *Solvertable*. Com as fronteiras representadas e estimadas nos domínios da média/desvio-padrão e média/semidesvio-padrão serão feitas comparações de modo a identificar a metodologia mais adequada à realidade do mercado português e quais as diferenças entre as carteiras eficientes obtidas em ambas as dimensões. Caso não se consiga encontrar uma abordagem que claramente se sobreponha à outra, o passo seguinte será o estudo da distribuição de probabilidades das rentabilidades das ações, de maneira a determinarmos a metodologia que melhor avalia o risco neste mercado de capitais.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

A presente investigação, no segundo ponto, conta com uma breve revisão da literatura, relativa à relação esperada pela teoria financeira entre rentabilidade e risco e quais os resultados empíricos de vários estudos feitos sobre esta temática, quando o risco é representado por medidas tradicionais, como a variância, o desvio-padrão e beta, e diversas outras formas de quantificação do risco, como por exemplo as *downside risk measures* (semidesvio-padrão e *downside beta*). Com este enquadramento teremos uma melhor ideia inicial dos resultados que poderão surgir mais à frente neste trabalho, uma melhor ideia das várias interpretações que existem em volta da temática da escolha de uma variável *proxy* do risco, bem como a multitude de alternativas apresentadas e estudadas com o propósito de encontrarem uma melhor medida que permita avaliar qual o investimento mais vantajoso para cada investidor, face às suas características e à sua tolerância às incertezas do mercado.

Segue-se, no terceiro ponto, uma descrição dos dados que foram escolhidos para se desenvolver a presente pesquisa, bem como algumas justificações do porquê de se ter optado por um determinado período temporal, por um determinado número de ativos e por uma determinada periodicidade das observações. Também, ainda no terceiro ponto, será feita a descrição do tratamento dos dados e do processo até à obtenção das fronteiras eficientes.

No quarto ponto será feita a apresentação dos resultados obtidos, assim como a sua interpretação. Procurar-se-á entender de que forma estes resultados se encaixam na teoria financeira, o que lhe podem acrescentar e, acima de tudo, qual o modo preferencial, apontado por estes resultados, de se analisar o risco no mercado acionista português.

No quinto ponto encontra-se uma breve exposição das principais conclusões retiradas desta pesquisa, as possíveis limitações que a análise aqui conduzida pode ter, sugestões para possíveis investigações futuras que venham a construir conhecimento em cima da presente investigação e formas alternativas de se testar a abordagem que melhor ajuda as empresas, indivíduos singulares, fundos de investimento, bancos, a definirem a relação rentabilidade/risco e a identificarem o seu perfil de aversão e/ou tolerância aos riscos associados a um investimento financeiro em ações cotadas na Bolsa de Lisboa. As principais conclusões obtidas indicam que o modelo média/desvio-padrão, de Markowitz, e o modelo média/semidesvio-padrão, apresentado por Ballesterro (2005), não quantificam de igual forma o risco. Estes modelos sugerem carteiras eficientes muito semelhantes, ou mesmo iguais, para rentabilidades elevadas, porém o mesmo não acontece quando são considerados níveis de menor risco, sendo as carteiras eficientes estimadas por cada modelo consideravelmente diferentes. Para se entender qual o modelo mais indicado, foi testado o pressuposto da normalidade das distribuições, através da análise dos valores de assimetria e curtose, da realização dos testes de normalidade Shapiro-Wilk e Kolmogorov-Smirnov, a cada uma das ações, e da realização dos testes de normalidade multivariados Mardia mSkewness multivariate test, Mardia mKurtosis multivariate test, Henze-Zirkler e Doornik-Hansen. Chegamos à conclusão que as distribuições das rentabilidades destas ações, a nível individual e conjuntamente, não seguem uma distribuição normal, concluindo-se, por isso, que o modelo que quantifica o risco através do semidesvio-padrão é o mais indicado a utilizar quando pretendemos avaliar o risco de uma aplicação financeira no mercado acionista português. É igualmente demonstrado que a imposição de limites máximos, muito rigorosos, aos pesos dos ativos, de modo a minimizarmos a exposição que temos à flutuação das cotações de uma empresa, reduzindo assim o risco que corremos, pode ter um efeito contrário ao desejado. Quando não se permite que um ativo constitua mais do que 5% da carteira são obtidas carteiras eficientes com mais risco e menor rentabilidade, do que as carteiras eficientes estimadas pelos modelos quando o limite máximo é de 10%.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 A RELAÇÃO RENTABILIDADE-RISCO

Duas das bases da teoria financeira são a relação positiva entre a rentabilidade e o risco, bem como o comportamento avesso ao risco dos investidores, resultando a associação destas hipóteses numa noção essencial: os investidores apenas irão incorrer em mais risco esperando obter em retorno uma maior rentabilidade.

Com esta noção essencial em mente, Markowitz (1952) sugeriu que a representação da rentabilidade e do risco fosse feita na dimensão da média/variância, encontrando nesta dimensão, através da diversificação das carteiras de investimento, uma representação da relação positiva entre o risco e a rentabilidade, a chamada fronteira eficiente. Markowitz (1952) clarificou também que a diversificação da carteira não passava, necessariamente, pelo aumento do número de ativos numa carteira, mas sim (e essencialmente) pela forma como os ativos estão correlacionados e como estes se conseguem contrabalançar. Dito de outro modo, através da diversificação da carteira, quando um ativo apresenta perdas, se houver um outro ativo na carteira que esteja, por exemplo, negativamente correlacionado com este primeiro, o segundo ativo apresenta ganhos, sendo compensadas as perdas de um ativo com os ganhos do outro.

Apesar destes conceitos serem bem conhecidos e essenciais para a teoria financeira, ao longo dos anos, estas hipóteses têm sido questionadas por diversos investigadores, entre eles Bowman (1980), que identificou uma relação negativa entre a rentabilidade e o risco em empresas pertencentes às mesmas indústrias, com recurso aos dados presentes na *Value Line Database*, base de dados norte-americana de informação financeira. O seu famoso trabalho paradoxal mostrou, através da utilização de medidas de risco baseadas em indicadores contabilísticos ao nível da empresa, que, entre 1968 e 1976, quer em períodos de cinco anos, quer num período de nove anos, a relação entre risco e rentabilidade era inversa. Bowman (1980) justifica o facto de ter sido o primeiro a chegar a esta descoberta com o método que utilizou na sua investigação, o de ter analisado o risco ao nível da empresa e não através da forma tradicional, pela análise da variância das cotações, ou seja, a nível do mercado.

Após a apresentação desta relação paradoxal entre risco e rentabilidade, muitos investigadores dedicaram-se à análise da relação que existe entre as rentabilidades esperadas e o risco em que se incorre, apresentando, alguns, provas de que realmente existe uma relação positiva, outros de que há uma relação negativa entre estas duas variáveis e ainda, alguns, de

que a rentabilidade e o risco não estão correlacionados. Exemplo disso são Kim, Hwang e Burgers (1993), bem como Pettengill, Sundaram e Mathur (1995).

Tentando explicar a veracidade do paradoxo de Bowman, Kim, Hwang e Burgers (1993) argumentam que o perfil de alta rentabilidade e baixo risco pode ser explicado através da diversificação no mercado global, tendo em atenção a variância interempresas na diversificação global. Alegam que a diversificação no mercado global permite, simultaneamente, maiores rentabilidades e menor risco, uma vez que a diversificação, ao nível das empresas, permite a utilização de economias de escala. As economias de escala, como estes autores referem, permitem a obtenção de vantagens nos custos, dão maior competitividade às empresas e minimizam os efeitos adversos da variação da taxa de juro e do aumento dos salários num país, podendo as companhias, globalmente diversificadas, quase prontamente realocar a sua produção. Sujeitando este pensamento teórico a testes empíricos, Kim, Hwang e Burgers (1993), tendo por base dados de 125 empresas multinacionais americanas, entre 1982 e 1986, obtêm resultados que suportam a sua visão sobre a diversificação global e aprovam o paradoxo de Bowman. Por outro lado, Pettengill, Sundaram e Mathur (1995), utilizando as rentabilidades mensais de 20 carteiras, averiguaram este tema, tendo em atenção a diferença entre a rentabilidade do mercado e a taxa de juro sem risco. Considerando a relação positiva entre beta e as rentabilidades, quando os mercados estão em crescimento, e a relação negativa entre beta e as rentabilidades, quando os mercados estão em queda, encontram uma relação sistemática positiva entre risco e rentabilidade, em diversos subperíodos e em todo o período em análise, compreendido entre janeiro de 1926 e dezembro de 1990, contrariando assim o paradoxo de Bowman.

Estudos que mostram que ambos os lados desta discussão podem estar corretos, sobre a dinâmica, positiva ou negativa, que o risco e a rentabilidade devem ter, foram desenvolvidos por Tinic e West (1984), Fiegenbaum e Thomas (1985) e Harrison e Zhang (1999). Tinic e West (1984) orientaram a sua pesquisa para a análise da possível sazonalidade da relação risco-rentabilidade, utilizando dados mensais que vão de 1935 a 1982. Assim, estes investigadores desenvolveram um trabalho que coloca a questão sobre se a correlação risco-rentabilidade se mantém estável, ao longo de um determinado período, ou se esta se altera periodicamente, sendo, neste trabalho, a análise feita em intervalos mensais. Os autores identificaram que os meses de janeiro são os únicos meses que, no período observado, apresentam constantemente, e de forma estatisticamente significativa, uma relação positiva entre as rentabilidades esperadas e o risco, afirmando que a relação rentabilidade/risco varia, tendo em conta o período em que nos encontramos. Fiegenbaum e Thomas (1985) desenvolveram um estudo, com dados relativos ao período de 1960-1979, presentes na *Value Line Database* e na *Standard and Poor's*

Compustat Database, base de dados norte-americana, visando, igualmente, perceber se este paradoxo era uma realidade ao longo do tempo, ou se este era apenas relativo a um período específico, e se esta relação contraditória às bases da teoria financeira era visível, usando quer medidas de risco baseadas em indicadores da empresa, quer medidas de risco baseadas em indicadores de mercado. Ao conduzirem esta investigação constataram que, quando são usadas medidas de risco baseadas no mercado, o paradoxo se verificava nos anos setenta, mas que tal não é verdade para os anos sessenta. Com estes resultados concluíram que esta relação paradoxal entre risco e rentabilidade está dependente do período em questão, surgindo esta quando estamos na presença de um ambiente mais incerto, e que esta relação apenas é observável ao nível da empresa e não ao nível do mercado. Sugerem, ainda, que indústrias com um melhor desempenho empresarial apresentam, sim, uma ligação positiva entre risco e rentabilidade, enquanto indústrias com piores desempenhos são mais propícias a apresentar esta relação negativa, algo que também só é possível verificar quando usamos medidas baseadas na empresa e não no mercado. Harrison e Zhang (1999) examinam, no período entre janeiro de 1926 e dezembro de 1996, com recurso a dados mensais, a relação entre a rentabilidade esperada das ações presentes no *New York Stock Exchange* (NYSE) e a volatilidade condicional das mesmas, em diferentes períodos e em vários estados da economia. Recorreram, para tal, às metodologias da estimação de densidade semi-não-paramétrica e à simulação e integração de Monte Carlo, reportando uma relação positiva, no longo prazo, significativa (um ou dois anos de posse dos ativos) e a inexistência de uma relação, no curto prazo, entre risco e rentabilidade (um mês de detenção das ações).

Na revisão que fazem ao trabalho de Bowman (1980) e à literatura sobre a relação rentabilidade/risco, Nickel e Rodriguez (2002) referem que o paradoxo de Bowman pode ser visto de duas formas: Ou os gerentes/investidores não têm em atenção a variância dos preços dos ativos financeiros quando tomam determinadas decisões, hipótese apresentada por March e Shapira (1987), ou apenas têm em consideração as variações negativas, arriscadas, das cotações, não olhando para as variações positivas quando pensam em risco, hipótese formulada por Miller e Leiblein (1996).

Apesar da discussão sobre a relação rentabilidade/risco ter sido iniciada há várias décadas, ela permanece atual e relevante, não havendo ainda uma resposta consensual para esta questão. Numa tentativa de se chegar a uma resposta final, alguns estudos incidem sobre um grande conjunto de mercados e um longo período temporal, sendo exemplos disso as investigações conduzidas por Savva e Theodossiou (2018) e Fifield, McMillan e McMillan (2020). Savva e Theodossiou (2018) usam as rentabilidades diárias de 48 mercados bolsistas mundiais, entre 1973 e 2011, concluindo que existe, na maioria destes mercados, um preço do risco puro

positivo, estatisticamente significativo, e um preço do risco assimétrico negativo, estatisticamente significativo, que, conjuntamente, têm um impacto próximo de zero, estatisticamente não significativo. Segundo os autores, estes resultados indicam que é por a assimetria negativa não ser considerada em estudos anteriores da relação rentabilidade/risco e por existir um prémio de risco para essa mesma assimetria negativa que se obtêm, ao longo das décadas, resultados tão variados sobre esta relação.

Fifield, McMillan e McMillan (2020), por outro lado, utilizam três bases de dados constituídas, respetivamente, por observações mensais de 43 índices de mercado, entre janeiro de 1974 e dezembro de 2014, observações anuais de 17 mercados financeiros, entre 1900 e 2010, e observações diárias de diversas empresas pertencentes aos maiores índices bolsistas mundiais, entre 3 de janeiro de 2000 e 31 de dezembro de 2013, com o intuito de perceberem se existe realmente uma relação universal entre rentabilidade e risco. Com toda esta informação concluem não existir uma única relação rentabilidade/risco simples e sistemática como a literatura financeira sugere. Os resultados obtidos mostram que a relação rentabilidade/risco é positiva em *bear markets* e negativa em *bull markets*. Encontram igualmente uma relação positiva entre mercados com dados mensais e anuais, num contexto estático, porém esta relação positiva não é verificada quando analisam os mercados e as empresas individualmente. Fifield, McMillan e McMillan (2020) tentam justificar todos estes resultados sugerindo que as preferências de risco dos investidores não são intertemporais, alterando estas a sua tolerância ao risco conforme o estado do mercado e os níveis das rentabilidades.

Com estas respostas oferecidas por estes investigadores, e por tantos outros, não foi possível chegar-se claramente a um consenso acerca da relação entre estas duas variáveis, virando alguns autores, como, inter alia, Estrada (2004), Post e Van Vliet (2004a) e Jaaman, Lam e Isa (2011), a sua atenção para o modelo de Markowitz e para o *Capital Asset Pricing Model*, apontando-lhes algumas inadequações teóricas e práticas, sugerindo igualmente métodos alternativos de se estudar a relação rentabilidade/risco. Iniciou-se, deste modo, uma outra discussão que levou à seguinte questão: Qual é a melhor forma de avaliar o risco em que um investidor incorre?

2.2 MEDIDAS DE RISCO

Vasta é a literatura financeira em volta de abordagens alternativas ao modelo de Markowitz e ao *Capital Asset Pricing Model*, tendo aumentado consideravelmente nas últimas três décadas. Exemplos de algumas das metodologias sugeridas como possíveis alternativas aos

modelos tradicionais da medição de risco são as propostas por Miller e Leiblein (1996), Ekholm e Pasternack (2001), Chen (2003) e Post & Van Vliet, (2004b). Miller e Leiblein (1996) denotam que, entre 1971 e 1991, o semidesvio-padrão negativo, baseado em dados contabilísticos das empresas de manufaturação, presentes na base de dados do COMPUSTAT, tem uma relação significativa mais consistente com a rentabilidade dessas empresas que o desvio-padrão. Ekholm e Pasternack (2001) sugerem a utilização de um modelo de informação assimetricamente distribuída com uma resposta simétrica a nível do mercado, ao invés de se assumir a hipótese de que a informação é normalmente distribuída e que a resposta do mercado é assimétrica. Ao testarem o modelo que sugerem, com dados diários das rentabilidades das 15 ações mais transacionadas no *Helsinki Stock Exchange* (Bolsa de Valores de Helsínquia, Finlândia), entre o dia 1 de maio de 1996 e 30 de abril de 2001, obtêm suporte empírico para a utilidade deste modelo, podendo afirmar que a assimetria negativa significativa, verificada na distribuição das rentabilidades, se deve a notícias inesperadas específicas a cada empresa.

Chen (2003) testa os modelos CAPM e CCAPM (*consumption based CAPM* – modelo que se serve do beta de consumo, em vez do beta de mercado) no mercado acionista de Taiwan, estudando, com dados mensais entre julho de 1991 e março de 2000, qual o modelo com melhor desempenho para explicar os comportamentos das ações neste mercado. Chega à conclusão que o modelo que melhor explica a apreciação dos ativos e que melhor prevê alterações nos preços das ações, no mercado acionista de Taiwan, é o *Capital Asset Pricing Model*, falhando o CCAPM na tentativa de explicar o comportamento das ações na Bolsa de Taiwan, apesar deste último, teoricamente, ter melhores condições para explicar o risco sistemático que o CAPM. Também Post e Van Vliet (2004b), usando o índice ponderado CRSP all-shares e 10 carteiras obtidas usando métodos de análise contabilística/fundamental, num estudo relativo aos períodos de 1968-1988 e 1978-1998, afirmam que a carteira de mercado é ineficiente ao nível da variância/média, entre 1968-1988, comparativamente com carteiras construídas com base no *book-to-market equity ratio* (rácio entre o valor contabilístico dos capitais próprios da empresa e a sua capitalização bolsista). Justificam isto com o facto de o prémio de valor recompensar os investidores pelo risco sistemático negativo (*systematic downside risk*) em que incorrem, algo que, segundo os autores, não é captado na tradicional análise feita ao risco quando se usa beta. Acrescentam ainda que as carteiras de investimento presentes no estudo têm um risco negativo maior que aquele que é estimado por beta.

Da multitude de abordagens que foram testadas como alternativas à análise clássica da relação rentabilidade/risco, as investigações que usam as *downside risk measures*, baseadas nas rentabilidades ao nível do mercado, serão aquelas em que este trabalho se irá apoiar e que, de

seguida, iremos analisar de forma mais cuidada, de modo a perceber se a metodologia que se baseia no risco negativo é fiável e para que resultados aponta.

Jahankhani (1976), com observações entre 1947 e 1969 retiradas da base de dados do norte-americano *Center for Research in Security Prices* (CRSP), consegue resultados empíricos que sugerem que o modelo média/variância e o modelo média/semivariância são quase idênticos, aparentando ambos estabelecer uma relação linear entre o risco e a rentabilidade, bem como o facto de quer beta quer *downside beta* serem capazes de afetar a rentabilidade esperada.

Estrada (2001), com dados relativos a trinta e sete indústrias existentes em mercados emergentes, no intervalo temporal compreendido entre dezembro de 1994 e dezembro de 1999, mostra que o semidesvio-padrão, em relação à média, está correlacionado com a rentabilidade média inter-indústrias nos mercados emergentes. Estrada (2002), mais tarde, questiona a utilização de beta e do *Capital Asset Pricing Model*, do ponto de vista teórico, explicando que a hipótese do comportamento do investidor com base na semivariância/média é, no mínimo, tão plausível quanto a hipótese do comportamento do investidor com base na variância/média. Do ponto de vista empírico, mostra que os dados de 27 países emergentes, no período compreendido entre 1988 e 2001, apontam para uma superioridade explicativa e estatística de *downside beta* e do semidesvio-padrão face a beta e ao desvio-padrão. Apresenta igualmente aquela que para si é a melhor forma de se estimar *downside beta* e como integrá-lo no modelo alternativo D-CAPM. Estrada (2007), numa investigação subsequente, testa empiricamente aquilo que havia afirmado no trabalho anteriormente referido, usando agora dados mensais de 50 mercados mundiais, presentes na base de dados Morgan Stanley Capital Indices (MSCI), entre os anos 1988 e 2001. Com esta base de dados obtém os mesmos resultados que relatara no trabalho anterior, ou seja, as medidas do risco negativo (semidesvio-padrão e *downside beta*) apresentam um melhor desempenho que as medidas clássicas (desvio-padrão e beta) quando tentam explicar as rentabilidades. Estrada (2002) sugere, por tudo isto, a semivariância como uma escolha mais útil/plausível quando se tenta representar a incerteza de uma aplicação financeira, já que, no seu entender, os investidores não veem de igual modo as flutuações positivas e as flutuações negativas das cotações, desejando desvios positivos e não desvios negativos. Este argumento é também apresentado por autores como Hogan e Warren (1974) Harlow e Rao (1989), Post e Van Vliet (2004a), Jaaman, Lam e Isa (2011) e Rigamonti (2020).

Também, do ponto de vista estatístico, Estrada (2002) considera que a semivariância é mais útil quando a distribuição das rentabilidades é assimétrica, sendo também tão útil como a variância quando a distribuição das rentabilidades é simétrica. Defende que a variância não é a

melhor variável *proxy* para avaliar o risco, uma vez que esta só seria a mais indicada se a distribuição da rentabilidade fosse simétrica e normal, algo que trabalhos como os de Aparicio e Estrada (2001), Pereira (2007), Theodossiou e Savva (2016) e Brito, Sebastião e Godinho (2016) vêm provar não ser a realidade.

Aparicio e Estrada (2001) no trabalho que desenvolvem, com recurso às rentabilidades diárias de 13 mercados financeiros europeus, entre 1 de janeiro de 1990 e 31 de dezembro de 1994, testam também o pressuposto da distribuição normal das rentabilidades nestes mercados, acabando por rejeitar essa hipótese. Encontram, porém, provas de que a distribuição das rentabilidades, nestes 13 mercados financeiros, pode ser uma distribuição *scaled-t* e/ou uma mistura de duas distribuições normais. Acrescentam, também, que o facto de se assumir que a distribuição das rentabilidades é normal nestes mercados, ao invés de *t-scaled*, pode levar a um erro de previsão tão maior quanto maiores forem os ganhos/as perdas que desejamos considerar. Estes resultados, como os autores referem, apontam para a conclusão de que o pressuposto de normalidade leva os investidores a subestimarem o risco de investir nos mercados de capitais europeus. Mostram, além de tudo isto, que a normalidade das distribuições é algo que pode ser plausível quando se usam dados mensais. Pereira (2007), usando as rentabilidades diárias de 31 ações cotadas no mercado acionista português, desde o primeiro dia em que foram transacionadas até agosto de 2000, analisa a assimetria e curtose das rentabilidades, aplicando também testes de normalidade à distribuição das rentabilidades, chegando à conclusão que no mercado bolsista português nenhuma das distribuições das rentabilidades destes 31 ativos, isoladamente, segue uma distribuição normal, sendo inclusive quase todas estas distribuições intertemporalmente assimétricas. Nota, porém, que o índice do mercado português, o PSI-20, ao contrário da maioria das ações, já segue uma distribuição simétrica, ficando a indicação de que as assimetrias das rentabilidades destas ações são diversificáveis. No estudo desenvolvido, encontra também provas de que as *downside risk measures* parecem ser mais aconselháveis que as medidas tradicionais do risco sistemático.

Theodossiou e Savva (2016), usando dados diários, semanais e mensais das rentabilidades acima da taxa de juro das obrigações do tesouro, de todas as empresas americanas listadas nos Estados Unidos (*New York Stock Exchange*, NYSE, *American Stock Exchange*, AMEX, ou NASDAQ), presentes na base de dados do *Center for Research in Security Prices*, dedicam-se ao estudo da distribuição do excesso de rentabilidade das carteiras. Mostram que essa distribuição é caracterizada por uma assimetria negativa, significando isto que a volatilidade no mercado acionista é maior quando há perdas do que quando há ganhos. Com estes resultados apontam, complementarmente, a assimetria negativa no excesso de rentabilidade como uma razão para a existência de resultados contraditórios quando se analisa a relação rentabilidade-risco com

recurso à variância, no modelo tradicional de apreciação intertemporal dos ativos, CAPM, uma vez que este modelo se baseia em probabilidades logarítmicas simétricas.

Usando quatro conjuntos de dados diferentes sobre empresas norte-americanas, disponíveis na *Fama/French data library*, com informação entre julho de 1964 e junho de 2014, em frequência mensal, Brito, Sebastião e Godinho (2016) identificam que as rentabilidades apresentavam uma assimetria negativa e uma curtose acima daqueles que deviam ser os seus valores numa distribuição normal. Aplicam o teste de normalidade Jarque-Bera a todas as carteiras, rejeitando a hipótese de normalidade. Analisam ainda neste trabalho o *trade-off* entre assimetria e semivariância, obtendo, através deste *trade-off*, carteiras eficientes com bons desempenhos, quando a análise do desempenho é feita através do rácio de Sharpe, *skewness per semivariance ratio* e do rácio de Sortino (variação do rácio de Sharpe que resulta da subtração da rentabilidade esperada de um ativo ou de uma carteira pela taxa de juro sem risco, que posteriormente é dividida pelo semidesvio-padrão negativo).

Considerando as críticas, mencionadas anteriormente, aos pressupostos teóricos (de que os investidores não classificam igualmente, como risco, variações positivas e variações negativas) e aos pressupostos matemáticos por detrás dos modelos tradicionais (de que os modelos tradicionais estão dependentes de uma distribuição simétrica e normal e/ou de uma função de utilidade quadrática), bem como os resultados empíricos que vão surgindo, trabalhos mais recentes levam cada vez mais em conta as medidas do risco negativo, na tentativa de estudarem a relação entre a rentabilidade e o risco. Assim e após o contributo dado por Jin, Markowitz e Zhou (2006), que através de demonstrações matemáticas encontram provas de que existe uma fronteira eficiente no plano da semivariância/média, alguns investigadores, inter alia, Post e Van Vliet (2004a), Cheremushkin (2009), Artavanis, Diacogiannis e Mylonakis (2010), Jaaman, Lam e Isa (2011), Conlon e Cotter (2013), Pla-Santamaria e Bravo (2013), bem como Rashid e Hamid (2015), passaram a fazer as suas análises tendo em conta as medidas do risco negativo e a comparar os desempenhos de previsão destas medidas face à variância, ao desvio-padrão e a beta.

