



**Universidade de Évora - Instituto de Investigação e Formação Avançada**

Programa de Doutoramento em Matemática

Área de especialização | Estatística

Tese de Doutoramento

**Estatística de Extremos: Limites da Performance Humana -  
estudo com lançadores e saltadores do atletismo**

Domingos José Lopes da Silva

Orientador(es) | Frederico Almeida Gião Gonçalves Caeiro

Maria Manuela Oliveira

Évora 2020

---

---

---

---



**Universidade de Évora - Instituto de Investigação e Formação Avançada**

Programa de Doutoramento em Matemática

Área de especialização | Estatística

Tese de Doutoramento

**Estatística de Extremos: Limites da Performance Humana -  
estudo com lançadores e saltadores do atletismo**

Domingos José Lopes da Silva

Orientador(es) | Frederico Almeida Gião Gonçalves Caeiro  
Maria Manuela Oliveira

Évora 2020

---

---

---

---



O tese de doutoramento foi objeto de apreciação e discussão pública pelo seguinte júri nomeado pelo Diretor do Instituto de Investigação e Formação Avançada:

Presidente | Feliz Manuel Minhós (Universidade de Évora)

Vogais | Dora Susana Raposo Prata Gomes (Universidade Nova de Lisboa)  
Fernanda Otília de Sousa Figueiredo (Universidade do Porto)  
Frederico Almeida Gião Gonçalves Caeiro (Universidade Nova de Lisboa)  
Lígia Henriques-Rodrigues (Universidade de Évora)  
Russell Alpizar-Jara (Universidade de Évora)

## **DEDICATÓRIA**

Júlia Silva  
Flávio Dinis  
Flávia Rafaela





## AGRADECIMENTOS

Por muitas que tenham sido as horas passadas em solidão, nenhum trabalho de investigação é produto exclusivo do esforço solitário. Neste caminho, nem sempre fácil de trilhar, as agruras da “estrada” foram vencidas com a preciosa e imprescindível ajuda de um vasto leque de pessoas e entidades, sem as quais dificilmente seria levada a “*carta a Garcia*”. Assim, gostaria de deixar expresso o meu mais profundo agradecimento e reconhecimento público ...

- à Comissão de Curso do Doutoramento em Matemática da Universidade de Évora, coordenada pelo Professor Doutor Feliz Minhós, por me ter aceite como membro desta importante academia.
- agradecimento especial ao Professor Doutor Frederico Caeiro e à Professora Doutora Manuela Oliveira, orientadores científicos desta tese. Por desde o início se mostrarem disponíveis para colaborar na resolução das imensas dúvidas que surgiram, associado aos valiosos conselhos, às correções feitas, ao rumo a seguir e encorajamento, demonstrando sempre disponibilidade e um forte entusiasmo pelo trabalho a desenvolver. Agradeço-lhes muito por sempre acreditarem em mim. Foram importantes fontes de motivação. Direi mesmo que convosco fui levado aos *extremos*.
- aos docentes das Unidades Curriculares, Professora Doutora Dulce Pereira (Delineamento e Análise de Experiências), Professora Doutora Dulce Gomes (Séries Temporais), Professor Doutor Gonçalo Jacinto (Inferência Estatística), Professor Doutor Jorge Santos (Investigação Operacional), Professora Doutora Manuela Oliveira (Estatística Computacional e Estatística de Dados Multivariados), Professor Doutor Paulo Infante (Análise Categórica de Dados) e Professor Doutor Russel Alpizar-Jara (Modelos Matemáticos em Biologia), pelos ensinamentos transmitidos, pela disponibilidade nos muitos atendimentos solicitados por videoconferência e/ou contacto telefónico para esclarecimento de dúvidas, pela partilha de experiências, pelas sugestões de trabalho, pela amizade.
- ao imenso número de investigadores que pela plataforma ResearchGate me enviaram artigos e outros documentos que serviram de apoio ao desenvolvimento desta tese.
- ao colega Manuel Mário, pelas vezes que nos “encontramos” via Skype, para troca de experiências e partilha de momentos académicos.
- ao Professor Doutor José Augusto R. Santos, pela amizade e gratidão de o ter como mestre, um excelente académico e cientista, um enorme professor e uma pessoa brilhante.
- aos amigos Rui Brandão e Elisabete Brandão, pela amizade e partilha de muitos momentos de convívio e discussões académicas, estatísticas e profissionais.
- aos meus pais, pela preocupação sempre presente e pelas sempre palavras de encorajamento.
- ao meu irmão Flávio Silva, pelo tempo que ocupamos com muitos “momentos estatísticos”.
- em memória da minha Avó, Maria Dolores “Quinhas Gandra”, pela admiração que tenho na luta que travou ao longo da vida.
- à minha família de casa, Júlia Silva, Flávio Dinis e Flávia Rafaela, pela inspiração e por tudo o que represento.

“Nos extremos é que está a virtude”

Domingos J.L. Silva, 04/05/2019



## RESUMO

### **Estatística de Extremos: limites da performance humana – estudo com lançadores e saltadores do atletismo**

Eventos extremos são raros, mas quando ocorrem têm um enorme impacto social e uma atenção mediática considerável. São exemplo os recordes no mundo do desporto – raros de acontecerem, mas quando ocorrem não apenas são divulgados nos mais variados meios de comunicação social, como são motivo de modificação da metodologia de treino e do comportamento do atleta. Como prever esta ocorrência? Qual a probabilidade de ocorrência? Qual a magnitude da ocorrência? Quanto tempo de espera? A teoria de valores extremos, baseada no teorema dos tipos extremais de Fisher-Tippett-Gnedenko, proporciona um rigoroso quadro de análise dos valores extremos, estimando a probabilidade de ocorrência de eventos que estão para além da amostra disponível. Assim, sob a questão “qual o limite da performance humana?”, este trabalho no domínio da Estatística de Extremos tem aplicações ao desporto de alto rendimento, particularmente às especialidades de lançamentos e saltos do atletismo. Foram utilizadas as metodologias: (i)  $r$ -maiores observações, (ii) excessos acima de um limiar, e (iii) máximos de blocos não-estacionários. Decidida a distribuição limite do máximo associado ao evento em estudo e o modelo que melhor se adequa aos dados disponíveis, a estimação pontual dos parâmetros extremais foi realizada por máxima verosimilhança e a estimação intervalar pelo método delta e pela função *profile log-likelihood*. Em cada método foram testados diversos modelos. Recorremos a técnicas gráficas, estabilidade dos erros-padrão, intervalos de confiança, testes de hipóteses e algumas métricas de erro, para verificação do ajustamento dos modelos aos dados disponíveis. Estamos particularmente interessados na estimação de quantis extremais, probabilidades de excedência, limite superior do suporte, níveis de retorno e período de retorno. Os resultados mostram que nos lançamentos do martelo, disco e dardo feminino existe uma forte probabilidade de se conseguir um novo recorde do mundo e que nos lançamentos masculinos tal probabilidade é reduzida. Com exceção do triplo-salto, nas restantes especialidades de saltos, o período de retorno (i.e., número de máximos individuais) até à ocorrência de um novo recorde do mundo é menor nas mulheres do que nos homens.

**Palavras-chave:** teoria de valores extremos • máximos de blocos •  $r$ -maiores observações • excessos acima de um limiar • não-estacionariedade • probabilidades de excedência • quantis extremais • limite superior do suporte • níveis de retorno • períodos de retorno • atletismo (lançamentos e saltos) • recorde do mundo



## ABSTRACT

### **Statistics of Extremes: limits of human performance - study with throwers and jumpers in athletics**

Extreme events are rare, but when they do occur, they have an enormous social impact and they receive a considerable media attention. Such is the case of world records in sport – they rarely happen, but when they do, not only are they disclosed by all media, but they also cause changes in the training methodology and in the athlete's behaviour. How to predict this occurrence? What is the probability of occurrence? What is the magnitude of the occurrence? How long is the wait? The extreme value theory, based on the Fisher-Tippett-Gnedenko theorem, provides a rigorous framework for analysing extreme values, estimating the probability of the occurrence of events that are beyond the sample. Thus, research within the area of Extreme Statistics provide information to answer the question “what is the limit of human performance?” in the framework of high-performance sport, particularly in the case of the specialties of throwing and jumping in athletics. The methodologies used were: (i)  $r$ -largest order statistics, (ii) peaks over threshold, and (iii) non-stationary annual maximum. Once decided the limit distribution of the maximum associated with the event under study and the model that best fits the available data, the point estimation of the extremal parameters were performed by maximum likelihood estimation, with Nelder-Mead or BFGS optimization and the interval estimation using the delta method and the profile log-likelihood function. In each method, several models were tested. We used graphical techniques, stability of standard errors, confidence intervals, hypothesis tests and some error metrics, to verify if the models fit the available data. We were particularly interested in the estimation of extreme quantiles, exceedance probability, right endpoint, return levels and return period. The results suggest that in hammer, discus and javelin throwing there are a strong probability of a new world record will be achieved. In the case of male, throwing events, the forecast of a new world record being achieved with reduced probability. With exception of triple-jump, in all other jumping specialties, the return period (i.e., number of individual maximums) until the occurrence of a new world record is shorter in women than in men.

**Key-words:** extreme value theory • block maxima •  $r$ -largest order statistics • peaks over threshold • non-stationary • extreme quantiles • exceedance probability • right endpoint estimation • return levels • return periods • athletics (throws and jumps) • world record



## ÍNDICE GERAL

CAPA	
Subcapa	
DEDICATÓRIA	i
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	v
ABSTRACT	vii
ÍNDICE GERAL	ix
ÍNDICE DE TABELAS	xv
ÍNDICE DE FIGURAS/GRÁFICOS	xxi
LISTA DE ABREVIATURAS, ACRÓNIMOS E SIGLAS	xxv
LISTA DE SÍMBOLOS, NOTAÇÕES E CONVENÇÕES	xxvii
<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1. Resenha histórica: o nascer de uma teoria	3
1.2. Teoria de valores extremos: outros contributos	9
1.3. Teoria de valores extremos com investigadores portugueses	10
1.4. Teoria de valores extremos: aplicações ao desporto	12
1.5. Motivação, importância e objetivos	14
1.6. Estrutura do estudo	15
1.6.1. Organograma geral do estudo	17
1.7. Trabalhos realizados e publicações relacionadas com a tese	19
1.7.1. Publicações em revistas	19
1.7.2. <i>Conference proceedings</i>	19
1.7.3. Comunicações em poster	19
1.7.4. A aguardar publicação	19
<b>2. TEORIA DE VALORES EXTREMOS – primeiros resultados</b>	<b>21</b>
2.1. Distribuições limite para o máximo	21
2.2. Distribuição generalizada de valores extremos	28
2.3. Domínios de atração para o máximo normalizado e constantes de atração	31
2.3.1. Seleção das constantes de atração	35
<b>3. DADOS</b>	<b>37</b>
<b>4. MÉTODO DAS <math>r</math>-MAIORES OBSERVAÇÕES, para os lançamentos do atletismo</b>	<b>41</b>
4.1. Introdução	41
4.2. Suporte teórico	41
4.2.1. Modelo das $r$ -maiores observações	41
4.2.2. Estimção dos parâmetros	45
4.2.2.1. Erros-padrão e intervalo de confiança	47
4.2.3. Seleção do modelo $GEV_r$	48
4.2.3.1. Seleção de modelos por meios gráficos	48
4.2.3.2. “Estabilidade” dos erros-padrão	51
4.2.4. Estimção de outras quantidades de interesse	51
4.2.4.1. Quantis extremos	51
4.2.4.2. Probabilidade de excedência	52
4.2.4.3. Limite superior do suporte	52
4.2.4.4. Valores de retorno	53
4.3. APLICAÇÕES	56
4.3.1. Breve descrição dos dados	56
4.3.2. Fases do estudo	56
4.3.3. Estacionariedade	57
4.3.4. Caracterização das amostras	62



4.3.5.	Estimativa dos parâmetros	65
4.3.6.	Escolha do modelo $GEV_r$	69
4.3.7.	Diagnóstico do modelo	70
4.3.8.	Estimar outras quantidades de interesse	74
4.3.8.1.	Quantis extremais	74
4.3.8.2.	Probabilidade de excedência	75
4.3.8.3.	Limite superior do suporte	75
4.3.8.4.	Valores de retorno	76
4.4.	<b>DISCUSSÃO</b>	82
4.4.1.	Porquê o método das $r$ -maiores observações?	82
4.4.2.	O processo de modelação	82
4.4.3.	Seleção de modelos	82
4.4.4.	Modelos selecionados	84
4.4.5.	Outras quantidades de interesse e dificuldades em exceder o recorde do mundo	85
4.4.6.	Notas finais	93
<b>5.</b>	<b>MÉTODO <i>PEAKS OVER THRESHOLD</i>, para os saltos do atletismo</b>	<b>95</b>
5.1.	Introdução	95
5.2.	Suporte teórico	97
5.2.1.	Distribuição condicional dos excessos	97
5.2.2.	Distribuição Generalizada de Pareto	99
5.2.3.	Escolha do limiar	102
5.2.3.1.	Função de excesso médio e gráfico de vida média residual	102
5.2.3.2.	Gráfico de estabilidade dos parâmetros	106
5.2.3.3.	Representação gráfica do estimador generalizado de Hill vs estimador dos momentos	108
5.2.3.4.	Metodologia “Esticar a Corda”	109
5.2.4.	Estimação dos parâmetros	110
5.2.5.	Erros-padrão e intervalos de confiança dos parâmetros extremais	113
5.2.6.	Seleção do modelo: Exponencial ou GPD?	114
5.2.6.1.	Gráfico <i>QQ-plot</i>	114
5.2.6.2.	Intervalos de confiança	114
5.2.6.3.	Testes de hipóteses	114
5.2.7.	Diagnóstico do ajustamento	117
5.2.8.	Estimação de outras quantidades de interesse	119
5.2.8.1.	Quantis extremais	119
5.2.8.2.	Probabilidade de excedência	120
5.2.8.3.	Limite superior do suporte	121
5.2.8.4.	Valores de retorno	121
5.3.	<b>APLICAÇÕES</b>	<b>124</b>
5.3.1.	Breve descrição dos dados	124
5.3.2.	Fases do estudo	124
5.3.3.	Estacionariedade	125
5.3.4.	Caracterização das amostras	125
5.3.4.1.	Quantis empíricos	132
5.3.5.	Escolha do limiar	132
5.3.5.1.	<b>SALTO EM ALTURA</b>	<b>133</b>
5.3.5.1.1.	Gráfico de vida média residual	133
5.3.5.1.2.	Gráfico de vida mediana residual	134
5.3.5.1.3.	Gráfico de estabilidade dos parâmetros	135
5.3.5.1.4.	Gráfico do estimador generalizado de Hill vs gráfico do estimador dos momentos	136
5.3.5.1.5.	Método “Esticar a Corda”	137

5.3.5.2.	SALTO EM COMPRIMENTO	138
5.3.5.2.1.	Gráfico de vida média residual	138
5.3.5.2.2.	Gráfico de vida mediana residual	139
5.3.5.2.3.	Gráfico de estabilidade dos parâmetros	140
5.3.5.2.4.	Gráfico do estimador generalizado de Hill vs gráfico do estimador dos momentos	141
5.3.5.2.5.	Método “Esticar a Corda”	142
5.3.5.3.	SALTO COM VARA	143
5.3.5.3.1.	Gráfico de vida média residual	143
5.3.5.3.2.	Gráfico de vida mediana residual	144
5.3.5.3.3.	Gráfico de estabilidade dos parâmetros	145
5.3.5.3.4.	Gráfico do estimador generalizado de Hill vs gráfico do estimador dos momentos	146
5.3.5.3.5.	Método “Esticar a Corda”	147
5.3.5.4.	TRIPLO-SALTO	148
5.3.5.4.1.	Gráfico de vida média residual	148
5.3.5.4.2.	Gráfico de vida mediana residual	149
5.3.5.4.3.	Gráfico de estabilidade dos parâmetros	150
5.3.5.4.4.	Gráfico do estimador generalizado de Hill vs gráfico do estimador dos momentos	151
5.3.5.4.5.	Método “Esticar a Corda”	152
5.3.6.	Modelo Exponencial ou GPD?	153
5.3.6.1.	Metodologia gráfica	153
5.3.6.2.	Informação com base nos intervalos de confiança para $\gamma$	154
5.3.6.3.	Testes de hipóteses	156
5.3.6.4.	Decisão quanto ao modelo: Exponencial ou GPD	160
5.3.7.	Estimativa dos parâmetros	164
5.3.8.	Seleção do melhor modelo	170
5.3.9.	Diagnóstico dos modelos selecionados	171
5.3.10.	Estimação de outras quantidades de interesse	179
5.3.10.1.	Quantis extremais	179
5.3.10.2.	Probabilidade de excedência	180
5.3.10.3.	Limite superior do suporte ( $\hat{\gamma} < 0$ )	181
5.3.10.4.	Níveis de retorno	181
5.3.10.5.	Período de retorno	185
5.4.	DISCUSSÃO	186
5.4.1.	A escolha do limiar – um problema em aberto	186
5.4.2.	Modelo Exponencial ( $\gamma=0$ ) vs Modelo GPD ( $\gamma \neq 0$ )	187
5.4.3.	Condições de regularidade	188
5.4.4.	Ajustamento dos modelos a considerar no estudo inferencial	189
5.4.5.	Outras quantidades de interesse	189
5.4.6.	Excessos acima do nível $u$ nas principais competições de atletismo	200
5.4.7.	Notas finais	204
<b>6.</b>	<b>NÃO-ESTACIONARIEDADE, para os lançamentos do atletismo</b>	<b>205</b>
6.1.	Introdução	205
6.2.	Método dos máximos de blocos	206
6.3.	Estimação dos parâmetros	207
6.3.1.	Erros-padrão e intervalos de confiança	209
6.4.	Modelos	210
6.5.	Seleção do melhor modelo	210
6.5.1.	Informação gráfica preliminar	211
6.5.2.	Teste da razão de verossimilhanças	211
6.5.3.	Critérios de Informação	212
6.5.4.	RMSE, MAE, ME e %BIAS	213

6.6.	Diagnóstico do ajustamento	215
6.7.	Estimação de outras quantidades de interesse	216
6.7.1.	Quantis extremais	216
6.7.2.	Probabilidade de excedência	216
6.7.3.	Limite superior do suporte	216
6.7.4.	Níveis de retorno	217
6.8.	APLICAÇÕES	219
6.8.1.	Breve descrição dos dados	219
6.8.2.	Fases do estudo	219
6.8.3.	Caracterização da amostra	220
6.8.4.	Estacionariedade	221
6.8.5.	Modelos a estudar	223
6.8.5.1.	Incorporar informação	224
6.8.6.	Estimação dos parâmetros	225
6.8.7.	Seleção do modelo	230
6.8.7.1.	Informação gráfica preliminar	230
6.8.7.2.	Teste da razão de verosimilhanças	230
6.8.7.3.	Critérios de Informação	232
6.8.7.4.	Decisão	233
6.8.7.4.1.	Estudo de simulação	234
6.8.8.	Diagnóstico do modelo	236
6.8.9.	Outras quantidades de interesse (assumindo a não-estacionariedade no futuro)	237
6.8.9.1.	Quantis extremais	237
6.8.9.2.	Probabilidade de excedência	238
6.8.9.3.	Limite superior do suporte, quando $\hat{\gamma} < 0$	239
6.8.9.4.	Níveis de retorno a $T$ -anos	239
6.9.	DISCUSSÃO	242
6.9.1.	Por que é que no desporto também se observa tendência?	242
6.9.2.	O processo de modelação e de ajustamento	243
6.9.3.	Por que decidimos manter constante o parâmetro de forma?	244
6.9.4.	O estudo de simulação usando as métricas RMSE, MAE, ME e %BIAS	245
6.9.5.	Quantidades de interesse	247
6.9.6.	Por que é tão difícil exceder o recorde do mundo no lançamento do disco feminino?	249
6.9.7.	Por que é que o recorde do mundo do lançamento do martelo feminino é aparentemente fácil de ser excedido?	253
6.9.8.	Notas finais	257
<b>7.</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>259</b>
7.1	Limitações ao estudo	264
7.2	Recomendações para futuras investigações	265
<b>8.</b>	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>267</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>A1</b>
<b>ANEXO 1</b>	<b>BREVE CARACTERIZAÇÃO DAS MODALIDADES</b>	<b>A2</b>
ANEXO 1.1.	Lançamento do dardo ( <i>javelin throw</i> )	A2
ANEXO 1.2.	Lançamento do disco ( <i>discus throw</i> )	A5
ANEXO 1.3.	Lançamento do martelo ( <i>hammer throw</i> )	A7
ANEXO 1.4.	Lançamento do peso ( <i>shot put</i> )	A9
ANEXO 1.5.	Salto em altura ( <i>high jump</i> )	A11
ANEXO 1.6.	Salto em comprimento ( <i>long jump</i> )	A13
ANEXO 1.7.	Salto com vara ( <i>pole vault</i> )	A15

ANEXO 1.8. Triplo-Salto ( <i>triple-jump</i> )	<b>A17</b>
<b>ANEXO 2 ALEATORIEDADE (<i>Turning Point Test</i>)</b>	<b>A20</b>
ANEXO 2.1. Método dos máximos de blocos individuais	<b>A21</b>
ANEXO 2.2. Método dos máximos de blocos anuais	<b>A22</b>
ANEXO 2.3. Método das $r$ -maiores observações anuais	<b>A22</b>
<b>ANEXO 3 TENDÊNCIA (<i>Cox-Stuart Trend Test</i>)</b>	<b>A23</b>
ANEXO 3.1. Método dos máximos de blocos individuais	<b>A24</b>
ANEXO 3.2. Método dos máximos de blocos anuais	<b>A24</b>
ANEXO 3.3. Método das $r$ -maiores observações anuais	<b>A25</b>
<b>ANEXO 4 <math>r</math>-MAIORES OBSERVAÇÕES ANUAIS</b>	<b>A26</b>
ANEXO 4.1. Técnicas <i>LOWESS</i> e <i>LOESS</i>	<b>A26</b>
ANEXO 4.1.1 SIMULAÇÃO: avaliar o impacto na curva de suavização com a modificação do valor do parâmetro de forma, mantendo constante os parâmetros de localização, escala e suavização.	<b>A34</b>
ANEXO 4.2. Método das $r$ -maiores observações anuais: diagrama de extremos e quartis dos 10 níveis $r$ das amostras aprovadas nos testes de aleatoriedade e tendência	<b>A36</b>
ANEXO 4.3. Método das $r$ -maiores observações anuais: estabilidade das estimativas pontuais dos parâmetros extremos $GEV_r(\lambda, \delta, \gamma)$ , nos $r=10$ níveis, nas amostras de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso masculino, e dardo e peso feminino	<b>A39</b>
ANEXO 4.4. Método das $r$ -maiores observações anuais: estabilidade dos erros-padrão das estimativas pontuais $GEV_r(\lambda, \delta, \gamma)$ , nos $r=10$ níveis, nas amostras de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso masculino, e dardo e peso feminino	<b>A40</b>
ANEXO 4.5. Método das $r$ -maiores observações anuais: ajustamento do modelo para o máximo em função do nível $r^{(k)}$ selecionado	<b>A41</b>
ANEXO 4.5.1. Lançamento do Dardo: HOMENS	<b>A41</b>
ANEXO 4.5.2. Lançamento do Disco: HOMENS	<b>A43</b>
ANEXO 4.5.3. Lançamento do Martelo: HOMENS	<b>A45</b>
ANEXO 4.5.4. Lançamento do Peso: HOMENS	<b>A47</b>
ANEXO 4.5.5. Lançamento do Dardo: MULHERES	<b>A49</b>
ANEXO 4.5.6. Lançamento do Peso: MULHERES	<b>A51</b>
ANEXO 4.6. Estimativas pontuais dos níveis de retorno a $t$ -anos	<b>A53</b>
ANEXO 4.6.1. Estimativa pontual dos níveis de retorno a $t$ -anos nos lançamentos do dardo, disco, martelo e peso masculino e nos lançamentos do dardo e peso feminino, respetivamente para os modelos $GEV_{r=2}$ , $GEV_{r=2}$ , $GEV_{r=3}$ , $GEV_{r=3}$ , $GEV_{r=4}$ e $GEV_{r=2}$ .	<b>A53</b>
ANEXO 4.6.2. Intervalos com 95% de confiança para os níveis de retorno a $t$ -anos: método delta	<b>A57</b>
ANEXO 4.6.3. $IC_{95\%} U(t)$ : função <i>profile log-likelihood</i>	<b>A61</b>
ANEXO 4.6.4. Gráfico dos níveis de retorno a $t$ -anos, para o lançamento do dardo masculino, segundo o modelo $GEV_{r=2}$ ajustado	<b>A65</b>
ANEXO 4.6.5. Gráfico de níveis de retorno a $t$ -anos, para o lançamento do disco masculino, segundo o modelo $GEV_{r=2}$ ajustado	<b>A65</b>
ANEXO 4.6.6. Gráfico de níveis de retorno a $t$ -anos, para o lançamento do martelo masculino, segundo o modelo $GEV_{r=3}$ ajustado	<b>A66</b>
ANEXO 4.6.7. Gráfico de níveis de retorno a $t$ -anos, para o lançamento do peso masculino, segundo o modelo $GEV_{r=3}$ ajustado	<b>A66</b>
ANEXO 4.6.8. Gráfico de níveis de retorno a $t$ -anos, para o lançamento do dardo feminino, segundo o modelo $GEV_{r=4}$ ajustado	<b>A67</b>
ANEXO 4.6.9. Gráfico de níveis de retorno a $t$ -anos, para o lançamento do peso feminino, segundo o modelo $GEV_{r=2}$ ajustado	<b>A67</b>

<b>ANEXO 5</b>	<b>EXCESSOS ACIMA DE UM LIMIAR</b>	<b>A68</b>
ANEXO 5.1.	<i>Mean residual life</i> adaptado: “Esticar a Corda”	A68
ANEXO 5.2.	Método <i>Peaks Over Threshold</i> : ajustamento dos modelos $EXP_{\gamma=0}$ vs $GPD_{\gamma \neq 0}$	A69
ANEXO 5.2.1.	Salto em altura – homens	A69
ANEXO 5.2.2.	Salto em altura – mulheres	A70
ANEXO 5.2.3.	Salto em comprimento – homens	A71
ANEXO 5.2.4.	Salto em comprimento – mulheres	A72
ANEXO 5.2.5.	Salto com vara – homens	A74
ANEXO 5.2.6.	Salto com vara – mulheres	A75
ANEXO 5.2.7.	Triplo-salto – homens	A77
ANEXO 5.2.8.	Triplo-salto – mulheres	A78
ANEXO 5.3.	Método <i>Peaks Over Threshold</i> : diagnóstico dos modelos $\mu_i$ vs $\mu_j$ , com $j > i$	A80
ANEXO 5.3.1.	Salto em altura – homens	A80
ANEXO 5.3.2.	Salto em altura – mulheres	A81
ANEXO 5.3.3.	Salto em comprimento – homens	A83
ANEXO 5.3.4.	Salto em comprimento – mulheres	A85
ANEXO 5.3.5.	Salto com vara – homens	A87
ANEXO 5.3.6.	Salto com vara – mulheres	A89
ANEXO 5.3.7.	Triplo-salto – homens	A91
ANEXO 5.3.8.	Triplo-salto – mulheres	A93
ANEXO 5.4.	Níveis de retorno	A96
ANEXO 5.4.1.	Salto em altura – homens	A96
ANEXO 5.4.2.	Salto em altura – mulheres	A98
ANEXO 5.4.3.	Salto em comprimento – homens	A100
ANEXO 5.4.4.	Salto em comprimento – mulheres	A102
ANEXO 5.4.5.	Salto com vara – homens	A104
ANEXO 5.4.6.	Salto com vara – mulheres	A106
ANEXO 5.4.7.	Triplo-salto – homens	A108
ANEXO 5.4.8.	Triplo-salto – mulheres	A110
<b>ANEXO 6</b>	<b>NÃO-ESTACIONARIEDADE</b>	<b>A112</b>
ANEXO 6.1.	Introduzir a covariável $t$	A112
ANEXO 6.2.	Obter valores de assimetria e curtose, segundo a convenção adotada pelo IBM SPSS	A113
ANEXO 6.3.	Ajustamento dos modelos: lançamento do disco feminino	A114
ANEXO 6.3.1.	Modelos GEV: estacionário, tendência linear e tendência quadrática	A114
ANEXO 6.3.2.	Modelos Gumbel: estacionário, tendência linear e tendência quadrática	A115
ANEXO 6.4.	Ajustamento dos modelos: lançamento do martelo feminino	A116
ANEXO 6.4.1.	Modelos GEV: estacionário, tendência linear e tendência quadrática	A116
ANEXO 6.4.2.	Modelos Gumbel: estacionário, tendência linear e tendência quadrática	A117
ANEXO 6.5.	Modelos GEV e Gumbel não-estacionários	A118
ANEXO 6.5.1.	Lançamento do disco feminino, 1980-2017	A118
	(i) Evolução do parâmetro de localização com o tempo	A118
	(ii) Evolução do parâmetro de escala com o tempo	A118
ANEXO 6.5.2.	Lançamento do martelo feminino, 1992-2017	A119
	(i) Evolução do parâmetro de localização com o tempo	A119
	(ii) Evolução do parâmetro de escala com o tempo	A119
ANEXO 6.6.	RMSE, MAE, ME e %BIAS – resultados de simulação	A120
ANEXO 6.7.	Estimativa pontual dos níveis de retorno a $T$ -anos	A122
ANEXO 6.7.1.	Lançamento do disco feminino – Modelo $M_5$ Gumbel	A122
ANEXO 6.6.2.	Lançamento do martelo feminino – Modelo $M_4$ GEV	A123

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1	– Lista com os atuais recordes do mundo ( <i>outdoor</i> ).	38
Tabela 3.2	– Tamanho das amostras: máximos anuais e máximos individuais obtidos ao ar livre.	40
Tabela 4.1	– Fases do estudo da metodologia das $r$ -maiores observações anuais.	56
Tabela 4.2	– Aleatoriedade e tendência das amostras.	57
Tabela 4.3	– Dimensão da amostra, média, desvio-padrão, coeficiente de variação, valores mínimo e máximo, referentes a cada nível $r$ do lançamento do dardo no período 1986-2017 e lançamento do disco no período de 1980-2017, para homens.	63
Tabela 4.4	– Dimensão da amostra, média, desvio-padrão, coeficiente de variação, valores mínimo e máximo, referentes a cada nível $r$ dos lançamentos do disco e martelo no período de 1980-2017, para homens.	63
Tabela 4.5	– Dimensão da amostra, média, desvio-padrão, coeficiente de variação, valores mínimo e máximo, referentes a cada nível $r$ do lançamento do dardo no período de 1999-2017 e lançamento do peso no período de 1986-2017, para mulheres.	63
Tabela 4.6	– Assimetria e presença de <i>outliers</i> em cada nível $r$ das diferentes amostras.	64
Tabela 4.7	– Estimativa de log-verosimilhança maximizada, estimativa dos parâmetros extremais (localização, escala e forma) com os correspondentes erros-padrão e intervalo com 95% de confiança para o parâmetro de forma do modelo GEV-multivariado para $1 \leq r \leq 10$ , referentes ao lançamento do dardo masculino, no período de 1986-2017.	65
Tabela 4.8	– Estimativa de log-verosimilhança maximizada, estimativa dos parâmetros extremais (localização, escala e forma) com os correspondentes erros-padrão e intervalo com 95% de confiança para o parâmetro de forma do modelo GEV-multivariado para $1 \leq r \leq 10$ , referentes ao lançamento do disco masculino, no período de 1980-2017.	66
Tabela 4.9	– Estimativa de log-verosimilhança maximizada, estimativa dos parâmetros extremais (localização, escala e forma) com os correspondentes erros-padrão e intervalo com 95% de confiança para o parâmetro de forma do modelo GEV-multivariado para $1 \leq r \leq 10$ , referentes ao lançamento do martelo masculino, no período de 1980-2017.	67
Tabela 4.10	– Estimativa de log-verosimilhança maximizada, estimativa dos parâmetros extremais (localização, escala e forma) com os correspondentes erros-padrão e intervalo com 95% de confiança para o parâmetro de forma do modelo GEV-multivariado para $1 \leq r \leq 10$ , referentes ao lançamento do peso masculino, no período de 1980-2017.	67
Tabela 4.11	– Estimativa de log-verosimilhança maximizada, estimativa dos parâmetros extremais (localização, escala e forma) com os correspondentes erros-padrão e intervalo com 95% de confiança para o parâmetro de forma do modelo GEV-multivariado para $1 \leq r \leq 10$ , referentes ao lançamento do dardo feminino, no período de 1999-2017.	68
Tabela 4.12	– Estimativa de log-verosimilhança maximizada, estimativa dos parâmetros extremais (localização, escala e forma) com os correspondentes erros-padrão e intervalo com 95% de confiança para o parâmetro de forma do modelo GEV-multivariado para $1 \leq r \leq 10$ , referentes ao lançamento do peso feminino, no período de 1986-2017.	68
Tabela 4.13	– Estimativa pontual de alguns quantis extremais e intervalo com 95% de confiança, segundo o método delta e a aproximação assintótica à Normal (*) e a função <i>profile log-likelihood</i> (**), para o modelo GEV $r$ ajustado a cada amostra.	74
Tabela 4.14	– Probabilidade de excedência do atual recorde do mundo, para o modelo GEV $r$ ajustado em cada amostra.	75
Tabela 4.15	– Estimativa pontual do limite superior do suporte, da diferença entre o limite superior do suporte e o atual recorde do mundo e a percentagem de variação, segundo o nível $r$ ajustado em cada amostra.	75
Tabela 4.16	– Estimativa pontual dos níveis de retorno por máxima verosimilhança a 2, 5, 10, 20, 50, 75 e 100 anos para o nível $r$ ajustado em cada amostra e intervalos com 95% de confiança segundo o método delta e a função <i>profile log-likelihood</i> .	78
Tabela 4.17	– Estimativa pontual, erros-padrão e intervalos com 95% de confiança para o período de retorno (em anos), com vista à obtenção de um novo recorde do mundo, segundo o nível $r$ ajustado em cada amostra.	81
Tabela 4.18	– <i>Ranking</i> de níveis $r^{(k)}$ nas amostras de lançamento do dardo masculino e feminino, com a aplicação dos testes <i>Entropy Difference test</i> (EDT), <i>Parametric Bootstrap Score Test</i> (PBST), <i>Multiplier Bootstrap Test</i> (MBT) e estatística <i>Deviance</i> .	84
Tabela 4.19	– <i>Ranking</i> de qualidade de ajustamento de modelos, segundo o PP-plot e o QQ-plot.	85

Tabela 4.20	– Número de observações e respetivo rácio na amostra (entre parêntesis) em função do número de observações presentes em cada nível $r$ ajustado que estão acima da estimativa pontual de cada nível de retorno associado a $t$ -anos.	86
Tabela 4.21	– Número de performances ( $k$ ), em cada amostra, que desde 01-01-2018 até 31-12-2019 excederam $U(t)$ .	87
Tabela 4.22	– Melhores marcas mundiais nos anos de 2018 e 2019 nas provas de lançamentos e respetivos quantis face ao atual recorde do mundo.	87
Tabela 4.23	– Número de observações ( $k$ ) que igualaram ou excederam a marca «atual recorde do mundo – 5%RM» e número de observações iguais ou superiores ao mínimo definido pela IAAF ( $N$ ), obtidas em cada década.	88
Tabela 4.24	– Número de observações que igualaram ou excederam a marca «atual recorde do mundo – 1%RM».	89
Tabela 4.25	– Probabilidade de excedência (num ano) de $M$ e $V$ .	89
Tabela 4.26	– Marcas de qualificação para a final olímpica fixada pela IAAF (MQ), número total de atletas que participaram na fase de qualificação (NQ), número de atletas qualificados para a final ( $nQ$ ) e número de atletas que na final obtiveram registos iguais ou superiores a MQ ( $nF$ ), nas provas de lançamentos do atletismo.	91
Tabela 4.27	– Marca de qualificação fixada previamente pela IAAF nas provas de lançamentos do atletismo nos Jogos Olímpicos do Rio de Janeiro (Brasil) em 2016 e respetivo quantil face ao atual recorde do mundo, bem como a percentagem de atletas que na fase de qualificação igualou a marca de qualificação fixada pela IAAF, e a diferença entre o recorde do mundo e a marca de qualificação.	92
Tabela 4.28	– Número de recordes do mundo conseguidos em cada década nas provas de lançamentos do atletismo.	92
Tabela 4.29	– Registos do número de casos de doping nas fases de qualificação e final olímpica, nas provas de lançamentos do atletismo.	94
Tabela 5.1	– Fases do estudo empregues na modelação dos excessos acima de um limiar.	124
Tabela 5.2	– Aleatoriedade e tendência das amostras relativas às especialidades de saltos do atletismo <i>outdoor</i> .	125
Tabela 5.3	– Estatísticas das amostras relativas às especialidades de saltos do atletismo <i>outdoor</i> , em homens e mulheres.	126
Tabela 5.4	– Quantis empíricos $q(0.75)$ , $q(0.80)$ , $q(0.85)$ , $q(0.90)$ , $q(0.95)$ , $q(0.99)$ e número de excedências para os dados referentes aos saltos do atletismo, homens e mulheres.	132
Tabela 5.5	– Tomada de decisão acerca do «modelo Exponencial vs modelo GPD» para cada limiar candidato no <b>salto em altura</b> , com base na observação do gráfico quantil-quantil.	153
Tabela 5.6	– Tomada de decisão acerca do «modelo Exponencial vs modelo GPD» para cada limiar candidato no <b>salto em comprimento</b> , com base na observação do gráfico quantil-quantil.	154
Tabela 5.7	– Tomada de decisão acerca do «modelo Exponencial vs modelo GPD» para cada limiar candidato no <b>salto com vara</b> , com base na observação do gráfico quantil-quantil.	154
Tabela 5.8	– Tomada de decisão acerca do «modelo Exponencial vs modelo GPD» para cada limiar candidato no <b>triplo-salto</b> , com base na observação do gráfico quantil-quantil.	154
Tabela 5.9	– Intervalos com 95% de confiança para o parâmetro de forma em cada limiar de cada amostra Tomada de decisão sobre a escolha do modelo a considerar: rejeitar exponencial vs não-rejeitar exponencial.	155
Tabela 5.10	– Estatísticas <i>Deviance</i> e <i>Deviance</i> corrigida na verificação do modelo Exponencial ou GPD, nos modelos candidatos na amostra de <b>salto em altura</b> .	156
Tabela 5.11	– Estatística de Marohn (2000), na verificação do modelo Exponencial ou $GPD_{\gamma < 0}$ , nos modelos candidatos na amostra de <b>salto em altura</b> .	157
Tabela 5.12	– Estatísticas <i>Deviance</i> e <i>Deviance</i> corrigida na verificação do modelo Exponencial ou GPD, nos modelos candidatos na amostra de <b>salto em comprimento</b> .	157
Tabela 5.13	– Estatística de Marohn (2000), na verificação do modelo Exponencial ou $GPD_{\gamma < 0}$ , nos modelos candidatos na amostra de <b>salto em comprimento</b> .	158
Tabela 5.14	– Estatísticas <i>Deviance</i> e <i>Deviance</i> corrigida na verificação do modelo Exponencial ou GPD, nos modelos candidatos na amostra de <b>salto com vara</b> .	158
Tabela 5.15	– Estatística de Marohn (2000), na verificação do modelo Exponencial ou $GPD_{\gamma < 0}$ , nos modelos candidatos na amostra de <b>salto com vara</b> .	159
Tabela 5.16	– Estatísticas <i>Deviance</i> e <i>Deviance</i> corrigida na verificação do modelo Exponencial ou GPD, nos modelos candidatos na amostra de <b>triplo-salto</b> .	159

Tabela 5.17	– Estatística de Marohn (2000), na verificação do modelo Exponencial ou $GPD_{\gamma < 0}$ , nos modelos candidatos na amostra de <b>triplo-salto</b> .	<b>160</b>
Tabela 5.18	– Salto em altura masculino: modelo Exponencial ou modelo GPD?	<b>161</b>
Tabela 5.19	– Salto em comprimento masculino: modelo Exponencial ou modelo GPD?	<b>161</b>
Tabela 5.20	– Salto com vara masculino: modelo Exponencial ou modelo GPD?	<b>161</b>
Tabela 5.21	– Triplo-salto masculino: modelo Exponencial ou modelo GPD?	<b>161</b>
Tabela 5.22	– Salto em altura feminino: modelo Exponencial ou modelo GPD?	<b>162</b>
Tabela 5.23	– Salto em comprimento feminino: modelo Exponencial ou modelo GPD?	<b>162</b>
Tabela 5.24	– Salto com vara feminino: modelo Exponencial ou modelo GPD?	<b>162</b>
Tabela 5.25	– Triplo-salto feminino: modelo Exponencial ou modelo GPD?	<b>163</b>
Tabela 5.26	– Limiares $u$ , número de excedências $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalos com 95% de confiança dos parâmetros de escala e forma, referentes ao <b>salto em altura – homens</b> , no período de 1980-2017.	<b>164</b>
Tabela 5.27	– Limiares $u$ , número de excedências $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalos com 95% de confiança dos parâmetros de escala e forma, referentes ao <b>salto em altura – mulheres</b> , no período de 1980-2017.	<b>165</b>
Tabela 5.28	– Limiares $u$ , número de excedências $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalo com 95% de confiança dos parâmetros referentes ao <b>salto em comprimento – homens</b> , no período de 1980-2017.	<b>166</b>
Tabela 5.29	– Limiares $u$ , número de excedências $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalo com 95% de confiança dos parâmetros referentes ao <b>salto em comprimento – mulheres</b> , no período de 1980-2017.	<b>166</b>
Tabela 5.30	– Limiares $u$ , número de excedências $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalo com 95% de confiança dos parâmetros referentes ao <b>salto com vara – homens</b> , no período de 1980-2017.	<b>167</b>
Tabela 5.31	– Limiares $u$ , número de excedências $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalo com 95% de confiança dos parâmetros referentes ao <b>salto com vara – mulheres</b> , no período de 1996-2017.	<b>167</b>
Tabela 5.32	– Limiares $u$ , número de excedências $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalo com 95% de confiança dos parâmetros referentes ao <b>triplo-salto – homens</b> , no período de 1980-2017.	<b>168</b>
Tabela 5.33	– Limiares $u$ , número de excedências $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalo com 95% de confiança dos parâmetros referentes ao <b>triplo-salto – mulheres</b> , no período de 1991-2017.	<b>169</b>
Tabela 5.34	– Limiares selecionados em cada amostra e respetivo modelo.	<b>170</b>
Tabela 5.35	– Quantis extremais $q=(0.995, 0.9975, 0.998, 0.999, 0.9995, 0.9999)$ para cada limiar selecionado em cada amostra.	<b>179</b>
Tabela 5.36	– Probabilidade de excedência do atual recorde do mundo em cada especialidade de saltos do atletismo.	<b>180</b>
Tabela 5.37	– Limite superior do suporte.	<b>181</b>
Tabela 5.38	– Estimativas pontuais obtidas por máxima verosimilhança e intervalos de confiança pelo método delta, do modelo GPD ( $\gamma \neq 0$ ) ou Exponencial ( $\gamma = 0$ ) dos níveis de retorno para 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000 recordes individuais, nas amostras de HOMENS.	<b>183</b>
Tabela 5.39	– Estimativas pontuais obtidas por máxima verosimilhança e intervalos de confiança pelo método delta, do modelo GPD ( $\gamma \neq 0$ ) ou Exponencial ( $\gamma = 0$ ) dos níveis de retorno para 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000 recordes individuais, nas amostras de MULHERES.	<b>184</b>
Tabela 5.40	– Estimativa do período de retorno do atual recorde do mundo para os modelos criados, com base nos limiares escolhidos em cada amostra.	<b>185</b>
Tabela 5.41	– Percentagem de excedências de nível $u$ em cada amostra.	<b>187</b>
Tabela 5.42	– Número de observações que excederam cada um dos limiares $u_i$ selecionados em cada amostra ( $k$ ), número de marcas que igualaram ou excederam o limite mínimo imposto pela IAAF ( $N$ ) e rácio $k/N$ , nas provas de saltos do atletismo.	<b>190</b>
Tabela 5.43	– Melhores marcas mundiais nos anos de 2018 e 2019 nas provas de saltos do atletismo e respetivos quantis face ao atual recorde do mundo.	<b>191</b>
Tabela 5.44	– Número de observações que igualaram ou excederam a marca «atual recorde do mundo – 0.05RM» ( $k$ ) e número de observações iguais ou superiores ao mínimo definido pela IAAF ( $N$ ) obtidas em cada década, nas provas de saltos do atletismo.	<b>193</b>



Tabela 5.45	– Número de observações que igualaram ou excederam a marca «atual recorde do mundo – 0.01RM» ( $k$ ), nas provas de saltos do atletismo, por décadas.	194
Tabela 5.46	– Rácio de observações que excederam cada um dos limiares $u_i$ escolhidos nas provas de saltos do atletismo, por décadas.	195
Tabela 5.47	– Marcas de qualificação para a final olímpica fixada pela IAAF (MQ), número total de atletas que participaram na fase de qualificação (NQ), número de atletas qualificados para a final ( $nQ$ ) e número de atletas que na final obteve registos iguais ou superiores a MQ ( $nF$ ), nas provas de saltos do atletismo, nas Olimpíadas de 1980 a 2016.	199
Tabela 5.48	– Número de marcas superiores ao limiar $u_i$ escolhido para cada amostra, considerando as finais Olímpicas, de 1980 a 2016.	201
Tabela 5.49	– Número de marcas superiores ao limiar $u_i$ de cada amostra, considerando as finais dos campeonatos do mundo, de 1983 a 2019.	202
Tabela 5.50	– Data do atual recorde do mundo e número de recordes do mundo conseguidos em cada década nas provas de saltos do atletismo.	203
Tabela 5.51	– Número de casos de doping em Jogos Olímpicos nas provas de saltos do atletismo, entre 1980 e 2016	204
Tabela 6.1	– Fases da modelação das séries de dados não-estacionárias.	219
Tabela 6.2	– Caracterização das amostras de lançamentos do disco e do martelo feminino: tamanho, média, desvio-padrão, valores mínimo e máximo, 1º, 2º e 3º quartis, assimetria e curtose.	220
Tabela 6.3	– Caracterização das amostras por décadas: média, desvio-padrão e coeficiente de variação.	221
Tabela 6.4	– Modelos de valores extremos a estudar.	223
Tabela 6.5	– Modelos com tendência cúbica não considerados neste estudo.	224
Tabela 6.6	– Características dos modelos com tendência cúbica não considerados neste estudo	224
Tabela 6.7	– Modelos excluídos em cada amostra e razões da exclusão	225
Tabela 6.8	– Valor máximo da função de log-verosimilhança, estimativa dos parâmetros extremos e respetivos erros-padrão (entre parêntesis) da <b>distribuição generalizada de valores extremos</b> na amostra de <b>lançamento do disco feminino</b> , no período de 1980-2017.	226
Tabela 6.9	– Intervalos com 95% de confiança para estimativa dos parâmetros extremos nos modelos testados, na amostra de <b>lançamento do disco feminino</b> , no período de 1980-2017.	227
Tabela 6.10	– Valor máximo da função de log-verosimilhança, estimativa dos parâmetros extremos, erros-padrão e intervalos com 95% de confiança (entre parêntesis) da <b>distribuição Gumbel</b> , na amostra de <b>lançamento do disco feminino</b> , no período de 1980-2017.	227
Tabela 6.11	– Valor máximo da log-verosimilhança, estimativa dos parâmetros extremos e respetivos erros-padrão (entre parêntesis) da <b>distribuição generalizada de valores extremos</b> , na amostra de <b>lançamento do martelo feminino</b> , no período de 1992-2017.	228
Tabela 6.12	– Intervalos com 95% de confiança para estimativa dos parâmetros extremos nos modelos testados, na amostra de <b>lançamento do martelo feminino</b> , no período de 1992-2017.	229
Tabela 6.13	– Valor máximo da função de log-verosimilhança, estimativa dos parâmetros extremos, erros-padrão e intervalos com 95% de confiança (entre parêntesis) para a <b>distribuição Gumbel</b> , da amostra de <b>lançamento do martelo feminino</b> , no período de 1992-2017.	229
Tabela 6.14	– Valores críticos qui-quadrado para $\alpha=10\%$ e $\alpha=0.5\%$ em função do número de parâmetros $v$ .	231
Tabela 6.15	– Matriz de <i>Deviances</i> corrigidas entre <b>modelos GEV</b> encaixados, no <b>lançamento do disco feminino</b> , 1980-2017.	231
Tabela 6.16	– Matriz de <i>Deviances</i> corrigidas entre <b>modelos Gumbel</b> encaixados, no <b>lançamento do disco feminino</b> , 1980-2017.	232
Tabela 6.17	– Matriz de <i>Deviances</i> corrigidas entre <b>modelos GEV</b> encaixados, no <b>lançamento do martelo feminino</b> , 1992-2017.	232
Tabela 6.18	– Matriz de <i>Deviances</i> corrigidas entre <b>modelos Gumbel</b> encaixados, no <b>lançamento do martelo feminino</b> , 1992-2017.	232
Tabela 6.19	– Critérios de informação de Akaike, Akaike corrigido e Bayesiano dos modelos GEV e Gumbel, referentes aos máximos anuais no lançamento do disco feminino, 1980-2017.	233
Tabela 6.20	– Critérios de informação de Akaike, Akaike corrigido e Bayesiano dos modelos GEV e Gumbel, referentes aos máximos anuais no lançamento do martelo feminino, 1992-2017.	233
Tabela 6.21	– RMSE, MAE, ME e %BIAS para os modelos $M_2$ GEV e $M_5$ Gumbel no lançamento do disco feminino, 1980-2017.	234

Tabela 6.22	– Número de parâmetros em cada modelo e <i>Deviance</i> corrigida para os modelos $M_4$ GEV vs $M_4$ Gumbel, no lançamento do martelo feminino, 1992-2017.	<b>234</b>
Tabela 6.23	– RMSE, MAE, ME e %BIAS para os modelos $M_4$ GEV e $M_4$ Gumbel no lançamento do martelo feminino, 1992-2017.	<b>234</b>
Tabela 6.24	– Simulação de 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000 amostras para ajustamento dos dois modelos candidatos em cada amostra, com base nos resultados das métricas RMSE, MAE, %BIAS e ME.	<b>235</b>
Tabela 6.25	– Estimativa pontual de alguns quantis extremos nos lançamentos do disco e martelo feminino.	<b>238</b>
Tabela 6.26	– Estimativa da probabilidade de excedência do atual recorde do mundo dos lançamentos do disco e do martelo feminino, até aos anos 2020, 2025, 2030, 2035, 2040, 2045 e 2050.	<b>239</b>
Tabela 6.27	– Estimativa do limite superior do suporte e respetivos intervalos com 95% de confiança para o lançamento do martelo feminino, para $t=(29, 34, 39, 44, 49, 54, 59)$ , correspondentes aos anos 2020, 2025, 2030, 2035, 2040, 2045 e 2050, respetivamente.	<b>239</b>
Tabela 6.28	– Estimativas pontuais e intervalos com 95% de confiança (entre parêntesis) dos níveis de retorno a $T=(3, 8, 13, 23, 33)$ anos, para as amostras de lançamento do disco e martelo feminino.	<b>240</b>
Tabela 6.29	– Resumo de modelos com tendência temporal no parâmetro de forma.	<b>245</b>
Tabela 6.30	– Diferença entre o nível de retorno a $T$ -anos e o atual recorde do mundo do lançamento do disco feminino.	<b>248</b>
Tabela 6.31	– Diferença entre o nível de retorno e o limite superior do suporte a $T$ -anos com o atual recorde do mundo do lançamento do martelo feminino.	<b>249</b>
Tabela 6.32	– Registo das 10 melhores marcas de sempre (em cima) e as 10 melhores atletas de sempre (em baixo) no lançamento do disco feminino.	<b>250</b>
Tabela 6.33	– Frequência absoluta ( $k$ ) e relativa (%) de atletas do lançamento do disco feminino por décadas com performance iguais ou superiores ao mínimo da IAAF e aos limiares $M$ e $V$ .	<b>252</b>
Tabela 6.34	– Registo das 10 melhores marcas de sempre (em cima) e as 10 melhores atletas de sempre (em baixo) no lançamento do martelo feminino.	<b>254</b>
Tabela 6.35	– Frequência absoluta ( $k$ ) e relativa (%) de atletas do lançamento do martelo feminino por décadas com performance iguais ou superiores ao mínimo da IAAF, à marca de qualificação direta para a final Olímpica nos últimos Jogos Olímpicos, Rio de Janeiro 2016 e aos limiares $M$ e $V$ .	<b>255</b>
Tabela 7.1	– Provas, amostras de homens e mulheres, método utilizado com cada amostra.	<b>259</b>
Tabela 7.2	– Nível $r$ -MO selecionado para cada amostra e limite superior do suporte.	<b>260</b>
Tabela 7.3	– Níveis $u$ selecionados para cada amostra e respetivos rácios de excedência, distribuição usada no processo de modelação e limite superior do suporte.	<b>261</b>
Tabela 7.4	– Modelos não-estacionários selecionados para cada amostra e limite superior do suporte.	<b>263</b>



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	– Organograma geral do estudo	18
Figura 2.1	– Função de distribuição acumulada (esquerda) e função densidade de probabilidade (direita) das distribuições Gumbel, Fréchet e Weibull, para alguns valores de $\gamma$ (Weibull: $\gamma=-0.5$ , Fréchet: $\gamma=0.5$ e Gumbel: $\gamma=0$ ), com valores fixos dos parâmetros de localização e escala, $\lambda=0$ e $\delta=1$ , respetivamente.	27
Figura 4.1	– Representação gráfica do modelo das $r$ -maiores observações.	42
Figura 4.2	– Curvas <i>lowess</i> com $f=(0.5, 2/3, 0.8)$ ajustada aos máximos anuais $X^{(1)}$ , nas provas de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso masculino.	59
Figura 4.3	– Curvas <i>lowess</i> com $f=(0.5, 2/3, 0.8)$ ajustada aos máximos anuais, $X^{(1)}$ , nas provas de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso feminino.	60
Figura 4.4	– As 10 maiores observações anuais das provas de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso do atletismo masculino <i>outdoor</i> . Curvas <i>lowess</i> com $f=(0.5, 2/3, 0.8)$ ajustada ao valor médio de cada bloco.	61
Figura 4.5	– As 10 maiores observações anuais das provas de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso do atletismo feminino <i>outdoor</i> . Curvas <i>lowess</i> com $f=(0.5, 2/3, 0.8)$ ajustada ao valor médio de cada bloco.	62
Figura 4.6	– Gráficos de diagnóstico PP-plot e QQ-plot do modelo GEV ajustados aos máximos anuais, baseados no modelo $r=2$ , para o <b>lançamento do dardo masculino</b> , 1986-2017.	71
Figura 4.7	– Gráficos de diagnóstico PP-plot e QQ-plot do modelo GEV ajustados aos máximos anuais, baseados no modelo $r=2$ , para o <b>lançamento do disco masculino</b> , 1980-2017.	72
Figura 4.8	– Gráficos de diagnóstico PP-plot e QQ-plot do modelo GEV ajustados aos máximos anuais, baseados no modelo $r=3$ , para o <b>lançamento do martelo masculino</b> , 1980-2017.	72
Figura 4.9	– Gráficos de diagnóstico PP-plot e QQ-plot do modelo GEV ajustados aos máximos anuais, baseados no modelo $r=3$ , para o <b>lançamento do peso masculino</b> , 1980-2017.	72
Figura 4.10	– Gráficos de diagnóstico PP-plot e QQ-plot do modelo GEV ajustados aos máximos anuais, baseados no modelo $r=4$ , para o <b>lançamento do dardo feminino</b> , 1999-2017.	73
Figura 4.11	– Gráficos de diagnóstico PP-plot e QQ-plot do modelo GEV ajustados aos máximos anuais, baseados no modelo $r=2$ , para o <b>lançamento do peso feminino</b> , 1986-2017.	73
Figura 4.12	– Níveis de retorno e banda de confiança a 95% para vários períodos de retorno, para o modelo $GEV_{r=2}$ ajustado para o LANÇAMENTO DO DARDO da amostra de HOMENS, no período de 1986-2017.	79
Figura 4.13	– Níveis de retorno e banda de confiança a 95% para vários períodos de retorno, para o modelo $GEV_{r=2}$ ajustado para o LANÇAMENTO DO DISCO da amostra de HOMENS, no período de 1980-2017.	79
Figura 4.14	– Níveis de retorno e banda de confiança a 95% para vários períodos de retorno, para o modelo $GEV_{r=3}$ ajustado para o LANÇAMENTO DO MARTELO da amostra de HOMENS, no período de 1980-2017.	80
Figura 4.15	– Níveis de retorno e banda de confiança a 95% para vários períodos de retorno, para o modelo $GEV_{r=3}$ ajustado para o LANÇAMENTO DO PESO da amostra de HOMENS, no período de 1980-2017.	80
Figura 4.16	– Níveis de retorno e banda de confiança a 95% para vários períodos de retorno, para o modelo $GEV_{r=4}$ ajustado para o LANÇAMENTO DO DARDO da amostra de MULHERES, no período de 1999-2017.	80
Figura 4.17	– Níveis de retorno e banda de confiança a 95% para vários períodos de retorno, para o modelo $GEV_{r=2}$ ajustado para o LANÇAMENTO DO PESO da amostra de MULHERES, no período de 1986-2017.	80
Figura 5.1	– Representação gráfica dos excessos acima do limiar $u$ .	96
Figura 5.2	– Função de distribuição acumulada da GPD (à esquerda) e função densidade de probabilidade da GPD (à direita) para $\sigma=1$ e $\gamma=(0.5, 0, -0.5)$ , conforme seja a distribuição de Pareto, Exponencial e Beta, respetivamente.	100
Figura 5.3	– Exemplo de representação dos gráficos de vida média residual e de vida mediana residual. Dados utilizados: máximos individuais do lançamento do disco masculino, 1980-2017, $n=487$ , Fonte: <a href="https://www.worldathletics.org/">https://www.worldathletics.org/</a>	105

Figura 5.4	– Exemplo de representação gráfica da estabilidade do parâmetro de escala (modificado) (à esquerda) e do parâmetro de forma (à direita), por máxima verosimilhança, com a respetiva banda com 95% de confiança, baseados na função <i>profile log-likelihood</i> . Dados utilizados: máximos individuais do lançamento do disco masculino, 1980-2017, $n=487$ , Fonte: <a href="https://www.worldathletics.org/">https://www.worldathletics.org/</a>	106
Figura 5.5	– Exemplo de representação gráfica da sobreposição do estimador generalizado de Hill com o estimador dos Momentos. Dados utilizados: máximos individuais do lançamento do martelo masculino, 1980-2017, $n=424$ , Fonte: <a href="https://www.worldathletics.org/">https://www.worldathletics.org/</a>	108
Figura 5.6	– Exemplo de representação gráfica do método “esticar a corda” em 4 etapas. Dados utilizados: máximos individuais do lançamento do disco masculino, 1980-2017, $n=487$ , Fonte: <a href="https://www.worldathletics.org/">https://www.worldathletics.org/</a>	109
Figura 5.7	– Diagramas de extremos e quartis relativos aos saltos (altura, comprimento, vara e triplo-salto) nas amostras de <b>homens</b> , no período de 1980-2017.	127
Figura 5.8	– Diagramas de extremos e quartis relativos aos saltos (altura, comprimento, vara e triplo-salto) nas amostras de <b>mulheres</b> , no período de 1980-2017 no salto em altura e em comprimento, no período de 1996-2017 no salto com vara e no período de 1991-2017 no triplo-salto.	127
Figura 5.9	– Histograma das melhores marcas pessoais dos atletas do <b>sexo masculino</b> nas provas de saltos do atletismo (altura, comprimento, vara e triplo-salto), no período de 1980-2017.	128
Figura 5.10	– Histograma das melhores marcas pessoais dos atletas do <b>sexo feminino</b> nas provas de saltos do atletismo (altura, comprimento, vara e triplo-salto), no período de 1980-2017 no salto em altura e em comprimento, no período de 1996-2017 no salto com vara e no período de 1991-2017 no triplo-salto.	129
Figura 5.11	– <i>QQ-plot</i> Exponencial (à esquerda) e gráfico da função de excesso médio (à direita) das melhores marcas pessoais dos atletas do <b>sexo masculino</b> nas provas de saltos do atletismo (altura, comprimento, vara e triplo-salto), no período de 1980-2017.	130
Figura 5.12	– <i>QQ-plot</i> Exponencial (à esquerda) e gráfico da função de excesso médio (à direita) das melhores marcas pessoais dos atletas do <b>sexo feminino</b> nas provas de saltos do atletismo (altura, comprimento, vara e triplo-salto), no período de 1980-2017 no salto em altura e em comprimento, no período de 1996-2017 no salto com vara e no período de 1991-2017 no triplo-salto.	131
Figura 5.13	– Gráfico de vida média residual para a performance no <b>salto em altura</b> homens.	133
Figura 5.14	– Gráfico de vida média residual para a performance no <b>salto em altura</b> mulheres.	133
Figura 5.15	– Gráfico de vida mediana residual para a performance no <b>salto em altura</b> homens.	134
Figura 5.16	– Gráfico de vida mediana residual para a performance no <b>salto em altura</b> mulheres.	134
Figura 5.17	– Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma obtidos por máxima verosimilhança, com os respetivos intervalos com 95% de confiança baseados na função <i>profile log-likelihood</i> , para os dados referentes ao <b>salto em altura</b> homens.	135
Figura 5.18	– Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma, obtidos por máxima verosimilhança, com os respetivos intervalos com 95% de confiança baseados na função <i>profile log-likelihood</i> , para os dados referentes ao <b>salto em altura</b> mulheres.	135
Figura 5.19	– Gráfico generalizado de Hill e gráfico dos Momentos para a performance no <b>salto em altura</b> homens.	136
Figura 5.20	– Gráfico generalizado de Hill e gráfico dos Momentos para a performance no <b>salto em altura</b> mulheres.	136
Figura 5.21	– Suavização gradual do gráfico de vida média residual, relativo ao <b>salto em altura</b> homens.	137
Figura 5.22	– Suavização gradual do gráfico de vida média residual, relativo ao <b>salto em altura</b> mulheres.	137
Figura 5.23	– Gráfico de vida média residual para a performance no <b>salto em comprimento</b> homens.	138
Figura 5.24	– Gráfico de vida média residual para a performance no <b>salto em comprimento</b> mulheres.	138
Figura 5.25	– Gráfico de vida mediana residual para a performance no <b>salto em comprimento</b> homens.	139
Figura 5.26	– Gráfico de vida mediana residual para a performance no <b>salto em comprimento</b> mulheres.	139

Figura 5.27	– Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma obtidos por máxima verosimilhança, com os respectivos intervalos com 95% de confiança baseados na função <i>profile log-likelihood</i> , para os dados referentes ao <b>salto em comprimento</b> homens.	140
Figura 5.28	– Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma, obtidos por máxima verosimilhança, com os respectivos intervalos com 95% de confiança baseados na função <i>profile log-likelihood</i> , para os dados referentes ao <b>salto em comprimento</b> mulheres.	140
Figura 5.29	– Gráfico generalizado de Hill e gráfico dos Momentos para a performance no <b>salto em comprimento</b> homens.	141
Figura 5.30	– Gráfico generalizado de Hill e gráfico dos Momentos para a performance no <b>salto em comprimento</b> mulheres.	141
Figura 5.31	– Suavização gradual do gráfico de vida média residual, relativo ao <b>salto em comprimento</b> homens.	142
Figura 5.32	– Suavização gradual do gráfico de vida média residual, relativo ao <b>salto em comprimento</b> mulheres.	142
Figura 5.33	– Gráfico de vida média residual para a performance no <b>salto com vara</b> homens.	143
Figura 5.34	– Gráfico de vida média residual para a performance no <b>salto com vara</b> mulheres.	143
Figura 5.35	– Gráfico de vida mediana residual para a performance no <b>salto com vara</b> homens.	144
Figura 5.36	– Gráfico de vida mediana residual para a performance no <b>salto com vara</b> mulheres.	144
Figura 5.37	– Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma obtidos por máxima verosimilhança, com os respectivos intervalos com 95% de confiança baseados na função <i>profile log-likelihood</i> , para os dados referentes ao <b>salto com vara</b> homens.	145
Figura 5.38	– Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma, obtidos por máxima verosimilhança, com os respectivos intervalos com 95% de confiança baseados na função <i>profile log-likelihood</i> , para os dados referentes ao <b>salto com vara</b> mulheres.	145
Figura 5.39	– Gráfico generalizado de Hill e gráfico dos Momentos para a performance no <b>salto com vara</b> homens.	146
Figura 5.40	– Gráfico generalizado de Hill e gráfico dos Momentos para a performance no <b>salto com vara</b> mulheres.	146
Figura 5.41	– Suavização gradual do gráfico de vida média residual, relativo ao <b>salto com vara</b> homens.	147
Figura 5.42	– Suavização gradual do gráfico de vida média residual, relativo ao <b>salto com vara</b> mulheres.	147
Figura 5.43	– Gráfico de vida média residual para a performance no <b>triplo-salto</b> homens.	148
Figura 5.44	– Gráfico de vida média residual para a performance no <b>triplo-salto</b> mulheres.	148
Figura 5.45	– Gráfico de vida mediana residual para a performance no <b>triplo-salto</b> homens.	149
Figura 5.46	– Gráfico de vida mediana residual para a performance no <b>triplo-salto</b> mulheres.	149
Figura 5.47	– Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma obtidos por máxima verosimilhança, com os respectivos intervalos com 95% de confiança baseados na função <i>profile log-likelihood</i> , para os dados referentes ao <b>triplo-salto</b> homens.	150
Figura 5.48	– Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma, obtidos por máxima verosimilhança, com os respectivos intervalos com 95% de confiança baseados na função <i>profile log-likelihood</i> , para os dados referentes ao <b>triplo-salto</b> mulheres.	150
Figura 5.49	– Gráfico generalizado de Hill e gráfico dos Momentos para a performance no <b>triplo-salto</b> homens.	151
Figura 5.50	– Gráfico generalizado de Hill e gráfico dos Momentos para a performance no <b>triplo-salto</b> mulheres.	151
Figura 5.51	– Suavização gradual do gráfico de vida média residual, relativo ao <b>triplo-salto</b> homens.	152
Figura 5.52	– Suavização gradual do gráfico de vida média residual, relativo ao <b>triplo-salto</b> mulheres.	152
Figura 5.53	– Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade referentes ao <b>salto em altura: homens</b> , para os limiares selecionados: $u=(2.345; 2.355)$ .	171
Figura 5.54	– Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade referentes ao <b>salto em altura: mulheres</b> , para os limiares selecionados: $u=(2.006; 2.025)$ .	172

Figura 5.55	– Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade referentes ao <b>salto em comprimento: homens</b> , para os limiares selecionados: $u=(8.370; 8.406)$ .	<b>173</b>
Figura 5.56	– Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade referentes ao <b>salto em comprimento: mulheres</b> , para os limiares selecionados: $u=(7.074; 7.085)$ .	<b>174</b>
Figura 5.57	– Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade referentes ao <b>salto com vara: homens</b> , para os limiares selecionados: $u=(5.825; 5.844)$ .	<b>175</b>
Figura 5.58	– Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade referentes ao <b>salto com vara: feminino</b> , para os limiares selecionados: $u=(4.615; 4.696)$ .	<b>176</b>
Figura 5.59	– Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade referentes ao <b>triplo-salto: masculino</b> , para os limiares selecionados: $u=(17.568; 17.605)$ .	<b>177</b>
Figura 5.60	– Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade referentes ao <b>triplo-salto: feminino</b> , para os limiares selecionados: $u=(14.933; 14.960)$ .	<b>178</b>
Figura 5.61	– Frequência relativa de máximos iguais ou superiores ao atual RM–0.05RM, por década, nas especialidades atléticas de salto no sexo masculino.	<b>191</b>
Figura 5.62	– Frequência relativa de máximos iguais ou superiores ao atual RM–0.05RM, por década, nas especialidades atléticas de salto no sexo feminino.	<b>191</b>
Figura 6.1	– Histograma com a estimativa da curva de densidade e diagrama de extremos e quartis referentes aos valores máximos nos lançamentos do disco (à esquerda) e do martelo (à direita) feminino, no período de 1980-2017 e 1992-2017, respetivamente.	<b>221</b>
Figura 6.2	– Máximos anuais no lançamento do disco feminino, no período de 1980-2017 (à esquerda) e no lançamento do martelo feminino, no período de 1992-2017 (à direita), com a sobreposição da linha de tendência linear e da curva <i>LOWESS</i> estimadas.	<b>222</b>
Figura 6.3	– Gráfico diagnóstico do ajuste do modelo Gumbel( $\lambda_0+\lambda_1t +\lambda_2t^2, \delta$ ) para os máximos anuais no lançamento do disco feminino, no período de 1980 a 2017.	<b>236</b>
Figura 6.4	– Gráfico diagnóstico do ajuste do modelo GEV( $\lambda_0+\lambda_1t, \exp(\delta_0+\delta_1t), \gamma$ ) para os máximos anuais no lançamento do martelo feminino, no período de 1992 a 2017.	<b>237</b>
Figura 6.5	– Níveis de retorno a $T$ -anos, segundo o modelo $M_5$ Gumbel ajustado para o lançamento do disco.	<b>241</b>
Figura 6.6	– Níveis de retorno a $T$ -anos, segundo o modelo $M_4$ GEV ajustado para o lançamento do martelo.	<b>241</b>
Figura 6.7	– Valores de simulação para $n=(100,200,300,400,500,600,700,800,900,1000,2000)$ amostras com base nas estimativas dos dois modelos candidatos no <b>lançamento do disco feminino</b> , 1980-2017.	<b>246</b>
Figura 6.8	– Valores de simulação para $n=(100,200,300,400,500,600,700,800,900,1000,2000)$ amostras com base nas estimativas dos dois modelos candidatos no <b>lançamento do martelo feminino</b> , 1992-2017.	<b>247</b>
Figura 6.9	– Progressão do recorde do mundo no lançamento do disco feminino, de 1922 até 1988.	<b>251</b>
Figura 6.10	– Evolução do número de recordes do mundo no lançamento do disco feminino, por décadas.	<b>251</b>
Figura 6.11	– Histograma de frequências (à esquerda) e com a estimativa da curva de densidade (à direita) referente aos valores máximos individuais no lançamento do disco feminino, no período de 1980-2017.	<b>253</b>
Figura 6.12	– Progressão do recorde do mundo no lançamento do martelo feminino, de 1994 até 2016.	<b>256</b>
Figura 6.13	– Evolução do número de recordes do mundo no lançamento do disco feminino, por décadas.	<b>256</b>
Figura 6.14	– Histograma de frequências (à esquerda) e com a estimativa da curva de densidade (à direita) referente aos valores máximos individuais no lançamento do martelo feminino, no período de 1992-2017.	<b>257</b>

## LISTA DE ABREVIATURAS, ACRÓNIMOS E SIGLAS

%BIAS	percentagem de viés (do inglês, <i>percent BIAS</i> )
a.a.; a.a.'s	amostra aleatória; amostras aleatórias
ACF	função de autocorrelação (do inglês, <i>autocorrelation function</i> )
AIC	Crítério de Informação de Akaike (do inglês, <i>Akaike Information Criterion</i> )
AICc	Crítério de Informação de Akaike corrigido (do inglês, <i>corrected Akaike Information Criterion</i> )
BGFS	(algoritmo de otimização de) Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
BIC	Crítério de Informação Bayesiano (do inglês, <i>Bayesian information criterion</i> )
CV	Coefficiente de variação
$D$	<i>Deviance</i>
$D^*$	<i>Deviance</i> corrigida
e.o.; e.o.'s	estatística ordinal; estatísticas ordinais
EC	“Esticar a corda”
EVI	Índice de Valores Extremos (ou índice de cauda) (do inglês, <i>Extreme Value Index</i> )
EVT	Teoria de Valores Extremos (do inglês, <i>Extreme Value Theory</i> )
f.d. ou f.d.'s	função de distribuição acumulada; funções de distribuição acumulada
f.d.p.	função densidade de probabilidade
GEV	(distribuição) generalizada de valores extremos (do inglês, <i>Generalized Extreme Value</i> )
GEV $r$	(distribuição) generalizada de valores extremos para as $r$ -maiores observações
GH	Estimador de generalizado Hill (do inglês, <i>generalized Hill estimator</i> )
GPD	Distribuição Generalizada de Pareto ( <i>Generalized Pareto Distribution</i> )
i.i.d.; i.i.d.'s	independente e identicamente distribuída(s)
IAAF	Associação Internacional de Federações de Atletismo ( <i>International Association of Athletics Federations</i> )
$IC$	Intervalo de confiança
$l$	Função de log-verosimilhança
L-BGFS-B	(algoritmo de otimização de) <i>limited memory</i> Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
<i>lowess</i>	curva ajustada aos dados (do inglês, <i>locally weighted scatterplot smoothing</i> )
MAE	Erro absoluto médio (do inglês, <i>mean absolute error</i> )
ME	Erro médio ( <i>mean error</i> )
MEF	Função de Excesso Médio (do inglês, <i>mean excess function</i> )
MeRL <i>plot</i>	Gráfico da vida mediana residual (do inglês, <i>median residual life plot</i> )
ML	(estimador ou estimativa de) Máxima verosimilhança (do inglês, <i>Maximum Likelihood</i> )
MOM	Método dos momentos
MOM	Estimador dos momentos
MQ	Marca de qualificação
MRL <i>plot</i>	Gráfico da vida média residual (do inglês, <i>mean residual life plot</i> )
$nF$	Número de atletas que igualaram ou excederam a marca de qualificação (MQ)
NLL	(minimização da) função de log-verosimilhança negativa (do inglês, <i>negative log-likelihood</i> )
NM	(algoritmo de otimização de) Nelder-Mead
$NQ$	Número de atletas participantes na fase de qualificação
$nQ$	Número de atletas que conseguiram a qualificação para a final
<i>one-way</i> ANOVA	Análise de variância a um fator
POT	(método dos) Excessos acima de um limiar (do inglês, <i>Peaks Over Threshold</i> )
PP- <i>plot</i>	Gráfico de probabilidade-probabilidade (do inglês, <i>Probability-Probability plot</i> )
QQ- <i>plot</i>	Gráfico dos quantis-quantis (do inglês, <i>Quantil-Quantil plot</i> )
RM	Recorde do mundo
$r$ -MO	(método das) $r$ maiores observações
RMSE	Raiz quadrada do erro quadrático médio (do inglês, <i>root mean square error</i> )
$se(\hat{\theta})$	Erro-padrão (do inglês, <i>standard error</i> ) da estimativa pontual dos parâmetros extremos $\theta$
sse	se e só se
$T_k; T_k^*$	Estatística de Marohn
TLC	Teorema Limite Central
TCP	Gráfico de estabilidade dos parâmetros (escala e forma) (do inglês, <i>Threshold Choice plot</i> )
v.a.; v.a.'s	variável aleatória; variáveis aleatórias





## LISTA DE SÍMBOLOS, NOTAÇÕES E CONVENÇÕES

$\xrightarrow{d}$	convergência em distribuição
$\xrightarrow{P}$	convergência em probabilidade
$\xrightarrow{q.c.}$	convergência quase certa
$\lceil x \rceil$	mais baixo inteiro maior ou igual a $x$
$\stackrel{d}{=}$	igualdade em distribuição
$\sim$	com a mesma distribuição assintótica
$O_p$	$X_n = O_p(Y_n)$ se e só se $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} 0$
$q_{1-p}$	quantis extremos
$x_T$	níveis de retorno a $T$ -anos
$GEV(\lambda(t), \delta(t), \gamma(t))$	distribuição generalizada de valores extremos com parâmetros extremos não-estacionários
$GEV(\lambda, \delta, \gamma)$	distribuição generalizada de valores extremos com parâmetros extremos estacionários
$\nu = \rho_1 - \rho_0$	diferença de número de parâmetros entre os modelos $M_1$ e $M_0$ , i.e., modelo alternativo e modelo reduzido, respetivamente
$I_{(\cdot)}^{-1}$	Inversa da matriz de Informação de Fisher
$I_A$	Função indicatriz do conjunto $A$
$\alpha$	índice de cauda
$\gamma$	parâmetro de forma (índice de valor extremo)
$\lambda$	parâmetro de localização na distribuição generalizada de valores extremos
$\delta$	parâmetro de escala na distribuição generalizada de valores extremos
$\infty$	infinito
$\rho$	número de parâmetros de um dado modelo
$\Phi_{\alpha}(\cdot)$	função de distribuição de Fréchet (para máximos)
$\Psi_{\alpha}(\cdot)$	função de distribuição de Weibull (para máximos)
$\Lambda(\cdot)$	função de distribuição de Gumbel (para máximos)
$\Gamma(t)$	função gama completa definida por $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx, t > 0, \Gamma(t) = (t-1)!,$ para $t$ inteiro e positivo
$\sigma_u$	parâmetro de escala na distribuição generalizada de Pareto
$\sigma_u$	parâmetro de escala na distribuição generalizada de Pareto
[.]	parte inteira de um número real
$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$	constantes normalizadoras ou constantes de atração ou coeficientes de atração
$f \sim g$	$f \sim g$ , se e só se $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)/g(t) = 1$ .
$C_G$	conjunto dos pontos de continuidade da f.d. $G(x)$
$D_M(G)$	domínio de atração para o máximo de uma distribuição de valores extremos $G$
$e(u)$	Função de excesso médio
$F^{\leftarrow}(\cdot)$	função inversa generalizada de $F, F^{\leftarrow}(p) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}, 0 \leq p \leq 1$
$F^n$	função de distribuição do máximo
$F_u$	função de distribuição empírica para as excedências de $u$
$F_u(y)$	Função de distribuição condicional dos excessos
$G_{\gamma}(\cdot)$	distribuição generalizada de valores extremos (para máximos)
$IC_{100(1-\alpha)\%}$	intervalo com $100(1-\alpha)\%$ de confiança
$IC_{95\%}^{\uparrow}(x_T)$	Estimativa do limite superior do intervalo com 95% de confiança para o nível de retorno associado a $T$ -anos
$k$	Número de excedências acima do limiar
$L$	função de verosimilhança
$\ell$ ou $\ln L$	função de log-verosimilhança
$\ln$	logaritmo natural
$m$	número de máximos de blocos
$M_0$	modelo reduzido

$M_1$	modelo alternativo, tal que $M_0 \subset M_1$
$m_n; X_{1:n}$	mínimo da série de dados
$M_n; X_{n:n}$	máximo da série de dados
$N(\mu, \sigma^2)$	Distribuição Normal com valor médio $\mu$ e variância $\sigma^2$
$p^u := P[C > u]$	Nas maiores observações anuais e nos máximos de blocos anuais, é a probabilidade de num ano ocorrer um valor superior a $u$ ; na POT-GPD, é a probabilidade de um atleta superar o nível $u$ .
$q(\cdot)$	Quantil ( $\cdot$ )
$r$	(nível) $r$
$u$	limiar ( <i>threshold</i> ) na distribuição generalizada de Pareto
$U(t)$	Níveis de retorno associados ao período de retorno $t$ . Função quantil de cauda associada à f.d. $F$ , definida por $U(t) = \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(t) = F^{\leftarrow}\left(\frac{1}{1-t}\right)$ , $t \geq 1$ (função quantil recíproca)
$x_-$	$\min(x, 0)$
$x_+$	$\max(x, 0)$ ; + denota a parte positiva do argumento
$x^F$	limite superior do suporte de $F$
$x_F$	limite inferior do suporte de $F$
$X_{i:n}$	$i$ -ésima estatística ordinal ascendente associada à amostra aleatória $X_1, X_2, \dots, X_n$
$x_T$	Nível de retorno associado a $T$ -anos (empregue na não-estacionariedade)

## 1. INTRODUÇÃO

A Teoria de Valores Extremos (EVT, do inglês, *Extreme Value Theory*) é uma potente e robusta técnica estatística de modelação do comportamento assintótico de eventos extremos e raros, baseada no Teorema dos Tipos Extremos de Fisher-Tippett-Gnedenko. Tem como objetivo descrever e quantificar os resultados de um processo estocástico com reduzida probabilidade de ocorrência, bem como estimar a distribuição limite para o comportamento assintótico das estatísticas ordinais (e.o.'s) extremas da amostra, composta por variáveis aleatórias (v.a.'s),  $X_i, i = 1, \dots, n$ , independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.'s)<sup>1</sup>, capaz de modelar as caudas da distribuição, particularmente o máximo  $M_n = \max\{X_i, i = 1, \dots, n\}$  ou o mínimo  $m_n = \min\{X_i, i = 1, \dots, n\}$ , com o intuito de prever valores ainda mais extremos. Para além das e.o.'s das caudas superior e inferior da distribuição subjacente aos dados disponíveis, as propriedades distribucionais dos extremos também se estendem às estatísticas ordinais centrais e intermédias. Contudo, neste estudo estamos interessados nas condições extremas, de baixa frequência relativa e grande relevância e impacto científico e social, caracterizadas por um comportamento discordante do comportamento padrão, pelo que exigem um tratamento diferente do tratamento clássico de situações "médias", típicas da vida real onde a maioria dos acontecimentos segue a distribuição normal e suas semelhantes. Como nem todos os fenómenos são capturados por tendência central, não é estatisticamente adequado descrevê-los por este tipo de medidas, recaindo o interesse sobre os pontos que se desviam substancialmente da média. Portanto, enquanto ramo da Estatística, a EVT lida com a ocorrência de acontecimentos atípicos que por vezes são mais extremos do que quaisquer outros já observados anteriormente, estimando a sua probabilidade de ocorrência mesmo quando os dados existentes são escassos. Nesta medida, assume particular importância a inferência "para além da amostra".

Uma dificuldade comum a qualquer análise de valores extremos é a reduzida quantidade de dados disponíveis, com repercussões ao nível da precisão da estimação.

Historicamente, as primeiras aplicações foram realizadas nas áreas da demografia (Gumbel, 1937a), da força/resistência dos materiais (Weibull, 1939a,b) e das catástrofes ambientais, tais como as emissões de gases radioativos (Gumbel, 1937b), as inundações (Gumbel, 1941, 1943, 1945, 1949), os fenómenos sísmicos (Nordquist, 1945) e as precipitações máximas (Potter, 1949). Na atualidade, a utilização da EVT difunde-se por praticamente todas as áreas do conhecimento. No domínio do desporto escasseia a informação sobre o comportamento de eventos extremos. As primeiras aplicações no desporto foram realizadas por Ballerini & Resnick (1985) e Smith & Miller (1986). Os primeiros autores utilizaram os resultados da prova da milha (entre os anos de 1860 e 1982), os segundos, as provas da milha (entre os

---

<sup>1</sup> A teoria para o máximo de v.a.'s i.i.d.'s pode estender-se ao máximo de v.a.'s dependentes e identicamente distribuídas, ou mesmo a v.a.'s não-independentes e identicamente distribuídas (Leadbetter et al., 1983; Falk et al., 1994). Porém, conforme afirma Tiago de Oliveira (1990, p.455) "o estudo desse comportamento será mais simples se as v.a.'s forem i.i.d.'s e mais complexo se uma das duas ou ambas as restrições forem suprimidas ou enfraquecidas". Contudo, Galambos (1987) e Leadbetter & Nandagopalan (1989) referem que, embora convenientemente i.i.d., a sequência  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  também pode ser formada por v.a.'s fracamente dependentes.

anos de 1931 e 1985) e da maratona (entre os anos de 1909 e 1985). No caso particular dos lançamentos e saltos do atletismo ao ar livre, de interesse especial nesta tese, as primeiras referências reportam-se aos trabalhos de Einmahl & Magnus (2008) e Leng et al. (2017) (este último trabalho apenas relativo ao salto em comprimento), e mais recentemente aos trabalhos de Silva et al. (2017a,b), Silva et al. (2018a,b,c) e Caeiro et al. (2018).

Sob condições muito gerais, a EVT proporciona uma classe de funções para ajustar à distribuição usada no estudo das maiores observações. O parâmetro de forma, neste estudo denotado por  $\gamma$ , desempenha um papel fulcral na avaliação do comportamento da cauda superior da distribuição (neste estudo, a variável de interesse é o comportamento do máximo amostral). Conforme o “peso” da cauda,  $\gamma > 0$  (cauda pesada),  $\gamma = 0$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ) (cauda exponencial) ou  $\gamma < 0$  (cauda leve ou curta). Analogamente ao Teorema Limite Central, o máximo linearmente normalizado terá a forma e convergência em distribuição ( $\xrightarrow{d}$ ),

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} W \sim G,$$

com f.d.  $G$  não-degenerada, e sequências de constantes normalizadoras  $\{a_n\} > 0$  e  $\{b_n\} \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Assim, no ajustamento da função apropriada à cauda da distribuição, tem que se decidir sobre a forma e as constantes normalizadoras. Existem diversos estimadores do parâmetro de forma e das constantes normalizadoras. Possíveis estimadores do parâmetro de forma e das constantes normalizadoras encontram-se nos trabalhos de de Haan (1970, 1984), de Haan & Ferreira (2006) e Caeiro (2006). Por sua vez, os mais conhecidos e clássicos métodos de estimação são o método dos momentos<sup>2</sup>, o método da máxima verosimilhança<sup>3</sup> e o método dos momentos ponderados de probabilidade<sup>4</sup>. Destes, sobressai o método da máxima verosimilhança devido à sua adaptabilidade à mudança de modelos em situações de estacionariedade e não-estacionariedade, possuindo ótimas propriedades assintóticas (normalidade, consistência, eficiência e invariância) (Smith, 1985, 1989; Dupuis & Field, 1998; Bera & Biliias, 2001; Katz et al., 2002; de Haan & Ferreira, 2006). Ver, por exemplo, os trabalhos de Cox & Hinkley (1974) e Lehmann (1983) para uma discussão geral da estimação por máxima verosimilhança.

Em termos operacionais, algumas das metodologias mais usadas são o método dos máximos de blocos ou método de Gumbel ou ainda método dos máximos anuais (método clássico da EVT), o método das  $r$ -maiores observações (uma generalização do método dos máximos de blocos) e o método dos excessos

---

<sup>2</sup> Introduzido por Karl Pearson (1857-1936), em 1894.

<sup>3</sup> A estimação por máxima verosimilhança foi recomendada, analisada (ainda que com provas não concludentes) e amplamente popularizada por Ronald A. Fisher (1890-1962) entre 1912 e 1922, embora tenha sido usada anteriormente por Carl Friedrich Gauss (1777-1885), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Thorvald Nicolai Thiele (1838-1910) e Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926). Mais recentemente, a abordagem por máxima verosimilhança foi desenvolvida por Jenkinson (1969), Prescott & Walden (1980, 1983).

<sup>4</sup> Os momentos ponderados de probabilidade para uma v.a.  $Y$ , com f.d.  $F$  foram apresentados por Greenwood et al. (1979). Este método, uma generalização do método dos momentos, foi introduzido por Hosking (1985) e aprofundado em Hosking et al. (1985), com amostras  $n=(15,25,50,100)$ , mostrando-se particularmente eficiente com amostras  $n=(15,25)$ .

acima de um limiar. Se o método dos máximos de blocos apenas usa uma observação (máximo ou mínimo de cada ano, embora neste estudo seja o máximo), já os outros dois métodos recorrem a um maior número de observações, proporcionando mais informação proveniente dos dados, logo com possibilidade de maior precisão, embora não isentos de problemas. O método dos máximos de blocos é o mais fácil de aplicar uma vez que os blocos surgem naturalmente em muitas situações (vand den Brink et al., 2005; Naveau et al., 2009). Por outro lado, quer o método das maiores observações em cada bloco quer o método dos excessos acima de um limiar proporcionam maior flexibilidade em muitos acontecimentos, especialmente naqueles onde é difícil modificar o tamanho dos blocos (Coles, 2001; Ferreira & de Haan, 2015). No trabalho de Ferreira & de Haan (2015), os autores mostram que a maior limitação do método dos máximos de blocos deve-se à perda de informação decorrente do processo de “blocagem”. De facto, o particionamento da amostra e a obrigatoriedade de tomar como observações relevantes apenas o máximo de cada um dos blocos, pode levar a desprezar alguns valores elevados cujo conhecimento seria de extrema importância para o estudo, o que já não é tão evidente com as metodologias das  $r$ -maiores observações e dos excessos acima de um limiar. Todavia, uma questão central é saber como escolher a fração da amostra a usar no processo de estimação. Paralelamente, admitindo a aleatoriedade, nem sempre se verifica a estacionariedade da série de dados disponíveis, invalidando a suposição de que a sua estrutura de probabilidade é constante no tempo. No caso do desporto, quando ocorrem problemas com a estacionariedade, deve-se quase sempre a tendência<sup>5</sup> nos parâmetros de localização ou de escala ou ambos, o que implica um tratamento diferente do modelo estacionário (Silva et al., 2018a). Como (ainda) não existe uma teoria geral de análise de valores extremos para dados não-estacionários, uma alternativa é assumir que os parâmetros da distribuição variam no tempo, ou seja, modelar um ou mais parâmetros em função do tempo.

### 1.1. Resenha histórica: o nascer de uma teoria

Podemos afirmar que a origem da «Teoria de Extremos» remonta ao ano de 1922 com o trabalho de Ladislau Josephovich von Bortkiewicz (1868-1931), o primeiro a estudar os valores extremos. Neste estudo, von Bortkiewicz apresentou o conceito de distribuição de valores máximos de amostras aleatórias com distribuição normal, bem como os erros absolutos ordenados  $e_{1:n} \leq e_{2:n} \leq \dots \leq e_{n:n}$ . Inerente à importância deste trabalho está o facto do conceito de distribuição do máximo ter sido introduzido pela primeira vez, bem como a conclusão de que a distribuição de Poisson ajustava-se adequadamente na modelação de eventos raros (von Bortkiewicz, 1922). Ainda que não consensual o reconhecimento de von Bortkiewicz como o pioneiro da Estatística de Extremos, o certo é que o seu mérito é, entre outros, reconhecido por Gumbel (1958) e, mais recentemente, por Kotz & Nadarajah (2000).

---

<sup>5</sup> A tendência define-se como um comportamento de longo prazo da série temporal, podendo a mesma exibir crescimentos ou declínios, em sucessivos períodos de tempo.

Imediatamente a seguir, em 1923, surgem os trabalhos de Edward Lewis Dodd (1875-1943) e Richard von Mises (1883-1953), ambos estudando a distribuição dada por von Bortkiewicz. O primeiro, baseado em valores “assintóticos” obteve a distribuição exata para o máximo e o mínimo de uma série com  $n$  observações i.i.d.’s, bem como a discussão sobre distribuições não-normais (Dodd, 1923). O segundo, introduziu a noção fundamental das características do valor extremo (sem empregar este nome) e mostrou a relação assintótica dos valores extremos com a média em amostras gaussianas, ou seja, ocupou-se com o problema do comportamento limite em extremos linearmente normalizados (von Mises, 1923). Trabalhos anteriores não merecem relevância<sup>6</sup>. Todavia, da forma como hoje a conhecemos, a EVT teve o seu verdadeiro impulso em 1925, com o trabalho pioneiro de Leonard Henry Caleb Tippett (1902-1985), onde na qualidade de funcionário da *British Cotton Industry Research Association*, lhe foi solicitado que estudasse uma forma de tornar os fios de algodão mais resistentes. Tippett observou que a resistência dos fios estava diretamente relacionada com a força produzida pelas fibras de menor resistência. Contudo, a incapacidade das metodologias clássicas em lidar com o fenómeno, levou-o a criar uma teoria assente em princípios probabilísticos que possibilitasse dar resposta a situações de modelação de acontecimentos extremos. Desta forma, o seu estudo centrou-se na função de distribuição acumulada exata e nos momentos das maiores estatísticas ordinais de uma amostra com distribuição normal (Tippet, 1925)<sup>7</sup>.

Em 1927, Maurice René Fréchet (1878-1973) publica o artigo “*Sur la loi de probabilité de l'écart maximum*”, onde apresenta pela primeira vez uma distribuição assintótica baseada nos valores máximos, identificando assim uma possível distribuição limite para as maiores estatísticas de ordem. Fréchet, mostrou que os valores máximos de diferentes distribuições partilham a propriedade de poderem ter a mesma distribuição assintótica (Fréchet, 1927). Fréchet ao usar potências de funções de distribuição (em vez de potências de funções características) tratou o problema dos máximos de v.a.’s i.i.d.’s de forma análoga ao das somas, criando assim a primeira lei de extremos, conhecida como distribuição de Fréchet. De realçar o importante e pioneiro papel de E.L. Dodd e M.R. Fréchet no lançamento das bases para a melhoria da estrutura conceptual e mudança de direção do pensamento necessário para o desenvolvimento da teoria assintótica de extremos. Em 1923, Dodd relacionou o crescimento assintótico do máximo de  $n$  v.a.’s i.i.d.’s com a velocidade com que a cauda superior direita da função densidade

---

<sup>6</sup> Como por exemplo: (i) a discussão mantida por Nicolaus Bernoulli, em 1709, ao considerar o problema atuarial da duração média de vida do último sobrevivente entre  $n$  homens da mesma idade que morreram em  $t$  anos. Esta questão pode ser reduzida ao seguinte: calcular a maior distância média desde a origem de  $n$  pontos aleatoriamente ligados numa linha reta de comprimento  $t$ , (ii) a necessidade dos astrónomos em estabelecer critérios de aceitação/rejeição de um valor periférico, decorrente das observações repetidas de um mesmo objeto (e.g., o diâmetro de um planeta), ou (iii) os artigos de Chaplin (1880, 1882), Slocum & Hancock (1906), Fuller (1914) e Griffith (1920), que incluem diversas aplicações no domínio da análise matemática relacionada com a força de resistência à tração e rotura de materiais sólidos.

<sup>7</sup> Tippett apresentou um conjunto de 12 diagramas e 10 tabelas para determinar as probabilidades de ocorrência dos maiores valores a partir de amostras de diferentes tamanhos com distribuição normal, bem como a amplitude média de tais amostras. As tabelas de Tippett são uma importante ferramenta para o uso prático de valores extremos provenientes de uma distribuição normal.

de probabilidade subjacente aos dados tende para zero (Dodd, 1923); por sua vez, em 1927, Fréchet introduziu a ideia chave da existência de uma lei-limite para o máximo (mínimo) que deverá ser estável no sentido que a distribuição do máximo (mínimo) obtido de  $n$  v.a.'s i.i.d.'s deve ser do mesmo tipo (Fréchet, 1927).

Apoiados numa parte do trabalho de Fréchet (1927) e dando continuidade ao trabalho iniciado por Tippett em 1925, este último investigador em parceria com Ronald A. Fisher (1890-1962) mostraram que as distribuições limite extremas só podem pertencer a uma de três classes (uma das quais, a distribuição de Fréchet), ainda que sem prova rigorosa. Assim, lançaram-se as bases teóricas para a compreensão, controlo e aplicação do mecanismo da EVT e das distribuições de valores extremos às áreas onde se justificasse a existência de eventos com níveis extremos e raros, culminando com a publicação do artigo “*On the estimation of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample*” (Fisher & Tippett, 1928). Genericamente, mostraram a convergência lenta da distribuição do máximo numa amostra gaussiana em direção à sua assíntota, que era a principal dificuldade na investigação até à data. De facto, o uso da distribuição gaussiana como ponto de partida tem dificultado o desenvolvimento da teoria, uma vez que nenhum dos teoremas fundamentais sobre valores extremos está relacionado de forma direta com esta distribuição. Fisher & Tippett (1928) apresentam um importante resultado na EVT, o Teorema onde se afirma se há convergência na distribuição do máximo (devidamente normalizado) de uma sequência de v.a.'s, então converge para uma distribuição limite extremal dependente de  $F$ . De notar que este resultado é muito similar ao Teorema Limite Central para as médias (ou somas). Mais tarde, em 1934 e 1935, Emil Julius Gumbel (1891-1966) apresenta importantes resultados para esta teoria (Gumbel 1934, 1935), mas o auge ficou reservado para o livro “*Statistics of Extremes*”, que inclui a distribuição cunhada com o seu nome “distribuição Gumbel” (Gumbel, 1958). Esta é, porventura, a obra mais emblemática até ao presente da Estatística de Extremos. Porém, a justeza da sua relevância estatística vai além do seu valor histórico, pois contém um extenso acervo bibliográfico acerca do desenvolvimento da EVT. Até à década de 50 do Séc. XX, o desenvolvimento teve um cunho marcadamente teórico. Pode afirmar-se que Gumbel é pioneiro nas aplicações da EVT a diferentes áreas da vida. A primeira aplicação foi realizada no âmbito da demografia (maior tempo de vida). Seguiram-se aplicações relacionadas com os fenómenos ambientais/climatéricos (emissões radioativas, inundações e precipitação), bem como aplicações ligadas a problemas de engenharia (Gumbel, 1937a,b, 1941, 1943, 1945, 1949, 1958).

Em 1936, von Mises, considerando o estudo do comportamento para grandes valores, publicou o artigo “*La distribution de la plus grande de  $n$  valeurs*” (von Mises, 1936), onde constam as condições suficientes para a convergência fraca das maiores estatísticas ordinais de cada um dos três tipos de distribuições limite apresentadas por Fisher & Tippett (1928).

Em 1939, no âmbito da Teoria das Probabilidades e Estatística, Ernst Hjalmar Waloddi Weibull (1887-1979) publicou a distribuição max-Weibull, decorrente das pesquisas efetuadas no âmbito da força, resistência e fadiga dos materiais (Weibull, 1939a,b). Este mesmo autor, em 1951, publicou no periódico



*American Society Mechanical Engineers* o seu mais importante artigo sobre a sua própria distribuição de probabilidades, usando sete estudos-caso, “*A statistical distribution function of wide applicability*” (Weibull, 1951).

Em 1943, Boris Vladimirovich Gnedenko (1912-1995), matemático russo da Escola de Teoria das Probabilidades na Universidade de Moscovo, também com atividade de investigação nos domínios da estatística da fiabilidade e controlo de qualidade, apoiando-se no teorema da convergência de tipos de Aleksandr Yakovlevich Khinchin (1894-1959) e nos resultados de Fisher & Tippet (1928), publicou o artigo “*Sur la distribution limite du terme maximum d’une série aléatoire*” onde apresentou o Teorema dos Tipos Extremais (Gnedenko, 1943), também designado de Teorema (unificado) de Fisher-Tippet-Gnedenko. Sem dúvida, uns dos mais importantes resultados da distribuição assintótica de estatísticas de ordem extremas. Aqui foram apresentadas as condições necessárias e suficientes para a convergência fraca (em distribuição) para o máximo para as três distribuições assintóticas possíveis: Gumbel (Tipo I), Fréchet (Tipo II) e max-Weibull (Tipo III). Inegavelmente, um marco na Estatística de Extremos. Com este trabalho, Gnedenko resolveu o comportamento de distribuições limite para o máximo de  $n$  v.a.’s i.i.d.’s, embora a atração para a distribuição Gumbel necessitasse de trabalhos suplementares que só mais tarde viriam a ocorrer, sobretudo, com o trabalho de de Haan (1970). De referir que publicações anteriores (Fréchet, 1927; Fisher & Tippet, 1928; Gumbel, 1935; von Mises, 1936) obtiveram resultados parciais. Em particular, conforme referido, Fisher & Tippet (1928) também obtiveram o resultado acerca dos três tipos de distribuições limite, mas carecendo de prova concludente.

Outros investigadores que se notabilizaram na primeira fase de desenvolvimento da EVT, foram (i) de Finetti (1932) que proporcionou algumas condições para a aplicabilidade e validade da Lei dos Grandes Números para valores extremos. A condição suficiente encontrada por de Finetti é expressa pela igualdade  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x + \varepsilon) / f(x) = 0, \forall \varepsilon > 0$ , e (ii) Rice (1939) que tratou o problema da distribuição do máximo em curvas aleatórias.

O trabalho de Juncosa (1949) generaliza os resultados de Gnedenko para o caso de v.a.’s com a restrição de independência, mas não necessariamente identicamente distribuídas. Apesar da forte componente teórica, os resultados de Juncosa, decorrentes da reduzida utilidade prática, não vingaram entre a comunidade de Estatísticos. Pode-se afirmar que o trabalho de Gnedenko foi refinado por Meizler (1949), Marcus & Pinsky (1969) e, sobretudo, por de Haan (1970, 1971). Opostamente a Juncosa (1949), os trabalhos de Watson (1954), Newell (1964) e Loynes (1965) não colocam restrição na independência, mas impõem a condição de estacionariedade, bem como certas restrições na dependência das observações. A teoria assintótica de extremos em sequências estacionárias foi introduzida por Watson (1954), Berman (1962), Loynes (1965) e extensivamente desenvolvida por Leadbetter et al. (1983).

Em 1953, com prefácio de Gumbel, o National Bureau of Standards publicou as tabelas de probabilidade para análise de valores extremos, tendo em 1954 apresentado a brochura “*Statistical Theory of Extreme Values and Some Practical Applications*”, onde são apresentados numerosos exemplos (National Bureau of Standards, 1953, 1954).

Em 1954, Rui A. Silva Leme, no âmbito da sua tese de doutoramento, deu um tratamento expositivo sistemático das distribuições de valores extremos e as suas aplicações a problemas de engenharia, especialmente ligadas às estruturas de segurança (Leme, 1954).

Em 1955, A.F. Jenkinson, no artigo “*The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements*”, unificou os três tipos de distribuição de valores extremos (Gumbel, Fréchet e max-Weibull) numa forma paramétrica única, designada de distribuição generalizada de valores extremos (Jenkinson, 1955).

Simultaneamente ao desenvolvimento da EVT esteve o desenvolvimento da Teoria da Variação Regular de Jovan Karamata (1902-1967) cujo trabalho “*Sur un mode de croissance régulière des fonctions*” (Karamata, 1930) veio mais tarde a desempenhar um papel crucial na EVT. A evolução desta Teoria, desde a sua origem até ao início do Séc. XXI, bem como o seu impacto na EVT, está descrita nos trabalhos de Bingham et al. (1987), Resnick (1987) e Bingham (2007) intitulados “*Regular Variation*”, “*Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*” e “*Regular Variation and Probability: the Early Years*”, respetivamente.

Outro momento importante está ligado ao trabalho de Laurens de Haan em 1970 no âmbito da sua tese de doutoramento “*On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes*” (de Haan, 1970). O autor, seguindo os contributos de Gnedenko e procurando um modelo apropriado para a cauda direita sob a função de distribuição  $F(\cdot)$  desconhecida, refinou os resultados de Fisher-Tippett e da variação regular de Karamata, proporcionando um rigoroso quadro matemático para os resultados-chave da EVT. Movido por estes resultados surge em 1974 o trabalho conjunto de August A. Balkema & Laurens de Haan, intitulado “*Residual life time at great age*” (Balkema & de Haan, 1974) que conjuntamente com o trabalho de James Pickands em 1975 “*Statistical inference using extreme order statistics*” (Pickands, 1975), introduziram a distribuição generalizada de Pareto<sup>8</sup> como uma família de distribuições com dois parâmetros: forma e escala, mas dependentes de um “parâmetro” de localização, denominado limiar (do inglês, *threshold*). Este limiar, habitualmente denotado por  $u$ , determina o ponto a partir do qual todos os excessos ( $X_i > u$ ) na amostra aleatória são retidos. Pickands-Balkema-de Haan ao generalizarem os resultados teóricos proporcionaram uma base sólida para diversos modelos estatísticos. Estes investigadores estabeleceram que a função de distribuição condicional das excedências pode ser bem aproximada por uma função de distribuição generalizada de Pareto. Fundava-se, assim, um importante ramo da EVT: excessos acima de um limiar, ou como é mais simplesmente conhecido, POT (do inglês, *Peaks Over Threshold*). Esta metodologia foi mais tarde melhorada por diversos investigadores, destacando-se Anthony C. Davison em 1984, no trabalho “*Modeling excesses over high thresholds with an application*”, Richard L. Smith em 1984, no trabalho “*Threshold methods for sample extremes*” e M. Ross Leadbetter em 1991, no trabalho “*On a basis for*

---

<sup>8</sup> A distribuição de Pareto é resultado dos trabalhos de Vilfredo Federico Damaso Pareto (1848-1923), baseados em leis de potência (Pareto, 1896). Porém, a utilidade desta distribuição só viria a revelar-se com a sua generalização, i.e., a distribuição generalizada de Pareto.

*peaks over threshold modeling*” (Davison, 1984; Smith, 1984; Leadbetter, 1991). Contudo, Davison & Smith (1990) afirmam que foi a partir dos trabalhos de Todorovic & Zelenhasic (1970) e Todorovic & Rousselle (1971) que a metodologia POT começou a ser desenvolvida de forma sistemática. A ideia central do método POT decorre da relação existente entre a família de distribuições presente na distribuição generalizada de Pareto, bem como as funções situadas no domínio de atração das distribuições de valores extremos. Com o desenvolvimento das metodologias dos máximos de blocos e dos excessos acima de um limiar, gerou-se uma onda de entusiasmo não apenas ao nível das aplicações (sobretudo, nas áreas da precipitação, hidrologia, temperatura, incêndios, inundações, ventos, força/resistência dos materiais, finanças, telecomunicações, seguros, engenharia, entre outros), como também nas áreas das probabilidades, dos processos estocásticos e da decisão estatística. Na atualidade, o método POT constitui-se como uma das mais importantes ferramentas estatísticas empregues na resolução do problema de estimação da cauda e conseqüentemente na estimativa da probabilidade de ocorrência de eventos raros. Contudo, subsiste a ausência de consenso quanto à seleção do limiar ótimo  $u^{opt}$ , à direita do qual será estimada a cauda da função  $F(\cdot)$  desconhecida. As exigências genéricas na escolha de  $u$  são: (1) que ele permita uma boa aproximação para a cauda de  $F(\cdot)$  à direita de  $u$  e (2) que seja adequado para a aplicação desta aproximação.

Desde a década de 70 do Séc. XX que na EVT os temas dominantes têm-se concentrado na criação de métodos de estimação dos principais parâmetros extremais (incluindo métodos Bayesianos), em técnicas de seleção de um valor limiar suficientemente alto e adequado, na estimação de quantis extremais e probabilidade de excedência, em aplicação de resultados da teoria da variação regular numa tentativa de reduzir o viés dos estimadores e criação de novos modelos, na expansão da EVT à regressão, a conjunto de dados multivariados e a séries temporais. Assim, em 1975, para além do estimador de Pickands (Pickands, 1975), surge também o estimador de Hill (Hill, 1975) para estimar o índice de valor extremo (EVI, do inglês, *extreme value index*). O primeiro, para os casos em que  $EVI \in \mathbb{R}$ , o segundo para  $EVI > 0$ . O artigo de Harter (1978) apresenta um vasto acervo bibliográfico na área da teoria de valores extremos. Contudo, não refere o trabalho pioneiro de von Bortkiewicz em 1922.

A partir de 1980, os métodos para aplicação da EVT difundem-se por praticamente todas as áreas do conhecimento. Nesta década generalizou-se a teoria para processos estacionários, para conexões da teoria para processos pontuais, para a variação regular, bem como para o uso de técnicas de regressão na análise extremal (Resnick, 1986, 1987). Segundo Gomes (2005), a Estatística de Extremos até meados de 80 era de natureza puramente paramétrica, essencialmente baseada no teorema limite extremal (i.e., o Teorema dos Tipos Extremais).

Outros ramos surgiram e enriqueceram a EVT, ampliando as possibilidades e as áreas de aplicação. Em termos de Estatística de Extremos Multivariados, salientam-se os trabalhos pioneiros de Tiago de Oliveira (1958, 1962/1963), bem como os contributos de Geffroy (1958/1959) e Sibuya (1960). Em todos os casos, apoiando-se na generalização da metodologia unidimensional. A caracterização de distribuições de valores extremos multivariados baseada nos argumentos do processo pontual foi

primeiramente desenvolvida por de Haan & Resnick (1977), tendo Pickands (1981) proporcionado uma representação equivalente. Técnicas detalhadas dos aspectos fundamentais podem ser consultadas em Resnick (1987). Contudo, a expansão dos modelos multivariados paramétricos e não-paramétricos como meio de melhorar a inferência ocorreu durante a década de 90 (Smith et al., 1990; Tawn, 1990, 1994; Coles & Tawn, 1991, 1994; Joe et al., 1992; Einmahl et al., 1993; Joe, 1994; Smith, 1994; Husler, 1996; Caperaa et al., 1997).

O início do Séc. XXI fica marcado pelo interesse nas aplicações de modelos de extremos naturais em eventos espaço-temporais (Davis & Mikosch, 2008; Neves & Prata Gomes, 2011; Davison & Gholamrezaee, 2012; Davis et al., 2013; Huser & Davison, 2012, 2014). Recuando no tempo, os primeiros trabalhos acerca da passagem do comportamento assintótico dos extremos de processos em tempo discreto para o tempo contínuo são pertença de Rice (1939, 1944, 1945), Cartwright & Longuet-Higgins (1956), Crámer (1962, 1965) e O'Brien (1974).

Os processos extremais ou modelo GEV-multivariado, hoje mais conhecido como método das  $r$ -maiores observações, foram primeiramente definidos Lamperti (1964), Dwass (1964, 1966) e Tiago de Oliveira (1968, 1973). Porém, Weissman (1978) foi o primeiro a fazer inferência com o modelo das  $r$ -maiores observações. Posteriormente, Smith (1986) desenvolveu a metodologia tal como hoje a conhecemos. Seguidamente, Tawn (1988a,b,c) apresentou o caso geral independentemente do valor e sentido do parâmetro de forma. Dado usar mais dados que o método clássico de Gumbel, tende a diminuir a variância dos estimadores dos parâmetros extremais. Não obstante esta vantagem, na prática não é fácil a escolha de  $r$ . As dificuldades são semelhantes à escolha de  $u$  no método POT ou, inversamente, à escolha do tamanho dos blocos no método dos máximos de blocos.

## 1.2. Teoria de valores extremos: outros contributos

Importantes obras que compactaram informações relevantes ao nível da teoria assintótica de extremos, como por exemplo, a atenuação dos argumentos clássicos relativos a variáveis independentes de sequências estacionárias e a caracterização do comportamento extremal como antes não tinha sido feito, foram escritos por David (1981) "*Order Statistics*", Balakrishnan & Cohen (1991). "*Order Statistics and Inference. Estimation Methods*", Arnold, Balakrishnan & Nagaraja (1992) "*A First Course in Order Statistics*" e David & Nagaraja (2003) "*Order Statistics*". Um rigoroso tratamento matemático sobre a teoria assintótica extremal é proporcionado nas obras de Galambos (1978, 1987) "*The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*" e de Leadbetter, Lindgren & Rootzen (1983) "*Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*". Tiago de Oliveira (1984) e Galambos, Leigh & Simiu (1994) apresentam compêndios de *proceedings* de conferências que contêm uma variedade de artigos dirigidos especificamente para os aspectos teóricos e metodológicos da teoria de valores extremos. O livro de Castillo (1988) "*Extreme Value Theory in Engineering*" surge como uma atualização do grande referencial deixado por Gumbel (1958), embora com ênfase nas aplicações em engenharia. A discussão sobre vários conceitos de convergência e rácios de convergência associados a extremos e estatísticas

ordinais está presente no trabalho de Reiss (1989) “*Approximate Distributions of Order Statistics: with Applications to Nonparametric Statistics*”. Smith (1990) proporciona uma visão geral e prática das técnicas estatísticas para modelação de valores extremos. Beirlant, Vynckier & Teugels (1996), no livro “*Practical Analysis of Extreme Values*” proporcionam uma análise prática de valores extremos com ênfase na área atuarial e Beirlant, Goegebeur, Teugels, Segers, de Waal & Ferro (2004), no livro em “*Statistics of Extremes: Theory and Applications*”, Reiss & Thomas (2007) no livro “*Statistical Analysis of Extreme Values: from Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*” e Embrechts, Kluppelberg & Mikosch (1997) no livro “*Modelling Extremal Events: for Insurance and Finance*”, lidam com diversos problemas de modelação e análise de extremos ligados especialmente aos campos atuarial e financeiro. Kotz & Nadarajah (2000) apresentam uma monografia “*Extreme Value Distributions – Theory and Applications*” onde descrevem de forma organizada os resultados da teoria de valores extremos, considerando as distribuições de valores extremos (univariadas e multivariadas) e modelos relacionados, tendo em conta o trabalho pioneiro iniciado por Gumbel. Coles (2001) apresenta um manual prático e um grande referencial de ação na atualidade “*An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*”, cujo objetivo foi complementar o trabalho de Gumbel (1958) e o trabalho de Leadbetter et al. (1983), mas de um ponto de vista meramente estatístico, onde cada tópico é reforçado com exemplos práticos. Reiss & Thomas (2001), numa 2ª edição do livro editado em 1997, incluíram software para levar a cabo uma multiplicidade de análises de valores extremos. Os investigadores de Haan & Ferreira (2006) proporcionam no livro “*Extreme Value Theory: an Introduction*” uma explicação introdutória de várias áreas da teoria de valores extremos: probabilística e estatística, teórica e aplicada. Resnick (2007) e Balkema & Embrechts (2007), fornecem um conjunto de ferramentas matemáticas, probabilísticas e estatísticas usadas essencialmente na análise de extremos de cauda pesada, intitulados respetivamente “*Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling*” e “*High Risk Scenarios and Extremes: a geometric approach*”.

### **1.3. Teoria de valores extremos com investigadores portugueses**

Envolvendo investigadores portugueses, destacam-se primeiramente os trabalhos de J. Tiago de Oliveira<sup>9</sup> (1928-1992), cuja obra é reconhecida internacionalmente: (1) em 1957, com estimadores e testes para populações contínuas com parâmetros de localização e dispersão, (2) em 1958, com o trabalho sobre distribuições extremas e a estatística de extremos multivariados, (3) em 1961, os trabalhos pioneiros sobre representação de distribuições extremas bivariadas e sobre independência assintótica da média amostral e dos extremos, (4) em 1962, o desenvolvimento da teoria estrutural de extremos bivariados, (5) em 1968, a definição e apresentação das propriedades dos processos extremos, (6) em 1970, no âmbito da decisão estatística, apresenta o trabalho sobre distribuições biextremas, (7)

---

<sup>9</sup> O Professor Tiago de Oliveira esteve na criação do primeiro Departamento de Estatística e Investigação Operacional das Universidades Portuguesas, esteve na criação de um Centro de Investigação em Estatística e Aplicações, e deu um importante contributo para a criação da Sociedade Portuguesa de Estatística (Gomes, 1993).

em 1971, 1975 e 1980, renova o modelo de extremos bivariados, (8) em 1984, com as múltiplas aplicações estatísticas a situações extremas (Tiago de Oliveira, 1957, 1958, 1961a,b, 1962, 1968, 1970, 1971, 1975, 1980, 1984). Segue-se Ivette Gomes, (1) em 1978, com a tese de doutoramento na Universidade de Sheffield (Reino Unido) com o título “*Some Probabilistic and Statistical Problems in Extreme Value Theory*”, (2) nos anos pós-doutoramento, com trabalhos sobre o comportamento pré-assintótico em teoria de valores extremos, taxas de convergência, concomitantes de estatísticas ordinais, inferência estatística em modelos de extremos multivariados e multidimensionais, (3) mais recentemente, amplas revisões de Estatística de Extremos univariados, estimação do índice de valor extremo, metodologias Jackknife e Bootstrap, *value-at-risk*, metodologias de reamostragem (Gomes, 1978, 1981, 1985, 1995, 1999, 2005, 2014, 2018; Gomes & Pestana, 2007; Gomes & Caeiro, 2007; Gomes & Guillou, 2015; Gomes & Henriques-Rodrigues, 2016; Gomes et al., 2000, 2019; Gomes et al., 2016a,b). Na edição da Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE), Primavera de 2007, Fernando Rosado assinou no editorial que o tema central do Boletim é a “Estatística de Extremos” que, conforme assinalou, “com verdadeira propriedade deve intitular-se de Escola de Extremos” (Rosado, 2007). Nesta edição, são narrados os últimos 25 anos da estatística de extremos em Portugal. Do leque de investigadores, destaca Ivette Gomes, homenageada pelo editor como a “grande obreira do sucesso extremista neste extremo da Europa”. Porém, conforme afirma Gomes (2007), no seu “Memorial da Escola”, o grande responsável pela “Escola de Extremos” no nosso País foi o Professor Tiago de Oliveira. Anteriormente, Gomes (1993) fez a homenagem de Tiago de Oliveira.

Para além de Tiago de Oliveira e Ivette Gomes, um vasto leque de investigadores tem-se dedicado e notabilizado no estudo da Estatística de Extremos. Mais detalhes sobre estes contributos podem ser consultados em Gomes (2005, 2007, 2017).

Em termos de centros de investigação onde o domínio dos extremos tem destaque particular, salientamos o CEAUL – Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa, fundado em 1975 por J. Tiago de Oliveira. Atualmente, o grupo de investigação “*Order statistics, extremes, modelling and simulation*” do CEAUL é coordenador por Ivette Gomes.

A nível nacional, a REVSTAT – *Statistical Journal*, pertença do Instituto Nacional de Estatística, tem sido o principal meio de publicação de trabalhos no domínio da Estatística de Extremos, com importantes participações de investigadores portugueses e estrangeiros. O cargo de Editor-in-Chief no quadriénio 2014-2018 foi ocupado por Ivette Gomes e no quadriénio 2019-2023 é desempenhado por Isabel Fraga Alves.

A Sociedade Portuguesa de Estatística publica na primavera e no outono o seu Boletim. A Edição Primavera de 2007 teve como destaque a “Escola de Extremos” em Portugal. Em todas as edições é publicado pelo menos um trabalho sobre Extremos.

Em 2013, no âmbito do curso breve do XXI Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística, Ivette Gomes, Isabel Fraga Alves e Cláudia Neves, apoiando-se nos conteúdos programáticos das cadeiras das áreas de Estatísticas Ordinais, Teoria de Valores Extremos, Estatística de Extremos e

Modelação de Acontecimentos Raros, apresentaram o livro “Análise de Valores Extremos: uma introdução” (Gomes et al., 2013). Ainda que “introdutório e simples” (conforme referem as autoras no prefácio), não deixa de ser uma importante ferramenta de trabalho, pela diversidade temática que atravessa.

#### **1.4. Teoria de valores extremos: aplicações ao desporto**

Os atletas procuram os recordes, sejam eles pessoais, do clube que representam, da época desportiva, do campeonato/prova em disputa, do país, do continente ou do mundo. Por isso, sempre que um atleta se prepara para realizar uma tentativa, por exemplo no salto em comprimento ou no lançamento do peso, existe uma probabilidade de, nessa tentativa, surgir um novo recorde do mundo, ou simplesmente figurar numa das melhores performances de sempre. Não se consegue impedir este desejo natural do atleta, mas pode-se tentar prever a sua ocorrência. Talvez se possa pensar que o acontecimento de marcas extraordinárias não segue nenhuma regra, mas talvez as “coisas” não sejam exatamente assim. Desde que existem registos oficiais que os recordes têm vindo a ser excedidos, ainda que alguns dos atuais recordes do mundo datem de anos distantes, como por exemplo o lançamento do disco ou do martelo masculino, cujas marcas, obtidas respetivamente por Jurgen Schult (RDA) e Yuriy Sedykh (URSS), datam ambas de 1986, ou no lado feminino, no salto em altura (Stefka Kostadinova, BUL) e no lançamento do peso (Natalya Lisovskaya, URSS), obtidos em 1987, ou que o recorde do mundo de Bob Beamon (EUA) no salto em comprimento conseguido em 1968 só foi obtido em 1991 por Mike Powell (EUA) e que este ainda se mantém na atualidade, entre muitos outros casos!

É exatamente neste contexto (desportivo) que a EVT, se torna numa excelente ferramenta estatística no apoio à modelação, análise e previsão da ocorrência destes eventos extremos e raros, na medida em que trabalha diretamente com variáveis aleatórias com comportamento extremo, mais extremo do que qualquer outro até então observado, ou seja, um novo recorde do mundo.

E com isto, para além do estabelecimento de valores confiáveis para os níveis de retorno associados a um certo período de retorno, a EVT procura primeiramente definir um limite a partir do qual se está na presença de um valor extremo, quantificando a sua probabilidade de ocorrência. Sem dúvida que a EVT mudou a opinião social de que os recordes quando acontecem são sempre devidos ao acaso e decorrentes de um conjunto cumulativo de situações excecionais.

São escassos os trabalhos com extremos no desporto. Sendo que a maior parte dos existentes utilizam dados das corridas do atletismo sob a forma de modelação estacionária.

No panorama internacional, o tema da aplicação de extremos no desporto de alto rendimento ganha importância, sobretudo, nos trabalhos de Einmahl & Magnus (2006, 2008) e Einmahl & Smeets (2011) no âmbito de várias especialidades do atletismo (corridas, saltos e lançamentos). Porém, trabalhos pioneiros foram realizados por Ballerini & Resnick (1985) com atletas da milha, Smith & Miller (1986) e Smith (1988) com atletas da milha e maratona, Robinson & Tawn (1995) na corrida de 3000 metros em mulheres. Posteriormente, Gembris et al. (2007) debruçaram-se sobre várias disciplinas atléticas.

Envolvendo investigadores portugueses, destacam-se os trabalhos de Gomes (2008), Gomes et al. (2009), Fraga Alves et al. (2013), Henriques-Rodrigues et al. (2011, 2015) e Vicente et al. (2013). Contudo, pertence a Barão & Tawn (1999) a primeira publicação na área dos extremos aplicados ao desporto, mais especificamente envolvendo as melhores performances anuais na prova de corrida de 1500m e 3000m feminino, no período de 1972-1993. Por sua vez, em Portugal foi Ivette Gomes a primeira em Portugal a apresentar uma comunicação oral sobre estatística de extremos no desporto, para o efeito no Seminário de Probabilidades e Estatística da UTL-FMH, intitulada “Estatística de Extremos e Desporto – como estimar alguns parâmetros úteis” (Gomes, 2008), utilizando dados referentes a três especialidades de saltos do atletismo *indoor*: salto com vara, salto em comprimento e salto em altura, e a cinco especialidades de corrida *indoor*: 60 metros com barreiras, corridas de 60, 200, 400 e 1500 metros. No ano seguinte, novamente Ivette Gomes com a colaboração de Dinis Pestana e Lígia Henriques-Rodrigues (Gomes et al., 2009), renovam o estudo anterior, mas com diferentes dimensões amostrais. Este mesmo trabalho, com pequenos ajustes, foi publicado em 2011, na REVSTAT – Statistical Journal, com o título “*Statistics of Extremes in Athletics*” (Henriques-Rodrigues et al., 2011). Os autores realizaram uma aplicação de eventos extremos (análises paramétricas e semi-paramétricas) sobre as melhores marcas de algumas disciplinas do atletismo *indoor* (60m barreiras, 400m e 1500m, salto em comprimento, salto em altura e salto com vara), com vista a prever a obtenção do recorde do mundo. Baseando-se no estudo do recorde do mundo de salto em comprimento masculino, Fraga Alves, Laurens de Haan e Cláudia Neves (Fraga Alves et al., 2013) apresentaram uma comunicação oral no *45th Scientific Meeting of the Italian Statistical Society*, intitulada “*How far can man go?*”, onde usaram a teoria de valores extremos como metodologia de abordagem na estimação das possibilidades futuras deste recorde do mundo. Este mesmo trabalho viria a ser publicado em 2013 pelos mesmos autores no “*Studies in Theoretical and Applied Statistics*”. Em 2012, surge a primeira dissertação (para o efeito de mestrado) acerca dos valores extremos no desporto (Vicente, 2012). O autor analisou o consumo máximo de oxigénio de diferentes amostras de desportistas de elite mundial, bem como o tempo realizado na prova de corrida de 100 metros do atletismo, seguindo metodologias paramétricas e semi-paramétricas. Um resumo deste trabalho, apenas com a variável referente ao  $VO_2\text{máx}$  foi apresentado no Simpósio sobre “*Recent Advances in Extreme Theory*” (Vicente et al., 2013). O capítulo 3 da dissertação de mestrado de Silva (2013) é dedicado à teoria de valores extremos. O autor faz uma aplicação à corrida de resistência de 6 minutos com alunos do ensino secundário, usando a metodologia POT. Também no âmbito de uma dissertação de mestrado, Lomba (2016) aborda a temática da análise de valores extremos com atletas de mergulho livre. Adams & Tawn (2016) realizaram um trabalho no âmbito da natação, mais propriamente sobre o estilo de 400 metros, com uma amostra de homens medalhados de ouro nos Jogos Olímpicos no período de 1908-2004. Mais recentemente, surgiram os trabalhos de Silva et al. (2017a,b), Silva et al. (2018a,b,c), Caeiro et al. (2018) e Silva et al. (2020) no âmbito dos lançamentos e saltos do atletismo. Sintra (2017) incluiu na sua dissertação de mestrado uma secção sobre valores extremos no triplo-salto feminino.



## 1.5. Motivação, importância e objetivos

Esta tese foca-se na modelação e análise de eventos extremos ligados aos melhores registos históricos nas especialidades de lançamentos (dardo, disco, martelo e peso) e saltos (altura, comprimento, vara e triplo-salto) do atletismo, cujas performances são reconhecidas pela *International Association of Athletics Federations* (IAAF) ou *World Athletics* tal como hoje é conhecida. Para tal, empregamos os métodos das  $r$ -maiores observações anuais e dos excessos acima de um limiar perante condições de estacionariedade e o método dos máximos de blocos em situação de não-estacionariedade, para estimar quantis extremos, probabilidades de excedência de níveis elevados, limite superior do suporte ( $\gamma < 0$ ), níveis de retorno a  $t$ -anos e período de retorno. E com isto prever o limite da capacidade humana.

Existem aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento, mas escasseiam no domínio do desporto em geral e dos lançamentos e saltos do atletismo em particular. Não obstante o desenvolvimento teórico, uma das maiores complicações na prática reside na tomada de decisão acerca da definição “o que é um evento extremo?”. O método dos máximos de blocos simplifica de alguma forma esta ideia. Já nas abordagens das  $r$ -maiores observações e POT, o nível  $r$  e o limiar  $u$ , respetivamente, terão que ser escolhidos, o que nem sempre é fácil. Pois sabendo que  $r$  e  $u$  não são explicitamente parâmetros das distribuições (generalizada de valores extremos para as  $r$ -maiores observações e generalizada de Pareto para os excessos acima de um limiar) como minimizar o *trade-off* viés-variância que existe aquando das respetivas escolhas?

No método das  $r$ -maiores observações iremos utilizar as 10 maiores observações anuais nas especialidades de lançamentos com evidências de estacionariedade. Já no método dos excessos acima de um limiar, com aplicação aos saltos, iremos usar os máximos individuais, onde a melhor marca de cada atleta representa um bloco. Já o emprego da metodologia de não-estacionariedade ocorrerá com a aplicação do método dos máximos de blocos anuais. Este procedimento irá ser empregue aos lançamentos do disco e do martelo feminino, uma vez que quer pela análise gráfica quer pelos resultados de testes formais verifica-se a presença de tendência significativa nestas séries temporais.

Uma motivação particular é a criação de mapas de níveis de retorno a  $t$ -anos de eventos extremos para as especialidades dos lançamentos e saltos do atletismo. Os treinadores e atletas podem pretender saber como as estimativas pontuais e intervalares dos níveis de retorno poderão influenciar os seus planos de treino, de forma a criar condições para que um novo máximo mundial possa ocorrer. Nos homens, todos os recordes do mundo de lançamentos e saltos têm mais de 20 anos; nas mulheres apenas o lançamento do dardo, salto com vara e lançamento do martelo foram conseguidos no Séc. XXI, respetivamente em 2008, 2009 e 2016.

Pretendemos mudar a visão social algo distorcida acerca de que os recordes quando acontecem são sempre fruto de uma exceção ou de um acaso. No fundo, iremos usar a Teoria de Valores Extremos no auxílio à predição de valores confiáveis, quantificando a probabilidade de tal acontecer.

Na situação de estacionariedade, para além dos níveis de retorno no período  $t$ , de uma v.a.,

$$U(t) = Q(1 - 1/t),$$

onde  $Q(r)$  é a função quantil da distribuição, também estamos interessados na estimação de outras quantidades, para os melhores resultados do atleta ou de um ano, nomeadamente:

- Quantis extremos, com  $p$  suficientemente pequeno,  $q_{1-p}$  com  $p = 1/t$ .
- Probabilidades de excedência de um nível elevado, com  $p$  pequeno.
- Limite superior do suporte (quando  $\gamma < 0$ ).
- Níveis de retorno a  $t$ -anos.
- Período de retorno de um nível elevado.

A situação de não-estacionariedade no desporto, abordada em Robinson & Tawn (1995) com atletas de 3000 corrida do sexo feminino, nunca antes foi utilizada no âmbito das aplicações aos lançamentos e saltos do atletismo, exceto num trabalho apresentado em 2018 (Silva et al., 2018a). Ocorre quando as observações amostrais são variantes em relação à cronologia das suas ocorrências. Muitas vezes, a obtenção de uma marca que permita a participação numa certa prova desportiva pode comprometer a suposição da estacionariedade. Deste modo, se for detetada uma tendência temporal significativa na série ou qualquer tipo de não-estacionariedade (determinística ou estocástica), tal rejeita a suposição de que a sua estrutura de probabilidade é constante no tempo, conduzindo a uma diferente metodologia no processo de modelação, i.e., um ou mais parâmetros da distribuição irão ser modelados com a covariável tempo. Também aqui serão estimadas as quantidades de interesse do processo de modelação estacionária.

### **1.6. Estrutura do estudo**

Nesta tese estão considerados 8 capítulos e anexos. Cada capítulo possui a sua própria introdução e várias secções, onde a relação com o tema em desenvolvimento é apresentada e discutida. Assim, no que se segue, apenas focamos as ideias-chave dos conteúdos de cada capítulo.

- **Capítulo 2: Teoria de valores extremos – primeiros resultados**

Este capítulo é dedicado à apresentação dos resultados fulcrais no domínio da Teoria de Valores Extremos. São apresentadas de forma sumária alguns dos seus principais resultados, como as distribuições limite para o máximo, o Teorema dos Tipos Extremos de Gnedenko, associado ao trabalho pioneiro de Fisher-Tippett, e a sua posterior reparametrização na distribuição generalizada de valores extremos. Igualmente, é ainda feita a referência aos domínios de atração para o máximo convenientemente normalizado, bem como algumas possibilidades na escolha das constantes de atração.

- **Capítulo 3: Apresentação dos dados**

Este capítulo é reservado à apresentação dos dados a serem usados nas aplicações práticas. Mostra as fontes de recolha dos dados. Apresenta o tamanho das amostras a serem usadas em cada metodologia. Apresenta a rotina adotada na suavização dos dados, decorrente do elevado número de empates.

- Capítulo 4: Método das  $r$ -maiores observações anuais, para os lançamentos do atletismo

Neste capítulo apresenta-se a metodologia das  $r$ -maiores observações anuais. Começa com uma breve descrição da importância desta metodologia como ferramenta da EVT. Apresenta o suporte teórico que dá força à utilização das  $r$ -maiores observações, sobretudo ao nível da estimação dos parâmetros extremos, erros-padrão e respetivos intervalos de confiança; quais as preocupações a ter em consideração na seleção do modelo  $GEV_r$ , com base em procedimentos gráficos e na estabilidade dos erros-padrão dos parâmetros extremos. Mostra a adequação do modelo  $GEV_r$  selecionado na estimação de quantis extremos, probabilidades de excedência e valores de retorno. Aplica os conhecimentos aos lançamentos do atletismo cujas séries de dados apresentaram evidências de estacionariedade. Faz a discussão dos resultados obtidos.

- Capítulo 5: Método POT, para os saltos do atletismo

Neste capítulo apresenta-se a metodologia dos excessos acima de um limiar. Apresenta o suporte teórico que dá razão à utilização do método POT, considerando algumas metodologias usadas na escolha do limiar, a estimação dos parâmetros extremos, erros-padrão e respetivos intervalos de confiança. Mostra como foi realizado o processo de decisão acerca do modelo Exponencial ( $\gamma=0$ ) vs GPD ( $\gamma\neq 0$ ). Estima quantis extremos, probabilidades de excedência e períodos de retorno. Aplica os conhecimentos aos saltos do atletismo cujas séries de dados apresentaram evidências de estacionariedade. Faz a discussão dos resultados obtidos.

- Capítulo 6: Metodologia não-estacionária, para os lançamentos do atletismo

Neste capítulo apresenta-se a metodologia dos máximos de blocos anuais na situação de não-estacionariedade. Os conceitos estatísticos de estacionariedade e não-estacionariedade são convenientemente apresentados. Apresenta o método dos máximos de blocos anuais e resultados da estimação dos parâmetros extremos, erros-padrão e intervalos de confiança em situação de não-estacionariedade. Apresenta possibilidades plausíveis para testar modelos não-estacionários, bem como uma possível metodologia a ser usada na criação da covariável relacionada com o tempo, acompanhado de uma descrição detalhada dos procedimentos adotados. Mostra como selecionar um modelo e respetivo diagnóstico do ajuste. Estima outras quantidades de interesse. Decorrente de evidências estatisticamente significativas da presença de não-estacionariedade, na parte final deste capítulo é efetuada a modelação não-estacionária dos lançamentos do disco e martelo feminino. Faz a discussão dos resultados obtidos.

- **Capítulo 7: Conclusões**

Apresenta as principais conclusões desta tese. São indicadas algumas limitações do estudo, bem como apresentados possíveis problemas em aberto que poderão ser desenvolvidos, bem como recomendações para futuras investigações.

- **Capítulo 8: Bibliografia**

Apresenta o acervo bibliográfico utilizado nesta tese organizado por ordem alfabética.

- **Anexos**

Apresenta o conjunto de anexos, onde se encontram aspetos conceptuais, metodológicos, operacionais e (vários) resultados que possibilitaram a realização, a compreensão do fenómeno e deram suporte ao presente estudo.

Uma nota final para referir que ao longo da tese é usual o recurso a notas de rodapé, com o intuito de mostrar informação complementar, onde entre outros se incluem conceitos, explicações de importância não essencial para a compreensão do texto, referências a outras partes do trabalho, advertências e dados históricos, sem pretender que se perca o fio condutor de leitura ou sem desviar a atenção do texto principal para elementos de importância secundária.

### **1.6.1. Organograma geral do estudo**

A Figura 1.1 apresenta, de uma forma genérica, as diferentes fases do estudo e a metodologia estatística seguida na recolha, análise, estimação e previsão dos níveis extremos de performance desportiva nas provas de lançamentos e saltos do atletismo.

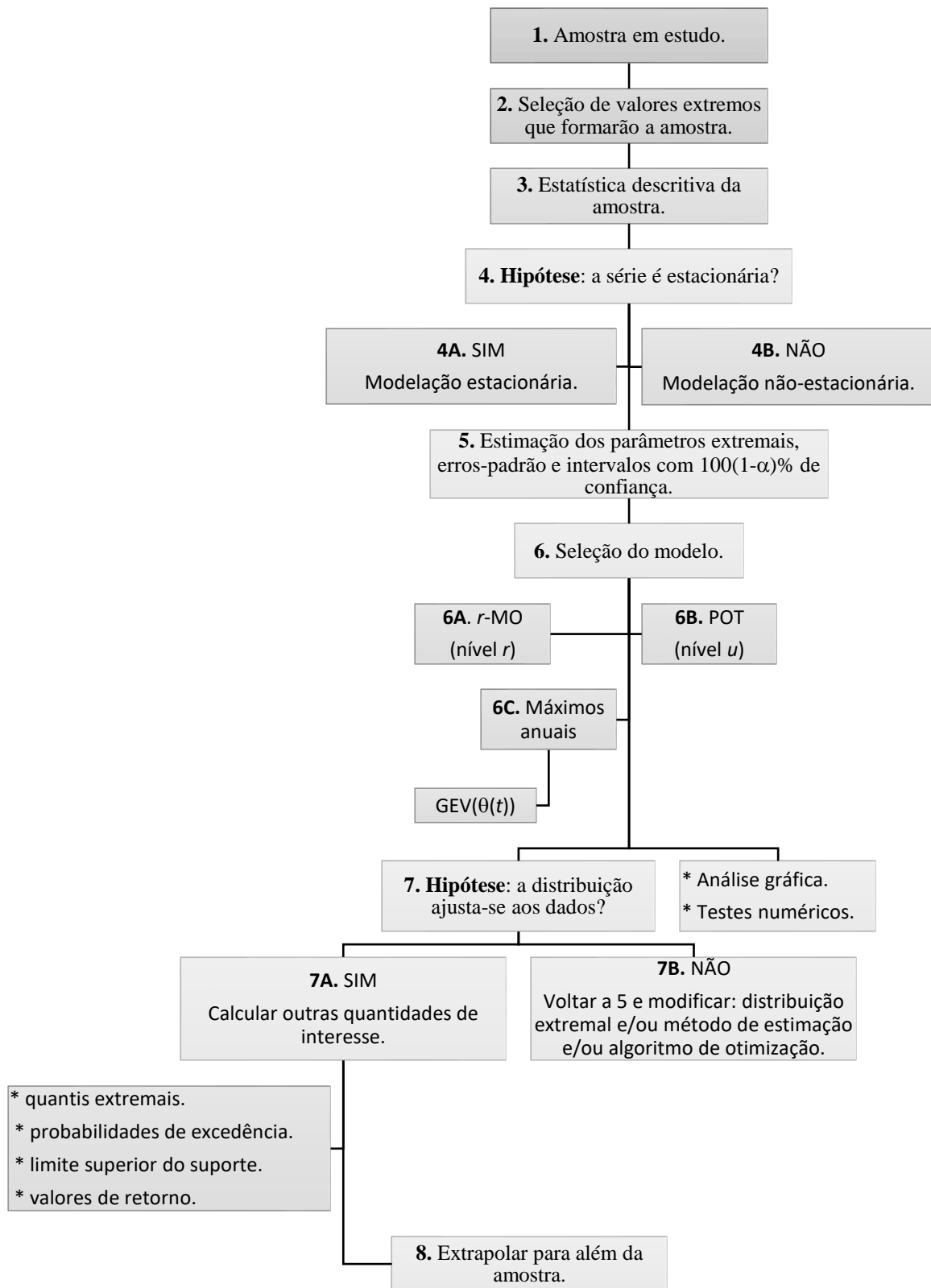


Figura 1.1 – Organograma geral do estudo.

## **1.7. Trabalhos realizados e publicações relacionadas com a tese**

### **1.7.1. Publicações em revistas**

- Silva, D.; Caeiro, F. & Oliveira, M. (2018). Aplicação da metodologia *peaks over threshold* ao salto em comprimento do atletismo. *Revista Brasileira de Biometria*, 36 (4): 753-779. ISSN: 1983-0823. <https://doi.org/10.28951/rbb.v36i4.297>.
- Silva, D.; Caeiro, F. & Oliveira, M. (2018). Modelação estatística de valores extremos: probabilidades de excedência, quantis extremos, limite superior do suporte e níveis de retorno no lançamento do disco do atletismo. *Revista de Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto*, VII, 16-31. ISSN: 2237-8111. <https://periodicos.ufop.br/pp/index.php/rest/article/view/3304>

### **1.7.2. Conference Proceedings**

- Silva, D.; Caeiro, F. & Oliveira, M. (2020). Método das  $r$ -maiores observações anuais na estimação de quantis extremos no triplo-salto masculino. Atas do XXIII Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística, 18-21 de outubro de 2017, Instituto Universitário de Lisboa (ISCTE-IUL), p.59-73. [http://www.spestatistica.pt/images/spe/Livro\\_de\\_Atas\\_Congresso\\_SPE\\_2017.pdf](http://www.spestatistica.pt/images/spe/Livro_de_Atas_Congresso_SPE_2017.pdf).
- Caeiro, F.; Silva, D. & Oliveira, M. (2018). Men's Performance in Triple Jump: an approach with Extreme Value Theory. 5th Stochastic Modelling Techniques and Data Analysis International Conference, 12-15 June 2018, Chania, Crete, Greece, p.127-135. [https://www.researchgate.net/publication/330521375\\_Men's\\_Performance\\_in\\_Triple\\_Jump\\_an\\_approach\\_with\\_Extreme\\_Value\\_Theory](https://www.researchgate.net/publication/330521375_Men's_Performance_in_Triple_Jump_an_approach_with_Extreme_Value_Theory).

### **1.7.3. Comunicações em poster**

- Silva, D.; Caeiro, F. & Oliveira, M. (2017). The  $r$ -largest order statistics model with application to javelin throw. Poster communication presented in Rao Prize Conference, May 12, 2017, Department of Statistics Eberly College of Sciences at Penn State (USA). [https://www.researchgate.net/publication/330521486\\_The\\_r-largest\\_order\\_statistics\\_model\\_with\\_application\\_to\\_javelin\\_throw\\_2017\\_Rao\\_Prize\\_Conference](https://www.researchgate.net/publication/330521486_The_r-largest_order_statistics_model_with_application_to_javelin_throw_2017_Rao_Prize_Conference)

### **1.7.4. A aguardar publicação**

- Silva, D.; Caeiro, F. & Oliveira, M. (2020). Quanto e para quando um novo recorde do mundo no lançamento do peso? Uma abordagem com a Teoria de Valores Extremos. Submetido à *Revista de Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto*.



## 2. TEORIA DE VALORES EXTREMOS – primeiros resultados

A Teoria de Valores Extremos fornece o suporte teórico para a Estatística de Extremos tratando dos procedimentos estatísticos para analisar as realizações mais extremas de um conjunto de v.a.'s  $X_i, i=1,2,\dots,n$ . Possíveis quantidades de interesse são o máximo,  $M_n = \max\{X_i, i=1,2,\dots,n\}$  ou o mínimo,  $m_n = \min\{X_i, i=1,2,\dots,n\}$ . Outros parâmetros de interesse são as probabilidades de excedência de um nível  $x$  elevado, o limite superior do suporte do modelo  $F$ , os quantis extremos e os valores de retorno.

### 2.1. Distribuições limite para o máximo

**Definição 2.1:** seja  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  uma amostra aleatória (a.a.) formada por uma sequência de  $n$  variáveis aleatórias (v.a.'s), independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.'s) a uma v.a.  $X$   $\left(X_i \stackrel{d}{=} X\right)$  ou fracamente dependentes e possivelmente estacionárias<sup>10</sup>, com função de distribuição (f.d.) comum  $F(\cdot)$ . Usa-se a notação  $\{X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n-1:n} \leq X_{n:n}\}$  para o vetor das estatísticas ordinais (e.o.'s) ascendentes associadas à amostra  $\{X_i\}, i \geq 1$ , de tal forma que a v.a.  $X_{1:n} = M_1$  denota o mínimo e a v.a.  $X_{n:n} = M_n$  o máximo da amostra. Neste estudo, a variável de interesse é o comportamento do máximo amostral, quando  $n \rightarrow \infty$ . O máximo da amostra corresponde (sempre) ao atual recorde do mundo,  $X_{i:n} = M_{i:n}$  é a  $i$ -ésima estatística ordinal ascendente,  $1 \leq i \leq n$ . Portanto,

$$\begin{aligned} M_n &= X_{n:n} := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \\ m_n &= X_{1:n} := \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Observação 2.1: todos os resultados para o máximo podem ser facilmente deduzidos para o mínimo, através da relação de equivalência:  $\min(X_1, X_2, \dots, X_n) = -\max(-X_1, -X_2, \dots, -X_n)$ . Com isto, o estudo restringe-se ao comportamento do  $M_n$ .

A f.d.  $F$  é definida por

$$F(x) := P(X \leq x),$$

cuja f.d. empírica acumulada é dada por:

---

<sup>10</sup> Uma sequência de v.a.'s  $X_1, X_2, \dots, X_n$  diz-se um processo aleatório e estacionário se, dado um conjunto de valores inteiros  $\{i_1, \dots, i_k\}$  e qualquer valor inteiro  $m$ , as distribuições de probabilidade conjunta de  $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$  e  $X_{i_1+m}, \dots, X_{i_k+m}$  são idênticas. Ou seja, num processo estacionário a distribuição de probabilidade conjunta não modifica com o tempo.



$$\hat{F}_n(x_{i:n}) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < x_{1:n} \\ \frac{i}{n} & , \text{ se } x \in [x_{i:n}, x_{i+1:n}[ , \quad i = 1, \dots, n-1, \\ 1 & , \text{ se } x \geq x_{n:n} \end{cases} \quad [2.2]$$

onde  $x_{i:n}$  é a  $i$ -ésima estatística ordinal.

Observação 2.2: a função [2.2] é uma função escada com passos com  $0, 1/n, 2/n, \dots, 1$ .

Em teoria, a função de distribuição do  $M_n$  (desconhecida) pode ser derivada exatamente para todos os valores de  $n$  como,

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= P[M_n \leq x] = P\{X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x\} \\ &= \prod_{i=1}^n P[X_i \leq x] = [P(X_i \leq x)]^n \\ &= \prod_{i=1}^n F(x) = [F(x)]^n \\ &= F^n(x), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad [2.3]$$

Assumindo que a variável é contínua, a função densidade de probabilidade (f.d.p.) do máximo obtém-se derivando [2.3] em ordem a  $x$ , i.e.,

$$f_{M_n}(x) = nf(x)[F(x)]^{n-1}.$$

Observação 2.3: se o comportamento estatístico exato de  $X_i$  fosse conhecido, então o correspondente comportamento do  $M_n$  poderia ser calculado exatamente. Porém, na prática o comportamento de  $X_i$  é desconhecido, dificultando a determinação do comportamento do  $M_n$ . Todavia, perante suposições satisfatórias, para  $n$  grande, o comportamento aproximado do  $M_n$  pode ser determinado. Daí que, conforme veremos adiante, a propriedade do  $M_n$  quando  $n \rightarrow \infty$  é de particular importância; assim, como também é de grande interesse o comportamento de vários valores máximos selecionados em períodos consecutivos.

**Teorema 2.1:** seja  $F$  a f.d. subjacente à sequência de v.a.'s e  $x^F$  o seu limite superior do suporte, tal que,

$$x^F := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\} \leq \infty, \quad [2.4]$$

então,

$$M_n = X_{n:n} := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} x^F,$$

em que  $\xrightarrow{d}$ , significa que converge em distribuição.

Porém, sendo a f.d.  $F(\cdot)$  da amostra desconhecida, a expressão  $P[M_n \leq x] = F^n(x)$  não tem grande utilidade prática. E, uma vez que na maior parte das situações se pretende o máximo de um grande número de v.a.'s, então a sua modelação obedece a argumentos assintóticos.

De facto, no comportamento de  $F^n$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , observa-se que:

$$F^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & x < x^F \\ 1, & x \geq x^F \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0, & F(x) < 1 \\ 1, & F(x) = 1 \end{cases} \quad [2.5]$$

Portanto, uma vez que a distribuição assintótica do  $M_n$  é degenerada<sup>11</sup> (a f.d. apenas toma valores de 0 e 1), tal compromete qualquer inferência para o máximo, onde é necessário que este tenha um comportamento assintótico não-degenerado. Isto significa que este resultado quando não padronizado por sucessões reais  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  tem pouco interesse. Por esta razão, à semelhança do que acontece com o Teorema Limite Central (TLC) para as médias (ou somas), torna-se necessário normalizar o  $M_n$  de modo a obter uma possível distribuição assintótica não-degenerada que não dependa de  $F$ .

**Teorema 2.2 (Teorema Limite Central):** seja  $X_i, i=1,2,\dots,n$ , uma sucessão de  $n$  v.a.'s (discretas ou contínuas) i.i.d.'s. Seja  $E(X_i) = \mu$  e  $Var(X_i) = \sigma^2 > 0$ , ambas finitas. Então,

$$\frac{\bar{X} - \mu_X}{\sigma_X / \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z \sim N(0,1).$$

Habitualmente, procura-se encontrar uma distribuição limite para  $F^n$  não degenerada. Contudo, para  $n$  muito grande a f.d.  $F_{M_n}$  é degenerada, uma vez que para  $x < x^F$ , tem-se  $F(x) < 1$ .

Assim, dois problemas podem ser encontrados usando técnicas estatísticas *standard*: (1)  $F$  não é a distribuição exata das novas observações (máximos de cada bloco), pelo que o viés pode ocorrer, (2)  $F^n(x) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , uma vez que  $F(x) < 1$  (Pocernich, 2002). O primeiro problema pode ser evitado ao aceitar que  $F$  é desconhecida e procurar famílias apropriadas de modelos para  $F^n$ ; o segundo problema pode ser evitado ao normalizar linearmente o  $M_n$ . Opostamente, para  $x^F < \infty$  e  $x \geq x^F$ , virá  $P[M_n \leq x] = F^n(x) = 1$ . Em ambos os casos,  $M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} x^F$ . E, dado que  $\{M_n\}$  é uma sucessão crescente em  $n$ , tem-se  $M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} x^F$ . Assim, analogamente ao TLC, o máximo linearmente normalizado terá a forma e convergência,

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} W \sim G, \quad [2.6]$$

---

<sup>11</sup> Degenerada porque converge para um único ponto na linha real com probabilidade 1. Este ponto único é o limite superior do suporte de  $F$  (que poderá ser infinito em muitas aplicações).

com a f.d.  $G$  não-degenerada, e onde as sequências de constantes normalizadoras  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , em que  $\{a_n\}$  visa estabilizar a escala e  $\{b_n\}$  a localização. Os méritos do desenvolvimento das condições para a existência de constantes de atração reais (também designadas de constantes normalizadoras ou coeficientes de atração),  $a_n > 0$  e  $b_n$ ,  $n=1,2,\dots$  da f.d.  $F$  para a f.d.  $G$ , são atribuídos a Gnedenko (1943).

A existência da distribuição limite  $G$ , não-degenerada, carece não apenas de normalização adequada para o máximo, mas também de convergência fraca (convergência em distribuição). Portanto, procuramos constantes normalizadoras,  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , onde  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , tais que  $a_n^{-1}(M_n - b_n) \rightarrow G$ , no conjunto dos pontos de continuidade de  $C_G$ . A distribuição do máximo normalizado é provada no Teorema de Khinchin (Gomes et al., 2013), onde se estabelecem relações entre os conceitos de convergência fraca, transformações lineares e tipos.

**Teorema 2.3 (Teorema da Convergência de Tipos de Khinchin):** seja  $\{F^n\}$  uma sucessão de f.d.'s e  $G$  uma f.d. não-degenerada. Sejam  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , uma sequência de constantes normalizadoras reais para as quais se verifica a convergência,

$$F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} G(x), \quad x \in C_G. \quad [2.7]$$

Então para alguma f.d. não-degenerada  $G'$  e constantes  $\{a'_n\}$  e  $\{b'_n\}$ , com  $a'_n > 0$  e  $b'_n \in \mathbb{R}$ , tem-se:

$$F^n(a'_n x + b'_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} G'(x), \quad x \in C_{G'}, \quad [2.8]$$

com  $C_G$  e  $C_{G'}$  o conjunto de pontos de continuidade das f.d.'s limite  $G$  e  $G'$ , respetivamente, é válida se existirem constantes  $A > 0$  e  $B \in \mathbb{R}$  para as quais se verifica a convergência,

$$\frac{a'_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} A \text{ e } \frac{b'_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} B, \quad [2.9]$$

verificando-se ainda

$$G(x) = G'(Ax + B), \quad \forall x \quad [2.10]$$

Assim,  $G(x)$  e  $G'(x)$  dizem-se distribuições do mesmo tipo.

**Prova 2.1:** tomando  $a_n^* = \frac{a'_n}{a_n}$ ,  $b_n^* = \frac{b'_n - b_n}{a_n}$  e  $F_*^n(x) = F^n(a_n x + b_n)$ , as condições [2.7], [2.8]

e [2.9] podem ser reescritas como,

$$F_*^n(x) \rightarrow G(x) \quad [2.11]$$

$$F_*^n(x) = F^n(a_n^* x + b_n^*) \rightarrow G'(x) \quad [2.12]$$

$$a_n^* \rightarrow A, \quad b_n^* \rightarrow B \quad (A > 0, B \in \mathbb{R}) \quad [2.13]$$

Dado que em [2.8] se tem a convergência uniforme, se as convergências [2.11] e [2.13] se verificam, então a convergência [2.12] também se verifica. Com a combinação das condições [2.7] e [2.9] obtemos a convergência [2.8] e a igualdade [2.10]. Por sua vez, as convergências [2.11] e [2.12] implicam as convergências em [2.13], fazendo com que a igualdade [2.10] também se verifique.

O Teorema de Khinchin permitiu identificar a classe de f.d.'s máx-estáveis como possíveis leis limite do máximo normalizado.

**Definição 2.2 (máx-estabilidade):** uma f.d.  $G$  é máx-estável se existirem constantes normalizadoras reais  $\{A_k > 0\}$  e  $\{B_k\}$ , tais que

$$G^k(A_k x + B_k) = G(x), x \in \mathbb{R}, k \geq 1, \quad [2.14]$$

**Lema 2.1:** se existe uma distribuição limite para o máximo normalizado, então essa distribuição terá que ser também máx-estável.

Observação 2.4: o facto de lidarmos com f.d.'s limite contínuas torna equivalentes as noções de convergência fraca e convergência em distribuição.

**Teorema 2.4 (Teorema (unificado) dos Tipos Extremais: Fisher-Tippett-Gnedenko)<sup>12</sup>:** seja  $\{X_n\}$  uma sucessão de  $n$  v.a.'s i.i.d.'s, com f.d.  $F$ . Se existem sucessões reais  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , tais que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} G(x), \quad [2.15]$$

para alguma f.d.  $G$  não-degenerada, tal que para todo  $x$  pertencente ao conjunto dos pontos de continuidade de  $G$ , então  $F$  pertence ao domínio de atração de uma das seguintes funções de distribuição limite máx-estáveis (Fréchet, 1927; Gumbel, 1935; Weibull, 1939a,b):

- Tipo I – Gumbel:  $\Lambda(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{x-b}{a}\right)\right]\right\}, x \in \mathbb{R}, a > 0$  [2.16]

---

<sup>12</sup> O Teorema dos Tipos Extremais de Gnedenko (Gnedenko, 1943), associado ao trabalho pioneiro de Fisher-Tippett (Fisher & Tippett, 1928), forma aquele que é um dos principais resultados da distribuição assintótica das e.o.'s extremais. Daí a atual designação de “Teorema de Fisher-Tippett-Gnedenko”. Este Teorema desempenha um papel análogo ao TLC, exceto o facto do TLC se aplicar à média (soma) de uma amostra, independentemente da distribuição com variância finita, já o Teorema de Fisher-Tippett-Gnedenko estabelece que se o máximo (ou o mínimo) amostral, linear e linearmente normalizado, convergir nas mais variadas situações para uma variável aleatória não-degenerada, então o limite pertence a uma classe particular de distribuições, onde apenas uma de três distribuições limite máx-estáveis são possíveis, Gumbel, Fréchet ou máx-Weibull.

- Tipo II – Fréchet:  $\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq b \\ \exp\left\{-\left(\frac{x-b}{a}\right)^{-\alpha}\right\}, & x > b, a > 0, \alpha > 0 \end{cases}$  [2.17]

- Tipo III – máx-Weibull:  $\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[\left(\frac{x-b}{a}\right)^{-\alpha}\right]\right\}, & x < b, a > 0, \alpha > 0 \\ 1, & x \geq b \end{cases}$  [2.18]

Observação 2.5: neste estudo, de máximos, a distribuição máx-Weibull (ou *Reversed Weibull*) será doravante designada, simplesmente, de distribuição Weibull. A condição [2.15] também é conhecida por condição de valores extremos.

**Lema 2.2:** se  $G$  é uma f.d não-degenerada, então  $G$  é uma f.d. de valores extremos, do tipo I, II ou III, dadas em [2.16], [2.17] e [2.18], respetivamente.

Sejam  $b=\lambda$  e  $a=\delta$ . Todas as distribuições limite possuem os parâmetros de localização ( $\lambda$ ) e escala ( $\delta$ ), mas apenas as distribuições de Fréchet e Weibull possuem o parâmetro de forma ( $\alpha$ ). Caso  $\lambda \neq 0$  e  $\delta \neq 1$  ( $\delta > 0$ ), então será suficiente aplicar a transformação habitual à v.a., obtendo-se igualmente uma distribuição máx-estável, ou seja,

$$\Lambda(x|\lambda, \delta) = \Lambda\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right); \quad \Phi_\alpha(x|\lambda, \delta) = \Phi_\alpha\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right); \quad \Psi_\alpha(x|\lambda, \delta) = \Psi_\alpha\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right), \lambda \in \mathbb{R}, \delta > 0 \quad [2.19]$$

Em termos de f.d.p., com  $\delta > 0$ , temos:

- Gumbel:  $f(x; \lambda, \delta) = \frac{1}{\delta} \exp\left[-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right) - \exp\left(-\frac{x-\lambda}{\delta}\right)\right], x \in \mathbb{R}$  [2.20]

- Fréchet:  $f(x; \lambda, \delta, \alpha) = \left\{\frac{\alpha}{\delta} \left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^{-\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^{-\alpha}\right)\right\}, x > \lambda, \alpha > 0$  [2.21]

- Weibull:  $f(x; \lambda, \delta, \alpha) = \left\{\frac{\alpha}{\delta} \left(-\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^\alpha\right)\right\}, x \geq \lambda, \alpha > 0$  [2.22]

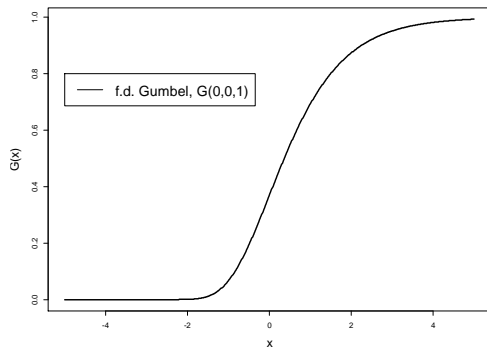
Observação 2.6: os três modelos de distribuição limite para o máximo, estão relacionados do seguinte modo:

$$\Lambda(\ln x^\alpha) \equiv \Phi_\alpha(x) \equiv \Psi_\alpha(-x^{-1}), \text{ para } x > 0 \quad [2.23]$$

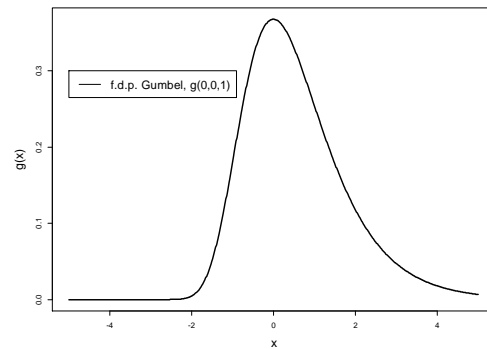
Observação 2.7: apenas três distribuições (Gumbel, Fréchet e Weibull) são dadas como distribuições limite do máximo (e mínimo). Estas distribuições, que surgem como limite de uma sucessão de f.d.'s, são muitas vezes designadas por Leis.

A Figura 2.1 apresenta, os gráficos da função de distribuição acumulada (à esquerda) e da função densidade de probabilidade (à direita) das Leis Gumbel, Fréchet e Weibull, para alguns valores de  $\gamma = 1/\alpha$  (Gumbel:  $\gamma=0$ , Fréchet:  $\gamma=0.5$  e Weibull:  $\gamma=-0.5$ ), com  $\lambda=0$  e  $\delta=1$ .

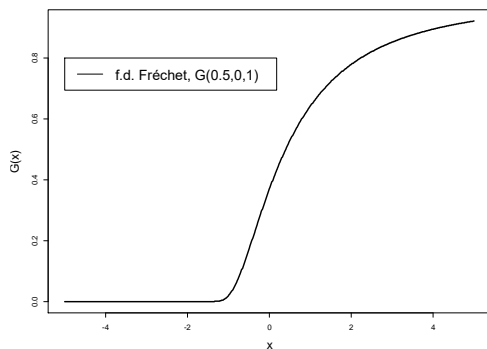
f.d. Gumbel



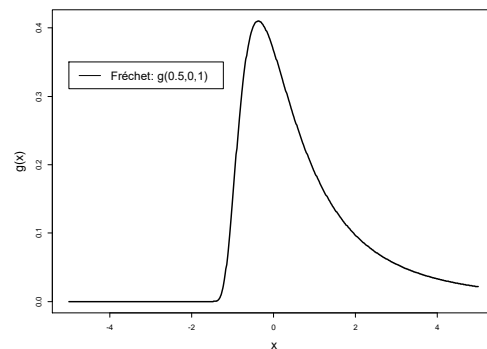
f.d.p. Gumbel



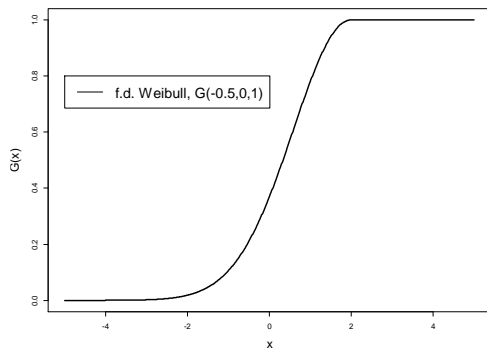
f.d. Fréchet



f.d.p. Fréchet



f.d. Weibull



f.d.p. Weibull

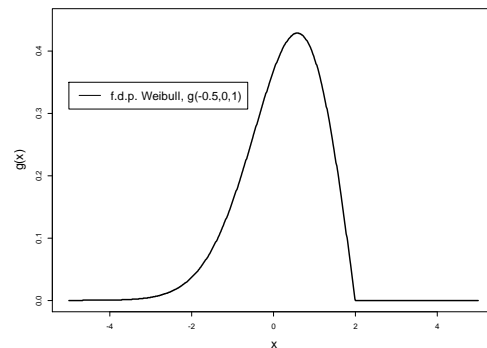


Figura 2.1 – Função de distribuição acumulada (esquerda) e função densidade de probabilidade (direita) das distribuições Gumbel, Fréchet e Weibull, para alguns valores de  $\gamma$  (Weibull:  $\gamma=-0.5$ , Fréchet:  $\gamma=0.5$  e Gumbel:  $\gamma=0$ ), com valores fixos dos parâmetros de localização e escala,  $\lambda=0$  e  $\delta=1$ , respetivamente.

Observação 2.8: estão disponíveis regras/condições para determinar se uma f.d.  $G$  pertence ao domínio de atração de uma f.d. Gumbel, Fréchet ou Weibull, bem como os correspondentes valores do parâmetro de forma. Igualmente, estão disponíveis regras/condições para a obtenção das constantes normalizadoras reais,  $\{a_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $\{b_n\}$ . Uma escolha possível é apresentada em [2.50], [2.51], [2.52] e [2.53].

Observação 2.9: uma distribuição com limite superior do suporte infinito não pode pertencer ao domínio de atração da Lei Weibull; uma distribuição com limite superior do suporte finito não pode pertencer ao domínio de atração da Lei Fréchet (Galambos, 1987).