A literatura financeira, em torno das comparações destas abordagens, cresceu consideravelmente ao longo das últimas duas décadas, existindo exemplos de artigos acerca desta temática em quase todos os continentes e relativos a diversos mercados. Algumas das investigações sobre mercados americanos, mais concretamente nos Estados Unidos da América, são as realizadas por Post e Van Vliet (2004a), Estrada (2006), Cheremushkin (2009), Pla-Santamaria e Bravo (2013) e Rigamonti (2020). Post e Van Vliet (2004a) usando dados das rentabilidades mensais, entre 1926 e 2002, de ações, índices e carteiras de investimento listadas na *New York Stock Exchange (NYSE)*, *American Stock Exchange (AMEX)*, e/ou *NASDAQ*,

encontram fortes indicações de que o risco condicional negativo (*conditional downside risk*) influencia as cotações dos ativos, tendo inclusive os modelos condicionados e incondicionados CAPM, baseados na semivariância, melhor desempenho que o modelo CAPM tradicional. É também de notar que quando estes autores substituem beta por *downside beta* a relação esperada entre risco e rentabilidade ressurge.

Com recurso às rentabilidades de dez empresas norte-americanas e do índice S&P 500, entre 1995 e 2004, Estrada (2006) mostra que a interpretação do risco feita, usando o desvio-padrão e beta, é diferente da interpretação do risco feita usando o semidesvio-padrão e *downside beta*. Identifica igualmente que os níveis de rentabilidade exigidos pelo investidor, quando avaliam o risco usando ou beta, ou o semidesvio-padrão, ou *downside beta*, são diferentes, devendo os investidores exigir rentabilidades, segundo o semidesvio-padrão e *downside beta*, 1.5% a 1.8% e 5.4% a 6.1%, respetivamente, mais altas que aquelas que beta estima. Pla-Santamaria e Bravo (2013), usando as cotações semanais, entre setembro de 2005 e setembro de 2009, das *blue chips stocks* (empresas de grande dimensão, financeiramente fortes e com uma reputação excelente) existentes no *Dow Jones*, bem como o próprio *Dow Jones Index* (DJI), confrontam os modelos média/variação e média/semivariância, através da representação gráfica das fronteiras eficientes em ambas as dimensões. Através dessa análise, conseguem identificar que, para rentabilidades mais altas, as carteiras obtidas através do modelo média/variação e média/semivariância têm o mesmo risco e a mesma rentabilidade, porém o mesmo não sucede em carteiras com rentabilidades mais baixas. Deste modo, conseguem verificar que as carteiras que são constituídas segundo cada metodologia são diferentes, principalmente quando se tentam construir carteiras para níveis de menor risco.

Cheremushkin (2009), por outro lado, não considera a abordagem do *downside risk* a mais indicada para se estimar o risco de um investimento. Usando os mesmos dados que Estrada (2006), afirma que a matriz de cosemivariâncias não é fiável, pois, pela forma como é calculada, esta é endógena e está dependente dos pesos relativos dos ativos, dos seus desvios-padrão e das próprias correlações entre os ativos. Afirma, também, que quando os ativos têm uma correlação positiva perfeita, a percentagem de erro de estimação do D-CAPM é zero, porém quando os ativos têm uma correlação negativa perfeita o erro de estimação do D-CAPM é infinito. Aponta, por essa mesma razão, que este modelo alternativo não leva em conta o efeito da diversificação da carteira.

Também Rigamonti (2020), baseando-se nas rentabilidades mensais entre fevereiro de 1973 e dezembro de 2016, de determinadas ações na base de dados do *Center for Research in Security Prices*, e nas rentabilidades semanais de 28 das 30 ações que constituem o *Dow Jones Industrial Average*, entre fevereiro de 1990 e abril de 2016, verifica que, apesar de, na sua

opinião, quando se tenta minimizar o risco ser teoricamente mais adequada a utilização de medidas do risco negativo, como a semivariância, a minimização da variância leva a um desvio negativo menor e a um rácio de Sortino maior. Estes resultados, a seu ver, indicam que a minimização da variância continua a ser a melhor forma de se estimar e minimizar o risco de uma aplicação financeira. Parte da argumentação que usa para justificar o pior desempenho daquela que, à partida seria, para si, a variável que melhor prevê o risco, a semivariância, passa pelo facto desta forma de medir o risco só considerar as perdas/os desvios negativos, lidando-se apenas com uma fração da informação, o que leva a estimativas imprecisas. Quando compara o *conditional value-at-risk* (estatística que quantifica potenciais perdas financeiras de grande dimensão, tendo em conta a magnitude do investimento e a probabilidade de cada cenário possível) com a variância, chega a resultados semelhantes.

Também na Europa foram desenvolvidos estudos sobre a comparação das *downside risk measures* face às medidas clássicas de risco. Um exemplo disso é a investigação realizada por Artavanis, Diacogiannis e Mylonakis (2010). Estes autores comparam o desempenho das medidas do risco negativo, como o semidesvio-padrão e o *downside beta*, com o desempenho das medidas tradicionais do risco, a variância ou o beta, usando as rentabilidades semanais dos ativos cotados na *London Stock Exchange* e na *Paris Stock Exchange*, em dois períodos compreendidos entre janeiro de 1997 e dezembro de 2002 e entre janeiro de 1999 e dezembro de 2004. Os resultados obtidos permitem a estes investigadores concluir que as medidas do risco negativo são tão boas ou melhores que as tradicionais medidas de risco, a explicar as rentabilidades médias. Demonstram que, quando se consideram ativos financeiros de forma individual, as medidas do risco negativo, semidesvio-padrão e *downside beta*, têm um desempenho superior às tradicionais medidas do risco, variância e beta, quer quando se testam estas medidas com recurso aos dados da *London Stock Exchange*, quer com recurso aos dados da *Paris Stock Exchange*. Quando se consideram carteiras, os resultados da comparação, entre as medidas do risco negativo e as medidas do risco tradicionais, não são lineares, uma vez que quando são comparados, usando dados da *London Stock Exchange*, não se consegue provar estatisticamente que o *downside beta* seja melhor que beta, mas quando se consideram dados da *Paris Stock Exchange*, o *downside beta* já aparenta ter um poder explicativo superior a beta. Assim, na maioria dos casos, quer o semidesvio-padrão, quer o *downside beta*, têm um melhor desempenho explicativo que o desvio-padrão e o beta.

Na Ásia este tema mereceu também a atenção de vários investigadores. Jaaman, Lam e Isa (2011), baseando o estudo em dados mensais de 54 empresas incluídas no *Kuala Lumpur Composite Index* (índice bolsista da Malásia), entre janeiro de 2004 e dezembro de 2007, concluem que a semivariância face à rentabilidade esperada, a semivariância abaixo de um nível

objetivo e o *conditional value-at-risk* têm um melhor desempenho que a variância, estabelecendo uma melhor relação rentabilidade/risco que o modelo clássico. Segundo estes autores, os modelos que se apoiam nestas medidas do risco negativo são mais robustos, porque não têm os mesmos pressupostos que o modelo que assenta na média/variância. Os modelos que usam as *downside risk measures* são, também segundo estes autores, mais consistentes com as perceções dos investidores quanto ao risco, pois têm como foco os desvios da rentabilidade abaixo de um determinado nível, o risco que quem faz uma aplicação financeira deseja realmente evitar. É também de notar que nesta pesquisa são estimadas as carteiras ótimas segundo cada modelo, sendo estas constituídas de maneiras bastante diferentes.

Rashid e Hamid (2015) fazem também uma análise comparativa entre o CAPM e modelos alternativos, entre eles o sugerido por Estrada (2002), que tem por base a semivariância, com recurso a dados mensais de 63 empresas do índice KSE-100 (índice bolsista do Paquistão), entre janeiro de 2000 e dezembro de 2012. Estes autores chegam à conclusão que o modelo CAPM tradicional, no período em análise, demonstra uma relação negativa entre rentabilidade e risco, enquanto dois dos modelos alternativos, que utilizam medidas do risco negativo como *proxy* do risco, apresentam a “normal” relação positiva rentabilidade/risco, apesar desta ser estatisticamente não-significativa num dos modelos.

É importante referir, ainda que complementarmente, que o tema das *downside risk measures* tem ganho alguma importância ao longo dos últimos anos e, como tal, é cada vez mais usado nos mais diversos estudos financeiros, indo em alguns destes para além da análise de ações e/ou de empresas. Um bom exemplo disso é o trabalho desenvolvido por Conlon e Cotter (2013). Utilizando valores diários dos futuros sobre o petróleo, transacionados de 1 de janeiro de 1997 a 31 de dezembro de 2010, no *New York Mercantile Exchange* (NYMEX), Conlon e Cotter (2013) juntam-se à lista de defensores da utilização das medidas de risco negativo, afirmando que algumas destas medidas, como o *conditional value-at-risk* e o *value-at-risk*, são bastante úteis para o cálculo do rácio de cobertura de risco ótimo usado para a cobertura do risco dos futuros.

3. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Tendo em conta toda a revisão da literatura nesta área de investigação, o presente estudo tem dois objetivos complementares. Primeiro, com uma aplicação ao mercado acionista português, entender as diferenças na análise do risco de um investimento que surgem da utilização das medidas clássicas, como a variância e o desvio-padrão, e da utilização de *downside risk measures*, como a semivariância e o semidesvio-padrão. Segundo, investigar o pressuposto da distribuição normal das rentabilidades, no mercado de capitais português, de modo a identificarmos a metodologia mais indicada para se avaliar o risco em que um investidor, especulador ou empresa incorre quando investe em bolsa.

Com estes objetivos em mente, foram recolhidas, através da plataforma online *Yahoo Finance*, as cotações diárias, medidas em euros, de 37 empresas presentes no *PSI All-Shares* entre 2000, ou desde o início da sua transação em Bolsa, até 2021. Foram retiradas duas series históricas para cada ação, uma onde as cotações estão ajustadas tendo em conta *stock-splits* (divisão das ações existentes em múltiplas novas ações que representam agora individualmente uma fração menor da empresa) e outra onde as cotações estão ajustadas para dividendos e *stock-splits*. Serão usadas, mais à frente, ambas as series, de maneira a percebermos de que forma podem as análises alterar-se tendo em conta estas pequenas diferenças nos dados. É de referir que se optou pela utilização de observações diárias por duas razões. Primeiro, porque esta é a maior frequência de dados disponível na plataforma *Yahoo Finance*. Segundo, por esta frequência de observações permitir a comparação dos resultados dos testes de normalidade aqui feitos às distribuições das rentabilidades, com os resultados apresentados por Pereira (2007).

De forma a conseguirmos analisar o maior número de ações possível, no mesmo período temporal, no presente estudo, das 37 ações recolhidas, serão analisadas 25 ações num período compreendido entre o dia 18 de maio de 2011 e 7 de maio de 2021. Chegou-se a este número final de empresas, a analisar, através de dois critérios principais. O primeiro critério é a identificação de um intervalo histórico, idêntico para todos os ativos, que permita a utilização do maior número de ações num espaço temporal comum. O segundo critério é o da exclusão de empresas que apresentam uma liquidez reduzida para a dimensão do mercado português, definindo-se estas como as empresas que, em média, transacionam menos de 10 mil ações por dia. Além disso, foi igualmente necessário retirar uma outra empresa da amostra por apresentar acentuadas oscilações nas cotações, o que provavelmente pode advir do facto de esta empresa ter uma cotação de valor muito reduzido, que não é registado por inteiro na plataforma, sendo

feitos arredondamentos na sua cotação que acabam por distorcer as rentabilidades diárias obtidas com esta serie.

Também é necessário, para se elaborar o presente estudo, obtermos os valores diários do PSI-20, índice do mercado português, que servirá de *proxy* daquela que deveria ser a carteira de mercado. Os valores do PSI-20 foram obtidos na plataforma *Investing.com*.

O primeiro passo da metodologia aqui usada e sobre o qual assenta todo o trabalho subsequente, é a utilização das cotações diárias de 25 ações presentes no mercado financeiro português para se calcularem as rentabilidades diárias destes ativos. Os cálculos das rentabilidades diárias e médias foram desenvolvidos segundo as seguintes fórmulas:

$$R_{it} = \frac{S_{it} - S_{it-1}}{S_{it-1}} \quad (1)$$

$$E_i = \frac{\sum_{i=2}^n R_{it}}{n-1} \quad (2)$$

Onde:

R_{it} – rentabilidade diária da ação i ;

S_{it} – cotação da ação i no momento t ;

E_i - rentabilidade média da ação i ;

n – número de cotações observadas.

Tendo as rentabilidades diárias de cada uma destas empresas, cotadas em Bolsa, devemos então proceder à utilização destes dados para se estimar, numa primeira fase, o modelo de Markowitz, definido da seguinte forma, em notação vetorial:

$$\min X V X^T \quad (3)$$

$$E_c = X E \quad (4)$$

Sujeito a,

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1; x_i \geq 0 \quad (5)$$

Onde:

X – vetor linha dos pesos relativos dos ativos na carteira de investimento (variáveis de decisão no presente problema);

V – matriz das variâncias e covariâncias;

X^T – vetor X transposto;

E_c – rentabilidade média da carteira de investimento;

E – vetor vertical das rentabilidades médias de cada ativo;

x_i – peso relativo do ativo i na carteira de investimento;

m – número de ativos.

Realizados os cálculos das rentabilidades temos dados suficientes para conseguir obter duas matrizes importantes para a estimação da fronteira eficiente, a matriz da rentabilidade média de cada ativo, E, bem como a matriz das variâncias e covariâncias, V.

De maneira a ser feita a minimização da variância das carteiras para cada nível de rentabilidade estimado, com as matrizes já conseguidas, iremos utilizar os suplementos *Solver/Solvertable* do Excel, utilizados maioritariamente para resolver problemas de programação linear, para a análise da sensibilidade face a determinadas restrições e otimização de problemas. Com a intenção de minimizar a variância, é utilizada a função *Solver*, variando este suplemento os pesos relativos de cada ação na carteira de investimento, de modo a ser devolvida a carteira de variância mínima no mercado em análise. Realizado este passo, utilizando agora a função *Solvertable*, serão estimadas as carteiras eficientes, para determinados níveis de rentabilidade, acima da rentabilidade dada pela carteira de variância mínima, devolvendo o software as suas variâncias e os desvios-padrão, bem como os pesos relativos de cada ativo nessas carteiras eficientes. Com toda esta informação será possível proceder-se à representação gráfica da fronteira eficiente de Markowitz, tradicional, no domínio da rentabilidade/desvio-padrão.

Preparada toda esta análise, temos concluída a representação da relação rentabilidade/risco na dimensão média/desvio-padrão, sendo agora necessário preparar a representação desta relação na dimensão média/semidesvio-padrão. Para tal, seguir-se-á a metodologia sugerida por Ballesterro (2005) e utilizada por Pla Santamaría e Bravo Selles (2013), descrita da seguinte forma:

$$\min X V_s X^T = X (V - B) X^T \quad (6)$$

$$E_c = X E \quad (7)$$

Sujeito a,

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1; x_i \geq 0 \quad (8)$$

Onde:

X – vetor linha dos pesos relativos dos ativos na carteira de investimento (variáveis de decisão no presente problema);

V_s – matriz das semivariâncias negativas e cosemivariâncias;

V – matriz das variâncias e covariâncias;

B – matriz cujo elemento genérico é constituído pela multiplicação dos betas dos ativos pelo valor da semivariância positiva média da carteira de mercado;

X^T – vetor X transposto;

E_c – rentabilidade média da carteira de investimento;

E – vetor vertical das rentabilidades médias de cada ativo;

x_i – peso relativo do ativo i na carteira de investimento;

m – número de ativos.

É importante referir, igualmente, que o modelo apresentado por Ballestero (2005), para ser o mais preciso possível, requer a imposição de uma restrição que garanta a diversificação das carteiras, de modo a que o risco específico tenda para zero, tendo desta maneira o modelo média/semivariância uma estrutura semelhante ao modelo de média/variância de Markowitz. Com o intuito de se garantir a diversificação das carteiras, como é sugerido por Ballestero (2005), o peso relativo de cada ação não poderá ser superior a 5% da carteira. Será feita uma outra análise, complementar, onde não permitimos que cada ativo constitua mais que 10% da carteira, possibilitando uma comparação entre as fronteiras estimadas. Isto permitirá que seja estabelecido um paralelismo entre a diversificação que é feita por um investidor que tenha menos atenção à proporção de cada ação na sua carteira e a diversificação feita por um banco/um fundo de investimento, que tem uma maior atenção à forma como são estruturadas as suas carteiras, impondo limites mais rigorosos, para que não estejam demasiado expostos às variações da cotação de uma determinada empresa. É necessário mencionar que, para que as comparações feitas entre o modelo média/semivariância e o modelo de Markowitz sejam mais rigorosas, também o modelo média/variância terá as mesmas restrições que o modelo média/semivariância quanto aos pesos máximos dos ativos.

Assim, os passos seguintes da metodologia serão o cálculo da matriz das semivariâncias e cosemivariâncias, V_s , e o uso das ferramentas *Solver/Solvertable* para se estimar, no domínio da

média/semidesvio-padrão, a carteira eficiente com menor risco e toda a fronteira eficiente acima deste ponto. É necessário, ainda, realizar a subtração entre a matriz V e B, para se obter a matriz das semivariâncias e cosemivariâncias. A matriz V já é utilizada no modelo de Markowitz, faltando apenas calcular a matriz B. Para tal, será necessário usar os valores das rentabilidades diárias de cada ação e do PSI-20, como ponto de partida para os cálculos que vão ser apresentados de seguida. A matriz B é toda ela constituída por elementos calculados da seguinte forma:

$$\beta_i \beta_j v(E_M < R_{Mt}) \quad (9)$$

Onde:

β_i – beta do ativo i;

β_j – beta do ativo j;

$v(E_M < R_M)$ - semivariância positiva média da carteira de mercado;

E_M – rentabilidade média da carteira de mercado;

R_{Mt} – rentabilidade da carteira de mercado num determinado momento.

Para se obterem os elementos da matriz B devemos ter o valor da semivariância média da carteira de mercado, que, neste caso, será estimado com recurso ao índice de mercado, o PSI-20, que servirá como *proxy* daquela que deveria ser a carteira do mercado de capitais português. Também será necessário calcular os betas de cada ação.

Para tal, o cálculo da semivariância média será feito seguindo a fórmula:

$$\frac{\sum_1^t \max [0, R_{Mt} - E_M]^2}{n-1} \quad (10)$$

Também o beta de cada empresa foi estimado através da fórmula:

$$\beta_i = \frac{cov(R_i, R_M)}{var(R_M)} \quad (11)$$

Com todos estes cálculos intermédios concluídos, conseguimos calcular a matriz B e, desta maneira, temos reunidas as condições para proceder à subtração entre as matrizes V e B, obtendo a matriz V_S .

Nesta dimensão, são também utilizados os suplementos *Solver/Solvertable*, desta vez com o intuito de se minimizar a semivariância. Estes programas irão devolver, para cada uma das

carteiras eficientes no domínio da média/semidesvio-padrão e para cada nível de rentabilidade escolhido, a respetiva semivariância, o semidesvio-padrão e os pesos relativos de cada ação na carteira.

Estimadas as fronteiras eficientes e feitas algumas comparações elementares, devemos ter em conta que não é possível uma comparação direta, adequada, entre as fronteiras eficientes estimadas em cada domínio, por serem representadas em dimensões diferentes. Ou seja, a fronteira estimada usando a abordagem sugerida por Markowitz (1952) encontra-se representada num espaço média/desvio-padrão, enquanto a fronteira obtida seguindo as abordagens de Ballestero (2005) e Pla Santamaría e Bravo Selles (2013) está representada num espaço média/semidesvio-padrão. Com isto em mente, serão calculados os valores da variância e da semivariância, das diversas carteiras eficientes, estimadas em cada uma das abordagens, de modo a conseguirmos colocar ambas as fronteiras, em ambos os domínios, entendendo como estas realmente se comparam, que semelhanças e diferenças têm e quais as diferentes constituições das carteiras, consideradas eficientes segundo um método e outro. As variâncias das carteiras eficientes no espaço média/semivariância e as semivariâncias das carteiras eficientes no espaço média/variância serão conseguidas utilizando os pesos relativos das ações em cada uma destas carteiras.

Poderá ser, porém, impossível obter-se uma resposta final acerca da metodologia que deve ser adotada, através da análise das fronteiras, ainda que ambas se encontrem na mesma dimensão. As fronteiras que se encontrarem no seu respetivo domínio, por terem sido otimizadas tendo em conta o domínio em que foram estimadas, serão a melhor combinação possível de ativos face à variância e à semivariância na dimensão média/variância e média/semivariância, respetivamente. Desta análise gráfica poderão sair apenas duas conclusões: ou ambas as fronteiras são iguais, sendo indiferente utilizarmos medidas de risco tradicionais e/ou medidas do risco negativo, ou as fronteiras serão diferentes, sendo necessário determinar qual o método de avaliação do risco que melhor se adapta à realidade do mercado acionista português.

Na eventualidade de, através da comparação das fronteiras, nos depararmos com a segunda hipótese, o passo seguinte será a observação da distribuição de probabilidades das rentabilidades das ações cotadas em Bolsa. Será este o passo seguinte, uma vez que um dos principais pressupostos, sobre o qual assenta o modelo de Markowitz, é o da distribuição das rentabilidades ser normal; argumentando autores como Post e Van Vliet (2004a), Estrada (2006), Pereira (2007), e Rigamonti (2020) que, quando o pressuposto da normalidade não se verifica, as abordagens baseadas no *downside risk* têm um melhor desempenho na função de retratar o risco de uma aplicação financeira que as abordagens ditas tradicionais do modelo de

Markowitz e do modelo CAPM. É também de notar que, segundo alguns dos investigadores acima mencionados, no caso de se verificar o pressuposto de normalidade, é tão eficaz a abordagem clássica como a abordagem baseada no risco negativo.

Serão, por isso, feitos testes à normalidade das rentabilidades ativo a ativo, bem como à distribuição conjunta das rentabilidades de todos estes, de modo a identificarmos com mais clareza qual a melhor forma de medir o risco na Bolsa de Valores sob investigação. Com o objetivo de termos mais informação acerca da distribuição das rentabilidades, foram obtidos os valores da assimetria/skewness e da curtose/kurtosis das distribuições de cada ativo e feitos, para cada uma das ações, os testes de normalidade Shapiro-Wilk e Kolmogorov-Smirnov. Além destes testes, serão igualmente utilizados os testes multivariados Henze-Zirkler, Doornik_Hansen, Mardia multivariate skewness test e Mardia multivariate kurtosis test, de forma a obtermos informação sobre a normalidade conjunta das rentabilidades das ações portuguesas em análise. É de notar, porém, que todos os testes multivariados mencionados assumem a independência das amostras. Visto que estamos a investigar empresas cotadas no mesmo mercado acionista, sujeitas às mesmas normas estabelecidas pela Bolsa de Valores, que desempenham grande parte do seu negócio num mesmo país e tendo de respeitar a legislação vigente em Portugal e na União Europeia, entre outros fatores, o pressuposto de independência das amostras pode não ser verificado nestes dados. Para obter os valores da assimetria e da curtose de cada ação e para serem feitos todos os testes de normalidade individual e conjunta acima referidos, foi utilizado o programa *Stata*, software utilizado para fins estatísticos e análise de dados.

Todo o processo anteriormente descrito, desde a elaboração e estimação do modelo de Markowitz, à construção e obtenção do modelo baseado na média/semidesvio-padrão, bem como a análise da distribuição individual e conjunta das rentabilidades destas empresas portuguesas, será feito duas vezes, uma vez recorrendo a dados ajustados para *stock-splits* e uma outra recorrendo a dados tratados tendo em conta *stock-splits* e a distribuição de dividendos. Desta maneira, a análise feita será mais enriquecedora, podendo estudar-se se a perturbação nas cotações, causada pela distribuição de dividendos, afeta os resultados.

4. ESTIMAÇÃO DAS FRONTEIRAS EFICIENTES E TESTES AO PRESSUPOSTO DE NORMALIDADE

De modo a ser feita uma apresentação clara e estruturada dos resultados obtidos, o presente capítulo será dividido em três subpontos. No primeiro subponto, usando como base as cotações diárias ajustadas para *stock-splits*, será apresentado todo o processo que levou à obtenção das carteiras eficientes, nos domínios da média/desvio-padrão e da média/semidesvio-padrão, e serão feitas as devidas comparações entre as fronteiras eficientes e as constituições das carteiras estimadas segundo o modelo de Markowitz e o modelo alternativo de Ballester. No segundo subponto, tendo agora como base as cotações diárias ajustadas para *stock-splits* e dividendos, serão feitas as mesmas análises do subponto anterior, tentando identificar diferenças que possam surgir devido à alteração dos dados de base. No terceiro subponto serão apresentados os testes de normalidade individual e conjunta aplicados às rentabilidades calculadas com os dois tipos de cotações, de forma a identificarmos a abordagem mais adequada quando queremos quantificar o risco no mercado português. As tabelas e as matrizes, pela sua grande dimensão, serão apresentadas de forma resumida no texto, estando as suas versões completas disponíveis nos Anexos.

4.1 COTAÇÕES AJUSTADAS PARA STOCK-SPLITS

Com recurso às cotações diárias calculamos as rentabilidades diárias das 25 ações em estudo, entre 19 de maio de 2011 e 7 de maio de 2021:

Tabela 1 Ilustração das rentabilidades diárias das 25 ações, cotações ajustadas para *stock-splits* - 19/05/2011 a 07/05/2021

Data	ALTR.LS	BCP.LS	TDSA.LS
19/05/2011	0,009036144578	0,011173291029	0,0000000000
20/05/2011	0,001791044776	-0,022099262768	-0,036363636364
...
...
07/05/2021	0,018518518519	0,025923016496	0,017738359202

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes na plataforma *Yahoo Finance*

Com as rentabilidades diárias de cada uma das ações, procede-se ao cálculo das rentabilidades médias de todas estas ações, bem como ao cálculo da matriz de variâncias e covariâncias, apresentadas sucintamente em baixo:

Tabela 2 Rentabilidades médias das 25 ações, cotações ajustadas para *stock-splits* - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Versão completa no Anexo 1

Rentabilidades médias	
ALTR.LS	0,000766458
BCP.LS	-0,000639582
CFN.LS	0,00012084
COR.LS	0,001008586
EDP.LS	0,000356731
...	...
TDSA.LS	-0,000182637

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes na plataforma *Yahoo Finance*

Tabela 3 Matriz das variâncias/covariâncias, matriz V, das 25 ações, cotações ajustadas para *stock-splits* - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Versão completa no Anexo 2

	ALTR.LS	BCP.LS	TDSA.LS
ALTR.LS	0,00044931	0,00025393	0,00018025
BCP.LS	0,00025393	0,00104724	0,00029884
...
...
TDSA.LS	0,00018025	0,00029884	0,00105058

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes na plataforma *Yahoo Finance*

Conseguida toda a informação anteriormente referida, temos já a possibilidade de estimar o modelo de Markowitz. Para se conseguir chegar à representação gráfica do modelo média/semivariância, sugerido por Ballester (2005), é ainda necessário estimar a matriz das semivariâncias e das cosemivariâncias, resultante da subtração da matriz V (matriz das variâncias e covariâncias) pela matriz B, cujo membro genérico é:

$$\beta_i \beta_j v(E_M < R_{Mt}) \quad (12)$$

Onde:

β_i – beta do ativo i;

β_j – beta do ativo j;

$v(E_M < R_M)$ - semivariância positiva média da carteira de mercado;

E_M – rentabilidade média da carteira de mercado;

R_{Mt} – rentabilidade da carteira de mercado num determinado momento.

Assim, para determinarmos a matriz B, precisamos primeiro de obter os betas de cada ativo e a semivariância positiva do mercado. A semivariância positiva consiste na soma das diferenças, ao quadrado, entre a rentabilidade observada num determinado dia e a rentabilidade média, quando a rentabilidade observada é superior à média, sendo tudo isto dividido pelo número total de rentabilidades observadas. Assim, quando a rentabilidade observada é superior à rentabilidade média, consideramos o valor dessa diferença ao quadrado. Por outro lado, quando a rentabilidade observada é menor que a rentabilidade média substituímos o valor desta diferença ao quadrado por zero, como é demonstrado na tabela imediatamente abaixo. Após termos uma coluna onde todos os valores respeitam estes critérios, faz-se o seu somatório, que será dividido, posteriormente, pelo número total de rentabilidades diárias. Para obtermos a semivariância positiva de mercado, serão usados os valores diários do PSI-20, sendo estimadas as rentabilidades diárias a partir desses valores, para serem feitos todos os cálculos subsequentes, que foram explicados acima.

Os betas e a semivariância positiva da carteira de mercado são apresentados de seguida:

Tabela 4 Ilustração do cálculo da semivariância positiva do PSI-20 - 19/05/2011 a 07/05/2021

	PSI-20	Se $E_M < R_{Mt}$, $R_{Mt} - E_M$ Se $E_M > R_{Mt}$, 0	Se $E_M < R_{Mt}$, $(R_{Mt} - E_M)^2$ Se $E_M > R_{Mt}$, 0
19/05/2011	0,004637275	0,004718607	2,22653E-05
20/05/2011	-0,005570343	0	0
...
07/05/2021	0,011314692	0,011396025	0,000129869
Média	-8,13323E-05	Nº de rentabilidades observadas	2550
		Semivariância positiva média	0,00006949255

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes na plataforma *Investing.com*

Tabela 5 Betas das 25 ações, cotações ajustadas para *stock-splits* - 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 3

ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	TDSA.LS
1,066946	1,68855	0,572801	0,383176	0,88982	0,963257

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

Detendo agora todos estes valores, podemos aplicar a fórmula acima indicada e obter a matriz B, descrita da seguinte forma:

Tabela 6 Matriz B, cujo elemento genérico é $\beta_i\beta_jV(E_M < R_{M_t})$, cotações ajustadas para *stock-splits* - 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 4

	ALTR.LS	BCP.LS	TDSA.LS
ALTR.LS	7,91E-05	0,000125	7,14E-05
BCP.LS	0,000125	0,000198	0,000113
...
...
TDSA.LS	7,14E-05	0,000113	6,45E-05

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

Conseguida a matriz B temos reunidas as condições necessárias para se estimar a matriz das semivariâncias e cosemivariâncias, resultante da subtração da matriz V pela matriz B. A matriz das semivariâncias e cosemivariâncias é definida da seguinte forma:

Tabela 7: Matriz das semivariâncias/cosemivariâncias, matriz V_s , cotações ajustadas para *stock-splits* - 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 5

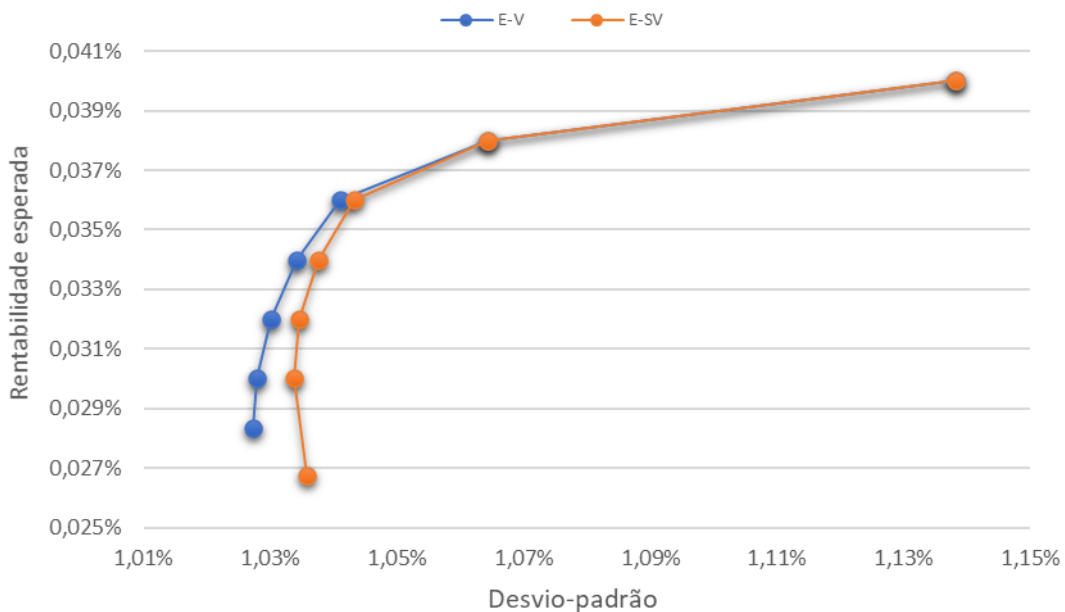
	ALTR.LS	BCP.LS	TDSA.LS
ALTR.LS	0,00037	0,000129	0,000109
BCP.LS	0,000129	0,000849	0,000186
...
...
TDSA.LS	0,000109	0,000186	0,000986096

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

Obtidos todos os vetores e todas estas matrizes, podemos agora estimar a fronteira eficiente no domínio da média/desvio-padrão, bem como a fronteira eficiente no domínio da média/semidesvio-padrão. Para que não seja apresentada uma quantidade excessiva e desnecessária de figuras, serão exibidas as representações gráficas das fronteiras eficientes segundo o modelo de Markowitz, intitulado nos gráficos seguintes de E-V, e o modelo apresentado por Ballestero (2005), intitulado de E-SV, quer na dimensão da média/desvio-padrão, quer na dimensão da média/semidesvio-padrão, de modo a poder ser feita uma análise comparativa entre ambos os modelos.

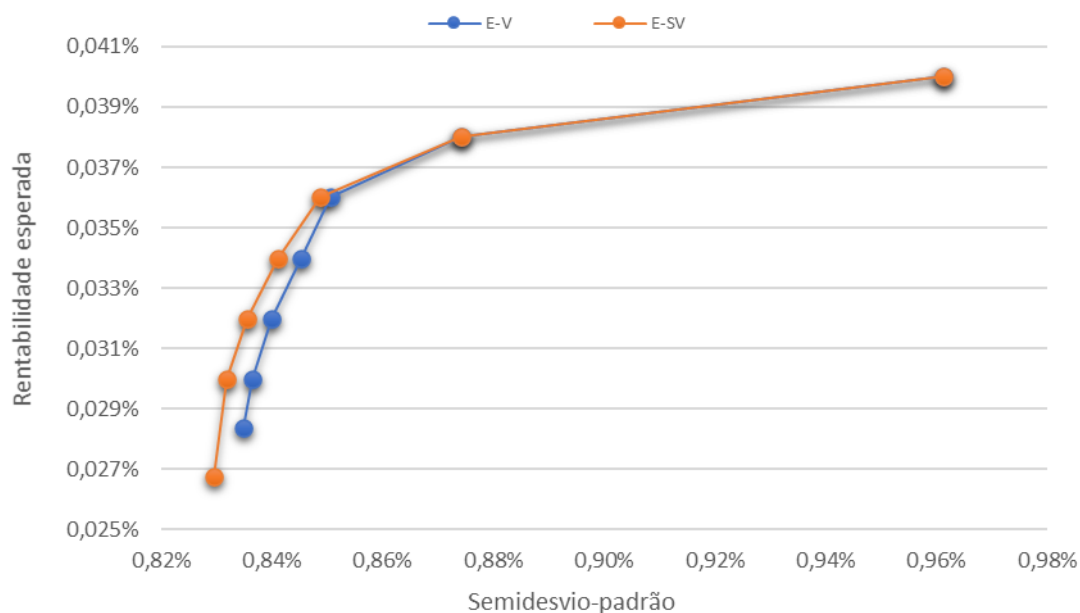
Quando a restrição imposta é a de que o peso de cada um dos ativos na carteira não pode ser superior a 5% obtemos as seguintes representações gráficas:

Figura 1 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/desvio-padrão, com restrições a 5%, cotações ajustadas para *stock-splits* – 19/05/2011 a 07/05/2021



Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

Figura 2 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/semidesvio-padrão, com restrições a 5%, cotações ajustadas para *stock-splits* – 19/05/2011 a 07/05/2021



Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

Observando ambas as fronteiras eficientes, estimadas segundo o modelo sugerido por Markowitz e o modelo sugerido por Ballestero, representadas no domínio da média/desvio-padrão e no domínio da média/semidesvio-padrão, vemos claramente que, no período compreendido entre 2011 e 2021, ambas apresentam uma inclinação positiva, indicando, as fronteiras apresentadas, a habitual relação entre a rentabilidade e o risco, esperada pela teoria financeira, ou seja, para se incorrer em mais risco um investidor exige uma maior rentabilidade.

Podemos igualmente ver que, quer numa dimensão quer noutra, as fronteiras não são exatamente iguais. A abordagem tradicional, que quantifica o risco através da variância/desvio-padrão, e a abordagem baseada no risco negativo, que quantifica o risco através da semivariância/semidesvio-padrão, parecem avaliar o risco da mesma forma quando são consideradas carteiras com rentabilidades elevadas, sugerindo carteiras eficientes cada vez mais semelhantes, à medida que se consideram rentabilidades cada vez mais altas (propondo mesmo carteiras de investimento iguais para os dois níveis de rentabilidade mais altos disponíveis). Esta ideia pode ser observada através da análise das próprias fronteiras e pode ser comprovada, em termos numéricos, no Anexo 6 e no Anexo 7, que mostram explicitamente como cada carteira é constituída para cada nível de rentabilidade. É igualmente de notar que a carteira de semivariância mínima, estimada pelo modelo de Ballestero, no domínio da média/desvio-

padrão, não se encontra na zona eficiente da própria fronteira E-SV, pois nesta fronteira existe pelo menos uma carteira que oferece, para o mesmo nível de risco, rentabilidades mais altas.

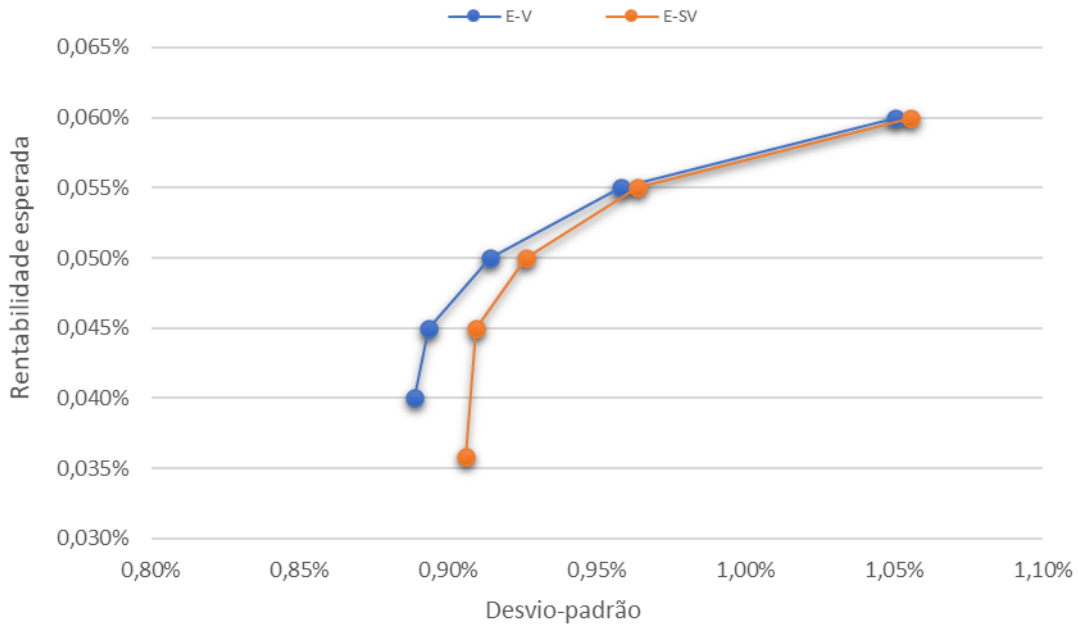
Aparentemente, a principal diferença entre ambos os métodos de quantificar o risco reside na forma como cada abordagem avalia o risco das carteiras eficientes de menor risco relativo, que oferecem, também, naturalmente, rentabilidades mais baixas. Entendendo que existe, entre estas abordagens, uma diferença na avaliação do risco, principalmente quando consideramos carteiras eficientes que oferecem menor risco e menor rentabilidade, põe-se a questão: qual será a melhor abordagem a seguir quando temos o intuito de aplicar as nossas poupanças num investimento com pouco risco?

Através da análise gráfica das fronteiras não é possível chegarmos a essa conclusão. Como podemos ver, olhando para os pontos que representam carteiras de menor risco e rentabilidade, quando a quantificação do risco é feita através do desvio-padrão, a metodologia tradicional apresenta carteiras com uma melhor relação rentabilidade/risco que a metodologia das *downside risk measures*, porém quando a quantificação do risco é feita usando o semidesvio-padrão a metodologia das *downside risk measures* apresenta uma melhor relação rentabilidade/risco que a metodologia tradicional.

Estas são algumas das respostas obtidas através da análise feita às fronteiras eficientes, quando o peso de cada ativo não pode exceder 5% do total da carteira. No entanto, seria interessante termos representações gráficas que mostrem a diferença entre uma carteira com restrições mais rigorosas e uma carteira com restrições menos rígidas. Assim, de modo a não termos uma restrição sobre os pesos dos ativos na carteira tão forte, tendo igualmente em atenção que o modelo sugerido por Ballestero (2005) necessita que a diversificação da carteira seja considerável (para que o risco específico tenda assintoticamente para zero), foram estimadas novamente as fronteiras eficientes, limitando o peso relativo máximo de cada ação a 10% do total da carteira.

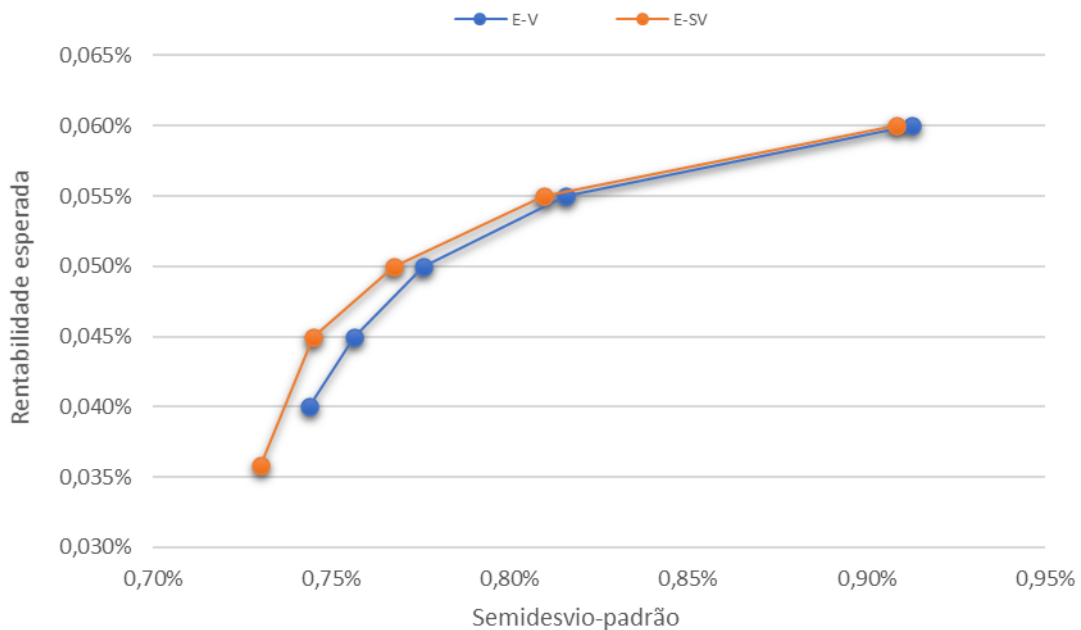
Quando a restrição imposta aos pesos relativos de cada ação na carteira é a de que o peso de cada um dos ativos na carteira não pode ser superior a 10%, obtemos as seguintes representações gráficas:

Figura 3 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/desvio-padrão, com restrições a 10%, cotações ajustadas para *stock-splits* – 19/05/2011 a 07/05/2021



Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

Figura 4 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/semidesvio-padrão, com restrições a 10%, cotações ajustadas para *stock-splits* – 19/05/2011 a 07/05/2021



Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

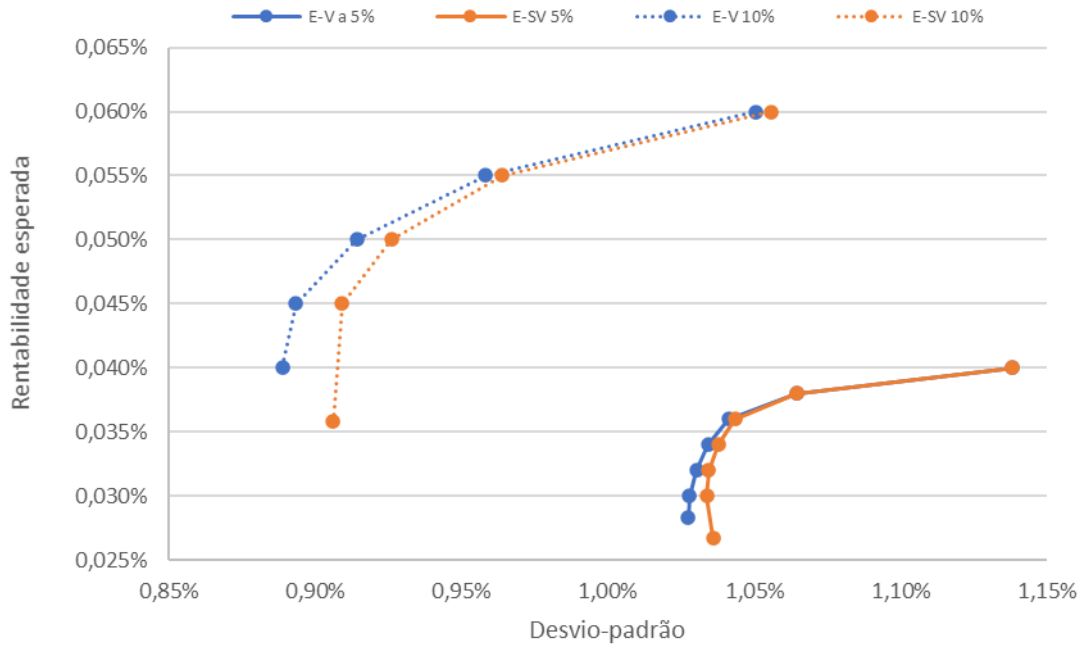
Igualmente nestas figuras, vemos que as fronteiras apresentadas retratam, entre 2011 e 2021, uma relação positiva entre rentabilidade e risco, indo ao encontro da teoria financeira, quer quando é utilizado o modelo de Markowitz, quer quando é utilizado o modelo sugerido por Ballesterro (2005).

Também nestes gráficos se mantêm as análises feitas anteriormente. As fronteiras eficientes estimadas, segundo cada uma das metodologias, são diferentes, sendo muito semelhantes quando quantificam o risco de carteiras eficientes com maiores rentabilidades, mas consideravelmente distintas quando analisam carteiras eficientes com rentabilidades menores. Novamente voltamos a observar que, à medida que são consideradas rentabilidades mais altas, as carteiras eficientes, construídas usando cada uma das abordagens, são cada vez mais semelhantes, algo visível no Anexo 8 e no Anexo 9 .

Mais uma vez, através da análise gráfica das fronteiras, não é possível chegarmos a uma conclusão sobre qual a melhor abordagem a considerar, quando se está a planear fazer um investimento no mercado de capitais português, sendo mais eficiente a abordagem tradicional quando o risco é representado pelo desvio-padrão e mais eficiente a abordagem alternativa do risco negativo quando o risco é representado pelo semidesvio-padrão.

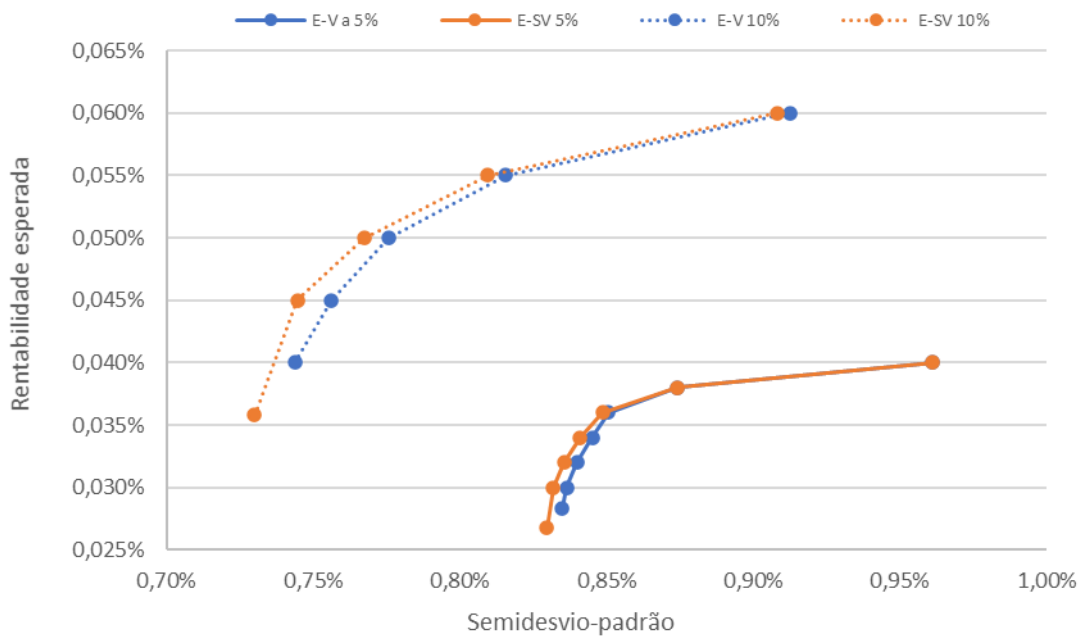
Há, contudo, algo interessante a retirar do facto de se ter permitido que o peso máximo de uma ação na carteira passasse de 5% para 10%. Todas as carteiras agora estimadas permitem, como seria expectável, rentabilidades mais altas com um menor grau de risco. Olhemos para os pontos com maiores rentabilidades, presentes nas duas figuras abaixo, onde colocamos nos mesmos gráficos as fronteiras com a restrição de 5% e as fronteiras com a restrição de 10%. Como podemos ver na Figura 5 e na Figura 6, quando a restrição sobre o peso dos ativos é de 5%, a rentabilidade máxima possível é de 0.04% ao dia, tendo de se suportar um desvio-padrão de 1.138% e/ou um semidesvio-padrão de 0.961%; porém, quando a restrição sobre o peso dos ativos é de 10%, a rentabilidade máxima possível é de 0.06% ao dia, suportando-se um desvio-padrão a rondar 1.06% e um semidesvio-padrão a rondar 0.91%. Estes resultados demonstram que, ao serem impostos limites menos “rigorosos” aos pesos dos ativos na carteira, é possível um investidor ter uma rentabilidade mais alta com um menor risco, quando a representação do risco é feita através do desvio-padrão e do semidesvio-padrão.