## 2.2. Distribuição generalizada de valores extremos

Já vimos que o máximo devidamente normalizado pode ser estimado recorrendo a uma de três possíveis distribuições limite máx-estáveis, as famílias Gumbel, Fréchet e Weibull. Contudo, von Mises (1936) e Jenkinson (1955) unificaram-nas numa forma paramétrica única, a designada distribuição generalizada de valores extremos (GEV, do inglês, *Generalized Extreme Value*), que surge como distribuição limite do valor máximo de uma sequência de v.a.'s i.i.d.'s, dependente unicamente do parâmetro de forma  $\gamma$ , cuja função de distribuição acumulada (f.d.) é dada por:

$$G(x|\lambda, \delta, \gamma) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[1 + \gamma\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}\right\}, & 1 + \gamma\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right) > 0, \gamma \neq 0 \\ \exp\left\{-\exp\left[-\frac{x-\lambda}{\delta}\right]\right\}, & x \in \mathbb{R}, \gamma = 0 \end{cases}, \quad [2.24]$$

em que  $\lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) é o parâmetro de localização,  $\delta$  ( $\delta > 0$ ) é o parâmetro de escala e  $\gamma$  ( $\gamma \in \mathbb{R}$ ) é o parâmetro de forma da distribuição e fundamental em estatística de extremos, também chamado índice de cauda ou índice de valor extremo. Este parâmetro é fulcral, pois determina o comportamento (i.e., o “peso”) da cauda direita de  $G$ , ou seja, quanto maior o valor de  $\gamma$  mais pesada é a cauda direita da distribuição; o parâmetro de localização  $\lambda$ , indica o centro da distribuição GEV; o parâmetro de escala  $\delta$ , indica a magnitude dos desvios em torno de  $\lambda$ . Mais detalhes podem ser observados em Coles (2001) na secção 3 (p.45) para modelos clássicos da EVT e na secção 6 (p.105) para séries não-estacionárias. Com esta unificação, a inferência pode ser efetuada diretamente sobre o parâmetro de forma, evitando o problema decorrente da escolha da família que melhor representa os dados.

A cauda direita da distribuição é dada por:

$$\bar{F}(x) := 1 - F(x) = P[X > x], \quad [2.25]$$

de um modelo  $F(x)$  subjacente aos dados.

Dado que na prática se desconhece a verdadeira distribuição  $F$  e, como resultado, também se desconhecem as constantes normalizadoras reais  $\{a_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $\{b_n\}$ , com  $n \geq 1$ , usamos a seguinte especificação para o suporte,

$$G(x|\lambda, \delta, \gamma) = G_\gamma\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right) \quad x \in D, \quad D = \begin{cases} ]-\infty, \infty[ & \gamma = 0 \\ ]\lambda - \frac{\delta}{\gamma}, \infty[ & \gamma > 0 \\ ]-\infty, \lambda - \frac{\delta}{\gamma}[ & \gamma < 0 \end{cases}$$

da distribuição GEV, que é a distribuição limite do máximo não normalizado, onde os parâmetros de localização  $\lambda$  e escala  $\delta$  representam as constantes normalizadoras desconhecidas.

A menos de parâmetros de localização e escala, a f.d.a. da distribuição generalizada de valores extremos é dada por:

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1 + \gamma x\right)_+^{-1/\gamma}\right\}, & \gamma \neq 0, \quad 1 + \gamma x > 0 \\ \exp\{-\exp(-x)\}, & \gamma = 0 \end{cases} \quad [2.26]$$

Tomando a primeira derivada em ordem a  $x$ , obtém-se a sua f.d.p., com  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$

$$g(x|\lambda, \delta, \gamma) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} \left[1 + \gamma \left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)\right]^{-\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)} \exp\left(-\left[1 + \gamma \left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}\right), & 1 + \gamma \left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right) > 0, \gamma \neq 0 \\ \frac{1}{\delta} \left[\exp\left(-\frac{x-\lambda}{\delta}\right) \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\lambda}{\delta}\right)\right)\right], & x \in \mathbb{R}, \quad \gamma = 0 \end{cases} \quad [2.27]$$

Assim, para a distribuição dos máximos, em função do sinal de  $\gamma$ , com  $\delta > 0$ , tem-se uma das seguintes funções de distribuição de valores extremos (ver Figura 2.1):

- Se  $\gamma=0$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ), tem-se a distribuição Tipo I – Gumbel, dada por:

$$\Lambda(x; \lambda, \delta) = \exp(-\exp(-x)) \Leftrightarrow \exp(-\exp(-\frac{x-\lambda}{\delta})), \quad x, \lambda \in \mathbb{R}. \quad [2.28]$$

O domínio de atração da Lei Gumbel contém funções de distribuição com cauda direita do tipo exponencial (e.g., f.d.'s Exponencial, Normal, Gama, log-Normal, min-Fréchet, min-Weibull, Logística, Rayleigh), com limite superior do suporte de  $F$  finito ( $x^F < \infty$ ) ou infinito ( $x^F = \infty$ ). Além disso, verifica-se que  $1 - \Lambda(x) \sim \exp(-x)$ , quando  $x \rightarrow \infty$ , e todos os momentos existem.

- Se  $\gamma > 0$ , tem-se a distribuição Tipo II – Fréchet, dada por:

$$\Phi_{1/\gamma}(x; \lambda, \delta) = \exp(-x^{-1/\gamma}) \Leftrightarrow \exp\left[-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^{-1/\gamma}\right], \quad x > \lambda, \lambda \in \mathbb{R}, \gamma = 1/\alpha > 0. \quad [2.29]$$

O max-domínio de atração da Lei Fréchet, onde a cauda da distribuição se comporta como uma potência, contém funções de distribuição com cauda direita pesada (e.g., f.d.'s Pareto, Burr,  $t$ -Student, Cauchy, log-Gama), do tipo polinomial negativo e o modelo  $F$  tem limite superior do suporte infinito ( $x^F = \infty$ ).



Além disso, verifica-se que  $1 - \Phi_{1/\gamma}(x) \sim \gamma^{-1/\gamma} x^{-1/\gamma}$ , pelo que os momentos de ordem maior ou igual a  $1/\gamma$  não existem. Ou seja, a média é infinita para  $\gamma \geq 1$  e a variância é infinita para  $\gamma \geq 0.5$ .

• Se  $\gamma < 0$ , tem-se a distribuição Tipo III – Weibull, dada por:

$$\Psi_{-1/\gamma}(x; \lambda, \delta) = \exp\left(-(-x)^{\frac{1}{\gamma}}\right) \Leftrightarrow \exp\left[-\left(-\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^{1/\gamma}\right], \quad x < \lambda, \lambda \in \mathbb{R}, \gamma = -1/\alpha < 0. \quad [2.30]$$

O max-domínio de atração da Lei Weibull contém funções de distribuição com a cauda direita leve/curta (e.g., f.d.'s Uniforme, Beta, Burr inversa), i.e., com cauda superior limitada em  $\lambda - \delta/\gamma$  e o modelo  $F$  tem limite superior do suporte finito ( $x^F < \infty$ ). Além disso, verifica-se que  $1 - \Psi_{-1/\gamma}(x)(-\gamma^{-1} - x) \sim (-\gamma x)^{-1/\gamma}$ , quando  $x \rightarrow \infty$ .

Observação 2.10: relação entre a distribuição GEV vs 3 tipos extremais,

(i) a distribuição Gumbel, corresponde a  $\gamma=0$  (limite por continuidade,  $\gamma \uparrow 0^-$ ,  $\gamma \downarrow 0^+$ ),  $\Lambda(x) = G_0(x; 0, 1)$ .

(ii) a distribuição Fréchet, corresponde a  $\gamma > 0$ ,  $\Phi_\alpha(x) = G_{1/\alpha}(x; 1, 1/\alpha)$ .

(iii) a distribuição Weibull, corresponde a  $\gamma < 0$ ,  $\Psi_\alpha(x) = G_{-1/\alpha}(x; -1, -1/\alpha)$ .

Das distribuições assintóticas de máximos, Tiago de Oliveira (1990) afirma que a distribuição Gumbel  $\Lambda(x)$  é a distribuição central, o “pivot” da Estatística de Extremos. Para além de ser indefinidamente derivável em todo o domínio de existência, possui todos os momentos, o que não acontece com as distribuições Fréchet  $\Phi_{1/\gamma}(x)$  e Weibull  $\Psi_{-1/\gamma}(x)$ .

Observação 2.11: conforme a Observação 2.1, qualquer resultado para o máximo (estatísticas ordinais superiores) pode ser facilmente reformulado para o mínimo (estatísticas ordinais inferiores). De facto,

$$\min_{1 \leq i \leq n} X_i = -\max_{1 \leq i \leq n} (-X_i), \text{ e consequentemente, quando } n \rightarrow \infty,$$

$$P\left[\frac{m_n - b_n^*}{a_n^*} \leq x\right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} G^*(x) \text{ não-degenerada,}$$

com  $G^*$  do mesmo tipo da distribuição GEV\*, ou seja,

$$G_{\gamma^*}^*(x) = 1 - G_{\gamma^*}(-x) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\left[1 - \gamma^* \left(\frac{x - \lambda^*}{\delta^*}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma^*}}\right\}, & \gamma^* \neq 0 \\ 1 - \exp\left\{-\exp\left[\frac{x - \lambda^*}{\delta^*}\right]\right\}, & \gamma^* = 0 \end{cases},$$

com  $1 - \gamma^*((x - \lambda^*)/\delta^*) > 0$  e  $(\lambda^*, \delta^*) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ .

### 2.3. Domínios de atração para o máximo normalizado e constantes de atração

Nos primeiros anos de desenvolvimento da EVT, von Mises (1936) proporcionou um leque de condições suficientes que asseguram que uma dada f.d.  $F$  pertença a um certo domínio de atração. Posteriormente, Gnedenko (1943) e de Haan (1970) apresentaram as condições necessárias e suficientes, que constituem a base da teoria assintótica.

Se  $F$  está no máx-domínio de atração de  $G$ , denotando-se por  $F \in D_M(G)$ , então os coeficientes de atração  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , com  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , da f.d.  $F$  degenerada para a f.d.  $G$  não-degenerada, podem ser escolhidos de forma precisa. Por sua vez, como vimos, o Teorema da convergência de tipos de Khinchin (Teorema 2.3) garante que qualquer outra escolha de constantes de atração  $\{a'_n\}$  e  $\{b'_n\}$ , com  $a'_n > 0$  e  $b'_n \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , é assintoticamente equivalente à escolha inicial, se e somente se:

$$\frac{a'_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ e } \frac{b'_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Assim, verificando-se,

$$F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} G(x), \quad x \in C_G, \quad [2.31]$$

diz-se que  $F \in D_M(G)$ .

Observação 2.12: dizer que  $F \in D_M(G)$  é equivalente a dizer que para  $G_\gamma(x)$ ,  $0 < G_\gamma(x) < 1$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln F(a_n x + b_n) = \ln G_\gamma(x) = -(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}$ , pelo que,  $F(a_n x + b_n) \rightarrow 1$ , para os valores de  $x$ .

Uma vez que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln F(a_n x + b_n)}{1 - F(a_n x + b_n)} = 1$ , tem-se consequentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - F(a_n x + b_n)) = -\ln G_\gamma(x) = (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}.$$

Começamos por apresentar a função quantil de cauda (ou função quantil recíproca) associada à função de distribuição  $F$  e a respetiva f.d. inversa generalizada.

**Definição 2.3:** seja  $F(\cdot)$  uma função de distribuição qualquer, cuja função quantil de cauda  $U(\cdot)$  da v.a.  $X$  é definida por:

$$U(t) := F^{\leftarrow}(1 - 1/t) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 1 - 1/t\}, \quad t \in [1, \infty[, \quad [2.32]$$

sendo  $F^{\leftarrow}(\cdot)$  a função de distribuição inversa generalizada, definida por:

$$F^{\leftarrow}(u) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad [2.33]$$

em que,

- $U(t)$  é monótona e não-decrescente.
- $U(1) = F^{\leftarrow}(0) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 0\} = x_F$ , [2.34]

é o limite inferior do suporte de  $F$ .

- $U(\infty) = F^{\leftarrow}(1) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 1\} = \sup \{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\} = x^F$ , [2.35]

é o limite superior do suporte de  $F$ .

- $F\{U(t)\} = 1 - 1/t$ , significa que o nível  $U(t)$  será excedido em média, pelo menos uma vez a cada  $t$  momentos, situações ou condições (e.g., dias, meses, anos, recordes individuais, etc).

**Teorema 2.5 (condições suficientes de von Mises: de Haan & Ferreira, 2006):** seja  $F$  uma função de distribuição absolutamente contínua com função densidade  $f$  e  $x^F$  o seu limite superior do suporte. Existindo  $F'(x) = f$  e  $F''(x)$ , então:

- (i)  $F \in D_M(\Lambda)$  se  $F''$  for negativa no intervalo  $]c, x^F[$ , com  $c < x^F$  e,

$$\lim_{t \rightarrow x^F} f(t) \frac{F''(t)(1 - F(t))}{(F'(t))^2} = -1$$

**Corolário 2.1 (constantes de atração):** nestas condições, as constantes normalizadoras são:

$$a_n := U(n) \text{ e } b_n := 1/(nf(a_n))$$

- (ii)  $F \in D_M(\Phi_\alpha)$  se  $x^F = \infty$ ,  $F' = f$ ,  $f(t) > 0$  para valores elevados de  $t$  e se existir uma constante  $\alpha > 0$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{tf(t)}{1 - F(t)} = \alpha.$$

- (iii)  $F \in D_M(\Psi_\alpha)$  se  $x^F < \infty$ ,  $F' = f$  e se existir uma constante  $\alpha > 0$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow x^F} \frac{(x^F - t)f(t)}{1 - F(t)} = \alpha.$$

Observação 2.13: considerando apenas o domínio de atração de Gumbel, supondo que existe a primeira derivada, mas na impossibilidade de garantir a segunda derivada de  $F$ , de Haan (1970) apresenta no Teorema 2.6 uma condição suficiente.

**Teorema 2.6 (de Haan, 1970):** seja  $F$  absolutamente contínua no intervalo  $]c, x^F[$ , com  $c < x^F$  e com densidade positiva  $f$ . Diz-se que  $F \in D(\Lambda)$  se  $f(t) \int_{-\infty}^{x^F} (1 - F(t)) dt < \infty$  e

$$\lim_{t \rightarrow x^F} \frac{f(t) \int_t^{x^F} (1 - F(t)) dt}{(1 - F(t))^2} = 1.$$

Observação 2.14: caso  $F$  tenha segunda derivada no intervalo  $]c, x^F[$ , com  $c < x^F$ , então as condições (i), (ii) e (iii) do Teorema 2.5, podem ser substituídas por:

$$\lim_{t \rightarrow x^F} \left( \frac{1-F(t)}{f(t)} \right)' = \begin{cases} 0 & , F \in D(\Lambda) \\ \frac{1}{\alpha} & , F \in D(\Phi_\alpha) \\ -\frac{1}{\alpha} & , F \in D(\Psi_\alpha) \end{cases} \quad [2.36]$$

Observação 2.15: ainda que o Teorema 2.5 seja uma versão geral das condições de von Mises, é possível aplicar as mesmas condições a cada uma das distribuições da família GEV, em [2.16], [2.17] ou [2.18].

Conforme referido, as condições de von Mises são apenas suficientes e não necessárias. No Teorema 2.7 (Gnedenko, 1943; de Haan, 1970) apresentam-se as condições necessárias e suficientes para que  $F \in D_M(G)$ . Neste Teorema, a condição (i) deve-se a de Haan (1970) e as condições (ii) e (iii) são devidas a Gnedenko (1943).

**Teorema 2.7 (condições necessárias e suficientes: Gnedenko, 1943; de Haan, 1970):** seja f.d.  $F \in D_M(G)$ , sse:

(i)  $F \in D_M(\Lambda)$  sse  $E(X-t | X > t)$  é finito para algum  $t < x^F$ , tal que  $\int_t^{x^F} (1-F(s))ds < \infty$ , e

$$\lim_{t \rightarrow x^F} \frac{1-F(t+xg(t))}{1-F(t)} = \lim_{t \rightarrow x^F} \frac{\bar{F}(t+xg(t))}{\bar{F}(t)} = -\ln(\Lambda(x)) = \exp(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad [2.37]$$

onde a função  $g(t)$  terá que ser monótona, positiva e mensurável. Uma escolha possível é a função de excesso médio, dada por:

$$g(t) = E(X-t | X > t) := \frac{\int_t^{x^F} (1-F(s))ds}{1-F(t)}, \quad \forall t < x^F \quad [2.38]$$

(ii)  $F \in D_M(\Phi_\alpha)$  sse  $x^F = \infty$  e se existir uma constante  $\alpha > 0$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(t)} = -\ln(\Phi_\alpha(x)) = x^{-\alpha}, \quad \forall x > 0 \quad [2.39]$$

isto é  $\bar{F} = 1-F$  é uma função de variação regular (em  $\infty$ ), com expoente  $-\alpha$ .

(iii)  $F \in D_M(\Psi_\alpha)$  sse  $x^F < \infty$  e se existir uma constante  $\alpha > 0$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1-F(x^F-tx)}{1-F(x^F-t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\bar{F}(x^F-tx)}{\bar{F}(x^F-t)} = -\ln(\Psi_\alpha(-x)) = x^\alpha, \quad \forall x > 0 \quad [2.40]$$

As condições apresentadas no Teorema 2.7 não são fáceis de verificar. Por sua vez, as condições suficientes propostas por von Mises (1936) são aplicáveis apenas a modelos com f.d.  $F$  absolutamente contínuos.

**Teorema 2.8 (de Haan & Ferreira, 2006):** a f.d.  $F \in D_M(G_\gamma)$ , então

(i) para  $\gamma=0$  ( $x^F < \infty$  ou  $x^F = \infty$ ):  $\int_x^{x^F} \int_t^{x^F} (1-F(s)) ds dt < \infty$  e a função  $h$ , definida por:

$$h(x) := \frac{(1-F(x)) \int_x^{x^F} \int_t^{x^F} (1-F(s)) ds dt}{\left( \int_x^{x^F} (1-F(s)) ds \right)^2}, \quad [2.41]$$

satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow x^F} h(t) = 1. \quad [2.42]$$

**Corolário 2.2:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = \exp(-\exp(-x)), \quad x \in \mathbb{R}$

com  $a_n := g(U(n))$  e  $b_n := U(n)$ , e  $g$  dada em [2.38].

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = \exp(-\exp(-x)), \quad x \in \mathbb{R}$$

(ii) para  $\gamma > 0$  ( $F(x) < 1, x \in \mathbb{R}$ ):  $\int_1^\infty (1-F(x))/x dx < \infty$ , e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_t^\infty (1-F(x)) \frac{dx}{x}}{1-F(t)} = \gamma. \quad [2.43]$$

**Corolário 2.3:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x) = \exp(-x^{-1/\gamma}), \quad x > 0$

com  $a_n := U(n)$

(iii) para  $\gamma < 0$  ( $x^F < \infty$ ):  $\int_{x^F-t}^{x^F} (1-F(x))/(x^F-x) dx < \infty$ , e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{x^F-t}^{x^F} (1-F(x)) \frac{dx}{x^F-x}}{1-F(x^F-t)} = -\gamma. \quad [2.44]$$

**Corolário 2.4:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + x^F) = \exp(-(-x)^{-1/\gamma}), \quad x < 0$ ,

com  $a_n := x^F - U(n)$

Observação 2.16: o limite [2.42] é equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow x^F} \frac{E((X-t)^2 | X > t)}{2E^2(X-t | X > t)} = \lim_{t \rightarrow x^F} h(t) = 1. \quad [2.45]$$

Observação 2.17: o limite [2.43] é equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(\ln X - \ln t \mid X > t) = \gamma. \quad [2.46]$$

Uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_1^{\infty} (1 - F(x)) \frac{dx}{x}}{1 - F(t)} = E(\ln X - \ln t \mid X > t), \quad [2.47]$$

dado que

$$\int_t^{\infty} (\ln x - \ln t) dF(x) = \int_1^{\infty} (1 - F(x)) \frac{dx}{x} \int_t^{\infty} \ln x - \ln t dF(x) = \int_t^{\infty} 1 - F(x) \frac{dx}{x} \quad [2.48]$$

Observação 2.18: o limite [2.44] pode ser interpretado como

$$\lim_{t \rightarrow 0} E(\ln(x^F - X) - \ln t \mid X > x^F - t) = \gamma. \quad [2.49]$$

Observação 2.19: a relação [2.43] está na base da construção do estimador de Hill para a estimação de  $\gamma$  (Hill, 1975); a relação [2.45] na construção do estimador dos momentos (Dekkers et al., 1989); a relação [2.49] no estimador de Hill negativo (Falk, 1995).

### 2.3.1. Seleção das constantes de atração

Conforme vimos, a existência de constantes de atração reais,  $a_n > 0$  e  $b_n$ ,  $n=1,2,\dots$  da f.d.  $F$  para a f.d.  $G$ , são atribuídas a Gnedenko (1943).

**Corolário 2.5 (constantes de atração):** com  $U(n) = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$ , uma escolha possível das constantes de atração pode ser (Gnedenko, 1943; Leadbetter et al., 1983; de Haan, 1984; Caeiro, 2006):

$$\text{se } F \in D_M(\Lambda) \quad : \quad a_n = E(X - b_n \mid X > b_n) \text{ ou } a_n = g(U(n)) \quad \text{e } b_n = U(n) \quad [2.50]$$

$$\text{se } F \in D_M(\Phi_\alpha) \quad : \quad a_n = U(n) \quad \text{e } b_n = 0 \quad [2.51]$$

$$\text{se } F \in D_M(\Psi_\alpha) \quad : \quad a_n = x^F - U(n) \quad \text{e } b_n = x^F \quad [2.52]$$

Observação 2.20: caso se verifique [2.36] e  $F \in D_M(\Lambda)$ , também podemos escolher,

$$a_n = \frac{1}{n g(b_n)} \text{ e } b_n = U(n), \quad [2.53]$$

com a função  $g$  dada em [2.38].

Observação 2.21: no trabalho de Resnick (2013), o autor apresenta outras formas de escolha das constantes de atração para as distribuições em [2.16], [2.17] e [2.18].



### 3. DADOS

Neste estudo usamos os dados das seguintes especialidades do atletismo com prática *outdoor*, envolvendo amostras de homens e de mulheres:

- Lançamento do dardo, lançamento do disco, lançamento do martelo e lançamento do peso.
- Salto em altura, salto em comprimento, salto com vara e triplo-salto.

Os dados utilizados foram obtidos em 5 locais:

- <sup>13</sup>URL: <http://www.all-athletics.com/en-us/all-time-lists>
- <sup>14</sup>URL: <http://www.wikipedia.com/>
- <sup>15</sup>URL: <https://www.iaaf.org/home>
- <sup>16</sup>URL: <http://trackfield.brinkster.net/Years.asp?Year=2016&Gender=W&TF=T&P=F>
- <sup>17</sup>Manual IAAF – International Association of Athletics Federations (2015)

Apenas foram consideradas as marcas reconhecidas pela IAAF (*International Association of Athletic Federations*), não considerando os resultados obtidos de forma anómala, como por exemplo, uso de doping e/ou substâncias ilícitas, vento favorável (superior a 2m/s), marca duvidosa, cronometragem manual, marca anulada pelas Federações, uso de equipamento não-homologado, desnível do terreno, tábua de chamada irregular (no caso dos saltos), técnica irregular, competição em praça de cidade.

Em relação ao doping, ainda que a legislação passasse a ser mais rigorosa a partir de 1 de janeiro de 1991, nada garante, por um lado, que as performances anteriores a esta data foram obtidas com a ajuda de substâncias ilícitas ou que todas as marcas obtidas depois desta data foram conseguidas licitamente. Por outro lado, não obstante oito marcas anteriores a 1991 serem atualmente recordes do mundo (Tabela 3.1 e Anexo 1) (homens: lançamento do disco, lançamento do martelo e lançamento do peso; mulheres: lançamento do disco e lançamento do peso, e salto em altura, salto em comprimento e triplo-salto), as mesmas foram homologadas e são atualmente reconhecidas pela IAAF. Assim, decidimos aceitar na nossa base de dados final todas as marcas que constam na listagem das melhores marcas de sempre, salvaguardando apenas as situações não reconhecidas pela IAAF e/ou as situações anómalas anteriormente mencionadas.

---

<sup>13</sup> No dia 3 de novembro de 2017, a IAAF anunciou a parceria exclusiva feita com a Elite Ltd (All Athletics) com o intuito de criar os primeiros rankings mundiais oficiais da IAAF como mecanismo de qualificação das várias especialidades do atletismo. A partir desta data, este *Website* deixou de estar ativo. Porém, ao tentar aceder é-se convidado a entrar no *Website* da IAAF que não tem o detalhe, a extensão temporal e o número de registos que o *Website* [all-athletics.com/en-us/all-time-lists](http://www.all-athletics.com/en-us/all-time-lists) apresentava.

<sup>14</sup> Para obter informações mais completas, deverá pesquisar-se por especialidade do atletismo. Para mais detalhes, consultar a secção da *Webgrafia*.

<sup>15</sup> Entrar na área “Stats Zone” e seguidamente em “Toplists” e “All time Top lists”. A partir de outubro de 2019, passou para <https://www.worldathletics.org/>.

<sup>16</sup> Neste *Website* pode-se obter as 10 melhores marcas por ano em cada especialidade atlética.

<sup>17</sup> Usado, sobretudo, para confirmar alguns resultados, bem como para obter dados históricos, anteriores aos registos oficiais.



Independentemente do método da teoria de valores extremos, foram usados (sempre que disponíveis) os dados de 01-01-1980 a 31-12-2017 (sem *missings*), que passaremos a denotar por 1980-2017. Na base desta escolha residiu o facto de em algumas especialidades atléticas o atual recorde do mundo ter sido obtido na década de 80. Contudo, algumas exceções são:

(1) início oficial IAAF:

- Lançamento do dardo<sup>18</sup>: início em 01-04-1986 para os homens e em 01-04-1999 para as mulheres.
- Lançamento do martelo: início em 1992 para as mulheres.
- Salto com vara: início em 1996 para as mulheres.
- Triplo-salto: início em 1991 para as mulheres.

(2) na especialidade do lançamento do peso feminino, os anos iniciais (1980,...,1985) perturbam significativamente a estacionariedade da série de dados, pelo que optamos por iniciar em 1986.

A Tabela 3.1 apresenta a lista com os atuais recordes do mundo (*outdoor*), ano e atleta.

Tabela 3.1 – Lista com os atuais recordes do mundo (*outdoor*).

Prova	HOMENS			MULHERES		
	Ano	Marca	Atleta	Ano	Marca	Atleta
Lançamento do Dardo	1996	98.48	Jan Zelezný (CZE)	2008	72.28	Barbora Špotáková (CZE)
Lançamento do Disco	1986	74.08	Jürgen Schult (RDA)	1988	76.80	Gabriele Reinsch (RDA)
Lançamento do Martelo	1986	86.74	Yuriy Sedykh (URSS)	2016	82.98	Anita Włodarczyk (POL)
Lançamento do Peso	1990	23.12	Randy Barnes (EUA)	1987	22.63	Natalya Lisovskaya (FRA)*
Salto em Altura	1993	2.45	Javier Sotomayor (CUB)	1987	2.09	Stefka Kostadinova (BUL)
Salto em Comprimento	1991	8.95	Mike Powell (EUA)	1988	7.52	Galina Chistyakova (URSS)
Salto com Vara	1994	6.14	Sergey Bubka (UCR)	2009	5.06	Elena Isinbaeva (RUS)
Triplo-Salto	1995	18.29	Jonathan Edwards (GBR)	1995	15.50	Inessa Kravets (UCR)

\* na data de obtenção do recorde do mundo tinha nacionalidade Soviética.

Usamos três metodologias distintas de modelação, cuja apresentação fica reservada para os respetivos capítulos:

- No método das  $r$ -maiores observações ( $r$ -MO), recolhemos as 10 maiores observações por ano. Em cada bloco, as 10 máximas observações foram ordenadas crescentemente, não considerando o momento temporal de ocorrência, mas apenas a sua magnitude. Em cada ano (i.e., bloco) o mesmo atleta está presente apenas uma vez, assumindo-se assim a independência das observações. Este método irá ser aplicado às provas de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso masculino, bem como às provas de lançamentos do dardo e peso feminino.

<sup>18</sup> Em 01-04-1986 para os homens e em 01-04-1999 para as mulheres, devido aos longos lançamentos (acima dos 100m no caso dos homens) que colocavam em risco a segurança de todos (atletas, juízes, *staff* e espectadores), a IAAF desviou 4cm para a frente o centro de gravidade dos dardos fazendo com que a distância de voo fosse reduzida em cerca de 10%. Isto levou ao reiniciar dos recordes.

- No método *peaks over threshold* (POT), recolhemos todas as máximas observações individuais, onde cada atleta “colaborou” apenas com um registo, a sua melhor performance. Esta situação foi facilmente resolvida, uma vez que quer o antigo *Website* do all-athletics.com (<http://www.all-athletics.com/en-us/all-time-lists>) quer o atual *Website* da IAAF (<https://www.iaaf.org/home>) proporcionam a seleção por “one result per athlete” ou “best by athlete”, respetivamente. Isto fez com que automaticamente fossem removidas as entradas duplas do mesmo atleta, garantindo-se assim a suposição clássica da teoria de valores extremos, onde a amostra é formada por  $n$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Este método irá ser aplicado às provas de saltos em altura, comprimento, vara e triplo-salto, masculino e feminino.

- A metodologia de extremos não-estacionária, usando o método dos máximos de blocos anuais (que nas  $r$ -MO corresponde a  $r=1$ ), é utilizada quando numa amostra não foi possível garantir os pressupostos da aleatoriedade e/ou tendência da sequência de dados, ou apenas seria possível depois de uma forte redução do tamanho da amostra. Esta metodologia irá ser aplicada às provas de lançamentos do disco e martelo feminino.

Todos os eventos de saltos e lançamentos estão medidos em metros e centímetros, pelo que quanto mais alto saltar ou mais longe lançar, melhor será a performance. Em certos casos, sobretudo nas performances intermédias e mais baixas, ocorreu uma grande concentração de marcas com o mesmo registo. Assim, para não causar problemas na estimação, estas marcas foram “suavizadas” antes de operar a análise das mesmas. Uma metodologia semelhante à proporcionada por Einmahl & Magnus (2008), no âmbito da corrida de velocidade, foi aplicada neste estudo, a qual consiste em criar um critério de desempate, sem afetar as marcas pessoais. Ou seja, assumindo que existem  $m$  atletas com a mesma melhor marca pessoal, por exemplo no salto em comprimento,  $d=8.26$  metros, então os  $m$  pontos serão “suavizados” no intervalo (8.255; 8.265) da seguinte forma:

$$d_j = 8.26 - 0.005 + 0.01 \times \frac{2j-1}{2m}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Observação 3.1: adotamos a seguinte rotina no R para desempatar observações:

```
suavizar <- function(x) {
  x0 <- unique(x)
  for (i in 1:length(x0)) {
    idx <- which(x==x0[i])
    m <- length(idx)
    if (m>1) x[idx] <- x[idx]-0.005+0.01*(2*(m:1)-1)/(2*m)
  }
  return(x)
}
```

Observação 3.2: a verificação da aleatoriedade e da estacionariedade (Anexos 2 e 3) foi efetuada antes do processo de “suavização” com os dados dispostos em função do momento (data) em que surgiram.

Observação 3.3: o procedimento de “suavização” foi adotado apenas nas provas de saltos, portanto na metodologia POT, dado terem sido utilizados os máximos individuais, onde cada atleta (com a sua melhor performance) representa um bloco, logo existe a possibilidade de um grande número de observações ter o mesmo registo, comprometendo a suposição clássica da EVT onde a amostra deverá ser formada por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

A Tabela 3.2 apresenta o tamanho de cada amostra usada neste estudo, segundo o método utilizado.

Tabela 3.2 – Tamanho das amostras: máximos anuais e máximos individuais obtidos ao ar livre.

Provas	Ano de início		Máximos anuais (●)		Máximos individuais (●●)	
	Homens	Mulheres	Homens	Mulheres	Homens	Mulheres
			<i>m</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>n</i>
Lançamento do dardo	1986	1999	32	19	---	---
Lançamento do disco	1980	1980 *	38	38	---	---
Lançamento do martelo	1980	1992 *	38	26	---	---
Lançamento do peso	1980	1986 **	38	32	---	---
Salto em altura	1980	1980	---	---	734	193
Salto em comprimento	1980	1980	---	---	762	272
Salto com vara	1980	1996	---	---	783	584
Triplo-salto	1980	1991	---	---	478	287

\* foi usado o método dos máximos de blocos anuais segundo um procedimento de não-estacionariedade.

\*\* data de início da aplicação da metodologia das *r*-maiores observações anuais.

(●) empregue nas *r*-MO e nos máximos de blocos em situação de não-estacionariedade.

(●●) empregue na metodologia POT.

Observação 3.4: conforme referido no início desta secção, em todas as provas e ambos os sexos, o início da recolha de dados ocorreu no dia 1 de janeiro do ano correspondente a cada amostra apresentada na Tabela 3.2, e o fim da recolha de dados foi para todas as amostras no dia 31-12-2017.

Observação 3.5: a amostra de lançamento do peso feminino inicia a recolha de dados em 1986 dada a significativa influência do tempo caso fossem considerados os anos anteriores. Nas amostras de lançamentos do disco e martelo feminino não foi possível remover o efeito do tempo, pelo que serão tratadas segundo um procedimento de não-estacionariedade.

Observação 3.6: apenas foram consideradas as marcas obtidas ao ar livre (*outdoor*).

Em Anexo 1, para uma melhor compreensão, consta uma breve caracterização das especialidades/modalidades do atletismo usadas neste estudo, bem como alguns dos seus mais importantes resultados.

## 4. MÉTODO DAS $r$ -MAIORES OBSERVAÇÕES, *para os lançamentos do atletismo*

### 4.1. Introdução

Na teoria de valores extremos, o método das  $r$ -maiores observações de blocos ( $r$ -MO) (também designado de modelo GEV-multivariado ou modelo GEV-processo extremal) é uma extensão do método dos máximos de blocos quando se tem duas ou mais estatísticas ordinais em cada um dos blocos independentes (Smith, 1986; Tawn, 1988a,c). Basicamente, em vez de se usar apenas uma observação por bloco (i.e.,  $r=1$ ) usam-se  $r>1$  observações por bloco. Contudo, Smith (1986), Tawn (1988a,c), Coles (2001) e Beirlant et al. (2004) consideram um desperdício usar apenas os máximos de blocos quando outros eventos extremos estão disponíveis. Apesar desta vantagem, na prática não é fácil a escolha do valor de  $r$ . As dificuldades são análogas à escolha do limiar no método excessos acima de um limiar ou, inversamente, à escolha do tamanho dos blocos no método dos máximos de blocos. Ou seja, um  $r$  muito pequeno é suscetível de originar aumento da variância dos estimadores dos parâmetros, mas se  $r$  é muito grande pode ocorrer viés (ainda que a variância diminua como consequência do aumento do número de observações usadas), aumentando a probabilidade de violar o suporte assintótico do modelo (Coles, 2001). Esta abordagem baseia-se na distribuição assintótica conjunta das  $r$ -maiores estatísticas ordinais em cada bloco, com  $r>1$ , na distribuição generalizada de valores extremos e no método de estimação de parâmetros por máxima verosimilhança (ML, do inglês, *maximum likelihood*). Weissman (1978) foi quem primeiro realizou inferência com o modelo das  $r$ -MO. Posteriormente, Smith (1986) desenvolveu a metodologia tal como hoje a conhecemos. A distribuição das  $r$ -MO, que habitualmente se denota por  $GEV_r$ , tem os mesmos parâmetros da distribuição GEV. O caso particular  $r=1$  corresponde exatamente à distribuição GEV. Vários investigadores têm-se debruçado sobre qual o melhor nível  $r$ . Tawn (1988b) concluiu que os resultados para  $3 \leq r \leq 7$  são bastante estáveis e consistentes; Dixon & Tawn (1994) obtiveram estimativas robustas com  $r=8$  máximos/bloco; no estudo de An & Pandey (2007), envolvendo 30 estações meteorológicas, o valor  $r=5$  foi fixado para todas as estações; Smith (2009) recomenda  $r=3$  ou  $r=5$  máximos/bloco, ainda que deixe em aberto a possibilidade de testar modelos  $r > 5$ ; Caeiro et al. (2018) num estudo com atletas de triplo-salto do atletismo selecionaram  $r=4$  como a melhor opção. Na prática, devido à possibilidade de aumento do viés, é aconselhável que o valor de  $r$  não seja demasiado grande (Smith, 1986; Coles, 2001, Caeiro et al., 2018).

### 4.2. Suporte teórico

#### 4.2.1. Modelo das $r$ -maiores observações

Para além do Teorema dos Tipos Extremais definido no Teorema 2.4 e da distribuição GEV apresentada em [2.24], outro importante resultado no campo da EVT é a distribuição de valores extremos multivariados, relacionada com a distribuição limite das  $r$ -maiores estatísticas ordinais,  $X_{n-k+1:n}, 1 \leq k < r$ , também chamado de processo extremal (Lamperti, 1964; Dwass, 1964). O resultado obtido em [2.15] (adequado quando  $r=1$ ) é a base da distribuição conjunta assintótica das  $r$ -MO da amostra de tamanho  $n$ , com  $r$  fixo, quando  $n \rightarrow \infty$ . Por isso, deve assegurar-se a realização de [2.15]. Uma vez definida a sua distribuição conjunta, a mesma pode ser utilizada para determinar os estimadores

de máxima verosimilhança dos parâmetros  $(\lambda, \delta, \gamma)$  e as quantidades de interesse relacionadas. Esta distribuição é a base para a utilização do método da máxima verosimilhança. Segundo Smith (1985, 1990), a grande vantagem deste método é que pode ser generalizado com modificações muito pequenas da metodologia básica para modelos mais complexos onde a tendência ou outros efeitos podem estar presentes (Smith, 1985, 1990).

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a.'s i.i.d.'s dispostas em  $m$ -blocos, cada um com dimensão  $q$ . Em cada bloco extraem-se as  $r$ -maiores observações,  $\{X_j^{(k)}\}_{j=1, \dots, m}^{k=1, \dots, r}$ , de tal forma que  $r < q$ , obtendo-se assim um conjunto de  $m$  vetores aleatórios i.i.d.'s  $r$ -dimensionais, tal que  $n = m \times r$ . A estrutura geral é dada por:

Blocos   Níveis	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	...	$X^{(r)}$
$X_1$	$x_1^{(1)}$	$x_1^{(2)}$	...	$x_1^{(r)}$
$X_2$	$x_2^{(1)}$	$x_2^{(2)}$	...	$x_2^{(r)}$
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
$X_m$	$x_m^{(1)}$	$x_m^{(2)}$	...	$x_m^{(r)}$

Portanto, em cada um dos  $m$ -blocos, as observações  $x_j^{(1)}$  na coluna  $X^{(1)}$ , correspondem ao valor máximo de cada bloco, e as observações  $x_j^{(k)}$  na coluna  $X^{(k)}$ , correspondem ao  $k$ -ésimo maior valor do bloco  $j$ , de tal forma que  $X_j^{(k)} : x_j^{(1)} \geq x_j^{(2)} \geq \dots \geq x_j^{(r-1)} \geq x_j^{(r)}$ , para  $j = 1, 2, \dots, m$  e  $k = 1, 2, \dots, r$ .

Observação 4.1: tomando como exemplo  $r=10$  (ou  $r_{10}$ ), significa que 10 eventos extremos são considerados por bloco.

A Figura 4.1 representa gráfica do modelo das  $r$ -maiores observações.

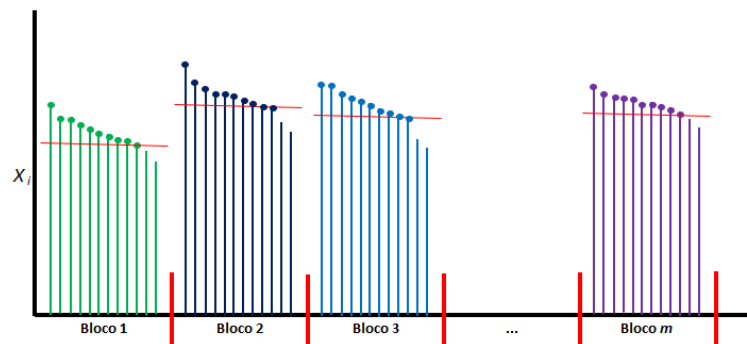


Figura 4.1 – Representação gráfica do modelo das  $r$ -maiores observações ordenadas em cada bloco.

Os resultados do Teorema seguinte generalizam o Teorema 2.4 dos Tipos Extremais de Fisher-Tippet-Gnedenko, apresentado no Capítulo 2.

**Teorema 4.1:** supondo que  $\{X_n\} = X_1, X_2, \dots, X_n$  é uma sequência estocástica de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com a mesma função de distribuição acumulada. Seja  $M_n^{(k)} = k$ -ésimo maior valor de  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ . O comportamento limite desta variável pode ser identificado da seguinte forma (Coles, 2001):

Na presença de constantes normalizadoras  $\{a_n > 0\}$  e  $\{b_n\}$ , tais que:

$$P[(M_n - b_n) / a_n \leq x] \rightarrow G(x), \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

e  $G$  é a f.d. GEV, então para  $k$  fixo no bloco  $j$ :

$$P\left(\frac{M_{n,j}^{(k)} - b_n}{a_n} \leq x\right) \rightarrow G_j^{(k)}(x),$$

em  $\left(x: 1 + \gamma \frac{x - \lambda}{\delta} > 0\right)$ , onde

$$G_j^{(k)}(x) = \exp[-\tau(x)] \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\tau(x)^i}{i!}, \quad [4.1]$$

$$\text{com } \tau(x) = \left[1 + \gamma \left(\frac{x - \lambda}{\delta}\right)\right]^{-1/\gamma}.$$

Este Teorema implica que a  $k$ -ésima maior estatística ordinal num bloco é normalizada da mesma forma que o máximo, e a sua distribuição limite é da forma dada em [4.1]. Os parâmetros utilizados são os mesmos da distribuição GEV. Porém, são evidentes as dificuldades em usar [4.1] como modelo, sendo que a situação mais frequente é ter cada uma das maiores estatísticas de ordem dentro de cada um dos vários blocos, para algum valor de  $r$ . Assim, uma forma de resolver esta situação é considerar o vetor completo das  $r$ -maiores estatísticas ordinais dentro de cada um dos blocos, para algum valor de  $r$ , cujo vetor completo é expresso por:

$$\mathbf{M}_n^{(r)} := (M_n^{(1)}, \dots, M_n^{(r)}).$$

Agora, considerando a função densidade conjunta da distribuição limite, tem-se o seguinte Teorema:

**Teorema 4.2:** sejam  $a_n > 0$  e  $b_n \in \mathbb{R}$  uma sucessão de constantes reais, de modo a verificar-se [2.15], para  $r$  fixo, quando  $n \rightarrow \infty$ , então a distribuição limite conjunta não-degenerada para as  $r$ -maiores estatísticas ordinais,  $\mathbf{M}_n^{(r)} = M_n^{(1)} \geq M_n^{(2)} \geq \dots \geq M_n^{(r)}$ , com  $x_j^{(1)} \geq x_j^{(2)} \geq \dots \geq x_j^{(r)}$ ,

$$\tilde{\mathbf{M}}_n^{(r)} := \left(\frac{M_n^{(1)} - b_n}{a_n}, \frac{M_n^{(2)} - b_n}{a_n}, \dots, \frac{M_n^{(r)} - b_n}{a_n}\right),$$

em que  $M_{n;j}^{(k)}$  é a  $k$ -ésima maior e.o. independente no bloco  $j$ , e  $M_{n;j}^{(1)} \geq M_{n;j}^{(2)} \geq \dots \geq M_{n;j}^{(r-1)} \geq M_{n;j}^{(r)}$ , é um modelo GEV-multivariado ou GEV-processo extremal (Lamperti, 1964; Dwass, 1964) com função densidade de probabilidade (f.d.p.) conjunta dada em [4.2] ou [4.3], conforme  $\gamma \neq 0$  ou  $\gamma = 0$ , respetivamente. Uma consequência desta suposição é que  $M_{n;j}^{(1)}$  segue a distribuição GEV( $\lambda, \delta, \gamma$ ) que é consistente com a abordagem dos máximos de blocos anuais. A justificação para o uso da densidade conjunta como uma aproximação da verdadeira densidade conjunta de  $(M_{n;j}^{(1)}, M_{n;j}^{(2)}, \dots, M_{n;j}^{(r)})$  é que corresponde à classe de possíveis distribuições limite das  $r$ -maiores estatísticas ordinais linearmente normalizadas de séries estacionárias com eventos extremos independentes (Leadbetter et al., 1983). Então, na presença de estacionariedade da série de dados, a função densidade de probabilidade conjunta de  $(M_{n;j}^{(1)}, M_{n;j}^{(2)}, \dots, M_{n;j}^{(r)})$  quando  $\gamma \neq 0$ , é dada por:

$$g(x^{(1)}, \dots, x^{(r)} | \lambda, \delta, \gamma) := \left\{ \prod_{k=1}^r \frac{g(x_j^{(k)})}{G(x_j^{(k)})} \right\} G(x_j^{(r)}) \quad [4.2]$$

$$= \exp \left\{ - \left[ 1 + \gamma \left( \frac{x^{(r)} - \lambda}{\delta} \right) \right]^{-1/\gamma} \right\} \times \prod_{k=1}^r \frac{1}{\delta} \left[ 1 + \gamma \left( \frac{x^{(k)} - \lambda}{\delta} \right) \right]_+^{-1-1/\gamma}$$

é válida para  $x^{(1)} \geq x^{(2)} \geq \dots \geq x^{(r-1)} \geq x^{(r)}$ , tal que  $1 + \gamma(x^{(k)} - \lambda) / \delta > 0$  para  $k=1, \dots, r$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}^*$  e  $\delta > 0$ , onde

$$g_\gamma(x) = \frac{\partial G_\gamma(x)}{dx}$$

é a f.d.p. associada com a distribuição de valores extremos com f.d.  $G_\gamma$  (Weissman, 1978; Smith, 1986; Tawn, 1988a,c).

O caso  $\gamma=0$  é interpretado como a forma limite quando  $\gamma \rightarrow 0$ . A função densidade de probabilidade conjunta, na presença de estacionariedade da série de dados, é definida como:

$$g(x^{(1)}, \dots, x^{(r)} | \lambda, \delta) := \exp \left[ - \exp \left( - \frac{x^{(r)} - \lambda}{\delta} \right) \right] \times \prod_{k=1}^r \frac{1}{\delta} \exp \left( - \frac{x^{(k)} - \lambda}{\delta} \right) \quad [4.3]$$

Observação 4.2: a distribuição limite do máximo em [2.27] e a distribuição limite das  $r$ -maiores estatísticas ordinais em [4.2] ou [4.3] partilham os mesmos parâmetros de localização, escala e forma.

Observação 4.3: quando  $r=1$ , a f.d.p. da distribuição GEV $r$  em [4.2] ou [4.3] é exatamente a f.d.p. da distribuição GEV dada em [2.27], conforme  $\gamma \neq 0$  ou  $\gamma=0$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ), respetivamente. Existe por isso uma forte relação entre a distribuição assintótica do máximo amostral,  $M_n^{(1)}$ , e a distribuição assintótica das  $r$ -MO e as  $M_n^{(k)}$  estatísticas ordinais ( $k=1, \dots, r$ ).

Observação 4.4: ainda que a convergência das  $r$ -MO para as formas de distribuição em [4.2] ou [4.3] seja mais lenta do que para o máximo, tem a vantagem de aumentar o número de estatísticas ordinais a serem usadas no processo de modelação (Smith, 1986, citando o trabalho não publicado e não datado de Falk & Weissman).

#### 4.2.2. Estimação dos parâmetros

A estimação dos parâmetros pelo modelo estatístico das  $r$ -MO tem correspondência com a estimação dos parâmetros da distribuição GEV obtidos pelo método dos máximos de blocos. Por esta razão, nestas metodologias, os parâmetros são interpretados da mesma forma. Porém, como nas  $r$ -MO se incorporam mais observações extremas, acredita-se por isso que há uma melhoria da precisão nas estimativas. Portanto, a obtenção dos parâmetros de interesse do modelo  $r$ -MO, assim como a sua interpretação, é a mesma do modelo GEV. A estimação dos parâmetros desconhecidos  $\theta = (\lambda, \delta, \gamma)$  é habitualmente realizada por máxima verosimilhança (Prescott & Walden, 1980),

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta | X).$$

Por sua vez, a função de verosimilhança  $L(\theta | X)$  é obtida a partir de [4.2] ou [4.3]. Para facilitar a manipulação matemática da verosimilhança, utiliza-se frequentemente o maximizante da função do logaritmo da função de verosimilhança,

$$\ell(\theta | X) = \ln[L(\theta | X)]$$

(doravante referido, simplesmente, por função de log-verosimilhança) ou a minimização da função de log-verosimilhança negativa  $\ell^*$  (NLL, do inglês, *negative log-likelihood*)<sup>19</sup>,

$$\ell^*(\theta | X) = -\ln[L(\theta | X)] \Leftrightarrow \ell^*(\theta | X) = -\ell(\theta | X).$$

Observação 4.5: na maior parte dos casos, o estimador de ML do parâmetro  $\theta$  pode ser encontrado seguindo as etapas: (i) encontrar a função de verosimilhança, (ii) aplicar a função logaritmo, (iii) derivar em relação ao parâmetro  $\theta$ , (iv) igualar o resultado a zero, e (v) verificar se o ponto crítico é ponto de máximo, pelo que neste caso o ponto crítico será a estimativa de máxima verosimilhança.

---

<sup>19</sup> Uma vez que o valor numérico da verosimilhança é geralmente (embora não necessariamente) inferior a 1, o logaritmo desse valor é negativo. Desta forma, usando a função de log-verosimilhança negativa, a transformação do sinal é feita para que se obtenha um valor positivo. Com este processo, em vez de se trabalhar com um número positivo muito pequeno, trabalha-se numa escala positiva e facilitadora. A transformação de sinal indica que a função de log-verosimilhança negativa tem comportamento oposto à da função de verosimilhança. Assim, percebe-se que a hipótese com maior verosimilhança terá menor log-verosimilhança negativa. Paralelamente, a transformação logarítmica facilita o tratamento matemático da verosimilhança, uma vez que a NLL da amostra resulta do somatório das NLL's das observações individuais, ou seja,

$$\ell^*(\theta | X) = -\ln[L(\theta | X)] = -\ln\left[\prod_{i=1}^n L(\theta | X = x_i)\right] = \sum_{i=1}^n -\ln[L(\theta | X = x_i)] = \sum_{i=1}^n \ell^*(\theta | X_i).$$



Assim, a função de log-verosimilhança para as  $r$ -MO:

(i) caso  $\gamma \neq 0$ ,

$$\ell(\lambda, \delta, \gamma | x^{(1)}, \dots, x^{(r)}) = \sum_{j=1}^m \left[ - \left\{ 1 + \gamma \left( \frac{x_j^{(r_j)} - \lambda}{\delta} \right) \right\} - \sum_{k=1}^{r_j} \left( \ln \delta + \left( \frac{1}{\gamma} + 1 \right) \times \ln \left\{ 1 + \gamma \left( \frac{x_j^{(k)} - \lambda}{\delta} \right) \right\} \right) \right], \quad [4.4]$$

com a restrição  $1 + \gamma(x^{(k)} - \lambda) / \delta > 0$  para  $k=1, \dots, r_j, j=1, \dots, m$ .

(ii) caso  $\gamma=0$ ,

$$\ell(\lambda, \delta, 0 | x^{(1)}, \dots, x^{(r)}) = \sum_{j=1}^m \left[ - \exp \left( - \frac{x_j^{(r_j)} - \lambda}{\delta} \right) - \sum_{k=1}^{r_j} \left( \ln \delta + \frac{x_j^{(k)} - \lambda}{\delta} \right) \right]. \quad [4.5]$$

A função de log-verosimilhança maximizada em [4.4] ou [4.5], ou opostamente, a função de log-verosimilhança negativa minimizada, não têm solução analítica. Portanto, para se obter as estimativas de máxima verosimilhança dos parâmetros do modelo  $(\lambda, \delta, \gamma)$  é necessário usar técnicas iterativas de otimização numérica, uma vez que o processo de maximizar a função de verosimilhança não tem uma fórmula explícita. Habitualmente, a convergência obtém-se recorrendo aos algoritmos de Nelder-Mead (Nelder & Mead, 1965) ou BFGS – Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (Avriel, 2003; Lewis & Overton, 2013). Ambos os algoritmos estão implementados no R através da função `optim()`, sendo, entre outros, usados nos pacotes *ismev*, *extRemes* e *eva* para estimar os parâmetros da distribuição GEV (Heffernan & Stephenson, 2016; Gilleland & Katz, 2016; Bader & Yan, 2018; Ribatet & Dutang, 2019). Smith (1985) mostrou que as propriedades assintóticas da estimativa por máxima verosimilhança para modelos GEV dependem da estimativa do parâmetro de forma  $\gamma$ . Ou seja:

- quando  $\gamma > -0.5$ , as condições de regularidade dos estimadores de máxima verosimilhança (i.e., consistência, eficiência, invariância e normalidade assintóticas) do modelo subjacente aos dados são realizáveis, pelo que neste caso verifica-se que  $\sqrt{m}((\hat{\lambda}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}) - (\lambda, \delta, \gamma)) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{d} Z \overset{a}{\sim} N(0, I_{(\lambda, \delta, \gamma)}^{-1})$ , em que

$I_{(\lambda, \delta, \gamma)}^{-1}$  é a inversa da matriz de informação de Fisher esperada (que não é diagonal em blocos),

$$I_{(\lambda, \delta, \gamma)}^{-1} = - \left[ E \left( \frac{\partial^2 \ell(\lambda, \delta, \gamma)}{\partial (\lambda, \delta, \gamma)^2} \right) \right]^{-1},$$

onde  $E$ , denota o valor esperado do operador. Portanto, qualquer forma de inferência pode ser feita tendo como base a aproximação à distribuição Normal. De notar que a condição  $\gamma > -0.5$  assegura que a função Gama presente nos elementos genéricos da Matriz de Informação de Fisher tenham argumentos positivos (para detalhes sobre a Matriz de Informação de Fisher, consultar Efron & Hinkley, 1978 e Beirlant et al., 2004, p.169).

- quando  $\gamma < -0.5$ , os estimadores de ML não têm as propriedades assintóticas indicadas.

- quando  $-1 < \gamma < -0.5$  os estimadores de ML são geralmente obtidos, mas com reduzida precisão.
- quando  $\gamma < -1$ , os estimadores de ML são inexistentes. Isto é, a função de log-verossimilhança não possui um máximo local e, como tal, o procedimento não é aplicável. A densidade tem forma de J e a função de log-verossimilhança correspondente tende para o valor 1.
- quando  $\gamma > 0.5$ , o segundo e mais altos momentos não existem.

Por sua vez, Hosking (1984) indica que as condições de regularidade para a estimação por máxima verossimilhança para modelos GEV são satisfeitas quando  $-0.5 < \gamma < 0.5$ , uma vez que na maioria das aplicações a estimativa pontual do parâmetro de forma situa-se neste intervalo. Também Dombry (2015) e Ferreira & de Haan (2015) apontam este intervalo quer para a estimação por máxima verossimilhança quer para a estimação por momentos ponderados de probabilidade. Smith (1985) demonstrou a normalidade assintótica para  $\gamma > -0.5$ , embora mais recentemente, Zhou (2009, 2010) demonstrou a normalidade assintótica e a consistência para  $\gamma > -1$ , tendo sido possível a aplicação da inversa da matriz de informação de Fisher. A situação para  $\gamma < -1$  é bastante rara em qualquer área do conhecimento (Smith, 1985, Embrechts et al., 1997), e inexistente em dados desportivos (Silva, 2013), sendo que quando se lida com dados desportivos, o parâmetro de forma situa-se no intervalo  $-0.5 < \gamma < 0.1$  (Einmhal & Magnus, 2008; Gomes et al., 2009; Henriques-Rodrigues et al., 2011; Silva, 2013; Silva et al., 2017a,b; Silva et al., 2018a,b; Caeiro et al., 2018; Silva et al., 2020). Smith (1985), Martins & Stedinger (2000) e El Adlouni et al. (2007) fazem notar que com amostras pequenas, quando as condições de regularidade são violadas, ou mais simplesmente, quando não se verifica  $\hat{\gamma} > -0.5$ , o método da máxima verossimilhança pode originar elevada variância na estimação de quantis extremos, valores de  $\gamma$  que não são fisicamente plausíveis, ou mesmo o não cálculo dos erros-padrão das estimativas pontuais dos parâmetros extremos. No *package* Renext do R, da autoria de Deville & IRSN (2016, p.19), os erros-padrão das estimativas dos parâmetros extremos não são calculados caso  $\hat{\gamma} < -0.5$ , pois conforme referem os autores as condições de regularidade não podem ser consideradas válidas.

Observação 4.6: os modelos probabilísticos usados nas secções 4.2.1 e 4.2.2 partilham dos mesmos parâmetros de localização, escala e forma  $(\lambda, \delta, \gamma)$ . Portanto, é usual estimar estes parâmetros com maior precisão recorrendo ao método das *r*-MO e posteriormente incorporar as estimativas no modelo GEV dado em [2.24].

#### 4.2.2.1. Erros-padrão e intervalo de confiança

Considerando questões de natureza prática e operacional, Smith (1986) e An & Pandey (2007) sugerem que se observe os erros-padrão (*se*, do inglês *standard error*) das estimativas pontuais dos parâmetros

extremais  $(\lambda, \delta, \gamma)$  nos diferentes níveis  $r$ , indicando que quanto mais reduzidos forem os erros-padrão, melhor será a qualidade do modelo.

Os erros-padrão das estimativas  $\hat{\theta} = (\hat{\lambda}, \hat{\delta}, \hat{\gamma})$  dos parâmetros  $\theta = (\lambda, \delta, \gamma)$ , podem ser calculados usando a matriz de informação de Fisher. Detalhes sobre este procedimento podem ser observados em Smith (1986, p.41), Tawn (1988a, p.247) e Coles (2001, p.32). O intervalo com  $100(1-\alpha)\%$  de confiança ( $IC$ ) para  $\theta$ , é obtido por:

$$IC_{100(1-\alpha)\%}(\theta) = \left( \hat{\theta} \pm \Phi_{1-\alpha/2}^{-1} \times se(\hat{\theta}) \right), \quad [4.6]$$

onde  $\Phi_{1-\alpha/2}^{-1}$  é o quantil  $(1-\alpha/2)$  da distribuição Normal padrão.

#### 4.2.3. Seleção do modelo GEVr

Para que os argumentos assintóticos se verifiquem é necessário cuidado na escolha do nível  $r$ . A escolha de  $r$  deve ser feita de modo prudente, uma vez que temos o habitual *trade-off* entre a variância e o viés (Coles, 2001; Beirlant et al., 2004), ou seja, reduzidos níveis  $r$  geram poucos dados, implicando um aumento da variância, e grandes níveis  $r$  pode originar viés, para além de violar a teoria assintótica e diminuir acentuadamente a taxa de convergência da distribuição limite conjunta (Smith, 1986; Coles, 2001). Em geral,  $r$  necessita de ser pequeno em relação ao tamanho do bloco  $B$  (não os  $m$  blocos) (Smith, 1986). Para tal, usam-se habitualmente técnicas gráficas, baseadas no gráfico de probabilidade, ou mais especificamente probabilidade-probabilidade (*PP-plot*) e no gráfico de quantis, ou quantil-quantil (*QQ-plot*) das  $r$ -MO (para diagnóstico dos  $r^{(k)}$  modelos), sendo que para o máximo se observam também os gráficos dos níveis de retorno e o histograma com a estimativa da curva de densidade. É igualmente razoável escolher o modelo  $r$ -MO com base nos erros-padrão da estimativa pontual dos parâmetros extremais, ou seja, valores reduzidos de erro-padrão indiciam uma melhor qualidade do modelo (Coles, 2001). Contudo, uma vez que à medida que aumenta o número de observações retidas, diminui o valor do erro-padrão, procura-se encontrar os pontos de estabilidade dos erros-padrão, i.e., o nível  $r$  a partir do qual os “saltos” são menos pronunciados. De forma semelhante, também se deve observar a estabilidade das estimativas dos parâmetros extremais.

##### 4.2.3.1. Seleção de modelos por meios gráficos

Os parâmetros  $\theta^{(r)} = (\lambda, \delta, \gamma)^{(r)}$  correspondem exatamente aos parâmetros da distribuição GEV,  $\theta = (\lambda, \delta, \gamma)$ . Por esta razão, é muito similar a seleção de um modelo por técnicas gráficas, habitualmente comparando o ajustamento entre a distribuição empírica e a distribuição teórica. Para verificar o ajustamento, Smith (1986) e Tawn (1988a,c) usam o *PP-plot* para as distribuições marginais da  $r$ -ésima estatística de ordem. Contudo, para além do *PP-plot*, também o *QQ-plot* é sugerido por Coles (2001). Igualmente, pode-se observar o ajustamento do modelo  $r$ -MO pelo gráfico dos níveis de retorno para o máximo e pelo histograma com a estimativa da curva de densidade ajustada aos dados. Para um dado nível  $r$ , a construção destes gráficos é efetuada da mesma forma que no modelo de máximos de blocos.

Para um dado nível  $r$ , seja uma amostra ordenada de observações independentes,  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$  de máximos de blocos  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , a função de distribuição empírica de  $X$ , para  $X=x_j$ , com  $j=1,2,\dots,m$ , é dada por:

$$\tilde{G}(x_j) = \frac{j}{m+1}, \text{ para } x_j \leq x < x_{j+1} \quad ^{20}, \quad [4.7]$$

onde a quantidade  $j/(m+1)$ , as posições de marcação (*plotting positions*), corresponde à função de distribuição empírica avaliada em  $x_j$ .

Substituindo as estimativas dos parâmetros em [2.24], tem-se que o modelo  $GEV_r(\lambda, \delta, \gamma)$  baseado nas correspondentes estimativas é dado por:

$$\hat{G}(x_j) = \left\{ \exp \left\{ - \left[ 1 + \hat{\gamma} \left( \frac{x_j - \hat{\lambda}}{\hat{\delta}} \right) \right]_+^{\frac{1}{\hat{\gamma}}} \right\} \right\}.$$

Se o modelo  $GEV_r$  é adequado,  $\hat{G}(x_j)$  e  $\tilde{G}(x_j)$  possuem o mesmo comportamento, i.e.,

$$\hat{G}(x_j) \approx \tilde{G}(x_j), \text{ para cada } j,$$

pelo que o gráfico de probabilidade-probabilidade (que compara a função de distribuição empírica da  $k$ -ésima estatística ordinal do modelo [4.1] com os parâmetros substituídos pelas respectivas estimativas), com as correspondentes estimativas empíricas, consiste nos pontos dados pelas coordenadas,

$$\left\{ \left( \tilde{G}(x_j), \hat{G}(x_j) \right) : j = 1, \dots, m \right\}, \quad [4.8]$$

que deverão situar-se sobre ou na proximidade da reta diagonal que passa pelos pontos (0;0) e (1;1), denotando neste caso a presença de um bom ajustamento. Desvios substanciais da linearidade evidenciam o fraco ajuste do modelo  $GEV_r$  aos dados. Segundo Coles (2001), uma debilidade do *PP-plot* para modelos extremais ocorre quando  $\hat{G}(x_j)$  e  $\tilde{G}(x_j)$  se aproximam de 1 à medida que  $x_j$  aumenta, ao mesmo tempo que é normalmente a precisão do modelo para grandes valores de  $x$  que suscita grande interesse. Ou seja, o *PP-plot* proporciona a menor informação na área de maior interesse, pelo que é usual que a sua informação seja complementada com o *QQ-plot*.

Com o gráfico dos quantis-quantis comparamos graficamente a adequação dos quantis da distribuição amostral com os quantis da distribuição teórica especificada. Ou seja, traça os quantis empíricos *versus* quantis teóricos, ajustados a cada ponto. Os *PP-plot* e *QQ-plot* contêm a mesma informação embora expressa em diferentes escalas. Contudo, pode ocorrer que numa escala o ajustamento seja adequado e

---

<sup>20</sup> Uma escolha imediata poderia ser feita com base no método Califórnia (California Department of Public Works, 1923), cujos valores são da forma  $\tilde{G}(x_i) = i/m$ . Contudo, é feito um ajustamento  $\tilde{G}(x_i) = i/(m+1)$  (Weibull, 1939b, p.17), de forma a evitar ter  $\tilde{G}(x_m) = 1$ .

noutra escala não. O *QQ-plot* tem construção mais complicada dado que [4.1] não pode ser analiticamente invertido. Por isso, é necessário obter a estimativa do modelo de quantil  $1-p$ , resolvendo com métodos numéricos a equação:  $G^{(k)}(x_p)=1-p$ , com  $k=1, \dots, r$ . Para cada nível  $r$ , o gráfico quantil-quantil, consiste no *locus* de pontos,

$$\left\{ \left( \hat{G}^{\leftarrow} \left( \frac{j}{m+1} \right), x_j \right) : j=1, \dots, m \right\}, \quad [4.9]$$

em que  $\hat{G}^{\leftarrow}$  é a estimativa da função inversa generalizada de  $G(\cdot)$  e onde a quantidade  $\hat{G}^{\leftarrow}(j/(m+1))$  proporciona uma estimativa do quantil de probabilidade  $j/(m+1)$  da distribuição  $GEV_r$ , enquanto que  $x_j$  fornece uma estimativa empírica desse quantil. A partir de [4.9] tem-se,

$$\hat{G}^{\leftarrow} \left( \frac{j}{m+1} \right) = \hat{\lambda} + \frac{\hat{\delta}}{\hat{\gamma}} \left[ \left( -\ln \left( \frac{j}{m+1} \right) \right)^{-\hat{\gamma}} - 1 \right].$$

Se o modelo  $GEV_r$  é adequado, então tal como no *PP-plot*, os pontos no gráfico deverão situar-se sobre ou na proximidade da reta diagonal.

Para cada nível  $r$ , o gráfico dos níveis de retorno no tempo  $t$ ,  $U(t)$ , consiste na geometria de pontos,

$$\left\{ \left[ \ln y_p, \hat{U}(t) \right] : 0 < p < 1 \right\},$$

definindo  $y_p = -\ln(1-p)$ , com  $p=1/t$ , em que  $\hat{U}(t)$  é a estimativa de máxima verosimilhança de  $U(t)$ , dada em [4.15]. Os níveis de retorno a  $t$ -anos compreendem o gráfico:

$$\hat{U}(t) = \hat{\lambda} - \frac{\hat{\delta}}{\hat{\gamma}} \left[ 1 - y_p^{-\hat{\gamma}} \right], \hat{\gamma} \neq 0, \quad [4.10]$$

onde  $\hat{U}(t)$  é traçado contra  $y_p$  numa escala logarítmica, ou equivalentemente, se  $\hat{U}(t)$  é traçado contra  $y_p$ , um de três “desenhos” ocorrerá:

- . o gráfico é linear (ou aproximadamente), no caso de  $\hat{\gamma} = 0$  (ou próximo de zero),
- . o gráfico é convexo com limite assintótico quando  $p \rightarrow 0$  e  $x^F = \hat{\lambda} - \hat{\delta} / \hat{\gamma}$ , no caso de  $\hat{\gamma} < 0$ ,
- . o gráfico é côncavo, com  $x^F = \infty$ , no caso de  $\hat{\gamma} > 0$ .

As estimativas empíricas dos níveis de retorno *versus* período de retorno podem ser melhoradas com a inclusão de banda de confiança. Se o modelo  $GEV_r$  é adequado, a curva desse modelo e as estimativas empíricas deverão estar em razoável concordância, i.e., a curva deverá proporcionar uma representação satisfatória das estimativas empíricas, com todos os pontos a situarem-se dentro da banda com  $100(1-\alpha)\%$  de confiança (Coles, 2001; Beirlant et al., 2004).

No histograma, a curva ajustada da função densidade de probabilidade é sobreposta aos dados, permitindo observar o quão bem os dados da amostra seguem a distribuição teórica especificada, bem como obter informação acerca do peso das caudas, particularmente da cauda superior de interesse neste estudo. Este gráfico é menos informativo que os anteriores, dado poder sofrer variações substanciais com a escolha dos intervalos de classes (de larguras iguais) que representam a extensão dos dados. Ainda que nem sempre fácil e muitas vezes bastante subjetivo, o ajustamento de um dado modelo  $r$ -MO é observado pela consistência da estimativa da curva de densidade face aos dados disponíveis (Coles, 2001; Beirlant et al., 2004).

#### 4.2.3.2. “Estabilidade” dos erros-padrão

Na prática, muitas vezes a recomendação para a escolha de  $r$  é baseada na quantidade de redução dos erros-padrão das estimativas (Smith, 1986; An & Pandey, 2007). Esta quantidade de redução poderá ser observada através do impacto que tem na diminuição percentual do nível  $r_i$  para o nível  $r_{i+1}$ , refletindo-se na estabilidade (i.e., dos “saltos ou nível de variação) proporcionada pela informação gráfica da trajetória definida pelos erros-padrão ao longo dos  $r_k$  níveis, com  $k=1,2,\dots$

Observação 4.7: situação similar poderá ser adotada em relação às estimativas pontuais dos parâmetros extremais. Da mesma forma, a quantificação da precisão pode ser feita pela observação dos intervalos de confiança.

#### 4.2.4. Estimação de outras quantidades de interesse

Para além dos três parâmetros extremais associados à f.d.  $GEV_r$ , existem outras quantidades de interesse que necessitam de ser estimadas. Para o efeito, os quantis extremais, a probabilidade de excedência de um nível elevado, o limite superior do suporte (quando  $\gamma < 0$ ) e os valores de retorno.

Considere-se a função quantil de cauda e a função de distribuição contínua  $F$  com inversa generalizada apresentadas na Definição 2.3.

##### 4.2.4.1. Quantis extremais

**Definição 4.1 (quantil extremal):** o quantil extremal  $x_p$ , para  $p$  pequeno, tal que

$$x_p := F^{\leftarrow}(1-p) \tag{4.11}$$

é denominado de quantil extremal. Também pode ser escrito recorrendo à função quantil de cauda, apresentada em [2.32]. Sendo  $t=1/p$ , tem-se:

$$x_p = U\left(\frac{1}{p}\right) = G_{\gamma}^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{1/p} \mid \lambda, \delta\right) = G_{\gamma}^{\leftarrow}(1-p \mid \lambda, \delta).$$

Observação 4.8: habitualmente,  $p \ll 1/n$ , com  $n$  o tamanho da amostra. Na prática, os valores  $p$  mais usuais são 0.01, 0.001 e 0.0001.

Os quantis extremais obtêm-se invertendo a f.d. GEV apresentada em [2.24]. Neste estudo, obtêm-se recorrendo à expressão:

$$x_p := G_\gamma^{\leftarrow}(1-p | \lambda, \delta) = U\left(\frac{1}{p}\right) = \begin{cases} \lambda + \frac{\delta}{\gamma} [(-\ln(1-p))^{-\gamma} - 1], & \gamma \neq 0 \\ \lambda - \delta \ln(-\ln(1-p)), & \gamma = 0 \end{cases}, \quad [4.12]$$

substituindo  $(\lambda, \delta, \gamma)$  pelas respetivas estimativas de máxima verosimilhança  $(\hat{\lambda}, \hat{\delta}, \hat{\gamma})$ .

#### 4.2.4.2. Probabilidade de excedência

**Definição 4.2 (probabilidade de excedência  $p$ ):** é a probabilidade de um nível elevado  $u$  ser excedido num ano,  $p^u := P[C > u]$ , ou a probabilidade de, num ano, ultrapassar um nível  $u$  elevado, com probabilidade  $p$  (para  $p$  pequeno).

A probabilidade de excedência é dada diretamente pela função de cauda direita da distribuição GEV estimada,

$$P[C > u] = 1 - G(u | \hat{\lambda}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\left[1 + \hat{\gamma} \left(\frac{u - \hat{\lambda}}{\hat{\delta}}\right)\right]_+^{\frac{1}{\hat{\gamma}}}\right\}, & \hat{\gamma} \neq 0 \\ 1 - \exp\left\{-\exp\left[-\frac{u - \hat{\lambda}}{\hat{\delta}}\right]\right\}, & \hat{\gamma} = 0 \end{cases}, \quad [4.13]$$

com  $u \in \mathbb{R}$  e a restrição  $1 + \hat{\gamma} \left(\frac{u - \hat{\lambda}}{\hat{\delta}}\right) > 0$ .

Observação 4.9: habitualmente,  $u$  é um nível elevado, como por exemplo o atual recorde do mundo, embora possa ser representado por um qualquer valor elevado.

#### 4.2.4.3. Limite superior do suporte

**Definição 4.3 (limite superior do suporte, com  $\gamma < 0$ ):** o limite superior do suporte do modelo  $\exp(-(1 + \gamma(x - \lambda) / \delta)^{-1/\gamma})$  dado no Teorema 2.1, apresentado em [2.4].

Assim, no caso de  $\gamma < 0$ , correspondente ao domínio máx-estável de Weibull, a cauda superior é (curta/leve) finita, pelo que a estimativa do  $x^F < \infty$  do modelo GEV $r$  é dada por:

$$\hat{x}^F = \hat{U}(\infty) = \hat{x}_0 = \hat{\lambda} - \frac{\hat{\delta}}{\hat{\gamma}}, \quad [4.14]$$

com  $\hat{U}(\infty)$  dado em [2.35].

#### 4.2.4.4. Valores de retorno

Um dos principais objetivos da teoria de valores extremos é estimar a probabilidade de ocorrência de eventos que são mais extremos do que os observados até ao momento e apresentados na amostra disponível. Os valores de retorno compreendem os níveis de retorno  $U(t)$  associados a um período de retorno  $T(u)$  de um nível  $u$  elevado.

**Definição 4.4 (nível de retorno):** o nível de retorno para  $t$ -anos,  $U(t)$ , é o nível que se espera que seja excedido, em média, uma vez a cada  $t$ -anos. Especificamente, o nível de retorno associado ao período de retorno  $t$  (ou  $1/p$ ) é o quantil  $1-p$ , com  $p=1/t$  ( $0 < p < 1$ ), da distribuição GEVr, cuja probabilidade de excedência é  $p$  num qualquer tempo  $t$ :  $P[C > U(t)] = p$ . Portanto,  $U(t) = U(1/p)$ . É dado pela função quantil de cauda de  $F$  em [2.32], ou pela f.d. inversa generalizada,  $F^{\leftarrow}$ , da f.d.  $F$  em [2.33].

Os níveis de retorno são quantis extremais. Portanto, também a estimativa de  $U(t)$  é dada pela inversa da f.d. GEV apresentada em [2.24], ou seja,

$$\hat{U}(t) = G_{\hat{\gamma}}^{\leftarrow}(1-1/t | \hat{\lambda}, \hat{\delta}) = \begin{cases} \hat{\lambda} + \frac{\hat{\delta}}{\hat{\gamma}} \left[ \left( -\ln \left( 1 - \frac{1}{t} \right) \right)^{-\hat{\gamma}} - 1 \right], & \hat{\gamma} \neq 0 \\ \hat{\lambda} - \hat{\delta} \ln(-\ln(1-1/t)), & \hat{\gamma} = 0 \end{cases}, \quad [4.15]$$

onde  $(\hat{\lambda}, \hat{\delta}, \hat{\gamma})$  são as estimativas dos respetivos parâmetros extremais  $(\lambda, \delta, \gamma)$ .

O modelo estatístico [4.15] baseia-se em duas importantes suposições:

- (i) as observações dos diferentes períodos temporais são aproximadamente independentes,
- (ii) a distribuição conjunta das  $r$ -MO em cada ano segue a f.d.p. em [4.1].

Uma estimativa pontual por si só é insuficiente. Como os níveis de retorno no período  $t$  são uma função dos parâmetros da distribuição GEV, os erros-padrão da estimativa dos níveis de retorno no período  $t$  pode ser obtida pelo método delta (Coles, 2001). Ou seja,

$$U(t) \sim N(U(t), \nabla U(t)^T V \nabla U(t))$$

onde a variância do estimador do nível de retorno no tempo  $t$ ,  $\hat{U}(t)$ , é aproximada como,

$$\text{Var}[\hat{U}(t)] \approx \nabla U(t)^T V \nabla U(t) \quad [4.16]$$

em que  $V$  é a matriz de variâncias-covariâncias para as estimativas  $(\hat{\lambda}, \hat{\delta}, \hat{\gamma})$ , ou seja,



$$\text{Var}(\lambda, \delta, \gamma) = \begin{pmatrix} \text{Var}(\lambda) & \text{Cov}(\lambda, \delta) & \text{Cov}(\lambda, \gamma) \\ \text{Cov}(\delta, \lambda) & \text{Var}(\delta) & \text{Cov}(\delta, \gamma) \\ \text{Cov}(\gamma, \lambda) & \text{Cov}(\gamma, \delta) & \text{Var}(\gamma) \end{pmatrix},$$

e o vetor gradiente é,

$$\begin{aligned} \nabla U(t)^T &= \left[ \frac{\partial U(t)}{\partial \lambda}, \frac{\partial U(t)}{\partial \delta}, \frac{\partial U(t)}{\partial \gamma} \right] \\ &= \left[ 1, -\gamma^{-1}(1-y_p^{-\gamma}), \delta\gamma^{-2}(1-y_p^{-\gamma}) - \delta\gamma^{-1}y_p^{-\gamma} \ln y_p \right] \end{aligned} \quad [4.17]$$

onde  $y_p = -\ln(1-p)$  e  $p = 1/t$ . Caso  $\hat{\gamma} < 0$  e [4.16] é válida, então  $\nabla U(t)^T = [1, -\ln y_p]$ .

Igualmente, [4.16] é válida com  $\nabla U_0^T(t) = [1, -\gamma^{-1}, \delta\gamma^{-2}]$ , avaliada em  $(\hat{\lambda}, \hat{\delta}, \hat{\gamma})$ . Quando  $\hat{\gamma} \geq 0$ , a estimativa de máxima verosimilhança para o limite superior do suporte é infinita.

Obtido o erro-padrão da estimativa pontual de cada nível de retorno, usando a normalidade assintótica do estimador podem-se construir intervalos de confiança aproximados (Coles, 2001). Assim, o intervalo com  $100(1-\alpha)\%$  de confiança, para cada nível de retorno, é dada por:

$$IC_{100(1-\alpha)\%} [U(t)] = \left( \hat{U}(t) \pm \Phi_{1-\alpha/2}^{-1} \times \sqrt{\text{Var}[\hat{U}(t)]} \right), \quad [4.18]$$

onde  $\Phi_{1-\alpha/2}^{-1}$  é o quantil  $(1-\alpha/2)$  da distribuição Normal padrão.

Contudo, Coles (2001) e Beirlant et al. (2004) referem que os intervalos de confiança construídos pela forma clássica poderão ser enganadores para as estimativas dos níveis de retorno, especialmente para períodos de retorno elevados, devido (frequentemente) à assimetria encontrada. Por esta razão, estes investigadores sugerem que os intervalos de confiança devem ser obtidos com base na função de *profile log-likelihood*. O nível de retorno a  $t$ -anos, num qualquer nível  $r$ , assume a forma:

$$\ln L_p[U(t)] = \max_{\lambda, \delta, \gamma | U(t)} L(\lambda, \delta, \gamma | U(t), x_1, \dots, x_m).$$

Assim, para cada nível  $r$ , um  $IC_{100(1-\alpha)\%} [U(t)]$  é dado por:

$$\left\{ U(t) : \ln L_p[U(t)] \geq \ln L_p[\hat{U}(t)] - \frac{\chi_{1,1-\alpha}^2}{2} \right\}, \quad [4.19]$$

em que  $\chi_{1,1-\alpha}^2$  é o quantil de probabilidade  $(1-\alpha)$  da distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

Observação 4.10: geralmente os intervalos de confiança pela função de *profile log-likelihood* são assimétricos, i.e., a distância entre a estimativa pontual por máxima verosimilhança e os seus limites são diferentes.

**Definição 4.5 (período de retorno):** o período de retorno  $T$ ,  $T(u)$ , (também designado de intervalo de recorrência médio) de um nível elevado  $u$ , é o tempo médio de espera até à ocorrência de um evento de magnitude igual ou superior ao evento extremo  $u$ .

Em termos práticos, se ocorrer um evento  $u$  (e.g., o recorde do mundo), qual é o tempo médio ( $T$ ) esperado para que o evento  $u$  ocorra novamente?

Neste capítulo, apenas estimamos períodos de retorno do atual recorde do mundo. Assim, sendo  $u$  o atual recorde do mundo, a estimativa é dada pelo inverso da probabilidade de excedência apresentada em [4.13]:

$$\hat{T}(u) = \frac{1}{P[C > u]} = \frac{1}{1 - G_{\hat{\gamma}}(u; \hat{\lambda}, \hat{\delta})}. \quad [4.20]$$

Observação 4.11: quer para  $x^F$  em [2.34], quer para  $U(t)$  em [4.15] quer ainda para  $T(u)$  em [4.20], os erros-padrão quando a estimativa  $\hat{\gamma} < 0$  e [4.16] é válida, podem ser calculados por  $\nabla U_0^T(t) = (1, -\hat{\gamma}^{-1}, \hat{\delta}\hat{\gamma}^{-2})$ . Neste caso, os intervalos de confiança podem ser obtidos de forma análoga à que se verifica em [4.18] ou [4.19].

### 4.3. APLICAÇÕES

Nesta secção pretendemos ajustar a distribuição GEV para as  $r$ -maiores estatísticas ordinais anuais. Mais concretamente, iremos utilizar os resultados das secções anteriores e realizar aplicações a séries de dados dos lançamentos do dardo, disco, martelo e peso do atletismo *outdoor*, com base nas 10 maiores observações anuais de cada amostra. Entre outros, os objetivos são usar o método da máxima verosimilhança para obter a estimativa dos parâmetros extremais de cada nível  $r$  ( $r=1, \dots, 10$ ) e com isso estimar algumas quantidades de interesse, designadamente os quantis extremais, a probabilidade de excedência, o limite superior do suporte (com  $\hat{\gamma} < 0$ ) e os valores de retorno.

#### 4.3.1. Breve descrição dos dados

No Capítulo 3 estão presentes os procedimentos adotados e a amostra selecionada (Tabela 3.2) para cada especialidade dos lançamentos do atletismo *outdoor*, masculino e feminino. Consideramos as 10 melhores marcas individuais em cada ano, obtidas entre 01-01-1980 (sempre que possível ou as condições permitam) e 31-12-2017, obtendo-se um conjunto de  $m$  vetores aleatórios de dimensão 10. Cada atleta, com a sua melhor performance, surge apenas uma vez em cada ano (bloco). Não existem valores omissos. Apenas foram consideradas as marcas reconhecidas pela IAAF.

Observação 4.12: dentro de cada bloco  $X_j^{(k)}$ , com  $k=1, \dots, r$  e  $j=1, \dots, m$ , as 10 maiores observações foram ordenadas crescentemente sem ter em conta o momento temporal de ocorrência, mas apenas a sua magnitude. Para além disso, a seleção das 10 maiores observações por bloco não obedece ao princípio do espaçamento temporal constante entre observações, o que significa que num bloco podem ocorrer várias observações consecutivas no tempo e noutra bloco pode ocorrer um maior espaçamento.

#### 4.3.2. Fases do estudo

A Tabela 4.1 apresenta as fases usadas no processo de modelação.

Tabela 4.1 – Fases do estudo da metodologia das  $r$ -maiores observações anuais.

Fase I	+ Verificação da aleatoriedade e tendência (Anexo 2, Tabelas A2.2 e A2.3; Anexo 3, Tabelas A3.2 e A3.3) (resumo na secção 4.3.3) das séries dos lançamentos do dardo, disco, martelo e peso, masculino e feminino (Anexo 4.1).	– <i>Turning Point test</i> . – Cox-Stuart <i>trend test</i> . – Gráfico de dispersão com curva <i>lowess</i> ajustada.
Fase II	+ Caracterização das amostras (secção 4.3.4): . comportamento da série de dados face a um conjunto de estatísticas descritivas. . considerar apenas as amostras que não rejeitaram a hipótese nula da aleatoriedade e da tendência.	– Estatística descritiva: média, desvio-padrão, coeficiente de variação, mínimo e máximo. – Diagrama de extremos e quartis (Anexo 4.2).

Fase III	+ Estimativas dos parâmetros extremais e respectivos erros-padrão; intervalos de confiança para o parâmetro de forma (secção 4.3.5)	– Estimativa dos parâmetros extremais por máxima log-verosimilhança. – método de otimização de Nelder-Mead.
Fase IV	+ Selecionar modelo GEV $r$ (secção 4.3.6): . estabilidade das estimativas dos parâmetros extremais (Anexo 4.3). . estabilidade dos erros-padrão dos parâmetros extremais (Anexo 4.4). . visualização dos PP-plot e QQ-plot, para os $r^{(k)}$ níveis. . visualização dos PP-plot, QQ-plot, gráfico dos níveis de retorno a $t$ -anos e histograma com a estimativa da curva de densidade para o máximo (Anexo 4.5).	– Gráfico de linhas. – PP-plot, QQ-plot, gráfico dos níveis de retorno e histograma com a estimativa da curva de densidade.
Fase V	+ Diagnóstico do modelo (secção 4.3.7) . PP-plot e QQ-plot referentes aos modelos selecionados na fase IV.	– PP-plot e QQ-plot.
Fase VI	+ Estimar outras quantidades de interesse (secção 4.3.8)	– Quantis extremais. – Probabilidade de excedência. – Limite superior do suporte. – Níveis de retorno. – Períodos de retorno. – Gráfico dos níveis de retorno a $t$ -anos. – Mapa de níveis de retorno para $t$ -anos (Anexos 4.6.1, 4.6.2 e 4.6.3).

### 4.3.3. Estacionariedade

A verificação da existência de padrões de não-aleatoriedade tal como a tendência, foi em termos formais efetuada pelos *Turning Point Test* (Moore & Wallis, 1943; Brockwell & Davis, 2002) e *Cox-Stuart trend test* (Cox & Stuart, 1955), cujos resultados podem ser observados nos Anexos 2 e 3, nas Tabelas A2.1, A2.2, A3.1 e A3.2, e em termos gráficos pela dispersão das observações/ano de obtenção e pela curva LOWESS (do inglês, *Locally Weighted Scatterplot Smoothing*). Dada a possibilidade de existirem várias marcas obtidas no mesmo dia, as séries temporais de lançamentos não estão muito bem definidas, pelo que apenas o máximo anual foi usado para testar a aleatoriedade e a tendência. Não obstante, com base em Gilbert (1987), na presença de múltiplas observações por período temporal, calcula-se a média de cada bloco e aplica-se a esta nova variável o teste de Mann-Kendall *trend test*. Nesta tese, decidimos aplicar o *Turning Point Test* e o *Cox-Stuart trend test*. A Tabela 4.2 resume essas condições.

Tabela 4.2 – Aleatoriedade e tendência das amostras.

Lançamentos	Homens	Mulheres
Lançamento do Dardo	Aleatório   Sem tendência	Aleatório   Sem tendência
Lançamento do Disco	Aleatório   Sem tendência	Aleatório   Com tendência*
Lançamento do Martelo	Aleatório   Sem tendência	Não-Aleatório   Com tendência*
Lançamento do Peso	Aleatório   Sem tendência	Aleatório   Sem tendência

\* a modelação será feita segundo metodologia de não-estacionariedade.

Nas amostras com evidências de não-estacionariedade (assinaladas com \*), os resultados são:

+ com base na observação máxima de cada bloco (i.e.,  $r=1$ )

*Turning point test:* lançamento do martelo,  $T=-3.8579$ ,  $p=0.0001143$

*Cox-Stuart Trend Test*: lançamento do disco,  $z=3.7463$ ,  $p=0.0001794$   
lançamento do martelo,  $z=2.8307$ ,  $p=0.004645$

+ com base na média de cada bloco

*Turning point test*: lançamento do disco,  $T=0.39426$ ,  $p=0.6934$   
lançamento do martelo,  $T=-4.8224$ ,  $p<0.0001$

*Cox-Stuart Trend Test*: lançamento do disco,  $z=3.7463$ ,  $p=0.0001794$   
lançamento do martelo,  $z=2.8307$ ,  $p=0.004645$

Observação 4.13: em Anexo 2, Tabela A2.3 e Anexo 3, Tabela A3.3 encontram-se os resultados da estacionariedade com base na média de cada bloco, para as amostras em estudo.

As Figuras 4.2 e 4.3 mostram a evolução da performance máxima de cada bloco/ano ( $r=1$  ou  $X^{(1)}$ ), nas provas de lançamentos do atletismo masculino e feminino, respectivamente. Nestas figuras observa-se a curva *lowess* não-paramétrica ajustada aos dados de cada amostra. A curva *lowess* é uma técnica de suavização, proveniente de regressões lineares localmente ponderadas, usada em gráficos com o intuito de observar a evolução da variável de interesse (i.e., a performance) ao longo do tempo, detetar a relação entre as duas variáveis e encontrar tendências e ciclos nos dados (Cleveland, 1979, 1981, 1994; Cleveland & Devlin, 1988; Cleveland & Loader, 1996). No presente estudo, em todas as amostras, na estimação usamos 3 iterações de robustez, um polinómio local de grau 1 e parâmetro de suavização  $f=(0.5, 2/3, 0.8)$ , ou seja, 50%, 66.7% e 80% de suavização, ou então, 50%, 66.7% e 80% das observações dentro de cada janela. Fazendo-se notar que quanto mais elevado o valor de  $f$  maior a suavização (linearização) da curva ajustada aos dados disponíveis e quanto mais baixo o valor de  $f$  menor será a suavização pois mais próximo será o ajuste da função de regressão aos dados, gerando menos dados na proximidade de  $x$ .

Observação 4.14: o aumento do número de iterações não produz modificações significativas na estimação da curva *lowess*. A metodologia *lowess* e os resultados para  $f=(0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1)$  são apresentados em Anexo 4.1 nas Figuras A4.1 a A4.8. Igualmente, não ocorrem modificações da curva de suavização quando se modificam quer o número de iterações quer o valor do parâmetro de forma, especialmente quando  $\gamma<0$  (ver resultados de simulação em Anexo 4.1.1, Figuras A4.9 e A4.10). Estes dados são sugestivos da estacionariedade verificada.

A Figura 4.2, apresenta a trajetória seguida pelas observações nas amostras de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso masculino, sugerindo uma tendência fraca. A curva *lowess*, com  $f=(0.5, 2/3, 0.8)$ ,

mostra que a variabilidade é mais notória nas amostras de lançamentos do dardo e do disco, devido sobretudo à grande dispersão. Contudo, conforme vimos, nestas amostras o *turning point test* e o *Cox-Stuart trend test* não registaram evidências significativas de não-estacionariedade. Nestas amostras, a linha de tendência linear (cinzento) define uma trajetória praticamente sem tendência. Atendendo às diversas curvas *lowess*, no lançamento do dardo (Anexo 4.1, Figura A4.1), o efeito de tendência perde-se a partir de  $f \geq 0.5$ . Nas amostras de lançamentos do martelo e peso, a curva *lowess* descreve uma certa linearidade. Observando a Figura 4.2 e o Anexo 4.1, Figuras A4.3 e A4.4, esta linearização, sem tendência, verifica-se a partir de  $f \geq 0.5$ . A parte final das curvas *lowess* nas amostras de lançamentos do dardo e peso apresentam uma ligeira tendência positiva na série de máximos anuais, ao passo que nas amostras de lançamentos do disco e martelo a tendência é negativa.

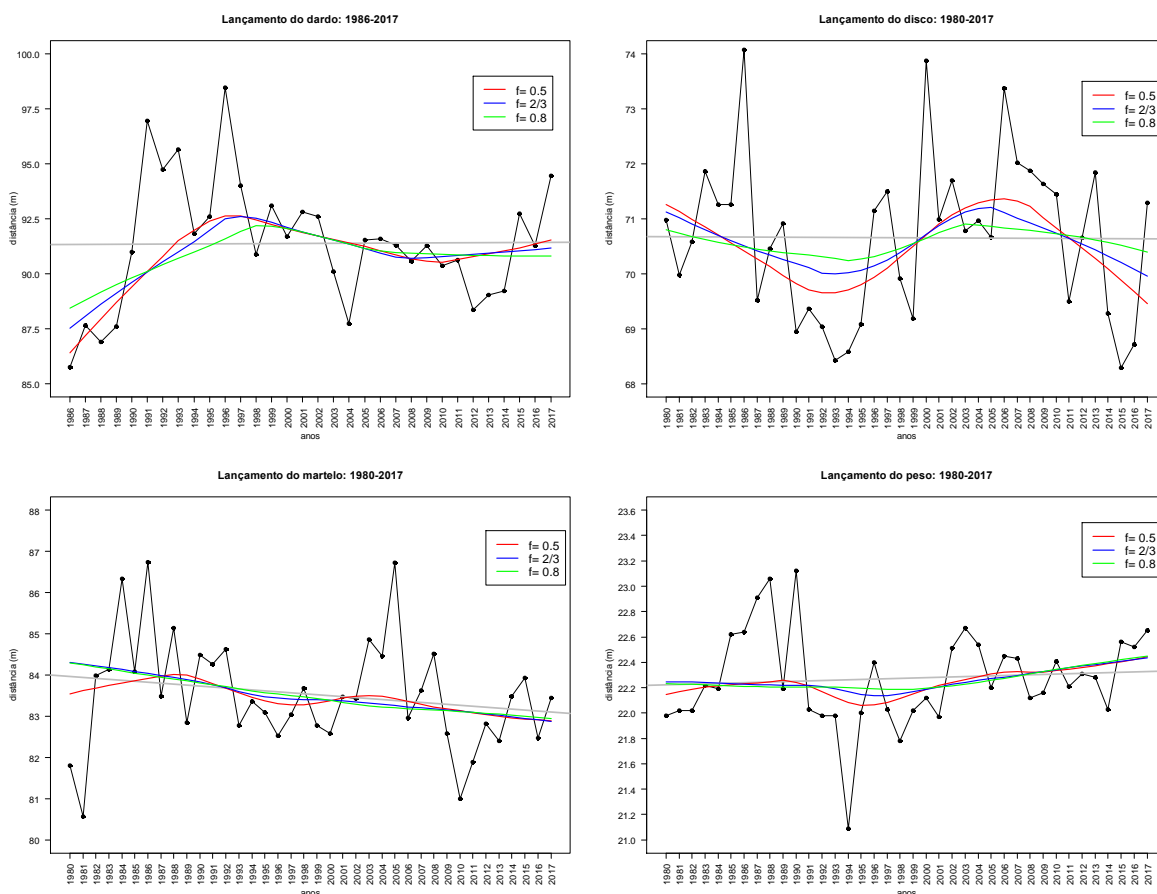


Figura 4.2 – Curvas *lowess* com  $f=(0.5, 2/3, 0.8)$  ajustada aos máximos anuais  $X^{(1)}$ , nas provas de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso masculino.

Nas mulheres, a Figura 4.3, nas amostras de lançamentos do martelo e peso, a curva *lowess* descreve uma certa linearidade. As amostras de lançamentos do dardo e disco aparentam ter tendência mais nítida, ainda que pelos testes formais a amostra de lançamento do dardo careça de evidências significativas de não-estacionariedade. A parte final das curvas *lowess* nas amostras de lançamentos do dardo e peso apresentam uma tendência decrescente da série de máximos anuais, ao passo que nas amostras de

lançamentos do disco e martelo a tendência é crescente. O caso particular da amostra de lançamento do martelo, a trajetória seguida pelo *locus* de pontos define uma tendência marcadamente crescente. Em Anexo 4.1, nas Figuras A4.5, A4.6, A4.7 e A4.8 pode observar-se o processo de suavização *lowess* para valores de  $f=(0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1)$ .

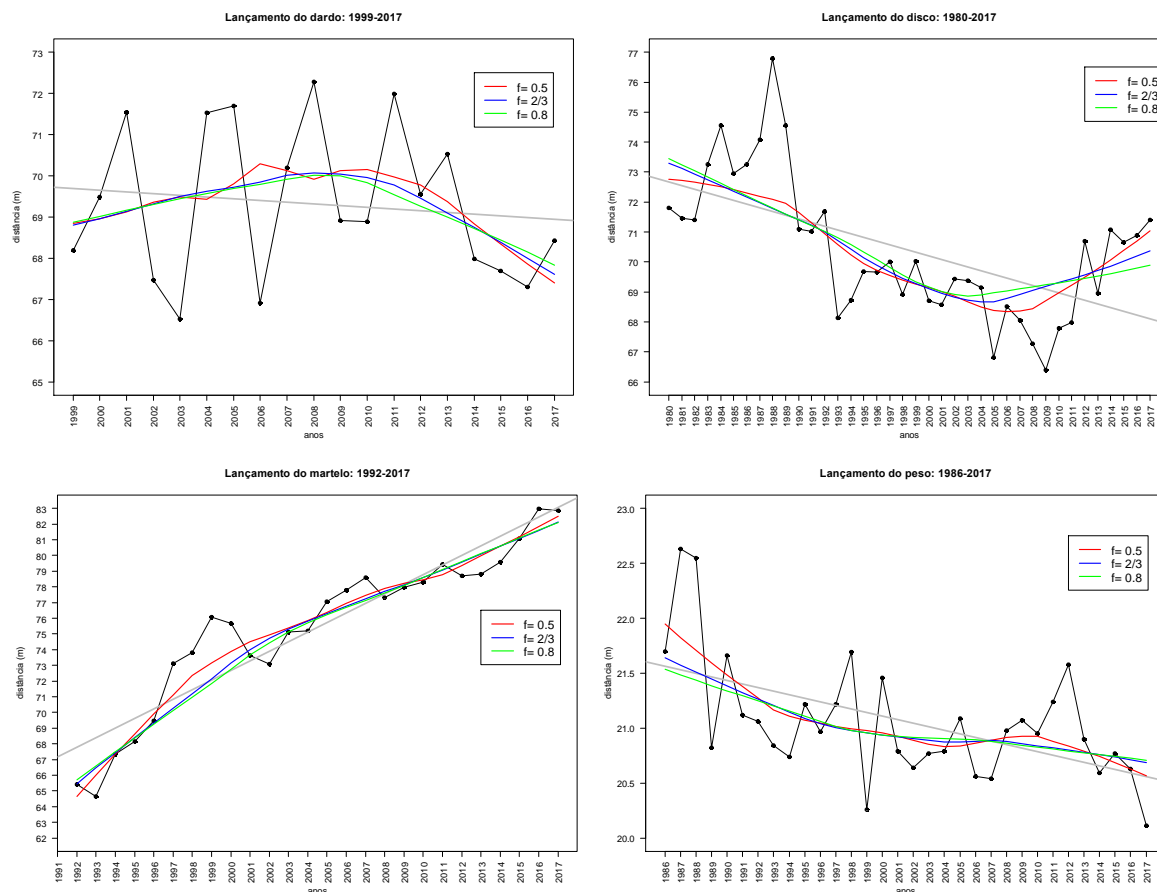


Figura 4.3 – Curvas *lowess* com  $f=(0.5, 2/3, 0.8)$  ajustada aos máximos anuais,  $X^{(1)}$ , nas provas de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso feminino.

As Figuras 4.4 e 4.5 mostram a evolução das 10 performances máximas em cada bloco  $x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(10)}, j=1, \dots, m$ , com  $x_j^{(1)} \geq \dots \geq x_j^{(10)}$ , nas provas de lançamentos do atletismo, em homens e mulheres, respetivamente. Ajustou-se uma curva *lowess* para valores de  $f=(0.5, 2/3, 0.8)$  para a média de cada bloco. Com exceção das amostras de lançamentos do disco e martelo feminino, não parece existir a formação de um padrão específico condizente com a não-aleatoriedade/tendência das observações.

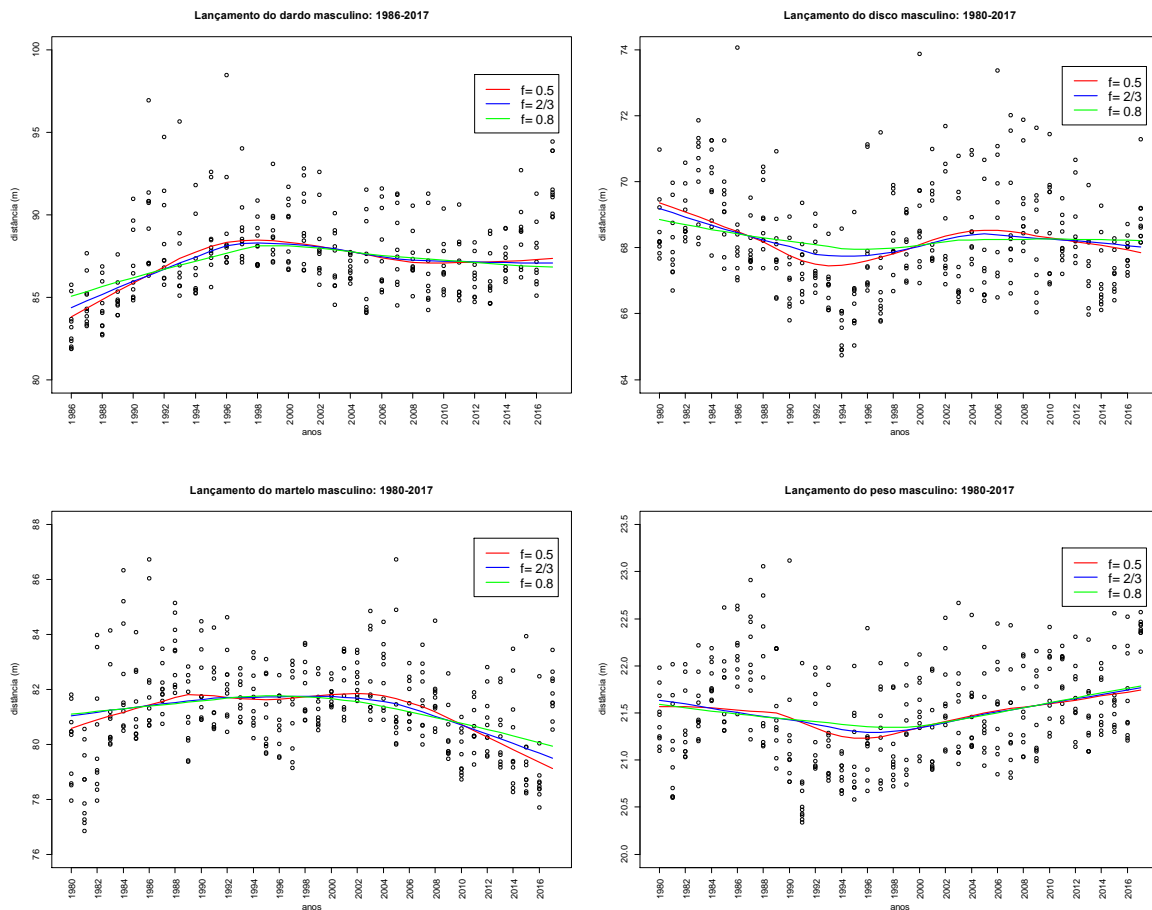


Figura 4.4 – As 10 maiores observações anuais das provas de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso do atletismo masculino *outdoor*. Curvas *lowess* com  $f=(0.5, 2/3, 0.8)$  ajustada ao valor médio de cada bloco.



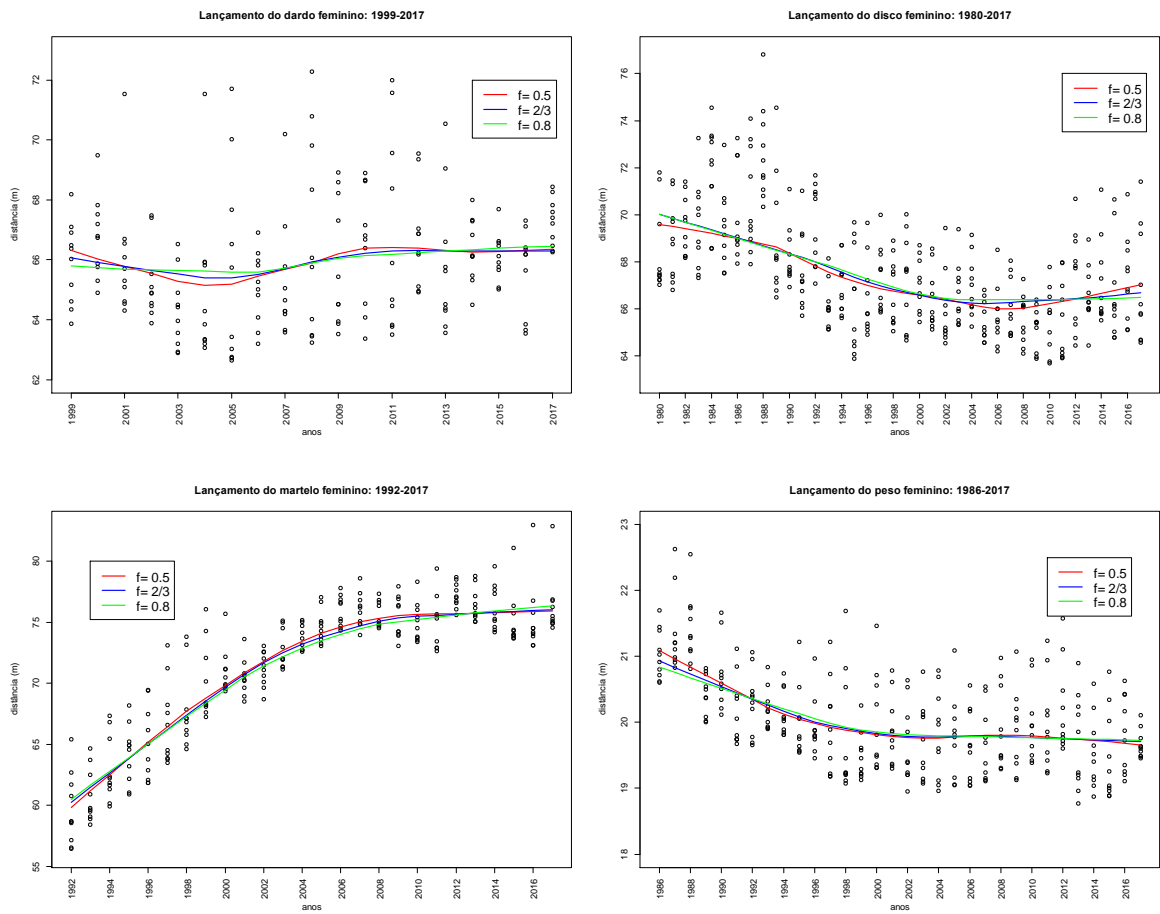


Figura 4.5 – As 10 maiores observações anuais das provas de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso do atletismo feminino *outdoor*. Curvas *lowess* com  $f=(0.5, 2/3, 0.8)$  ajustada ao valor médio de cada bloco.

Observação 4.15: não estando reunidas as condições de aleatoriedade/tendência das séries de dados dos lançamentos do martelo e disco feminino, iremos neste caso empregar a modelação de eventos extremos não-estacionários (Capítulo 6), pelo que a partir de agora, nesta secção, deixaremos de considerar estas amostras.

**4.3.4. Caracterização das amostras**

As Tabelas 4.3, 4.4 e 4.5 mostram, para as amostras onde não se verificou tendência significativa, as estatísticas descritivas básicas, nomeadamente a média, desvio-padrão, coeficiente de variação, valores mínimo e máximo em cada nível  $r$ . Em todas as amostras e em todos os níveis  $r$ , verifica-se um baixo coeficiente de variação indiciando a presença de um comportamento homogéneo das performances dentro de cada nível  $r$ . Em todas as amostras, o desvio-padrão é crescente (com exceção das amostras de lançamento do dardo homens e mulheres, cujo desvio-padrão diminui até  $r_5$  nos homens e  $r_4$  nas mulheres). O valor máximo corresponde ao atual recorde do mundo.

Tabela 4.3 – Dimensão da amostra, média, desvio-padrão, coeficiente de variação, valores mínimo e máximo, referentes a cada nível  $r$  do lançamento do dardo no período 1986-2017 e lançamento do disco no período de 1980-2017, para homens.

$r^{(k)}$	Lançamento do dardo						Lançamento do disco					
	$n$	$\bar{x}$	$s$	CV(%)	Mín	Máx	$n$	$\bar{x}$	$s$	CV(%)	Mín	Máx
$r_1$	32	91.38	2.867	3.10	85.74	98.48	38	70.66	1.443	2.00	68.29	74.08
$r_2$	64	90.54	2.588	2.90	85.38	98.48	76	70.05	1.493	2.10	66.08	74.08
$r_3$	96	89.90	2.564	2.90	83.68	98.48	114	69.65	1.496	2.10	66.08	74.08
$r_4$	128	89.36	2.563	2.90	83.52	98.48	152	69.33	1.507	2.20	66.00	74.08
$r_5$	160	88.94	2.561	2.90	83.20	98.48	190	69.08	1.512	2.20	65.80	74.08
$r_6$	192	88.57	2.577	2.90	82.48	98.48	228	68.87	1.511	2.20	65.58	74.08
$r_7$	224	88.25	2.588	2.90	82.34	98.48	266	68.68	1.519	2.20	65.04	74.08
$r_8$	256	87.96	2.595	3.00	82.00	98.48	304	68.51	1.522	2.20	64.92	74.08
$r_9$	288	87.71	2.593	3.00	81.90	98.48	342	68.35	1.528	2.20	64.90	74.08
$r_{10}$	320	87.48	2.602	3.00	81.86	98.48	380	68.19	1.542	2.30	64.74	74.08

Tabela 4.4 – Dimensão da amostra, média, desvio-padrão, coeficiente de variação, valores mínimo e máximo, referentes a cada nível  $r$  dos lançamentos do disco e martelo no período de 1980-2017, para homens.

$r^{(k)}$	Lançamento do martelo						Lançamento do peso					
	$n$	$\bar{x}$	$s$	CV(%)	Mín	Máx	$n$	$\bar{x}$	$s$	CV(%)	Mín	Máx
$r_1$	38	83.54	1.350	1.60	80.56	86.74	38	22.27	0.374	1.70	21.09	23.12
$r_2$	76	83.15	1.393	1.70	79.91	86.74	76	22.10	0.413	1.90	20.77	23.12
$r_3$	114	82.78	1.432	1.70	78.87	86.74	114	21.99	0.434	2.00	20.75	23.12
$r_4$	152	82.48	1.463	1.80	78.63	86.74	152	21.89	0.451	2.10	20.67	23.12
$r_5$	190	82.21	1.499	1.80	78.60	86.74	190	21.81	0.471	2.20	20.50	23.12
$r_6$	228	81.98	1.539	1.90	77.84	86.74	228	21.73	0.486	2.20	20.47	23.12
$r_7$	266	81.77	1.566	1.90	77.50	86.74	266	21.66	0.498	2.30	20.43	23.12
$r_8$	304	81.59	1.591	2.00	77.26	86.74	304	21.60	0.510	2.40	20.41	23.12
$r_9$	342	81.42	1.615	2.00	77.14	86.74	342	21.55	0.520	2.40	20.37	23.12
$r_{10}$	380	81.27	1.639	2.00	76.84	86.74	380	21.49	0.528	2.50	20.34	23.12

Tabela 4.5 – Dimensão da amostra, média, desvio-padrão, coeficiente de variação, valores mínimo e máximo, referentes a cada nível  $r$  do lançamento do dardo no período de 1999-2017 e lançamento do peso no período de 1986-2017, para mulheres.

$r^{(k)}$	Lançamento do dardo						Lançamento do peso					
	$n$	$\bar{x}$	$s$	CV(%)	Mín	Máx	$n$	$\bar{x}$	$s$	CV(%)	Mín	Máx
$r_1$	19	69.32	1.851	2.70	66.52	72.28	32	21.06	0.556	2.60	20.11	22.63
$r_2$	38	68.65	1.842	2.70	65.93	72.28	64	20.87	0.560	2.70	19.85	22.63
$r_3$	57	68.13	1.831	2.70	64.90	72.28	96	20.70	0.580	2.80	19.61	22.63
$r_4$	76	67.72	1.808	2.70	64.49	72.28	128	20.56	0.609	3.00	19.46	22.63
$r_5$	95	67.34	1.825	2.70	64.29	72.28	160	20.44	0.632	3.10	19.24	22.63
$r_6$	114	67.01	1.879	2.80	63.43	72.28	192	20.34	0.658	3.20	19.04	22.63
$r_7$	133	66.71	1.925	2.90	63.03	72.28	224	20.25	0.680	3.40	19.00	22.63
$r_8$	152	66.42	1.984	3.00	62.75	72.28	256	20.16	0.699	3.50	18.96	22.63
$r_9$	171	66.17	2.026	3.10	62.72	72.28	288	20.09	0.713	3.60	18.89	22.63
$r_{10}$	190	65.94	2.060	3.10	62.64	72.28	320	20.03	0.724	3.60	18.77	22.63

Uma forma complementar de caracterizar as amostras é através da visualização dos diagramas de extremos e quartis de cada nível  $r$  (Anexo 4.2), relativamente à assimetria (ou simetria) da distribuição, à dispersão dos dados e à presença de valores discrepantes (cauda inferior e cauda superior). Os diagramas de extremos e quartis exibem um conjunto diversificado de padrões: fraca dispersão, agrupamentos médios com caudas longas e agrupamentos médios baseados numa distribuição bimodal (confirmado pelo histograma com a curva de densidade) com caudas curtas, simetrias e assimetrias (positiva e negativa). A Tabela 4.6 resume os resultados. De uma forma geral, as amostras nos diferentes

níveis  $r$  têm distribuição assimétrica positiva, decorrente da reduzida frequência de elevadas performances e alta frequência de baixas performances, onde  $\bar{x} > Me$ . As amostras de lançamento do martelo e peso masculino, a primeira nos níveis  $r$  mais altos e a segunda nos níveis  $r$  intermédios, regista uma simetria aproximada, pois ocorre uma frequência equilibrada entre baixas e elevadas performances, com  $\bar{x} \approx Me$ . De notar que a presença de *outliers*, especialmente aqueles que estão acima da barreira superior (assinalados por  $\bullet$ ), de interesse particular neste estudo, permite avaliar a existência de performances individuais que se destacaram das restantes em cada nível  $r^{(k)}$ . Apenas nas amostras masculinas de lançamento do martelo nos níveis  $r=2, \dots, 10$  e lançamento do peso nos níveis  $r=1, \dots, 5$  ocorrem *outliers* pela barreira inferior (assinalados por  $*$ ). Nas amostras de lançamento do disco masculino nos níveis  $r=1, 2$  e lançamento do dardo feminino nos níveis  $r=1, 2, 3$  não se observa a presença de *outliers*. Evidentemente que numa ótica de valores extremos máximos (como é o caso deste estudo) era esperado que a distribuição fosse assimétrica positiva, pelo que é natural que exista tendência para haver desvios positivos muito maiores do que negativos, pois os dados estarão mais concentrados em valores mais baixos, a média sofre influência da cauda direita e desloca-se nesta direção, predominando as observações abaixo da média.

Tabela 4.6 – Assimetria e presença de *outliers* em cada nível  $r$  das diferentes amostras.

Níveis $r$	HOMENS				MULHERES	
	L. Dardo	L. Disco	L. Martelo	L. Peso	L. Dardo	L. Peso
$r_1$	Simetria ( $\bullet$ )	Assimetria – (s/outliers)	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $*$ )	Assimetria + (s/outliers)	Assimetria + ( $\bullet$ )
$r_2$	Assimetria – ( $\bullet$ )	Assimetria + (s/outliers)	Assimetria + ( $\bullet, *$ )	Assimetria + ( $\bullet, *$ )	Assimetria + (s/outliers)	Assimetria + ( $\bullet$ )
$r_3$	Simetria ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet, *$ )	Simetria ( $\bullet, *$ )	Assimetria + (s/outliers)	Assimetria + ( $\bullet$ )
$r_4$	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Simetria ( $\bullet, *$ )	Simetria ( $\bullet, *$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )
$r_5$	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria – ( $\bullet, *$ )	Simetria ( $\bullet, *$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )
$r_6$	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Simetria ( $\bullet, *$ )	Simetria ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )
$r_7$	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Simetria ( $\bullet, *$ )	Simetria ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )
$r_8$	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Simetria ( $\bullet, *$ )	Simetria ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )
$r_9$	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Simetria ( $\bullet, *$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )
$r_{10}$	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Simetria ( $\bullet, *$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )	Assimetria + ( $\bullet$ )

Assimetria + | assimetria positiva (reduzida frequência de elevadas performances e alta frequência de baixas performances,  $\bar{x} > Me$ ).

Assimetria – | assimetria negativa (reduzida frequência de baixas performances e alta frequência de elevadas performances,  $\bar{x} < Me$ ).

Simetria | frequência equilibrada entre baixas e elevadas performances,  $\bar{x} \approx Me$ .

$\bullet$  | nível  $r$  com *outlier(s)* pela barreira superior.

$*$  | nível  $r$  com *outlier(s)* pela barreira inferior.

### 4.3.5. Estimativa dos parâmetros

As Tabelas 4.7 a 4.12 apresentam o valor máximo da função de log-verosimilhança, as estimativas dos parâmetros extremais de localização, escala e forma com os respectivos erros-padrão, em cada nível  $r$  do modelo GEV-multivariado ( $1 \leq r \leq 10$ ), aplicados às especialidades de lançamentos do atletismo, em homens e mulheres. Assumindo a validade do modelo GEV-multivariado em [4.1] para um nível  $r$  particular, é esperado obter estabilidade nas estimativas dos parâmetros de localização, escala e forma. A análise dos resultados que se segue deve ser acompanhada dos gráficos de evolução das estimativas pontuais dos parâmetros extremais GEV  $r$  (Anexo 4.3) e respectivos erros-padrão (Anexo 4.4).

Na amostra de **lançamento do dardo masculino** (Tabela 4.7), observa-se que níveis crescentes de  $r$  correspondem a uma certa tendência no aumento do valor da estimativa pontual do parâmetro de localização, na diminuição do valor do parâmetro de escala e no aumento (especialmente a partir de  $r_6$ ) no parâmetro de forma. Contudo, regista-se uma certa estabilidade das estimativas a partir inclusivamente de  $r_2$  para  $(\hat{\lambda}, \hat{\delta})$  e de  $r_3$  até  $r_5$ , bem como de  $r_6$  até  $r_{10}$  para  $(\hat{\gamma})$ . Para todos os níveis de  $r$ , observa-se que  $\hat{\gamma} > -0.5$ , garantindo a exequibilidade das condições de regularidade da máxima verosimilhança. Neste caso, conforme Smith (1985), os estimadores são assintoticamente consistentes, eficientes, invariantes e normais. Nos erros-padrão de todos os parâmetros extremais ocorre uma tendência geral de redução da magnitude, o que pode sugerir um aumento da precisão nos modelos de nível  $r$  mais alto. Contudo, podemos dizer que a estabilidade (i.e., onde ocorrem menos “saltos”, logo menor variação) é mais visível entre  $r_2$ - $r_5$  e  $r_5$ - $r_{10}$  para  $se(\hat{\lambda})$ , entre  $r_2$ - $r_6$  e  $r_6$ - $r_{10}$  para  $se(\hat{\delta})$ , ao passo que no parâmetro  $\gamma$ , a estabilidade dos erros-padrão é mais notória a partir de, inclusivamente,  $r_3$ . Portanto, uma escolha adequada de  $r$  é esperada estar entre  $r=2$  e  $r=4$ .

Tabela 4.7 – Estimativa de log-verosimilhança maximizada, estimativa dos parâmetros extremais (localização, escala e forma) com os correspondentes erros-padrão e intervalo com 95% de confiança para o parâmetro de forma do modelo GEV-multivariado para  $1 \leq r \leq 10$ , referentes ao lançamento do dardo masculino, no período de 1986-2017.

Lançamento do dardo: homens								
$r$	$\ell$	$\hat{\lambda}$	$se(\hat{\lambda})$	$\hat{\delta}$	$se(\hat{\delta})$	$\hat{\gamma}$	$se(\hat{\gamma})$	$IC_{95\%}(\gamma)$
1	-78.322	90.282	0.522	2.670	0.362	-0.1932	0.1120	(-0.4127; 0.0263)
2	-118.489	90.765	0.378	2.303	0.204	-0.1688	0.0748	(-0.3155; -0.0221)
3	-153.517	90.971	0.359	2.337	0.169	-0.2078	0.0562	(-0.3179; -0.0977)
4	-177.268	91.003	0.342	2.291	0.153	-0.2010	0.0517	(-0.3024; -0.0996)
5	-188.864	91.065	0.324	2.222	0.142	-0.1947	0.0464	(-0.2855; -0.1038)
6	-201.480	91.139	0.317	2.208	0.132	-0.2041	0.0415	(-0.2854; -0.1228)
7	-204.512	91.128	0.307	2.174	0.131	-0.1951	0.0396	(-0.2727; -0.1175)
8	-204.074	91.110	0.299	2.151	0.130	-0.1881	0.0380	(-0.2625; -0.1137)
9	-190.953	91.099	0.289	2.105	0.128	-0.1787	0.0357	(-0.2488; -0.1087)
10	-190.029	91.099	0.290	2.116	0.131	-0.1761	0.0362	(-0.2469; -0.1052)

No **lançamento do disco masculino** (Tabela 4.8), observa-se que níveis crescentes de  $r$  correspondem a um aumento do valor da estimativa pontual do parâmetro de localização, diminuição do parâmetro de

escala (exceto em  $r_1$ ) e a uma tendência de crescimento negativo do parâmetro de forma. Em todos os parâmetros extremais, a linearização tem início em  $r_2$ . Para todos os níveis de  $r$ , observa-se que  $\hat{\gamma} > -0.5$ , garantindo as condições de regularidade da máxima verosimilhança. Os erros-padrão das estimativas pontuais dos parâmetros extremais diminuem gradualmente com o aumento de  $r$ , podendo tal sugerir um aumento da precisão nos modelos de nível  $r$  mais alto. Porém, também se percebe que uma certa estabilidade começa a verificar-se a partir de  $r_3$ , sobretudo nos erros-padrão para as estimativas  $(\hat{\lambda}, \hat{\delta})$ . No parâmetro  $\gamma$ , a estabilidade dos erros-padrão é mais visível entre  $r_2$ - $r_6$  e  $r_7$ - $r_{10}$ . Portanto, espera-se uma escolha adequada entre  $r=2$  e  $r=6$ .

Tabela 4.8 – Estimativa de log-verosimilhança maximizada, estimativa dos parâmetros extremais (localização, escala e forma) com os correspondentes erros-padrão e intervalo com 95% de confiança para o parâmetro de forma do modelo GEV-multivariado para  $1 \leq r \leq 10$ , referentes ao lançamento do disco masculino, no período de 1980-2017.

Lançamento do disco: homens								
$r$	$\ell$	$\hat{\lambda}$	$se(\hat{\lambda})$	$\hat{\delta}$	$se(\hat{\delta})$	$\hat{\gamma}$	$se(\hat{\gamma})$	$IC_{95\%}(\gamma)$
1	-66.709	70.080	0.240	1.306	0.172	-0.1617	0.1228	(-0.4023; 0.0789)
2	-107.907	70.243	0.220	1.473	0.112	-0.2957	0.0618	(-0.4169; -0.1746)
3	-122.577	70.291	0.192	1.350	0.087	-0.2498	0.0562	(-0.3599; -0.1396)
4	-130.833	70.297	0.183	1.319	0.080	-0.2333	0.0528	(-0.3368; -0.1299)
5	-124.978	70.310	0.173	1.282	0.078	-0.2148	0.0498	(-0.3123; -0.1172)
6	-111.967	70.294	0.166	1.257	0.079	-0.1955	0.0472	(-0.2880; -0.1030)
7	-101.000	70.368	0.160	1.239	0.068	-0.2225	0.0384	(-0.2977; -0.1473)
8	-79.335	70.333	0.157	1.227	0.070	-0.2061	0.0377	(-0.2799; -0.1323)
9	-59.584	70.323	0.156	1.228	0.072	-0.2005	0.0372	(-0.2735; -0.1275)
10	-48.925	70.358	0.155	1.230	0.067	-0.2187	0.0338	(-0.2849; -0.1525)

No **lançamento do martelo masculino** (Tabela 4.9), observa-se que níveis crescentes de  $r$  correspondem a um aumento do valor da estimativa pontual do parâmetro de localização, diminuição do parâmetro de escala (exceto em  $r_1$ ) e a uma tendência na diminuição (crescimento negativo) do valor do parâmetro de forma. A linearização tem início em  $r_2$  para  $\hat{\lambda}$  e em  $r_3$  para  $(\hat{\delta}, \hat{\gamma})$ . Para todos os níveis de  $r$ , observa-se que  $\hat{\gamma} > -0.5$ , garantindo as condições de regularidade da máxima verosimilhança. Os erros-padrão das estimativas pontuais dos parâmetros extremais diminuem com o aumento de  $r$ , ainda que uma certa estabilidade seja visível entre  $r_2$ - $r_4$  e  $r_4$ - $r_{10}$  para  $se(\hat{\lambda})$  e a partir de  $r_3$  para  $se(\hat{\delta}, \hat{\gamma})$ . Portanto, espera-se uma escolha adequada entre  $r=2$  e  $r=4$ .

Tabela 4.9 – Estimativa de log-verossimilhança maximizada, estimativa dos parâmetros extremais (localização, escala e forma) com os correspondentes erros-padrão e intervalo com 95% de confiança para o parâmetro de forma do modelo GEV-multivariado para  $1 \leq r \leq 10$ , referentes ao lançamento do martelo masculino, no período de 1980-2017.

Lançamento do martelo: homens								
$r$	$\ell$	$\hat{\lambda}$	$se(\hat{\lambda})$	$\hat{\delta}$	$se(\hat{\delta})$	$\hat{\gamma}$	$se(\hat{\gamma})$	$IC_{95\%}(\gamma)$
1	-64.423	83.014	0.223	1.256	0.151	-0.1827	0.0927	(-0.3645; -0.0010)
2	-97.377	83.389	0.201	1.326	0.100	-0.2822	0.0647	(-0.4089; -0.1554)
3	-119.785	83.471	0.186	1.315	0.079	-0.3023	0.0518	(-0.4039; -0.2007)
4	-128.501	83.540	0.174	1.277	0.067	-0.3080	0.0428	(-0.3918; -0.2242)
5	-134.108	83.535	0.170	1.266	0.063	-0.3007	0.0406	(-0.3802; -0.2211)
6	-132.510	83.600	0.164	1.250	0.056	-0.3145	0.0350	(-0.3832; -0.2459)
7	-119.889	83.593	0.157	1.225	0.054	-0.3033	0.0326	(-0.3672; -0.2393)
8	-104.735	83.614	0.153	1.207	0.052	-0.3030	0.0300	(-0.3617; -0.2443)
9	-87.138	83.617	0.149	1.195	0.050	-0.3002	0.0284	(-0.3559; -0.2445)
10	-66.435	83.649	0.145	1.181	0.047	-0.3053	0.0259	(-0.3562; -0.2545)

No **lançamento do peso masculino** (Tabela 4.10), observa-se que níveis crescentes de  $r$  correspondem a um aumento do valor da estimativa pontual do parâmetro de localização, diminuição do parâmetro de escala (exceto em  $r_1$ ) e a uma tendência de crescimento do valor do parâmetro de forma (com uma quebra em  $r_5$ ). A linearização para  $\hat{\lambda}$  ocorre entre  $r_3$  e  $r_5$ , bem como entre  $r_5$  e  $r_{10}$ ; para  $\hat{\delta}$  tem início em  $r_4$ ; e para  $\hat{\gamma}$  ocorre entre  $r_2$  e  $r_4$ , bem como entre  $r_5$  e  $r_{10}$ . Para todos os níveis de  $r$ , observa-se que  $\hat{\gamma} > -0.5$ , garantindo as condições de regularidade da máxima verossimilhança. Os erros-padrão das estimativas pontuais dos parâmetros extremais diminuem com o aumento de  $r$ , ainda que uma certa estabilidade ocorra a partir de  $r_3$  para  $se(\hat{\delta}, \hat{\gamma})$  e entre  $r_2-r_5$  e  $r_5-r_{10}$  para  $se(\hat{\gamma})$ . Portanto, espera-se uma escolha adequada entre  $r=2$  e  $r=5$ .

Tabela 4.10 – Estimativa de log-verossimilhança maximizada, estimativa dos parâmetros extremais (localização, escala e forma) com os correspondentes erros-padrão e intervalo com 95% de confiança para o parâmetro de forma do modelo GEV-multivariado para  $1 \leq r \leq 10$ , referentes ao lançamento do peso masculino, no período de 1980-2017.

Lançamento do peso: homens								
$r$	$\ell$	$\hat{\lambda}$	$se(\hat{\lambda})$	$\hat{\delta}$	$se(\hat{\delta})$	$\hat{\gamma}$	$se(\hat{\gamma})$	$IC_{95\%}(\gamma)$
1	-16.511	22.149	0.067	0.385	0.045	-0.3089	0.0794	(-0.4645; -0.1533)
2	-11.087	22.171	0.061	0.413	0.031	-0.3702	0.0602	(-0.4881; -0.2522)
3	16.202	22.208	0.055	0.390	0.022	-0.3637	0.0500	(-0.4617; -0.2657)
4	49.729	22.215	0.053	0.380	0.019	-0.3518	0.0461	(-0.4421; -0.2614)
5	84.291	22.230	0.052	0.381	0.017	-0.3659	0.0408	(-0.4459; -0.2859)
6	129.301	22.222	0.050	0.377	0.017	-0.3484	0.0402	(-0.4271; -0.2697)
7	184.922	22.227	0.048	0.369	0.017	-0.3408	0.0373	(-0.4138; -0.2678)
8	236.362	22.235	0.047	0.367	0.016	-0.3447	0.0349	(-0.4131; -0.2763)
9	293.337	22.225	0.047	0.368	0.018	-0.3289	0.0361	(-0.3997; -0.2581)
10	361.450	22.218	0.046	0.366	0.019	-0.3150	0.0355	(-0.3846; -0.2454)

Na amostra de **lançamento do dardo feminino** (Tabela 4.11), observa-se que valores crescentes de  $r$  correspondem a uma certa flutuação das estimativas dos parâmetros extremais. No parâmetro de localização a modificação mais pronunciada ocorre de  $r_5$  para  $r_6$ ; no parâmetro de escala de  $r_1$  para  $r_2$  e de  $r_4$  para  $r_5$ ; no parâmetro de forma, as modificações mais importantes verificam-se de  $r_1$  para  $r_2$  e de

$r_5$  para  $r_6$ . Em termos globais, ocorre uma relativa estabilidade do parâmetro de localização de  $r_3, \dots, r_5$  e de  $r_6, \dots, r_8$ , no parâmetro de escala de  $r_2$  para  $r_4$  e de  $r_5, \dots, r_{10}$ , e no parâmetro de forma de  $r_2, \dots, r_5$  bem como de  $r_6, \dots, r_{10}$ . Para todos os níveis de  $r$ , observa-se que  $\hat{\gamma} > -0.5$ , garantindo as condições de regularidade da máxima verosimilhança. Os erros-padrão são globalmente decrescentes. Contudo, verifica-se uma certa estabilidade dos erros-padrão entre  $r_2-r_4$  e  $r_4-r_{10}$  para  $se(\hat{\lambda})$ , entre  $r_2-r_5$  e  $r_6-r_{10}$  para  $se(\hat{\delta})$  e entre  $r_3-r_6$  e  $r_6-r_{10}$  para  $se(\hat{\gamma})$ . Portanto, espera-se uma escolha adequada entre  $r=2$  e  $r=6$ .

Tabela 4.11 – Estimativa de log-verosimilhança maximizada, estimativa dos parâmetros extremais (localização, escala e forma) com os correspondentes erros-padrão e intervalo com 95% de confiança para o parâmetro de forma do modelo GEV-multivariado para  $1 \leq r \leq 10$ , referentes ao lançamento do dardo feminino, no período de 1999-2017.

Lançamento do dardo: mulheres								
$r$	$\ell$	$\hat{\lambda}$	$se(\hat{\lambda})$	$\hat{\delta}$	$se(\hat{\delta})$	$\hat{\gamma}$	$se(\hat{\gamma})$	$IC_{95\%}(\gamma)$
1	-37.733	68.669	0.525	1.716	0.441	-0.2625	0.3689	(-0.9855; 0.4604)
2	-59.156	68.723	0.398	1.643	0.201	-0.1741	0.2051	(-0.5761; 0.2279)
3	-72.643	68.768	0.343	1.628	0.175	-0.1881	0.1367	(-0.4560; 0.0798)
4	-77.936	68.733	0.313	1.589	0.172	-0.1510	0.1073	(-0.3613; 0.0594)
5	-87.194	68.698	0.316	1.637	0.173	-0.1631	0.0998	(-0.3587; 0.0325)
6	-95.490	68.872	0.306	1.618	0.143	-0.2629	0.0782	(-0.4162; -0.1097)
7	-96.108	68.873	0.299	1.611	0.141	-0.2607	0.0712	(-0.4003; -0.1211)
8	-102.543	68.884	0.301	1.635	0.142	-0.2758	0.0688	(-0.4106; -0.1411)
9	-95.913	68.831	0.300	1.645	0.152	-0.2457	0.0674	(-0.3777; -0.1136)
10	-88.905	68.802	0.300	1.659	0.160	-0.2273	0.0661	(-0.3568; -0.0977)

Na amostra de **lançamento do peso feminino** (Tabela 4.12), observa-se que valores crescentes de  $r$  correspondem a um aumento das estimativas pontuais do valor dos parâmetros de localização e escala (até  $r_8$ ) e diminuição do parâmetro de forma (até  $r_8$ ). A linearização para  $\hat{\lambda}$  ocorre entre  $r_2$  e  $r_8$ , para  $\hat{\delta}$  ocorre entre  $r_1$  e  $r_4$ , bem como entre  $r_4$  e  $r_{10}$ , e para  $\hat{\gamma}$  ocorre entre  $r_1$  e  $r_6$ , bem como entre  $r_6$  e  $r_{10}$ . A estabilidade dos erros-padrão verifica-se entre  $r_1-r_2$ ,  $r_3-r_4$  e  $r_5-r_{10}$  para  $se(\hat{\lambda})$ , entre  $r_2-r_6$  e  $r_6-r_{10}$  para  $se(\hat{\delta})$  e entre  $r_2-r_6$  e  $r_6-r_{10}$  para  $se(\hat{\gamma})$ . Portanto, espera-se uma escolha adequada entre  $r=1$  e  $r=6$ .

Tabela 4.12 – Estimativa de log-verosimilhança maximizada, estimativa dos parâmetros extremais (localização, escala e forma) com os correspondentes erros-padrão e intervalo com 95% de confiança para o parâmetro de forma do modelo GEV-multivariado para  $1 \leq r \leq 10$ , referentes ao lançamento do peso feminino, no período de 1986-2017.

Lançamento do peso: mulheres								
$r$	$\ell$	$\hat{\lambda}$	$se(\hat{\lambda})$	$\hat{\delta}$	$se(\hat{\delta})$	$\hat{\gamma}$	$se(\hat{\gamma})$	$IC_{95\%}(\gamma)$
1	-22.988	20.820	0.083	0.428	0.059	-0.0129	0.1092	(-0.2270; 0.2012)
2	-22.680	20.874	0.084	0.501	0.050	-0.0833	0.0904	(-0.2605; 0.0940)
3	-16.108	20.885	0.087	0.545	0.046	-0.1284	0.0806	(-0.2863; 0.0296)
4	-2.877	20.937	0.088	0.572	0.041	-0.1935	0.0645	(-0.3200; -0.0670)
5	21.879	20.973	0.086	0.572	0.037	-0.2142	0.0556	(-0.3232; -0.1052)
6	46.461	21.016	0.085	0.575	0.034	-0.2457	0.0473	(-0.3385; -0.1529)
7	78.781	21.035	0.083	0.572	0.033	-0.2515	0.0438	(-0.3374; -0.1656)
8	113.042	21.047	0.081	0.571	0.032	-0.2547	0.0416	(-0.3361; -0.1732)
9	159.536	21.048	0.079	0.564	0.033	-0.2451	0.0402	(-0.3239; -0.1664)
10	211.964	21.051	0.077	0.556	0.033	-0.2376	0.0383	(-0.3128; -0.1624)

#### 4.3.6. Escolha do modelo GEVr

Segundo Coles (2001), caso a aproximação assintótica seja válida para qualquer escolha de  $r$ , então as estimativas dos parâmetros devem ser estáveis quando o modelo é ajustado com estatísticas de ordem razoavelmente menor. Para uma escolha particular de  $r$ , a precisão do ajustamento deverá ser examinada com o maior detalhe possível. Nesta medida, realizamos a seleção do nível  $r$  mais adequado cumprindo 4 etapas:

- (1) estabilidade das estimativas dos parâmetros extremais (Anexo 4.3).
- (2) estabilidade dos erros-padrão das estimativas pontuais dos parâmetros (Anexo 4.4).
- (3) visualização dos PP-plot e QQ-plot, para os  $r^{(k)}$  níveis.
- (4) visualização dos PP-plot, QQ-plot, gráfico dos níveis de retorno a  $t$ -anos e histograma com a estimativa da curva de densidade para o máximo (Anexo 4.5).

Assim, comparando os resultados dos diferentes níveis  $r$  das Tabelas 4.7 à 4.12 e dos Anexos 4.3 e 4.4, notamos que na maior parte das amostras quer as estimativas pontuais dos parâmetros extremais GEVr quer dos respectivos erros-padrão não modificam substancialmente de  $r_2$  até  $r_5$ , bem como de  $r_6$  até  $r_{10}$ , assumindo nestes casos uma certa estabilidade. Paralelamente, coadjuvados pela análise diagnóstica dos PP-plot e QQ-plot dos  $r^{(k)}$  níveis, assim como os gráficos de ajustamento para o máximo: PP-plot, QQ-plot, gráfico dos níveis de retorno e o histograma com a estimativa da curva de densidade para o máximo (Anexo 4.5), bem como pelos argumentos teóricos inerentes à metodologia das  $r$ -maiores observações anuais onde é aconselhável não deixar que  $r$  seja demasiado grande, para além do compromisso variância-viés, decidimos considerar para cada amostra, os seguintes modelos cujas estimativas (estimativa pontual, erro-padrão e intervalo com 95% de confiança dos parâmetros extremais da distribuição GEVr) se apresentam (de notar que são apresentadas estimativas pontual e erros-padrão mais precisos do que as apresentadas nas Tabelas 4.7 à 4.12):

#### + HOMENS

- Lançamento do dardo: nível  $r=2$

$$\hat{\lambda} = 90.7646474 (0.37845981), \quad IC_{95\%}(\lambda) = (90.023; 91.506)$$

$$\hat{\delta} = 2.3025901 (0.20442001), \quad IC_{95\%}(\delta) = (1.902; 2.703)$$

$$\hat{\gamma} = -0.1687624 (0.07484277), \quad IC_{95\%}(\gamma) = (-0.3155; -0.0221)$$

- Lançamento do disco: nível  $r=2$

$$\hat{\lambda} = 70.2428915 (0.21976212), \quad IC_{95\%}(\lambda) = (69.812; 70.674)$$

$$\hat{\delta} = 1.4730757 (0.11224793), \quad IC_{95\%}(\delta) = (1.253; 1.693)$$

$$\hat{\gamma} = -0.2957485 (0.06178693), \quad IC_{95\%}(\gamma) = (-0.4169; -0.1746)$$



- Lançamento do martelo: nível  $r=3$

$$\hat{\lambda} = 83.4710767 (0.18637976), \quad IC_{95\%}(\lambda) = (83.106; 83.836)$$

$$\hat{\delta} = 1.3147034 (0.07928214), \quad IC_{95\%}(\delta) = (1.159; 1.470)$$

$$\hat{\gamma} = -0.3023334 (0.05184411), \quad IC_{95\%}(\gamma) = (-0.4039; -0.2007)$$

- Lançamento do peso: nível  $r=3$

$$\hat{\lambda} = 22.2077393 (0.05537015), \quad IC_{95\%}(\lambda) = (22.099; 22.316)$$

$$\hat{\delta} = 0.3902789 (0.02237209), \quad IC_{95\%}(\delta) = (0.346; 0.434)$$

$$\hat{\gamma} = -0.3636916 (0.04999481), \quad IC_{95\%}(\gamma) = (-0.4617; -0.2657)$$

## + MULHERES

- Lançamento do dardo: nível  $r=4$

$$\hat{\lambda} = 68.7325078 (0.3126425), \quad IC_{95\%}(\lambda) = (68.120; 69.345)$$

$$\hat{\delta} = 1.5891904 (0.1717795), \quad IC_{95\%}(\delta) = (1.253; 1.926)$$

$$\hat{\gamma} = -0.1509867 (0.1073269), \quad IC_{95\%}(\gamma) = (-0.3613; 0.0594)$$

- Lançamento do peso: nível  $r=2$

$$\hat{\lambda} = 20.87448 (0.08384171), \quad IC_{95\%}(\lambda) = (20.710; 21.039)$$

$$\hat{\delta} = 0.5010729 (0.04954299), \quad IC_{95\%}(\delta) = (0.404; 0.598)$$

$$\hat{\gamma} = -0.08325537 (0.0904445), \quad IC_{95\%}(\gamma) = (-0.2605; 0.094)$$

### 4.3.7. Diagnóstico do modelo

Após estimados os parâmetros extremais e selecionado o modelo  $GEV_r$  mais adequado, procedemos ao seu diagnóstico. Os parâmetros  $(\lambda, \delta, \gamma)^r$  são os correspondentes na distribuição  $GEV$  de máximos de blocos, e por esta razão a verificação do ajustamento do modelo por metodologias gráficas são muito similares.

As Figuras 4.6 a 4.11, representadas pelos *PP-plot* (à esquerda) e *QQ-plot* (à direita), referem-se aos modelos com melhor ajustamento aos máximos anuais baseados no nível  $r$  mais adequado em cada amostra. A única diferença entre estes gráficos baseia-se no facto de no *QQ-plot* os valores observados (quantis) serem usados, ao passo que no *PP-plot* as probabilidades acumuladas são usadas no traçado do gráfico.

As Figuras 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9 representam os modelos com melhor ajustamento nas amostras de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso masculino, respetivamente, e as Figuras 4.10 e 4.11 nas

amostras de lançamentos do dardo e peso feminino, respetivamente. Nestas figuras, o *locus* de pontos está concentrado sobre a reta ajustada ou na sua proximidade, indicando que a distribuição GEV modela bem os dados amostrais. Não obstante, ligeiros desvios que se verificam na amostra de lançamento do dardo masculino nas caudas inferior e superior do *QQ-plot*, no lançamento do disco masculino na cauda superior do *QQ-plot*, no lançamento do martelo masculino na cauda inferior do *QQ-plot* e um pouco a região central do *PP-plot*, no lançamento do peso masculino na cauda inferior do *QQ-plot* e a região central do *PP-plot*, e no lançamento do peso feminino na cauda superior do *QQ-plot*. Estes ligeiros desvios não parecem ser suficientemente importantes para provocar um desajuste global, pelo que consideramos que cada um dos modelos selecionados se mostrou robusto na explicação do comportamento dos dados. Em certos casos, decorrente do facto do *PP-plot* e do *QQ-plot* conterem a mesma informação embora expressa em diferentes escalas, ocorre que numa escala o ajustamento seja adequado e noutra escala não. Esta situação parece estar mais presente na amostra masculina de lançamento do martelo (Figura 4.8). Todavia, segundo Coles (2001) o mais importante é observar o *QQ-plot*. Neste caso, a maioria dos pontos, em todas as amostras, estão na proximidade da reta de referência, sugerindo um razoável/bom ajustamento do modelo GEV aos dados disponíveis.

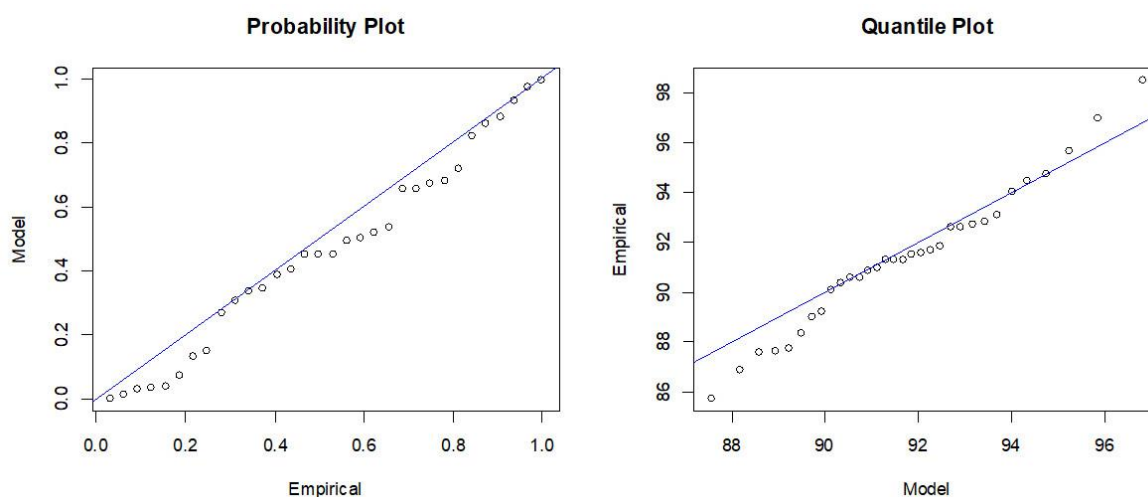


Figura 4.6 – Gráficos de diagnóstico *PP-plot* e *QQ-plot* do modelo GEV ajustados aos máximos anuais, baseados no modelo  $r=2$ , para o **lançamento do dardo masculino**, 1986-2017.

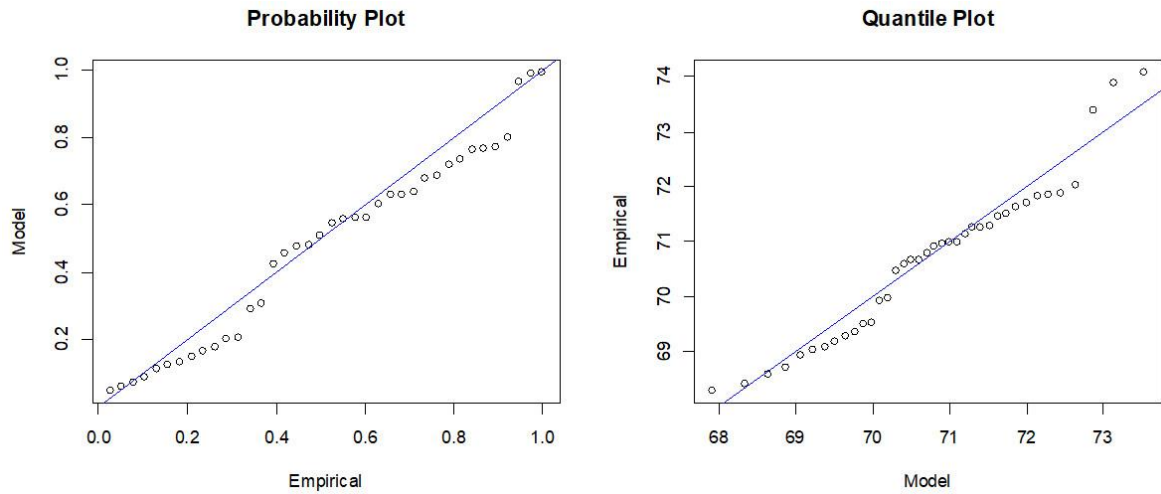


Figura 4.7 – Gráficos de diagnóstico PP-plot e QQ-plot do modelo GEV ajustados aos máximos anuais, baseados no modelo  $r=2$ , para o **lançamento do disco masculino**, 1980-2017.

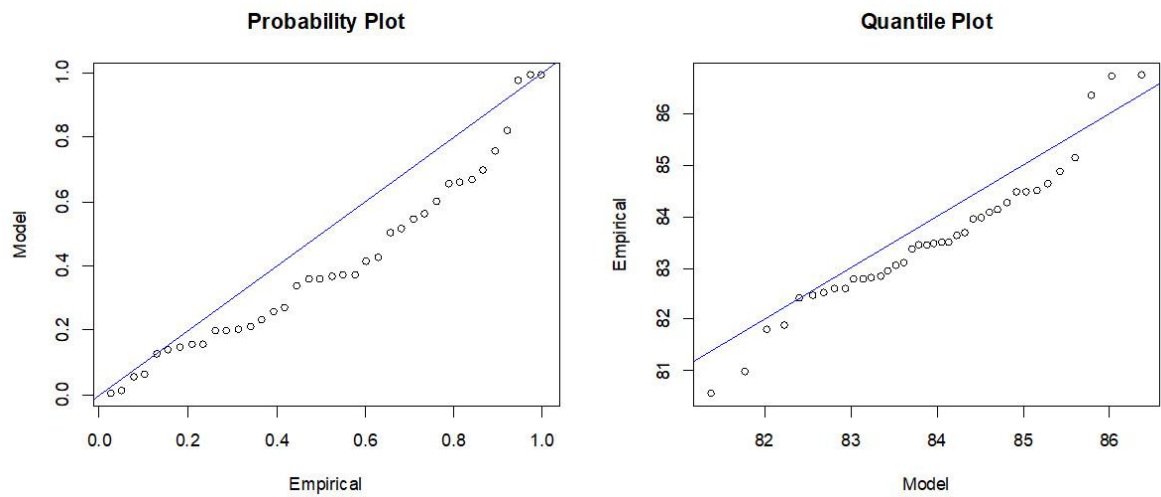


Figura 4.8 – Gráficos de diagnóstico PP-plot e QQ-plot do modelo GEV ajustados aos máximos anuais, baseados no modelo  $r=3$ , para o **lançamento do martelo masculino**, 1980-2017.

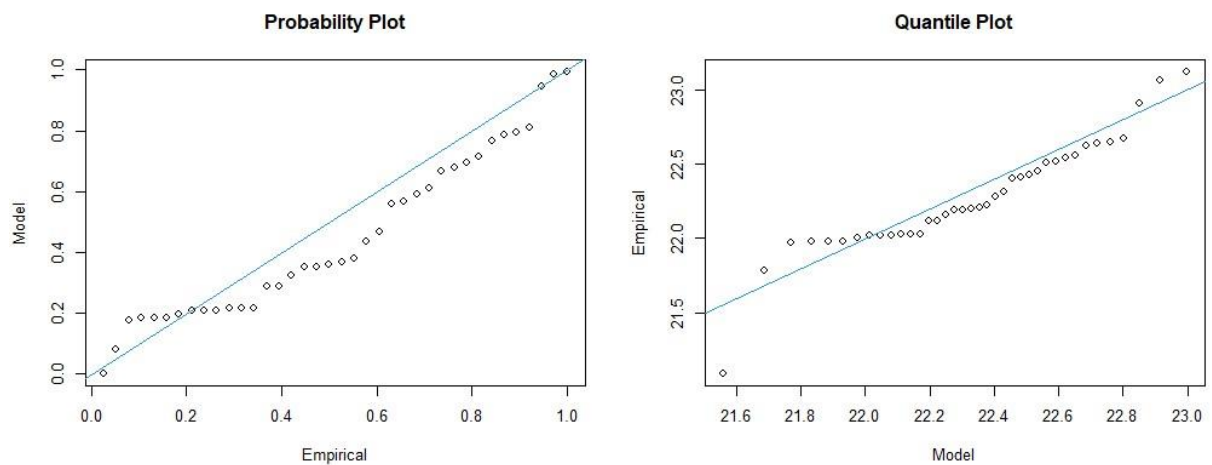


Figura 4.9 – Gráficos de diagnóstico PP-plot e QQ-plot do modelo GEV ajustados aos máximos anuais, baseados no modelo  $r=3$ , para o **lançamento do peso masculino**, 1980-2017.

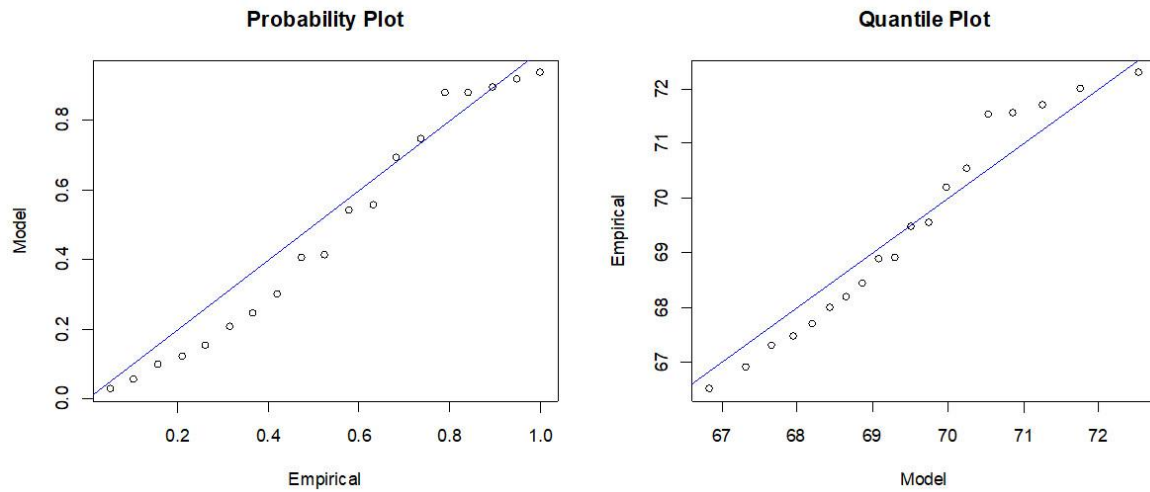


Figura 4.10 – Gráficos de diagnóstico PP-plot e QQ-plot do modelo GEV ajustados aos máximos anuais, baseados no modelo  $r=4$ , para o **lançamento do dardo feminino**, 1999-2017.

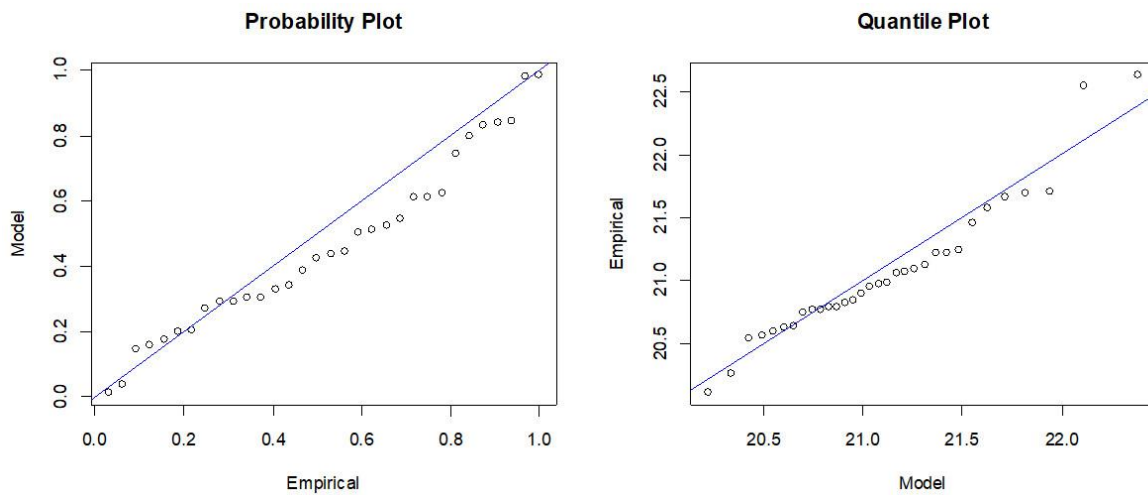


Figura 4.11 – Gráficos de diagnóstico PP-plot e QQ-plot do modelo GEV ajustados aos máximos anuais, baseados no modelo  $r=2$ , para o **lançamento do peso feminino**, 1986-2017.

### 4.3.8. Estimar outras quantidades de interesse

Para o modelo ajustado em cada amostra, apresenta-se seguidamente a estimativa de alguns quantis extremais, da probabilidade de excedência, do limite superior do suporte (dado que  $\gamma < 0$ ) e dos valores de retorno.

#### 4.3.8.1. Quantis extremais

A Tabela 4.13 apresenta a estimativa pontual de alguns quantis extremais (segundo a expressão [4.12]), bem como os respetivos intervalos com 95% de confiança, obtidos segundo o método delta e a aproximação assintótica à distribuição Normal (em [4.18]) e pela função *profile log-likelihood* (em [4.19]). A vantagem em usar a função *profile log-likelihood* em vez do método delta reside no facto dos intervalos de confiança serem assimétricos. Isto é especialmente útil em quantis extremais elevados ou em grandes períodos de retorno. Nesta tese, calculamos os seguintes quantis extremais,  $\hat{q}_{1-1/t}$ , com  $t=1/p$ , para  $p=(0.005, 0.0025, 0.002, 0.001, 0.0005)$ , pelo que se tem  $\hat{q}_{0.995}, \hat{q}_{0.9975}, \hat{q}_{0.998}, \hat{q}_{0.999}, \hat{q}_{0.9995}$ , os quais correspondem aos níveis de retorno  $\hat{U}(200), \hat{U}(400), \hat{U}(500), \hat{U}(1000)$  e  $\hat{U}(2000)$ , respetivamente.

Em todas as amostras, qualquer que seja o quantil extremal calculado a sua estimativa pontual é superior ao atual recorde do mundo. Considerando os intervalos com 95% de confiança, apenas na amostra de lançamento do martelo masculino no  $\hat{q}_{0.9995}$ , na amostra de lançamento do dardo feminino em todos os quantis extremais e na amostra de lançamento do peso feminino nos  $\hat{q}_{0.999}$  e  $\hat{q}_{0.9995}$ , em todos estes casos pela função *profile log-likelihood*, o limite inferior do intervalo de confiança é superior ao atual recorde do mundo.

Tabela 4.13 – Estimativa pontual de alguns quantis extremais e intervalo com 95% de confiança, segundo o método delta e a aproximação assintótica à Normal (\*) e a função *profile log-likelihood* (\*\*), para o modelo GEVr ajustado a cada amostra.

	<i>r</i>	RM	$\hat{q}_{0.995}$	$\hat{q}_{0.9975}$	$\hat{q}_{0.998}$	$\hat{q}_{0.999}$	$\hat{q}_{0.9995}$
<b>+ HOMENS</b>							
Lançamento do dardo	2	98.48	98.83 (95.87; 101.78)* (97.02; 104.53)**	99.44 (96.01; 102.87)* (97.43; 106.32)**	99.63 (96.04; 103.21)* (97.55; 106.89)**	100.16 (96.09; 104.22)* (97.86; 108.69)**	100.63 (96.09; 105.17)* (98.12; 110.50)**
Lançamento do disco	2	74.08	74.18 (73.28; 75.09)* (73.60; 75.78)**	74.38 (73.37; 75.39)* (73.76; 76.19)**	74.43 (73.32; 76.09)* (73.80; 76.32)**	74.58 (73.44; 75.71)* (73.91; 76.67)**	74.70 (73.48; 75.92)* (73.99; 76.99)**
Lançamento do martelo	3	86.74	86.94 (86.17; 87.72)* (86.43; 88.19)**	87.11 (86.26; 87.96)* (86.56; 88.51)**	87.16 (86.28; 88.03)* (86.60; 88.60)**	87.28 (86.33; 88.23)* (86.69; 88.86)**	87.38 (86.37; 88.40)* (86.75; 89.10)**
Lançamento do peso	3	23.12	23.12 (22.96; 23.29)* (23.02; 23.40)**	23.16 (22.98; 23.34)* (23.05; 23.47)**	23.17 (22.99; 23.35)* (23.06; 23.48)**	23.19 (23.00; 23.39)* (23.08; 23.53)**	23.21 (23.01; 23.42)* (23.10; 23.58)**
<b>+ MULHERES</b>							
Lançamento do dardo	4	72.28	74.53 (70.91; 78.14)* (72.42; 81.91)**	75.00 (70.79; 79.20)* (72.59; 84.01)**	75.14 (70.74; 79.54)* (72.64; 84.71)**	75.55 (70.55; 80.54)* (72.76; 86.97)**	75.91 (70.32; 81.50)* (72.85; 89.36)**
Lançamento do peso	2	22.63	23.02 (21.99; 24.05)* (22.40; 24.07)**	23.24 (21.98; 24.48)* (22.51; 25.83)**	23.30 (21.99; 24.62)* (22.54; 26.09)**	23.51 (21.96; 25.05)* (22.63; 26.94)**	23.70 (21.91; 25.48)* (22.71; 27.86)**

\* Método delta

\*\* *profile log-likelihood*

RM – recorde do mundo

### 4.3.8.2. Probabilidade de excedência

A Tabela 4.14 apresenta os valores da probabilidade de excedência (dada em [4.13]) num ano, do atual recorde do mundo (RM),  $P[C > RM]$ , para os modelos ajustados em cada amostra. De todas, a amostra de lançadoras do dardo regista a maior probabilidade de ultrapassar o atual recorde do mundo, para o efeito  $P[C > 72.28] = 6.36\%$ . A probabilidade de conseguir um novo máximo mundial parece ser mais difícil na amostra de lançadores do peso,  $P[C > 23.12] = 0.54\%$ .

Tabela 4.14 – Probabilidade de excedência do atual recorde do mundo, para o modelo  $GEV_r$  ajustado em cada amostra.

	$r$	$P[C > RM]$
<b>+ HOMENS</b>		
Lançamento do dardo	2	0.714%
Lançamento do disco	2	0.689%
Lançamento do martelo	3	0.992%
Lançamento do peso	3	0.540%
<b>+ MULHERES</b>		
Lançamento do dardo	4	6.360%
Lançamento do peso	2	1.576%

RM – recorde do mundo.

### 4.3.8.3. Limite superior do suporte

A Tabela 4.15 apresenta o limite superior do suporte (segundo [4.14]) dos modelos ajustados para cada amostra. As mulheres registam maior diferença absoluta e maior evolução relativa entre o limite superior do suporte e o atual recorde do mundo, especificamente 6.98m que corresponde a cerca de 9.7% de evolução no lançamento do dardo e 4.26m que corresponde a cerca de 18.8% de evolução no lançamento do peso. As diferenças absolutas e relativas mais reduzidas observam-se nas amostras de homens lançadores do disco, peso e do martelo, indicador de uma maior dificuldade em obter um novo máximo mundial nestas especialidades atléticas.

Tabela 4.15 – Estimativa pontual do limite superior do suporte, da diferença entre o limite superior do suporte e o atual recorde do mundo e a percentagem de variação, segundo o nível  $r$  ajustado em cada amostra.

	$r$	$\hat{x}^F$	$\hat{x}^F - \text{atual RM}$	% variação*
<b>+ HOMENS</b>				
Lançamento do dardo	2	104.41	5.93m	6.022 %
Lançamento do disco	2	75.22	1.14m	1.539 %
Lançamento do martelo	3	87.82	1.08m	1.245 %
Lançamento do peso	3	23.28	0.16m	0.692 %
<b>+ MULHERES</b>				
Lançamento do dardo	4	79.26	6.98m	9.657 %
Lançamento do peso	2	26.89	4.26m	18.825 %

RM – recorde do mundo.

$$* \text{ \% variação} = \frac{x^F - RM}{RM} \times 100$$

#### 4.3.8.4. Valores de retorno

Uma vez selecionado o nível  $r$  mais adequado, uma das principais, senão mesmo a principal, quantidade de interesse na EVT é a estimação dos níveis de retorno no tempo  $t$ , i.e.,  $U(t)$ . Como neste estudo o período se refere a anos, então o nível de retorno é o nível que se espera que seja excedido, em média, uma vez a cada  $t$ -anos.

A Tabela 4.16 apresenta as estimativas pontuais, segundo a expressão dada em [4.15], e respectivos intervalos com 95% de confiança segundo o método delta (\*) e a função *profile log-likelihood* (\*\*), pelas expressões em [4.18] e [4.19], respetivamente. Os níveis de retorno e respetivos intervalos com 95% de confiança foram calculados para os períodos de retorno a 2, 5, 10, 20, 50, 75 e 100 anos.

Os resultados mostram que nos lançamentos do dardo, disco e peso masculino nenhuma estimativa pontual excede o atual recorde do mundo. Em Anexo 4.6.1, para estas disciplinas atléticas no sexo masculino, constata-se que o recorde do mundo é excedido em média pelo menos uma vez a cada 141, 145 e 185 anos, respetivamente. No lançamento do martelo masculino, a estimativa para  $U(100)$  iguala o atual recorde do mundo. Nas amostras de mulheres, as estimativas pontuais nos lançamentos do dardo e do peso ultrapassam o atual recorde do mundo, a partir de inclusivamente  $\hat{U}(20)$  e  $\hat{U}(75)$ , respetivamente. Ou seja, o nível que se espera que seja excedido, em média, pelo menos uma vez nos próximos 20 e 75 anos é de 72.54m e 22.69m, respetivamente. Como é natural, as estimativas para  $U(2)$  são as mais distantes do recorde do mundo, sendo que neste caso os piores casos registam-se nos lançamentos do dardo masculino e peso feminino, cujas estimativas são cerca de 7% inferiores ao atual recorde do mundo. Nas restantes amostras, as estimativas no nível de retorno a 2-anos situam-se entre 3.2-4.5% abaixo do recorde do mundo. A partir da estimativa de  $\hat{U}(20)$ , com exceção das amostras de lançamentos do dardo e disco masculino e peso feminino, a diferença da estimativa pontual face ao recorde do mundo é inferior a 1%. Mais concretamente, estas amostras obtiveram-se estimativas pontuais inferiores a 1% da marca de recorde do mundo em  $\hat{U}(55)$ ,  $\hat{U}(26)$  e  $\hat{U}(34)$ , respetivamente (consultar Anexo 4.6.1).

Considerando os intervalos com 95% de confiança para  $U(t)$ , constata-se que comparativamente ao método delta, a função *profile log-likelihood* tem limites inferiores e superiores mais altos, exceto no lançamento do peso masculino na estimativa do nível de retorno  $\hat{U}(5)$  onde os limites inferiores dos intervalos de confiança obtidos pelos dois métodos são iguais. Em nenhum caso, o limite inferior do intervalo de confiança excede (ou iguala) o atual recorde do mundo. Assinalado com (●) estão os intervalos com 95% de confiança cujo limite superior excede o atual recorde do mundo. Em Anexo 4.6.2 e 4.6.3, pode observar-se, com mais rigor, a partir de que nível de retorno a  $t$ -anos o limite superior do  $IC_{95\%}$  excede o atual recorde do mundo, ou seja:

– HOMENS: no lançamento do dardo, pela função *profile log-likelihood*, começa a verificar-se a partir de  $\hat{U}(19)=(94.89; \mathbf{98.52})$  e pelo método delta a partir de  $\hat{U}(31)=(94.96; \mathbf{98.53})$ ; no lançamento do

disco, pela função *profile log-likelihood*, começa a verificar-se a partir de  $\hat{U}(22)=(72.72; \mathbf{74.11})$  e pelo método delta a partir de  $\hat{U}(33)=(72.80; \mathbf{74.09})$ ; no lançamento do martelo, pela função *profile log-likelihood*, começa a verificar-se a partir de  $\hat{U}(20)=(85.63; \mathbf{86.77})$  e pelo método delta a partir de  $\hat{U}(27)=(85.66; \mathbf{86.75})$ ; no lançamento do peso, pela função *profile log-likelihood*, começa a verificar-se a partir de  $\hat{U}(25)=(22.84; \mathbf{23.13})$  e pelo método delta a partir de  $\hat{U}(38)=(22.86; \mathbf{23.13})$ .

– MULHERES: no lançamento do dardo, pela função *profile log-likelihood*, começa a verificar-se a partir de  $\hat{U}(5)=(70.09; \mathbf{72.31})$  e pelo método delta a partir de  $\hat{U}(12)=(70.54; \mathbf{73.42})$ ; no lançamento do peso, pela função *profile log-likelihood*, começa a verificar-se a partir de  $\hat{U}(14)=(21.74; \mathbf{22.67})$  e pelo método delta a partir de  $\hat{U}(20)=(21.73; \mathbf{22.65})$ .

Observação 4.16: o limite inferior do  $IC_{95\%}(U(t))$ , pela função *profile log-likelihood*, na amostra de lançadoras do dardo é superior ao atual recorde do mundo de 72.28m em  $\hat{U}(128)$ . Nas restantes amostras, quer pela função *profile log-likelihood* quer pelo método delta, de  $\hat{U}(2), \dots, \hat{U}(20)$ , o limite inferior do intervalo com 95% de confiança, é inferior ao atual recorde do mundo.

Observação 4.17: a assimetria dos intervalos de confiança obtidos pela função *profile log-likelihood* são particularmente úteis em grandes períodos de retorno e com amostras de pequena dimensão.



Tabela 4.16 – Estimativa pontual dos níveis de retorno por máxima verosimilhança a 2, 5, 10, 20, 50, 75 e 100 anos para o nível  $r$  ajustado em cada amostra e intervalos com 95% de confiança segundo o método delta e a função *profile log-likelihood*.

	$r$	$\hat{U}(2)$	$\hat{U}(5)$	$\hat{U}(10)$	$\hat{U}(20)$	$\hat{U}(50)$	$\hat{U}(75)$	$\hat{U}(100)$
<b>+ HOMENS</b>								
Lançamento do dardo	2	91.58	93.82	95.08	96.14	97.35	97.82	98.13
		(90.79; 92.38)*	(92.81; 94.83)*	(93.83; 96.32)*	(94.59; 97.70)*	(95.28; 99.41)*●	(95.51; 100.13)*●	(95.64; 100.62)*●
		(90.82; 92.43)**	92.91; 95.07)**	(94.04; 96.88)**	(94.96; 98.65)**●	(95.93; 100.99)**●	(96.30; 102.02)**●	(96.53; 102.75)**●
Lançamento do disco	2	70.75	72.03	72.66	73.15	73.65	73.83	73.95
		(70.31; 71.20)*	(71.54; 72.51)*	(72.14; 73.19)*	(72.56; 73.74)*	(72.95; 74.36)*●	(73.07; 74.59)*●	(73.14; 74.75)*●
		(70.32; 71.22)**	(71.57; 72.57)**	(72.19; 73.35)**	(72.66; 74.02)**	(73.13; 74.80)**●	(73.29; 75.11)**●	(73.40; 75.32)**●
Lançamento do martelo	3	83.93	85.06	85.62	86.05	86.48	86.64	86.74
		(83.55; 84.30)*	(84.65; 85.47)*	(85.17; 86.07)*	(85.54; 86.56)*	(85.87; 87.09)*●	(85.98; 87.30)*●	(86.05; 87.43)*●
		(83.56; 84.32)**	(84.67; 85.53)**	(85.22; 86.21)**	(85.63; 86.78)**●	(86.03; 87.42)**●	(86.17; 87.66)**●	(86.26; 87.83)**●
Lançamento do peso	3	22.34	22.66	22.81	22.92	23.02	23.06	23.08
		(22.23; 22.45)*	(22.55; 22.77)*	(22.69; 22.92)*	(22.80; 23.04)*	(22.88; 23.16)*●	(22.91; 23.20)*●	(22.93; 23.23)*●
		(22.24; 22.46)**	(22.55; 22.78)**	(22.70; 22.95)**	(22.81; 23.09)**	(22.92; 23.24)**●	(22.95; 23.29)**●	(22.98; 23.33)**●
<b>+ MULHERES</b>								
Lançamento do dardo	4	69.30	70.87	71.76	72.54	73.42	73.77	74.00
		(68.64; 69.96)*	(69.90; 71.83)*	(70.43; 73.10)*●	(70.75; 74.32)*●	(70.95; 75.88)*●	(70.98; 76.56)*●	(70.97; 77.03)*●
		(68.68; 70.06)**	(70.09; 72.31)**●	(70.81; 73.97)**●	(71.37; 75.67)**●	(71.90; 78.03)**●	(72.08; 79.12)**●	(72.20; 79.92)**●
Lançamento do peso	2	21.06	21.58	21.90	22.19	22.54	22.69	22.79
		(20.87; 21.24)*	(21.32; 21.84)*	(21.56; 22.25)*	(21.73; 22.65)*●	(21.89; 23.20)*●	(21.93; 23.45)*●	(21.95; 23.62)*●
		(20.88; 21.25)**	(21.36; 21.91)**	(21.62; 22.42)**	(21.86; 22.95)**●	(22.11; 23.73)**●	(22.20; 24.10)**●	(22.27; 24.37)**●

\* Método delta

\*\* *Profile log-likelihood*

● Limite superior do intervalo de confiança é superior ao atual recorde do mundo

No sexo masculino as Figuras 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15 e no sexo feminino as Figuras 4.16 e 4.17, apresentam a evolução dos níveis de retorno para períodos de retorno a 0.1 a 1000 anos nas provas de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso masculino, e lançamentos do dardo e peso feminino, considerando o modelo com melhor ajustamento em cada amostra. Estes gráficos, apresentados numa escala logarítmica, consistem na estimativa de máxima verosimilhança dos níveis de retorno,  $\hat{U}(t)$ , por oposição a  $-\ln(1-p)$ ,  $0 < p < 1$ . O índice de valores extremos define o “desenho” do gráfico e o comportamento do limite superior. Em todas as amostras, o gráfico dos níveis de retorno exibe um padrão convexo, pelo que  $\gamma < 0$ , com limite assintótico quando  $p \rightarrow 0$  em  $\lambda - \delta/\gamma$ .

As bandas de confiança, baseadas num intervalo com 95% de confiança, acopladas às estimativas empíricas são uma ferramenta importante na ajuda à avaliação do modelo. Nas amostras de lançamentos do dardo, martelo e peso masculino é visível algumas observações na cauda inferior (portanto, em baixos períodos de retorno) que estão ligeiramente aquém do limite inferior do intervalo com 95% de confiança, bem como uma observação nas amostras de lançamento do martelo e peso na cauda superior. Sendo este estudo de máximos, tais situações não parecem ser preocupantes. As amostras de lançamentos do dardo e peso feminino revelam boa qualidade de ajustamento. Globalmente, os valores extremos situam-se na proximidade da curva dos níveis de retorno e dentro da banda de confiança a 95%, demonstrando, por isso, concordância entre a função de distribuição empírica e a curva dos níveis de retorno. Em todas as amostras, independentemente do período de retorno, a banda com 95% de confiança tem amplitude em forma de funil, com a parte mais estreita situada nos níveis de retorno mais baixos (ou seja, correspondente às observações de menor magnitude), verificando-se uma abertura do funil à medida que se progride para períodos de retorno mais elevados.

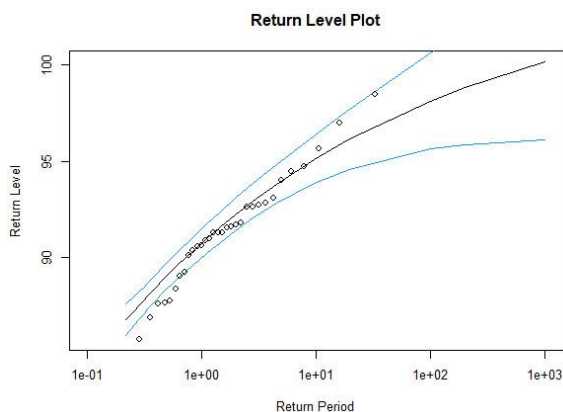


Figura 4.12 – Níveis de retorno e banda de confiança a 95% para vários períodos de retorno, para o modelo  $GEV_{r=2}$  ajustado para o LANÇAMENTO DO DARTO da amostra de HOMENS, no período de 1986-2017.

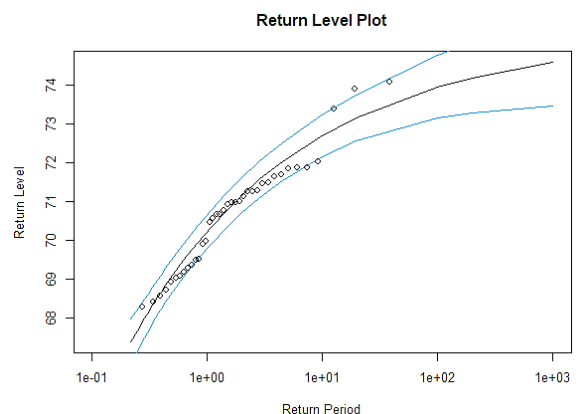


Figura 4.13 – Níveis de retorno e banda de confiança a 95% para vários períodos de retorno, para o modelo  $GEV_{r=2}$  ajustado para o LANÇAMENTO DO DISCO da amostra de HOMENS, no período de 1980-2017.

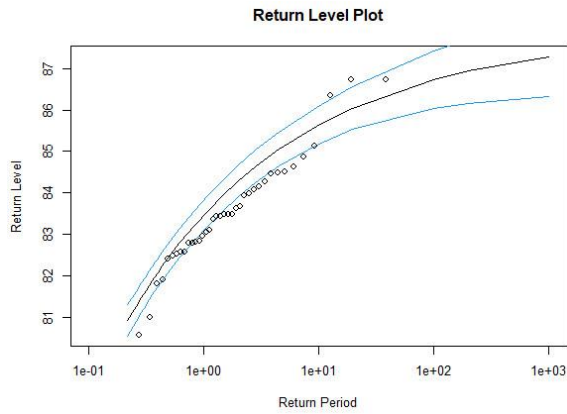


Figura 4.14 – Níveis de retorno e banda de confiança a 95% para vários períodos de retorno, para o modelo  $GEVr=3$  ajustado para o LANÇAMENTO DO MARTELO da amostra de HOMENS, no período de 1980-2017.

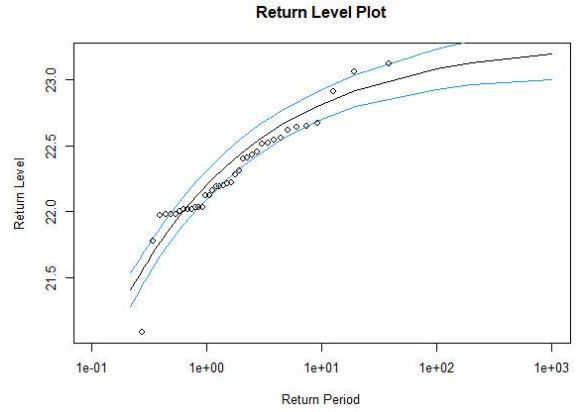


Figura 4.15 – Níveis de retorno e banda de confiança a 95% para vários períodos de retorno, para o modelo  $GEVr=3$  ajustado para o LANÇAMENTO DO PESO da amostra de HOMENS, no período de 1980-2017.

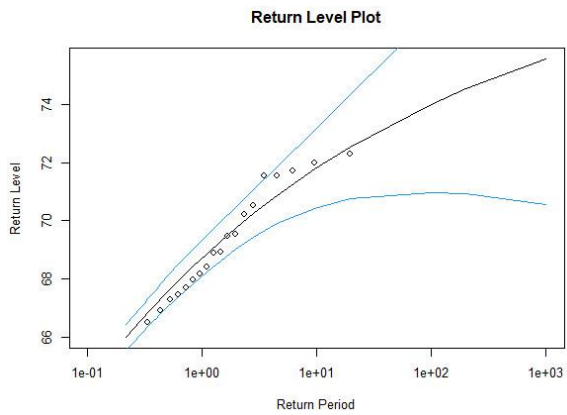


Figura 4.16 – Níveis de retorno e banda de confiança a 95% para vários períodos de retorno, para o modelo  $GEVr=4$  ajustado para o LANÇAMENTO DO DARTO da amostra de MULHERES, no período de 1999-2017.

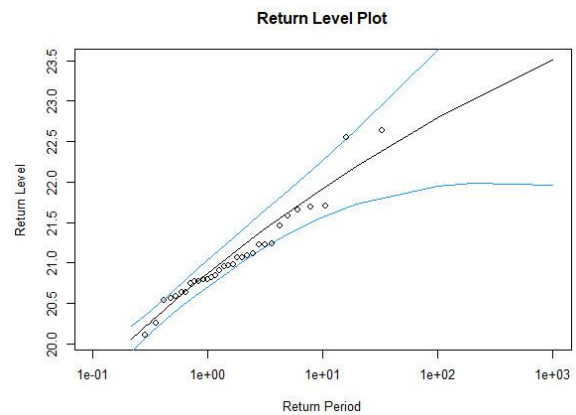


Figura 4.17 – Níveis de retorno e banda de confiança a 95% para vários períodos de retorno, para o modelo  $GEVr=2$  ajustado para o LANÇAMENTO DO PESO da amostra de MULHERES, no período de 1986-2017.

A Tabela 4.17 apresenta para cada amostra a estimativa pontual, o erro-padrão e o intervalo com 95% de confiança para o período de retorno de exceder o atual recorde do mundo. Ou seja, o tempo médio ( $T$ ) esperado para que um novo recorde do mundo ( $u$ ) ocorra.

No lançamento do dardo feminino é esperado que um novo máximo mundial possa ocorrer, em média, em 15.7 anos. Já no lançamento do peso masculino,  $T(u)=185.1$  anos. Nas amostras masculinas, verifica-se que  $T(u)>100$  anos, o que é revelador das dificuldades em exceder o respetivo recorde do mundo.

Tabela 4.17 – Estimativa pontual, erros-padrão e intervalos com 95% de confiança para o período de retorno (em anos), com vista à obtenção de um novo recorde do mundo, segundo o nível  $r$  ajustado em cada amostra.

	$r$	$\hat{T}(u)$	$se$	$IC_{95\%}$
<b>+ HOMENS</b>				
Lançamento do dardo	2	140.1	1.745183	(136.7; 143.5)
Lançamento do disco	2	145.2	0.762978	(143.7; 146.7)
Lançamento do martelo	3	100.8	0.610511	(99.6; 102.0)
Lançamento do peso	3	185.1	2.172535	(184.7; 185.5)
<b>+ MULHERES</b>				
Lançamento do dardo	4	15.7	0.470505	(14.8; 16.6)
Lançamento do peso	2	63.4	0.387948	(62.6; 64.2)

Em Anexo 4.6.1 encontram-se os registos dos níveis de retorno de  $U(2)$  a  $U(200)$  das amostras em estudo, em Anexo 4.6.2 e Anexo 4.6.3 os intervalos com 95% de confiança pelo método delta e pela função *profile log-likelihood*, respetivamente, e em Anexo 4.6.4 a 4.6.9 as respetivas representações gráficas. Verifica-se que todos os gráficos têm a convexidade voltada para cima, indicando que possuem limite assintótico quando  $p \rightarrow 0$  em  $\lambda - \delta / \gamma$ , pelo que neste caso a distribuição subjacente aos dados tem uma cauda mais leve de que esperado com a exponencial, ou seja,  $\gamma < 0$ .

#### 4.4. DISCUSSÃO

Considerar apenas a observação máxima de cada ano (i.e., de cada bloco) representa, aparentemente, uma perda de informação. Igualmente, em muitas aplicações apenas estão disponíveis os dados de um número reduzido de anos, o que associado a apenas um máximo por bloco pode resultar em estimativas pouco precisas. Explorando a informação de outras observações máximas, dentro de cada ano, leva à generalização do modelo GEV que é a distribuição limite para as  $r$ -maiores observações, denotada por  $GEV_r$ . A distribuição  $GEV_r$  caracteriza-se por ter os mesmos parâmetros da distribuição GEV, bem como a interpretação dos mesmos.

##### 4.4.1. Porquê o método das $r$ -maiores observações?

Usamos o método das  $r$ -maiores observações anuais por três razões:

- parece que nas aplicações, o método das  $r$ -MO não é muito utilizado devido a questões que rodeiam a seleção do nível  $r$ , sendo simplesmente substituído pelo método dos máximos de blocos ou pelo método dos excessos acima de um limiar, os quais são mais simples e consensuais.
- nunca antes foi usado com dados desportivos, exceto nos trabalhos de Silva et al. (2018, 2020).
- dado ser o método dos máximos de blocos anuais quando  $r=1$ , embora sendo uma extensão deste método quando  $r>1$ , possibilita o uso de mais informação proveniente dos dados disponíveis. Ou seja, parece existir um melhor ajustamento do modelo quando se consideram mais observações para além do máximo anual.

##### 4.4.2. O processo de modelação

O procedimento de modelação usado é o primeiro a ser realizado com aplicação a dados desportivos, para o efeito do atletismo, referentes aos lançamentos do dardo, disco, martelo e peso masculino e lançamentos do dardo e peso feminino. Usamos o método das  $r$ -maiores observações anuais, a distribuição GEV, a estimação dos parâmetros extremais por máxima verosimilhança e a otimização pelo algoritmo de Nelder-Mead para modelar eventos extremos nestas especialidades atléticas. Em cada amostra, foram considerados os modelos  $r=1,2,\dots,10$ . Foram excluídos os modelos  $r=11,12,\dots$  por apresentarem ajustamento inadequado.

##### 4.4.3. Seleção de modelos

Ainda que o acervo teórico da teoria de valores extremos seja sólido, diversos problemas práticos surgem nas aplicações. Um deles é a escolha do nível  $r$ . Uma vez que  $r$  não é explicitamente um parâmetro da função densidade de probabilidade conjunta apresentada em [4.2] ou [4.3], conforme  $\gamma \neq 0$  ou  $\gamma = 0$ , respetivamente, a seleção de modelos por meios habituais (e.g., critérios de AIC, AICc e BIC) não é adequada. O *trade-off* viés-variância existe quando se escolhe o nível  $r$ . À medida que  $r$  aumenta, a variância diminui uma vez que mais dados são usados na estimação, mas se  $r$  for demasiado grande, de

tal forma que a aproximação dos dados à distribuição  $GEV_r$  não pode ser assegurada, então o viés pode ocorrer.

As dificuldades em selecionar um modelo prendem-se com o facto de nenhum modelo poder ser melhor em todas as situações. Por esta razão, há que tomar decisões, nem sempre consensuais, mas as que parecem ser as mais adequadas para a escolha do modelo a considerar.

No presente estudo e para  $r > 10$ , de uma forma geral, o ajustamento não foi particularmente bom.

Portanto, de modo a avaliar a qualidade do ajustamento, na modelação estatística procura-se especificar um modelo que seja o mais concordante com estudos anteriores e com os dados recolhidos. Na maior parte das situações, conforme asseveram Coles (2001), Beirlant et al. (2004) e Cox (2005), a decisão passa pela observação gráfica, tais como o *PP-plot*, *QQ-plot*, níveis de retorno e histograma com a estimativa da curva de densidade. Destes, os gráficos de probabilidade-probabilidade e quantil-quantil são os mais usados. Estes gráficos contêm a mesma informação embora expressa em diferentes escalas. Contudo, pode ocorrer que numa escala o ajustamento seja adequado e noutra escala não. Para além disso, na ausência de um valor de prova, diferentes investigadores podem chegar a diferentes conclusões. Por isso, a interpretação pode ter um certo cunho de subjetividade. Daí que nesta tese a decisão tenha sido o resultado da visualização dos dois gráficos, *PP-plot* e *QQ-plot*, bem como a observação dos gráficos de estabilidade das estimativas pontuais dos parâmetros extremos (Anexo 4.3) e os gráficos da estabilidade dos erros-padrão respetivos (Anexo 4.4). Este último mostrou-se mais importante, na medida em que na prática, muitas vezes a recomendação para a escolha de  $r$  é baseada na quantidade de redução dos erros-padrão das estimativas (Smith, 1986; An & Pandey, 2007). Os testes formais disponíveis apenas indicam se há falta de ajustamento, não referindo o porquê dessa falta de ajuste. Paralelamente, os testes formais nem sempre estão em sintonia. Veja-se por exemplo as metodologias *Entropy Difference Test* (EDT) (para  $r > 1$ ), *Parametric Bootstrap Score Test* (PBST) e *Multiplier Bootstrap Test* (MBT) (ambos para  $r \geq 1$ ) (Bader, 2016, p.26-29), bem como a *Deviance* (Soares & Scotto, 2004), aplicadas às amostras de lançamento do dardo masculino e feminino do presente estudo (Tabela 4.18), do modelo “mais adequado” (1º) ao “menos adequado” (10º). Ou seja, as dificuldades existem, o problema está em aberto. Contrariamente a estes testes numéricos, as ferramentas *PP-plot* e *QQ-plot* permitiram responder afirmativamente à questão “um modelo específico fornece um ajuste plausível à distribuição da variável aleatória em estudo?”.

Tabela 4.18 – *Ranking* de níveis  $r^{(k)}$  nas amostras de lançamento do dardo masculino e feminino, com a aplicação dos testes *Entropy Difference test* (EDT), *Parametric Bootstrap Score Test* (PBST), *Multiplier Bootstrap Test* (MBT) e estatística *Deviance*.

$r$	RANK							
	EDT		PBST		MBT		Deviance	
	Homens	Mulheres	Homens	Mulheres	Homens	Mulheres	Homens	Mulheres
1	---	---	7°	6°	7°	9°	---	---
2	8°	1°	8°	7°	10°	4°	---	---
3	2°	2°	5°	4°	3°	1°	---	---
4	4°	7°	9°	5°	4°	5°	---	---
5	7°	5°	3°	8°	8°	8°	---	---
6	1°	4°	4°	3°	2°	10°	---	---
7	6°	3°	10°	1°	6°	2°	---	---
8	5°	8°	6°	9°	5°	7°	---	---
9	9°	9°	2°	10°	9°	6°	1°	---
10	3°	6°	1°	2°	1°	3°	---	1°

#### 4.4.4. Modelos selecionados

Neste estudo, usamos as 10 maiores observações anuais nas provas de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso nos homens, e lançamentos do dardo e peso nas mulheres. Verificou-se que:

- (1) para todas as amostras e todos os níveis  $r$ ,  $-0.5 < \hat{\gamma} < 0$ . Isto significa que se garantiram as condições de regularidade da máxima verosimilhança e que a distribuição subjacente aos máximos por bloco poderá ser Weibull, com cauda curta e com limite superior do suporte finito.
- (2) para cada amostra de homens, o parâmetro de forma apresenta estimativa pontual relativamente próxima para os vários níveis  $r$  ( $r_1, \dots, r_{10}$ ), especialmente entre os níveis  $r \geq 2$ . Nas mulheres, tal estabilidade verifica-se entre  $r_2$  e  $r_5$ , bem como entre  $r_6$  e  $r_{10}$  no lançamento do dardo, e entre  $r_1$  e  $r_6$  e  $r_6$  e  $r_{10}$  no lançamento do peso.
- (3) com base nas estimativas pontuais dos parâmetros extremais  $(\lambda, \delta, \gamma)$  e respectivos erros-padrão, o modelo  $r=1$  e os modelos  $r > 5$  foram rejeitados como melhor opção para todas as amostras.
- (4) a convergência para as  $r$ -MO foi previamente estudada (Deheuvels, 1989; Falk, 1989). Falk (1989) mostrou que a convergência para a distribuição [4.2] é  $o(r/B)$ , uniformemente em  $r$  e pode ser tão lenta como  $o(r/\ln(B))$  se a distribuição subjacente é normal. Daí que a rejeição inicial do modelo  $r=1$  seja indicativa que é necessário recorrer a níveis mais elevados, i.e.,  $r > 1$ .
- (5) com base no *ranking* da qualidade de ajustamento de modelos suportado pela informação do PP-plot e QQ-plot (Tabela 4.19), percebe-se que, de uma forma geral, os “melhores” modelos têm nível  $r \leq 5$ , com exceção da amostra de lançamento do dardo feminino. Esta informação sugere que um melhor ajustamento é conseguido quando se tomam mais observações por ano (i.e., por bloco), para além do máximo anual, ou seja, o melhor ajustamento do modelo ocorre com o aumento do número de observações por ano até a um nível  $r \leq 4$ .

Tabela 4.19 – *Ranking* de qualidade de ajustamento de modelos, segundo o *PP-plot* e o *QQ-plot*.

		<i>Ranking</i> de modelos, segundo o <i>PP-plot</i> e <i>QQ-plot</i>									
Amostras	Sexo	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
Lançamento do dardo	Homens	$r_2$	$r_4$	$r_1$	$r_3$	$r_8$	$r_6$	$r_5$	$r_9$	$r_7$	$r_{10}$
	Mulheres	$r_4$	$r_5$	$r_8$	$r_6$	$r_7$	$r_9$	$r_3$	$r_1$	$r_2$	$r_{10}$
Lançamento do disco	Homens	$r_2$	$r_3$	$r_9$	$r_4$	$r_1$	$r_5$	$r_6$	$r_8$	$r_{10}$	$r_7$
Lançamento do martelo	Homens	$r_3$	$r_1$	$r_4$	$r_5$	$r_2$	$r_7$	$r_6$	$r_8$	$r_9$	$r_{10}$
Lançamento do peso	Homens	$r_3$	$r_2$	$r_1$	$r_4$	$r_5$	$r_6$	$r_7$	$r_9$	$r_{10}$	$r_8$
	Mulheres	$r_2$	$r_1$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_6$	$r_8$	$r_7$	$r_9$	$r_{10}$

(5) o melhor modelo em cada amostra é:

	Homens	Mulheres
Lançamento do dardo	$r=2$	$r=4$
Lançamento do disco	$r=2$	---
Lançamento do martelo	$r=3$	---
Lançamento do peso	$r=3$	$r=2$

Estes resultados são condizentes com os trabalhos de Smith (1986), Coles (2001) e Caeiro et al. (2018) que afirmam que é conveniente que o nível  $r$  não seja demasiado grande de forma a controlar o viés.

#### 4.4.5. Outras quantidades de interesse e dificuldades em exceder o recorde do mundo

Quando se tem por objetivo extrapolar para áreas e para valores que não conhecemos, existirá sempre o elemento de dúvida. Todavia, a EVT faz bom uso dos dados disponíveis e do modelo selecionado como o mais adequado para ajudar a resolver este problema. Com a EVT podem-se estabelecer valores confiáveis para os níveis de retorno da performance atlética e para os períodos de retorno desses níveis, bem como quantificar a probabilidade de isso acontecer. Com isto, a EVT modificou o paradigma social de que os fenómenos atípicos quando acontecem são sempre devidos a uma exceção, ao acaso ou que sofreram a influencia de algum agente externo (no caso do desporto, entre outras, poderiam ser as condições atmosféricas, o apoio da plateia e/ou familiar, as ajudas “divinas”, as ajudas ergogénicas ou mesmo o *doping*).

Os níveis de retorno a  $t$ -anos são quantis extremos e são, porventura, os parâmetros mais importantes em eventos extremos. Conforme Anexo 4.6, nas amostras de homens, as estimativas pontuais dos níveis de retorno a 100-anos de todos os lançamentos são inferiores ao atual recorde do mundo. No caso da amostra de lançamento do martelo,  $\hat{U}(100) = 86.74$  iguala o recorde do mundo; nas amostras de mulheres, o recorde do mundo do lançamento do dardo é superado, em média pelo menos uma vez, a partir de  $\hat{U}(16)$  e do lançamento do peso a partir de  $\hat{U}(64)$ , inclusivamente. No caso particular do lançamento do dardo feminino, o estudo de Grycmann et al. (2015) prevê que desde 1999 (que é precisamente o ano inicial da recolha de dados do presente estudo) até à ocorrência de um novo máximo



mundial, se registre um aumento de 11%. Comparativamente aos resultados desta tese, verifica-se que esta percentagem é superior, ou seja,  $\hat{U}(16) = 72.299$ , então  $\frac{72.299 - 68.19}{68.19} \times 100 = 6.0258\% \sim 6\%$ .

A Tabela 4.20 apresenta, para cada amostra, o número de observações ( $k$ ) acima da estimativa pontual de cada nível de retorno associado a  $t=(2,5,10,20,50,75,100)$  anos, e respetivos rácios em função do número de observações usadas em cada nível  $r$  ajustado ( $k/n$ ). Como seria de esperar, o maior número de observações que iguala ou excede  $U(t)$ , com  $t=(2,5,10,20,50,75,100)$ , está presente nos níveis de retorno associados a pequenos valores de  $t$ , uma vez que naturalmente as estimativas são mais baixas. À medida que  $t$  aumenta, decorrente de valores  $p$  cada vez mais pequenos, pois  $U(t)=U(1/p)$ , com  $0 < p < 1$ , as estimativas dos níveis de retorno tornam-se cada vez mais altas, i.e., cada vez mais próximas ou acima do máximo amostral (atual recorde do mundo), reduzindo naturalmente a presença de observações amostrais que igualem ou excedam o respetivo nível de retorno. Os casos onde  $k=0$ , indicam que a estimativa pontual do nível de retorno associado a  $t$ -anos é superior ao máximo amostral.

Tabela 4.20 – Número de observações e respetivo rácio na amostra (entre parêntesis) em função do número de observações presentes em cada nível  $r$  ajustado que estão acima da estimativa pontual de cada nível de retorno associado a  $t$ -anos.

	Nível		Anos						
	$r$	$n$	2	5	10	20	50	75	100
<b>+ Homens</b>									
Lançamento do dardo	$r=2$	64	$k=18$ (0.2813)	$k=7$ (0.1094)	$k=3$ (0.0469)	$k=2$ (0.0313)	$k=1$ (0.0156)	$k=1$ (0.0156)	$k=1$ (0.0156)
Lançamento do disco	$r=2$	76	$k=27$ (0.3553)	$k=3$ (0.0395)	$k=3$ (0.0395)	$k=3$ (0.0395)	$k=2$ (0.0263)	$k=2$ (0.0263)	$k=1$ (0.0132)
Lançamento do martelo	$r=3$	114	$k=22$ (0.1930)	$k=6$ (0.0526)	$k=4$ (0.0351)	$k=3$ (0.0263)	$k=2$ (0.0175)	$k=2$ (0.0175)	$k=0$ (---)
Lançamento do peso	$r=3$	114	$k=22$ (0.1930)	$k=5$ (0.0439)	$k=3$ (0.0263)	$k=2$ (0.0175)	$k=2$ (0.0175)	$k=1$ (0.0088)	$k=1$ (0.0088)
<b>+ Mulheres</b>									
Lançamento do dardo	$r=4$	76	$k=15$ (0.1974)	$k=6$ (0.0789)	$k=2$ (0.0263)	$k=0$ (---)	$k=0$ (---)	$k=0$ (---)	$k=0$ (---)
Lançamento do peso	$r=2$	64	$k=18$ (0.2813)	$k=7$ (0.1094)	$k=3$ (0.0469)	$k=2$ (0.0313)	$k=2$ (0.0313)	$k=0$ (---)	$k=0$ (---)

$k$ , é o número de observações que excedem a estimativa pontual dos níveis de retorno a  $t=(2,5,10,20,50,75,100)$ .

Por definição, o nível de retorno a  $t$ -anos corresponde ao nível que se espera que seja excedido, em média, uma vez a cada  $t$ -anos. Assim, uma vez que a recolha de dados terminou em 31-12-2017, já é possível verificar se algum nível de retorno foi excedido. A Tabela 4.21 apresenta o número de máximos que excederam a estimativa pontual para cada nível de retorno a  $t$ -anos.

Tabela 4.21 – Número de performances ( $k$ ), em cada amostra, que desde 01-01-2018 até 31-12-2019 excederam  $U(t)$ .

	$\hat{U}(2)$	$\hat{U}(5)$	$\hat{U}(10)$
<b>+ Homens</b>			
Lançamento do dardo	$k=3$	$k=0$	---
Lançamento do disco	$k=2$	$k=0$	---
Lançamento do martelo	$k=0$	$k=0$	---
Lançamento do peso	$k=4$	$k=2$	$k=0$
<b>+ Mulheres</b>			
Lançamento do dardo	$k=0$	---	---
Lançamento do peso	$k=0$	---	---

Em cada especialidade dos lançamentos, em ambos os sexos, a melhor marca mundial em 2018 e 2019 e o respetivo quantil face ao atual recorde do mundo está apresentada na Tabela 4.22.

Tabela 4.22 – Melhores marcas mundiais nos anos de 2018 e 2019 nas provas de lançamentos e respetivos quantis face ao atual recorde do mundo.

	Homens		Mulheres	
	2018	2019	2018	2019
Lançamento do dardo	92.70 ( $x_{0.941}$ )	90.61 ( $q_{0.920}$ )	68.92 ( $q_{0.954}$ )	67.98 ( $q_{0.941}$ )
Lançamento do disco	69.72 ( $x_{0.941}$ )	71.86 ( $q_{0.970}$ )	---	---
Lançamento do martelo	81.85 ( $x_{0.944}$ )	81.74 ( $q_{0.942}$ )	---	---
Lançamento do peso	22.67 ( $x_{0.981}$ )	22.91 ( $q_{0.995}$ )	20.38 ( $q_{0.901}$ )	20.31 ( $q_{0.897}$ )

Fonte: <https://www.worldathletics.org/>

De forma a melhor perceber as dificuldades de obtenção de um novo máximo mundial, apresentamos na Tabela 4.23 o número de performances iguais ou superiores à marca «atual recorde do mundo – 0.05RM», obtidas em cada década, doravante designado por  $M$ . Nesta tabela também consta, para cada especialidade de lançamento, o valor mínimo definido pela IAAF para que uma marca obtida figure na lista das melhores marcas de sempre.

Constata-se que no lançamento do disco masculino e no lançamento do peso feminino, o maior número de observações iguais ou superiores a  $M$  ocorre na década inicial de registo, cujos recordes do mundo foram obtidos precisamente nesta década, mais concretamente em 1986 e 1987, respetivamente. O recorde do mundo do lançamento do martelo masculino, também obtido na década inicial de registo, tem valores de frequência absoluta mais elevados nas 2ª e 3ª década de registo. De uma forma geral, a década mais recente, com exceção do lançamento do peso masculino e o lançamento do dardo feminino, é a que regista frequência mais baixa, não obstante os grandes valores de  $N$  (i.e., o número de observações iguais ou superiores ao mínimo definido pela IAAF). Esta situação, aliada aos “grandes” valores de probabilidade de excedência,  $P[C > M]$ , apresentados na Tabela 4.25, não é suficientemente motivadora para a ocorrência de performances superiores à marca  $M$ .

A amostra do presente estudo de lançamento do peso feminino prevê a ocorrência, em média, de um novo recorde do mundo a cada 64 anos, contudo não deixamos de estranhar o facto desta especialidade atlética desde o ano 2000 não registar qualquer performance acima de  $M$ , ainda que

$P[C > 21.50] = 0.2348$ . No lançamento do dardo masculino nas últimas três décadas apenas duas performances excederam  $M$ , mas aqui já não estranhemos tanto, uma vez que o período de retorno esperado para exceder o atual recorde do mundo é de, aproximadamente, 140 anos. Também estranho, mas em sentido oposto ao caso do lançamento do peso feminino, é o lançamento do peso masculino, onde nas duas últimas décadas ocorreu um “considerável” número de performances acima de  $M$  ( $P[C > 21.96] = 0.8297$ ), ainda que o período de retorno para exceder o atual recorde do mundo seja de, aproximadamente, 185 anos.

Tabela 4.23 – Número de observações ( $k$ ) que igualaram ou excederam a marca «atual recorde do mundo – 5%RM» e número de observações iguais ou superiores ao mínimo definido pela IAAF ( $N$ ), obtidas em cada década.

	atual		Número de marcas iguais ou superiores $M$ , por década *				Mínimo IAAF
	RM	$M$	1980-1989	1990-1999	2000-2009	2010-2019	
<b>+ HOMENS</b>							
Lançamento do dardo	98.48	93.56	$k=0$ ( $N=78$ )	$k=1$ ( $N=121$ )	$k=0$ ( $N=150$ )	$k=2$ ( $N=173$ )	80.00
Lançamento do disco	74.08	70.38	$k=10$ ( $N=205$ )	$k=2$ ( $N=152$ )	$k=5$ ( $N=176$ )	$k=5$ ( $N=186$ )	62.00
Lançamento do martelo	86.74	82.40	$k=8$ ( $N=189$ )	$k=12$ ( $N=156$ )	$k=11$ ( $N=146$ )	$k=3$ ( $N=143$ )	74.00
Lançamento do peso	23.12	21.96	$k=12$ ( $N=246$ )	$k=4$ ( $N=153$ )	$k=6$ ( $N=197$ )	$k=17$ ( $N=270$ )	19.50
<b>+ MULHERES</b>							
Lançamento do dardo	72.28	68.67	---	$k=0$ ( $N=101$ )	$k=4$ ( $N=282$ )	$k=5$ ( $N=338$ )	55.00
Lançamento do peso	22.63	21.50	$k=9$ ( $N=97$ )	$k=3$ ( $N=85$ )	$k=0$ ( $n=107$ )	$k=0$ ( $N=94$ )	18.00

\* melhor marca por atleta “*best by athlete*”. Fonte: <https://www.worldathletics.org/>

$k$ , é o número de observações que igualaram ou excederam a marca  $M$ .

$N$ , é o número de observações iguais ou superiores ao mínimo definido pela IAAF.

$M=RM - 0.05RM$

As dificuldades em exceder o recorde do mundo são ainda mais facilmente percebidas se verificarmos quantas marcas ultrapassaram a marca «atual recorde do mundo – 0.01RM», que denotamos por  $V$ . A Tabela 4.24 mostra esses resultados. Verifica-se que um número muito reduzido de máximos pessoais se situou no intervalo  $[V, RM]$ , especialmente nas últimas três décadas, sendo mais evidente na última década, onde apenas três marcas no lançamento do peso masculino e uma marca no lançamento do dardo feminino uma marca excede  $V$ . Esta constatação, é reveladora das dificuldades em ultrapassar ou mesmo aproximar-se do atual máximo mundial, ajudando a comprovar o porquê das estimativas dos níveis de retorno só esperarem a ocorrência de um novo máximo mundial quando  $U(>100)$  nas provas de lançamentos masculinas e  $U(>60)$  na prova de lançamento do peso feminino. Fora dos altos períodos de retorno está o lançamento do dardo feminino com  $U(16)$ . Nesta amostra, nos últimos 20 anos registaram-se até 31-12-2019,  $k=3$  performances acima de  $V$ . O recorde do mundo do lançamento do dardo feminino obtido em 2008 por Barbara Spotakova (CHEC), tem tempo médio de espera até à ocorrência de um

novo recorde do mundo de aproximadamente 16 anos, registando-se que esta especialidade atlética com as alterações regulamentares teve início oficial em 1999. Daí que, pelo facto desta modalidade se encontrar numa fase inicial de desenvolvimento, a margem para obtenção de marcas de excelência é grande e a probabilidade de obter um novo máximo mundial é mais elevada,  $P[C > 72.28] = 6.36\%$ . Esta situação é corroborada pelos 11.83% de probabilidade de excedência (num ano) de  $V$ , i.e.,  $P[C > V] = 11.83\%$  (Tabela 4.25). Não obstante a quase ausência de performances acima de  $V$ , a Tabela 4.25 mostra que, em qualquer amostra, a probabilidade de excedência num ano de  $M$  ou  $V$  não é assim tão baixa. No caso do lançamento do dardo masculino, a única observação presente na década de 1990-1999, refere-se naturalmente ao atual recorde do mundo conseguido em 1996 por Jan Zelezny (CHEC). Também aqui houve em 1986 alterações regulamentares que levaram ao reiniciar dos recordes.

Tabela 4.24 – Número de observações que igualaram ou excederam a marca «atual recorde do mundo – 1%RM».

	atual RM	$V$	Número de marcas iguais ou superiores a $V$ , por década *			
			1980-1989	1990-1999	2000-2009	2010-2019
<b>+ HOMENS</b>						
Lançamento do dardo	98.48	97.50	0	1	0	0
Lançamento do disco	74.08	73.34	1	0	2	0
Lançamento do martelo	86.74	85.87	2	0	0	0
Lançamento do peso	23.12	22.89	2	1	0	3
<b>+ MULHERES</b>						
Lançamento do dardo	72.28	71.56	---	0	2	1
Lançamento do peso	22.63	22.40	2	0	0	0

\* melhor marca por atleta “*best by athlete*”. Fonte: <https://www.worldathletics.org/>

$N$ , é o número de marcas iguais ou acima do mínimo IAAF.

$V = RM - 0.01RM$

A Tabela 4.25 apresenta a probabilidade de excedência (num ano) de  $M$  e  $V$ .

Tabela 4.25 – Probabilidade de excedência (num ano) de  $M$  e  $V$ .

	$P[C > M]$	$P[C > V]$
<b>+ HOMENS</b>		
Lançamento do dardo	0.2267	0.0176
Lançamento do disco	0.5975	0.0367
Lançamento do martelo	0.8740	0.0680
Lançamento do peso	0.8297	0.0603
<b>+ MULHERES</b>		
Lançamento do dardo	0.6465	0.1183
Lançamento do peso	0.2348	0.0294

Uma outra forma de reforçar a compreensão acerca das dificuldades em obter performances elevadas e, principalmente, um novo máximo mundial, está ligada ao conhecimento da marca de apuramento (MQ) fixada previamente pela IAAF para acesso direto à final olímpica, e a partir dela, quantos atletas conseguiram a qualificação para a final ( $nQ$ ) e quantos atletas igualaram ou excederam MQ na final ( $nF$ ) (Tabela 4.26). Importa referir que MQ é definida em função do desenvolvimento da modalidade no ciclo

olímpico. Do total de atletas participantes na fase de qualificação (*NQ*), têm acesso à final os 12 atletas que obtiverem as melhores marcas da qualificação, ou todos os atletas que tenham obtido na fase de qualificação uma marca igual ou superior a *MQ*. Na fase de qualificação cada atleta tem direito a 3 tentativas, sendo estes registros eliminados na final onde os atletas também têm 3 ou 6 tentativas, dependendo da prova de lançamento e dos Jogos Olímpicos.

Com exceção do lançamento do peso feminino e do lançamento do martelo masculino, nas restantes especialidades de lançamentos verifica-se uma tendência do incremento do valor da marca de apuramento para a final olímpica, de jogos olímpicos para jogos olímpicos. Logicamente que este incremento deverá estar associado à maior facilidade dos atletas em conseguirem performances de excelência, mas ainda assim não suficientemente alto para dificultar o apuramento direto para a final. Apenas no lançamento do peso masculino, nos Jogos Olímpicos de Moscovo, em 1980, os 12 lugares de acesso direto à final foram conseguidos por mérito desportivo, ainda que na final apenas 9 atletas tivessem obtido marca acima do registo de qualificação. Também no lançamento do peso, mas no sexo feminino, os Jogos Olímpicos de Seul, em 2008, ficam marcados por ter sido a única vez que foram superados os 12 lugares de acesso direto à final (para o efeito, 15 atletas) por mérito desportivo. Contudo, na final, apenas 7 atletas foram capazes de superar a marca de qualificação.

Tabela 4.26 – Marcas de qualificação para a final olímpica fixada pela IAAF (MQ), número total de atletas que participaram na fase de qualificação (NQ), número de atletas qualificados para a final (nQ) e número de atletas que na final obtiveram registos iguais ou superiores a MQ (nF), nas provas de lançamentos do atletismo.

		1980	1984	1988	1992	1996	2000	2004	2008	2012	2016
<b>HOMENS</b>											
Lançamento do dardo	MQ	80.00	83.00	79.00	80.00	83.00	83.00	81.00	81.00	82.50	83.00
	NQ	18	28	38	32	34	36	33	38	44	37
	nQ	10	1	7	3	4	5	10	10	3	9
	nF	9	3	5	5	4	4	8	8	7	6
Lançamento do disco	MQ	62.00	62.00	64.00	63.00	62.50	64.00	64.50	64.50	65.00	65.50
	NQ	18	19	29	32	40	46	39	37	41	35
	nQ	9	6	3	3	9	7	3	6	6	2
	nF	8	9	7	3	9	8	6	6	7	4
Lançamento do martelo	MQ	72.00	72.00	77.00	76.00	76.50	77.50	78.00	78.00	78.00	76.50
	NQ	17	23	30	27	37	44	35	33	40	32
	nQ	8	8	8	8	8	5	5	5	3	2
	nF	8	9	7	8	10	7	5	8	4	3
Lançamento do peso	MQ	19.60	19.70	20.20	19.80	19.80	20.10	20.40	20.40	20.65	20.65
	NQ	16	19	21	26	36	37	39	41	39	34
	nQ	12	8	5	10	7	4	6	5	5	6
	nF	9	7	8	9	8	8	4	7	8	6
<b>MULHERES</b>											
Lançamento do dardo	MQ	---	---	---	---	---	61.50	61.00	61.50	62.00	63.00
	NQ	---	---	---	---	---	35	45	54	41	31
	nQ	---	---	---	---	---	3	11	8	9	8
	nF	---	---	---	---	---	3	8	7	6	7
Lançamento do peso	MQ	---	19.70	19.50	18.50	18.80	18.50	18.50	18.40	18.90	18.40
	NQ	14	13	25	17	25	25	37	35	31	36
	nQ	---	8	10	8	9	7	9	15	4	6
	nF	---	7	9	9	7	7	8	7	7	6

MQ – marca fixada previamente pela IAAF como mínimo de qualificação direta para a final olímpica.

NQ – número de atletas participantes na fase de qualificação. Foram excluídos os casos de “desqualificação por doping” e que “não iniciaram a competição”, mas foram incluídos os casos “não obtiveram marcas válidas”, decorrentes de ensaios nulos.

nQ – número de atletas que conseguiram a qualificação para a final, dado terem obtido marcas iguais a MQ ou terem sido repescados. Foram excluídos os casos de “desqualificação”.

nF – número de atletas que na final olímpica obtiveram marcas com valor igual ou superior a MQ. Foram excluídos os casos de “desqualificação”.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Javelin\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Javelin_throw)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Discus\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Discus_throw)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Hammer\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Hammer_throw)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Shot\\_put](https://en.wikipedia.org/wiki/Shot_put)

Se considerarmos apenas os últimos Jogos Olímpicos, realizados em 2016 no Rio de Janeiro (Brasil) (Tabela 4.27), verifica-se que a marca de qualificação fixada previamente pela IAAF de acesso direto à final não excede, em qualquer especialidade de lançamento, o quantil 0.90 relativamente ao atual recorde do mundo. Este elemento mostra as dificuldades em obter um apuramento direto, sendo necessário baixar o limiar de acesso de modo a possibilitar a um maior número de atletas o sucesso desportivo. Ou, estatisticamente falando, aumentar a possibilidade de ocorrer um “extremo *outlier*”. Mesmo assim, apenas no lançamento do dardo (homens e mulheres), mais de 20% dos atletas conseguiram o apuramento direto para a final, sendo que nos lançamentos do disco e martelo masculino a qualificação direta foi conseguida por menos de 10% dos atletas.

Tabela 4.27 – Marca de qualificação fixada previamente pela IAAF nas provas de lançamentos do atletismo nos Jogos Olímpicos do Rio de Janeiro (Brasil) em 2016 e respetivo quantil face ao atual recorde do mundo, bem como a percentagem de atletas que na fase de qualificação igualou a marca de qualificação fixada pela IAAF, e a diferença entre o recorde do mundo e a marca de qualificação.

	MQ (JO/2016)	$x_{RM}$	% <sup>MQ</sup>	RM – MQ
<b>HOMENS</b>				
Lançamento do dardo	83.00	$x_{0,843}$	24.3	15.48
Lançamento do disco	65.50	$x_{0,884}$	5.7	8.58
Lançamento do martelo	76.50	$x_{0,882}$	6.3	10.24
Lançamento do peso	20.65	$x_{0,893}$	17.6	2.47
<b>MULHERES</b>				
Lançamento do dardo	63.00	$x_{0,872}$	25.8	9.28
Lançamento do peso	18.40	$x_{0,813}$	16.7	4.23

MQ, é a marca de qualificação fixada pela IAAF.

RM, é o atual recorde do mundo.

$x_{RM}$ , é o quantil face ao atual recorde do mundo.

%<sup>MQ</sup>, percentagem de atletas que conseguiram igualar MQ.

Não podemos deixar de especular que associado às dificuldades em conseguir um novo máximo mundial estarão não apenas o superatleta com um potencial genético e epigenético favoráveis, mas também as facilidades em registar negativo num qualquer controlo antidoping especialmente nos anos anteriores a 1993, apesar dos esforços de em 1990 se ter adicionado novas substâncias à lista de produtos proibidos. A conjugação destes fatores poderá resultar, naturalmente, num recorde do mundo de muito difícil alcance, onde a estatística-matemática têm dificuldade em explicar, mas apenas dar suporte a uma certa especulação. As décadas de 1980-1989 e 1990-1999 ficam marcadas na história do desporto, particularmente dos lançamentos e saltos do atletismo, como a época dourada em termos de número e “qualidade” dos recordes do mundo conseguidos (Tabela 4.28). No trabalho de Lippi (2008) e Lippi et al. (2008), os autores também se referem à influência genética na performance competitiva, bem como à introdução de ajudas ergogénicas sob a forma de suplementação e ao papel do doping na progressão de muitos recordes do mundo.

Tabela 4.28 – Número de recordes do mundo conseguidos em cada década nas provas de lançamentos do atletismo.

	Data do RM	1980-1989	1990-1999	2000-2009
<b>HOMENS</b>				
Lançamento do dardo	25-05-1996	3*, 2	11	---
Lançamento do disco	06-06-1986	2	---	---
Lançamento do martelo	30-08-1986	10	---	---
Lançamento do peso	20-05-1990	7	1	---
<b>MULHERES</b>				
Lançamento do dardo	13-09-2008	11*	1	5
Lançamento do peso	07-06-1987	5	---	---

\* número de recordes do mundo com o anterior regulamento. Devido a modificações no regulamento, todos os recordes do mundo anteriores a 01-04-1986 nos homens e anteriores a 01-04-1999 nas mulheres, foram anulados, reiniciando-se o processo de contagem.

#### 4.4.6. Notas finais

As décadas de 1980-1989 e 1990-1999, apesar dos meios relativamente rudimentares de controlo antidoping, foram das mais negras quanto ao número de atletas de diferentes modalidades desportivas apanhados nas malhas do doping, com Ben Johnson, velocista canadiano, como o mais importante representante. Mas também emergem os múltiplos casos de nadadoras da antiga RDA, muitas delas medalhadas olímpicas, o ciclista americano Lance Armstrong (embora só comprovado em 2012, por confissão), entre outros. Mais recentemente, em 2015, o escândalo de doping na Federação Russa de atletismo (e outras federações desportivas) levou a que todo o País fosse suspenso das competições oficiais por um período de tempo indeterminado, o que ainda se mantém. Com exceção do recorde do mundo de lançamento do dardo feminino, todos os recordes do mundo das amostras em estudo foram obtidos antes de 1999, precisamente o ano de criação da Agência Mundial Antidoping que passou a ter como missão dirigir e coordenar a luta contra o doping, atualizando periodicamente a lista de substâncias e práticas proibidas, dentro e fora de competições. Em 2002, foi criado o passaporte biológico e com ele a monitorização mais rigorosa de diversos parâmetros biológicos (obtidos por recolha de amostras de sangue e urina em qualquer momento do dia ou local). Porém, só a partir dos Jogos Olímpicos de Atenas, em 2004, é que o Código Mundial Antidoping foi implementado pelas Federações Desportivas, padronizando-se as regras de conduta em todas as modalidades desportivas de todos os países. Ou seja, os fatores exógenos ao desporto quando passaram a ser controlados fizeram regressar a performance humana para níveis condizentes com a normalidade evolutiva. Daí uma certeza, uma dúvida e um problema:

- certeza: decorrente da magnitude dos atuais recordes do mundo, da longevidade dos mesmos e da praticamente ausência desde 1990 de performances que se aproximem do recorde do mundo, percebe-se o porquê da estimativa do seu período de retorno ser superior a 100 anos na maior parte das amostras deste estudo.

- dúvida: serão os recordes do mundo fruto exclusivo de condições genéticas favoráveis, do ambiente, dos incentivos financeiros, da melhoria da metodologia e orientação do treino, e do talento atlético-desportivo?

- problema: sabendo-se do impacto negativo que a suspeição de que alguns dos máximos mundiais foram obtidos com ajuda bioquímica e farmacológica tem junto dos atletas, levando-os muitas vezes à resignação tal é a dificuldade, senão mesmo impossibilidade (na carreira desportiva), de obter um novo recorde do mundo, não deveria a IAAF realizar um amplo estudo sobre as reais condições em que alguns dos atuais recordes do mundo foram conseguidos e, eventualmente, reiniciar o processo de contagem?

Para reforçar o problema levantado, a Tabela 4.29 mostra os registos de desqualificação de atletas de lançamentos por uso de doping (apenas) nos Jogos Olímpicos, 1980 a 2016, quer na fase de qualificação Dq (Q) quer na fase final Dq (F). Percebe-se, assim, que o maior número de casos positivos ocorreu a



partir de, inclusivamente, os Jogos Olímpicos de Atenas em 2004, excetuando os últimos Jogos Olímpicos de Londres em 2016 onde não se registou qualquer controlo positivo. De 1980 a 2000, registaram-se 5 casos positivos e de 2004 a 2016 passou para 22 controlos positivos. Estes registos parecem revelar que o doping sempre existiu, mas só mais recentemente passou a ser verdadeiramente controlado. Na atualidade, não existem atletas insuspeitos, uma vez que a crença entre atletas, treinadores e outros agentes envolvidos diretamente no fenómeno desportivo, conduz à especulação que um resultado supranormal, para além do treino intenso e sistemático também pode ser fruto de uma certa preparação farmacológica. Mas isto, naturalmente, é apenas especulação.

Tabela 4.29 – Registos do número de casos de doping nas fases de qualificação e final olímpica, nas provas de lançamentos do atletismo.

		1980	1984	1988	1992	1996	2000	2004	2008	2012	2016
<b>HOMENS</b>											
Lançamento do dardo	Dq (Q)	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
	Dq (F)	---	---	---	---	---	---	---	---	1	---
Lançamento do disco	Dq (Q)	---	1	---	---	---	---	---	---	---	---
	Dq (F)	---	---	---	---	---	---	1	---	---	---
Lançamento do martelo	Dq (Q)	---	---	---	---	---	---	---	---	1	---
	Dq (F)	---	1	---	1	---	---	2	---	1	---
Lançamento do peso	Dq (Q)	---	---	---	---	---	---	---	3	1	---
	Dq (F)	---	---	---	---	---	---	1	3	---	---
<b>MULHERES</b>											
Lançamento do dardo	Dq (Q)	---	1	---	---	---	---	---	---	---	---
	Dq (F)	---	---	---	---	---	---	---	1	---	---
Lançamento do peso	Dq (Q)	---	---	---	1	---	---	1	---	2	---
	Dq (F)	---	---	---	---	---	---	2	---	2	---

Dq (Q), desqualificação por doping na fase de qualificação olímpica.

Dq (F), desqualificação por doping na final olímpica.

Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics\\_at\\_the\\_Summer\\_Olympics](https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics_at_the_Summer_Olympics)

## 5. MÉTODO *PEAKS OVER THRESHOLD*, para os saltos do atletismo

### 5.1. Introdução

Em determinados contextos é mais apropriado analisar as  $k$  v.a.'s situadas acima de um certo limiar extremo, doravante denotado por  $u$ . Pickands (1975) introduziu a Distribuição Generalizada de Pareto (GPD) (do inglês, *Generalized Pareto Distribution*), a qual é particularmente útil como modelo dos excessos acima de um limiar elevado. Por sua vez, Balkema & de Haan (1974) e Pickands (1975) mostraram que a GPD é uma boa aproximação para a função de distribuição das excedências. Esta metodologia, comumente referida como *Peaks Over Threshold* (POT)<sup>21</sup>, a qual, apoiada pelo Teorema de Pickands-Balkema-de Haan, é adequada para ajustar os excessos aleatórios independentes e identicamente distribuídos (ou relativamente estacionários) acima de um limiar  $u$  suficientemente alto (Balkema e de Haan, 1974; Pickands, 1975), foi introduzida a partir dos trabalhos de Todorovic & Zelenhasic (1970) e Todorovic & Rousselle (1971). Contudo, foram Davison (1984), Smith (1984, 1987a) e Leadbetter (1991) os responsáveis pelo desenvolvimento da metodologia POT tal como hoje a conhecemos. No método POT, ao invés da modelação do valor máximo de cada bloco, é considerada a estrutura estocástica condicional dos extremos aleatórios acima de  $u$   $\{X_i : X_i > u\}$ . Por se tratar de uma forma mais criteriosa de seleção dos eventos considerados como extremos, por não haver risco de perder observações elevadas ou incluir observações baixas (Ferreira & de Haan, 2015), esta metodologia traduz-se numa diminuição do desperdício e conseqüente aumento da informação, bem como numa maior confiança nas conclusões<sup>22</sup> (Coles, 2001, Beirlant et al., 2004). Mais recentemente, a metodologia POT tem vindo a ser considerada no âmbito não-paramétrico (Gomes & Guillou, 2015).

A seleção do limiar, bem como o seu procedimento não são temas consensuais. As dificuldades existem e a problemática está em aberto. De qualquer forma, procura-se o melhor compromisso entre a redução do viés e a menor variância dos estimadores (Embrechts et al., 1997; Coles, 2001; Beirlant et al., 2004). Existem vários métodos para a determinação do limiar. Alguns dos mais utilizados são o gráfico de vida média residual e o gráfico de estabilidade dos parâmetros (Hall & Wellner, 1981; Davison & Smith, 1990; Embrechts et al., 1997; Coles, 2001; Beirlant et al., 2004; Ghosh & Resnick, 2010, 2011).

A Figura 5.1 mostra a representação gráfica deste método.

---

<sup>21</sup> Embora também possa ser designada de metodologia dos Excessos Acima de um Nível Elevado ou Modelo Paretiano de Excessos, a expressão inglesa *Peaks Over Threshold* (POT) é a mais popularizada.

<sup>22</sup> Contudo, ressalva-se que uma observação extrema que interessou no método dos máximos de blocos pode deixar de ter interesse na abordagem POT, precisamente porque aqui apenas interessam as observações  $X_i > u$ ; da mesma forma, observações rejeitadas pelo método dos máximos de blocos podem ser aceites na metodologia POT. Ou seja, no método dos máximos de blocos apenas interessa a observação máxima de cada bloco, pelo que a observação mais extrema de um bloco poderá ser menor do que algumas observações inferiores ao extremo de outro(s) bloco(s). Por conseqüência, a frequência de extremos pode ficar mal medida, o que já não é tão evidente com o método POT. Contudo, segundo Coles (2001), tratando-se de uma série temporal, a abordagem POT é preferível ao método dos máximos de blocos, desde que não existam valores omissos, já que todas as observações que excedem um certo limiar podem servir de base para o ajuste do modelo.

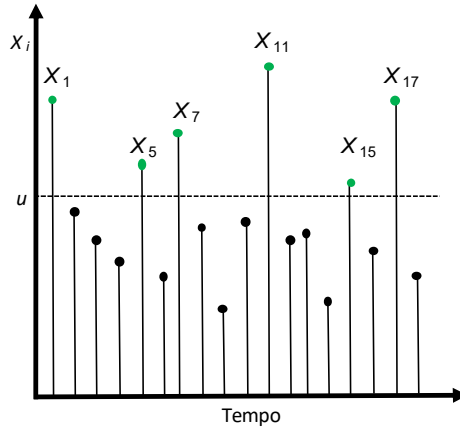


Figura 5.1 – Representação gráfica dos excessos acima do limiar  $u$ .

As observações que estão além do limiar  $u$  designam-se de *excedências*, cujo comportamento assintótico desempenhará um papel crucial na metodologia POT. Neste método não se trabalha com a amostra aleatória original  $X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{nn}$ , uma vez que a amostra irá ser censurada, pois apenas serão retidas as excedências do nível  $u$ , conforme Figura 5.1. A nova amostra, i.e., a amostra dos excessos,  $(y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k)$ , dada pela função de distribuição  $(X - u)$  condicional em  $X > u$ , define-se como:

$$Y_j = X_i - u \mid X_i > u, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad [5.1]$$

onde  $k$  denota o número de observações da amostra original que excedem o limiar  $u$ ,  $k = \{i : X_i > u, i = 1, 2, \dots, n\}$ , com  $k$  suficientemente grande. A esta nova amostra aleatória poderá ser ajustada a GPD.

Dado o limiar  $u$ , a variável  $k$  é também uma variável aleatória. Se as v.a.'s i.i.d.'s  $X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{nn} \sim F$ , então

$$f(s; n, p) = P[k = s] = \binom{n}{s} p^s (1 - p)^{n-s}, \quad s = 0, 1, \dots, n, \quad [5.2]$$

onde a probabilidade de sucesso  $p$  é igual a  $\bar{F}(u) = 1 - F(u)$ . Portanto,  $k$  tem distribuição *Binomial*( $n, \bar{F}(u)$ ). Por sua vez, o número médio de excedências é o valor esperado da distribuição Binomial, ou seja,  $E[k] = n(1 - F(u))$ , que é uma função decrescente de  $u$ .

Os principais passos a implementar na abordagem POT são:

- (1) Testar a suposição dos dados serem uma sequência de v.a.'s i.i.d.'s.
- (2) Selecionar um limiar  $u$  apropriado.
- (3) Estimar os parâmetros de forma e de escala, usando a distribuição mais conveniente para as excedências  $\{X_i : X_i > u\}$ .
- (4) Realizar o diagnóstico de ajustamento.
- (5) Estimar outras quantidades de interesse (e.g., quantis extremos, probabilidades de excedência, limite superior do suporte quando  $\gamma < 0$ , valores de retorno).

## 5.2. Suporte teórico

Assumindo que existem suficientes observações acima de um certo limiar  $u$ , procuramos uma distribuição condicional apropriada para estas excedências. Seja  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição  $F$  comum, desconhecida, sendo  $(X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n})$  as estatísticas ordinais correspondentes, ordenadas crescentemente, onde  $X_{1:n}$  denota o valor mínimo e  $X_{n:n}$  o valor máximo, sendo  $u$  um limiar alto próximo de  $X_{n:n}$ . O interesse recai unicamente na amostra dos excessos, dada em [5.1].

### 5.2.1. Distribuição condicional dos excessos

Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma sequência de v.a.'s i.i.d.'s com f.d.  $F$  desconhecida, e  $x^F$  o seu limite superior do suporte, dado em [2.4].

Para  $u < x^F$ , fixo, a função de distribuição definida por:

$$F_u(y) = P[Y \leq y | X > u] = P[X - u \leq y | X > u], \quad 0 \leq y \leq x^F - u \quad [5.3]$$

é denominada de função de distribuição condicional dos excessos acima do nível  $u$ , e onde  $Y = X - u$  são os excessos, condicional em  $X > u$ . Por sua vez, a função definida por  $e(u) = E(X - u | X > u)$  é chamada de função de excesso médio que será dada com mais detalhe na Secção 5.2.3.1.

Observa-se que

$$\begin{aligned} F_u(y) &= P[X - u \leq y | X > u] = P(u < X \leq u + y) = \frac{P(X - u \leq y | X > u)}{P(X > u)} \\ &= \frac{P(u < X \leq u + y)}{P(X > u)} = \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)}. \end{aligned} \quad [5.4]$$

Verificamos assim que as funções de distribuição  $F_u$  e  $F$  estão relacionadas. Considerando  $x = u + y$ , pela probabilidade condicional,  $F_u$  pode ser escrita em termos de  $F$ , da seguinte forma:

$$F_u(y) = \begin{cases} \frac{F(u + y; \sigma_u, \gamma) - F(u; \sigma_u, \gamma)}{1 - F(u; \sigma_u, \gamma)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} & ; x - u > 0 \\ 0 & ; \text{outro caso} \end{cases} \quad [5.5]$$

Isolando  $F(x)$  em [5.5], tem-se:

$$F(x) = [1 - F(u)]F_u(y) + F(u). \quad [5.6]$$

Por sua vez, a f.d.p. de  $F_u(y)$  tem a seguinte forma:

$$f_u(y) = \frac{f(u + y)}{1 - F(u)}; \quad x - u > 0.$$

Como os resultados em [5.4], [5.5] e [5.6] dependem de uma função de distribuição  $F$  que é desconhecida, têm pouco interesse. Assim, na procura de um modelo apropriado para a cauda direita

sob a f.d.  $F$ , Balkema & de Haan (1974) e Pickands (1975) provaram que acima de um limiar  $u$  suficientemente alto, e sob condições adequadas,  $F_u(y)$  e  $H_{\sigma_u, \gamma}(y)$  (definida em [5.9]) são assintoticamente equivalentes à medida que  $u$  se aproxima do  $x^F$ ,

$$F_u(y) \approx H_{\sigma_u, \gamma}(y), \quad [5.7]$$

para algum  $\sigma_u$  e  $\gamma$ , com  $y \in [0, x^F - u]$  se  $\gamma \geq 0$ , ou  $y \in [0, -\frac{\sigma_u}{\gamma}]$  se  $\gamma < 0$ , onde a função  $H$  é o modelo Poisson-GPD, i.e., combina a GPD para os excessos acima de  $u$  com a distribuição de Poisson para o número de excedências.

Observação 5.1: é costume assumir-se que  $k \sim \text{Poisson}(\lambda)$  dada a aproximação da distribuição Binomial pela Poisson. Para  $u$  na proximidade de  $x^F$ , tem-se  $p = \bar{F}(u)$  pequeno. Neste caso, a condição a ser satisfeita é  $np(n) \rightarrow \lambda$ ,  $n \rightarrow \infty$  ( $p$  suficientemente pequeno).

A aproximação [5.7] é enunciada no seguinte Teorema (Balkema & de Haan, 1974; Pickands, 1975):

**Teorema 5.1 (Teorema de Pickands-Balkema-de Haan):**  $F \in D(G_\gamma)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  se, e somente se,

$$\lim_{u \rightarrow x^F} \sup_{0 \leq y < x^F - u} |F_u(y) - H_{\sigma_u, \gamma}(y)| = 0, \quad [5.8]$$

para alguma distribuição da família generalizada de Pareto com parâmetros de escala  $\sigma_u > 0$  e forma  $\gamma$ .

Se o limite em [5.8] for assegurado, então dizemos que a f.d.  $F$  pertence ao domínio de atração POT-GPD, i.e., a distribuição das excedências tende para a GPD. Informações sobre domínios de atração para distribuições de valores extremos constam em Embrechts et al. (1997), Beirlant et al. (2004), de Haan & Ferreira (2006) e Ravi (2010). Por sua vez, Balkema & de Haan (1974), Pickands (1975) e de Haan & Ferreira (2006) provaram que a GPD é a distribuição limite para os excessos acima de um limiar  $u$ .

Observação 5.2: se a f.d.  $F$  é conhecida, então a f.d.  $F_u$  também é conhecida (Smith, 1987a; Coles, 2001)<sup>23</sup>. As realizações da v.a.  $X$  estão situadas principalmente entre  $(0, u]$ , sendo que a estimativa de  $F$  neste intervalo geralmente não apresenta problemas. Porém, a estimativa de  $F_u$  já poderá ser dificultada pelo facto de geralmente existirem poucas observações entre  $(u, \max(X)]$ .

---

<sup>23</sup> Dependendo da área de aplicação,  $F_u$  é interpretada com diferentes nomes. Por exemplo, os termos *excess-life* ou *residual lifetime* são muitas vezes usados em estatísticas de fiabilidade ou da saúde, ao passo que a expressão *excess-of-loss* (perdas em excesso) é vulgarmente empregue nas áreas dos seguros e financeira, e o termo *shortfall* na área financeira (Reiss & Thomas, 1999; Gomes & Guillou, 2015).

## 5.2.2. Distribuição Generalizada de Pareto

Balkema & de Haan (1974) e Pickands (1975) demonstraram que quando o limiar  $u$  tende para a cauda superior da v.a.  $X$ , então os excessos acima do nível  $u$  seguem uma distribuição generalizada de Pareto maximal, ou simplesmente distribuição generalizada de Pareto<sup>24</sup>,  $GPD(\sigma_u, \gamma)$ , cuja função de distribuição tem a seguinte forma funcional,

$$H_{\sigma_u, \gamma}(x|u) = P(X \leq x | x > u) = \begin{cases} 1 - \left[ 1 + \gamma \left( \frac{x-u}{\sigma_u} \right) \right]^{-\frac{1}{\gamma}} & , se \gamma \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x-u}{\sigma_u}\right) & , se \gamma = 0 \quad (\gamma \rightarrow 0) \end{cases} \quad [5.9]$$

onde  $u$  é o limiar (*threshold*)<sup>25</sup> ( $u \in \mathbb{R}$ ),  $1 + \gamma \left( \frac{x-u}{\sigma_u} \right) > 0$ ,  $\sigma_u$  é o parâmetro escala ( $\sigma_u > 0$ ) correspondente ao nível  $u$  selecionado,  $\gamma$  é o parâmetro forma ( $\gamma \in \mathbb{R}$ ). A f.d.  $H_{\sigma_u, 0}(x)$  pode ser interpretada como limite de  $H_{\sigma_u, \gamma}(x)$  com  $\gamma \rightarrow 0$ . Para  $\gamma \geq 0$ , o suporte da GPD é dado por:

$$D_X = \{x \in \mathbb{R} | x > u\}, \quad [5.10]$$

e para  $\gamma < 0$ , o suporte da GPD é dado por:

$$D_X = \{x \in \mathbb{R} | u < x < u - \sigma_u / \gamma\}. \quad [5.11]$$

Apenas em [5.11] o suporte da GPD tem limite superior finito, definido por  $u - \sigma_u / \gamma$ .

Equivalentemente, mas em termos de excessos  $Y = x - u$ , a f.d. GP, pode escrever-se como:

$$H_{\sigma_u, \gamma}(y) = \begin{cases} 1 - \left( 1 + \gamma \frac{y}{\sigma_u} \right)_+^{-\frac{1}{\gamma}} & , y \geq 0, \quad se \quad \gamma > 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\sigma_u}\right)_+ & , y \geq 0, \quad se \quad \gamma = 0 \quad (\gamma \rightarrow 0) \\ 1 - \left( 1 + \gamma \frac{y}{\sigma_u} \right)_+^{-\frac{1}{\gamma}} & , 0 \leq y \leq -\frac{\sigma_u}{\gamma}, \quad se \quad \gamma < 0 \end{cases} \quad [5.12]$$

Tal como na distribuição GEV, também na GPD o parâmetro de forma  $\gamma$  ou índice de valor extremo está diretamente relacionado com o “peso” da cauda direita subjacente à f.d.  $F$ , proporcionando importante informação acerca do limite superior do suporte dado em [2.4]. A GPD é uma distribuição muito versátil, uma vez que diversas distribuições de probabilidade são casos particulares desta distribuição, dependendo do valor dos seus parâmetros. Os submodelos mais importantes são:

<sup>24</sup> As funções de distribuição com  $\gamma > 0$  e  $\gamma = 0$  foram estudadas por Pareto, daí o termo “distribuições de Pareto”. A inclusão da função de distribuição com  $\gamma < 0$  pode ser vista como uma generalização das funções anteriores, daí o termo “generalizada”. Por sua vez, a GPD padrão considera  $\sigma_u = 1$  e  $u = 0$ .

<sup>25</sup> Por vezes descrito como “parâmetro” de localização.

- (i)  $\gamma = 0$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ), a GPD reduz-se à f.d. Exponencial, pelo que  $x^F < \infty$  ou  $x^F = \infty$ , com  $E(X) = \sigma$ .
- (ii)  $\gamma > 0$ , a GPD coincide com a f.d. Pareto (versão reparametrizada), pelo que  $x^F = \infty$ ,  $x \in [0, \infty)$ .
- (iii)  $\gamma < 0$ , a GPD reduz-se a uma f.d. tipo Beta, pelo que  $x^F < \infty$ ,  $x \in [0, -\frac{\sigma_u}{\gamma}]$ .

Por sua vez, tomando a derivada de [5.9] obtém-se a expressão analítica da f.d.p., dada por:

$$h_{\sigma_u, \gamma}(x|u) = \frac{dH_\gamma(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_u} \left[ 1 + \gamma \left( \frac{x-u}{\sigma_u} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma}-1}, & \gamma \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma_u} \exp\left(-\frac{x-u}{\sigma_u}\right), & \gamma = 0 \end{cases} \quad [5.13]$$

novamente, tendo em consideração [5.10] e [5.11], e com  $\sigma_u > 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  e a restrição  $1 + \gamma \left( \frac{x-u}{\sigma_u} \right) > 0$ , para  $x \geq 0$  e 0 para outros  $x$ , quando  $\gamma \geq 0$ ;  $x \in [0, -1/\gamma]$  e 0 para outros  $x$ , quando  $\gamma < 0$ .

A Figura 5.2 apresenta a forma geométrica da função de distribuição acumulada e da função densidade de probabilidade da GPD, apresentada em [5.9] e [5.13], respetivamente, para os valores de  $\sigma_u = 1$  e  $\gamma = (0.5, 0, -0.5)$ .

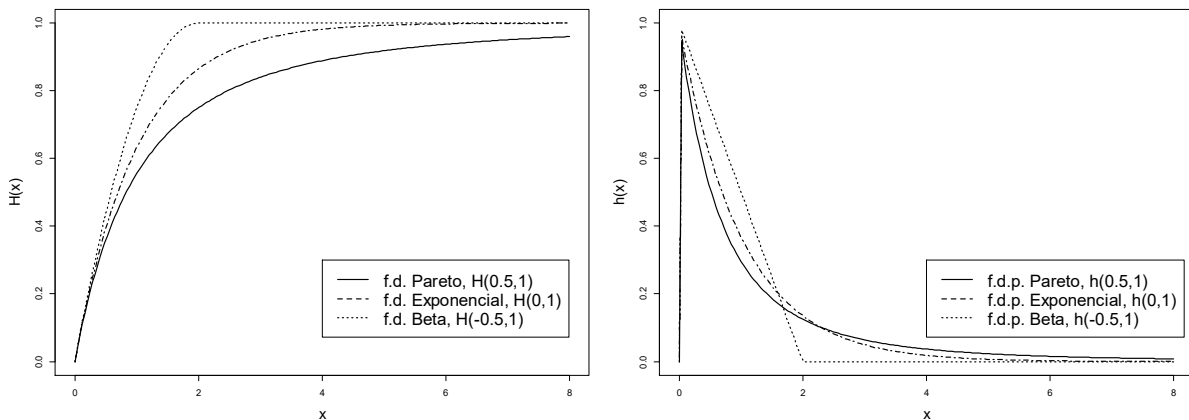


Figura 5.2 – Função de distribuição acumulada (à esquerda) e função densidade de probabilidade (à direita) para  $\sigma = 1$  e  $\gamma = (0.5, 0, -0.5)$ , conforme seja a distribuição de Pareto, Exponencial e (tipo) Beta, respetivamente.

A correspondente função quantil de ordem  $p$ , com  $p \in (0, 1)$ , é dada por:

$$Q(p|u, \sigma_u, \gamma) = \begin{cases} u + \frac{\sigma_u}{\gamma} \left[ (1-p)^{-\gamma} - 1 \right], & \gamma \neq 0 \\ u - \sigma_u \ln(1-p) & , \gamma = 0 \end{cases} \quad [5.14]$$

Bermudez & Kotz (2010a,b) apresentam algumas expressões de momentos da GPD. O  $n$ -ésimo momento da  $GPD(\sigma_u, \gamma)$ , calculado em torno de zero, é dado por:

$$E(X^n) = n! \frac{\sigma_u^n \Gamma(1/\gamma - n)}{\gamma^{n+1} \Gamma(1 + 1/\gamma)}, \quad \gamma < 1/n, n \in \mathbb{N}, \quad [5.15]$$

onde  $\Gamma(\cdot)$  representa a função Gama.

A média e a variância, obtidas a partir de [5.15], são dadas, respetivamente, por:

$$\bullet E[X] = \begin{cases} u + \frac{\sigma_u}{1-\gamma}, & \gamma < 1, \gamma \neq 0 \\ \infty & \gamma \geq 1 \end{cases} \quad [5.16]$$

$$\bullet Var[X] = \begin{cases} \frac{\sigma_u^2}{(1-\gamma)^2(1-2\gamma)} = E(X)^2 \left( \frac{1}{1-2\gamma} \right), & \gamma < 0.5 \\ \infty & \gamma \geq 0.5 \end{cases} \quad [5.17]$$

A mediana, obtida a partir de [5.14], fazendo  $p=0.5$ , é dada por:

$$\bullet Q(0.5|u, \sigma_u, \gamma) = \begin{cases} u + \frac{\sigma_u(2^\gamma - 1)}{\gamma}, & \gamma \neq 0 \\ u + \sigma_u \ln 2 & \gamma = 0 \end{cases} \quad [5.18]$$

Observação 5.3: quando  $\gamma < 1$ , um aumento de  $\sigma_u$ , desde que não se altere o valor de  $\gamma$ , traduz-se num aumento do valor esperado; quando  $\gamma < 0$  o  $E[X] < u + \sigma_u$ ; quando  $\gamma = 0$  o  $E[X] = u + \sigma_u$  e  $Var(X) = \sigma_u^2$ ; quando  $\gamma \geq 0.5$  a  $Var(X) = \infty$ ; por sua vez, quando  $0 < \sigma_u < 1$  o  $E[X] > \sigma_u$  desde que  $0 < \gamma < 1$ . Nas distribuições com cauda pesada, o  $E(X^k)$  não existe quando  $k \geq 1/\gamma$ .

Observação 5.4 (dualidade entre as distribuições GP e GEV): se o máximo converge para uma distribuição  $GEV_\gamma$ , e dado que a f.d.  $F$  pertence a algum dos máx-domínios de atração, então a distribuição dos excessos  $(X - u | X > u)$  converge para uma  $GPD_\gamma$ . O Teorema de Pickands-Balkema-de Haan garante a existência de uma dualidade entre o modelo GPD e o modelo baseado na distribuição GEV. Nos dois modelos, o parâmetro de forma é dominante na determinação do comportamento da cauda e é o mesmo nas distribuições GP e GEV, sendo que na GPD o parâmetro de escala,  $\sigma_u$  depende de  $u$ . Dito de outra forma, as distribuições GEV e GPD estão relacionadas, i.e., a densidade da GPD possui cauda extrema assintoticamente equivalente à distribuição GEV (Coles, 2001; Katz et al., 2005; Malevergne et al., 2006; Ding et al., 2008), do seguinte modo,

$$F_{GPD}(X - u; \sigma_u, \gamma) = 1 + \ln[F_{GEV}(x; \lambda, \delta, \gamma)], \text{ com } X > u \text{ e } x > \lambda.$$

A velocidade de convergência da GPD é discutida em Worms (2001).



### 5.2.3. Escolha do limiar

Analogamente ao problema da seleção do tamanho dos blocos no método dos máximos de blocos, um aspecto fundamental no processo de ajuste da POT-GPD é a escolha do limiar  $u$ , que por ser especificado antes de ajustar a GPD não pode ser considerado um parâmetro. É precisamente na seleção de  $u$  que radica a maior complexidade deste método. Não existe um critério ou método único que seja consensualmente aceite no meio científico, dado não se conseguir assegurar a obtenção de um valor ótimo que garanta os pressupostos referentes a essa escolha, daí a problemática associada à sua determinação. Para além disso, mesmo que um limiar pré-fixado possa ter boas propriedades para a amostra observada, isto não significa necessariamente que seja representativo para outras amostras (Coles, 2001). Segundo Balkema & de Haan (1974), Pickands (1975), Coles (2001) e Caeiro & Gomes (2016), alguns dos problemas mais sensíveis, são:

- Um limiar demasiado alto (i.e.,  $k$  pequeno) resulta na supressão de observações relevantes na cauda da distribuição e conseqüentemente o aumento da variância assintótica na estimação de  $\gamma$  e  $\sigma_u$ .

- Opostamente, um limiar não suficientemente alto, ou demasiado baixo (i.e.,  $k$  grande) ainda que resulte na diminuição da variância, faz com que a inclusão de observações da região central da série de dados origine um grande viés na estimação de  $\gamma$  e  $\sigma_u$ , além de invalidar o Teorema de Pickands-Balkema-de Haan, sendo este um pré-requisito para a aplicação da metodologia POT.

Portanto, na adequada seleção de  $u$  deverá existir um compromisso entre o valor elevado de  $u$ , necessário para que as motivações assintóticas da GPD proporcionem uma aproximação confiável da cauda da distribuição, onde o viés dos estimadores é menor, e o valor pequeno de  $u$  onde a variância é menor. Segundo Coles (2001), na prática deve considerar-se o limiar  $u$  o menor valor possível que assegure uma aproximação razoável nos termos do Teorema 2.4 (Teorema (unificado) dos Tipos Extremais: Fisher-Tippett-Gnedenko) e do Teorema 5.1 (Teorema de Pickands-Balkema-de Haan).

Existem diversos métodos para determinar os candidatos a limiar. A nossa abordagem centrar-se-á nos gráficos da função de excesso médio e excesso mediano, no gráfico de estabilidade dos parâmetros, na intersecção dos gráficos de Hill generalizado e dos momentos, quando  $\gamma \in \mathbb{R}$ , e na suavização gradual do gráfico de vida média residual, num processo que designamos de “esticar a corda”, cujo procedimento será descrito mais adiante.

#### 5.2.3.1. Função de excesso médio e gráfico de vida média residual

A função de excesso médio (MEF, do inglês, *mean excess function*), também conhecida como função de vida média residual (do inglês, *mean residual life function*), é uma ferramenta analítica muito usada na ajuda à seleção do nível  $u$  e na determinação da adequação prática do modelo GPD. A MEF representa o valor esperado do quanto uma variável aleatória  $X$  excede um determinado limiar  $u$ , sabendo que  $X > u$ . Começou por ser estudada por Benktander & Segedahl (1960). Posteriormente, Hall & Wellner (1981) discutiram as suas propriedades (em 2012, estes autores apresentaram uma revisão do seu trabalho). Mais recentemente, Northrop et al. (2017) introduziram a seleção do limiar em modelos não-

estacionários. Mas foram Davison & Smith (1990) que propuseram a MEF para a escolha conveniente de  $u$ .

**Definição 5.1 (função de excesso médio):** a função de excesso médio da v.a.  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  i.i.d.,  $e(u)$  representa a média condicional dos excessos acima de um nível  $u$ , que no caso da  $GPD_{\sigma_u, \gamma}$  tem-se  $E[X]_+ < \infty$  se, e somente se  $\gamma < 1$  e  $\sigma_u > 0$ . Considerando que  $\gamma < 1$  e  $\sigma_u + \gamma u > 0$ , a MEF de  $X$  é dada por:

$$\begin{aligned} e(u) &:= E[X - u \mid X > u] = E[Y \mid Y > 0] = \frac{\int_u^\infty (1 - F(s)) ds}{1 - F(u)} \\ &= \frac{\sigma_u + \gamma u}{1 - \gamma} = \frac{\gamma}{1 - \gamma} u + \frac{\sigma_u}{1 - \gamma} \end{aligned} \quad [5.19]$$

onde  $F(u)$  é a f.d. da v.a.  $X$ , com  $0 < u < x^F$  se  $0 \leq \gamma < 1$  ou  $0 \leq u < -\sigma_u / \gamma$  se  $\gamma < 0$ .

A MEF é linear com declive positivo se  $0 < \gamma < 1$ , declive negativo se  $\gamma < 0$ , ou declive nulo se  $\gamma = 0$ . Quando  $\gamma \geq 1$ , a média teórica é infinita. A MEF de  $X$  é linear em  $u$ , com declive  $\gamma / (1 - \gamma)$  e ordenada na origem  $\sigma_u / (1 - \gamma)$  se e somente se  $\gamma < 1$  (Coles, 2001; Ghosh & Resnick, 2010, 2011). Para mais detalhes, consultar Yang (1978), Hall & Wellner (1981), Davison & Smith (1990) e Embrechts et al. (1997).

Ou seja, a linearidade da MEF caracteriza o modelo GPD. Na prática, a MEF é estimada pela correspondente função de excesso médio empírica  $\hat{e}_n(u)$ , definida pelo conjunto de pontos,

$$\hat{e}_n(u) := \left\{ \left( \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - u) I_{(u, \infty)}(x_i)}{\sum_{i=1}^n I_{(u, \infty)}(x_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i I_{(u, \infty)}(x_i)}{\sum_{i=1}^n I_{(u, \infty)}(x_i)} - u \right) : u < x_{\max} \right\}, \quad [5.20]$$

em que  $x_{\max}$  é o valor mais elevado da amostra observada, e  $I_A$  é a função indicatriz do conjunto  $A$ , dada

$$\text{por } I_{(u, \infty)}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i > u \\ 0 & \text{se } x_i \leq u \end{cases},$$

para uma dada amostra  $x_1, \dots, x_n$  (Beirlant et al., 2004).

Alternativamente,  $\hat{e}_n(u)$  é representada nos valores  $u = x_{n-k:n}$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ , pelo que

$$\sum_{i=1}^n x_i I_{(u, \infty)}(x_i) = \sum_{j=1}^k x_{n-j+1:n}, \text{ com } k \equiv \#\{x_i : x_i > u\}.$$

Neste caso, a estimativa pontual da MEF é dada por:

$$\hat{e}_{k,n}(u) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (x_{n-j+1:n} - x_{n-k:n}), \quad [5.21]$$

onde  $x_1, \dots, x_k$  são as  $k$  observações que excedem  $u$ .

A MEF apresentada em [5.19] para a GPD, espera-se que seja linear para  $u$  suficientemente elevado, pelo que o gráfico correspondente é obtido através de

$$\{x_{n-k:n}, \hat{e}_n(x_{n-k:n}), 1 \leq k \leq n-1\}, \quad [5.22]$$

esperando-se que haja linearidade à direita de  $x_{n-k:n}$ .

Fica assim claro que a MEF é a média aritmética dos valores que excedem o nível  $u$ . A estimativa empírica da MEF é geralmente observada pelo gráfico da função de excesso médio, também conhecido como gráfico de vida média residual (*MRL plot*, *mean residual life plot*), que é uma representação gráfica de pontos, parecendo-se com uma serra, cujos dentes crescem para a direita. Se os dados suportam o modelo GPD acima de um limiar alto, então é esperado que o gráfico se torne linear a partir desse ponto. Portanto, o limiar  $u$  deverá ser escolhido precisamente no ponto a partir do qual se verifica uma certa linearidade à sua direita, podendo esse ponto estar ou não presente nos dados disponíveis. A este propósito, Gosh & Resnick (2010) referem que a linearidade observada em [5.19] para as e.o.'s extremas indica que não existe evidência contra a hipótese de considerar a boa adequação do modelo GPD para as excedências. O *MRL plot* tem boa capacidade de análise quando  $-\infty < \gamma < 1$ , e inconsistente quando  $\gamma \geq 1$  (Ghosh & Resnick, 2010, 2011; Das & Ghosh, 2013). Os pontos situados na parte final da cauda direita deste gráfico (Figura 5.3) deverão ser ignorados, uma vez que estão a ser calculadas médias de um número reduzido de excessos elevados.

Os resultados de Davison & Smith (1990) e de Ghosh & Resnick (2010, 2011) mostram que se a distribuição subjacente aos dados está no domínio de atração de uma GPD, então os pontos no *MRL plot* devem variar de modo linear enquanto função de  $u$ . Porém, na prática, nem sempre é fácil a determinação de  $u$  e a interpretação muitas vezes requer uma boa dose de julgamento subjetivo.

Intervalos de confiança baseados na aproximação à distribuição Normal podem ser adicionados ao gráfico (Coles, 2001). Contudo, a normalidade não pode ser garantida para valores demasiado elevados de  $u$  onde se verifica a presença de um número reduzido de observações e a consequente perda da qualidade do ajuste pela GPD.

Porém, nem sempre o gráfico da MEF empírica é de fácil interpretação. Muitas vezes, é sensível a alterações nos dados quando o limiar é alto, dada a escassez de observações na cauda da distribuição. De forma a colmatar esta limitação, Rootzén & Tajvidi (1997), Zhou & Jeong (2011), Kidwell et al. (2014) e Bai et al. (2019) sugerem a função de excesso mediano como alternativa mais robusta<sup>26</sup>, dada por:

$$e_n^*(u) = \text{Mediana}(X - u \mid X > u), \quad [5.23]$$

---

<sup>26</sup> A mediana é mais estável e menos restritiva do que a média. Da mesma forma, também a função de excesso mediano proporciona uma medida quantitativa mais abrangente da vida residual, dado não ser afetada por *outliers*, e ser menos sensível a distribuições assimétricas, mesmo quando a cauda é pesada (Rootzén & Tajvidi, 1997, Zhou & Jeong, 2011; Kidwell et al., 2014, Bai et al., 2019).

o que define a mediana dos excessos acima do limiar  $u$ .

A função [5.23] satisfaz a relação

$$P[X - u > e_n^*(u) | X > u] = 0.5,$$

implicando que

$$P[X > u + e_n^*(u)] = 0.5P[X > u].$$

A Figura 5.3 apresenta um exemplo de representação gráfica de vida média residual e de vida mediana residual.

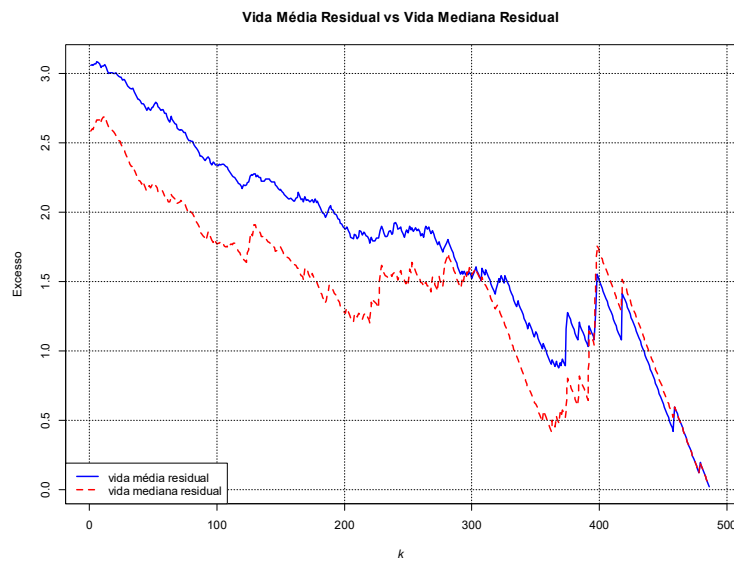


Figura 5.3 – Representação dos gráficos de vida média residual e de vida mediana residual. Dados utilizados: máximos individuais do lançamento do disco masculino, 1980-2017,  $n=487$ , Fonte: <https://www.worldathletics.org/>

### 5.2.3.2. Gráfico de estabilidade dos parâmetros

Outra metodologia usada nesta tese no apoio à seleção do limiar mais adequado, inclui o gráfico de estabilidade da estimativa dos parâmetros da função de distribuição generalizada de Pareto (Figura 5.4). Neste gráfico observa-se a estimativa dos parâmetros de escala e forma para uma vasta gama de candidatos a limiar, procurando-se encontrar o limiar satisfatório. Esta abordagem baseia-se na estimativa de máxima verosimilhança para  $\gamma$  e para  $\sigma^*$  (definido em [5.25]), os quais são representados graficamente contra todos os candidatos a limiar. Define-se por:

$$\{(u, \sigma^*) : u < x_{\max}\} \text{ e } \{(u, \gamma_u) : u < x_{\max}\}.$$

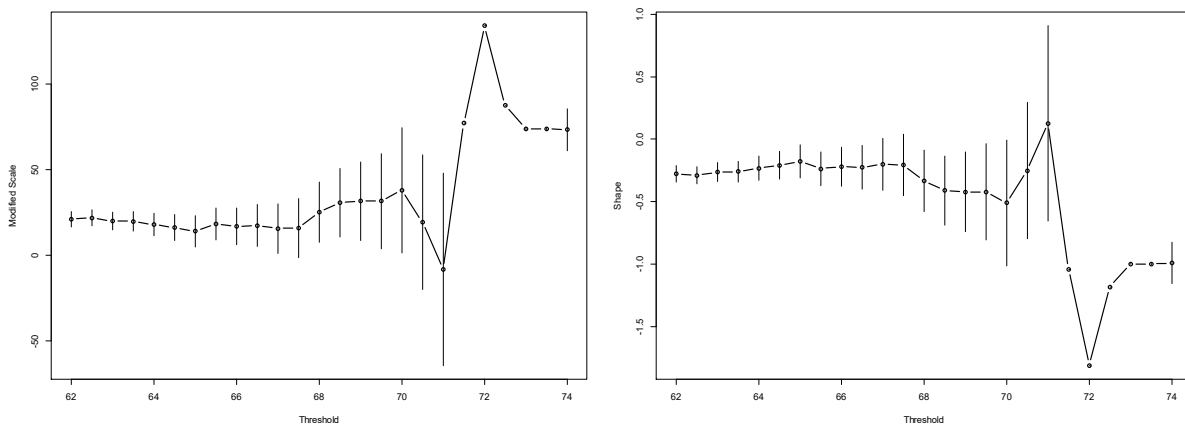


Figura 5.4 – Representação gráfica da estabilidade do parâmetro de escala (modificado) (à esquerda) e do parâmetro de forma (à direita), por máxima verosimilhança, com a respetiva banda com 95% de confiança, baseados na função *profile log-likelihood*. Dados utilizados: máximos individuais do lançamento do disco masculino, 1980-2017,  $n=487$ , Fonte: <https://www.worldathletics.org/>

A GPD possui certas propriedades de estabilidade dos limiares. Supondo que as excedências  $X_j: j=1, \dots, k$  acima de  $u$ , i.e.,  $X | X > u$ , seguem a  $GPD(\sigma_u, \gamma)$  então as excedências  $X | X > v$  de todos os limiares altos  $v$ , com  $v > u$ , também seguem a  $GPD(\sigma_v, \gamma)$ . Além disso,  $\gamma$  permanece inalterável para todo o  $v$ , i.e.,

$$GPD_v(\sigma_v, \gamma) = GPD(\sigma_u - \gamma u, \gamma)$$

e  $\sigma_u$  é uma função linear de  $u$  (Coles, 2001). Isto significa que caso a distribuição dos excessos tenha uma GPD exata (em vez de aproximada), então o aumento de  $u$  para  $v$  resultará noutra GPD com o mesmo parâmetro de forma  $\gamma$ , mas com parâmetro de escala ajustado (Hosking & Wallis, 1987; Dargahinoubary, 1989; Embrechts et al., 1997; Coles, 2001). Portanto, se um novo limiar for encontrado, então o resultado de Pickands-Balkema-de Haan poderá ser aplicado acima desse limiar. Ou seja, se a GPD com os parâmetros de forma  $\gamma$  e de escala  $\sigma_u$  é o modelo correto para os excessos acima de  $u$ , para

qualquer limiar  $\nu > u$ , os excessos serão também uma GPD com o mesmo parâmetro de forma  $\gamma$ , mas com o parâmetro de escala definido como,

$$\sigma_\nu = \sigma_u + \gamma(\nu - u), \quad \gamma \neq 0 \quad [5.24]$$

que varia com  $\nu$ , exceto se  $\gamma = 0$ . A dificuldade desta solução passa por reparametrizar o parâmetro de escala  $\sigma_u$ , originando um parâmetro de escala modificado,  $\sigma^*$ ,

$$\sigma^* = \sigma_\nu - \gamma\nu = \sigma_u + \gamma(\nu - u) - \gamma\nu = \sigma_u - \gamma u \quad [5.25]$$

que ao ser constante deixa de depender de  $\nu$ , em virtude de [5.24]. Por consequência, também  $\sigma^*$  é independente de  $\nu$ . Por isso, as estimativas de  $\sigma^*$  e  $\gamma$  serão também constantes (ou praticamente constantes, decorrente da variabilidade relativa ao método de amostragem) para todo o  $\nu > u$ , desde que  $u$  seja um limiar válido para os excessos que seguem a GPD. Os gráficos com as estimativas  $\hat{\sigma}^*$  e  $\hat{\gamma}$  num dos eixos e os correspondentes limiares no outro eixo são outra forma de possibilitar a escolha do limiar adequado.

Todavia, na prática nem sempre podemos esperar que o ajuste dos parâmetros permaneça constante, tendo em vista que estamos a lidar com uma amostra. Para contornar este problema, uma sugestão poderá ser representar graficamente  $\hat{\sigma}^*$  e  $\hat{\gamma}$  com os seus intervalos de confiança versus  $\nu$ , e escolher o limiar como sendo o valor mais baixo de  $u$  para o qual as estimativas permanecem relativamente constantes. Os intervalos de confiança para  $\gamma$  são obtidos imediatamente a partir da matriz de variâncias-covariâncias. Porém, os intervalos de confiança para  $\sigma^*$  dependem de  $\sigma_u$  e de  $\gamma$ . A variância de  $\sigma^*$  é calculada pelo método delta,

$$Var(\hat{\sigma}^*) \approx \nabla \hat{\sigma}^{*T} V \nabla \hat{\sigma}^*, \quad [5.26]$$

onde

$$\nabla \hat{\sigma}^{*T} = \left[ \frac{\partial \hat{\sigma}^*}{\partial \hat{\sigma}_u}, \frac{\partial \hat{\sigma}^*}{\partial \hat{\gamma}} \right] = [1, -u] \quad [5.27]$$

e  $V$  é a matriz de variâncias-covariâncias para  $\hat{\sigma}^*$  (Coles, 2001).

### 5.2.3.3. Representação gráfica do estimador generalizado de Hill vs estimador dos momentos

A metodologia que a seguir apresentamos para escolher um potencial candidato a limiar baseia-se na sobreposição do gráfico de Hill generalizado (Beirlant et al., 1996, 2004) com o gráfico dos momentos, quando  $\gamma \in \mathbb{R}$ , observando-se o(s) ponto(s) onde ocorre a interseção dos dois gráficos, exemplificado na Figura 5.5.

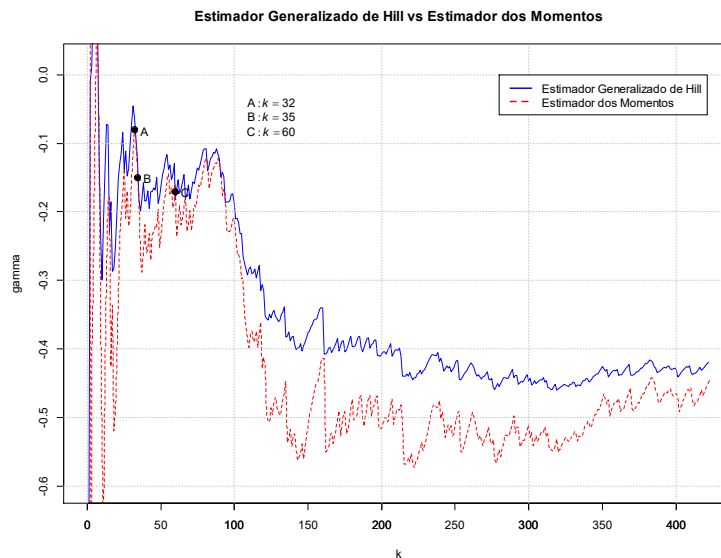


Figura 5.5 – Representação gráfica da sobreposição do estimador generalizado de Hill com o estimador dos Momentos. Dados utilizados: máximos individuais do lançamento do martelo masculino, 1980-2017,  $n=424$ ,  
Fonte: <https://www.worldathletics.org/>

Esta metodologia é similar à utilizada por Beirlant et al. (2009) e Albrecher et al. (2017), posteriormente também empregue por Reynkens & Verbelen (2018) no Package ReIns do R, onde poderá ser consultada para mais detalhes. Também Langousis et al. (2016) utilizam uma metodologia baseada na interseção entre dois gráficos. Contudo, os autores antes mencionados apresentam estimadores para o caso  $\gamma > 0$  e nesta tese usamos os estimadores  $\hat{\gamma}_n^{GH}(k) \in \mathbb{R}$  (Beirlant et al., 1996, 2004) e  $\hat{\gamma}_n^M(k) \in \mathbb{R}$  (Dekkers et al., 1989), uma vez que, como veremos na secção 5.3.7, em todas as amostras verificam-se estimativas  $\hat{\gamma} \leq 0$ . Estes estimadores são assintoticamente equivalentes com uma aproximação de segunda ordem (Cabral et al., 2020), sendo que a equivalência é válida para modelos de cauda pesada. Mostraremos na secção das aplicações que esta nova metodologia de captar potenciais limiares se revelou eficaz. De notar que a escolha satisfatória das  $k$  e.o.'s superiores corresponde ao valor onde os dois gráficos se intersectam, de forma que não seja nem demasiado baixo nem demasiado alto. Na exemplificação apresentada na Figura 5.5, possíveis candidatos de interesse a número de excedências são  $k=(32,34,60)$ , denotados pelas letras A, B e C, respetivamente.

#### 5.2.3.4. Metodologia “Esticar a Corda”

Esta metodologia consiste em “esticar”  $c$  vezes a linha formada pelos pontos do excesso médio do gráfico de vida média residual, provocado por uma diminuição progressiva do número de observações, sem comprometer a tendência natural das observações, levando a uma mais fácil visualização da linearidade a partir da abscissa  $u$ , favorecendo a deteção de um (ou mais) potencial(ais) candidato(s). Em Anexo 5.1 apresenta-se o procedimento de realização adotado. A Figura 5.6 exemplifica este processo em 4 etapas, onde a 1ª etapa corresponde exatamente ao MRL *plot*. Nesta tese o método foi operacionalizado em duas etapas, sendo que a segunda etapa contém 10%-15% do total das observações. Mostramos na secção das aplicações que esta nova metodologia de captar potenciais limiares se revelou eficaz.

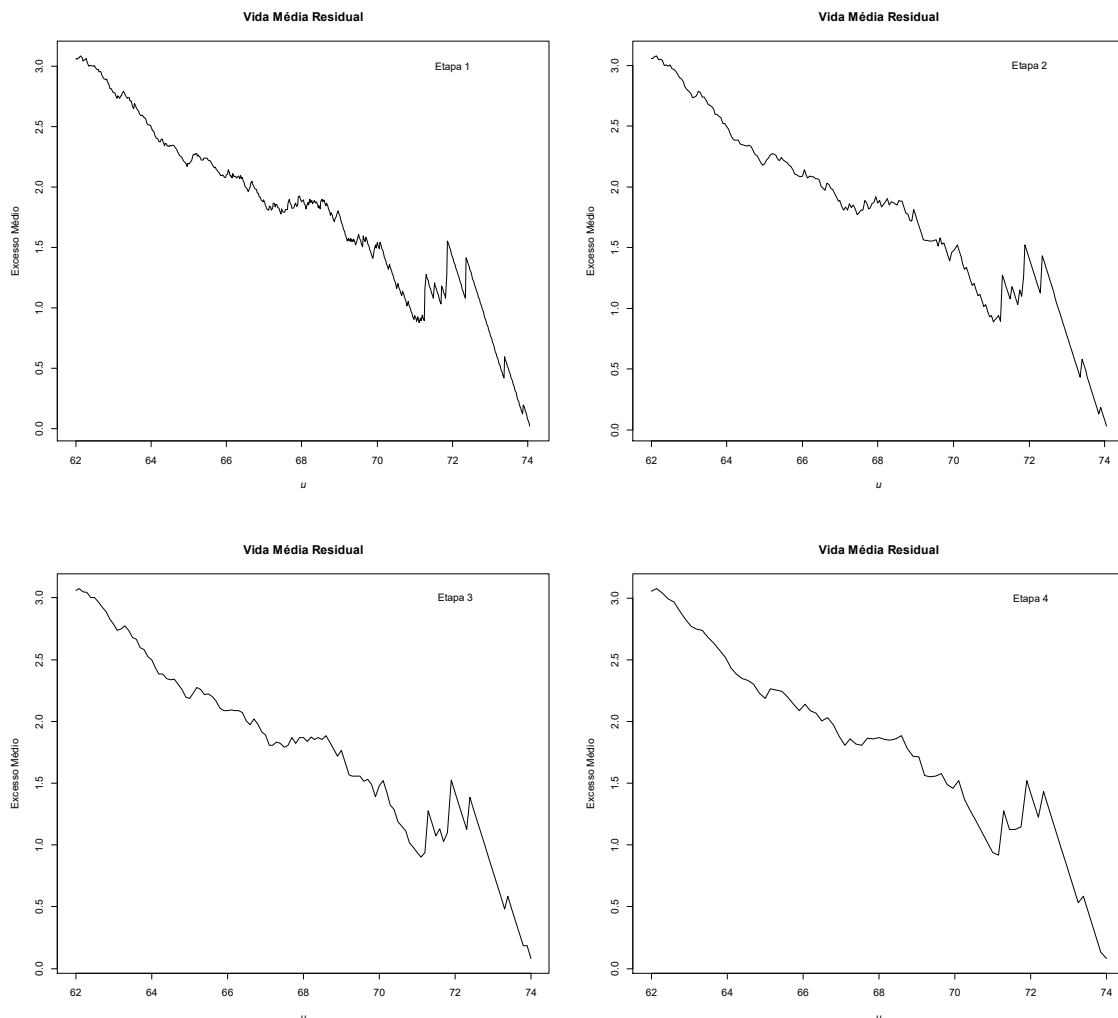


Figura 5.6 – Exemplo de representação gráfica do método “esticar a corda” em 4 etapas. Dados utilizados: máximos individuais do lançamento do disco masculino, 1980-2017,  $n=487$ , Fonte: <https://www.worldathletics.org/>



### 5.2.4. Estimação dos parâmetros

Os parâmetros da GPD [5.9] podem ser estimados por diferentes métodos. Smith (1984) e Davison (1984) deduziram os estimadores pelo método de máxima verosimilhança. Sob a suposição que os excessos seguem exatamente a GPD, Smith (1987a) estabeleceu a normalidade assintótica do estimador de máxima verosimilhança  $(\hat{\sigma}_u, \hat{\gamma})$  quando  $k \rightarrow \infty$ , desde que  $\gamma > -0.5$ . Um resultado análogo pode ser obtido sob a suposição fraca que a distribuição dos excessos  $F_u(x)$  é apenas aproximadamente a GPD desde que  $k \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $u \rightarrow x^F$ .

Considerando as estatísticas ordinais aleatórias i.i.d.'s crescentes  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k$  que excedem o limiar  $u$ , a função de verosimilhança  $L$  para GPD, conforme o comportamento de  $\gamma$ , é dada por:

(i) para  $\gamma = 0$ ,

$$L_{\sigma_u, 0}(y) = \prod_{i=1}^k \left[ \frac{1}{\sigma_u} \exp\left(-\frac{y_i}{\sigma_u}\right) \right], \text{ com } y_i > 0.$$

(ii) para  $\gamma \neq 0$ ,

$$L_{\sigma_u, \gamma}(y) = \prod_{i=1}^k \left[ \frac{1}{\sigma_u} \left(1 + \gamma \frac{y_i}{\sigma_u}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1} \right], \text{ com } y = (y_1, \dots, y_k) \text{ e } 1 + \gamma \frac{y_i}{\sigma_u} > 0.$$

Assim, os parâmetros desconhecidos  $\theta = (\sigma_u, \gamma)$  são estimados pelo maximizante de  $L$ , ou pela maximização da função de log-verosimilhança  $\ell$  (dada pelo logaritmo da função de verosimilhança), que conforme o comportamento de  $\gamma$ , é dada por:

(i) para  $\gamma = 0$ ,

$$\begin{aligned} \ell(\sigma_u, 0 | y_1, \dots, y_k) &= \ln L(\sigma_u, 0 | y_1, \dots, y_k) = \\ &= \sum_{i=1}^k \ln\left(\frac{1}{\sigma_u}\right) + \sum_{i=1}^k \ln\left[\exp\left(-\frac{y_i}{\sigma_u}\right)\right] = -k \ln \sigma_u - \frac{1}{\sigma_u} \sum_{i=1}^k y_i \end{aligned} \quad [5.28]$$

(ii) para  $\gamma \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \ell(\sigma_u, \gamma | y_1, \dots, y_k) &= \ln L(\sigma_u, \gamma | y_1, \dots, y_k) = \\ &= \sum_{i=1}^k \ln\left(\frac{1}{\sigma_u}\right) + \sum_{i=1}^k \ln\left[\left(1 + \gamma \frac{y_i}{\sigma_u}\right)^{-\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)}\right] = -k \ln \sigma_u - \left(\frac{1}{\gamma}+1\right) \sum_{i=1}^k \ln\left(1 + \gamma \frac{y_i}{\sigma_u}\right)_+ \end{aligned} \quad [5.29]$$

com a restrição  $1 + \gamma y_i / \sigma_u > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , onde  $\sigma_u > 0$  para  $\gamma \leq 0$  e  $\sigma_u < 1/2$  para  $\gamma > 0$ ;  $y_+ = \max(y, 0)$  de forma que qualquer valor  $y_i$  com combinação de parâmetros tal que  $1 + \gamma y_i / \sigma_u \leq 0$  corresponderia a  $\ell(\sigma_u, \gamma) = -\infty$ .

Com a maximização da função de log-verosimilhança, a obtenção das estimativas  $(\hat{\sigma}_u, \hat{\gamma})$  dos parâmetros  $(\sigma_u, \gamma)$ , ocorre com a resolução das equações,

- para  $\gamma = 0$

$$\frac{\partial \ell(\sigma_u, 0 | y_1, \dots, y_k)}{\partial \sigma_u} = 0$$

Nesta situação, a f.d.  $H(y | \sigma_u, \gamma)$  resume-se à f.d. de um modelo exponencial, pelo que o estimador de máxima verosimilhança para  $\sigma_u$  é dado por  $\hat{\sigma}_u = \bar{Y}$ .

- para  $\gamma \neq 0$

$$\frac{\partial \ell(\sigma_u, \gamma | y_1, \dots, y_k)}{\partial \sigma_u} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \ell(\sigma_u, \gamma | y_1, \dots, y_k)}{\partial \gamma} = 0$$

Nesta situação, a maximização da função de log-verosimilhança pode ser realizada usando a reparametrização sugerida por Davison (1984) e reforçada em Davison & Smith (1990) e Beirlant et al. (2004), ou seja,

$$(\sigma_u, \gamma) \rightarrow (\tau, \gamma), \text{ com } \tau := \frac{\gamma}{\sigma_u}.$$

Substituindo em [5.29], tem-se:

$$\begin{aligned} \ell(\tau, \gamma | y_1, \dots, y_k) &= \ln L(\tau, \gamma | y_1, \dots, y_k) = \\ &= -k \ln \gamma + k \ln \tau - \left( \frac{1}{\gamma} + 1 \right) \sum_{i=1}^k \ln(1 + \tau y_i) \end{aligned} \quad [5.30]$$

com  $1 + \tau y_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Para encontrar o maximizante de [5.30] é necessário encontrar a solução do sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln L_{\tau, \gamma}(y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln L_{\tau, \gamma}(y) = 0 \end{cases}$$

Deste modo, uma vez que os estimadores de máxima verosimilhança de  $(\hat{\tau}, \hat{\gamma})$  são obtidos por métodos numéricos, e seguem a forma,

$$\frac{1}{\hat{\tau}} - \left( \frac{1}{\hat{\gamma}} + 1 \right) \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{Y_i}{1 + \hat{\tau} Y_i} = 0, \text{ para } \frac{\partial}{\partial \tau} \ln L_{\tau, \gamma}(y) = 0$$

e

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(1 + \hat{\tau} Y_i), \text{ para } \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln L_{\tau, \gamma}(y) = 0. \quad [5.31]$$

Uma vez que as equações [5.28] e [5.29] não têm solução analítica explícita, a maximização pode ser feita recorrendo a algoritmos numéricos. Neste caso, pode considerar-se por exemplo os métodos de otimização de Nelder-Mead (Nelder & Mead, 1965) ou BFGS (Lewis & Overton, 2013). Para mais detalhes sobre estes métodos de otimização, consultar Davison (1984), Hosking et al. (1985), Smith (1985), Smith & Weissman (1985), Hosking & Wallis (1987), Davison & Smith (1990), Grimshaw (1993).

No ajustamento da GPD aos excessos acima de nível  $u$ , Smith (1984, 1987a) e Embrechts et al. (1997) referem que as condições de regularidade (normalidade, consistência, eficiência e invariância assintóticas) dos estimadores de máxima verosimilhança dependem da estimativa de  $\gamma$ , i.e.:

- quando  $-0.5 < \gamma < 0.5$ , Smith (1984) mostrou que os estimadores de máxima verosimilhança são assintoticamente normais e eficientes. Neste caso verifica-se que  $\sqrt{k}((\hat{\sigma}_u, \hat{\gamma}) - (\sigma_u, \gamma)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{d} Z \sim N(0, I_{(\sigma_u, \gamma)}^{-1})$ , em que  $I_{(\sigma_u, \gamma)}^{-1}$  é a inversa da matriz de informação de Fisher esperada,

$$I_{(\sigma_u, \gamma)}^{-1} = - \left[ E \left( \frac{\partial^2 \ell(\sigma_u, \gamma)}{\partial (\sigma_u, \gamma)^2} \right) \right]^{-1}, \quad [5.33]$$

onde  $E$ , denota o valor esperado do operador, e  $\ell$  é a função de log-verosimilhança dada em [5.28] ou [5.29]. Neste caso, os intervalos de confiança para  $(\sigma_u, \gamma)$  e outras formas de inferência são calculados com base na aproximação à distribuição Normal. Mais detalhes sobre  $I_{(\sigma_u, \gamma)}^{-1}$  podem ser consultados em Kozubowski et al. (2009). Tal como na distribuição GEV, também na GPD a condição  $\gamma > -0.5$  assegura que todas as funções Gama na Matriz de Informação de Fisher tenham argumentos positivos.

- quando  $0.5 \leq \gamma < 1$ , Smith (1984) identificou o problema como não-regular que modifica o rácio de convergência dos estimadores de máxima verosimilhança.

- para  $\gamma \geq 1$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , a verosimilhança não tem máximo local.
- de forma mais liberal, a consistência e a normalidade assintóticas dos estimadores  $(\hat{\sigma}_u, \hat{\gamma})$  foram estabelecidas por Zhou (2009, 2010) para valores de  $\gamma > -1$ . Porém, esta condição não se verificando para as distribuições de cauda muito leve, é satisfeita para grande parte das aplicações.

Smith (1985) e Bermudez & Kotz (2010a), consideram mais eficiente o método da máxima verosimilhança apesar de requerer o uso de algoritmos numéricos. Não obstante, Bermudez & Kotz (2010b) também consideram que a estimação por máxima verosimilhança pode ser inaplicável sempre que o algoritmo numérico usado na estimação dos parâmetros falhe na convergência. Sabendo que as situações de instabilidade ocorrem, sobretudo em torno de  $\gamma = 0$ , então a atenção deve situar-se nos casos de  $-0.5 < \gamma < 0.5$ , exceto o caso  $\gamma = 0$  (Castillo & Hadi, 1997). Hosking & Wallis (1987)

concluem que o método PWM (do inglês, *probability weighted moments*) é preferível se a dimensão da amostra (neste caso o número de excessos) for inferior a 500. Não obstante as limitações, os métodos baseados na função de verosimilhança são preferíveis pelo facto de serem bem compreendidos e facilmente modificáveis sempre que se pretenda incorporar modelos mais complexos (Smith, 1985).

### 5.2.5. Erros-padrão e intervalos de confiança dos parâmetros extremais

Segundo Coles (2001), os erros-padrão podem ser obtidos pelo método delta. O método delta pode ser usado para obter a matriz de variância-covariância de  $h(\hat{\theta})$ , conforme apresentado em [5.26] e [5.27], com  $\hat{\theta} = (\hat{\sigma}_u, \hat{\gamma})$  as estimativas de  $\theta = (\sigma_u, \gamma)$ . Detalhes gerais sobre o método delta podem ser consultados em Coles (2001, p.33) e Castillo et al. (2004, p.112-113).

Os intervalos de confiança para os parâmetros da  $GPD(\theta)$  podem ser calculados pela aproximação à Normal dos estimadores de máxima verosimilhança, suportada pela normalidade assintótica de valor médio nulo para,

$$\sqrt{k}(\hat{\theta} - \theta), \text{ no caso de se pretender os } IC_{100(1-\alpha)\%}(\theta).$$

Desta forma, o intervalo com  $100(1-\alpha)\%$  de confiança, é dada por:

$$IC_{100(1-\alpha)\%}(\theta) = \left( \hat{\theta} \pm \Phi_{1-\alpha/2}^{-1} \times se(\hat{\theta}) \right) \quad [5.34]$$

onde  $\Phi_{1-\alpha/2}^{-1}$  é o quantil  $(1-\alpha/2)$  da distribuição Normal padrão.

Com base na distribuição Normal assintótica e na presença de grandes amostras, pode usar-se (Beirlant et al., 2004):

$$IC_{100(1-\alpha)\%}(\theta) = \left( \hat{\theta} \pm \Phi_{1-\alpha/2}^{-1} \sqrt{\frac{\hat{V}_{1,1}}{k}} \right) \text{ e } IC_{100(1-\alpha)\%}(\theta) = \left( \hat{\theta} \pm \Phi_{1-\alpha/2}^{-1} \sqrt{\frac{\hat{V}_{2,2}}{k}} \right), \quad [5.35]$$

onde  $k$  é o número de excessos acima de  $u$  e  $\hat{V}_{1,1}$  e  $\hat{V}_{2,2}$  são, respetivamente, o primeiro e o segundo

elemento da diagonal de  $V_1 = (1 + \hat{\gamma}) \begin{bmatrix} 1 + \hat{\gamma} & -\hat{\sigma}_u \\ -\hat{\sigma}_u & 2\hat{\sigma}_u^2 \end{bmatrix}$ , ou seja,  $\hat{V}_{1,1} = (1 + \hat{\gamma})^2$  e  $\hat{V}_{2,2} = (1 + \hat{\gamma})2\hat{\sigma}_u^2$ .

Contudo, à semelhança do método dos máximos de blocos, também na abordagem POT, Coles (2001) e Beirlant et al. (2004) recomendam o uso da função *profile log-likelihood* para a construção de  $IC_{100(1-\alpha)\%}(\gamma)$  assimétricos. Ou seja,

$$\ln L_p(\gamma) := \max_{\sigma_u | \gamma} \ln L(\sigma_u | \gamma, y_1, \dots, y_k).$$

Usando argumentos similares aos da distribuição GEV, o intervalo com  $100(1-\alpha)\%$  de confiança para  $\gamma$ , pode ser obtido:

$$IC_{100(1-\alpha)\%}(\gamma) = \left\{ \gamma : \ln L_p(\gamma) \geq \ln L_p(\hat{\gamma}) - \frac{\chi_{1;1-\alpha}^2}{2} \right\}, \quad [5.36]$$

ou equivalentemente,

$$IC_{100(1-\alpha)\%}(\gamma) = \left\{ \gamma : -2 \ln \frac{L_p(\gamma)}{L_p(\hat{\gamma})} \leq \chi_{1;1-\alpha}^2 \right\}.$$

### 5.2.6. Seleção do modelo: Exponencial ou GPD?

Na verificação do peso da cauda da distribuição subjacente aos dados podem ser usados diversos procedimentos. Nesta tese, recorreremos ao gráfico quantil-quantil, à análise do intervalo com  $100(1-\alpha)\%$  de confiança para o parâmetro de forma e aos testes de hipóteses *Deviance*, *Deviance* corrigida e Teste de Marohn.

#### 5.2.6.1. Gráfico QQ-plot

O gráfico de quantis, ou mais especificamente gráfico quantil-quantil, que chamaremos simplesmente de *QQ-plot*<sup>27</sup> é uma ferramenta gráfica usada para comparar duas distribuições de probabilidade, ou para verificar se uma amostra é proveniente de um determinado modelo. Compara quantis que podem ser empíricos ou teóricos em ambos os eixos, ainda que habitualmente o interesse seja comparar quantis empíricos com quantis teóricos. E uma vez que o *QQ-plot* resultante de duas amostras com a mesma distribuição de probabilidade apresenta uma configuração linear, esta mesma linearidade pode ser verificada por observação visual e quantificada por recurso ao coeficiente de correlação. A representação do *QQ-plot* será efetuada na secção 5.2.7, para onde se remete mais detalhe.

#### 5.2.6.2. Intervalos de confiança

Um método que permite determinar se a função de distribuição exponencial é a função adequada aos dados, consiste em observar se o valor zero pertence ou não ao intervalo de confiança para  $\gamma$  (Beirlant et al., 2004; Castillo et al., 2004). Ou seja, se  $0 \in IC_{100(1-\alpha)\%}(\gamma)$ , então os dados amostrais não fornecem evidência suficiente para rejeitar o modelo Exponencial. Opostamente, se  $0 \notin IC_{100(1-\alpha)\%}(\gamma)$ , tem-se evidência estatística para escolher ou a f.d. Pareto ou a f.d. tipo Beta.

---

<sup>27</sup> Proposto por Wilk & Gnanadesikan (1968).

### 5.2.6.3. Testes de hipóteses

Tal como no método dos máximos de blocos, também no método POT-GPD o caso  $\gamma = 0$  (f.d. Exponencial) pode ser considerado um ponto de transição para  $\gamma < 0$  (f.d. tipo Beta) ou para  $\gamma > 0$  (f.d. Pareto). No caso POT este problema tem vindo a ser considerado, dando-se prioridade à hipótese Exponencial para a distribuição dos excessos  $\{Y_i\}_{i=1,\dots,k}$ . Por esta razão, a escolha mais plausível parece ser testar a hipótese do modelo “ser Exponencial ( $H_0$ ) vs não ser ( $H_1$ )”. Assim, as hipóteses são:

$$H_0 : \{H_{\sigma_u, \gamma} : \gamma = 0\} \quad \text{vs} \quad H_1 : \{H_{\sigma_u, \gamma} : \gamma \neq 0\} \quad [5.37]$$

$$H_0 : \{H_{\sigma_u, \gamma} : \gamma = 0\} \quad \text{vs} \quad H_1 : \{H_{\sigma_u, \gamma} : \gamma > 0\} \quad [5.38]$$

$$H_0 : \{H_{\sigma_u, \gamma} : \gamma = 0\} \quad \text{vs} \quad H_1 : \{H_{\sigma_u, \gamma} : \gamma < 0\} \quad [5.39]$$

ainda que estejamos particularmente interessados nos testes bilateral e unilateral à esquerda.

Observação 5.5: entre outros, o caso especial de testar  $H_0 : \gamma = 0$  está descrito em Marohn (1998).

#### (i) Teste da razão de verosimilhanças

Sejam  $(Y_{1n}, \dots, Y_{kn})$  as  $k$  excedências acima de  $u$ , onde  $Y_i \sim H_{\sigma_u, \gamma}$ , para  $i = 1, \dots, k$ , com  $H_{\sigma_u, \gamma}$  definida em [5.9], e sejam  $\ell(u, \sigma_u, \gamma | y_1, \dots, y_k)$  e  $\ell(u, \sigma_u, 0 | y_1, \dots, y_k)$  as funções de log-verosimilhança para  $H_{\sigma_u, \gamma}$  e  $H_{\sigma_u, 0}$ , respetivamente. A *Deviance* para modelos encaixados, é dada por:

$$D = 2 \left\{ \ell(u, \hat{\sigma}_{uH_{\sigma_u, \gamma}}, \hat{\gamma}_{H_{\sigma_u, \gamma}} | Y_1, \dots, Y_k) - \ell(u, \hat{\sigma}_{uH_{\sigma_u, 0}}, 0 | Y_1, \dots, Y_k) \right\} \quad [5.40]$$

onde  $(\hat{\sigma}_{uH_{\sigma_u, \gamma}}, \hat{\gamma}_{H_{\sigma_u, \gamma}})$  e  $(\hat{\sigma}_{uH_{\sigma_u, 0}})$  são estimadores de máxima verosimilhança para os parâmetros dos modelos  $H_{\sigma_u, \gamma}$  e  $H_{\sigma_u, 0}$ , respetivamente, e  $\ell$  é a função de log-verosimilhança maximizada para os modelos ajustados,  $\ell(u, \hat{\sigma}_u, \hat{\gamma})$  e  $\ell(u, \hat{\sigma}_u, 0)$ , respetivamente. As hipóteses em [5.37] podem ser reescritas como:

$$H_0 : H_{\sigma_u, \gamma} = H_{\sigma_u, 0} \quad \text{vs} \quad H_1 : H_{\sigma_u, \gamma} \neq H_{\sigma_u, 0}$$

Sob validade da  $H_0$ ,

$$D \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{d} A_{(1)} \sim \chi_1^2.$$

A um nível de significância  $\alpha$ , segundo um quantil de probabilidade  $1 - \alpha$  de uma distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade, rejeita-se  $H_0$  se,

$$D \geq \chi_{1; 1-\alpha}^2.$$

De modo a obter uma maior precisão quando a amostra não é suficientemente grande, Reiss & Thomas (2007) propõem que seja aplicada a correção de Bartlett (Bartlett, 1937, p.144), ou seja

$$D^* = \frac{D}{1 + \frac{d}{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{d} A_{(1)} \sim \chi_1^2. \quad [5.41]$$

Assim, rejeita-se  $H_0$ , i.e., se:

$$D^* \geq \chi_{1;1-\alpha}^2$$

O valor  $p$  associado, conforme seja  $D$  ou  $D^*$ , é calculado como <sup>28</sup>

$$p(D) = P(A_{(1)} > D) = 1 - P(A_{(1)} \leq D) \quad \text{ou} \quad p(D^*) = P(A_{(1)} > D^*) = 1 - P(A_{(1)} \leq D^*),$$

pelo que a um nível de significância  $\alpha$ , rejeita-se  $H_0$  se:

$$p(D) \leq \alpha \quad \text{ou} \quad p(D^*) \leq \alpha.$$

### (ii) Teste de Marohn

Sejam  $(Y_1, \dots, Y_k)$  as  $k$  excedências acima do limiar  $u$ , obtidas a partir da amostra inicial, a estatística de teste proposta por Marohn (2000) é dada por:

$$T_k = \frac{1}{2} \left( \frac{S_Y^2}{(Y - u)^2} - 1 \right) \quad [5.42]$$

onde  $S_Y^2$  é a variância amostral dada por:

$$S_Y^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (Y_i - \bar{Y})^2.$$

Sob a validade de  $H_0$ , tem-se que:

$$T_k^* = \sqrt{k} \cdot T_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{d} Z \sim N(0,1), \quad [5.43]$$

ao nível assintótico  $\alpha$ , com  $z_\alpha$  o quantil de probabilidade  $\alpha$  de uma distribuição Normal padrão, rejeita-se  $H_0$  se:

- $|T_k^*| \geq z_{1-\alpha/2}$  (teste bilateral)
- $T_k^* \geq z_{1-\alpha}$  (teste unilateral à direita)
- $T_k^* \leq z_\alpha$  (teste unilateral à esquerda)

Os valores  $p$  correspondentes são obtidos através de:

- $p(T_k^*) = 2(1 - \Phi(|T_k^*|))$
- $p(T_k^*) = 1 - \Phi(T_k^*)$
- $p(T_k^*) = \Phi(T_k^*)$

Neste caso, a um dado nível  $\alpha$ , rejeita-se  $H_0$  se  $p(T_k^*) \leq \alpha$ .

<sup>28</sup> No programa computacional R, o valor  $p$  calcula-se como “1-pchisq(D,1)” ou “1-pchisq(D\*,1)”.

### 5.2.7. Diagnóstico do ajustamento

O diagnóstico do ajustamento do modelo (*goodness-of-fit*) examina o quão bem os dados amostrais concordam com uma distribuição de probabilidade de referência. As medidas de adequação resumem a discrepância entre os valores observados e os valores esperados no modelo em análise.

À semelhança do ajuste para a distribuição GEV, também na GPD-POT se compara a função densidade de probabilidade com a correspondente função densidade empírica da amostra. Nesta medida, a qualidade do ajuste do modelo pode ser verificada pelos gráficos de probabilidade-probabilidade (*PP-plot*), quantil-quantil (*QQ-plot*) e histograma com a curva de densidade.

Seja  $y_i (i=1, \dots, k)$  a amostra ordenada crescentemente das excedências acima de um limiar,  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k$ , estimadas de um modelo  $H_{\sigma_u, \gamma}(y)$ . As posições de marcação obtêm-se:

$$p_{i.k} = \frac{i - \alpha}{k + \beta}, \quad i = 1, \dots, k \quad [5.44]$$

para escolhas apropriadas de  $\alpha \geq 0$  e  $\beta \geq 0$ . As posições de marcação podem ser escolhidas empiricamente, dependendo, entre outros, da natureza dos dados, do tipo de distribuição e do método de estimação a ser usado. Das várias formas mencionadas na literatura, nesta tese usamos  $\alpha=0$  e  $\beta=1$ , correspondente (conforme já vimos) à proposta de Weibull (1939a,b), ou seja:

$$p_{i.k} = \frac{i}{k+1}, \quad i = 1, \dots, k. \quad [5.45]$$

Outras posições de marcação alternativas podem ser consultadas por exemplo em Makkonen (2006, 2008).

O *PP-plot* é um gráfico de dispersão que compara as funções de distribuição ajustada com a empírica, definido pelos pontos,

$$\left\{ \left[ \hat{H}(y_{i.k}), \left( \frac{i}{k+1} \right) \right] : i = 1, \dots, k \right\}, \quad [5.46]$$

onde a quantidade  $i/(k+1)$  corresponde à f.d. empírica dos excessos avaliada em  $y_i$ , e  $\hat{H}(y_i)$  é o modelo estimado em [5.9], conforme  $\hat{\gamma} > 0$ ,  $\hat{\gamma} < 0$  ou  $\hat{\gamma} = 0$ .

O *QQ-plot* é um gráfico representado pelos pontos,

$$\left\{ \left[ \hat{H}^{\left( \frac{i}{k+1} \right)}, y_{i.k} \right] : i = 1, \dots, k \right\}, \quad [5.47]$$

onde a quantidade  $\hat{H}^{\left( i/(k+1) \right)}$  proporciona a estimativa do quantil  $i/(k+1)$  do modelo generalizado de Pareto, dado em [5.9], conforme  $\hat{\gamma} > 0$ ,  $\hat{\gamma} < 0$  ou  $\hat{\gamma} = 0$ .



Basicamente, o *QQ-plot* compara duas distribuições de probabilidade (distribuição amostral vs distribuição teórica), traçando os seus quantis uns contra os outros, com o propósito de verificar a validade de um pressuposto de distribuição para uma série de dados. Para isso, calcula o valor teórico esperado para cada ponto segundo a GPD e, caso a  $H_{\hat{\sigma}_u, \hat{\gamma}}(y)$  seja um modelo adequado para modelar os excessos acima de  $u$ , então a nuvem de pontos dos *PP-plot* e *QQ-plot* deverá ter uma configuração aproximadamente linear, situando-se na proximidade da reta diagonal a 45°,  $y=x$  (Castillo et al., 2004).

Observação 5.6: a idéia básica na construção do *PP-plot* é semelhante à que foi proposta para a construção do *QQ-plot*. A principal diferença está no facto de no *QQ-plot* serem marcados os quantis, ao passo que no *PP-plot* são marcadas as frequências ou probabilidades associadas aos  $y_i$ .

Observação 5.7: Beirlant et al. (2004, Figura 1.8, p.20) apresentam o gráfico *QQ-plot* Exponencial e o gráfico da função de excesso médio, ambos adequados para avaliar as distribuições de probabilidade com peso de cauda superior, igual ou inferior ao da distribuição Exponencial. De tal forma que:

(i) No caso do *QQ-plot*:

- Se o gráfico tiver convexidade voltada para baixo → a cauda tem peso superior ao da Exponencial (cauda Pareto).
- Se o gráfico for linear → a cauda tem peso igual ao da Exponencial (cauda Exponencial).
- Se o gráfico for tiver concavidade voltada para baixo → a cauda tem peso inferior ao da Exponencial (cauda Beta).

(ii) No caso do gráfico da função de excesso médio:

- Se tiver declive positivo → a cauda tem peso superior ao da Exponencial (cauda Pareto).
- Se tiver declive nulo → a cauda tem peso igual ao da Exponencial (cauda Exponencial).
- Se tiver declive negativo → a cauda tem peso inferior ao da Exponencial (cauda Beta).

O histograma com sobreposição da curva de densidade estimada com a curva da f.d.p. teórica, para comparar a distribuição de dados a um modelo teórico.

Outra forma de avaliar o ajustamento é recorrer ao gráfico dos níveis de retorno a  $t$ -recordes individuais, o qual será alvo de abordagem mais pormenorizada na secção seguinte.

### 5.2.8. Estimação de outras quantidades de interesse

Estimados os parâmetros extremais de escala e forma  $(\sigma_u, \gamma)$ , importa usar  $(\hat{\sigma}_u, \hat{\gamma})$  para estimar outros importantes parâmetros de eventos extremos, nomeadamente, os quantis extremais, a probabilidade de excedência, o limite superior do suporte ( $\hat{\gamma} < 0$ ) e os valores de retorno.

Considere-se a função quantil de cauda e a função de distribuição contínua  $F$  com inversa generalizada apresentadas na Definição 2.3.

#### 5.2.8.1. Quantis extremais

Invertendo a função de distribuição generalizada de Pareto  $H_{\sigma_u, \gamma}(y|u)$ , obtêm-se os quantis extremais de probabilidade  $1-p$ , também chamado de quantil extremal de probabilidade de excedência  $p$ . Dado  $P[C > x_p] = p$ , o quantil  $x_p$ , com  $p$  suficientemente pequeno (i.e., próximo de zero), tal que

$$x_p := H^{\leftarrow}(1-p)$$

é denominado de quantil extremal. Na prática, considera-se que os valores  $p$  mais comuns são 0.01, 0.001 e 0.0001 (Gomes et al., 2013).

Considerando  $F(x) = 1-p$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} p &= \frac{k}{n} \left[ 1 + \hat{\gamma} \left( \frac{x-u}{\hat{\sigma}_u} \right) \right]^{-\frac{1}{\hat{\gamma}}} \Leftrightarrow \left( \frac{np}{k} \right)^{-\hat{\gamma}} = 1 + \hat{\gamma} \left( \frac{x-u}{\hat{\sigma}_u} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \hat{\gamma}u + \hat{\sigma}_u \left[ \left( \frac{np}{k} \right)^{-\hat{\gamma}} - 1 \right] &= \hat{\gamma}x \Leftrightarrow u + \frac{\hat{\sigma}_u}{\hat{\gamma}} \left[ \left( \frac{np}{k} \right)^{-\hat{\gamma}} - 1 \right] = x \end{aligned}$$

Portanto, o estimador de quantis elevados de  $H_{\sigma_u, \gamma}$ ,  $U\left(\frac{1}{p}\right) = H^{\leftarrow}(1-p) = x_p$ , é dado por:

$$\hat{x}_p = \begin{cases} u + \frac{\hat{\sigma}_u}{\hat{\gamma}} \left[ \left( \frac{np}{k} \right)^{-\hat{\gamma}} - 1 \right] & , \hat{\gamma} \neq 0 \\ u - \hat{\sigma}_u \ln\left(\frac{np}{k}\right) & , \hat{\gamma} = 0 \end{cases} \quad [5.48]$$

Observação 5.8: as estimativas dos quantis extremais com probabilidade de excedência  $p$ , para  $p$  pequeno, obtêm-se invertendo a f.d. da GPD dada em [5.9], i.e.,

$$U_{H_\gamma}(1/p) = H_\gamma^{\leftarrow}(1-p),$$

e são dadas por:

$$U_{H_\gamma}\left(\frac{1}{p}\right) = H_\gamma^{\leftarrow}(1-p | \hat{\sigma}_u) = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_u}{\hat{\gamma}} (p^{-\hat{\gamma}} - 1) & , \hat{\gamma} \neq 0 \\ -\hat{\sigma}_u \ln p & , \hat{\gamma} = 0 \end{cases}.$$

Contudo, é mais interessante usar a função quantil de cauda definida em [2.32], com  $t = 1/p$ , para estimar quantis elevados de  $F$ ,  $U(t) = F^{\leftarrow}(1-p)$ , obtendo-se o resultado apresentado em [5.50].

### 5.2.8.2. Probabilidade de excedência

A probabilidade de um nível  $u$  ser excedido por um atleta

$$p^u := P[C > u]$$

designa-se de probabilidade de cauda ou probabilidade de excedência.

Já vimos que a partir da igualdade em [5.4], i.e.,  $F_u(y)$ , obtém-se [5.6], i.e.,  $F(x)$ . Ao definir  $x = u + y$  (ou equivalentemente,  $y = x - u$ ) e aplicando o Teorema de Pickands-Balkema-de Haan, tem-se o modelo GPD inserido na f.d. da cauda  $F$ , pelo que podemos reescrever [5.6] como

$$F_u(x-u) = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} \Leftrightarrow F(x) = F_u(x-u)(1 - F(u)) + F(u), \quad [5.49]$$

com  $u$  suficientemente elevado.

Assim, a partir de [5.49] tem-se:

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= 1 - [F_u(x-u)(1 - F(u)) + F(u)] \\ &= 1 - F(u) - F_u(x-u)(1 - F(u)) \\ &= [1 - F(u)] [1 - F_u(x-u)] \end{aligned}$$

Uma vez que  $\bar{F} = 1 - F$ , então

$$\bar{F}(x) = \bar{F}(u) \bar{F}_u(x-u) \approx \bar{F}(u) \left[ 1 - H_\gamma(x-u; \sigma_u) \right]. \quad [5.50]$$

Portanto, conhecendo-se a aproximação entre a distribuição condicional dos excessos acima de  $u$  e a GDP, dada em [5.7], a expressão [5.50] mostra que é possível interpretar o modelo em termos da cauda da f.d.  $F$  subjacente, para  $x > u$ , considerando-se na estimação da probabilidade de excedência do valor elevado  $x$ ,  $\bar{F}(x)$ , a aproximação,

$$\bar{F}(x) \approx \begin{cases} \bar{F}(u) \left[ 1 + \hat{\gamma} \left( \frac{x-u}{\hat{\sigma}_u} \right) \right]^{\frac{1}{\hat{\gamma}}}, & \hat{\gamma} \neq 0 \\ \bar{F}(u) \left[ \exp \left( -\frac{x-u}{\hat{\sigma}_u} \right) \right], & \hat{\gamma} = 0 \end{cases}, \quad [5.51]$$

para  $\sigma_u > 0$ ,  $\gamma \neq 0$ ,  $0 \leq x < x^F - u$ .

Porém, dada a complexidade da expressão [5.51], a probabilidade de excedência de um nível  $x$  elevado não pode ser obtida diretamente da cauda da GDP com os parâmetros estimados, pelo que terá que ser ponderada pela proporção de excessos de nível na amostra original,  $k/n$ , e posteriormente (conforme  $\gamma \neq 0$  ou  $\gamma = 0$ ) substituir os parâmetros  $(\sigma_u, \gamma)$ ,  $(\hat{\sigma}_u)$  pelas respectivas estimativas de máxima verosimilhança

$(\hat{\sigma}_u, \hat{\gamma}), (\hat{\sigma}_u)$ , obtendo-se assim um estimador de probabilidade para a cauda direita da distribuição. Assim, substituindo  $F$  pela sua imagem estatística  $F_n$  (f.d. empírica), estimando  $\bar{F}(u)$  pela estimativa da frequência relativa  $k/n$  das observações acima de  $u$  na amostra original de tamanho  $n, X_1, \dots, X_n$ , e  $\bar{F}_u(x-u)$  pela GPD, tem-se que a estimativa é dada por:

$$\hat{F}(x) = P[C > x] = \begin{cases} \frac{k}{n} \left[ 1 + \hat{\gamma} \left( \frac{x-u}{\hat{\sigma}_u} \right) \right]^{-\frac{1}{\hat{\gamma}}}, & \hat{\gamma} \neq 0 \\ \frac{k}{n} \left[ \exp \left( -\frac{x-u}{\hat{\sigma}_u} \right) \right], & \hat{\gamma} = 0 \end{cases}, \text{ com } x > u. \quad [5.52]$$

### 5.2.8.3. Limite superior do suporte

Quando  $\hat{\gamma} < 0$ , o estimador do limite superior do suporte de  $F$  é dado por:

$$\hat{x}^F = \hat{U}(\infty) = u - \frac{\hat{\sigma}_u}{\hat{\gamma}}. \quad [5.53]$$

### 5.2.8.4. Valores de retorno

Para estimar os valores de retorno substitui-se  $\sigma_u$  e  $\gamma$  pelas suas estimativas obtidas por máxima verosimilhança,  $(\hat{\sigma}_u, \hat{\gamma})$ . Os valores de retorno compreendem os níveis de retorno e o período de retorno. Supondo que dispomos de  $t$  recortes individuais independentes, então  $F(U(t)) = 1 - 1/t$  significa que o nível  $U(t)$  (nível de retorno) é excedido em média uma vez em cada  $t$ -recortes individuais (período de retorno), o qual é a solução de,

$$\hat{\zeta}_u \left[ 1 + \hat{\gamma} \left( \frac{\hat{x}_t - u}{\hat{\sigma}_u} \right) \right]_+^{-\frac{1}{\hat{\gamma}}} = \frac{1}{t}, \quad [5.54]$$

onde  $\hat{\zeta}_u = k/n$  é o rácio empírico de excedência, ou a probabilidade de exceder o limiar  $u$ .

Rearranjando [5.54], a estimativa do nível de retorno para  $t$ -recortes individuais, com  $t=1/p$  e  $p$  suficientemente pequeno para assegurar que  $\hat{U}(t) > u$ , é dada por:

$$\hat{U}(t) = \begin{cases} u + \frac{\hat{\sigma}_u}{\hat{\gamma}} \left[ (t\hat{\zeta}_u)^{\hat{\gamma}} - 1 \right], & \hat{\gamma} \neq 0 \\ u + \hat{\sigma}_u \ln(t\hat{\zeta}_u), & \hat{\gamma} = 0 \end{cases} \quad [5.55]$$

O gráfico dos níveis de retorno consiste no *locus* de pontos  $(t, \hat{U}(t))$  para grandes valores de  $t$ , com  $\hat{U}(t)$  dado em [5.55].

Observação 5.9: ainda que não seja alvo de abordagem no presente estudo, decorrente da infrequência do número de observações nos anos de recolha, mas quando os dados estão dispostos por  $t$ -anos (em vez de  $t$ -registros individuais, como é o caso deste estudo), com  $n_y$  observações por ano (i.e., máximos anuais em vez de máximos individuais), a estimativa do nível de retorno para o período de retorno de  $t$ -anos,  $\hat{U}(t)$ , é dada por:

$$\hat{U}(t) = \begin{cases} u + \frac{\hat{\sigma}_u}{\hat{\gamma}} \left[ (tn_y \hat{\zeta}_u)^{-\hat{\gamma}} - 1 \right] & , \hat{\gamma} \neq 0 \\ u + \hat{\sigma}_u \ln(tn_y \hat{\zeta}_u) & , \hat{\gamma} = 0 \end{cases}$$

Tal como observado na secção 5.2.5. podemos obter os erros-padrão recorrendo ao método delta. A incerteza na estimação de  $\zeta_u$  deverá estar incluída no cálculo. Segundo Coles (2001), atendendo às propriedades padrão da distribuição binomial deduz-se que  $Var(\hat{\zeta}_u) \approx \hat{\zeta}_u(1 - \hat{\zeta}_u)/n$ , pelo que a matriz de variância-covariância para os estimadores  $(\hat{\zeta}_u, \hat{\sigma}_u, \hat{\gamma})$  é aproximadamente,

$$V = \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_u(1 - \hat{\zeta}_u)/n & 0 & 0 \\ 0 & v_{1,1} & v_{1,2} \\ 0 & v_{2,1} & v_{2,2} \end{bmatrix},$$

onde  $v_{i,j}$  denota o  $(i,j)$ -termo da matriz de variância-covariância dos estimadores  $\hat{\gamma}$  e  $\hat{\sigma}_u$ .

Assim, pelo método delta,

$$Var(\hat{U}(t)) \approx \nabla U(t)^T V \nabla U(t),$$

onde,

$$\begin{aligned} \nabla U(t)^T &= \left[ \frac{\partial U(t)}{\partial \zeta_u}, \frac{\partial U(t)}{\partial \sigma_u}, \frac{\partial U(t)}{\partial \gamma} \right] = \\ &= \left[ \sigma_u t^\gamma \zeta_u^{\gamma-1}, \gamma^{-1} \{ (t\zeta_u)^\gamma - 1 \}, -\sigma_u \gamma^{-2} \{ (t\zeta_u)^\gamma - 1 \} + \sigma_u \gamma^{-1} (t\zeta_u)^\gamma \ln(t\zeta_u) \right] \end{aligned} \quad [5.56]$$

em que  $V$  é a matriz de variâncias-covariâncias de  $(\hat{\zeta}_u, \hat{\sigma}_u, \hat{\gamma})$ .

Usando a aproximação à distribuição Normal dos estimadores de máxima verosimilhança, podem-se construir intervalos de confiança para os níveis de retorno. Assim, o intervalo com  $100(1-\alpha)\%$  de confiança, para cada nível de retorno, é dada por:

$$IC_{100(1-\alpha)\%}[U(t)] = \left( \hat{U}(t) \pm \Phi_{1-\alpha/2}^{-1} \times \sqrt{Var[\hat{U}(t)]} \right) \quad [5.57]$$

onde  $\Phi_{1-\alpha/2}^{-1}$  é o quantil de probabilidade  $1-\alpha/2$  da distribuição Normal padrão.

Porém, conforme recomendação de Coles (2001) e Beirlant et al. (2004), à semelhança do que acontece com o modelo GEV, também aqui maior precisão poderá ser conseguida se os intervalos de confiança forem construídos pela função de *profile log-likelihood*, escrevendo-se da seguinte forma:

$$IC_{100(1-\alpha)\%}(U(t)) = \left\{ \hat{U}(t) : \ln L_p(U(t)) \geq \ln L_p(\hat{U}(t)) - \frac{\chi_{1,1-\alpha}^2}{2} \right\}, \quad [5.58]$$

com  $\ln L_p(U(t)) = \max L(U(t))$ .

De notar que com [5.58] geralmente os intervalos de confiança são assimétricos, i.e., a distância entre a estimativa pontual por máxima verosimilhança e os seus limites são diferentes.

Conforme a Definição 4.5, na estimativa do período de retorno, com  $F$  a f.d. do  $\max(X_1, \dots, X_n)$ , o estimador do período de retorno  $T$  do evento  $u$  é dado por:

$$\hat{T}(u) \approx \frac{1}{1 - \hat{F}(x)} = \frac{1}{\hat{\bar{F}}(x)}, \quad [5.59]$$

com  $\hat{\bar{F}}(x)$  o estimador da probabilidade de excedência do nível  $u$ , apresentado em [5.52].

Observação 5.10: no âmbito desta tese, a abordagem POT será feita usando os máximos individuais (e não os máximos anuais), pelo que cada observação, i.e., performance, corresponde a um bloco. Portanto, o período de retorno refere-se ao número de recordes individuais.

### 5.3. APLICAÇÕES

Nesta secção iremos explorar as potencialidades dos modelos apresentados nas secções anteriores e realizar aplicações a séries de dados estacionárias dos saltos do atletismo *outdoor* (altura, comprimento, vara e triplo-salto), com base nas  $k$  excedências de cada amostra. Pretende-se obter a estimativa dos parâmetros extremais, para posteriormente estimar algumas quantidades de interesse, designadamente os quantis extremais, a probabilidade de excedência, o limite superior do suporte (quando  $\hat{\gamma} < 0$ ) e os valores de retorno.

#### 5.3.1. Breve descrição dos dados

No Capítulo 3 estão presentes os procedimentos adotados e a amostra selecionada para cada especialidade dos saltos do atletismo *outdoor* (Tabela 3.2). Consideramos todas as melhores marcas individuais obtidas entre os anos de 1980 e 2017 nos homens e mulheres, com exceção das provas de salto com vara e triplo-salto nas mulheres cujos registos iniciaram em 1996 e 1991, respetivamente. Em todas as amostras, cada atleta está representado apenas com um registo, i.e., o seu recorde pessoal homologado pela IAAF.

#### 5.3.2. Fases do estudo

A Tabela 5.1 apresenta as fases usadas no processo de modelação.

Tabela 5.1 – Fases do estudo empregues na modelação dos excessos acima de um limiar.

Fase I	+ Verificação da aleatoriedade e tendência . amostras: saltos em altura, comprimento, vara e triplo-salto, masculino e feminino (Anexo 2, Tabela A2.1; Anexo 3, Tabela A3.1), com resumo na secção 5.3.3.	– <i>Turning Point test</i> . – Cox-Stuart <i>trend test</i> .
Fase II	+ Caracterização das amostras (secção 5.3.4): . comportamento da série de dados face a um conjunto de estatísticas descritivas (Tabela 5.3). . análise gráfica (Figuras 5.7 a 5.12). + apresentar alguns quantis empíricos (secção 5.3.4.1).	– Estatística descritiva: média, desvio-padrão, coeficiente de variação, valores mínimo e máximo, quartis, assimetria e curtose. – Gráficos: histogramas, diagrama de extremos e quartis, <i>QQ-plot</i> Exponencial e gráfico do excesso médio para a globalidade da amostra.
Fase III	+ Escolher o limiar (secção 5.3.5): . salto em altura (secção 5.3.5.1) . salto em comprimento (secção 5.3.5.2) . salto com vara (secção 5.3.5.3) . triplo-salto (secção 5.3.5.4)	– Gráfico de vida média residual. – Gráfico de vida mediana residual. – Gráfico da estabilidade dos parâmetros. – Gráfico de Hill Generalizado vs Gráfico dos Momentos. – Suavização do gráfico de vida média residual adaptado: método “esticar a corda”.
Fase IV	+ Para cada limiar candidato, decisão do modelo: Exponencial ( $\gamma=0$ ) ou GPD ( $\gamma\neq 0$ )? (secção 5.3.6): . técnica gráfica (5.3.6.1). . intervalos de confiança para $\gamma$ (5.3.6.2).	– <i>QQ-plot</i> . – Intervalos com 95% de confiança para $\gamma$ . – Testes de hipóteses: <i>Deviance</i> , <i>Deviance</i> corrigida e teste de Marohn (2000).

	. testes de hipóteses: $H_0: \gamma=0$ vs $H_1: \gamma \neq 0$ (5.3.6.3)	
Fase V	+ Estimativas dos parâmetros extremais ( $\sigma_u, \gamma$ ), respetivos erros-padrão e intervalos de confiança (secção 5.3.7)	– Estimativa dos parâmetros extremais por máxima log-verosimilhança. – Método de otimização de BFGS.
Fase VI	+ Seleção do melhor modelo (secção 5.3.8) . observação gráfica. . definir critérios que ajudem no processo de decisão.	– PP-plot, QQ-plot e histograma com curva de densidade estimada vs teórica. – Critérios: rácio empírico de excedência; quantil de $u$ ; estimativa de $\hat{\gamma} > -0.5$ (preferencialmente); outros.
Fase VII	+ Diagnóstico dos modelos selecionados (secção 5.3.9) . verificar o ajustamento dos modelos captados na Fase VI.	– PP-plot. – QQ-plot. – Histograma com curva de densidade estimada vs teórica.
Fase VIII	+ Estimar outras quantidades de interesse (secção 5.3.10)	– Quantis extremais. – Probabilidade de excedência. – Limite superior do suporte ( $\hat{\gamma} < 0$ ). – Níveis de retorno associados a $t$ -recordes individuais) e respetivos gráficos (Anexo 5.4, Figuras A5.1 a A5.16). – Período de retorno. – Mapa de níveis de retorno para $t$ -máximos individuais (Anexos 5.4.1 a 5.4.8).

### 5.3.3. Estacionariedade

A verificação da aleatoriedade e da tendência foi realizada pelo *Turning Point Test* (Moore & Wallis, 1943; Brockwell & Davis, 2002) e *Cox-Stuart trend test* (Cox & Stuart, 1955), respetivamente, cujos resultados podem ser observados nos Anexos 2 e 3, nas Tabelas A2.1 e A3.1. A Tabela 5.2 resume essas condições.

Tabela 5.2 – Aleatoriedade e tendência das amostras relativas às especialidades de saltos do atletismo *outdoor*.

Saltos	Homens	Mulheres
Salto em Altura	Aleatório   Sem tendência	Aleatório   Sem tendência
Salto em Comprimento	Aleatório   Sem tendência	Aleatório   Sem tendência
Salto com Vara	Aleatório   Sem tendência	Não-Aleatório   Sem tendência *
Triplo-Salto	Aleatório   Sem tendência	Aleatório   Sem tendência

\* conforme Anexo 2, Observação A2.1, a série de dados irá ser tratada como estacionária.

### 5.3.4. Caracterização das amostras

A Tabela 5.3 mostra o tamanho das amostras, bem como as estatísticas descritivas básicas, designadamente, a média, desvio-padrão, coeficiente de variação, mínimo e máximo, 1º, 2º e 3º quartil, assimetria e curtose. Em todas as amostras a média é superior à mediana, o que sugere uma assimetria positiva. O coeficiente de variação (CV) revela fraca dispersão em todas as amostras, variando entre 1.7% e 3.9%.



A assimetria de todas as amostras é positiva,  $\gamma_1 > 0$ . Com exceção das amostras de salto com vara e triplo-salto masculino em que  $\gamma_1 \sim 1$ , nas restantes amostras  $\gamma_1 > 1$ , o que sugere uma grande concentração de máximos na proximidade da cauda inferior. A curtose de todas as amostras é positiva,  $\gamma_2 > 0$  (i.e.,  $\gamma_2 > 0.65$ ), indicando terem forma leptocúrtica. O valor mínimo apresentado corresponde ao valor mais baixo disponibilizado na lista da IAAF (URL: <https://www.worldathletics.org/>). O valor máximo é o atual recorde do mundo. A percentagem de variação entre o máximo e o mínimo é mais elevada no salto com vara (mulheres=20.5%; homens=11.6%) e mais reduzida no salto em altura (mulheres=7.2%; homens=8.9%).

Tabela 5.3 – Estatísticas das amostras relativas às especialidades de saltos do atletismo *outdoor*, em homens e mulheres.

Estatísticas	Salto em altura		Salto comprimento		Salto com vara		Triplo-salto	
	Homens	Mulheres	Homens	Mulheres	Homens	Mulheres	Homens	Mulheres
$n$	734	193	762	272	783	584	478	287
$\bar{x}$	2.29	1.98	8.16	6.92	5.64	4.38	17.16	14.39
$s$	0.038	0.033	0.147	0.157	0.133	0.171	0.289	0.333
CV(%)	1.7	1.7	1.8	2.3	2.4	3.9	1.7	2.3
Min	2.25	1.95	8.00	6.75	5.50	4.20	16.80	14.01
Máx	2.45	2.09	8.95	7.52	6.14	5.06	18.29	15.50
$Q_1$	2.26	1.96	8.05	6.80	5.52	4.23	16.92	14.13
$Q_2$	2.28	1.97	8.12	6.87	5.61	4.34	17.10	14.31
$Q_3$	2.31	2.00	8.23	7.00	5.71	4.45	17.32	14.56
Assimetria	1.084 (0.090)	1.124 (0.175)	1.563 (0.089)	1.468 (0.148)	0.909 (0.090)	1.103 (0.101)	0.991 (0.112)	1.139 (0.144)
Curtose	0.874 (0.180)	0.662 (0.348)	3.372 (0.177)	2.140 (0.294)	0.283 (0.175)	0.782 (0.202)	0.655 (0.223)	0.722 (0.287)

Observação 5.11: no cálculo da assimetria (*Skewness*,  $\gamma_1$ ), curtose (*Kurtosis*,  $\gamma_2$ ) e respetivos erros-padrão seguimos a convenção adotada pelo IBM SPSS (Anexo 6.1).

As representações gráficas das Figuras 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10 possibilitam a obtenção de informações adicionais acerca da distribuição de valores extremos subjacente às amostras em estudo, dado serem formadas por observações máximas individuais. O diagrama de extremos e quartis (Figura 5.7 para homens e Figura 5.8 para mulheres) mostra, como seria de esperar, a presença de uma forte assimetria à direita,  $\bar{x} > Me$ , com elevada frequência de performances mais baixas em todas as amostras. A presença de *outliers* em todas as amostras é um fator de interesse em Estatística de Extremos, uma vez que possibilita observar as performances individuais que se destacam das demais. Fazendo-se notar que cada um dos valores máximos é visto como o máximo de um bloco de observações, na medida em que cada atleta com a sua performance representa um bloco.

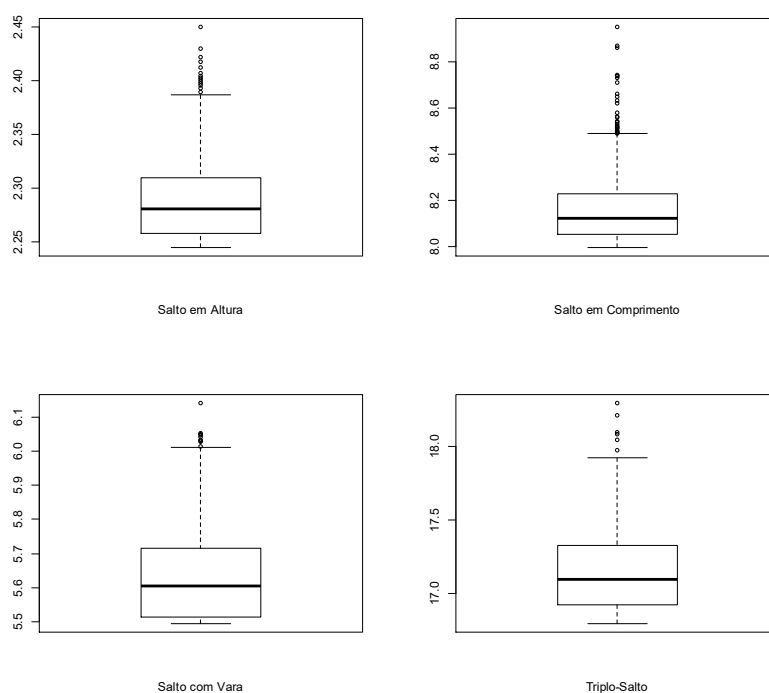


Figura 5.7 – Diagramas de extremos e quartis relativos aos saltos (altura, comprimento, vara e triplo-salto) nas amostras de **homens**, no período de 1980-2017.

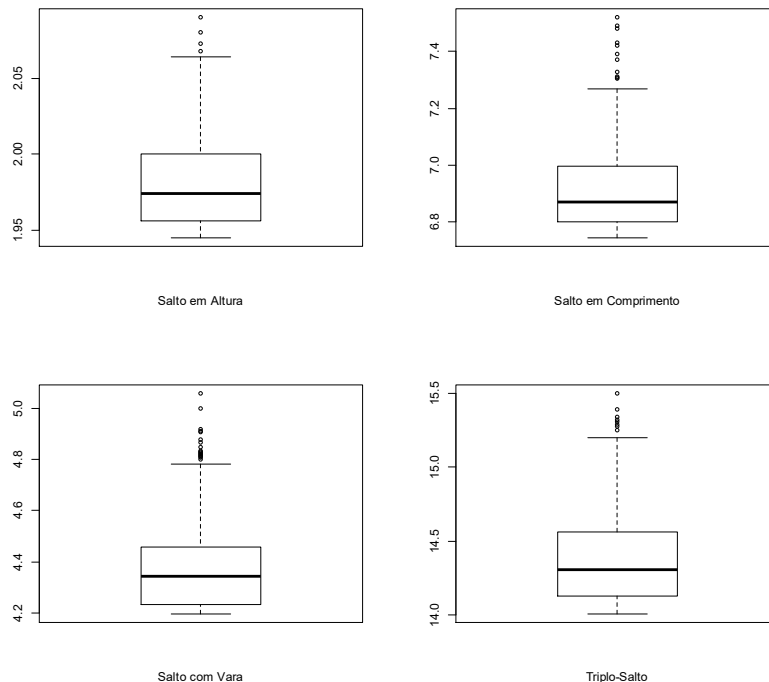


Figura 5.8 – Diagramas de extremos e quartis relativos aos saltos (altura, comprimento, vara e triplo-salto) nas amostras de **mulheres**, no período de 1980-2017 no salto em altura e em comprimento, no período de 1996-2017 no salto com vara e no período de 1991-2017 no triplo-salto.