Figura 5 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/desvio-padrão, com restrições a 5% e a 10%, cotações ajustadas para *stock-splits* – 19/05/2011 a 07/05/2021



Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

Figura 6 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/semidesvio-padrão, com restrições a 5% e a 10%, cotações ajustadas para *stock-splits* – 19/05/2011 a 07/05/2021



Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

4.2 COTAÇÕES AJUSTADAS PARA STOCK-SPLITS E DIVIDENDOS

Feita a análise anterior, usando dados ajustados para *stock-splits*, será enriquecedor entendermos de que modo a distribuição de dividendos (ou a informação de que serão pagos dividendos) altera as cotações, influenciando a rentabilidade e a volatilidade das ações. Será que a informação de que haverá uma distribuição de dividendos, num futuro próximo, leva a que relação entre rentabilidade e risco exista e a que esta se mantenha ao longo do período? Será que, ajustando as series históricas, tendo em conta os dividendos, os modelos apresentados por Markowitz e por Ballestero consideram de igual modo o risco de uma aplicação de capital?

De modo a conseguirmos respostas às questões anteriores, serão utilizadas as cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos. Estas cotações são suavizadas antes e depois das datas de ex-dividendo das diversas empresas, não aparecendo nestas series a apreciação das cotações, devido a determinados investidores desejarem receber os dividendos que serão distribuídos, comprando ações perto da data de pagamento dos mesmos, nem a depreciação subsequente à data de ex-dividendo.

Com as cotações diárias são obtidas as rentabilidades diárias das 25 ações em estudo, entre 19 de maio de 2011 e 7 de maio de 2021:

Tabela 8 Ilustração das rentabilidades diárias das 25 ações, cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos - 19/05/2011 a 07/05/2021

Data	ALTR.LS	BCP.LS	TDSA.LS
19/05/2011	0,009036282739	0,011173324345	0,0000000000
20/05/2011	0,001790676623	-0,022099321644	-0,036363262537
...
...
07/05/2021	0,018518518519	0,025923016496	0,017738359202

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes na plataforma *Yahoo Finance*

Utilizando estas rentabilidades são calculadas as rentabilidades médias de todas estas ações, sendo também estimada a matriz de variâncias e covariâncias, definidas da seguinte forma:

Tabela 9 Rentabilidades médias das 25 ações, cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos - 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 10

Rentabilidades médias	
ALTR.LS	0,000959016
BCP.LS	-0,000633335
CFN.LS	0,000184656
COR.LS	0,001191785
EDP.LS	0,000602767
...	...
TDSA.LS	-0,000134508

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes na plataforma *Yahoo Finance*

Tabela 10 Matriz das variâncias/covariâncias, matriz V, das 25 ações, cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos - 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 11

	ALTR.LS	BCP.LS	TDSA.LS
ALTR.LS	0,000439	0,000252	0,000178
BCP.LS	0,000252	0,001047	0,000299
...
...
TDSA.LS	0,000178	0,000299	0,00105

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes na plataforma *Yahoo Finance*

Com estes dados é já possível ser estimado o modelo de Markowitz. Apesar de já termos as rentabilidades médias das ações, para conseguirmos construir a fronteira eficiente na dimensão da média/semidesvio-padrão é ainda necessário obter a matriz das semivariâncias e das cosemivariâncias, que resulta da subtração da matriz V por B. O valor da semivariância média será o mesmo que foi obtido no subponto anterior, uma vez que o PSI-20 continuará a ser a *proxy* da carteira de mercado.

Os betas, conseguidos com estas cotações, são apresentados de seguida:

Tabela 11 Betas das 25 ações, cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos - 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 12

ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	TDSA.LS
1,053476	1,688803	0,571685	0,389694	0,880282	0,961683

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

Detendo todos estes valores, podemos obter a matriz B, descrita da seguinte forma:

Tabela 12 Matriz B, cujo elemento genérico é $\beta_i\beta_jv(E_M < R_{Mt})$, cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 13

	ALTR.LS	BCP.LS	TDSA.LS
ALTR.LS	7,71E-05	0,000124	7,04E-05
BCP.LS	0,000124	0,000198	0,000113
...
...
TDSA.LS	7,04E-05	0,000113	6,43E-05

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

Conseguida a matriz B temos reunidas as condições necessárias para se estimar a matriz das semivariâncias e cosemivariâncias, resultante da subtração da matriz V pela matriz B. A matriz das semivariâncias e cosemivariâncias é definida da seguinte forma:

Tabela 13 Matriz das semivariâncias/cosemivariâncias, matriz V_s , cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021 - Versão completa no Anexo 14

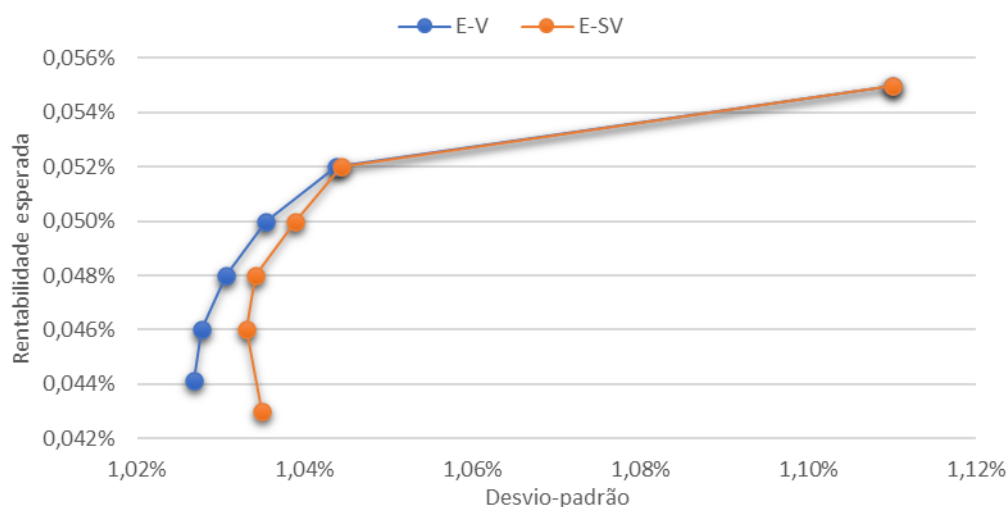
	ALTR.LS	BCP.LS	TDSA.LS
ALTR.LS	0,000362	0,000128	0,000108
BCP.LS	0,000128	0,000849	0,000186
...
...
TDSA.LS	0,000108	0,000186	0,000986

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

Com estes dados podemos agora estimar a fronteira eficiente no domínio da média/desvio-padrão, bem como a fronteira eficiente no domínio da média/semidesvio-padrão, colocando-as nas dimensões da média/desvio-padrão e da média/semidesvio-padrão.

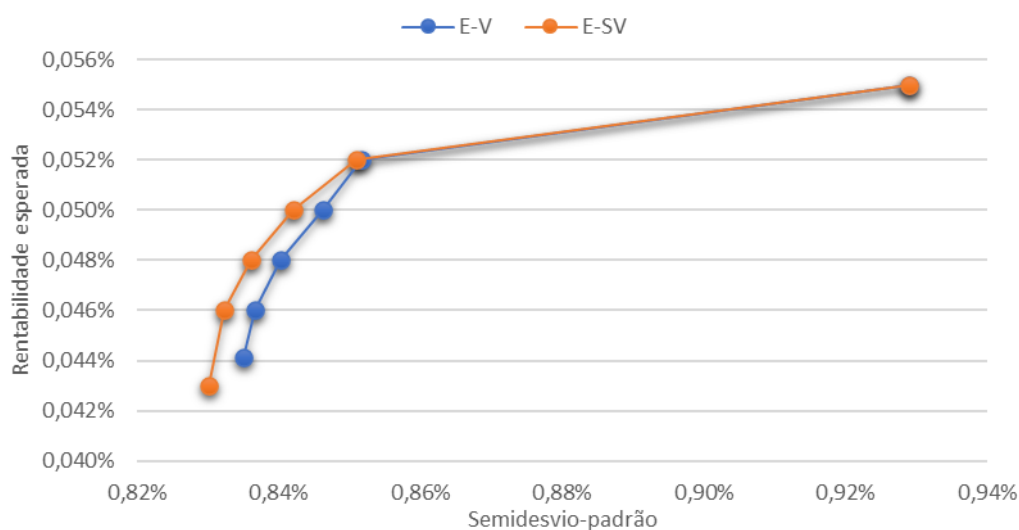
As representações gráficas das fronteiras eficientes, quando a restrição imposta é a de que o peso de cada um dos ativos na carteira não pode ser superior a 5%, são as seguintes:

Figura 7 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/desvio-padrão, com restrições a 5%, cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021



Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

Figura 8 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/semidesvio-padrão, com restrições a 5%, cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021



Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

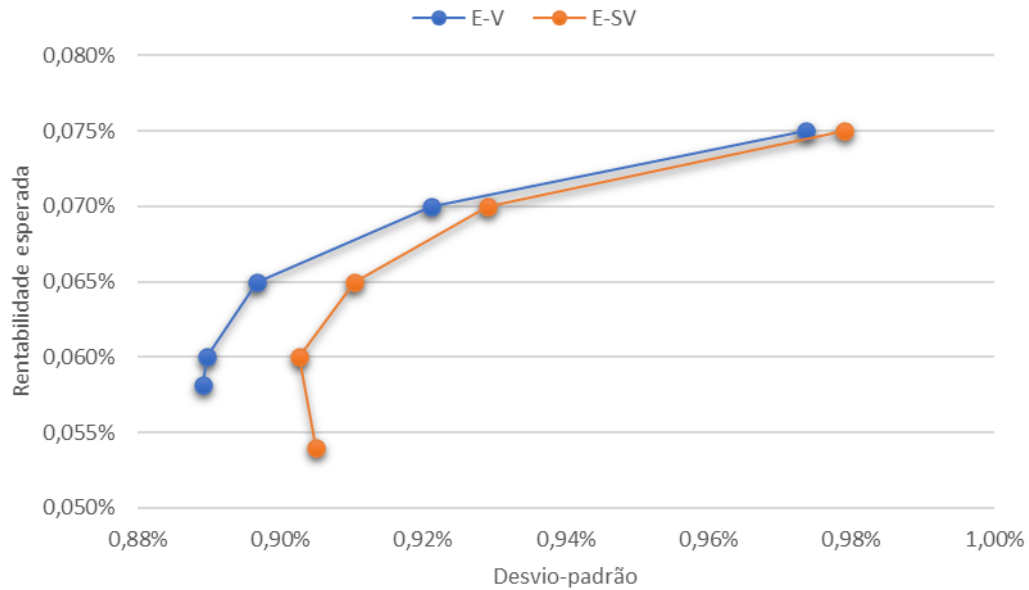
As figuras acima apresentadas, com base em dados ajustados para *stock-splits* e dividendos, apresentam as fronteiras eficientes, segundo o modelo de Markowitz (E-V) e segundo o modelo de Ballestero (E-SV), na dimensão da média/desvio-padrão e na dimensão da média/semidesvio-padrão. Com as representações de ambas as fronteiras, na mesma dimensão,

conseguimos ver claramente que, quer quando o risco é representado pelo desvio-padrão, quer quando o risco é representado pelo semidesvio-padrão, a relação entre rentabilidade e risco é positiva, ao longo do período compreendido entre 2011 e 2021. Apesar de agora a nossa análise ter por base cotações ajustadas para *stock-splits* e para dividendos, ao invés de cotações que levam apenas em conta *stock-splits*, voltamos a ver que as fronteiras, estimadas pelos modelos, demonstram uma relação positiva entre rentabilidade e risco. É de notar, porém, que apesar dos níveis de risco estimados serem semelhantes, quando usamos um ou outro tipo de cotações, as rentabilidades dos ativos não aparentam ser as mesmas. Enquanto no subponto anterior as rentabilidades estavam compreendidas entre 0.027% e 0.04%, usando estes novos dados as rentabilidades ficam compreendidas entre 0.043% e 0.055%.

Também, nas duas figuras imediatamente acima apresentadas, vemos que as fronteiras estimadas, segundo cada um dos modelos, apresentam diferenças consideráveis, principalmente para os níveis de rentabilidade menores. É de notar que, como já tinha sido observado no subponto anterior, as fronteiras tendem a convergir à medida que se procuram rentabilidades mais elevadas. Dito de outro modo, os modelos estimam diferentes carteiras eficientes, quando tentam encontrar as combinações ótimas de ações para níveis de baixo risco, mas, quando são desejadas rentabilidades mais elevadas, as carteiras eficientes, segundo o modelo de Markowitz e o modelo de Ballester, são idênticas. Esta realidade é bem visível na Figura 7 e na Figura 8 e no Anexo 15 e no Anexo 16. É igualmente de notar que, como se viu no subponto anterior, a carteira de semivariância mínima, estimada pelo modelo de Ballester, no domínio da média/desvio-padrão, não se encontra na zona eficiente da própria fronteira E-SV, pois nesta fronteira existe pelo menos uma carteira que oferece, para o mesmo nível de risco, rentabilidades mais altas. Através das figuras anteriores, mais uma vez, não é possível identificar a melhor abordagem a utilizar, apenas que as abordagens são diferentes, principalmente quando são consideradas carteiras de menor risco.

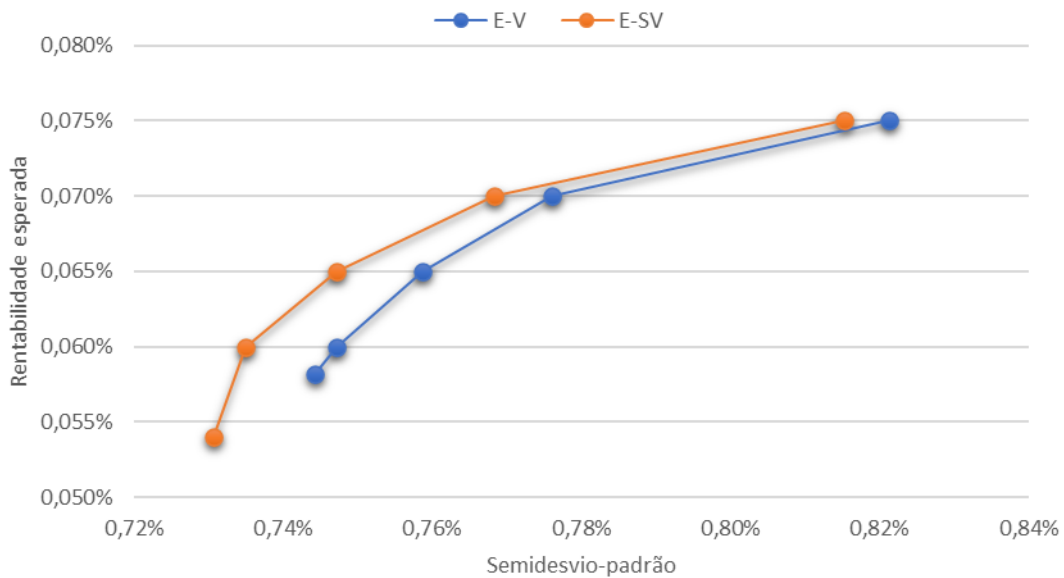
Consideremos agora as carteiras eficientes, segundo cada um dos modelos, quando se permite que um determinado ativo represente até 10% da carteira. Quando o peso de cada um dos ativos na carteira não pode ser superior a 10%, as representações gráficas das fronteiras eficientes são as seguintes:

Figura 9 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/desvio-padrão, com restrições a 10%, cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021



Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

Figura 10 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/semidesvio-padrão, com restrições a 10%, cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021



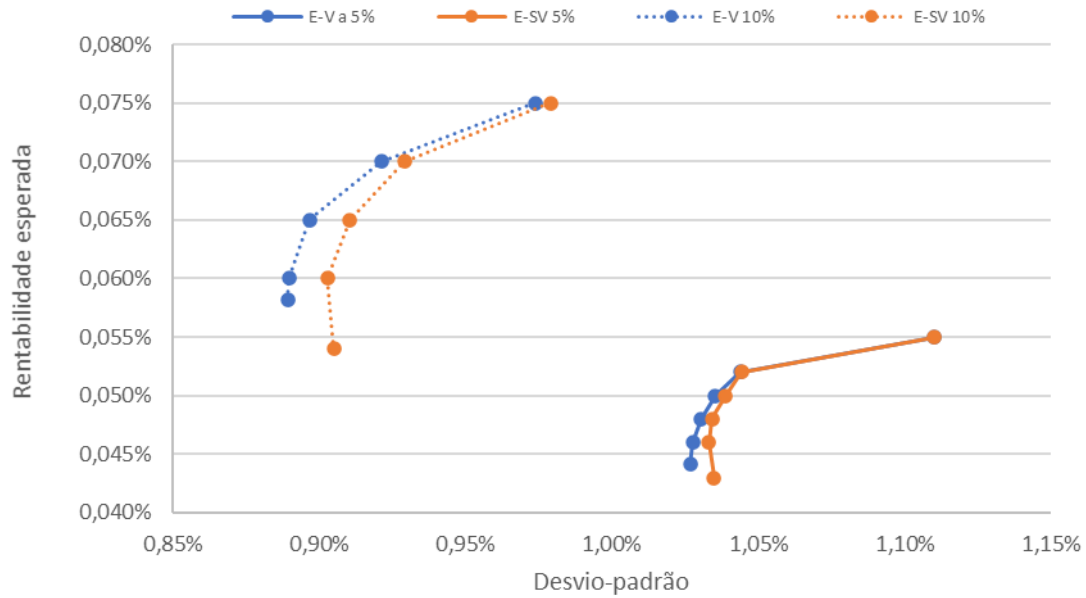
Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

De igual modo, nestas figuras, vemos as conclusões apresentadas no subponto anterior, quando a restrição sobre os pesos relativos dos ativos passa de 5% para 10%. As fronteiras eficientes estimadas pelos diferentes modelos, na dimensão média/desvio-padrão e na dimensão média/semidesvio-padrão, demonstram que, no mercado acionista português, quando é considerado todo o período temporal entre 2011 e 2021, existiu uma relação positiva entre a rentabilidade e o risco, sendo obtidos resultados idênticos aos conseguidos no subponto anterior. Também aqui se pode ver que as fronteiras são consideravelmente diferentes quando os modelos de Markowitz e de Ballestero estimam carteiras com menor risco, porém, à medida que se consideram rentabilidades cada vez mais altas as fronteiras tendem a convergir, sendo as carteiras sugeridas por cada abordagem cada vez mais semelhantes, algo visível na Figura 9 e na Figura 10, bem como no Anexo 17 e no Anexo 18.

Todos estes resultados são idênticos aos obtidos no subponto anterior, quando se permite que o peso máximo de um ativo na carteira passe a ser igual a 10%, porém há diferenças ao nível das rentabilidades esperadas e do risco. No subponto anterior, quando se permitia que um ativo fosse no máximo igual a 10% da carteira, as rentabilidades estimadas encontravam-se compreendidas entre 0.0358% e 0.06%, enquanto agora as rentabilidades estão situadas entre 0.054% e 0.075%. Também os intervalos dos desvios-padrão, entre 0.889% e 0.979%, e dos semidesvios-padrão, entre 0.73% e 0.82%, quando são usadas as cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos, começam a ser diferentes dos intervalos obtidos no subponto anterior para os desvios-padrão, entre 0.889% e 1.056%, e para os semidesvios-padrão, entre 0.73% e 0.913%.

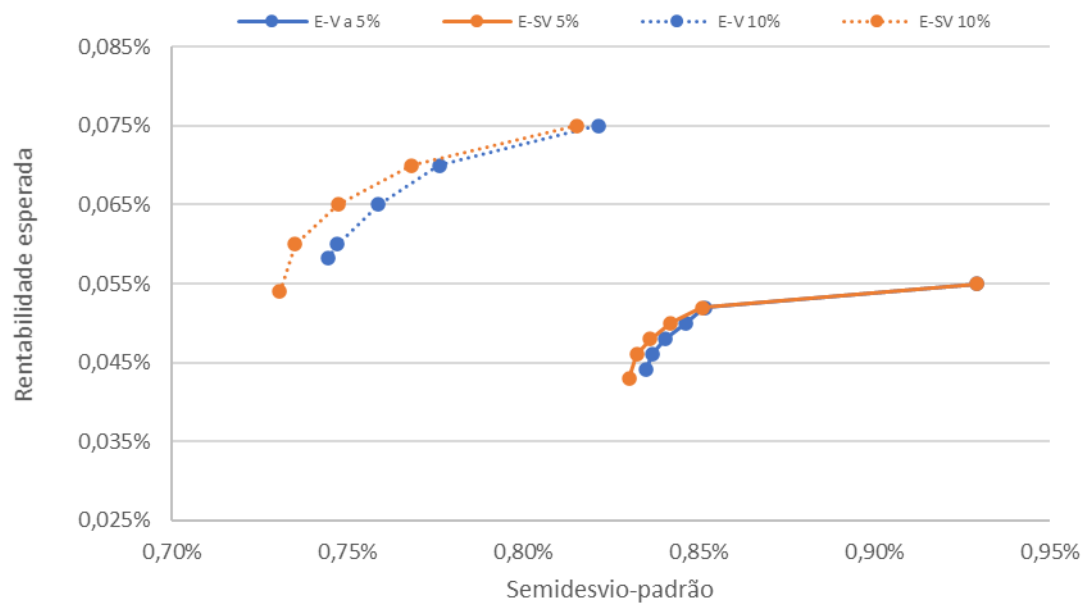
Quando permitimos que uma ação possa constituir no máximo 10% da carteira de investimento, ao invés de 5%, usando um modelo e outro, conseguimos carteiras eficientes que proporcionam uma maior rentabilidade e menor risco que as carteiras eficientes estimadas quando uma ação não pode constituir mais do que 5% da carteira. Isto é algo visível na Figura 11 e na Figura 12.

Figura 11 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/desvio-padrão, com restrições a 5% e a 10%, cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021



Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

Figura 12 Fronteiras eficientes, segundo os modelos de Markowitz e de Ballestero, no domínio da média/semidesvio-padrão, com restrições a 5% e a 10%, cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021



Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes nas plataformas *Yahoo Finance* e *Investing.com*

Através das figuras anteriores, mais uma vez, não é possível identificarmos a melhor abordagem a utilizar, apenas que as abordagens são diferentes, principalmente quando são consideradas carteiras de menor risco, tendo o modelo de Markowitz um melhor desempenho a estimar carteiras eficientes quando o risco é representado pelo desvio-padrão e tendo o modelo de Ballesterio um melhor desempenho quando o risco é representado pelo semidesvio-padrão.

Comparando os valores obtidos neste subponto com o subponto anterior podemos ver que a principal diferença reside nas rentabilidades esperadas, apesar disso em nada alterar as conclusões fundamentais dos modelos. A relação rentabilidade/risco, retratada pelas fronteiras eficientes, é nos dois subpontos positiva. Também, nos dois subpontos, as fronteiras estimadas pelos modelos são diferentes quando são consideradas rentabilidades baixas, começando a convergir à medida que são estimadas rentabilidades mais altas. É, igualmente, impossível determinarmos, nos dois subpontos, através das representações gráficas, qual o modelo mais indicado quando pretendemos avaliar o mercado acionista português. Assim sendo, a única diferença considerável entre os dois subpontos passa pelas rentabilidades exigidas num e noutro. As rentabilidades diárias médias neste subponto, conseguidas através das cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos, são consideravelmente mais elevadas que as rentabilidades do subponto anterior conseguidas por meio das cotações ajustadas só para *stock-splits*.

4.3 DISTRIBUIÇÃO DAS RENTABILIDADES

Já que, com a análise que é feita às figuras onde estão representadas as curvas de ambos os modelos, não é possível chegarmos a uma conclusão sobre qual é o modelo mais indicado para a realidade portuguesa, iremos analisar as distribuições das rentabilidades das 25 ações, quando as cotações são ajustadas tendo em conta *stock-splits* e quando estas são ajustadas considerando *stock-splits* e a distribuição de dividendos. É este o critério que será utilizado nesta investigação, pois, segundo diversos autores, como Post e Van Vliet (2004a), Estrada (2006), Pereira (2007) e Rigamonti (2020), quando o pressuposto da normalidade não se verifica, as abordagens baseadas no *downside risk* têm um melhor desempenho a representar o risco de uma aplicação financeira que as abordagens ditas tradicionais.