As Figuras 5.9 e 5.10 apresentam sob a forma de histograma um novo critério de agrupamento dos dados de cada amostra, continuando a observar-se a assimetria positiva, dada a maior concentração de performances na proximidade da cauda inferior. O maior agrupamento de valores estão nas seguintes classes:

**Homens**

- Salto em altura: [2.25; 2.30], ~72% do total
- Salto comprimento: [8.00; 8.20], ~70% do total
- Salto com vara: [5.50; 5.70], ~73% do total
- Triplo-salto: [16.80; 17.30], ~74% do total

**Mulheres**

- Salto em altura: [1.95; 2.00], ~79% do total
- Salto comprimento: [6.75; 7.00], ~77% do total
- Salto com vara: [4.20; 4.40], ~68% do total
- Triplo-salto: [14.00; 14.60], ~79% do total

Todos os histogramas mostram a escassez de performances elevadas, indiciando que a distribuição de probabilidade subjacente aos dados disponíveis não parece ter cauda pesada.

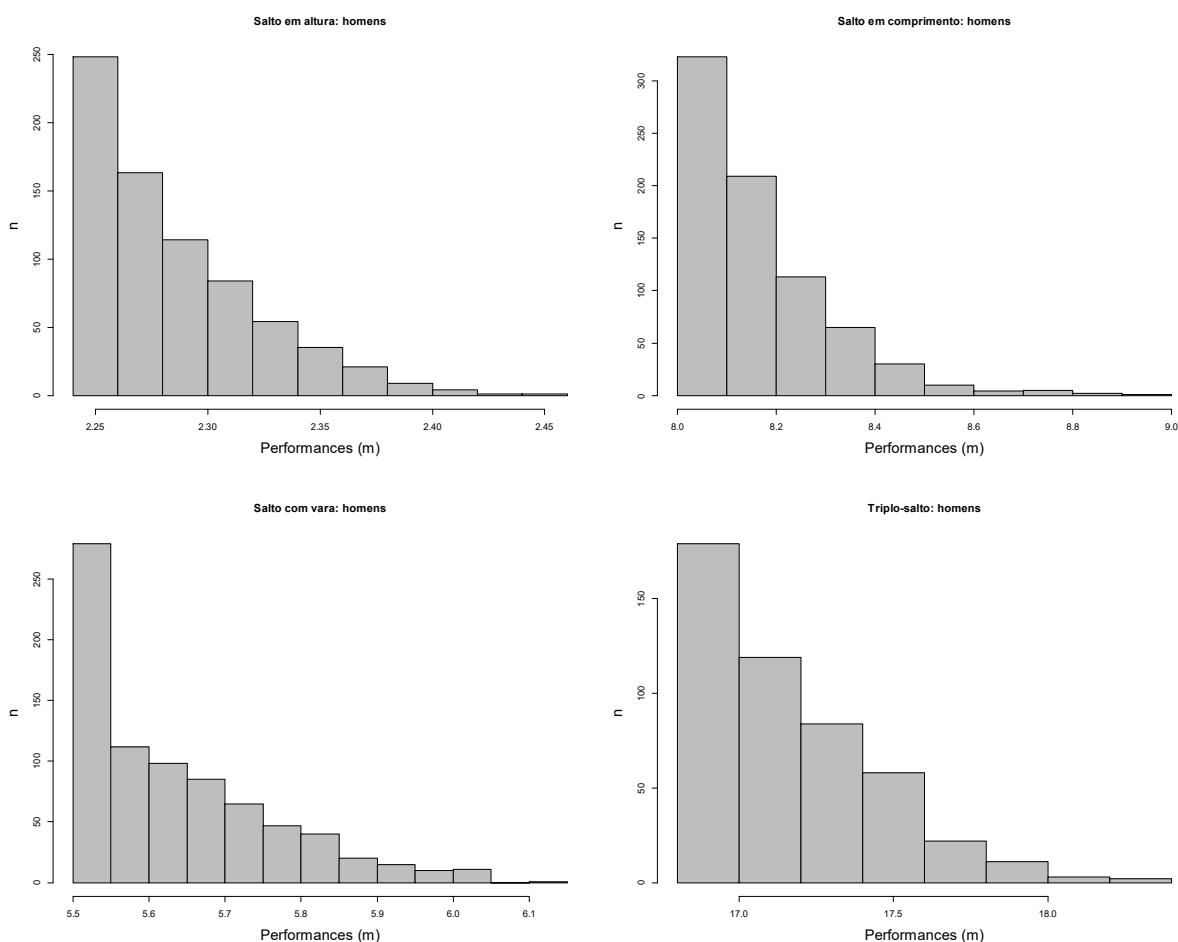


Figura 5.9 – Histograma das melhores marcas pessoais dos atletas do **sexo masculino** nas provas de saltos do atletismo (altura, comprimento, vara e triplo-salto), no período de 1980-2017.

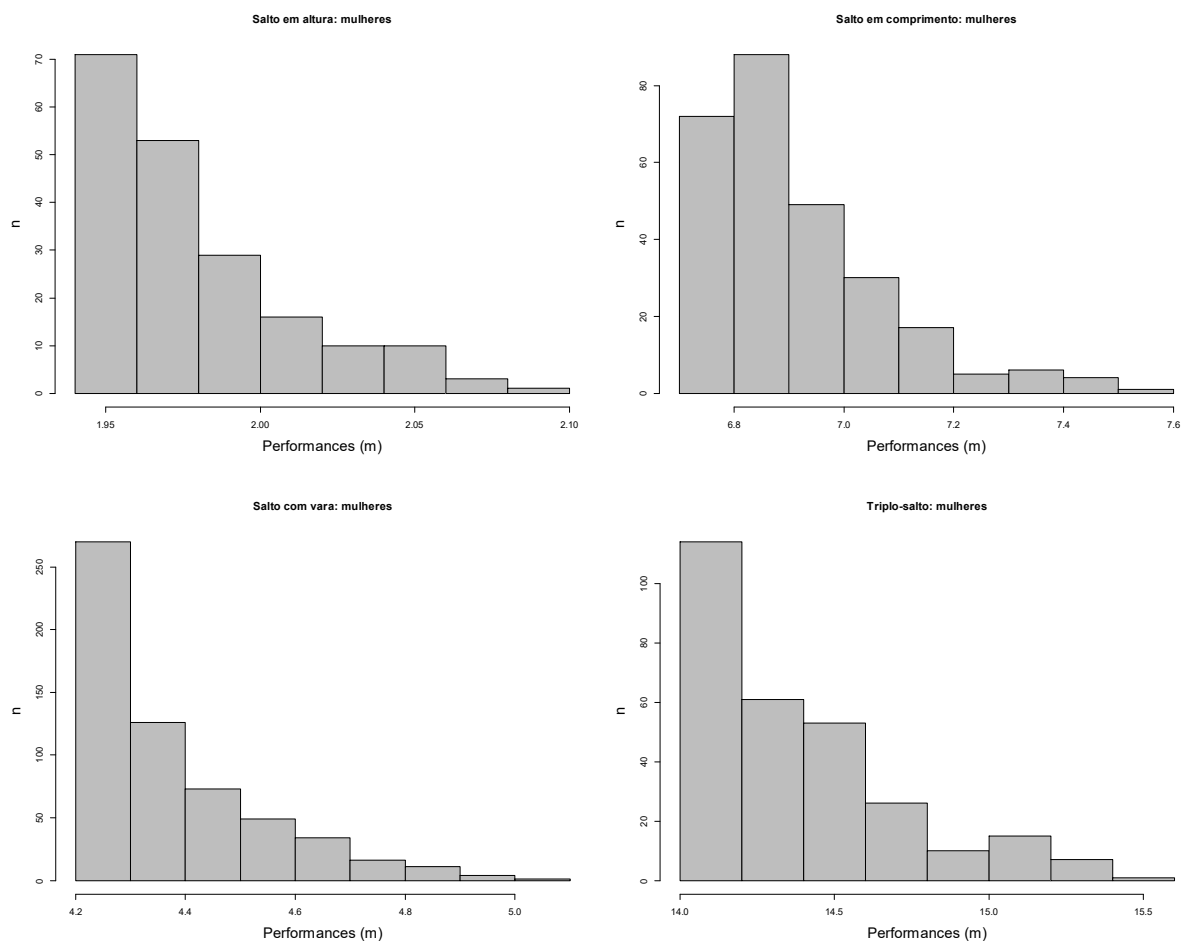


Figura 5.10 – Histograma das melhores marcas pessoais dos atletas do **sexo feminino** nas provas de saltos do atletismo (altura, comprimento, vara e triplo-salto), no período de 1980-2017 no salto em altura e em comprimento, no período de 1996-2017 no salto com vara e no período de 1991-2017 no triplo-salto.

De modo a apurar o peso da cauda da distribuição subjacente aos dados disponíveis, fazendo-se notar que nesta fase estamos a usar a totalidade de observações em cada amostra, as Figuras 5.11 e 5.12 apresentam o *QQ-plot* Exponencial e o gráfico de excesso médio, obtido como função da amostra suavizada (conforme Observação 3.1) e ordenada. Com exceção do salto em comprimento masculino que exhibe um formato do *QQ-plot* com aparência retilínea sugerindo um modelo Exponencial e o gráfico de excesso médio com padrão decrescente-crescente podendo sugerir que a distribuição de probabilidade subjacente aos dados poderá ter cauda ligeiramente mais pesada do que a distribuição Exponencial, os *QQ-plot* das restantes amostras (homens e mulheres) descrevem uma ligeira curvatura com a concavidade voltada para baixo e os respetivos gráficos de excesso médio apresentam um padrão decrescente, levando a concluir que a distribuição de probabilidade subjacente aos dados tem cauda mais leve do que a distribuição Exponencial.

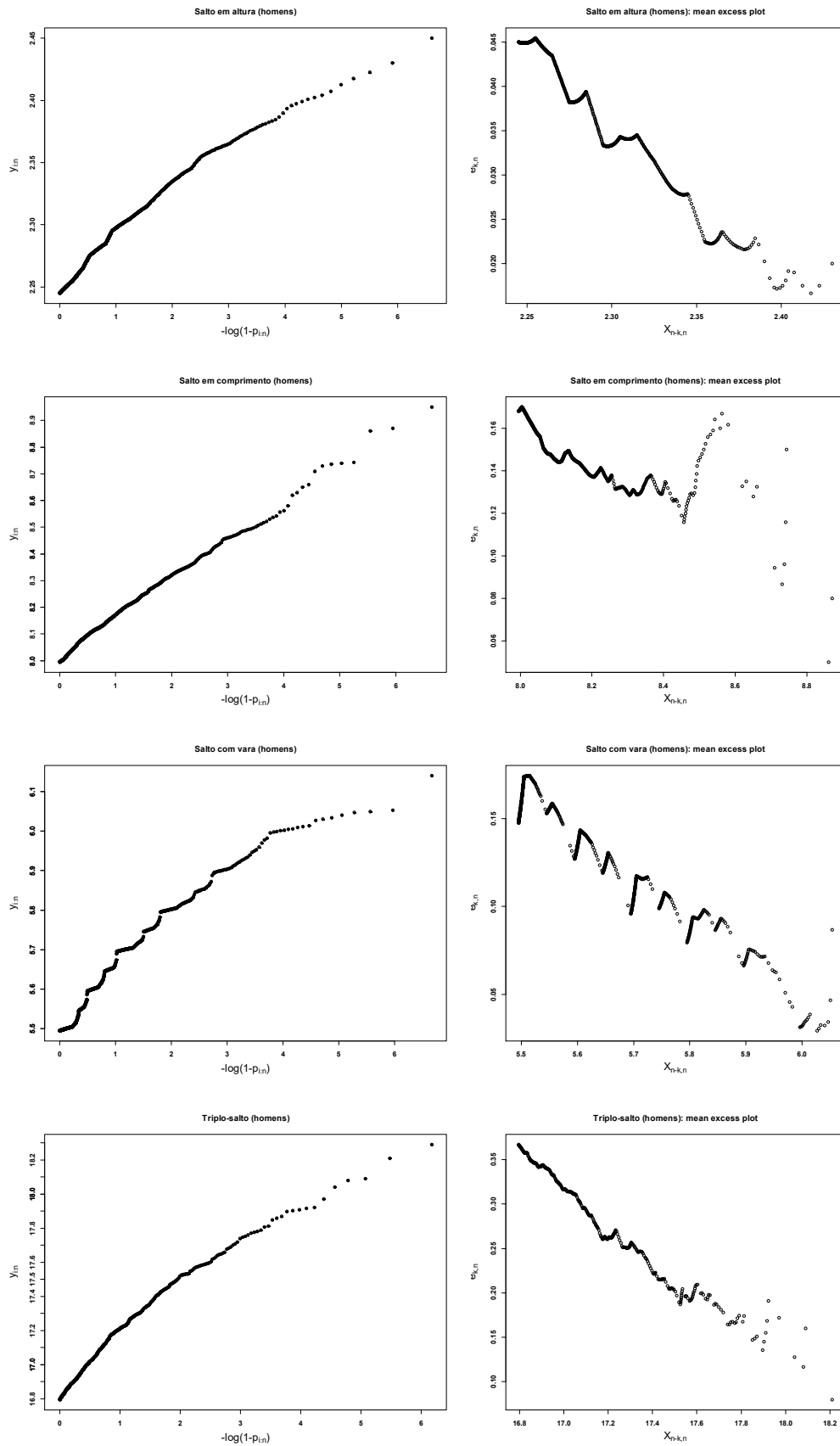


Figura 5.11 – QQ-plot Exponencial (à esquerda) e gráfico da função de excesso médio (à direita) das melhores marcas pessoais dos atletas do **sexo masculino** nas provas de saltos do atletismo (altura, comprimento, vara e triplo-salto), no período de 1980-2017.

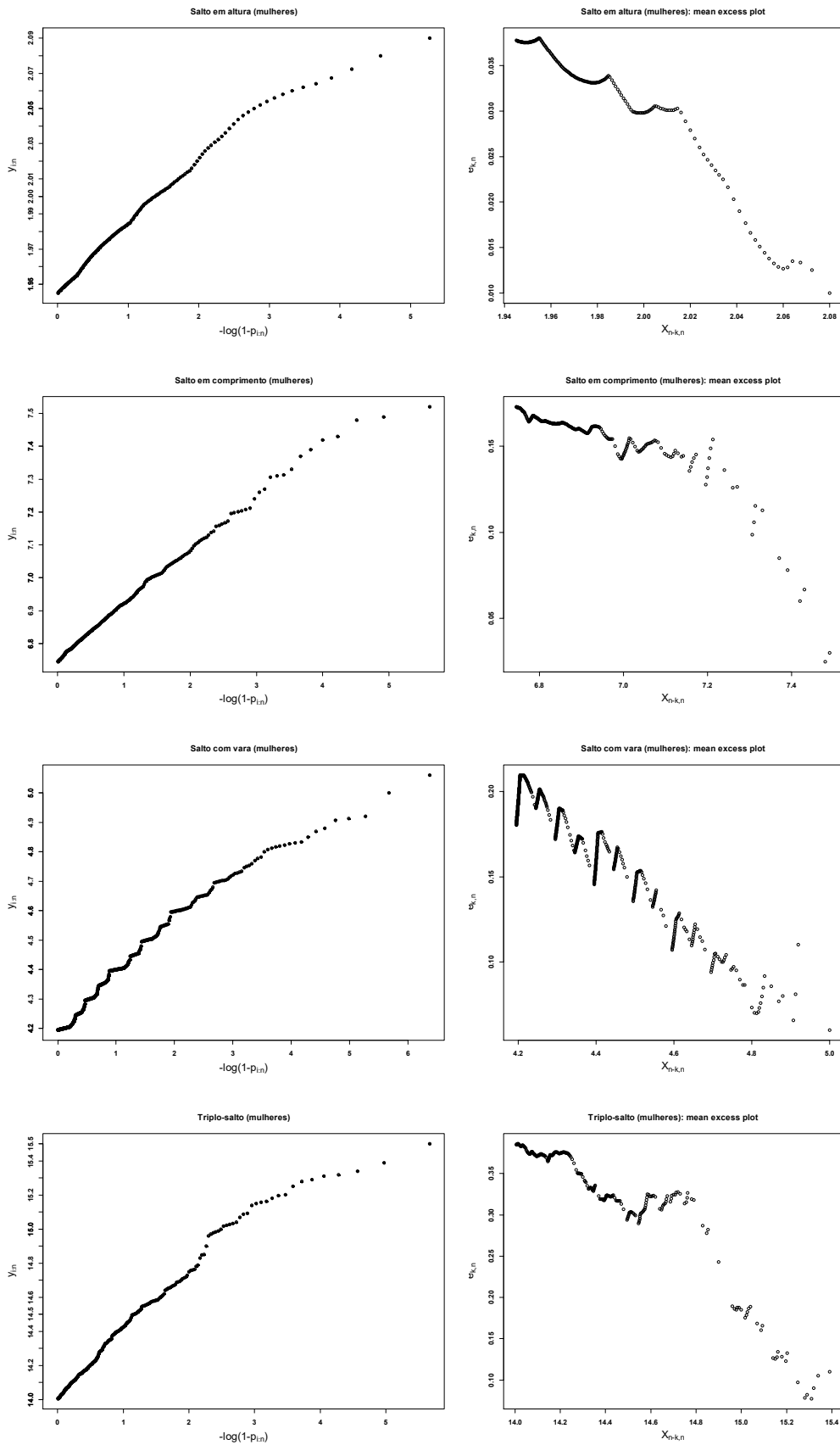


Figura 5.12 – QQ-plot Exponencial (à esquerda) e gráfico da função de excesso médio (à direita) das melhores marcas pessoais dos atletas do **sexo feminino** nas provas de saltos do atletismo (altura, comprimento, vara e triplo-salto), no período de 1980-2017 no salto em altura e em comprimento, no período de 1996-2017 no salto com vara e no período de 1991-2017 no triplo-salto.

### 5.3.4.1. Quantis empíricos

Observa-se na Tabela 5.4 os quantis empíricos  $q(0.75)$ ,  $q(0.80)$ ,  $q(0.85)$ ,  $q(0.90)$ ,  $q(0.95)$  e  $q(0.99)$ , bem como o número de observações ( $k$ ) que estão acima de cada um dos quantis. Obviamente, que numa lógica de valores extremos interessam os quantis mais altos, desde que se disponha de número suficiente de observações para estimação, não comprometendo o habitual *trade-off* entre a variância e o viés dos estimadores. DuMouchel (1983) sugere que o valor limiar se situe na proximidade do quantil empírico de probabilidade  $q(0.90)$ , sendo que Gong (2012) sugere que varie entre  $q(0.90)$  e  $q(0.97)$ . Em situações análogas, Loretan & Philips (1994) e Ferreira et al. (2003) propuseram equações para determinação das  $k$  estatísticas ordinais de topo.

Tabela 5.4 – Quantis empíricos  $q(0.75)$ ,  $q(0.80)$ ,  $q(0.85)$ ,  $q(0.90)$ ,  $q(0.95)$ ,  $q(0.99)$  e número de excedências para os dados referentes aos saltos do atletismo, homens e mulheres.

Provas		$q(0.75)$	$q(0.80)$	$q(0.85)$	$q(0.90)$	$q(0.95)$	$q(0.99)$
Salto em altura	Homens	2.31 ( $k=182$ )	2.32 ( $k=140$ )	2.33 ( $k=112$ )	2.34 ( $k=85$ )	2.36 ( $k=47$ )	2.40 ( $k=9$ )
	Mulheres	2.00 ( $k=48$ )	2.01 ( $k=34$ )	2.02 ( $k=26$ )	2.03 ( $k=18$ )	2.05 ( $k=11$ )	2.07 ( $k=3$ )
Salto em comprimento	Homens	8.23 ( $k=188$ )	8.27 ( $k=149$ )	8.31 ( $k=111$ )	8.35 ( $k=79$ )	8.46 ( $k=38$ )	8.68 ( $k=8$ )
	Mulheres	7.00 ( $k=66$ )	7.02 ( $k=55$ )	7.06 ( $k=42$ )	7.13 ( $k=27$ )	7.22 ( $k=14$ )	7.44 ( $k=3$ )
Salto com vara	Homens	5.71 ( $k=202$ )	5.75 ( $k=159$ )	5.80 ( $k=113$ )	5.82 ( $k=81$ )	5.90 ( $k=43$ )	6.02 ( $k=8$ )
	Mulheres	4.45 ( $k=157$ )	4.50 ( $k=127$ )	4.55 ( $k=94$ )	4.62 ( $k=58$ )	4.72 ( $k=29$ )	4.87 ( $k=6$ )
Triplo-salto	Homens	17.32 ( $k=120$ )	17.40 ( $k=97$ )	17.48 ( $k=73$ )	17.57 ( $k=49$ )	17.72 ( $k=24$ )	17.99 ( $k=5$ )
	Mulheres	14.56 ( $k=72$ )	14.61 ( $k=58$ )	14.70 ( $k=43$ )	14.92 ( $k=29$ )	15.13 ( $k=15$ )	15.32 ( $k=3$ )

### 5.3.5. Escolha do limiar

Na escolha do limiar  $u$  iremos utilizar o gráfico de vida média residual (MRL *plot*, do inglês, *mean residual life plot*), o gráfico de vida mediana residual (MeRL *plot*, do inglês, *median residual life plot*), o gráfico de estabilidade dos parâmetros extremos (TCP, do inglês, *Threshold Choice plot*), o gráfico generalizado de Hill vs gráfico dos momentos (GH vs MOM *plot*) e a suavização do MRL *plot*, i.e., o método “esticar a corda” (EC). Estas metodologias irão possibilitar a seleção de um conjunto de candidatos a limiar a serem usados no processo de modelação e no ajustamento de modelos.

### 5.3.5.1. SALTO EM ALTURA

#### 5.3.5.1.1. Gráfico de vida média residual

As Figuras 5.13 e 5.14 apresentam o gráfico de vida média residual para os dados do salto em altura masculino e feminino, respectivamente, referentes ao período de 1980-2017. Em cada amostra foram definidos vários pontos candidatos a “melhor” limiar, a partir dos quais se visualiza uma certa tendência de linearização. Nos homens, são sugestivos os limiares  $u=(2.315, 2.345, 2.355)$  e nas mulheres os limiares  $u=(1.995, 2.006, 2.015)$ .

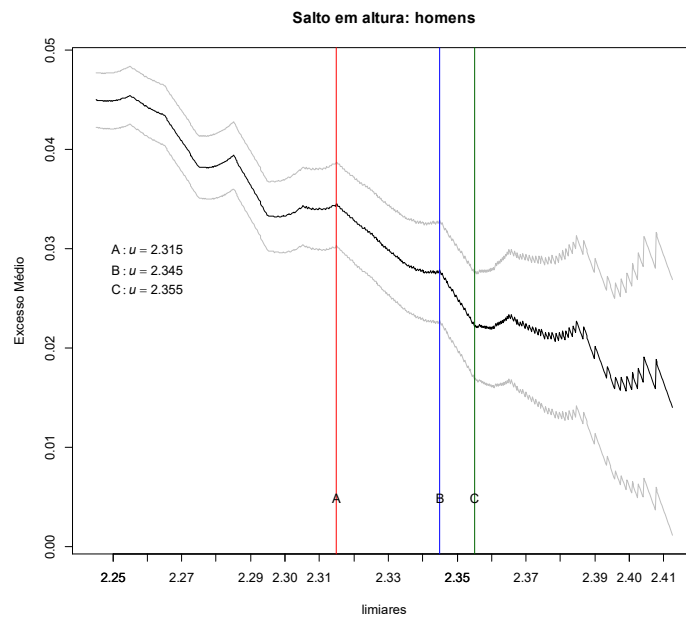


Figura 5.13 – Gráfico de vida média residual para a performance no salto em altura homens.

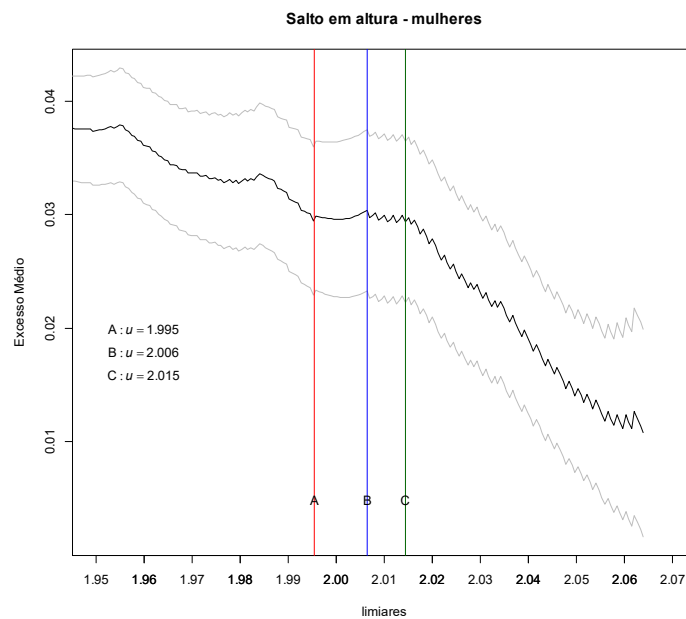


Figura 5.14 – Gráfico de vida média residual para a performance no salto em altura mulheres.



### 5.3.5.1.2. Gráfico de vida mediana residual

As Figura 5.15 e 5.16 mostram o gráfico de vida mediana residual para o salto em altura masculino e feminino, respetivamente.

Tal como no MRL *plot*, também no MeRL *plot* importa encontrar o(s) ponto(s) do gráfico a partir do(s) qual(ais) se observa uma certa linearização. Assim, para os homens são sugestivos os limiares  $u=(2.327, 2.355)$ , e para as mulheres os limiares  $u=(1.995, 2.016)$ , pelo que se apresentam como potenciais candidatos a “melhor” limiar.

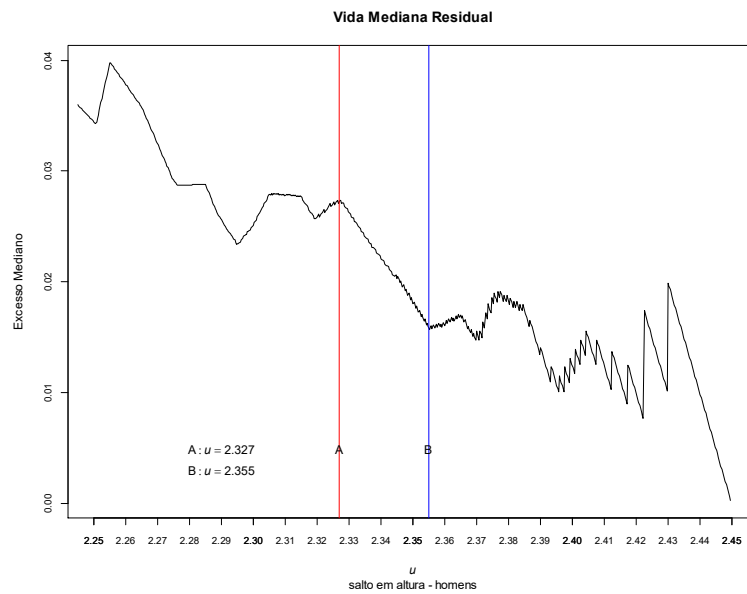


Figura 5.15 – Gráfico de vida mediana residual para a performance no **salto em altura** homens.

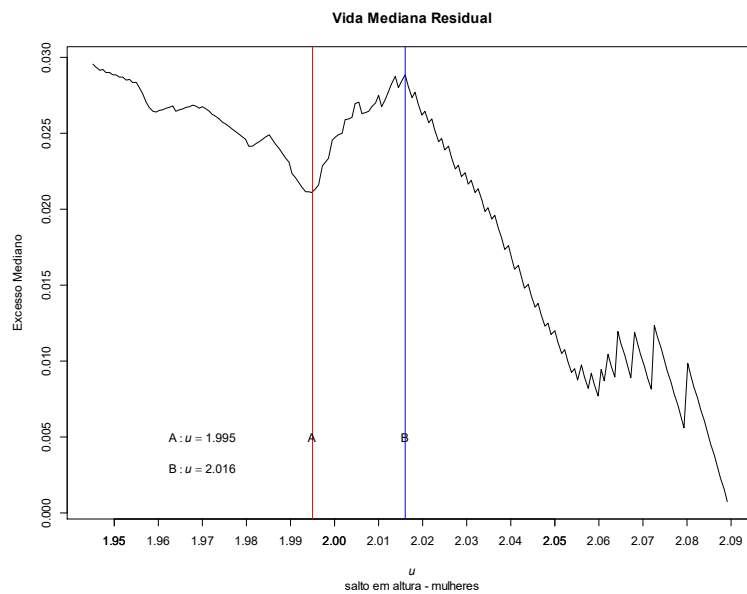


Figura 5.16 – Gráfico de vida mediana residual para a performance no **salto em altura** mulheres.

### 5.3.5.1.3. Gráfico de estabilidade dos parâmetros

Também no ajuste da GPD aos excessos acima de um certo limiar  $u$ , recorreremos à informação obtida pelos gráficos de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma, especialmente o parâmetro de forma. As Figuras 5.17 e 5.18, apresentam esta estabilidade para as amostras de salto em altura homens e mulheres, respetivamente. O limiar suficientemente alto é selecionado no ponto do gráfico a partir do qual se observa uma tendência de linearização. Nos homens são sugestivos os limiares  $u=(2.315, 2.355)$  e nas mulheres os limiares  $u=(1.995, 2.025)$ .

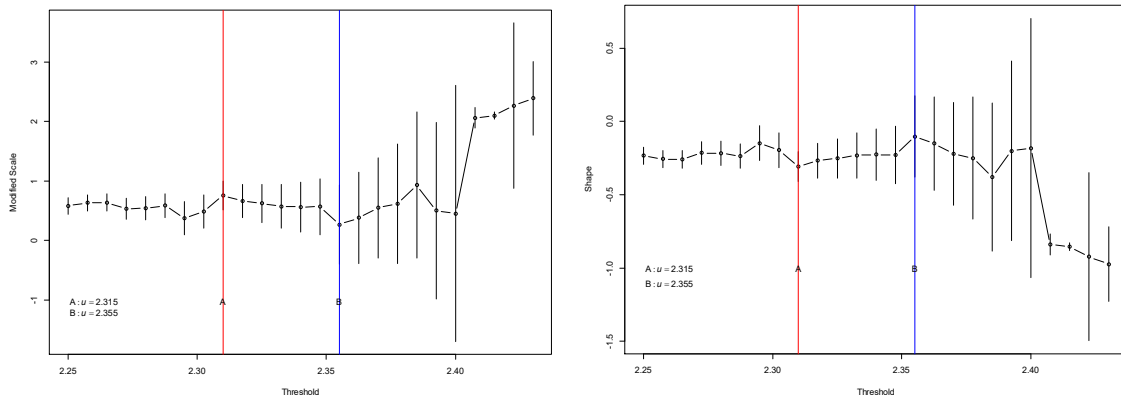


Figura 5.17 – Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma obtidos por máxima verosimilhança, com os respetivos intervalos com 95% de confiança baseados na função *profile log-likelihood*, para os dados referentes ao **salto em altura** homens.

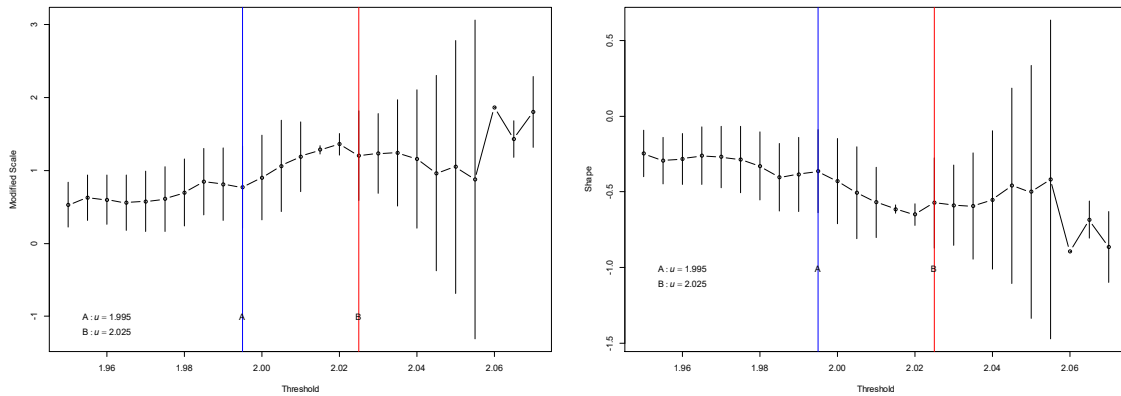


Figura 5.18 – Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma, obtidos por máxima verosimilhança, com os respetivos intervalos com 95% de confiança baseados na função *profile log-likelihood*, para os dados referentes ao **salto em altura** mulheres.

#### 5.3.5.1.4. Gráfico do estimador generalizado de Hill vs gráfico do estimador dos momentos

As Figuras 5.19 e 5.20, apresentam para as amostras de salto em altura homens e mulheres, respetivamente, o gráfico generalizado de Hill e o gráfico dos momentos, com os seus principais pontos de intersecção. Nos homens é sugestivo o limiar  $u=2.355$  e nas mulheres o limiar  $u=2.001$ .

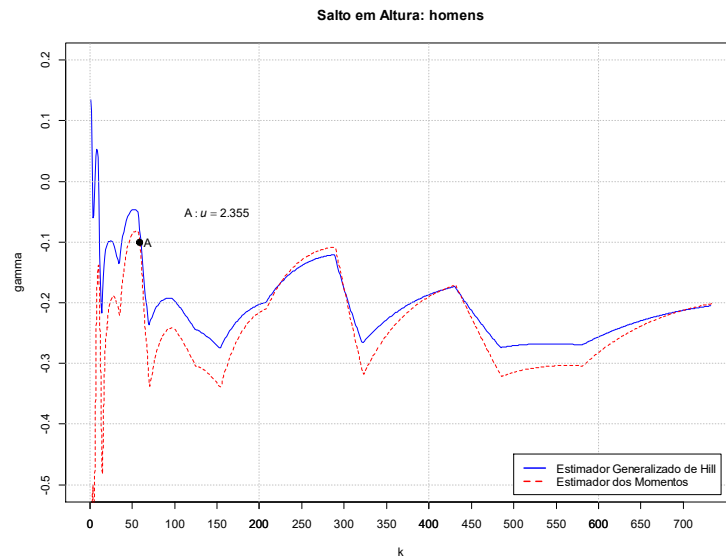


Figura 5.19 – Gráfico generalizado de Hill e gráfico dos Momentos para a performance no salto em altura homens.

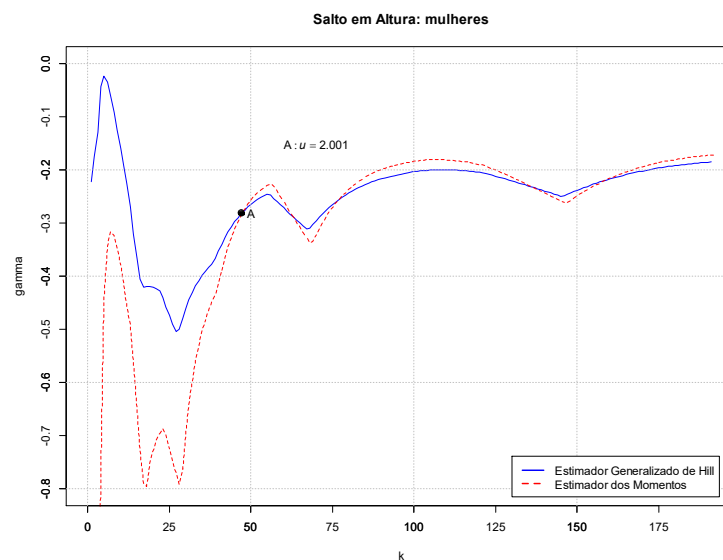


Figura 5.20 – Gráfico generalizado de Hill e gráfico dos Momentos para a performance no salto em altura mulheres.

### 5.3.5.1.5. Método “Esticar a Corda”

As Figuras 5.21 e 5.22 apresentam os gráficos obtidos a partir da metodologia “Esticar a Corda”, para as amostras de salto em altura homens e mulheres, respetivamente, cujo procedimento aqui resumimos a duas etapas.

Nos homens:

- 1ª etapa,  $n=734$ ; 2ª etapa,  $n=74$  (~10.8% de excedências). São sugestivos os limiares  $u=(2.315, 2.345)$ .

Nas mulheres:

- 1ª etapa,  $n=193$ ; 2ª etapa,  $n=29$  (15% de excedências). São sugestivos os limiares  $u=(1.995, 2.006, 2.015)$ .

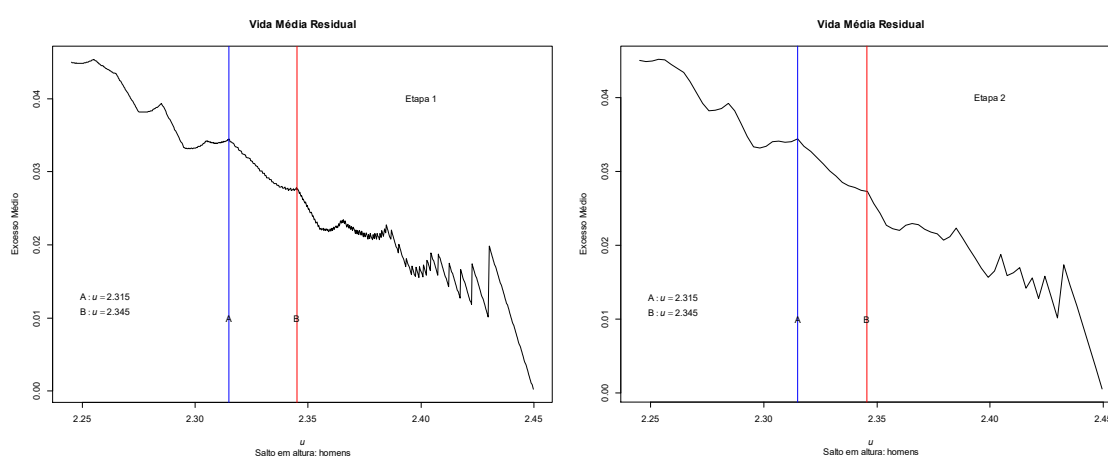


Figura 5.21 – Suavização do gráfico de vida média residual, relativo ao **salto em altura** homens.

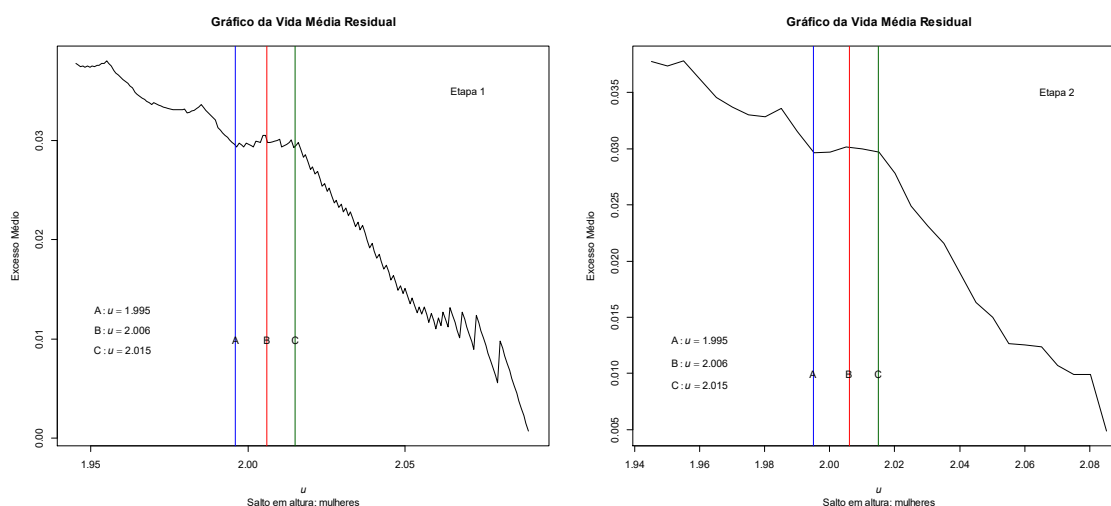


Figura 5.22 – Suavização do gráfico de vida média residual, relativo ao **salto em altura** mulheres.

## 5.3.5.2. SALTO EM COMPRIMENTO

### 5.3.5.2.1. Gráfico de vida média residual

As Figuras 5.23 e 5.24 apresentam o gráfico de vida média residual para os dados do salto em comprimento masculino e feminino, respectivamente, referentes ao período de 1980-2017. Em cada amostra foram definidos vários pontos candidatos a “melhor” limiar, a partir dos quais se visualiza uma tendência de linearização. Nos homens, são sugestivos os limiares  $u=(8.406, 8.456, 8.487)$  e nas mulheres os limiares  $u=(7.030, 7.074)$ .

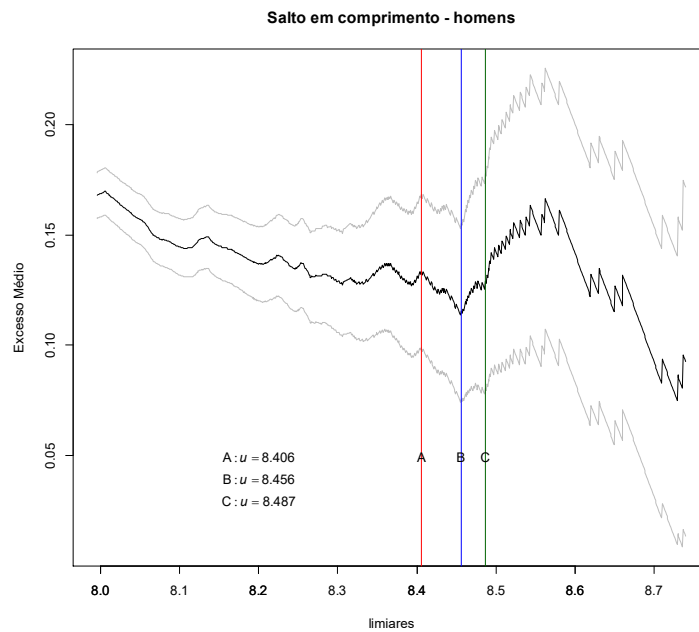


Figura 5.23 – Gráfico de vida média residual para a performance no **salto em comprimento** homens.

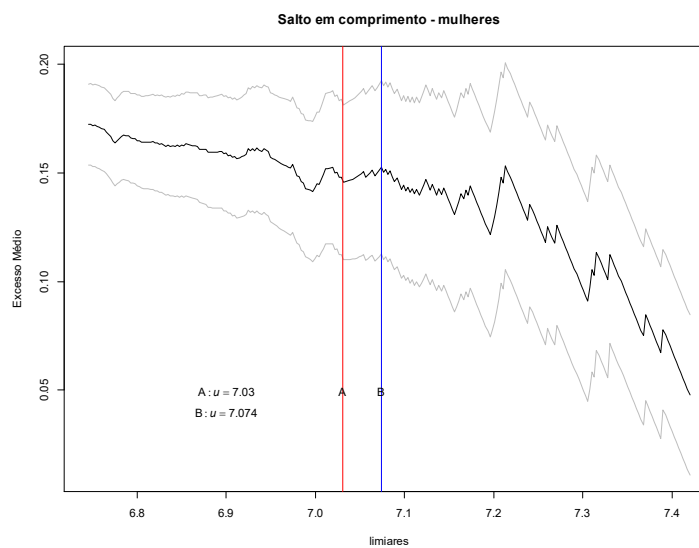


Figura 5.24 – Gráfico de vida média residual para a performance no **salto em comprimento** mulheres.

### 5.3.5.2.2. Gráfico de vida mediana residual

As Figuras 5.25 e 5.26 mostram o gráfico de vida mediana residual para o salto em comprimento masculino e feminino, respectivamente.

Em cada amostra, os pontos do gráfico a partir do qual se observa uma certa linearização são: nos homens,  $u=(8.349, 8.456)$ , e nas mulheres,  $u=(7.074, 7.121, 7.167)$ , pelo que se apresentam como potenciais candidatos a “melhor” limiar.

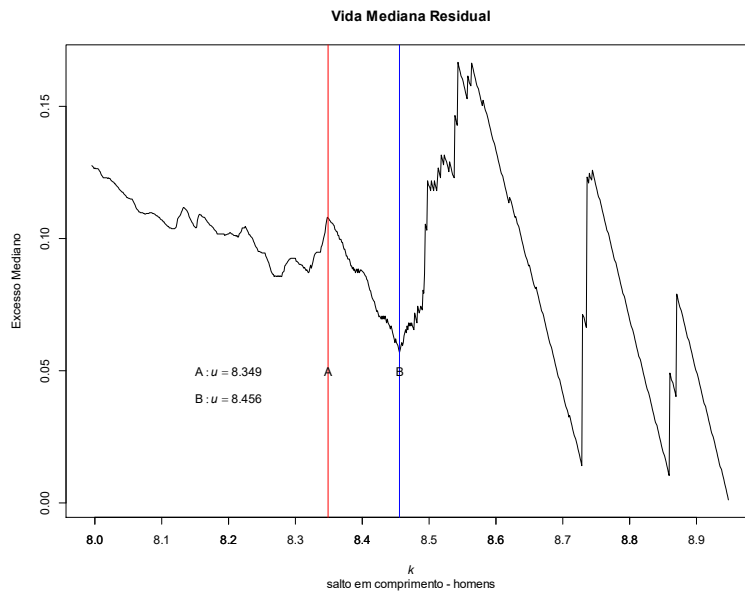


Figura 5.25 – Gráfico de vida mediana residual para a performance no salto em comprimento homens.

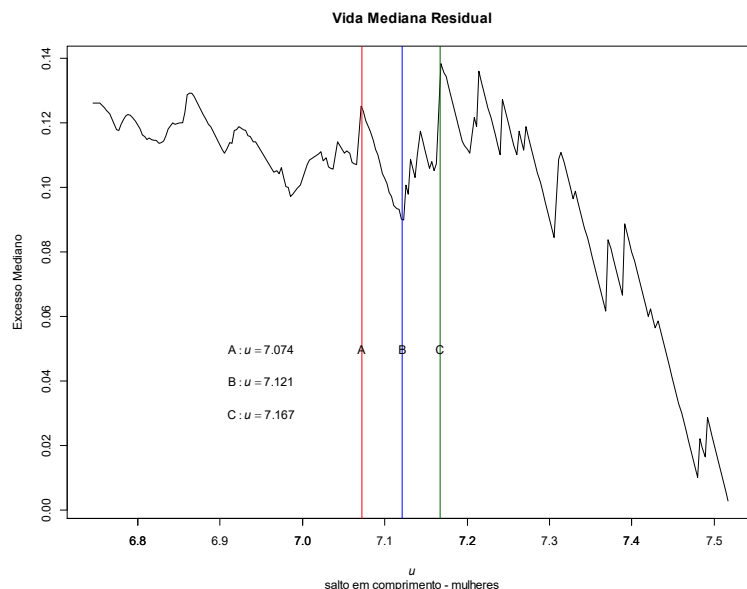


Figura 5.26 – Gráfico de vida mediana residual para a performance no salto em comprimento mulheres.

### 5.3.5.2.3. Gráfico de estabilidade dos parâmetros

A partir do gráfico de estabilidade do parâmetro de forma, nos homens, é sugestivo o limiar  $u=8.460$  (Figura 5.27); nas mulheres os limiares  $u=(7.030, 7.157)$  (Figura 5.28). A partir destes pontos observa-se uma certa linearização.

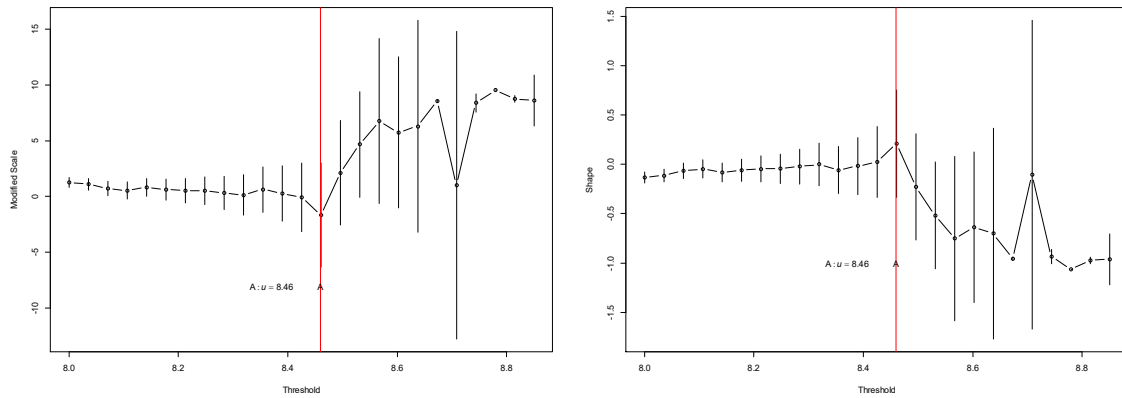


Figura 5.27 – Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma, obtidos por máxima verosimilhança, com os respectivos intervalos com 95% de confiança baseados na função *profile log-likelihood*, para os dados referentes ao **salto em comprimento** homens.

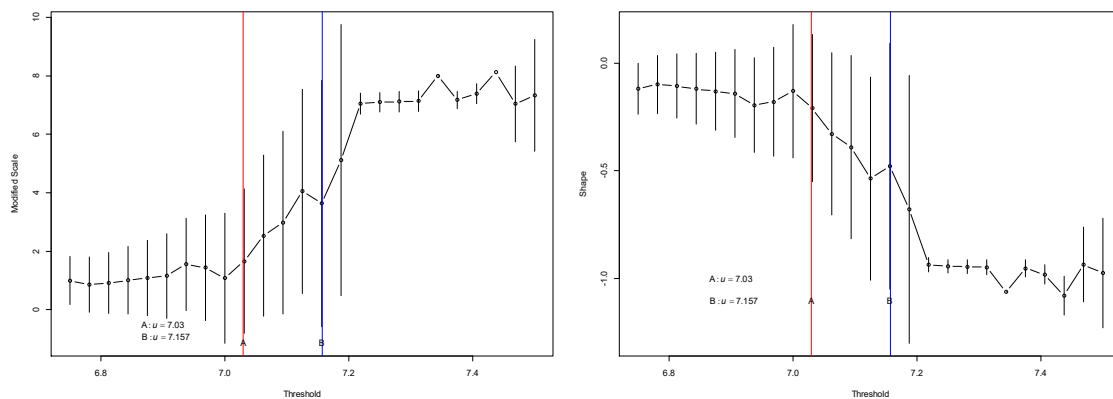


Figura 5.28 – Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma, obtidos por máxima verosimilhança, com os respectivos intervalos com 95% de confiança baseados na função *profile log-likelihood*, para os dados referentes ao **salto em comprimento** mulheres.

#### 5.3.5.2.4. Gráfico do estimador generalizado de Hill vs gráfico do estimador dos momentos

As Figuras 5.29 e 5.30 apresentam para as amostras de salto em comprimento homens e mulheres, respetivamente, o gráfico generalizado de Hill e o gráfico dos momentos, com os seus pontos de intersecção de interesse.

Nos homens, são sugestivos os limiares  $u=(8.370, 8.456, 8.460)$  e nas mulheres os limiares  $u=(7.085, 7.117)$ .

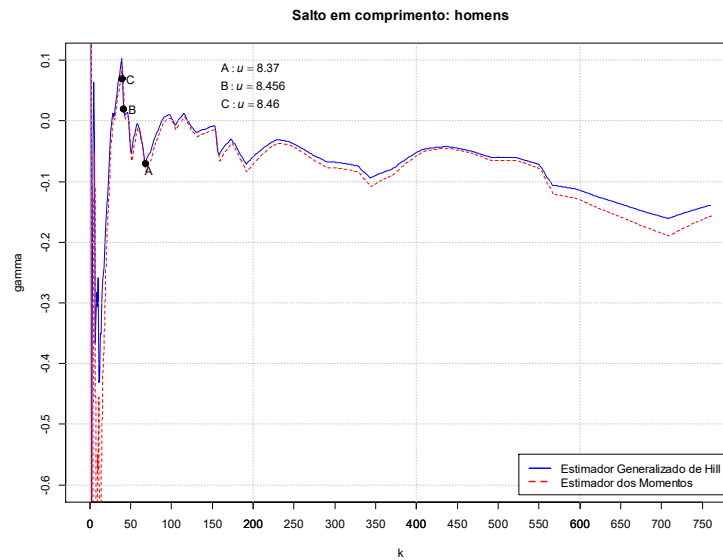


Figura 5.29 – Gráfico generalizado de Hill e gráfico dos Momentos para a performance no salto em comprimento homens.

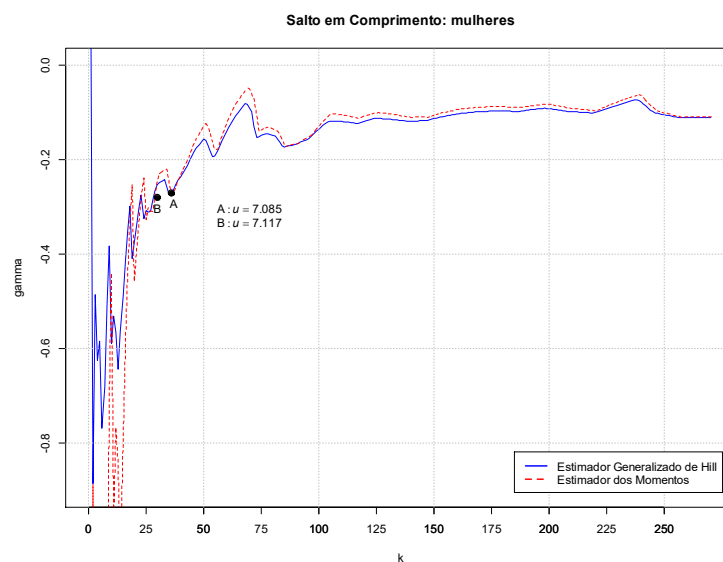


Figura 5.30 – Gráfico generalizado de Hill e gráfico dos Momentos para a performance no salto em comprimento mulheres.



### 5.3.5.2.5. Método “Esticar a Corda”

As Figuras 5.31 e 5.32 mostram os gráficos obtidos a partir da metodologia “Esticar a Corda”, em homens e mulheres, respetivamente, cujo procedimento aqui resumimos a duas etapas.

Nos homens:

- 1ª etapa,  $n=762$ ; 2ª etapa,  $n=87$  (~11.4% de excedências). São sugestivos os limiares  $u=(8.406, 8.456)$ .

Nas mulheres:

- 1ª etapa,  $n=272$ ; 2ª etapa,  $n=39$  (~14.3% de excedências). São sugestivos os limiares  $u=(7.045, 7.085)$ .

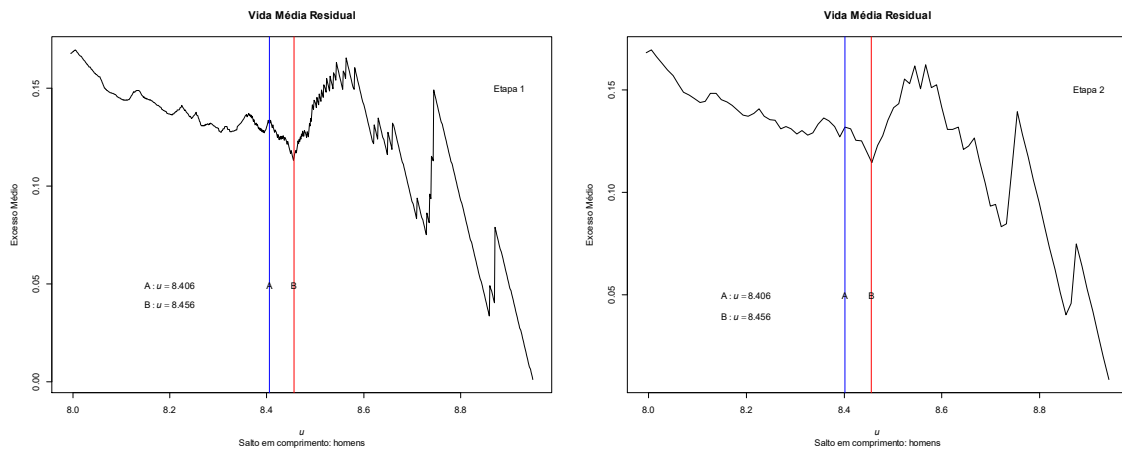


Figura 5.31 – Suavização do gráfico de vida média residual, relativo ao **salto em comprimento** homens.

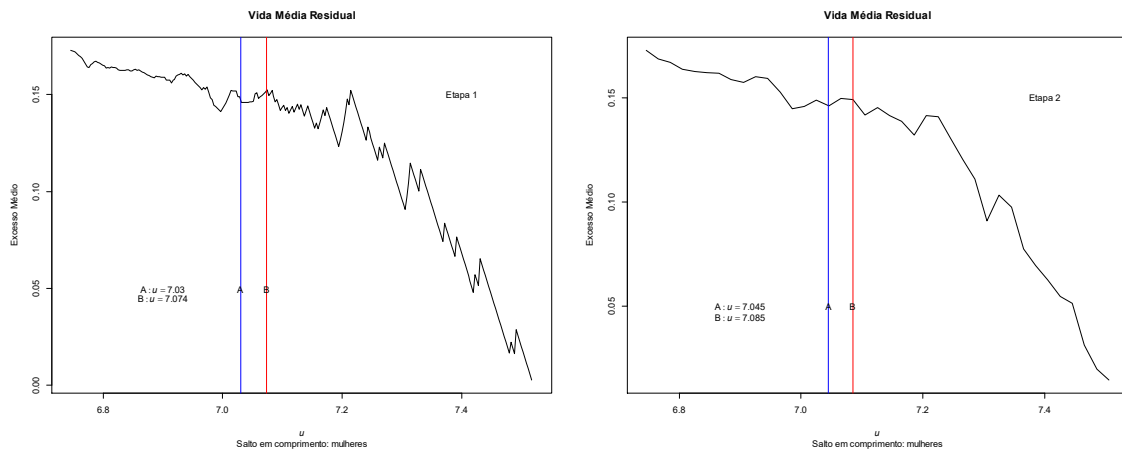


Figura 5.32 – Suavização do gráfico de vida média residual, relativo ao **salto em comprimento** mulheres.

### 5.3.5.3. SALTO COM VARA

#### 5.3.5.3.1. Gráfico de vida média residual

As Figuras 5.33 e 5.34 apresentam o gráfico de vida média residual para os dados do salto com vara masculino e feminino, referentes aos períodos de 1980-2017 e 1996-2017, respectivamente. Em cada amostra foram definidos vários pontos candidatos a “melhor” limiar, a partir dos quais se visualiza uma certa tendência de linearização. Nos homens, são sugestivos os limiares  $u=(5.805, 5.825, 5.844, 5.855)$  e nas mulheres os limiares  $u=(4.555, 4.615, 4.655, 4.705, 4.735)$ .

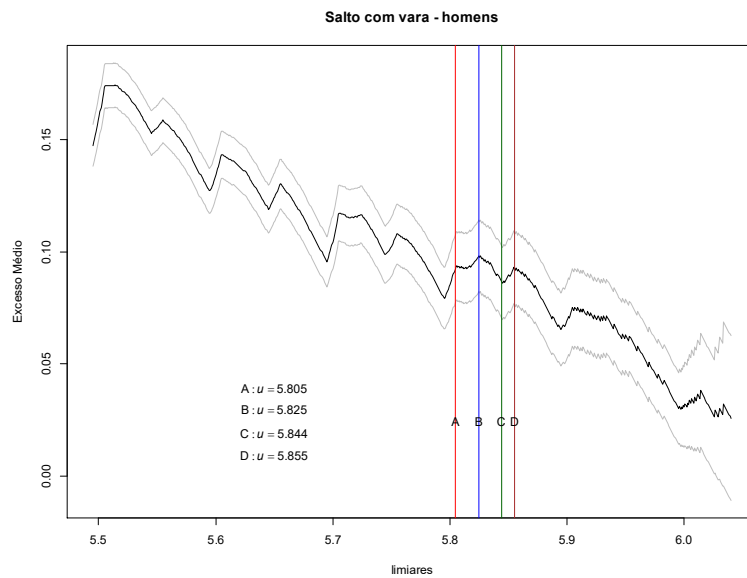


Figura 5.33 – Gráfico de vida média residual para a performance no **salto com vara** homens.

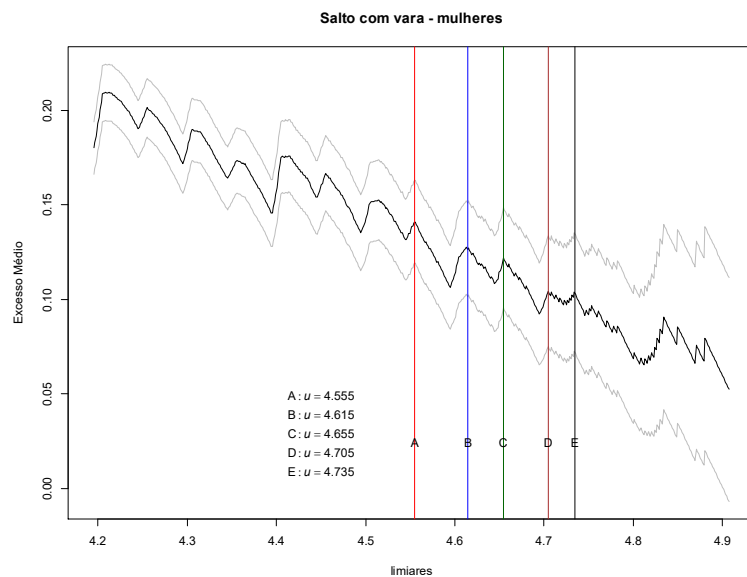


Figura 5.34 – Gráfico de vida média residual para a performance no **salto com vara** mulheres.

### 5.3.5.3.2. Gráfico de vida mediana residual

As Figuras 5.35 5.36 mostram o gráfico de vida mediana residual para o salto com vara masculino e feminino, respetivamente.

Interessa o ponto a partir do qual se observa uma certa linearização. Nos homens são sugestivos os limiares  $u=(5.805, 5.855)$ , e nas mulheres os limiares  $u=(4.615, 4.655, 4.705)$ , pelo que se apresentam como potenciais candidatos a “melhor” limiar.

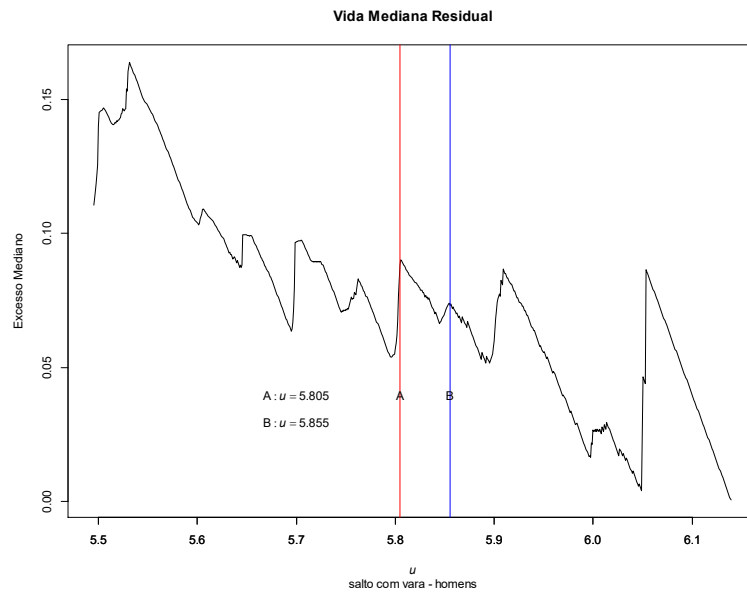


Figura 5.35 – Gráfico de vida mediana residual para a performance no **salto com vara** homens.

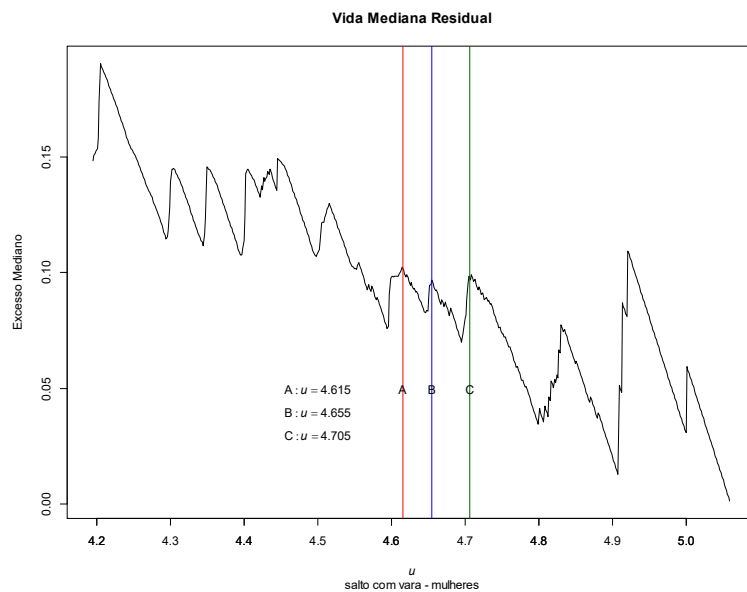


Figura 5.36 – Gráfico de vida mediana residual para a performance no **salto com vara** mulheres.

### 5.3.5.3.3. Gráfico de estabilidade dos parâmetros

A partir do gráfico de estabilidade do parâmetro de forma, i.e., o ponto a partir do qual se observa uma certa linearização, nos homens é sugestivo o limiar  $u=5.819$  (Figura 5.37) e nas mulheres os limiares  $u=(4.590, 4.696)$  (Figura 5.38).

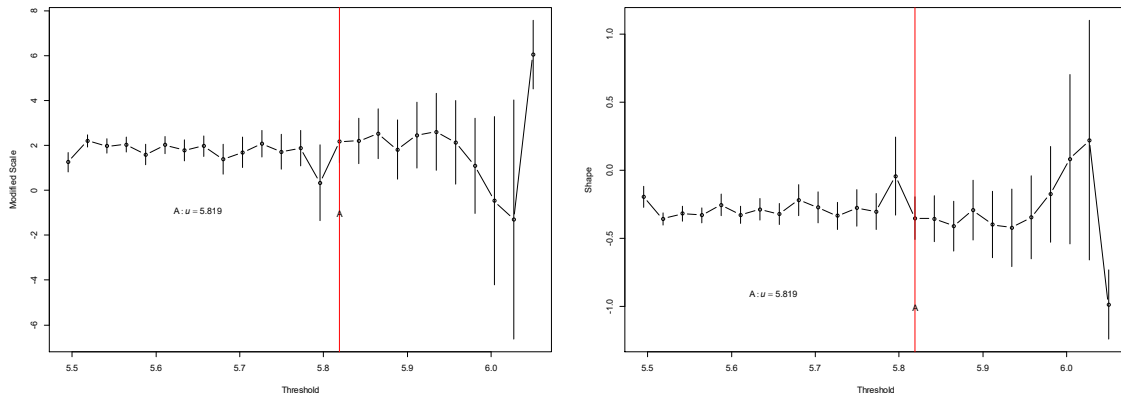


Figura 5.37 – Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma, obtidos por máxima verosimilhança, com os respectivos intervalos com 95% de confiança baseados na função *profile log-likelihood*, para os dados referentes ao **salto com vara** homens.

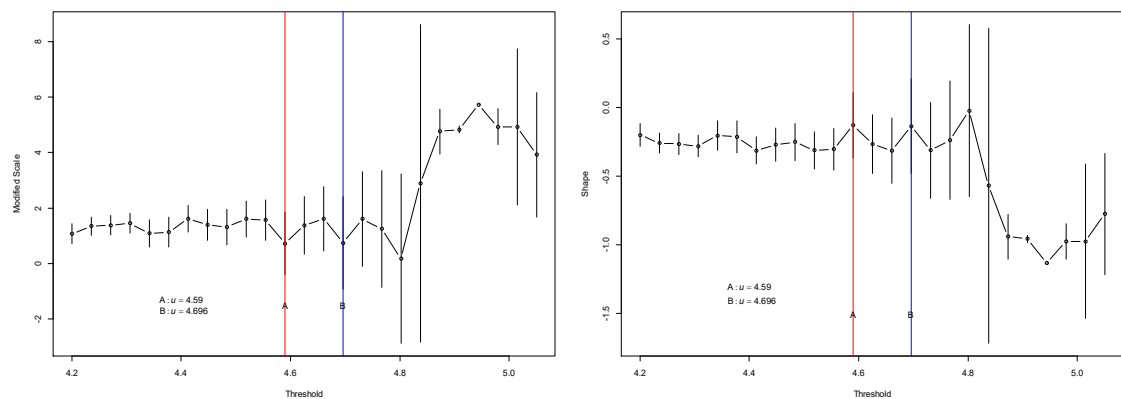


Figura 5.38 – Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma, obtidos por máxima verosimilhança, com os respectivos intervalos com 95% de confiança baseados na função *profile log-likelihood*, para os dados referentes ao **salto com vara** mulheres.

### 5.3.5.3.4. Gráfico do estimador generalizado de Hill vs gráfico do estimador dos momentos

As Figuras 5.39 e 5.40 apresentam para as amostras de salto com vara homens e mulheres, respetivamente, o gráfico generalizado de Hill e o gráfico dos momentos, com os seus pontos de intersecção de interesse.

Na amostra de homens são sugestivos os limiares  $u=(5.805, 5.819, 5.844)$  e na amostra de mulheres os limiares  $u=(4.590, 4.646, 4.696)$ .

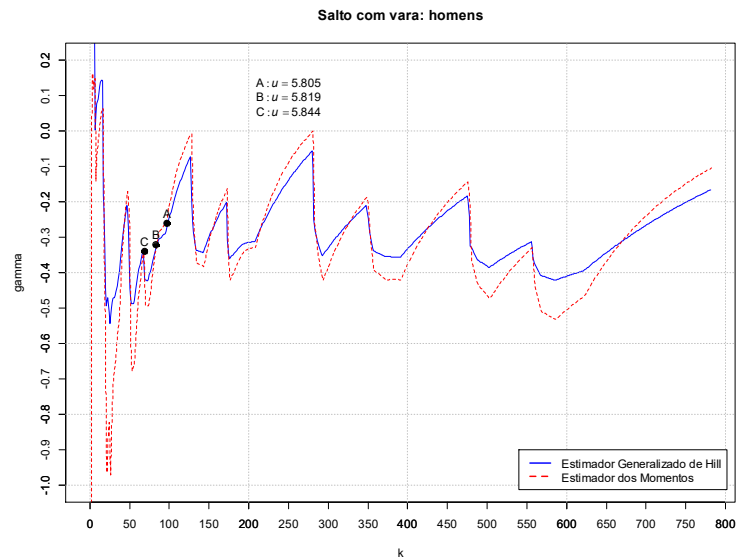


Figura 5.39 – Gráficos generalizado de Hill e dos Momentos para a performance no **salto com vara** homens.

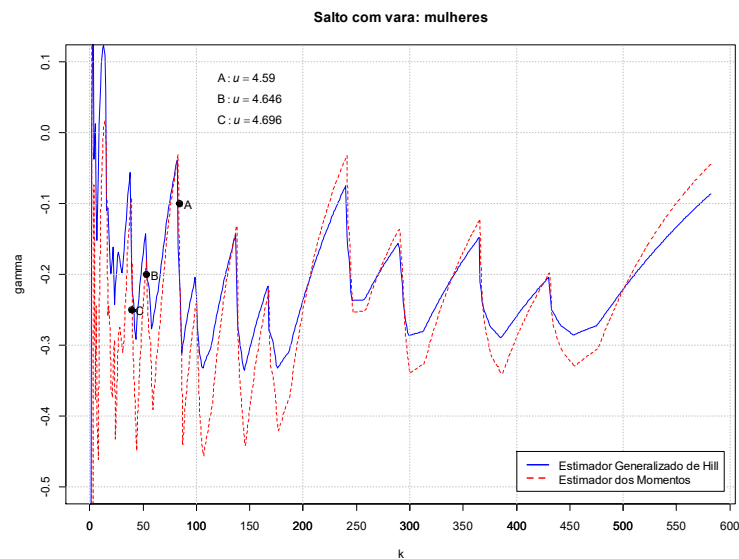


Figura 5.40 – Gráficos generalizado de Hill e dos Momentos para a performance no **salto com vara** mulheres.

### 5.3.5.3.5. Método “Esticar a Corda”

As Figuras 5.41 e 5.42 apresentam os gráficos obtidos a partir da metodologia “Esticar a Corda”, para as amostras de salto com vara homens e mulheres, respetivamente, cujo procedimento aqui resumimos a duas etapas.

Nos homens:

- 1ª etapa,  $n=783$ ; 2ª etapa,  $n=84$  (~10.7% de excedências). São sugestivos os limiares  $u=(5.825, 5.855)$ .

Nas mulheres:

- 1ª etapa,  $n=584$ ; 2ª etapa,  $n=62$  (~10.6% de excedências). São sugestivos os limiares  $u=(4.555, 4.615, 4.655)$ .

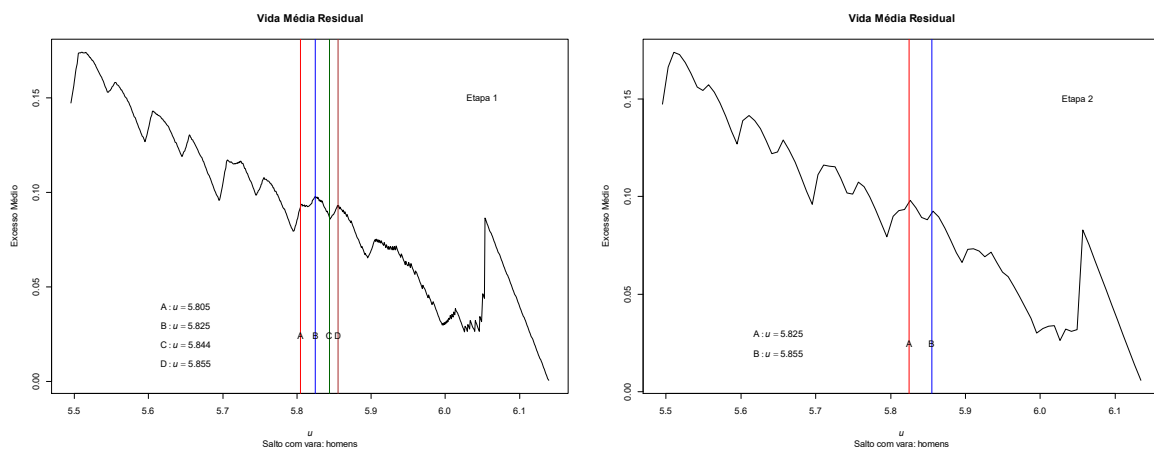


Figura 5.41 – Suavização do gráfico de vida média residual, relativo ao **salto com vara** homens.

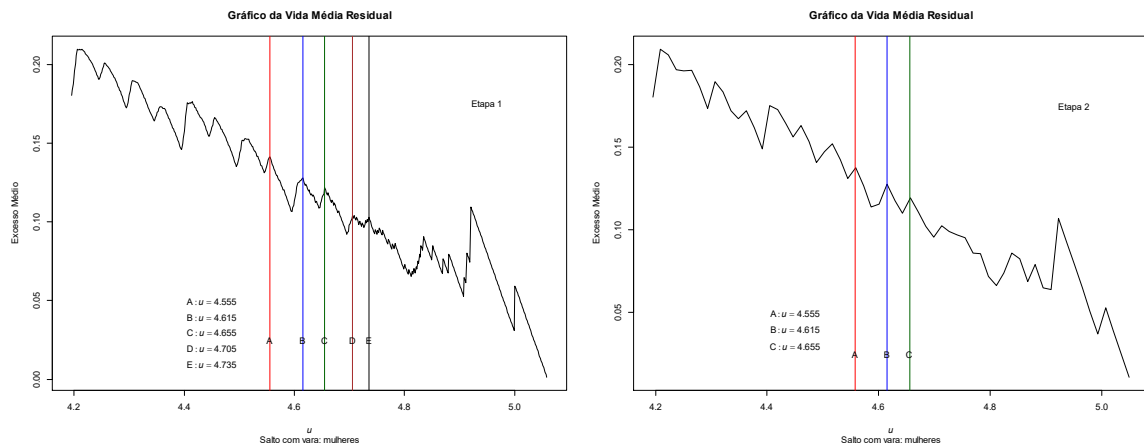


Figura 5.42 – Suavização do gráfico de vida média residual, relativo ao **salto com vara** mulheres.

### 5.3.5.4. TRIPLO-SALTO

#### 5.3.5.4.1. Gráfico de vida média residual

As Figuras 5.43 e 5.44 apresentam o gráfico de vida média residual para os dados do triplo-salto masculino e feminino, referentes aos períodos de 1980-2017 e 1991-2017, respectivamente. Em cada amostra foram definidos alguns pontos candidatos a “melhor” limiar, a partir dos quais se visualiza uma certa tendência de linearização. Nos homens, são sugestivos os limiares  $u=(17.537, 17.595)$  e nas mulheres os limiares  $u=(14.767, 14.791, 15.041)$ .

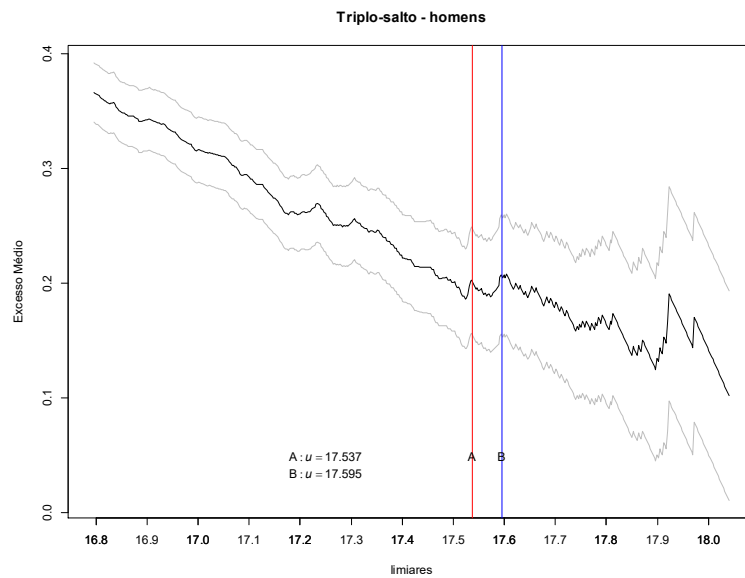


Figura 5.43 – Gráfico de vida média residual para a performance no **triplo-salto** homens.

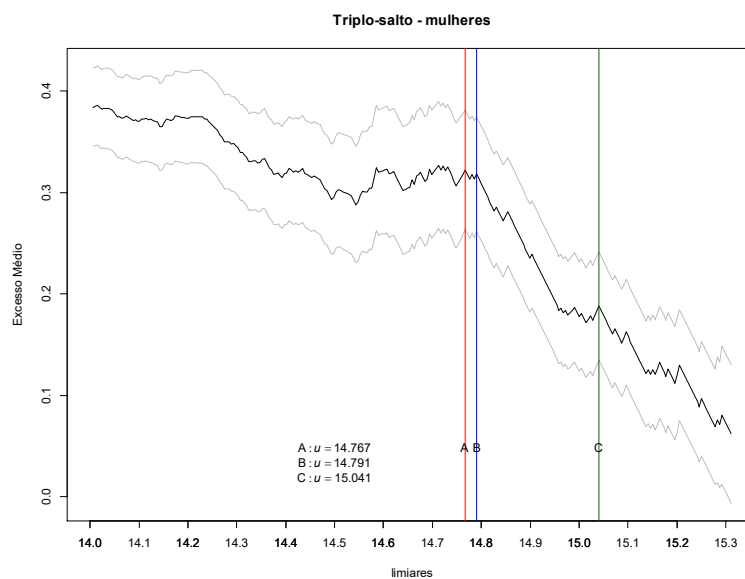


Figura 5.44 – Gráfico de vida média residual para a performance no **triplo-salto** mulheres.

### 5.3.5.4.2. Gráfico de vida mediana residual

As Figuras 5.45 5.46 mostram o gráfico de vida mediana residual para o triplo-salto masculino e feminino, respetivamente.

Interessa o ponto a partir do qual se observa uma certa linearização. Nos homens são sugestivos os limiares  $u=(17.525, 17.595)$ , e nas mulheres os limiares  $u=(14.619, 14.767, 14.904)$ , pelo que se apresentam como potenciais candidatos a “melhor” limiar.

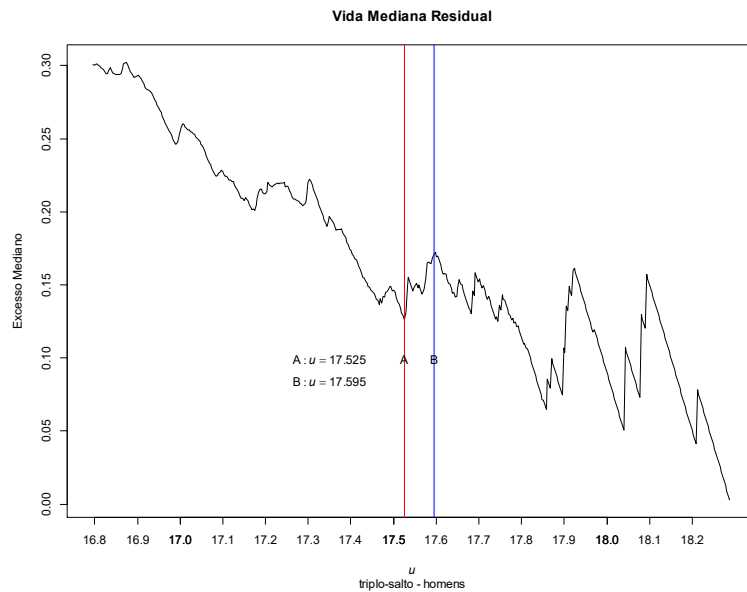


Figura 5.45 – Gráfico de vida mediana residual e vida média residual para a performance no **triplo-salto** homens.

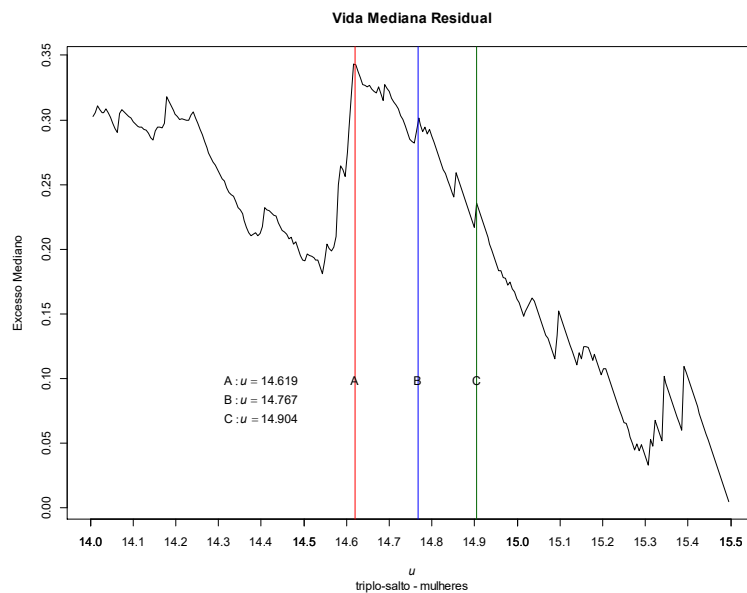


Figura 5.46 – Gráfico de vida mediana residual e vida média residual para a performance no **triplo-salto** mulheres.



### 5.3.5.4.3. Gráfico de estabilidade dos parâmetros

A partir do gráfico de estabilidade do parâmetro de forma, nos homens, são sugestivos os limiares  $u=(17.475, 17.595)$  (Figura 5.47); nas mulheres os limiares  $u=(14.816, 14.933)$  (Figura 5.48). A partir destes pontos observa-se uma certa linearização.

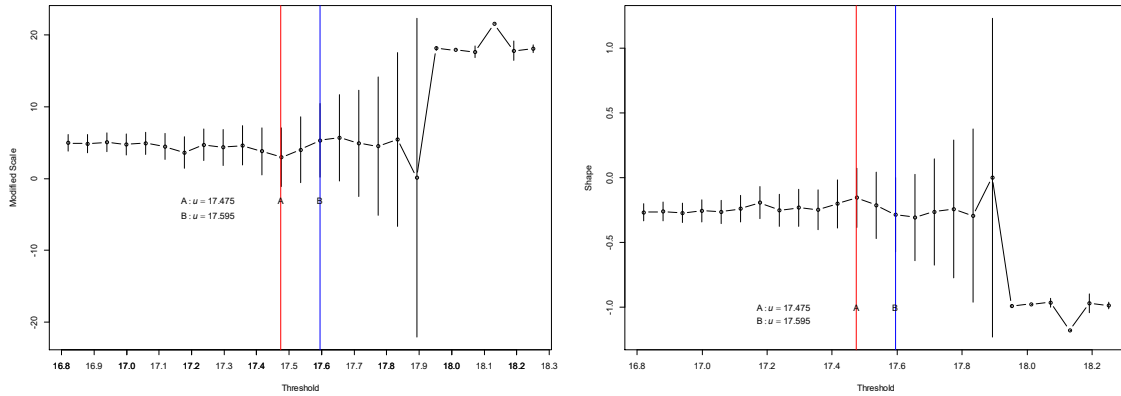


Figura 5.47 – Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma, obtidos por máxima verosimilhança, com os respectivos intervalos com 95% de confiança baseados na função *profile log-likelihood*, para os dados referentes ao **triplo-salto: homens**.

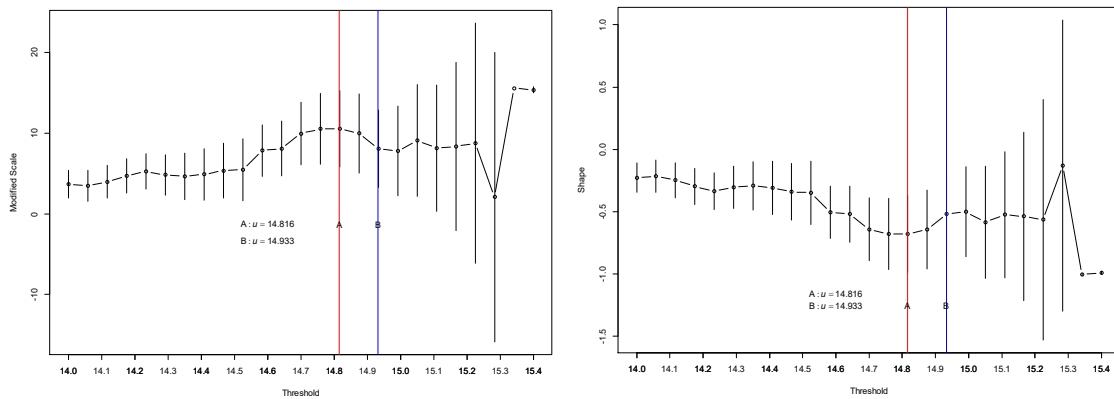


Figura 5.48 – Gráfico de estabilidade dos parâmetros de escala modificado e de forma, obtidos por máxima verosimilhança, com os respectivos intervalos com 95% de confiança baseados na função *profile log-likelihood*, para os dados referentes ao **triplo-salto: mulheres**.

#### 5.3.5.4.4. Gráfico do estimador generalizado de Hill vs gráfico do estimador dos momentos

As Figuras 5.49 e 5.50 apresentam para as amostras de triplo-salto homens e mulheres, respetivamente, o gráfico generalizado de Hill e o gráfico dos momentos, com os seus pontos de intersecção de interesse. Nos homens são sugestivos os limiares  $u=(17.475, 17.525, 17.537, 17.568)$  e nas mulheres limiares  $u=(14.665, 14.960)$ .

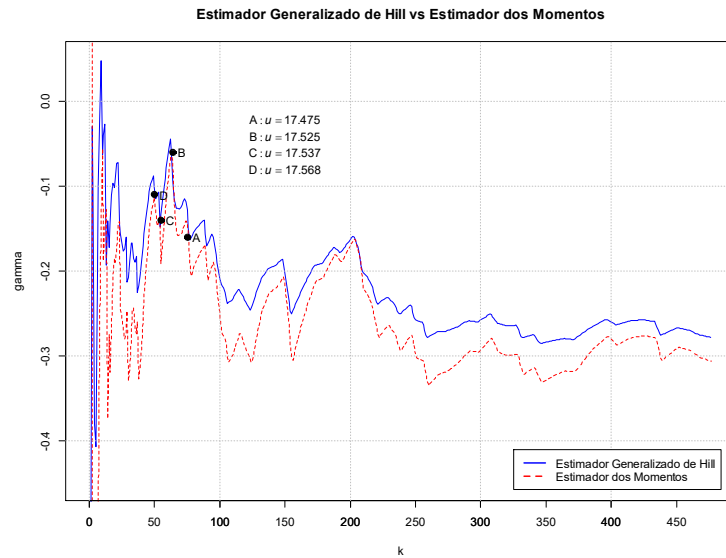


Figura 5.49 – Gráficos generalizado de Hill e dos Momentos para a performance no **triplo-salto** homens.

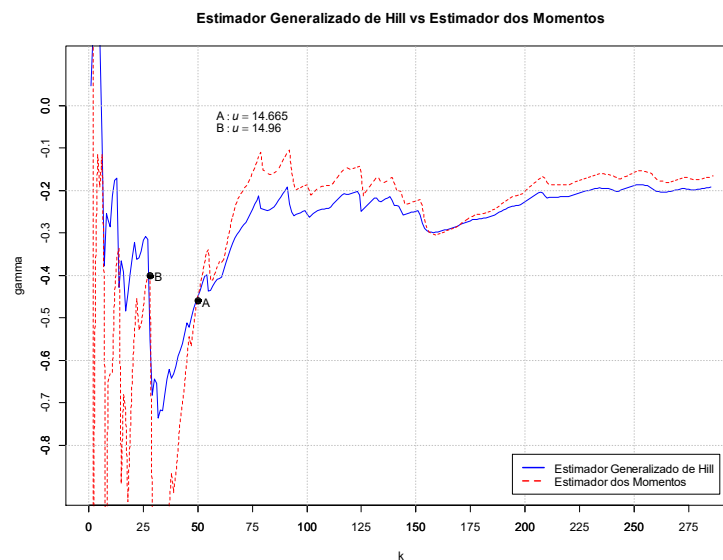


Figura 5.50 – Gráficos generalizado de Hill e dos Momentos para a performance no **triplo-salto** mulheres.

### 5.3.5.4.5. Método “Esticar a corda”

As Figuras 5.51 e 5.52 apresentam os gráficos obtidos a partir da metodologia “Esticar a Corda”, para as amostras de triplo-salto homens e mulheres, respetivamente, cujo procedimento aqui resumimos a duas etapas.

Nos homens:

- 1ª etapa,  $n=478$ ; 2ª etapa,  $n=50$  (~10.6% de excedências). É sugestivo o limiar  $u=17.605$ .

Nas mulheres:

- 1ª etapa,  $n=287$ ; 2ª etapa,  $n=38$  (~13.2% de excedências). São sugestivos os limiares  $u=(14.767, 15.046)$ .

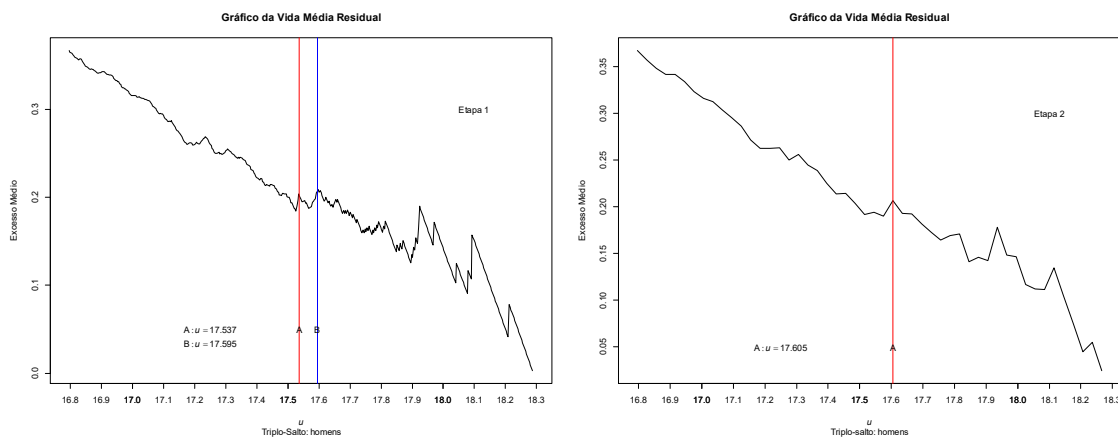


Figura 5.51 – Suavização do gráfico de vida média residual, relativo ao **triplo-salto** homens.

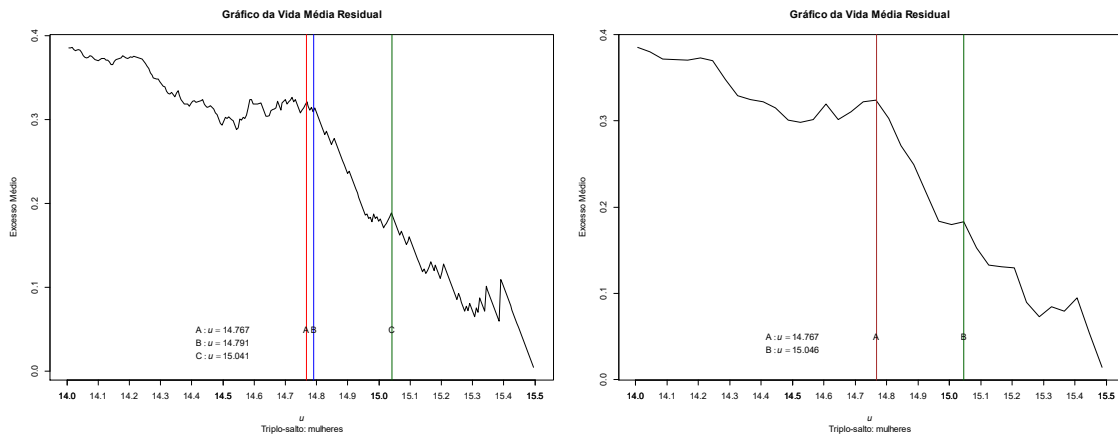


Figura 5.52 – Suavização do gráfico de vida média residual, relativo ao **triplo-salto** mulheres.

### 5.3.6. Modelo Exponencial ou GPD?

A decisão quanto ao modelo “ser exponencial vs ser GPD” irá ser tomada considerando o ajustamento por metodologias gráficas (QQ *plot*), por observação do intervalo de confiança para  $\gamma$  e por testes de hipóteses (*Deviance*, *Deviance* corrigida e teste de Marohn).

#### 5.3.6.1. Metodologia gráfica

As Tabelas 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 resumem a decisão tomada por observação e avaliação do QQ-*plot*, acerca do modelo Exponencial (Exp) ou GPD, mais concretamente,  $EXP_{\gamma=0}$  ou  $GPD_{\gamma \neq 0}$ . Assim:

- a Tabela 5.5 mostra que nas amostras de salto em altura masculino e feminino, em todos os limiares candidatos, o modelo generalizado de Pareto é o mais adequado (Anexos 5.2.1 e 5.2.2);
- a Tabela 5.6, referente ao salto em comprimento, mostra que nos homens os candidatos mais baixos seguem um modelo generalizado de Pareto, os pontos intermédios têm modelo Exponencial e no ponto mais elevado verifica-se um ajustamento semelhante entre os modelos Exponencial e GPD. Nas mulheres, todos os limiares candidatos têm melhor ajuste pelo modelo generalizado de Pareto (Anexos 5.2.3 e 5.2.4);
- a Tabela 5.7, relativa ao salto com vara, mostra que nas duas amostras todos os limiares candidatos têm melhor qualidade de ajuste pela GPD, embora nos homens o limiar mais baixo possa ser representado pelos dois modelos (Anexos 5.2.5 e 5.2.6);
- a Tabela 5.8, referente ao triplo-salto, mostra que nas duas amostras todos os limiares candidatos têm melhor qualidade de ajuste pela GPD (Anexos 5.2.7 e 5.2.8).

Observação 5.12: em diversos casos, a decisão acerca do melhor ajuste gráfico nem sempre é acompanhada pelos resultados dos testes de hipóteses, conforme veremos na secção (5.3.6.3. Testes de hipóteses).

Tabela 5.5 – Tomada de decisão acerca do «modelo Exponencial vs modelo GPD» para cada limiar candidato no **salto em altura**, com base na observação do gráfico quantil-quantil.

HOMENS		MULHERES	
$u$	$EXP_{\gamma=0}$ vs $GPD_{\gamma \neq 0}$	$u$	$EXP_{\gamma=0}$ vs $GPD_{\gamma \neq 0}$
2.315	GPD	1.995	GPD
2.327	GPD	2.001	GPD
2.345	GPD	2.006	GPD
2.355	GPD	2.015	GPD
---	---	2.016	GPD
---	---	2.025	GPD

Tabela 5.6 – Tomada de decisão acerca do «modelo Exponencial vs modelo GPD» para cada limiar candidato no **salto em comprimento**, com base na observação do gráfico quantil-quantil.

HOMENS		MULHERES	
$u$	EXP $_{\gamma=0}$ vs GPD $_{\gamma \neq 0}$	$u$	EXP $_{\gamma=0}$ vs GPD $_{\gamma \neq 0}$
8.349	GPD	7.030	GPD
8.370	GPD	7.045	GPD
8.406	GPD	7.074	GPD
8.456	EXP	7.085	GPD
8.460	EXP	7.117	GPD
8.487	$\approx$	7.121	GPD
---	---	7.157	GPD
---	---	7.167	GPD

Tabela 5.7 – Tomada de decisão acerca do «modelo Exponencial vs modelo GPD» para cada limiar candidato no **salto com vara**, com base na observação do gráfico quantil-quantil.

HOMENS		MULHERES	
$u$	EXP $_{\gamma=0}$ vs GPD $_{\gamma \neq 0}$	$u$	EXP $_{\gamma=0}$ vs GPD $_{\gamma \neq 0}$
5.805	GPD	4.555	GPD
5.819	GPD	4.590	GPD
5.825	GPD	4.615	GPD
5.844	GPD	4.646	GPD
5.855	GPD	4.655	GPD
---	---	4.696	GPD
---	---	4.705	GPD
---	---	4.735	GPD

Tabela 5.8 – Tomada de decisão acerca do «modelo Exponencial vs modelo GPD» para cada limiar candidato no **triplo-salto**, com base na observação do gráfico quantil-quantil.

HOMENS		MULHERES	
$u$	EXP $_{\gamma=0}$ vs GPD $_{\gamma \neq 0}$	$u$	EXP $_{\gamma=0}$ vs GPD $_{\gamma \neq 0}$
17.475	GPD	14.619	GPD
17.525	GPD	14.665	GPD
17.537	GPD	14.767	GPD
17.568	GPD	14.791	GPD
17.595	GPD	14.816	GPD
17.605	GPD	14.904	GPD
---	---	14.933	GPD
---	---	14.960	GPD
---	---	15.041	GPD
---	---	15.046	GPD

### 5.3.6.2. Informação com base nos intervalos de confiança para $\gamma$

A decisão quanto a um modelo poder «ser Exponencial ou não», com base na informação do intervalo com 95% de confiança para o parâmetro de forma é apresentada na Tabela 5.9. Isto é, caso o  $IC_{95\%}(\gamma) \not\supset 0$  existem evidências para rejeitar o modelo Exponencial, caso contrário não rejeitar o modelo Exponencial.

Tabela 5.9 – Intervalos com 95% de confiança para o parâmetro de forma em cada limiar de cada amostra. Tomada de decisão sobre a escolha do modelo a considerar: rejeitar exponencial ou não-rejeitar exponencial.

<b>HOMENS</b>	$IC_{95\%}(\gamma)$	Decisão	<b>MULHERES</b>	$IC_{95\%}(\gamma)$	Decisão
<b>Salto em altura</b>			<b>Salto em altura</b>		
$u=2.315$	(-0.3849; -0.1576)	Rejeitar Exp	$u=1.995$	(-0.6382; -0.0899)	Rejeitar Exp
$u=2.327$	(-0.3833; -0.1050)	Rejeitar Exp	$u=2.001$	(-0.7144; -0.1395)	Rejeitar Exp
$u=2.345$	(-0.4358; -0.0728)	Rejeitar Exp	$u=2.006$	(-0.8128; -0.2099)	Rejeitar Exp
$u=2.355$	(-0.3810; 0.1740)	Não Rejeitar Exp	$u=2.015$	(-0.6407; -0.5863)	Rejeitar Exp
<b>Salto em comprimento</b>			<b>Salto em comprimento</b>		
$u=8.349$	(-0.2797; 0.1961)	Não Rejeitar Exp	$u=2.016$	(-0.7846; -0.4111)	Rejeitar Exp
$u=8.370$	(-0.3303; 0.1693)	Não Rejeitar Exp	$u=2.025$	(-0.8697; -0.2748)	Rejeitar Exp
$u=8.406$	(-0.3730; 0.2348)	Não Rejeitar Exp	<b>Salto em comprimento</b>		
$u=8.456$	(-0.1349; 0.6666)	Não Rejeitar Exp	$u=7.030$	(-0.5588; 0.1154)	Não Rejeitar Exp
$u=8.460$	(-0.1487; 0.6662)	Não Rejeitar Exp	$u=7.045$	(-0.6104; 0.1092)	Não Rejeitar Exp
$u=8.487$	(-0.6380; 0.6472)	Não Rejeitar Exp	$u=7.074$	(-0.7927; -0.0232)	Rejeitar Exp
<b>Salto com vara</b>			<b>Salto com vara</b>		
$u=5.805$	(-0.4733; -0.1587)	Rejeitar Exp	$u=7.085$	(-0.8182; -0.0102)	Rejeitar Exp
$u=5.819$	(-0.5055; -0.1939)	Rejeitar Exp	$u=7.117$	(-0.9378; -0.0065)	Rejeitar Exp
$u=5.825$	(-0.5426; -0.2368)	Rejeitar Exp	$u=7.121$	(-0.9715; -0.0334)	Rejeitar Exp
$u=5.844$	(-0.5153; -0.1692)	Rejeitar Exp	$u=7.157$	(-1.1099; -0.0148)	Rejeitar Exp
$u=5.855$	(-0.5888; -0.2384)	Rejeitar Exp	$u=7.167$	(-1.2178; -0.0885)	Rejeitar Exp
<b>Tripló-salto</b>			<b>Tripló-salto</b>		
$u=17.475$	(-0.3879; 0.0709)	Não Rejeitar Exp	$u=4.555$	(-0.4596; -0.1569)	Rejeitar Exp
$u=17.525$	(-0.3758; 0.2263)	Não Rejeitar Exp	$u=4.590$	(-0.3651; 0.1171)	Não Rejeitar Exp
$u=17.537$	(-0.4651; 0.0553)	Não Rejeitar Exp	$u=4.615$	(-0.5013; -0.1055)	Rejeitar Exp
$u=17.568$	(-0.4612; 0.1512)	Não Rejeitar Exp	$u=4.646$	(-0.4634; 0.0449)	Não Rejeitar Exp
$u=17.595$	(-0.5720; 0.0029)	Não Rejeitar Exp	$u=4.655$	(-0.5552; -0.0917)	Rejeitar Exp
$u=17.605$	(-0.5908; -0.0076)	Rejeitar Exp	$u=4.696$	(-0.4799; 0.2131)	Não Rejeitar Exp
			$u=4.705$	(-0.5789; 0.0387)	Não Rejeitar Exp
			$u=4.735$	(-0.6774; 0.0308)	Não Rejeitar Exp
			$u=14.619$	(-0.7474; -0.3160)	Rejeitar Exp
			$u=14.665$	(-0.7947; -0.3360)	Rejeitar Exp
			$u=14.767$	(-1.0249; -0.4119)	Rejeitar Exp
			$u=14.791$	(-1.0568; -0.4084)	Rejeitar Exp
			$u=14.816$	(-0.9873; -0.3726)	Rejeitar Exp
			$u=14.904$	(-0.9210; -0.2846)	Rejeitar Exp
			$u=14.933$	(-0.8339; -0.2058)	Rejeitar Exp
			$u=14.960$	(-0.7926; -0.1306)	Rejeitar Exp
			$u=15.041$	(-1.0833; -0.1618)	Rejeitar Exp
			$u=15.046$	(-1.0568; -0.1474)	Rejeitar Exp

### 5.3.6.3. Testes de hipóteses

Considerem-se as hipóteses em estudo apresentadas em [5.37], [5.38] e [5.39] e os níveis  $\alpha=0.05$  e  $\alpha=0.10$ . No caso da *Deviance* e *Deviance* corrigida estamos particularmente interessados nas hipóteses em [5.37]. No caso do teste de Marohn, este investigador mostrou que a estatística de teste é enviesada para uma hipótese bilateral, apresentando ainda baixa potência para amostras de dimensão  $k < 500$  (Marohn, 2000). Qualquer que seja a amostra do presente estudo, verifica-se  $k < 500$ , e como temos estimativas pontuais  $\hat{\gamma} < 0$  (Tabelas 5.26 a 5.33), iremos considerar a versão unilateral à esquerda deste teste, ou seja, as hipóteses em [5.39].

A Tabela 5.10 apresenta as estatísticas *Deviance* e *Deviance* corrigida com os respectivos valores  $p$  e a decisão tomada relativamente a cada limiar das amostras de homens e mulheres do salto em altura. Nos homens, apenas o modelo com limiar mais alto não rejeita o modelo Exponencial, sendo que com os restantes limiares existem evidências para rejeitar este modelo. Na amostra de mulheres, qualquer que seja o limiar, o modelo generalizado de Pareto é o que melhor se ajusta aos dados disponíveis.

Tabela 5.10 – Estatísticas *Deviance* e *Deviance* corrigida na verificação do modelo Exponencial ou GPD, nos modelos candidatos na amostra de **salto em altura**.

$u$	$D$	$p$	Decisão	$D^*$	$p$	Decisão
+ Homens						
2.315	11.250	0.00080	Rejeitar $H_0$	10.967	0.00093	Rejeitar $H_0$
2.327	0.677	0.00976	Rejeitar $H_0$	6.462	0.01102	Rejeitar $H_0$
2.345	4.498	0.03393	Rejeitar $H_0$	4.258	0.03906	Rejeitar $H_0$
2.355	0.431	0.51174	Não-Rejeitar $H_0$	0.403	0.52546	Não-Rejeitar $H_0$
+ Mulheres						
1.995	3.957	0.04669	Rejeitar $H_0$	3.697	0.054503	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )
2.001	4.728	0.02968	Rejeitar $H_0$	4.357	0.036862	Rejeitar $H_0$
2.006	6.401	0.01141	Rejeitar $H_0$	5.806	0.015975	Rejeitar $H_0$
2.015	7.469	0.00628	Rejeitar $H_0$	6.563	0.010410	Rejeitar $H_0$
2.016	7.267	0.00702	Rejeitar $H_0$	6.359	0.011679	Rejeitar $H_0$
2.025	5.399	0.02015	Rejeitar $H_0$	4.628	0.031455	Rejeitar $H_0$

A Tabela 5.11 apresenta os resultados da estatística teste de Marohn (2000) e respectivos valores  $p$  unilaterais à esquerda das amostras de homens e mulheres no salto em altura, bem como a decisão tomada. Nos homens apenas o limiar mais alto não-rejeita o modelo Exponencial. Opostamente, nas mulheres, o modelo Exponencial só não é rejeitado nos modelos com limiar mais baixo.

Tabela 5.11 – Estatística de Marohn (2000), na verificação do modelo Exponencial ou  $GPD_{\gamma < 0}$ , nos modelos candidatos na amostra de **salto em altura**.

$u$	$T_k^*$	$p$	Decisão
+ Homens			
2.315	-2.486	0.00647	Rejeitar $H_0$
2.327	-1.953	0.02539	Rejeitar $H_0$
2.345	-1.660	0.04842	Rejeitar $H_0$
2.355	-0.509	0.30547	Não-Rejeitar $H_0$
+ Mulheres			
1.995	-1.134	0.12845	Não-Rejeitar $H_0$
2.001	-1.195	0.11602	Não-Rejeitar $H_0$
2.006	-1.399	0.08088	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )
2.015	-1.593	0.05558	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )
2.016	-1.620	0.05260	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )
2.025	-1.344	0.08954	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )

A Tabela 5.12 apresenta as estatísticas *Deviance* e *Deviance* corrigida com os respectivos valores  $p$  e a decisão tomada relativamente a cada limiar das amostras de homens e mulheres no salto em comprimento. Na amostra de homens, qualquer que seja o limiar, o modelo Exponencial é o que melhor se ajusta aos dados disponíveis. Nas mulheres, quando o modelo Exponencial é rejeitado, esta rejeição ocorre sempre a um nível de significância de 10%. Nos limiares  $u=(7.085, 7.117, 7.157)$  da amostra de mulheres não há concordância na decisão tomada por  $D$  e  $D^*$ .

Tabela 5.12 – Estatísticas *Deviance* e *Deviance* corrigida na verificação do modelo Exponencial ou GPD, nos modelos candidatos na amostra de **salto em comprimento**.

$u$	$D$	$p$	Decisão	$D^*$	$p$	Decisão
+ Homens						
8.349	0.111	0.73886	Não-Rejeitar $H_0$	0.106	0.74493	Não-Rejeitar $H_0$
8.370	0.355	0.55115	Não-Rejeitar $H_0$	0.335	0.56259	Não-Rejeitar $H_0$
8.406	0.182	0.66936	Não-Rejeitar $H_0$	0.169	0.68071	Não-Rejeitar $H_0$
8.456	0.820	0.36519	Não-Rejeitar $H_0$	0.745	0.38793	Não-Rejeitar $H_0$
8.460	0.606	0.43612	Não-Rejeitar $H_0$	0.549	0.45884	Não-Rejeitar $H_0$
8.487	0.000	0.98850	Não-Rejeitar $H_0$	0.000	0.98925	Não-Rejeitar $H_0$
+ Mulheres						
7.030	1.348	0.24556	Não-Rejeitar $H_0$	1.254	0.26283	Não-Rejeitar $H_0$
7.045	1.487	0.22267	Não-Rejeitar $H_0$	1.373	0.24135	Não-Rejeitar $H_0$
7.074	3.165	0.07522	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )	2.864	0.09059	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )
7.085	2.972	0.08474	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )	2.674	0.10197	Não-Rejeitar $H_0$
7.117	2.838	0.09209	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )	2.504	0.11358	Não-Rejeitar $H_0$
7.121	3.122	0.07723	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )	2.744	0.09763	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )
7.157	2.761	0.09657	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )	2.367	0.12394	Não-Rejeitar $H_0$
7.167	3.514	0.06085	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )	2.973	0.08464	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )

A Tabela 5.13 apresenta os resultados da estatística teste de Marohn (2000) e respectivos valores  $p$  unilaterais à esquerda nas amostras de homens e mulheres relativamente ao salto em comprimento, bem como a decisão tomada. Em todos os casos, o modelo Exponencial surge como melhor opção.



Tabela 5.13 – Estatística de Marohn (2000), na verificação do modelo Exponencial ou  $GPD_{\gamma < 0}$ , nos modelos candidatos na amostra de **salto em comprimento**.

$u$	$T_k^*$	$p$	Decisão
+ Homens			
8.349	-0.288	0.38669	Não-Rejeitar $H_0$
8.370	-0.509	0.30524	Não-Rejeitar $H_0$
8.406	-0.351	0.36276	Não-Rejeitar $H_0$
8.456	0.651	0.74240	Não-Rejeitar $H_0$
8.460	0.542	0.70606	Não-Rejeitar $H_0$
8.487	0.008	0.50333	Não-Rejeitar $H_0$
+ Mulheres			
7.030	-0.749	0.22704	Não-Rejeitar $H_0$
7.045	-0.760	0.22374	Não-Rejeitar $H_0$
7.074	-1.051	0.14666	Não-Rejeitar $H_0$
7.085	-1.001	0.15835	Não-Rejeitar $H_0$
7.117	-0.906	0.18244	Não-Rejeitar $H_0$
7.121	-0.942	0.17317	Não-Rejeitar $H_0$
7.157	-0.801	0.21168	Não-Rejeitar $H_0$
7.167	-0.881	0.18926	Não-Rejeitar $H_0$

A Tabela 5.14 apresenta as estatísticas *Deviance* e *Deviance* corrigida com os respectivos valores  $p$  e a decisão tomada relativamente a cada limiar das amostras de homens e mulheres no salto com vara. Na amostra de homens, o modelo Exponencial é rejeitado em todos os casos. Na amostra de mulheres, as evidências para rejeição do modelo Exponencial ocorrem nos limiares  $u=(4.555, 4.615, 4.655)$ . Em todos os casos, verifica-se concordância entre as decisões das *Deviances*.

Tabela 5.14 – Estatísticas *Deviance* e *Deviance* corrigida na verificação do modelo Exponencial ou GPD, nos modelos candidatos na amostra de **salto com vara**.

$u$	$D$	$p$	Decisão	$D^*$	$p$	Decisão
+ Homens						
5.805	7.078	0.00780	Rejeitar $H_0$	6.798	0.00913	Rejeitar $H_0$
5.819	8.348	0.00386	Rejeitar $H_0$	7.964	0.00477	Rejeitar $H_0$
5.825	10.669	0.00109	Rejeitar $H_0$	10.129	0.00146	Rejeitar $H_0$
5.844	6.715	0.00956	Rejeitar $H_0$	6.347	0.01176	Rejeitar $H_0$
5.855	9.945	0.00161	Rejeitar $H_0$	9.293	0.00230	Rejeitar $H_0$
+ Mulheres						
4.555	8.348	0.00386	Rejeitar $H_0$	7.981	0.00473	Rejeitar $H_0$
4.590	0.806	0.36927	Não-Rejeitar $H_0$	0.769	0.38038	Não-Rejeitar $H_0$
4.615	5.107	0.02383	Rejeitar $H_0$	4.783	0.02875	Rejeitar $H_0$
4.646	1.754	0.18542	Não-Rejeitar $H_0$	1.631	0.20162	Não-Rejeitar $H_0$
4.655	4.389	0.03617	Rejeitar $H_0$	4.023	0.04487	Rejeitar $H_0$
4.696	0.452	0.50149	Não-Rejeitar $H_0$	0.410	0.52209	Não-Rejeitar $H_0$
4.705	1.945	0.16309	Não-Rejeitar $H_0$	1.729	0.18852	Não-Rejeitar $H_0$
4.735	2.183	0.13959	Não-Rejeitar $H_0$	1.871	0.17139	Não-Rejeitar $H_0$

A Tabela 5.15 apresenta os resultados da estatística teste de Marohn (2000) e respectivos valores  $p$  unilaterais à esquerda nas amostras de homens e mulheres do salto com vara, bem como a decisão tomada. Os resultados (decisão) são similares aos da Tabela 5.14.

Tabela 5.15 – Estatística de Marohn (2000), na verificação do modelo Exponencial ou  $GPD_{\gamma < 0}$ , nos modelos candidatos na amostra de **salto com vara**.

$u$	$T_k^*$	$p$	Decisão
+ Homens			
5.805	-1.662	0.04828	Rejeitar $H_0$
5.819	-1.820	0.03436	Rejeitar $H_0$
5.825	-2.112	0.01734	Rejeitar $H_0$
5.844	-1.647	0.04978	Rejeitar $H_0$
5.855	-2.092	0.01820	Rejeitar $H_0$
+ Mulheres			
4.555	-2.154	0.01561	Rejeitar $H_0$
4.590	-0.637	0.26193	Não-Rejeitar $H_0$
4.615	-1.655	0.04900	Rejeitar $H_0$
4.646	-0.953	0.17017	Não-Rejeitar $H_0$
4.655	-1.545	0.06114	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )
4.696	-0.485	0.31387	Não-Rejeitar $H_0$
4.705	-1.024	0.15284	Não-Rejeitar $H_0$
4.735	-1.096	0.13662	Não-Rejeitar $H_0$

A Tabela 5.16 apresenta as estatísticas *Deviance* e *Deviance* corrigida com os respectivos valores  $p$  e a decisão tomada relativamente a cada limiar das amostras de homens e mulheres no triplo-salto. Na amostra de homens, qualquer que seja o limiar, não existem evidências estatisticamente significativas para rejeitar o modelo Exponencial. Opostamente, nas mulheres, existem evidências que levam à rejeição do modelo Exponencial.

Tabela 5.16 – Estatísticas *Deviance* e *Deviance* corrigida na verificação do modelo Exponencial ou GPD, nos modelos candidatos na amostra de **triplo-salto**.

$u$	$D$	$P$	Decisão	$D^*$	$p$	Decisão
+ Homens						
17.475	1.404	0.23608	Não-Rejeitar $H_0$	1.333	0.24831	Não-Rejeitar $H_0$
17.525	0.211	0.64624	Não-Rejeitar $H_0$	0.198	0.65611	Não-Rejeitar $H_0$
17.537	1.716	0.19019	Não-Rejeitar $H_0$	1.600	0.20593	Não-Rejeitar $H_0$
17.568	0.773	0.37937	Não-Rejeitar $H_0$	0.715	0.39763	Não-Rejeitar $H_0$
17.595	2.513	0.11290	Não-Rejeitar $H_0$	2.285	0.13065	Não-Rejeitar $H_0$
17.605	2.687	0.10119	Não-Rejeitar $H_0$	2.431	0.11897	Não-Rejeitar $H_0$
+ Mulheres						
14.619	10.063	0.00151	Rejeitar $H_0$	9.403	0.00217	Rejeitar $H_0$
14.665	10.524	0.00118	Rejeitar $H_0$	9.745	0.00180	Rejeitar $H_0$
14.767	14.714	0.00013	Rejeitar $H_0$	13.205	0.00028	Rejeitar $H_0$
14.791	14.652	0.00013	Rejeitar $H_0$	13.068	0.00030	Rejeitar $H_0$
14.816	12.521	0.00040	Rejeitar $H_0$	11.168	0.00083	Rejeitar $H_0$
14.904	8.618	0.00333	Rejeitar $H_0$	7.574	0.00592	Rejeitar $H_0$
14.933	5.965	0.01459	Rejeitar $H_0$	5.242	0.02204	Rejeitar $H_0$
14.960	4.123	0.04229	Rejeitar $H_0$	3.608	0.05750	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )
15.041	5.297	0.02136	Rejeitar $H_0$	4.334	0.03736	Rejeitar $H_0$
15.046	4.933	0.02635	Rejeitar $H_0$	4.036	0.04453	Rejeitar $H_0$

A Tabela 5.17 apresenta os resultados da estatística teste de Marohn (2000) e respetivos valores  $p$  unilaterais à esquerda nas amostras de homens e mulheres do triplo-salto, bem como a decisão tomada. Nos homens, o modelo Exponencial surge como opção mais adequada em todos os limiares. Nas mulheres, o modelo Exponencial apenas é preferido no limiar  $u=14.960$ .

Tabela 5.17 – Estatística de Marohn (2000), na verificação do modelo Exponencial ou  $GPD_{\gamma < 0}$ , nos modelos candidatos na amostra de **triplo-salto**.

$u$	$T_k^*$	$p$	Decisão
+ Homens			
17.475	-0.900	0.18404	Não-Rejeitar $H_0$
17.525	-0.333	0.36959	Não-Rejeitar $H_0$
17.537	-0.963	0.16785	Não-Rejeitar $H_0$
17.568	-0.626	0.26568	Não-Rejeitar $H_0$
17.595	-1.131	0.12909	Não-Rejeitar $H_0$
17.605	-1.171	0.12071	Não-Rejeitar $H_0$
+ Mulheres			
14.619	-1.632	0.05135	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )
14.665	-1.651	0.04935	Rejeitar $H_0$
14.767	-2.089	0.01834	Rejeitar $H_0$
14.791	-2.117	0.01714	Rejeitar $H_0$
14.816	-1.982	0.02375	Rejeitar $H_0$
14.904	-1.740	0.04090	Rejeitar $H_0$
14.933	-1.459	0.07231	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )
14.960	-1.195	0.11602	Não-Rejeitar $H_0$
15.041	-1.370	0.08532	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )
15.046	-1.328507	0.09201	Rejeitar $H_0$ ( $\alpha=0.10$ )

#### 5.3.6.4. Decisão quanto ao modelo: Exponencial ou GPD

As Tabelas 5.18 à 5.25 resumem os resultados apresentados nas Tabelas 5.5 à 5.17. Igualmente, é apresentada para cada limiar a decisão tomada quanto ao modelo a ser usado na estimação dos parâmetros extremos na secção seguinte.

Observação 5.13: de notar que o maior peso na tomada de decisão coube aos testes de hipóteses e aos  $IC_{95\%}(\gamma)$ , sendo que a observação do *QQ-plot* atuou como meio informativo acerca do modelo a considerar. Em diversas situações, não há compatibilidade entre a decisão pelos testes de hipóteses e pelo *QQ-plot* (e.g., salto em altura masculino, em  $u=2.355$ ), noutros casos a *Deviance* tem decisão contrária da *Deviance* corrigida (e.g., salto em comprimento feminino, em  $u=7.085$ ). Na amostra de triplo-salto masculino, no limiar  $u=17.605$ , os testes de hipóteses têm decisão contrária do  $IC_{95\%}(\gamma)$  e do *QQ-plot*, pelo que neste caso optamos por considerar um modelo Exponencial, uma vez que todos os modelos com limiar mais baixo são Exponenciais.

Tabela 5.18 – Salto em altura masculino: modelo Exponencial ou modelo GPD?

HOMENS		Metodologias					Decisão
Salto em altura	Modelo	QQ-plot	IC <sub>95%</sub> ( $\gamma$ )	D	D*	T <sub>k</sub> *	
u=2.315	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=2.327	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=2.345	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=2.355	EXP	---	IC $\supset$ 0	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---

Tabela 5.19 – Salto em comprimento masculino: modelo Exponencial ou modelo GPD?

HOMENS		Metodologias					Decisão
Salto em comprimento	Modelo	QQ-plot	IC <sub>95%</sub> ( $\gamma$ )	D	D*	T <sub>k</sub> *	
u=8.349	EXP	---	IC $\supset$ 0	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---
u=8.370	EXP	---	IC $\supset$ 0	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---
u=8.406	EXP	---	IC $\supset$ 0	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---
u=8.456	EXP	X	IC $\supset$ 0	X	X	X	EXP
	GPD	---	---	---	---	---	---
u=8.460	EXP	X	IC $\supset$ 0	X	X	X	EXP
	GPD	---	---	---	---	---	---
u=8.487	EXP	X	IC $\supset$ 0	X	X	X	EXP
	GPD	---	---	---	---	---	---

Tabela 5.20 – Salto com vara masculino: modelo Exponencial ou modelo GPD?

HOMENS		Metodologias					Decisão
Salto com vara	Modelo	QQ-plot	IC <sub>95%</sub> ( $\gamma$ )	D	D*	T <sub>k</sub> *	
u=5.805	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=5.819	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=5.825	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=5.844	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=5.855	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD

Tabela 5.21 – Triplo-salto masculino: modelo Exponencial ou modelo GPD?

HOMENS		Metodologias					Decisão
Triplo-salto	Modelo	QQ-plot	IC <sub>95%</sub> ( $\gamma$ )	D	D*	T <sub>k</sub> *	
u=17.475	EXP	---	IC $\supset$ 0	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---
u=17.525	EXP	---	IC $\supset$ 0	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---
u=17.537	EXP	---	IC $\supset$ 0	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---
u=17.568	EXP	---	IC $\supset$ 0	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---
u=17.595	EXP	---	IC $\supset$ 0	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---
u=17.605	EXP	---	---	X	X	X	EXP
	GPD	X	X	---	---	---	---

Tabela 5.22 – Salto em altura feminino: modelo Exponencial ou modelo GPD?

MULHERES		Metodologias					Decisão
Salto em altura	Modelo	QQ-plot	IC <sub>95%</sub> ( $\gamma$ )	D	D*	T <sub>k</sub> *	
u=1.995	EXP	---	---	---	---	X	---
	GPD	X	X	X	X	---	GPD
u=2.001	EXP	---	---	---	---	X	---
	GPD	X	X	X	X	---	GPD
u=2.006	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X•	GPD
u=2.015	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X•	GPD
u=2.016	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X•	GPD
u=2.025	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X•	GPD

• significativo a  $\alpha=0.10$ .

Tabela 5.23 – Salto em comprimento feminino: modelo Exponencial ou modelo GPD?

MULHERES		Metodologias					Decisão
Salto em comprimento	Modelo	QQ-plot	IC <sub>95%</sub> ( $\gamma$ )	D	D*	T <sub>k</sub> *	
u=7.030	EXP	---	IC $\supset 0$	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---
u=7.045	EXP	---	IC $\supset 0$	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---
u=7.074	EXP	---	---	---	---	X	---
	GPD	X	X	X•	X•	---	GPD
u=7.085	EXP	---	---	---	X	X	---
	GPD	X	X	X•	---	---	GPD
u=7.117	EXP	---	---	---	X	X	---
	GPD	X	X	X•	---	---	GPD
u=7.121	EXP	---	---	---	---	X	---
	GPD	X	X	X•	X•	---	GPD
u=7.157	EXP	---	---	---	X	X	---
	GPD	X	X	X•	---	---	GPD
u=7.167	EXP	---	---	---	---	X	---
	GPD	X	X	X•	X•	---	GPD

• significativo a  $\alpha=0.10$ .

Tabela 5.24 – Salto com vara feminino: modelo Exponencial ou modelo GPD?

MULHERES		Metodologias					Decisão
Salto com vara	Modelo	QQ-plot	IC <sub>95%</sub> ( $\gamma$ )	D	D*	T <sub>k</sub> *	
u=4.555	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=4.590	EXP	---	IC $\supset 0$	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---
u=4.615	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=4.646	EXP	---	IC $\supset 0$	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---
u=4.655	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X•	GPD
u=4.696	EXP	---	IC $\supset 0$	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---
u=4.705	EXP	---	IC $\supset 0$	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---
u=4.735	EXP	---	IC $\supset 0$	X	X	X	EXP
	GPD	X	---	---	---	---	---

• significativo a  $\alpha=0.10$ .

Tabela 5.25 – Triplo-salto feminino: modelo Exponencial ou modelo GPD?

MULHERES		Metodologias					Decisão
Triplo-salto	Modelo	QQ-plot	IC <sub>95%</sub> ( $\gamma$ )	D	D*	T <sub>k</sub> *	
u=14.619	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=14.665	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=14.767	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=14.791	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=14.816	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=14.904	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=14.933	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X	X	X	X	X	GPD
u=14.960	EXP	---	---	---	---	X	---
	GPD	X	X	X	X•	---	GPD
u=15.041	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X•	X	X	X	X	GPD
u=15.046	EXP	---	---	---	---	---	---
	GPD	X•	X	X	X	X	GPD

• significativo a  $\alpha=0.10$ .

### 5.3.7. Estimativa dos parâmetros

As Tabelas 5.26 e 5.27 apresentam, respectivamente, para as amostras de homens e mulheres atletas de salto em altura, os limiares candidatos, o número de excedências do nível  $u$  e respectivo rácio, as estimativas dos parâmetros extremais de escala e de forma com os respectivos erros-padrão e intervalos com 95% de confiança.

No **salto em altura**, em cada amostra os potenciais candidatos a limiar, são:

+ Homens		+ Mulheres	
$u=2.315$ :	MRL <i>plot</i> + TCP + “EC”	$u=1.995$ :	MRL <i>plot</i> + TCP + “EC” + MeRL
$u=2.327$ :	MeRL <i>plot</i>		<i>plot</i>
$u=2.345$ :	MRL <i>plot</i> + “EC”	$u=2.001$ :	(GH vs MOM) <i>plot</i>
$u=2.355$ :	MRL <i>plot</i> + MeRL <i>plot</i> + TCP + (GH vs MOM) <i>plot</i>	$u=2.006$ :	MRL <i>plot</i> + “EC”
		$u=2.015$ :	MRL <i>plot</i> + “EC”
		$u=2.016$ :	MeRL <i>plot</i>
		$u=2.025$ :	TCP

Pela Tabela 5.26 observa-se em relação ao salto em altura masculino que:

- o modelo com nível  $u=2.355$ , é melhor expresso por um modelo Exponencial.
- à medida que o nível  $u$  aumenta, as estimativas pontuais do parâmetro de escala diminuem ao passo que os seus erros-padrão aumentam (exceto no limiar  $u=2.355$ ); por sua vez, as estimativas pontuais do parâmetro de forma sofrem oscilações, enquanto que os erros-padrão sofrem um ligeiro aumento.
- nos modelos GPD ( $\hat{\gamma} \neq 0$ ), os limites do intervalo com 95% de confiança para o parâmetro de forma são inferiores a zero sugerindo a rejeição do modelo Exponencial em favor do modelo tipo Beta.

Tabela 5.26 – Limiares  $u$ , número de excedências  $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalos com 95% de confiança dos parâmetros de escala e forma, referentes ao **salto em altura – homens**, no período de 1980-2017.

$u$	$k$	$k/n$	$\hat{\sigma}_u$	$se(\hat{\sigma}_u)$	$IC_{95\%}(\sigma_u)$	$\hat{\gamma}$	$se(\hat{\gamma})$	$IC_{95\%}(\gamma)$
2.315	155	0.211	0.043541	0.00421	(0.0353; 0.0518)	-0.271255	0.057983	(-0.3849; -0.1576)
2.327	120	0.163	0.038197	0.00433	(0.0297; 0.0467)	-0.244150	0.070987	(-0.3833; -0.1050)
2.345	71	0.097	0.034592	0.00510	(0.0246; 0.0446)	-0.254304	0.092604	(-0.4358; -0.0728)
2.355	59	0.080	0.022288	0.00288	(0.0166; 0.0279)	---	---	---

Pela Tabela 5.27 observa-se em relação ao salto em altura feminino que:

- todos os limiares são melhor representados por um modelo GPD ( $\hat{\gamma} \neq 0$ ).
- à medida que o nível  $u$  aumenta, as estimativas pontuais do parâmetro de escala sofrem oscilações, o mesmo acontecendo com os erros-padrão. Por sua vez, no parâmetro de forma há uma tendência decrescente da estimativa pontual e oscilação dos respetivos erros-padrão. A partir de  $u=2.006$ , inclusive, verifica-se que  $\hat{\gamma} < -0.5$  o que pode comprometer as condições de regularidade indicadas por

Smith (1984). Esta situação ganhará maior importância caso um destes modelos venha a ser considerado o “melhor” modelo.

– os limites do intervalo com 95% de confiança para o parâmetro de forma são inferiores a zero em todos os níveis  $u$ , sugerindo a rejeição do modelo Exponencial, em favor do modelo tipo Beta.

Tabela 5.27 – Limiares  $u$ , número de excedências  $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalos com 95% de confiança dos parâmetros de escala e forma, referentes ao **salto em altura – mulheres**, no período de 1980-2017.

$u$	$k$	$k/n$	$\hat{\sigma}_u$	$se(\hat{\sigma}_u)$	$IC_{95\%}(\sigma_u)$	$\hat{\gamma}$	$se(\hat{\gamma})$	$IC_{95\%}(\gamma)$
1.995	57	0.295	0.041365	0.007726	(0.0262; 0.0565)	-0.364034	0.139865	(-0.6382; -0.0899)
2.001	47	0.244	0.042978	0.008501	(0.0263; 0.0596)	-0.426905	0.146656	(-0.7144; -0.1395)
2.006	39	0.202	0.046254	0.009166	(0.0283; 0.0642)	-0.511338	0.153785	(-0.8128; -0.2099)
2.015	29	0.150	0.054681	0.000002	(0.0546; 0.0547)	-0.613483	0.013889	(-0.6407; -0.5863)
2.016	28	0.145	0.046565	0.004375	(0.0380; 0.0551)	-0.597826	0.095294	(-0.7846; -0.4111)
2.025	24	0.124	0.039709	0.006501	(0.0270; 0.0525)	-0.572269	0.151752	(-0.8697; -0.2748)

As Tabelas 5.28 e 5.29 apresentam para as amostras de homens e mulheres praticantes de salto em comprimento, os limiares, as excedências, o rácio de excedências, as estimativas dos parâmetros de escala e forma com os respetivos erros-padrão e intervalos com 95% de confiança.

No **salto em comprimento**, em cada amostra os potenciais candidatos a limiar, são:

+ Homens

$u=8.349$ : MeRL *plot*

$u=8.370$ : (GH vs MOM) *plot*

$u=8.406$ : MRL *plot* + “EC”

$u=8.456$ : MRL *plot* + MeRL *plot* + (GH vs MOM) *plot* + “EC”

$u=8.460$ : TCP + (GH vs MOM) *plot* + “EC”

$u=8.487$ : MRL *plot*

+ Mulheres

$u=7.030$ : MRL *plot* + TCP

$u=7.045$ : “EC”

$u=7.074$ : MRL *plot* + MeRL *plot*

$u=7.085$ : (GH vs MOM) *plot* + “EC”

$u=7.117$ : (GH vs MOM) *plot*

$u=7.121$ : MeRL *plot*

$u=7.157$ : TCP

$u=7.167$ : MeRL *plot*

Pela Tabela 5.28 observa-se em relação ao salto em comprimento masculino que:

– todos os limiares são melhor representados por um modelo Exponencial.

– à medida que o nível  $u$  aumenta, as estimativas pontuais e respetivos erros-padrão do parâmetro de escala sofrem oscilações, sendo que os erros-padrão são relativamente estáveis, exceto no limiar mais alto.



Tabela 5.28 – Limiares  $u$ , número de excedências  $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalo com 95% de confiança dos parâmetros referentes ao **salto em comprimento – homens**, no período de 1980-2017.

$u$	$k$	$k/n$	$\hat{\sigma}_u$	$se(\hat{\sigma}_u)$	$IC_{95\%}(\sigma_u)$	$\hat{\gamma}$	$se(\hat{\gamma})$	$IC_{95\%}(\gamma)$
8.349	80	0.105	0.132992	0.014866	(0.1039; 0.1621)	---	---	---
8.370	67	0.088	0.136020	0.016615	(0.1035; 0.1686)	---	---	---
8.406	52	0.068	0.133039	0.018446	(0.0969; 0.1692)	---	---	---
8.456	40	0.052	0.115604	0.018275	(0.0798; 0.1514)	---	---	---
8.460	38	0.050	0.117566	0.019068	(0.0802; 0.1549)	---	---	---
8.487	28	0.037	0.128500	0.024280	(0.0809; 0.1761)	---	---	---

Pela Tabela 5.29 observa-se em relação ao salto em comprimento feminino que:

– os limiares mais baixos são melhor representados por um modelo Exponencial.

– a partir de  $u=7.074$ , inclusive, as estimativas pontuais e respetivos erros-padrão do parâmetro de escala são relativamente estáveis.

– nos modelos GPD ( $\hat{\gamma} \neq 0$ ), a estimativa pontual do parâmetro de forma assume valores “regulares” nos três primeiros limiares ( $\hat{\gamma} > -0.5$ ) e valores que poderão colocar em causa a regularidade nos três últimos limiares ( $\hat{\gamma} < -0.5$ ). Em todos os modelos, os limites do  $IC_{95\%}(\gamma) < 0$  sugerem a rejeição do modelo Exponencial, em favor do modelo tipo Beta.

Tabela 5.29 – Limiares  $u$ , número de excedências  $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalo com 95% de confiança dos parâmetros referentes ao **salto em comprimento – mulheres**, no período de 1980-2017.

$u$	$k$	$k/n$	$\hat{\sigma}_u$	$se(\hat{\sigma}_u)$	$IC_{95\%}(\sigma_u)$	$\hat{\gamma}$	$se(\hat{\gamma})$	$IC_{95\%}(\gamma)$
7.030	53	0.195	0.147217	0.020219	(0.1076; 0.1868)	---	---	---
7.045	48	0.176	0.146667	0.021167	(0.1052; 0.1882)	---	---	---
7.074	38	0.140	0.220091	0.054126	(0.1140; 0.3262)	-0.407948	0.196316	(-0.7927; -0.0232)
7.085	36	0.132	0.217402	0.055640	(0.1083; 0.3265)	-0.414172	0.206118	(-0.8182; -0.0102)
7.117	30	0.110	0.219899	0.063114	(0.0962; 0.3436)	-0.472154	0.237584	(-0.9378; -0.0065)
7.121	29	0.107	0.226538	0.065297	(0.0986; 0.3545)	-0.502469	0.239309	(-0.9715; -0.0334)
7.157	24	0.088	0.224043	0.073163	(0.0806; 0.3674)	-0.562367	0.279373	(-1.1099; -0.0148)
7.167	22	0.081	0.243309	0.080449	(0.0856; 0.4010)	-0.653159	0.288075	(-1.2178; -0.0885)

As Tabelas 5.30 e 5.31 apresentam para homens e mulheres praticantes de salto com vara, os limiares, as excedências, o rácio de excedências, as estimativas dos parâmetros de escala e forma com os respetivos erros-padrão e intervalos com 95% de confiança.

No **salto com vara**, em cada amostra os potenciais candidatos a limiar, são:

+ Homens

$u=5.805$ : MRL plot + MeRL plot + (GH vs MOM) plot

$u=5.819$ : TCP + (GH vs MOM) plot

$u=5.825$ : MRL plot + “EC”

$u=5.844$ : MRL plot + (GH vs MOM) plot

$u=5.855$ : MRL plot + MeRL plot + “EC”

+ Mulheres

$u=4.555$ : MRL plot + “EC”

$u=4.590$ : TCP + (GH vs MOM) plot

$u=4.615$ : MRL plot + MeRL plot + “EC”

$u=4.646$ : (GH vs MOM) plot

$u=4.655$ : MRL plot + MeRL plot + “EC”

$u=4.696$ : TC + (GH vs MOM) plot

$u=4.705$ : MRL plot + MeRL plot

$u=4.735$ : MRL plot

Pela Tabela 5.30 observa-se em relação ao salto com vara masculino que:

- à medida que o nível  $u$  aumenta, as estimativas pontuais e respectivos erros-padrão do parâmetro de escala são relativamente estáveis.
- nos modelos GPD ( $\hat{\gamma} \neq 0$ ), a estimativa pontual do parâmetro de forma assume valores “regulares” em todos os limiares.
- os limites do  $IC_{95\%}(\gamma) < 0$  em todos os níveis  $u$ , sugerem a rejeição do modelo Exponencial, em favor do modelo tipo Beta.

Tabela 5.30 – Limiares  $u$ , número de excedências  $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalo com 95% de confiança dos parâmetros referentes ao **salto com vara – homens**, no período de 1980-2017.

$u$	$k$	$k/n$	$\hat{\sigma}_u$	$se(\hat{\sigma}_u)$	$IC_{95\%}(\sigma_u)$	$\hat{\gamma}$	$se(\hat{\gamma})$	$IC_{95\%}(\gamma)$
5.805	97	0.124	0.123724	0.01552	(0.0933; 0.1541)	-0.315975	0.080270	(-0.4733; -0.1587)
5.819	83	0.106	0.126919	0.01650	(0.0946; 0.1593)	-0.349714	0.079480	(-0.5055; -0.1939)
5.825	75	0.096	0.134517	0.01776	(0.0997; 0.1693)	-0.389669	0.078020	(-0.5426; -0.2368)
5.844	69	0.088	0.116346	0.01670	(0.0836; 0.1491)	-0.342226	0.088290	(-0.5153; -0.1692)
5.855	57	0.073	0.128547	0.01932	(0.0907; 0.1664)	-0.413607	0.089400	(-0.5888; -0.2384)

Pela Tabela 5.31 observa-se em relação ao salto com vara feminino que:

- um limiar baixo, um intermédio e os limiares mais altos são melhor representados por um modelo Exponencial.
- à medida que o nível  $u$  aumenta, as estimativas pontuais e respectivos erros-padrão do parâmetro de escala dos modelos Exponenciais e dos modelos generalizados de Pareto são relativamente estáveis.
- nos modelos GPD ( $\hat{\gamma} \neq 0$ ), a estimativa pontual do parâmetro de forma assume valores “regulares” em todos os limiares. Nestes modelos, os limites do  $IC_{95\%}(\gamma) < 0$  sugerem a rejeição do modelo Exponencial, em favor do modelo tipo Beta.

Tabela 5.31 – Limiares  $u$ , número de excedências  $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalo com 95% de confiança dos parâmetros referentes ao **salto com vara – mulheres**, no período de 1996-2017.

$u$	$k$	$k/n$	$\hat{\sigma}_u$	$se(\hat{\sigma}_u)$	$IC_{95\%}(\sigma_u)$	$\hat{\gamma}$	$se(\hat{\gamma})$	$IC_{95\%}(\gamma)$
4.555	87	0.149	0.183789	0.02351	(0.1377; 0.2299)	-0.308211	0.07722	(-0.4596; -0.1569)
4.590	84	0.144	0.111071	0.012116	(0.0873; 0.1348)	---	---	---
4.615	59	0.101	0.165636	0.02648	(0.1137; 0.2175)	-0.303393	0.10095	(-0.5013; -0.1055)
4.646	53	0.091	0.109179	0.014993	(0.0798; 0.1386)	---	---	---
4.655	44	0.075	0.159853	0.02962	(0.1018; 0.2179)	-0.323421	0.11823	(-0.5552; -0.0917)
4.696	39	0.067	0.093599	0.014983	(0.0642; 0.1230)	---	---	---
4.705	32	0.055	0.104063	0.018391	(0.0680; 0.1401)	---	---	---
4.735	24	0.041	0.102917	0.021002	(0.0618; 0.1441)	---	---	---

As Tabelas 5.32 e 5.33 apresentam para homens e mulheres praticantes de triplo-salto, os limiares, as excedências, o rácio de excedências, as estimativas dos parâmetros de escala e forma com os respetivos erros-padrão e intervalos com 95% de confiança.

No **triplo-salto**, em cada amostra os potenciais candidatos a limiar, são:

+ Homens	+ Mulheres
$u=17.475$ : TCP + (GH vs MOM) <i>plot</i>	$u=14.619$ : MeRL <i>plot</i>
$u=17.525$ : MeRL <i>plot</i> + (GH vs MOM) <i>plot</i>	$u=14.665$ : (GH vs MOM) <i>plot</i>
$u=17.537$ : MRL <i>plot</i> + (GH vs MOM) <i>plot</i>	$u=14.767$ : MRL <i>plot</i> + MeRL <i>plot</i> + “EC”
$u=17.568$ : (GH vs MOM) <i>plot</i>	$u=14.791$ : MRL <i>plot</i>
$u=17.595$ : MRL <i>plot</i> + MeRL <i>plot</i> + TCP	$u=14.816$ : TCP
$u=17.605$ : “EC”	$u=14.904$ : MeRL <i>plot</i>
	$u=14.933$ : TCP
	$u=14.960$ : (GH vs MOM) <i>plot</i>
	$u=15.041$ : MRL <i>plot</i>
	$u=15.046$ : “EC”

Pela Tabela 5.32 observa-se em relação ao triplo-salto masculino que:

- Todos os limiares selecionados são melhor representados por um modelo Exponencial.
- à medida que o nível  $u$  aumenta, as estimativas pontuais e respetivos erros-padrão do parâmetro de escala não apresentam grandes oscilações.

Tabela 5.32 – Limiares  $u$ , número de excedências  $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalo com 95% de confiança dos parâmetros referentes ao **triplo-salto – homens**, no período de 1980-2017.

$u$	$k$	$k/n$	$\hat{\sigma}_u$	$se(\hat{\sigma}_u)$	$IC_{95\%}(\sigma_u)$	$\hat{\gamma}$	$se(\hat{\gamma})$	$IC_{95\%}(\gamma)$
17.475	75	0.157	0.202867	0.023423	(0.1570; 0.2488)	---	---	---
17.525	64	0.134	0.184688	0.023084	(0.1394; 0.2299)	---	---	---
17.537	55	0.115	0.202091	0.027248	(0.1487; 0.2555)	---	---	---
17.568	50	0.105	0.189467	0.026792	(0.1370; 0.2420)	---	---	---
17.595	40	0.084	0.206250	0.032609	(0.1423; 0.2702)	---	---	---
17.605	38	0.079	0.206842	0.033552	(0.1411; 0.2726)	---	---	---

Pela Tabela 5.33 observa-se em relação ao triplo-salto feminino que:

- todos os limiares são melhor representados por um modelo GPD ( $\hat{\gamma} \neq 0$ ). Com exceção do modelo que utilizou o limiar  $u=14.960$ , a regularidade das estimativas por máxima verosimilhança nos restantes modelos parece estar comprometida dado que  $\hat{\gamma} < -0.5$ .
- os limites inferior e superior do  $IC_{95\%}(\gamma) < 0$  de todos os modelos sugerem a rejeição do modelo Exponencial, em favor do modelo tipo Beta.

– à medida que o nível  $u$  aumenta, as estimativas pontuais e respectivos erros-padrão do parâmetro de escala são relativamente estáveis entre  $u=(14.619; 14.816)$  e  $u=(14.904; 15.046)$ .

Tabela 5.33 – Limiares  $u$ , número de excedências  $k$ , rácio de excedências, estimativas, erros-padrão e intervalo com 95% de confiança dos parâmetros referentes ao **triplo-salto – mulheres**, no período de 1980-2017.

$u$	$k$	$k/n$	$\hat{\sigma}_u$	$se(\hat{\sigma}_u)$	$IC_{95\%}(\sigma_u)$	$\hat{\gamma}$	$se(\hat{\gamma})$	$IC_{95\%}(\gamma)$
14.619	57	0.199	0.493846	0.077627	(0.3417; 0.6460)	-0.531687	0.110069	(-0.7474; -0.3160)
14.665	50	0.174	0.493345	0.081530	(0.3335; 0.6531)	-0.565330	0.117010	(-0.7947; -0.3360)
14.767	35	0.122	0.536545	0.105082	(0.3306; 0.7425)	-0.718395	0.156401	(-1.0249; -0.4119)
14.791	33	0.115	0.528688	0.107683	(0.3176; 0.7397)	-0.732602	0.165410	(-1.0568; -0.4084)
14.816	33	0.115	0.477096	0.096525	(0.2879; 0.6663)	-0.679951	0.156811	(-0.9873; -0.3726)
14.904	29	0.101	0.376088	0.082706	(0.2140; 0.5382)	-0.602791	0.162347	(-0.9210; -0.2846)
14.933	29	0.101	0.318291	0.071793	(0.1776; 0.4590)	-0.519827	0.160244	(-0.8339; -0.2058)
14.960	28	0.098	0.279008	0.066409	(0.1488; 0.4092)	-0.461565	0.168882	(-0.7926; -0.1306)
15.041	18	0.063	0.302274	0.090351	(0.1252; 0.4794)	-0.622539	0.235088	(-1.0833; -0.1618)
15.046	18	0.063	0.291185	0.086999	(0.1207; 0.4617)	-0.602064	0.231986	(-1.0568; -0.1474)

Observação 5.14: sempre que com um limiar as condições de regularidade sugeridas por Smith (1984) não eram inteiramente cumpridas, efetuamos a estimação com outros métodos, como por exemplo o método dos momentos ponderados de probabilidade, método da máxima verosimilhança penalizada, método dos momentos ou o método dos momentos de verosimilhança, sendo que em todos os casos (ainda que não apresentemos os resultados devido à extensão dos mesmos) não modifica a estimativa de  $\gamma$  nem melhora o ajustamento dos modelos, sendo que em muitos casos torna-os pior.

### 5.3.8. Seleção do melhor modelo

Nesta secção iremos apresentar os modelos que farão parte das secções de diagnóstico do ajustamento e estimação de outras quantidades de interesse e respetiva inferência. Para ajudar ao processo de decisão, observamos diversos critérios, nomeadamente,

- (i) o bom ajustamento gráfico (*PP-plot*, *QQ-plot* e histograma com curva de densidade estimada vs teórica) (Anexo 5.3),
- (ii) valor de  $k/n$  não demasiado alto (preferencialmente inferior a 15%),
- (iii) limitar a seleção de um modelo proveniente de um escasso número de observações extremas (preferencialmente superior a 5%),
- (iv) quantil de  $u$  no seio da amostra (preferencialmente superior a  $q_{0.80}$ ),
- (v) nos modelos GPD, observar sempre que possível que se verifica  $\hat{\gamma} > -0.5$ ,
- (vi) “razoabilidade” e plausibilidade do modelo na estimação de quantis extremos.

Assim, com base nestes critérios/argumentos, decidimos que a estimação de outras quantidades de interesse em cada amostra deverá ser feita com os modelos que resultam dos limiares apresentados na Tabela 5.34.

Tabela 5.34 – Limiares  $u_i$  selecionados em cada amostra e respetivo modelo.

HOMENS	Modelo	MULHERES	Modelo
Salto em altura		Salto em altura	
$u=2.345$	GPD	$u=2.006$	GPD
$u=2.355$	EXP	$u=2.025$	GPD
Salto em comprimento		Salto em comprimento	
$u=8.370$	EXP	$u=7.074$	GPD
$u=8.406$	EXP	$u=7.085$	GPD
Salto com vara		Salto com vara	
$u=5.825$	GPD	$u=4.615$	GPD
$u=5.844$	GPD	$u=4.696$	EXP
Triplo-salto		Triplo-salto	
$u=17.568$	EXP	$u=14.933$	GPD
$u=17.605$	EXP	$u=14.960$	GPD

### 5.3.9. Diagnóstico dos modelos selecionados

As Figuras 5.53 à 5.60 apresentam o ajuste do modelo selecionado em cada amostra. Apresenta-se o ajuste de cada modelo pelos gráficos de probabilidade-probabilidade, quantil-quantil e histograma com a curva de densidade estimada vs teórica.

A Figura 5.53 refere-se à amostra de salto em altura masculino onde foram selecionados os limiares  $u=(2.345; 2.355)$ . Todos os pontos estão contidos na banda com 95% de confiança, ainda que no PP-plot e QQ-plot do modelo com  $u=2.345$ , os pontos da cauda inferior estejam situados sobre o limite superior da banda de confiança. Pelo histograma, conforme se pode comprovar pela sobreposição da curva de densidade estimada com a curva da f.d.p. teórica, observa-se que a qualidade dos modelos é boa, embora ligeiramente melhor para o modelo com  $u=2.355$ . De uma forma geral, podemos concluir que os gráficos de ajustamento, suportados pela GPD ( $\gamma \neq 0$ ) e pela distribuição Exponencial, respetivamente para os modelos com  $u=2.345$  e  $u=2.355$ , apresentam um bom ajustamento global.

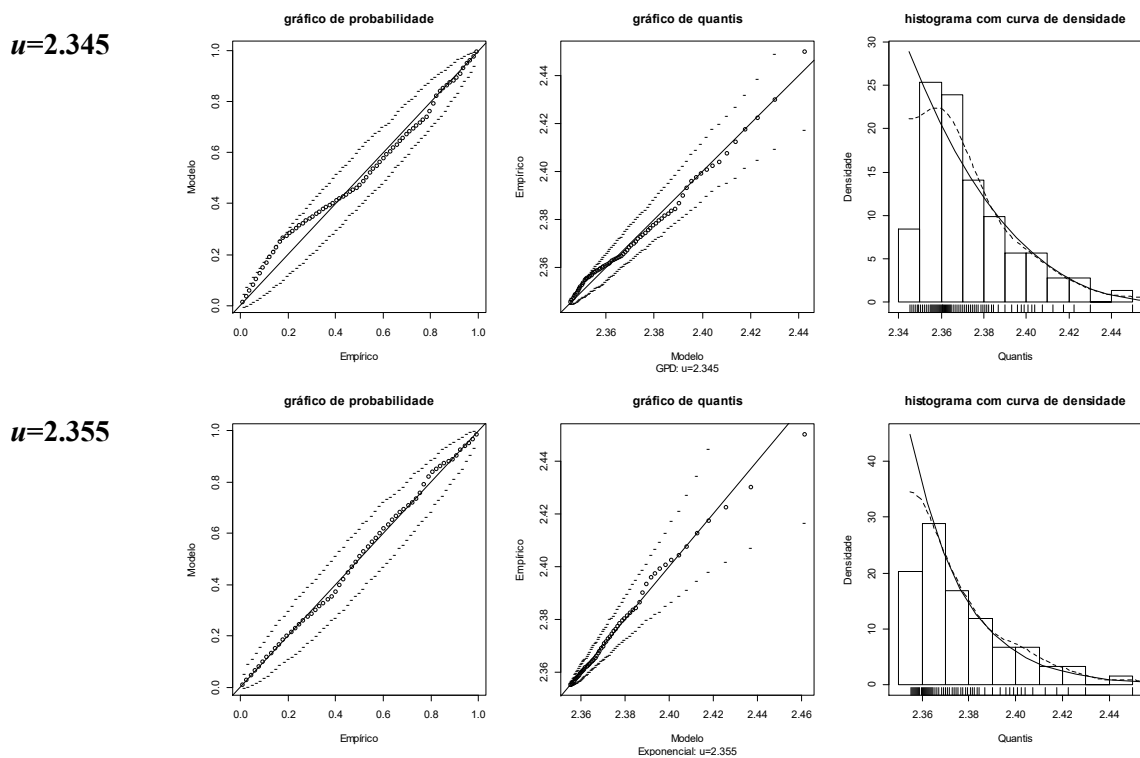


Figura 5.53 – Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade estimada vs teórica, referentes ao salto em altura: homens, para os modelos com limiares  $u=(2.345; 2.355)$ .

A Figura 5.54 refere-se à amostra de salto em altura feminino onde foram selecionados os limiares  $u=(2.006; 2.025)$ . Todos os pontos estão contidos na banda com 95% de confiança do PP-plot e QQ-plot. A nuvem de pontos tem uma configuração aproximadamente linear, situando-se na proximidade ou sobre a reta diagonal. Pelo histograma, conforme se pode comprovar pela sobreposição da curva de densidade estimada com a curva da f.d.p. teórica, observa-se que a qualidade dos modelos é boa, embora ligeiramente melhor para o modelo com  $u=2.006$ . De uma forma geral, podemos concluir que os gráficos de ajustamento, suportados pela GPD, apresentam um bom ajustamento global.

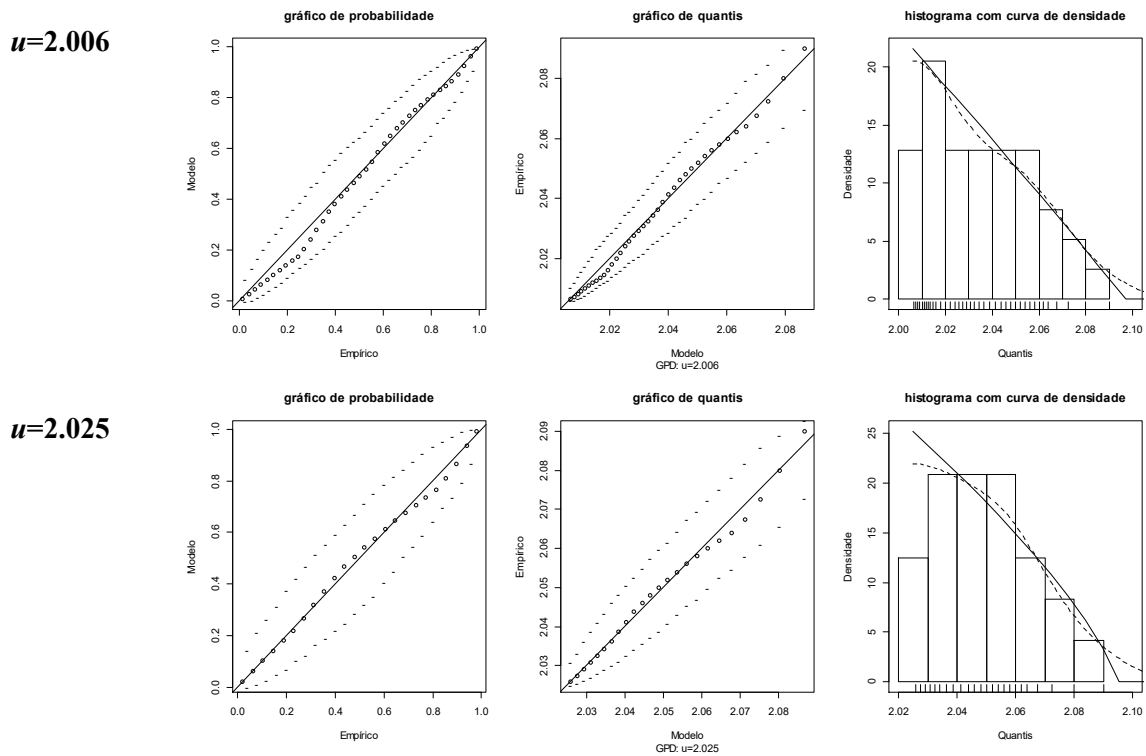
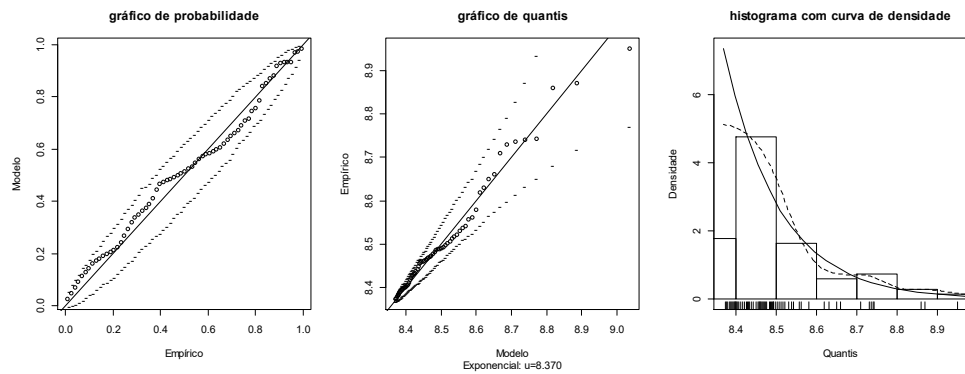


Figura 5.54 – Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade estimada vs teórica, referentes ao **salto em altura: mulheres**, para os modelos com limiares  $u=(2.006; 2.025)$ .

A Figura 5.55 refere-se à amostra de salto em comprimento masculino onde foram selecionados os limiares  $u=(8.370; 8.406)$ . Todos os pontos estão contidos na banda com 95% de confiança, ainda que no *QQ-plot*, nos dois modelos, os pontos da cauda inferior estejam situados sobre o limite superior da banda de confiança. Pelo histograma, conforme se pode comprovar pela sobreposição da curva de densidade estimada com a curva da f.d.p. teórica, observa-se que a qualidade dos modelos é boa, embora ligeiramente melhor para o modelo com  $u=8.370$ . De uma forma geral, podemos concluir que os gráficos de ajustamento, suportados pela distribuição Exponencial, apresentam um bom ajustamento global.

$u=8.370$



$u=8.406$

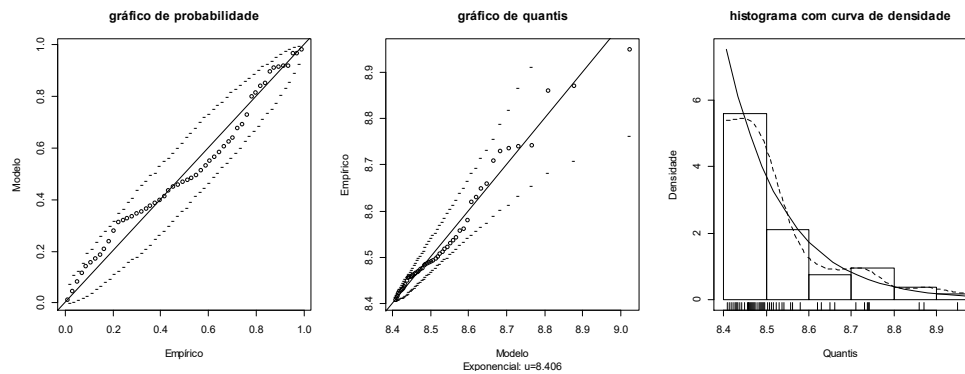


Figura 5.55 – Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade estimada vs teórica, referentes ao **salto em comprimento: homens**, para os modelos com limiares  $u=(8.370; 8.406)$ .



A Figura 5.56 refere-se à amostra de salto em comprimento feminino onde foram selecionados os limiares  $u=(7.074; 7.085)$ . Todos os pontos estão contidos na banda com 95% de confiança do PP-plot e QQ-plot, e estão posicionados na proximidade ou sobre a reta diagonal. Pelo histograma, conforme se pode comprovar pela sobreposição da curva de densidade estimada com a curva da f.d.p. teórica, observa-se que a qualidade dos modelos é boa e equivalente entre os dois modelos. De uma forma geral, podemos concluir que os gráficos de ajustamento, suportados pela GPD, apresentam um bom ajustamento global.

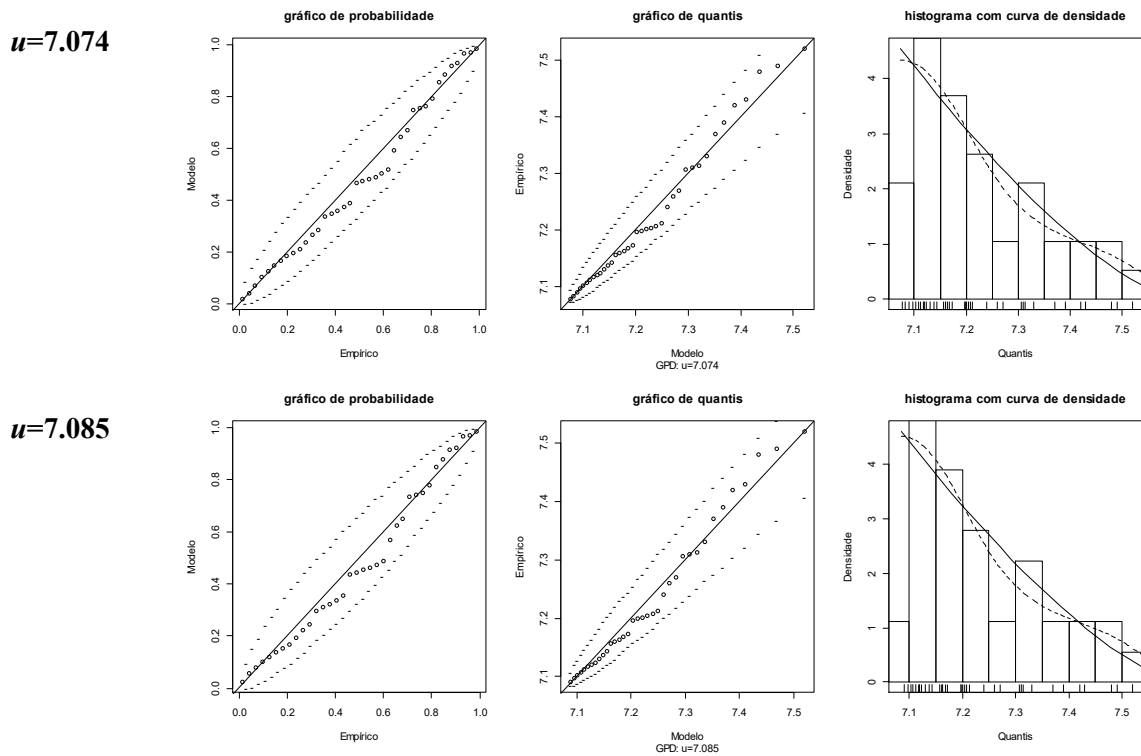


Figura 5.56 – Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade estimada vs teórica, referentes ao salto em comprimento: mulheres, para os modelos com limiares  $u=(7.074; 7.085)$ .