É importante referir, contudo, que das análises feitas às figuras não saiu uma resposta clara sobre qual o melhor modelo a utilizar, uma vez que destas fronteiras apenas seria possível

percebermos se as fronteiras estimadas pela metodologia tradicional e pela metodologia alternativa das medidas do risco negativo são exatamente iguais ou se há diferenças, bem como quais essas diferenças. Isto sucede pelo facto de no modelo de Markowitz ser feita a minimização do risco, representado pela variância/desvio-padrão, para cada nível de rentabilidade e de no modelo de Ballesteros ser feita a minimização do risco, representado pela semivariância/semidesvio-padrão, para cada nível de rentabilidade. Assim sendo, na dimensão média/desvio-padrão e na dimensão média/semidesvio-padrão, nunca poderão existir pontos acima das fronteiras estimadas através do método tradicional e através do método das *downside risk measures*, respetivamente. Ou seja, a fronteira eficiente no domínio da média/desvio-padrão, por exemplo, nunca poderia ser superior à fronteira eficiente no domínio da média/semidesvio-padrão, em ambas as dimensões, podendo apenas, no limite, serem iguais.

Com a argumentação dos autores anteriormente referidos, sobre o melhor desempenho das medidas negativas do risco face às medidas tradicionais, e esclarecido o porquê de as representações gráficas apenas poderem identificar, no limite, a igualdade dos métodos, algo que não foi observado, iremos analisar as distribuições das rentabilidades das 25 ações portuguesas em questão de forma individual e conjunta.

A análise a nível individual é feita observando os valores de assimetria e curtose de cada uma das distribuições, bem como as estatísticas de teste da assimetria e da curtose destas distribuições, sendo ainda aplicados os testes de normalidade Shapiro-Wilk e Kolmogorov-Smirnov.

Para se analisar a distribuição conjunta das rentabilidades destas ações serão utilizados os testes de normalidade Mardia mSkewness multivariate test, Mardia mKurtosis multivariate test, Henze-Zirkler e Doornik-Hansen.

Os resultados obtidos para as distribuições individuais, das rentabilidades que usam cotações ajustadas para stock-splits e das rentabilidades que usam as cotações ajustadas para stock-splits e para a distribuição de dividendos, são os seguintes:

Tabela 14 Estatísticas descritivas das rentabilidades das 25 ações em estudo e respectivos testes de normalidade individual, cotações ajustadas para *stock-splits* – 19/05/2011 a 07/05/2021 – 2550 observações

Ações	Assimetria	Estatística do teste	Curtose	Estatística do teste	Shapiro-Wilk	Kolmogorov-Smirnov
					Estatística do teste (p-value)	Estatística do teste (p-value)
ALTR.LS	-0.0715017	-1.4792	6.862083	39.928	10.558 (0.000)	0.0556 (0.000)
BCP.LS	0.5777912	12.0625	8.726634	59.196	11.550 (0.000)	0.0765 (0.000)
CFN.LS	1.188526	24.771	12.9688	102.949	13.583 (0.000)	0.1150 (0.000)
COR.LS	0.3717684	7.771	6.302267	34.196	10.683 (0.000)	0.0815 (0.000)
EDP.LS	-0.5314298	-11.063	9.18244	63.918	11.476 (0.000)	0.0543 (0.000)
EDPR.LS	-0.1645413	-3.417	7.346657	45.01	11.117 (0.000)	0.0678 (0.000)
EGL.LS	0.9299927	19.396	14.62018	120.062	12.342 (0.000)	0.0846 (0.000)
GALP.LS	0.1614944	3.354	10.47081	77.165	11.504 (0.000)	0.0702 (0.000)
GLINT.LS	0.9564925	19.958	10.34858	76	13.153 (0.000)	0.2253 (0.000)
IBS.LS	1.655278	34.542	37.08762	352.392	14.955 (0.000)	0.1824 (0.000)
INA.LS	1.071621	22.354	10.58415	78.34	12.681 (0.000)	0.1934 (0.000)
IPR.LS	1.190479	24.813	10.8579	81.165	12.568 (0.000)	0.1183 (0.000)
JMT.LS	-0.0392106	-0.813	8.210513	53.825	11.243 (0.000)	0.0600 (0.000)
MAR.LS	1.189952	24.813	12.89959	102.247	13.027 (0.000)	0.1258 (0.000)
NBA.LS	1.343662	28	28.96667	268.144	14.519 (0.000)	0.1243 (0.000)
NOS.LS	0.323414	6.729	7.769927	49.268	11.203 (0.000)	0.0678 (0.000)
NVG.LS	-0.1682466	-3.604	6.307847	34.32	10.145 (0.000)	0.0540 (0.000)
PHR.LS	0.8985225	18.729	12.15646	94.567	13.224 (0.000)	0.1169 (0.000)
RAM.LS	0.2773646	5.792	13.51396	108.577	14.338 (0.000)	0.1514 (0.000)
RENE.LS	-0.6327464	-12.5	11.03488	82.784	12.577 (0.000)	0.0678 (0.000)
SEM.LS	1.507214	31.542	26.95182	248.217	12.242 (0.000)	0.0579 (0.000)
SNC.LS	0.4622328	9.646	7.529299	46.784	11.477 (0.000)	0.0810 (0.000)
SON.LS	0.0124055	0.271	4.909422	19.784	8.882 (0.000)	0.0509 (0.000)
SONI.LS	41.19892	858.646	1951.714	20121.41	18.385 (0.000)	0.2999 (0.000)
TDSA.LS	0.7348028	15.333	8.372242	55.505	12.024 (0.000)	0.1299 (0.000)

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes na plataforma *Yahoo Finance*

Tabela 15 Estatísticas descritivas das rentabilidades das 25 ações em estudo e respectivos testes de normalidade individual, cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021 – 2550 observações

	Assimetria	Estatística do teste	Curtose	Estatística do teste	Shapiro-Wilk	Kolmogorov-Smirnov
					Estatística do teste (p-value)	Estatística do teste (p-value)
ALTR.LS	-0.0041978	-0.087	6.785103	39.155	10.425 (0.000)	0.0552 (0.000)
BCP.LS	0.5772044	11.913	8.725207	59.212	11.549 (0.000)	0.0762 (0.000)
CFN.LS	1.186476	24.489	12.97093	103.105	13.579 (0.000)	0.1142 (0.000)
COR.LS	0.4688695	9.677	6.731728	38.603	10.948 (0.000)	0.0815 (0.000)
EDP.LS	-0.4332637	-8.942	9.285174	65.001	11.328 (0.000)	0.0531 (0.000)
EDPR.LS	-0.1675299	-3.458	7.347299	44.967	11.116 (0.000)	0.0675 (0.000)
EGL.LS	0.9372389	19.344	14.63314	120.289	12.334 (0.000)	0.0846 (0.000)
GALP.LS	0.1539519	3.177	10.53443	77.916	11.525 (0.000)	0.0694 (0.000)
GLINT.LS	0.9564925	19.742	10.34858	75.995	13.153 (0.000)	0.2253 (0.000)
IBS.LS	1.65325	34.123	37.06473	352.189	14.951 (0.000)	0.1814 (0.000)
INA.LS	1.071621	22.118	10.58415	78.43	12.681 (0.000)	0.1934 (0.000)
IPR.LS	1.190479	24.571	10.8579	81.26	12.568 (0.000)	0.1183 (0.000)
JMT.LS	-0.0425911	-0.879	8.247851	54.277	11.258 (0.000)	0.0597 (0.000)
MAR.LS	1.189952	24.56	12.89959	102.367	13.027 (0.000)	0.1258 (0.000)
NBA.LS	1.811181	37.382	29.73038	276.367	14.440 (0.000)	0.1239 (0.000)
NOS.LS	0.4302749	8.881	7.763051	49.265	11.162 (0.000)	0.0681 (0.000)
NVG.LS	-0.0365942	-0.755	6.034884	31.399	9.736 (0.000)	0.0520 (0.000)
PHR.LS	0.9740889	20.105	12.30316	96.201	13.272 (0.000)	0.1183 (0.000)
RAM.LS	0.5475538	11.301	13.60804	109.692	14.354 (0.000)	0.1539 (0.000)
RENE.LS	-0.2601355	-5.369	10.43829	76.923	11.996 (0.000)	0.0676 (0.000)
SEM.LS	1.54589	31.907	27.50825	253.392	12.282 (0.000)	0.0582 (0.000)
SNC.LS	0.4671692	9.642	7.532682	46.883	11.471 (0.000)	0.0805 (0.000)
SON.LS	0.0712458	1.471	5.042559	21.141	9.026 (0.000)	0.0527 (0.000)
SONI.LS	41.19892	850.337	1951.714	20146.05	18.385 (0.000)	0.2999 (0.000)
TDSA.LS	0.7317831	15.104	8.36971	55.537	12.020 (0.000)	0.1297 (0.000)

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes na plataforma *Yahoo Finance*

Estudando as tabelas acima verificamos que a hipótese de normalidade das distribuições das rentabilidades, quer quando são usadas cotações ajustadas para *stock-splits*, quer quando são usadas cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos, é claramente rejeitada.

A conclusão a que chegamos, através das tabelas, é que o facto de os dados serem ajustados, levando em conta diferentes acontecimentos, em quase nada altera os resultados dos testes de normalidade destes 25 ativos.

Vemos que, em ambas as tabelas, as distribuições das rentabilidades de 18 dos 25 ativos são assimétricas à direita, com um nível de significância de 5%, sendo outras 3 ações assimétricas à esquerda, com um nível de significância de 5%. Os valores de curtose, bem como as estatísticas de teste, apresentados na Tabela 14 e na Tabela 15, mostram que todas as distribuições são leptocúrticas. Olhando, igualmente, para as duas tabelas imediatamente acima, vemos que os testes de normalidade Shapiro-Wilk e Kolmogorov-Smirnov apontam para a rejeição da hipótese nula de que as distribuições das rentabilidades individuais de cada uma destas ações seguem uma distribuição normal, com níveis de confiança de 95% e 99%. Esta rejeição da normalidade é verificada para todas as ações, quer quando são considerados os dados ajustados apenas para *stock-splits*, quer quando os dados são ajustados para *stock-splits* e dividendos. Este resultados, que levam à rejeição da hipótese de normalidade das distribuições, são condizentes com os resultados obtidos por Pereira (2007), que também rejeita a hipótese de que as rentabilidades das ações, no mercado acionista português seguem uma distribuição normal, a nível individual.

Ainda que tenhamos concluído que as distribuições individuais das rentabilidades destas ações são não-normais, Aparicio e Estrada (2001) referem que a utilização de modelos assentes na média/variância (ou desvio-padrão) é justificada com o argumento de que a distribuição das rentabilidades dos ativos é conjuntamente normal. Assim, serão feitos os testes multivariados Mardia mSkewness multivariate test, Mardia mKurtosis multivariate test, Henze-Zirkler e Doornik-Hansen, de modo a ser investigada a distribuição conjunta das rentabilidades destes 25 ativos.

Os resultados destes testes, calculados através do programa *Stata*, são apresentados de seguida:

Tabela 16 Testes de normalidade conjunta das 25 ações, cotações ajustadas para *stock-splits* – 19/05/2011 a 07/05/2021

Teste multivariados de normalidade	Estatística do teste	p-value
Mardia mSkewness multivariate test	7.80E+05	0.0000
Mardia mKurtosis multivariate test	2.73E+06	0.0000
Henze-Zirkler	1.75E+07	0.0000
Doornik-Hansen	2.26E+06	0.0000

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes na plataforma *Yahoo Finance*

Tabela 17 Testes de normalidade conjunta das 25 ações, cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos – 19/05/2011 a 07/05/2021

Teste multivariados de normalidade	Estatística do teste	p-value
Mardia mSkewness multivariate test	7.82E+05	0.0000
Mardia mKurtosis multivariate test	2.73E+06	0.0000
Henze-Zirkler	1.51E+07	0.0000
Doornik-Hansen	2.25E+06	0.0000

Fonte: Elaboração Própria, com base em dados presentes na plataforma *Yahoo Finance*

Tendo em conta as tabelas acima apresentadas, vemos claramente que é rejeitada a hipótese nula, que afirma que a distribuição conjunta das rentabilidades destes ativos é normal. Esta rejeição é verificada em todos os testes multivariados usados, quer quando as rentabilidades das ações são obtidas através de cotações ajustadas para *stock-splits*, quer quando as rentabilidades são obtidas através de cotações ajustadas levando em conta *stock-splits* e dividendos.

Todos estes resultados acerca das distribuições individuais e conjuntas das rentabilidades no mercado de capitais português, sugerem que as medidas do risco negativo, neste caso a semivariância e o semidesvio-padrão, serão mais indicadas e úteis que as medidas tradicionais, a variância e o desvio-padrão, quando desejamos identificar e quantificar o risco a que nos estamos a expor ao tomarmos uma posição no mercado de capitais em Portugal. Isto implica também que, entre o modelo de Markowitz e o modelo de Ballesterro, o modelo que melhor quantifica o risco de um investimento na Bolsa de Valores de Lisboa é o modelo de Ballesterro.

5. CONCLUSÕES

A relação rentabilidade/risco é uma das bases da teoria financeira. A relação entre estas variáveis, ao longo das últimas décadas, foi amplamente estudada, existindo um grande número de trabalhos que provam, empiricamente, que a relação entre a rentabilidade e o risco não é a descrita na teoria financeira. Muitos investigadores defendem a relação positiva entre o risco e a rentabilidade, outros investigadores encontraram evidência de que esta relação é negativa e alguns autores afirmam que estas variáveis não estão sequer relacionadas. Esta questão levou muitos autores a procurarem alternativas aos modelos tradicionais, como o modelo de Markowitz e o *Capital Asset Pricing Model*, de modo a encontrarem uma representação fiável do risco que permita determinar a relação entre o risco e a rentabilidade, sendo que um número crescente de autores considera as *downside risk measures*, como o semidesvio-padrão, representações do risco mais adequadas.

O presente trabalho foi desenvolvido com o intuito de ver uma questão respondida: Qual é a melhor forma de se medir o risco de uma aplicação financeira no mercado acionista português? Com esta questão em mente foram estimadas as fronteiras consideradas eficientes, segundo o modelo de Markowitz e segundo o modelo sugerido por Ballesterro (2005), nas dimensões da média/desvio-padrão e da média/semidesvio-padrão. Verificou-se que as fronteiras são diferentes, tendendo a convergir à medida que são consideradas rentabilidades mais altas. Isto quer dizer que os dois métodos diferem essencialmente na forma como avaliam os graus de menor risco, sendo importante averiguar qual o modelo a utilizar quando um investidor tem a intenção de aplicar o seu dinheiro num investimento com pouco risco.

Assim, visto que a partir das análises gráficas não é possível percebermos qual a melhor abordagem, foram testadas as distribuições das rentabilidades das ações individualmente e conjuntamente, uma vez que vários autores afirmam que as *downside risk measures*, como a semivariância e o semidesvio-padrão, representam melhor o risco de um investimento que as medidas tradicionais quando a distribuição das rentabilidades não é simétrica e normal. Os resultados mostram que as distribuições individuais, bem como a distribuição conjunta das rentabilidades das ações portuguesas estudadas não seguem uma distribuição normal, sendo, por isso, mais adequada a utilização das *downside risk measures* quando pretendemos quantificar o risco em que estamos a incorrer. Os resultados reportados, acerca das distribuições individuais e conjuntas das rentabilidades, foram obtidos quando são usadas quer cotações ajustadas para *stock-splits*, quer cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos.

Igualmente neste trabalho foi feita uma análise complementar que demonstra que o facto de serem impostos limites muito rigorosos aos pesos dos ativos na carteira, de modo a termos uma carteira muito diversificada, pode apenas ter o efeito contrário ao desejado. Foi demonstrado que, quando permitimos que uma ação represente no máximo 10% da carteira, em vez de se impor um limite máximo de 5%, conseguimos obter carteiras eficientes com menor risco e com rentabilidades mais altas.

Algumas das limitações do presente trabalho advêm do facto dos modelos, de modo a serem comparáveis e/ou serem aplicáveis, não permitirem que seja considerada a hipótese de serem feitas vendas a descoberto (*short-selling*) e do facto dos modelos necessitarem que seja imposto um limite máximo aos pesos dos ativos na carteira. O modelo sugerido por Ballestero (2005) necessita que sejam impostos limites máximos ao peso dos ativos na carteira, de modo a que existam ativos suficientes na carteira para esta ser considerada uma carteira suficientemente diversificada, tendendo o risco específico para zero. Por esta razão não é possível ser feita uma comparação entre as fronteiras eficientes com e sem restrições. Usando a semivariância negativa como medida do risco implica que o modelo não pode permitir *short-selling*, pois neste caso os desvios abaixo da média não são o risco a evitar, mas sim o que se deseja. Este trabalho apenas permite a comparação entre a semivariância/semidesvio-padrão e a variância/desvio-padrão, não analisando e/ou testando outras medidas de risco como o *value-at-risk*, por exemplo, sendo esta uma outra limitação.

Tendo estas limitações em conta, investigações futuras poderão, possivelmente, testar o desempenho da variância, da semivariância, do desvio-padrão e do semidesvio-padrão em comparação a tantas outras medidas de risco, como por exemplo beta, *downside beta* e o *value-at-risk*. Deve, de igual modo, ser feita no futuro uma investigação idêntica a esta, com base nas rentabilidades mensais das ações, visto que a alteração da frequência dos dados pode alterar consideravelmente a distribuição dos dados e, conseqüentemente, as conclusões obtidas.

BIBLIOGRAFIA

- Aparicio, F. M., & Estrada, J. (2001). Empirical Distributions of Stock Returns: European Securities Markets, 1990-95. *European Journal of Finance*, 7(1), 1–21.
- Artavanis, N., Diacogiannis, G., & Mylonakis, J. (2010). The D-CAPM: The Case of Great Britain and France. *International Journal of Economics and Finance*, 2(3), 25–38.
- Ballesteros, E. (2005). Mean-Semivariance Efficient Frontier: A Downside Risk Model for Portfolio Selection. *Applied Mathematical Finance*, 12(1), 1–15.
- Bowman, E. H. (1980). A Risk/Return Paradox for Strategic Management. *Sloan Management Review*, 21(4), 17–33.
- Brito, R. P., Sebastião, H., & Godinho, P. (2016). Efficient Skewness/Semivariance Portfolios. *Journal of Asset Management*, 17(5), 331–346.
- Chen, M. H. (2003). Risk and Return: CAPM and CCAPM. *Quarterly Review of Economics and Finance*, 43(2), 369–393.
- Cheremushkin, S. V. (2009). Why D-CAPM is a Big Mistake? The Incorrectness of the Cosemivariance Statistics. *SSRN Electronic Journal*.
- Conlon, T., & Cotter, J. (2013). Downside Risk and the Energy Hedger's Horizon. *Energy Economics*, 36(1), 371–379.
- Ekhholm, A., & Pasternack, D. (2001). The Negative News Threshold - an Explanation for Negative Skewness in Stock Returns. In *Swedish School of Economics and Business Administration* (Issue December).
- Estrada, J. (2000). The Cost of Equity in Emerging Markets : A Downside Risk Approach. *Emerging Markets Quarterly*, 4(Fall 2000), 19–30.
- Estrada, J. (2001). The Cost of Equity in Emerging Markets : a Downside Risk Approach (II). *Emerging Markets Quarterly*, Spring 2001, 63–72.
- Estrada, J. (2002). Systematic Risk in Emerging Markets: The D-CAPM. *Emerging Markets Review*, 3(4), 365–379.
- Estrada, J. (2004). The Cost of Equity of Internet Stocks: A Downside Risk Approach. *European Journal of Finance*, 10(4), 239–254.
- Estrada, J. (2006). Downside Risk in Practice. *Journal of Applied Corporate Finance*, 18(1), 117–125.
- Estrada, J. (2007). Mean-Semivariance Behavior: Downside Risk and Capital Asset Pricing. *International Review of Economics and Finance*, 16(2), 169–185.
- Fiegenbaum, A., & Thomas, H. (1986). Dynamic and Risk Measurement Perspectives on

- Bowman's Risk-Return Paradox for Strategic Management: An Empirical Study. *Strategic Management Journal*, 7(1), 395–407.
- Fifield, S. G. M., McMillan, D. G., & McMillan, F. J. (2020). Is there a Risk and Return Relation? *The European Journal of Finance*, 26(11), 1075–1101.
- Harlow, W. V., & Rao, R. K. S. (1989). Asset Pricing in a Generalized Mean-Lower Partial Moment Framework: Theory and Evidence. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24(3), 285–311.
- Harrison, P., & Zhang, H. H. (1999). An Investigation of the Risk and Return Relation at Long Horizons. *Review of Economics and Statistics*, 81(3), 399–408.
- Hogan, W. W., & Warren, J. M. (1974). Toward the Development of an Equilibrium Capital-Market Model based on Semivariance. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 9(1), 1–11.
- Jaaman, S. H. H., Lam, W. H., & Isa, Z. (2011). Different Downside Risk Approaches in Portfolio Optimization. *Journal of Quality Measurement and Analysis*, 7(1), 77–84.
- Jahankhani, A. (1976). E-V and E-S Capital Asset Pricing Models: Some Empirical Tests. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 11(4), 513–528.
- Jin, H., Markowitz, H., & Zhou, X. Y. (2006). A Note on Semivariance. *Mathematical Finance*, 16(1), 53–61.
- Kim, W. C., Hwang, P., & Burgers, W. P. (1993). Multinationals' Diversification and the Risk-Return Trade-off. *Strategic Management Journal*, 14(4), 275–286.
- March, J. G., & Shapira, Z. (1987). Managerial Perspectives on Risk and Risk Taking. *Management Science*, 33(11), 1404–1418.
- Markowitz, H. M. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7, 77–91.
- Miller, K. D., & Leiblein, M. J. (1996). Corporate Risk-Return Relations: Returns Variability Versus Downside Risk. *Academy of Management Journal*, 39(1), 91–122.
- Nickel, M. N., & Rodriguez, M. C. (2002). A Review of Research on the Negative Accounting Relationship between Risk and Return: Bowman's Paradox. *Omega*, 30(1), 1–18.
- Pereira, R. (2007). The Cost of Equity of Portuguese Public Firms: a Downside Risk Approach. *Portuguese Journal of Management Studies*, 12(1), 7–25.
- Pettengill, G. N., Sundaram, S., & Mathur, I. (1995). The Conditional Relation between Beta and Returns. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30(1), 101–116.
- Pla-Santamaria, D., & Bravo Selles, M. (2013). Portfolio Optimization based on Downside Risk: a Mean-Semivariance Efficient Frontier from Dow Jones Blue Chips. *Annals of Operations Research*, 205(1), 189–201.
- Post, T., & Van Vliet, P. (2004a). Conditional Downside Risk and the CAPM. In *ERIM Report Series*.

- Post, T., & Van Vliet, P. (2004b). Market Portfolio Efficiency and Value Stocks. *Journal of Economics and Finance*, 28(3), 300–306.
- Rashid, A., & Hamid, F. (2015). Downside Risk Analysis of Returns on the Karachi Stock Exchange. *Managerial Finance*, 41(9), 940–957.
- Rigamonti, A. (2020). Mean-Variance Optimization is a Good Choice, But for Other Reasons than you Might Think. *Risks*, 8(29), 1–16.
- Savva, C. S., & Theodossiou, P. (2018). The Risk and Return Conundrum Explained: International Evidence. *Journal of Financial Econometrics*, 16(3), 486–521.
- Theodossiou, P., & Savva, C. S. (2016). Skewness and the Relation between Risk and Return. *Management Science*, 62(1), 1598–1609.
- Tinic, S. M., & West, R. R. (1984). Risk and Return. January vs. the Rest of the Year. *Journal of Financial Economics*, 13(4), 561–574.