A Figura 5.57 refere-se à amostra de salto com vara masculino onde foram selecionados os limiares  $u=(5.825; 5.844)$ . Todos os pontos estão contidos na banda com 95% de confiança, ainda que no PP-plot e QQ-plot, nos modelos obtidos a partir dos dois limiares, alguns pontos da cauda inferior e intermédia estejam situados sobre o limite superior da banda de confiança e alguns pontos no PP-plot estejam sobre o limite inferior na cauda superior. Pelo histograma, conforme se pode comprovar pela sobreposição da curva de densidade estimada com a curva da f.d.p. teórica, observa-se que a qualidade dos modelos é equivalente entre os dois modelos. De uma forma geral, podemos concluir que os gráficos de ajustamento, suportados pela GPD, apresentam um bom ajustamento global.

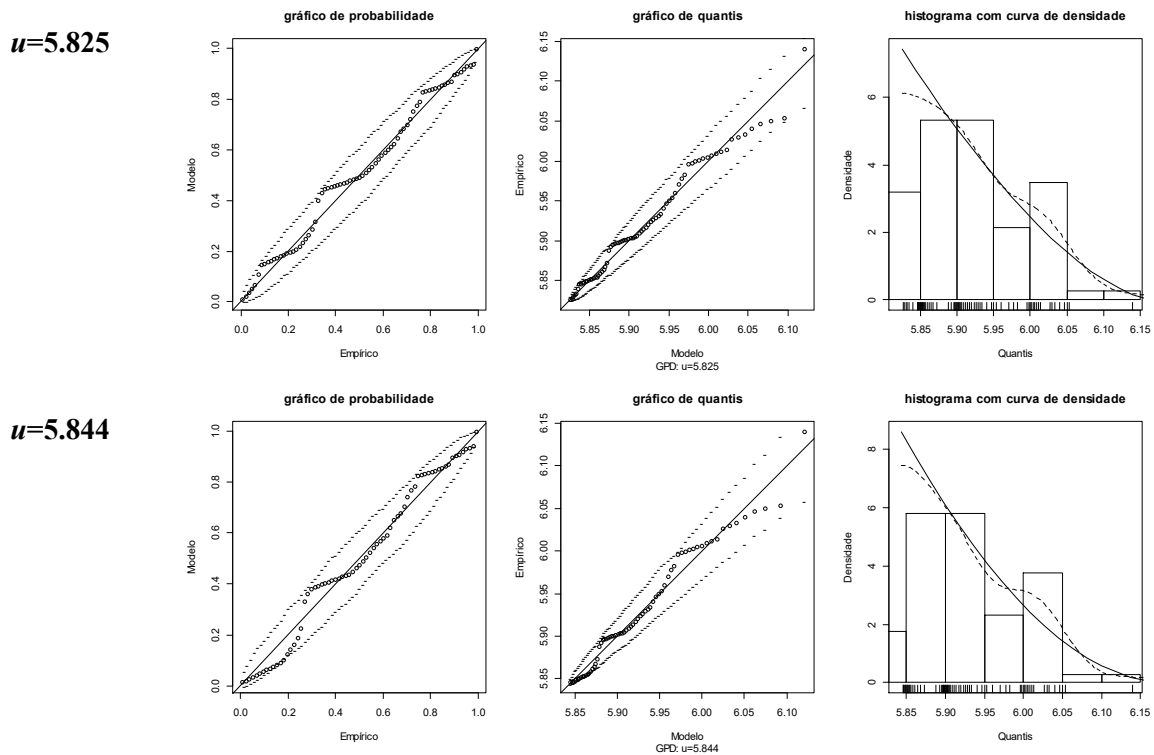


Figura 5.57 – Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade estimada vs teórica, referentes ao salto com vara: homens, para os modelos com limiares  $u=(5.825; 5.844)$ .

A Figura 5.58 refere-se à amostra de salto com vara feminino onde foram selecionados os limiares  $u=(4.615; 4.696)$ . Todos os pontos estão contidos na banda com 95% de confiança, ainda que no PP-plot e no QQ-plot, no modelo com limiar  $u=4.615$ , alguns pontos da cauda inferior estejam situados sobre o limite superior da banda de confiança; igualmente, no QQ-plot, no modelo com limiar  $u=4.696$ , alguns pontos estão situados sobre o limite inferior da cauda inferior, mas que em todos os casos não comprometem o ajustamento. Pelo histograma, conforme se pode comprovar pela sobreposição da curva de densidade estimada com a curva da f.d.p. teórica, observa-se que a qualidade dos modelos é boa, embora ligeiramente melhor para o modelo com  $u=4.615$ . De uma forma geral, podemos concluir que os gráficos de ajustamento, suportados pela GPD e pela distribuição Exponencial, respetivamente para os modelos com  $u=4.615$  e  $u=4.696$ , apresentam um bom ajustamento global.

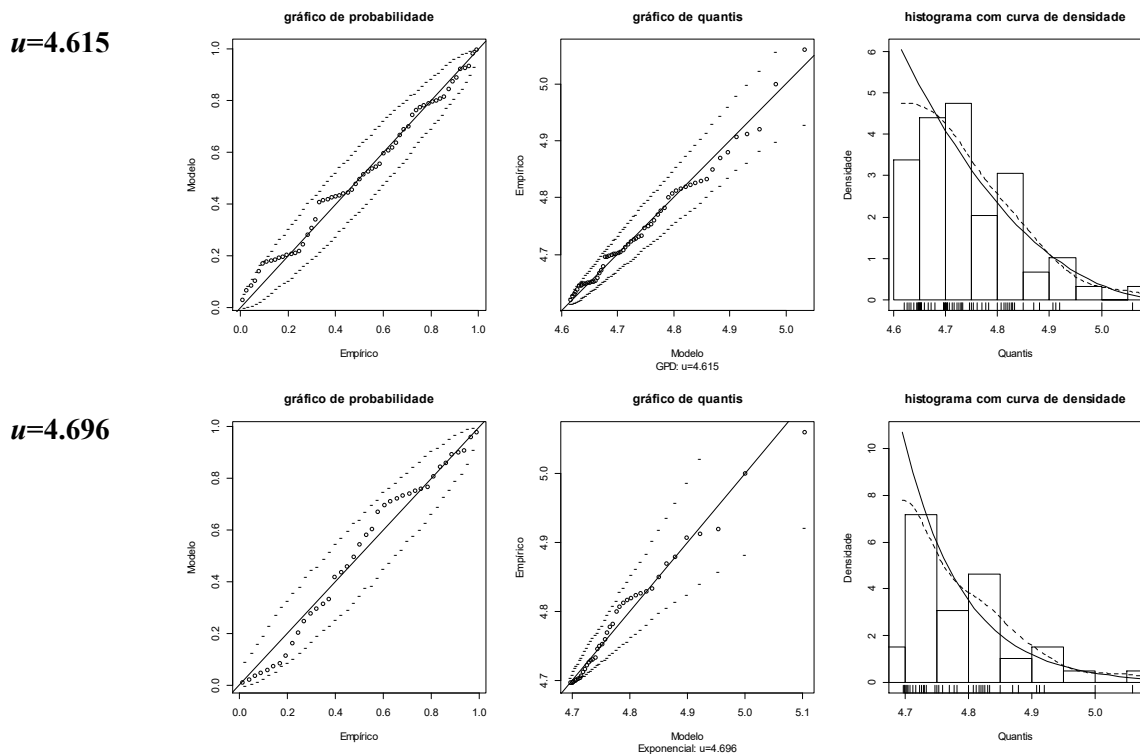


Figura 5.58 – Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade estimada vs teórica, referentes ao salto com vara: feminino, para os modelos com limiares  $u=(4.615; 4.696)$ .

A Figura 5.59 refere-se à amostra de triplo-salto masculino onde foram selecionados os limiares  $u=(17.568; 17.605)$ . Todos os pontos estão contidos na banda com 95% de confiança do PP-plot e QQ-plot. A nuvem de pontos destes gráficos apresenta uma configuração aproximadamente linear, situando-se na proximidade ou sobre a reta diagonal, ainda que a observação mais extrema se desvie ligeiramente da reta (visível no QQ-plot). Pelo histograma, conforme se pode comprovar pela sobreposição da curva de densidade estimada com a curva da f.d.p. teórica, observa-se que a qualidade dos modelos é boa, embora ligeiramente melhor para o modelo com  $u=17.568$ . De uma forma geral, podemos concluir que os gráficos de ajustamento, suportados pela distribuição Exponencial, apresentam um bom ajustamento global.

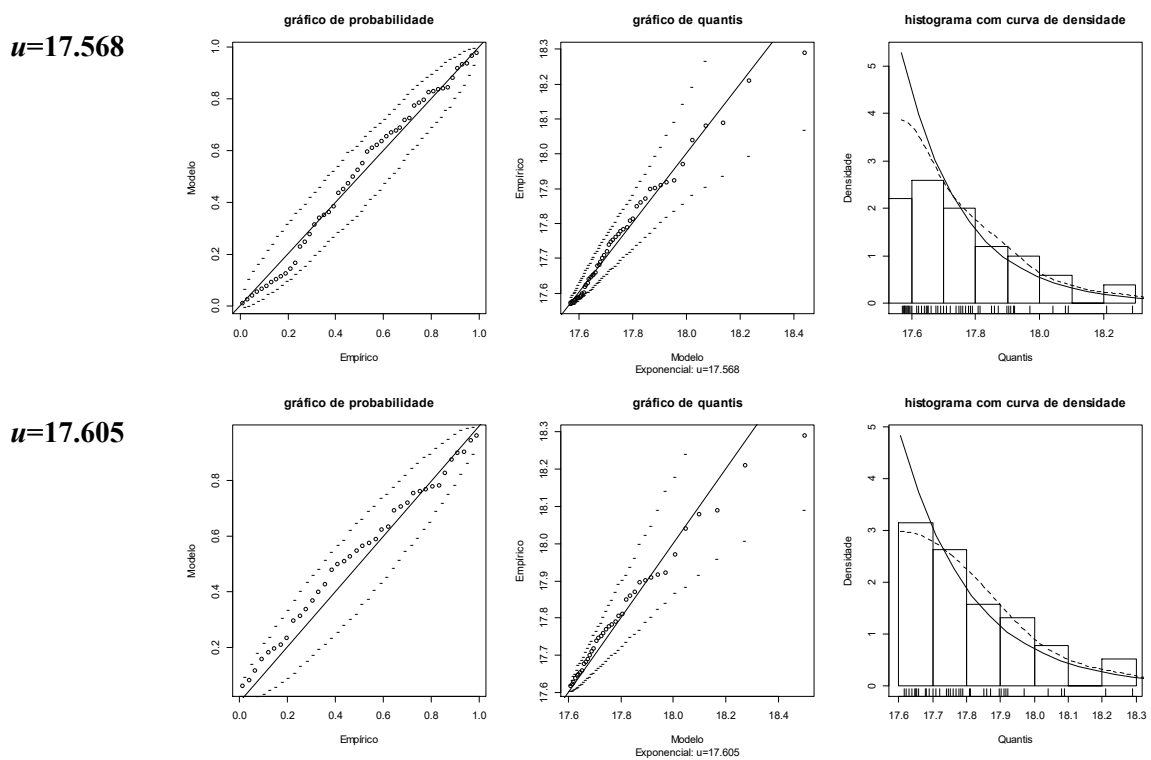


Figura 5.59 – Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade estimada vs teórica, referentes ao **triplo-salto: masculino**, para os modelos com limiares  $u=(17.568; 17.605)$ .

A Figura 5.60 refere-se à amostra de triplo-salto feminino onde foram selecionados os limiares  $u=(14.933; 14.960)$ . Todos os pontos estão contidos na banda com 95% de confiança do PP-plot e QQ-plot. A nuvem de pontos destes gráficos está situada na proximidade ou sobre a reta diagonal. Pelo histograma, conforme se pode comprovar pela sobreposição da curva de densidade estimada com a curva da f.d.p. teórica, observa-se que a qualidade dos modelos é boa, embora ligeiramente melhor para o modelo com  $u=14.933$ . De uma forma geral, podemos concluir que os gráficos de ajustamento, suportados pela GPD, apresentam um bom ajustamento global.

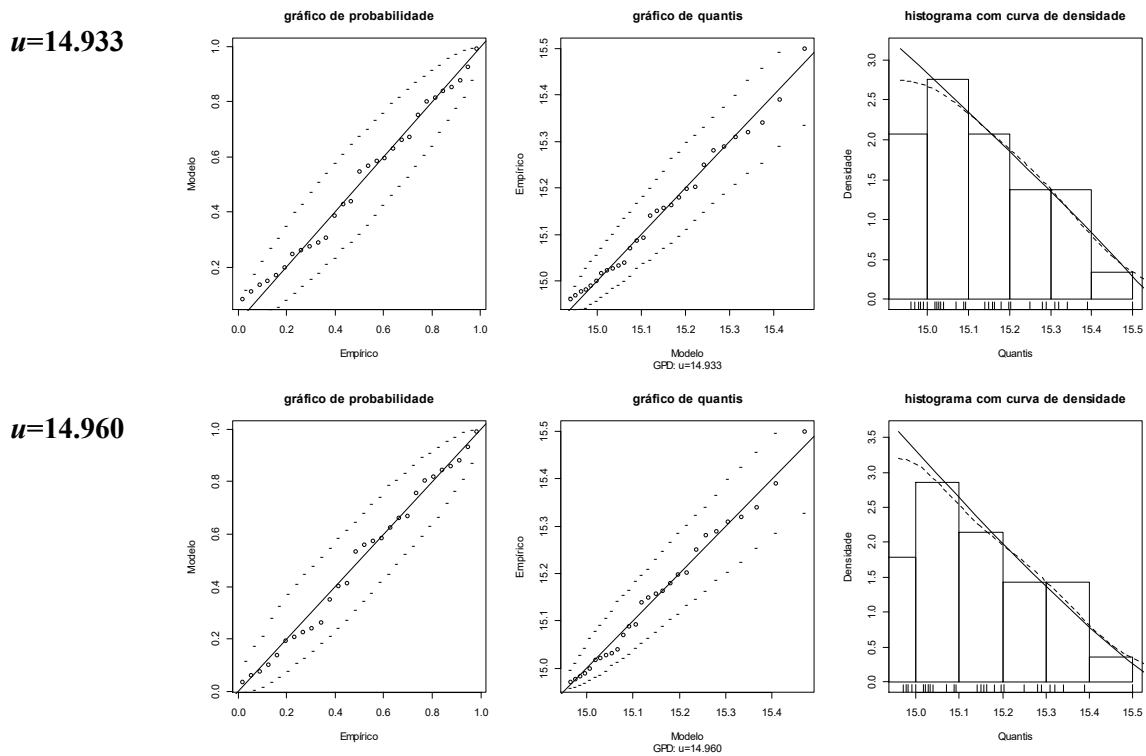


Figura 5.60 – Gráficos de probabilidade-probabilidade, quantis-quantis e histograma com a curva de densidade estimada vs teórica, referentes ao **triplo-salto: feminino**, para os modelos com limiares  $u=(14.933; 14.960)$ .

### 5.3.10. Estimação de outras quantidades de interesse

Usando os modelos escolhidos para cada amostra e apresentados na Tabela 5.34, segue-se a estimação de outras importantes quantidades de interesse, tais como os quantis extremos, a probabilidade de excedência, o limite superior do suporte ( $\hat{\gamma} < 0$ ) e os valores de retorno.

#### 5.3.10.1. Quantis extremos

A Tabela 5.35 apresenta os quantis extremos de probabilidade  $1 - p$ , ou seja,  $q=(0.995, 0.9975, 0.998, 0.999, 0.9995, 0.9999)$  que correspondem, respectivamente, aos quantis extremos de probabilidades de excedência  $p(0.005, 0.0025, 0.002, 0.001, 0.0005, 0.0001)$ , obtidos a partir da expressão [5.48], conforme a amostra tenha modelo com  $\hat{\gamma} \neq 0$  ou  $\hat{\gamma} = 0$ .

No salto em altura masculino, com  $u=2.345$ , no salto em altura feminino, com  $u=2.006$  e  $u=2.025$ , no salto com vara masculino, com  $u=5.825$  e  $u=5.844$ , e no salto com vara feminino, com  $u=4.615$ , o atual recorde do mundo só é excedido a partir de  $q_{0.9999}$ , o que revela as grandes dificuldades de obter um novo recorde do mundo nestas especialidades atléticas. Opostamente, ultrapassar o recorde do mundo do triplo-salto masculino parece ser o mais acessível, pois os quantis extremos são de  $q(0.9975)$  para  $u=17.605$  e  $q(0.998)$  para  $u=17.568$ . A *bold* estão destacados os quantis extremos que igualam ou excedem o atual recorde do mundo de cada amostra.

Tabela 5.35 – Quantis extremos  $q=(0.995, 0.9975, 0.998, 0.999, 0.9995, 0.9999)$  para cada limiar selecionado em cada amostra.

Amostras	$q_{0.995}$	$q_{0.9975}$	$q_{0.998}$	$q_{0.999}$	$q_{0.9995}$	$q_{0.9999}$
+ Salto em altura - homens						
$u=2.345$	2.42	2.43	2.43	2.44	<b>2.45</b>	<b>2.46</b>
$u=2.355$	2.42	2.43	2.44	<b>2.45</b>	<b>2.47</b>	<b>2.50</b>
+ Salto em altura - mulheres						
$u=2.006$	2.08	<b>2.09</b>	<b>2.09</b>	<b>2.09</b>	<b>2.09</b>	<b>2.10</b>
$u=2.025$	2.08	<b>2.09</b>	<b>2.09</b>	<b>2.09</b>	<b>2.09</b>	<b>2.10</b>
+ Salto em comprimento - homens						
$u=8.370$	8.76	8.85	8.88	<b>8.98</b>	<b>9.07</b>	<b>9.29</b>
$u=8.406$	8.75	8.85	8.88	<b>8.97</b>	<b>9.06</b>	<b>9.27</b>
+ Salto em comprimento - mulheres						
$u=7.074$	7.47	7.51	<b>7.52</b>	<b>7.54</b>	<b>7.56</b>	<b>7.59</b>
$u=7.085$	7.47	7.51	<b>7.52</b>	<b>7.54</b>	<b>7.56</b>	<b>7.58</b>
+ Salto com vara - homens						
$u=5.825$	6.06	6.09	6.09	6.11	6.13	<b>6.15</b>
$u=5.844$	6.06	6.08	6.09	6.11	6.13	<b>6.15</b>
+ Salto com vara - mulheres						
$u=4.615$	4.94	4.98	4.99	5.03	5.05	<b>5.09</b>
$u=4.696$	4.94	5.00	5.02	<b>5.09</b>	<b>5.15</b>	<b>5.30</b>
+ Triplo-salto - homens						
$u=17.568$	18.14	18.28	<b>18.32</b>	<b>18.45</b>	<b>18.58</b>	<b>18.89</b>
$u=17.605$	18.18	<b>18.32</b>	<b>18.37</b>	<b>18.51</b>	<b>18.65</b>	<b>18.99</b>
+ Triplo-salto - mulheres						
$u=14.933$	15.42	15.46	15.47	15.49	<b>15.51</b>	<b>15.53</b>
$u=14.960$	15.41	15.45	15.46	15.49	<b>15.51</b>	<b>15.54</b>

### 5.3.10.2. Probabilidade de excedência

Sabendo que o máximo de cada amostra  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) corresponde ao atual recorde mundial, será interessante conhecer a probabilidade desta marca ser ultrapassada, i.e., a possibilidade de um qualquer atleta da nossa população exceder o atual recorde do mundo, RM. Assim, pretendemos saber a  $P[C > RM]$ . Pela expressão [5.52] obtivemos os resultados apresentados na Tabela 5.36, onde se observa que todos os recordes do mundo têm probabilidade de excedência inferior a 0.2% (exceto no triplo-salto masculino). Em função do limiar escolhido, os recordes do mundo mais difíceis de ultrapassar são:

+ Homens

- salto em altura ( $u=2.345$ ,  $P[C > 2.45] = 0.0289\%$ ).
- salto com vara ( $u=5.825$ ,  $P[C > 6.14] = 0.0185\%$ ;  $u=5.844$ ,  $P[C > 6.14] = 0.0224\%$ ).

+ Mulheres

- salto em altura ( $u=2.025$ ,  $P[C > 2.09] = 0.0999\%$ ).
- salto com vara ( $u=4.615$ ,  $P[C > 5.06] = 0.0387\%$ ).
- triplo-salto ( $u=14.933$ ,  $P[C > 15.50] = 0.0675\%$ ;  $u=14.960$ ,  $P[C > 15.50] = 0.0765\%$ ).

Tabela 5.36 – Probabilidade de excedência do atual recorde do mundo em cada especialidade de saltos do atletismo.

Amostras	$P[C > RM]$	%
+ Salto em altura - homens	$P[C > 2.45]$	
$u=2.345$	0.000289	0.0289%
$u=2.355$	0.001133	0.1133%
+ Salto em altura - mulheres	$P[C > 2.09]$	
$u=2.006$	0.001157	0.1157%
$u=2.025$	0.000999	0.0999%
+ Salto em comprimento - homens	$P[C > 8.95]$	
$u=8.370$	0.001237	0.1237%
$u=8.406$	0.001143	0.1143%
+ Salto em comprimento - mulheres	$P[C > 7.52]$	
$u=7.074$	0.001903	0.1903%
$u=7.085$	0.001869	0.1869%
+ Salto com vara - homens	$P[C > 6.14]$	
$u=5.825$	0.000185	0.0185%
$u=5.844$	0.000224	0.0224%
+ Salto com vara - mulheres	$P[C > 5.06]$	
$u=4.615$	0.000387	0.0387%
$u=4.696$	0.001367	0.1367%
+ Triplo-salto - homens	$P[C > 18.29]$	
$u=17.568$	0.002315	0.2315%
$u=17.605$	0.002898	0.2898%
+ Triplo-salto - mulheres	$P[C > 15.50]$	
$u=14.933$	0.000675	0.0675%
$u=14.960$	0.000765	0.0765%

RM – recorde do mundo

### 5.3.10.3. Limite superior do suporte ( $\hat{\gamma} < 0$ )

Com base na expressão [5.53], a Tabela 5.37 apresenta os resultados do limite superior do suporte  $x^F$  dos modelos em que  $\hat{\gamma} < 0$ . Os resultados mostram que o  $x^F$  não está muito distante do atual recorde do mundo, sendo que no salto em altura feminino a diferença absoluta é de apenas 1cm. Ainda em termos absolutos, as maiores diferenças face ao atual recorde do mundo verificam-se nas amostras de salto em comprimento feminino, salto com vara feminino e triplo-salto feminino. Em termos relativos, a maior diferença face ao recorde do mundo verifica-se no salto com vara feminino, no limiar  $u=4.615$ ,  $\sim 2\%$ .

Tabela 5.37 – Limite superior do suporte.

Amostras	$x^F$	Diferença face ao RM (cm)	Diferença face ao RM (%)
+ Salto em altura - homens			
$u=2.345$	2.48	3 cm	1.224%
$u=2.355$	---	---	---
+ Salto em altura - mulheres			
$u=2.006$	2.10	1 cm	0.478%
$u=2.025$	2.10	1 cm	0.478%
+ Salto em comprimento - homens			
$u=8.370$	---	---	---
$u=8.406$	---	---	---
+ Salto em comprimento - mulheres			
$u=7.074$	7.61	9 cm	1.197%
$u=7.085$	7.61	9 cm	1.197%
+ Salto com vara - homens			
$u=5.825$	6.17	3 cm	0.489%
$u=5.844$	6.18	4 cm	0.651%
+ Salto com vara - mulheres			
$u=4.615$	5.16	7 cm	1.976%
$u=4.696$	---	---	---
+ Triplo-salto - homens			
$u=17.568$	---	---	---
$u=17.605$	---	---	---
+ Triplo-salto - mulheres			
$u=14.933$	15.55	5 cm	0.323%
$u=14.960$	15.56	6 cm	0.387%

### 5.3.10.4. Níveis de retorno

Usando a expressão [5.55], calculamos os níveis de retorno para  $t$ -recordes individuais,  $U(t)$ , ou seja, o nível  $U(t)$  que se espera que seja excedido em média pelo menos uma vez a cada  $t$ -recordes individuais. Estes resultados estão apresentados nas Tabelas 5.38 e 5.39, para homens e mulheres, respetivamente. De notar que as estimativas pontuais foram arredondadas a duas casas decimais, pelo que poderão não ser inteiramente concordantes com o período de retorno (mais preciso) que veremos na secção seguinte. Contudo, valores mais precisos dos níveis de retorno a  $t$ -recordes individuais encontram-se em Anexo 5.4.



Observação 5.15: uma ressalva para indicar que em qualquer especialidade de saltos do atletismo as marcas são registadas em metros e centímetros (e não milímetros), daí a opção de apresentar as estimativas pontuais com duas casas decimais e os intervalos com 95% de confiança com três casas decimais.

De uma forma geral, o valor dos níveis de retorno aumenta à medida que aumenta o número de recordes individuais, embora de forma menos pronunciada nos saltos em altura e com vara masculino, bem como nos saltos em altura, comprimento e triplo-salto feminino.

Considerando as estimativas pontuais das amostras de homens, prevê-se que o recorde do mundo seja igualado ou excedido, em média, pelo menos uma vez, a cada 800 recordes individuais no salto em altura ( $u=2.355$ ) e salto em comprimento ( $u=8.370$ ), a cada 900 recordes individuais no salto em comprimento ( $u=8.406$ ) e a cada 400 ou 500 recordes individuais no triplo-salto, conforme  $u=17.605$  ou  $u=17.568$ . Considerando a estimação intervalar, no salto em altura, para os dois limiares escolhidos, o limite superior do  $IC_{95\%}(U(t))$  iguala o atual recorde do mundo em  $U(700)$ ; no salto em comprimento, o limite superior do  $IC_{95\%}(U(t))$  excede o atual recorde do mundo em  $U(500)$ ; no salto com vara, o limite superior do  $IC_{95\%}(U(t))$  excede o atual recorde do mundo em  $U(800)$  ou  $U(900)$  conforme  $u=5.844$  ou  $u=5.825$ ; no triplo-salto, o limite superior do  $IC_{95\%}(U(t))$  excede o atual recorde do mundo em  $U(200)$  ou  $U(300)$  conforme  $u=17.605$  ou  $u=17.568$ . No triplo-salto em  $U(800)$ , com os dois limiares, os limites inferior e superior do  $IC_{95\%}(U(t))$  são superiores ao atual recorde do mundo.

Considerando as estimativas pontuais das amostras de mulheres, prevê-se que o recorde do mundo seja igualado ou excedido, em média, pelo menos uma vez, a cada 300 recordes individuais no salto em altura com os dois limiares escolhidos, a cada 500 recordes individuais no salto em comprimento com os dois limiares escolhidos e a cada 700 recordes individuais no salto com vara ( $u=4.696$ ). Considerando a estimação intervalar, no salto em altura e no salto em comprimento, para os dois limiares escolhidos, o limite superior do  $IC_{95\%}(U(t))$  iguala ou excede o atual recorde do mundo em  $U(200)$ ; no salto com vara, o limite superior do  $IC_{95\%}(U(t))$  excede o atual recorde do mundo em  $U(400)$  ou  $U(600)$  conforme  $u=4.696$  ou  $u=4.615$ ; no triplo-salto, o limite superior do  $IC_{95\%}(U(t))$  excede o atual recorde do mundo em  $U(300)$  para os dois limiares escolhidos. Qualquer que seja o limiar de qualquer amostra, não se verifica que o limite inferior do  $IC_{95\%}(U(t))$  seja superior ao atual recorde do mundo.

Tabela 5.38 – Estimativas pontuais obtidas por máxima verosimilhança e intervalos de confiança pelo método delta, do modelo GPD ( $\gamma \neq 0$ ) ou Exponencial ( $\gamma = 0$ ) dos níveis de retorno para 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000 recordes individuais, nas amostras de HOMENS.

Amostras e limiares	$U(100)$	$U(200)$	$U(300)$	$U(400)$	$U(500)$	$U(600)$	$U(700)$	$U(800)$	$U(900)$	$U(1000)$
HOMENS										
+ Salto em altura										
$u=2.345$	2.40 (2.394; 2.415)	2.42 (2.405; 2.429)	2.42 (2.410; 2.436)	2.43 (2.414; 2.441)	2.43 (2.416; 2.445)	2.43 (2.417; 2.448)	2.43 (2.418; 2.450)	2.44 (2.419; 2.453)	2.44 (2.420; 2.455)	2.44 (2.421; 2.456)
$u=2.355$	2.40 (2.397; 2.406)	2.42 (2.412; 2.422)	2.43 (2.421; 2.431)	2.43 (2.427; 2.437)	2.44 (2.432; 2.442)	2.44 (2.436; 2.446)	2.44 (2.440; 2.450)	2.45 (2.443; 2.453)	2.45 (2.446; 2.455)	2.45 (2.448; 2.458)
+ Salto comprimento										
$u=8.370$	8.67 (8.599; 8.732)	8.76 (8.693; 8.827)	8.82 (8.748; 8.882)	8.85 (8.788; 8.921)	8.88 (8.818; 8.951)	8.91 (8.843; 8.976)	8.93 (8.864; 8.997)	8.95 (8.882; 9.015)	8.96 (8.898; 9.031)	8.98 (8.912; 9.046)
$u=8.406$	8.66 (8.579; 8.744)	8.75 (8.671; 8.837)	8.81 (8.725; 8.891)	8.85 (8.763; 8.929)	8.88 (8.792; 8.959)	8.90 (8.817; 8.983)	8.92 (8.837; 9.004)	8.94 (8.855; 9.021)	8.95 (8.871; 9.037)	8.97 (8.885; 9.051)
+ Salto com vara										
$u=5.825$	6.03 (5.999; 6.056)	6.06 (6.032; 6.090)	6.08 (6.048; 6.106)	6.09 (6.057; 6.116)	6.09 (6.064; 6.124)	6.10 (6.068; 6.130)	6.10 (6.072; 6.134)	6.11 (6.075; 6.138)	6.11 (6.077; 6.141)	6.11 (6.079; 6.144)
$u=5.844$	6.02 (5.994; 6.051)	6.06 (6.026; 6.087)	6.07 (6.042; 6.105)	6.08 (6.051; 6.116)	6.09 (6.057; 6.125)	6.10 (6.062; 6.132)	6.10 (6.065; 6.137)	6.10 (6.068; 6.142)	6.11 (6.070; 6.146)	6.11 (6.072; 6.149)
+ Triplo-salto										
$u=17.568$	18.01 (17.897; 18.129)	18.14 (18.028; 18.260)	18.22 (18.105; 18.337)	18.28 (18.159; 18.392)	18.32 (18.201; 18.434)	18.35 (18.236; 18.469)	18.38 (18.265; 18.498)	18.41 (18.290; 18.523)	18.43 (18.313; 18.546)	18.45 (18.333; 18.566)
$u=17.605$	18.03 (17.860; 18.208)	18.18 (18.003; 18.352)	18.26 (18.086; 18.436)	18.32 (18.146; 18.495)	18.37 (18.192; 18.541)	18.40 (18.230; 18.579)	18.44 (18.262; 18.611)	18.46 (18.289; 18.639)	18.49 (18.314; 18.663)	18.51 (18.335; 18.685)

Nota: estimativa pontual arredondada a duas casas decimais, uma vez que nas competições oficiais consideram-se as marcas obtidas com valores até às centésimas. Para valores mais precisos, ver Anexos 5.4.1, 5.4.3, 5.4.5 e 5.4.7, para o salto em altura, salto em comprimento, salto com vara e triplo-salto, respetivamente.

Tabela 5.39 – Estimativas pontuais obtidas por máxima verosimilhança e intervalos de confiança pelo método delta, do modelo GPD ( $\gamma \neq 0$ ) ou Exponencial ( $\gamma = 0$ ) dos níveis de retorno para 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000 recordes individuais, nas amostras de MULHERES.

Amostras e limiares	$U(100)$	$U(200)$	$U(300)$	$U(400)$	$U(500)$	$U(600)$	$U(700)$	$U(800)$	$U(900)$	$U(1000)$
<b>MULHERES</b>										
+ Salto em altura										
$u=2.006$	2.08 (2.068; 2.086)	2.08 (2.074; 2.092)	2.09 (2.076; 2.095)	2.09 (2.076; 2.097)	2.09 (2.077; 2.099)	2.09 (2.077; 2.100)	2.09 (2.077; 2.101)	2.09 (2.077; 2.102)	2.09 (2.077; 2.103)	2.09 (2.077; 2.104)
$u=2.025$	2.08 (2.072; 2.084)	2.08 (2.077; 2.090)	2.09 (2.078; 2.093)	2.09 (2.079; 2.095)	2.09 (2.079; 2.097)	2.09 (2.079; 2.098)	2.09 (2.079; 2.099)	2.09 (2.079; 2.099)	2.09 (2.079; 2.100)	2.09 (2.079; 2.101)
+ Salto comprimento										
$u=7.074$	7.43 (7.366; 7.493)	7.47 (7.401; 7.549)	7.50 (7.411; 7.581)	7.51 (7.415; 7.603)	7.52 (7.417; 7.619)	7.52 (7.417; 7.633)	7.53 (7.417; 7.643)	7.53 (7.417; 7.653)	7.54 (7.416; 7.661)	7.54 (7.416; 7.667)
$u=7.085$	7.43 (7.366; 7.493)	7.47 (7.402; 7.547)	7.50 (7.412; 7.579)	7.51 (7.416; 7.601)	7.52 (7.417; 7.617)	7.52 (7.418; 7.631)	7.53 (7.417; 7.641)	7.53 (7.417; 7.651)	7.54 (7.416; 7.658)	7.54 (7.416; 7.665)
+ Salto com vara										
$u=4.615$	4.89 (4.842; 4.939)	4.94 (4.888; 4.995)	4.97 (4.909; 5.025)	4.98 (4.922; 5.045)	4.99 (4.930; 5.059)	5.00 (4.937; 5.071)	5.01 (4.941; 5.081)	5.02 (4.945; 5.089)	5.02 (4.948; 5.096)	5.03 (4.950; 5.102)
$u=4.696$	4.87 (4.817; 4.931)	4.94 (4.881; 4.996)	4.98 (4.919; 5.034)	5.00 (4.946; 5.061)	5.02 (4.967; 5.082)	5.04 (4.984; 5.099)	5.06 (4.999; 5.113)	5.07 (5.011; 5.126)	5.08 (5.022; 5.137)	5.09 (5.032; 5.147)
+ Triplo-salto										
$u=14.933$	15.36 (15.281; 15.442)	15.42 (15.343; 15.491)	15.44 (15.369; 15.514)	15.46 (15.383; 15.529)	15.47 (15.392; 15.540)	15.47 (15.398; 15.548)	15.48 (15.402; 15.555)	15.48 (15.405; 15.561)	15.49 (15.407; 15.566)	15.49 (15.409; 15.570)
$u=14.960$	15.35 (15.271; 15.436)	15.41 (15.331; 15.491)	15.44 (15.356; 15.519)	15.45 (15.369; 15.537)	15.46 (15.377; 15.551)	15.47 (15.382; 15.562)	15.48 (15.386; 15.571)	15.48 (15.389; 15.578)	15.49 (15.391; 15.585)	15.49 (15.393; 15.590)

Nota: estimativa pontual arredondada a duas casas decimais, uma vez que nas competições oficiais consideram-se as marcas obtidas com valores até às centésimas. Para valores mais precisos, ver Anexos 5.4.2, 5.4.4, 5.4.6 e 5.4.8, para o salto em altura, salto em comprimento, salto com vara e triplo-salto, respetivamente.

### 5.3.10.5. Período de retorno

A Tabela 5.40 apresenta os resultados do período de retorno  $T$  do nível  $u$ , com  $u$ =recorde do mundo, obtidos a partir da expressão [5.59]. Nesta tese, usamos máximos individuais, pelo que cada máximo corresponde a um bloco. Assim, estamos interessados em estimar o número médio de recordes individuais necessários até à ocorrência de pelo menos um evento de magnitude igual ou superior ao atual recorde do mundo. O estimador do período de retorno é dado por:

$$T(u) \approx \frac{1}{P[C > RM]},$$

com RM o atual recorde do mundo.

Assim, observa-se que na amostra de salto com vara masculino nos dois limiares, na amostra de salto em altura masculino em  $u=2.345$  e na amostra de salto com vara feminino em  $u=4.615$ , a obtenção de um novo máximo mundial afigura-se como o mais demorado. Por oposição, o triplo-salto masculino e o salto em comprimento feminino, terão o menor “tempo” médio de espera, i.e., o menor número de máximos de espera.

Tabela 5.40 – Estimativa pontual do período de retorno do atual recorde do mundo, para os modelos criados com base nos limiares escolhidos em cada amostra.

Amostras	$\hat{T}(u)$
+ Salto em altura - homens	
$u=2.345$	3456
$u=2.355$	883
+ Salto em altura - mulheres	
$u=2.006$	864
$u=2.025$	1001
+ Salto em comprimento - homens	
$u=8.370$	809
$u=8.406$	875
+ Salto em comprimento - mulheres	
$u=7.074$	526
$u=7.085$	535
+ Salto com vara - homens	
$u=5.825$	5416
$u=5.844$	4473
+ Salto com vara - mulheres	
$u=4.615$	2581
$u=4.696$	732
+ Triplo-salto - homens	
$u=17.568$	432
$u=17.605$	345
+ Triplo-salto - mulheres	
$u=14.933$	1482
$u=14.960$	1308

## 5.4. DISCUSSÃO

Como vimos, o método POT é uma forma de modelar valores extremos, ajustando uma distribuição às excedências acima de um limiar suficientemente alto selecionado a partir de um conjunto de dados. É uma abordagem específica ao problema da estimação de cauda. O problema pode ser formulado da seguinte forma: com base numa amostra aleatória  $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ , tal que  $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ , proveniente de uma função de distribuição  $F(\cdot)$ , pretende-se reconstruir aproximadamente a sua cauda à direita de um limiar  $u$ , onde a escolha de  $u$  compete a quem resolve o problema. Assim, na base deste método está o valor de  $u$  que separa valores considerados extremos dos restantes valores, e a partir dos valores acima de  $u$  estimar um modelo, i.e., obter informações acerca do comportamento da cauda, com o intuito de estimar quantis extremos e probabilidades de excedência. Porém, exige-se que na escolha de  $u$ , este permita boa precisão na aproximação pela GPD e que seja adequado para a aplicação desta aproximação. Portanto, pretende-se escolher um valor “ $u^{\text{opt}}$ ”, ou seja, um limiar ótimo à direita do qual será estimada a cauda de  $F(\cdot)$ .

### 5.4.1. A escolha do limiar – um problema em aberto

A escolha do limiar  $u$  (ou analogamente, das  $k$  excedências) é um problema não consensual e, por isso, um tema em aberto. Por exemplo, na área financeira, alguns autores referem que na escolha de  $u$  devem ser consideradas as 0.5%, 1% e 5% maiores observações da amostra (McNeil & Frey, 2000), outros referem as 1%, 2.5% e 5% maiores observações amostrais (Curto & Rios, 2007), outros, ainda, mencionam as 5% ou 10% maiores observações da amostra (Allen et al., 2011). No domínio da climatologia (precipitação), García-Cueto & Santillán-Soto (2012) utilizaram as 1.5% maiores observações. No âmbito do desporto, Silva et al. (2018b) utilizaram as 5% máximas observações na amostra de homens e 15% na amostra de mulheres. Ou seja, não parece haver consenso, julgamos mesmo que nem poderia haver, quanto à frequência relativa de excedências do nível  $u$  a considerar. Cada amostra tem as suas especificidades, sendo que o bom equilíbrio dos pressupostos na escolha do limiar não depende apenas do número de observações acima do limiar  $u$  ou do rácio de excedências, mas também do compromisso entre valores altos de  $u$  onde o viés do estimador (nesta tese, por máxima verosimilhança) é menor, e valores pequenos de  $u$  onde a variância é menor. Se considerarmos por exemplo o MRL *plot*, o MeRL *plot* ou o TC *plot*, escolhemos o limiar como o ponto do gráfico a partir do qual foi visível uma certa linearidade, sem comprometer a presença de um número razoável de observações que foram posteriormente utilizadas no processo de estimação dos parâmetros extremos  $(\sigma_u, \gamma)$ , mas não tão alto ao ponto de aumentar a variância na estimação de  $(\sigma_u, \gamma)$  devido à presença de um número muito pequeno de excedências acima de  $u$ , mas também não tão baixo ao ponto de correremos o risco de incorporar valores que não são realmente extremos, empobrecendo a aproximação pela GPD, causando viés na estimação dos níveis de retorno. No presente estudo, a variação da frequência relativa de excedências do nível  $u$  em cada amostra está apresentada na Tabela 5.41.

Tabela 5.41 – Percentagem de excedências de nível  $u$  em cada amostra.

Amostras	Homens*	Mulheres*	Homens**	Mulheres**
Salto em altura	8%; 21.1%	12.4%; 29.5%	8.0%; 9.7%	12.4%; 20.2%
Salto em comprimento	3.8%; 10.9%	11.4%; 27.5%	6.8%; 8.8%	13.2%; 14.0%
Salto com vara	7.3%; 16.5%	4.1%; 14.9%	7.3%; 9.6%	6.7%; 10.1%
Triplo-salto	7.9%; 15.7%	6.3%; 19.9%	7.9%; 10.5%	9.8%; 10.1%

\* considerando todos os excessos de nível  $u$  candidatos em cada amostra (Tabelas 5.28, 5.29, 5.30, 5.31, 5.32, 5.33).

\*\* considerando apenas os excessos de nível  $u$  dos modelos usados no processo de inferência (Tabela 5.34).

Uma nota para referir que na seleção do limiar ótimo têm sido sugeridas diversas abordagens baseadas em metodologias gráficas e analíticas. Não existe evidência que os métodos numéricos sejam melhores do que os gráficos (Hall & Wellner, 1981; Davison & Smith, 1990; Embrechts et al., 1997; Dupuis, 1998; Lang et al., 1999; Coles, 2001; Smith, 2004; Méndez, 2006; Ghosh & Resnick, 2010, 2011; Solari et al., 2012; Wadsworth & Tawn, 2012; Jonathan 2013). Os testes à qualidade do ajustamento detetam apenas se a forma do modelo é inadequada (Wadsworth & Tawn, 2012). E porque o limiar não é um parâmetro da GPD, a sua seleção com base em argumentos gráficos torna-se mais plausível, dado ser visível e facilmente verificável o traçado definido pelas observações da cauda, i.e., pelas observações acima de  $u$ .

#### 5.4.2. Modelo Exponencial ( $\gamma=0$ ) vs Modelo GPD ( $\gamma\neq 0$ )

A decisão se o modelo obtido a partir de um certo limiar tem melhor representação pela distribuição Exponencial ( $\gamma=0$ ) ou pela GPD ( $\gamma\neq 0$ ) foi tomada com base na informação do  $QQ\text{-}plot$ , do  $IC_{95\%}(\gamma)$  e das estatísticas  $D$ ,  $D^*$  e  $T_k^*$ . A distribuição Exponencial ajustou-se satisfatoriamente em diversas amostras estudadas (Tabelas 5.18 à 5.25) e foi escolhida para inferir níveis extremos de performance máxima no salto em altura feminino ( $u=2.355$ ), salto em comprimento masculino ( $u=8.406$ ), salto com vara feminino ( $u=4.696$ ) e triplo-salto masculino ( $u=17.568$  e  $u=17.605$ ) (Tabela 5.34). Sabendo que a distribuição Exponencial não contém explicitamente um parâmetro de forma, podemos sempre questionar por que razão nesta distribuição foi considerado  $\gamma=0$ ? Ora a distribuição generalizada de Pareto inclui as funções de distribuição de Pareto, (tipo) Beta e a Exponencial. E a razão delas pertencerem à mesma família é o facto de qualquer uma delas servir, do ponto de vista da metodologia POT, para a aproximação de caudas, logo escolhe-se a distribuição que for mais adequada a cada caso. E foi precisamente isso que fizemos com os modelos cujos limiares são apresentados nas Tabelas 5.18 à 5.25 e respetivas estimativas dos parâmetros extremos nas Tabelas 5.26 à 5.33.

Não obstante, podemos sempre questionar acerca das vantagens quando se assume que a cauda de  $F(\cdot)$  é infinita, como é o caso da distribuição Exponencial. Na realidade, e testamos isso no presente estudo ainda que sem apresentar os resultados, as diferenças na execução do método POT dependendo de  $F(\cdot)$  possuir cauda finita ou infinita são muito pequenas. As diferenças situam-se apenas nos procedimentos estatísticos usados na operacionalização do método. Porém, incluir os resultados dos dois procedimentos

poderia não só levar ao acréscimo de dúvidas como também tornaria o processo de modelação bastante repetitivo, para além das ideias subjacentes ao método POT serem as mesmas quer  $F(\cdot)$  possua cauda finita ou infinita. Por esta razão, para cada limiar, optamos por um só caso, e concentramo-nos naquele onde  $F(\cdot)$  apresentou melhor ajustamento.

### 5.4.3. Condições de regularidade

Alguns dos modelos selecionados, todos em amostras femininas, apresentam estimativas  $\hat{\gamma} < -0.5$  (salto em altura: Tabela 5.27; salto em comprimento: Tabela 5.29; triplo-salto: Tabela 5.33), o que parece comprometer as condições de regularidade indicadas por Smith (1984, 1987a) e Embrechts et al. (1997). Contudo, trabalhos recentes desenvolvidos por Zhou (2009, 2010) revelam uma maior liberalização na interpretação das estimativas de  $\gamma$ , dado considerarem as propriedades assintótica da regularidade para valores de  $\gamma > -1$ . Neste caso, todos modelos do presente estudo garantem condições de confiabilidade na inferência, pois em nenhum se registou estimativas de  $\hat{\gamma} \leq -1$ . Paralelamente, o traçado gráfico de todos os modelos também revelou satisfatória qualidade de ajustamento. De todos os modelos finalistas (Tabela 5.34), apenas o salto em altura feminino ( $u=2.006$  e  $u=2.025$ ) e o triplo-salto feminino ( $u=14.933$ ) registam estimativas de  $\hat{\gamma} < -0.5$ , mas o ajuste gráfico destes modelos não deixa dúvidas quanto à sua qualidade (Figura 5.54 e Figura 5.60). Não obstante, em todos os modelos com estimativas de  $\hat{\gamma} < -0.5$  e nos modelos Exponenciais aplicamos também o método dos momentos ponderados de probabilidade, proposto por Hosking & Wallis (1987). Todavia, a aplicação deste método não se mostrou isenta de problemas, uma vez que em certos casos levou a valores inadmissíveis, especialmente quando gerava estimativas de  $\hat{\gamma} < 0$  (caso em que  $x^F$  é finito), originando  $x^F$  não-plausíveis (e.g., no salto em altura masculino, para  $u=2.355$  tem-se  $x^F=6.29$ ; no salto em comprimento masculino, para  $u=8.370$  tem-se  $x^F=10.20$  e para  $u=8.406$  tem-se  $x^F=11.79$ ; no triplo-salto masculino, para  $u=17.568$  tem-se  $x^F=36.30$ ; no salto em comprimento feminino, para  $u=7.030$  tem-se  $x^F=11.05$  e para  $u=7.045$  tem-se  $x^F=10.94$ ). Em todos os casos observados, na estimação de quantis extremais, os momentos ponderados de probabilidade não foram mais eficientes do que o método da máxima verosimilhança. Por esta razão, não apresentamos os resultados obtidos com o método de estimação dos momentos ponderados de probabilidade.

É conhecido que a estimativa por máxima verosimilhança proporciona uma abordagem consistente para os problemas relacionados com a estimativa dos parâmetros extremais. Isto significa que se adequa a uma vasta gama de situações, como por exemplo aquelas cujos modelos apresentam estimativas de  $\hat{\gamma} < -0.5$ . Possivelmente, a contribuir para esta correta adequação esteve a definição do limiar e o conseqüente número de  $k$  observações de topo usadas na estimação dos parâmetros extremais, e a conjugação do uso da estimativa por máxima verosimilhança associada ao algoritmo numérico de otimização BFGS, cuja aproximação iterativa da inversa da matriz Hessiana revelou sempre

convergência. Todavia, cuidados devem estar sempre presentes, uma vez que o propósito central é extrapolar para além da amostra disponível, sendo que este processo de extrapolação é uma atividade matemática intrinsecamente imprecisa e subjetiva, pelo que todo o trabalho realizado *a priori* assume grande importância na minimização desta imprecisão e desta subjetividade.

#### 5.4.4. Ajustamento dos modelos a considerar no estudo inferencial

Uma vez definida a distribuição mais apropriada para cada limiar candidato, importou saber qual(ais) do(s) candidato(s) iria avançar para o estudo inferencial (Tabelas 5.18 à 5.25; com resumo na Tabela 5.34).

Para além dos testes numéricos, a verificação do ajustamento foi também efetuada por técnicas gráficas. Neste caso, compararam-se os quantis com as probabilidades do modelo ajustado em relação aos dados observados, bem como a curva de densidade estimada vs curva de densidade teórica. Não foram observadas discrepâncias sistemáticas claras entre o modelo empírico e o modelo teórico, o que garantiu a qualidade do ajustamento dos modelos selecionados, viabilizando a sua utilização na estimação subsequente de quantis extremos (Anexo 5.3; Figuras 5.53 à 5.60). De uma forma geral, nos modelos selecionados, os gráficos de probabilidade e de quantis empíricos, exibiram uma tendência aproximadamente linear, em torno da reta de identidade e com todas as observações dentro da banda com 95% de confiança. Porém, de uma forma geral, o *QQ-plot* revelou um pior ajuste comparativamente ao *PP-plot*. Isto deve-se ao facto de ser usada a escala natural dos dados em vez da escala de probabilidade  $[0,1]$ . A sobreposição das densidades estimada e teórica foi praticamente coincidente em todos os modelos.

#### 5.4.5. Outras quantidades de interesse

A extrapolação para além da amostra transporta sempre os fatores da dúvida, do imprevisível, do improvável, ou mesmo do impensável e inimaginável. Todavia, a correta aplicação dos procedimentos metodológicos da Teoria de Valores Extremos ajuda a resolver e a clarificar estas “suspeitas”.

Os níveis de retorno associados a um dado período de retorno (neste capítulo, leia-se nível de retorno associado a um certo número de recordes individuais) são, porventura, a quantidade mais importante na estimação de eventos extremos. A análise da Tabela 5.38 (homens) e da Tabela 5.39 (mulheres) mostra as dificuldades das estimativas pontuais igualarem ou excederem o atual recorde do mundo. Verificam-se, aparentemente, grandes dificuldades no salto com vara masculino, triplo-salto feminino, salto em altura masculino e salto com vara feminino. Opostamente, com menor período de retorno no triplo-salto masculino e no salto em altura feminino.

Uma vez que a recolha de dados foi concluída em 31-12-2017, podemos nos anos de 2018 e 2019 verificar qual a frequência e o rácio de máximos que excedem cada um dos limiares escolhidos para cada amostra deste estudo (Tabela 5.42). As sinaléticas  $\uparrow$ ,  $\downarrow$  e  $\approx$  usadas na Tabela 5.42 indicam que o rácio é superior, inferior ou equilibrado, respetivamente, com o rácio registado no presente estudo.



Percebe-se que, comparativamente ao presente estudo, o rácio de excedências ( $k/N$ ) acima do limiar  $u_1$  foi mais elevado no salto em altura (masculino e feminino), no salto em comprimento masculino e salto com vara feminino; já com o limiar  $u_2$ , o rácio apenas foi superior ao do presente estudo no salto em comprimento masculino e no salto com vara feminino. Também de particular interesse o facto de (i) no salto em comprimento feminino, nos últimos dois anos, apenas uma atleta excedeu os limiares escolhidos, para o efeito a atleta Malaika Mihambo (ALE), com a marca 7.30m, obtida em 06-10-2019, no Meeting Khalifa International Stadium, Doha (QAT), (ii) no triplo-salto feminino, os rácios de marcas que excedem  $u_i$  (com  $i=1,2$ ) são bastantes inferiores aos verificados no presente estudo, onde apenas duas atletas excedem  $u_1$  e uma atleta excede  $u_2$ , (iii) apenas duas atletas de salto em altura feminino excederam o limiar  $u_2=2.025$ , contudo a melhor destas marcas, obtida em 14-01-2019 por Mariya Lasitskene (ANA, *Authorised Neutral Athlete*) com 2.06m, aproxima-se do atual máximo mundial.

Tabela 5.42 – Número de observações que excederam cada um dos limiares  $u_i$  selecionados em cada amostra ( $k$ ), número de marcas que igualaram ou excederam o limite mínimo imposto pela IAAF ( $N$ ) e rácio  $k/N$ , nas provas de saltos do atletismo.

	Número de marcas que excederam $u_i$ , $i=(1,2)$ *			
	$u_1$	2018-2019	$u_2$	2018-2019
<b>+ HOMENS</b>				
Salto em altura	2.345	$k=9$ ( $N=79$ ) ( $k/N=0.114$ ) ↑	2.355	$k=4$ ( $N=79$ ) ( $k/N=0.051$ ) ↓
Salto em comprimento	8.370	$k=10$ ( $N=105$ ) ( $k/N=0.095$ ) ↑	8.406	$k=8$ ( $N=105$ ) ( $k/N=0.076$ ) ↑
Salto com vara	5.825	$k=10$ ( $N=134$ ) ( $k/N=0.075$ ) ↓	5.844	$k=9$ ( $N=134$ ) ( $k/N=0.067$ ) ↓
Triplo-salto	17.568	$k=5$ ( $N=65$ ) ( $k/N=0.077$ ) ↓	17.605	$k=5$ ( $N=65$ ) ( $k/N=0.077$ ) ≈
<b>+ MULHERES</b>				
Salto em altura	2.006	$k=5$ ( $N=22$ ) ( $n/N=0.227$ ) ↑	2.025	$k=2$ ( $N=22$ ) ( $k/N=0.091$ ) ↓
Salto em comprimento	7.074	$k=1$ ( $N=39$ ) ( $k/N=0.026$ ) ↓	7.085	$k=1$ ( $N=39$ ) ( $k/N=0.026$ ) ↓
Salto com vara	4.615	$k=24$ ( $N=100$ ) ( $k/N=0.240$ ) ↑	4.696	$k=21$ ( $N=100$ ) ( $k/N=0.210$ ) ↑
Triplo-salto	14.933	$k=2$ ( $N=50$ ) ( $k/N=0.040$ ) ↓	14.960	$k=1$ ( $N=50$ ) ( $k/N=0.020$ ) ↓

\* melhor marca por atleta “*best by athlete*”. Fonte: <https://www.worldathletics.org/>

$k$ , é o número de observações que excederam o limiar.

$N$ , é o número de observações iguais ou superiores ao mínimo definido pela IAAF (ver Tabela 5.44).

$u_1$ , é o limiar selecionado mais baixo

$u_2$ , é o limiar selecionado mais alto

↑, ↓, ≈, representam, respetivamente, rácios superiores, inferiores e aproximadamente iguais aos obtidos no presente estudo.

Em cada especialidade dos saltos do atletismo, em ambos os sexos, como prova da dificuldade em alcançar um novo recorde do mundo, apresentamos na Tabela 5.43 a melhor marca mundial em 2018 e 2019 e o respectivo quantil no seio das amostras do presente estudo.

Tabela 5.43 – Melhores marcas mundiais nos anos de 2018 e 2019 nas provas de saltos do atletismo e respectivos quantis face ao atual recorde do mundo.

	Homens		Mulheres	
	2018	2019	2018	2019
Salto em altura	2.40 ( $q_{0.985}$ )	2.37 ( $q_{0.955}$ )	2.04 ( $q_{0.912}$ )	2.06 ( $q_{0.960}$ )
Salto em comprimento	8.68 ( $q_{0.990}$ )	8.69 ( $q_{0.990}$ )	7.05 ( $q_{0.827}$ )	7.30 ( $q_{0.962}$ )
Salto com vara	6.05 ( $q_{0.998}$ )	6.06 ( $q_{0.999}$ )	4.95 ( $q_{0.997}$ )	4.95 ( $q_{0.997}$ )
Triplo-salto	17.95 ( $q_{0.989}$ )	18.14 ( $q_{0.997}$ )	14.96 ( $q_{0.902}$ )	15.41 ( $q_{0.999}$ )

Considerando as amostras de homens, o rácio mais baixo em todas as décadas verifica-se no salto em comprimento e o mais elevado nas três últimas décadas no triplo-salto (exceto na década de 1980-1989) (Figura 5.61). Nas amostras de mulheres, em todas as décadas o rácio mais baixo verifica-se no salto com vara, seguindo-se o salto em comprimento, e o mais elevado no salto em altura (Figura 5.62).

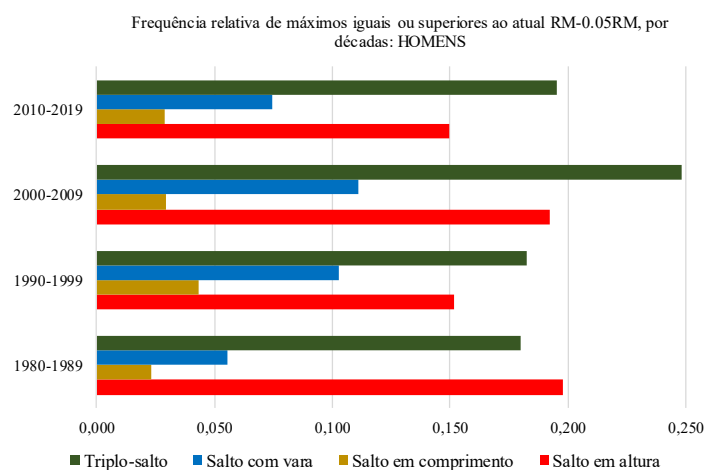


Figura 5.61 – Frequência relativa de máximos iguais ou superiores ao atual RM–0.05RM, por década, nas especialidades atléticas de salto no sexo masculino.

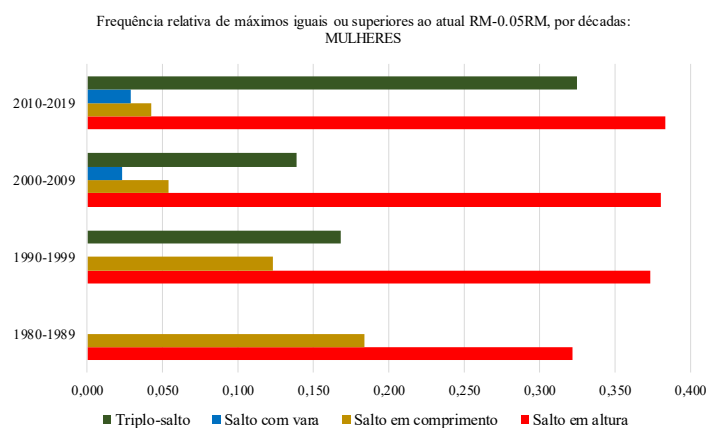


Figura 5.62 – Frequência relativa de máximos iguais ou superiores ao atual RM–0.05RM, por década, nas especialidades atléticas de salto no sexo feminino.

De todas as amostras, e em todas as décadas, o salto em altura feminino é o que apresenta o rácio mais elevado, sendo que o salto em comprimento masculino e o salto com vara feminino os que apresentam os rácios mais baixos. Os resultados apresentados na Tabela 5.44 parecem indiciar as maiores dificuldades em conseguir um novo recorde do mundo no salto em comprimento masculino e no salto com vara feminino, e as menores dificuldades no triplo-salto masculino e no salto em altura feminino, o que é concordante com os resultados que obtivemos nos níveis de retorno associados a *t*-recordes individuais. O próprio recordista do mundo de triplo-salto, Jonathan Edwards, admitiu numa entrevista dada em 19/07/2017 que o seu próprio recorde não demoraria muito a ser batido<sup>29</sup>.

Os recordes do mundo são difíceis de exceder. Para melhor compreendermos, à semelhança daquilo que fizemos para as *r*-maiores observações, também aqui apresentamos o número de performances iguais ou superiores ao limiar «atual recorde do mundo – 0.05RM», que denotamos por *M*, obtidas por década, (Tabela 5.44). Assim, é interessante também é verificar que no salto em altura masculino parece ser acessível alcançar o limiar  $M=2.33\text{m}$ , dada a grande frequência de atletas que iguala ou excede esta marca, mas como vimos os níveis de retorno desta amostra com  $u_1=2.345$  apenas consideram um novo máximo mundial ao fim de, aproximadamente,  $T(u_1)=3456$  recordes individuais, o que parece ser um número bastante elevado face à relativa facilidade com que os atletas conseguem alcançar a marca submáxima *M*. Contudo, nesta especialidade, com  $u_2=2.355$  verifica-se que  $T(u_2)=883$  recordes individuais, o que já é mais consentâneo com o sucesso referenciado. No mesmo sentido, o salto com vara masculino, cujos limiares escolhidos preveem que sejam necessários  $T(u_2)=4473$  recordes individuais para  $u_2=5.844$  ou  $T(u_1)=5416$  recordes individuais para  $u_1=5.825$ , quando se observa que em cada década uma “considerável” frequência absoluta de performances igualou ou excedeu  $M=5.83\text{m}$  [ $k=(13; 31; 30; 22)$ ]. De notar que este limiar *M* está situado entre os dois limiares escolhidos no presente estudo<sup>30</sup>. Também no triplo-salto feminino cujos níveis de retorno associado *t*-recordes individuais preveem que o atual recorde do mundo seja excedido, em média, pelo menos uma vez em cada  $T(u_2)=1308$  recordes individuais para  $u_2=14.960$  ou  $T(u_1)=1482$  se  $u_1=14.933$ , ocorre por década uma grande frequência absoluta [ $k=(16; 23; 13)$ ] e relativa (16.8%; 13.9%; 32.5%) de performances que igualam ou excedem  $M=14.73\text{m}$ . A amostra de salto em comprimento feminino é a única cuja frequência relativa de performances que igualam ou excedem *M* diminui com as décadas (18.4%; 12.3%; 5.4%; 4.3%). Esta situação deve-se à redução do número de marcas que igualam ou excedem *M* e ao aumento do número de atletas que iguala ou excede o mínimo IAAF. Pelo contrário, nas amostras de salto em altura feminino e salto com vara feminino, o rácio  $k/N$  aumenta com o avançar das décadas, ainda que,

---

<sup>29</sup> <https://www.publico.pt/2017/07/19/desporto/noticia/christian-taylor-e-nao-so-podem-bater-o-meu-recorde-1779577>

<sup>30</sup> No presente estudo, a amostra de salto com vara masculino refere-se exclusivamente a máximos individuais obtidos ao ar livre, numa pista de atletismo, em condições regulamentares e aprovadas pela IAAF. Por isso, o “nosso” atual recorde do mundo é de 6.14m, de Sergey Bubka, conseguido em 31-07-1994. Porém, existem três marcas, obtidas em pavilhão que são superiores a 6.14m. São elas: 6.15m (Sergey Bubka, UCR, em 21-02-1993), 6.16m (Renaud Lavillenie FRA, em 15-02-2014) e 6.17m (Armand Duplantis, SUE, em 08-02-2020).

como vimos na Tabela 5.39 e com mais precisão no Anexo 5.4.2, um novo recorde do mundo no salto com vara seja de difícil alcance.

Portanto, de uma forma geral, as dificuldades não estão no alcance de performances submáximas, onde como constatamos ocorre um grande número de recordes individuais a igualar ou exceder a marca  $M$ , mas sim na aproximação ao recorde do mundo, conforme revelamos na Tabela 5.45 onde se considera o atual  $RM-0.01RM$ .

Tabela 5.44 – Número de observações que igualaram ou excederam a marca «atual recorde do mundo – 0.05RM» ( $k$ ) e número de observações iguais ou superiores ao mínimo definido pela IAAF ( $N$ ) obtidas em cada década, nas provas de saltos do atletismo.

	atual		Número de marcas iguais ou superiores ao atual RM–0.05RM, por década <sup>(b)</sup>				Mínimo IAAF
	RM	$M$ <sup>(a)</sup>	1980-1989	1990-1999	2000-2009	2010-2019	
<b>+ HOMENS</b>							
Salto em altura	2.45	2.33	$k=39$ ( $N=197$ )	$k=39$ ( $N=257$ )	$k=44$ ( $N=229$ )	$k=37$ ( $N=247$ )	2.25
Salto em comprimento	8.95	8.50	$k=5$ ( $N=215$ )	$k=11$ ( $N=255$ )	$k=7$ ( $N=239$ )	$k=8$ ( $N=275$ )	8.00
Salto com vara	6.14	5.83	$k=13$ ( $N=233$ )	$k=31$ ( $N=302$ )	$k=30$ ( $N=270$ )	$k=22$ ( $N=294$ )	5.50
Triplo-salto	18.29	17.38	$k=29$ ( $N=161$ )	$k=31$ ( $N=170$ )	$k=37$ ( $N=149$ )	$k=32$ ( $N=164$ )	16.80
<b>+ MULHERES</b>							
Salto em altura	2.09	1.99	$k=19$ ( $N=59$ )	$k=25$ ( $N=67$ )	$k=27$ ( $N=71$ )	$k=23$ ( $N=60$ )	1.95
Salto em comprimento	7.52	7.14	$k=14$ ( $N=76$ )	$k=10$ ( $N=81$ )	$k=5$ ( $N=93$ )	$k=4$ ( $N=94$ )	6.75
Salto com vara	5.06	4.81	---	$k=0$ ( $N=45$ )	$k=7$ ( $N=301$ )	$k=14$ ( $N=488$ )	4.20
Triplo-salto	15.50	14.73	---	$k=16$ ( $N=95$ )	$k=23$ ( $N=166$ )	$k=13$ ( $N=40$ )	14.01

<sup>(a)</sup> valores arredondados a duas casas decimais.

<sup>(b)</sup> melhor marca por atleta “*best by athlete*”. Fonte: <https://www.worldathletics.org/>  
RM, é o atual recorde do mundo.

$$M = RM - 0.05 \times RM$$

$k$ , é o número de observações que igualaram ou excederam a marca  $M$ .

$N$ , é o número de observações iguais ou superiores ao mínimo definido pela IAAF.

A Tabela 5.45 é mais sensível à percepção que se tem da aproximação ao atual recorde do mundo em cada amostra, uma vez que considera o «atual  $RM-0.01RM$ », denotado por  $V$ , e o número de performances que iguala ou excede  $V$  em cada década. Genericamente, igualar ou exceder  $V$  é mais evidente nas duas primeiras décadas e menos nas duas últimas. Fazemos notar que nenhuma marca anterior a 1980 (ano de início da recolha de dados para a maior das amostras) é igual ou superior a  $V$ . No salto com vara masculino e feminino, as únicas observações existentes, para o efeito nas décadas de 1990-1999 e 2000-2009, respetivamente, correspondem naturalmente aos atuais recordes do mundo,

obtidos em 1994 por Sergey Bubka (Ucrânia) e por Elena Isinbaeva (Rússia). O caso do salto com vara feminino é o único recorde do mundo das especialidades de saltos do atletismo conseguido no Séc. XXI. Também os recordes do mundo do triplo-salto masculino e feminino, ambos conseguidos no Campeonato do Mundo de 1995, em Gotemburgo (Suécia), são as únicas marcas que excedem  $V$  no Séc. XX.

Tabela 5.45 – Número de observações que igualaram ou excederam a marca «atual recorde do mundo – 0.01RM» ( $k$ ), nas provas de saltos do atletismo, por décadas.

	atual RM	$V^{(a)}$	Número de marcas iguais ou superiores ao atual RM–0.01RM, por década <sup>(b)</sup>			
			1980-1989	1990-1999	2000-2009	2010-2019
<b>+ HOMENS</b>						
Salto em altura	2.45	2.43	1	1	0	1
Salto em comprimento	8.95	8.86	1	2	0	0
Salto com vara	6.14	6.08	0	1	0	0
Triplo-salto	18.29	18.11	0	1	0	2
<b>+ MULHERES</b>						
Salto em altura	2.09	2.07	2	0	1	1
Salto em comprimento	7.52	7.44	3	2	0	0
Salto com vara	5.06	5.01	---	0	1	0
Triplo-salto	15.50	15.35	0	1	1	1

<sup>(a)</sup> valores arredondados a duas casas decimais.

<sup>(b)</sup> melhor marca por atleta “*best by athlete*”. Fonte: <https://www.worldathletics.org/>

$$V = RM - 0.01 \times RM$$

$k$ , é o número de observações que igualaram ou excederam a marca  $V$ .

A Tabela 5.46 apresenta o rácio de performances que em cada década excedeu os limiares  $u_i$  do presente estudo. Os nossos dados reportam-se ao período de 1980-2017, mas como estamos em condições de também apresentar dados de 2018 e 2019, decidimos criar uma coluna extra, precisamente para a década 2010-2019. Em qualquer caso, cada atleta contribuiu apenas com a sua melhor performance. Para compararmos os rácios apresentados na Tabela 5.46 com os rácios do presente estudo, consideramos o rácio do presente  $\pm 1\%$ . Por exemplo, se considerarmos, o rácio obtido neste estudo de  $u_1=2.345$  no salto em altura masculino de 0.097 (Tabela 5.26), então um rácio no intervalo (0.087; 0.107) será considerado equilibrado face ao do presente estudo.

De uma forma geral, a década 1980-1989 caracteriza-se pelo maior número de marcas cujos rácios estão em equilíbrio e abaixo do limiar  $u_i$  em comparação com os rácios do presente estudo (secção 5.3.7, Tabelas 5.26 à 5.33), especialmente nos saltos em comprimento, com vara e triplo-salto masculino e no salto em altura feminino. A década 1990-1999 regista um maior número de rácios acima e equilibrados com os rácios do presente estudo. A década de 2000-2009 regista claramente um mais elevado rácio de observações acima dos limiares  $u_i$  em comparação com os rácios do presente estudo. O período de 2010-

2017 e a década 2010-2019, registam maioritariamente rácios equilibrados com os rácios do presente estudo, seguindo-se os rácios inferiores aos do presente estudo. Ou seja, os anos mais recentes não parecem definir, claramente, uma linha de tendência evolutiva das performances atléticas, o que aumenta a indefinição quanto à possibilidade de alcançar um novo recorde do mundo. E isto foi previsto quer nos níveis de retorno quer no período de retorno estimados (secções 5.3.10.4 e 5.3.10.5, respetivamente).

Observação 5.16: considerando o ano de início de recolha de dados de cada amostra, apenas nos saltos em comprimento e triplo-salto masculino, bem como nos saltos em altura e comprimento feminino existem marcas superiores a pelo menos um limiar, em anos anteriores ao do início da recolha de dados. Para o efeito:

- 3 marcas no salto em comprimento masculino superiores aos dois limiares, nos anos de 1968 (RM), 1975 e 1979.
- 1 marca no triplo-salto masculino superior aos dois limiares, no ano de 1975 (RM).
- 1 marca no salto em altura feminino superior a  $u_i=2.006$ , no ano de 1978.
- 1 marca no salto em comprimento feminino superior aos dois limiares, no ano de 1978 (RM).

Tabela 5.46 – Rácio de observações que excederam cada um dos limiares  $u_i$  escolhidos nas provas de saltos do atletismo, por décadas.

Amostras	$u_i$	$u_i$ foi excedido pela 1ª vez em...	Rácio de marcas superiores a cada $u_i$				
			1980-1989	1990-1999	2000-2009	2010-2017	2010-2019
<b>+ HOMENS</b>							
Salto em altura	2.345	1980	0.110	0.103	0.114	0.102	0.121
	2.355	1980	0.097	0.090	0.071	0.089	0.087
Salto em comprimento	8.370	1968	0.045	0.128	0.116	0.092	0.098
	8.406	1968	0.039	0.080	0.102	0.075	0.079
Salto com vara	5.825	1983	0.065	0.131	0.133	0.092	0.087
	5.844	1984	0.059	0.131	0.120	0.075	0.068
Triplo-salto	17.568	1975	0.096	0.108	0.193	0.090	0.093
	17.605	1975	0.062	0.089	0.125	0.069	0.075
<b>+ MULHERES</b>							
Salto em altura	2.006	1978	0.214	0.214	0.378	0.250	0.314
	2.025	1983	0.133	0.085	0.186	0.176	0.179
Salto em comprimento	7.074	1978	0.213	0.216	0.098	0.131	0.122
	7.085	1978	0.194	0.216	0.098	0.113	0.107
Salto com vara	4.615	2000	---	0.000	0.108	0.117	0.114
	4.696	2001	---	0.000	0.061	0.082	0.089
Triplo-salto	14.933	1991	---	0.159	0.136	0.054	0.047
	14.960	1993	---	0.159	0.125	0.054	0.047

- Rácio equilibrado ( $\approx$ ) ao rácio do presente estudo
- Rácio superior ( $\uparrow$ ) ao rácio do presente estudo
- Rácio inferior ( $\downarrow$ ) ao rácio do presente estudo

Tal como fizemos em relação aos lançamentos do atletismo, mostrando as marcas de qualificação que dão acesso direto à final Olímpica, também aqui o fazemos em relação às especialidades de saltos. O apuramento para os Jogos Olímpicos só está ao alcance de uma elite de atletas. Daí que dentro desta competição a exigência seja muito elevada. A começar pela marca definida pela IAAF de qualificação para a final (MQ). Sendo MQ um limiar alto, atua como ponto de corte entre aqueles que o igualam ou excedem, e por isso acedem diretamente à final Olímpica, e aqueles que ficam aquém, e por isso não ficam apurados (diretamente), mas aguardam uma possível repescagem. A Tabela 5.47 apresenta a marca de apuramento/qualificação fixada previamente pela IAAF para acesso direto à final olímpica, o número de atletas que participou na fase de qualificação ( $NQ$ ), o número de atletas obteve qualificação para a final ( $nQ$ ), bem como o número de atletas que igualou ou excedeu a MQ na final ( $nF$ ). A qualificação direta para a final está limitada aos atletas que obtenham na fase de apuramento performances iguais ou superiores a MQ. Por regra são 12 atletas, contudo, podem participar mais atletas caso se verifiquem empates. Igualmente, quando o número mínimo de atletas definido pela IAAF não é alcançado pelo facto de não terem atingido a marca MQ, então atletas com marcas inferiores a MQ são repescados.

Observando as marcas MQ de todas as Olimpíadas, verifica-se que em todos os casos  $MQ < u_i$  (os limiares escolhidos no presente estudo). Pela observação da Tabela 5.47 verifica-se que em todos os casos  $nQ > nF$ , o que também é sugestivo das dificuldades em conseguir uma marca igual ou superior a MQ, mesmo numa final Olímpica.

Nem todos os atletas qualificados para a final conseguiram igualar a marca MQ. Porquê? Simplesmente, porque uma vez que estavam apurados abdicaram de continuar em prova, evitando quer o desgaste quer o risco de lesão.

Porém, as dificuldades em alcançar MQ são tais que na final Olímpica de todas as provas nem todos os atletas conseguiram alcançar esta marca, ou seja, a mesma que lhes permitia o acesso direto à final.

Vimos pela Tabela 5.44 que o salto em altura (masculino e feminino) e o triplo-salto (masculino e feminino) apresentam o rácio mais elevado em todas as décadas, com especial relevo na última década, isto significa que um número maior de atletas tem vindo a aproximar-se do limiar  $M$ . Este dado é corroborado pela Tabela 5.47, onde se mostra que nos Jogos Olímpicos de 2016 (os mais recentes) o maior número de atletas das Olimpíadas, para o efeito  $n=17$  atletas do salto em altura feminino, conseguiu a qualificação direta para a final ([https://en.wikipedia.org/wiki/High\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/High_jump)). Porém, a marca  $MQ=1.94m$  é inferior ao mínimo da nossa amostra ( $Mín=1.95m$ ) (ver Tabela 5.3), logo inferior ao mínimo da IAAF para pertencer às melhores marcas de sempre! Daí a razão do sucesso verificado em 2016, dificultando uma análise mais profunda do progresso desta especialidade atlética. Contudo, as dificuldades são tais que na final Olímpica apenas 4 atletas conseguiram obter uma marca superior a 1.94m ([https://en.wikipedia.org/wiki/High\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/High_jump)). Ainda nos Jogos Olímpicos de 2016, no salto em altura masculino, todos os atletas conseguiram apuramento para a final sem alcançar a marca mínima de 2.31m, uma vez que com o apuramento garantido (com 2.29m) prescindiram de continuar em prova,

sendo que dos 15 atletas apurados, 4 foram repescados com a marca de 2.26m ([https://en.wikipedia.org/wiki/High\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/High_jump)). Porém, na final apenas 6 atletas conseguiram exceder a marca 2.31m (que no presente estudo corresponderia a  $q_{0.753}$ ) que sendo inferior a qualquer dos limiares do presente estudo revela as dificuldades em obter performances na proximidade do máximo (o vencedor, o canadiano Derek Drouin, obteve 2.38m, ligeiramente acima de  $u_2$ ). Por sua vez, no salto em comprimento feminino, nos Jogos Olímpicos de 2008, 2012 e 2016, a marca de qualificação MQ=(6.75, 6.70, 6.75)m, respetivamente, coincide com o Mín=6.75m da amostra deste estudo (ou seja, o mínimo IAAF), mas mesmo assim com mais atletas a serem repescadas do que por qualificação direta para a final ([https://en.wikipedia.org/wiki/Long\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Long_jump)). Este dado sugere uma estagnação, ou mesmo retrocesso, na evolução desta especialidade atlética no sexo feminino, que não é totalmente compatível com os períodos de retorno que registamos neste estudo, ou seja,  $T(u) \approx 530$  recordes individuais, i.e., dos períodos de retorno “mais rápidos” deste estudo.

No salto em comprimento masculino, os jogos Olímpicos de 2000, 2008 e 2016 caracterizaram-se por terem a MQ mais alta (MQ=8.15m), mas claramente abaixo dos limiares escolhidos neste estudo. Nestes mesmos Jogos Olímpicos, dos 12 atletas qualificados para a final, menos de metade conseguiu na final obter uma marca igual ou superior a MQ ([https://en.wikipedia.org/wiki/Long\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Long_jump)), o que (contrariamente à aparência, pois MQ=8.15m representa o quantil  $q_{0.581}$  no seio da amostra deste estudo) traduz as dificuldades em alcançar prestações de relevo nesta disciplina atlética.

No salto com vara feminino, a evolução desta modalidade, quer em termos de número de praticantes quer de performances obtidas, transportou o limiar de qualificação nos últimos 3 Jogos Olímpicos para um valor alto (MQ=4.60m), relativamente próximo do limiar  $u_1$  deste estudo ( $u_1=4.615$ ). Daí não estranharmos que nos Jogos Olímpicos de 2016, das 12 atletas finalistas (7 por qualificação direta e 5 por *ranking* de marcas de qualificação), 9 conseguiram um registo igual ou superior a MQ ([https://en.wikipedia.org/wiki/Pole\\_vault](https://en.wikipedia.org/wiki/Pole_vault)). O modelo com limiar  $u_2=4.696$  estima um período de retorno  $T(u_2)=732$  recordes individuais, o que não sendo excessivamente longo, será compatível com as performances alcançadas nos últimos dois anos<sup>31</sup>.

No salto com vara masculino, desde 2004 até 2016 que a qualificação direta para a final tem sido conseguida por 12 ou mais atletas ([https://en.wikipedia.org/wiki/Pole\\_vault](https://en.wikipedia.org/wiki/Pole_vault)), com MQ=(5.70, 5.75)m, sendo que MQ=5.75m corresponde ao  $q_{0.798}$  no seio da amostra deste estudo, bastante inferior a  $q_{0.904}$  de  $u_1=5.825$  ou a  $q_{0.913}$  de  $u_2=5.844$ . Como vimos na Tabela 5.40, o salto com vara masculino apresenta-se como a especialidade atlética com o período de retorno mais alto, logo a especialidade saltos onde aparentemente é mais difícil exceder o atual máximo mundial.

O triplo-salto feminino tem marcas de qualificação bastantes inferiores aos limiares escolhidos para este estudo. Desde 2008 que MQ tem vindo a diminuir. Sendo MQ definida em função do desenvolvimento

---

<sup>31</sup> <https://www.worldathletics.org/records/all-time-toplists/jumps/pole-vault/outdoor/women/senior?regionType=world&page=1&bestResultsOnly=true&firstDay=2018-01-01&lastDay=2019-12-31>



da modalidade no ciclo olímpico, facilmente percebemos que esta especialidade atlética não tem sofrido progresso nos últimos anos. A marca  $MQ=14.30m$  dos últimos Jogos Olímpicos está posicionada praticamente no  $q_{0.50}$  (mais precisamente,  $q_{0.497}$ ) da amostra deste estudo, portanto longe de ser um limiar válido no âmbito da EVT em geral e da metodologia POT em particular. Não obstante, apenas 3 atletas conseguiram qualificação direta para a final e 9 foram repescadas. Das 12 atletas finalistas, apenas 7 conseguiram marca superior a  $MQ$  ([https://en.wikipedia.org/wiki/Triple\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_jump)).

No triplo-salto masculino, a marca de qualificação depois de aumentar nos Jogos Olímpicos de 1980 a 1992, tem descido nos últimos Jogos Olímpicos. Não obstante o recorde do mundo ter a marca de 18.29m, parece não ser fácil alcançar uma marca igual ou superior a 17.00m, ainda que os níveis de retorno prevejam que em média, pelo menos uma vez, o máximo mundial possa ser excedido entre 345 e 432 recordes individuais. As Olimpíadas de 2008 foram as únicas onde os 12 atletas qualificados para a final igualaram  $MQ=17.10m$ ; nas restantes Olimpíadas houve sempre repescagens [https://en.wikipedia.org/wiki/Triple\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_jump).

Observação 5.17: em muitos casos o atleta conseguiu o apuramento para final via *ranking* de marcas. Muitas vezes, esta situação deveu-se não à incapacidade do atleta conseguir alcançar a marca de qualificação, mas porque sabendo que já estava apurado com a marca que tinha conseguido até então, levou-o a abdicar de continuar na qualificação, uma vez que as marcas até aqui obtidas não têm qualquer impacto na final, onde todos os atletas partem com a mesma possibilidade de conquistar a medalha de ouro. Esta situação é mais comum nos saltos em altura e com vara, e menos comum no salto em comprimento e triplo-salto.

Tabela 5.47 – Marcas de qualificação para a final olímpica fixada pela IAAF (MQ), número total de atletas que participaram na fase de qualificação (NQ), número de atletas qualificados para a final (nQ) e número de atletas que na final obteve registos iguais ou superiores a MQ (nF), nas provas de saltos do atletismo, nas Olimpíadas de 1980 a 2016..

		1980	1984	1988	1992	1996	2000	2004	2008	2012	2016
<b>HOMENS</b>											
Salto em altura	MQ	2.21	2.24	2.28	2.29	2.28	2.30	2.28	2.32	2.32	2.31
	NQ	30	30	27	43	38	35	37	40	33	44
	nQ	16	12	16	14	14	13	12	12	14	15
	nF	11	9	12	7	10	7	10	5	1	6
Salto em comprimento	MQ	7.90	7.90	8.00	8.05	8.05	8.15	8.10	8.15	8.10	8.15
	NQ	32	31	40	48	52	53	40	39	42	32
	nQ	9	12	12	12	13	12	12	12	12	12
	nF	8	9	6	5	8	6	8	5	5	5
Salto com vara	MQ	5.40	5.45	5.55	5.60	5.70	5.75	5.70	5.75	5.70	5.75
	NQ	196	19	21	34	37	36	38	38	30	31
	nQ	12	14	15	12	14	13	16	13	13	12
	nF	9	5	8	6	10	8	7	2	5	5
Triplo-salto	MQ	16.55	16.60	16.90	17.00	17.00	16.95	17.00	17.10	17.10	16.95
	NQ	23	28	44	47	43	40	47	39	27	47
	nQ	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
	nF	6	9	6	8	4	9	7	7	5	6
<b>MULHERES</b>											
Salto em altura	MQ	1.88	1.90	1.92	1.92	1.96	1.94	1.95	1.96	1.96	1.94
	NQ	20	29	24	41	30	38	34	28	35	35
	nQ	12	15	12	16	13	12	12	12	12	17
	nF	9	8	7	6	8	7	6	6	6	4
Salto em comprimento	MQ	6.50	6.50	6.65	6.75	6.70	6.70	6.65	6.75	6.70	6.75
	NQ	19	23	30	34	48	38	39	40	30	38
	nQ	13	12	12	11	12	12	12	11	12	12
	nF	9	7	5	3	8	5	8	5	4	6
Salto com vara	MQ	---	---	---	---	---	4.35	4.45	4.60	4.60	4.60
	NQ	---	---	---	---	---	29	35	36	38	36
	nQ	---	---	---	---	---	13	15	12	12	12
	nF	---	---	---	---	---	8	5	7	4	9
Triplo-salto	MQ	---	---	---	---	14.20	14.25	14.45	14.45	14.40	14.30
	NQ	---	---	---	---	32	40	33	34	34	37
	nQ	---	---	---	---	12	12	15	12	11	12
	nF	---	---	---	---	7	4	9	7	6	7

MQ – marca fixada previamente pela IAAF como mínimo de qualificação direta para a final olímpica.

NQ – número de atletas participantes na fase de qualificação. Foram excluídos os casos de “desqualificação por doping” e que “não iniciaram a competição”, mas foram incluídos os casos “não obtiveram marcas válidas”, decorrentes de ensaios nulos.

nQ – número de atletas que conseguiu o apuramento para a final, dado terem obtido marcas iguais a MQ ou terem sido repescados. Foram excluídos os casos de “desqualificação”.

nF – número de atletas que na final olímpica obteve marcas com valor igual ou superior a MQ. Foram excluídos os casos de “desqualificação”.

[https://en.wikipedia.org/wiki/High\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/High_jump)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Pole\\_vault](https://en.wikipedia.org/wiki/Pole_vault)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Long\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Long_jump)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Triple\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_jump)

#### 5.4.6. Excessos acima do nível $u$ nas principais competições de atletismo

Outra forma de mostrar as dificuldades em obter um novo máximo mundial é perceber o quão difícil é exceder os limiares que escolhemos para este estudo (ver Tabela 5.34) nas finais das duas mais importantes competições atléticas: Jogos Olímpicos e Campeonatos do Mundo. Assim, as Tabelas 5.48 e 5.49 apresentam o número de marcas que nas finais Olímpicas e finais dos Campeonatos do Mundo, respetivamente, registaram valor superior ao limiar  $u$  de cada amostra. Estas provas estão normalmente associadas à obtenção de elevadas performances, como por exemplo, novo máximo mundial, pelo que seria expectável que um grande número de marcas registasse valor superior aos limiares que escolhemos. De notar que apenas os dois limiares do salto com vara masculino e o limiar  $u=4.696$  do salto com vara feminino eram superiores aos respetivos recordes do mundo de 1980 (RM=5.72m) e 2000 (RM=4.60m). Nos restantes casos, os limiares escolhidos são inferiores ao recorde do mundo de cada momento olímpico. Vimos na Tabela 5.47 que (i) o limiar definido pela IAAF que define o apuramento direto para a final Olímpica é, em todos os casos, inferior aos limiares do presente estudo, (ii) na final participam no mínimo 12 atletas (exceto na final de 1980, no salto em comprimento masculino, onde participaram apenas 9 atletas), e (iii) em muitas Olimpíadas, especialmente a partir de 2000, mais de metade dos atletas finalistas não consegue obter um registo igual ou superior a MQ.

Sendo os nossos limiares superiores a qualquer MQ, então facilmente se percebe que nas finais Olímpicas o número de excedências de  $u_i$  será ainda menor, o que é confirmado pela Tabela 5.48, onde apenas no salto em altura masculino em 1988 e 1996, no salto com vara masculino entre 1996-2004 e 2012-2016, no triplo-salto masculino, 2008 e 2016, no salto em altura feminino em 1996 e 2004, no salto em comprimento feminino em 1988 e 2016, no salto com vara feminino entre 2004-2016 e no triplo-salto feminino entre 1996-2008 se regista uma tendência ligeiramente diferente. De uma forma geral os Jogos Olímpicos de 1980-1992 e 2000 registam as mais fracas prestações face aos  $u_i$ , e de uma forma particular as especialidades de salto em altura masculino (em  $u_2=2.355$ ), salto em altura feminino (em  $u_2=2.025$ ), salto em comprimento masculino e feminino (nos dois limiares) e triplo-salto masculino (em  $u_2=17.605$ ), são os que registam menor número de marcas a exceder o(s) limiar(es) escolhido(s). De notar que com exceção dos Jogos Olímpicos de 1996, nas restantes Olimpíadas em pelo menos duas especialidades de saltos, o atleta medalha de ouro obteve uma marca inferior ao limiar  $u_i$  (ou seja, os casos assinalados com zero). A única exceção verifica-se no triplo-salto feminino. Portanto, se no contexto Olímpico afigura-se difícil exceder  $u_i$ , então muito mais o máximo mundial. Considerando o crescimento dos resultados obtidos pelas finalistas Olímpicas de 1968 a 2012, o estudo de Cieszkowski (2014) mostra evolução crescente para os saltos em altura, comprimento e com vara, e decrescente para o triplo-salto.

Tabela 5.48 – Número de marcas superiores ao limiar  $u_i$  escolhido para cada amostra, considerando as finais Olímpicas, de 1980 a 2016.

Amostras	$u_i$	1980	1984	1988	1992	1996	2000	2004	2008	2012	2016
<b>HOMENS</b>											
Salto em altura	2.345	1	1	4	0	3	1	1	1	0	2
	2.355	1●	0	4	0	2	0	1	1	0	2
Salto comprimento	8.370	1	1	2	2	1	2	2	0	0	1
	8.406	1	1	2	2	1	2	2	0	0	0
Salto com vara	5.825	0	0	2	0	6	4	3	2	3	3
	5.844	0*	0	2	0	6	4	3	2	3	3
Triplo-salto	17.568	0	0	1	2	2	1	1	3	2	3
	17.605	0	0	1	1	2	1	1	2	2	2
<b>MULHERES</b>											
Salto em altura	2.006	0	1	2	1	3	2	3	2	2	0
	2.025	0	0	1	0	3	0	1	2	2	0
Salto comprimento	7.074	0	0	3	1	1	0	0	0	1	3
	7.085	0	0	3	0	1	0	0	0	1	2
Salto com vara	4.615	---	---	---	---	---	0	3	7	4	6
	4.696	---	---	---	---	---	0	3●	5	3	6
Triplo-salto	14.933	---	---	---	---	3	3	5	4	1	2
	14.960	---	---	---	---	3	2	5	4	1	2

●, obtido um novo recorde do mundo (salto em altura masculino: RM=2.36, Gerd Weessig, RDA; salto com vara feminino: RM=4.91, Yelena Isinbayeva, RUS).

\*, obtido um novo recorde do mundo (salto com vara: RM=5.78, Wladyslaw Kozakiewics, POL).

A Tabela 5.49 mostra que em todas as especialidades de saltos do atletismo se verifica, em pelo menos um Campeonato do Mundo, a inexistência de atletas a exceder os limiares  $u_i$  deste estudo, especialmente no salto em altura (masculino e feminino) e salto em comprimento e triplo-salto feminino. Sendo menos visível no salto em comprimento e no salto com vara masculino e salto com vara feminino. Os campeonatos do mundo de 1987, 1991 e 2019 são os únicos onde na final de qualquer especialidade saltos pelo menos um atleta excedeu  $u_i$ . Assim, também no contexto de Campeonatos do Mundo não parece ser fácil exceder  $u_i$ , pelo que muito mais difícil será exceder o máximo mundial. Ainda que o recorde do mundo seja uma boa representação para a demonstração da progressão do limite da capacidade humana, vários estudos usando diferentes tipos de metodologias, mostraram que a progressão tem vindo a diminuir nos últimos anos, dificultando a obtenção de um novo máximo mundial nos anos mais recentes (Nevill & White, 2005; Berthelot et al., 2008, 2015; Chang & Baek, 2010).

Tabela 5.49 – Número de marcas superiores ao limiar  $u_i$  de cada amostra, considerando as finais dos campeonatos do mundo, de 1983 a 2019.

Amostras	$u_i$	1983	1987	1991	1993	1995	1997	1999	2001	2003	2005	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2019
<b>HOMENS</b>																		
Salto em altura	2.345	0	4	4	3	3	3	2	1	1	0	3	0	2	4	0	1	3
	2.355	0	3	4	3	3	1	1	1	0	0	0	0	0	3	0	0	1
Salto em comprimento	8.370	1	2	3	1	1	2	2	1	0	1	2	2	1	1	1	2	2
	8.406	1	2	3•	1	1	1	1	0	0	1	2	2	1	1	1	2	1
Salto com vara	5.825	0	1	4	2	3	3	2	5	4	0	2	2	5	2	2	3	3
	5.844	0	1	4	2	3	3	2	5	4	0	2	2	5	2	2	3	3
Triplo-salto	17.568	0	2	3	2	4	4	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	4
	17.605	0	2	3	2	2•	3	0	1	1	0	1	1	2	2	2	2	4
<b>MULHERES</b>																		
Salto em altura	2.006	1	2	1	0	1	0	0	0	1	1	3	2	2	1	3	2	2
	2.025	0	2	1	0	0	0	0	0	1	0	3	1	2	1	0	1	2
Salto em comprimento	7.074	2	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
	7.085	2	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
Salto com vara	4.615	---	---	---	---	---	---	0	2	3	1	7	4	9	7	7	7	12
	4.696	---	---	---	---	---	---	0	2	2	1	5	1	5	4	7	2	12
Triplo-salto	14.933	---	---	---	1	3	2	0	1	2	1	2	1	1	0	0	0	1
	14.960	---	---	---	1•	3•	2	0	1	2	1	2	0	0	0	0	0	1

•, obtido um novo recorde do mundo.

A Tabela 5.50 mostra o número de recordes do mundo conseguidos entre as décadas de 1980-1989 e 2010-2019. Verifica-se que a maior parte dos recordes do mundo foram obtidos nas décadas de 1980-1989 e 1990-1999 e que apenas o salto com vara feminino regista recordes do mundo no Séc. XXI. Para tal, muito contribuíram as atletas Stacy Dragila (EUA) com 9 recordes, Svetlana Feofanova (Rússia) com 3 recordes e Yelena Isinbayeva (Rússia) com 17 recordes. É muito evidente o “peso” da década de 1980-1989 na obtenção de recordes do mundo, logo seguida da década de 1990-1999. No salto em comprimento masculino, o único registo da autoria de Michael Powell (EUA) data de 30-08-1991, sendo que o anterior recorde do mundo pertencia a Bob Beamon (EUA), com a marca de 8.90m alcançada nos Jogos Olímpicos do México em 18-10-1968, porventura o mais lendário recorde do mundo do panorama atlético. Não obstante, o registo de 8.95m do atual recorde do mundo, nos últimos 3 anos vários atletas têm vindo a aproximar-se desta marca. Aliás, nesta tese estimamos  $\hat{T}(u_1) = 809$  para  $u_1 = 8.370$  e  $\hat{T}(u_2) = 875$  para  $u_2 = 8.406$  recordes individuais, o que parece indicar uma certa proximidade “temporal”.

Tabela 5.50 – Data do atual recorde do mundo e número de recordes do mundo conseguidos em cada década nas provas de saltos do atletismo.

	Data do RM	1980-1989	1990-1999	2000-2009	2010-2019
<b>HOMENS</b>					
Salto em altura	27-07-1993	11	1	---	---
Salto em comprimento	30-08-1991	---	1	---	---
Salto com vara	31-07-1994	19	8	---	---
Triplo-salto	07-08-1995	1	3	---	---
<b>MULHERES</b>					
Salto em altura	30-08-1987	9	---	---	---
Salto em comprimento	11-06-1988	11	---	---	---
Salto com vara	28-08-2009	11*	6*; 26	29	---
Triplo-salto	10-08-1995	15*	5	---	---

\* recordes do mundo pré-IAAF (não oficiais).

A Tabela 5.51 apresenta os casos de doping nos saltos do atletismo apenas em contexto de Jogos Olímpicos. É notório que só a partir de 1996 está registado um grande número de controlos positivos. No período de 1980-1992 são praticamente inexistentes os casos de doping. Nos últimos Jogos Olímpicos não se registou qualquer caso positivo. A introdução do passaporte biológico e as penas cada vez mais severas, têm desencorajado atletas, treinadores, equipas médicas e outros agentes desportivos das tentativas de fraude. E com isto, as performances caem para níveis mais condizentes com a evolução humana, mas com o condão de serem reais e atribuído apenas ao atleta o mérito da sua competência.

Tabela 5.51 – Número de casos de doping em Jogos Olímpicos nas provas de saltos do atletismo, entre 1980 e 2016.

	1980	1984	1988	1992	1996	2000	2004	2008	2012	2016
<b>HOMENS</b>										
Salto em altura	---	---	---	---	---	---	1*	1*	1	---
Salto em comprimento	---	---	---	---	---	---	---	1	1*	---
Salto com vara	---	---	---	---	---	---	---	1	2	---
Triplo-salto	---	---	---	---	---	---	---	1*	1	---
<b>MULHERES</b>										
Salto em altura	---	---	---	---	1	---	---	3	1	---
Salto em comprimento	---	---	---	1*	1*	1	---	1	5	---
Salto com vara						---	---	1*	---	---
Triplo-salto					---	---	---	2	1	---

\* detetado posteriormente (em alguns casos mais de 10 anos depois), após as amostras terem sido novamente testadas, usando métodos atuais, tecnicamente mais sofisticados.

Fonte:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics\\_at\\_the\\_Summer\\_Olympics](https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics_at_the_Summer_Olympics)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Doping\\_at\\_the\\_Olympic\\_Games](https://en.wikipedia.org/wiki/Doping_at_the_Olympic_Games)

#### 5.4.7. Notas finais

Já sabemos que associado aos recordes do mundo está uma multiplicidade de fatores, onde para além do potencial genético, da determinação/entrega e do trabalho árduo por parte do atleta, está também a facilidade de acesso aos mais recentes recursos científicos, tecnológicos e métodos de treino. Todavia, já o dissemos aquando dos lançamentos no processo de modelação pelas  $r$ -maiores observações, e reafirmamos também em relação aos saltos do atletismo agora pela metodologia POT, o período de 1980-1999 (especialmente até 1995) são a época dourada quer do número quer da “qualidade” dos recordes do mundo. Por isso, a argumentação apresentada em relação aos lançamentos (Capítulo 4, Secção 4.4.6) também se pode aplicar nos saltos, onde a “certeza”, a “dúvida” e o “problema” poderão ser colocados da mesma forma, especialmente em relação aos recordes do mundo conseguidos antes de 1993. Portanto, podemos chegar ao ponto de ter que medir os saltos até aos milímetros de forma a proporcionar novas metas e novas expetativas para todos os atletas.

## 6. NÃO-ESTACIONARIEDADE, *para os lançamentos do atletismo*

### 6.1. Introdução

São muitos os trabalhos nas mais variadas áreas do conhecimento que utilizam o método dos máximos de blocos, a distribuição GEV estacionária e a estimação por máxima verosimilhança dos parâmetros extremais: localização, escala e forma. Porém, escasseiam os trabalhos de investigação no âmbito do desporto e inexistem nas especialidades dos lançamentos do disco e martelo do atletismo. O método da máxima verosimilhança é bastante flexível, uma vez que permite a extensão da distribuição GEV a situações onde os extremos têm propriedades suscetíveis de variarem com o tempo (Smith, 1989; Katz et al., 2002). A admissão da suposição da estacionariedade<sup>32</sup> da série de dados é válida quando, excluídas as flutuações aleatórias, as observações amostrais são invariantes em relação à cronologia das suas ocorrências, refletindo alguma forma de equilíbrio em torno de uma média e desvio-padrão constantes. Todavia, no desporto em geral e nas especialidades do atletismo em particular, devido à necessidade de obter “marcas mínimas” que permitam a participação nas grandes provas mundiais, a incessante busca por um novo recorde, a afirmação pessoal no panorama nacional/internacional, conjugadas com as facilidades e rapidez de deslocamento inter-países e o crescente aumento do número de praticantes e de competições desportivas em qualquer época do ano, por exemplo, podem comprometer o pressuposto da estacionariedade. Assim, se for detetada uma tendência temporal significativa na série de dados ou qualquer tipo de não-estacionariedade (determinística ou estocástica), tal rejeita a suposição de que a sua estrutura de probabilidade é constante no tempo (Coles, 2001). Na prática, a maioria das séries temporais apresenta algum tipo de não-estacionariedade, como por exemplo, tendência.

A verificação da tendência pode ser feita por testes de hipóteses (e.g., Cox-Stuart *trend test*) e recorrendo a representações gráficas (e.g., gráfico de dispersão com linha de tendência linear sobreposta e com a curva *lowess*). Sinalizada a não-estacionariedade da série de dados, qualquer quantidade de interesse (e.g., níveis de retorno) também está sujeita à variação no tempo. Na maioria das situações, nos processos não-estacionários as propriedades estatísticas são funções determinísticas do tempo, ou seja, os parâmetros da distribuição subjacente aos dados são dependentes do tempo, daí dizer-se que as propriedades da distribuição refletem os efeitos das variações com o tempo na variável de interesse

---

<sup>32</sup> Um processo estocástico  $X_t$  diz-se estritamente estacionário (ou fortemente estacionário), se:  $\forall m \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_m \in \mathbb{Z}, \forall \tau \in \mathbb{Z}$ , a distribuição dos vetores  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$  e  $(X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_m+\tau})$  é idêntica.

Por sua vez, um processo estocástico  $X_t$  diz-se estacionário de segunda ordem (ou fracamente estacionário, ou ainda estacionário em covariância) se, para todo o  $t$ ,  $E[X_t^2] < \infty$ ,  $\forall m \geq 0$  e,

- $E[X_t] = \mu_X$  (constante),  $\forall t \in \mathbb{Z}$
- $Var[X_t] = \sigma_X^2$  (constante),  $\forall t \in \mathbb{Z}$
- $Cov[X_t, X_s] = Cov(X_{t+\tau}, X_{s+\tau}) = \tilde{\gamma}(|t-s|)$ ,  $\forall t, s \in \mathbb{Z}$

i.e., a covariância entre as variáveis  $X_t$  e  $X_s$ , representada por  $\tilde{\gamma}(t, s)$ , toma sempre o mesmo valor para todo o  $t$  e  $s$ , dependendo apenas da diferença de tempo entre as variáveis,  $|t-s|$ . A função  $\tilde{\gamma}(\tau) = \Gamma(0, \tau)$ ,  $\tau \in \mathbb{Z}$ , chama-se de função de autocovariância (Gonçalves & Lopes, 2008, Park, 2018).



(Smith, 1989; Coles, 2001). Até à data não foi estabelecida qualquer teoria geral assintótica para extremos não-estacionários, pelo que uma alternativa é considerar que um ou mais parâmetros da distribuição variam no tempo. Desta forma, utilizam-se as mesmas técnicas de regressão empregues por outras metodologias na estimação dos parâmetros, embora com variabilidade temporal. Tipicamente, as alterações no parâmetro de localização são facilmente estimadas; no parâmetro de escala são menos fáceis de detetar, pois requer observações de longos períodos de tempo; no parâmetro de forma é necessário um grande número de observações para modelar as alterações, sendo ainda evidentes as dificuldades em o estimar com precisão (Katz, 2010; Hasan et al., 2013; Cheng et al., 2014). Por esta razão, Coles (2001) e Katz (2013) recomendam que o parâmetro de forma deverá permanecer constante, a menos que existam razões convincentes que levem a supor que as suas variações são uma função do tempo. Estes investigadores referem que o assumir a tendência temporal no parâmetro de forma aumenta a complexidade da inferência estatística, para além de outras restrições (e.g., o registo de valores que representam a realidade decorrentes do aumento ou diminuição depende do sinal de cada termo de  $\gamma$ ,  $\gamma(t) = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots$ , e dos anos de inferência, evitando desta forma complicações suscetíveis de ocorrer na obtenção dos resultados de outras quantidades de interesse (e.g., quantis extremos).

## 6.2. Método dos máximos de blocos

Como vimos no Capítulo 2, sob uma vasta gama de condições, a distribuição do máximo (ou mínimo) converge para uma de três distribuições limite: Gumbel, Fréchet ou max-Weibull (Fréchet, 1927; Fisher & Tippett, 1928; Gumbel, 1935, 1958; Weibull, 1939b, 1951). A parametrização destas três distribuições numa família única é referida como distribuição generalizada de valores extremos, cujos méritos são devidos, sobretudo, a von Mises (1936) e Jenkinson (1955). Esta metodologia é frequentemente referida como “máximos de blocos”, sendo preferível relativamente a outros métodos (e.g., POT) quando as observações não são exatamente independentes e identicamente distribuídas (Madsen et al., 1997; Katz et al., 2002; Ferreira & de Haan, 2015). O método dos máximos de blocos é um dos métodos clássicos para modelar valores extremos, sendo um caso particular do método das  $r$ -maiores observações. Este método está relacionado com a distribuição assintótica não-degenerada do máximo  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ , linearmente normalizado  $(M_n - b_n)/a_n$ , por uma sucessão de constantes reais  $a_n > 0$  e  $b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), tal que

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} G(x),$$

para uma função de distribuição (f.d.)  $G$  não-degenerada, pelo que  $G$  pertence à família GEV estacionária, dada em [2.24].

De acordo com este modelo, a sequência de  $n$  variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , independentes e identicamente distribuídas, é particionada em  $m$  blocos ou subamostras não sobrepostas de dimensão  $k$ ,

com  $k$  suficientemente grande, tal que  $n = m \times k$  é o número total de observações. Portanto, a amostra à qual se irá ajustar o modelo Tipo I ou II ou III ou GEV, terá a forma:

$$| \underset{\text{Bloco 1}}{X_1, \dots, X_k} | \underset{\text{Bloco 2}}{X_{k+1}, \dots, X_{2k}} | \underset{\text{Bloco 3}}{X_{2k+1}, \dots, X_{3k}} | \dots | \underset{\text{Bloco } j}{X_{(j-1)k+1}, \dots, X_{jk}} | \dots | \underset{\text{Bloco } m}{X_{(m-1)k+1}, \dots, X_{mk}} |.$$

Porém, uma vez que no presente estudo esta abordagem é implementada considerando-se que um bloco equivale a um ano e que em cada bloco se extrai apenas a maior observação, obtém-se assim uma amostra de dimensão  $m$  máximos anuais, pelo que  $n = m$  é o número de observações em estudo.

A distribuição GEV apresentada em [2.24] diz-se estacionária uma vez que os seus parâmetros  $(\lambda, \delta, \gamma)$  são constantes no tempo, i.e.,  $\lambda(t) = \lambda$ ,  $\delta(t) = \delta$ ,  $\gamma(t) = \gamma$ . Todavia, a frequência de extremos no desporto tem vindo a modificar e provavelmente continuará no futuro, comprometendo a suposição da estacionariedade. Portanto, torna-se necessário incluir modelos que considerem (também) análises de não-estacionariedade em eventos desportivos, pois como vimos, poderão ser vários os fatores suscetíveis de interferir com a dinâmica dos processos, fazendo com que a estacionariedade nem sempre se verifique. A análise de parâmetros extremos não-estacionários que incorporam o tempo como covariável é frequentemente implementada na modelação da distribuição de extremos na presença de tendência significativa (Zhang et al., 2004). Contudo, uma outra variável (e.g., peso e estatura) pode ser usada como covariável. Uma covariável é uma variável da qual depende a variável em análise e que também exhibe variação temporal. Assim, introduzindo tendência nos parâmetros extremos da distribuição GEV [2.24], tem-se a distribuição GEV não-estacionária:

$$G(x_t | \lambda(t), \delta(t), \gamma(t)) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[ 1 + \gamma(t) \left( \frac{x_t - \lambda(t)}{\delta(t)} \right) \right]_{+}^{\frac{1}{\gamma(t)}} \right\}, & x \in \mathbb{R}, \quad \gamma(t) \neq 0 \\ \exp \left\{ - \exp \left[ - \frac{x_t - \lambda(t)}{\delta(t)} \right] \right\}, & x \in \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = 0 \end{cases}, \quad [6.1]$$

em que  $1 + \gamma(t) \left( \frac{x_t - \lambda(t)}{\delta(t)} \right) > 0$  e  $t$  é um indicador do ano,  $t=1, \dots, m$ , dando uma estimativa GEV diferente para cada ano indicado por  $t$ , i.e., variações no tempo são contabilizadas através do ano  $t$ .

### 6.3. Estimação dos parâmetros

À semelhança da distribuição GEV em [2.24], também a sua não-estacionariedade em [6.1] pode ser modelada através de qualquer dos parâmetros extremos  $(\lambda, \delta, \gamma)$ . O modelo GEV não-estacionário generalizado para descrever a distribuição  $X_t$  é dado por:

$$X_t \sim GEV(\lambda(t), \delta(t), \gamma(t)). \quad [6.2]$$

Cada parâmetro da distribuição GEV tem uma expressão em termos do vetor de parâmetros  $\theta$ , com  $\theta=(\lambda,\delta,\gamma)$ . Da forma como está apresentada em [6.2], variações ao longo do tempo são modeladas como uma tendência nos parâmetros  $\theta$ . Por sua vez, a estimação dos parâmetros por máxima verosimilhança é a mais usual, dada a fácil adaptabilidade a mudanças de estrutura de modelo, i.e., às condições de não-estacionariedade (Madsen et al., 1997; Katz et al., 2002; El Adlouni et al., 2007). As estimativas por máxima verosimilhança são as que correspondem aos valores dos parâmetros que maximizam a função de verosimilhança do modelo GEV não-estacionário. A função de verosimilhança  $L$ , para a estimativa dos parâmetros  $(\lambda(t), \delta(t), \gamma(t))$  desconhecidos da distribuição  $X_t$ , é dada por:

$$L(\theta; x_1, \dots, x_m, t) = L(x_t; \theta) = \prod_{t=1}^m g(x_t; \lambda(t), \delta(t), \gamma(t)), \quad [6.3]$$

onde  $g(x_t; \lambda(t), \delta(t), \gamma(t))$  denota a função densidade de probabilidade da distribuição GEV com parâmetros  $\lambda(t), \delta(t), \gamma(t)$  avaliados em  $x_t$ .

Habitualmente, decorrente do facto da função logarítmica ser contínua e com monotonicidade crescente, é usual maximizar a função de log-verosimilhança. Portanto, o argumento que maximiza o logaritmo da função é o mesmo que maximiza a própria função de verosimilhança. Coles (2001) e Katz (2013) apresentam os resultados em termos da minimização da função de log-verosimilhança negativa (NLL, do inglês, *negative log-likelihood*). De notar que  $\ell \equiv \ln L = -NLL$ . Assim, na presença de tendência, a maximização da função de log-verosimilhança  $\ell$  para a distribuição GEV em [6.1], quando  $\gamma(t) \neq 0$  é dada por:

$$\begin{aligned} \ell(\lambda(t), \delta(t), \gamma(t) | x_1, \dots, x_m, t) &= \ln L(\lambda(t), \delta(t), \gamma(t) | x_1, \dots, x_m, t) \\ &= -m \ln \delta(t) - \left(1 + \frac{1}{\gamma(t)}\right) \sum_{t=1}^m \ln \left[1 + \gamma(t) \left(\frac{x_t - \lambda(t)}{\delta(t)}\right)\right]_{\pm} \\ &\quad - \sum_{t=1}^m \left[1 + \gamma(t) \left(\frac{x_t - \lambda(t)}{\delta(t)}\right)\right]_{\pm}^{\frac{1}{\gamma(t)}} \end{aligned} \quad [6.4]$$

$$\text{com a restrição } 1 + \gamma(t) \left(\frac{x_t - \lambda(t)}{\delta(t)}\right) > 0, \quad t = 1, \dots, m, \quad [6.5]$$

e quando  $\gamma(t) = 0$  ( $\gamma(t) \rightarrow 0$ ), a função de log-verosimilhança reduz-se a:

$$\begin{aligned} \ell(\lambda(t), \delta(t), 0 | x_1, \dots, x_m, t) &= \ln L(\lambda(t), \delta(t), 0 | x_1, \dots, x_m, t) \\ &= -m \ln \delta(t) - \sum_{t=1}^m \exp\left(-\frac{x_t - \lambda(t)}{\delta(t)}\right) - \sum_{t=1}^m \left(\frac{x_t - \lambda(t)}{\delta(t)}\right) \end{aligned} \quad [6.6]$$

onde  $m$  é o número de máximos de blocos,  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , considerados na análise,  $x_t$  é o  $t$ -ésimo valor ordenado da amostra.

Os estimadores de máxima verosimilhança  $(\hat{\lambda}(t), \hat{\delta}(t), \hat{\gamma}(t))$  e  $(\hat{\lambda}(t), \hat{\delta}(t))$  para os parâmetros  $(\lambda(t), \delta(t), \gamma(t))$  e  $(\lambda(t), \delta(t))$  são obtidos pela maximização do par de equações [6.4] e [6.6], respetivamente, ou equivalentemente pela minimização da função de log-verosimilhança negativa. No caso de  $\gamma \neq 0$ , o método iterativo a ser implementado deverá ter em conta a restrição em [6.5].

Porém, tal como na situação de estacionariedade em [4.4] ou [4.5], também as expressões [6.4] e [6.6] não têm solução analítica, pelo que terão que ser usados algoritmos numéricos de otimização, possibilitando a obtenção de estimativas de máxima verosimilhança de  $\theta(t) = (\lambda(t), \delta(t), \gamma(t))$ . Nesta tese, dependendo da convergência, usamos o método de otimização de Nelder-Mead (Nelder & Mead, 1965) ou BFGS – Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (Avriel, 2003; Lewis & Overton, 2013) ou L-BFGS-B (Zhou et al., 1997; Morales & Ribeiro, 2015; Mokhtai & Ribeiro, 2015). Na prática, o método BFGS costuma ser mais eficiente do que o método Nelder-Mead. Porém, se um método não converge, tenta-se o outro (Gilleland et al., 2005). Por sua vez, Prescott & Walden (1983) recomendam que seja usada a iteração de Newton-Raphson.

Não obstante a complexidade numérica, a estimação por máxima verosimilhança não representa um sério obstáculo computacional. Porém, dado que  $G_{\gamma(t)}(x; \lambda(t), \delta(t))$  depende do valor dos parâmetros desconhecidos, na utilização de qualquer algoritmo numérico de otimização alguns cuidados devem estar presentes (Cox & Hinkley, 1974; Smith, 1985; Coles, 2001), designadamente (i) quando se usam amostras pequenas ( $n \leq 25$  observações e parâmetros constantes), as potenciais limitações para a distribuição GEV repercutem-se sobretudo no parâmetro de forma, i.e., produzindo estimativas irrealistas deste parâmetro (Martins & Stedinger, 2000), (ii) pela necessidade de satisfazer as condições de regularidade para as propriedades assintóticas associadas ao estimador de máxima verosimilhança, i.e., consistência, eficiência, invariância e normalidade assintóticas (Smith, 1985; Coles, 2001), e (iii) quando ocorre a violação da condição em [6.5], neste caso levando à não aplicabilidade das estimativas por máxima verosimilhança.

Acerca das condições de regularidade, Smith (1985) estudou detalhadamente o problema e estabeleceu que o comportamento limite na estimação por máxima verosimilhança depende do valor e do sinal do parâmetro de forma. Estas condições foram apresentadas no «Capítulo 4, Secção 4.2.2. Estimação dos parâmetros» para o caso estacionário, são as mesmas para a situação de não-estacionariedade da série temporal.

### 6.3.1. Erros-padrão e intervalos de confiança

Os erros-padrão para as estimativas pontuais de  $\theta(t)$  podem ser obtidos pelo método delta (Coles, 2001, Castillo et al., 2004). No caso não-estacionário, o procedimento é bastante mais complexo, pelo que detalhes deste procedimento podem ser observados em Cooley (2013) e Obeysekera & Salas (2014). Obtido o erro-padrão da estimativa pontual de cada parâmetro extremal, os intervalos com  $100(1-\alpha)\%$  de confiança podem ser construídos com base na normalidade assintótica dos estimadores de máxima verosimilhança (Coles, 2001; Beirlant et al., 2004), ou seja,

$$IC_{100(1-\alpha)\%}(\theta(t)) = \left( \hat{\theta}(t) \pm \Phi_{1-\alpha/2}^{-1} \times se(\hat{\theta}(t)) \right), \quad [6.7]$$

onde  $\hat{\theta}(t) = (\hat{\lambda}(t), \hat{\delta}(t), \hat{\gamma}(t))$  são as estimativas de máxima verosimilhança de  $\theta(t) = (\lambda(t), \delta(t), \gamma(t))$  e  $\Phi_{1-\alpha/2}^{-1}$  é o quantil  $(1-\alpha/2)$  da distribuição Normal padrão.

#### 6.4. Modelos

Para além do modelo estacionário, existem diversas possibilidades de testar modelos com tendência nos parâmetros extremais. Atendendo às recomendações de Coles (2001) e Katz (2013) iremos manter constante o parâmetro de forma, i.e.,  $\gamma(t) = \gamma$ . Igualmente, no estudo de Silva et al. (2018a) ficou demonstrado que a tendência temporal nos dados ocorre sobretudo no parâmetro de localização, seguido do parâmetro de escala, e que nunca se verificou no parâmetro de forma. Na presente tese, para além do modelo estacionário, numa fase inicial (i.e., antes de observar o traçado gráfico das séries de dados) iremos considerar modelos com tendência linear, quadrática e cúbica nos parâmetros de localização e escala. Desta forma, variações ao longo do tempo serão modeladas como uma tendência nos parâmetros de localização e escala, e constante no parâmetro de forma:

$$X_t \sim GEV(\lambda(t), \delta(t), \gamma) \begin{cases} \lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t \vee \lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 \vee \lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t^3 \\ \delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t) \vee \delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2) \vee \delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \delta_3 t^3) \\ \gamma(t) = \gamma \end{cases}$$

Observação 6.1: com a natural modificação quando o modelo é Gumbel ( $\gamma=0$ ).

Na criação da covariável  $t$  associada aos parâmetros da distribuição foi preparada uma matriz-coluna do tipo  $m \times 1$ :  $(t = t_1, \dots, t_m)$ , para a tendência linear;  $m \times 2$ :  $(t = t_1, \dots, t_m)$ ,  $(t^2 = t_1^2, \dots, t_m^2)$ , para a tendência quadrática; e  $m \times 3$ :  $(t = t_1, \dots, t_m)$ ,  $(t^2 = t_1^2, \dots, t_m^2)$ ,  $(t^3 = t_1^3, \dots, t_m^3)$  para a tendência cúbica, com o número de linhas igual ao número de máximos de blocos existentes na série em análise.

Foi elaborado um código com recurso ao programa R (v.3.6.3) que permitiu obter a covariável  $t$  para as amostras em estudo, cujo desenvolvimento apresentamos em Anexo 6.1.

#### 6.5. Seleção do melhor modelo

Quando se comparam dois modelos com diferente número de parâmetros é expectável que o melhor ajuste ocorra no modelo com mais parâmetros, na medida em que são, precisamente, os parâmetros que explicam o comportamento dos dados. Porém, o Princípio da Parcimónia, também conhecido por Princípio de Ockham, estabelece que a explicação de qualquer fenómeno deve assumir a menor quantidade de premissas possível, ou seja, o modelo com menor número de parâmetros. A “Navalha de Ockham” (Guilherme de Ockham, 1285-1347) foi apresentada como um princípio metodológico, não como uma Lei. Não sugere que as explicações mais simples são sempre verdadeiras ou que as mais complexas devem ser sempre rejeitadas. Apenas sugere que as explicações mais simples (ainda que

possam não ser as mais corretas), têm maior possibilidade de serem as corretas (Baker, 2007). Paralelamente, não podemos deixar de citar a frase de George E.P. Box (1919-2013) que se transformou num aforismo clássico no domínio da Estatística “*all models are wrong; some models are useful*”. Será com base nestes preceitos que iremos procurar o modelo mais adequado.

### 6.5.1. Informação gráfica preliminar

Ainda que a análise gráfica possa gerar alguma subjetividade de interpretação, este procedimento deverá mesmo anteceder a aplicação de testes formais. Com isto possui-se uma noção acerca dos modelos que parecem destacar-se dos demais. Assim, o procedimento da «Secção 6.6. Diagnóstico do ajustamento» poderá ser usado para todos os modelos em estudo, de forma a obter uma informação preliminar acerca do comportamento de cada modelo. Caso os pontos referentes aos gráficos de probabilidade e dos quantis se concentrem na proximidade ou sobre a reta que representa a função identidade, tal indica um bom ajustamento dos dados ao modelo em questão, tomando decisão contrária caso os pontos se afastem consideravelmente dessa linearidade. Na presença de não-estacionariedade, Coles (2001) apresenta os procedimentos de construção dos gráficos de probabilidade e de quantis.

### 6.5.2. Teste da razão de verosimilhanças

O teste da razão de verosimilhanças permite comparar o desempenho de dois modelos com estrutura hierárquica aninhada, ou mais simplesmente, encaixados, i.e., modelos com diferente número de parâmetros, mas desde que a anulação de um ou mais parâmetros de um dos modelos os torna matematicamente equivalentes<sup>33</sup>. Este teste baseia-se na estatística *Deviance* ( $D$ ). Segundo Coles (2001), define-se como,

$$D = -2\{\ell(M_0) - \ell(M_1)\}, \quad [6.8]$$

onde  $M_0$  e  $M_1$  são dois modelos encaixados, tal que  $M_0 \subset M_1$ , e  $\ell(M_0)$  e  $\ell(M_1)$  são o valor máximo da função de log-verosimilhança dos modelos  $M_0$  e  $M_1$ , respetivamente.

As hipóteses a considerar são:

$$\begin{aligned} H_0: & \text{ o modelo } M_0 \text{ (modelo reduzido) é o mais adequado} \\ H_1: & \text{ o modelo } M_1 \text{ (modelo alternativo) é o mais adequado} \end{aligned} \quad [6.9]$$

Sob a  $H_0$ ,

$$D \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{d} Q \sim \chi^2_\nu,$$

---

<sup>33</sup> Por exemplo, se compararmos o modelo GEV estacionário ( $\rho=3$ ) com o modelo GEV com tendência linear na localização ( $\rho=4$ ), a anulação da tendência torna os dois modelos equivalentes. Igualmente, os modelos GEV e Gumbel com tendência nos mesmos parâmetros extremos são equivalentes caso  $\gamma=0$ . Opostamente, na presença de um modelo GEV com tendência linear no parâmetro de localização ( $\rho=4$ ) e outro modelo GEV com tendência log-linear no parâmetro de escala ( $\rho=4$ ), o teste da razão de verosimilhanças não é apropriado.

em que  $\nu = \rho_1 - \rho_0$ , onde  $\rho_0$  e  $\rho_1$  representam o número de parâmetros dos modelos  $M_0$  e  $M_1$ , respetivamente.

Porém, de modo a obter uma aproximação mais precisa da distribuição assintótica quando a amostra não é suficientemente grande, Reiss & Thomas (2007, p.119) propõem que seja aplicada a correção de Bartlett (1937)<sup>34</sup>, ou seja,

$$D^* = \frac{D}{1 + \frac{2.8}{m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} Q \sim \chi_\nu^2. \quad [6.10]$$

Grandes valores de  $D$  ou  $D^*$  sugerem que o modelo com maior número de parâmetros é preferível ao modelo reduzido, uma vez que explica substancialmente mais a variação nos dados. Considera-se a seguinte regra de decisão: para um nível de significância  $\alpha$ , segundo um quantil de probabilidade  $1 - \alpha$  de uma distribuição qui-quadrado com  $\nu$  graus de liberdade, rejeita-se  $H_0$ , se

$$D \geq \chi_{\nu;1-\alpha}^2 \text{ ou } D^* \geq \chi_{\nu;1-\alpha}^2$$

### 6.5.3. Critérios de Informação

Os Critérios de Informação de Akaike (AIC) (Akaike, 1974), Bayesiano (BIC) (Schwarz, 1978) e Akaike corrigido (AICc) (Bozdogan, 1987) são alternativas a considerar na escolha do melhor modelo, dado serem aplicáveis a modelos baseados na função de verosimilhança. O critério BIC geralmente penaliza mais fortemente os modelos mais complexos (i.e., com maior número de parâmetros), comparativamente aos critérios AIC e AICc (Kass & Raftery, 1995). Resultados numéricos demonstraram que o AIC tende a sobrestimar, i.e., tende a escolher o modelo com mais parâmetros do que o estritamente necessário (Claeskens & Hjort, 2008). Por sua vez, o critério AICc penaliza a adição de parâmetros ao modelo, sendo especialmente útil quando a amostra é de pequena dimensão (Hurvich & Tsai, 1989). Resultados de simulação (Caroni et al., 2015) mostraram que os critérios AICc e BIC detetaram sempre a não-estacionariedade, mas o critério BIC selecionou mais frequentemente o “melhor” modelo, exceto com amostras pequenas. De notar que os critérios de informação AIC, AICc e BIC podem ser usados para comparar quer modelos não-encaixados quer modelos encaixados. Não está estabelecido um valor de referência, acima do qual um modelo é ou não rejeitado, pelo que o modelo mais adequado é aquele que minimiza as quantidades,

$$AIC = -2\ell + 2\rho, \quad [6.11]$$

$$AICc = -2\ell + 2\rho + \frac{2\rho(\rho+1)}{n-\rho-1}, \quad [6.12]$$

$$BIC = -2\ell + \rho \ln n \quad [6.13]$$

onde  $\ell$  representa o valor máximo da função de log-verosimilhança do modelo em análise;  $\rho$  é o número de parâmetros do modelo;  $n$  é o tamanho da amostra.

---

<sup>34</sup> Acerca da correção de Bartlett, mais detalhes em Skovgaard (2001).

#### 6.5.4. RMSE, MAE, ME e %BIAS

A raiz quadrada do erro quadrático médio (RMSE, do inglês, *root mean square error*), também conhecida por raiz quadrada do desvio quadrático médio (RMSD, do inglês, *root mean square deviation*), é uma métrica frequentemente usada para medir a diferença entre os valores observados e os valores estimados pelo modelo (preditos). Ou seja, é a estimativa observada de um erro estatístico não observado (Chai & Draxler, 2014). Os valores mais baixos de RMSE denotam uma melhor qualidade de ajustamento do modelo. A estatística é dada por:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (x_j - y_j)^2}, \quad [6.14]$$

onde  $x_j$  são os valores observados,  $y_j$  são os valores preditos pelo modelo (que nesta tese serão a média da distribuição GEV para cada ponto  $t$ ) e  $m$  é o número de máximos de blocos.

O erro absoluto médio (MAE, do inglês, *mean absolute error*) mede a magnitude média dos erros de um conjunto de predições sem considerar a direção, onde todas as diferenças individuais possuem mesmo peso. Ou seja, em vez de se verificar uma diferença de peso em função da magnitude da diferença, o MAE atribui o mesmo peso para todas as diferenças, de forma linear. Os valores mais baixos de MAE denotam uma melhor qualidade de ajustamento do modelo. A estatística é dada por:

$$MAE = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |x_j - y_j| \quad [6.15]$$

Observação 6.2: não existe nenhum critério absoluto para afirmar que um dado valor (ou intervalo de valores) de RMSE ou MAE é bom. Contudo, dado que o foco das métricas RMSE e MAE é minimizar os resíduos, um ajustamento perfeito está associado a valores de RMSE ou MAE = 0, uma vez que RMSE ou MAE  $\in [0, \infty)$ .

O viés pode ser verificado pelo erro médio (ME, do inglês, *mean error*) e pela percentagem de viés (%BIAS) (Zambrano-Bigiarini, 2017). O ME é dado por:

$$ME = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (x_j - y_j) \quad [6.16]$$

e a percentagem de viés, por:

$$\% \text{BIAS} = \frac{\sum_{j=1}^m (x_j - y_j)}{\sum_{j=1}^m x_j} \times 100, \quad [6.17]$$

com  $x_j$  e  $y_j$  os valores observados e estimados pelo modelo, respetivamente.

O ME é a média dos resíduos. Esta métrica fornece informação acerca da tendência de o modelo sobrestimar ou subestimar o viés. Portanto, quanto mais próximo de zero estiver a média dos resíduos



melhor será a qualidade do modelo. A %BIAS mede a tendência média dos valores estimados pelo modelo serem maiores ou menores que os valores observados. Zero por cento são valores ótimos de viés, valores positivos indicam subestimação do viés do modelo e valores negativos indicam sobrestimação do viés do modelo em análise (Gupta et al., 1999; Botchkarev, 2018). No trabalho de Zambrano-Bigiarini (2020), a interpretação da sub e sobrestimação do viés faz-se ao contrário, uma vez que consideram o erro  $(y_j - x_j)$ .

No caso de processos não-estacionários, a utilização destas métricas é pouco usual. Apresentamos de seguida as etapas que utilizamos para obter os valores  $y_j$ , i.e., os valores estimados (preditos) pelo modelo, com o intuito de calcular as métricas apresentadas em [6.14], [6.15], [6.16] e [6.17].

1. Usar a distribuição  $GEV(\gamma \neq 0)$  ou  $Gumbel(\gamma = 0)$  para obter as estimativas de máxima log-verosimilhança dos parâmetros extremais,

$$Y_t \sim GEV(\hat{\lambda}(t), \hat{\delta}(t), \hat{\gamma}) \text{ ou } Y_t \sim GUM(\hat{\lambda}(t), \hat{\delta}(t)),$$

respetivamente, com  $t=1,2,\dots,m$ .

2. Calcular valores estimados pelo modelo para cada parâmetro em cada ponto  $t$ , com:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(t) &= \hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 t + \hat{\lambda}_2 t^2 + \dots, \\ \hat{\delta}(t) &= \exp(\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 t + \hat{\delta}_2 t^2 + \dots), \\ \gamma(t) &= \gamma \end{aligned}$$

3. Usar a expressão apresentada em [6.18] para obter as estimativas da média da distribuição  $GEV$ ,  $\dot{\bar{y}}_j^{GEV}(t)$ , para cada ponto  $t$ :

$t$	Ano	$x_j$	$y_j = \dot{\bar{y}}_j^{GEV}(t)$
1	Inicial	$x_1$	$y_1$
2	Inicial + 1	$x_2$	$y_2$
...	...	...	...
$m$	2017	$x_m$	$y_m$

A média da distribuição  $GEV$  para cada ponto  $t$ , é dada por:

$$\dot{\bar{Y}}^{GEV}(t) = \begin{cases} \lambda(t) + \delta(t)(g_1 - 1) / \gamma & , \gamma \neq 0, \gamma < 1 \\ \lambda(t) + \delta(t)\Upsilon & , \gamma = 0 \\ \infty & , \gamma \geq 1 \end{cases} \quad [6.18]$$

em que

$$g_1 = \Gamma(1 - \gamma), \quad \Gamma(\cdot) \text{ é a função gama e } \Upsilon = 0.5772156649\dots \text{ é a constante de Euler-Mascheroni.}$$

## 6.6. Diagnóstico do ajustamento

Estimados os candidatos a melhor modelo e selecionado o mais adequado, é necessário assegurar que o modelo final é representativo da série de dados em análise. Contudo, perante a não-estacionariedade não existe homogeneidade nas premissas distributivas para cada observação, na medida em que difere de ano para ano. Portanto, alguma modificação terá que ser efetuada. Já vimos que o parâmetro de forma deverá ser mantido constante e que a tendência, a existir, será nos parâmetros de localização e de escala. Segundo Coles (2001), num processo não-estacionário, geralmente apenas é possível aplicar a verificação do ajustamento a uma versão padronizada dos dados, a qual está dependente dos valores dos parâmetros ajustados. Assim, com base no modelo estimado,

$$X_t \sim GEV(\hat{\lambda}(t), \hat{\delta}(t), \hat{\gamma}),$$

a variável padronizada  $\tilde{X}_t^{GEV}$ , definida por:

$$\begin{aligned} \exp(-\exp(-\tilde{X}_t)) &= \exp\left\{-\left[1 + \hat{\gamma}\left(\frac{X_t - \hat{\lambda}(t)}{\hat{\delta}(t)}\right)\right]^{\frac{1}{\hat{\gamma}}}\right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \tilde{X}_t = \frac{1}{\hat{\gamma}} \ln\left[1 + \hat{\gamma}\left(\frac{X_t - \hat{\lambda}(t)}{\hat{\delta}(t)}\right)\right] \end{aligned} \quad [6.19]$$

e para a distribuição Gumbel, a padronização é dada por:

$$\tilde{X}_t^{GUM} = \frac{X_t - \hat{\lambda}(t)}{\hat{\delta}(t)}, \quad [6.20]$$

em que  $\hat{\lambda}(t)$  e  $\hat{\delta}(t)$  poderão ser um dos modelos apresentados na Secção 6.4.

Como as padronizações [6.19] e [6.20] seguem a distribuição Gumbel padrão (i.e., com  $\lambda=0$  e  $\delta=1$ ), os gráficos de probabilidade-probabilidade (empírica-teórica) e de quantis-quantis (teóricos-empíricos) dos valores observados  $\tilde{x}_t$  podem ser construídos tendo como referência a f.d. Gumbel, ou seja,

$$P(\tilde{X}_t \leq x) = \exp(-\exp(-x)), \quad x \in \mathbb{R}. \quad [6.21]$$

Isto significa que os gráficos de probabilidade e dos quantis dos valores observados  $\tilde{x}_t$  podem ser construídos tendo como referência a distribuição em [6.21].

Desta forma, sendo  $\tilde{x}_{(1)}, \dots, \tilde{x}_{(m)}$  o locus de pontos ordenados de  $\tilde{x}_t$ , também o gráfico de probabilidade consiste nos pares

$$\left\{ \frac{j}{m+1}, \exp(-\exp(-\tilde{x}_{(j)})); j = 1, \dots, m \right\} \quad [6.22]$$

e o gráfico dos quantis nos pares de pontos

$$\left\{ \left( \tilde{x}_{(j)}, -\ln\left[-\ln\left(\frac{j}{m+1}\right)\right] \right); j = 1, \dots, m \right\} \quad [6.23]$$

Observação 6.3: (i) o gráfico de probabilidade é invariante à escolha de f.d. Gumbel como referência, mas o mesmo não ocorre com o gráfico dos quantis, (ii) caso os pontos dos gráficos de probabilidade e dos quantis teóricos e empíricos se concentrem na proximidade ou sobre a reta que representa a função identidade, tal indicia um bom ajustamento dos dados ao modelo em análise, sendo também o contrário válido para os modelos em que os pontos se afastam da linearidade.

### 6.7. Estimação de outras quantidades de interesse

Considere-se o modelo GEV com parâmetro de forma constante e parâmetros de localização e escala dependentes do tempo,

$$X_t \sim GEV(\lambda(t), \delta(t), \gamma), \quad [6.24]$$

no que se segue:

$$t = (\text{ano de inferência} - \text{ano inicial} + 1) \quad [6.25]$$

#### 6.7.1. Quantis extremais

Os quantis extremais obtêm-se invertendo a f.d. GEV [2.24] que no caso não-estacionário é a distribuição GEV [6.1]. A definição de quantil extremal foi dada na “Definição 4.1”. Nesta tese, considerando-se o modelo apresentado em [6.24], a estimativa dos quantis extremais  $\hat{q}_{1-p}$  é dada por:

$$\hat{q}_{1-p} = G_{\hat{\gamma}}^{\leftarrow}(1-p | \hat{\lambda}(t), \hat{\delta}(t)) = U(1/p) = \begin{cases} \hat{\lambda}(t) + \frac{\hat{\delta}(t)}{\hat{\gamma}} \left[ (-\ln(1-p))^{-\hat{\gamma}} - 1 \right], & \hat{\gamma} \neq 0 \\ \hat{\lambda}(t) - \hat{\delta}(t) \ln(-\ln(1-p)), & \hat{\gamma} = 0 \end{cases}, \quad [6.26]$$

onde  $(\hat{\lambda}(t), \hat{\delta}(t), \hat{\gamma})$  são as estimativas de máxima log-verosimilhança de  $(\lambda(t), \delta(t), \gamma)$ , respetivamente.

#### 6.7.2. Probabilidade de excedência

A estimativa da probabilidade de excedência de um nível  $x$  elevado, sujeita a variações no tempo, é dada por:

$$P[C_t > x] = 1 - G_{\hat{\gamma}}(x | \hat{\lambda}(t), \hat{\delta}(t)) = \begin{cases} 1 - \exp \left[ - \left[ 1 + \hat{\gamma} \left( \frac{x - \hat{\lambda}(t)}{\hat{\delta}(t)} \right) \right]^{\frac{1}{\hat{\gamma}}} \right], & \hat{\gamma} \neq 0 \\ 1 - \exp \left[ - \exp \left( - \frac{x - \hat{\lambda}(t)}{\hat{\delta}(t)} \right) \right], & \hat{\gamma} = 0 \end{cases} \quad [6.27]$$

#### 6.7.3. Limite superior do suporte

Quando  $\hat{\gamma} < 0$ , a estimativa por máxima verosimilhança para o limite superior do suporte para o ano  $t$ , é dada por:

$$\hat{x}^F(t) = \hat{\lambda}(t) - \frac{\hat{\delta}(t)}{\hat{\gamma}} \quad [6.28]$$

#### 6.7.4. Níveis de retorno

Ajustada a distribuição GEV não-estacionária à amostra de extremos anuais, os níveis de retorno associados ao período de retorno (ou intervalo de recorrência médio) para  $T$ -anos,  $x_T$ , são estimados a partir da função quantil de cauda de  $F$  (inverso da função de distribuição acumulada),

$$U(T) := F^{\leftarrow}(1-p) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 1-p\}, \quad [6.29]$$

i.e., o quantil que é excedido com probabilidade  $p=1/T$ , com  $0 < p < 1$  e  $T \in [1, \infty[$ , com  $U(T) \equiv x_T$ , cuja estimativa é dada por:

$$\hat{x}_T(t) = \begin{cases} \hat{\lambda}(t) + \frac{\hat{\delta}(t)}{\hat{\gamma}} \left[ (-\ln(1-T^{-1}))^{-\hat{\gamma}} - 1 \right], & \hat{\gamma} \neq 0 \\ \hat{\lambda}(t) - \hat{\delta}(t) \ln(-\ln(1-T^{-1})), & \hat{\gamma} = 0 \end{cases}, \quad [6.30]$$

com  $t$  dado em [6.25] e  $T$  uma covariável que denota o ano para o qual se pretende realizar a inferência, i.e.,  $T=1, 2, \dots$ . Nesta tese,  $T=1$  corresponde ao ano de 2018,  $T=2$  corresponde ao ano de 2019, ..., ou seja,

$$T = (\text{ano de inferência} - 2017) \quad [6.31]$$

Na terminologia comum,  $\hat{x}_T$  é a estimativa do nível de retorno associado ao período de retorno  $T$ .

À semelhança do cálculo realizado para os erros-padrão da estimativa pontual dos parâmetros extremos da distribuição GEV não-estacionária dada em [6.1], também para os níveis de retorno os erros-padrão podem ser obtidos pelo método delta, e a partir deles obter o intervalo com  $100(1-\alpha)\%$  de confiança, usando para o efeito a aproximação à distribuição Normal (Coles, 2001), ou seja,

$$IC_{95\%}(x_T) = \left( \hat{x}_T \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\nabla \hat{x}_T^T V \nabla \hat{x}_T} \right), \quad [6.32]$$

onde  $\nabla \hat{x}_T^T V \nabla \hat{x}_T$  representa a estimativa da variância,  $var(x_T)$ , e  $V$  é a matriz de variâncias-covariâncias para as estimativas  $(\hat{\lambda}, \hat{\delta}, \hat{\gamma})$  de  $(\lambda, \delta, \gamma)$  e

$$\nabla x_T^T = \left[ \frac{\partial x_T}{\partial \lambda}, \frac{\partial x_T}{\partial \delta}, \frac{\partial x_T}{\partial \gamma} \right] = \left[ 1, -\gamma^{-1}(1-y_p^{-\gamma}), \delta \gamma^{-2}(1-y_p^{-\gamma}) - \delta \gamma^{-1} y_p^{-\gamma} \ln y_p \right], \quad [6.33]$$

com  $y_p = -\ln(1-T^{-1})$ . Se  $\hat{\gamma} = 0$  e  $var(x_T)$  é válida, então  $\nabla x_T^T = [1, -\ln y_p]$ .

O método delta admite a normalidade aproximada (convergência em distribuição) na construção dos intervalos com  $100(1-\alpha)\%$  de confiança para  $x_T$  (Coles, 2001). Detalhes do procedimento estacionário podem ser observados em Silva et al. (2017b) e no caso não-estacionário em Cooley (2013) e Obeysekera & Salas (2014).

Porém, para grandes períodos de retorno a aproximação à Normal pode não ser tão precisa quanto a função perfil de log-verosimilhança que surge como melhor opção (Coles, 2001; Gilleland & Katz,

2013). Contudo, ainda que a precisão possa ser melhorada, tal implica que a verosimilhança tenha que ser otimizada por técnicas numéricas, cujo processo, como já assinalado na secção 6.3, para além de computacionalmente pesado é também difícil de automatizar, especialmente no caso de extremos não-estacionários.

## 6.8. APLICAÇÕES

Nesta secção vamos utilizar os resultados das secções anteriores e realizar aplicações a séries de dados não-estacionárias dos lançamentos do disco e martelo feminino do atletismo.

### 6.8.1. Breve descrição dos dados

Consideramos a observação máxima de cada ano, no período de 1980 a 2017 referente ao lançamento do disco feminino e entre 1992 a 2017 no lançamento do martelo feminino. Assim, as amostras são formadas, respetivamente, por 38 e 26 de observações. A obtenção dos dados foi efetuada conforme o exposto no Capítulo 3. Apenas foram aceites as marcas homologadas pela IAAF (*World Athletics*). Não obstante, em algumas situações, consultamos o compêndio da IAAF (2015). Não existem valores omissos.

### 6.8.2. Fases do estudo

A Tabela 6.1 apresenta as fases usadas no processo de modelação sob a não-estacionariedade.

Tabela 6.1 – Fases da modelação das séries de dados não-estacionárias.

Fase I	+ Caracterização das amostras (secção 6.8.3): . estudo da série de dados face a um conjunto de estatísticas descritivas.	– Estatística descritiva: medidas de tendência central e não-central, medidas de dispersão absoluta e relativa e medidas de forma.
Fase II	+ Estudo da estacionariedade (secção 6.8.4): . nas amostras dos lançamentos do disco e martelo feminino do atletismo.	– <i>Turning Point test</i> . – Cox-Stuart <i>trend test</i> . – Gráfico de dispersão com curva <i>lowess</i> ajustada.
Fase III	+ Testar modelos (secção 6.8.5): . apresentar os modelos a estudar.	– Modelo estacionário ( $M_1$ ). – Modelos com tendência ( $M_2$ a $M_9$ ).
Fase IV	+ Incorporar informação (secção 6.8.5.1): . estimativa preliminar dos parâmetros extremais dos modelos apresentados na Fase III. . plausibilidade dos valores obtidos nos parâmetros extremais e erros-padrão. . excluir os modelos que não convergiram, os que resultam de erros-padrão indeterminados e aqueles cujas estimativas aparentam ser não-realistas.	– Resultados da convergência e dos erros-padrão dos parâmetros extremais. – Estimativa dos parâmetros extremais por máxima log-verosimilhança. – Convergência: algoritmos de otimização de Nelder-Mead, BFGS e L-BFGS-B.
Fase V	+ Estimativas dos parâmetros extremais dos modelos não eliminados na Fase IV (secção 6.8.6): . estimar os parâmetros extremais, erros-padrão e construir intervalos de confiança de diversos modelos perante situações de tendência linear e quadrática.	– Estimativa dos parâmetros extremais por máxima log-verosimilhança. – Métodos de otimização de Nelder-Mead e BFGS, e escolher o modelo com melhor ajustamento.
Fase VI	+ Seleção do modelo (secção 6.8.7): . informação gráfica preliminar (secção 6.8.7.1 e Anexo 6.3 para o lançamento do disco e Anexo 6.4 para o lançamento do martelo), acerca dos modelos selecionados na Fase V.	– Gráfico de probabilidade residual. – Gráfico de quantis residuais.
Fase VII	+ Comparar modelos: . modelos encaixados (secção 6.8.7.2). . modelos não-encaixados (secção 6.8.7.3).	– Estatística <i>Deviance</i> corrigida. – Critérios de Informação: AIC, AICc e BIC.
Fase VIII	+ Decidir (secção 6.8.7.4 e 6.8.7.4.1):	– Estatísticas anteriores. – RMSE, MAE, ME e %BIAS.

	. modelo a ser usado na estimação de outras quantidades de interesse (e.g., níveis de retorno).	– “Parcimónia” dos modelos. – Estudo de simulação.
Fase IX	+ Diagnóstico do modelo (secção 6.8.8): . gráficos de probabilidade residual e de quantis residuais do melhor modelo, referenciado na Fase VIII.	– Gráfico de probabilidade residual. – Gráfico de quantis residuais.
Fase X	+ Modelo final (secção 6.8.9): . apresentar algumas características do modelo considerado mais adequado.	– Evolução dos parâmetros de localização e escala com o tempo (Anexo 6.5).
Fase XI	+ Estimar outras quantidades de interesse (secção 6.9)	– Quantis extremos. – Probabilidades de excedência. – Limite superior do suporte – Níveis de retorno associados a $T$ -anos.

### 6.8.3. Caracterização da amostra

A Tabela 6.2 apresenta as estatísticas descritivas da amostra. O valor mínimo da amostra de lançamento do disco pertence a Li Yanfeng (CHN) conseguido em 2009, e no lançamento do martelo pertence a Olga Kuzenkova (RUS) em 1993; já o máximo de cada amostra corresponde aos atuais recordes do mundo que, no lançamento do disco foi obtido em 1988 por Gabriele Reinsch (RDA) e no lançamento do martelo em 2016 por Anita Wlodarczyk (POL). O coeficiente de variação (CV) revela fraca dispersão nos máximos anuais das duas amostras, i.e.,  $CV=3.3\%$  no lançamento do disco e  $CV=6.6\%$  no lançamento do martelo. A média nas amostras do lançamento do disco e do lançamento do martelo, está cerca de 9% e 10% abaixo do recorde do mundo, respetivamente, com o  $IC_{95\%}(\mu)=(69.64; 71.14)$  no lançamento do disco e  $IC_{95\%}(\mu)=(73.51; 77.35)$  no lançamento do martelo. Na amostra de lançamento do disco, o valor positivo da assimetria ( $\gamma_1>0$ ) informa que a cauda direita é mais longa e que a série tem frequência relativamente grande de baixos resultados, ao passo que na amostra de lançamento do martelo o valor negativo da assimetria ( $\gamma_1<0$ ) indica que a cauda esquerda é mais longa e que a maior parte das observações estão concentradas na proximidade do máximo. Na amostra de lançamento do disco a curtose  $\gamma_2>0$ , indica que se está perante uma curva ligeiramente mais elevada do que a curva normal, sugerindo uma aparência leptocúrtica, já na amostra de lançamento do martelo uma vez que  $\gamma_2\sim 0$  a curva que caracteriza a série de dados poderá ser considerada mesocúrtica.

Tabela 6.2 – Caracterização das amostras de lançamentos do disco e do martelo feminino: tamanho, média, desvio-padrão, valores mínimo e máximo, 1º, 2º e 3º quartis, assimetria e curtose.

	$n$	$\bar{x}$	$s$	Mín	Máx	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	Skewness ( $\gamma_1$ )	Kurtosis ( $\gamma_2$ )
L. Disco	38	70.39	2.350	66.40	76.80	68.71	70.01	71.45	0.670 (0.383)	0.255 (0.750)
L. Martelo	26	75.43	4.998	64.64	82.98	73.23	76.57	78.67	-0.728 (0.456)	-0.098 (0.887)

Observação 6.4: no cálculo da assimetria (*Skewness*,  $\gamma_1$ ), curtose (*Kurtosis*,  $\gamma_2$ ) e respetivos erros-padrão seguimos a convenção adotada pelo IBM SPSS (Anexo 6.2).

O histograma com a estimativa da curva de densidade e o diagrama de extremos e quartis são mostrados na Figura 6.1. A estimativa da curva de densidade no caso do lançamento do disco apresenta uma ligeira

assimetria à direita e no caso do lançamento do martelo uma acentuada assimetria à esquerda, embora neste último com uma aparência bimodal. No lançamento do disco, a maior concentração de marcas está situada no intervalo [68; 72[ ( $n=26$ , 68.4%) e no lançamento do martelo no intervalo [75; 80] ( $n=14$ , 53.8%).

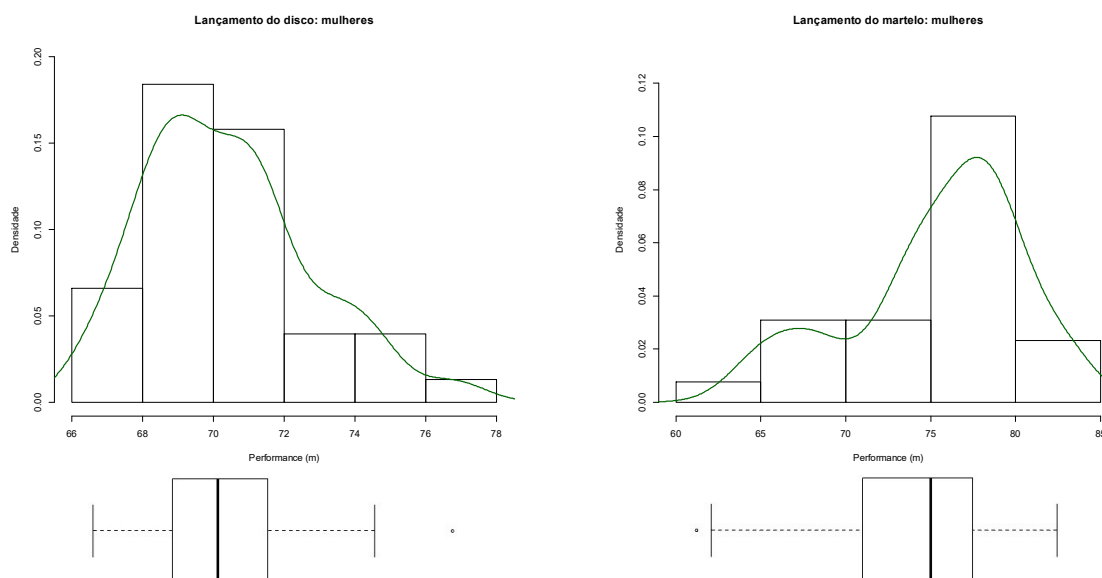


Figura 6.1 – Histograma com a estimativa da curva de densidade e diagrama de extremos e quartis referentes aos valores máximos nos lançamentos do disco (à esquerda) e do martelo (à direita) feminino, no período de 1980-2017 e 1992-2017, respetivamente.

Para mais adiante percebermos alguns dos resultados obtidos, efetuamos uma análise por décadas considerando apenas a média aritmética, o desvio-padrão e o coeficiente de variação (Tabela 6.3). Verifica-se uma oscilação do valor médio no lançamento do disco feminino, com o valor médio mais elevado da 1ª década e a dispersão a reduzir até à 3ª década; já no lançamento do martelo feminino, ocorre o incremento gradual dos valores médios e a redução da dispersão ao longo das décadas. De notar que nas duas amostras o atual recorde do mundo foi conseguido, precisamente, na década com valor médio mais elevado.

Tabela 6.3 – Caracterização das amostras por décadas: média, desvio-padrão e coeficiente de variação.

Décadas	Lançamento do disco			Lançamento do martelo		
	$\bar{x}$	$s$	CV (%)	$\bar{x}$	$s$	CV (%)
1980-1989	73.41	1.676	2.3	---	---	---
1990-1999	69.89	1.129	1.6	69.75	4.158	6.0
2000-2009	68.23	1.071	1.6	76.14	1.895	2.5
2010-2017	69.93	1.458	2.1	80.22	1.870	2.3

#### 6.8.4. Estacionariedade

Pela Figura 6.2, observa-se que na amostra de lançamento do disco feminino, ocorre uma tendência linear decrescente, embora marcada por períodos crescentes (1980-1988 e 2010-2017) e decrescente



(1989-2009) ao longo do tempo. Na amostra de lançamento do martelo feminino, observa-se uma tendência linear acentuadamente crescente ao longo do tempo, embora com uma mais pronunciada inflexão no ano 1999 que se mantém até 2002. O traçado destes gráficos sugere que os dados poderão ser expressos por um modelo com tendência temporal linear (lançamento do martelo) e quadrática (lançamento do disco), não sendo sugestiva a tendência cúbica das séries. Para melhor compreender esta tendência, observe-se a curva *LOWESS* ajustada aos dados de cada amostra (Figura 6.2), relacionando o tempo com a performance, com o intuito de prever tendências. Nesta tese, usamos 3 iterações de robustez, um polinómio local de grau 1 e parâmetro de suavização  $f=2/3$ , ou seja, cerca de 66.7% de suavização (ou 66.7% das observações dentro de cada janela). Para mais detalhe, consultar Anexo 4.1, Figuras A4.6 e A4.7.

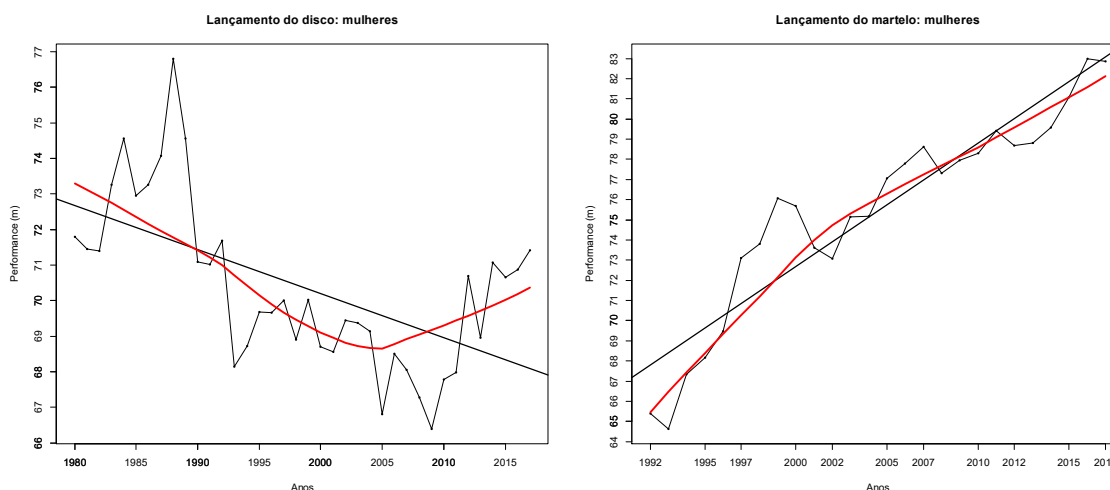


Figura 6.2 – Máximos anuais no lançamento do disco feminino, no período de 1980-2017 (à esquerda) e no lançamento do martelo feminino, no período de 1992-2017 (à direita), com a sobreposição da linha de tendência linear e da curva *LOWESS* estimadas.

Formalmente, a tendência de uma série temporal pode ser verificada pelo Cox-Stuart *trend test*, proposto por Cox & Stuart (1955). A um nível de significância  $\alpha=0.05$ , os resultados deste teste com a amostra de lançamento do disco ( $S=4$ ,  $p=0.0192$ ) e do lançamento do martelo ( $S=13$ ,  $p=0.000244$ ) indiciam a presença de tendência monótona e significativa nas séries, rejeitando-se por isso a hipótese nula da ausência de tendência. Também pelo teste de Mann-Kendall *trend test* se deteta a presença de tendência monótona decrescente do lançamento do disco ( $z=-3.6213$ ,  $n=38$ ,  $p=0.0002931$ ) e crescente no lançamento do martelo ( $z=6.2157$ ,  $n=38$ ,  $p<0.0001$ ). Igualmente, pelo coeficiente de correlação de Spearman se deteta a presença de tendência significativa nestas séries temporais (lançamento do disco:  $S=14617$ ,  $r_s=-0.599$ ,  $p<0.00001$ ; lançamento do martelo:  $S=102$ ,  $r_s=0.965$ ,  $p<0.00001$ ). Os desenvolvimentos e a verificação da aleatoriedade e da tendência das amostras em estudo neste capítulo podem ser consultados no Anexo 2, Tabela A2.2 e no Anexo 3, Tabela A3.2.

### 6.8.5. Modelos a estudar

Já vimos que as séries de lançamentos do disco e martelo feminino apresentam evidências estatisticamente significativas de não-estacionariedade. Realizamos uma análise prévia considerando 9 modelos com diferente número e combinações dos parâmetros ( $\rho$ ), dos quais 1 estacionário ( $M_1$ ) e 8 não-estacionários: (i) com tendência linear ( $M_2$  a  $M_4$ ) e (ii) com tendência quadrática ( $M_5$  a  $M_9$ ). Nos modelos não-estacionários, tomou-se o tempo ( $t$ ) como covariável nos parâmetros extremais ( $\lambda, \delta, \gamma$ ). Seguimos as recomendações de Coles (2001) e Katz (2013) e os resultados de Silva et al (2018a) e não consideramos a tendência no parâmetro de forma. Pretendemos, sempre que os argumentos teóricos o justifiquem, testar modelos GEV ( $\gamma \neq 0$ ) vs Gumbel ( $\gamma = 0$ ), pois conforme assinalam Nadarajah & Choi (2007) por vezes o modelo Gumbel proporciona um ajuste tão bom ou melhor que o modelo GEV. Numa abordagem inicial iremos considerar os modelos GEV (com a modificação natural para o modelo Gumbel, quando  $\gamma = 0$ ) resumidos na Tabela 6.4.

Tabela 6.4 – Modelos de valores extremos a estudar.

	Modelos	$X_t \sim \text{GEV}(\theta)$	$\lambda$	$\delta$	$\gamma$	$\rho$
Estacionário	$M_1$	$X \sim \text{GEV}(\lambda, \delta, \gamma)$	$\lambda = \text{constante}$	$\delta = \text{constante}$	$\gamma = \text{constante}$	3
Tendência Linear	$M_2$	$X_t \sim \text{GEV}(\lambda(t), \delta, \gamma)$	$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t$	$\delta = \text{constante}$	$\gamma = \text{constante}$	4
	$M_3$	$X_t \sim \text{GEV}(\lambda, \delta(t), \gamma)$	$\lambda = \text{constante}$	$\delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t)$	$\gamma = \text{constante}$	4
	$M_4$	$X_t \sim \text{GEV}(\lambda(t), \delta(t), \gamma)$	$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t$	$\delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t)$	$\gamma = \text{constante}$	5
Tendência Quadrática	$M_5$	$X_t \sim \text{GEV}(\lambda(t), \delta, \gamma)$	$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2$	$\delta = \text{constante}$	$\gamma = \text{constante}$	5
	$M_6$	$X_t \sim \text{GEV}(\lambda, \delta(t), \gamma)$	$\lambda = \text{constante}$	$\delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2)$	$\gamma = \text{constante}$	5
	$M_7$	$X_t \sim \text{GEV}(\lambda(t), \delta(t), \gamma)$	$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2$	$\delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t)$	$\gamma = \text{constante}$	6
	$M_8$	$X_t \sim \text{GEV}(\lambda(t), \delta(t), \gamma)$	$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t$	$\delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2)$	$\gamma = \text{constante}$	6
	$M_9$	$X_t \sim \text{GEV}(\lambda(t), \delta(t), \gamma)$	$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2$	$\delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2)$	$\gamma = \text{constante}$	7

O modelo  $M_1$  está encaixado em todos os modelos, podendo assim dizer-se que é um caso particular de todos os modelos em análise. Os modelos  $M_2$  e  $M_3$  estão encaixados nos modelos  $M_4$  a  $M_9$ . Por sua vez, os modelos  $M_4$ ,  $M_5$  e  $M_6$  estão encaixados nos modelos  $M_7$  a  $M_9$ ; os modelos  $M_7$  e  $M_8$  estão encaixados no modelo  $M_9$ . Os modelos com o mesmo número de parâmetros são não-encaixados, ou seja, os modelos  $M_2$  e  $M_3$  ( $\rho=4$ ), os modelos  $M_4$ ,  $M_5$  e  $M_6$  ( $\rho=5$ ), os modelos  $M_7$  e  $M_8$  ( $\rho=6$ ). Nos modelos  $M_2$ ,  $M_3$ , ...,  $M_9$ , pelo menos um parâmetro extremal irá ser modelado em função do tempo. Nos modelos GEV/Gumbel com tendência no parâmetro de escala, foi feita uma ligação log-linear ( $M_3$  e  $M_4$ ) e log-quadrática ( $M_6$ ,  $M_8$  e  $M_9$ ), que decorrente da função exponencial garante que este parâmetro seja sempre positivo para  $\Delta t$ . Nos modelos  $M_1$ ,  $M_3$  e  $M_6$  assumimos que o parâmetro de localização é constante com o tempo. Em todos os modelos mantivemos o parâmetro de forma constante.

Observação 6.5: os modelos Gumbel só serão usados se e só se os argumentos teóricos e os resultados obtidos justificarem essa necessidade, e.g.,  $IC_{100(1-\alpha)\%}(\gamma) = ]-a; b[$ , com  $a, b > 0$ .

Observação 6.6: realizamos uma análise exploratória prévia envolvendo modelos com tendência cúbica (Tabela 6.5), o qual mostrou que tais modelos genericamente são inadequados pelas razões apresentadas na Tabela 6.6.

Tabela 6.5 – Modelos com tendência cúbica não considerados neste estudo.

$X_i \sim \text{GEV}(\theta)$	$\lambda$	$\delta$	$\gamma$	$\rho$	Modelos
$X_i \sim \text{GEV}(\lambda(t), \delta, \gamma)$	$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t^3$	$\delta = \text{constante}$	$\gamma = \text{constante}$	6	M <sub>10</sub>
$X_i \sim \text{GEV}(\lambda(t), \delta(t), \gamma)$	$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t^3$	$\delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t)$	$\gamma = \text{constante}$	7	M <sub>11</sub>
$X_i \sim \text{GEV}(\lambda(t), \delta(t), \gamma)$	$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t^3$	$\delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2)$	$\gamma = \text{constante}$	8	M <sub>12</sub>
$X_i \sim \text{GEV}(\lambda, \delta(t), \gamma)$	$\lambda = \text{constante}$	$\delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \delta_3 t^3)$	$\gamma = \text{constante}$	6	M <sub>13</sub>
$X_i \sim \text{GEV}(\lambda(t), \delta(t), \gamma)$	$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t$	$\delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \delta_3 t^3)$	$\gamma = \text{constante}$	7	M <sub>14</sub>
$X_i \sim \text{GEV}(\lambda(t), \delta(t), \gamma)$	$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2$	$\delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \delta_3 t^3)$	$\gamma = \text{constante}$	8	M <sub>15</sub>
$X_i \sim \text{GEV}(\lambda(t), \delta(t), \gamma)$	$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t^3$	$\delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \delta_3 t^3)$	$\gamma = \text{constante}$	9	M <sub>16</sub>

Tabela 6.6 – Características dos modelos com tendência cúbica não considerados neste estudo.

Amostras	Modelos GEV ( $\gamma \neq 0$ )	Modelos Gumbel ( $\gamma = 0$ )
Lançamento do disco	---	M <sub>10</sub> , ..., M <sub>16</sub>
. Falta de convergência		
. Não são calculados erros-padrão	M <sub>10</sub> , M <sub>11</sub> , M <sub>12</sub> , M <sub>15</sub> , M <sub>16</sub>	
. Fraco ajuste gráfico	M <sub>13</sub> , M <sub>14</sub> , M <sub>15</sub> , M <sub>16</sub>	
Lançamento do martelo	---	M <sub>13</sub> , ..., M <sub>16</sub>
. Falta de convergência		
. Não são calculados erros-padrão	M <sub>10</sub> , M <sub>11</sub> , M <sub>15</sub>	M <sub>10</sub>
. Fraco ajuste gráfico	M <sub>12</sub> , M <sub>13</sub> , M <sub>14</sub> , M <sub>15</sub> , M <sub>16</sub>	M <sub>10</sub> , M <sub>11</sub> , M <sub>12</sub>

### 6.8.5.1. Incorporar informação

Com base na convergência do modelo (pelos algoritmos de Nelder-Mead, BFGS e L-BFGS-B), na estimativa pontual dos parâmetros extremais e respectivos erros-padrão, excluímos os seguintes modelos pelas razões que se apresentam:

+ Lançamento do disco feminino:

– modelos GEV: M<sub>5</sub>, M<sub>8</sub> e M<sub>9</sub>, não são calculados erros-padrão da estimativa pontual de vários parâmetros extremais.

– modelo Gumbel: M<sub>9</sub>, não são calculados erros-padrão da estimativa pontual de um parâmetro extremal.

+ Lançamento do martelo feminino:

– modelos GEV: M<sub>6</sub>, M<sub>7</sub> e M<sub>8</sub>, não são calculados erros-padrão da estimativa pontual de vários parâmetros extremais.

– modelos Gumbel: M<sub>7</sub> e M<sub>9</sub>, não são calculados erros-padrão da estimativa pontual de pelo menos um parâmetro extremal.

Observação 6.7: se um modelo converge, mas não são calculados erros-padrão da estimativa pontual dos parâmetros extremais, tal situação não permite obter informação acerca do desvio dos respectivos parâmetros e impossibilita uma análise mais detalhada com intervalos de confiança. Por estas razões, estes modelos têm menos interesse estatístico. Não obstante o não cálculo dos erros-padrão, os gráficos de diagnóstico destes modelos apresentaram um fraco ajustamento.

A Tabela 6.7 apresenta o resumo dos modelos que foram excluídos e respectivas razões.

Tabela 6.7 – Modelos excluídos em cada amostra e razões da exclusão.

Lançamento do disco feminino, 1980-2017		Lançamento do martelo feminino, 1992-2017	
Modelos GEV	Modelos Gumbel	Modelos GEV	Modelos Gumbel
+ Modelo 5	+ Modelo 9	+ Modelo 6	+ Modelo 7
$se(\lambda_0) = \text{Ind}$	$se(\lambda_1) = \text{Ind}$	$se(\delta_0) = \text{Ind}$	$se(\lambda_1) = \text{Ind}$
$se(\lambda_1) = \text{Ind}$			$se(\lambda_2) = \text{Ind}$
$se(\lambda_2) = \text{Ind}$		+ Modelo 7	
$se(\delta) = \text{Ind}$		$se(\lambda_0) = \text{Ind}$	+ Modelo 9
$se(\gamma) = \text{Ind}$		$se(\lambda_1) = \text{Ind}$	$se(\lambda_2) = \text{Ind}$
+ Modelo 8		+ Modelo 8	
$se(\lambda_0) = \text{Ind}$		$se(\delta_2) = \text{Ind}$	
$se(\lambda_1) = \text{Ind}$		$se(\gamma) = \text{Ind}$	
$se(\delta_0) = \text{Ind}$			
$se(\delta_1) = \text{Ind}$			
$se(\gamma) = \text{Ind}$			
+ Modelo 9			
$se(\lambda_2) = \text{Ind}$			
<i>se</i> , erro-padrão ( <i>standard error</i> )		Ind, indeterminado	

#### 6.8.6. Estimação dos parâmetros

As Tabelas 6.8, 6.10, 6.11 e 6.13 apresentam as estimativas pontuais e respetivos erros-padrão dos parâmetros extremais  $\theta(t) = (\lambda(t), \delta(t), \gamma)$  dos modelos GEV e Gumbel não-rejeitados do lançamento do disco e martelo feminino. As Tabelas 6.9 e 6.10 para a amostra de lançamento do disco e as Tabelas 6.12 e 6.13 para a amostra de lançamento do martelo apresentam as estimativas dos intervalos com 95% de confiança para os parâmetros extremais.

Nas duas amostras, não obstante, ter sido detetada a não-estacionariedade, o modelo  $M_1$  irá ser mantido no estudo, dado ser um submodelo de todos os restantes modelos.

Em todos os modelos e para as duas amostras:

- (i) sempre que se verificou a convergência dos algoritmos de otimização numérica de Nelder-Mead e BFGS, escolheu-se o modelo que significativamente maximizava a função de log-verosimilhança e apresentava a melhor qualidade com base na representação gráfica;
- (ii) o parâmetro de forma não depende do tempo,  $\gamma(t) = \gamma$ .

A Tabela 6.8 apresenta o valor máximo da função de log-verosimilhança, a estimativa pontual e erros-padrão dos parâmetros extremais da distribuição GEV, bem como o algoritmo de otimização utilizado, para a amostra de **lançamento do disco feminino**, no período de 1980-2017. Os resultados mostram que:

– Em todos os modelos a convergência foi conseguida pelo algoritmo de otimização de Nelder-Mead.

- Nos modelos  $M_1$ ,  $M_3$ ,  $M_6$  e  $M_7$ , verifica-se que  $\hat{\gamma} < 0$ , sugerindo a presença de uma cauda curta/leve, característica dos modelos Weibull.
- O modelo  $M_7$  regista  $\hat{\gamma} < -0.5$ , podendo comprometer as condições de regularidade apresentadas por Smith (1985).
- Nos modelos  $M_2$  e  $M_4$  verifica-se que  $\hat{\gamma} > 0$ , sugerindo a presença de uma cauda pesada, transportando-nos para o domínio do modelo de Fréchet.
- Nos modelos  $M_2$  e  $M_4$ , pelo facto da estimativa de  $\lambda_1 < 0$ , o parâmetro de localização diminui com  $t$  e no modelo  $M_7$  aumenta (Anexo 6.5.1, (i)).
- Nos modelos  $M_3$  e  $M_7$ , o parâmetro de escala diminui com o tempo; nos modelos  $M_4$  e  $M_6$  este parâmetro aumenta com  $t$ . No caso do modelo  $M_6$  a partir do ano 2030, os valores são irrealistas (Anexo 6.5.1, (ii)).

Tabela 6.8 – Valor máximo da função de log-verosimilhança, estimativa dos parâmetros extremais e respetivos erros-padrão (entre parêntesis) da **distribuição generalizada de valores extremos** na amostra de **lançamento do disco feminino**, no período de 1980-2017.

$M_1$	$\hat{\ell}=-84.11954$	$\lambda=69.3740$ (0.3603)	$\delta=1.9561$ (0.2602)	$\gamma=-0.0680$ (0.1282)	-----	-----	-----	NM
$M_2$	$\hat{\ell}=-75.31236$	$\lambda_0=72.1938$ (0.5761)	$\lambda_1=-0.1376$ (0.0274)	$\delta=1.4804$ (0.2064)	$\gamma=0.0097$ (0.1454)	-----	-----	NM
$M_3$	$\hat{\ell}=-81.60296$	$\lambda=69.1013$ (0.3315)	$\delta_0=1.3293$ (0.2768)	$\delta_1=-0.0299$ (0.0101)	$\gamma=-0.2854$ (0.1272)	-----	-----	NM
$M_4$	$\hat{\ell}=-75.04471$	$\lambda_0=72.2541$ (0.5285)	$\lambda_1=-0.1409$ (0.0259)	$\delta_0=0.2229$ (0.2639)	$\delta_1=0.0084$ (0.0115)	$\gamma=0.0075$ (0.1346)	-----	NM
$M_6$	$\hat{\ell}=-78.65054$	$\lambda=68.5271$ (0.1658)	$\delta_0=3.4000$ (0.3279)	$\delta_1=-0.2631$ (0.0103)	$\delta_2=0.0052$ (0.0001)	$\gamma=-0.4752$ (0.1493)	-----	NM
$M_7$	$\hat{\ell}=-72.60356$	$\lambda_0=74.1014$ (1.5567)	$\lambda_1=-0.5438$ (0.0504)	$\lambda_2=0.0122$ (0.0001)	$\delta_0=2.0813$ (0.6010)	$\delta_1=-0.0651$ (0.0172)	$\gamma=-0.6577$ (0.2243)	NM

NM – algoritmo de otimização de Nelder–Mead

A Tabela 6.9 apresenta os intervalos com 95% de confiança para os parâmetros extremais dos 6 modelos testados (considerados na Tabela 6.8) no **lançamento do disco feminino**, com base na aproximação assintótica à distribuição Normal dos estimadores de máxima verosimilhança usados na distribuição GEV. Verifica-se que:

- Nos modelos  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_4$  uma vez que  $IC_{95\%}(\gamma) \supset 0$ , tal sugere que o modelo Gumbel deverá ser testado como modelo alternativo possível.
- Nos modelos  $M_3$ ,  $M_6$  e  $M_7$ , uma vez que os limites do  $IC_{95\%}(\gamma) < 0$ , sugere por um lado que a sequência de dados é melhor descrita por um parâmetro de forma negativo, correspondente ao domínio max-Weibull, e por outro que o modelo Gumbel não deverá ser considerado.
- Em nenhum dos modelos apresentados se observa que ambos os limites do  $IC_{95\%}(\gamma) > 0$ .
- O facto de nos modelos  $M_3$ ,  $M_4$ ,  $M_6$  e  $M_7$ , pelo menos um dos limites  $IC_{95\%}(\delta)$  estar representado por um valor negativo, tal não é relevante dada a ligação logarítmica usada nas estimativas pontuais do parâmetro de escala, fazendo com este parâmetro seja sempre positivo, conforme restrição da própria distribuição GEV.

Tabela 6.9 – Intervalos com 95% de confiança para estimativa dos parâmetros extremais nos modelos testados, na amostra de **lançamento do disco feminino**, no período de 1980-2017.

M <sub>1</sub>	$\lambda$ : (68.668; 70.080)	$\delta$ : (1.446; 2.466)	$\gamma$ : (-0.319; 0.183)	----	----	----
M <sub>2</sub>	$\lambda_0$ : (71.090; 73.349)	$\lambda_1$ : (-0.191; -0.084)	$\delta$ : (1.076; 1.885)	$\gamma$ : (-0.275; 0.295)	----	----
M <sub>3</sub>	$\lambda$ : (68.451; 69.751)	$\delta_0$ : (0.787; 1.872)	$\delta_1$ : (-0.050; 0.010)	$\gamma$ : (-0.535; -0.036)	----	----
M <sub>4</sub>	$\lambda_0$ : (71.218; 73.290)	$\lambda_1$ : (-0.192; -0.090)	$\delta_0$ : (-0.294; 0.740)	$\delta_1$ : (-0.014; 0.031)	$\gamma$ : (-0.256; 0.271)	----
M <sub>6</sub>	$\lambda$ : (68.202; 68.852)	$\delta_0$ : (2.757; 4.043)	$\delta_1$ : (-0.283; -0.243)	$\delta_2$ : (0.0052; 0.0053)	$\gamma$ : (-0.768; -0.183)	----
M <sub>7</sub>	$\lambda_0$ : (71.050; 77.153)	$\lambda_1$ : (-0.643; -0.445)	$\lambda_2$ : (0.012; 0.012)	$\delta_0$ : (0.903; 3.259)	$\delta_1$ : (-0.099; -0.031)	$\gamma$ : (-1.097; -0.218)

A Tabela 6.10 apresenta o valor máximo da função de log-verossimilhança, a estimativa pontual e erros-padrão dos parâmetros extremais e os intervalos com 95% de confiança da distribuição Gumbel, bem como o algoritmo de otimização utilizado, referentes à amostra de **lançamento do disco feminino**, no período de 1980-2017. Observamos na Tabela 6.7 que o modelo M<sub>9</sub> (GEV/Gumbel) não gera erros-padrão da estimativa pontual de pelo menos um parâmetro extremal. Igualmente, com base na informação da Tabela 6.9, verificamos que nos modelos M<sub>3</sub>, M<sub>6</sub> e M<sub>7</sub> os limites do  $IC_{95\%}(\gamma) < 0$  levando à rejeição do modelo Gumbel. Portanto, restam os modelos M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>, M<sub>4</sub>, M<sub>5</sub> e M<sub>8</sub>. Assim, verifica-se que:

- Em todos os modelos a convergência foi conseguida pelo algoritmo de otimização de Nelder-Mead.
- Nos modelos com tendência no parâmetro de localização,  $\lambda_k$ , com  $k=0,1,2$ , verifica-se que os modelos M<sub>2</sub>, M<sub>4</sub> e M<sub>8</sub> registam valores decrescentes com o tempo, e o modelo M<sub>5</sub> valores crescentes (Anexo 6.5.1, (i)).
- Nos modelos com tendência no parâmetro de escala,  $\delta_k$ , com  $k=0,1,2$ , verifica-se que os modelos M<sub>4</sub> e M<sub>8</sub> registam valores crescentes com o tempo (Anexo 6.5.1, (ii)).

Tabela 6.10 – Valor máximo da função de log-verossimilhança, estimativa dos parâmetros extremais, erros-padrão e intervalos com 95% de confiança (entre parêntesis) da **distribuição Gumbel**, na amostra de **lançamento do disco feminino**, no período de 1980-2017.

M <sub>1</sub>	$\ell=-84.24969$	$\lambda=69.3029$ (0.3278) (68.660; 69.945)	$\delta=1.9155$ (0.2413) (1.443; 2.388)	----	----	NM
M <sub>2</sub>	$\ell=-75.31463$	$\lambda_0=72.1940$ (0.5782) (71.061; 73.327)	$\lambda_1=-0.1372$ (0.0269) (-0.190; -0.085)	$\delta=1.4858$ (0.1916) (1.110; 1.861)	----	NM
M <sub>4</sub>	$\ell=-75.04624$	$\lambda_0=72.2596$ (0.5222) (71.236; 73.283)	$\lambda_1=-0.1409$ (0.0260) (-0.192; -0.090)	$\delta_0=0.2263$ (0.2575) (-0.278; 0.731)	$\delta_1=0.0084$ (0.0115) (-0.014; 0.031)	NM
M <sub>5</sub>	$\ell=-71.59280$	$\lambda_0=73.4470$ (0.7023) (72.070; 74.824)	$\lambda_1=-0.36692$ (0.0908) (-0.545; -0.189)	$\lambda_2=0.0066$ (0.0024) (0.002; 0.011)	$\delta=1.3777$ (0.2280) (0.931; 1.825)	NM
M <sub>8</sub>	$\ell=-73.78083$	$\lambda_0=72.0723$ (0.7102) (70.680; 73.464)	$\lambda_1=-0.1472$ (0.0341) (-0.214; -0.080)	$\delta_0=1.2139$ (0.2913) (-0.643; 1.785)	$\delta_1=0.1182$ (0.0166) (-0.151; 0.086)	NM
					$\delta_2=0.0029$ (0.0001) (0.002; 0.004)	

NM – algoritmo de otimização de Nelder-Mead

A Tabela 6.11 apresenta o valor máximo da função de log-verossimilhança, a estimativa pontual dos parâmetros extremais e respetivos erros-padrão da distribuição GEV, bem como o algoritmo de otimização utilizado, referentes à amostra de **lançamento do martelo feminino**, no período de 1992-2017. Verifica-se que:

- No modelo  $M_5$  a convergência foi conseguida pelo algoritmo de otimização BFGS e nos restantes modelos pelo algoritmo de Nelder-Mead.
- Nos modelos  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_4$  e  $M_5$  verifica-se que  $\hat{\gamma} < 0$ , sugerindo a presença de uma cauda leve ou curta, característica dos modelos Weibull. Contudo, os modelos  $M_1$  e  $M_5$  apresentam  $\hat{\gamma} < -0.5$ , comprometendo as condições de regularidade apresentadas por Smith (1985).
- O modelo  $M_3$  apresenta valor de  $\hat{\gamma} \sim 1$  e o modelo  $M_9$  apresenta valor  $\hat{\gamma} > 3$ , i.e., valores pouco plausíveis de ocorrerem, para além de que quando  $\gamma > 1$  a média torna-se infinita.
- Considerando os modelos com dependência temporal no parâmetro de localização  $\lambda_k$ , com  $k=0,1,2$ , verifica-se que nos modelos  $M_2$ ,  $M_4$  e  $M_5$  este parâmetro aumenta com  $t$  e no modelo  $M_9$  diminui (Anexo 6.5.2, (i)).
- Em todos os modelos com tendência no parâmetro de escala  $\delta_k$ , com  $k=0,1,2$ , verifica-se uma diminuição das estimativas com o tempo (Anexo 6.5.2, (ii)).

Tabela 6.11 – Valor máximo da log-verosimilhança, estimativa dos parâmetros extremais e respetivos erros-padrão (entre parêntesis) da **distribuição generalizada de valores extremos**, na amostra de **lançamento do martelo feminino**, no período de 1992-2017.

$M_1$	$\ell=-76.24765$	$\lambda=74.4289$ (1.1551)	$\delta=5.3858$ (0.9190)	$\gamma=-0.5774$ (0.1448)	-----	-----	-----	NM
$M_2$	$\ell=-50.58567$	$\lambda_0=65.8662$ (0.7788)	$\lambda_1=0.6531$ (0.0447)	$\delta=1.5266$ (0.2593)	$\gamma=-0.1039$ (0.1845)	-----	-----	NM
$M_3$	$\ell=-70.46577$	$\lambda=79.1987$ (0.7959)	$\delta_0=3.6172$ (0.4369)	$\delta_1=-0.1465$ (0.0263)	$\gamma=0.9909$ (0.4657)	-----	-----	NM
$M_4$	$\ell=-45.65626$	$\lambda_0=67.4202$ (0.7891)	$\lambda_1=0.5713$ (0.0363)	$\delta_0=1.2283$ (0.2996)	$\delta_1=-0.0625$ (0.0162)	$\gamma=-0.3954$ (0.2020)	-----	NM
$M_5$	$\ell=-59.94623$	$\lambda_0=73.0612$ (1.4545)	$\lambda_1=-0.2946$ (0.1010)	$\lambda_2=0.0227$ ( $<0.0001$ )	$\delta=3.4675$ (0.8771)	$\gamma=-0.7575$ (0.1397)	-----	BFGS
$M_9$	$\ell=-62.28616$	$\lambda_0=76.8762$ (0.0166)	$\lambda_1=0.4480$ ( $<0.0001$ )	$\lambda_2=-0.0136$ ( $<0.0001$ )	$\delta_0=3.8199$ (0.0793)	$\delta_1=-0.0145$ ( $<0.0001$ )	$\gamma=3.3047$ (0.2898)	NM
						$\delta_2=-0.0041$ ( $<0.0001$ )		

NM – algoritmo de otimização de Nelder–Mead

BFGS – algoritmo de otimização de Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno

A Tabela 6.12 apresenta os intervalos com 95% de confiança para os parâmetros extremais dos 6 modelos testados na amostra de **lançamento do martelo feminino**, com base na aproximação assintótica à distribuição Normal dos estimadores de máxima verosimilhança usados na estimação dos parâmetros da distribuição GEV. Verifica-se que:

- Nos modelos  $M_3$  e  $M_9$ , atendendo que os limites do  $IC_{95\%}(\gamma) > 0$ , tal sugere que a sequência de dados é melhor descrita por um parâmetro de forma positivo, associado ao modelo Fréchet, sendo pouco plausível, especialmente para  $M_9$ .
- Nos modelos  $M_1$  e  $M_5$ , os limites do  $IC_{95\%}(\gamma)$  estão situados no lado negativo, rejeitando a possibilidade do modelo Gumbel em favor do modelo max-Weibull.
- Nos modelos  $M_2$  e  $M_4$ , o  $IC_{95\%}(\gamma)$  tem limite inferior negativo e o limite superior positivo (ainda que no  $M_4$  a estimativa seja muito próxima de zero). Portanto, qualquer decisão sobre estes modelos (i.e.,

GEV ou Gumbel) dependerá quer de um teste numérico (e.g., *Deviance*) quer da observação gráfica relativa à qualidade do ajustamento.

Tabela 6.12 – Intervalos com 95% de confiança para estimativa dos parâmetros extremais nos modelos testados, na amostra de **lançamento do martelo feminino**, no período de 1992-2017.

M <sub>1</sub>	$\lambda$ : (72.165; 76.693)	$\delta$ : (3.585; 7.187)	$\gamma$ : (-0.861; -0.294)	----	----	----
M <sub>2</sub>	$\lambda_0$ : (64.340; 67.393)	$\lambda_1$ : (0.566; 0.741)	$\delta$ : (1.018; 2.035)	$\gamma$ : (-0.465; 0.258)	----	----
M <sub>3</sub>	$\lambda$ : (77.639; 80.759)	$\delta_0$ : (2.761; 4.474)	$\delta_1$ : (-0.198; -0.095)	$\gamma$ : (0.078; 1.904)	----	----
M <sub>4</sub>	$\lambda_0$ : (65.874; 68.967)	$\lambda_1$ : (0.500; 0.642)	$\delta_0$ : (0.641; 1.815)	$\delta_1$ : (-0.094; -0.031)	$\gamma$ : (-0.791; 0.001)	----
M <sub>5</sub>	$\lambda_0$ : (70.210; 75.912)	$\lambda_1$ : (-0.493; -0.097)	$\lambda_2$ : (0.022; 0.024)	$\delta$ : (1.749; 5.187)	$\gamma$ : (-1.031; -0.484)	----
M <sub>9</sub>	$\lambda_0$ : (76.844; 76.909)	$\lambda_1$ : (0.447; 0.449)	$\lambda_2$ : (-0.015; -0.013)	$\delta_0$ : (3.665; 3.975)	$\delta_1$ : (-0.015; -0.013)	$\gamma$ : (2.737; 3.873)
					$\delta_2$ : (-0.005; -0.003)	

A Tabela 6.13 apresenta o valor máximo da função de log-verosimilhança, a estimativa pontual dos parâmetros extremais e respetivos erros-padrão e intervalos com 95% de confiança da distribuição Gumbel, bem como algoritmo de otimização utilizado, referentes à amostra de **lançamento do martelo feminino**, no período de 1992-2017.

Observamos na Tabela 6.7 que os modelos M<sub>7</sub> e M<sub>9</sub> não geram erros-padrão da estimativa pontual de pelo menos um parâmetro extremal. Igualmente, com base na informação da Tabela 6.12, verificamos que nos modelos M<sub>1</sub> e M<sub>5</sub> os limites do  $IC_{95\%}(\gamma) < 0$  e nos modelos M<sub>3</sub> e M<sub>9</sub> os limites do  $IC_{95\%}(\gamma) > 0$ , levando nestes casos à rejeição do modelo Gumbel. Portanto, restam os modelos M<sub>2</sub>, M<sub>4</sub>, M<sub>6</sub> e M<sub>8</sub>. Nestes modelos, a convergência foi conseguida pelo algoritmo de Nelder-Mead.

Em todos os modelos com dependência temporal no parâmetro de localização  $\lambda_k$ , com  $k=0,1$ , M<sub>2</sub>, M<sub>4</sub> e M<sub>8</sub>, ocorre um aumento da estimativa  $\lambda(t)$  com o avançar do tempo (Anexo 6.5.2, (i)).

Nos modelos M<sub>3</sub> e M<sub>4</sub>, o parâmetro de escala,  $\delta(t)$ , sofre uma diminuição das estimativas com o tempo; nos modelos M<sub>6</sub> e M<sub>8</sub>, as estimativas são irrealistas e/ou não-plausíveis a partir de 2025 e 2035, respetivamente (Anexo 6.5.2, (ii)).

Tabela 6.13 – Valor máximo da função de log-verosimilhança, estimativa dos parâmetros extremais, erros-padrão e intervalos com 95% de confiança (entre parêntesis) para a **distribuição Gumbel**, da amostra de **lançamento do martelo feminino**, no período de 1992-2017.

M <sub>2</sub>	$\ell=-50.7395$	$\lambda_0=65.6057$ (0.5342) (64.559; 66.653)	$\lambda_1=0.6660$ (0.0315) (0.604; 0.728)	$\delta=1.4719$ (0.2248) (1.031; 1.912)	----	NM
M <sub>4</sub>	$\ell=-47.1616$	$\lambda_0=67.0839$ (0.9220) (65.277; 68.891)	$\lambda_1=0.5768$ (0.0461) (0.486; 0.667)	$\delta_0=1.1135$ (0.3082) (0.510; 1.717)	$\delta_1=-0.0621$ (0.0202) (-0.102; -0.022)	NM
M <sub>6</sub>	$\ell=-69.5278$	$\lambda=76.0666$ (0.8351) (74.430; 77.703)	$\delta_0=3.3529$ (0.4647) (2.442; 4.264)	$\delta_1=-0.3637$ (0.0762) (-0.513; -0.214)	$\delta_2=0.0114$ (0.0029) (0.006; 0.017)	NM
M <sub>8</sub>	$\ell=-45.1809$	$\lambda_0=68.7371$ (0.7850) (67.199; 70.276)	$\lambda_1=0.4975$ (0.0431) (0.413; 0.582)	$\delta_0=2.0995$ (0.3604) (1.393; 2.806)	$\delta_1=-0.2718$ (0.0433) (-0.357; -0.187)	NM
					$\delta_2=0.0074$ (0.0012) (0.005; 0.010)	

Nos Anexos 6.3 e 6.4 constam os gráficos de ajustamento dos modelos (GEV e Gumbel) apresentados, respetivamente para as amostras de lançamentos do disco (Tabelas 6.8 e 6.10) e martelo feminino (Tabelas 6.11 e 6.13).



### 6.8.7. Seleção do modelo

Depois de ajustar vários modelos candidatos a uma determinada série de valores extremos, pretende-se selecionar o melhor modelo. Pela Figura 6.2 e pela estatística de Cox-Stuart *trend test*, já vimos que se verifica uma tendência significativa nos dados das amostras de lançamento do disco feminino, 1980-2017 e lançamento do martelo feminino, 1992-2017. Neste âmbito, algumas questões colocam-se: até que ponto um modelo não-estacionário é melhor do que o modelo estacionário? Dito de outra forma, será que o modelo não-estacionário, dependente do tempo em pelo menos um parâmetro extremal  $\theta$ , proporciona uma qualidade de ajuste superior ao modelo estacionário? Valerá realmente a pena realizar o processo de ajustamento por um modelo não-estacionário, sabendo que é mais complexo? Qual o melhor modelo, GEV ( $\gamma \neq 0$ ) ou Gumbel ( $\gamma = 0$ )? Formalmente, entre modelos encaixados, a decisão sobre a escolha do melhor modelo pode ser feita pelo teste da razão de verosimilhanças que usa a estatística *Deviance* (definida em [6.8] e [6.10]), e entre modelos não-encaixados pelos critérios de informação de AIC, AICc e BIC (definidos em [6.11], [6.12] e [6.13]), embora estes critérios também possam ser usados para modelos encaixados. Com a decisão sempre acompanhada pela análise dos gráficos correspondentes. Para além disso, as estatísticas RMSE, MAE, ME e %BIAS são uma ferramenta auxiliar à tomada de decisão. Assim, perante a combinação de modelos estacionários ( $M_1$ ) e não-estacionários ( $M_2, \dots, M_9$ ), para modelar o comportamento dos valores extremos nos lançamentos do disco e martelo feminino, tendo como covariável o tempo ( $t$ -anos), o princípio basilar assenta na seleção do modelo o mais parcimonioso possível e que possua simultaneamente o condão de ser o mais explicativo da variação dos dados. Contudo, não descuramos a possibilidade de um modelo mais complexo ser o mais adequado.

#### 6.8.7.1. Informação gráfica preliminar

Em Anexos 6.3 e 6.4 encontram-se os gráficos de probabilidade residual e dos quantis residuais dos modelos apresentados nas Tabelas 6.8, 6.10, 6.11 e 6.13. Com base apenas na informação gráfica preliminar, os potenciais candidatos a melhor modelo, em cada amostra, por ordem decrescente, são:

- Lançamento do disco feminino

. Modelos GEV:  $M_2, M_4, M_3, M_6, M_7$

. Modelos Gumbel:  $M_4, M_2, M_5$

- Lançamento do martelo feminino

. Modelos GEV:  $M_2, M_4, M_5$

. Modelos Gumbel:  $M_2, M_4, M_8$

#### 6.8.7.2. Teste da razão de verosimilhanças

Nesta secção apenas serão considerados os modelos GEV/Gumbel presentes nas Tabelas 6.8 à 6.13.

O teste da razão de verosimilhanças baseado na estatística *Deviance*,  $D$ , foi usado para comparar modelos encaixados, tal que  $M_0 \subset M_1$ . Devido ao reduzido tamanho das amostras, usamos a *Deviance*

corrigida,  $D^*$ , apresentada em [6.10]. Para um nível de significância  $\alpha$ , rejeitamos a hipótese nula definida em [6.9] caso  $D^* \geq \chi_{\nu, 1-\alpha}^2$ , em que  $\nu = \rho_1 - \rho_0$ , onde  $\rho_0$  e  $\rho_1$  são o número de parâmetros dos modelos  $M_0$  e  $M_1$ , respetivamente. Neste estudo, a máxima diferença entre  $\rho_1$  e  $\rho_0$  é de  $\nu=4$ , i.e., entre o modelo  $M_1$  e o modelo  $M_9$ . A Tabela 6.14 apresenta os níveis críticos para  $\chi_{\nu, 1-\alpha}^2$ , com  $\nu=(1, 2, 3, 4)$ , e  $\alpha=(0.10, 0.05)$ .

Tabela 6.14 – Valores críticos qui-quadrado para  $\alpha=10\%$  e  $\alpha=5\%$  em função do número de parâmetros  $\nu$ .

	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$
$\chi_{\nu, 0.90}^2$	2.705543	4.60517	6.251389	7.779440
$\chi_{\nu, 0.95}^2$	3.841459	5.991465	7.814728	9.487729

Com base na estatística  $D^*$  e no resultado da inferência dos modelos encaixados para a amostra de lançamento do disco feminino (Tabelas 6.15 e 6.16), os candidatos a melhor modelo, por ordem decrescente de importância, são:

- Modelos GEV:  $M_2, M_7, M_4, M_6$  e  $M_3$
- Modelos Gumbel:  $M_5, M_2, M_4$  e  $M_8$ .

e para a amostra de lançamento do martelo feminino (Tabelas 6.17 e 6.18):

- Modelos GEV:  $M_4, M_2, M_5, M_9$  e  $M_3$
- Modelos Gumbel:  $M_4, M_8, M_2$  e  $M_6$ .

Qualquer modelo não-estacionário apresenta um melhor ajustamento do que o modelo estacionário, modelo  $M_1$  (Tabelas 6.15 a 6.18), sugerindo que a adição de mais parâmetros leva a um melhor ajuste à custa do aumento da complexidade, levando conseqüentemente a uma melhor capacidade preditiva do modelo não-estacionário. Por outras palavras, existem evidências significativas da presença de tendência temporal nas amostras de lançamento do disco e martelo feminino, pelo que a parcimónia que caracteriza o modelo estacionário, GEV ou Gumbel, não é suficiente para originar melhorias substanciais no modelo global, não parecendo neste caso representar um melhor ajustamento.

Tabela 6.15 – Matriz de *Deviances* corrigidas entre **modelos GEV** encaixados, no **lançamento do disco feminino**, 1980-2017.

	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_6$	$M_7$
$M_1$	16.406 Rejeitar $M_1$	4.688 Rejeitar $M_1$	16.904 Rejeitar $M_1$	10.18735 Rejeitar $M_1$	21.451 Rejeitar $M_1$
$M_2$	-----	não- encaixados	0.499 Rejeitar $M_4$	-6.218 Rejeitar $M_6$	5.046 Rejeitar $M_7$
$M_3$		-----	12.216 Rejeitar $M_3$	5.499 Rejeitar $M_3$	16.764 Rejeitar $M_3$
$M_4$			-----	não- encaixados	4.547 Rejeitar $M_4$
$M_6$				-----	11.264 Rejeitar $M_6$

Tabela 6.16 – Matriz de *Deviances* corrigidas entre **modelos Gumbel** encaixados, no **lançamento do disco feminino**, 1980-2017.

	M <sub>2</sub>	M <sub>4</sub>	M <sub>5</sub>	M <sub>8</sub>
M <sub>1</sub>	16.644 Rejeitar M <sub>1</sub>	17.144 Rejeitar M <sub>1</sub>	23.577 Rejeitar M <sub>1</sub>	19.501 Rejeitar M <sub>1</sub>
M <sub>2</sub>	-----	0.500 Rejeitar M <sub>4</sub>	6.933 Rejeitar M <sub>2</sub>	2.857 Rejeitar M <sub>8</sub>
M <sub>4</sub>		-----	não-encaixados	2.357 Rejeitar M <sub>8</sub>
M <sub>5</sub>			-----	-4.076 Rejeitar M <sub>8</sub>

Tabela 6.17 – Matriz de *Deviances* corrigidas entre **modelos GEV** encaixados, no **lançamento do martelo feminino**, 1992-2017.

	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>	M <sub>5</sub>	M <sub>9</sub>
M <sub>1</sub>	46.334 Rejeitar M <sub>1</sub>	10.440 Rejeitar M <sub>1</sub>	55.234 Rejeitar M <sub>1</sub>	29.433 Rejeitar M <sub>1</sub>	25.209 Rejeitar M <sub>1</sub>
M <sub>2</sub>	-----	não- encaixados	8.900 Rejeitar M <sub>2</sub>	-16.901 Rejeitar M <sub>5</sub>	-21.126 Rejeitar M <sub>9</sub>
M <sub>3</sub>		-----	44.795 Rejeitar M <sub>3</sub>	18.994 Rejeitar M <sub>3</sub>	14.769 Rejeitar M <sub>3</sub>
M <sub>4</sub>			-----	não- encaixados	-30.026 Rejeitar M <sub>9</sub>
M <sub>5</sub>				-----	-4.225 Rejeitar M <sub>9</sub>

Tabela 6.18 – Matriz de *Deviances* corrigidas entre **modelos Gumbel** encaixados, no **lançamento do martelo feminino**, 1992-2017.

	M <sub>4</sub>	M <sub>6</sub>	M <sub>8</sub>
M <sub>2</sub>	6.460 Rejeitar M <sub>2</sub>	-33.923 Rejeitar M <sub>6</sub>	10.036 Rejeitar M <sub>2</sub>
M <sub>4</sub>	-----	não-encaixados	3.576 Rejeitar M <sub>8</sub>
M <sub>6</sub>		-----	43.960 Rejeitar M <sub>6</sub>

### 6.8.7.3. Critérios de Informação

As Tabelas 6.19 e 6.20 apresentam os valores para os critérios AIC, AICc e BIC. Os modelos que mais se destacam estão a **bold**. Considerando prioritariamente o AICc, na amostra de lançamento do disco feminino (Tabela 6.19), os três principais candidatos a melhor modelo, por ordem decrescente de importância, são:

- Modelos GEV: M<sub>2</sub>, M<sub>7</sub> e M<sub>4</sub>.
- Modelos Gumbel: M<sub>5</sub>, M<sub>2</sub> e M<sub>4</sub>.

e na amostra de lançamento do martelo feminino (Tabela 6.20):

- Modelos GEV: M<sub>4</sub>, M<sub>2</sub> e M<sub>5</sub>.
- Modelos Gumbel: M<sub>8</sub>, M<sub>4</sub> e M<sub>2</sub>.

Tabela 6.19 – Critérios de informação de Akaike, Akaike corrigido e Bayesiano dos modelos GEV e Gumbel, referentes aos máximos anuais no **lançamento do disco feminino**, 1980-2017.

Lançamento do disco feminino						
	Modelos GEV			Modelos Gumbel		
	AIC	AICc	BIC	AIC	AICc	BIC
M <sub>1</sub>	174.239	174.945	179.152	172.499	172.842	175.775
M <sub>2</sub>	158.625	<b>159.837</b>	<b>165.175</b>	156.629	157.335	161.542
M <sub>3</sub>	171.206	172.418	177.756	(a)	(a)	(a)
M <sub>4</sub>	160.089	161.964	168.277	158.092	159.305	164.643
M <sub>5</sub>	(a)	(a)	(a)	<b>151.186</b>	<b>152.398</b>	<b>157.736</b>
M <sub>6</sub>	167.301	169.176	175.489	(a)	(a)	(a)
M <sub>7</sub>	<b>157.207</b>	159.917	167.033	(a)	(a)	(a)
M <sub>8</sub>	(a)	(a)	(a)	157.562	159.437	165.750
M <sub>9</sub>	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)

(a) o modelo não foi considerado para estudo.

Tabela 6.20 – Critérios de informação de Akaike, Akaike corrigido e Bayesiano dos modelos GEV e Gumbel, referentes aos máximos anuais no **lançamento do martelo feminino**, 1992-2017.

Lançamento do martelo feminino						
	Modelos GEV			Modelos Gumbel		
	AIC	AICc	BIC	AIC	AICc	BIC
M <sub>1</sub>	158.495	159.586	162.270	(a)	(a)	(a)
M <sub>2</sub>	109.171	111.076	114.204	107.479	108.570	111.253
M <sub>3</sub>	148.932	150.836	153.964	(a)	(a)	(a)
M <sub>4</sub>	<b>101.313</b>	<b>104.313</b>	<b>107.603</b>	102.323	104.228	107.356
M <sub>5</sub>	129.892	132.892	136.183	(a)	(a)	(a)
M <sub>6</sub>	(a)	(a)	(a)	147.056	148.960	152.088
M <sub>7</sub>	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)
M <sub>8</sub>	(a)	(a)	(a)	<b>100.362</b>	<b>103.362</b>	<b>106.652</b>
M <sub>9</sub>	138.572	144.795	147.379	(a)	(a)	(a)

(a) o modelo não foi considerado para estudo.

#### 6.8.7.4. Decisão

Nas Tabelas 6.15 à 6.18 apresentamos o valor da estatística  $D^*$  definida em [6.10] e a distribuição qui-quadrado para comparar os modelos encaixados. Nas Tabelas 6.19 e 6.20 apresentamos as estimativas AIC, AICc e BIC para todos os modelos não rejeitados na fase preliminar. Fica a faltar a comparação entre os dois modelos considerados mais adequados em cada amostra. Para o efeito,  $M_2$  GEV vs  $M_5$  Gumbel no lançamento do disco feminino e  $M_4$  GEV vs  $M_4$  Gumbel no lançamento do martelo feminino. No **lançamento do disco feminino**, os modelos  $M_2$  GEV vs  $M_5$  Gumbel, têm o mesmo número de parâmetros, tendo os valores dos critérios de informação AIC, AICc e BIC apresentados na Tabela 6.19, sido mais favoráveis ao modelo  $M_5$  Gumbel. Não obstante, decidimos ainda aplicar as medidas de erro RMSE, MAE, ME e %BIAS aos dois modelos, cujos resultados estão apresentados na Tabela 6.21. Nestas métricas usamos a adaptação definida na Secção 6.5.4. Estas estatísticas também irão ajudar a decidir qual o modelo que melhor se ajusta aos dados disponíveis, sendo que os valores mais baixos de RMSE e MAE e os valores mais próximos de zero de ME e %BIAS denotam uma melhor qualidade do modelo. Assim, verifica-se que o modelo  $M_5$  Gumbel surge em todas as métricas como o mais adequado.

Tabela 6.21 – RMSE, MAE, ME e %BIAS para os modelos M<sub>2</sub> GEV e M<sub>5</sub> Gumbel no lançamento do disco feminino, 1980-2017.

Modelos	RMSE	MAE	ME	%BIAS
M <sub>2</sub> GEV	1.88682	1.55839	-0.6119	-0.869%
M <sub>5</sub> Gumbel	1.66741	1.29201	-0.6010	-0.854%

No **lançamento do martelo feminino**, uma vez que os dois modelos candidatos estão encaixados,  $M_{4_{GUM}} \subset M_{4_{GEV}}$ , a comparação foi efetuada pela estatística  $D^*$  cujos resultados estão apresentados na Tabela 6.22. Uma vez que  $D^* = 2.718 > \chi^2_{1,0.90} = 2.705543$ , concluímos que existem evidências significativas para rejeitar o modelo M<sub>4</sub> Gumbel em favor do modelo M<sub>4</sub> GEV. O critério AIC é mais favorável ao modelo M<sub>4</sub> GEV, mas os critérios AICc e BIC são ligeiramente mais favoráveis ao modelo M<sub>4</sub> Gumbel (ver Tabela 6.20).

Tabela 6.22 – Número de parâmetros em cada modelo e *Deviance* corrigida para os modelos M<sub>4</sub> GEV vs M<sub>4</sub> Gumbel, no lançamento do martelo feminino, 1992-2017.

Modelos	$\rho$	$D^*$	$p$	Decisão
M <sub>4</sub> GEV	5	2.717971	0.09922	Não-Rejeitar M <sub>4</sub> GEV, para $\alpha=0.10$
M <sub>4</sub> Gumbel	4			

A fim de reforçar a nossa escolha sobre o melhor modelo, consideramos ainda as métricas RMSE, MAE, ME e %BIAS (Tabela 6.23). Nestas métricas usamos a adaptação definida na Secção 6.5.4. Verifica-se que o modelo M<sub>4</sub> GEV surge em todas as métricas como o mais adequado.

Tabela 6.23 – RMSE, MAE, ME e %BIAS para os modelos M<sub>4</sub> GEV e M<sub>4</sub> Gumbel no lançamento do martelo feminino, 1992-2017.

Modelos	RMSE	MAE	ME	%BIAS
M <sub>4</sub> GEV	1.83777	1.39524	-0.169	-0.224%
M <sub>4</sub> Gumbel	1.91166	1.43446	-0.288	-0.382%

#### 6.8.7.4.1. Estudo de simulação

Realizamos um estudo de simulação que considerou os dois modelos finais em cada amostra, ou seja, os modelos M<sub>2</sub> GEV e M<sub>5</sub> Gumbel no lançamento do disco feminino e os modelos M<sub>4</sub> GEV e M<sub>4</sub> Gumbel no lançamento do martelo feminino. Com este estudo, pretende-se medir a qualidade dos modelos em competição, ajudando no processo de tomada de decisão do modelo a considerar na estimação de outras quantidades de interesse apresentadas na Secção 6.7. A Tabela 6.24 apresenta os resultados obtidos, sendo que a **bold** está assinalado o modelo com melhor ajustamento em cada métrica, em cada amostra e para cada número de amostras simuladas. Foi feita simulação para 100, 200, ..., 1000 e 2000 amostras dos modelos finalistas em cada amostra. Em cada simulação foi calculada a mediana das  $n$  amostras. Verifica-se que o modelo M<sub>5</sub> Gumbel (na quase totalidade dos casos) e o modelo M<sub>4</sub> GEV (em todos os casos) apresentam a melhor qualidade em todas as métricas. Os resultados obtidos estão de acordo com os resultados apresentados nas Tabelas 6.21 e 6.23. As Figuras 6.7 e 6.8 (Secção 6.9.4) proporcionam uma informação visual dos resultados obtidos na simulação. No Anexo 6.6 encontra-se a edição do programa.

Tabela 6.24 – Simulação de 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000 amostras para ajustamento dos dois modelos candidatos em cada amostra, com base nos resultados das métricas RMSE, MAE, %BIAS e ME.

Amostras ( <i>n replicate</i> )	Métricas	Lançamento do disco feminino, 1980-2017		Lançamento do martelo feminino, 1992-2017	
		M <sub>5</sub> Gumbel	M <sub>2</sub> GEV	M <sub>4</sub> Gumbel	M <sub>4</sub> GEV
100	RMSE	<b>2.403405</b>	2.660276	2.634444	<b>2.505835</b>
	MAE	<b>1.835819</b>	2.059745	1.956925	<b>1.819527</b>
	%BIAS	<b>-0.050666</b>	0.061952	-0.291067	<b>-0.245864</b>
	ME	<b>-0.029014</b>	0.052540	-0.299589	<b>-0.226530</b>
200	RMSE	<b>2.416777</b>	2.648011	2.666079	<b>2.457525</b>
	MAE	<b>1.867421</b>	2.075562	1.966970	<b>1.829426</b>
	%BIAS	0.009527	<b>0.004416</b>	-0.256984	<b>-0.256632</b>
	ME	-0.017484	<b>-0.000995</b>	-0.237681	<b>-0.223718</b>
300	RMSE	<b>2.408012</b>	2.658698	2.729119	<b>2.457833</b>
	MAE	<b>1.851271</b>	2.079162	1.914323	<b>1.815243</b>
	%BIAS	<b>-0.001733</b>	0.046626	-0.447031	<b>-0.228410</b>
	ME	<b>-0.000612</b>	0.004621	-0.352539	<b>-0.189514</b>
400	RMSE	<b>2.395500</b>	2.668995	2.702073	<b>2.488999</b>
	MAE	<b>1.893596</b>	2.071506	1.920229	<b>1.812581</b>
	%BIAS	<b>-0.031187</b>	0.042509	-0.351744	<b>-0.268154</b>
	ME	<b>0.001589</b>	0.053814	-0.281870	<b>-0.205479</b>
500	RMSE	<b>2.389216</b>	2.611720	2.649263	<b>2.479441</b>
	MAE	<b>1.867127</b>	2.089764	1.953409	<b>1.813737</b>
	%BIAS	-0.030975	<b>0.008283</b>	-0.389529	<b>-0.197171</b>
	ME	-0.024816	<b>0.013969</b>	0.294939	<b>-0.202835</b>
600	RMSE	<b>2.371613</b>	2.683994	2.698978	<b>2.433562</b>
	MAE	<b>1.860550</b>	2.080085	1.951739	<b>1.835997</b>
	%BIAS	<b>-0.015364</b>	0.043732	-0.383402	<b>-0.206778</b>
	ME	-0.021861	<b>0.018971</b>	-0.248976	<b>-0.192479</b>
700	RMSE	<b>2.413714</b>	2.654508	2.708516	<b>2.455790</b>
	MAE	<b>1.879035</b>	2.078322	1.966823	<b>1.827332</b>
	%BIAS	<b>-0.002013</b>	0.050289	-0.362344	<b>-0.255877</b>
	ME	<b>-0.002007</b>	0.009202	-0.294137	<b>-0.159095</b>
800	RMSE	<b>2.404625</b>	2.630868	2.643862	<b>2.431122</b>
	MAE	<b>1.846343</b>	2.077269	1.957972	<b>1.818180</b>
	%BIAS	<b>-0.015878</b>	0.062842	-0.418288	<b>-0.252879</b>
	ME	<b>-0.003094</b>	0.027026	-0.276456	<b>-0.163532</b>
900	RMSE	<b>2.405774</b>	2.642550	2.618000	<b>2.485144</b>
	MAE	<b>1.863374</b>	2.058713	1.922683	<b>1.846021</b>
	%BIAS	<b>0.003179</b>	0.041996	-0.344621	<b>-0.233996</b>
	ME	<b>-0.007600</b>	0.033808	-0.258503	<b>-0.193769</b>
1000	RMSE	<b>2.397219</b>	2.647561	2.661379	<b>2.479995</b>
	MAE	<b>1.867643</b>	2.090574	1.953116	<b>1.817093</b>
	%BIAS	-0.007911	<b>0.003130</b>	-0.355226	<b>-0.212773</b>
	ME	<b>-0.017447</b>	0.017474	-0.244693	<b>-0.179407</b>
2000	RMSE	<b>2.395042</b>	2.644950	2.640239	<b>2.478009</b>
	MAE	<b>1.874822</b>	2.082726	1.954234	<b>1.827118</b>
	%BIAS	<b>-0.017078</b>	0.048888	-0.359158	<b>-0.205625</b>
	ME	<b>-0.015833</b>	0.021225	-0.264097	<b>-0.162132</b>

### 6.8.8. Diagnóstico do modelo

É necessário que o modelo selecionado capture a variabilidade da não-estacionariedade da série em análise. Para tal, recorremos aos gráficos “*residual probability plot*” e “*residual quantile plot*”, onde se comparam as probabilidades empíricas e quantis residuais de  $x_t$  com os seus homólogos da distribuição Gumbel. Já vimos que o modelo  $M_5$  Gumbel na amostra de lançamento do disco feminino e o modelo  $M_4$  GEV na amostra de lançamento do martelo feminino foram considerados os mais adequados. Decorrente da não-estacionariedade destes modelos, os gráficos surgem normalmente numa escala com f.d. Gumbel, dada em [6.21]. Podemos obter a necessária transformação, igualando  $F(y_t)$  à distribuição GEV padronizada não-estacionária, e resolvendo em ordem a  $y_t$ ,

$$y_t = \frac{1}{\hat{\gamma}} \ln \left[ 1 + \hat{\gamma} \left( \frac{x_t - \hat{\lambda}(t)}{\hat{\delta}(t)} \right) \right],$$

ou à distribuição Gumbel padronizada não-estacionária,

$$y_t = \frac{x_t - \hat{\lambda}(t)}{\hat{\delta}(t)},$$

com  $\hat{\lambda}(t) = \hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 t + \hat{\lambda}_2 t^2$ ,  $\hat{\delta}$  para o modelo  $M_5$  Gumbel, e  $\hat{\lambda}(t) = \hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 t$ ,  $\hat{\delta}(t) = \exp(\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 t)$ ,  $\hat{\gamma}$  para o modelo  $M_4$  GEV.

No lançamento do disco (Figura 6.3), podemos considerar que o ajustamento do modelo Gumbel com tendência quadrática na localização e constante na escala parece plausível para os máximos anuais desta disciplina atlética no género feminino, dado que, com exceção de um ponto no extremo máximo, no *residual quantile plot*, os restantes pontos estão concentrados na proximidade ou sobre a reta, denotando globalmente um bom ajustamento.

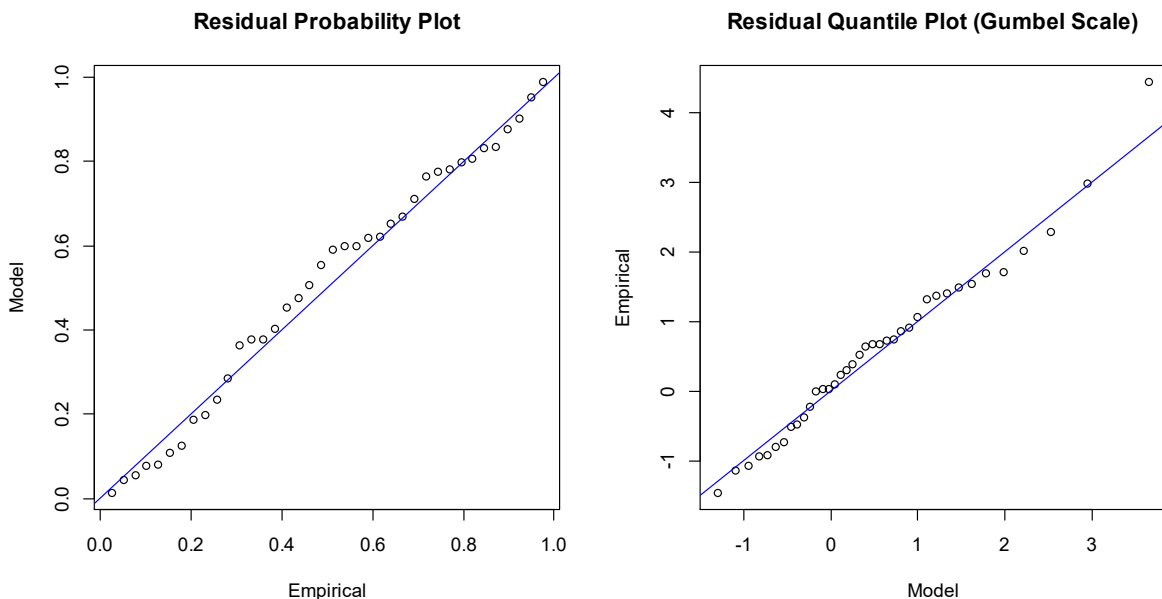


Figura 6.3 – Gráfico diagnóstico do ajuste do modelo Gumbel( $\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2, \delta$ ) para os máximos anuais no lançamento do disco feminino, no período de 1980 a 2017.

No lançamento do martelo feminino (Figura 6.4) podemos considerar que o modelo GEV com tendência linear na localização, log-linear na escala e constante na forma apresenta um bom ajustamento para os máximos anuais nesta disciplina atlética, uma vez que os pontos não estão muito afastados da linearidade.

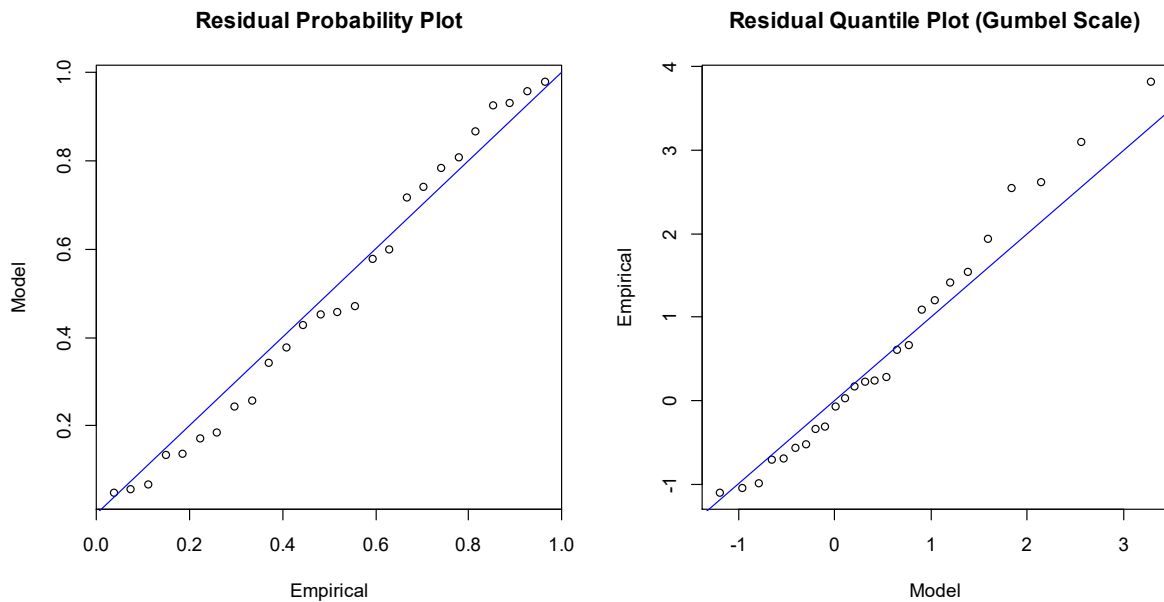


Figura 6.4 – Gráfico diagnóstico do ajuste do modelo  $GEV(\lambda_0 + \lambda_1 t, \exp(\delta_0 + \delta_1 t), \gamma)$  para os máximos anuais no lançamento do martelo feminino, no período de 1992 a 2017.

### 6.8.9. Outras quantidades de interesse (assumindo a não-estacionariedade no futuro)

Para além dos resultados apresentados, estamos também interessados na estimação de outras quantidades de interesse, nomeadamente os quantis extremais, a probabilidade de excedência, o limite superior do suporte (apenas no lançamento do martelo feminino, uma vez que  $\hat{\gamma} < 0$ ) e os níveis de retorno a  $t$ -anos.

#### 6.8.9.1. Quantis extremais

Sob a premissa da não-estacionariedade, a estimativa dos quantis extremais  $\hat{q}_{1-p}$ , ao longo do tempo, para cada amostra em estudo é dada por:

+ Lançamento do disco

$$\hat{q}_{1-p} = \hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 t + \hat{\lambda}_2 t^2 - \hat{\delta} \ln(-\ln(1-p)) \quad [6.34]$$

+ Lançamento do martelo

$$\hat{q}_{1-p} = \hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 t + \left( \frac{\exp(\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 t)}{\hat{\gamma}} \right) \left[ (-\ln(1-p))^{-\hat{\gamma}} - 1 \right] \quad [6.35]$$



A Tabela 6.25 apresenta as estimativas pontuais para alguns quantis extremais, para os anos 2020, 2025, 2030, 2040 e 2050. No lançamento do disco, usando a expressão definida em [6.34], apenas as estimativas assinaladas com asterisco (\*) são superiores ao atual recorde do mundo, 76.80m; ao passo que no lançamento do martelo, a estimativa de um qualquer quantil extremal de probabilidade de excedência para  $\forall t$ , calculados conforme a expressão definida em [6.35], é superior ao atual recorde do mundo, 82.98m.

Tabela 6.25 – Estimativa pontual de alguns quantis extremais nos lançamentos do disco e martelo feminino.

$\hat{q}_{(1-p)}$	Lançamento do disco					Lançamento do martelo				
	2020	2025	2030	2040	2050	2020	2025	2030	2040	2050
$\hat{q}_{0.90}$	72.66	73.71	75.09	78.85*	83.94*	84.82	87.45	90.14	95.65	101.25
$\hat{q}_{0.95}$	73.65	74.70	76.08	79.84*	84.93*	84.96	87.56	90.22	95.69	101.27
$\hat{q}_{0.99}$	75.89	76.94*	78.33*	82.09*	87.18*	85.17	87.71	90.33	95.75	101.31
$\hat{q}_{0.995}$	76.85*	77.90*	79.29*	83.05*	88.13*	85.22	87.75	90.36	95.77	101.31
$\hat{q}_{0.9975}$	77.81*	78.86*	80.24*	84.00*	89.09*	85.26	87.78	90.38	95.78	101.32
$\hat{q}_{0.999}$	79.07*	80.12*	81.51*	85.27*	90.35*	85.30	87.81	90.40	95.79	101.33

\* lançamento do disco feminino: estimativa pontual superior ao atual recorde do mundo.

### 6.8.9.2. Probabilidade de excedência

Num ajustamento não-estacionário a probabilidade de excedência de um nível elevado  $x$  está sujeita a variações no tempo. Segundo o modelo de cada amostra, é dada por:

$$P[C_i > x] = 1 - \exp \left[ - \exp \left( - \frac{x - (\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 t + \hat{\lambda}_2 t^2)}{\hat{\delta}} \right) \right], \quad [6.36]$$

no caso do lançamento do disco feminino, e por:

$$P[C_i > x] = 1 - \exp \left[ - \left[ 1 + \hat{\gamma} \left( \frac{x - (\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1(t))}{\exp(\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 t)} \right) \right]^{\frac{1}{\hat{\gamma}}} \right], \quad [6.37]$$

no caso do lançamento do martelo feminino.

Com foco no atual recorde do mundo, e assumindo que a não-estacionariedade se mantém válida no futuro, verifica-se que, conforme Tabela 6.26, a probabilidade de exceder o recorde do mundo do lançamento do disco feminino aumenta à medida que o tempo passa. Para o ano 2020, a  $P[C > 76.80] \approx 0.52\%$ , e para o ano 2040, a  $P[C > 76.80] \approx 37.3\%$ , já para o ano 2050,  $P[C > 76.80] \approx 100\%$ .

No lançamento do martelo feminino, a probabilidade de exceder o recorde do mundo para o ano 2020 é de  $P[C > 82.98] \approx 97.99\%$ , ou seja, prevê-se que o máximo mundial da polaca Anita Wlodarczyk seja

ultrapassado até 2020, uma vez que tal probabilidade é de  $\sim 98\%$ . Para os anos de 2021 e 2022,  $P[C > 82.98] \approx 99.9\%$ , para o ano 2023,  $P[C > 82.98] \approx 100\%$ .

Tabela 6.26 – Estimativa da probabilidade de excedência do atual recorde do mundo dos lançamentos do disco e do martelo feminino, até aos anos 2020, 2025, 2030, 2035, 2040, 2045 e 2050.

Amostra / Anos	2020	2025	2030	2035	2040	2045	2050
Lançamento do disco	0.005190	0.011099	0.029995	0.100327	0.373081	0.927000	1
Lançamento do martelo	0.979872	1	1	1	1	1	1

### 6.8.9.3. Limite superior do suporte, quando $\hat{\gamma} < 0$

Apenas no lançamento do martelo feminino estamos em condições de calcular o limite superior do suporte do modelo subjacente aos dados disponíveis, uma vez que  $\hat{\gamma} = -0.3954 < 0$ . No caso do lançamento do disco feminino, uma vez que usamos o modelo  $M_5$  Gumbel, o limite superior do suporte apresentado em [6.28], não poderá ser utilizado, uma vez que o mesmo só é válido para  $\hat{\gamma} < 0$ . Faz-se notar que quando  $\hat{\gamma} \geq 0$ , tem-se  $\hat{x}^F(t) = \infty$ . Assim, a estimativa por máxima verosimilhança do  $x^F$  para o ano  $t$ , é dada por:

$$\hat{x}^F(t) = (\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 t) - \frac{\exp(\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 t)}{\hat{\gamma}}, \quad [6.38]$$

com  $t$  definido em [6.25].

A Tabela 6.27 apresenta os valores do limite superior do suporte para os anos 2020, 2025, 2030, 2035, 2040, 2045 e 2050 para o modelo  $M_4$  GEV da amostra de lançamento do martelo feminino. Ou seja, a estimativa da performance máxima possível face às condições atuais. As estimativas do  $x^F(t)$  são crescentes à razão de  $\sim 0.6\%$ /ano ou  $\sim 3\%$  de 5 em 5 anos.

Tabela 6.27 – Estimativa do limite superior do suporte e respectivos intervalos com 95% de confiança para o lançamento do martelo feminino, para  $t=(29, 34, 39, 44, 49, 54, 59)$ , correspondentes aos anos 2020, 2025, 2030, 2035, 2040, 2045 e 2050, respetivamente.

2020	2025	2030	2035	2040	2045	2050
85.40	87.87	90.45	93.11	95.82	98.56	101.34
(83.97; 86.82)	(86.39; 89.36)	(88.91; 91.99)	(91.52; 94.69)	(94.19; 97.44)	(96.91; 100.22)	(99.66; 103.02)

### 6.8.9.4. Níveis de retorno a $T$ -anos

Ajustada a distribuição GEV não-estacionária [6.1] às amostras de extremos anuais, os níveis  $x_T$  são estimados a partir da função quantil de cauda de  $F$  (inverso da função de distribuição acumulada), dada em [6.29]. Nesta tese, a principal diferença relativamente à série estacionária é que o parâmetro de localização no caso do lançamento do disco e os parâmetros de localização e de escala no caso do lançamento do martelo foram tratados como quantidades dependentes do tempo. Assim, sob a não-estacionariedade, a questão prática é saber qual o nível de retorno esperado nos lançamentos do disco e

do martelo feminino num certo período de tempo? Ou mais simplesmente, qual a performance que se espera que seja excedida, em média, uma vez a cada  $T$ -anos?

Para cada amostra, a expressão dos níveis de retorno é dada por:

$$\hat{x}_T = \left( \hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 t + \hat{\lambda}_2 t^2 \right) - \hat{\delta} \ln \left[ -\ln \left( 1 - \frac{1}{T} \right) \right] \quad [6.39]$$

para o lançamento do disco feminino, e

$$\hat{x}_T = \left( \hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 t \right) + \frac{\exp(\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 t)}{\hat{\gamma}} \left[ \left( -\ln \left( 1 - \frac{1}{T} \right) \right)^{-\hat{\gamma}} - 1 \right] \quad [6.40]$$

lançamento do martelo feminino, sendo  $T$  a covariável definida em [6.31].

A Tabela 6.28 apresenta as estimativas pontuais e os intervalos com 95% de confiança para os níveis de retorno a  $T=(3, 8, 13, 23, 33)$  anos, previstos para os anos 2020, 2025, 2030, 2040 e 2050, respectivamente. Assim, prevê-se que no lançamento do disco o atual recorde do mundo, seja ultrapassado, em média, pelo menos uma vez nos próximos 23 anos, ou seja, até ao ano 2040. De modo mais concreto (conforme Anexo 6.7.1), prevê-se que esta excedência ocorra pelo menos uma vez até ao ano 2034 ( $\hat{x}_{17} = 77.20$ ), embora com reduzida probabilidade de excedência, ou seja,  $P[C > 76.80] \approx 7.8\%$ . Por sua vez, no lançamento do martelo, prevê-se que o atual recorde do mundo, seja ultrapassado, em média, pelo menos uma vez até ao ano de 2020, com probabilidade de excedência muito elevada, ou seja,  $P[C > 82.98] \approx 98\%$ .

Com base nos intervalos com 95% de confiança, verifica-se que no lançamento do disco, o limite superior para  $T=13$  anos, i.e.,  $(IC_{95\%}^{\uparrow}(x_{13}) = 76.98)$ , está acima do recorde do mundo, e a partir do ano 2040 qualquer limite do  $IC_{95\%}(x_T)$  é superior ao atual recorde do mundo. No lançamento do martelo, prevê-se que o atual recorde do mundo seja ultrapassado, em média, pelo menos uma vez até ao ano 2020, uma vez que os limites inferior e superior do  $IC_{95\%}(x_T)$  excedem a marca 82.98m.

Tabela 6.28 – Estimativas pontuais e intervalos com 95% de confiança (entre parêntesis) dos níveis de retorno a  $T=(3, 8, 13, 23, 33)$  anos, para as amostras de lançamento do disco e martelo feminino.

	$\hat{x}_3 : 2020$	$\hat{x}_8 : 2025$	$\hat{x}_{13} : 2030$	$\hat{x}_{23} : 2040$	$\hat{x}_{33} : 2050$
Lançamento do disco	70.80 (69.92; 71.67)	73.38 (72.16; 74.60)	75.47 (73.96; 76.98)	80.04 (78.05; 82.03)	85.63 (83.28; 87.99)
Lançamento do martelo	84.41 (82.92; 85.90)	87.41 (85.93; 88.89)	90.18 (88.69; 91.66)	95.70 (94.21; 97.18)	101.29 (99.80; 102.77)

A Figura 6.5 apresenta o gráfico de níveis de retorno associados a  $T$ -anos no lançamento do disco feminino, segundo o modelo  $M_5$  Gumbel ajustado. O gráfico descreve uma curvatura ligeiramente

côncava (voltada para cima), indicando a distribuição subjacente aos dados tem uma cauda mais pesada do que a exponencial.

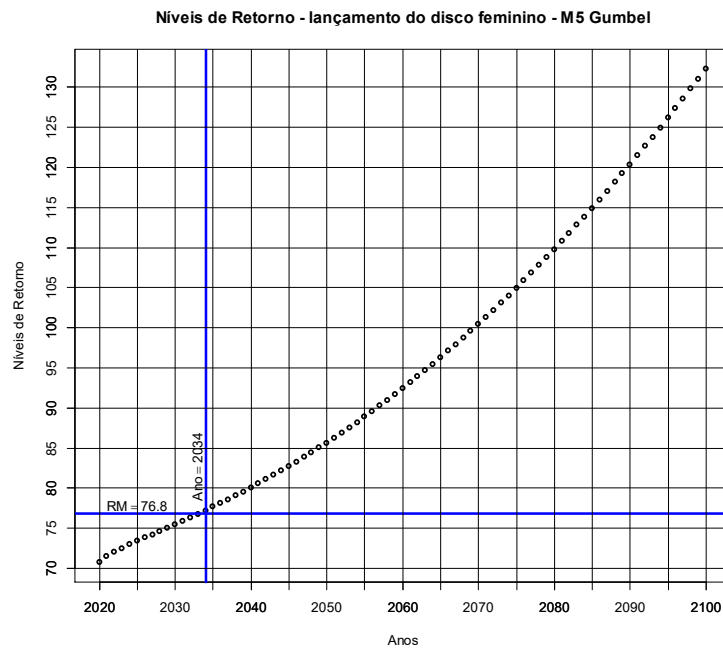


Figura 6.5 – Níveis de retorno a  $T$ -anos, segundo o modelo  $M_5$  Gumbel ajustado para o lançamento do disco.

Por sua vez, a Figura 6.6 apresenta o mapa de níveis de retorno associados a  $T$ -anos no lançamento do martelo feminino, segundo o modelo  $M_4$  GEV ajustado. O gráfico tem um padrão marcadamente exponencial.

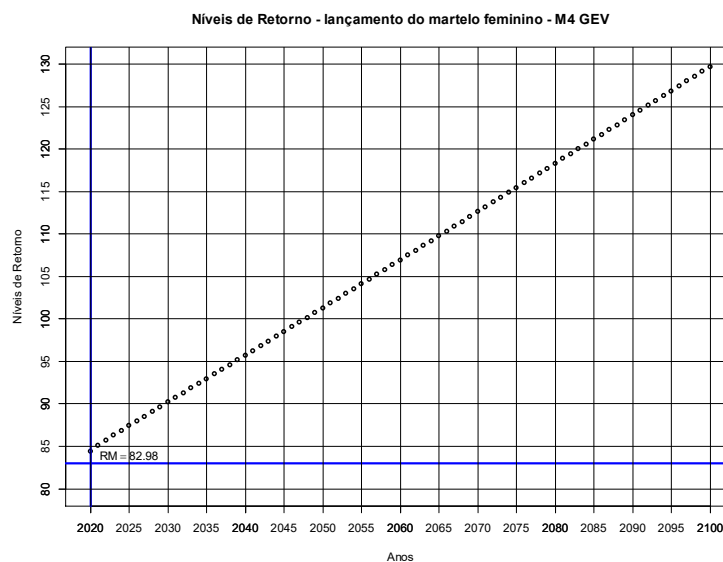


Figura 6.6 – Níveis de retorno a  $T$ -anos, segundo o modelo  $M_4$  GEV ajustado para o lançamento do martelo.

Em Anexo 6.7, pode observar-se a estimativa pontual para os anos 2020, 2021, ..., 2100.

## 6.9. DISCUSSÃO

Até à data, e que tenhamos conhecimento, não foi estabelecida uma teoria geral assintótica para o estudo de valores extremos não-estacionários, pelo que uma alternativa é considerar que um ou mais parâmetros da distribuição variam no tempo. Como vimos, a Figura 6.2 e o Cox-Stuart *trend test* detetaram a presença de tendência significativa nas séries de dados referentes aos lançamentos do disco e martelo feminino, no período de 1980-2017 e 1992-2017, respetivamente. De acordo com Coles (2001), se numa sequência de dados for detetada tendência, tal invalida o pressuposto de que a sua estrutura de probabilidade permanece constante no tempo. Nesta circunstância, utilizar um modelo estacionário com parâmetros  $(\lambda, \delta, \gamma)$  independentes ou constantes no tempo pode conduzir à estimação pouco precisa dos quantis extremos, um dos principais objetivos da EVT em geral, e deste estudo em particular. Muitas causas podem estar relacionadas com a não-estacionariedade, sendo que uma forma de capturar a tendência é reconhecer que algum fator ou circunstância (e.g., objetivos e interesse da competição, prémios a atribuir, “pico” de forma) afeta a variável de interesse e que os parâmetros do modelo variam com o tempo. São em número reduzido os trabalhos de investigação com extremos no desporto, sendo que os existentes tratam o tema considerando a estacionariedade (Vicente, 2012; Lomba, 2016; Silva et al., 2017a,b; Silva et al., 2018b; Caeiro et al., 2018) e outros nem à estacionariedade se referem (Einmahl & Magnus, 2008; Gomes, 2008). Em contexto paramétrico, Silva et al. (2018a) introduziram a não-estacionariedade nos modelos aplicados à prática desportiva. Contudo, como podem ser vários os fatores suscetíveis de conduzir a uma mudança na probabilidade das performances desportivas ocorrerem com o tempo, significa que os fenómenos de não-estacionariedade podem surgir não apenas a longo prazo como também no decurso de cada época desportiva.

### 6.9.1. Por que é que no desporto também se observa tendência?

A não-estacionariedade caracteriza-se pelo facto dos parâmetros estatísticos e a estrutura de autocorrelação modificarem com o tempo. Na prática, a maior parte das séries apresenta algum tipo de não-estacionariedade. Porventura, associado à não-estacionariedade em alguns desportos estão o aumento do número de atletas com performances extraordinárias<sup>35</sup>, devido sobretudo à melhoria substancial do planeamento e metodologia do treino, dos cuidados com a alimentação e das facilidades de acesso a suplementos nutricionais como forma de compensar certos défices, dos diversos mecanismos de recuperação colocados à disposição do atleta, da eficácia e da rapidez no tratamento de lesões encurtando o tempo de paragem, da crescente presença da psicologia do desporto ligada sobretudo à

---

<sup>35</sup> Considerando, por exemplo, o quartil 3 das melhores performances individuais de sempre (usando a convenção para quantis, *Type 7*, do pacote *stats* do programa R (v. 3.6.3), The R Core Team, 2017, p.1559), tem-se:

+ lançamento do disco feminino, 1980-2017 ( $n=124$ ), temos que  $Q_3=69.27m$  (acima de  $Q_3: n=31$ ). Acima desta marca, no período de 1980-1989, tem-se  $n=21$  marcas; no período de 1990-1999, tem-se  $n=7$  marcas; no período de 2000-2009, tem-se  $n=0$  marcas; no período de 2010-2017, tem-se  $n=3$  marcas.

+ lançamento do martelo feminino, 1992 a 2017 ( $n=912$ ), temos que  $Q_3=66.85m$  (acima de  $Q_3: n=230$ ). Acima desta marca, no período de 1992-1999, tem-se  $n=3$  marcas; no período de 2000-2009, tem-se  $n=97$  marcas; no período de 2010-2017, tem-se  $n=130$  marcas.

motivação e ao controlo de certos estados emocionais, da necessidade de obter marcas de excelência como meio quer de sobrevivência desportiva e económica quer de reconhecimento social quer ainda de aumento das possibilidades de surgimento de novas oportunidades profissionais, da dedicação exclusiva do atleta à modalidade como modo de vida e dos compromissos perante o clube, os patrocinadores e a nação, entre outros. Por outro lado, a tendência também pode resultar de saltos ou ciclos causados pela proximidade de uma grande competição nacional ou internacional, bem como por aspetos relacionados com o clima e a data de realização (de uma forma geral, as melhores performances obtêm-se em climas temperados – oceânicos e continentais – durante os meses de maio a setembro, sobretudo em Meetings e Campeonatos Continentais e do Mundo), bem como o local de realização do evento desportivo (a Europa é o local onde mais recordes individuais e do mundo foram conseguidos)<sup>36</sup> e os incentivos financeiros para o alcance de certas marcas. A ação isolada ou conjunta destes elementos pode interferir quer na estacionariedade quer no rendimento do atleta, potenciando a ocorrência de um evento extremo, tal como por exemplo um novo recorde do mundo.

### 6.9.2. O processo de modelação e de ajustamento

O procedimento de modelação não-estacionária, em contexto paramétrico, apresentado nesta tese foi o primeiro a ser realizado no âmbito da teoria de valores extremos com aplicação a dados desportivos, para o efeito aos lançamentos do disco e martelo feminino do atletismo. Para modelar eventos extremos nestas especialidades atléticas, usamos o método dos máximos de blocos anuais e a distribuição GEV, realizamos a estimação dos parâmetros extremos por máxima verosimilhança e a otimização pelos algoritmos de Nelder-Mead ou BFGS. Coadjuvados pela informação gráfica presente nas Figuras 6.1 e 6.2, testamos 9 modelos: 1 estacionário e 8 não-estacionários (dos quais 3 com tendência linear e 5 com tendência quadrática). Numa fase preliminar, incluímos diversos modelos com tendência cúbica (apresentados na Tabela 6.5), os quais foram excluídos dado (1) não serem calculados erros-padrão das estimativas pontuais dos parâmetros extremos, (2) terem fraco diagnóstico gráfico, (3) não convergirem, e (4) quando um modelo apresentava convergência e os erros-padrão eram calculados, o mesmo apresentava uma fraca qualidade de ajustamento observado pelos gráficos “*residual probability plot*” e “*residual quantile plot*”.

Mesmo nos 8 modelos não-estacionários selecionados, alguns posteriormente foram eliminados por não serem calculados erros-padrão das estimativas de um ou mais parâmetros extremos. Esta exclusão deveu-se à impossibilidade de obter os intervalos de confiança e daí a perda de uma informação importante. Foram o caso dos modelos  $M_5$ ,  $M_8$  e  $M_9$  GEV e o modelo  $M_9$  Gumbel no lançamento do disco, bem como os modelos  $M_6$ ,  $M_7$  e  $M_8$  GEV e os modelos  $M_7$  e  $M_9$  Gumbel no lançamento do martelo. Ou seja, de uma forma geral, os modelos com maior número de parâmetros.

---

<sup>36</sup> Todos os atuais recordes do mundo de lançamentos e saltos, masculino e feminino, foram obtidos entre 20/5 e 30/8 e apenas o lançamento do peso e o salto em comprimento, ambos nos homens, foram obtidos fora do continente europeu, para o efeito nos Estados Unidos da América e no Japão, respetivamente.

Para comparar a qualidade dos modelos selecionados recorreremos a critérios estatísticos numéricos que tivessem em conta a bondade do ajustamento e o número de parâmetros incluídos em cada modelo. Nesta medida, a comparação entre os modelos com diferente número de parâmetros foi realizada pela estatística *Deviance* corrigida<sup>37</sup>, e pelos critérios de informação AIC, AICc e BIC quando os modelos tinham o mesmo número de parâmetros. Igualmente, usamos a representação do *residual probability plot* e do *residual quantile plot*. Constatamos que qualquer modelo não-estacionário proporcionou um melhor ajustamento do que o modelo estacionário, ou seja, a adição de parâmetros não apenas resolveu o problema da falta de estacionariedade como conduziu a um melhor ajuste à custa do aumento da complexidade. Após ajustar os vários modelos candidatos, e observando o resultado das estatísticas referidas e aplicando as métricas RMSE, MAE, ME e %BIAS aos dois melhores modelos de cada amostra, selecionamos o modelo mais adequado. Com estas métricas ainda foi realizado um estudo de simulação. Assim, um modelo probabilístico Gumbel não-estacionário com tendência quadrática no parâmetro de localização e constante na escala (M<sub>5</sub> Gumbel) foi ajustado ao lançamento do disco feminino, e um modelo probabilístico GEV com tendência linear na localização, log-linear na escala e constante no parâmetro de forma (M<sub>4</sub> GEV) foi ajustado para avaliar a sua adequação face à melhor performance de cada ano no lançamento do martelo feminino.

### 6.9.3. Por que decidimos manter constante o parâmetro de forma?

O parâmetro de forma é bastante sensível às incertezas amostrais. Pelo que incluir a covariável tempo no parâmetro de forma é suscetível de aumentar a incerteza não apenas neste parâmetro, mas também nas quantidades de interesse (e.g., quantis extremos) que necessitam de uma estimativa deste parâmetro (Friederichs et al., 2009). Mesmo no caso estacionário não é fácil obter uma estimativa fiável de  $\gamma$ , e por esta razão é aconselhável assumir  $\gamma$  constante ao longo do tempo (Coles, 2001; Katz, 2013). Paralelamente, como advertem Katz (2010), Hasan et al. (2013) e Cheng et al. (2014), é necessária uma amostra de grande dimensão para modelar a tendência que possa existir no parâmetro de forma, pelo que com amostras pequenas pode ser irrealista modelá-lo com uma função do tempo. No presente estudo, as amostras são formadas por  $m=38$  e  $m=26$  máximos de blocos anuais nos lançamentos do disco e martelo feminino, respetivamente. Ainda que não apresentado nesta tese, testamos alguns modelos com tendência no parâmetro de forma, cujos resultados estão sumariados na Tabela 6.29. Em termos gerais, verificamos estimativas pontuais pouco plausíveis, erros-padrão indeterminados o que impossibilitou a obtenção de informações acerca do desvio de  $\theta=(\lambda, \delta, \gamma)$ , intervalos de confiança para  $\theta$  irrealistas, modelos sem convergência e fracos ajustamentos pela observação gráfica do *residual probability plot* e *residual quantile plot*. São exemplos, os modelos:

---

<sup>37</sup> Para modelos não-encaixados, Cox & Hinkley (1974) apresentam um conjunto de várias modificações a critérios baseados no teste da razão de verosimilhanças, apoiado na estatística *Deviance*.

Tabela 6.29 – Resumo de modelos com tendência temporal no parâmetro de forma.

Modelos	Lançamento do disco feminino	Lançamento do martelo feminino
$GEV(\hat{\lambda}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 t)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• fraco diagnóstico gráfico (NM)</li> <li>• razoável diagnóstico gráfico (BFGS)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• não converge (NM)</li> <li>• não calcula erros-padrão e fraco diagnóstico gráfico (BFGS)</li> </ul>
$GEV(\hat{\lambda}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 t + \hat{\gamma}_2 t^2)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• razoável diagnóstico gráfico (NM)</li> <li>• fraco diagnóstico gráfico (BFGS)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• não converge (NM)</li> <li>• não calcula erros-padrão e fraco diagnóstico gráfico (BFGS)</li> </ul>
$GEV(\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 t, \hat{\delta}, \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 t)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• não calcula erros-padrão e fraco diagnóstico gráfico (NM)</li> <li>• razoável diagnóstico gráfico (BFGS)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• fraco diagnóstico gráfico (NM e BFGS)</li> </ul>
$GEV(\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 t, \hat{\delta}, \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 t + \hat{\gamma}_2 t^2)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• razoável diagnóstico gráfico (NM e BFGS)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• não converge (NM)</li> <li>• não calcula erros-padrão e fraco diagnóstico gráfico (BFGS)</li> </ul>
$GEV(\hat{\lambda}, \exp(\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 t), \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 t)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• não calcula erros-padrão e fraco diagnóstico gráfico (NM e BFGS)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• não calcula erros-padrão e fraco diagnóstico gráfico (NM)</li> <li>• fraco diagnóstico gráfico (BFGS)</li> </ul>
$GEV(\hat{\lambda}, \exp(\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 t + \hat{\delta}_2 t^2), \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 t)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• não converge (NM)</li> <li>• não calcula erros-padrão e razoável diagnóstico gráfico (BFGS)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• não calcula erros-padrão e fraco diagnóstico gráfico (NM)</li> <li>• fraco diagnóstico gráfico (BFGS)</li> </ul>
$GEV(\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 t, \exp(\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 t), \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 t)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• razoável diagnóstico gráfico (NM)</li> <li>• não calcula erros-padrão e razoável diagnóstico gráfico (BFGS)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• não converge (NM)</li> <li>• não calcula erros-padrão e fraco diagnóstico gráfico (BFGS)</li> </ul>

NM – Nelder-Mead

BFGS – Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno

#### 6.9.4. O estudo de simulação usando as métricas RMSE, MAE, ME e %BIAS

As métricas RMSE, MAE, ME e %BIAS são amplamente utilizadas para medir a performance de um modelo. Particularmente, a RMSE e o MAE, apesar de serem há muitos anos usadas na avaliação de modelos, não existe um consenso acerca de qual das duas é a mais apropriada. Daí que nesta tese tenhamos usado as duas. Embora de magnitude similar, o MAE produz valores mais baixos que a RMSE, conforme Tabelas 6.21, 6.23 e 6.24. Porém, de um modo especial, a RMSE tem sido alvo de elogios (Chai et al., 2013) e de críticas (Wilmott & Matsuura, 2005), dependendo do contexto científico em que está a ser aplicada. No trabalho de Botchkarev (2018) constam argumentos a favor e contra o uso destas métricas. Não existe nenhum critério absoluto para classificar de “bons” valores de RMSE e MAE, pelo que o resultado depende sobretudo do erro médio, bem como das unidades de medida da variável e do grau de precisão da previsão. Contudo, na comparação entre dois modelos, o melhor ajuste será daquele que minimizar estas quantidades. Neste sentido, ficou claro que os modelos  $M_5$  Gumbel e  $M_4$  GEV são os mais adequados face aos dados disponíveis de cada amostra.

Por sua vez, o viés (ou o viés sistemático), normalmente considerado um obstáculo à qualidade de ajustamento, foi nesta tese medido pelo ME e pela %BIAS, os quais indicam se as previsões são tendenciosas, ou seja, se tendem a ser desproporcionalmente positivas ( $\gg 0$ ) ou negativas ( $\ll 0$ ) comparativamente aos valores observados. Na comparação entre dois modelos, o melhor ajuste será



daquele que aproximar estas quantidades do valor zero. Neste estudo, obtivemos estimativas pontuais ligeiramente inferiores a zero, o que indicia uma ligeira subestimação das estimativas das performances obtidas a partir do modelo em relação às performances observadas. Neste âmbito, as estimativas para o modelo  $M_4$  GEV são mais favoráveis.

Decidimos recorrer a estas quatro métricas pela necessidade de obter um apoio extra ao processo de decisão, minimizando assim o risco de escolher um modelo menos adequado. Inicialmente, a utilidade recaía unicamente sobre a amostra de lançamento do martelo. Porém, decidimos também aplicar às duas amostras.

Paralelamente, realizamos um estudo de simulação que considerou as estatísticas RMSE, MAE, ME e %BIAS opondo os dois modelos candidatos em cada amostra. As estimativas pontuais apresentadas na Tabela 6.24 e a respetiva representação gráfica nas Figuras 6.7 e 6.8, confirmam o ajustamento considerado. Ou seja, mostram que, qualquer que seja o número de amostras, o modelo  $M_5$  Gumbel e o modelo  $M_4$  GEV, para as amostras de lançamentos do disco e martelo, respetivamente, são indubitavelmente os melhores modelos de cada amostra. Em Anexo 6.6 apresentamos e explicamos os resultados deste estudo de simulação.

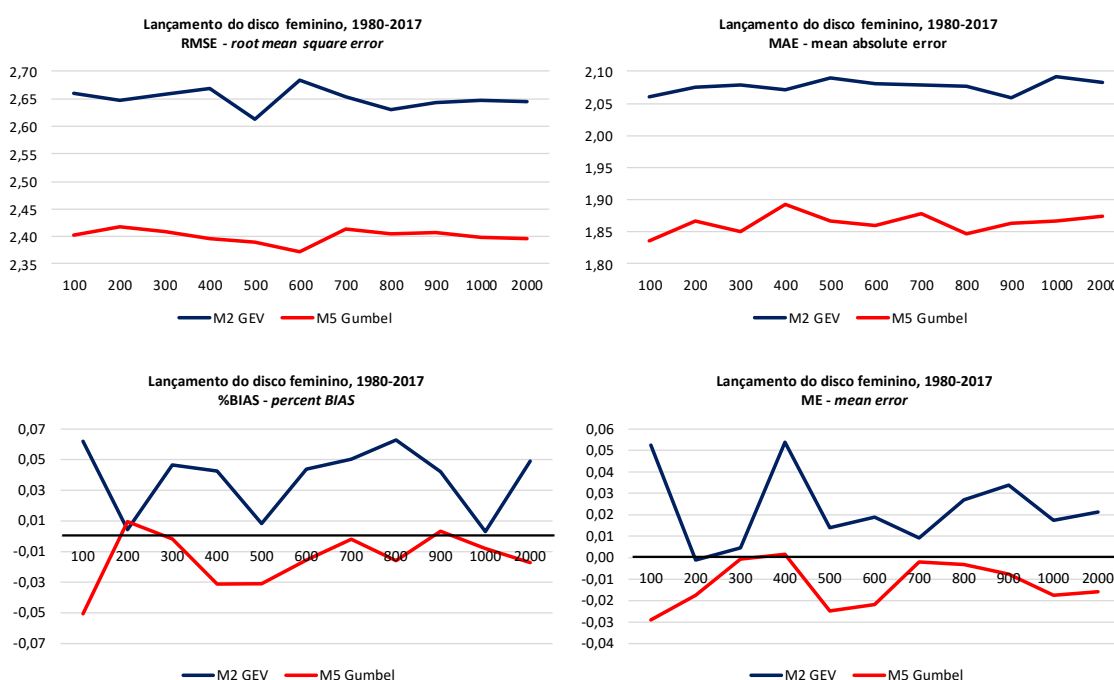


Figura 6.7 – Valores de simulação para  $n=(100,200,300,400,500,600,700,800,900,1000,2000)$  amostras com base nas estimativas dos dois modelos candidatos no **lançamento do disco feminino**, 1980-2017.

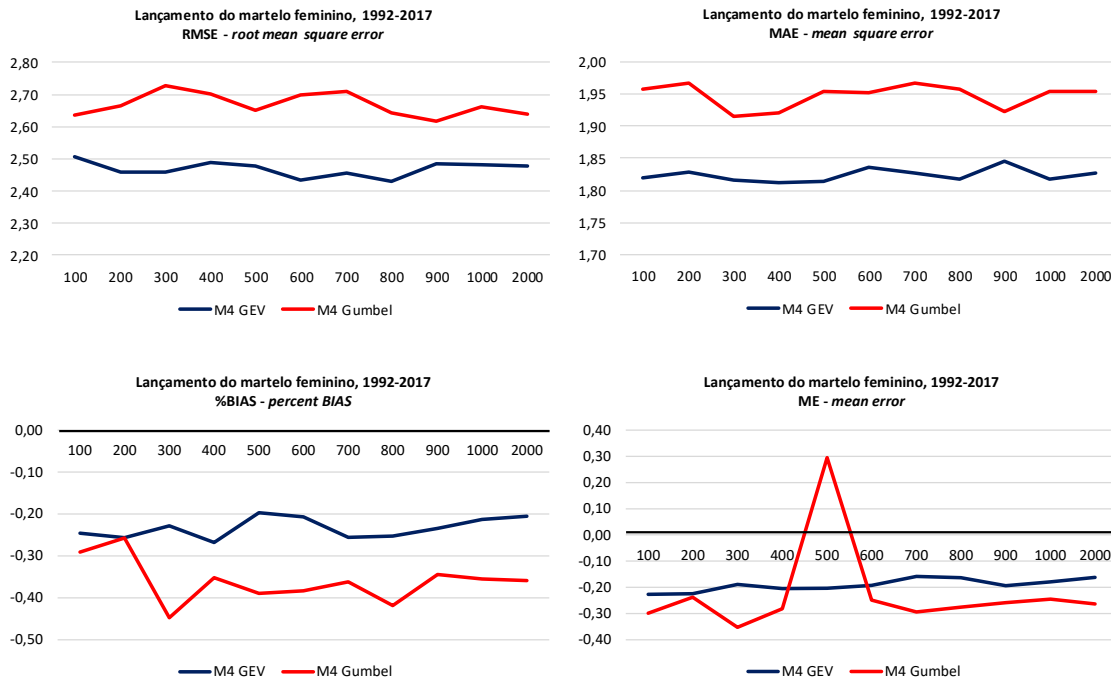


Figura 6.8 – Valores de simulação para  $n=(100,200,300,400,500,600,700,800,900,1000,2000)$  amostras com base nas estimativas dos dois modelos candidatos no **lançamento do martelo feminino, 1992-2017**.

### 6.9.5. Quantidades de interesse

Um dos principais objetivos desta tese é a estimação de quantis extremos e de probabilidades de excedência de um nível  $x$  elevado. Os níveis de retorno associados a um certo número de anos são quantis extremos. Nesta tese, denotamos por  $\hat{x}_T$  a estimativa do nível de retorno associado a  $T$ -anos. Por exemplo, uma estimativa da performance que se espera ver alcançada, em média, pelo menos uma vez a cada 20 anos é dada nas expressões [6.39] ou [6.40], e a sua probabilidade de excedência é dada por:

$$P[C > \hat{x}_{20}].$$

À semelhança do estudo de Caeiro et al. (2015) formado por 31 observações, também as amostras do presente estudo são formadas por um reduzido número de observações. Coles (2001) e Caeiro et al. (2015) referem a precaução que deve existir na interpretação das inferências dos níveis de retorno associados a longos períodos de retorno, decorrente do facto da aproximação à Normal da distribuição do estimador de máxima verosimilhança poder ser pobre. Nesta ótica, duas questões colocam-se:

- Até que período temporal é relevante a extrapolação?
- Como lidar com uma série de dados de tamanho (relativamente) pequeno?

Pelas cautelas apresentadas e porque não é fácil a resposta às questões colocadas, limitamos os níveis de retorno para um tempo máximo de 33 anos, que corresponde ao ano 2050. Igualmente, ainda que seja exequível a estimação do período de retorno de um qualquer quantil elevado sob a condição de não-

estacionariedade, mas dado não ser diretamente aplicável, tal não fez parte do presente estudo. Todavia, para detalhes consultar Salas & Obeysekera (2014).

No **lançamento do disco feminino**, os níveis de retorno do modelo  $M_5$  Gumbel,

$$\hat{x}_T = (73.44701 - 0.366916173t + 0.006634151t^2) - 1.377702493 \times \ln(-\ln(1 - T^{-1})),$$

são crescentes a  $T$ -anos, na razão de 0.6%-0.7% por ano, especialmente no período de 2024 a 2040. Comparando a estimativa de  $x_T$  com o atual recorde do mundo, i.e.,  $\hat{x}_T - 76.80$  (Tabela 6.30), verifica-se que o nível de retorno recupera gradualmente. Porém, só a partir, inclusivamente, do ano 2034 é que esta diferença se torna positiva (para o efeito, 0.40m). Associado a este facto estão os termos do parâmetro de localização dependentes do tempo,  $\lambda_1 t + \lambda_2 t^2$ , que têm uma evolução mais lenta sobre  $\lambda(t)$  devido ao facto de  $\lambda_1 t < 0$ . Ainda que a recuperação aconteça desde o primeiro instante, só a partir (inclusivamente) do ano 2035 é que começa a assumir valores positivos, para o efeito,  $\lambda_1 t + \lambda_2 t^2 = 0.2573916$ . Prevê-se que o atual recorde do mundo possa ser excedido, em média, uma vez, até ao ano 2034.

Tabela 6.30 – Diferença entre o nível de retorno a  $T$ -anos e o atual recorde do mundo do lançamento do disco feminino.

	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_8$	$\hat{x}_{13}$	$\hat{x}_{17}$	$\hat{x}_{18}$	$\hat{x}_{23}$	$\hat{x}_{28}$	$\hat{x}_{33}$
	2020	2025	2030	2034	2035	2040	2045	2050
$\hat{x}_T - RM$	-6.00	-3.42	-1.33	0.40	0.85	3.24	5.89	8.83

Por sua vez, a probabilidade de excedência do atual recorde do mundo tem um crescimento progressivo com o tempo, de 0.519% em 2020 para 47.63% em 2040. Até ao ano 2034, onde pela primeira vez o nível de retorno supera o máximo mundial, a probabilidade de excedência é de 7.8%. Considerando o incremento da probabilidade de excedência ano-a-ano, a maior percentagem verifica-se no ano de 2038, onde é 30.5% mais alta do que no ano precedente.

No **lançamento do martelo feminino**, os níveis de retorno do modelo  $M_4$  GEV,

$$\hat{x}_T = (67.42017287 + 0.57125163t) - \frac{\exp(1.22827803 - 0.06250081t)}{0.395422} \left[ \left( -\ln(1 - T^{-1}) \right)^{0.395422} - 1 \right],$$

aumentam com o tempo, prevendo-se que um novo recorde do mundo na prova de lançamento do martelo feminino, possa ocorrer, em média, uma vez até ao ano de 2020. Igualmente, há medida que o tempo avança, aumenta a probabilidade de exceder o recorde do mundo, sendo praticamente certo a partir do ano 2022. Comparando a estimativa de  $x_T$  com o atual recorde do mundo, i.e.,  $\hat{x}_T - 82.98$ , assim como de  $\hat{x}^F - 82.98$  nos  $T$ -anos (Tabela 6.31), verifica-se sempre uma diferença positiva e gradualmente crescente. Novamente, esta situação está diretamente ligada ao facto do crescimento dos níveis de retorno e do limite superior do suporte serem acompanhados pela manutenção constante do

recorde do mundo nos  $T$ -anos, quando se prevê que o mesmo possa ser excedido, em média, uma vez, até ao ano 2020.

Tabela 6.31 – Diferença entre o nível de retorno e o limite superior do suporte a  $T$ -anos com o atual recorde do mundo do lançamento do martelo feminino.

	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_8$	$\hat{x}_{13}$	$\hat{x}_{18}$	$\hat{x}_{23}$	$\hat{x}_{28}$	$\hat{x}_{33}$
	2020	2025	2030	2035	2040	2045	2050
$\hat{x}_T - RM$	1.43	4.43	7.20	9.95	12.72	15.50	18.31
$\hat{x}^f - RM$	2.51	4.98	7.56	10.22	12.93	15.67	18.45











O facto de ocorrer uma estimativa negativa de  $\hat{\delta}_1 = -0.06250081$ , tal não representa qualquer problema, uma vez que a ligação log-linear de  $\delta(t)$  torna o resultado num valor positivo para todo o  $t$ . Por sua vez, a estimativa de  $\lambda(t)$  proporciona um aumento do nível máximo do lançamento do martelo de  $\sim 0.5713\text{m/ano}$ . Esta situação não é de estranhar face à crescente evolução que esta disciplina atlética tem sofrido nos últimos anos. Desde 2009 até à atualidade, o recorde do mundo progrediu 7 vezes, e no ano de 2016, no espaço de duas semanas, a atleta Polaca Anita Wlodarczyk excedeu por duas vezes o máximo mundial. O lançamento do martelo feminino, ao contrário de outras especialidades do atletismo, tem evoluído consideravelmente. Porventura, por se tratar de uma especialidade atlética relativamente recente para as mulheres (a mais recente de todas as provas de lançamentos), bem como o elevado número de praticantes, pode estar na origem da catadupa de recordes e de outros registos na proximidade do máximo. Contudo, não podemos também deixar de associar este progresso às melhorias das condições de treino, dos equipamentos e da técnica utilizada, bem como à transferência de praticantes vindos de outras especialidades, sobretudo, lançamentos do disco e do peso, à seleção de talentos e, conforme Lippi (2008) e Lippi et al. (2008) mencionam, ao património genético que tem vindo a aperfeiçoar-se de geração para geração.











### 6.9.6. Por que é tão difícil exceder o recorde do mundo no lançamento do disco feminino?

No lançamento do disco, as 10 melhores marcas de sempre foram conseguidas na década 1980-1989 (Tabela 6.32). A atual recordista do mundo, a alemã Gabriele Reinsch, para além do registo de 76.80m, conseguiu outras importantes marcas ao longo da sua carreira desportiva acima dos 70.00m (74.44, 73.42, 72.78, 71.88, 71.86, 71.64, 70.20)m, praticamente todas no ano de 1988 (incluindo o atual recorde do mundo). Esta foi uma década dourada, quer em número de recordes do mundo ( $n=6$ ), quer em número de recordes pessoais quer ainda em número de atletas praticantes desta disciplina atlética. O atual recorde do mundo do lançamento do disco feminino é um dos mais antigos e mais difíceis de superar do panorama do atletismo. Para que se perceba melhor, das atletas que ainda estão em atividade competitiva, apenas a croata Sandra Perkovic, figura na lista das 100 melhores marcas de sempre. O seu melhor registo (71.41m, conseguido em 18-07-2017, em Bellinzona, Suíça) ocupava até à data de 31-12-2019), a posição 70ª do ranking das melhores marcas de sempre. Esta situação talvez explique o

porquê de ser necessário um grande número de anos para ultrapassar o atual recorde do mundo, cuja dificuldade está diretamente associada à sua baixa probabilidade de excedência, conforme apresentado na Tabela 6.26, especialmente até ao ano 2035.

Tabela 6.32 – Registo das 10 melhores marcas de sempre (em cima) e as 10 melhores atletas de sempre (em baixo) no lançamento do disco feminino.

Rank	Mark	Competitor	DOB	Nat	Pos	Venue	Date	
1	76.80	Gabriele REINSCH	23 SEP 1963		GDR	1	Neubrandenburg (GDR)	09/jul/88
2	74.56	Zdeňka ŠILHAVÁ	15/jun/54		TCH	1	Nitra (TCH)	26 AUG 1984
2	74.56	Ilke WYLUDDA	28/mar/69		GDR	1	Neubrandenburg (GDR)	23/jul/89
4	74.44	Gabriele REINSCH	23 SEP 1963		GDR	1	Berlin (GER)	13 SEP 1988
5	74.40	Ilke WYLUDDA	28/mar/69		GDR	2	Berlin (GER)	13 SEP 1988
6	74.08	Diana GANSKY	14 DEC 1963		GDR	1	Karl Marx Stadt (GDR)	20/jun/87
7	73.90	Diana GANSKY	14 DEC 1963		GDR	1	Praha (TCH)	27/jun/87
8	73.42	Gabriele REINSCH	23 SEP 1963		GDR	1	Karl Marx Stadt (GDR)	12/jun/88
9	73.36	Irina MESZYNSKI	24/mar/62		GDR	1	Praha (TCH)	17 AUG 1984
10	73.32	Diana GANSKY	14 DEC 1963		GDR	1	Neubrandenburg (GDR)	11/jun/87

Rank	Mark	Competitor	DOB	Nat	Pos	Venue	Date	
1	76.80	Gabriele REINSCH	23 SEP 1963		GDR	1	Neubrandenburg (GDR)	09/jul/88
2	74.56	Zdeňka ŠILHAVÁ	15/jun/54		TCH	1	Nitra (TCH)	26 AUG 1984
2	74.56	Ilke WYLUDDA	28/mar/69		GDR	1	Neubrandenburg (GDR)	23/jul/89
4	74.08	Diana GANSKY	14 DEC 1963		GDR	1	Karl Marx Stadt (GDR)	20/jun/87
5	73.36	Irina MESZYNSKI	24/mar/62		GDR	1	Praha (TCH)	17 AUG 1984
6	73.28	Galina SAVINKOVA	15/jul/53		URS	1	Donetsk (URS)	08 SEP 1984
7	73.22	Tsvetanka KHRISTOVA	14/mar/62		BUL	1	Kazanlak (BUL)	19 APR 1987
8	73.10	Gisela BEYER	16/jul/60		GDR	1	Berlin (GDR)	20/jul/84
9	72.92	Martina HELLMANN	12 DEC 1960		GER	1	Potsdam (GDR)	20 AUG 1987
10	72.14	Galina MURASHOVA	22 DEC 1955		URS	2	Praha (TCH)	17 AUG 1984

Fonte: <https://www.worldathletics.org/records/all-time-toplists/throws/discus-throw/outdoor/women/senior?regionType=world&page=1&bestResultsOnly=false&firstDay=1900-01-01&lastDay=2019-12-31>

A Figura 6.9 mostra a evolução do recorde do mundo. A IAAF reconhece a existência de 57 recordes do mundo, conseguidos entre 1922 e 1988. A linha vertical representa o ano de 1980, ou seja, o início da recolha de dados deste estudo. Neste ano o recorde do mundo foi excedido duas vezes, sendo que por via do método dos máximos de blocos, apenas um deles foi usado. Para o efeito, o máximo 71.80m. Considerando a globalidade da amostra, apenas 7 marcas ultrapassam este registo, todas entre 1983 e 1989.

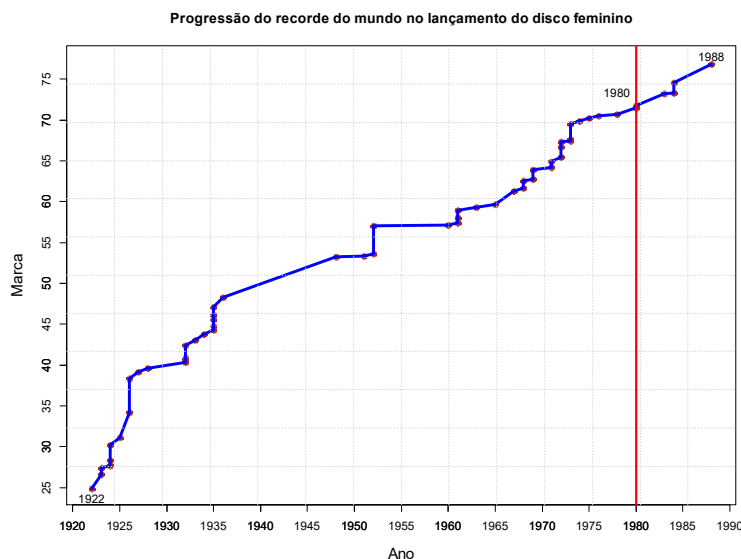


Figura 6.9 – Progressão do recorde do mundo no lançamento do disco feminino, de 1922 até 1988.

A Figura 6.10 mostra o número de recordes do mundo conseguidos por década. Na década mais recente, os recordes do mundo registaram-se em 1980 ( $n=2$ ), 1983 ( $n=1$ ), 1984 ( $n=2$ ) e 1988 ( $n=1$ ). No Séc. XXI, a melhor marca de 71.41m foi conseguida em 2017 pela atleta, Sandra Perković. Esta marca só seria recorde do mundo até 1979! Ou seja, este é mais um indicador das dificuldades em exceder a atual melhor marca do mundo, 76.80m.

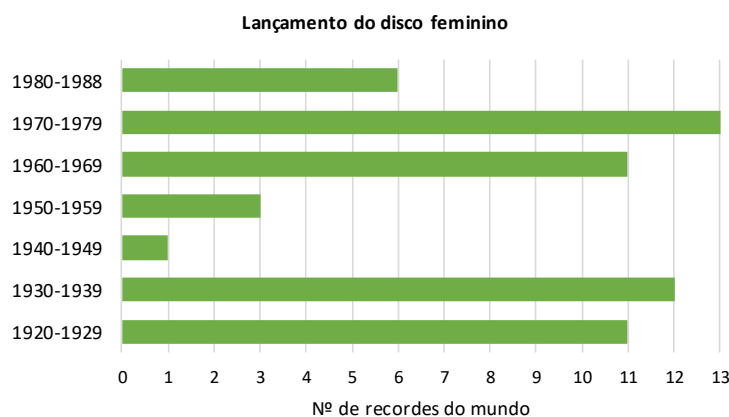


Figura 6.10 – Evolução do número de recordes do mundo no lançamento do disco feminino, por décadas.

No seu *Website* Oficial (<https://www.worldathletics.org/>), a IAAF disponibiliza apenas as melhores marcas de sempre iguais ou superiores a 65.00m. Contudo nos últimos Jogos Olímpicos (Rio de Janeiro, Brasil, 2016)<sup>38</sup>, a IAAF colocou como marca de qualificação direta para a final os 62.00m, a qual ainda que muito afastada do máximo mundial, apenas foi conseguida por 8 atletas (num máximo de 32), sendo

<sup>38</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics\\_at\\_the\\_2016\\_Summer\\_Olympics\\_-\\_Women%27s\\_discus\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics_at_the_2016_Summer_Olympics_-_Women%27s_discus_throw)

que das 12 finalistas, 9 tenham ultrapassado esta marca. A vencedora, Sandra Perkovic (CRO), com a marca de 69.21m, seria ultrapassada por 24 registos da amostra do presente estudo. Isto diz bem:

- (1) das dificuldades em alcançar marcas superiores a 62.00m, e
- (2) a IAAF aceita marcas de qualificação  $\geq 62.00\text{m}$ , mas apenas disponibiliza registos  $\geq 65.00\text{m}$ .

Na lista da IAAF consultada em 31-12-2019 constam todas as atletas que ao longo da história da especialidade de lançamento do disco efetuaram pelo menos um lançamento válido igual ou superior a 65.00m. A Tabela 6.33 apresenta a frequência absoluta ( $k$ ) e relativa (%) de atletas do lançamento do disco feminino por décadas, com marcas iguais ou superiores a 65.00m,  $M$  e  $V$ , com  $M=RM-0.05RM$  e  $V=RM-0.01RM$ . Assim, observa-se que:

- (1) em termos globais, apenas 139 atletas conseguiram igualar ou ultrapassar a marca dos 65.00m;
- (2) a maior frequência de registos ocorre na década de 1980-1989, e a menor frequência no período até 1979;
- (3) a década de 1980-1989, é a única onde se verificam marcas iguais ou superiores aos limiares  $M$  e  $V$ ;
- (4) nas últimas 3 décadas a frequência de atletas com marcas  $\geq 65.00\text{m}$  é relativamente equilibrada;
- (5) nos anos após a recolha de dados, ou seja, 2018 e 2019, apenas 7 atletas conseguiram marcas iguais ou superiores a 65.00m, ou seja, 1 em 2018 e 6 em 2019.

Tabela 6.33 – Frequência absoluta ( $k$ ) e relativa (%) de atletas do lançamento do disco feminino por décadas com performance iguais ou superiores ao mínimo da IAAF e aos limiares  $M$  e  $V$ .

Décadas	Mínimo IAAF=65.00m		$M=72.96$		$V=76.03$	
	$k$	%	$k$	$N$	$k$	$N$
Até 1979	12	8.6	0	0	0	0
1980-1989	60	43.2	8	20	1	1
1990-1999	23	16.5	0	0	0	0
2000-2009	18	12.9	0	0	0	0
2010-2019	26 <sup>(a)</sup>	18.7	0	0	0	0

<sup>(a)</sup> ano de 2018:  $k=1$ ; ano de 2019:  $k=6$

$M = RM - 0.05 \times RM$      $V = RM - 0.01 \times RM$      $RM$ , é o atual recorde do mundo.

$k$ , é o número de observações que igualaram ou excederam cada um dos limiares apresentados (Mínimo IAAF,  $M$  e  $V$ ). Considerou-se a melhor marca por atleta “*best by athlete*”.

$N$ , é o número total de observações iguais ou superiores a  $M$  ou  $V$ . Consideraram-se todas as marcas “*All*” individuais.

Fonte: <https://www.worldathletics.org/>

Para além do observado na Figura 6.1 (lado esquerdo) com os máximos anuais ( $n=38$ ), também na Figura 6.11, com os melhores registos individuais no período de 1980-2017 ( $n=125$ ), i.e., a performance máxima de cada atleta, no intervalo de valores [65.00; 76.80]m, se percebe a presença de uma assimetria positiva e a grande frequência de baixos resultados. O histograma mostra o quão difícil é obter um lançamento do disco próximo do atual recorde do mundo. Considerando o intervalo [74.00; 76.80]m

apenas existem 4 registos individuais (todos conseguidos entre 1984-1989), e no intervalo [75.00; 76.80]m apenas existe 1 registo, ou seja, o atual recorde do mundo.

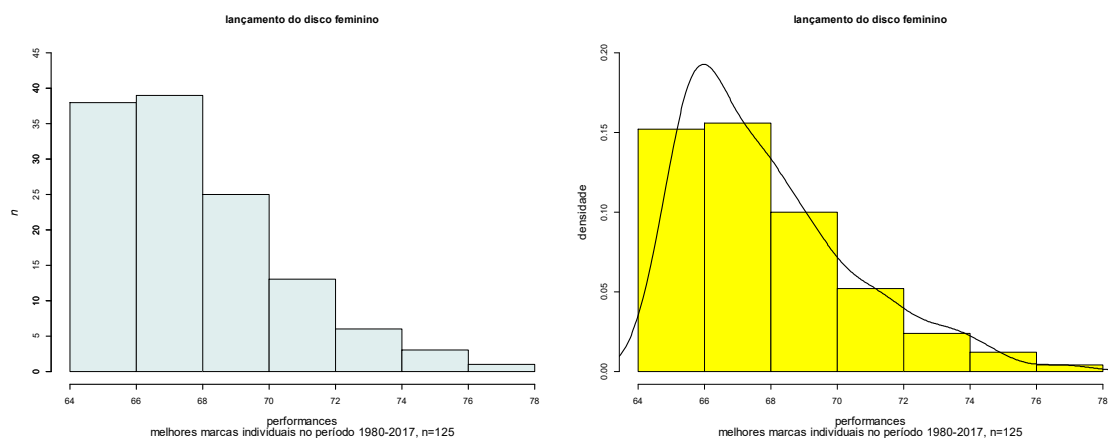


Figura 6.11 – Histograma de frequências (à esquerda) e com a estimativa da curva de densidade (à direita) referente aos valores máximos individuais no lançamento do disco feminino, no período de 1980-2017.

Não obstante as dificuldades que as atletas irão enfrentar nos próximos anos, traduzidas pela reduzida probabilidade de excedência do atual recorde do mundo num ano e pela estimativa pontual dos níveis de retorno preverem que tal possa ocorrer só a partir da terceira década deste século, não podemos deixar de citar Gumbel (1958, p.201) “*Il est impossible que l'improbable n'arrive jamais*” ou “*Il y aura toujours une valeur qui dépassera toutes les autres*” porque os recordes existem para serem batidos.

### 6.9.7. Por que é que o recorde do mundo do lançamento do martelo feminino é aparentemente fácil de ser excedido?











Não obstante Anita Wlodarczyk dominar inequivocamente o panorama internacional do lançamento do martelo desde o ano 2014 (Tabela 6.34, em cima), não deixa de ter forte concorrência em todas as provas em que compete. Um grupo de novas atletas tem surgido (Tabela 6.34, em baixo) e com pretensões de figurar na lista das melhores de sempre. Desta forma, não estranhamos que o processo de modelação preveja que o próximo máximo mundial possa ser alcançado, pelo menos uma vez, até ao ano de 2020<sup>39</sup>. A evolução desta especialidade do atletismo tem transportado o martelo para distâncias impensáveis durante a década de 1990, quando a modalidade foi oficializada pela IAAF para as mulheres. Desde o primeiro recorde do mundo oficial, obtido em 1994 por Olga Kuzenkova (RUS) com a marca de 66.84m, até ao atual recorde do mundo de 82.98m, a distância aumentou 16.14m (representando um aumento de 24%). Na década 1990-1999 o aumento do recorde do mundo foi de 9.32m (cerca de 13.8%), na década



<sup>39</sup> Devido à pandemia da Covid-19, levando praticamente o mundo inteiro ao confinamento doméstico, vários eventos desportivos de enorme importância foram cancelados, como são os casos das provas de apuramento para os Jogos Olímpicos, os próprios Jogos Olímpicos e diversos Meetings Internacionais. Como é expectável, nestes eventos, conseguem-se habitualmente marcas de relevo. A não realização poderá colocar em causa o alcance de algumas previsões.



2000-2009 foi de 0.90m (cerca de 1.2%) e período de 2010-2016 (atual recorde do mundo data de 2016) foi de 4.68m (cerca de 6%). A avaliar pelos níveis de retorno (Tabela 6.28 e Figura 6.6), a evolução das marcas poderá levar a IAAF num futuro próximo a tomar medidas protetoras, similares às tomadas para os lançamentos do dardo masculino em 01-04-1986 e feminino em 01-04-1999, devido aos longos lançamentos que colocavam em risco a segurança de atletas das competições de corrida e de saltos (cujas provas são, habitualmente, realizadas em simultâneo com as provas de lançamentos), juizes, *staff* e espectadores, e com isto reiniciar os recordes, ou eventualmente manter o atual registo mas criando momentos e/ou zonas específicas para a realização destas competições.

Tabela 6.34 – Registo das 10 melhores marcas de sempre (em cima) e as 10 melhores atletas de sempre (em baixo) no lançamento do martelo feminino.

Rank	Mark	Competitor	DOB	Nat	Pos	Venue	Date
1	82.98	Anita WŁODARCZYK	08 AUG 1985	 POL	1	Warszawa (POL)	28 AUG 2016
2	82.87	Anita WŁODARCZYK	08 AUG 1985	 POL	1	Cetniewo (POL)	29/07/2017
3	82.29	Anita WŁODARCZYK	08 AUG 1985	 POL	1	Rio de Janeiro (BRA)	15 AUG 2016
4	81.08	Anita WŁODARCZYK	08 AUG 1985	 POL	1	Cetniewo (POL)	01 AUG 2015
5	80.85	Anita WŁODARCZYK	08 AUG 1985	 POL	1	Beijing (CHN)	27 AUG 2015
6	80.79	Anita WŁODARCZYK	08 AUG 1985	 POL	1	Białystok (POL)	23/07/2017
7	80.26	Anita WŁODARCZYK	08 AUG 1985	 POL	1	Cetniewo (POL)	12/07/2016
8	79.80	Anita WŁODARCZYK	08 AUG 1985	 POL	1	Warszawa (POL)	15 AUG 2017
9	79.73	Anita WŁODARCZYK	08 AUG 1985	 POL	1	Doha (QAT)	06 MAY 2017
10	79.72	Anita WŁODARCZYK	08 AUG 1985	 POL	1	Ostrava (CZE)	27/06/2017

Rank	Mark	Competitor	DOB	Nat	Pos	Venue	Date
1	82.98	Anita WŁODARCZYK	08 AUG 1985	 POL	1	Warszawa (POL)	28 AUG 2016
2	79.42	Betty HEIDLER	14 OCT 1983	 GER	1f1	Halle (GER)	21 MAY 2011
3	78.80	Tatyana LYSENKO	09 OCT 1983	 RUS	1	Moskva (RUS)	16 AUG 2013
4	78.24	DeAnna PRICE	08-Jun-93	 USA	1	Drake Stadium, Des	27/07/2019
5	77.78	Gwen BERRY	29-Jun-89	 USA	1	Chorzów (POL)	08/06/2018
6	77.68	Zheng WANG	14 DEC 1987	 CHN	1	Chengdu (CHN)	29/03/2014
7	77.33	Wenxiu ZHANG	22-Mar-86	 CHN	1	Incheon (KOR)	28 SEP 2014
8	77.32	Oksana MIANKOVA	10 MAY 1982	 BLR	1	Minsk (BLR)	29/06/2008
9	77.26	Gulfiyah KHANAFEYEVA	04-Jun-82	 RUS	1	Tula (RUS)	12/06/2006
10	77.13	Oksana KONDRATYEVA	22-Nov-85	 RUS	1	Zhukovskiy (RUS)	30/06/2013

Fonte: <https://www.worldathletics.org/records/all-time-toplists/throws/hammer-throw/outdoor/women/senior?regionType=world&page=1&bestResultsOnly=true&firstDay=1900-01-01&lastDay=2019-12-31>

A Tabela 6.35 apresenta a evolução da frequência absoluta e relativa de lançadoras do martelo, por décadas, com marcas iguais ou superiores a 60.00m (mínimo IAAF em 31-12-2019), a 72.00m (marca de qualificação para final Olímpica nos Jogos Olímpicos de 2016, no Rio de Janeiro) e aos limiares *M* e *V*.

Nos Jogos Olímpicos do Rio de Janeiro<sup>40</sup>, das 12 atletas qualificadas para a final, apenas 3 conseguiram o apuramento direto com um registo superior a 72.00m, tendo as restantes sido repescadas. Por sua vez,

<sup>40</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics\\_at\\_the\\_2016\\_Summer\\_Olympics\\_-\\_Women%27s\\_hammer\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics_at_the_2016_Summer_Olympics_-_Women%27s_hammer_throw)

das 12 atletas presentes na final Olímpica, apenas 6 conseguiram exceder a marca de 72.00m, tendo inclusivamente a vencedora excedido o anterior máximo mundial<sup>41</sup>.

Não obstante esta especialidade do atletismo ter iniciado oficialmente no ano de 1995, a IAAF apresenta registos de 1990, os quais foram considerados na década de 1990-1999 da Tabela 6.35. Assim, observa-se que:

- (1) tem vindo a aumentar o número de lançadoras do martelo com performances iguais ou superiores a 60.00m, sendo significativamente mais alto na última década;
- (2) a década de 2010-2019 é a que regista a maior frequência de lançamentos iguais ou superiores à marca de qualificação direta para a final Olímpica, no Rio de Janeiro/2016, ou seja, 34.5%;
- (3) os limiares  $M$  e  $V$  apenas são excedidos na década de 2010-2019.
- (4) nos anos após a recolha de dados, um considerável número de atletas conseguiu igualar ou exceder a marca de 60.00m (2018:  $k=88$ ; 2019:  $k=169$ ).

Tabela 6.35 – Frequência absoluta ( $k$ ) e relativa (%) de atletas do lançamento do martelo feminino por décadas com performance iguais ou superiores ao mínimo da IAAF, à marca de qualificação direta para a final Olímpica nos últimos Jogos Olímpicos, Rio de Janeiro 2016 e aos limiares  $M$  e  $V$ .

Décadas	Mínimo IAAF=60.00m		MQ (JO2016)=72.00m		$M=78.83$		$V=82.15$	
	$k$	%	$k$	%	$k$	$N$	$k$	$N$
1990-1999	42	4.0	2	2.5	0	0	0	0
2000-2009	329	31.0	28	34.5	0	0	0	0
2010-2019	689 <sup>(a)</sup>	65.0	51 <sup>(b)</sup>	63.0	2 <sup>(c)</sup>	17*	1 <sup>(d)</sup>	3

<sup>(a)</sup> ano 2018:  $k=88$ ; ano 2019:  $k=169$

<sup>(b)</sup> ano de 2018:  $k=4$ ; ano de 2019:  $k=12$

<sup>(c)</sup> ano de 2011:  $k=1$ ; ano de 2016:  $k=1$

<sup>(d)</sup> ano de 2016:  $k=1$

$M = RM - 0.05 \times RM$      $V = RM - 0.01 \times RM$      $RM$ , é o atual recorde do mundo.

MQ, marca de qualificação direta para a final Olímpica, no Rio de Janeiro/2016.

$k$ , é o número de observações que igualaram ou excederam cada um dos limiares apresentados (Mínimo IAAF, MQ (JO2016),  $M$  e  $V$ ). Considerou-se a melhor marca por atleta “*best by athlete*”.

$N$ , é o número total de observações iguais ou superiores a  $M$  ou  $V$ . Consideraram-se todas as marcas “*All*” individuais.

\* as 17 marcas foram conseguidas apenas por duas atletas: Anita Wlodarczyk (POL) ( $k=16$ ) e Betty Heidler (ALE) ( $k=1$ ).

Fonte: <https://www.worldathletics.org/>

A Figura 6.12 mostra a evolução do recorde do mundo. A IAAF reconhece a existência de 25 recordes do mundo desta especialidade atlética. Não obstante a competição ter iniciado em 1989, só a partir de 01-01-1995 é que os recordes começaram a ser homologados. Porém, a IAAF decidiu reconhecer a marca de Olga Kuzenkova, de 66.84m, obtida em 23-02-1994, como o primeiro recorde do mundo. Na base desta decisão esteve a certificação do espaço desportivo onde decorreu a competição (estádio de Adler na Rússia).

<sup>41</sup> Feito que viria a repetir-se 15 dias após os Jogos Olímpicos, no *Skolimowska Memorial* de Varsóvia, Polónia, e cuja marca ainda hoje se mantém como recorde do mundo.

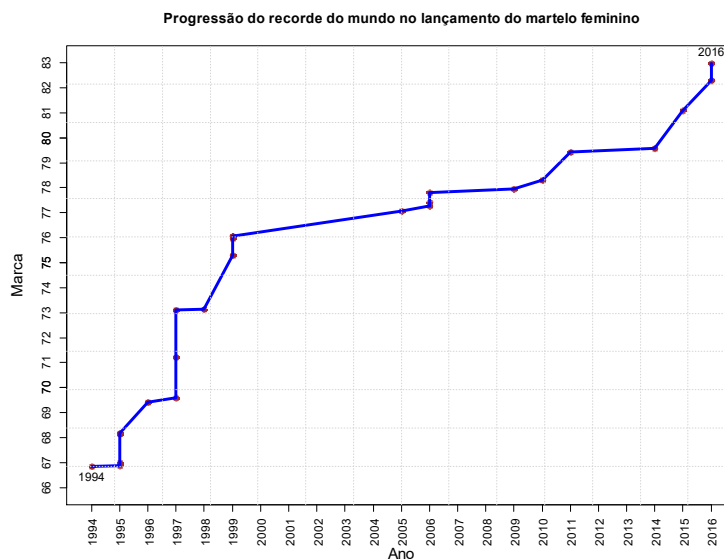


Figura 6.12 – Progressão do recorde do mundo no lançamento do martelo feminino, de 1994 até 2016.

A Figura 6.13 mostra o número de recordes do mundo conseguidos por década. Na década mais recente, os recordes do mundo foram conseguidos em 2010 ( $n=1$ ), 2011 ( $n=1$ ), 2014 ( $n=1$ ), 2015 ( $n=1$ ) e 2016 ( $n=2$ ). À semelhança do que aconteceu no lançamento do disco, também no lançamento do martelo feminino o grande *boom* de recordes do mundo registou-se na primeira década de reconhecimento oficial desta especialidade atlética. Contudo, opostamente ao lançamento do disco, no lançamento do martelo verificou-se um considerável número de recordes do mundo no Séc. XXI, o que parece ser revelador da grande probabilidade de brevemente poder vir a ocorrer um novo máximo mundial. Provavelmente, associado a esta evolução está o facto desta especialidade do atletismo ser relativamente recente (<30 anos), encontrando-se ainda longe da fase de estabilização que caracteriza a maior parte das modalidades atléticas. Porém, a observação feita para o lançamento do disco, decorrente do efeito pandémico da Covid-19 e o cancelamento de diversos eventos desportivos, também se aplica ao lançamento do martelo, e a todas as disciplinas desportivas.

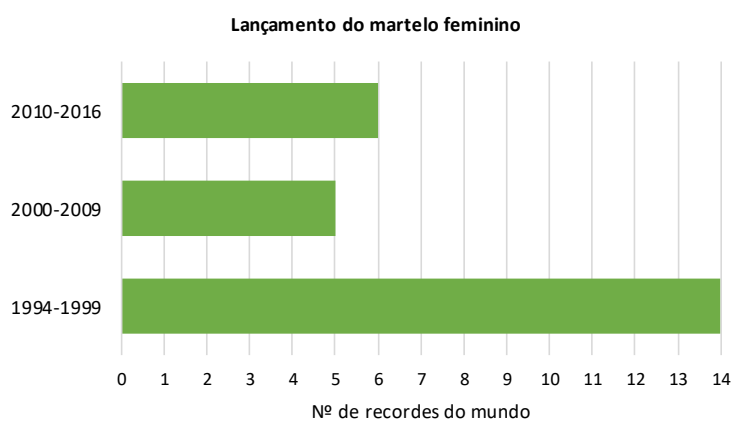


Figura 6.13 – Evolução do número de recordes do mundo no lançamento do disco feminino, por décadas.

Diferente do observado na Figura 6.1 (lado direito) para os máximos anuais ( $n=26$ ), a Figura 6.14 apresenta também sob a forma de histograma mas para os melhores registos individuais no período de 1992-2017 ( $n=911$ ), i.e., a performance máxima de cada atleta, no intervalo de valores [60.00; 82.98]m. Ao contrário dos máximos anuais, verifica-se a presença de uma assimetria positiva e a grande frequência de baixos resultados. Considerando o intervalo [78.00; 82.98]m apenas existem 3 registos individuais e o intervalo no intervalo [80.00; 82.98]m apenas existe 1 registo, ou seja, o atual recorde do mundo.

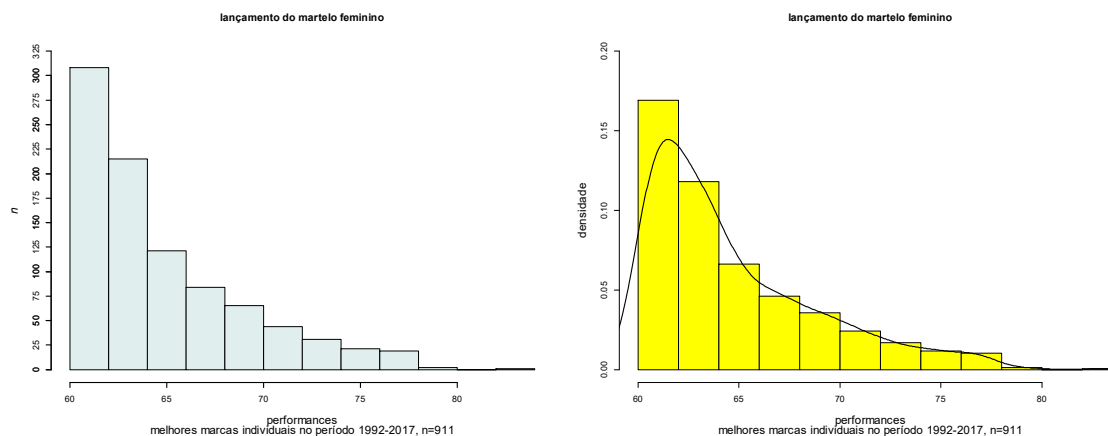


Figura 6.14 – Histograma de frequências (à esquerda) e com a estimativa da curva de densidade (à direita) referente aos valores máximos individuais no lançamento do martelo feminino, no período de 1992-2017.

### 6.9.8. Notas finais

Nas duas especialidades atléticas estudadas, os respetivos recordes do mundo foram conseguidos em épocas distintas. No lançamento do disco no ano de 1988 e no lançamento do martelo no ano de 2016. Ou seja, um dos mais antigos e um dos mais recentes recordes do mundo do atletismo. Por um lado, há que considerar a longevidade destas modalidades. O lançamento do disco<sup>42</sup> tem quase 100 anos de prática oficial, ao passo que o lançamento do martelo tem apenas 26 anos. Por outro, veja-se a origem das atuais detentoras dos máximos mundiais e qual o panorama e cultura desportiva nos seus países em cada uma das épocas em que os recordes do mundo foram alcançados. Igualmente, não podemos deixar de referir a enorme popularidade que o lançamento do martelo feminino tem vindo a adquirir desde que surgiu como modalidade oficial. No *Website* da IAAF, até 31-12-2017, contam-se 917 registos de lançadoras do martelo contra 134 de lançamento do disco. Se considerarmos a totalidade dos registos, independentemente da quantidade de máximos individuais que uma atleta tenha conseguido, constam na base da IAAF,  $N=1587$  para as lançadoras do disco e  $N=24395$  para as lançadoras do martelo, na razão de 1:15.4. Paralelamente, acrescenta-se que devido às semelhanças técnicas (movimento rotacional) e ao idêntico morfotipo, muitas das atletas de lançamento do martelo provieram do

<sup>42</sup> O lançamento do disco é porventura a mais emblemática disciplina desportiva, imortalizado na figura do Discóbolo, uma estátua do escultor grego Míron, produzida em torno de 455 a.C., simbolizando o lançador do disco a entrar em competição.

lançamento do disco, pela única razão que no lançamento do martelo ainda há “esperança” de conseguir um feito notável, algo que é bastante mais difícil no lançamento do disco. Este dado foi confirmado pelos níveis de retorno do presente estudo. No lançamento do disco, as 55 melhores marcas de sempre foram obtidas na década de 1980-1989 (RDA:  $n=43$ ; BUL:  $n=5$ ; URSS:  $n=4$ ; TCH:  $n=3$ ), o que sem excluir o mérito do trabalho árduo das atletas (que logicamente existiu) ou o património genético favorável (que certamente tiveram), não deixa também de fazer permanecer a suspeição do uso do doping, comum nesta época devido à escassez de controlo e aos meios tecnológicos de controlo pouco evoluídos. Ao passo que no lançamento do martelo, as 111 melhores marcas de sempre foram conseguidas entre 2005 e 2017 (distribuídas por atletas de 8 países), onde o passaporte biológico do atleta é a mais moderna ferramenta anti-doping e de desencorajamento para atos de prevaricação. Igualmente, ao nível da formação, muitas jovens atletas são diretamente encaminhadas para os lançamentos do martelo, peso ou dardo. E isto pode, num futuro próximo, a refletir-se negativamente no desenvolvimento do lançamento do disco. Contudo, sabe-se o impacto que tem na formação a existência de uma recordista do mundo do seu País. Ora, com a queda do muro de Berlim, em 1989, perdeu-se grande parte da referência e da identidade patriótica que tanto caracterizava os países do bloco de leste (recorde-se que Gabriele Reinsch era atleta da antiga RDA, tendo a mesma em 2016 admitido o recurso ao doping nos Jogos Olímpicos de 1984, onde conquistou a medalha de ouro<sup>43,44</sup>), e isto pode também justificar a redução do número de atletas da modalidade e as conseqüentes dificuldades acrescidas em obter marcas na proximidade do recorde do mundo<sup>45</sup>. Por outro lado, subsiste a dúvida do que irá acontecer ao lançamento do martelo quando Anita Wlodarczyk abandonar a carreira desportiva. Ainda que a resposta não seja fácil, não é expectável que a ocorra uma razia semelhante à que aconteceu no lançamento do disco, porque existe na atualidade um vasto conjunto de novas atletas que têm vindo a afirmar-se no panorama internacional, levando a acreditar, conforme os resultados apresentados, que muito provavelmente um novo máximo mundial está para breve.

Este capítulo foi dedicado à análise da não-estacionariedade, decorrente de tendência significativa nas séries de dados. Portanto, a identificação de tendências pode fornecer informações úteis que nos permitam vincular a melhoria do limite da performance humana, não apenas à Estatística-Matemática, mas também ao contributo de muitas outras áreas científicas, onde o meio ambiente e as revoluções no ecossistema, assim como a metodologia, planeamento e técnica desportiva assumir-se-ão como vetores fundamentais na confiabilidade de qualquer modelo estatístico que pretenda prever a progressão.

---

<sup>43</sup> <https://www.insidethegames.biz/articles/1033102/dutch-discus-thrower-admits-to-using-anabolic-steroids-ahead-of-los-angeles-1984-olympic-gold-medal-win>

<sup>44</sup> O Comité Olímpico Internacional e a sua Agência Anti-Dopagem, por falta de tecnologia, nunca conseguiram levar a cabo uma investigação rigorosa para detetar o programa de doping sistemático que ocorreu em diversos países do bloco de leste, em especial na antiga RDA (<https://www.surtoolimpico.com.br/2019/11/surto-historia-alemanha-oriental-nas.html>).

<sup>45</sup> A Tabela 6.32 mostra que o segundo melhor registo de sempre está a mais de 2 metros de distância do recorde do mundo.

## 7. CONCLUSÕES

A motivação desta dissertação centrou-se na aplicação da Teoria de Valores Extremos para modelar o comportamento de estatísticas ordinais extremas nas provas de lançamentos e saltos do atletismo *outdoor*, cujos registos são reconhecidos pela IAAF. Não obstante a EVT ser extensivamente utilizada em muitas áreas, no desporto em geral e nos lançamentos e saltos do atletismo em particular, são em número reduzido os trabalhos de investigação. Esta tese procurou colmatar esta lacuna, desenvolvendo modelos estatísticos considerando três métodos fundamentais:  $r$ -maiores observações anuais, excessos acima de um limiar e máximos de blocos anuais (caso particular das  $r$ -maiores observações anuais) com parâmetros de localização e escala não-estacionários. Para cada amostra, os anos de início e fim da série de dados, a dimensão da amostra e o método empregue estão apresentados de forma sumária na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 – Provas, anos inicial e final, género e método utilizado com cada amostra.

Provas	Homens	Mulheres	Método
Lançamento do dardo	1986-2017, $n=32$ ( $N=320$ )	1999-2017, $n=19$ ( $N=190$ )	$r$ -MO anuais
Lançamento do disco	1980-2017, $n=38$ ( $N=380$ )	-----	
Lançamento do martelo	1980-2017, $n=38$ ( $N=380$ )	-----	
Lançamento do peso	1980-2017, $n=38$ ( $N=380$ )	1986-2017, $n=32$ ( $N=320$ )	
Salto em altura	1980-2017, $n=734$	1980-2017, $n=193$	POT (máximos individuais)
Salto em comprimento	1980-2017, $n=762$	1980-2017, $n=272$	
Salto com vara	1980-2017, $n=783$	1996-2017, $n=584$	
Triplo-salto	1980-2017, $n=478$	1991-2017, $n=287$	
Lançamento do disco	-----	1980-2017, $n=38$	Máximo de blocos anuais (com metodologia não-estacionária)
Lançamento do martelo	-----	1992-2017, $n=26$	

No capítulo quatro, considerou-se o método das  $r$ -maiores observações anuais. Na aplicação desta técnica foi considerado que a seleção do número total de estatísticas ordinais não fosse demasiado pequena de forma a evitar a variância alta dos estimadores de máxima verosimilhança, nem demasiado alto para não violar as suposições assintóticas inerentes à EVT e daí o viés.

Esta metodologia foi aplicada às amostras de lançamentos do atletismo que apresentavam evidências de não-rejeição da estacionariedade, presentes na Tabela 7.2. Assim, de todas as amostras e decorrente da significativa não-estacionariedade, foram excluídas as amostras de lançamentos do disco e do martelo feminino. Os parâmetros extremais, os erros-padrão e os intervalos com 95% de confiança para  $\gamma$ , dos  $r^{(k)}$  modelos, com  $k=1, \dots, 10$ , foram obtidos por máxima verosimilhança e otimizados pelo algoritmo de Nelder-Mead. Conhecidos os argumentos teóricos inerentes ao método das  $r$ -MO, observada a estabilidade das estimativas dos parâmetros extremais e dos respetivos erros-padrão, não foram considerados os modelos cujas estimativas apresentavam evidências de instabilidade a partir de um certo nível  $r$ , uma vez que colocavam em causa a validade do próprio modelo para valores acima desse nível. Por outro lado, apoiados no ajuste proporcionado pelos PP-plot, QQ-plot para os  $r^{(k)}$  níveis e pelos PP-plot, QQ-plot, gráfico dos níveis de retorno e gráfico de densidade para o máximo, selecionamos o

modelo mais conveniente para cada amostra, cuja probabilidade de excedência do atual recorde do mundo e estimativa dos quantis extremais eram plausíveis e realistas. Escolhemos, para cada amostra, os modelos apresentados na Tabela 7.2, onde também se apresenta um eventual recorde final, expresso pelo limite superior do suporte.

Tabela 7.2 – Nível  $r$ -MO selecionado para cada amostra e limite superior do suporte.

Amostras	Homens	Mulheres	$x^F$ (homens)	$x^F$ (mulheres)
Lançamento do dardo	$r=2$	$r=4$	104.41	79.26
Lançamento do disco	$r=2$	---	75.22	---
Lançamento do martelo	$r=3$	---	87.82	---
Lançamento do peso	$r=3$	$r=2$	23.28	26.89

A probabilidade de excedência do atual recorde do mundo varia entre 0.540% (lançamento do peso masculino) e 6.360% no lançamento do dardo feminino. Os níveis de retorno a  $t$ -anos mostraram que nos lançamentos do dardo, disco e peso masculino nenhuma estimativa pontual excedeu o atual recorde do mundo, prevendo-se que este seja excedido em média pelo menos uma vez a cada 141, 145 e 185 anos, respetivamente; no lançamento do martelo masculino, a estimativa para  $U(100)$  iguala o atual recorde do mundo. Nas amostras de mulheres, as estimativas pontuais nos lançamentos do dardo e do peso ultrapassam o atual recorde do mundo, a partir de inclusivamente 16 e 64 anos, respetivamente. Considerando o limite superior do intervalo com 95% de confiança para  $U(t)$ , conforme as estimativas tenham sido obtidas pelo método delta e pela função *profile log-likelihood*, é possível que nos homens ocorra um novo recorde do mundo entre 19 e 31 anos para o lançamento do dardo, entre 22 e 33 anos para o lançamento do disco, entre 20 e 27 anos para o lançamento do martelo e entre 25 e 38 anos para o lançamento do peso; nas mulheres, entre 5 e 12 anos para o lançamento do dardo, e entre 14 e 20 anos para o lançamento do peso.

No capítulo cinco, usamos o método dos excessos acima de um limiar. Verificada a estacionariedade das séries de dados referentes aos saltos do atletismo cujos máximos individuais foram obtidos ao ar livre, efetuamos a caracterização das amostras. Diversos quantis empíricos foram calculados como meio de informação acerca do posicionamento de cada limiar no seio da amostra. A determinação dos candidatos a limiar foi realizada por técnicas gráficas, nomeadamente o gráfico da vida média residual, o gráfico da vida mediana residual, o gráfico da estabilidade dos parâmetros, os gráficos do estimador generalizado de Hill e dos momentos (procurando os seus “melhores” pontos de intersecção) e o gráfico da suavização da vida média residual que designamos de “esticar a corda”. A decisão quanto a considerarmos o modelo ser GPD ( $\gamma \neq 0$ ) ou modelo Exponencial ( $\gamma = 0$ ) foi tomada com base na informação resultante do QQ-plot, dos intervalos de confiança para  $\gamma$  e dos testes de hipóteses da *Deviance*, da *Deviance* corrigida e do teste de Marohn. Estimados os parâmetros extremais  $(\sigma_u, \gamma)$ , por máxima verosimilhança com otimização pelo algoritmo de BFGS, constatou-se que não existem

modelos com  $\hat{\gamma} > 0$  e que na maior parte dos modelos verifica-se  $-0.5 < \hat{\gamma} < 0$ . Algumas exceções ocorrem com alguns modelos do salto em altura feminino, do salto em comprimento feminino e do triplo-salto feminino, onde se registaram estimativas  $-1 < \hat{\gamma} < -0.5$ . Dos vários limiares candidatos em cada amostra, seleccionamos apenas dois (Tabela 7.3) que foram utilizados em modelos de previsão de várias quantidades de interesse estimadas, nomeadamente, quantis extremais, probabilidade de excedência, limite superior do suporte (quando  $\hat{\gamma} < 0$ ), níveis de retorno e “períodos” de retorno. Para avaliação do ajustamento consideramos também os gráficos de probabilidade, quantis e de densidade. Os modelos escolhidos revelaram bom ajuste. A probabilidade de exceder o atual recorde do mundo é inferior a 0.2%, exceto no triplo salto masculino que se situa entre 0.2315% e 0.2898%. Os níveis de retorno associados a  $t$ -máximos individuais, mostram as dificuldades em obter um novo máximo mundial em qualquer especialidade dos saltos do atletismo. Contudo, a situação é aparentemente mais fácil no triplo-salto masculino, onde se prevê que um novo recorde do mundo possa acontecer, em média pelo menos uma vez em 345 e 432 máximos individuais, bem como no salto em comprimento feminino em 526 e 535 máximos individuais, dependendo do limiar. Por outro lado, prevê-se que um novo recorde do mundo possa acontecer, em média pelo menos uma vez em 4473 e 5416 máximos individuais no salto com vara masculino, bem como em 3456 máximos individuais no salto em altura masculino (com  $u=2.345$ ), em 2581 máximos individuais no salto com vara feminino (com  $u=4.615$ ) e no triplo-salto feminino em 1308 e 1482 (com os dois limiares escolhidos) máximos individuais. Com base no intervalo com 95% de confiança para os níveis de retorno a  $t$ -recordes individuais, nos homens podemos esperar que, em média, um novo máximo mundial possa ocorrer com 700 recordes individuais no salto em altura, com 500 recordes individuais no salto em comprimento, de 800 a 900 recordes individuais no salto com vara, e de 200 a 300 recordes individuais no triplo-salto; nas mulheres, com 200 recordes individuais nos saltos em altura e em comprimento, de 400 a 600 recordes individuais no salto com vara e com 300 recordes individuais no triplo-salto. A Tabela 7.3 também apresenta um eventual recorde final, representado pelo limite superior do suporte.

Tabela 7.3 – Níveis  $u$  selecionados para cada amostra e respetivos rácios de excedência, distribuição usada no processo de modelação e limite superior do suporte.

Amostras	Homens				Mulheres			
	$u$	$k/n$	Distr.	$x^F$	$u$	$k/n$	Distr.	$x^F$
Salto em altura	2.345	0.097	GPD	2.48	2.006	0.202	GPD	2.10
	2.355	0.080	EXP	---	2.025	0.124	GPD	2.10
Salto comprim.	8.370	0.088	EXP	---	7.074	0.140	GPD	7.61
	8.406	0.068	EXP	---	7.085	0.132	GPD	7.61
Salto com vara	5.825	0.096	GPD	6.17	4.615	0.101	GPD	5.16
	5.844	0.088	GPD	6.18	4.696	0.067	EXP	---
Triplo-salto	17.568	0.105	EXP	---	14.933	0.101	GPD	15.55
	17.605	0.079	EXP	---	14.960	0.098	GPD	15.56



No capítulo seis, abordamos o método dos máximos de blocos anuais com estimação dos parâmetros sob a não-estacionariedade. Discutimos a teoria da não-estacionariedade para modelos  $GEV_{\gamma \neq 0}$  e  $Gumbel_{\gamma=0}$ . Neste caso, os parâmetros foram expressos como uma função de covariáveis dependentes do tempo, onde depois (numa primeira fase) de testados diversos modelos selecionamos (numa segunda fase) um conjunto de possíveis candidatos a bons modelos, com as características:

$$X_t \sim GEV(\lambda(t), \delta(t), \gamma) \begin{cases} \lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t \vee \lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 \\ \delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t) \vee \delta(t) = \exp(\delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2) \\ \gamma(t) = \gamma \end{cases}$$

A função exponencial foi utilizada no parâmetro de escala para assegurar um valor positivo deste. Demonstramos que sob determinadas condições práticas, como por exemplo a ocorrência de significativa não-estacionariedade, a abordagem pelo método dos máximos de blocos é mais eficiente do que outros métodos.

O procedimento de modelação não-estacionária foi usado com as amostras de lançamentos do disco e martelo feminino. Este estudo é o primeiro a ser realizado no âmbito da teoria de valores extremos, numa abordagem paramétrica, com aplicação a dados desportivos com evidências de não-estacionariedade. Usamos o método dos máximos de blocos anuais, a distribuição GEV, a estimação dos parâmetros extremais por máxima verosimilhança com otimização pelos algoritmos de Nelder-Mead, BFGS e L-BFGS-B (conforme a convergência obtida em cada modelo) para modelar eventos extremos nas especialidades atléticas referidas. Testamos 12 modelos: 1 estacionário e 11 não-estacionários (dos quais 3 com tendência linear, 5 com tendência quadrática e 3 com tendência cúbica). Em todos os casos, mantivemos constante o parâmetro de forma,  $\gamma(t) = \gamma$ , dado ser sensível às incertezas amostrais, com claro prejuízo na estimação de quantis extremais. Confirmada a não-estacionariedade, qualquer modelo deveria proporcionar um melhor ajustamento relativamente ao modelo estacionário, dado que a adição de parâmetros geralmente conduz a um melhor ajuste à custa do aumento da complexidade. A seleção e comparação entre os modelos foi efetuada em quatro fases: (1) incorporamos informação, considerando a plausibilidade de cada modelo, tendo sido excluídos aqueles que aparentaram ser não-realistas, como por exemplo os modelos log-quadráticos e log-cúbicos nos parâmetros de localização e escala, (2) excluímos os modelos que não convergiram e/ou apresentaram estimativas indeterminadas dos erros-padrão dos parâmetros extremais, (3) por recurso à *Deviance* e à *Deviance* corrigida (modelos com diferente número de parâmetros ou encaixados) e aos critérios de informação AIC, AICc e BIC (modelos com o mesmo número de parâmetros ou não-encaixados) excluímos aqueles que, respetivamente, não apresentaram evidências de rejeição da hipótese nula ( $H_0$ : o modelo reduzido é o mais adequado) e não minimizavam as quantidades dos critérios, e (4) recorrendo às métricas RMSE, MAE, ME e %BIAS (onde calculamos a média da distribuição GEV/Gumbel para cada ponto predito pelo modelo, em função do tempo. Igualmente, foi realizado um estudo de simulação envolvendo estas métricas com o intuito de ajudar no processo de tomada de decisão), para os dois

modelos finalistas em cada amostra, tendo sido excluído o modelo com valores absolutos mais elevados. Assim, um modelo probabilístico Gumbel não-estacionário com tendência quadrática na localização foi ajustado ao lançamento do disco feminino no período de 1980–2017, e um modelo probabilístico GEV com tendência linear na localização, log-linear na escala e constante no parâmetro de forma foi ajustado para avaliar a sua adequação face à melhor performance de cada ano, no período de 1992–2017 no lançamento do martelo feminino (Tabela 7.4). Estimamos os níveis de retorno para  $T$ -anos, os quais preveem que um novo recorde do mundo do lançamento do disco feminino possa ocorrer até ao ano 2034 com base numa estimativa pontual ou até ao ano 2030 se considerarmos o intervalo com 95% de confiança. Nesta amostra, a probabilidade de excedência do atual recorde do mundo até ao ano de 2030 é de, aproximadamente, 3%. Já o recorde do mundo do lançamento do martelo feminino é previsível que possa ser excedido até ao ano de 2020 (com base em estimativas pontuais ou intervalares), com probabilidade de excedência do atual recorde do mundo de, aproximadamente, 98%. A Tabela 7.4 também apresenta um eventual recorde final, representado pelo limite superior do suporte.

Tabela 7.4 – Modelos não-estacionários selecionados para cada amostra e limite superior do suporte.

Amostras	Método dos máximos de blocos não-estacionários	$x^F$
Lançamento do disco (feminino)	$X_t \sim Gumbel(\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 t + \hat{\lambda}_2 t^2, \hat{\delta})$	---
Lançamento do martelo (feminino)	$X_t \sim GEV(\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 t, \exp(\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 t), \hat{\gamma})$	2020: 85.40 2025: 87.87 2030: 90.45 2040: 95.82 2050: 101.34

Em termos gerais, ficou patente neste estudo que há recordes do mundo que são difíceis de ultrapassar. Nos homens, os recordes do mundo dos lançamentos e saltos têm mais de 25 anos; nas mulheres, os recordes do mundo dos lançamentos do dardo e do martelo e do salto com vara foram conseguidos neste século, sendo que os restantes têm longevidade superior a 25 anos.

Com este estudo, continuamos e completamos os trabalhos por nós realizados, nomeadamente, Silva et al. (2017a,b), Caeiro et al. (2018), Silva et al. (2018a,b,c) e Silva et al. (2019), onde ajustamos séries estacionárias referentes aos lançamentos do dardo, disco e peso, bem como no salto em comprimento e triplo-salto pelos métodos das  $r$ -maiores observações anuais e POT e séries não-estacionárias relativas ao lançamento do martelo feminino pelo método dos máximos de blocos anuais. Fomos os primeiros a utilizar as metodologias das  $r$ -MO, POT e não-estacionariedade (este caso em contexto paramétrico) na modelação de extremos nos lançamentos e saltos do atletismo.

Os resultados deste estudo poderão servir de guia para todos os que se interessam pela problemática da análise de valores extremos no desporto, com particular potencial de contribuir para que os agentes desportivos diretamente envolvidos na problemática da maximização da performance e obtenção de recordes dos lançamentos e saltos do atletismo possam aferir a metodologia de treino no sentido de

oferecer condições aos atletas para que alcancem prestações de enorme significado desportivo, como por exemplo um novo máximo mundial.

### 7.1. LIMITAÇÕES AO ESTUDO

Apresentamos de seguida algumas limitações no âmbito deste trabalho.

- Uma primeira questão que importa salientar relaciona-se com o conjunto de dados utilizados. Ao tentarmos obter o maior número possível de máximos individuais, necessitamos muitas vezes de recorrer a séries de máximos relativamente antigos. Ao fazê-lo poderemos estar a trabalhar com dados que pouco têm a ver com o nível alcançado nos últimos anos. Por outro lado, ao utilizarmos apenas dados demasiado recentes, enfrentamos o problema de um maior equilíbrio entre as performances, o que, em ambos os casos, conduz a um elevado grau de incerteza sobre a capacidade de rendimento do atleta, bem como das potencialidades em operacionalizar a EVT. Nesta medida, entendemos que o ano de início, sempre que a especialidade atlética permitisse, seria o ano de 1980.
- O tamanho da amostra é uma questão importante quando se lida com as metodologias utilizadas na teoria de valores extremos, especialmente perante a não-estacionariedade. Neste estudo, as amostras de lançamentos do disco e martelo feminino são formadas por  $m=38$  e  $m=26$  máximos de blocos anuais. Esta situação é suscetível de criar problemas de convergência, sobretudo com séries de dados cujo traçado gráfico indica a necessidade de considerar modelos onde parâmetros são expressos em polinómios de grau 2 e 3. Paralelamente, duas importantes limitações da metodologia dos máximos de blocos anuais, prendem-se com o suposto desperdício de informação (que não é tão evidente no método das  $r$ -maiores observações ou no método POT que usam mais observações) e o facto de alguns blocos poderem conter vários máximos superiores ao(s) máximo(s) de outro(s) bloco(s), mas que foram excluídos da análise de valores extremos.
- Em todas as aplicações estimamos os parâmetros extremais pelo método da máxima verossimilhança devido às suas boas propriedades que permitem o cálculo do erro-padrão associado à estimativa pontual dos parâmetros extremais e de outras importantes quantidades de interesse e subsequentes intervalos de confiança. Contudo, se seguirmos a sugestão de Chavez-Demoulin (1999) e Pauli & Coles (2001) podemos utilizar o método da verossimilhança penalizada, especialmente nos casos onde se verificam tendências, dado o mesmo ser mais flexível permitindo admitir diferentes níveis de suavização para os parâmetros extremais.
- Alguns cuidados devem estar presentes na interpretação das inferências dos níveis de retorno associados a um dado período de retorno, sobretudo (i) para longos períodos de retorno, (ii) quando a amostra é de reduzida dimensão, (iii) quando se verifica a aproximação à Normal da distribuição do estimador de máxima verossimilhança, e especialmente (iv) quando não há evidências para garantir a estacionariedade.

## 7.2. RECOMENDAÇÕES PARA FUTURAS INVESTIGAÇÕES

Nesta secção deixamos algumas perspectivas abertas por este trabalho.

- Em muitas situações no âmbito do desporto requer-se a análise de extremos de duas ou mais variáveis (e.g., condições climatéricas, local de realização, mês de realização e performance desportivo-motora), pelo que poderá não ser suficiente a análise univariada do comportamento extremo. É necessário também estudar comportamentos com valores extremos univariados com várias covariáveis, extremos bivariados e multivariados. Para além destes fatores, outros ainda poderão ser considerados, como a idade do atleta e a origem étnica (caucasiano, negro africano, negro americano, asiático, hispânico ou outra).
- Considerar no processo de modelação a problemática da sazonalidade e da localização geográfica, uma vez que as competições atléticas são disputadas cada vez mais em qualquer época do ano em qualquer país ou continente.
- De modo a limitar o (questionável) desperdício de dados decorrente do uso do método dos máximos de blocos e a confirmar (ou infirmar) a não-estacionariedade e as estimativas obtidas, investigações posteriores que usem procedimentos e modelos univariados, poderão considerar o método dos máximos de blocos mas incluindo todas as observações i.i.d.'s (1 máximo por atleta), o método das  $r$ -maiores observações anuais, neste caso parece suficiente recorrer às 5 maiores observações por ano, ou o método dos excessos acima de um limiar considerando os máximos mensais.
- Nas  $r$ -maiores observações, desenvolver um estimador que possibilite uma escolha adequada do nível  $r$ .
- Sabendo que é necessária uma amostra de grande dimensão para modelar a tendência que possa existir no parâmetro de forma e sabendo que este parâmetro é bastante sensível às incertezas amostrais com reflexos na estimação de quantis extremos, tem levado muitos investigadores a assumirem que  $\gamma$  é constante com o tempo. Contudo, seria pertinente testar esta suposição, verificando igualmente a precisão, através do uso de amostras de diferentes dimensões.
- A maior parte dos trabalhos que utilizam a metodologia POT fazem-no numa lógica de caudas pesadas. Ora como vimos no desporto as caudas são melhor representadas por modelos Beta e Exponenciais, onde existe um número reduzido de estudos. Por esta razão, é importante refinar os procedimentos que conduzem à escolha do limiar. Na escolha do limiar  $u$ , um método a considerar em futuras abordagens é o *Peaks-Over-Random Threshold* (PORT), dado também lidar com este tipo de problema. Contudo, à semelhança do método POT, não existe um algoritmo ou teste considerado unanimemente robusto na definição do  $u$  ótimo.
- A continuidade do trabalho apresentado nesta tese poderá incluir a estimação do índice de valor extremo usando técnicas semi-paramétricas, tais como o estimador de Pickands  $\hat{\gamma}_n^P(k)$  (Pickands, 1975), o estimador dos momentos  $\hat{\gamma}_n^M(k)$  (Dekkers et al., 1989) e o estimador generalizado de Hill  $\hat{\gamma}_n^{GH}(k)$

(Beirlant et al., 1996, 2004), o estimador dos momentos mistos  $\hat{\gamma}_n^{MM}(k)$  (Fraga Alves et al., 2009), bem como a abordagem *bootstrap* desenvolvida por Danielson & de Vries (1997), onde o erro quadrático médio assintótico é minimizado.

- Estender a análise de extremos a todas as especialidades do atletismo *outdoor* e *indoor* e a outras modalidades desportivas (e.g., canoagem, ciclismo de pista, fórmula 1, halterofilismo, mergulho, natação, pentatlo moderno, remo, tiro), perante condições de estacionariedade e não-estacionariedade.
- Investigações futuras poderão também considerar a modelação do comportamento estocástico dos extremos no desporto recorrendo ao Processo Pontual de Poisson, Extremos Multivariados e à Análise Bayesiana. Nestas áreas da EVT não existem investigações relacionadas com o desporto.

## 8. REFERÊNCIAS

- Adam, M.B. & Tawn, J.A. (2016). Modelling record times in sport with extreme value methods. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 10 (1): 1-21.
- Akaike, H. (1974). A New Look at the Statistical Model Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19 (6): 716-723.
- Albrecher, H.; Beirlant, J. & Teugels, J. (2017). *Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects*. Wiley, Chichester.
- Allen, E.; Singh, A. & Powell, R. (2011). *Extreme market risk-an extreme value theory approach*. Edith Cowan University, 1-26.
- An, Y. & Pandey, M.D. (2007). The  $r$  largest order statistics model for extreme wind speed estimation. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 95 (3): 165-182.
- Arnold, B.C.; Balakrishnan, N. & Nagaraja, H.N. (1992). *A First Course in Order Statistics*. John Wiley and Sons.
- Avriel, M. (2003). *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*. Dover Books on Computer Science, Dover Publishing.
- Bader, B. & Yan, J. (2018). *eva: Extreme Value Analysis with Goodness-of-Fit Testing*. R package version 0.2.5. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/eva/eva.pdf>
- Bai, F.; Chen, X.; Chen, Y. & Huang, T. (2019). A general quantile residual life model for length-biased right-censored data. *Scandinavian Journal of Statistics*, 46 (4): 1191-1205.
- Balakrishnan, N. & Cohen, A.C. (1991). *Order Statistics and Inference. Estimation Methods*. Academic Press, Statistical Modelling and Decision Science.
- Balkema, A.A. & de Haan, L. (1974). Residual life time at great age. *Annals of Probability*, 2 (5): 792-804.
- Balkema, G. & Embrechts, P. (2007). *High Risk Scenarios and Extremes: a geometric approach*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society.
- Ballerini, R. & Resnick, S. (1985). Records from Improving Populations. *Journal of Applied Probability*, 22 (4): 487-502.
- Barão, M.I. & Tawn, J.A. (1999). Extremal analysis of short series with outliers: sea-levels and athletics records. *Applied Statistics*, 48 (4): 469-487.
- Bartlett, M.S. (1937). Properties of sufficiency and statistical tests. *Proceedings of the Royal Society A*, 160 (901): 268-282.
- Beirlant, J.; Goegebeur, Y.; Teugels, J.; Segers, J. & Ferro, C. (2004) *Statistics of Extremes: Theory and Applications*. First edition. Chichester, England: Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd, England. pp. 159-160.
- Beirlant, J.; Joossens, E. & Segers, J. (2009). Second-Order Refined Peaks-Over-Threshold Modelling for Heavy-Tailed Distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139 (8): 2800-2815.
- Beirlant, J.; Teugels, J.L. & Vynckier, P. (1996). *Practical Analysis of Extreme Values*. Leuven University Press.
- Benktander, G. & Segerdahl, C. (1960). *On the analytical representation of claim distributions with special reference to excess of loss reinsurance*. In: Transactions 16-th International Congress of Actuaries, Brussels, 1960. p.626-646.
- Bera, A.K. & Biliyas, Y. (2001). *The MM, ME, ML, EL, EF and GMM Approaches to Estimation: a Synthesis*. Discussion Paper, 2001-09, Departments of Economics, University of Cyprus.
- Berman, S.M. (1962). Limiting distributions of the maximum term in a sequence of dependent random variables. *Annals of Mathematical Statistics*, 33 (3): 894-908.
- Bermudez, P.Z. & Kotz, S. (2010a). Parameter estimation of the generalized Pareto distribution - Part I. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140, 1374-1388.
- Bermudez, P.Z. & Kotz, S. (2010b). Parameter estimation of the generalized Pareto distribution - Part II. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140, 1353-1373.
- Berthelot, G.; Sedeaud, A.; Marck, A.; Antero-Jacquemin, J.; Schipman, J.; Saulière, G.; Marc, A.; Desgorces, F.D. & Toussaint, J.F. (2015). Has athletic performance reached its peak? *Sports Medicine*, 45 (9): 1263-1271.

- Berthelot, G.; Thibault, V.; Tafflet, M.; Escolano, S.; El Helou, N.; Jouven, X.; Hermine, O. & Toussaint, J.F. (2008). The Citius End: World Records Progression Announces the Completion of a Brief Ultra-Physiological Quest. *PLoS One*, 3 (2): e15552.
- Bingham, N.H. (2007). Regular variation and probability: the early years. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200 (1): 357-363.
- Bingham, N.H.; Goldie, C.M. & Teugels, J.L. (1987). *Regular Variation*. Cambridge, University Press.
- Botchkarev, A. (2018). *Performance Metrics (Error Measures) in Machine Learning Regression, Forecasting and Prognostics: Properties and Typology*. arXiv:1809.03006v1 [stat.ME].
- Bozdogan, H. (1987). Model selection and Akaike's information criterion (AIC). The general theory and its analytical extensions. *Psychometrika*. 52 (3): 345-370.
- Brockwell, P.J. & Davis, R.A. (2002). *Introduction to time series and forecasting*. New York: Springer Verlag.
- Cabral, I.; Caeiro, F. & Gomes, M.I. (2020). On the comparison of several classical estimators of the extreme value index. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, DOI: 10.1080/03610926.2020.1746970
- Caeiro, F. & Gomes, M.I. (2016). *Threshold Selection in Extreme Value Analysis*. In *Extreme Value Modeling and Risk Analysis: Methods and Applications*. Chapman and Hall/CRC 2007, pp.69-86.
- Caeiro, F. (2006). *Estimação de Parâmetros de Acontecimentos Raros*. Tese de Doutorado, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Departamento de Estatística e Investigação Operacional (DEIO).
- Caeiro, F.; Mateus, A. & Ramos, L. (2015). *Extreme value analysis of the sea levels in Venice*. Conference Paper in AIP Conference Proceedings, March 2015.
- Caeiro, F.; Silva, D. & Oliveira, M. (2018). *Men's performance in triple jump: an approach with extreme value theory*. SMTDA Conference Proceedings, 12 - 15 June 2018, Chania, Creete, Greece.
- California Department of Public Works (1923). *Flow in California streams*. Bull. 5, California, Department of Public Works, Division of Engineering and Irrigation, Sacramento, CA.
- Caperaa, P.; Fougères, A.L. & Genest, C. (1997). A nonparametric estimation procedure for bivariate extreme value copulas. *Biometrika*, 84 (3): 567-577.
- Caroni, C.; Panagoulia, D. & Economou, P. (2015). *Non-stationary modelling of extremes of precipitation and temperature over mountainous areas under climate change*. International Conference on Risk Analysis, ICRA 6 / RISK 2015, At: Barcelona, Spain, Volume II.
- Cartwright, D.E. & Longuet-Higgins, M.S. (1956). The statistical distribution of the maxima of a random function. *Proceedings of the Royal Society London, Series A*, 237 (1209): 212-232.
- Castillo, E. & Hadi, A. (1997). Fitting the generalized Pareto distribution to data. *Journal of the American Statistical Association*, 92 (440): 1609-1620.
- Castillo, E. (1988). *Extreme Value Theory in Engineering*. Academic Press.
- Castillo, E.; Hadi, A.S.; Balakrishnan, N. & Sarabia, J.M. (2004). *Extreme Value and Related Models with Applications in Engineering and Science*. Wiley-Interscience, a John Wiley & Sons, Inc., Publication, Wiley Series in Probability and Statistics.
- Chai, T. & Draxler, R.R. (2014). Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? – Arguments against avoiding RMSE in the literature. *Geoscientific Model Development*, 7 (3): 1247-1250.
- Chang, Y.S. & Baek, S.J. (2010). Limit to improvement in running and swimming. *International Journal of Applied Management Science*, 3 (1): 97-120.
- Chaplin, W.S. (1880). The relation between the tensile strengths of long and short bars. *Van Nostrand's Engineering Magazine*, 23, 441-444.
- Chaplin, W.S. (1882). On the relative tensile strengths of long and short bars. *Proceedings of the Engineer's Club, Philadelphia*, 3, 15-28.
- Cheng, L.; AghaKouchak, A.; Gilleland, E. & Katz, R.W. (2014). Non-stationary extreme value analysis in a changing climate. *Climatic Change*, 127 (2): 353-369.
- Cieszkowski, S. (2014). Analysis of Olympic final competitions results in women's athletic jumping events. *Scientific Review of Physical Culture*, 4 (2): 117-122.
- Claeskens, G. & Hjort, N. (2008). *Model Selection and Model Averaging*. Cambridge University Press, Cambridge.