ANEXOS

Anexo 1 Rentabilidades médias das 25 ações - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para *stock-splits*

Rentabilidades médias	
ALTR.LS	0,000766458
BCP.LS	-0,000639582
CFN.LS	0,00012084
COR.LS	0,001008586
EDP.LS	0,000356731
EDPR.LS	0,000692444
EGL.LS	0,000304378
GALP.LS	5,07962E-05
GLINT.LS	0,000799728
IBS.LS	0,000259637
INA.LS	-0,000235384
IPR.LS	-4,65973E-05
JMT.LS	0,000222245
MAR.LS	9,54034E-05
NBA.LS	0,000299154
NOS.LS	7,6935E-05
NVG.LS	0,000238686
PHR.LS	-0,001216627
RAM.LS	0,001216791
RENE.LS	6,75682E-05
SEM.LS	0,000312303
SNC.LS	0,00023872
SON.LS	0,000182229
SONI.LS	0,000801376
TDSA.LS	-0,000182637

Anexo 2 Matriz das variâncias/covariâncias, matriz V, das 25 ações - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para *stock-splits*

	ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS
ALTR.LS	0,00044931	0,00025393	0,0001107	8,5162E-05	0,00012747	0,00012087	0,00022611	0,00016022	0,00012533	5,9593E-05	0,00013608	0,00012801	0,00010953	0,00013043	8,6199E-05	0,00014108	0,00022001	0,00017514	7,6334E-05	8,6054E-05	0,00020115	8,4582E-05	0,00018891	0,00014714	0,00018025
BCP.LS	0,00025393	0,00104724	0,00016789	9,2169E-05	0,00014947	0,00014979	0,00031988	0,00020946	0,00021068	7,9578E-05	0,00023919	0,00021994	0,00013096	0,00020933	0,00010726	0,0001769	0,00020133	0,00023499	6,4273E-05	0,00010622	0,00020293	0,00011095	0,00026758	0,00015952	0,00029884
CFN.LS	0,0001107	0,00016789	0,0008807	5,691E-05	6,6209E-05	7,6645E-05	0,00011244	9,4898E-05	7,7877E-05	6,0284E-05	0,00013229	0,00016702	5,643E-05	0,00012053	8,1121E-05	6,9152E-05	8,6298E-05	8,0699E-05	2,5347E-05	5,7981E-05	9,9274E-05	6,6313E-05	9,455E-05	2,1469E-05	0,00012404
COR.LS	8,5162E-05	9,2169E-05	5,691E-05	0,00029442	4,6012E-05	4,5955E-05	9,6464E-05	5,9625E-05	3,6264E-05	3,3996E-05	4,9549E-05	3,9871E-05	3,9825E-05	4,896E-05	5,0542E-05	4,8595E-05	6,9015E-05	5,4257E-05	4,7475E-05	3,3069E-05	6,6609E-05	2,2647E-05	5,6698E-05	0,00010264	7,7614E-05
EDP.LS	0,00012747	0,00014947	6,6209E-05	4,6012E-05	0,00025392	0,00014798	0,00013392	0,00011638	6,8114E-05	4,1608E-05	7,9055E-05	8,2782E-05	8,8957E-05	0,00010304	4,7029E-05	9,7631E-05	0,00010361	0,00011256	4,0384E-05	8,044E-05	9,7752E-05	6,5892E-05	0,00012173	0,00010743	0,00013149
EDPR.LS	0,00012087	0,00014979	7,6645E-05	4,5955E-05	0,00014798	0,00027749	0,0001131	0,00010339	7,9468E-05	4,6834E-05	8,372E-05	7,7958E-05	8,59E-05	0,00011509	4,9653E-05	8,9501E-05	9,7042E-05	0,00010393	3,1404E-05	7,1998E-05	9,7786E-05	6,2288E-05	0,0001122	9,7103E-05	0,00011177
EGL.LS	0,00022611	0,00031988	0,00011244	9,6464E-05	0,00013392	0,0001131	0,00077385	0,00019035	0,00017557	5,8468E-05	0,00015614	0,00018019	0,00011455	0,00018498	7,7404E-05	0,00016763	0,00018932	0,00023139	9,0448E-05	8,4667E-05	0,00018015	9,0839E-05	0,00022124	0,00013284	0,00026906
GALP.LS	0,00016022	0,00020946	9,4898E-05	5,9625E-05	0,00011638	0,00010339	0,00019035	0,00036954	6,8081E-05	5,4374E-05	9,0085E-05	9,818E-05	0,0001044	8,7481E-05	5,0077E-05	0,00011228	0,00013645	0,00013915	5,2224E-05	7,1471E-05	0,00013269	6,8012E-05	0,00015347	0,00014224	0,00013197
GLINT.LS	0,00012533	0,00021068	7,7877E-05	3,6264E-05	6,8114E-05	7,9468E-05	0,00017557	6,8081E-05	0,00175986	3,3822E-05	0,00022605	0,00014476	5,453E-05	0,00019162	7,1712E-05	8,4754E-05	8,7065E-05	0,00011044	4,8964E-05	5,9666E-05	9,1098E-05	5,3085E-05	0,00011945	3,2778E-05	0,00015861
IBS.LS	5,9593E-05	7,9578E-05	6,0284E-05	3,3996E-05	4,1608E-05	4,6834E-05	5,8468E-05	5,4374E-05	3,3822E-05	0,00043645	5,209E-05	6,2325E-05	3,3998E-05	7,8985E-05	4,0215E-05	3,2439E-05	5,3991E-05	7,6829E-05	4,65E-05	3,3677E-05	5,8088E-05	2,5574E-05	5,5941E-05	2,9619E-05	7,0895E-05
INA.LS	0,00013608	0,00023919	0,00013229	4,9549E-05	7,9055E-05	8,372E-05	0,00015614	9,0085E-05	0,00022605	5,209E-05	0,00119777	0,00020846	6,5858E-05	0,00019696	5,5016E-05	7,2059E-05	9,6017E-05	0,00014233	3,4028E-05	5,5837E-05	9,2982E-05	5,6057E-05	0,00012757	5,8991E-05	0,00022302
IPR.LS	0,00012801	0,00021994	0,00016702	3,9871E-05	8,2782E-05	7,7958E-05	0,00018019	9,818E-05	0,00014476	6,2325E-05	0,00020846	0,00107678	7,2507E-05	0,00018681	6,3026E-05	9,9986E-05	0,00010641	0,00011376	7,5035E-05	6,5644E-05	0,00010252	6,3769E-05	0,00013157	1,7372E-05	0,00025198
JMT.LS	0,00010953	0,00013096	5,643E-05	3,9825E-05	8,8957E-05	8,59E-05	0,00011455	0,0001044	5,453E-05	3,3998E-05	6,5858E-05	7,2507E-05	0,00030207	7,6207E-05	4,7441E-05	7,86E-05	8,4423E-05	9,7248E-05	3,3066E-05	5,1607E-05	8,3195E-05	4,8432E-05	0,00012163	7,7722E-05	9,8635E-05
MAR.LS	0,00013043	0,00020933	0,00012053	4,896E-05	0,00010304	0,00011509	0,00018498	8,7481E-05	0,00019162	7,8985E-05	0,00019696	0,00018681	7,6207E-05	0,00112895	8,1137E-05	9,4014E-05	0,00011248	0,00015159	7,2485E-05	7,8105E-05	0,00013838	6,4205E-05	0,00013612	0,00014273	0,00025653
NBA.LS	8,6199E-05	0,00010726	8,1121E-05	5,0542E-05	4,7029E-05	4,9653E-05	7,7404E-05	5,0077E-05	7,1712E-05	4,0215E-05	5,5016E-05	6,3026E-05	4,7441E-05	8,1137E-05	0,00034845	5,2486E-05	6,4835E-05	8,1255E-05	2,9277E-05	3,7863E-05	6,7944E-05	3,4458E-05	6,0851E-05	-0,0001129	8,2414E-05
NOS.LS	0,00014108	0,0001769	6,9152E-05	4,8595E-05	9,7631E-05	8,9501E-05	0,00016763	0,00011228	8,4754E-05	3,2439E-05	7,2059E-05	9,9986E-05	7,86E-05	9,4014E-05	5,2486E-05	0,00030169	0,0001154	0,00012518	2,8057E-05	6,5077E-05	0,00011444	9,8721E-05	0,00014639	0,0001486	0,00012762
NVG.LS	0,00022001	0,00020133	8,6298E-05	6,9015E-05	0,00010361	9,7042E-05	0,00018932	0,00013645	8,7065E-05	5,3991E-05	9,6017E-05	0,00010641	8,4423E-05	0,00011248	6,4835E-05	0,0001154	0,00029562	0,00015142	6,2077E-05	7,5608E-05	0,00018928	7,0671E-05	0,00015545	0,00012269	0,00014627
PHR.LS	0,00017514	0,00023499	8,0699E-05	5,4257E-05	0,00011256	0,00010393	0,00023139	0,00013915	0,00011044	7,6829E-05	0,00014233	0,00011376	9,7248E-05	0,00015159	8,1255E-05	0,00012518	0,00015142	0,00107181	7,4564E-05	8,2173E-05	0,00012636	6,0617E-05	0,00015642	8,6749E-05	0,00016488
RAM.LS	7,6334E-05	6,4273E-05	2,5347E-05	4,7475E-05	4,0384E-05	3,1404E-05	9,0448E-05	5,2224E-05	4,8964E-05	4,65E-05	3,4028E-05	7,5035E-05	3,3066E-05	7,2485E-05	2,9277E-05	2,8057E-05	6,2077E-05	7,4564E-05	0,00071585	2,5461E-05	5,5694E-05	1,5473E-05	5,3226E-05	-7,041E-05	4,1005E-05
RENE.LS	8,6054E-05	0,00010622	5,7981E-05	3,3069E-05	8,044E-05	7,1998E-05	8,4667E-05	7,1471E-05	5,9666E-05	3,3677E-05	5,5837E-05	6,5644E-05	5,1607E-05	7,8105E-05	3,7863E-05	6,5077E-05	7,5608E-05	8,2173E-05	2,5461E-05	0,00013062	7,3138E-05	4,4079E-05	8,0085E-05	0,00011049	7,8018E-05
SEM.LS	0,00020115	0,00020293	9,9274E-05	6,6609E-05	9,7752E-05	9,7786E-05	0,00018015	0,00013269	9,1098E-05	5,8088E-05	9,2982E-05	0,00010252	8,3195E-05	0,00013838	6,7944E-05	0,00011444	0,00018928	0,00012636	5,5694E-05	7,3138E-05	0,00033696	7,6975E-05	0,00016465	0,00010955	0,00015731
SNC.LS	8,4582E-05	0,00011095	6,6313E-05	2,2647E-05	6,5892E-05	6,2288E-05	9,0839E-05	6,8012E-05	5,3085E-05	2,5574E-05	5,6057E-05	6,3769E-05	4,8432E-05	6,4205E-05	3,4458E-05	9,8721E-05	7,0671E-05	6,0617E-05	1,5473E-05	4,4079E-05	7,6975E-05	0,00047804	9,4909E-05	3,7051E-05	8,8062E-05
SON.LS	0,00018891	0,00026758	9,455E-05	5,6698E-05	0,00012173	0,0001122	0,00022124	0,00015347	0,00011945	5,5941E-05	0,00012757	0,00013157	0,00012163	0,00013612	6,0851E-05	0,00014639	0,00015545	0,00015642	5,3226E-05	8,0085E-05	0,00016465	9,4909E-05	0,0003497	0,00012536	0,0001723
SONI.LS	0,00014714	0,00015952	2,1469E-05	0,00010264	0,00010743	9,7103E-05	0,00013284	0,00014224	3,2778E-05	2,9619E-05	5,8991E-05	1,7372E-05	7,7722E-05	0,00014273	-0,0001129	0,0001486	0,00012269	8,6749E-05	-7,041E-05	0,00011049	0,00010955	3,7051E-05	0,00012536	0,01221752	0,00021708
TDSA.LS	0,00018025	0,00029884	0,00012404	7,7614E-05	0,00013149	0,00011177	0,00026906	0,00013197	0,00015861	7,0895E-05	0,00022302	0,00025198	9,8635E-05	0,00025653	8,2414E-05	0,00012762	0,00014627	0,00016488	4,1005E-05	7,8018E-05	0,00015731	8,8062E-05	0,0001723	0,00021708	0,0105058

Anexo 3 Betas das 25 ações - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para *stock-splits*

ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS
1,066946	1,68855	0,572801	0,383176	0,88982	0,839212	1,191973	1,044123	0,648018	0,316758	0,717459	0,698398	0,816173	0,772872	0,395714	0,824648	0,877229	1,064367	0,30595	0,49761	0,850752	0,483502	1,047894	0,814429	0,963257

Anexo 4 Matriz B, cujo elemento genérico é $\beta_i\beta_jv(E_M < R_{Mt})$ – 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para *stock-splits*

	ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS
ALTR.LS	7,91E-05	0,000125	4,25E-05	2,84E-05	6,6E-05	6,22E-05	8,84E-05	7,74E-05	4,8E-05	2,35E-05	5,32E-05	5,18E-05	6,05E-05	5,73E-05	2,93E-05	6,11E-05	6,5E-05	7,89E-05	2,27E-05	3,69E-05	6,31E-05	3,58E-05	7,77E-05	6,04E-05	7,14E-05
BCP.LS	0,000125	0,000198	6,72E-05	4,5E-05	0,000104	9,85E-05	0,00014	0,000123	7,6E-05	3,72E-05	8,42E-05	8,2E-05	9,58E-05	9,07E-05	4,64E-05	9,68E-05	0,000103	0,000125	3,59E-05	5,84E-05	9,98E-05	5,67E-05	0,000123	9,56E-05	0,000113
CFN.LS	4,25E-05	6,72E-05	2,28E-05	1,53E-05	3,54E-05	3,34E-05	4,74E-05	4,16E-05	2,58E-05	1,26E-05	2,86E-05	2,78E-05	3,25E-05	3,08E-05	1,58E-05	3,28E-05	3,49E-05	4,24E-05	1,22E-05	1,98E-05	3,39E-05	1,92E-05	4,17E-05	3,24E-05	3,83E-05
COR.LS	2,84E-05	4,5E-05	1,53E-05	1,02E-05	2,37E-05	2,23E-05	3,17E-05	2,78E-05	1,73E-05	8,43E-06	1,91E-05	1,86E-05	2,17E-05	2,06E-05	1,05E-05	2,2E-05	2,34E-05	2,83E-05	8,15E-06	1,33E-05	2,27E-05	1,29E-05	2,79E-05	2,17E-05	2,56E-05
EDP.LS	6,6E-05	0,000104	3,54E-05	2,37E-05	5,5E-05	5,19E-05	7,37E-05	6,46E-05	4,01E-05	1,96E-05	4,44E-05	4,32E-05	5,05E-05	4,78E-05	2,45E-05	5,1E-05	5,42E-05	6,58E-05	1,89E-05	3,08E-05	5,26E-05	2,99E-05	6,48E-05	5,04E-05	5,96E-05
EDPR.LS	6,22E-05	9,85E-05	3,34E-05	2,23E-05	5,19E-05	4,89E-05	6,95E-05	6,09E-05	3,78E-05	1,85E-05	4,18E-05	4,07E-05	4,76E-05	4,51E-05	2,31E-05	4,81E-05	5,12E-05	6,21E-05	1,78E-05	2,9E-05	4,96E-05	2,82E-05	6,11E-05	4,75E-05	5,62E-05
EGL.LS	8,84E-05	0,00014	4,74E-05	3,17E-05	7,37E-05	6,95E-05	9,87E-05	8,65E-05	5,37E-05	2,62E-05	5,94E-05	5,79E-05	6,76E-05	6,4E-05	3,28E-05	6,83E-05	7,27E-05	8,82E-05	2,53E-05	4,12E-05	7,05E-05	4,01E-05	8,68E-05	6,75E-05	7,98E-05
GALP.LS	7,74E-05	0,000123	4,16E-05	2,78E-05	6,46E-05	6,09E-05	8,65E-05	7,58E-05	4,7E-05	2,3E-05	5,21E-05	5,07E-05	5,92E-05	5,61E-05	2,87E-05	5,98E-05	6,37E-05	7,72E-05	2,22E-05	3,61E-05	6,17E-05	3,51E-05	7,6E-05	5,91E-05	6,99E-05
GLINT.LS	4,8E-05	7,6E-05	2,58E-05	1,73E-05	4,01E-05	3,78E-05	5,37E-05	4,7E-05	2,92E-05	1,43E-05	3,23E-05	3,15E-05	3,68E-05	3,48E-05	1,78E-05	3,71E-05	3,95E-05	4,79E-05	1,38E-05	2,24E-05	3,83E-05	2,18E-05	4,72E-05	3,67E-05	4,34E-05
IBS.LS	2,35E-05	3,72E-05	1,26E-05	8,43E-06	1,96E-05	1,85E-05	2,62E-05	2,3E-05	1,43E-05	6,97E-06	1,58E-05	1,54E-05	1,8E-05	1,7E-05	8,71E-06	1,82E-05	1,93E-05	2,34E-05	6,73E-06	1,1E-05	1,87E-05	1,06E-05	2,31E-05	1,79E-05	2,12E-05
INA.LS	5,32E-05	8,42E-05	2,86E-05	1,91E-05	4,44E-05	4,18E-05	5,94E-05	5,21E-05	3,23E-05	1,58E-05	3,58E-05	3,48E-05	4,07E-05	3,85E-05	1,97E-05	4,11E-05	4,37E-05	5,31E-05	1,53E-05	2,48E-05	4,24E-05	2,41E-05	5,22E-05	4,06E-05	4,8E-05
IPR.LS	5,18E-05	8,2E-05	2,78E-05	1,86E-05	4,32E-05	4,07E-05	5,79E-05	5,07E-05	3,15E-05	1,54E-05	3,48E-05	3,39E-05	3,96E-05	3,75E-05	1,92E-05	4E-05	4,26E-05	5,17E-05	1,48E-05	2,42E-05	4,13E-05	2,35E-05	5,09E-05	3,95E-05	4,68E-05
JMT.LS	6,05E-05	9,58E-05	3,25E-05	2,17E-05	5,05E-05	4,76E-05	6,76E-05	5,92E-05	3,68E-05	1,8E-05	4,07E-05	3,96E-05	4,63E-05	4,38E-05	2,24E-05	4,68E-05	4,98E-05	6,04E-05	1,74E-05	2,82E-05	4,83E-05	2,74E-05	5,94E-05	4,62E-05	5,46E-05
MAR.LS	5,73E-05	9,07E-05	3,08E-05	2,06E-05	4,78E-05	4,51E-05	6,4E-05	5,61E-05	3,48E-05	1,7E-05	3,85E-05	3,75E-05	4,38E-05	4,15E-05	2,13E-05	4,43E-05	4,71E-05	5,72E-05	1,64E-05	2,67E-05	4,57E-05	2,6E-05	5,63E-05	4,37E-05	5,17E-05
NBA.LS	2,93E-05	4,64E-05	1,58E-05	1,05E-05	2,45E-05	2,31E-05	3,28E-05	2,87E-05	1,78E-05	8,71E-06	1,97E-05	1,92E-05	2,24E-05	2,13E-05	1,09E-05	2,27E-05	2,41E-05	2,93E-05	8,41E-06	1,37E-05	2,34E-05	1,33E-05	2,88E-05	2,24E-05	2,65E-05
NOS.LS	6,11E-05	9,68E-05	3,28E-05	2,2E-05	5,1E-05	4,81E-05	6,83E-05	5,98E-05	3,71E-05	1,82E-05	4,11E-05	4E-05	4,68E-05	4,43E-05	2,27E-05	4,73E-05	5,03E-05	6,1E-05	1,75E-05	2,85E-05	4,88E-05	2,77E-05	6,01E-05	4,67E-05	5,52E-05
NVG.LS	6,5E-05	0,000103	3,49E-05	2,34E-05	5,42E-05	5,12E-05	7,27E-05	6,37E-05	3,95E-05	1,93E-05	4,37E-05	4,26E-05	4,98E-05	4,71E-05	2,41E-05	5,03E-05	5,35E-05	6,49E-05	1,87E-05	3,03E-05	5,19E-05	2,95E-05	6,39E-05	4,96E-05	5,87E-05
PHR.LS	7,89E-05	0,000125	4,24E-05	2,83E-05	6,58E-05	6,21E-05	8,82E-05	7,72E-05	4,79E-05	2,34E-05	5,31E-05	5,17E-05	6,04E-05	5,72E-05	2,93E-05	6,1E-05	6,49E-05	7,87E-05	2,26E-05	3,68E-05	6,29E-05	3,58E-05	7,75E-05	6,02E-05	7,12E-05
RAM.LS	2,27E-05	3,59E-05	1,22E-05	8,15E-06	1,89E-05	1,78E-05	2,53E-05	2,22E-05	1,38E-05	6,73E-06	1,53E-05	1,48E-05	1,74E-05	1,64E-05	8,41E-06	1,75E-05	1,87E-05	2,26E-05	6,5E-06	1,06E-05	1,81E-05	1,03E-05	2,23E-05	1,73E-05	2,05E-05
RENE.LS	3,69E-05	5,84E-05	1,98E-05	1,33E-05	3,08E-05	2,9E-05	4,12E-05	3,61E-05	2,24E-05	1,1E-05	2,48E-05	2,42E-05	2,82E-05	2,67E-05	1,37E-05	2,85E-05	3,03E-05	3,68E-05	1,06E-05	1,72E-05	2,94E-05	1,67E-05	3,62E-05	2,82E-05	3,33E-05
SEM.LS	6,31E-05	9,98E-05	3,39E-05	2,27E-05	5,26E-05	4,96E-05	7,05E-05	6,17E-05	3,83E-05	1,87E-05	4,24E-05	4,13E-05	4,83E-05	4,57E-05	2,34E-05	4,88E-05	5,19E-05	6,29E-05	1,81E-05	2,94E-05	5,03E-05	2,86E-05	6,2E-05	4,81E-05	5,69E-05
SNC.LS	3,58E-05	5,67E-05	1,92E-05	1,29E-05	2,99E-05	2,82E-05	4,01E-05	3,51E-05	2,18E-05	1,06E-05	2,41E-05	2,35E-05	2,74E-05	2,6E-05	1,33E-05	2,77E-05	2,95E-05	3,58E-05	1,03E-05	1,67E-05	2,86E-05	1,62E-05	3,52E-05	2,74E-05	3,24E-05
SON.LS	7,77E-05	0,000123	4,17E-05	2,79E-05	6,48E-05	6,11E-05	8,68E-05	7,6E-05	4,72E-05	2,31E-05	5,22E-05	5,09E-05	5,94E-05	5,63E-05	2,88E-05	6,01E-05	6,39E-05	7,75E-05	2,23E-05	3,62E-05	6,2E-05	3,52E-05	7,63E-05	5,93E-05	7,01E-05
SONI.LS	6,04E-05	9,56E-05	3,24E-05	2,17E-05	5,04E-05	4,75E-05	6,75E-05	5,91E-05	3,67E-05	1,79E-05	4,06E-05	3,95E-05	4,62E-05	4,37E-05	2,24E-05	4,67E-05	4,96E-05	6,02E-05	1,73E-05	2,82E-05	4,81E-05	2,74E-05	5,93E-05	4,61E-05	5,45E-05
TDSA.LS	7,14E-05	0,000113	3,83E-05	2,56E-05	5,96E-05	5,62E-05	7,98E-05	6,99E-05	4,34E-05	2,12E-05	4,8E-05	4,68E-05	5,46E-05	5,17E-05	2,65E-05	5,52E-05	5,87E-05	7,12E-05	2,05E-05	3,33E-05	5,69E-05	3,24E-05	7,01E-05	5,45E-05	6,45E-05

Anexo 5 Matriz das semivariâncias/cosemivariâncias, matriz V_s – 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para *stock-splits*

	ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS
ALTR.LS	0,00037	0,000129	6,82E-05	5,68E-05	6,15E-05	5,87E-05	0,000138	8,28E-05	7,73E-05	3,61E-05	8,29E-05	7,62E-05	4,9E-05	7,31E-05	5,69E-05	7,99E-05	0,000155	9,62E-05	5,36E-05	4,92E-05	0,000138	4,87E-05	0,000111	8,68E-05	0,000109
BCP.LS	0,000129	0,000849	0,000101	4,72E-05	4,51E-05	5,13E-05	0,00018	8,69E-05	0,000135	4,24E-05	0,000155	0,000138	3,52E-05	0,000119	6,08E-05	8,01E-05	9,84E-05	0,00011	2,84E-05	4,78E-05	0,000103	5,42E-05	0,000145	6,4E-05	0,000186
CFN.LS	6,82E-05	0,000101	0,000858	4,17E-05	3,08E-05	4,32E-05	6,5E-05	5,33E-05	5,21E-05	4,77E-05	0,000104	0,000139	2,39E-05	8,98E-05	6,54E-05	3,63E-05	5,14E-05	3,83E-05	1,32E-05	3,82E-05	6,54E-05	4,71E-05	5,28E-05	-1,1E-05	8,57E-05
COR.LS	5,68E-05	4,72E-05	4,17E-05	0,000284	2,23E-05	2,36E-05	6,47E-05	3,18E-05	1,9E-05	2,56E-05	3,04E-05	2,13E-05	1,81E-05	2,84E-05	4E-05	2,66E-05	4,57E-05	2,59E-05	3,93E-05	1,98E-05	4,4E-05	9,77E-06	2,88E-05	8,09E-05	5,2E-05
EDP.LS	6,15E-05	4,51E-05	3,08E-05	2,23E-05	0,000199	9,61E-05	6,02E-05	5,18E-05	2,8E-05	2,2E-05	3,47E-05	3,96E-05	3,85E-05	5,53E-05	2,26E-05	4,66E-05	4,94E-05	4,67E-05	2,15E-05	4,97E-05	4,51E-05	3,6E-05	5,69E-05	5,71E-05	7,19E-05
EDPR.LS	5,87E-05	5,13E-05	4,32E-05	2,36E-05	9,61E-05	0,000229	4,36E-05	4,25E-05	4,17E-05	2,84E-05	4,19E-05	3,72E-05	3,83E-05	7E-05	2,66E-05	4,14E-05	4,59E-05	4,19E-05	1,36E-05	4,3E-05	4,82E-05	3,41E-05	5,11E-05	4,96E-05	5,56E-05
EGL.LS	0,000138	0,00018	6,5E-05	6,47E-05	6,02E-05	4,36E-05	0,000675	0,000104	0,000122	3,22E-05	9,67E-05	0,000122	4,69E-05	0,000121	4,46E-05	9,93E-05	0,000117	0,000143	6,51E-05	4,34E-05	0,00011	5,08E-05	0,000134	6,54E-05	0,000189
GALP.LS	8,28E-05	8,69E-05	5,33E-05	3,18E-05	5,18E-05	4,25E-05	0,000104	0,000294	2,11E-05	3,14E-05	3,8E-05	4,75E-05	4,52E-05	3,14E-05	2,14E-05	5,24E-05	7,28E-05	6,19E-05	3E-05	3,54E-05	7,1E-05	3,29E-05	7,74E-05	8,31E-05	6,21E-05
GLINT.LS	7,73E-05	0,000135	5,21E-05	1,9E-05	2,8E-05	4,17E-05	0,000122	2,11E-05	0,001731	1,96E-05	0,000194	0,000113	1,78E-05	0,000157	5,39E-05	4,76E-05	4,76E-05	6,25E-05	3,52E-05	3,73E-05	5,28E-05	3,13E-05	7,23E-05	-3,9E-06	0,000115
IBS.LS	3,61E-05	4,24E-05	4,77E-05	2,56E-05	2,2E-05	2,84E-05	3,22E-05	3,14E-05	1,96E-05	0,000429	3,63E-05	4,7E-05	1,6E-05	6,2E-05	3,15E-05	1,43E-05	3,47E-05	5,34E-05	3,98E-05	2,27E-05	3,94E-05	1,49E-05	3,29E-05	1,17E-05	4,97E-05
INA.LS	8,29E-05	0,000155	0,000104	3,04E-05	3,47E-05	4,19E-05	9,67E-05	3,8E-05	0,000194	3,63E-05	0,001162	0,000174	2,52E-05	0,000158	3,53E-05	3,09E-05	5,23E-05	8,93E-05	1,88E-05	3,1E-05	5,06E-05	3,2E-05	7,53E-05	1,84E-05	0,000175
IPR.LS	7,62E-05	0,000138	0,000139	2,13E-05	3,96E-05	3,72E-05	0,000122	4,75E-05	0,000113	4,7E-05	0,000174	0,001043	3,29E-05	0,000149	4,38E-05	6E-05	6,38E-05	6,21E-05	6,02E-05	4,15E-05	6,12E-05	4,03E-05	8,07E-05	-2,2E-05	0,000205
JMT.LS	4,9E-05	3,52E-05	2,39E-05	1,81E-05	3,85E-05	3,83E-05	4,69E-05	4,52E-05	1,78E-05	1,6E-05	2,52E-05	3,29E-05	0,000256	3,24E-05	2,5E-05	3,18E-05	3,47E-05	3,69E-05	1,57E-05	2,34E-05	3,49E-05	2,1E-05	6,22E-05	3,15E-05	4,4E-05
MAR.LS	7,31E-05	0,000119	8,98E-05	2,84E-05	5,53E-05	7E-05	0,000121	3,14E-05	0,000157	6,2E-05	0,000158	0,000149	3,24E-05	0,001087	5,99E-05	4,97E-05	6,54E-05	9,44E-05	5,61E-05	5,14E-05	9,27E-05	3,82E-05	7,98E-05	9,9E-05	0,000205
NBA.LS	5,69E-05	6,08E-05	6,54E-05	4E-05	2,26E-05	2,66E-05	4,46E-05	2,14E-05	5,39E-05	3,15E-05	3,53E-05	4,38E-05	2,5E-05	5,99E-05	0,000338	2,98E-05	4,07E-05	5,2E-05	2,09E-05	2,42E-05	4,45E-05	2,12E-05	3,2E-05	-0,00014	5,59E-05
NOS.LS	7,99E-05	8,01E-05	3,63E-05	2,66E-05	4,66E-05	4,14E-05	9,93E-05	5,24E-05	4,76E-05	1,43E-05	3,09E-05	6E-05	3,18E-05	4,97E-05	2,98E-05	0,000254	6,51E-05	6,42E-05	1,05E-05	3,66E-05	6,57E-05	7,1E-05	8,63E-05	0,000102	7,24E-05
NVG.LS	0,000155	9,84E-05	5,14E-05	4,57E-05	4,94E-05	4,59E-05	0,000117	7,28E-05	4,76E-05	3,47E-05	5,23E-05	6,38E-05	3,47E-05	6,54E-05	4,07E-05	6,51E-05	0,000242	8,65E-05	4,34E-05	4,53E-05	0,000137	4,12E-05	9,16E-05	7,3E-05	8,76E-05
PHR.LS	9,62E-05	0,00011	3,83E-05	2,59E-05	4,67E-05	4,19E-05	0,000143	6,19E-05	6,25E-05	5,34E-05	8,93E-05	6,21E-05	3,69E-05	9,44E-05	5,2E-05	6,42E-05	8,65E-05	0,000993	5,19E-05	4,54E-05	6,34E-05	2,49E-05	7,89E-05	2,65E-05	9,36E-05
RAM.LS	5,36E-05	2,84E-05	1,32E-05	3,93E-05	2,15E-05	1,36E-05	6,51E-05	3E-05	3,52E-05	3,98E-05	1,88E-05	6,02E-05	1,57E-05	5,61E-05	2,09E-05	1,05E-05	4,34E-05	5,19E-05	0,000709	1,49E-05	3,76E-05	5,19E-06	3,09E-05	-8,8E-05	2,05E-05
RENE.LS	4,92E-05	4,78E-05	3,82E-05	1,98E-05	4,97E-05	4,3E-05	4,34E-05	3,54E-05	3,73E-05	2,27E-05	3,1E-05	4,15E-05	2,34E-05	5,14E-05	2,42E-05	3,66E-05	4,53E-05	4,54E-05	1,49E-05	0,000113	4,37E-05	2,74E-05	4,38E-05	8,23E-05	4,47E-05
SEM.LS	0,000138	0,000103	6,54E-05	4,4E-05	4,51E-05	4,82E-05	0,00011	7,1E-05	5,28E-05	3,94E-05	5,06E-05	6,12E-05	3,49E-05	9,27E-05	4,45E-05	6,57E-05	0,000137	6,34E-05	3,76E-05	4,37E-05	0,000287	4,84E-05	0,000103	6,14E-05	0,0001
SNC.LS	4,87E-05	5,42E-05	4,71E-05	9,77E-06	3,6E-05	3,41E-05	5,08E-05	3,29E-05	3,13E-05	1,49E-05	3,2E-05	4,03E-05	2,1E-05	3,82E-05	2,12E-05	7,1E-05	4,12E-05	2,49E-05	5,19E-06	2,74E-05	4,84E-05	0,000462	5,97E-05	9,69E-06	5,57E-05
SON.LS	0,000111	0,000145	5,28E-05	2,88E-05	5,69E-05	5,11E-05	0,000134	7,74E-05	7,23E-05	3,29E-05	7,53E-05	8,07E-05	6,22E-05	7,98E-05	3,2E-05	8,63E-05	9,16E-05	7,89E-05	3,09E-05	4,38E-05	0,000103	5,97E-05	0,000273	6,61E-05	0,000102
SONI.LS	8,68E-05	6,4E-05	-1,1E-05	8,09E-05	5,71E-05	4,96E-05	6,54E-05	8,31E-05	-3,9E-06	1,17E-05	1,84E-05	-2,2E-05	3,15E-05	9,9E-05	-0,00014	0,000102	7,3E-05	2,65E-05	-8,8E-05	8,23E-05	6,14E-05	9,69E-06	6,61E-05	0,012171	0,000163
TDSA.LS	0,000109	0,000186	8,57E-05	5,2E-05	7,19E-05	5,56E-05	0,000189	6,21E-05	0,000115	4,97E-05	0,000175	0,000205	4,4E-05	0,000205	5,59E-05	7,24E-05	8,76E-05	9,36E-05	2,05E-05	4,47E-05	0,0001	5,57E-05	0,000102	0,000163	0,000986

Anexo 6 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Markowitz, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 5% da carteira – Cotações ajustadas para *stock-splits*

Rent. Esperada	Desvio-padrão	ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS	Semidesvio-padrão	
0,00028351	0,010272995	0,049921	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0,05	0,033161	0,05	0,041148	0,042256	0,05	0,031208	0,05	0,05	0,05	0,034648	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,005692	0,011967	0,008347936
0,0003	0,010279541	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,0036	0,05	0,037224	0,05	0,039786	0,04221	0,05	0,032435	0,05	0,05	0,05	0,02528	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,006279	0,013186	0,008364162
0,00032	0,010302198	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,011175	0,05	0,041751	0,05	0,038625	0,042896	0,05	0,034345	0,05	0,05	0,05	0,015071	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,00691	0,009227	0,008398401
0,00034	0,010341525	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,018175	0,05	0,046226	0,05	0,037178	0,04308	0,05	0,035879	0,05	0,05	0,05	0,004392	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,007546	0,007525	0,008452297
0,00036	0,010411268	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,035971	0,05	0,05	0,05	0,026402	0,039587	0,05	0,038076	0,05	0,05	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,009965	0	0,00850688
0,00038	0,010643704	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0,030131	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,019869	0	0,008741254
0,0004	0,011381803	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0,006546	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,043454	0	0,009611916

Anexo 7 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Balletero, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 5% da carteira – Cotações ajustadas para *stock-splits*

Rent. Esperada	Semidesvio-padrão	ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS	Desvio-padrão	
0,000267438	0,008295486	0,05	0,015809	0,05	0,05	0,05	0,05	0,017427	0,05	0,024492	0,05	0,031749	0,029448	0,05	0,023494	0,05	0,05	0,05	0,039318	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,005006	0,013257	0,010358447
0,0003	0,008318596	0,05	0,007354	0,05	0,05	0,05	0,05	0,029484	0,05	0,031335	0,05	0,030836	0,030767	0,05	0,026391	0,05	0,05	0,05	0,025657	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,005968	0,012207	0,010338556
0,00032	0,008355556	0,05	0,002161	0,05	0,05	0,05	0,05	0,036891	0,05	0,035537	0,05	0,030276	0,031577	0,05	0,028171	0,05	0,05	0,05	0,017267	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,006559	0,011561	0,010344927
0,00034	0,008410104	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,044039	0,05	0,039904	0,05	0,029204	0,03203	0,05	0,029811	0,05	0,05	0,05	0,007538	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,007176	0,010296	0,010376554
0,00036	0,008486641	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,047737	0,05	0,025102	0,031375	0,05	0,031315	0,05	0,05	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,008256	0,006215	0,010433185
0,00038	0,008741254	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0,030131	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,019869	0	0,010643704
0,0004	0,009611916	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0,006546	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,043454	0	0,011381803

Anexo 8 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Markowitz, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 10% da carteira – Cotações ajustadas para *stock-splits*

Rent. Esperada	Desvio-padrão	ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS	Semidesvio-padrão
0,000400306	0,008888029	0	0	0,024368	0,1	0,070427	0,072529	0	0,019562	0,013315	0,1	0,016747368	0,009512	0,1	0	0,1	0,073969	0,018655	0	0,074833	0,1	0,013828	0,089592151	0	0,002663	0	0,007438015
0,00045	0,008933654	0	0	0,021553	0,1	0,06776	0,1	0	0,002966	0,018929	0,1	0,008077667	0,00398	0,1	0	0,1	0,056783	0,012961	0	0,096892	0,1	0,018476	0,087968074	0	0,003655	0	0,007562516
0,0005	0,009140631	0,044231	0	0,014307	0,1	0,085504	0,1	0	0	0,031662	0,1	0	0	0,1	0	0,1	0,013101	0	0	0,1	0,1	0,017322	0,088403678	0	0,00547	0	0,007756216
0,00055	0,009581706	0,1	0	0	0,1	0,1	0,1	0	0	0,051142	0,1	0	0	0,075024396	0	0,1	0	0	0	0,1	0,08126	0,003118	0,081232266	0	0,008224	0	0,008156271
0,0006	0,010503172	0,1	0	0	0,1	0,1	0,1	0	0	0,1	0,1	0	0	0,05573217	0	0,1	0	0	0	0,1	0	0,050279	0,077066032	0	0,016923	0	0,009125215

Anexo 9 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Ballester, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 10% da carteira – Cotações ajustadas para *stock-splits*

Rent. Esperada	Semidesvio-padrão	ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS	Desvio-padrão
0,000357958	0,007299298	0	0	0,015456	0,1	0,092566	0,078646	0	0,059555	0,011104	0,074264	0,015383	0,00847	0,1	0,000873	0,086411	0,079273	0,032297	0,008163	0,047774	0,1	0,020128	0,061112	0,006537	0,001988	0	0,009059912
0,00045	0,007446902	0,02283	0	0,012349	0,1	0,1	0,1	0	0,035238	0,019964	0,071281	0,003179	0,000774	0,1	0	0,086881	0,055906	0,018325	0	0,08266	0,1	0,026035	0,061057	0	0,00352	0	0,009091173
0,0005	0,007673057	0,062096	0	0,009042	0,1	0,1	0,1	0	0,017096	0,025513	0,070024	0	0	0,1	0	0,08692	0,036749	0	0	0,1	0,1	0,026035	0,061935	0	0,00459	0	0,009259458
0,00055	0,00809424	0,1	0	0,00028	0,1	0,1	0,1	0	0	0,044436	0,074677	0	0	0,1	0	0,099279	0	0	0	0,1	0,067319	0,039091	0,067145	0	0,007773	0	0,009637759
0,0006	0,009083301	0,1	0	0	0,1	0,1	0,1	0	0	0,099728	0,073168	0	0	0,081656	0	0,1	0	0	0	0,1	0	0,073369	0,056148	0	0,015931	0	0,010555726

Anexo 10 Rentabilidades médias das 25 ações - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos

Rentabilidades médias	
ALTR.LS	0,000959016
BCP.LS	-0,000633335
CFN.LS	0,000184656
COR.LS	0,001191785
EDP.LS	0,000602767
EDPR.LS	0,000716916
EGL.LS	0,000436133
GALP.LS	0,000181111
GLINT.LS	0,000799728
IBS.LS	0,00028838
INA.LS	-0,000235384
IPR.LS	-4,65973E-05
JMT.LS	0,000343828
MAR.LS	9,54034E-05
NBA.LS	0,000639828
NOS.LS	0,000297746
NVG.LS	0,000532508
PHR.LS	-0,000989311
RAM.LS	0,001625399
RENE.LS	0,000326221
SEM.LS	0,000467698
SNC.LS	0,000370547
SON.LS	0,000364349
SONI.LS	0,000801376
TDSA.LS	-0,000134508

Anexo 11 Matriz das variâncias/covariâncias, matriz V, das 25 ações - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos

	ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS
ALTR.LS	0,000439	0,000252	0,000113	8,51E-05	0,000126	0,000121	0,000222	0,000157	0,000121	5,83E-05	0,000137	0,000128	0,000108	0,00013	8,53E-05	0,00014	0,000219	0,000175	7,23E-05	8,59E-05	0,000198	8,47E-05	0,000186	0,000147	0,000178
BCP.LS	0,000252	0,001047	0,000167	9,2E-05	0,00015	0,00015	0,000321	0,000209	0,000211	8E-05	0,000239	0,00022	0,000133	0,000209	0,00011	0,000177	0,000203	0,000252	6,3E-05	0,000109	0,0002	0,000113	0,000266	0,00016	0,000299
CFN.LS	0,000113	0,000167	0,00088	5,76E-05	6,74E-05	7,73E-05	0,000112	9,31E-05	7,79E-05	6,02E-05	0,000132	0,000167	5,6E-05	0,00012	8,25E-05	7,19E-05	8,81E-05	8,5E-05	3,4E-05	5,71E-05	9,95E-05	6,62E-05	9,41E-05	2,07E-05	0,000124
COR.LS	8,51E-05	9,2E-05	5,76E-05	0,0003	4,73E-05	4,75E-05	9,5E-05	6,09E-05	3,78E-05	3,32E-05	5,26E-05	3,85E-05	4E-05	4,81E-05	4,86E-05	5,16E-05	7,11E-05	5,32E-05	4,9E-05	3,5E-05	6,71E-05	2,49E-05	5,85E-05	0,000102	7,88E-05
EDP.LS	0,000126	0,00015	6,74E-05	4,73E-05	0,000245	0,00015	0,000133	0,000116	6,99E-05	4,15E-05	7,75E-05	7,83E-05	8,89E-05	0,000102	4,53E-05	9,61E-05	0,000105	0,000114	3,69E-05	8,19E-05	9,84E-05	6,9E-05	0,000122	0,000107	0,000127
EDPR.LS	0,000121	0,00015	7,73E-05	4,75E-05	0,00015	0,000277	0,000113	0,000103	8,01E-05	4,71E-05	8,39E-05	7,79E-05	8,62E-05	0,000115	4,95E-05	8,96E-05	9,96E-05	0,000107	3,3E-05	7,43E-05	9,82E-05	6,34E-05	0,000113	9,74E-05	0,000112
EGL.LS	0,000222	0,000321	0,000112	9,5E-05	0,000133	0,000113	0,000772	0,000189	0,000175	5,95E-05	0,000155	0,000181	0,000116	0,000185	7,71E-05	0,000166	0,00019	0,000233	8,98E-05	8,67E-05	0,00018	9,09E-05	0,00022	0,000132	0,000267
GALP.LS	0,000157	0,000209	9,31E-05	6,09E-05	0,000116	0,000103	0,000189	0,000368	6,86E-05	5,56E-05	9E-05	9,68E-05	0,000105	8,58E-05	5E-05	0,000113	0,000138	0,00014	5,05E-05	7,14E-05	0,000132	6,94E-05	0,000153	0,000142	0,00013
GLINT.LS	0,000121	0,000211	7,79E-05	3,78E-05	6,99E-05	8,01E-05	0,000175	6,86E-05	0,00176	3,42E-05	0,000226	0,000145	5,54E-05	0,000192	7,09E-05	8,46E-05	8,05E-05	0,000117	4,37E-05	5,97E-05	9,3E-05	5,51E-05	0,000114	3,28E-05	0,000158
IBS.LS	5,83E-05	8E-05	6,02E-05	3,32E-05	4,15E-05	4,71E-05	5,95E-05	5,56E-05	3,42E-05	0,000437	5,22E-05	6,27E-05	3,46E-05	7,9E-05	3,93E-05	3,22E-05	5,3E-05	7,47E-05	4,89E-05	4,08E-05	5,77E-05	2,62E-05	5,43E-05	2,95E-05	7,16E-05
INA.LS	0,000137	0,000239	0,000132	5,26E-05	7,75E-05	8,39E-05	0,000155	9E-05	0,000226	5,22E-05	0,001198	0,000208	6,55E-05	0,000197	5,42E-05	7,11E-05	9,61E-05	0,000141	4E-05	5,39E-05	9,02E-05	5,8E-05	0,000129	5,9E-05	0,000223
IPR.LS	0,000128	0,00022	0,000167	3,85E-05	7,83E-05	7,79E-05	0,000181	9,68E-05	0,000145	6,27E-05	0,000208	0,001077	7,17E-05	0,000187	5,98E-05	9,48E-05	0,000108	0,000107	7,29E-05	6,69E-05	0,000102	6,25E-05	0,000131	1,74E-05	0,000252
JMT.LS	0,000108	0,000133	5,6E-05	4E-05	8,89E-05	8,62E-05	0,000116	0,000105	5,54E-05	3,46E-05	6,55E-05	7,17E-05	0,000301	7,62E-05	4,44E-05	7,76E-05	8,66E-05	9,97E-05	3,45E-05	5,29E-05	8,27E-05	4,88E-05	0,000122	7,83E-05	9,76E-05
MAR.LS	0,00013	0,000209	0,00012	4,81E-05	0,000102	0,000115	0,000185	8,58E-05	0,000192	7,9E-05	0,000197	0,000187	7,62E-05	0,001129	7,99E-05	9,38E-05	0,000116	0,000152	7,89E-05	7,65E-05	0,000137	6,22E-05	0,000136	0,000143	0,000256
NBA.LS	8,53E-05	0,00011	8,25E-05	4,86E-05	4,53E-05	4,95E-05	7,71E-05	5E-05	7,09E-05	3,93E-05	5,42E-05	5,98E-05	4,44E-05	7,99E-05	0,000329	5,19E-05	6,5E-05	7,64E-05	2,9E-05	3,53E-05	6,75E-05	3,46E-05	6,12E-05	-0,00011	8,14E-05
NOS.LS	0,00014	0,000177	7,19E-05	5,16E-05	9,61E-05	8,96E-05	0,000166	0,000113	8,46E-05	3,22E-05	7,11E-05	9,48E-05	7,76E-05	9,38E-05	5,19E-05	0,000296	0,000118	0,000121	2,47E-05	6,58E-05	0,000116	0,000101	0,000145	0,000147	0,000126
NVG.LS	0,000219	0,000203	8,81E-05	7,11E-05	0,000105	9,96E-05	0,00019	0,000138	8,05E-05	5,3E-05	9,61E-05	0,000108	8,66E-05	0,000116	6,5E-05	0,000118	0,000284	0,000153	5,94E-05	7,57E-05	0,000192	7,2E-05	0,000157	0,000122	0,000154
PHR.LS	0,000175	0,000252	8,5E-05	5,32E-05	0,000114	0,000107	0,000233	0,00014	0,000117	7,47E-05	0,000141	0,000107	9,97E-05	0,000152	7,64E-05	0,000121	0,000153	0,001066	7,15E-05	8,28E-05	0,000127	6,05E-05	0,000156	8,91E-05	0,000163
RAM.LS	7,23E-05	6,3E-05	3,4E-05	4,9E-05	3,69E-05	3,3E-05	8,98E-05	5,05E-05	4,37E-05	4,89E-05	4E-05	7,29E-05	3,45E-05	7,89E-05	2,9E-05	2,47E-05	5,94E-05	7,15E-05	0,000706	2,9E-05	5,72E-05	1,82E-05	5E-05	-7,2E-05	4,48E-05
RENE.LS	8,59E-05	0,000109	5,71E-05	3,5E-05	8,19E-05	7,43E-05	8,67E-05	7,14E-05	5,97E-05	4,08E-05	5,39E-05	6,69E-05	5,29E-05	7,65E-05	3,53E-05	6,58E-05	7,57E-05	8,28E-05	2,9E-05	0,00012	7,21E-05	4,4E-05	8,36E-05	0,00011	8,23E-05
SEM.LS	0,000198	0,0002	9,95E-05	6,71E-05	9,84E-05	9,82E-05	0,00018	0,000132	9,3E-05	5,77E-05	9,02E-05	0,000102	8,27E-05	0,000137	6,75E-05	0,000116	0,000192	0,000127	5,72E-05	7,21E-05	0,000333	7,62E-05	0,000164	0,00011	0,000157
SNC.LS	8,47E-05	0,000113	6,62E-05	2,49E-05	6,9E-05	6,34E-05	9,09E-05	6,94E-05	5,51E-05	2,62E-05	5,8E-05	6,25E-05	4,88E-05	6,22E-05	3,46E-05	0,000101	7,2E-05	6,05E-05	1,82E-05	4,4E-05	7,62E-05	0,000477	9,48E-05	3,65E-05	8,92E-05
SON.LS	0,000186	0,000266	9,41E-05	5,85E-05	0,000122	0,000113	0,00022	0,000153	0,000114	5,43E-05	0,000129	0,000131	0,000122	0,000136	6,12E-05	0,000145	0,000157	0,000156	5E-05	8,36E-05	0,000164	9,48E-05	0,000348	0,000124	0,000173
SONI.LS	0,000147	0,00016	2,07E-05	0,000102	0,000107	9,74E-05	0,000132	0,000142	3,28E-05	2,95E-05	5,9E-05	1,74E-05	7,83E-05	0,000143	-0,00011	0,000147	0,000122	8,91E-05	-7,2E-05	0,00011	0,00011	3,65E-05	0,000124	0,012218	0,000218
TDSA.LS	0,000178	0,000299	0,000124	7,88E-05	0,000127	0,000112	0,000267	0,00013	0,000158	7,16E-05	0,000223	0,000252	9,76E-05	0,000256	8,14E-05	0,000126	0,000154	0,000163	4,48E-05	8,23E-05	0,000157	8,92E-05	0,000173	0,000218	0,000105

Anexo 12 Betas das 25 ações - 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos

ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS
1,053476	1,688803	0,571685	0,389694	0,880282	0,839379	1,188805	1,042182	0,648018	0,317279	0,717459	0,698398	0,817121	0,772872	0,394049	0,814037	0,885247	1,067045	0,295979	0,5002	0,848701	0,48762	1,044164	0,814429	0,961683

Anexo 13 Matriz B, cujo elemento genérico é $\beta_i\beta_jv(E_M < R_{Mt}) - 19/05/2011$ a $07/05/2021$ – Cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos

	ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS
ALTR.LS	7,71E-05	0,000124	4,19E-05	2,85E-05	6,44E-05	6,14E-05	8,7E-05	7,63E-05	4,74E-05	2,32E-05	5,25E-05	5,11E-05	5,98E-05	5,66E-05	2,88E-05	5,96E-05	6,48E-05	7,81E-05	2,17E-05	3,66E-05	6,21E-05	3,57E-05	7,64E-05	5,96E-05	7,04E-05
BCP.LS	0,000124	0,000198	6,71E-05	4,57E-05	0,000103	9,85E-05	0,00014	0,000122	7,61E-05	3,72E-05	8,42E-05	8,2E-05	9,59E-05	9,07E-05	4,62E-05	9,55E-05	0,000104	0,000125	3,47E-05	5,87E-05	9,96E-05	5,72E-05	0,000123	9,56E-05	0,000113
CFN.LS	4,19E-05	6,71E-05	2,27E-05	1,55E-05	3,5E-05	3,33E-05	4,72E-05	4,14E-05	2,57E-05	1,26E-05	2,85E-05	2,77E-05	3,25E-05	3,07E-05	1,57E-05	3,23E-05	3,52E-05	4,24E-05	1,18E-05	1,99E-05	3,37E-05	1,94E-05	4,15E-05	3,24E-05	3,82E-05
COR.LS	2,85E-05	4,57E-05	1,55E-05	1,06E-05	2,38E-05	2,27E-05	3,22E-05	2,82E-05	1,75E-05	8,59E-06	1,94E-05	1,89E-05	2,21E-05	2,09E-05	1,07E-05	2,2E-05	2,4E-05	2,89E-05	8,02E-06	1,35E-05	2,3E-05	1,32E-05	2,83E-05	2,21E-05	2,6E-05
EDP.LS	6,44E-05	0,000103	3,5E-05	2,38E-05	5,38E-05	5,13E-05	7,27E-05	6,38E-05	3,96E-05	1,94E-05	4,39E-05	4,27E-05	5E-05	4,73E-05	2,41E-05	4,98E-05	5,42E-05	6,53E-05	1,81E-05	3,06E-05	5,19E-05	2,98E-05	6,39E-05	4,98E-05	5,88E-05
EDPR.LS	6,14E-05	9,85E-05	3,33E-05	2,27E-05	5,13E-05	4,9E-05	6,93E-05	6,08E-05	3,78E-05	1,85E-05	4,18E-05	4,07E-05	4,77E-05	4,51E-05	2,3E-05	4,75E-05	5,16E-05	6,22E-05	1,73E-05	2,92E-05	4,95E-05	2,84E-05	6,09E-05	4,75E-05	5,61E-05
EGL.LS	8,7E-05	0,00014	4,72E-05	3,22E-05	7,27E-05	6,93E-05	9,82E-05	8,61E-05	5,35E-05	2,62E-05	5,93E-05	5,77E-05	6,75E-05	6,38E-05	3,26E-05	6,73E-05	7,31E-05	8,82E-05	2,45E-05	4,13E-05	7,01E-05	4,03E-05	8,63E-05	6,73E-05	7,94E-05
GALP.LS	7,63E-05	0,000122	4,14E-05	2,82E-05	6,38E-05	6,08E-05	8,61E-05	7,55E-05	4,69E-05	2,3E-05	5,2E-05	5,06E-05	5,92E-05	5,6E-05	2,85E-05	5,9E-05	6,41E-05	7,73E-05	2,14E-05	3,62E-05	6,15E-05	3,53E-05	7,56E-05	5,9E-05	6,96E-05
GLINT.LS	4,74E-05	7,61E-05	2,57E-05	1,75E-05	3,96E-05	3,78E-05	5,35E-05	4,69E-05	2,92E-05	1,43E-05	3,23E-05	3,15E-05	3,68E-05	3,48E-05	1,77E-05	3,67E-05	3,99E-05	4,81E-05	1,33E-05	2,25E-05	3,82E-05	2,2E-05	4,7E-05	3,67E-05	4,33E-05
IBS.LS	2,32E-05	3,72E-05	1,26E-05	8,59E-06	1,94E-05	1,85E-05	2,62E-05	2,3E-05	1,43E-05	7E-06	1,58E-05	1,54E-05	1,8E-05	1,7E-05	8,69E-06	1,79E-05	1,95E-05	2,35E-05	6,53E-06	1,1E-05	1,87E-05	1,08E-05	2,3E-05	1,8E-05	2,12E-05
INA.LS	5,25E-05	8,42E-05	2,85E-05	1,94E-05	4,39E-05	4,18E-05	5,93E-05	5,2E-05	3,23E-05	1,58E-05	3,58E-05	3,48E-05	4,07E-05	3,85E-05	1,96E-05	4,06E-05	4,41E-05	5,32E-05	1,48E-05	2,49E-05	4,23E-05	2,43E-05	5,21E-05	4,06E-05	4,79E-05
IPR.LS	5,11E-05	8,2E-05	2,77E-05	1,89E-05	4,27E-05	4,07E-05	5,77E-05	5,06E-05	3,15E-05	1,54E-05	3,48E-05	3,39E-05	3,97E-05	3,75E-05	1,91E-05	3,95E-05	4,3E-05	5,18E-05	1,44E-05	2,43E-05	4,12E-05	2,37E-05	5,07E-05	3,95E-05	4,67E-05
JMT.LS	5,98E-05	9,59E-05	3,25E-05	2,21E-05	5E-05	4,77E-05	6,75E-05	5,92E-05	3,68E-05	1,8E-05	4,07E-05	3,97E-05	4,64E-05	4,39E-05	2,24E-05	4,62E-05	5,03E-05	6,06E-05	1,68E-05	2,84E-05	4,82E-05	2,77E-05	5,93E-05	4,62E-05	5,46E-05
MAR.LS	5,66E-05	9,07E-05	3,07E-05	2,09E-05	4,73E-05	4,51E-05	6,38E-05	5,6E-05	3,48E-05	1,7E-05	3,85E-05	3,75E-05	4,39E-05	4,15E-05	2,12E-05	4,37E-05	4,75E-05	5,73E-05	1,59E-05	2,69E-05	4,56E-05	2,62E-05	5,61E-05	4,37E-05	5,17E-05
NBA.LS	2,88E-05	4,62E-05	1,57E-05	1,07E-05	2,41E-05	2,3E-05	3,26E-05	2,85E-05	1,77E-05	8,69E-06	1,96E-05	1,91E-05	2,24E-05	2,12E-05	1,08E-05	2,23E-05	2,42E-05	2,92E-05	8,1E-06	1,37E-05	2,32E-05	1,34E-05	2,86E-05	2,23E-05	2,63E-05
NOS.LS	5,96E-05	9,55E-05	3,23E-05	2,2E-05	4,98E-05	4,75E-05	6,73E-05	5,9E-05	3,67E-05	1,79E-05	4,06E-05	3,95E-05	4,62E-05	4,37E-05	2,23E-05	4,6E-05	5,01E-05	6,04E-05	1,67E-05	2,83E-05	4,8E-05	2,76E-05	5,91E-05	4,61E-05	5,44E-05
NVG.LS	6,48E-05	0,000104	3,52E-05	2,4E-05	5,42E-05	5,16E-05	7,31E-05	6,41E-05	3,99E-05	1,95E-05	4,41E-05	4,3E-05	5,03E-05	4,75E-05	2,42E-05	5,01E-05	5,45E-05	6,56E-05	1,82E-05	3,08E-05	5,22E-05	3E-05	6,42E-05	5,01E-05	5,92E-05
PHR.LS	7,81E-05	0,000125	4,24E-05	2,89E-05	6,53E-05	6,22E-05	8,82E-05	7,73E-05	4,81E-05	2,35E-05	5,32E-05	5,18E-05	6,06E-05	5,73E-05	2,92E-05	6,04E-05	6,56E-05	7,91E-05	2,19E-05	3,71E-05	6,29E-05	3,62E-05	7,74E-05	6,04E-05	7,13E-05
RAM.LS	2,17E-05	3,47E-05	1,18E-05	8,02E-06	1,81E-05	1,73E-05	2,45E-05	2,14E-05	1,33E-05	6,53E-06	1,48E-05	1,44E-05	1,68E-05	1,59E-05	8,1E-06	1,67E-05	1,82E-05	2,19E-05	6,09E-06	1,03E-05	1,75E-05	1E-05	2,15E-05	1,68E-05	1,98E-05
RENE.LS	3,66E-05	5,87E-05	1,99E-05	1,35E-05	3,06E-05	2,92E-05	4,13E-05	3,62E-05	2,25E-05	1,1E-05	2,49E-05	2,43E-05	2,84E-05	2,69E-05	1,37E-05	2,83E-05	3,08E-05	3,71E-05	1,03E-05	1,74E-05	2,95E-05	1,69E-05	3,63E-05	2,83E-05	3,34E-05
SEM.LS	6,21E-05	9,96E-05	3,37E-05	2,3E-05	5,19E-05	4,95E-05	7,01E-05	6,15E-05	3,82E-05	1,87E-05	4,23E-05	4,12E-05	4,82E-05	4,56E-05	2,32E-05	4,8E-05	5,22E-05	6,29E-05	1,75E-05	2,95E-05	5,01E-05	2,88E-05	6,16E-05	4,8E-05	5,67E-05
SNC.LS	3,57E-05	5,72E-05	1,94E-05	1,32E-05	2,98E-05	2,84E-05	4,03E-05	3,53E-05	2,2E-05	1,08E-05	2,43E-05	2,37E-05	2,77E-05	2,62E-05	1,34E-05	2,76E-05	3E-05	3,62E-05	1E-05	1,69E-05	2,88E-05	1,65E-05	3,54E-05	2,76E-05	3,26E-05
SON.LS	7,64E-05	0,000123	4,15E-05	2,83E-05	6,39E-05	6,09E-05	8,63E-05	7,56E-05	4,7E-05	2,3E-05	5,21E-05	5,07E-05	5,93E-05	5,61E-05	2,86E-05	5,91E-05	6,42E-05	7,74E-05	2,15E-05	3,63E-05	6,16E-05	3,54E-05	7,58E-05	5,91E-05	6,98E-05
SONI.LS	5,96E-05	9,56E-05	3,24E-05	2,21E-05	4,98E-05	4,75E-05	6,73E-05	5,9E-05	3,67E-05	1,8E-05	4,06E-05	3,95E-05	4,62E-05	4,37E-05	2,23E-05	4,61E-05	5,01E-05	6,04E-05	1,68E-05	2,83E-05	4,8E-05	2,76E-05	5,91E-05	4,61E-05	5,44E-05
TDSA.LS	7,04E-05	0,000113	3,82E-05	2,6E-05	5,88E-05	5,61E-05	7,94E-05	6,96E-05	4,33E-05	2,12E-05	4,79E-05	4,67E-05	5,46E-05	5,17E-05	2,63E-05	5,44E-05	5,92E-05	7,13E-05	1,98E-05	3,34E-05	5,67E-05	3,26E-05	6,98E-05	5,44E-05	6,43E-05

Anexo 14 Matriz das semivariâncias/cosemivariâncias, matriz V_s – 19/05/2011 a 07/05/2021 – Cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos

	ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS
ALTR.LS	0,000362	0,000128	7,16E-05	5,66E-05	6,18E-05	5,91E-05	0,000135	8,11E-05	7,34E-05	3,51E-05	8,44E-05	7,73E-05	4,78E-05	7,35E-05	5,65E-05	8,04E-05	0,000154	9,74E-05	5,06E-05	4,93E-05	0,000136	4,9E-05	0,00011	8,69E-05	0,000108
BCP.LS	0,000128	0,000849	0,0001	4,63E-05	4,66E-05	5,15E-05	0,000181	8,67E-05	0,000134	4,28E-05	0,000155	0,000138	3,7E-05	0,000119	6,38E-05	8,18E-05	9,88E-05	0,000127	2,83E-05	5,03E-05	0,000101	5,54E-05	0,000144	6,4E-05	0,000186
CFN.LS	7,16E-05	0,0001	0,000857	4,22E-05	3,24E-05	4,39E-05	6,47E-05	5,17E-05	5,21E-05	4,76E-05	0,000103	0,000139	2,36E-05	8,91E-05	6,68E-05	3,96E-05	5,29E-05	4,26E-05	2,22E-05	3,73E-05	6,58E-05	4,68E-05	5,26E-05	-1,2E-05	8,58E-05
COR.LS	5,66E-05	4,63E-05	4,22E-05	0,000289	2,35E-05	2,47E-05	6,29E-05	3,27E-05	2,03E-05	2,46E-05	3,31E-05	1,96E-05	1,79E-05	2,72E-05	3,79E-05	2,96E-05	4,71E-05	2,43E-05	4,1E-05	2,14E-05	4,41E-05	1,17E-05	3,02E-05	7,95E-05	5,28E-05
EDP.LS	6,18E-05	4,66E-05	3,24E-05	2,35E-05	0,000192	9,87E-05	6,05E-05	5,25E-05	3,02E-05	2,21E-05	3,36E-05	3,56E-05	3,89E-05	5,47E-05	2,12E-05	4,63E-05	5,07E-05	4,88E-05	1,88E-05	5,13E-05	4,64E-05	3,92E-05	5,78E-05	5,76E-05	6,87E-05
EDPR.LS	5,91E-05	5,15E-05	4,39E-05	2,47E-05	9,87E-05	0,000229	4,35E-05	4,25E-05	4,23E-05	2,86E-05	4,21E-05	3,71E-05	3,85E-05	7,03E-05	2,65E-05	4,21E-05	4,8E-05	4,51E-05	1,58E-05	4,51E-05	4,87E-05	3,5E-05	5,25E-05	4,99E-05	5,55E-05
EGL.LS	0,000135	0,000181	6,47E-05	6,29E-05	6,05E-05	4,35E-05	0,000674	0,000102	0,000122	3,33E-05	9,6E-05	0,000123	4,81E-05	0,000121	4,46E-05	9,92E-05	0,000117	0,000145	6,54E-05	4,53E-05	0,000109	5,06E-05	0,000134	6,46E-05	0,000187
GALP.LS	8,11E-05	8,67E-05	5,17E-05	3,27E-05	5,25E-05	4,25E-05	0,000102	0,000293	2,16E-05	3,27E-05	3,8E-05	4,63E-05	4,61E-05	2,99E-05	2,14E-05	5,37E-05	7,41E-05	6,32E-05	2,91E-05	3,52E-05	7,1E-05	3,41E-05	7,74E-05	8,27E-05	6,01E-05
GLINT.LS	7,34E-05	0,000134	5,21E-05	2,03E-05	3,02E-05	4,23E-05	0,000122	2,16E-05	0,001731	1,99E-05	0,000194	0,000113	1,86E-05	0,000157	5,32E-05	4,79E-05	4,07E-05	6,87E-05	3,04E-05	3,71E-05	5,48E-05	3,31E-05	6,66E-05	-3,9E-06	0,000115
IBS.LS	3,51E-05	4,28E-05	4,76E-05	2,46E-05	2,21E-05	2,86E-05	3,33E-05	3,27E-05	1,99E-05	0,00043	3,63E-05	4,73E-05	1,66E-05	6,19E-05	3,06E-05	1,43E-05	3,35E-05	5,12E-05	4,24E-05	2,98E-05	3,9E-05	1,54E-05	3,12E-05	1,15E-05	5,04E-05
INA.LS	8,44E-05	0,000155	0,000103	3,31E-05	3,36E-05	4,21E-05	9,6E-05	3,8E-05	0,000194	3,63E-05	0,001162	0,000174	2,47E-05	0,000158	3,46E-05	3,05E-05	5,2E-05	8,82E-05	2,52E-05	2,89E-05	4,78E-05	3,37E-05	7,68E-05	1,84E-05	0,000175
IPR.LS	7,73E-05	0,000138	0,000139	1,96E-05	3,56E-05	3,71E-05	0,000123	4,63E-05	0,000113	4,73E-05	0,000174	0,001043	3,2E-05	0,000149	4,07E-05	5,53E-05	6,46E-05	5,56E-05	5,86E-05	4,26E-05	6,04E-05	3,88E-05	8,07E-05	-2,2E-05	0,000206
JMT.LS	4,78E-05	3,7E-05	2,36E-05	1,79E-05	3,89E-05	3,85E-05	4,81E-05	4,61E-05	1,86E-05	1,66E-05	2,47E-05	3,2E-05	0,000255	3,23E-05	2,2E-05	3,13E-05	3,63E-05	3,91E-05	1,77E-05	2,45E-05	3,45E-05	2,11E-05	6,31E-05	3,2E-05	4,3E-05
MAR.LS	7,35E-05	0,000119	8,91E-05	2,72E-05	5,47E-05	7,03E-05	0,000121	2,99E-05	0,000157	6,19E-05	0,000158	0,000149	3,23E-05	0,001087	5,87E-05	5,01E-05	6,88E-05	9,48E-05	6,3E-05	4,96E-05	9,14E-05	3,6E-05	7,98E-05	9,9E-05	0,000205
NBA.LS	5,65E-05	6,38E-05	6,68E-05	3,79E-05	2,12E-05	2,65E-05	4,46E-05	2,14E-05	5,32E-05	3,06E-05	3,46E-05	4,07E-05	2,2E-05	5,87E-05	0,000318	2,96E-05	4,08E-05	4,72E-05	2,09E-05	2,16E-05	4,43E-05	2,12E-05	3,26E-05	-0,00014	5,51E-05
NOS.LS	8,04E-05	8,18E-05	3,96E-05	2,96E-05	4,63E-05	4,21E-05	9,92E-05	5,37E-05	4,79E-05	1,43E-05	3,05E-05	5,53E-05	3,13E-05	5,01E-05	2,96E-05	0,00025	6,81E-05	6,11E-05	7,97E-06	3,75E-05	6,76E-05	7,36E-05	8,62E-05	0,000101	7,14E-05
NVG.LS	0,000154	9,88E-05	5,29E-05	4,71E-05	5,07E-05	4,8E-05	0,000117	7,41E-05	4,07E-05	3,35E-05	5,2E-05	6,46E-05	3,63E-05	6,88E-05	4,08E-05	6,81E-05	0,00023	8,78E-05	4,11E-05	4,49E-05	0,00014	4,2E-05	9,32E-05	7,23E-05	9,47E-05
PHR.LS	9,74E-05	0,000127	4,26E-05	2,43E-05	4,88E-05	4,51E-05	0,000145	6,32E-05	6,87E-05	5,12E-05	8,82E-05	5,56E-05	3,91E-05	9,48E-05	4,72E-05	6,11E-05	8,78E-05	0,000987	4,95E-05	4,58E-05	6,41E-05	2,44E-05	7,89E-05	2,87E-05	9,14E-05
RAM.LS	5,06E-05	2,83E-05	2,22E-05	4,1E-05	1,88E-05	1,58E-05	6,54E-05	2,91E-05	3,04E-05	4,24E-05	2,52E-05	5,86E-05	1,77E-05	6,3E-05	2,09E-05	7,97E-06	4,11E-05	4,95E-05	0,0007	1,88E-05	3,98E-05	8,17E-06	2,85E-05	-8,8E-05	2,5E-05
RENE.LS	4,93E-05	5,03E-05	3,73E-05	2,14E-05	5,13E-05	4,51E-05	4,53E-05	3,52E-05	3,71E-05	2,98E-05	2,89E-05	4,26E-05	2,45E-05	4,96E-05	2,16E-05	3,75E-05	4,49E-05	4,58E-05	1,88E-05	0,000102	4,26E-05	2,7E-05	4,73E-05	8,14E-05	4,88E-05
SEM.LS	0,000136	0,000101	6,58E-05	4,41E-05	4,64E-05	4,87E-05	0,000109	7,1E-05	5,48E-05	3,9E-05	4,78E-05	6,04E-05	3,45E-05	9,14E-05	4,43E-05	6,76E-05	0,00014	6,41E-05	3,98E-05	4,26E-05	0,000283	4,74E-05	0,000103	6,21E-05	0,0001
SNC.LS	4,9E-05	5,54E-05	4,68E-05	1,17E-05	3,92E-05	3,5E-05	5,06E-05	3,41E-05	3,31E-05	1,54E-05	3,37E-05	3,88E-05	2,11E-05	3,6E-05	2,12E-05	7,36E-05	4,2E-05	2,44E-05	8,17E-06	2,7E-05	4,74E-05	0,00046	5,94E-05	8,86E-06	5,66E-05
SON.LS	0,00011	0,000144	5,26E-05	3,02E-05	5,78E-05	5,25E-05	0,000134	7,74E-05	6,66E-05	3,12E-05	7,68E-05	8,07E-05	6,31E-05	7,98E-05	3,26E-05	8,62E-05	9,32E-05	7,89E-05	2,85E-05	4,73E-05	0,000103	5,94E-05	0,000272	6,5E-05	0,000103
SONI.LS	8,69E-05	6,4E-05	-1,2E-05	7,95E-05	5,76E-05	4,99E-05	6,46E-05	8,27E-05	-3,9E-06	1,15E-05	1,84E-05	-2,2E-05	3,2E-05	9,9E-05	-0,00014	0,000101	7,23E-05	2,87E-05	-8,8E-05	8,14E-05	6,21E-05	8,86E-06	6,5E-05	0,012171	0,000163
TDSA.LS	0,000108	0,000186	8,58E-05	5,28E-05	6,87E-05	5,55E-05	0,000187	6,01E-05	0,000115	5,04E-05	0,000175	0,000206	4,3E-05	0,000205	5,51E-05	7,14E-05	9,47E-05	9,14E-05	2,5E-05	4,88E-05	0,0001	5,66E-05	0,000103	0,000163	0,000986

Anexo 15 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Markowitz, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 5% da carteira – Cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos

Rent. Esperada	Desvio-padrão	ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS	Semidesvio-padrão	
0,000441334	0,010267906	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0,05	0,033289	0,05	0,040712	0,043271	0,05	0,030996	0,05	0,05	0,05	0,034709	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,00571	0,011314	0,00835144
0,00046	0,010277123	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,007201	0,05	0,038235	0,05	0,038722	0,043049	0,05	0,032355	0,05	0,05	0,05	0,024417	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,006399	0,009623	0,008367612
0,00048	0,010305452	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,016225	0,05	0,043065	0,05	0,036524	0,04255	0,05	0,033488	0,05	0,05	0,05	0,013572	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,007072	0,007504	0,00840388
0,0005	0,010352639	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,025248	0,05	0,047895	0,05	0,034327	0,042052	0,05	0,034621	0,05	0,05	0,05	0,002727	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,007744	0,005385	0,008463166
0,00052	0,010437669	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,047904	0,05	0,05	0,05	0,021649	0,036027	0,05	0,034475	0,05	0,05	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,009944	0	0,008516718
0,00055	0,011100393	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0,01329	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,03671	0	0,009290641

Anexo 16 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Ballester, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 5% da carteira – Cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos

Rent. Esperada	Semidesvio-padrão	ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS	Desvio-padrão	
0,000429869	0,008301325	0,05	0,014407	0,05	0,05	0,05	0,05	0,017896	0,05	0,024768	0,05	0,031555	0,030698	0,05	0,023457	0,05	0,05	0,05	0,03938	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,005046	0,012793	0,010349168
0,00046	0,008322866	0,05	0,005082	0,05	0,05	0,05	0,05	0,031469	0,05	0,031318	0,05	0,030053	0,031233	0,05	0,025648	0,05	0,05	0,05	0,027605	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,005951	0,011641	0,010330221
0,00048	0,008360893	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,040478	0,05	0,035753	0,05	0,028841	0,031435	0,05	0,027044	0,05	0,05	0,05	0,019245	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,006564	0,010639	0,010341065
0,0005	0,008420511	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,049489	0,05	0,040585	0,05	0,026644	0,030946	0,05	0,028177	0,05	0,05	0,05	0,008399	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,00724	0,008519	0,010388057
0,00052	0,00851025	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,020801	0,031595	0,05	0,032874	0,05	0,05	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,009384	0,005346	0,010443178
0,00055	0,009290641	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0,01329	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,03671	0	0,01100393

Anexo 17 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Markowitz, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 10% da carteira – Cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos

Rent. Esperada	Desvio-padrão	ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS	Semidesvio-padrão
0,000581986	0,008891362	0	0	0,023302	0,1	0,076938	0,066937	0	0,018966	0,013359	0,1	0,016509	0,011239	0,1	0	0,1	0,076678	0,014902	0	0,07489	0,1	0,016078	0,087485	0	0,002717	0	0,007442962
0,0006	0,008896411	0	0	0,021915	0,1	0,078831	0,072447	0	0,012674	0,014546	0,1	0,013339	0,008766	0,1	0	0,1	0,072605	0,017504	0	0,082882	0,1	0,015249	0,08632	0	0,002922	0	0,007470891
0,00065	0,008966622	0	0	0,016725	0,1	0,085969	0,094299	0	0	0,019468	0,1	0,001265	0	0,1	0	0,1	0,056091	0,027646	0	0,1	0,1	0,012325	0,082638	0	0,003574	0	0,007587631
0,0007	0,009212408	0,060545	0	0,004241	0,1	0,1	0,1	0	0	0,027464	0,089852	0	0	0,084822	0	0,1	0,021856	0,024271	0	0,1	0,1	0,001665	0,08062	0	0,004665	0	0,00776004
0,00075	0,009736978	0,1	0	0	0,1	0,1	0,1	0	0	0,052692	0,053706	0	0	0,042965	0	0,1	0	0,074553	0	0,1	0,1	0	0,067926	0	0,008157	0	0,008213257

Anexo 18 Carteiras eficientes, segundo o modelo de Ballester, quando o peso de um ativo não pode ser superior a 10% da carteira – Cotações ajustadas para *stock-splits* e dividendos

Rent. Esperada	Semidesvio-padrão	ALTR.LS	BCP.LS	CFN.LS	COR.LS	EDP.LS	EDPR.LS	EGL.LS	GALP.LS	GLINT.LS	IBS.LS	INA.LS	IPR.LS	JMT.LS	MAR.LS	NBA.LS	NOS.LS	NVG.LS	PHR.LS	RAM.LS	RENE.LS	SEM.LS	SNC.LS	SON.LS	SONI.LS	TDSA.LS	Desvio-padrão
0,000539866	0,007306171	0	0	0,013985	0,1	0,096525	0,072998	0	0,058824	0,010869	0,072308	0,015226	0,010193	0,1	0,001067	0,09601	0,079108	0,030394	0,008539	0,047068	0,1	0,020798	0,059253	0,004674	0,002161	0	0,009049043
0,0006	0,007350152	0	0	0,011041	0,1	0,1	0,089196	0	0,044706	0,014123	0,066106	0,008194	0,004572	0,1	0	0,1	0,07094	0,039714	0	0,068379	0,1	0,019731	0,05735	0,003204	0,002745	0	0,009026554
0,00065	0,007471997	0,017938	0	0,008211	0,1	0,1	0,1	0	0,030913	0,016846	0,060421	0,000885	0	0,1	0	0,1	0,062088	0,039198	0	0,087599	0,1	0,016495	0,05618	0	0,003225	0	0,009103381
0,0007	0,007683167	0,06123	0	0,001886	0,1	0,1	0,1	0	0,008092	0,020917	0,053592	0	0	0,1	0	0,1	0,046589	0,037211	0	0,1	0,1	0,010944	0,055498	0	0,004041	0	0,009291339
0,00075	0,008152875	0,1	0	0	0,1	0,1	0,1	0	0	0,04253	0,025416	0	0	0,076569	0	0,1	0	0,09157	0	0,1	0,1	0,00626	0,050494	0	0,007161	0	0,009790779