- Cleveland, W.S. & Devlin, S.J. (1988). Locally Weighted Regression: An Approach to Regression Analysis by Local Fitting. *Journal of the American Statistical Association*, 83 (403): 596-610.
- Cleveland, W.S. & Loader, C. (1996). *Smoothing by Local Regression: Principles and Methods*. Physica-Verlag, p.10-49.
- Cleveland, W.S. (1979). Robust locally weighted fitting and smoothing scatterplots. *Journal of the American Statistical Association* 74 (368): 829-836.
- Cleveland, W.S. (1981). Lowess: a program for smoothing scatterplots by robust locally weighted fitting. *The American Statistician*, 35 (1): 54.
- Cleveland, W.S. (1994). *Coplots, nonparametric regression, and conditionally parametric fits*. Multivariate Analysis and Its Applications, IMS Lecture Notes - Monograph Series (1994) Volume 24, pp.21-36.
- Coles, S. (2001). *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. London: Springer-Verlag.
- Coles, S.G. & Tawn, J.A. (1991). Modelling extreme multivariate events. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 53 (2): 377-392.
- Coles, S.G. & Tawn, J.A. (1994). Statistical methods for multivariate extremes: an application to structural design (with discussion). *Applied Statistics*, 43 (1): 1-48.
- Cooley, D. (2013). *Return periods and return levels under climate change*. In: Chapter 4 in *Extremes in a Changing Climate: Detection, Analysis and Uncertainty*. AghaKouchak, A.; Hsu, K. & Sorooshian, S. (eds.), Springer Science + Business media Dordrecht.
- Cox, D.R. & Hinkley, D.V. (1974). *Theoretical Statistics*. London: Chapman and Hall.
- Cox, D.R. & Stuart, A. (1955). Some quick sign tests for trend in location and dispersion. *Biometrika*, 42 (1-2): 80-95.
- Cox, N.J. (2005). Speaking Stata: density probability plots. *The Stata Journal*, 5 (2): 259-273.
- Crámer, H. (1962). On the maximum of a normal stationary stochastic process. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 68 (5): 512-516.
- Crámer, H. (1965). A limit theorem for the maximum values of certain stochastic processes. *Theory of Probability and Its Applications*, 10 (1): 126-128.
- Curto, J. & Rios, A. (2007). *Teoria de valores extremos: aplicação aos mercados de capitais*. Actas do XV Congresso Anual da SPE, 175-184.
- Dargahi-Noubary, G.R. (1989). On tail estimation: an improved method. *Mathematical Geology*, 21 (8): 829-842.
- Das, B. & Ghosh, S. (2013). Weak limits for exploratory plots in the analysis of extremes. *Bernoulli*, 19 (1): 308-343.
- David, H.A. (1981). *Order Statistics*. 2nd edition, John Wiley and Sons.
- Davis, R.A. & Mikosch, T. (2008). Extreme value theory for space-time processes with heavy tailed distributions. *Stochastic Processes and Their Applications*, 118 (4): 560-584.
- Davis, R.A.; Klüppelberg, C. & Steinkohl, C. (2013). Statistical inference for max-stable processes in space and time. *Journal of the Royal Statistics Society: Series B*, 75 (5): 791-819.
- Davison, A. (1984). *Modeling excesses over high threshold with an application*. In: Tiago de Oliveira, J. (Ed.). *Statistical Extremes and Applications*. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Statistical Extremes and Applications, Lisbon: Springer, p.461-482.
- Davison, A.C. & Gholamrezaee, M.M. (2012). Geostatistics of extremes. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 468 (2138): 581-560.
- Davison, A.C. & Smith, R.L. (1990). Models for exceedances over high thresholds. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 52 (3): 393-442.
- de Finetti, B. (1932). Sulla legge di probabilità degli estremi. *Metron*, 9 (3-4): 127-138.
- de Haan, L. & Ferreira, A. (2006). *Extreme Value Theory*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. New York: Springer.
- de Haan, L. & Resnick, S.I. (1977). Limit theory for multivariate sample extremes. *Zeit. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 40 (4): 317-337.
- de Haan, L. (1970). *On Regular Variation and its Applications to the Weak Convergence of Sample Extremes*. 32<sup>nd</sup> ed., Amsterdam, Mathematical Centre Tracts, Mathematisch Centrum Amsterdam.



- de Haan, L. (1971). A form of regular variation and its application to the domain of attraction of the double exponential. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 17 (3): 241-258.
- de Haan, L. (1984). *Slow variation and characterization of domains of attraction*. In Statistical Extremes and Applications, Tiago de Oliveira, ed., D. Reidel, Dordrecht, Holland, pp.31-48
- Deheuvels, P. (1989). *Strong laws for the kth order statistic when  $k \leq \log_2 n$*  (II). In Extreme Value Theory, Volume 51, pp. 21-35. Springer.
- Dekkers, A.L.M., Einmahl, J.H.J. & de Haan, L. (1989). A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *The Annals of Statistics*, 17 (4): 1833-1855.
- Deville, Y. & IRSN (2016). *Renext: Renewal Method for Extreme Values Extrapolation*. R package version 3.1-0. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/Renext/Renext.pdf>.
- Ding, Y.; Cheng, B. & Jiang, Z. (2008). A newly-discovered GPD–GEV relationship together with comparing their models of extreme precipitation in summer. *Advances in Atmospheric Sciences*, 25, (3): 507-516.
- Dixon, M.J. & Tawn, J.A. (1994). *Extreme Sea-Levels at the UK A-Class Sites: Site-By-Site Analyses*. Proudman Oceanographic Laboratory Internal Document No. 65.
- Dodd, E.L. (1923). The greatest and least variate under general laws of error. *Transactions of the American Mathematical Society*, 25, 525-539.
- Dombry, C. (2015). Existence and consistency of maximum likelihood estimators for the extreme value index within the block maxima framework. *Bernoulli*, 21 (1): 420-436.
- DuMouchel, W. (1983). Estimating the stable index  $\alpha$  in order to measure tail thickness: a critique. *Annals of Statistics*, 11 (4): 1019-1036.
- Dupuis, D.J. & Field, C.A. (1998). Robust estimation of extremes. *Canadian Journal of Statistics*, 26 (2): 199-215.
- Dupuis, D.J. (1998). Exceedances over high thresholds: a guide to threshold selection. *Extremes*, 1 (3): 251-261.
- Dwass, M. (1964). Extremal processes. *Annals of Mathematical Statistics*, 35 (4): 1718-1725.
- Dwass, M. (1966). Extremal processes II. *Illinois Journal of Mathematics*, 10, 381-391.
- Efron, B. & Hinkley, D.V. (1978). Assessing the accuracy of the maximum likelihood estimator: Observed versus expected Fisher information. *Biometrika*, 65 (3): 457-487.
- Einmahl, J.H.J. & Magnus, J.R. (2008). Records in athletics through extreme-value theory. *Journal of the American Statistical Association*, 103 (484): 1382-1391.
- Einmahl, J.H.J. & Smeets, S.G.W.R. (2011). Ultimate 100M world records through extreme-value theory. *Statistica Neerlandica*, 65 (1): 32-42.
- Einmahl, J.H.J.; de Haan, L. & Xin, H. (1993). Estimating a multidimensional extreme value distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, 47 (1): 35-47.
- El Adlouni, S.; Ouarda, T.B.M.J.; Zhang, X.; Roy, R. & Bobée, B. (2007). Generalized maximum likelihood estimators for the nonstationary generalized extreme value model. *Water Resources Research*, 43 (3410): 1-13.
- Embrechts, P.; Kluppelberg, C. & Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events: for Insurance and Finance*. In: Applications in Mathematics, vol. 33, New York: Springer-Verlag.
- Falk, M. (1989). *Best attainable rate of joint convergence of extremes*. In Extreme Value Theory, Volume 51, pp. 1-9. Springer.
- Falk, M. (1995). On testing the extreme value index via the pot-method. *The Annals of Statistics*, 23 (6): 2013-2035.
- Falk, M.; Husler, J. & Reiss, R. (1994). *Laws of Large Numbers: Extremes and Rare Events*. Birkhäuser, Basel.
- Ferreira, A. & de Haan, L. (2015). On the block maxima method in extreme value theory: PWM estimators. *The Annals of Statistics*, 43 (1): 276-298.
- Ferreira, A.; de Haan, L. & Peng, L. (2003). On optimizing the estimation of high quantiles of a probability distribution. *Statistics*, 37 (5): 401-434.
- Fisher, R.A. & Tippett, L.H.C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest and smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24: 180-190.
- Florinsky, I.V. (2012). *Digital Terrain Analysis in Soil Science and Geology*. Elsevier Inc, Academic Press.
- Fraga Alves, I.; de Haans, L. & Neves, C. (2013). *How far can man go?* In Studies in Theoretical and Applied Statistics, Chapter 18, p.187-197.

- Fréchet, M. (1927). Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* (Cracovie), 6: 93-116.
- Friederichs, P.; Goeber, M.; Bentzien, S.; Lenz, A. & Krampitz, R. (2009). A probabilistic analysis of wind gusts using extreme value statistics. *Meteorologische Zeitschrift*, 18 (6): 615-629.
- Fuller, W.E. (1914). Flood Flows. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 77, 564.
- Galambos, J. (1978). *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. New York: Krieger.
- Galambos, J. (1987). *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. 2nd Edition. New York: Krieger.
- Galambos, J.; Leigh, S. & Simiu, E. (1994). *Extreme Value Theory and Applications*. Kluwer, Amsterdam.
- García-Cueto, O.R. & Santillán-Soto, N. (2012). *Modeling Extreme Climate Events: Two Case Studies in Mexico*. In *Climate Models*, Druyan, L. (ed.), Publisher InTech.
- Geffroy, J. (1958/59). Contribution a la théorie des valeurs extremes. *Publication Institute Statistics University of Paris*, 7/8, 37-185.
- Ghosh, S. & Resnick, S. (2010). A discussion on mean excess plots. *Stochastic Processes and their Applications*, 120 (8): 1492-1517.
- Ghosh, S.; Resnick, S. (2011). When does the mean excess plot look linear? *Stochastic Models*, 27 (4): 705-722.
- Gilbert, R.O. (1987). *Statistical Methods for Environmental Pollution Monitoring*. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc..
- Gilleland, E. & Katz, R. (2013). *in2extRemes: Into the R package extRemes. Extreme Value Analysis for Weather and Climate Applications*. Weather and Climate Impacts Assessment Science Program Geophysical Statistics Project, NCAR/TN- +STR, NCAR TECHNICAL NOTE.
- Gilleland, E. & Katz, R.W. (2016). *extRemes 2.0: An Extreme Value Analysis Package in R*. *Journal of Statistical Software*, 72 (8): 1-39. doi:10.18637/jss.v072.i08
- Gilleland, E.; Katz, R. & Young, G. (2005). *Extremes Toolkit Weather and Climate Applications of Extreme Value Statistics*. URL: <http://www.isse.ucar.edu/extremevalues/extreme.pdf>
- Gnedenko, B.V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*, 44 (3): 423-453.
- Gomes, M.I. & Caeiro, F. (2014). *Efficiency of partially reduced-bias mean-of-order-p versus minimum-variance reduced-bias extreme value index estimation*. In *Proceedings of COMPSTAT 2014, ISI/IASC*, Gilli et al. (eds.), pp.289-298.
- Gomes, M.I. & Guillou, A. (2015). Extreme value theory and statistics of univariate extremes: A Review. *International Statistical Review*, 83 (2): 263-292.
- Gomes, M.I. & Henriques-Rodrigues, L. (2016). Competitive estimation of the extreme value index. *Statistics & Probability Letters*, 17 (2016): 128-135.
- Gomes, M.I. & Pestana, D.D. (2007). A sturdy reduced-bias extreme quantile (VaR) estimator. *Journal of the American Statistical Association*, 102 (477): 280-292.
- Gomes, M.I. (1978). *Some Probabilistic and Statistical Problems in Extreme Value Theory*. Ph.D. Thesis, University of Sheffield.
- Gomes, M.I. (1981). *An i-dimensional limiting distribution function of largest values and its relevance to the statistical theory of extremes*. In *Statistical Distributions in Scientific Work*. Taillie et al. (eds.), D. Reidel, Vol. 6, pp.389-410.
- Gomes, M.I. (1993). *A Obra Científica de J. Tiago de Oliveira*. I Congresso Ibero-Americano de Estadística e Investigación Operativa, pp.241-245.
- Gomes, M.I. (1995). *Metodologias Jackknife e Bootstrap em Estatística de Extremos*. Actas da II Conferência Anual da S.P.E., 31-46.
- Gomes, M.I. (1999). The Jackknife and the Bootstrap methodologies in the estimation of parameters of rare events. *Revista de Estatística* 99, 5-23.
- Gomes, M.I. (2005). *"Extremistas" num extremo da Europa*. Projecto: Escola de Extremos em Portugal.
- Gomes, M.I. (2007). Memorial da Escola. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística*, 37-51.
- Gomes, M.I. (2008). *Estatística de extremos e desporto - como estimar alguns parâmetros úteis*. Seminário de Probabilidades e Estatística da UTL, FMH.

- Gomes, M.I. (2014). *A Glimpse of Statistics of Univariate Extremes*. Invited plenary talk at CIRM International Conferences on Extreme Value Theory and Laws of Rare Events, July 14-18, 2014, Marseille, France. Plenary talk.
- Gomes, M.I. (2017). *A "Escola de Extremos" em Portugal — "Extremistas" num Extremo da Europa*. Palestra aquando da Cerimónia de Imposição de Insígnias a Professores Eméritos da Universidade de Lisboa, 25 de setembro de 2017.
- Gomes, M.I. (2018). *The role of generalized means in multivariate extreme value statistics*. 1<sup>st</sup> CRoNos Workshop on Multivariate Data Analysis and Software. Poseidon Beach Hotel, Limassol, Cyprus, 3-5 April 2018.
- Gomes, M.I., Cairo, F., Henriques-Rodrigues, L. & Manjunath, B.G. (2016b). *Bootstrap methods in statistics of extremes*. In Handbook of Extreme Value Theory and Its Applications to Finance and Insurance. Longin, F. (ed.), Handbook Series in Financial Engineering and Econometrics (Ruey Tsay Adv.Ed.). John Wiley and Sons.
- Gomes, M.I., Martins, M.J. & Neves, M.M. (2000). Alternatives to a semiparametric estimator of parameters of rare events: the Jackknife methodology. *Extremes*, 3 (3): 207-229.
- Gomes, M.I., Martins, M.J. & Neves, M.M. (2007). Improving second order reduced bias extreme value index estimation. *REVSTAT – Statistical Journal*, 5 (2): 177-207.
- Gomes, M.I., Mendonça, S. & Pestana, D.D. (2011). Adaptive reduced-bias tail index and VaR estimation via the bootstrap methodology. *Communication in Statistics, Theory and Methods*, 40 (16): 2946-2968.
- Gomes, M.I.; Cairo, F.; Figueiredo, F.; Henriques-Rodrigues, L. & Pestana, D. (2019). Corrected-Hill versus partially reduced-bias value-at-risk estimation. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*.
- Gomes, M.I.; Fraga Alves, I. & Neves, C. (2013). *Análise de Valores Extremos: uma introdução*. Sociedade Portuguesa de Estatística, Lisboa.
- Gomes, M.I.; Henriques-Rodrigues, L. & Manjunath, B.G. (2016a). Mean-of-order-p location-invariant extreme value index estimation. *REVSTAT – Statistical Journal*, 14 (3): 273-296.
- Gomes, M.I.; Pestana, D. & Henriques-Rodrigues, L. (2009). *Athletic events and statistics of extremes: estimation of useful parameters*. Technical Report CEAUL 06/09.
- Gonçalves, E. & Lopes, N.M. (2008). *Séries Temporais – Modelações Lineares e Não Lineares*. 2<sup>a</sup> edição, Sociedade Portuguesa de Estatística.
- Gong, S. (2012). *Estimation of hot and cold spells with extreme value theory*. Project Report 19, Uppsala University.
- Greenwood, J.A.; Landwehr, J.M.; Matalas, N.C. & Wallis, J.R. (1979). Probability weighted moments: definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. *Water Resources Research*, 15 (5): 1049-1054.
- Griffith, A.A. (1920). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 221, 163-198.
- Grimshaw, S.D. (1993). Computing maximum likelihood estimates for the generalized Pareto distribution. *Technometrics*, 35 (2): 185-191.
- Grycmann, P.; Maszyk, A.; Socha, T.; Golas, A.; Wilk, M.; Zajac, T. & Przednowek, K. (2015). Modelling analysis and prediction of women javelin throw results in the years 1946-2013. *Biology of Sport*, 32 (4): 345-350.
- Gumbel, E.J. (1934). Les moments des distributions finales de la première et de la dernière valeur. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (Paris), 198, 141-143.
- Gumbel, E.J. (1935). Les valeurs extrêmes des distributions statistiques. *Annals of Institute Henri Poincaré*, 5 (2): 115-158.
- Gumbel, E.J. (1937a). *La Durée Extrême de la Vie Humaine*. Actualités Scientifiques et Industrielles, Paris: Hermann et Cie.
- Gumbel, E.J. (1937b). Les intervalles extrêmes entre les émissions radioactives. *Journal de Physique et le Radium*, 8 (11): 446-452.
- Gumbel, E.J. (1941). The return period of flood flows. *Annals of Mathematical Statistics*, 12 (2): 163-190.
- Gumbel, E.J. (1943). On the plotting of flood discharges. *Transactions of the American Geophysical Union*, 24 (2): 699-719.
- Gumbel, E.J. (1945). Floods estimated by probability methods. *Engineering News Record*, 134, 97-101.

- Gumbel, E.J. (1949). *The Statistical Forecast of Floods*. Bulletin No. 15, 1-21, Ohio Water Resources Board, Columbus, Ohio.
- Gumbel, E.J. (1958). *Statistics of Extremes*. New York: Columbia University Press, USA.
- Gupta, H.V.; Sorooshian, S. & Yapo, P.O. (1999). Status of automatic calibration for hydrologic models: comparison with multilevel expert calibration. *Journal of Hydrologic Engineering*, 4 (2): 135-143.
- Hall, W. J. & Wellner, J. (1981). *Mean residual life. Statistics and related topics* (Ottawa, Ont., 1980). In *Statistics and Related Topics*. Csorgo, M.; Dawson, J.N. & Saleh, A.K. (eds.), North-Holland, Amsterdam. Revision: Hall, W.J. & Wellner, J. *Estimation of mean residual life*. 2012. IMS. pp. 169-184.
- Harter, H.L. (1978). A bibliography of Extreme-Value Theory. *International Statistical Review*, 46 (3): 279-306.
- Hasan, H., Salam, N. & Adam, M. B. (2013). Modelling extreme temperature in Malaysia using Generalized Extreme Value distribution. *International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, 7 (6): 983-989.
- Heffernan, J.E. & Stephenson, A.G. (2016). *ismev*: An introduction to statistical modeling of extreme values. R package version 1.41. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/ismev/ismev.pdf>
- Henriques-Rodrigues, L.; Gomes, M.I. & Pestana, D. (2011). Statistics of extremes in athletics. *REVSTAT - Statistical Journal*, 9 (2): 127-153.
- Henriques-Rodrigues, L.; Gomes, M.I. & Pestana, D. (2015). Estatística de extremos em desporto. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística*, Primavera de 2015, 36-44.
- Hill, B.M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *The Annals of Statistics*, 3 (5): 1163-1174.
- Hosking, J. (1984). Testing whether the shape parameter is zero in the generalized extreme value distribution. *Biometrika*, 71 (2): 367-374.
- Hosking, J.R.M. & Wallis, J.R. (1987). Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution. *Technometrics*, 29 (3): 339-349.
- Hosking, J.R.M. (1985). Algorithm AS 215: Maximum likelihood estimation of the parameters of the generalized extreme value distribution. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 34 (3): 301-310.
- Hosking, J.R.M.; Wallis, J.R. & Wood, E.F. (1985). Estimation of the generalized extreme-value distribution by the method of probability-weighted moments. *Technometrics*, 27 (3): 251-261.
- Hurvich, C.M. & Tsai, C. (1989). Regression and time series model selection in small samples. *Biometrika*, 76 (2): 297-307.
- Huser, R. & Davison, A.C. (2012). *Space-time modelling of extreme events*. arXiv:1201.3245v1 [stat.ME], 16 Jan 2012.
- Huser, R. & Davison, A.C. (2014). Space-time modelling of extreme events. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 76 (2): 439-461.
- Husler, J. (1996). Multivariate option price models and extremes. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 25 (4): 853-870.
- IAAF - International Association of Athletics Federations (2015). *Progression of IAAF World Records*. 2015 edition, Edited by Richard Hymans (ATFS) and Imre Matrahazi (IAAF). Printed by Multiprint, Monaco.
- Jenkinson, A.F. (1955). The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 81 (348): 158-171.
- Jenkinson, A.F. (1969). *Statistics of extremes*. Technical Note 98, World Meteorological Office, Geneva.
- Joe, H. (1994). Multivariate extreme value distributions with applications to environmental data. *Canadian Journal of Statistics*, 22 (1): 47-64.
- Joe, H.; Smith, R.L. & Weissman, I. (1992). Bivariate threshold methods for extremes. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 54 (1): 171-183.
- Jonathan, P. & Ewans, K. (2013). Statistical modelling of extreme oceans environments for marine design: a review. *Ocean Engineering*, 62, 91-109.
- Juncosa, M.L. (1949). On the distribution of the minimum of a sequence of mutually independent random variables. *Duke Mathematical Journal*, 16, 609-618.
- Karamata, J. (1930). Sur un mode de croissance régulière des fonctions. *Mathematica (Cluj)*, 4, 38-53.
- Kass, R.E. & Raftery, A.E. (1995). Bayes Factors. *Journal of the American Statistical Association*, 90 (430): 773-795.

- Katz, R. (2010). Statistics of extremes in climate change. *Climatic Change*, 100 (1): 71-76.
- Katz, R.; Brush, G. & Parlange, M. (2005). Statistics of extremes: modelling ecological disturbances. *Ecology*, 86 (5): 1124-1134.
- Katz, R.W. (2013). *Statistical Methods for Nonstationary Extremes*. In: Extremes in a Changing Climate: Detection, Analysis and Uncertainty, Chapter 2. AghaKouchak et al. (eds.), Springer Science + Business media Dordrecht.
- Katz, R.W.; Parlange, M.B. & Naveau, P. (2002). Statistics of extremes in hydrology. *Advances in Water Resources*, 25 (8-12): 1287-1304.
- Kidwell, K; Ko, J.H. & Wahed, A.S. (2014). Inference for the median residual life function in sequential multiple assignment randomized trials. *Statistics in Medicine*, 33 (9): 1503-1513.
- Kotz, S. & Nadarajah, S. (2000). *Extreme Value Distributions - Theory and Applications*. Imperial College Press, London, UK.
- Kozubowski, T.J.; Panorska, A.K.; Qeadan, F.; Gershunov, A. & Rominger, D. (2009). Testing Exponentiality Versus Pareto Distribution via Likelihood Ratio. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 38 (1): 118-139.
- Lamperti, J. (1964). On extreme order statistics. *Annals of Mathematical Statistics*, 35 (4): 1726-1737.
- Lang, M.; Ouarda, T.B.M.J.; Bobée, B. (1999). Towards operational guidelines for over-threshold modelling. *Journal of Hydrology*, 225 (3-4): 103-117.
- Langousis, A.; Mamalakis, A.; Puliga, M. & Deidda, R. (2016). Threshold detection for the generalized Pareto distribution: Review of representative methods and application to the NOAA NCDC daily rainfall database. *Water Resources Research*, 52 (4): 2659-2681.
- Leadbetter, M. R.; Lindgren, G. & Rootzen, H. (1983). *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*. Springer, New York: Springer Series in Statistics.
- Leadbetter, M.R. & Nandagopalan, S. (1989). *On exceedance point processes for stationary sequences under mild oscillation restrictions*. In: Husler, J. & Reiss, R.-D. (Eds.), *Extreme Value Theory*. Springer, Berlin, pp. 69-80.
- Leadbetter, M.R. (1991). On a basis for “peaks over threshold” modeling. *Statistics & Probability Letters*, 12 (4): 357-362.
- Lehmann, E.H. (1983). *Theory of Point Estimation*. New York: Wiley.
- Leme, R.A. da Silva (1954). *Os extremos de Amostras Ocasionais e suas Aplicações à Engenharia*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Brasil.
- Leng, X.; Peng, L.; Wang, X. & Zhou, C. (2017). *Endpoint estimation for observations with normal measurement errors*. EVA2017, 10th International Conference on Extreme Value Analysis, TU Delft University of Technology, The Netherlands, June 26-30, 2017.
- Lewis, A. S.; Overton, M. (2013). Nonsmooth optimization via quasi-Newton BFGS. *Mathematical Programming*, 141 (1): 135-163.
- Lippi, G. (2008). Genomics and sports: building a bridge towards a rational and personalized training framework. *International Journal of Sports Medicine*, 29 (3): 264-265.
- Lippi, G.; Banfi, G.; Favaloro, E.J.; Rittweger, J. & Maffulli, N. (2008). Updates on improvement of human athletic performance: focus on world records in athletics. *British Medical Bulletin*, 87 (1): 7-15.
- Lomba, J.S. (2016). *Extreme Value Analysis of Competitive Freediving Records*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências, Departamento de Estatística e Investigação Operacional, Universidade de Lisboa.
- Loretan, M. & Philips, P.C.B. (1994). Testing the covariance stationarity of heavy tailed time series: an overview of the theory with applications to several financial datasets. *Journal of Empirical Finance*, 1 (2): 211-248.
- Loynes, R.M. (1965). Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes. *Annals of Mathematical Statistics*, 36 (3): 993-999.
- Ma, Y & Yin, G. (2010). Semiparametric median residual life model and inference. *The Canadian Journal of Statistics*, 34 (4): 665-679.
- Madsen, H.; Rasmussen, P.F. & Rosbjerg, D. (1997). Comparison of annual maximum series and partial duration series methods for modeling extreme hydrologic events 1. At-site modeling. *Water Resources Research*, 33 (4): 747-757.

- Makkonen, L. (2006). Plotting positions in the extreme value analysis. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 45 (2): 334-340.
- Makkonen, L. (2008). Problems in the extreme value analysis. *Structural Safety*, 30 (5): 405-419.
- Malevergne, Y.; Pisarenko, V. & Sornette, D. (2006). On the power of generalized extreme value (GEV) and generalized Pareto distribution (GPD) estimators for empirical distributions of stock returns. *Applied Financial Economics*, 16 (3): 271-289.
- Marcus, M. & Pinsky, M. (1969). On the domain of attraction of e-e-x. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 28 (2): 440-449.
- Marohn, F. (1998). Testing the Gumbel hypothesis via the POT-method. *Extremes*, 1 (2): 191-213.
- Marohn, F. (2000). Testing Extreme Value Models. *Extremes*, 3 (4): 363-384.
- Martins, E.S. & Stedinger, J.R. (2000). Generalized maximum likelihood generalized extreme-value quantile estimators for hydrological data. *Water Resources Research*, 36 (3): 737-744.
- McNeil, A. & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7 (3-4): 271-300.
- Mejzler, D.G. (1949). On a problem of B.V. Gnedenko. *Ukrain. Mat. Žurnal*, 1 (2): 67-84.
- Méndez, F.J.; Menéndez, M.; Luceño, A. & Losada, I.J. (2006). Estimation of the long-term variability of extreme significant wave height using a time-dependent Peak Over Threshold (POT) model. *Journal of Geophysical Research*, 111 (7): 1-13.
- Mokhtari, A. & Ribeiro, A. (2015). Global convergence of online limited memory BFGS. *Journal of Machine Learning Research*, 16 (98): 3151-3181.
- Moore, G.H. & Wallis, W.A. (1943). Time series significance tests based on signs of differences. *Journal of the American Statistical Association*, 38 (222): 153-164.
- Morales, J.L. & Nocedal, J. (2011). Remark on "algorithm 778: L-BFGS-B: Fortran subroutines for large-scale bound constrained optimization". *ACM Transactions on Mathematical Software*, 38 (1): 1-4.
- National Bureau of Standards (1953). *Probability Tables for the Analysis of Extreme Value Data*. U.S. Department of Commerce, Applied Mathematics, Series No.22, 1-32.
- National Bureau of Standards (1954). Extreme value methods for engineering problems. *Technical News Bulletin*, 38 (2): 29-31.
- Naveau, P.; Guillou, A.; Cooley, D. & Diebolt, J. (2009). Modelling pairwise dependence of maxima in space. *Biometrika*, 96 (1): 1-17.
- Nelder, J.A. & Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7 (4): 308-313.
- Neves, M. & Prata Gomes, D. (2011). Geostatistics for spatial extremes. A case study of maximum annual rainfall in Portugal. *Procedia Environmental Sciences*, 7, 246-251.
- Nevill, A.M. & Whyte, G. (2005). Are the limits to running world records? *Medicine and Science in Sports and Exercise*, 37 (10): 1785-1788.
- Newell, G.F. (1964). Asymptotic extremes for m-dependent random variables. *Annals of Mathematical Statistics*, 35 (3): 1322-1325.
- Nordquist, J.M. (1945). Theory of largest values, applied to earthquake magnitudes. *Transactions of the American Geophysical Union*, 26 (1): 29-31.
- Northrop, P.J. & Coleman, C. (2014). Improved threshold diagnostic plots for extreme value analyses. *Extremes*, 17 (2): 289-303.
- Obeysekera, J. & Salas, J.D. (2014). Quantifying the uncertainty of design floods under nonstationary conditions. *Journal of Hydrologic Engineering*, 19 (7): 1438-1446.
- O'Brien, G.L. (1974). Limit theorems for the maximum term of a stationary process. *Annals of Probability*, 2 (83): 540-545.
- Pareto, V. (1896). *Cours d'économie politique*. Droz, Geneva, Switzerland, Rouge, Lausanne et Paris.
- Park, K. (2018). *Fundamentals of Probability and Stochastic Processes with Applications to Communications*. Springer International Publishing, Holmdel, New Jersey, USA
- Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *The Annals of Statistics*, 3 (1): 119-131.
- Pickands, J. (1981). *Multivariate extreme value distributions*. In Proceedings of the 43rd Session of the I.S.I., pp. 859-878, The Hague. International Statistical Institute.

- Potter, W.D. (1949). *Normalcy tests of precipitation and frequency studies of runoff on small watersheds*. U S Department of Agriculture Technical Bulletin, No. 985.
- Prescott, P. & Walden, A.T. (1980). Maximum likelihood estimation of the parameters of the generalized extreme-value distribution. *Biometrika*, 67 (3): 723-724.
- Prescott, P. & Walden, A.T. (1983). Maximum likelihood estimation of the parameters of the three-parameter generalized extreme-value distribution from censored samples. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 16 (3-4): 241-250.
- Ravi, S. (2010). On a characteristic property of generalized Pareto distributions, extreme value distributions and their max domains of attraction. *Statistical Papers*, 51 (2): 455-463.
- Reiss, R.D. & Thomas, M. (1999). A new class of Bayesian estimators in paretian excess-of-loss reinsurance. *Astin Bulletin*, 29 (2): 339-349.
- Reiss, R.D. & Thomas, M. (2001). *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. Birkhauser Verlag AG, 2nd edition.
- Reiss, R.D. & Thomas, M. (2007). *Statistical Analysis of Extreme Values - with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. Third Edition, Birkhauser Verlag.
- Reiss, R.D. (1989). *Approximate Distributions of Order Statistics: With Applications to Nonparametric Statistics*. New York: Springer-Verlag.
- Resnick, S.I. (1986). Point Processes, Regular Variation and Weak Convergence. *Advances in Applied Probability*, 18 (1): 66-138.
- Resnick, S.I. (1987). *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*. New York: Springer Verlag.
- Resnick, S.I. (2007). *Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modelling*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering.
- Resnick, S.I. (2013). *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer.
- Reynkens, T. & Verbelen, R. (2018). *ReIns*: Functions from "Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects". R package version 1.0.8. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/ReIns/ReIns.pdf>
- Ribatet, M. & Dutang, C. (2019). *POT*: Generalized Pareto Distribution and Peaks Over Threshold. R package version 1.1-7. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/POT/POT.pdf>.
- Rice, S.O. (1939). The distribution of the maxima of a random curve. *American Journal of Mathematics*, 61 (2): 409-416.
- Rice, S.O. (1944, 1945). Mathematical analysis of random noise (I e II). *Bell System Technology Journal*, 23 (3): 46-156.
- Robinson, M.E. & Tawn, J.A. (1995). Statistics for exceptional athletics records. *Applied Statistics*, 44 (4): 499-511.
- Rootzén, H. & Tajvidi, N. (1997). Extreme value statistics and wind storm losses: A case study. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 70-94.
- Rosado, F. (2007). Editorial: ... partilhemos informação. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística*, p.2.
- Santos, P.A.; Fraga Alves, M.I. & Gomes, M.I. (2006). Peaks over random threshold methodology for tail index and high quantile estimation. *REVSTAT - Statistical Journal*, 4 (3): 227-247.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6 (2): 461:464.
- Sibuya, M. (1960). Bivariate extreme statistics, I. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 11 (2): 195-210.
- Silva, D.; Caeiro, F. & Oliveira, M. (2017a). *The r-largest order statistics model with application to javelin throw*. Poster communication presented in Rao Prize Conference, May 12, 2017, Department of Statistics Eberly College of Sciences at Penn State (USA). [Available] [https://www.researchgate.net/publication/330521486\\_The\\_r-largest\\_order\\_statistics\\_model\\_with\\_application\\_to\\_javelin\\_throw\\_2017\\_Rao\\_Prize\\_Conference](https://www.researchgate.net/publication/330521486_The_r-largest_order_statistics_model_with_application_to_javelin_throw_2017_Rao_Prize_Conference).
- Silva, D.; Caeiro, F. & Oliveira, M. (2017b). *Método das r-maiores observações anuais na estimação de quantis extremos no triplo-salto masculino*. Livro de resumos do XXIII Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística, p.157, 19 de outubro de 2017. [Disponível] [https://www.researchgate.net/publication/340682030\\_Metodo\\_das\\_r-maiores\\_observacoes\\_anuais\\_na\\_estimacao\\_de\\_quantis\\_extremos\\_no\\_triplo-salto\\_masculino](https://www.researchgate.net/publication/340682030_Metodo_das_r-maiores_observacoes_anuais_na_estimacao_de_quantis_extremos_no_triplo-salto_masculino).
- Silva, D.; Caeiro, F. & Oliveira, M. (2018a). *Modelling of nonstationary extremes in women's hammer throw track and field competitions*. Oral communication presented in V Workshop on Computational Data Analysis and

Numerical Methods, May 11-12 2018, Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Felgueiras, Instituto Politécnico do Porto. Book of Abstracts, p.37-38. [Available] [https://www.researchgate.net/publication/340665673\\_Modelling\\_of\\_nonstationary\\_extremes\\_in\\_women's\\_hammer\\_throw\\_track\\_and\\_field\\_competitions](https://www.researchgate.net/publication/340665673_Modelling_of_nonstationary_extremes_in_women's_hammer_throw_track_and_field_competitions).

- Silva, D.; Caeiro, F. & Oliveira, M. (2018b). Aplicação da metodologia *peaks over threshold* ao salto em comprimento do atletismo. *Revista Brasileira de Biometria*, 36 (4): 753-779.
- Silva, D.; Caeiro, F. & Oliveira, M. (2018c). *Modelação estatística de valores extremos: probabilidades de excedência, quantis extremos, limite superior do suporte e níveis de retorno no lançamento do disco do atletismo*. *Revista de Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto*, VII, 16-31.
- Silva, D.; Caeiro, F. & Oliveira, M. (2020). Método das  $r$ -maiores observações anuais na estimação de quantis extremos no triplo-salto masculino. Atas do XXIII Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística, 18-21 de outubro de 2017, Instituto Universitário de Lisboa (ISCTE-IUL), p.59-73. [http://www.spestatistica.pt/images/spe/Livro\\_de\\_Atas\\_Congresso\\_SPE\\_2017.pdf](http://www.spestatistica.pt/images/spe/Livro_de_Atas_Congresso_SPE_2017.pdf).
- Silva, D.J.L. (2013). *Modelação e Inferência Estatística - Aplicações às Ciências do Desporto*. Dissertação de Mestrado, Mestrado em Estatística, Matemática e Computação, Universidade Aberta, Lisboa.
- Sintra, A.S. (2017). *Métodos para Estimação dos Parâmetros da Distribuição de Pareto Generalizada: novas contribuições*. Dissertação de Mestrado, Mestrado em Estatística e Investigação Operacional, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Departamento de Estatística e Investigação Operacional.
- Slocum, C.E. & Hancock, E.L. (1906). *Text-Book on the Strength of Materials*. Ginn & Co., Boston, Second Edition, 1911.
- Smith, K.L.; Tawn, J.A. & Yuen, H.K. (1990). Statistics of multivariate extremes. *International Statistical Review*, 58 (1): 47-58.
- Smith, R.L. & Miller, J.E. (1986). A non-gaussian state space model and application to the prediction of records. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 48 (1): 79-88.
- Smith, R.L. & Weissman, I. (1985). Maximum likelihood estimation of the lower tail of a probability distribution. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 47 (2): 285-298.
- Smith, R.L. (1984). *Threshold methods for sample extremes*. In: Tiago de Oliveira, J. editor, *Statistical Extremes and Application*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Statistical Extremes and Applications, pp.621-638.
- Smith, R.L. (1985). Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases. *Biometrika*, 72 (1): 67-90.
- Smith, R.L. (1986). Extreme value theory on the  $r$ -largest annual events. *Journal of Hydrology*, 86 (1): 27-43.
- Smith, R.L. (1987a). *Approximations in extreme value theory*. Technical Report No. 205.
- Smith, R.L. (1987b). Estimating tails of probability distributions. *The Annals of Statistics*, 15 (3): 1174-1207.
- Smith, R.L. (1988). Forecasting records by maximum likelihood. *Journal of the American Statistical Association*, 83 (402): 331-338.
- Smith, R.L. (1989). Extreme value analysis of environmental time series: an application to trend detection in ground-level ozone (with discussion). *Statistical Science*, 4 (4): 367-393.
- Smith, R.L. (1990). *Extreme value theory*. In: Ledermann, W. (ed.), *Handbook of Applicable Mathematics*, Supplement, 7, pp.437-471. Wiley, Chichester.
- Smith, R.L. (1994). *Multivariate threshold methods*. In *Extreme Value Theory and Applications*, Galambos, J.; Lechner, J. & Simiu, E. (Eds.), Kluwer, Dordrecht. pp. 225-248.
- Smith, R.L. (2004). *Statistics of extremes, with applications in environment, insurance and finance*. London: Chapman & Hall.
- Smith, R.L. (2009). *Extreme value theory*. AMS conference “Statistics of Extreme Events”, January 11 2009. URL: <http://www.stat.unc.edu/faculty/rs/talks/talks.html>.
- Soares, C.G. & Scotto, M.G. (2004). Application of the  $r$  largest-order statistics for long-term predictions of significant wave height. *Coastal Engineering*, 51 (s5-6): 387-394.
- Solari, S.; Losada, M.A. (2012). A unified statistical model for hydrological variables including the selection of threshold for the peak over threshold method. *Water Resource Research*, 48, W10541, 1-15.
- Stephenson, A.G. (2002). *evd: Extreme Value Distributions*. *R News*, 2 (2): 31-32. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/evd/evd.pdf>.



- Tawn, J.A. (1988a). Bivariate extreme value theory: model and estimation. *Biometrika*, 77 (2): 245-253.
- Tawn, J.A. (1988b). An extreme-value theory model for dependent observations. *Journal of Hydrology*, 101, 227-250.
- Tawn, J.A. (1988c). *Extreme Value Theory with Oceanographic Applications*. Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the University of Surrey.
- Tawn, J.A. (1990). Modelling multivariate extreme value distributions. *Biometrika*, 77 (2): 245-253.
- Tawn, J.A. (1994). *Applications of multivariate extremes*. In *Extreme Value Theory and Applications*, Galambos, J.; Lechner, J. & Simiu, E. (Eds.), Kluwer, Dordrecht. pp. 249-268.
- The R Core Team (2017). *R: A Language and Environment for Statistical Computing – Reference Index*. Version 3.5.0 Under development (unstable) (2017-05-05), Foundation for Statistical Computing.
- Tiago de Oliveira, J. (1957). Estimators and tests for continuous populations with location and dispersion parameters. *Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa*, A6, 121-146.
- Tiago de Oliveira, J. (1958). Extremal distributions. *Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa*, A7, 215-227.
- Tiago de Oliveira, J. (1961a). The asymptotical Independence of the sample mean and the extremes. *Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa*, A8 (2): 299-310.
- Tiago de Oliveira, J. (1961b). La représentation des distributions extrêmes bivariées. *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, 39, 477-480.
- Tiago de Oliveira, J. (1962). Structure theory of bivariate extremes. extensions. *Estudos de Matemática. Estatística e Económicos*, 7, 165-195.
- Tiago de Oliveira, J. (1962/63). Structure theory of bivariate extremes; extensions. *Estudos Matemática, Estatística e Econometria*, 7, 165-195.
- Tiago de Oliveira, J. (1968). Extremal processes: definition and properties. *Publications de l'Institut de statistique de l'Université de Paris*, 17, 25-36.
- Tiago de Oliveira, J. (1970). Biextremal distributions: statistical decision. *Trab. Estad. Invest. Oper.*, 21, 107-111.
- Tiago de Oliveira, J. (1971). *A new model of bivariate extremes. statistical decision*. In: Studi Prob. Stat. ricerca Oper. in onore di G. Pompilj. Odersisi, Gubbio, pp.1-13.
- Tiago de Oliveira, J. (1973). *An extreme Markovian stationary process*. Proceedings of the 4th. Conference in Probability Theory, Acad. Romania, 217-225.
- Tiago de Oliveira, J. (1975). *Bivariate extremes. Extensions*. Proceedings of 40<sup>th</sup> Session of the International Statistical Institute. *Bulletin of Institute of the International Statistics*, 46 (2): 241-254.
- Tiago de Oliveira, J. (1980). *Bivariate extremes: foundations and statistics*. In: Proceedings of 5th International Symposium Multiva. Anal. Krishnaia, P.R. (editor), North Holland, Amsterdam, pp.349-366.
- Tiago de Oliveira, J. (1984). *Statistical Extremes and Applications*. NATO ASI Series, Adnaced Science Institute Series, Series C: Mathematical and Physical Sciences, Vol. 131, Springer-Sciences+Business Media, B.V.
- Tiago de Oliveira, J. (1990). Perspectivas sobre a Estatística de Extremos. Resultados básicos e problemas em aberto. *Revista Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, Madrid, XXXIV, cuad. III, 453-481.
- Tippett, L.H.C. (1925). On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population. *Biometrika*, 17, 364-387.
- Todorovic, P. & Rousselle, J. (1971). Some problems of flood analysis. *Water Resources Research*, 7 (5): 1641-1648.
- Todorovic, P. & Zelenhasic, E. (1970). A stochastic model for flood analysis. *Water Resources Research*, 6 (6): 1144-1150.
- van den Brink, H.W.; Konnen, G.P. & Opsteegh, J.D. (2005). Uncertainties in extreme surge level estimates from observational records. *Philosophical Transactions: Series A, Mathematical, Physical, and Engineering Sciences*, 363 (1831): 1377-1386.
- Vicente, J.S. (2012). *Extreme Value Theory: an Application to Sports*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências, Departamento de Estatística e Investigação Operacional, Universidade de Lisboa.
- Vicente, J.S.; Fraga Alves, M.I. & Gomes, M.I. (2013). *Extreme Value Theory and Sports: the Maximal Oxygen Uptake*. Symposium on Recent Advances in Extreme Value Theory, Lisbon, March 18-20, 2013.
- von Bortkiewicz, L. (1922). Variationsbreite und mittlerer Fehler, Sitzungsber. *Berlin. Math. Ges.*, 21, 3-11. \*

- von Mises, R. (1923). Über die Variationsbreite einer Beobachtungsreihe. *Sitzungsber. Berlin. Math. Ges.*, 22, 3-8. \*
- von Mises, R. (1936). La distribution de la plus grande de  $n$  valeurs. *Revue Mathématique de l'Union Interbalcanique*, 1, 141-160.
- Wadsworth, J.L.; Tawn, J.A. (2012). Likelihood-based procedures for threshold diagnostics and uncertainty in extreme value modelling. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 74 (3): 543-567.
- Watson, G.S. (1954). Extreme values in samples from  $m$ -dependent stationary stochastic processes. *Annals of Mathematical Statistics*, 25 (4): 798-800.
- Weibull, W. (1939a). *A statistical theory of the strength of materials*. Ingeniors Vetenskaps Akademien Handlinga, 151, 1-45.
- Weibull, W. (1939b). *The Phenomenon of rupture in solids*. Ingeniors Vetenskaps Akademien Handlinga, 153, 1-55.
- Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics American Society of Mechanical Engineers*, 18 (3): 293-297.
- Weissman, I. (1978). Estimation of parameters and large quantiles based on the  $k$  largest observations. *Journal of the American Statistical Association*, 73 (364): 812-815.
- Wilk, M.B. & Gnanadesikan, R. (1968). Probability plotting methods for the analysis of data. *Biometrika*, 55 (1): 1-17.
- Willmott, C. J.; Matsuura, K. & Robeson, S.M. (2009). Ambiguities inherent in sums-of-squares-based error statistics. *Atmospheric Environment*, 43 (3): 749-752.
- Worms, R. (2001). Vitesse de convergence de l'approximation de Pareto généralisée de la loi des excès. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série I*, 333 (1): 65-70.
- Yang, G.L. (1978). Estimation of a biometric function. *Annals of Statistics*, 6 (1): 112-116.
- Zambrano-Bigiarini, M. (2020). *hydroGOF: Goodness-of-fit functions for comparison of simulated and observed hydrological time series*, R package version 0.4-0. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/hydroGOF/hydroGOF.pdf>.
- Zhang, J.; Florita, A.; Hodge, B.M.; Lu, S.; Hamann, H.F.; Banunarayanan, V. & Brockway, A.M. (2015). A suite of metrics for assessing the performance of solar power forecasting. *Solar Energy*, 111, 157-175.
- Zhang, X.F.; Zwiers, F.W. & Li, G. (2004). Monte Carlo experiments on the detection of trends in extreme values. *Journal of Climate*, 17, 1945-1952.
- Zhou, C. (2009). Existence and consistency of the maximum likelihood estimator for the extreme value index. *Journal of Multivariate Analysis*, 100 (4): 794-815.
- Zhou, C. (2010). The extent of the maximum likelihood estimator for the extreme value index. *Journal of Multivariate Analysis*, 101 (4): 971-983.
- Zhou, M. & Jeong, J. H. (2011). Empirical likelihood ratio test for median and mean residual lifetime. *Statistics in Medicine*, 30 (2): 152-159.
- Zhu, C.; Byrd, Richard H.; Lu, P. & Nocedal, J. (1997). L-BFGS-B: Algorithm 778: L-BFGS-B, FORTRAN routines for large scale bound constrained optimization. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 23 (4): 550-560.

\* consulta indireta (i.e., não recorremos à fonte original).

## WEBGRAFIA

- URL: <http://trackfield.brinkster.net/Years.asp?Year=2016&Gender=W&TF=T&P=F>
- URL: <http://www.all-athletics.com/en-us/all-time-lists>
- URL: <http://www.cead.ufop.br/jornal/index.php/rest/article/view/747/646466>.
- URL: <https://cran.r-project.org/>
- URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/eva/eva.pdf>
- URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/extRemes/extRemes.pdf>
- URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/ismev/ismev.pdf>

- URL: <https://doi.org/10.28951/rbb.v36i4.297>.
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics\\_at\\_the\\_2016\\_Summer\\_Olympics\\_-\\_Women%27s\\_discus\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics_at_the_2016_Summer_Olympics_-_Women%27s_discus_throw)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics\\_at\\_the\\_2016\\_Summer\\_Olympics\\_-\\_Women%27s\\_hammer\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics_at_the_2016_Summer_Olympics_-_Women%27s_hammer_throw)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics\\_at\\_the\\_Summer\\_Olympics](https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics_at_the_Summer_Olympics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Discus\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Discus_throw)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Doping\\_at\\_the\\_Olympic\\_Games](https://en.wikipedia.org/wiki/Doping_at_the_Olympic_Games)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Hammer\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Hammer_throw)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Hammer\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Hammer_throw)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/High\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/High_jump)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Javelin\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Javelin_throw)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Long\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Long_jump)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Pole\\_vault](https://en.wikipedia.org/wiki/Pole_vault)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Shot\\_put](https://en.wikipedia.org/wiki/Shot_put)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Triple\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_jump)
- URL: <https://www.iaaf.org/home>
- URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/throws/discus-throw/outdoor/women/senior?regionType=world&page=1&bestResultsOnly=true&firstDay=1900-01-01&lastDay=2019-04-12>
- URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/throws/hammer-throw/outdoor/women/senior?regionType=world&page=1&bestResultsOnly=true&firstDay=1900-01-01&lastDay=2019-04-12>
- URL: <https://www.publico.pt/2017/07/19/desporto/noticia/christian-taylor-e-nao-so-podem-bater-o-meu-recorde-1779577>
- URL: <https://www.worldathletics.org/>
- URL: <https://www.worldathletics.org/records/all-time-toplists/jumps/pole-vault/outdoor/women/senior?regionType=world&page=1&bestResultsOnly=true&firstDay=2018-01-01&lastDay=2019-12-31>
- URL: <https://www.insidethegames.biz/articles/1033102/dutch-discus-thrower-admits-to-using-anabolic-steroids-ahead-of-los-angeles-1984-olympic-gold-medal-win>
- URL: <https://www.surtoolimpico.com.br/2019/11/surto-historia-alemanha-oriental-nas.html>

## REFERÊNCIAS: ANEXOS

- Bader, B. & Yan, J. (2018). *eva: Extreme Value Analysis with Goodness-of-Fit Testing*. R package version 0.2.5.
- Bienaymé, I.J. (1874). Sur une question de probabilités. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 2: 153-154.
- Brockwell, P.J. & Davis, R.A. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer Verlag.
- Cleveland, W.S. (1979). Robust locally weighted fitting and smoothing scatterplots. *Journal of the American Statistical Association* 74 (368): 829-836.
- Cleveland, W.S. (1981). Lowess: a program for smoothing scatterplots by robust locally weighted fitting. *The American Statistician* 35 (81): 54.
- Cleveland, W.S. (1994). *Coplots, nonparametric regression, and conditionally parametric fits*. Multivariate Analysis and Its Applications, IMS Lecture Notes - Monograph Series, Volume 24, pp.21-36.
- Cleveland, W.S. & Devlin, S.J. (1988). Locally Weighted Regression: An Approach to Regression Analysis by Local Fitting. *Journal of the American Statistical Association*, 83 (403): 596-610.
- Cleveland, W.S. & Loader, C. (1996). *Smoothing by Local Regression: Principles and Methods*. Physica-Verlag, p.10-49.
- Cox, D.R. & Stuart, A. (1955). Some quick sign tests for trend in location and dispersion. *Biometrika*, 42 (1-2): 80-95.
- Dapena, J. (2002). *The evolution of high jumping technique: biomechanical analysis*. ISBS, 2002. Cáceres, Extremadura, Spain.
- Hay, J.G. (1993). *The Biomechanics of Sports Technique*. 4rd ed., Publisher: Pearson, Wallingford, United Kingdom.

- Heyde, C.C. & Seneta, E. (1972). Studies in the History of Probability and Statistics. XXXI. The simple branching process, a turning point test and a fundamental inequality: A historical note on I. J. Bienaymé. *Biometrika*, 59 (3): 680-683.
- IAAF - International Association of Athletics Federations (2015a). *Progression of IAAF World Records*. 2015 edition, Edited by Richard Hymans (ATFS) and Imre Matrahazi (IAAF). Printed by Multiprint, Monaco.
- IAAF - International Association of Athletics Federations (2015b). *Competition Rules 2016-2017*. In Force as from 1<sup>st</sup> November 2015. Monaco.
- Johnson, J.; VerSteeg, R. & Kring, R. (2008). Part 1: The History of the Pole Vault. *American Track & Field*, 22-23.
- Mallick, P.K. (2008). *Fiber-Reinforced Composites: Materials, Manufacturing, and Design*. Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group.
- McCormick, M. (2010). *Soaring to New Heights: The Evolution of Pole Vaulting and Pole Materials*. Illumin (USC). Retrieved from <http://illumin.usc.edu/143/soaring-to-new-heights-the-evolution-of-pole-vaulting-andpole-materials/fullView/>.
- Moore, G.H. & Wallis, W.A. (1943). Time series significance tests based on signs of differences. *Journal of the American Statistical Association*, 38 (222): 153-164.
- Murray, R.S.; Sands, W.A. & O'Roark, D.A. (2012). Recreating the Ancient Greek Javelin Throw: How Far Was the Javelin Thrown? *Nikephoros*. 25, 143-154.
- Rosenbaum, M. (2012). *An Illustrated History of the Triple Jump*. URL: <http://trackandfield.about.com/od/triplejump/ss/illustratedtriplejump.htm>
- Rutkowska, A. (2015). Properties of the Cox-Stuart test for trend in application to hydrological series: the simulation study. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 44 (3): 565-579.
- Schmolinsky, G. (1982). *Atletismo*. Editorial Estampa, Lisboa.
- Stephenson, A.G. (2002). evd: Extreme Value Distributions. R News, 2 (2): 31-32. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/evd/evd.pdf>.
- Zhan, J. & Luo, X. (2016). *Offer Evaluation and Trade-Off Making in Automated Negotiation Based on Intuitionistic Fuzzy Constraints*. Baldoni, M.; Chopra, A.K.; Son, T.C. & Hirayama, K. (eds), Conference: 19<sup>th</sup> International Conference on Principles and Practice of Multi-Agent Systems, pp.197-229, August 22-26, 2016.

## WEBGRAFIA: ANEXOS

- URL: <http://www.picgifs.com/sport-graphics/>
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics\\_at\\_the\\_1896\\_Summer\\_Olympics\\_%E2%80%93\\_Men%27s\\_long\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics_at_the_1896_Summer_Olympics_%E2%80%93_Men%27s_long_jump)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics\\_at\\_the\\_1948\\_Summer\\_Olympics\\_%E2%80%93\\_Women%27s\\_long\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics_at_the_1948_Summer_Olympics_%E2%80%93_Women%27s_long_jump)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Discus\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Discus_throw)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Hammer\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Hammer_throw)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/High\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/High_jump)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Javelin\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Javelin_throw)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Long\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Long_jump)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Pole\\_vault](https://en.wikipedia.org/wiki/Pole_vault)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Shot\\_put](https://en.wikipedia.org/wiki/Shot_put)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Triple\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_jump)
- URL: <https://www.fpatletismo.pt/recordes-de-portugal-masculinos>
- URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>
- URL: <https://www.worldathletics.org/>





## ANEXO 1 – BREVE CARACTERIZAÇÃO DAS MODALIDADES

### ANEXO.1.1. Lançamento do dardo (*javelin throw*)

O lançamento do dardo parece ter surgido pela primeira vez em 708 a.C. no decorrer dos Jogos Olímpicos da Antiguidade, onde fez parte da prova do pentatlo (lançamento do disco, salto em comprimento, corrida de estádio de 192m, luta grega e lançamento do dardo). Nestas Olimpíadas, o lançamento do dardo foi disputado nas provas de



distância e alvo. O lançamento era efetuado com a ajuda de uma tira de couro, chamada *ankyle*, que era enrolada no eixo do dardo. No momento do lançamento, a tira desenrolava proporcionando ao dardo um movimento aéreo em espiral. O dardo não era mais que uma lança reta, com comprimento aproximado à altura de um homem e com a espessura de um dedo. No final do Séc. XIX, mais precisamente na década de 1870, o lançamento da “vara” (designação dada ao lançamento) foi desenvolvido sobretudo na Alemanha e na Suécia. Foi precisamente na Suécia que se melhorou a qualidade das “varas” e se aprimorou as regras, tornando este desporto muito apreciado entre os nórdicos. Inicialmente não era permitida a corrida de balanço, tendo esta sido introduzida no fim da década de 1890 (Murray et al., 2012). Atualmente, não é permitido usar técnicas de lançamento não-clássicas, i.e., não aprovadas pela IAAF (*International Association of Athletic Federations*)<sup>1</sup>. Assim, não são permitidos lançamentos efetuados abaixo do nível do ombro ou de forma que o rosto fique voltado em direção contrária à zona de lançamento (técnica muito usada no lançamento do disco). O primeiro registo que se conhece data de 07-10-1883 e pertence ao finlandês Mauritz Mexmontan com a marca de 30.58m, tendo sido obtido no “National Achilles Competition”, uma competição escolar da Schoolyard of Helsingin Suomalainen Normaalityseo. Nas mulheres, o primeiro registo conhecido pertence à finlandesa Fiinu Kuparinen com a marca de 17.99m, marca conseguida com um dardo de 800g.

Como modalidade Olímpica oficial (e não de demonstração), o lançamento do dardo foi introduzido nos Jogos Olímpicos de Londres, em 1908, apenas para homens. O primeiro campeão Olímpico foi o sueco Eric Lemming. Nos Jogos Olímpicos de Estocolmo, em 1912, com a introdução do decatlo, o lançamento do dardo passou a ser uma das suas 10 provas. Nestes Jogos Olímpicos também surgiu uma variante do lançamento do dardo, realizado com as duas mãos. Nos Jogos Olímpicos de Los Angeles (EUA), em 1932, passou a ser modalidade Olímpica feminina, tendo a norte-americana Mildred Ella “Babe” Didrikson ganho a primeira medalhada de ouro, com a marca de 43.69m. Desde o primeiro registo da IAAF que o recorde do mundo aumentou cerca de 58% nos homens e de cerca de 55% nas mulheres.

O lançamento de dardo é um evento do atletismo *outdoor* realizado por homens e por mulheres, onde o objetivo é lançar o dardo o mais longe possível. O lançamento realiza-se em 4 fases: corrida preparatória (de balanço), lançamento, voo e queda. Os principais determinantes de um bom lançamento são a velocidade de saída, o ângulo de saída e a altura de saída (Schmolinsky, 1982). Em 01-04-1986 para os

<sup>1</sup> Inicialmente designada de *International Amateur Athletic Federation*, posteriormente passou a *International Association of Athletics Federations* (ambas abreviadas como IAAF) e desde junho de 2019 que se designa de *World Athletics*. Contudo, o nome IAAF ainda continua a utilizar-se.

homens e em 01-04-1999 para as mulheres, devido aos longos lançamentos (acima dos 100m no caso dos homens, para o efeito, o atleta da RDA, Uwe Hohn que em 20-07-1984 conseguiu a marca de 104.80m) que colocavam em risco a segurança de todos (atletas das competições de corrida e de saltos, juizes, *staff* e espectadores), a IAAF desviou 4cm para a frente o centro de gravidade dos dardos fazendo com que a distância de voo fosse reduzida em cerca de 10%. Isto levou ao reiniciar dos recordes. Contudo, a mudança de Regulamento não ficou totalmente clara, uma vez que os atletas utilizavam dardos com pontas serrilhadas, tornando o dardo mais aerodinâmico. Novamente, a IAAF num Congresso em Tóquio, em 1991, não apenas proibiu o uso deste tipo de dardo como invalidou os registos obtidos. Uma vez mais, teve que se reiniciar o procedimento de obtenção de recordes do mundo. A melhor marca do mundo, 98.48m do Checo Jan Zelezny, aproxima-se perigosamente da “linha vermelha” definida para a segurança de todos. Podemos prever que brevemente algo será feito pela IAAF.

A Tabela A1.1 apresenta as características do dardo atual e a Tabela A1.2 menciona alguns dos mais importantes resultados históricos nesta disciplina atlética.

Tabela A1.1 – Características do dardo e da pista de corrida.

		Homens	Mulheres
Dardo	Comprimento	2.3m	2.3m
	Peso	600g	600g
	Forma	Lança	
	Material	Fibra de vidro ou carbono	
	Centro de gravidade	Empunhadura em corda	
Pista	Corrida de balanço	34.9m de comprimento e 4m de largura	

Tabela A1.2 – Alguns recordes no lançamento do dardo.

Atleta	Marca	Ano	Observações
<b>+ HOMENS</b>			
Mauritz Mexmontan (FIN)	30.58m	1883	1º recorde do mundo: antes da IAAF
Eric Lemming (SUE)	62.32m	1912	1º recorde do mundo: Era Oficial IAAF
Brian Crouser (EUA)	79.86m	1986	1º recorde do mundo (novo modelo)
Eric Lemming (SUE)	54.83m*	1908	1º recorde olímpico (Londres, Reino Unido)
Tapio Korjus (FIN)	84.28m	1988	1º rec. olímpico (novo modelo) (Seul, Coreia do Sul)
Andreas Thorkildsen (NOR)	90.57m	2008	Atual recorde olímpico (Pequim, China)
Jan Železný (RCH)	98.48m	1996	Atual recorde do mundo (Londres, Reino Unido)
Tiago Aperta (POR)	75.55m	2012	Atual recorde nacional (Bar, Montenegro)
<b>+ MULHERES</b>			
Anna Kuparinen (FIN)	17.99m	1909	1º recorde do mundo (800g): antes da IAAF
Fiinu Väre (FIN)	23.91m	1920	1º recorde do mundo (600g): antes da IAAF
Bozena Komestikova (CHE)	25.11m	1921	1º recorde do mundo (600g): Era FSFI
Ferdinanda “Nan” Gindele (EUA)	46.745m	1932	1º recorde do mundo: Era Oficial IAAF
Nikola Tomecková (CZE)	60.92m	1999	1º recorde do mundo (novo modelo)
Babe Didrikson (EUA)	43.69m	1932	1º recorde olímpico (Los Angeles, EUA)
Trine Hattestad (NOR)	68.91m	2000	1º rec. olímpico (novo modelo) (Sydney, Austrália)
Osleidys Menéndez (CUB)	71.53m	2004	Atual recorde olímpico (Atenas, Grécia)
Barbora Špotáková (RCH)	72.28m	2008	Atual recorde do mundo (Estugarda, Alemanha)
Sílvia Cruz (POR)	59.76m	2008	Atual recorde nacional (Leiria, Portugal)

URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>



URL: <https://www.worldathletics.org/>

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Javelin\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Javelin_throw)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Javelin\\_throw\\_at\\_the\\_Olympics](https://en.wikipedia.org/wiki/Javelin_throw_at_the_Olympics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)

IAAF - International Association of Athletics Federations (2015)

\* para além de ser o 1º recorde olímpico, foi também o novo recorde do mundo.

## REFERÊNCIAS

- IAAF - International Association of Athletics Federations (2015). Progression of IAAF World Records. 2015 edition, Edited by Richard Hymans (ATFS) and Imre Matrahazi (IAAF). Printed by Multiprint, Monaco.
- Murray, R.S.; Sands, W.A. & O'Roark, D.A. (2012). Recreating the Ancient Greek Javelin Throw: How Far Was the Javelin Thrown? *Nikephoros*. 25, 143-154.
- Schmolinsky, G. (1982). *Atletismo*. Editorial Estampa, Lisboa. pp. 443-463.

## WEBGRAFIA

- URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>
- URL: <https://www.worldathletics.org/>
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Javelin\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Javelin_throw)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)

### ANEXO.1.2. Lançamento do disco (*discus throw*)

O lançamento do disco é uma das mais antigas provas desportivas. Data da antiguidade e ficou imortalizado pela sua representação na estátua do Discóbolo, uma obra da autoria de Míron (Séc. V a.C.). Os registos existem desde 1892 para homens e 1912 para mulheres (IAAF, 2015).



Em termos de presença olímpica, foi introduzido nos primeiros Jogos Olímpicos da Era Moderna, em 1896 (Atenas) para os homens, e em 1928 (Amsterdão) para as mulheres<sup>2</sup>. Contudo, os registos oficiais da IAAF consideram as marcas obtidas a partir de 1912 para homens e de 1923 para mulheres (neste caso, mesmo os registos oficiais serem pertença da FSFI (*Fédération Sportive Féminine Internationale* ou *International Women's Sports Federation*). Oficialmente, a IAAF passou a homologar as marcas a partir de 1936, com o registo de 48.31m da lançadora alemã Gisela Mauermayer). Nos Jogos Olímpicos de 1912 (Estocolmo) surgiu uma variante do lançamento do disco, realizado com as duas mãos. O lançamento do disco é praticado apenas ao ar livre.

Desde o reconhecimento do primeiro registo pela IAAF que o recorde do mundo aumentou cerca de 56% nos homens e de cerca de 180% nas mulheres. Porém, há mais de 30 anos que não é batido, sendo um dos recordes do mundo mais antigos do atletismo. A razão do recorde do mundo das mulheres ser mais alto do que o dos homens deve-se ao peso e dimensões do engenho (Tabela A1.3). O lançamento é feito dentro de um círculo com 2.5 metros de diâmetro, com um anteparo de 2cm, onde o pé apenas pode tocar na sua face interior. É feito com a extensão vigorosa da mão, cotovelo e ombro, depois do atleta rodar rapidamente sobre si mesmo. O atleta, se pretender, pode usar uma substância adequada (regulamentar) para ajudar no agarre do disco, bem como um cinturão para proteger a coluna. São fatores importantes para um bom lançamento: velocidade de saída, ângulo de saída e altura de saída (Schmolinsky, 1982). A Tabela A1.4 apresenta alguns dos mais importantes resultados históricos nesta disciplina atlética.

Tabela A1.3 – Características do disco.

	Mulheres	Homens
Peso	1 kg	2 kg
Disco	Diâmetro 219-221mm	180-182mm
	Espessura 44-46mm	37-39mm

<sup>2</sup> Os primeiros Jogos Olímpicos com participação de mulheres realizaram-se em 1928, em Amesterdão (Holanda).

Tabela A1.4 – Alguns recordes no lançamento do disco.

Atleta	Marca	Ano	Observações
<b>+ HOMENS</b>			
Harald Andersson-Arbin (SUE)	26.20m	1892	1º recorde do mundo: antes da IAAF
James Duncan (EUA)	47.58m	1912	1º recorde do mundo: Era Oficial IAAF
Robert Garrett (EUA)	29.15m	1896	1º recorde olímpico (Atenas, Grécia)
Virgilijus Alekna (LIT)	69.89m	2004	Atual recorde olímpico (Atenas, Grécia)
Jurgen Schult (RDA)	74.08m	1986	Atual recorde do mundo (Neubrandenburg, RDA)
Francisco Belo (POR)	62.01m	2017	Atual recorde nacional (Vagos, Portugal)
<b>+ MULHERES</b>			
Margorie Hilas (EUA)	20.72m	1912	1º recorde do mundo: antes da IAAF
Yvonne Tembouret (FRA)	27.39m	1923	1º recorde do mundo: Era Oficial FSFI **
Halina Konopacka (POL)	39.62m*	1928	1º recorde olímpico (Amesterdão, Holanda)
Martina Hellmann (RDA)	72.30m	1988	Atual recorde olímpico (Seul, Coreia do Sul)
Gabriele Reinsch (RDA)	76.80m	1988	Atual recorde do mundo (Neubrandenburg, RDA)
Teresa Machado (POR)	65.40m	1998	Atual recorde nacional (San Jacinto, EUA)

URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>

URL: <https://www.worldathletics.org/>

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Discus\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Discus_throw)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Discus\\_throw\\_at\\_the\\_Olympics](https://en.wikipedia.org/wiki/Discus_throw_at_the_Olympics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)

IAAF - International Association of Athletics Federations (2015)

\* para além de ser o 1º recorde olímpico, foi também o novo recorde do mundo.

\*\* Marca homologada mais tarde pela IAAF.

## REFERÊNCIAS

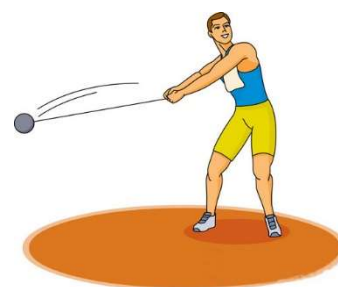
- IAAF - International Association of Athletics Federations (2015). Progression of IAAF World Records. 2015 edition, Edited by Richard Hymans (ATFS) and Imre Matrahazi (IAAF). Printed by Multiprint, Monaco.
- Schmolinsky, G. (1982). Atletismo. Editorial Estampa, Lisboa. pp. 430-443.

## WEBGRAFIA

- URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>
- URL: <https://www.worldathletics.org/>
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Discus\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Discus_throw)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)

### ANEXO.1.3. Lançamento do martelo (*hammer throw*)

O lançamento do martelo, ou a sua forma mais parecida, parece datar de 2000 a.C. e aos Jogos Tailteann, em Tara, na Irlanda pré-cristã. No Séc. XVI foi feita uma pintura do Rei Henrique VIII a lançar o martelo de um ferreiro. Entre as Tribos Teutónicas, durante as festas religiosas, uma das formas de homenagear o Deus Thor era a competição de lançamento do martelo. A partir de 1866, esta disciplina atlética passou a ser atividade



desportiva de competição no Reino Unido. Em 1875, o peso do engenho, o comprimento do cabo e o diâmetro do círculo de lançamento foram padronizados, e ainda se mantêm na atualidade. Ainda que não oficiais, os registos existem desde 1828 para homens (Adam Wilson, GBI, 27.74m) e 1931 para mulheres (Lucinda Ellen Spence (nascida Moles), ESP, 17.03m) (IAAF, 2015). Em termos de presença olímpica, o lançamento do martelo foi introduzido nos Jogos Olímpicos de 1900 (Paris) para os homens, e em 2000 (Sidney) para as mulheres, tendo como vencedores os atletas John Flanagan (EUA) (51.01m) e Kamila Skolimowska (POL) (71.16m). Nos Campeonatos do Mundo, esta disciplina atlética entrou pela primeira vez em 1983, em Helsínquia, para homens, tendo sido vencedor Sergey Litvinov (URSS) com a marca de 82.68m, e em 2003, em Saint-Denis (Paris), para mulheres, tendo sido vencedora Yipsi Moreno (CUB) com a marca de 73.33m. Os registos oficiais da IAAF consideram as marcas obtidas a partir de 1913 para homens e de 1995 para mulheres. No sexo feminino ainda que os registos oficiais da IAAF considerem apenas oficiais as marcas obtidas a partir de 1995, existem registos ininterruptos desta mesma entidade a partir de 1988. O lançamento do martelo é praticado apenas ao ar livre.

Desde que a IAAF assumiu o controlo e homologação dos registos, o recorde do mundo aumentou cerca de 24% nas mulheres e cerca de 50% nos homens. A razão do recorde do mundo das mulheres ser relativamente próximo do recorde do mundo dos homens deve-se ao peso do engenho (Tabela A1.5). O lançamento é feito dentro de um círculo com 2.135m de diâmetro, em 3 etapas: molinete, giro e lançamento. São fatores motores importantes no lançamento: força máxima e explosiva, velocidade de aceleração, agilidade específica e sentido de orientação, mobilidade (flexibilidade do ombro e coluna, amplitude de movimentos da anca). Por sua vez, a distância do lançamento depende da velocidade dos apoios, posição do corpo no deslizamento e no momento da saída do engenho, velocidade de saída, ângulo de saída, altura de saída e resistência do ar (Schmolinsky, 1982). A Tabela A1.6 apresenta alguns dos mais importantes resultados históricos nesta disciplina atlética.

Tabela A1.5 – Características do martelo e da gaiola de proteção.

	Mulheres	Homens
	Peso	4kg
Martelo	Cabo de aço	
	Esfera	Comprimento=1.2m
	Manopla	
Proteção	Gaiola	Revestida de rede, com 10m de altura

Tabela A1.6 – Alguns recordes no lançamento do martelo.

<b>Atleta</b>	<b>Marca</b>	<b>Ano</b>	<b>Observações</b>
<b>+ HOMENS</b>			
Adam Wilson (GBI)	27.74m	1828	1º recorde do mundo: antes da IAAF
Pat Ryan (EUA)	57.77m	1913	1º recorde do mundo: Era Oficial IAAF
John Flanagan (EUA)	51.01m	1900	1º recorde olímpico (Paris, França)
Sergey Litvinov (URSS)	84.80m	1988	Atual recorde olímpico (Seul, Coreia do Sul)
Yuriy Sedykh (URSS)	86.74m	1986	Atual recorde do mundo (Estugarda, Alemanha)
Vítor Costa (POR)	76.86m	2004	Atual recorde nacional (Reims, França)
<b>+ MULHERES</b>			
Lucinda Moles (ESP)	17.03m	1931	1º recorde do mundo: antes da IAAF
Olga Kuzenkova (RUS)	66.84m	1994*	1º recorde do mundo: Era Oficial IAAF
Kamila Skolimowska (POL)	71.16m	2000	1º recorde olímpico (Sydney, Austrália)
Anita Wlodarczyk (POL)	82.29m	2016	Atual recorde olímpico (Rio Janeiro, Brasil)
Anita Wlodarczyk (POL)	82.98m	2016	Atual recorde do mundo (Varsóvia, Polónia)
Vânia Silva (POR)	69.55m	2011	Atual recorde nacional (V.R.S <sup>to</sup> António, Portugal)

URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>

URL: <https://www.worldathletics.org/>

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Hammer\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Hammer_throw)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Hammer\\_throw\\_at\\_the\\_Olympics](https://en.wikipedia.org/wiki/Hammer_throw_at_the_Olympics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)

IAAF - International Association of Athletics Federations (2015)

\* Não obstante a IAAF passar a homologar os recordes a partir de 01-01-1995, a mesma Entidade decidiu reconhecer a marca de Olga Kuzenkova (66.84m) obtida em 23-02-1994, como o primeiro recorde do mundo oficial.

## REFERÊNCIAS

- IAAF - International Association of Athletics Federations (2015). Progression of IAAF World Records. 2015 edition, Edited by Richard Hymans (ATFS) and Imre Matrahazi (IAAF). Printed by Multiprint, Monaco.
- Schmolinsky, G. (1982). Atletismo. Editorial Estampa, Lisboa. pp. 464-487.

## WEBGRAFIA

- URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>
- URL: <https://www.worldathletics.org/>
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Hammer\\_throw](https://en.wikipedia.org/wiki/Hammer_throw)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)

#### ANEXO.1.4. Lançamento do peso (*shot put*)

Desde a Grécia Antiga que existem referências a arremessos de pesos. Homero falou de competições de arremessos de pedras entre soldados gregos durante o cerco de Troia. Os primeiros eventos que têm semelhança com o moderno lançamento do peso realizaram-se na Idade Média, quando soldados competiam lançando balas de canhão o mais longe possível (IAAF, 2015).



O lançamento do peso é uma disciplina do atletismo que pode ser praticada *indoor* e *outdoor*. Consiste em arremessar uma bola de ferro o mais longe possível seguindo as regras definidas pela IAAF. Ao ar livre, com o lançamento a ser efetuado com uma mão, o primeiro registo que se conhece nos homens com o peso de 7.257kg data de 26-09-1827 e pertence a William Goodfellow (GBI, Great Britain & Ireland) com a marca de 11.43m; nas mulheres, com o peso de 4kg data de 25-09-1916 e pertence a Thérèse Brûle (França) com a marca de 6.00m. A IAAF (2015) passou a homologar as marcas a partir de 1909 para homens e de 1934 para mulheres. Nas mulheres, de 1924 a 1933, o reconhecimento das marcas pertencia à FSFI. Desde o reconhecimento dos registos por parte da IAAF o recorde do mundo aumentou cerca de 49% nos homens e 57% nas mulheres, não se prevendo uma estagnação na evolução dos resultados, ainda que os atual recorde do mundo nos homens se mantenha há 29 anos e nas mulheres há mais de 30 anos. A diferença de pesos do engenho que faz com que as performances de homens e mulheres sejam relativamente próximas. Em termos olímpicos, a modalidade foi introduzida em 1896, em Atenas, nos primeiros Jogos Olímpicos da Era Moderna, tendo sido vencedor Robert Garrett (EUA) com a marca de 11.22m. Nas mulheres, foi introduzida em 1948 nos Jogos Olímpicos de Londres, tendo sido vencedora Micheline Ostermeyer (França) com a marca de 13.75m. Nos Jogos Olímpicos de 1912 (Estocolmo) surgiu uma variante do lançamento do peso, realizado com as duas mãos. De notar que não existem registos de arremessos do peso (lançamentos) praticados durante os Jogos Olímpicos da Antiguidade.

Nos homens, em 20-05-1990, “Randy” Barnes alcançou 23.12m, conseguindo aquele que atualmente é recorde do mundo. Porém, dois meses depois, este atleta falhou no teste de doping, mas como passou no mesmo teste após ter conseguido o recorde do mundo, a IAAF decidiu ratificar a marca. Barnes livrou-se da perda do recorde do mundo, mas não se livrou das suspeitas que ainda hoje se mantêm.

São fatores importantes no lançamento do peso, o deslizamento e velocidade de avanço dos apoios, posição do corpo no deslizamento e no momento da saída do engenho, ângulo de saída, altura de saída e velocidade de saída (Schmolinsky, 1982).

A Tabela A1.7 apresenta as características do engenho e do local de lançamento; a Tabela A1.8 apresenta alguns dos mais importantes resultados históricos nesta disciplina atlética.

Tabela A1.7 – Características do peso e local de lançamento do peso.

	Mulheres	Homens
Peso	4kg	7.26kg
Diâmetro do engenho	12cm	
Círculo de lançamento	2.135m de diâmetro	
Anteparo de lançamento	10cm de altura	

Tabela A1.8 – Alguns recordes no lançamento do peso (*outdoor*).

Atleta	Marca	Ano	Observações
<b>+ HOMENS</b>			
William GoodFellow (GBI)	11.43m	1827	1º recorde do mundo: antes da IAAF
Ralph Rose (EUA) *	15.54m	1909	1º recorde do mundo: Era Oficial IAAF
Robert Garrett (EUA)	11.22m	1896	1º recorde olímpico (Atenas, Grécia)
Ryan Crouser (EUA)	22.52m	2016	Atual recorde olímpico (Rio de Janeiro, Brasil)
“Randy” Barnes (EUA)	23.12m	1990	Atual recorde do mundo (Westwood, CA, EUA)
“Randy” Barnes (EUA)	22.66m	1989	Atual rec. Mundo <i>indoor</i> (Los Angeles, EUA)
Tsanko Arnaudov (POR)	21.56m	2017	Atual recorde nacional (Vaasa, Finlândia)
<b>+ MULHERES</b>			
Thérese Brûle (FRA)	6.00m	1916	1º recorde do mundo: antes da IAAF
Violette Gouraud-Morris (FRA)	10.15m	1924	1º recorde do mundo: FSFI
Gisela Mauermayer (GER)	14.38m	1934	1º recorde do mundo: Era Oficial IAAF
Micheline Ostermeyer (FRA)	13.75m	1948	1º recorde olímpico (Londres, Reino Unido)
Ilona Slupianek (RDA)	22.41m	1980	Atual recorde olímpico (Moscovo, URSS)
Natalya Lisovskaya (URSS)	22.63m	1987	Atual recorde do mundo (Moscovo, URSS)
Helena Fibingerová (CHE)	22.50m	1977	Atual rec. Mundo <i>indoor</i> (Jablonec, Checoslováquia)
Jéssica Inchue (POR)	17.46m	2018	Atual recorde nacional (Caparica, Portugal)

URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>

URL: <https://www.worldathletics.org/>

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Shot\\_put](https://en.wikipedia.org/wiki/Shot_put)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Shot\\_put\\_at\\_the\\_Olympics](https://en.wikipedia.org/wiki/Shot_put_at_the_Olympics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)

IAAF - International Association of Athletics Federations (2015)

\* Este atleta é o detentor do primeiro recorde do mundo no lançamento do peso efetuado com as duas mãos, obtido em 02-06-1912, em Oakland (EUA), com a marca de 28.00m.

## REFERÊNCIAS

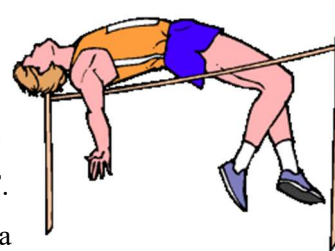
- IAAF - International Association of Athletics Federations (2015). Progression of IAAF World Records. 2015 edition, Edited by Richard Hymans (ATFS) and Imre Matrahazi (IAAF). Printed by Multiprint, Monaco.
- Schmolinsky, G. (1982). Atletismo. Editorial Estampa, Lisboa. pp. 413-429.

## WEBGRAFIA

- URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>
- URL: <https://www.worldathletics.org/>
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Shot\\_put](https://en.wikipedia.org/wiki/Shot_put)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)

### ANEXO.1.5. Salto em altura (*high jump*)

Os primeiros eventos de salto em altura datam do Séc. XIX na Escócia. Decorrente da investigação, esta especialidade atlética foi das que sofreu as maiores mudanças na técnica de execução. Outras modificações ocorreram na zona de queda e do regulamento da IAAF. Basicamente, a técnica evoluiu consoante as condições de realização da



seguinte forma: salto de tesoura, salto cortado, técnica Lewden, rolamento californiano, rolamento ventral e Fosbury-flop (Dapena, 2002). A técnica Fosbury-flop, mundialmente usada na atualidade pela quase totalidade de saltadores em altura, surgiu em 1968 durante os jogos Olímpicos da Cidade do México, pelo atleta dos Estados Unidos da América Dick Fosbury que obteve a medalha de ouro na prova com a marca de 2.24m, embora não tenha batido o recorde do mundo. Este aparecimento deveu-se à introdução de colchões de espuma em 1960, proporcionando voos mais arriscados para suportar a queda do atleta. Desde então, com exceção dos anos de 1977 e 1978, o recorde do mundo pertenceu a atletas que usaram a técnica de Fosbury-flop. Não se prevê que a técnica venha a ser modificada nos próximos anos.

No decurso da década de 1950, muitos saltadores calçavam sapatilhas com solas que chegavam a ter 5cm de espessura, feitas de um material poroso de forma a permitir maior aderência ao solo e simultaneamente aumentar a capacidade de impulsão. Eram permitidas pela IAAF. Usando este tipo de calçado desportivo, em 1957, o atleta da União Soviética, Yuri Stepanov, bateu o recorde do mundo com 2.16m. Em 1958, a IAAF proibiu o uso deste tipo de sapatilhas nas competições oficiais.

Em termos de presença olímpica, o salto em altura foi introduzido nos Jogos Olímpicos de 1896 (Atenas) para os homens, e em 1928 (Amesterdão) para as mulheres. Contudo, nos Jogos Olímpicos de Paris em 1900, St. Louis em 1904, Londres em 1908 e Estocolmo em 1912, no sexo masculino, foi disputada uma prova paralela ao salto em altura tradicional que foi o salto em altura sem corrida (*standing high jump*). O salto em altura também faz parte do programa do decatlo e do heptatlo. Pode ser disputado ao ar livre ou em pavilhão.

Em termos físicos, são fatores importantes, a força de impulsão, o sentido rítmico, a capacidade de reação, a flexibilidade e a destreza; em termos técnicos, a corrida de balanço, a impulsão, o voo, a transposição da fasquia e a queda (Schmolinsky, 1982).

A Tabela A1.9 apresenta as características dos materiais e espaço do salto em altura; a Tabela A1.10 apresenta alguns dos mais importantes resultados históricos nesta disciplina atlética.

Tabela A1.9 – Características dos materiais e do espaço para o salto em altura.

Fasquia	Tipo: fibra de vidro ou alumínio Comprimento: 4m Secção: circular, quadrada ou triangular
Área de queda	6m de comprimento x 4m de largura e 0.7m de altura
Colchões de queda	Material: espuma
Corrida de balanço	Pista com cerca de 20m



Tabela A1.10 – Alguns recordes no salto em altura (*outdoor*).

Atleta	Marca	Ano	Observações
<b>+ HOMENS</b>			
Adam Wilson (GBI)	1.575m	1827	1º recorde do mundo: antes da IAAF
George Horine (EUA)	2.00m	1912	1º recorde do mundo: Era Oficial IAAF
Ellery Harding Clark (EUA)	1.81m	1896	1º recorde olímpico (Atenas, Grécia)
Charles Austin (EUA)	2.39m	1996	Atual recorde olímpico (Atlanta, EUA)
Javier Sotomayor (CUB)	2.45m	1993	Atual rec. do mundo (Salamanca, Espanha)
Javier Sotomayor (CUB)	2.43m	1989	Atual rec. Mundo <i>indoor</i> (Budapeste, Hungria)
Rafael Gonçalves e Paulo Conceição	2.23m	2007/2016	Atual recorde nacional (Leiria e Lisboa)
<b>+ MULHERES</b>			
Mary H. Ritchie (EUA)	1.24m	1892	1º recorde do mundo: antes da IAAF
Jean Shiley (EUA)	1.65m	1932	1º recorde do mundo: Era Oficial IAAF
Ethel Mary Catherwood (CAN)	1.595m*	1928	1º recorde olímpico (Amesterdão, Holanda)
Yelena Slesarenko (RUS)	2.06m	2004	Atual recorde olímpico (Atenas, Grécia)
Stefka Kostadinova (BUL)	2.09m	1987	Atual recorde do mundo (Roma, Itália)
Kajsa Bergqvist (SUE)	2.08m	2006	Atual rec. Mundo <i>indoor</i> (Arnstadt, Alemanha)
Sónia Carvalho (POR)	1.88m	2001	Atual recorde nacional (VRS António, Port.)

URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>

URL: <https://www.worldathletics.org/>

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/High\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/High_jump)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/High\\_jump\\_at\\_the\\_Olympics](https://en.wikipedia.org/wiki/High_jump_at_the_Olympics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)

IAAF - International Association of Athletics Federations (2015)

\* para além de ser o 1º recorde olímpico, foi também o novo recorde do mundo.

## REFERÊNCIAS

- Dapena, J. (2002). The evolution of high jumping technique: biomechanical analysis. ISBS, 2002. Cáceres, Extremadura, Spain.
- IAAF - International Association of Athletics Federations (2015). Progression of IAAF World Records. 2015 edition, Edited by Richard Hymans (ATFS) and Imre Matrahazi (IAAF). Printed by Multiprint, Monaco.
- Schmolinsky, G. (1982). Atletismo. Editorial Estampa, Lisboa. pp. 323-362.

## WEBGRAFIA

- URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>
- URL: <https://www.worldathletics.org/>
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/High\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/High_jump)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)

### ANEXO.1.6. Salto em comprimento (*long jump*)

O salto em comprimento é uma especialidade do atletismo, cujo objetivo é saltar o mais longe possível a partir de um ponto determinado (tábua de chamada). Na antiguidade, o salto em comprimento surgiu como prática de preparação para a guerra, uma vez que os soldados eram muitas vezes obrigados a ter que ultrapassar obstáculos como os riachos e ravinas. Existem registos da realização de saltos em comprimento nos



Jogos Olímpicos de 708 a.C. Enquanto especialidade do atletismo, foi introduzida nos primeiros Jogos Olímpicos da Era Moderna em 1896 (Atenas) para os homens e em 1948 (Londres) para as mulheres. Contudo, nos Jogos Olímpicos de Paris em 1900, St. Louis em 1904, Londres em 1908 e Estocolmo em 1912, no sexo masculino, foi disputada uma prova paralela ao salto em comprimento tradicional que foi o salto em comprimento sem corrida (*standing long jump*).

Desde a Era oficial da IAAF o recorde do mundo aumentou cerca de 18% nos homens e cerca de 26% nas mulheres. Face aos resultados obtidos nos últimos anos, não obstante o progresso dos meios de treino, alimentação e recuperação colocados ao dispor dos atletas, este parece ser um dos recordes do mundo mais difíceis de bater. Quando em 1988, Galina Chistyakova (URSS), e em 1991, Mike Powell (EUA) bateram o recorde do mundo, apesar do notável feito, estávamos longe de imaginar que tal proeza iria manter-se por praticamente 30 anos, e que parece querer perpetuar-se tais têm sido as marcas obtidas nas principais competições internacionais (Campeonatos do Mundo, Campeonatos Continentais, Jogos Olímpicos e *Meetings*) dos últimos anos. De uma forma geral, as melhores marcas de sempre ocorreram nas décadas de 80 e 90 do Séc. XX. No Séc. XXI, a melhor marca dos homens (8.74m, Dwight Phillips, EUA, em 07-06-2009) surge em 5º lugar das melhores de sempre, enquanto que nas mulheres (7.42m, Tatyana Kotova, Rússia, em 23-06-2002) surge em 5º lugar. Se considerarmos apenas os últimos 5 anos, a melhor marca dos homens surge em 10º lugar (8.68m, Juan Miguel Echevarría, Cuba, em 30-06-2018) e das mulheres em 9º lugar (7.31m, Brittney Reese, EUA, em 02-07-2016).

Em 29-07-1995, em Sestriere (Turim, Itália), uma cidade localizada em altitude (2050m), o atleta Ivan Pedroso (Cuba) obteve a marca de 8.96m, com vento +1.2m/s, que seria o atual recorde do mundo. Porém, a Federação Italiana de Atletismo (FIA) não ratificou este resultado perante a IAAF, uma vez que declarou inválida a velocidade do vento, dado um técnico italiano (um ex-atleta de salto com vara) ter permanecido em frente ao anemómetro durante os seis saltos do atleta cubano (não tendo feito o mesmo com os outros atletas), colocando em causa a medição correta. A polémica instalou-se. Como prova, a FIA recorreu a cinco vídeos. Acredita-se que esta tenha sido a primeira vez que um recorde mundial não foi submetido à IAAF para ratificação. Este foi o segundo escândalo envolvendo um evento de salto em comprimento realizado em Itália. No campeonato mundial de 1987, em Roma, um Oficial manipulou o dispositivo de medição para dar ao italiano Giovanni Evangelisti a medalha de bronze. Posteriormente, a medalha foi-lhe retirada e concedida a Larry Myricks (EUA), que na verdade havia saltado mais longe que Evangelisti.

São fatores determinantes para um bom salto em comprimento, a velocidade de deslocamento, a força explosiva, a resistência, a coordenação e a agilidade específicas (Schmolinsky, 1982).

A Tabela A1.11 apresenta alguns dos mais importantes resultados históricos nesta disciplina atlética.

Tabela A1.11 – Alguns recordes no salto em comprimento (*outdoor*).

Atleta	Marca	Ano	Observações
<b>+ HOMENS</b>			
Adam Wilson (GBI)	5.41m	1827	1º recorde do mundo: antes da IAAF
Peter O'Connor (GBI)	7.61m	1901	1º recorde do mundo: Era Oficial IAAF
Ellery Harding Clark	6.35m	1896	1º recorde olímpico (Atenas, Grécia)
Bob Beamon (EUA)	8.90m	1968	Atual recorde olímpico (Cidade do México, México)
Mike Powell (EUA)	8.95m	1991	Atual recorde do mundo (Tóquio, Japão)
Carl Lewis (EUA)	8.79m	1984	Atual rec. Mundo <i>indoor</i> (Nova Iorque, EUA)
Carlos Calado (POR)	8.36m	1997	Atual recorde nacional (Lisboa, Portugal)
<b>+ MULHERES</b>			
Josephine Tschudy (EUA/ALE)	3.91m	1888	1º recorde do mundo: antes da IAAF
Kinue Hitomi (JAP)	5.98m	1928	1º recorde do mundo: Era Oficial IAAF
Olga Gyarmati	5.695m	1948	1º recorde olímpico (Londres, Reino Unido)
Jackie Joyner-Kersey (EUA)	7.40m	1988	Atual recorde olímpico (Seul, Coreia do Sul)
Galina Chistyakova (URSS)	7.52m	1988	Atual recorde do mundo (Leninegrado, URSS)
Heike Drechler (RDA)	7.37m	1988	Atual rec. Mundo <i>indoor</i> (Viena, Áustria)
Naide Gomes (POR)	7.12m	2008	Atual recorde nacional (Fontvieille, Mônaco)

URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>

URL: <https://www.worldathletics.org/>

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Long\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Long_jump)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Long\\_jump\\_at\\_the\\_Olympics](https://en.wikipedia.org/wiki/Long_jump_at_the_Olympics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics\\_at\\_the\\_1896\\_Summer\\_Olympics\\_%E2%80%93\\_Men%27s\\_long\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics_at_the_1896_Summer_Olympics_%E2%80%93_Men%27s_long_jump)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics\\_at\\_the\\_1948\\_Summer\\_Olympics\\_%E2%80%93\\_Women%27s\\_long\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics_at_the_1948_Summer_Olympics_%E2%80%93_Women%27s_long_jump)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)

IAAF - International Association of Athletics Federations (2015)

## REFERÊNCIAS

- IAAF - International Association of Athletics Federations (2015). Progression of IAAF World Records. 2015 edition, Edited by Richard Hymans (ATFS) and Imre Matrahazi (IAAF). Printed by Multiprint, Monaco.
- Schmolinsky, G. (1982). Atletismo. Editorial Estampa, Lisboa. pp. 284-311.

## WEBGRAFIA

- URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>
- URL: <https://www.worldathletics.org/>
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Long\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Long_jump)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics\\_at\\_the\\_1896\\_Summer\\_Olympics\\_%E2%80%93\\_Men%27s\\_long\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics_at_the_1896_Summer_Olympics_%E2%80%93_Men%27s_long_jump)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics\\_at\\_the\\_1948\\_Summer\\_Olympics\\_%E2%80%93\\_Women%27s\\_long\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Athletics_at_the_1948_Summer_Olympics_%E2%80%93_Women%27s_long_jump)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)

### ANEXO.1.7. Salto com vara (*pole vault*)

As competições de saltos com varas datam da Grécia Antiga, disputadas entre os cretenses e os celtas. Ao longo de centenas de anos, as varas foram usadas pelas pessoas para ajudar a transpor obstáculos naturais como os terrenos pantanosos na região da Frísia (província ao norte dos Países Baixos), na Holanda, e nas regiões do leste da Inglaterra, mais



propriamente nas áreas de Cambridgeshire, Lincolnshire e Norfolk. Nestes locais, numa área muito extensa, imensos canais de drenagem foram construídos, e grandes quantidades de varas eram deixadas para que as pessoas usassem para saltar sobre os canais. Estas varas também foram usadas para as competições de salto em distância (e não em altura, como hoje é feito). Em 1843, no *Ulverston Football and Cricket Club*, em Lancashire, na Inglaterra, disputou-se a primeira competição de salto com varas onde o objetivo era passar uma fasquia colocada em altura (Johnson et al., 2008). A prática de usar a vara para transpor uma fasquia tornou-se regular a partir de 1850, na Alemanha. A técnica moderna de salto com vara foi desenvolvida nos Estados Unidos da América, em 1857.

Em termos de material usado, o salto com vara é a especialidade do atletismo que maior evolução teve, resultando em melhorias significativas das performances (Mallick, 2008; McCormick, 2010). As primeiras varas eram de madeira, um material rígido. Em 1904, a madeira foi substituída pelo bambu, mais leve e mais flexível do que a madeira, mas igualmente resistente, dificultando a elevação do corpo a grandes alturas. Seguiram-se as varas de alumínio no final da década de 1950. Este material embora mais denso, permitiu o fabrico de varas tubulares com paredes de espessuras ajustadas aos requisitos dos especialistas e sem grandes restrições de comprimento. Porém, esta alteração não foi suficiente para induzir melhorias significativas nas performances dos atletas. Em 1964, as varas passaram a ser feitas de um compósito de fibra de vidro (*fiberglass*), tendo alguns fabricantes adicionado fibra de carbono que rapidamente foi abandonada dada a rigidez que colocavam nas varas. Esta evolução permitiu atingir alturas antes inimagináveis, como são o caso do primeiro salto a 6.00m conseguido pelo ucraniano Sergei Bubka em 1985, aos atuais recordes do mundo ao ar livre de 6.15m de Sergey Bubka obtido em 1993, e 6.16m em pista coberta do francês Renaud Lavillenie obtido em 2014, ambos conseguidos com varas de fibra de vidro. Nas mulheres, a russa Yelena Isinbayeva conseguiu pela primeira vez alcançar a barreira dos 5.00m em 2009, para neste mesmo ano estabelecer aquele que é o atual recorde do mundo, com a marca de 5.06m.

Em termos de presença olímpica, o salto com vara foi introduzido nos Jogos Olímpicos de 1896 (Atenas) para os homens, e em 2000 (Sydney) para as mulheres.

Desde que a IAAF é responsável pela homologação dos registos, o recorde do mundo (*outdoor*) aumentou cerca de 53% nos homens e cerca de 25% nas mulheres.

O salto com vara é disputado quer ao ar livre quer em pavilhão, sendo que a IAAF regista as marcas independentemente de terem sido obtidas em espaço aberto ou fechado. Neste estudo, apenas consideramos as marcas obtidas ao ar livre.

As capacidades físicas determinantes no salto com vara são a velocidade de deslocamento (corrida de balanço), a velocidade de aceleração do corpo para a vertical, a flexibilidade, a coordenação dos

membros superiores e inferiores, a força aplicada no momento da impulsão e a velocidade de projeção do corpo na vertical. Outros fatores incluem o ângulo de saída (ângulo de projeção do corpo, posicionamento do corpo na fase final da impulsão e a queda) (Schmolinsky, 1982).

A Tabela A1.12 apresenta alguns dos mais importantes resultados da história desta disciplina atlética.

Tabela A1.12 – Alguns recordes no salto com vara (*outdoor*).

Atleta	Marca	Ano	Observações
<b>+ HOMENS</b>			
John Roper (GBI)	2.44m	1843	1º recorde do mundo: antes da IAAF
Marc Wright (EUA)	4.02m	1912	1º recorde do mundo: Era Oficial IAAF
William Hoyt (EUA)	3.30m	1896	1º recorde olímpico (Atenas, Grécia)
Thiago Braz da Silva (BRA)	6.03m	2016	Atual recorde olímpico (Rio de Janeiro, Brasil)
Sergey Bubka (UCR)	6.14m	1994	Atual recorde do mundo (Sestriere, Itália)
Renaud Lavillenie (FRA)	6.16m	2014	Atual rec. Mundo <i>indoor</i> (Donetsk, Ucrânia)
Diogo Ferreira (POR)	5.71m	2017	Atual recorde nacional (Lisboa, Portugal)
<b>+ MULHERES</b>			
Ruth Spencer (EUA)	1.448m	1910	1º recorde do mundo: antes da IAAF
Caiyun Sun (CHN)	4.05m	1992	1º recorde do mundo: Era Oficial IAAF
Stacy Dragila (EUA)	4.60m	2000	1º recorde olímpico (Sydney, Austrália)
Yelena Isinbayeva (RUS)	5.05m	2008	Atual recorde olímpico (Pequim, China)
Yelena Isinbayeva (RUS)	5.06m	2009	Atual recorde do mundo (Zurique, Suíça)
Jennifer Suhr (EUA)	5.03m	2016	Atual rec. Mundo <i>indoor</i> (Brockport, NY, EUA)
Maria Leonor Tavares (POR)	4.50m	2011 e 2016	Atual recorde nacional (Albi e Francoville, França)

URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>

URL: <https://www.worldathletics.org/>

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Pole\\_vault](https://en.wikipedia.org/wiki/Pole_vault)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Pole\\_vault\\_at\\_the\\_Olympics](https://en.wikipedia.org/wiki/Pole_vault_at_the_Olympics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)

IAAF - International Association of Athletics Federations (2015)

## REFERÊNCIAS

- IAAF - International Association of Athletics Federations (2015). *Progression of IAAF World Records*. 2015 edition, Edited by Richard Hymans (ATFS) and Imre Matrahazi (IAAF). Printed by Multiprint, Monaco.
- Johnson, J.; VerSteeg, R. & Kring, R. (2008). Part 1: The History of the Pole Vault. *American Track & Field*, 22-23.
- Mallick, P.K. (2008). *Fiber-Reinforced Composites: Materials, Manufacturing, and Design*. Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group.
- McCormick, M. (2010). *Soaring to New Heights: The Evolution of Pole Vaulting and Pole Materials*. Illumin (USC). Retrieved from <http://illumin.usc.edu/143/soaring-to-new-heights-the-evolution-of-pole-vaulting-andpole-materials/fullView/>.
- Schmolinsky, G. (1982). *Atletismo*. Editorial Estampa, Lisboa. pp. 362-406.

## WEBGRAFIA

- URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>
- URL: <https://www.worldathletics.org/>
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Pole\\_vault](https://en.wikipedia.org/wiki/Pole_vault)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)

### ANEXO.1.8. Triplo-salto (*triple-jump*)

O triplo-salto é uma disciplina do atletismo similar ao salto em comprimento, podendo ser praticada *indoor* e *outdoor*.



Originariamente, o triplo-salto começou por ser praticado pelos gregos, e consistia na realização de três longos saltos realizados consecutivamente (i.e., sem considerar a ordem na colocação dos apoios). Registos históricos mostram que nos jogos olímpicos da antiguidade há referência a saltos de 15 e mais metros. Isto levou os historiadores do desporto a concluir que tais performances só poderiam ser o resultado de vários saltos realizados consecutivamente, originando as bases para o surgimento do triplo-salto tal como hoje o conhecemos (Rosenbaum, 2012). Contudo, não existem evidências que suportem a presença do triplo-salto enquanto modalidade dos jogos olímpicos da antiguidade, pelo que permanece incerteza quanto à realização de tais feitos. Nessa época, à semelhança do salto em comprimento, também havia o triplo-salto sem corrida (*standing triple-jump*). O triplo-salto sem corrida foi modalidade competitiva, paralela ao triplo-salto tradicional, nos Jogos Olímpicos de Paris em 1900 e St. Louis em 1904.

Também há quem considere que na origem do triplo-salto possa estar o antigo “jogo da macaca”, atualmente muito praticado por crianças.

O triplo-salto começa com uma corrida preparatória em velocidade crescente. Seguem-se a chamada e três saltos consecutivos. No primeiro salto (*hop*: salto ao “pé coxinho”) o contacto com o solo é realizado com o pé de chamada, o segundo salto (*step*: salto na passada) com o outro pé e o terceiro salto (*jump*: salto final) é a receção ao solo, habitualmente feita com os dois pés em simultâneo. A zona destinada à corrida de balanço deverá ter pelo menos 40m de extensão, podendo chegar aos 45m caso as condições permitam. Por sua vez, a distância entre a tábua de chamada e o extremo mais afastado da caixa de saltos deve ser de pelo menos 21m. Nas Competições Internacionais, recomenda-se que a linha de chamada não se situe a menos de 13m para homens e a menos de 11m para mulheres, do início da caixa de saltos. A caixa de saltos tem as seguintes dimensões: 2.75 a 3.00m (largura) por 10m (comprimento) (IAAF, 2015b).

Ao ar livre, o primeiro registo que se conhece nos homens data de 1826, pertence a Andrew Beatti (GBI) (Great Britain & Ireland) com a marca de 12.95m. A IAAF passou a homologar as marcas a partir de, inclusivamente, 1912. Em termos olímpicos, a modalidade foi introduzida em 1896, em Atenas, nos primeiros Jogos Olímpicos da Era Moderna, tendo sido vencedor James Connolly (EUA) com a marca de 13.71m. Nestes Jogos, após a chamada, os dois primeiros saltos eram feitos com o mesmo pé, seguindo então o salto final; nas mulheres, a modalidade foi disputada pela primeira vez nos Jogos Olímpicos de Atlanta (EUA), tendo sido vencedora Inessa Kravets (UCR) com a marca de 15.33m.

Desde a vitória de Nelson Évora nos Campeonatos do Mundo de 2007, em Osaka (Japão), que Portugal tem vindo a ganhar tradição no triplo-salto. Porém, até 31-12-2017, o recorde nacional de Nelson Évora (17.74m) ocupava apenas a 70ª melhor marca de sempre. Esta marca só seria recorde do mundo até 15-10-1975. Em 07-12-2017, o atleta de origem cubana Pedro Pablo Pichardo adquiriu a nacionalidade

portuguesa. No dia 04-05-2018, no *Meeting* da Liga Diamante, em Doha (Qatar), este mesmo atleta viria a bater o recorde nacional de Nélsón Évora, colocando a marca em 17.95m<sup>3</sup>, a melhor do ano e a 19ª melhor de sempre. Em termos individuais, Nelson Évora é, até à data deste estudo, o 24º melhor saltador de triplo-salto de sempre e Pichardo o 4º melhor de sempre (com a marca de 18.08m, enquanto atleta de Cuba).

Desde que a IAAF é responsável pela homologação dos registos, o recorde do mundo aumentou cerca de 18% nos homens e cerca de 7% nas mulheres.

São fatores importantes para um bom triplo-salto (Hay, 1993): velocidade de deslocamento, posição do corpo na chamada (i.e., deslocamento máximo horizontal do centro de gravidade no momento da saída), velocidade da impulsão, ângulo da impulsão, altura da impulsão, resistência ao ar, posição do corpo na receção ao solo e ações posteriores.

A Tabela A1.13 apresenta alguns dos mais importantes resultados históricos nesta disciplina atlética.

Tabela A1.13 – Alguns recordes no triplo-salto (*outdoor*).

Atleta	Marca	Ano	Observações
<b>+ HOMENS</b>			
Andrew Beattie (GBI)	12.95m	1826	1º recorde do mundo: antes da IAAF
Daniel Ahearn (GBI)	15.52m	1911	1º recorde do mundo: Era Oficial IAAF
James Connolly (EUA)	13.71m	1896	1º recorde olímpico (Atenas, Grécia)
Kenny Harrison (EUA)	18.09m	1996	Atual recorde olímpico (Atlanta, EUA)
Jonathan Edwards (GBR)	18.29m	1995	Atual recorde do mundo (Gotemburgo, Suécia)
Teddy Tamgho (FRA)	17.92m	1995	Atual rec. Mundo <i>indoor</i> (Paris, França)
Nelson Évora (POR)	17.74m	2007	Atual recorde nacional (Osaka, Japão)
Pedro Pablo Pichardo	17.95m *	2018	Atual recorde nacional (Doha, Qatar)
<b>+ MULHERES</b>			
Mary Ayer (EUA)	6.72m	1899	1º recorde do mundo: antes da IAAF
Li Huirong (CHN)	14.54m	1990	1º recorde do mundo: Era Oficial IAAF
Inessa Kravets (UKR)	15.33m	1996	1º recorde olímpico (Atlanta, EUA)
Françoise Mbango Etone (CMR)	15.39m	2008	Atual recorde olímpico (Pequim, China)
Inessa Kravets (UKR)	15.50m	1995	Atual recorde do mundo (Gotemburgo, Suécia)
Tatyana Lebedeva (RUS)	15.36m	1995	Atual rec. Mundo <i>indoor</i> (Budapeste, Hungria)
Patrícia Mamona (POR)	14.65m	2016	Atual recorde nacional (Rio de Janeiro, Brasil)

\* Aguarda conclusão do processo de homologação

URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>

URL: <https://www.worldathletics.org/>

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Triple\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_jump)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Triple\\_jump\\_at\\_the\\_Olympics](https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_jump_at_the_Olympics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)

URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)

IAAF - International Association of Athletics Federations (2015a)

## REFERÊNCIAS

- Hay, J.G. (1993). *The Biomechanics of Sports Technique*. 4rd ed., Publisher: Pearson, Wallingford, United Kingdom.

<sup>3</sup> Esta marca, sendo recorde nacional, não é recorde pessoal, pois Pedro Pichardo tem como melhor registo o salto de 18.08m, em 28-05-2015 quando ainda representava Cuba.

- IAAF - International Association of Athletics Federations (2015a). Progression of IAAF World Records. 2015 edition, Edited by Richard Hymans (ATFS) and Imre Matrahazi (IAAF). Printed by Multiprint, Monaco.
- IAAF - International Association of Athletics Federations (2015b). Competition Rules 2016-2017. In Force as from 1<sup>st</sup> November 2015. Monaco.
- Rosenbaum, M. (2012). An Illustrated History of the Triple Jump. URL: <http://trackandfield.about.com/od/triplejump/ss/illustrtriplejump.htm>
- Schmolinsky, G. (1982). Atletismo. Editorial Estampa, Lisboa. pp. 311-323.

#### **WEBGRAFIA**

- URL: <https://www.iaaf.org/records/all-time-toplists/>
- URL: <https://www.worldathletics.org/>
- URL: <http://www.picgifs.com/sport-graphics/>
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Triple\\_jump](https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_jump)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Olympic\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Olympic_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_world\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_world_records_in_athletics)
- URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Portuguese\\_records\\_in\\_athletics](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Portuguese_records_in_athletics)
- URL: <https://www.fpatletismo.pt/recordes-de-portugal-masculinos>



**ANEXO 2 – ALEATORIEDADE (*Turning Point Test*)**

O *turning point test*, também conhecido por “pontos de viragem”, é um teste de hipóteses estatístico de independência de uma série de variáveis aleatórias. Foi apresentado primeiramente por Bienaymé (1874), detalhado por Moore & Wallis (1943) e tendo Heyde & Seneta (1972) mostrado a sua importância estatística.

Seja  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , uma sequência de observações. Diz-se que existe “ponto de viragem” no ponto  $i$ ,  $1 < i < n$ , se  $x_{i-1} < x_i$  e  $x_i > x_{i+1}$  ou se  $x_{i-1} > x_i$  e  $x_i < x_{i+1}$ . Esta situação tem 4 possibilidades de ocorrência (em 6 ordens possíveis: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA) de  $x_{i-1}$  e  $x_{i+1}$ , assumindo que todos os 3 elementos têm valores diferentes. Assim, a probabilidade de ocorrer um “ponto de viragem” numa sequência de três valores é de  $4/6$  ou  $2/3$ , para todos os valores de  $i$ , exceto para  $i=1$  e  $i=n$ .

Sendo

$$T = \text{número de “pontos de viragem”} \quad [\text{A2.1}]$$

da sequência  $\{x_1, \dots, x_n\}$  i.i.d. de dimensão  $n$ , com  $n$  grande, então  $T \sim N(\mu_T, \sigma_T^2)$  (Brockwell & Davis, 2002), pelo que o valor esperado e variância de  $T$  são:

**valor esperado,**

$$\mu_T = E(T) = \frac{2(n-2)}{3} \quad [\text{A2.2}]$$

**e variância,**

$$\sigma_T^2 = \text{Var}(T) = \frac{16n-29}{90}. \quad [\text{A2.3}]$$

Pretende-se testar as **hipóteses**

$$\begin{aligned} H_0 : X_1, \dots, X_n \text{ é aleatória} \\ H_1 : X_1, \dots, X_n \text{ não é aleatória} \end{aligned} \quad [\text{A2.4}]$$

A **estatística de teste**, dada por:

$$Z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T} \sim N(0,1) \quad [\text{A2.5}]$$

A **decisão de rejeitar  $H_0$**  (quando  $n$  é grande), para um teste bilateral, ocorre se:

$$|Z| > \Phi_{1-\alpha/2}^{-1} \quad [\text{A2.6}]$$

onde  $\Phi_{1-\alpha/2}^{-1}$  é o quantil  $(1-\alpha/2)$  da distribuição Normal padrão.

**+ Observações**

- Um valor grande de  $T - \mu_T$  indica que a sequência flutua mais rapidamente do que o esperado para uma sequência i.i.d. Por outro lado, um valor  $T - \mu_T$  muito mais pequeno que zero indica a existência de uma correlação positiva entre observações vizinhas.
- Quando a hipótese unilateral à esquerda (direita) é considerada, a  $H_0$  da aleatoriedade é testada contra a correlação serial positiva (negativa) entre as observações vizinhas.

**APLICAÇÃO****ANEXO 2.1. Máximos de blocos individuais**Tabela A2.1 – *Turning Point Test* na verificação da aleatoriedade das séries de **máximos de blocos individuais** referentes aos saltos em altura, comprimento, vara e triplo-salto, de homens e mulheres.

	$T$	$n$	$p$	Decisão
<b>HOMENS</b>				
Salto em altura	0.9493	626	0.3425	Aleatório
Salto em comprimento	-0.4079	738	0.6833	Aleatório
Salto com vara	1.7862	707	0.0741	Aleatório
Triplo-salto	-1.7099	474	0.0873	Aleatório
<b>MULHERES</b>				
Salto em altura	2.3774	170	0.0174	Não-Aleatório*
Salto em comprimento	0.3398	267	0.7340	Aleatório
Salto com vara	-0.6157	536	0.5381	Aleatório
Triplo-salto	-1.4615	283	0.1439	Aleatório

\* evidências estatisticamente significativas de não-aleatoriedade.

Observação A2.1: a série relativa ao salto em altura feminino, não obstante indicar não-aleatoriedade pelo *Turning Point Test*, a mesma apresenta aleatoriedade pelos testes de Wald-Wolfowitz *runs test* ( $Z=-0.5193$ ,  $R=79$ ,  $n_1=95$ ,  $n_2=71$ ,  $p=0.6036$ ), pelo *Difference Sign Test* ( $S=-0.39736$ ,  $n=170$ ,  $p=0.6911$ ) e pelo *Bartels Ratio Test* ( $B=0.028786$ ,  $n=193$ ,  $p=0.977$ ). Paralelamente, o Cox-Stuart *trend test* (Tabela A3.1) não regista tendência significativa, e a informação gráfica (Figura A2.1) sugere um padrão de aleatoriedade sem tendência. Por esta razão, decidimos considerar esta série no processo de modelação como sendo aleatória.

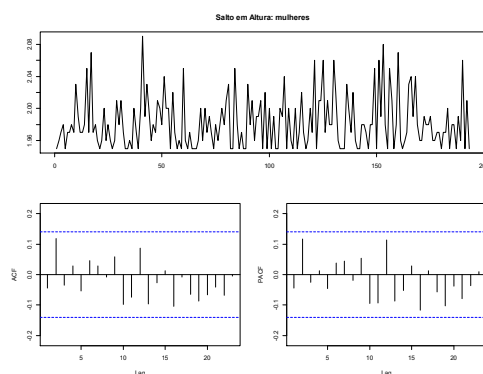


Figura A2.1 – Série de dados referentes ao salto em altura feminino, 1980-2017.

## ANEXO 2.2. Máximos de blocos anuais

Tabela A2.2 – *Turning Point Test* na verificação da aleatoriedade das séries de **máximos de blocos anuais** referentes aos lançamentos do dardo, disco, martelo e peso, de homens e mulheres.

	<i>T</i>	<i>n</i>	<i>p</i>	Decisão
<b>HOMENS</b>				
Lançamento do dardo	0.0001	32	1.000	Aleatório
Lançamento do disco	-0.9329	37	0.3509	Aleatório
Lançamento do martelo	1.1828	38	0.2369	Aleatório
Lançamento do peso	-1.0817	36	0.2794	Aleatório
<b>MULHERES</b>				
Lançamento do dardo	-0.7628	19	0.4456	Aleatório
Lançamento do disco	-1.1828	38	0.2369	Aleatório
Lançamento do martelo	-3.8579	26	0.0001143	Não-Aleatório*
Lançamento do peso	-1.5770	38	0.1148	Aleatório

\* evidências estatisticamente significativas de não-aleatoriedade.

## ANEXO 2.3. *r*-maiores observações anuais

Tabela A2.3 – *Turning Point Test* na verificação da aleatoriedade das séries, **baseado na média dos máximos de blocos anuais** formado pelas 10 maiores observações anuais referentes aos lançamentos do dardo, disco, martelo e peso, de homens e mulheres.

	<i>T</i>	<i>n</i>	<i>p</i>	Decisão
<b>HOMENS</b>				
Lançamento do dardo	-1.7267	32	0.08423	Aleatório
Lançamento do disco	-0.3943	38	0.6934	Aleatório
Lançamento do martelo	-1.1828	38	0.2369	Aleatório
Lançamento do peso	-1.1828	38	0.2369	Aleatório
<b>MULHERES</b>				
Lançamento do dardo	-0.7628	19	0.4456	Aleatório
Lançamento do disco	0.3943	38	0.6934	Aleatório
Lançamento do martelo	-4.8224	26	<0.0001	Não-aleatório*
Lançamento do peso	-1.2950	32	0.1953	Aleatório

\* evidências estatisticamente significativas de não-aleatoriedade.

## REFERÊNCIAS

- Bienaymé, I.J. (1874). Sur une question de probabilités. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 2: 153-154.
- Brockwell, P.J. & Davis, R.A. (2002). Introduction to Time Series and Forecasting. Springer Verlag.
- Heyde, C.C. & Seneta, E. (1972). Studies in the History of Probability and Statistics. XXXI. The simple branching process, a turning point test and a fundamental inequality: A historical note on I. J. Bienaymé. *Biometrika*, 59 (3): 680-683.
- Moore, G.H. & Wallis, W.A. (1943). Time series significance tests based on signs of differences. *Journal of the American Statistical Association*, 38 (222): 153-164.

### ANEXO 3 – TENDÊNCIA (*Cox-Stuart Trend Test*)

O Cox-Stuart *trend test* foi introduzido por Cox & Stuart (1955) para detetar a tendência numa série de dados. Este teste é uma modificação do teste dos Sinais, robusto para análise da tendência, podendo ser usado para detetar qualquer tipo de padrão de não-aleatoriedade, como por exemplo a onda sinusoidal ou outro padrão periódico (Rutkowska, 2015; Zhan & Luo, 2016)

Seja  $\{x_1, \dots, x_n\}$  uma sequência de observações mutuamente independentes, e sejam  $\{(x_1, x_{1+c}), (x_2, x_{2+c}), \dots, (x_{n-c}, x_n)\}$  os pares de observações agrupadas, onde  $c = n/2$  se  $n$  é par e  $c = (n+1)/2$  se  $n$  é ímpar. Caso  $n$  seja ímpar, a observação do centro da série é omitida. A cada par de observações está associado o sinal “+” se  $x_i < x_{i+c}$  ou o sinal “-” se  $x_i > x_{i+c}$ ; caso  $x_i = x_{i+c}$  a(s) observação(ões) é(são) eliminada(s). Assim, seja  $m$  o número de pares onde  $x_i \neq x_{i+c}$ . Pretende-se testar as hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 : P(x_i < x_{i+c}) &= P(x_i > x_{i+c}), \quad \forall_i : \text{não existe tendência} \\ H_1 : P(x_i < x_{i+c}) &\neq P(x_i > x_{i+c}), \quad \forall_i : \text{existe tendência (decrecente ou crescente)} \end{aligned} \quad [\text{A3.1}]$$

Estamos interessados no número total de pares com sinal “+”, ou seja, na amostra das diferenças positivas,  $(x_{1+c} - x_1), (x_{2+c} - x_2), \dots$ , pelo que a **estatística de teste** é dada por:

$$S = \sum_{i=1}^m \text{pares com sinal "+"} \quad [\text{A3.2}]$$

O Cox-Stuart *trend test* baseia-se na distribuição Binomial, com parâmetros  $p=0.5$  e  $m$ . Assim, sob a hipótese nula,  $S \sim \text{Bin}(m, 0.5)$ , onde  $m$  representa o número de pares sem empates.

Para uma hipótese bilateral, a hipótese nula é testada contra as alternativas “tendência decrescente” ou “tendência crescente”. Ou seja, se existir uma tendência decrescente, as observações na 2ª metade da série de dados têm valor mais baixo do que as observações da 1ª metade, caso contrário a tendência é crescente. Numa amostra sem tendência, espera-se que o número total de sinais “-” e “+” seja semelhante.

**APLICAÇÃO****ANEXO 3.1. Máximos de blocos individuais**Tabela A3.1 – *Cox-Stuart Trend Test* na verificação da tendência das séries de **máximos de blocos individuais** referentes aos saltos em altura, comprimento, vara e triplo-salto, de homens e mulheres.

	<i>S</i>	<i>n</i>	<i>p</i>	<b>Decisão</b>
<b>HOMENS</b>				
Salto em altura	145	323	0.0748	Sem tendência
Salto em comprimento	186	374	0.9588	Sem tendência
Salto com vara	194	355	0.0893	Sem tendência
Triplo-salto	122	237	0.6968	Sem tendência
<b>MULHERES</b>				
Salto em altura	44	88	0.9152	Sem tendência
Salto em comprimento	54	133	0.0370	Sem tendência
Salto com vara	143	269	0.3293	Sem tendência
Triplo-salto	72	143	0.9999	Sem tendência

**ANEXO 3.2. Máximos de blocos anuais**Tabela A3.2 – *Cox-Stuart Trend Test* na verificação da tendência das séries de **máximos de blocos anuais** referentes aos lançamentos do dardo, disco, martelo e peso, de homens e mulheres.

	<i>S</i>	<i>n</i>	<i>p</i>	<b>Decisão</b>
<b>HOMENS</b>				
Lançamento do dardo	6	16	0.4545	Sem tendência
Lançamento do disco	6	16	0.2379	Sem tendência
Lançamento do martelo	7	19	0.3593	Sem tendência
Lançamento do peso	12	19	0.3593	Sem tendência
<b>MULHERES</b>				
Lançamento do dardo	5	9	0.9999	Sem tendência
Lançamento do disco	4	19	0.0192	Com tendência*
Lançamento do martelo	13	13	0.000244	Com tendência*
Lançamento do peso	6	16	0.4545	Sem tendência

\* evidências estatisticamente significativas de existência de tendência.

**ANEXO 3.3. r-maiores observações anuais**

Tabela A3.3 – *Cox-Stuart Trend Test* na verificação da tendência das séries, **baseado na média dos máximos de blocos anuais** formado pelas 10 maiores observações anuais referentes aos lançamentos do dardo, disco, martelo e peso, de homens e mulheres.

	<i>S</i>	<i>n</i>	<i>p</i>	Decisão
<b>HOMENS</b>				
Lançamento do dardo	6	16	0.4545	Sem tendência
Lançamento do disco	11	19	0.6476	Sem tendência
Lançamento do martelo	6	19	0.1671	Sem tendência
Lançamento do peso	12	19	0.3593	Sem tendência
<b>MULHERES</b>				
Lançamento do dardo	7	9	0.1797	Sem tendência
Lançamento do disco	4	19	0.0192	Com tendência*
Lançamento do martelo	13	13	0.00024	Com tendência*
Lançamento do peso	1	16	0.00052	Com tendência*

\* evidências estatisticamente significativas de existência de tendência.

**REFERÊNCIAS**

- Cox, D.R. & Stuart, A. (1955). Some quick sign tests for trend in location and dispersion. *Biometrika*, 42 (1-2): 80-95.
- Rutkowska, A. (2015). Properties of the Cox-Stuart test for trend in application to hydrological series: the simulation study. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 44 (3): 565-579.
- Zhan, J. & Luo, X. (2016). Offer Evaluation and Trade-Off Making in Automated Negotiation Based on Intuitionistic Fuzzy Constraints. Baldoni, M.; Chopra, A.K.; Son, T.C. & Hirayama, K. (eds), Conference: 19<sup>th</sup> International Conference on Principles and Practice of Multi-Agent Systems, pp.197-229, August 22-26, 2016.

## ANEXO 4 – Método das $r$ -maiores observações anuais

### ANEXO 4.1. Técnicas *LOWESS* e *LOESS*

Estes métodos não-paramétricos que estimam curvas e superfícies através de suavização (*smoothing*). *LOWESS* (*LOcally WEighted Scatterplot Smoothing*) é a versão inicial, ao passo que *LOESS* (*LOcally Estimated Scatterplot Smoothing*) é a versão mais recente. A função *lowess* realiza a suavização numa única dimensão (ajuste linear), considerando  $x$  e  $y$  como vetores; já a função *loess* é mais geral, permitindo que a suavização seja multidimensional (ajustes de maior ordem). Ambas provêm de regressões lineares localmente ponderadas para suavizar os dados num gráfico de dispersão, ajudando (1) a observar a evolução da variável de interesse (neste estudo, a performance) ao longo do tempo, (2) a detetar a relação entre as variáveis, e (3) a encontrar tendências e ciclos nos dados (Cleveland, 1979, 1981, 1994; Cleveland & Devlin, 1988).

Definição A4.1.1: diz-se regressão local, uma vez que o ajuste num dado ponto  $x$  utiliza apenas observações na vizinhança de  $x$  (e não todas as observações, o que resultaria numa linha igual à da regressão linear); diz-se regressão local ponderada, dado atribuir mais peso ou importância aos valores que estão na vizinhança de cada ponto de interesse,  $x=x_0$ , a prever; diz-se suavizada, porque elimina ruídos para revelar características e sinais de importância, tais como tendências ou ciclos nos dados que dificilmente seriam modelados com o recurso a curvas paramétricas. Assim, na regressão local trata-se de ajustar uma curva suavizada, através de sucessivos ajustes de retas de mínimos quadrados ponderados recorrendo a uma função de peso (ou kernel), que passe pelos pontos segundo uma técnica de regressão localmente ponderada.

#### Regressão *LOWESS* do presente estudo

Baseia-se no ajuste da regressão linear pelo método dos mínimos quadrados ponderados para subconjuntos da amostra, construindo uma função que descreva a parte determinística da variação dos dados, ponto-a-ponto, dada por uma função matemática de uma ou mais quantidades,  $x_1, x_2, \dots$  (Cleveland, 1979). Em cada ponto da amostra, é ajustado um polinómio de grau 1 ao subconjunto de valores da variável dependente próximos do ponto de interesse,  $x_0$ , sendo que os pontos do subconjunto na proximidade de  $x_0$  terão maior peso. Assim, a estimativa da regressão ocorre a partir dos valores da variável dependente na vizinhança de  $x_0$ . O ajuste só fica completo depois de estimados os  $n$  pontos da série de dados. A suavização é afetada fundamentalmente pelo tamanho da janela e a delimitação dos subconjuntos depende da seleção do parâmetro de suavização  $f$  ou largura de banda (alisamento, *span* ou *bandwidth*).

O parâmetro de suavização,  $f \in (0,1]$ , controla o grau de suavização<sup>4,5</sup>. Este parâmetro representa a proporção de observações que serão utilizadas na regressão local, sendo que o ajustamento inclui a proporção de pontos no gráfico que influenciam a suavização em cada valor. Ou seja, define o tamanho da vizinhança na proximidade de  $x_0$ . Para além disso, este parâmetro desempenha um importante papel na variância e no viés da estimativa. Valores de  $f \sim 1$  proporcionam uma curva mais suavizada (praticamente reta), cujos pontos estimados se movem menos em resposta às flutuações dos dados. Neste caso, a regressão poderá ser sobrestimada, resultando em perda de informação e, portanto, grande viés, embora com pequena variância; valores muito pequenos de  $f$  proporcionam uma curva menos suavizada, pelo que mais próximo será o ajuste da função de regressão aos dados amostrais, levando a uma função estimada mais irregular, com consequências na precisão, pois haverá menos dados na proximidade de  $x_0$ . Neste caso, a função de regressão poderá incorporar erros e/ou inconsistências da amostra. Assim, se  $f$  for muito pequeno o estimador terá viés reduzido, mas variância elevada. Paralelamente, o *trade-off* viés-variância também depende do grau do polinómio a ser usado. Um grau alto proporciona melhor aproximação à média populacional e, portanto, menos viés, contudo dado haver mais fatores a serem considerados no modelo tal poderá resultar num aumento da variância. Para um mesmo valor de  $f$ , o polinómio de grau 1 (i.e., linear ou  $d=1$ ) tem mais viés, mas menor variância, ao passo que com o polinómio de grau 2 (i.e., quadrático ou  $d=2$ ) terá menor viés e maior a variância; Polinómios com  $d > 2$  tendem a sobrestimar o ajuste em cada subconjunto de dados, para além de serem numericamente instáveis e dificultarem a precisão computacional. Contudo, o aumento da variância decorrente da utilização de polinómios de grau mais elevado pode ser compensado com a utilização de  $f$  maior. Segundo Cleveland (1979, 1981, 1994), Cleveland & Devlin (1988) e Cleveland & Loader (1996), o uso de polinómios de ordem  $d=1$ , são geralmente suficientes para obter estimativas de óptima qualidade. Assim, conforme os autores *op. cit.*, a presença de “picos” ou “vales” pronunciados nos dados indiciam, porventura, um valor de  $d=2$ , ao passo que a presença de um padrão único indica que  $d=1$ . Na metodologia *lowess*, usada neste estudo, o polinómio é de grau 1,  $\hat{y}_i = a + bx_i$ .

Assim, o objetivo da curva *lowess* é produzir uma estimativa o mais suavizada possível sem alterar a relação de dependência entre as duas variáveis em análise (tempo vs performance).

No processo de suavização de regressão localmente ponderada seguimos os passos:

1. seja  $y$  um vetor contendo um conjunto de performances atléticas e  $x$  o contador de tempo, em que  $x$ =ano de início da série temporal, ..., 2017.

2. calcular o número de observações na vizinhança do ponto de interesse  $x_0$ , i.e., em cada instante temporal  $x_0 \in x$ , identificam-se os  $q$  instantes<sup>6</sup>  $x_i (i=1,q)$  na vizinhança de  $x_0$ , denotando-se o

---

<sup>4</sup> Mais concretamente,  $f \in \left(\frac{d+1}{n}, 1\right]$ , sendo  $d$  o grau do polinómio local.

<sup>5</sup> No procedimento *loess*, podem definir-se situações em que  $f > 1$ .

<sup>6</sup> O resultado de  $q$ , com  $q = f \times n$ , é dado pela função piso, denotada por  $\lfloor x \rfloor$ , que converte um número real  $x$  no maior número inteiro menor ou igual a  $x$ .



subconjunto por  $n(x_0)$ . Portanto, o tamanho da janela de vizinhança, denotado por  $q$ , é um parâmetro de entrada do *lowess*.

3. calcular a maior distância entre  $x_0$  e o ponto  $x_i$  dentro da janela  $n(x_0)$ , ou seja,

$$\Delta(x_0) = \text{máximo}_{x_i \in n(x_0)} \|x_0 - x_i\|.$$

4. efetuar a ponderação de cada par  $(x_i, y_i)$ ,  $x_i$  em  $n(x_0)$ , uma função de peso ou kernel<sup>7</sup>,  $K$  (contínua, simétrica, com maior peso na proximidade de  $x_0$  e decrescente à medida que  $x$  se afasta de  $x_0$ ). Neste estudo, o peso a atribuir a cada par  $(x_i, y_i)$  foi dado pela função de ponderação tricúbica<sup>8</sup>:

$$w(x_i) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{|x - x_i|}{\Delta(x_0)}\right)^3\right)^3, & \text{se } \left(\frac{|x - x_i|}{\Delta(x_0)}\right) < 1 \\ 0 & \text{se } \left(\frac{|x - x_i|}{\Delta(x_0)}\right) \geq 1 \end{cases}, \quad [\text{A4.1}]$$

em que  $w(x)$  representa as ordenadas em função do eixo  $x$  e o peso atribuído a cada ponto;  $x$  é o valor predito associado à resposta a ser suavizada;  $x_i$  são os vizinhos mais próximos de  $x$ , conforme definido pela janela.

5. aplicar o estimador de mínimos quadrados ponderados às observações dentro da janela  $n(x_0)$ , de forma a obter uma estimativa  $\hat{y}$  de  $y$  no ponto  $x_0$ , sabendo-se que em *lowess*, a regressão é polinomial de 1º grau,  $\hat{y}_i = a + bx_i$ .

6. repetir as etapas 3, 4 e 5 para cada instante temporal no vetor  $x$ .

Observação A4.1: o parâmetro de suavização  $f$  (especificado por nós) determina o alisamento do ajuste decorrente da proporção de pontos a serem usados no gráfico, ou seja, determina a distância ao longo da abscissa de  $x$  para o valor predito mais distante, sendo que a distância máxima é igual a  $f^{1/p}$  vezes a distância máxima real para as  $p$  variáveis predictoras. Já vimos que valores de  $f \sim 1$  proporcionam mais suavização e valores de  $f < 1$  proporcionam menos suavização. Por exemplo,  $f = 0.667$ , indica que a janela é selecionada de tal forma que 66.7% dos dados são usados para a suavização em cada ponto  $x$ , tendo  $x_0$  como centro.

<sup>7</sup> Esta função de peso  $K$  é obtida em função da variável  $u$  (transformada), definida por:

$$u_i = \frac{x_i - x_0}{f_i},$$

pelo que

$$K(u) = K\left(\frac{x_i - x_0}{f_i}\right).$$

<sup>8</sup> As ponderações pela função tricúbica têm as seguintes características:

- o ponto a ser suavizado (i.e, ponto de interesse) tem o maior peso e a maior influencia no ajuste.
- os dados na proximidade do ponto de interesse têm maior peso.
- os dados dentro da janela mais afastados do ponto de interesse têm menor peso.
- os pontos fora da janela têm peso zero e não influenciam o ajuste.

As Figuras A4.1 até A4.8 apresentam em cada amostra a curva *lowess* segundo diferentes valores de  $f=(0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1)$  e 3 iterações de robustez. De notar que no caso de zero iterações, tal especificaria que as regressões locais não seriam reajustadas para reduzir os casos periféricos

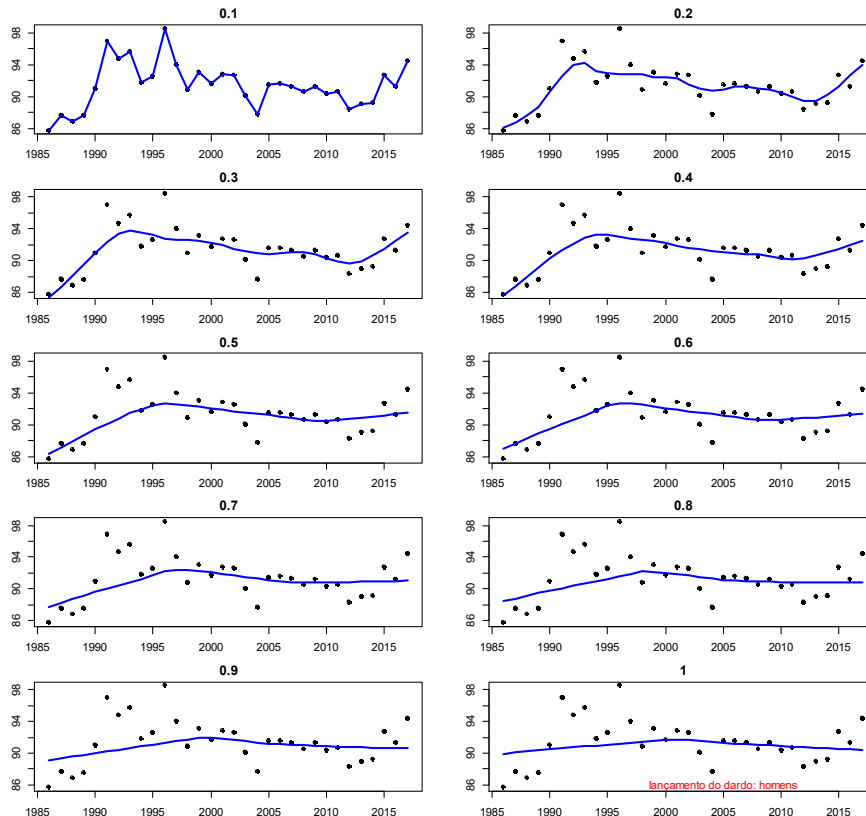


Figura A4.1 – Curva *lowess* no **lançamento do dardo masculino** (1986-2017), com valores de parâmetro de suavização,  $f=(0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1)$ .

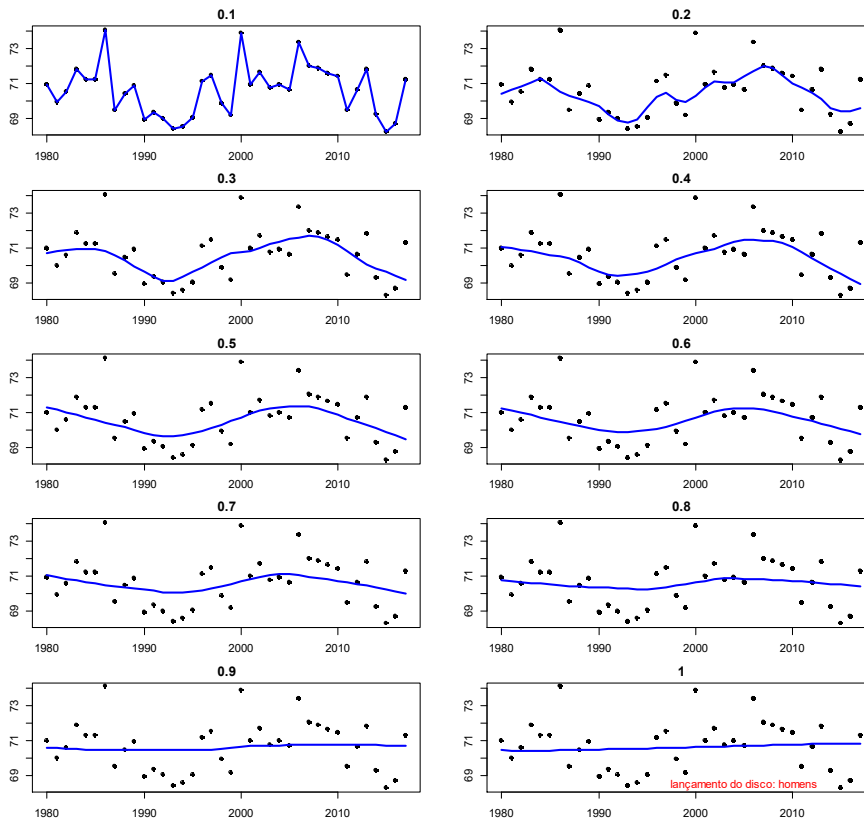


Figura A4.2 – Curva *lowess* no **lançamento do disco masculino** (1980-2017), com valores de parâmetro de suavização,  $f=(0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1)$ .

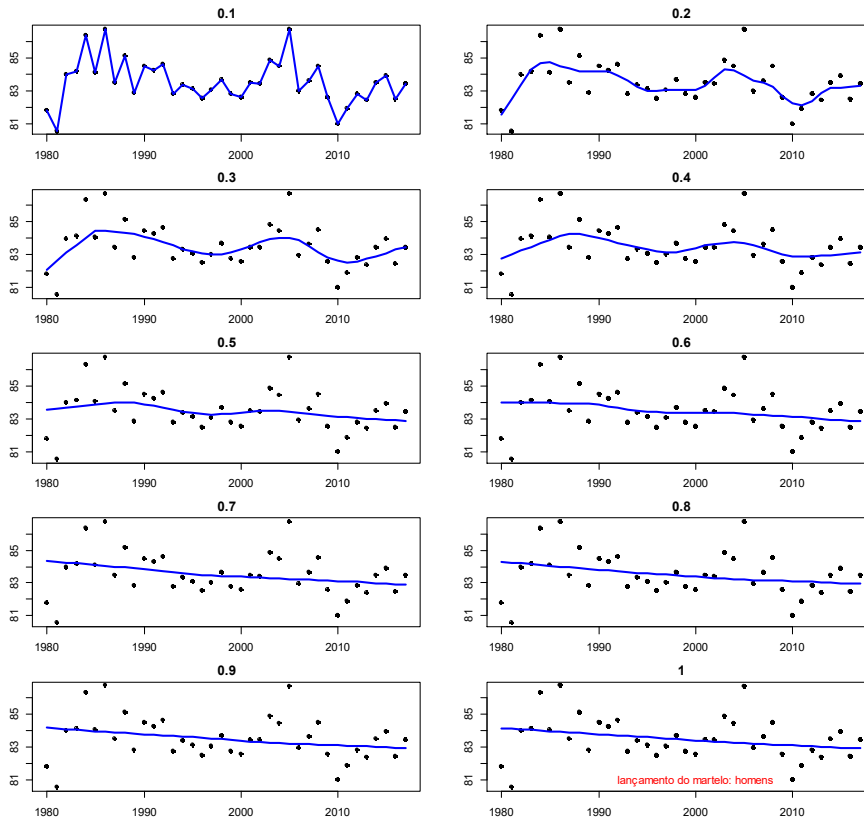


Figura A4.3 – Curva *lowess* no **lançamento do martelo masculino** (1980-2017), com valores de parâmetro de suavização,  $f=(0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1)$ .

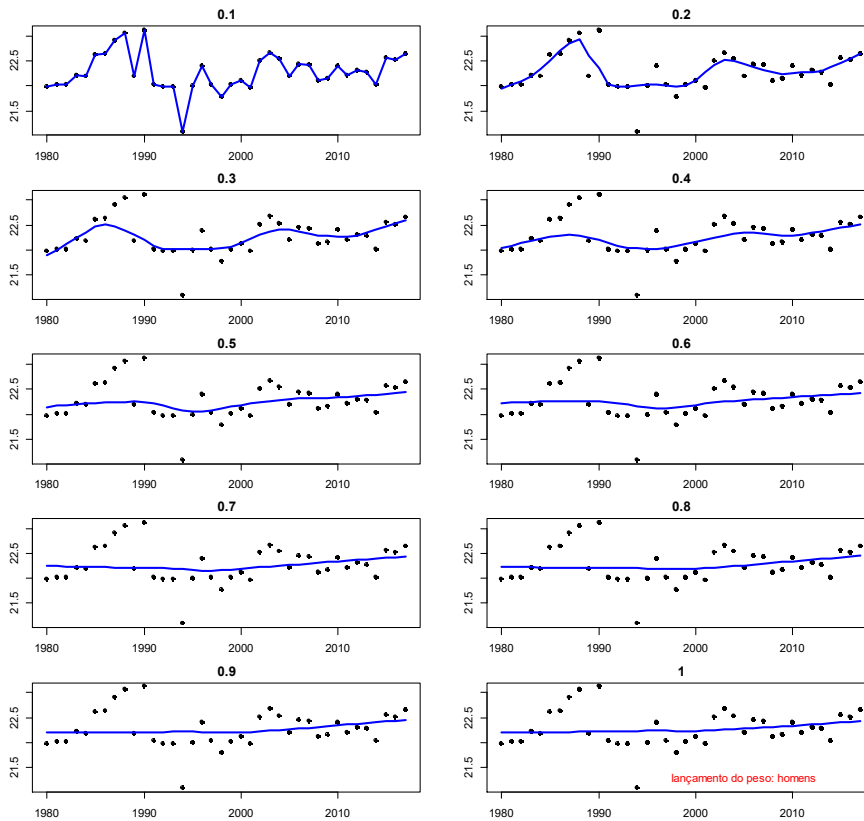


Figura A4.4 – Curva *lowess* no **lançamento do peso masculino** (1980-2017), com valores de parâmetro de suavização,  $f=(0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1)$ .

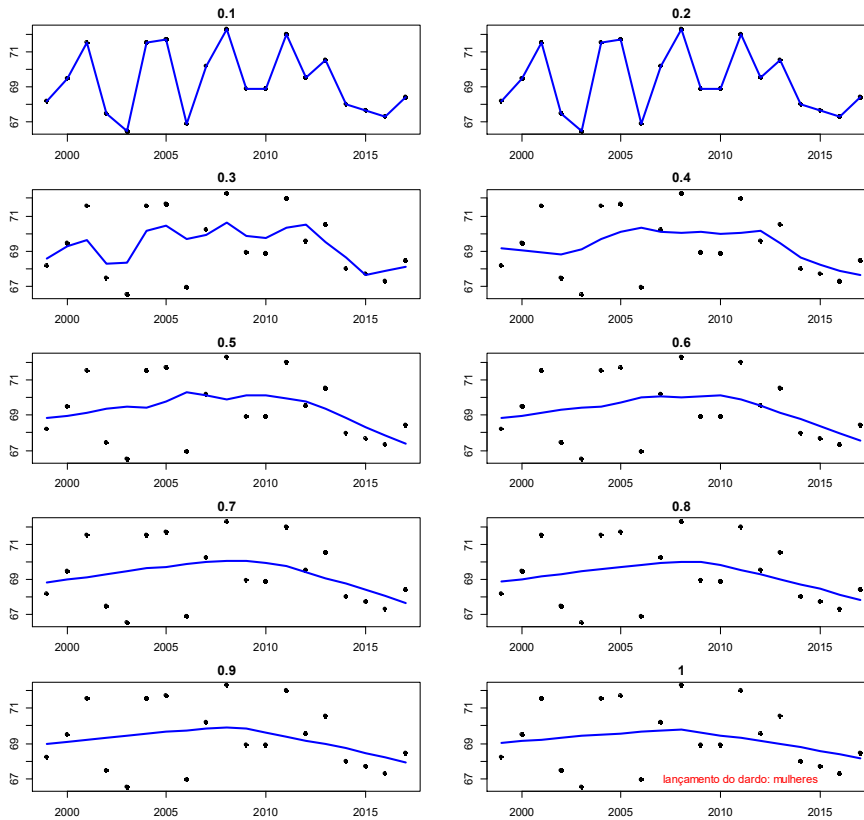


Figura A4.5 – Curva *lowess* no **lançamento do dardo feminino** (1999-2017), com valores de parâmetro de suavização,  $f=(0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1)$ .

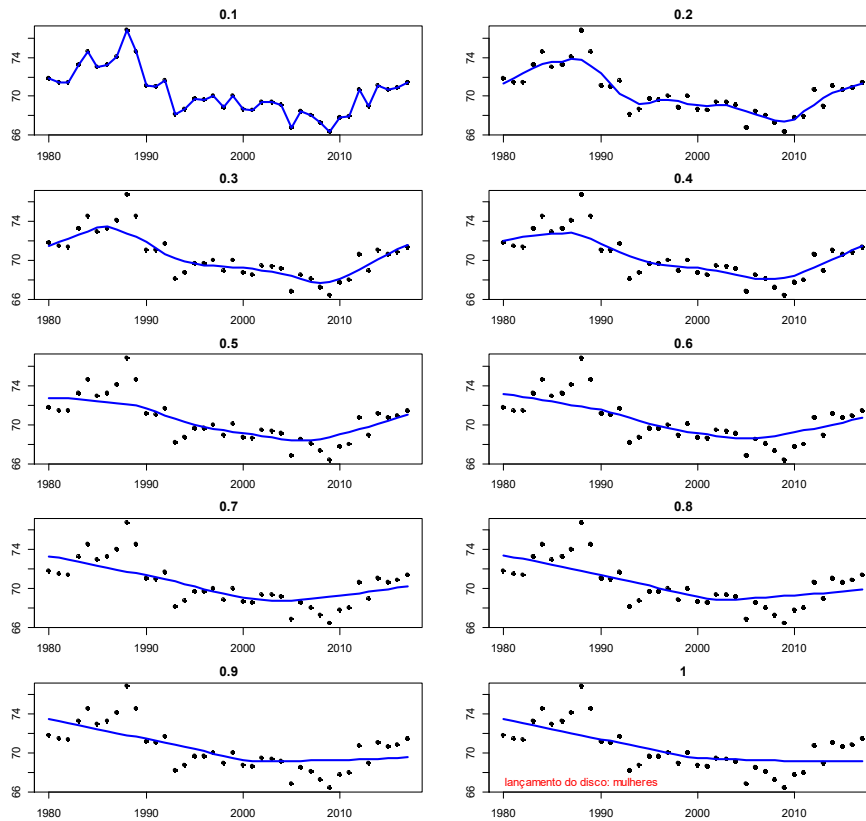


Figura A4.6 – Curva *lowess* no lançamento do disco feminino (1980-2017), com valores de parâmetro de suavização,  $f=(0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1)$ .

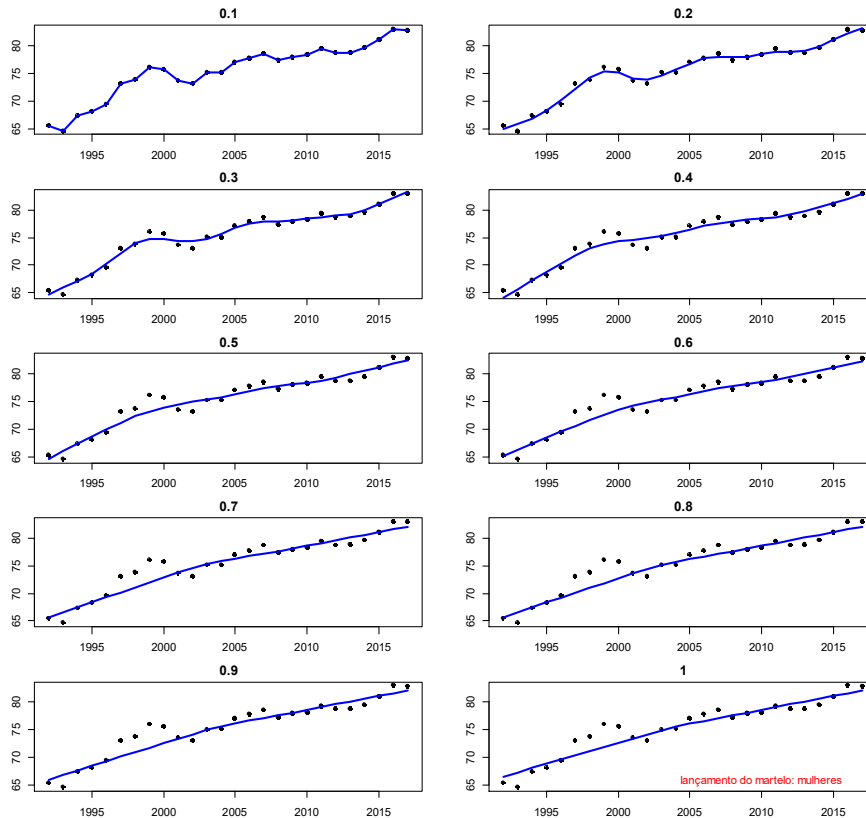


Figura A4.7 – Curva *lowess* no lançamento do martelo feminino (1992-2017), com valores de parâmetro de suavização,  $f=(0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1)$ .

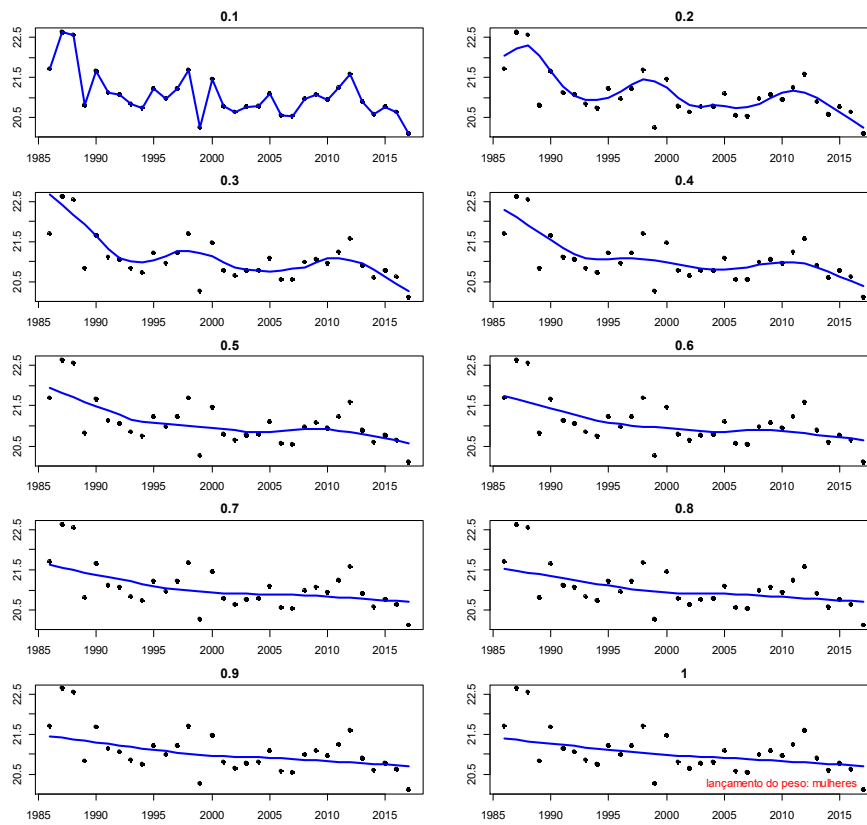


Figura A4.8 – Curva *lowess* no lançamento do peso feminino (1986-2017), com valores de parâmetro de suavização,  $f=(0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1)$ .

**ANEXO 4.1.1. SIMULAÇÃO:** avaliar o impacto na curva de suavização com a modificação do valor do parâmetro de forma, mantendo constante os parâmetros de localização, escala e suavização.

R Package: eva (Bader, 2018)

Distribuição:  $GEV_r$ , com  $r=1$  e  $n=100$  números pseudo-aleatórios.

Parâmetros extremais:  $\lambda=1$ ,  $\delta=1$ ,  $\gamma=(-0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3)$ .

Parâmetro de suavização:  $f=2/3$ .

Iterações:  $I=(0,1,2,3)$ .

Observação A4.2: usando  $I>3$ , a estimativa da curva *lowess* coincide com  $I=3$ .

Com base nas Figuras A4.9 e A4.10, não ocorrem modificações da curva de suavização quando se modificam o número de iterações e o valor do parâmetro de forma, especialmente quando  $\gamma<0$ .

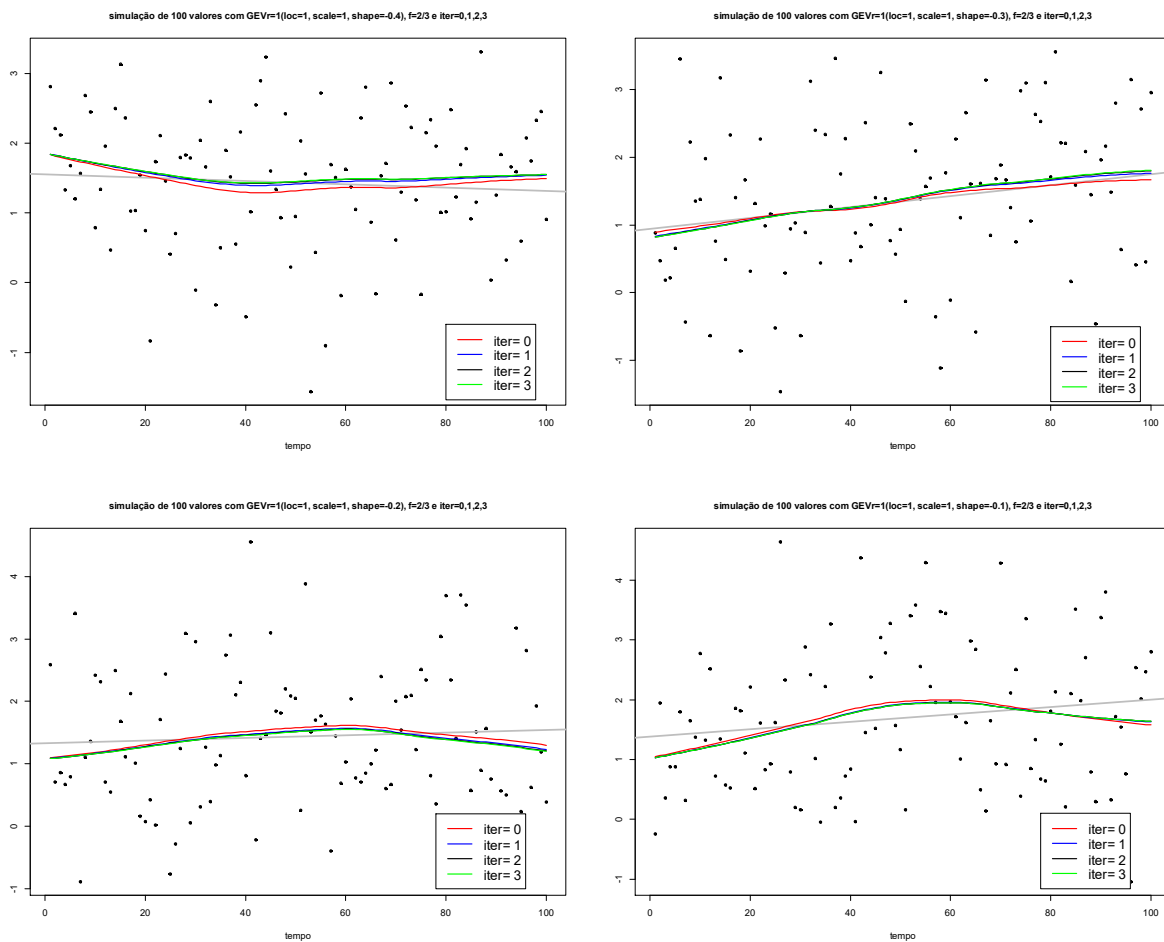


Figura A4.9 – Simulação de 100 números pseudo-aleatórios para a distribuição  $GEV_r$ , com  $n=100$ ,  $r=1$ ,  $\lambda=1$ ,  $\delta=1$ ,  $\gamma=(-0.4, -0.3, -0.2, -0.1)$ ,  $f=2/3$  e  $I=(0,1,2,3)$ .

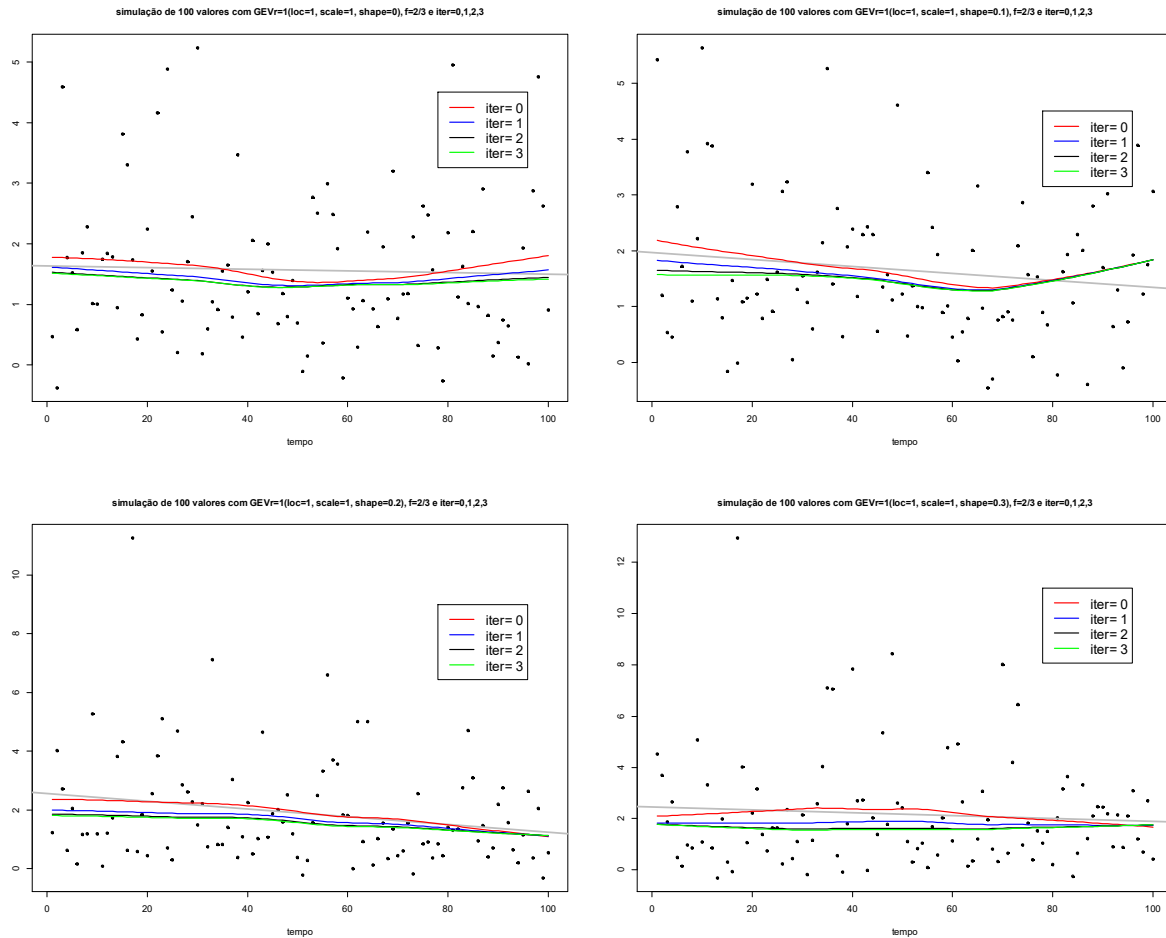


Figura A4.10 – Simulação de 100 números pseudo-aleatórios para a distribuição  $GEVr$  com  $n=100$ ,  $r=1$ ,  $\lambda=1$ ,  $\delta=1$ ,  $\gamma=(0, 0.1, 0.2, 0.3)$ ,  $f=2/3$  e  $I=(0,1,2,3)$ .

## REFERÊNCIAS

- Bader, B. & Yan, J. (2018). *eva: Extreme Value Analysis with Goodness-of-Fit Testing*. R package version 0.2.5.
- Cleveland, W.S. (1979). Robust locally weighted fitting and smoothing scatterplots. *Journal of the American Statistical Association* 74 (368): 829-836.
- Cleveland, W.S. (1981). Lowess: a program for smoothing scatterplots by robust locally weighted fitting. *The American Statistician* 35 (81): 54.
- Cleveland, W.S. (1994). Coplots, nonparametric regression, and conditionally parametric fits. *Multivariate Analysis and Its Applications, IMS Lecture Notes - Monograph Series (1994) Volume 24*, pp.21-36.
- Cleveland, W.S. & Devlin, S.J. (1988). Locally Weighted Regression: An Approach to Regression Analysis by Local Fitting. *Journal of the American Statistical Association*, 83 (403): 596-610.
- Cleveland, W.S. & Loader, C. (1996). *Smoothing by Local Regression: Principles and Methods*. Physica-Verlag, p.10-49.



**ANEXO 4.2. Método das  $r$ -maiores observações anuais: diagrama de extremos e quartis dos 10 níveis  $r$  das amostras aprovadas nos testes de aleatoriedade e tendência**

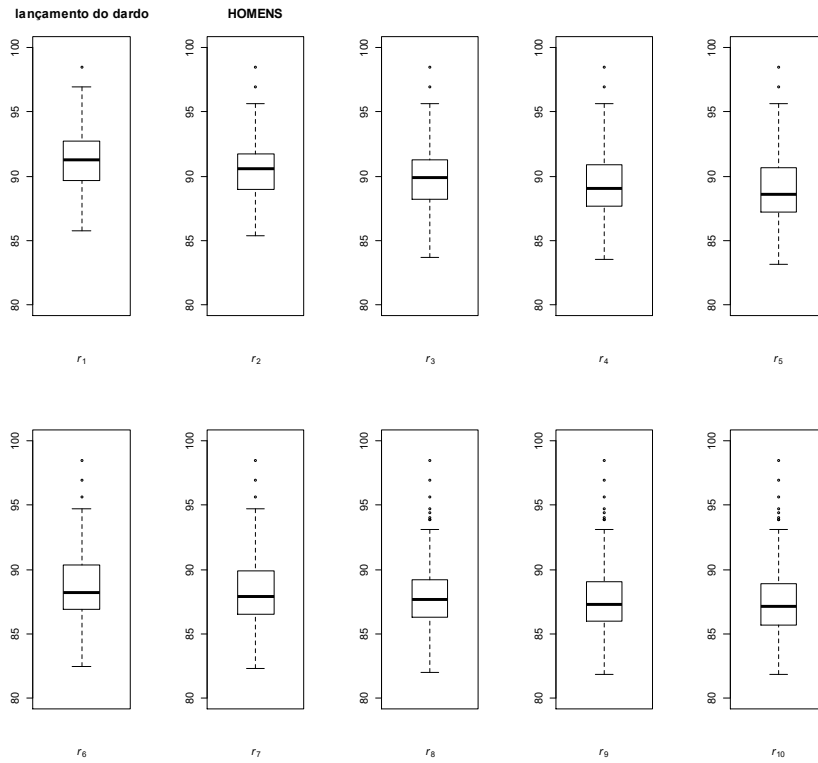


Figura A4.11 – Diagrama de extremos e quartis das  $r$ -maiores observações anuais no lançamento do dardo masculino.

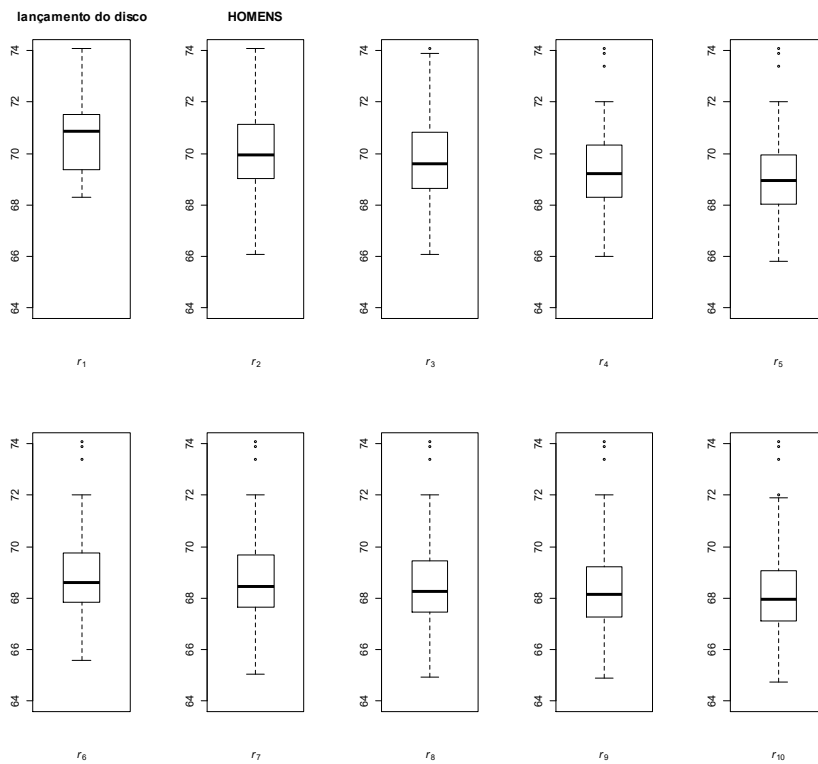


Figura A4.12 – Diagrama de extremos e quartis das  $r$ -maiores observações anuais no lançamento do disco masculino.

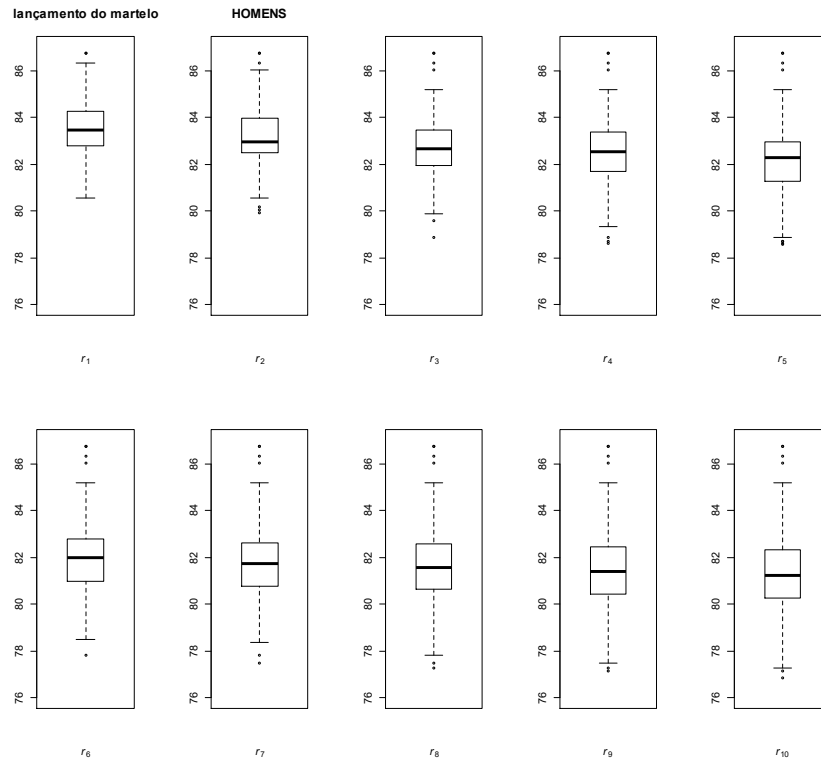


Figura A4.13 – Diagrama de extremos e quartis das  $r$ -maiores observações anuais no lançamento do martelo masculino.

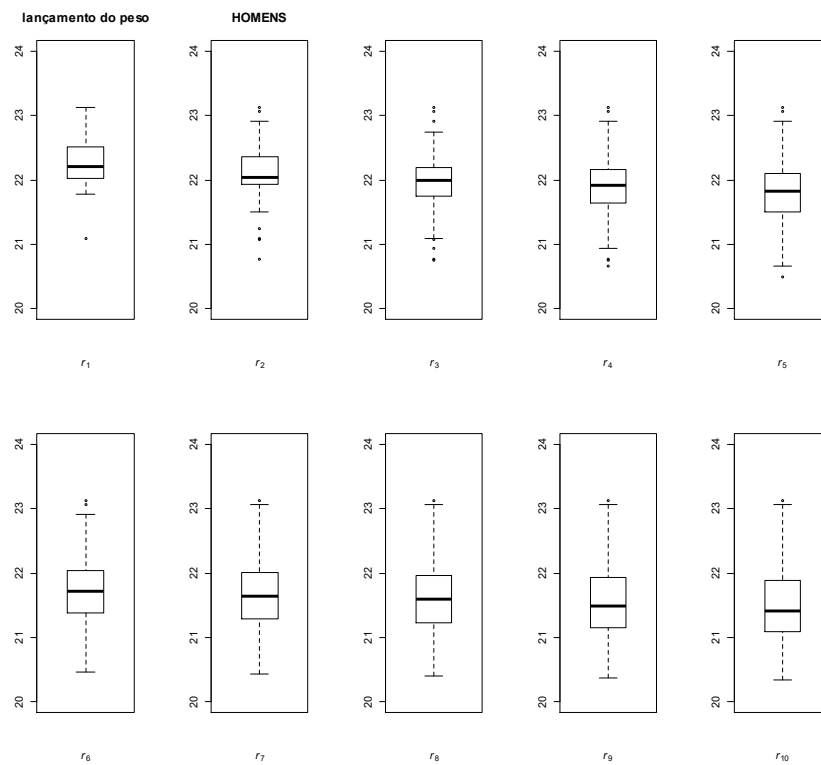


Figura A4.14 – Diagrama de extremos e quartis das  $r$ -maiores observações anuais no lançamento do peso masculino.

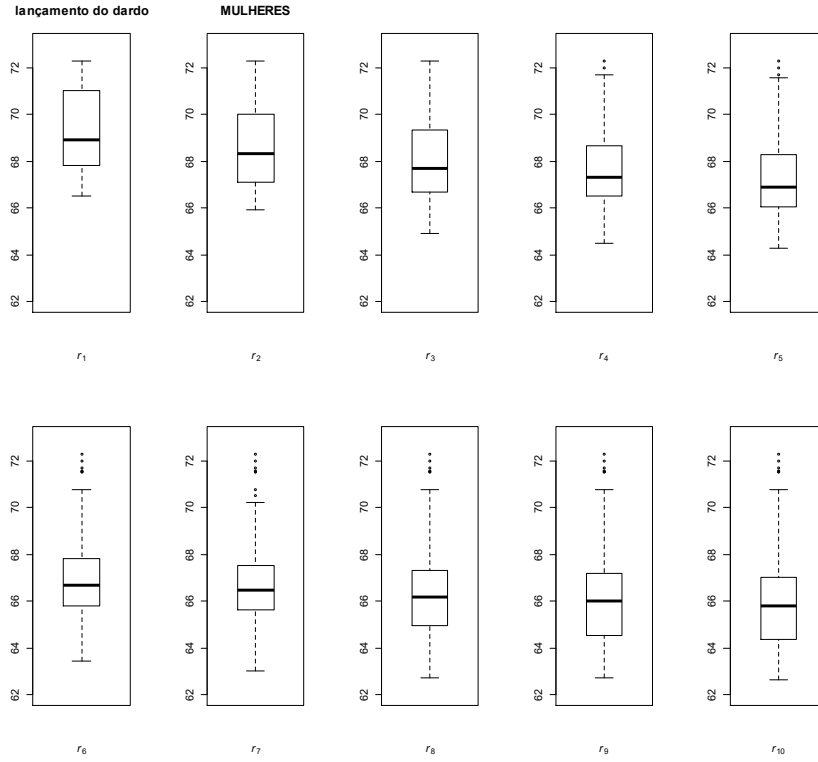


Figura A4.15 – Diagrama de extremos e quartis das  $r$ -maiores observações anuais no lançamento do dardo feminino.

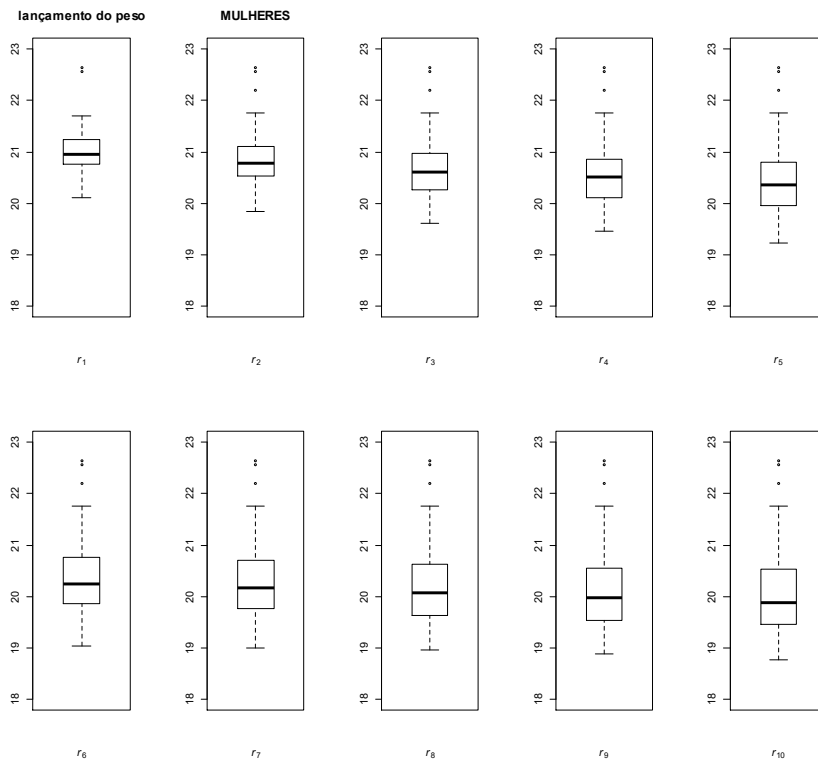
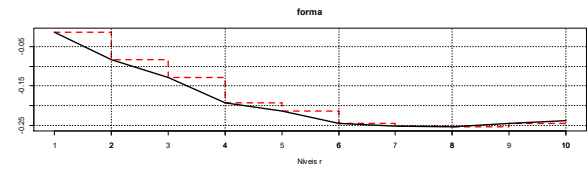
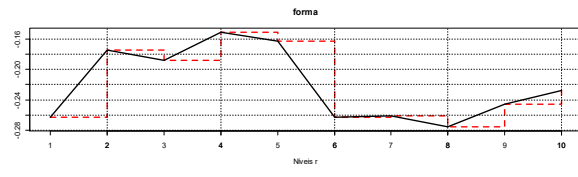
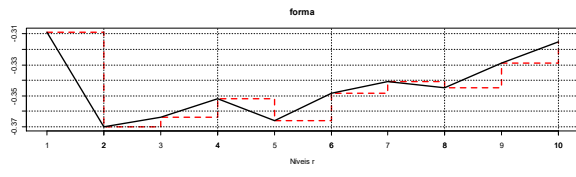
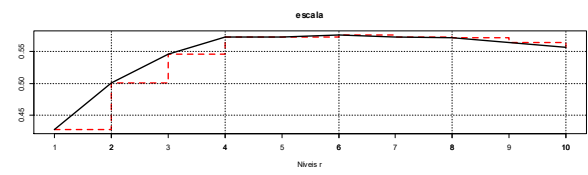
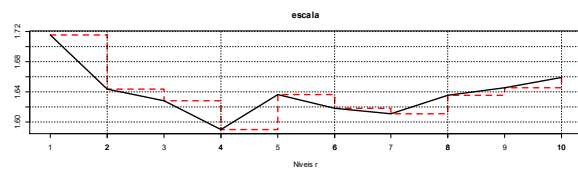
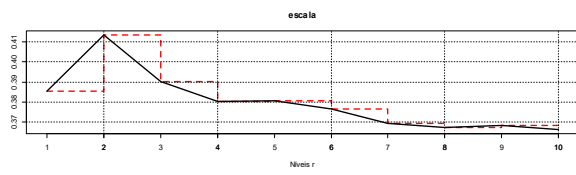
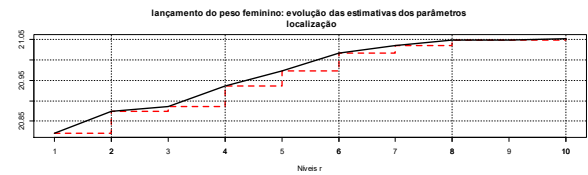
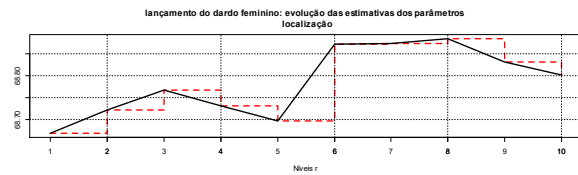
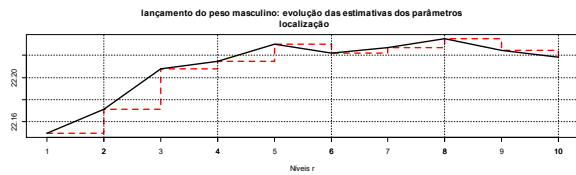
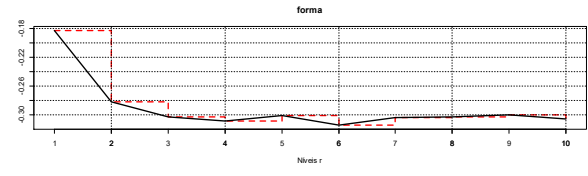
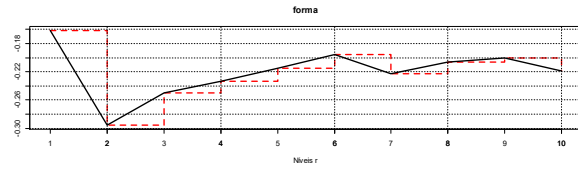
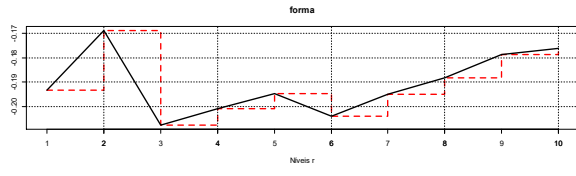
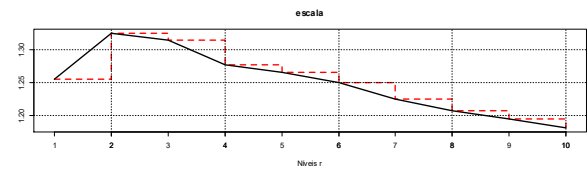
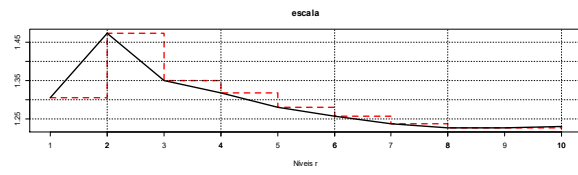
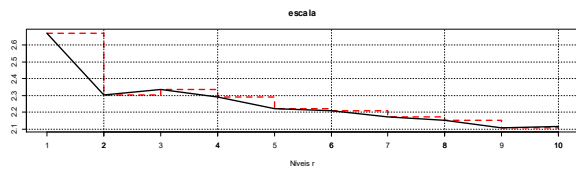
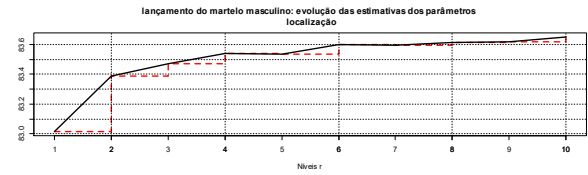
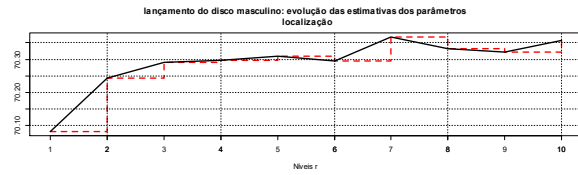
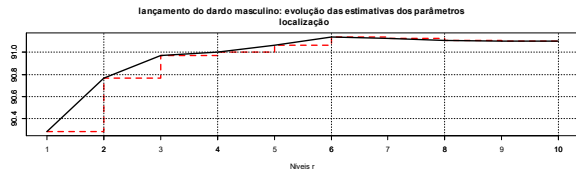


Figura A4.16 – Diagrama de extremos e quartis das  $r$ -maiores observações anuais no lançamento do peso feminino.

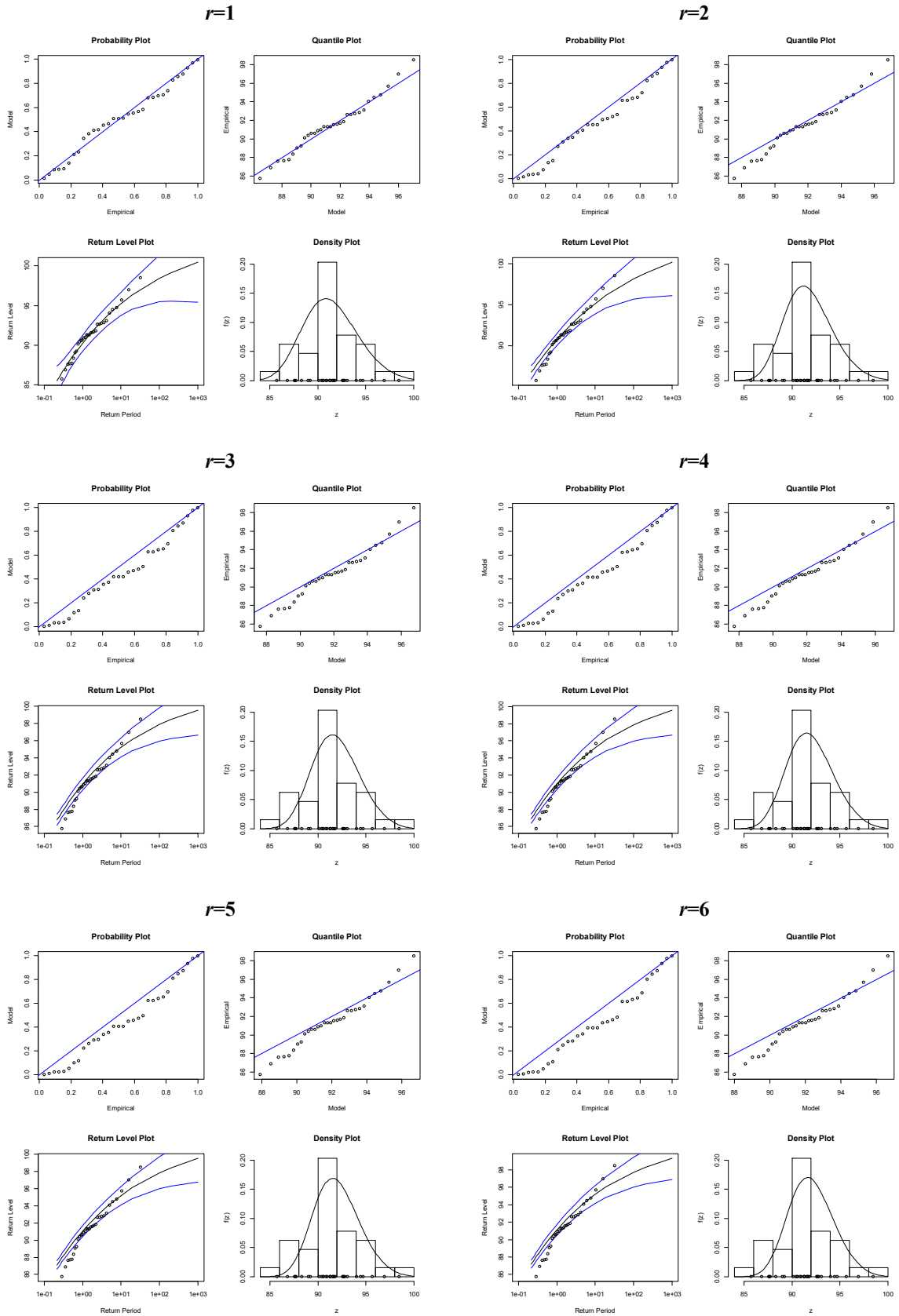
**ANEXO 4.3. Método das  $r$ -maiores observações anuais: estabilidade das estimativas pontuais dos parâmetros extremais  $GEVr(\lambda, \delta, \gamma)$ , nos  $r=10$  níveis, nas amostras de lançamentos do dardo, disco, martelo e peso masculino, e dardo e peso feminino**



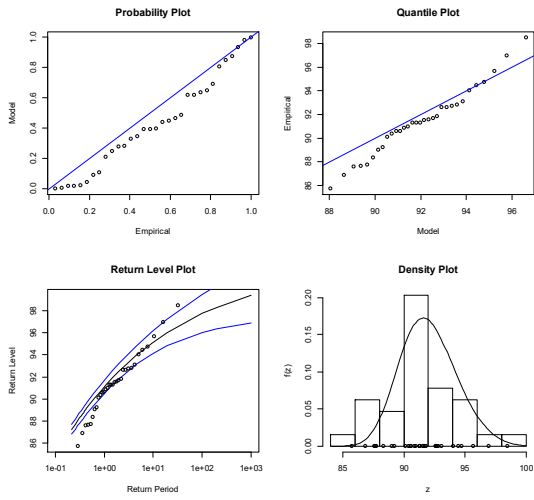


## ANEXO 4.5. Método das $r$ -maiores observações anuais: ajustamento do modelo para o máximo em função do nível $r^{(k)}$ selecionado

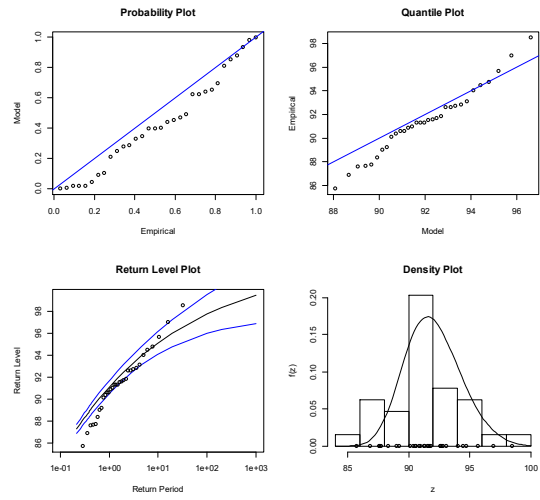
### Anexo 4.5.1. Lançamento do Dardo: HOMENS



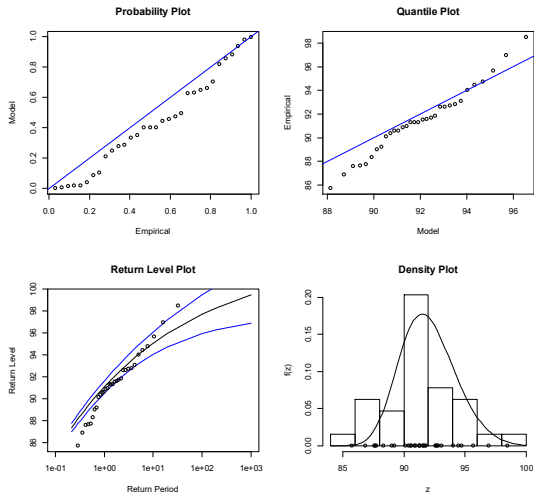
$r=7$



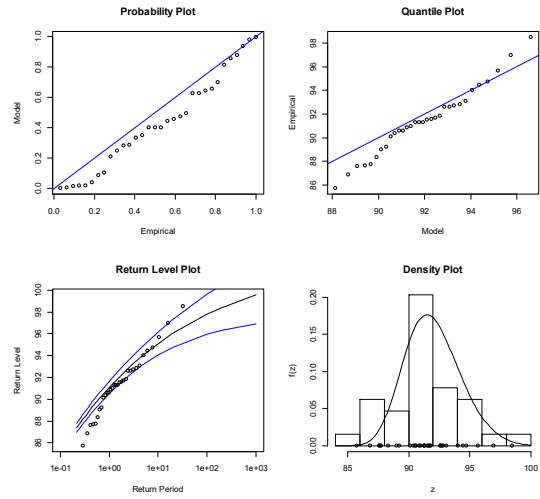
$r=8$



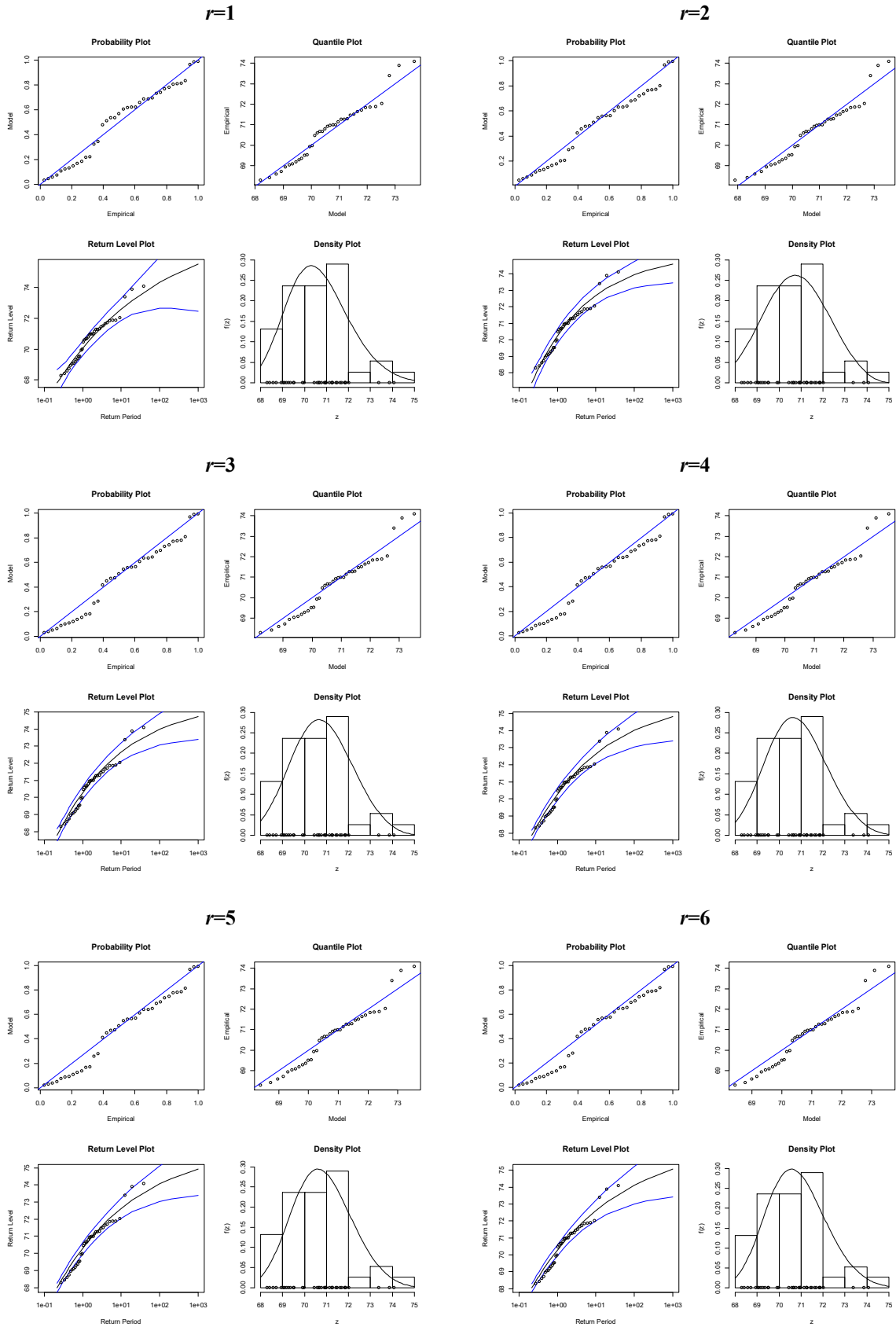
$r=9$



$r=10$

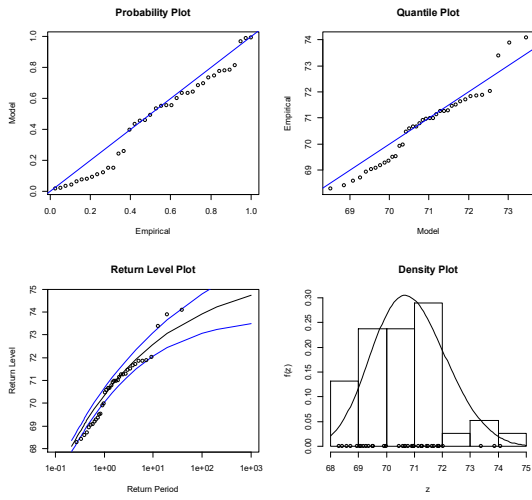


**Anexo 4.5.2. Lançamento do Disco: HOMENS**

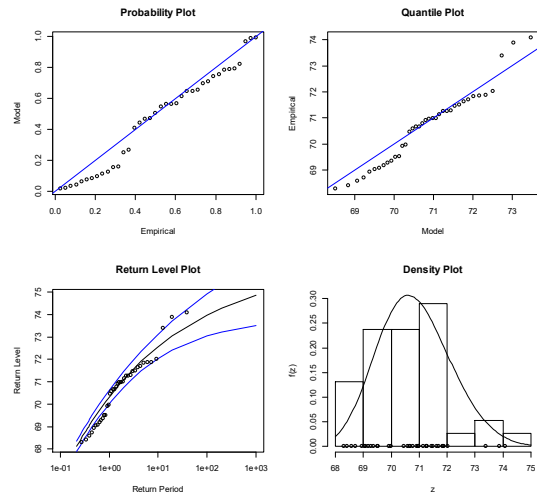




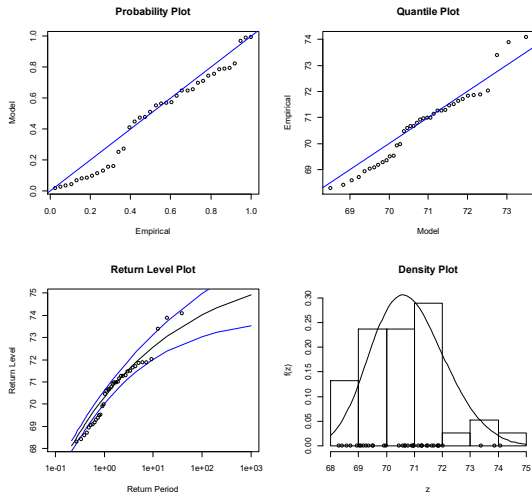
$r=7$



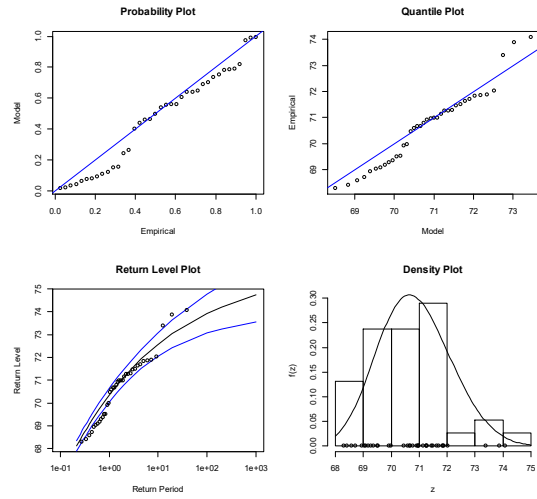
$r=8$



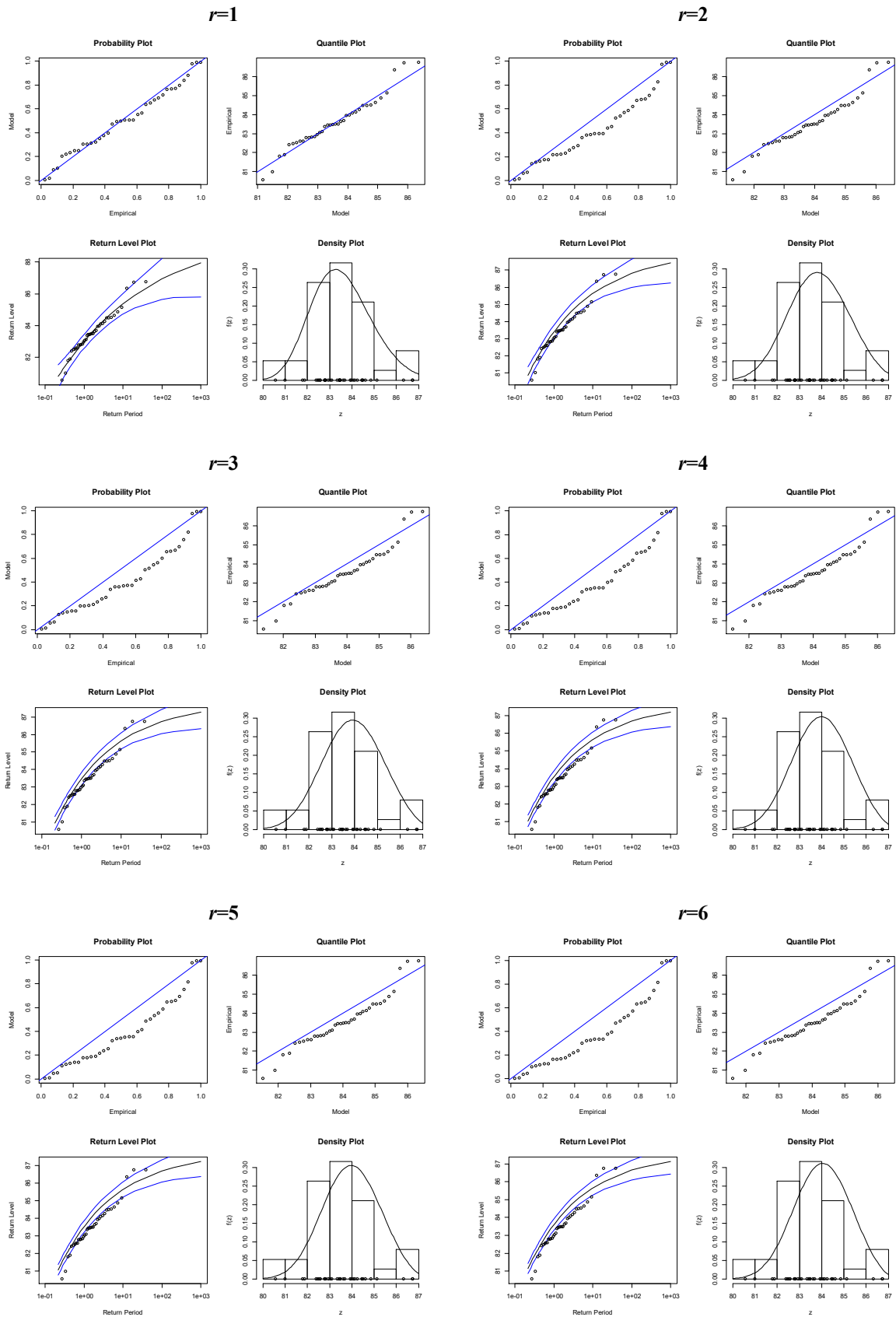
$r=9$



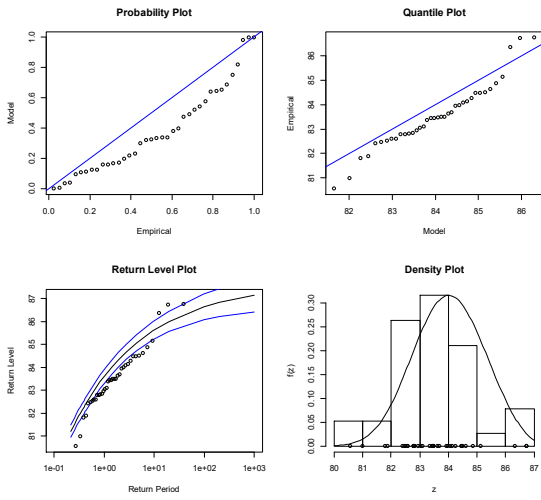
$r=10$



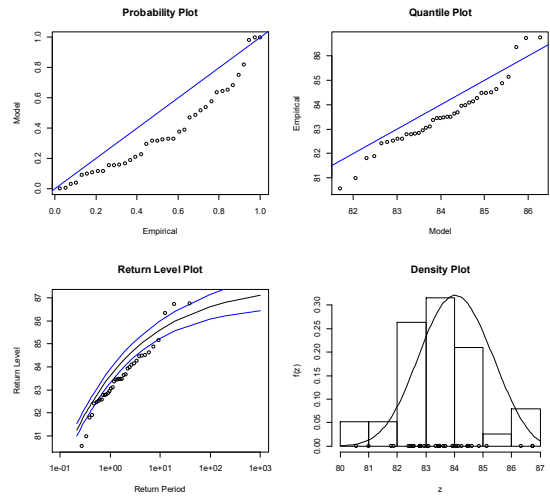
### Anexo 4.5.3. Lançamento do Martelo: HOMENS



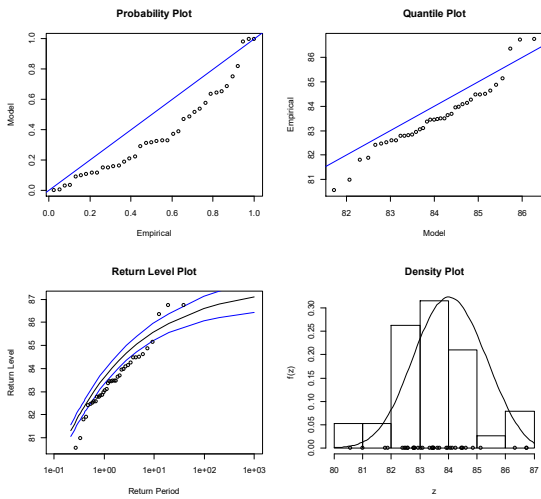
$r=7$



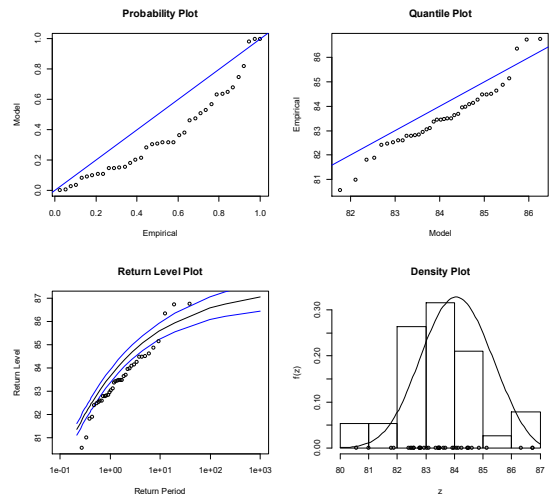
$r=8$



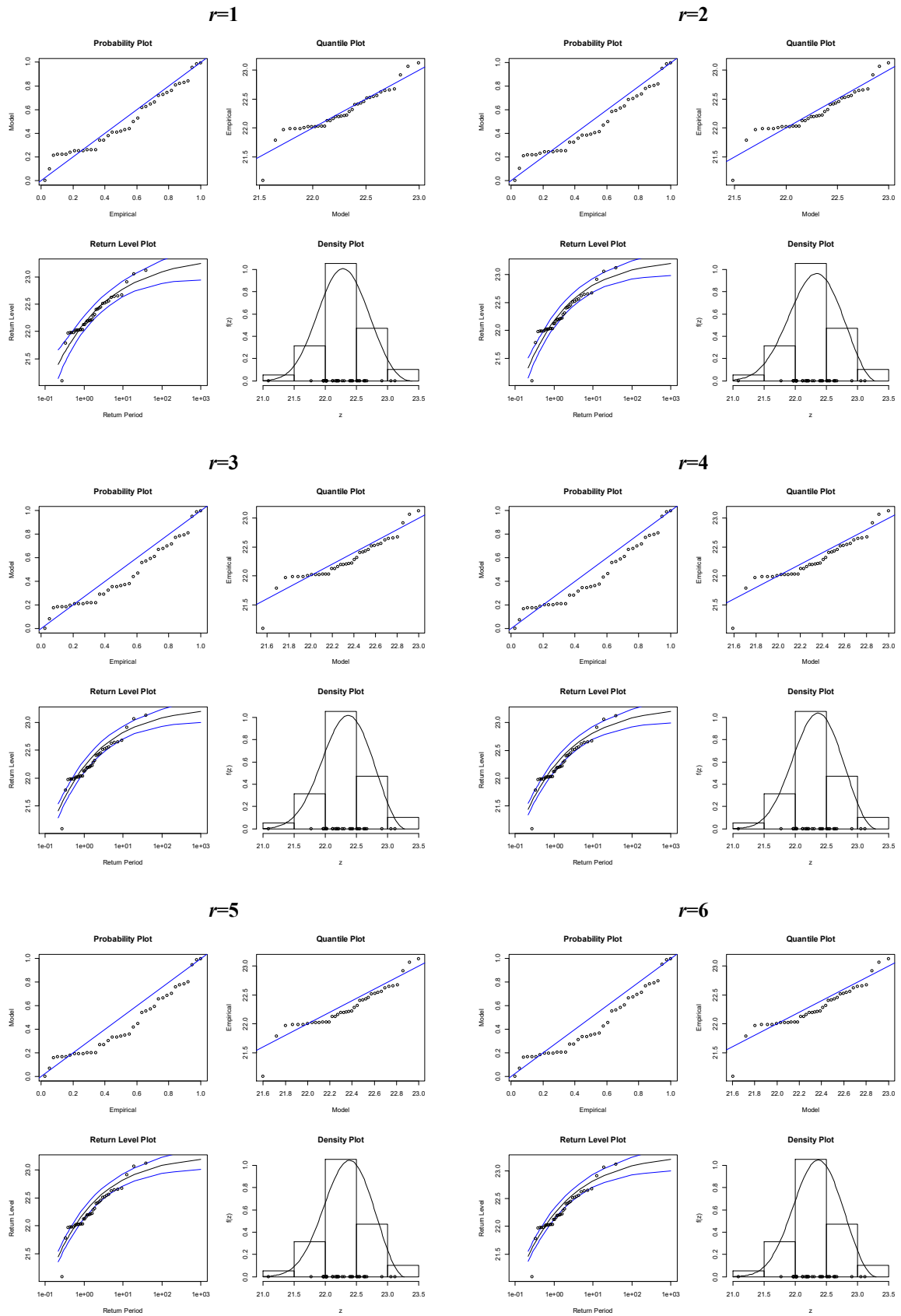
$r=9$



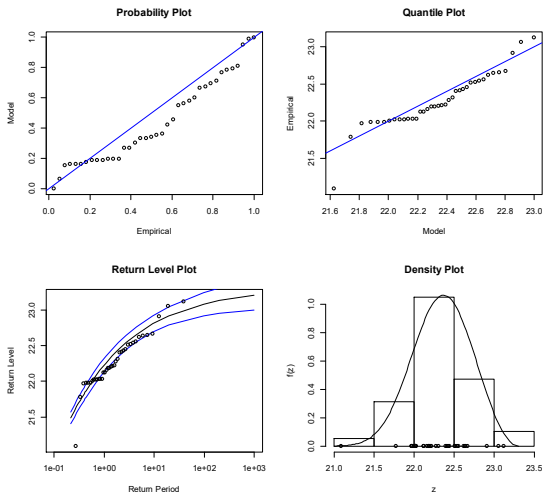
$r=10$



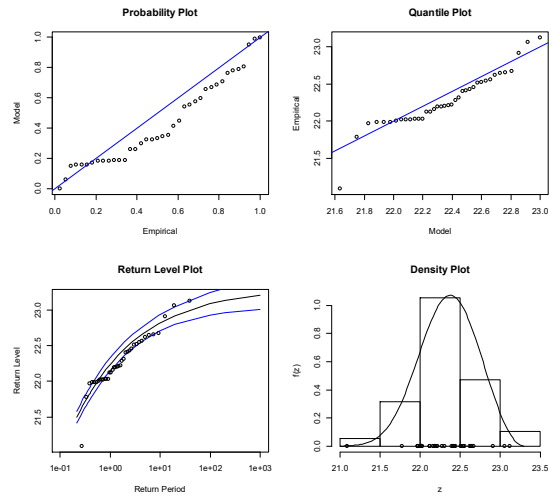
### Anexo 4.5.4. Lançamento do Peso: HOMENS



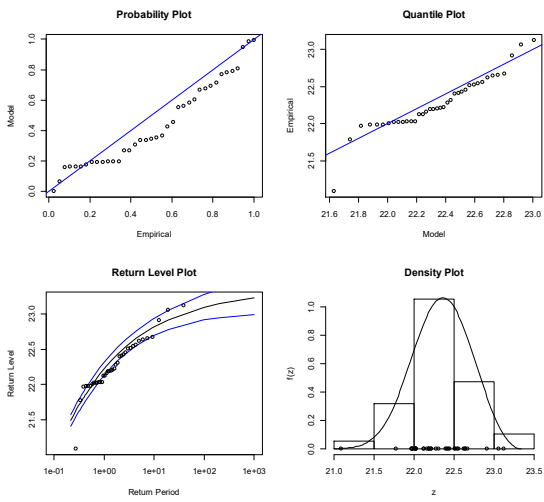
$r=7$



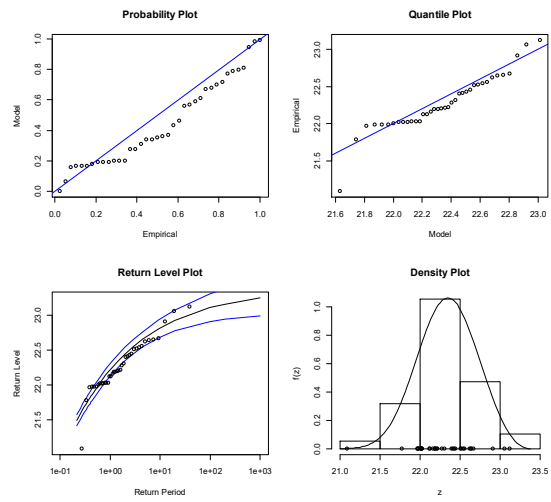
$r=8$



$r=9$

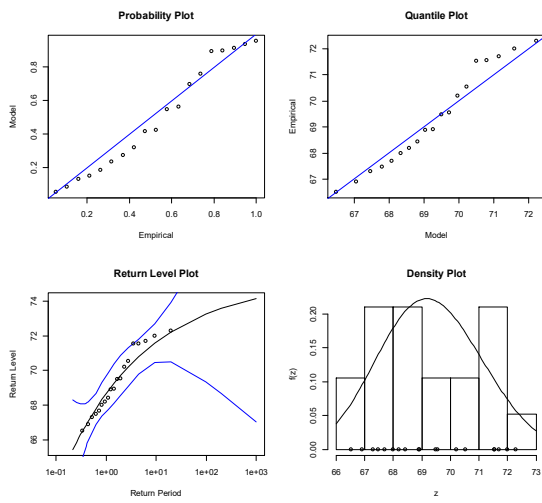


$r=10$

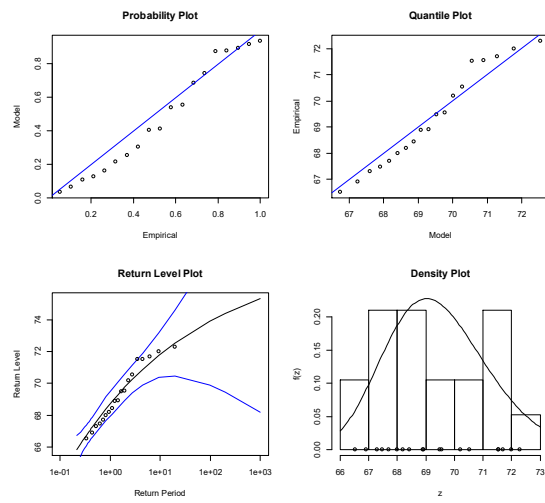


### Anexo 4.5.5. Lançamento do Dardo: MULHERES

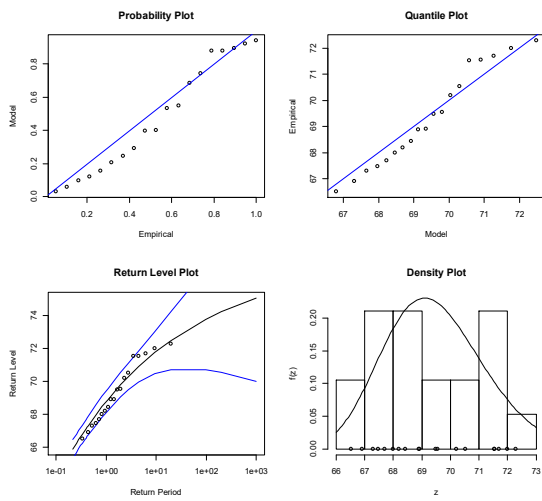
**r=1**



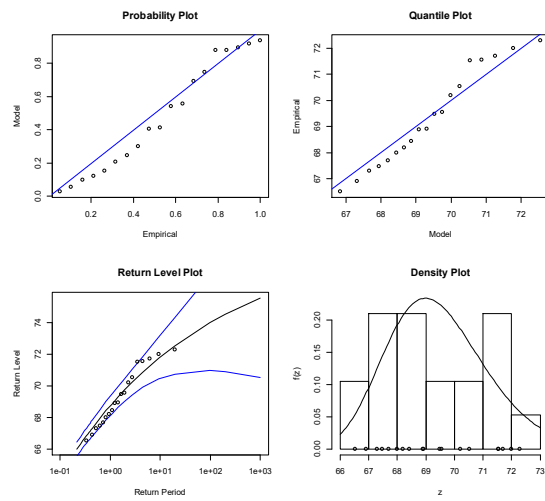
**r=2**



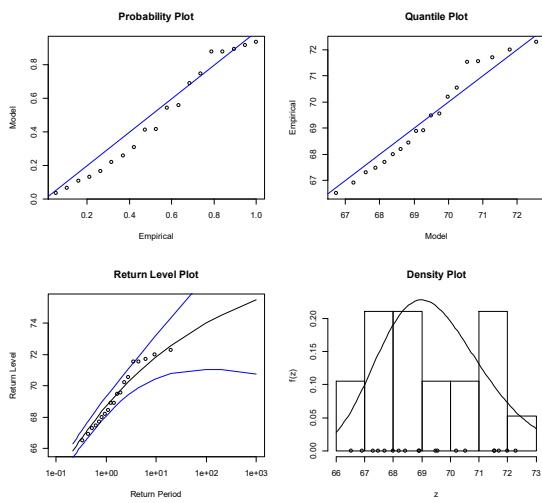
**r=3**



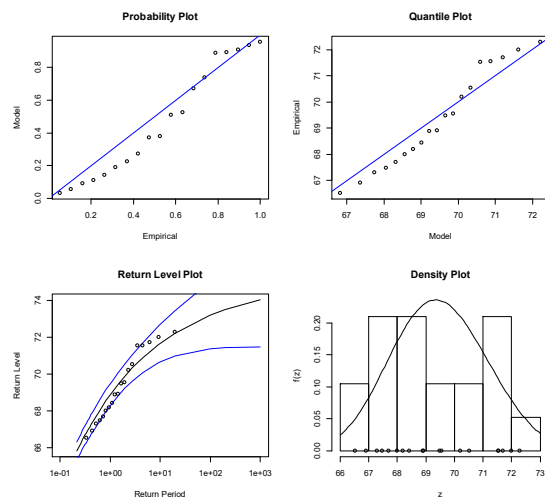
**r=4**



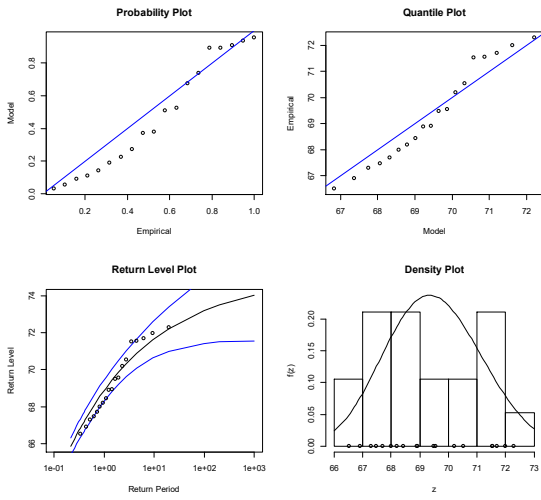
**r=5**



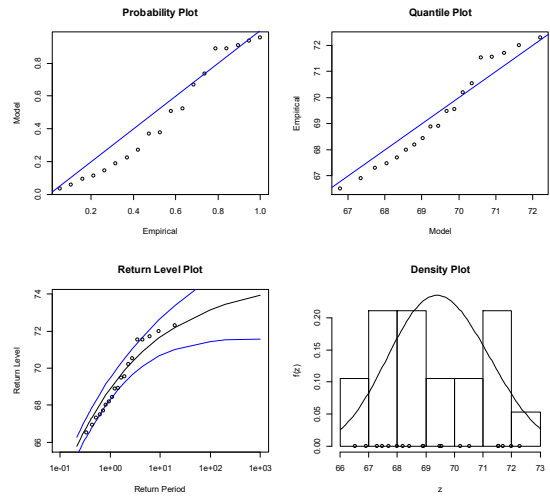
**r=6**



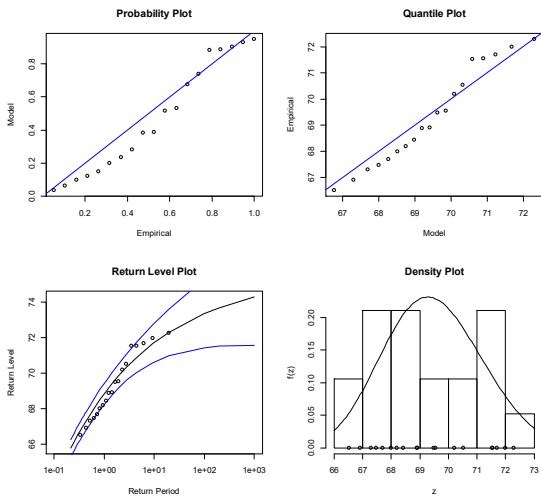
$r=7$



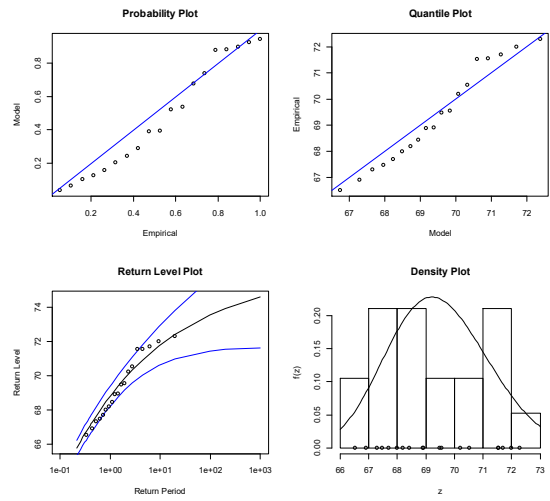
$r=8$



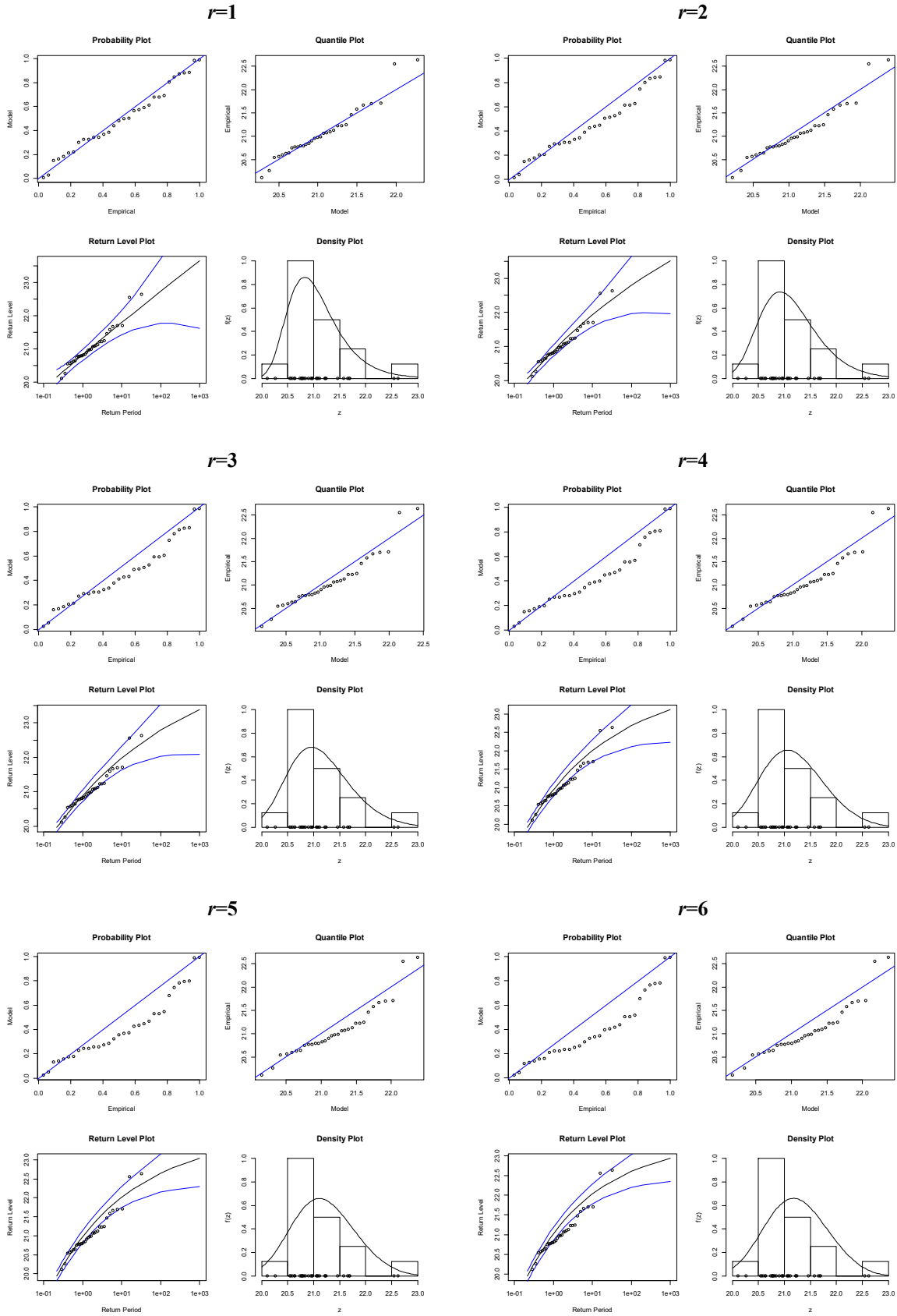
$r=9$



$r=10$

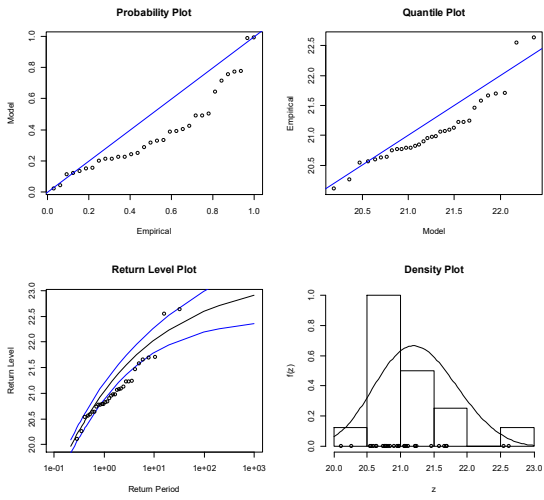


### Anexo 4.5.6. Lançamento do Peso: MULHERES

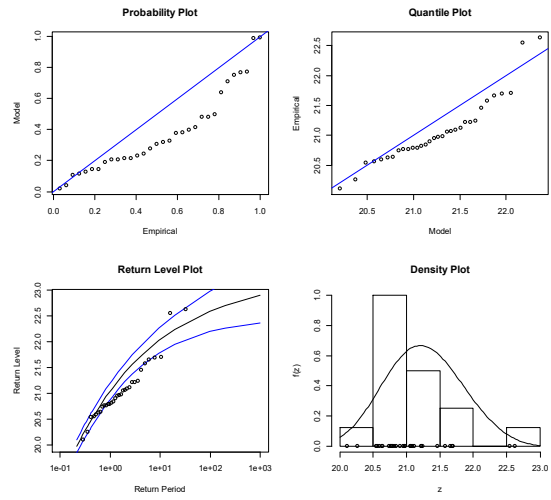




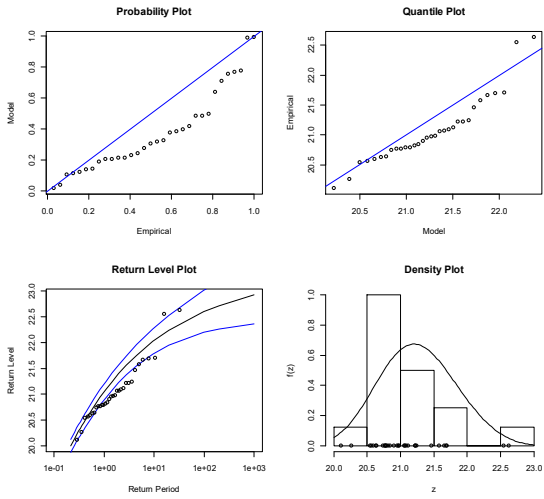
$r=7$



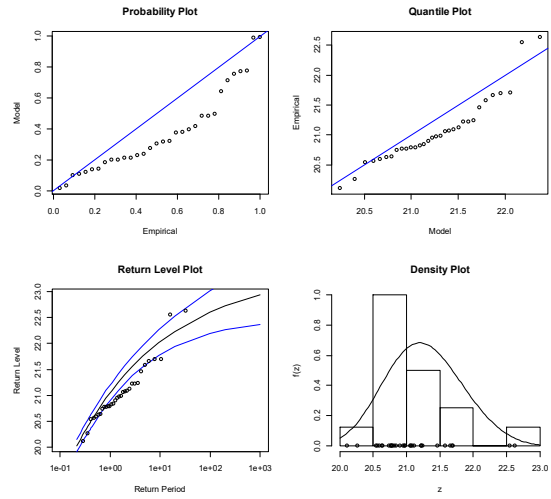
$r=8$



$r=9$



$r=10$



**ANEXO 4.6. Estimativas pontuais dos níveis de retorno a  $t$ -anos**

**Anexo 4.6.1. Estimativa pontual dos níveis de retorno a  $t$ -anos nos lançamentos do dardo, disco, martelo e peso masculino e nos lançamentos do dardo e peso feminino, respetivamente para os modelos  $GEV_{r=2}$ ,  $GEV_{r=2}$ ,  $GEV_{r=3}$ ,  $GEV_{r=3}$ ,  $GEV_{r=4}$  e  $GEV_{r=2}$ .**

$t$	HOMENS				MULHERES	
	Lançamento do dardo	Lançamento do disco	Lançamento do martelo	Lançamento do peso	Lançamento do dardo	Lançamento do peso
2	91.583	70.755	83.927	22.342	69.299	21.055
3	92.693	71.410	84.510	22.508	70.074	21.310
4	93.352	71.778	84.836	22.599	70.537	21.467
5	93.816	72.028	85.057	22.659	70.866	21.581
6	94.171	72.213	85.221	22.703	71.118	21.670
7	94.457	72.359	85.349	22.737	71.321	21.742
8	94.695	72.478	85.454	22.765	71.491	21.803
9	94.899	72.578	85.542	22.788	71.637	21.856
10	95.076	72.664	85.618	22.808	71.764	21.903
11	95.232	72.739	85.683	22.825	71.877	21.944
12	95.372	72.805	85.741	22.839	71.978	21.981
13	95.499	72.864	85.793	22.853	72.069	22.015
14	95.614	72.917	85.840	22.864	72.152	22.047
15	95.719	72.965	85.882	22.875	72.228	22.075
16	95.817	73.009	85.921	22.885	72.299	22.102
17	95.907	73.050	85.957	22.894	72.364	22.127
18	95.991	73.087	85.989	22.902	72.425	22.150
19	96.070	73.122	86.020	22.910	72.482	22.172
20	96.143	73.155	86.048	22.917	72.536	22.193
21	96.213	73.185	86.075	22.923	72.586	22.212
22	96.278	73.214	86.100	22.929	72.634	22.231
23	96.341	73.241	86.123	22.935	72.680	22.248
24	96.400	73.266	86.146	22.941	72.723	22.265
25	96.456	73.290	86.167	22.946	72.764	22.281
26	96.509	73.313	86.187	22.950	72.803	22.297
27	96.560	73.334	86.205	22.955	72.840	22.311
28	96.609	73.355	86.223	22.959	72.876	22.325
29	96.656	73.374	86.241	22.964	72.910	22.339
30	96.701	73.393	86.257	22.968	72.943	22.352
31	96.744	73.411	86.273	22.971	72.975	22.365
32	96.786	73.428	86.288	22.975	73.005	22.377
33	96.826	73.445	86.302	22.978	73.035	22.389
34	96.865	73.461	86.316	22.982	73.063	22.400
35	96.902	73.476	86.329	22.985	73.091	22.411
36	96.938	73.491	86.342	22.988	73.117	22.421
37	96.973	73.505	86.354	22.991	73.143	22.432
38	97.007	73.519	86.366	22.994	73.168	22.442
39	97.040	73.532	86.378	22.996	73.192	22.452
40	97.072	73.545	86.389	22.999	73.215	22.461
41	97.102	73.557	86.400	23.002	73.238	22.470
42	97.132	73.569	86.410	23.004	73.260	22.479
43	97.162	73.581	86.420	23.007	73.282	22.488
44	97.190	73.592	86.430	23.009	73.303	22.496
45	97.218	73.603	86.440	23.011	73.323	22.505
46	97.245	73.614	86.449	23.013	73.343	22.513
47	97.271	73.624	86.458	23.015	73.362	22.521
48	97.296	73.634	86.467	23.017	73.381	22.529
49	97.321	73.644	86.475	23.019	73.400	22.536
50	97.346	73.653	86.483	23.021	73.418	22.544

<i>t</i>	HOMENS				MULHERES	
	Lançamento do dardo	Lançamento do disco	Lançamento do martelo	Lançamento do peso	Lançamento do dardo	Lançamento do peso
51	97.369	73.662	86.491	23.023	73.435	22.551
52	97.393	73.671	86.499	23.025	73.452	22.558
53	97.415	73.680	86.507	23.027	73.469	22.565
54	97.438	73.689	86.514	23.029	73.486	22.572
55	97.459	73.697	86.522	23.030	73.502	22.578
56	97.481	73.705	86.529	23.032	73.518	22.585
57	97.502	73.713	86.536	23.034	73.533	22.591
58	97.522	73.721	86.543	23.035	73.548	22.597
59	97.542	73.729	86.549	23.037	73.563	22.604
60	97.562	73.736	86.556	23.038	73.577	22.610
61	97.581	73.744	86.562	23.040	73.592	22.616
62	97.600	73.751	86.568	23.041	73.606	22.621
63	97.618	73.758	86.574	23.042	73.620	22.627
64	97.636	73.765	86.580	23.044	73.633	22.633
65	97.654	73.771	86.586	23.045	73.646	22.638
66	97.672	73.778	86.592	23.046	73.659	22.644
67	97.689	73.785	86.598	23.048	73.672	22.649
68	97.706	73.791	86.603	23.049	73.685	22.654
69	97.722	73.797	86.608	23.050	73.697	22.660
70	97.739	73.803	86.614	23.051	73.709	22.665
71	97.755	73.809	86.619	23.053	73.721	22.670
72	97.771	73.815	86.624	23.054	73.733	22.675
73	97.786	73.821	86.629	23.055	73.744	22.679
74	97.801	73.826	86.634	23.056	73.756	22.684
75	97.816	73.832	86.639	23.057	73.767	22.689
76	97.831	73.838	86.644	23.058	73.778	22.694
77	97.846	73.843	86.648	23.059	73.789	22.698
78	97.860	73.848	86.653	23.060	73.800	22.703
79	97.874	73.853	86.657	23.061	73.810	22.707
80	97.888	73.859	86.662	23.062	73.821	22.712
81	97.902	73.864	86.666	23.063	73.831	22.716
82	97.916	73.869	86.670	23.064	73.841	22.720
83	97.929	73.873	86.675	23.065	73.851	22.725
84	97.942	73.878	86.679	23.066	73.861	22.729
85	97.955	73.883	86.683	23.067	73.870	22.733
86	97.968	73.888	86.687	23.068	73.880	22.737
87	97.980	73.892	86.691	23.069	73.889	22.741
88	97.993	73.897	86.695	23.070	73.899	22.745
89	98.005	73.901	86.699	23.071	73.908	22.749
90	98.017	73.906	86.703	23.072	73.917	22.753
91	98.029	73.910	86.706	23.072	73.926	22.757
92	98.041	73.914	86.710	23.073	73.935	22.760
93	98.053	73.918	86.714	23.074	73.943	22.764
94	98.064	73.923	86.717	23.075	73.952	22.768
95	98.076	73.927	86.721	23.076	73.960	22.771
96	98.087	73.931	86.724	23.076	73.969	22.775
97	98.098	73.935	86.728	23.077	73.977	22.779
98	98.109	73.939	86.731	23.078	73.985	22.782
99	98.120	73.942	86.734	23.079	73.994	22.786
100	98.131	73.946	86.738	23.0795	74.002	22.789
101	98.141	73.950	86.741	23.0803	74.009	22.792
102	98.152	73.954	86.744	23.081	74.017	22.796
103	98.162	73.957	86.747	23.0817	74.025	22.799
104	98.172	73.961	86.751	23.0824	74.033	22.802
105	98.182	73.965	86.754	23.083	74.040	22.806

<i>t</i>	HOMENS				MULHERES	
	Lançamento do dardo	Lançamento do disco	Lançamento do martelo	Lançamento do peso	Lançamento do dardo	Lançamento do peso
106	98.192	73.968	86.757	23.0838	74.048	22.809
107	98.202	73.972	86.760	23.0844	74.055	22.812
108	98.212	73.975	86.763	23.085	74.063	22.815
109	98.222	73.979	86.766	23.0858	74.070	22.818
110	98.231	73.982	86.769	23.0864	74.077	22.822
111	98.241	73.985	86.772	23.087	74.084	22.825
112	98.250	73.989	86.774	23.0877	74.091	22.828
113	98.259	73.992	86.777	23.0883	74.098	22.831
114	98.268	73.995	86.780	23.089	74.105	22.834
115	98.277	73.998	86.783	23.0896	74.112	22.837
116	98.286	74.001	86.786	23.0902	74.118	22.840
117	98.295	74.004	86.788	23.0908	74.125	22.843
118	98.304	74.008	86.791	23.0913	74.132	22.845
119	98.313	74.011	86.794	23.092	74.138	22.848
120	98.322	74.014	86.796	23.0925	74.145	22.851
121	98.330	74.017	86.799	23.0931	74.151	22.854
122	98.339	74.020	86.801	23.0936	74.158	22.857
123	98.347	74.022	86.804	23.0942	74.164	22.859
124	98.355	74.025	86.806	23.0947	74.170	22.862
125	98.363	74.028	86.809	23.0953	74.176	22.865
126	98.372	74.031	86.811	23.0958	74.182	22.868
127	98.380	74.034	86.814	23.0964	74.189	22.870
128	98.388	74.037	86.816	23.0969	74.195	22.873
129	98.396	74.039	86.818	23.0974	74.200	22.875
130	98.404	74.042	86.821	23.0979	74.206	22.878
131	98.411	74.045	86.823	23.0984	74.212	22.881
132	98.419	74.047	86.825	23.0989	74.218	22.883
133	98.427	74.050	86.828	23.0994	74.224	22.886
134	98.434	74.053	86.830	23.0999	74.230	22.888
135	98.442	74.055	86.832	23.1004	74.235	22.891
136	98.449	74.058	86.834	23.1009	74.241	22.893
137	98.457	74.060	86.836	23.1014	74.246	22.896
138	98.464	74.063	86.839	23.1019	74.252	22.898
139	98.471	74.065	86.841	23.1023	74.257	22.900
140	98.478	74.068	86.843	23.1028	74.263	22.903
141	98.486	74.070	86.845	23.1033	74.268	22.905
142	98.493	74.073	86.847	23.1037	74.273	22.908
143	98.500	74.075	86.849	23.1042	74.279	22.910
144	98.507	74.077	86.851	23.1046	74.284	22.912
145	98.514	74.080	86.853	23.1051	74.289	22.914
146	98.520	74.082	86.855	23.1055	74.294	22.917
147	98.527	74.084	86.857	23.1060	74.300	22.919
148	98.534	74.087	86.859	23.1064	74.305	22.921
149	98.541	74.089	86.861	23.1068	74.310	22.924
150	98.547	74.091	86.863	23.1072	74.315	22.926
151	98.554	74.093	86.865	23.1077	74.320	22.928
152	98.560	74.096	86.867	23.1081	74.325	22.930
153	98.567	74.098	86.869	23.1085	74.329	22.932
154	98.573	74.100	86.871	23.1089	74.334	22.934
155	98.580	74.102	86.873	23.1093	74.339	22.937
156	98.586	74.104	86.875	23.1097	74.344	22.939
157	98.592	74.106	86.876	23.1101	74.349	22.941
158	98.599	74.109	86.878	23.1105	74.353	22.943
159	98.605	74.111	86.880	23.1109	74.358	22.945
160	98.611	74.113	86.882	23.1113	74.363	22.947

<i>t</i>	HOMENS				MULHERES	
	Lançamento do dardo	Lançamento do disco	Lançamento do martelo	Lançamento do peso	Lançamento do dardo	Lançamento do peso
161	98.617	74.115	86.884	23.1117	74.367	22.949
162	98.623	74.117	86.885	23.1120	74.372	22.951
163	98.629	74.119	86.887	23.1124	74.376	22.953
164	98.635	74.121	86.889	23.1128	74.381	22.955
165	98.641	74.123	86.890	23.1132	74.385	22.957
166	98.647	74.125	86.892	23.1135	74.390	22.959
167	98.653	74.127	86.894	23.1139	74.394	22.961
168	98.659	74.129	86.896	23.1143	74.399	22.963
169	98.664	74.131	86.897	23.1146	74.403	22.965
170	98.670	74.132	86.899	23.1150	74.407	22.967
171	98.676	74.134	86.900	23.1153	74.412	22.969
172	98.681	74.136	86.902	23.1157	74.416	22.971
173	98.687	74.138	86.904	23.1160	74.420	22.973
174	98.693	74.140	86.905	23.1164	74.424	22.975
175	98.698	74.142	86.907	23.1167	74.429	22.976
176	98.704	74.144	86.908	23.1171	74.433	22.978
177	98.709	74.145	86.910	23.1174	74.437	22.980
178	98.715	74.147	86.912	23.1178	74.441	22.982
179	98.720	74.149	86.913	23.1181	74.445	22.984
180	98.725	74.151	86.915	23.1184	74.449	22.986
181	98.731	74.153	86.916	23.1187	74.453	22.987
182	98.736	74.154	86.918	23.1191	74.457	22.989
183	98.741	74.156	86.919	23.1194	74.461	22.991
184	98.746	74.158	86.921	23.1197	74.465	22.993
185	98.752	74.160	86.922	23.1200	74.469	22.995
186	98.757	74.161	86.924	23.1203	74.473	22.996
187	98.762	74.163	86.925	23.1207	74.477	22.998
188	98.767	74.165	86.927	23.1210	74.481	23.000
189	98.772	74.166	86.928	23.1213	74.485	23.002
190	98.777	74.168	86.929	23.1216	74.488	23.003
191	98.782	74.170	86.931	23.1219	74.492	23.005
192	98.787	74.171	86.932	23.1222	74.496	23.007
193	98.792	74.173	86.934	23.1225	74.500	23.008
194	98.797	74.174	86.935	23.1228	74.503	23.010
195	98.802	74.176	86.936	23.1231	74.507	23.012
196	98.807	74.178	86.938	23.1234	74.511	23.013
197	98.811	74.179	86.939	23.1237	74.514	23.015
198	98.816	74.181	86.940	23.1240	74.518	23.017
199	98.821	74.182	86.942	23.1243	74.522	23.018
200	98.826	74.184	86.943	23.125	74.525	23.020

**Anexo 4.6.2. Intervalos com 95% de confiança para os níveis de retorno a  $t$ -anos: método delta**

$t$	L. Dardo homens	L. Disco homens	L. Martelo homens	L. Peso homens	L. Dardo mulheres	L. Peso mulheres
	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$
2	90.789; 92.378	70.311; 71.199	83.552; 84.303	22.232; 22.451	68.636; 69.963	20.873; 21.237
3	91.811; 93.575	70.949; 71.872	84.120; 84.900	22.399; 22.618	69.302; 70.845	21.098; 21.522
4	92.402; 94.302	71.305; 72.251	84.436; 85.237	22.489; 22.708	69.665; 71.410	21.232; 21.703
5	92.807; 94.825	71.545; 72.511	84.647; 85.467	22.549; 22.769	69.899; 71.832	21.324; 21.838
6	93.108; 95.235	71.721; 72.705	84.801; 85.640	22.593; 22.813	70.066; 72.170	21.393; 21.947
7	93.344; 95.570	71.858; 72.860	84.921; 85.777	22.626; 22.848	70.191; 72.452	21.447; 22.037
8	93.535; 95.855	71.969; 72.987	85.017; 85.891	22.653; 22.877	70.289; 72.694	21.491; 22.116
9	93.696; 96.102	72.061; 73.095	85.097; 85.987	22.675; 22.901	70.368; 72.906	21.528; 22.185
10	93.832; 96.320	72.139; 73.189	85.165; 86.070	22.694; 22.921	70.433; 73.095	21.559; 22.246
11	93.950; 96.515	72.206; 73.271	85.224; 86.143	22.710; 22.939	70.488; 73.265	21.586; 22.302
12	94.054; 96.691	72.265; 73.345	85.275; 86.208	22.724; 22.955	70.535; 73.420	21.610; 22.353
13	94.146; 96.852	72.317; 73.411	85.320; 86.267	22.737; 22.969	70.576; 73.562	21.631; 22.400
14	94.228; 97.000	72.363; 73.471	85.360; 86.320	22.748; 22.981	70.611; 73.693	21.650; 22.443
15	94.302; 97.136	72.405; 73.525	85.397; 86.368	22.757; 22.993	70.642; 73.814	21.667; 22.484
16	94.370; 97.263	72.443; 73.576	85.430; 86.413	22.766; 23.003	70.670; 73.928	21.682; 22.522
17	94.431; 97.382	72.477; 73.623	85.460; 86.454	22.775; 23.013	70.694; 74.034	21.696; 22.558
18	94.488; 97.494	72.509; 73.666	85.487; 86.492	22.782; 23.022	70.716; 74.134	21.709; 22.591
19	94.540; 97.599	72.538; 73.707	85.512; 86.528	22.789; 23.030	70.736; 74.228	21.721; 22.623
20	94.589; 97.698	72.565; 73.745	85.536; 86.561	22.795; 23.038	70.754; 74.318	21.732; 22.654
21	94.634; 97.792	72.590; 73.780	85.558; 86.592	22.801; 23.045	70.770; 74.403	21.742; 22.682
22	94.676; 97.881	72.613; 73.814	85.578; 86.622	22.806; 23.052	70.785; 74.483	21.752; 22.710
23	94.715; 97.966	72.635; 73.846	85.597; 86.650	22.811; 23.059	70.799; 74.560	21.761; 22.736
24	94.752; 98.047	72.655; 73.876	85.615; 86.677	22.816; 23.065	70.811; 74.634	21.769; 22.762
25	94.786; 98.125	72.674; 73.905	85.631; 86.702	22.821; 23.071	70.823; 74.704	21.777; 22.786
26	94.819; 98.199	72.693; 73.933	85.647; 86.726	22.825; 23.076	70.833; 74.772	21.784; 22.809
27	94.850; 98.271	72.710; 73.959	85.662; 86.749	22.829; 23.081	70.843; 74.837	21.791; 22.832
28	94.879; 98.339	72.726; 73.984	85.676; 86.770	22.833; 23.086	70.852; 74.900	21.797; 22.853
29	94.907; 98.405	72.741; 74.008	85.690; 86.791	22.836; 23.091	70.860; 74.960	21.804; 22.874
30	94.934; 98.469	72.756; 74.031	85.702; 86.811	22.839; 23.096	70.868; 75.018	21.809; 22.895
31	94.959; 98.530	72.770; 74.053	85.715; 86.831	22.843; 23.100	70.875; 75.074	21.815; 22.914
32	94.983; 98.589	72.783; 74.074	85.726; 86.849	22.846; 23.104	70.882; 75.128	21.820; 22.933
33	95.006; 98.646	72.795; 74.095	85.737; 86.867	22.849; 23.108	70.889; 75.181	21.825; 22.952
34	95.028; 98.702	72.807; 74.114	85.748; 86.884	22.851; 23.112	70.894; 75.232	21.830; 22.970
35	95.049; 98.755	72.819; 74.133	85.758; 86.900	22.854; 23.116	70.900; 75.281	21.835; 22.987
36	95.069; 98.807	72.830; 74.152	85.768; 86.916	22.857; 23.119	70.905; 75.329	21.839; 23.004
37	95.088; 98.858	72.841; 74.169	85.777; 86.932	22.859; 23.123	70.910; 75.376	21.843; 23.020
38	95.107; 98.907	72.851; 74.187	85.786; 86.947	22.861; 23.126	70.914; 75.421	21.847; 23.036
39	95.125; 98.955	72.861; 74.203	85.795; 86.961	22.864; 23.129	70.919; 75.465	21.851; 23.052
40	95.142; 99.001	72.870; 74.219	85.803; 86.975	22.866; 23.132	70.923; 75.508	21.855; 23.067
41	95.158; 99.046	72.879; 74.235	85.811; 86.989	22.868; 23.135	70.926; 75.550	21.859; 23.082
42	95.174; 99.091	72.888; 74.250	85.819; 87.002	22.870; 23.138	70.930; 75.590	21.862; 23.096
43	95.190; 99.133	72.896; 74.265	85.826; 87.015	22.872; 23.141	70.933; 75.630	21.865; 23.111
44	95.205; 99.175	72.904; 74.280	85.833; 87.027	22.874; 23.144	70.936; 75.669	21.869; 23.124
45	95.219; 99.216	72.912; 74.294	85.840; 87.039	22.875; 23.147	70.939; 75.707	21.872; 23.138
46	95.233; 99.256	72.920; 74.307	85.847; 87.051	22.877; 23.149	70.942; 75.744	21.875; 23.151
47	95.246; 99.295	72.927; 74.320	85.853; 87.062	22.879; 23.152	70.944; 75.780	21.877; 23.164
48	95.260; 99.333	72.934; 74.333	85.860; 87.073	22.881; 23.154	70.947; 75.816	21.880; 23.177
49	95.272; 99.370	72.941; 74.346	85.866; 87.084	22.882; 23.157	70.949; 75.850	21.883; 23.189
50	95.284; 99.407	72.948; 74.358	85.872; 87.095	22.884; 23.159	70.951; 75.884	21.885; 23.202

	L. Dardo homens	L. Disco homens	L. Martelo homens	L. Peso homens	L. Dardo mulheres	L. Peso mulheres
<i>t</i>	<i>IC</i> <sub>95%</sub> [ <i>U</i> ( <i>t</i> )]	<i>IC</i> <sub>95%</sub> [ <i>U</i> ( <i>t</i> )]	<i>IC</i> <sub>95%</sub> [ <i>U</i> ( <i>t</i> )]	<i>IC</i> <sub>95%</sub> [ <i>U</i> ( <i>t</i> )]	<i>IC</i> <sub>95%</sub> [ <i>U</i> ( <i>t</i> )]	<i>IC</i> <sub>95%</sub> [ <i>U</i> ( <i>t</i> )]
51	95.296; 99.443	72.955; 74.370	85.878; 87.105	22.885; 23.161	70.953; 75.917	21.888; 23.214
52	95.308; 99.477	72.961; 74.382	85.883; 87.115	22.887; 23.163	70.955; 75.950	21.890; 23.225
53	95.319; 99.512	72.967; 74.393	85.889; 87.125	22.888; 23.166	70.957; 75.982	21.893; 23.237
54	95.330; 99.545	72.973; 74.405	85.894; 87.135	22.889; 23.168	70.958; 76.013	21.895; 23.248
55	95.341; 99.578	72.979; 74.416	85.899; 87.144	22.891; 23.170	70.960; 76.044	21.897; 23.259
56	95.351; 99.610	72.985; 74.426	85.904; 87.153	22.892; 23.172	70.961; 76.074	21.899; 23.270
57	95.361; 99.642	72.990; 74.437	85.909; 87.162	22.893; 23.174	70.963; 76.103	21.901; 23.281
58	95.371; 99.673	72.995; 74.447	85.914; 87.171	22.894; 23.176	70.964; 76.132	21.903; 23.291
59	95.380; 99.703	73.001; 74.457	85.919; 87.180	22.896; 23.178	70.965; 76.161	21.905; 23.302
60	95.390; 99.733	73.006; 74.467	85.923; 87.188	22.897; 23.179	70.966; 76.189	21.907; 23.312
61	95.399; 99.763	73.011; 74.477	85.928; 87.197	22.898; 23.181	70.967; 76.216	21.909; 23.322
62	95.408; 99.792	73.016; 74.486	85.932; 87.205	22.899; 23.183	70.968; 76.243	21.911; 23.332
63	95.416; 99.820	73.020; 74.495	85.936; 87.213	22.900; 23.185	70.969; 76.270	21.913; 23.342
64	95.425; 99.848	73.025; 74.505	85.940; 87.221	22.901; 23.186	70.970; 76.296	21.914; 23.351
65	95.433; 99.875	73.029; 74.513	85.944; 87.228	22.902; 23.188	70.971; 76.322	21.916; 23.361
66	95.441; 99.902	73.034; 74.522	85.948; 87.236	22.903; 23.190	70.971; 76.347	21.917; 23.370
67	95.449; 99.929	73.038; 74.531	85.952; 87.243	22.904; 23.191	70.972; 76.372	21.919; 23.379
68	95.457; 99.955	73.042; 74.539	85.956; 87.250	22.905; 23.193	70.973; 76.397	21.921; 23.388
69	95.464; 99.981	73.046; 74.548	85.959; 87.257	22.906; 23.194	70.973; 76.421	21.922; 23.397
70	95.471; 100.006	73.051; 74.556	85.963; 87.264	22.907; 23.196	70.974; 76.444	21.924; 23.406
71	95.479; 100.031	73.054; 74.564	85.967; 87.271	22.908; 23.197	70.974; 76.468	21.925; 23.414
72	95.486; 100.056	73.058; 74.572	85.970; 87.278	22.909; 23.199	70.975; 76.491	21.926; 23.423
73	95.492; 100.080	73.062; 74.580	85.973; 87.285	22.910; 23.200	70.975; 76.514	21.928; 23.431
74	95.499; 100.104	73.066; 74.587	85.977; 87.291	22.911; 23.202	70.975; 76.536	21.929; 23.440
75	95.506; 100.127	73.069; 74.595	85.980; 87.298	22.911; 23.203	70.976; 76.558	21.930; 23.448
76	95.512; 100.150	73.073; 74.602	85.983; 87.304	22.912; 23.204	70.976; 76.580	21.931; 23.456
77	95.519; 100.173	73.077; 74.609	85.986; 87.310	22.913; 23.206	70.976; 76.602	21.933; 23.464
78	95.525; 100.196	73.080; 74.617	85.989; 87.316	22.914; 23.207	70.976; 76.623	21.934; 23.472
79	95.531; 100.218	73.083; 74.624	85.992; 87.322	22.915; 23.208	70.976; 76.644	21.935; 23.479
80	95.537; 100.240	73.087; 74.631	85.995; 87.328	22.915; 23.210	70.976; 76.665	21.936; 23.487
81	95.543; 100.261	73.090; 74.637	85.998; 87.334	22.916; 23.211	70.977; 76.685	21.937; 23.495
82	95.548; 100.283	73.093; 74.644	86.001; 87.340	22.917; 23.212	70.977; 76.705	21.938; 23.502
83	95.554; 100.304	73.096; 74.651	86.004; 87.345	22.917; 23.213	70.977; 76.725	21.939; 23.510
84	95.560; 100.324	73.099; 74.657	86.007; 87.351	22.918; 23.214	70.977; 76.745	21.940; 23.517
85	95.565; 100.345	73.102; 74.664	86.009; 87.357	22.919; 23.216	70.977; 76.764	21.942; 23.524
86	95.570; 100.365	73.105; 74.670	86.012; 87.362	22.919; 23.217	70.977; 76.783	21.943; 23.531
87	95.576; 100.385	73.108; 74.676	86.015; 87.367	22.920; 23.218	70.977; 76.802	21.943; 23.538
88	95.581; 100.405	73.111; 74.683	86.017; 87.373	22.921; 23.219	70.976; 76.821	21.944; 23.545
89	95.586; 100.425	73.114; 74.689	86.020; 87.378	22.921; 23.220	70.976; 76.839	21.945; 23.552
90	95.591; 100.444	73.116; 74.695	86.022; 87.383	22.922; 23.221	70.976; 76.858	21.946; 23.559
91	95.596; 100.463	73.119; 74.701	86.025; 87.388	22.923; 23.222	70.976; 76.876	21.947; 23.566
92	95.600; 100.482	73.122; 74.707	86.027; 87.393	22.923; 23.223	70.976; 76.893	21.948; 23.573
93	95.605; 100.500	73.124; 74.712	86.029; 87.398	22.924; 23.225	70.976; 76.911	21.949; 23.579
94	95.610; 100.519	73.127; 74.718	86.032; 87.403	22.924; 23.225	70.975; 76.928	21.950; 23.586
95	95.614; 100.537	73.129; 74.724	86.034; 87.407	22.925; 23.226	70.975; 76.946	21.951; 23.592
96	95.619; 100.555	73.132; 74.729	86.036; 87.412	22.926; 23.227	70.975; 76.963	21.951; 23.599
97	95.623; 100.573	73.134; 74.735	86.039; 87.417	22.926; 23.228	70.975; 76.980	21.952; 23.605
98	95.628; 100.590	73.137; 74.740	86.041; 87.422	22.927; 23.229	70.974; 76.996	21.953; 23.611
99	95.632; 100.608	73.139; 74.746	86.043; 87.426	22.927; 23.230	70.974; 77.013	21.954; 23.617
100	95.636; 100.625	73.142; 74.751	86.045; 87.431	22.928; 23.231	70.974; 77.029	21.954; 23.624

	L. Dardo homens	L. Disco homens	L. Martelo homens	L. Peso homens	L. Dardo mulheres	L. Peso mulheres
<i>t</i>	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$
101	95.640; 100.642	73.144; 74.756	86.047; 87.435	22.928; 23.232	70.974; 77.045	21.955; 23.630
102	95.644; 100.659	73.146; 74.761	86.049; 87.439	22.929; 23.233	70.973; 77.061	21.956; 23.636
103	95.648; 100.675	73.148; 74.766	86.051; 87.444	22.929; 23.234	70.973; 77.077	21.957; 23.642
104	95.652; 100.692	73.151; 74.771	86.053; 87.448	22.930; 23.235	70.973; 77.093	21.957; 23.648
105	95.656; 100.708	73.153; 74.776	86.055; 87.452	22.930; 23.236	70.972; 77.108	21.958; 23.653
106	95.660; 100.724	73.155; 74.781	86.057; 87.456	22.931; 23.237	70.972; 77.124	21.959; 23.659
107	95.664; 100.740	73.157; 74.786	86.059; 87.461	22.931; 23.238	70.971; 77.139	21.959; 23.665
108	95.668; 100.756	73.159; 74.791	86.061; 87.465	22.932; 23.238	70.971; 77.154	21.960; 23.671
109	95.671; 100.772	73.161; 74.796	86.063; 87.469	22.932; 23.239	70.971; 77.169	21.961; 23.676
110	95.675; 100.787	73.163; 74.801	86.065; 87.473	22.933; 23.240	70.970; 77.184	21.961; 23.682
111	95.678; 100.803	73.165; 74.805	86.067; 87.477	22.933; 23.241	70.970; 77.198	21.962; 23.688
112	95.682; 100.818	73.167; 74.810	86.068; 87.481	22.934; 23.242	70.969; 77.213	21.962; 23.693
113	95.685; 100.833	73.169; 74.814	86.070; 87.484	22.934; 23.243	70.969; 77.227	21.963; 23.699
114	95.689; 100.848	73.171; 74.819	86.072; 87.488	22.934; 23.243	70.968; 77.241	21.964; 23.704
115	95.692; 100.863	73.173; 74.823	86.074; 87.492	22.935; 23.244	70.968; 77.256	21.964; 23.709
116	95.695; 100.878	73.175; 74.828	86.075; 87.496	22.935; 23.245	70.967; 77.270	21.965; 23.715
117	95.699; 100.892	73.177; 74.832	86.077; 87.500	22.936; 23.246	70.967; 77.283	21.965; 23.720
118	95.702; 100.906	73.178; 74.837	86.079; 87.503	22.936; 23.246	70.966; 77.297	21.966; 23.725
119	95.705; 100.921	73.180; 74.841	86.080; 87.507	22.937; 23.247	70.966; 77.311	21.966; 23.730
120	95.708; 100.935	73.182; 74.845	86.082; 87.510	22.937; 23.248	70.965; 77.324	21.967; 23.735
121	95.711; 100.949	73.184; 74.849	86.083; 87.514	22.937; 23.249	70.965; 77.338	21.967; 23.741
122	95.714; 100.963	73.186; 74.854	86.085; 87.517	22.938; 23.249	70.964; 77.351	21.968; 23.746
123	95.717; 100.976	73.187; 74.858	86.087; 87.521	22.938; 23.250	70.964; 77.364	21.968; 23.751
124	95.720; 100.990	73.189; 74.862	86.088; 87.524	22.939; 23.251	70.963; 77.377	21.969; 23.756
125	95.723; 101.004	73.191; 74.866	86.090; 87.528	22.939; 23.252	70.963; 77.390	21.969; 23.761
126	95.726; 101.017	73.192; 74.870	86.091; 87.531	22.939; 23.252	70.962; 77.403	21.970; 23.765
127	95.729; 101.030	73.194; 74.874	86.093; 87.535	22.940; 23.253	70.962; 77.415	21.970; 23.770
128	95.732; 101.043	73.195; 74.878	86.094; 87.538	22.940; 23.254	70.961; 77.428	21.971; 23.775
129	95.735; 101.057	73.197; 74.882	86.096; 87.541	22.940; 23.254	70.960; 77.441	21.971; 23.780
130	95.738; 101.070	73.199; 74.885	86.097; 87.544	22.941; 23.255	70.960; 77.453	21.971; 23.785
131	95.740; 101.082	73.200; 74.889	86.098; 87.548	22.941; 23.256	70.959; 77.465	21.972; 23.789
132	95.743; 101.095	73.202; 74.893	86.100; 87.551	22.941; 23.256	70.959; 77.477	21.972; 23.794
133	95.746; 101.108	73.203; 74.897	86.101; 87.554	22.942; 23.257	70.958; 77.489	21.973; 23.799
134	95.748; 101.120	73.205; 74.901	86.103; 87.557	22.942; 23.258	70.958; 77.501	21.973; 23.803
135	95.751; 101.133	73.206; 74.904	86.104; 87.560	22.942; 23.258	70.957; 77.513	21.973; 23.808
136	95.753; 101.145	73.208; 74.908	86.105; 87.563	22.943; 23.259	70.956; 77.525	21.974; 23.812
137	95.756; 101.157	73.209; 74.912	86.107; 87.566	22.943; 23.260	70.956; 77.537	21.974; 23.817
138	95.758; 101.169	73.211; 74.915	86.108; 87.569	22.943; 23.260	70.955; 77.549	21.975; 23.821
139	95.761; 101.181	73.212; 74.919	86.109; 87.572	22.944; 23.261	70.955; 77.560	21.975; 23.826
140	95.763; 101.193	73.213; 74.922	86.111; 87.575	22.944; 23.262	70.954; 77.572	21.975; 23.830
141	95.766; 101.205	73.215; 74.926	86.112; 87.578	22.944; 23.262	70.953; 77.583	21.976; 23.835
142	95.768; 101.217	73.216; 74.929	86.113; 87.581	22.945; 23.263	70.953; 77.594	21.976; 23.839
143	95.771; 101.229	73.217; 74.933	86.114; 87.584	22.945; 23.263	70.952; 77.605	21.976; 23.843
144	95.773; 101.240	73.219; 74.936	86.116; 87.587	22.945; 23.264	70.952; 77.617	21.977; 23.848
145	95.775; 101.252	73.220; 74.939	86.117; 87.590	22.946; 23.264	70.951; 77.628	21.977; 23.852
146	95.777; 101.263	73.221; 74.943	86.118; 87.593	22.946; 23.265	70.950; 77.639	21.977; 23.856
147	95.780; 101.275	73.223; 74.946	86.119; 87.595	22.946; 23.266	70.950; 77.649	21.978; 23.860
148	95.782; 101.286	73.224; 74.949	86.120; 87.598	22.947; 23.266	70.949; 77.660	21.978; 23.865
149	95.784; 101.297	73.225; 74.953	86.121; 87.601	22.947; 23.267	70.948; 77.671	21.978; 23.869
150	95.786; 101.308	73.227; 74.956	86.123; 87.604	22.947; 23.267	70.948; 77.682	21.979; 23.873



	L. Dardo homens	L. Disco homens	L. Martelo homens	L. Peso homens	L. Dardo mulheres	L. Peso mulheres
<i>t</i>	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$
151	95.788; 101.319	73.228; 74.959	86.124; 87.606	22.947; 23.268	70.947; 77.692	21.979; 23.877
152	95.791; 101.330	73.229; 74.962	86.125; 87.609	22.948; 23.268	70.946; 77.703	21.979; 23.881
153	95.793; 101.341	73.230; 74.965	86.126; 87.612	22.948; 23.269	70.946; 77.713	21.980; 23.885
154	95.795; 101.352	73.231; 74.969	86.127; 87.614	22.948; 23.270	70.945; 77.724	21.980; 23.889
155	95.797; 101.362	73.233; 74.972	86.128; 87.617	22.949; 23.270	70.944; 77.734	21.980; 23.893
156	95.799; 101.373	73.234; 74.975	86.129; 87.620	22.949; 23.271	70.944; 77.744	21.980; 23.897
157	95.801; 101.384	73.235; 74.978	86.130; 87.622	22.949; 23.271	70.943; 77.754	21.981; 23.901
158	95.803; 101.394	73.236; 74.981	86.132; 87.625	22.949; 23.272	70.943; 77.764	21.981; 23.905
159	95.805; 101.405	73.237; 74.984	86.133; 87.627	22.950; 23.272	70.942; 77.774	21.981; 23.909
160	95.807; 101.415	73.238; 74.987	86.134; 87.630	22.950; 23.273	70.941; 77.784	21.982; 23.913
161	95.809; 101.425	73.240; 74.990	86.135; 87.632	22.950; 23.273	70.941; 77.794	21.982; 23.916
162	95.811; 101.435	73.241; 74.993	86.136; 87.635	22.950; 23.274	70.940; 77.804	21.982; 23.920
163	95.813; 101.446	73.242; 74.996	86.137; 87.637	22.951; 23.274	70.939; 77.814	21.982; 23.924
164	95.815; 101.456	73.243; 74.999	86.138; 87.640	22.951; 23.275	70.939; 77.823	21.983; 23.928
165	95.816; 101.466	73.244; 75.002	86.139; 87.642	22.951; 23.275	70.938; 77.833	21.983; 23.932
166	95.818; 101.476	73.245; 75.004	86.140; 87.645	22.951; 23.276	70.937; 77.843	21.983; 23.935
167	95.820; 101.486	73.246; 75.007	86.141; 87.647	22.952; 23.276	70.937; 77.852	21.983; 23.939
168	95.822; 101.495	73.247; 75.010	86.142; 87.649	22.952; 23.277	70.936; 77.862	21.983; 23.943
169	95.824; 101.505	73.248; 75.013	86.143; 87.652	22.952; 23.277	70.935; 77.871	21.984; 23.946
170	95.825; 101.515	73.249; 75.016	86.144; 87.654	22.952; 23.278	70.935; 77.880	21.984; 23.950
171	95.827; 101.524	73.250; 75.018	86.145; 87.656	22.953; 23.278	70.934; 77.890	21.984; 23.954
172	95.829; 101.534	73.251; 75.021	86.146; 87.659	22.953; 23.279	70.933; 77.899	21.984; 23.957
173	95.831; 101.543	73.252; 75.024	86.147; 87.661	22.953; 23.279	70.933; 77.908	21.985; 23.961
174	95.832; 101.553	73.253; 75.027	86.147; 87.663	22.953; 23.280	70.932; 77.917	21.985; 23.964
175	95.834; 101.562	73.254; 75.029	86.148; 87.665	22.953; 23.280	70.931; 77.926	21.985; 23.968
176	95.836; 101.572	73.255; 75.032	86.149; 87.668	22.954; 23.280	70.931; 77.935	21.985; 23.971
177	95.837; 101.581	73.256; 75.035	86.150; 87.670	22.954; 23.281	70.930; 77.944	21.985; 23.975
178	95.839; 101.590	73.257; 75.037	86.151; 87.672	22.954; 23.281	70.929; 77.953	21.986; 23.978
179	95.841; 101.599	73.258; 75.040	86.152; 87.674	22.954; 23.282	70.928; 77.962	21.986; 23.982
180	95.842; 101.608	73.259; 75.043	86.153; 87.676	22.955; 23.282	70.928; 77.971	21.986; 23.985
181	95.844; 101.617	73.260; 75.045	86.154; 87.679	22.955; 23.283	70.927; 77.979	21.986; 23.989
182	95.845; 101.626	73.261; 75.048	86.155; 87.681	22.955; 23.283	70.926; 77.988	21.986; 23.992
183	95.847; 101.635	73.262; 75.050	86.155; 87.683	22.955; 23.284	70.926; 77.997	21.987; 23.995
184	95.849; 101.644	73.263; 75.053	86.156; 87.685	22.955; 23.284	70.925; 78.005	21.987; 23.999
185	95.850; 101.653	73.264; 75.055	86.157; 87.687	22.956; 23.284	70.924; 78.014	21.987; 24.002
186	95.852; 101.662	73.265; 75.058	86.158; 87.689	22.956; 23.285	70.924; 78.022	21.987; 24.006
187	95.853; 101.671	73.266; 75.060	86.159; 87.691	22.956; 23.285	70.923; 78.031	21.987; 24.009
188	95.855; 101.679	73.266; 75.063	86.160; 87.693	22.956; 23.286	70.922; 78.039	21.987; 24.012
189	95.856; 101.688	73.267; 75.065	86.160; 87.695	22.956; 23.286	70.922; 78.047	21.988; 24.015
190	95.858; 101.697	73.268; 75.068	86.161; 87.698	22.957; 23.287	70.921; 78.056	21.988; 24.019
191	95.859; 101.705	73.269; 75.070	86.162; 87.700	22.957; 23.287	70.920; 78.064	21.988; 24.022
192	95.861; 101.714	73.270; 75.072	86.163; 87.702	22.957; 23.287	70.920; 78.072	21.988; 24.025
193	95.862; 101.722	73.271; 75.075	86.164; 87.704	22.957; 23.288	70.919; 78.080	21.988; 24.028
194	95.863; 101.730	73.272; 75.077	86.164; 87.706	22.957; 23.288	70.918; 78.088	21.988; 24.032
195	95.865; 101.739	73.272; 75.080	86.165; 87.707	22.958; 23.289	70.918; 78.097	21.989; 24.035
196	95.866; 101.747	73.273; 75.082	86.166; 87.709	22.958; 23.289	70.917; 78.105	21.989; 24.038
197	95.868; 101.755	73.274; 75.084	86.167; 87.711	22.958; 23.289	70.916; 78.113	21.989; 24.041
198	95.869; 101.764	73.275; 75.087	86.168; 87.713	22.958; 23.290	70.916; 78.121	21.989; 24.044
199	95.870; 101.772	73.276; 75.089	86.168; 87.715	22.958; 23.290	70.915; 78.128	21.989; 24.047
200	95.872; 101.780	73.277; 75.091	86.169; 87.717	22.959; 23.291	70.914; 78.136	21.989; 24.050

**Anexo 4.6.3.  $IC_{95\%} U(t)$ : função *profile log-likelihood***

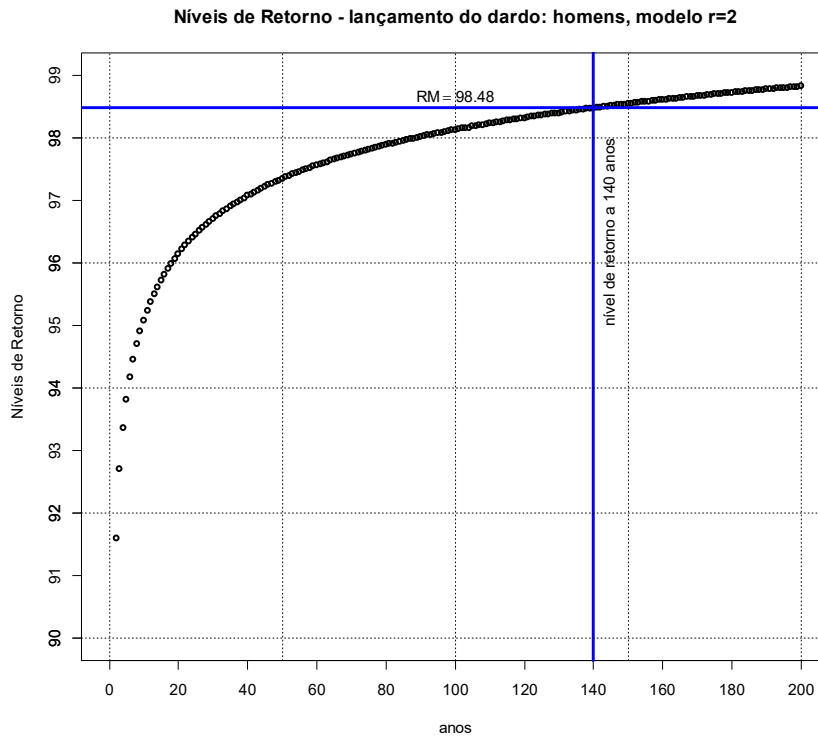
	L. Dardo homens	L. Disco homens	L. Martelo homens	L. Peso homens	L. Dardo mulheres	L. Peso mulheres
$t$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$
2	90.824; 92.429	70.323; 71.216	83.563; 84.318	22.235; 22.454	68.682; 70.058	20.885; 21.253
3	91.867; 93.676	70.965; 71.898	84.135; 84.926	22.402; 22.623	69.391; 71.085	21.116; 21.554
4	92.479; 94.474	71.326; 72.294	84.456; 85.281	22.493; 22.717	69.803; 71.780	21.256; 21.757
5	92.905; 95.072	71.570; 72.574	84.672; 85.529	22.554; 22.782	70.086; 72.313	21.356; 21.915
6	93.228; 95.553	71.752; 72.789	84.832; 85.720	22.598; 22.831	70.298; 72.747	21.432; 22.045
7	93.486; 95.956	71.894; 72.965	84.957; 85.873	22.633; 22.870	70.465; 73.114	21.494; 22.156
8	93.699; 96.303	72.010; 73.112	85.060; 86.001	22.661; 22.902	70.602; 73.432	21.545; 22.253
9	93.880; 96.607	72.107; 73.238	85.145; 86.110	22.684; 22.930	70.716; 73.715	21.589; 22.340
10	94.037; 96.879	72.191; 73.349	85.218; 86.205	22.704; 22.953	70.814; 73.968	21.627; 22.418
11	94.174; 97.124	72.263; 73.447	85.281; 86.289	22.721; 22.974	70.900; 74.198	21.661; 22.490
12	94.296; 97.347	72.327; 73.535	85.337; 86.364	22.736; 22.992	70.975; 74.409	21.691; 22.556
13	94.406; 97.552	72.384; 73.614	85.387; 86.432	22.750; 23.009	71.042; 74.604	21.719; 22.617
14	94.505; 97.742	72.436; 73.687	85.432; 86.494	22.762; 23.024	71.102; 74.785	21.743; 22.674
15	94.596; 97.918	72.482; 73.754	85.472; 86.550	22.772; 23.038	71.156; 74.954	21.766; 22.727
16	94.679; 98.083	72.525; 73.816	85.509; 86.602	22.782; 23.050	71.206; 75.113	21.787; 22.778
17	94.756; 98.238	72.564; 73.873	85.543; 86.651	22.791; 23.062	71.251; 75.262	21.806; 22.825
18	94.828; 98.384	72.599; 73.927	85.574; 86.696	22.799; 23.072	71.293; 75.404	21.824; 22.870
19	94.894; 98.522	72.633; 73.977	85.603; 86.738	22.807; 23.082	71.332; 75.538	21.841; 22.913
20	94.956; 98.652	72.664; 74.024	85.630; 86.777	22.814; 23.092	71.368; 75.666	21.856; 22.954
21	95.015; 98.777	72.693; 74.069	85.655; 86.814	22.821; 23.101	71.401; 75.788	21.871; 22.994
22	95.069; 98.895	72.720; 74.111	85.678; 86.849	22.827; 23.109	71.433; 75.905	21.885; 23.031
23	95.121; 99.008	72.745; 74.151	85.701; 86.882	22.833; 23.117	71.462; 76.017	21.898; 23.067
24	95.170; 99.117	72.769; 74.189	85.721; 86.914	22.838; 23.124	71.490; 76.124	21.911; 23.102
25	95.217; 99.221	72.792; 74.225	85.741; 86.944	22.843; 23.131	71.516; 76.228	21.923; 23.135
26	95.261; 99.321	72.814; 74.259	85.759; 86.972	22.848; 23.138	71.541; 76.327	21.934; 23.168
27	95.303; 99.417	72.834; 74.292	85.777; 87.000	22.853; 23.144	71.564; 76.423	21.945; 23.199
28	95.343; 99.509	72.854; 74.324	85.794; 87.026	22.857; 23.150	71.587; 76.516	21.955; 23.229
29	95.382; 99.599	72.872; 74.354	85.810; 87.051	22.861; 23.156	71.608; 76.605	21.965; 23.258
30	95.418; 99.685	72.890; 74.383	85.825; 87.075	22.865; 23.161	71.628; 76.692	21.974; 23.287
31	95.454; 99.768	72.907; 74.411	85.839; 87.098	22.869; 23.167	71.647; 76.776	21.983; 23.314
32	95.487; 99.849	72.923; 74.438	85.853; 87.120	22.873; 23.172	71.666; 76.858	21.992; 23.341
33	95.520; 99.928	72.938; 74.464	85.867; 87.141	22.876; 23.177	71.684; 76.937	22.001; 23.367
34	95.551; 100.003	72.953; 74.489	85.879; 87.162	22.879; 23.181	71.700; 77.014	22.009; 23.392
35	95.581; 100.077	72.967; 74.513	85.892; 87.181	22.883; 23.186	71.717; 77.090	22.016; 23.417
36	95.610; 100.149	72.981; 74.536	85.903; 87.201	22.886; 23.190	71.732; 77.163	22.024; 23.441
37	95.638; 100.219	72.994; 74.559	85.915; 87.219	22.888; 23.194	71.747; 77.234	22.031; 23.465
38	95.665; 100.287	73.007; 74.581	85.926; 87.237	22.891; 23.198	71.762; 77.303	22.038; 23.488
39	95.692; 100.353	73.019; 74.602	85.936; 87.254	22.894; 23.202	71.776; 77.371	22.045; 23.510
40	95.717; 100.417	73.031; 74.623	85.946; 87.271	22.897; 23.206	71.789; 77.437	22.052; 23.532
41	95.742; 100.480	73.043; 74.643	85.956; 87.288	22.899; 23.210	71.802; 77.502	22.058; 23.553
42	95.766; 100.542	73.054; 74.663	85.966; 87.304	22.902; 23.214	71.815; 77.565	22.064; 23.574
43	95.789; 100.602	73.065; 74.682	85.975; 87.319	22.904; 23.217	71.827; 77.627	22.070; 23.595
44	95.811; 100.660	73.075; 74.700	85.984; 87.334	22.906; 23.220	71.839; 77.687	22.076; 23.615
45	95.833; 100.717	73.085; 74.718	85.993; 87.349	22.908; 23.224	71.850; 77.746	22.082; 23.635
46	95.854; 100.773	73.095; 74.736	86.001; 87.363	22.911; 23.227	71.861; 77.804	22.087; 23.654
47	95.875; 100.828	73.104; 74.753	86.009; 87.377	22.913; 23.230	71.872; 77.861	22.093; 23.673
48	95.895; 100.882	73.114; 74.770	86.017; 87.390	22.915; 23.233	71.882; 77.917	22.098; 23.692
49	95.914; 100.934	73.123; 74.786	86.025; 87.403	22.917; 23.236	71.892; 77.972	22.103; 23.710
50	95.933; 100.986	73.131; 74.802	86.032; 87.416	22.919; 23.239	71.902; 78.025	22.108; 23.728

	L. Dardo homens	L. Disco homens	L. Martelo homens	L. Peso homens	L. Dardo mulheres	L. Peso mulheres
<i>t</i>	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$
51	95.952; 101.036	73.140; 74.817	86.039; 87.429	22.920; 23.242	71.912; 78.078	22.113; 23.746
52	95.970; 101.086	73.148; 74.832	86.046; 87.441	22.922; 23.244	71.921; 78.130	22.118; 23.763
53	95.988; 101.134	73.156; 74.847	86.053; 87.453	22.924; 23.247	71.930; 78.181	22.122; 23.780
54	96.005; 101.182	73.164; 74.862	86.060; 87.465	22.926; 23.250	71.939; 78.231	22.127; 23.797
55	96.022; 101.229	73.172; 74.876	86.066; 87.476	22.927; 23.252	71.947; 78.280	22.131; 23.813
56	96.039; 101.274	73.179; 74.890	86.073; 87.488	22.929; 23.255	71.956; 78.328	22.136; 23.829
57	96.055; 101.320	73.186; 74.904	86.079; 87.499	22.931; 23.257	71.964; 78.375	22.140; 23.845
58	96.070; 101.364	73.194; 74.917	86.085; 87.509	22.932; 23.259	71.972; 78.422	22.144; 23.861
59	96.086; 101.407	73.201; 74.930	86.091; 87.520	22.934; 23.262	71.979; 78.468	22.148; 23.877
60	96.101; 101.450	73.207; 74.943	86.097; 87.530	22.935; 23.264	71.987; 78.513	22.152; 23.892
61	96.116; 101.493	73.214; 74.956	86.103; 87.540	22.937; 23.266	71.994; 78.558	22.156; 23.907
62	96.130; 101.534	73.221; 74.968	86.108; 87.550	22.938; 23.268	72.002; 78.602	22.160; 23.922
63	96.144; 101.575	73.227; 74.980	86.113; 87.560	22.939; 23.271	72.009; 78.645	22.164; 23.936
64	96.158; 101.615	73.233; 74.992	86.119; 87.570	22.941; 23.273	72.016; 78.687	22.167; 23.951
65	96.172; 101.654	73.239; 75.004	86.124; 87.579	22.942; 23.275	72.023; 78.729	22.171; 23.965
66	96.185; 101.693	73.245; 75.015	86.129; 87.588	22.943; 23.277	72.029; 78.771	22.174; 23.979
67	96.199; 101.732	73.251; 75.026	86.134; 87.597	22.945; 23.279	72.036; 78.812	22.178; 23.993
68	96.211; 101.770	73.257; 75.038	86.139; 87.606	22.946; 23.281	72.042; 78.852	22.181; 24.006
69	96.224; 101.807	73.262; 75.048	86.144; 87.615	22.947; 23.283	72.048; 78.892	22.185; 24.020
70	96.236; 101.843	73.268; 75.059	86.148; 87.623	22.948; 23.284	72.054; 78.931	22.188; 24.033
71	96.249; 101.880	73.273; 75.070	86.153; 87.632	22.949; 23.286	72.060; 78.969	22.191; 24.046
72	96.261; 101.915	73.279; 75.080	86.157; 87.640	22.950; 23.288	72.066; 79.008	22.194; 24.059
73	96.272; 101.951	73.284; 75.090	86.162; 87.648	22.952; 23.290	72.072; 79.045	22.197; 24.072
74	96.284; 101.985	73.289; 75.100	86.166; 87.656	22.953; 23.292	72.078; 79.082	22.200; 24.085
75	96.295; 102.020	73.294; 75.110	86.170; 87.664	22.954; 23.293	72.083; 79.119	22.203; 24.097
76	96.306; 102.053	73.299; 75.120	86.175; 87.672	22.955; 23.295	72.089; 79.156	22.206; 24.110
77	96.317; 102.087	73.304; 75.130	86.179; 87.680	22.956; 23.297	72.094; 79.191	22.209; 24.122
78	96.328; 102.120	73.308; 75.139	86.183; 87.687	22.957; 23.298	72.099; 79.227	22.212; 24.134
79	96.339; 102.152	73.313; 75.148	86.187; 87.695	22.958; 23.300	72.104; 79.262	22.215; 24.146
80	96.349; 102.184	73.318; 75.158	86.191; 87.702	22.959; 23.302	72.109; 79.296	22.218; 24.158
81	96.360; 102.216	73.322; 75.167	86.194; 87.709	22.960; 23.303	72.114; 79.331	22.221; 24.170
82	96.370; 102.247	73.327; 75.176	86.198; 87.716	22.961; 23.305	72.119; 79.364	22.223; 24.181
83	96.380; 102.278	73.331; 75.184	86.202; 87.723	22.962; 23.306	72.124; 79.398	22.226; 24.193
84	96.390; 102.309	73.335; 75.193	86.205; 87.730	22.963; 23.308	72.129; 79.431	22.229; 24.204
85	96.399; 102.339	73.339; 75.202	86.209; 87.737	22.963; 23.309	72.133; 79.464	22.231; 24.215
86	96.409; 102.369	73.343; 75.210	86.212; 87.744	22.964; 23.311	72.138; 79.496	22.234; 24.226
87	96.418; 102.399	73.348; 75.218	86.216; 87.750	22.965; 23.312	72.142; 79.528	22.236; 24.237
88	96.427; 102.428	73.352; 75.226	86.219; 87.757	22.966; 23.313	72.147; 79.560	22.239; 24.248
89	96.437; 102.457	73.356; 75.235	86.223; 87.763	22.967; 23.315	72.151; 79.591	22.241; 24.259
90	96.446; 102.485	73.359; 75.243	86.226; 87.769	22.968; 23.316	72.156; 79.622	22.243; 24.269
91	96.454; 102.513	73.363; 75.250	86.229; 87.776	22.969; 23.317	72.160; 79.653	22.246; 24.280
92	96.463; 102.541	73.367; 75.258	86.232; 87.782	22.969; 23.319	72.164; 79.683	22.248; 24.290
93	96.472; 102.569	73.371; 75.266	86.236; 87.788	22.970; 23.320	72.168; 79.713	22.250; 24.301
94	96.480; 102.596	73.374; 75.274	86.239; 87.794	22.971; 23.321	72.172; 79.743	22.253; 24.311
95	96.489; 102.623	73.378; 75.281	86.242; 87.800	22.972; 23.323	72.176; 79.772	22.255; 24.321
96	96.497; 102.650	73.382; 75.289	86.245; 87.806	22.972; 23.324	72.180; 79.802	22.257; 24.331
97	96.505; 102.677	73.385; 75.296	86.248; 87.812	22.973; 23.325	72.184; 79.831	22.259; 24.341
98	96.513; 102.703	73.389; 75.303	86.251; 87.817	22.974; 23.326	72.188; 79.859	22.262; 24.351
99	96.521; 102.729	73.392; 75.310	86.253; 87.823	22.975; 23.328	72.191; 79.888	22.264; 24.361
100	96.529; 102.754	73.395; 75.317	86.256; 87.829	22.975; 23.329	72.195; 79.916	22.266; 24.371

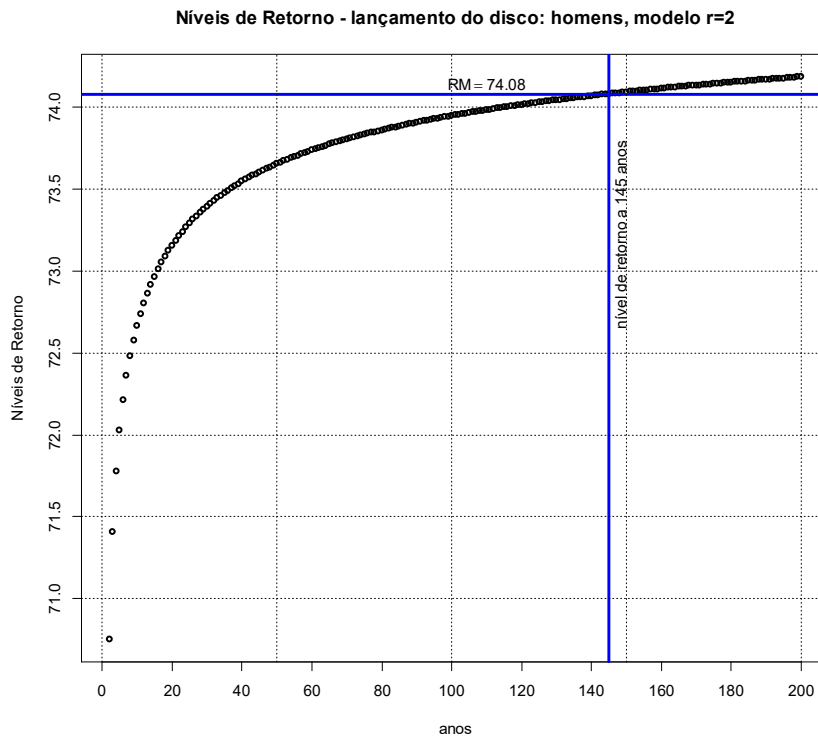
	L. Dardo homens	L. Disco homens	L. Martelo homens	L. Peso homens	L. Dardo mulheres	L. Peso mulheres
<i>t</i>	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$
101	96.537; 102.780	73.399; 75.324	86.259; 87.834	22.976; 23.330	72.199; 79.944	22.268; 24.380
102	96.544; 102.805	73.402; 75.331	86.262; 87.840	22.977; 23.331	72.202; 79.971	22.270; 24.390
103	96.552; 102.830	73.405; 75.338	86.265; 87.845	22.977; 23.332	72.206; 79.998	22.272; 24.399
104	96.560; 102.855	73.408; 75.345	86.267; 87.850	22.978; 23.333	72.209; 80.026	22.274; 24.409
105	96.567; 102.879	73.412; 75.351	86.270; 87.856	22.979; 23.335	72.213; 80.052	22.276; 24.418
106	96.574; 102.903	73.415; 75.358	86.273; 87.861	22.979; 23.336	72.216; 80.079	22.278; 24.427
107	96.581; 102.927	73.418; 75.365	86.275; 87.866	22.980; 23.337	72.220; 80.106	22.280; 24.436
108	96.589; 102.951	73.421; 75.371	86.278; 87.871	22.981; 23.338	72.223; 80.132	22.282; 24.445
109	96.596; 102.975	73.424; 75.378	86.280; 87.876	22.981; 23.339	72.226; 80.158	22.284; 24.454
110	96.603; 102.998	73.427; 75.384	86.283; 87.881	22.982; 23.340	72.230; 80.183	22.286; 24.463
111	96.609; 103.021	73.430; 75.390	86.285; 87.886	22.983; 23.341	72.233; 80.209	22.287; 24.472
112	96.616; 103.044	73.433; 75.396	86.288; 87.891	22.983; 23.342	72.236; 80.234	22.289; 24.481
113	96.623; 103.067	73.435; 75.402	86.290; 87.896	22.984; 23.343	72.239; 80.259	22.291; 24.489
114	96.630; 103.090	73.438; 75.409	86.292; 87.900	22.984; 23.344	72.242; 80.284	22.293; 24.498
115	96.636; 103.112	73.441; 75.415	86.295; 87.905	22.985; 23.345	72.245; 80.309	22.295; 24.507
116	96.643; 103.134	73.444; 75.420	86.297; 87.910	22.986; 23.346	72.248; 80.333	22.296; 24.515
117	96.649; 103.156	73.446; 75.426	86.299; 87.915	22.986; 23.347	72.251; 80.358	22.298; 24.524
118	96.656; 103.178	73.449; 75.432	86.302; 87.919	22.987; 23.348	72.254; 80.382	22.300; 24.532
119	96.662; 103.199	73.452; 75.438	86.304; 87.924	22.987; 23.349	72.257; 80.406	22.301; 24.540
120	96.668; 103.221	73.454; 75.444	86.306; 87.928	22.988; 23.350	72.260; 80.429	22.303; 24.549
121	96.674; 103.242	73.457; 75.449	86.308; 87.933	22.988; 23.351	72.263; 80.453	22.305; 24.557
122	96.680; 103.263	73.460; 75.455	86.310; 87.937	22.989; 23.352	72.266; 80.476	22.306; 24.565
123	96.686; 103.284	73.462; 75.461	86.313; 87.941	22.989; 23.353	72.268; 80.500	22.308; 24.573
124	96.692; 103.305	73.465; 75.466	86.315; 87.946	22.990; 23.354	72.271; 80.523	22.310; 24.581
125	96.698; 103.325	73.467; 75.471	86.317; 87.950	22.990; 23.354	72.274; 80.546	22.311; 24.589
126	96.704; 103.346	73.470; 75.477	86.319; 87.954	22.991; 23.355	72.276; 80.568	22.313; 24.597
127	96.710; 103.366	73.472; 75.482	86.321; 87.958	22.991; 23.356	72.279; 80.591	22.314; 24.605
128	96.716; 103.386	73.474; 75.488	86.323; 87.963	22.992; 23.357	72.282; 80.613	22.316; 24.613
129	96.721; 103.406	73.477; 75.493	86.325; 87.967	22.992; 23.358	72.284; 80.635	22.318; 24.620
130	96.727; 103.426	73.479; 75.498	86.327; 87.971	22.993; 23.359	72.287; 80.657	22.319; 24.628
131	96.733; 103.445	73.481; 75.503	86.329; 87.975	22.993; 23.360	72.289; 80.679	22.321; 24.636
132	96.738; 103.465	73.484; 75.508	86.331; 87.979	22.994; 23.361	72.292; 80.701	22.322; 24.643
133	96.744; 103.484	73.486; 75.513	86.333; 87.983	22.994; 23.361	72.294; 80.723	22.324; 24.651
134	96.749; 103.503	73.488; 75.518	86.335; 87.987	22.995; 23.362	72.297; 80.744	22.325; 24.658
135	96.754; 103.522	73.490; 75.523	86.337; 87.991	22.995; 23.363	72.299; 80.765	22.326; 24.666
136	96.760; 103.541	73.493; 75.528	86.338; 87.995	22.996; 23.364	72.302; 80.786	22.328; 24.673
137	96.765; 103.560	73.495; 75.533	86.340; 87.998	22.996; 23.365	72.304; 80.807	22.329; 24.680
138	96.770; 103.579	73.497; 75.538	86.342; 88.002	22.997; 23.365	72.306; 80.828	22.331; 24.688
139	96.775; 103.597	73.499; 75.543	86.344; 88.006	22.997; 23.366	72.309; 80.849	22.332; 24.695
140	96.780; 103.616	73.501; 75.548	86.346; 88.010	22.998; 23.367	72.311; 80.870	22.333; 24.702
141	96.785; 103.634	73.503; 75.552	86.347; 88.013	22.998; 23.368	72.313; 80.890	22.335; 24.709
142	96.791; 103.652	73.505; 75.557	86.349; 88.017	22.998; 23.369	72.316; 80.910	22.336; 24.716
143	96.795; 103.670	73.508; 75.562	86.351; 88.021	22.999; 23.369	72.318; 80.930	22.338; 24.724
144	96.800; 103.688	73.510; 75.566	86.353; 88.024	22.999; 23.370	72.320; 80.951	22.339; 24.731
145	96.805; 103.705	73.512; 75.571	86.354; 88.028	23.000; 23.371	72.322; 80.970	22.340; 24.738
146	96.810; 103.723	73.514; 75.576	86.356; 88.031	23.000; 23.372	72.325; 80.990	22.342; 24.745
147	96.815; 103.741	73.516; 75.580	86.358; 88.035	23.001; 23.372	72.327; 81.010	22.343; 24.751
148	96.820; 103.758	73.518; 75.585	86.359; 88.038	23.001; 23.373	72.329; 81.029	22.344; 24.758
149	96.824; 103.775	73.519; 75.589	86.361; 88.042	23.001; 23.374	72.331; 81.049	22.345; 24.765
150	96.829; 103.792	73.521; 75.593	86.363; 88.045	23.002; 23.374	72.333; 81.068	22.347; 24.772

	L. Dardo homens	L. Disco homens	L. Martelo homens	L. Peso homens	L. Dardo mulheres	L. Peso mulheres
<i>t</i>	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$	$IC_{95\%} [U(t)]$
151	96.834; 103.809	73.523; 75.598	86.364; 88.049	23.002; 23.375	72.335; 81.087	22.348; 24.779
152	96.838; 103.826	73.525; 75.602	86.366; 88.052	23.003; 23.376	72.337; 81.106	22.349; 24.785
153	96.843; 103.843	73.527; 75.606	86.367; 88.056	23.003; 23.377	72.339; 81.125	22.350; 24.792
154	96.848; 103.860	73.529; 75.611	86.369; 88.059	23.003; 23.377	72.341; 81.144	22.352; 24.799
155	96.852; 103.876	73.531; 75.615	86.370; 88.062	23.004; 23.378	72.343; 81.163	22.353; 24.805
156	96.856; 103.893	73.533; 75.619	86.372; 88.065	23.004; 23.379	72.345; 81.181	22.354; 24.812
157	96.861; 103.909	73.534; 75.623	86.373; 88.069	23.004; 23.379	72.347; 81.200	22.355; 24.818
158	96.865; 103.926	73.536; 75.628	86.375; 88.072	23.005; 23.380	72.349; 81.218	22.357; 24.825
159	96.870; 103.942	73.538; 75.632	86.376; 88.075	23.005; 23.381	72.351; 81.237	22.358; 24.831
160	96.874; 103.958	73.540; 75.636	86.378; 88.078	23.006; 23.381	72.353; 81.255	22.359; 24.838
161	96.878; 103.974	73.542; 75.640	86.379; 88.082	23.006; 23.382	72.355; 81.273	22.360; 24.844
162	96.882; 103.990	73.543; 75.644	86.381; 88.085	23.006; 23.383	72.357; 81.291	22.361; 24.850
163	96.887; 104.005	73.545; 75.648	86.382; 88.088	23.007; 23.383	72.359; 81.309	22.362; 24.857
164	96.891; 104.021	73.547; 75.652	86.384; 88.091	23.007; 23.384	72.361; 81.327	22.364; 24.863
165	96.895; 104.037	73.548; 75.656	86.385; 88.094	23.007; 23.384	72.362; 81.344	22.365; 24.869
166	96.899; 104.052	73.550; 75.660	86.387; 88.097	23.008; 23.385	72.364; 81.362	22.366; 24.875
167	96.903; 104.068	73.552; 75.664	86.388; 88.100	23.008; 23.386	72.366; 81.379	22.367; 24.882
168	96.907; 104.083	73.553; 75.668	86.389; 88.103	23.008; 23.386	72.368; 81.397	22.368; 24.888
169	96.911; 104.098	73.555; 75.671	86.391; 88.106	23.009; 23.387	72.370; 81.414	22.369; 24.894
170	96.915; 104.113	73.557; 75.675	86.392; 88.109	23.009; 23.388	72.371; 81.431	22.370; 24.900
171	96.919; 104.128	73.558; 75.679	86.393; 88.112	23.009; 23.388	72.373; 81.448	22.371; 24.906
172	96.923; 104.143	73.560; 75.683	86.395; 88.115	23.010; 23.389	72.375; 81.465	22.372; 24.912
173	96.927; 104.158	73.561; 75.686	86.396; 88.118	23.010; 23.389	72.377; 81.482	22.373; 24.918
174	96.931; 104.173	73.563; 75.690	86.397; 88.121	23.010; 23.390	72.378; 81.499	22.374; 24.924
175	96.935; 104.188	73.565; 75.694	86.399; 88.123	23.011; 23.391	72.380; 81.516	22.375; 24.930
176	96.939; 104.202	73.566; 75.698	86.400; 88.126	23.011; 23.391	72.382; 81.533	22.376; 24.936
177	96.942; 104.217	73.568; 75.701	86.401; 88.129	23.011; 23.392	72.383; 81.549	22.378; 24.941
178	96.946; 104.231	73.569; 75.705	86.403; 88.132	23.012; 23.392	72.385; 81.566	22.379; 24.947
179	96.950; 104.246	73.571; 75.708	86.404; 88.135	23.012; 23.393	72.387; 81.582	22.380; 24.953
180	96.954; 104.260	73.572; 75.712	86.405; 88.138	23.012; 23.393	72.388; 81.598	22.381; 24.959
181	96.957; 104.274	73.574; 75.715	86.406; 88.140	23.013; 23.394	72.390; 81.615	22.382; 24.965
182	96.961; 104.288	73.575; 75.719	86.408; 88.143	23.013; 23.395	72.392; 81.631	22.383; 24.970
183	96.965; 104.303	73.577; 75.723	86.409; 88.146	23.013; 23.395	72.393; 81.647	22.384; 24.976
184	96.968; 104.316	73.578; 75.726	86.410; 88.148	23.013; 23.396	72.395; 81.663	22.385; 24.982
185	96.972; 104.330	73.579; 75.729	86.411; 88.151	23.014; 23.396	72.396; 81.679	22.386; 24.987
186	96.975; 104.344	73.581; 75.733	86.412; 88.154	23.014; 23.397	72.398; 81.694	22.387; 24.993
187	96.979; 104.358	73.582; 75.736	86.414; 88.156	23.014; 23.397	72.399; 81.710	22.387; 24.999
188	96.982; 104.372	73.584; 75.740	86.415; 88.159	23.015; 23.398	72.401; 81.726	22.388; 25.004
189	96.986; 104.385	73.585; 75.743	86.416; 88.162	23.015; 23.398	72.403; 81.741	22.389; 25.010
190	96.989; 104.399	73.587; 75.746	86.417; 88.164	23.015; 23.399	72.404; 81.757	22.390; 25.015
191	96.993; 104.412	73.588; 75.750	86.418; 88.167	23.015; 23.399	72.406; 81.772	22.391; 25.021
192	96.996; 104.426	73.589; 75.753	86.419; 88.169	23.016; 23.400	72.407; 81.788	22.392; 25.026
193	97.000; 104.439	73.591; 75.756	86.421; 88.172	23.016; 23.400	72.409; 81.803	22.393; 25.032
194	97.003; 104.452	73.592; 75.760	86.422; 88.174	23.016; 23.401	72.410; 81.818	22.394; 25.037
195	97.006; 104.466	73.593; 75.763	86.423; 88.177	23.017; 23.401	72.411; 81.833	22.395; 25.042
196	97.010; 104.479	73.595; 75.766	86.424; 88.179	23.017; 23.402	72.413; 81.848	22.396; 25.048
197	97.013; 104.492	73.596; 75.769	86.425; 88.182	23.017; 23.403	72.414; 81.863	22.397; 25.053
198	97.016; 104.505	73.597; 75.773	86.426; 88.184	23.017; 23.403	72.416; 81.878	22.398; 25.058
199	97.020; 104.518	73.599; 75.776	86.427; 88.187	23.018; 23.404	72.417; 81.893	22.399; 25.064
200	97.023; 104.531	73.600; 75.779	86.428; 88.189	23.018; 23.405	72.419; 81.908	22.399; 25.069

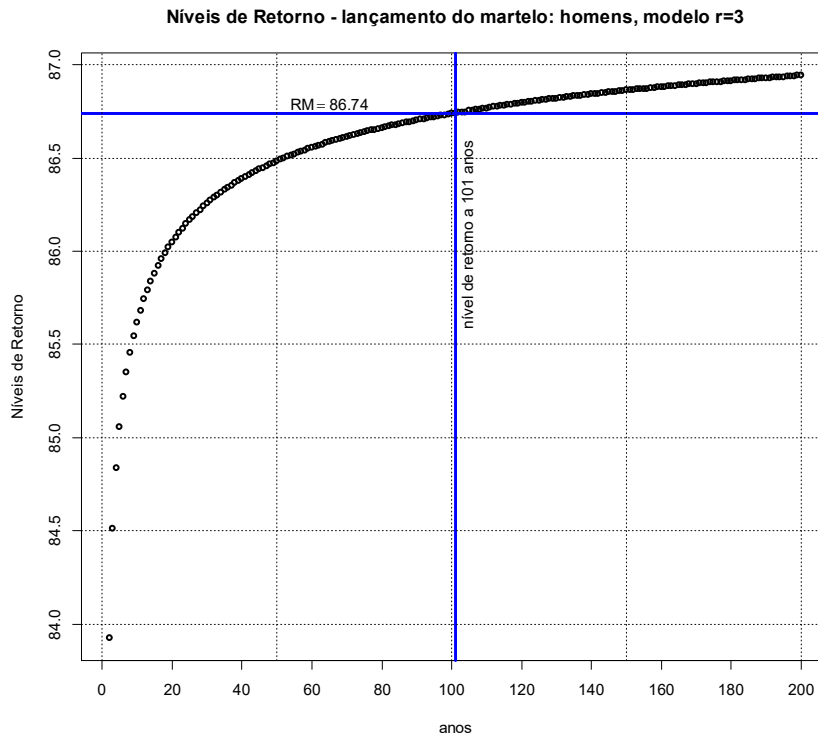
**Anexo 4.6.4. Gráfico dos níveis de retorno a  $t$ -anos, para o lançamento do dardo masculino, segundo o modelo  $GEV_{r=2}$  ajustado**



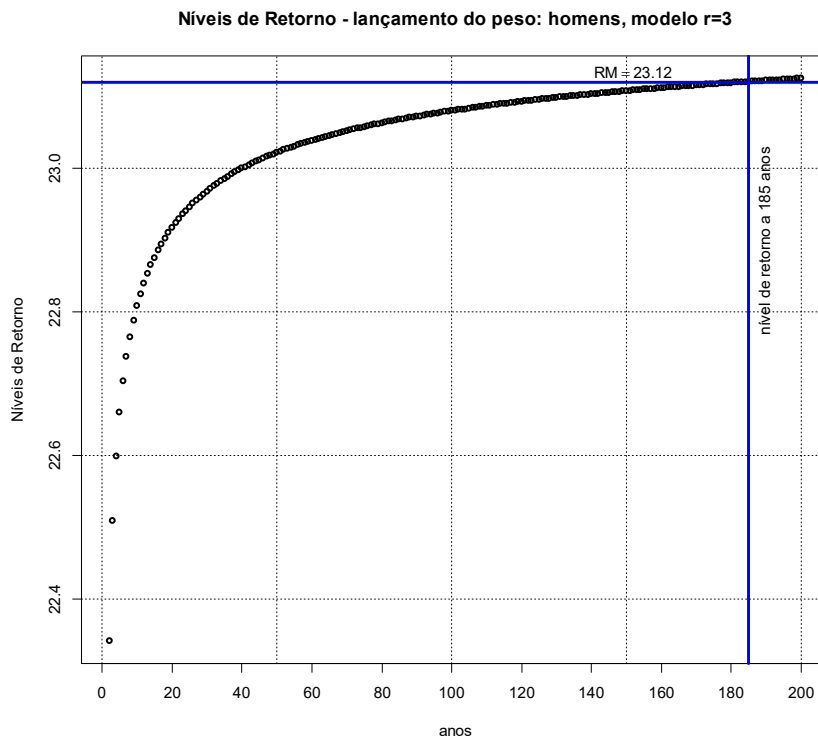
**Anexo 4.6.5. Gráfico de níveis de retorno a  $t$ -anos, para o lançamento do disco masculino, segundo o modelo  $GEV_{r=2}$  ajustado**



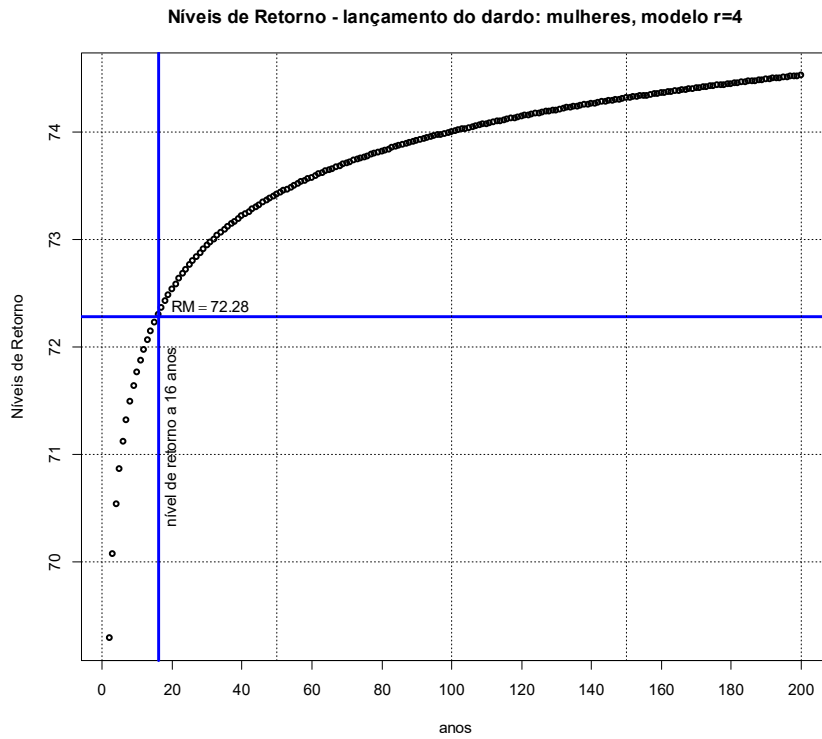
**Anexo 4.6.6. Gráfico de níveis de retorno a  $t$ -anos, para o lançamento do martelo masculino, segundo o modelo  $GEV_{r=3}$  ajustado**



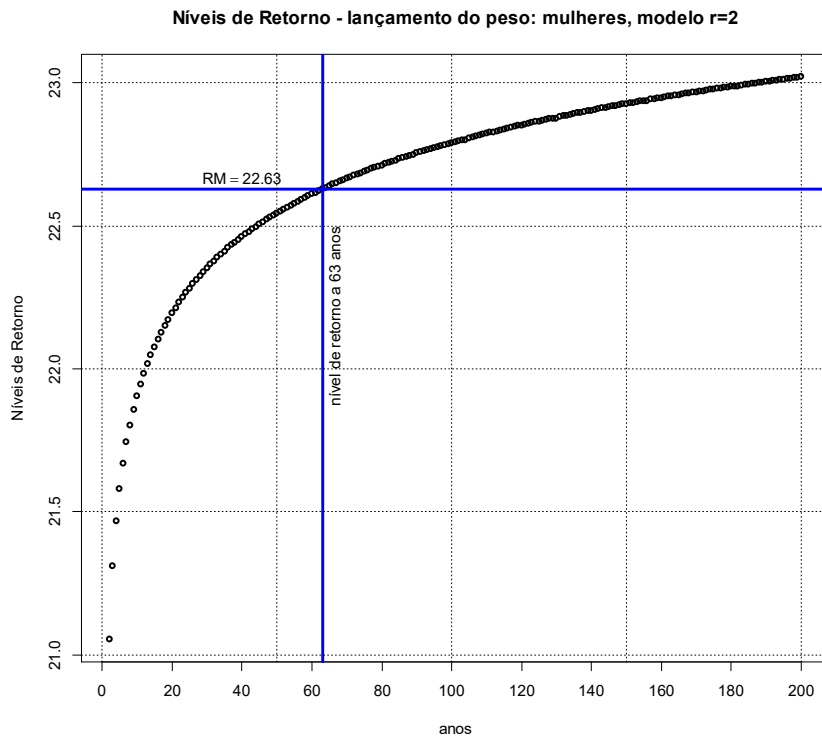
**Anexo 4.6.7. Gráfico de níveis de retorno a  $t$ -anos, para o lançamento do peso masculino, segundo o modelo  $GEV_{r=3}$  ajustado**



**Anexo 4.6.8. Gráfico de níveis de retorno a  $t$ -anos, para o lançamento do dardo feminino, segundo o modelo GEV $r=4$  ajustado**



**Anexo 4.6.9. Gráfico de níveis de retorno a  $t$ -anos, para o lançamento do peso feminino, segundo o modelo GEV $r=2$  ajustado**





## ANEXO 5 – EXCESSOS ACIMA DE UM LIMIAR

### ANEXO 5.1. *Mean residual life* adaptado: “Esticar a Corda”

Exemplificação:

```

u=seq(from=min(dados), to=max(dados), length.out=length(dados)) # 1ª etapa
u=seq(from=min(dados), to=max(dados), by=0.005) # 2ª etapa
u=seq(from=min(dados), to=max(dados), by=0.01) # 3ª etapa
u=seq(from=min(dados), to=max(dados), by=0.015) # 4ª etapa

x <- vector("numeric", length(u))
for(i in 1:length(x)) {
  excessos= dados [dados >u[i]]
  x[i]=mean(excessos-u[i])
}
plot(x~u, type="l", main="vida média residual",
xlab=expression(italic(u)), sub="amostra", ylab="excesso médio")

```

Observação A5.1: não obstante apresentarmos no código acima 4 etapas de suavização, nesta tese utilizamos apenas duas etapas, onde procuramos que a etapa 2 considerasse entre 10-15% do total da amostra. De notar que a etapa 1 contém a totalidade das observações disponíveis na série de dados. Assim:

► 1ª etapa:

- *Mean residual Life Plot*

► 2ª etapa e seguintes:

- definir a frequência relativa que se deseja e fazer corresponder na sequência que vai do mínimo ao máximo no argumento “by”, i.e., o valor a acumular, ou o incremento na sequência.

Nota: nesta tese definimos que a última etapa deveria considerar entre 10-15% de observações. Contudo, definir esta frequência relativa ou outra depende do grau de suavização que se pretende observar no gráfico. Isto é, um gráfico demasiado linear, significa que a frequência de observações é muita baixa; opostamente, uma frequência elevada de observações não permitirá distinguir o novo gráfico da sua versão original (i.e., aquele que se observou na 1ª etapa).

- A “nova” amostra,  $x_i^*, i = 1:n, \dots, n:n$ , será formada pelo conjunto de valores:

$$x_{1:n}^* = x_{1:n}, x_{2:n}^* = x_{1:n}^* + by, \dots, x_{n:n}^* = x_{n-1:n}^* + by, \text{ com } x_{1:n} = x_{1:n}^*, x_{2:n} < x_{2:n}^*, x_{3:n} < x_{3:n}^*, \dots, x_{n:n} \geq x_{n:n}^* \text{ e } x_{1:n}^* \leq x_{2:n}^*, \dots, x_{n:n}^*.$$

- O processo é interrompido quando  $x_{n:n}^*$ , pelo menos, iguala  $x_{n:n}$ , uma vez que  $x_{n:n}^* \leq x_{n:n}$ .

Nota: o valor definido no argumento “by”, usado na programação em R, depende da frequência relativa atribuída em cada etapa. Contudo, caso se decida atribuir um valor a “by” (em vez de definir uma frequência de observações), isto corresponderá a uma certa frequência de observações a considerar no gráfico. Isto é:

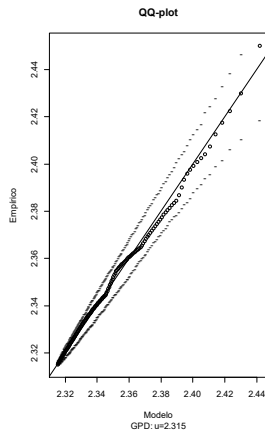
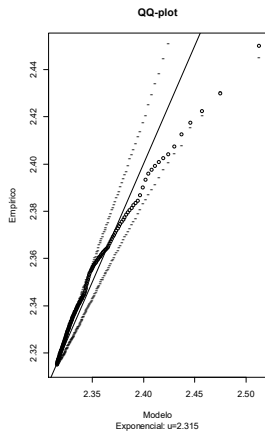
- baixos valores de “by”, implica mais observações;
- altos valores de “by”, reduz o número de observações no gráfico.

**ANEXO 5.2. Método *Peaks Over Threshold*: ajustamento dos modelos  $EXP_{\gamma=0}$  vs  $GPD_{\gamma \neq 0}$**

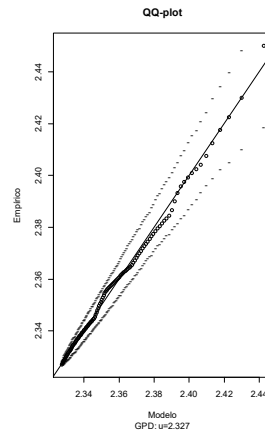
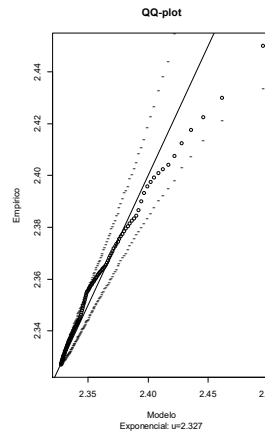
Gráficos *QQ-Plot* relativos ao ajuste da distribuição Exponencial vs distribuição generalizada de Pareto, referentes aos dados dos saltos do atletismo, segundo vários limiares.

**Anexo 5.2.1. Salto em altura – homens**

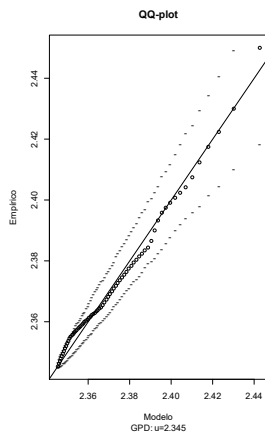
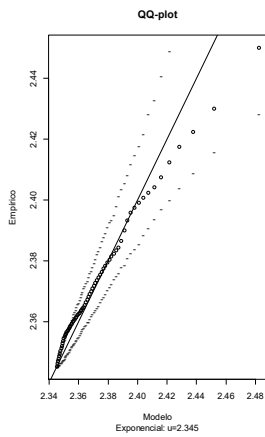
$u=2.315$



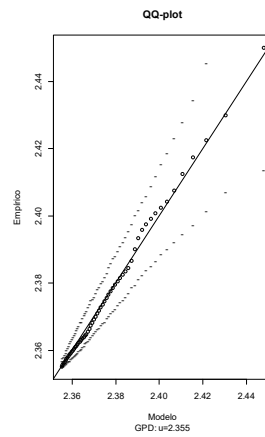
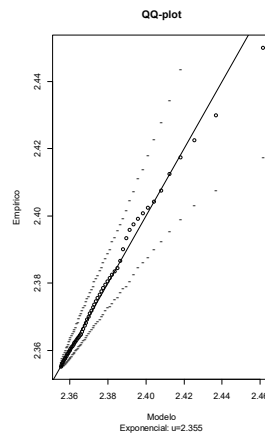
$u=2.327$



$u=2.345$

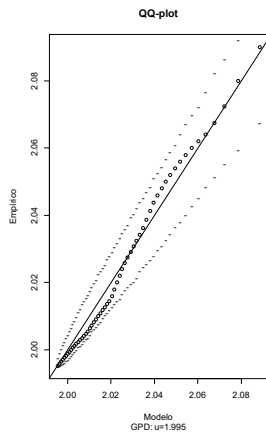
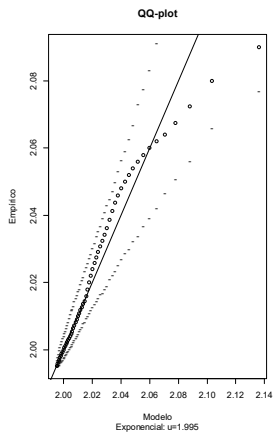


$u=2.355$

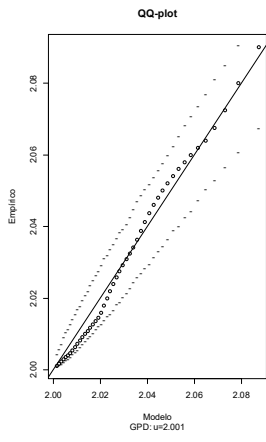
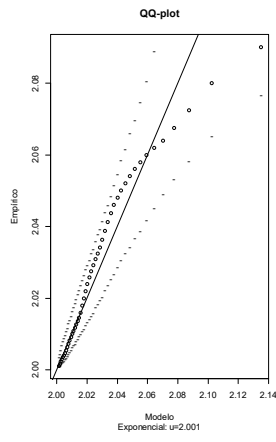


Anexo 5.2.2. Salto em altura – mulheres

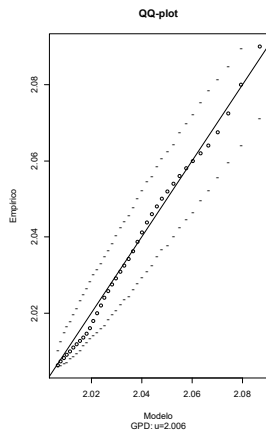
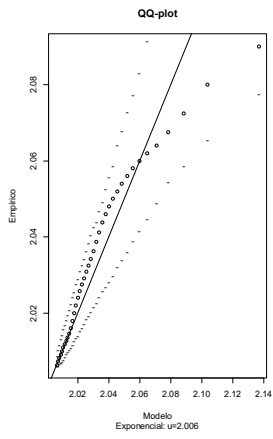
$u=1.995$



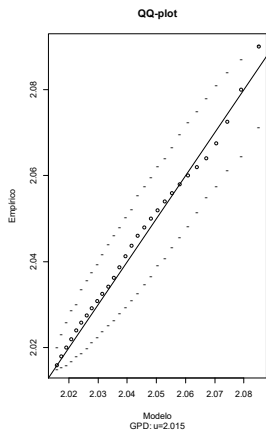
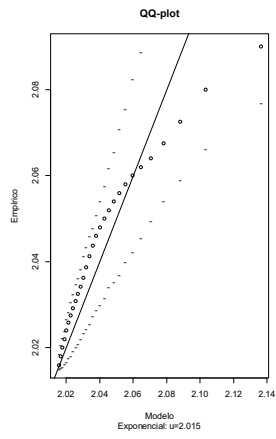
$u=2.001$



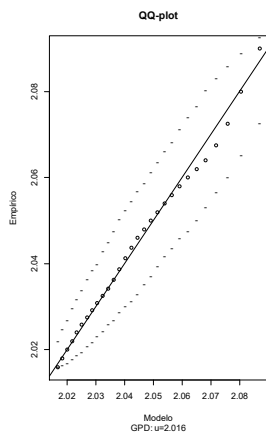
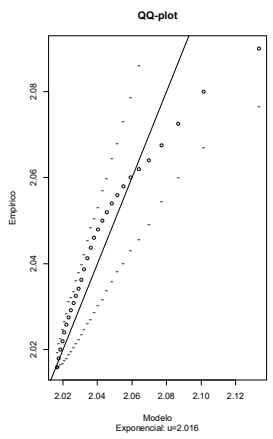
$u=2.006$



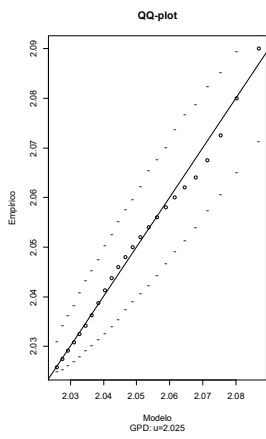
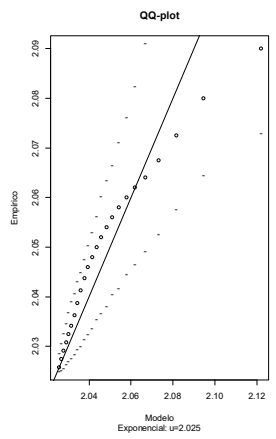
$u=2.015$



$u=2.016$

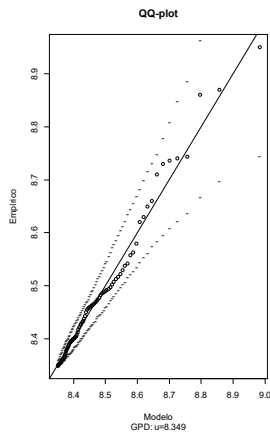
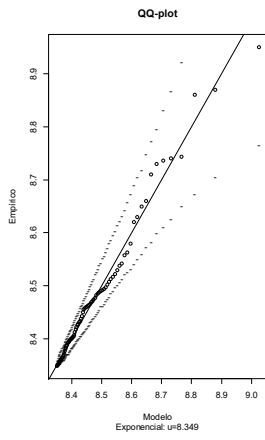


$u=2.025$

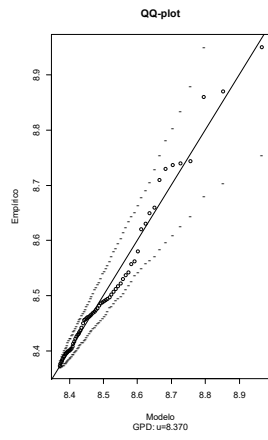
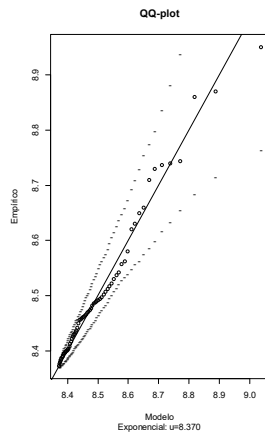


**Anexo 5.2.3. Salto em comprimento – homens**

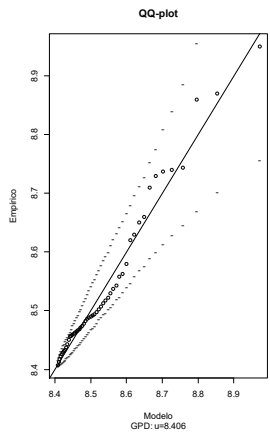
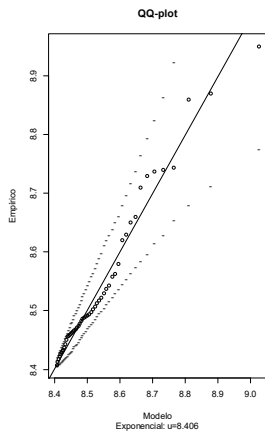
$u=8.349$



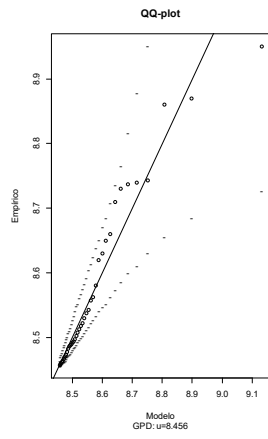
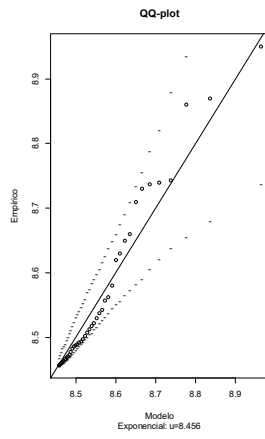
$u=8.370$



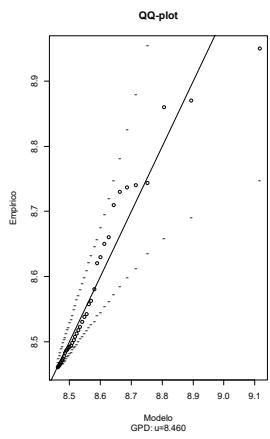
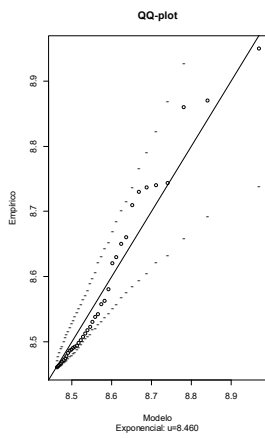
$u=8.406$



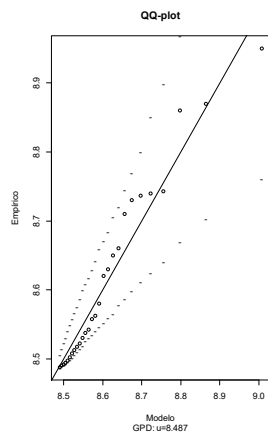
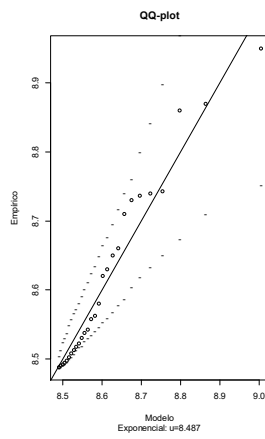
$u=8.456$



$u=8.460$

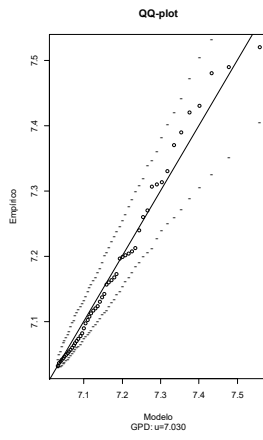
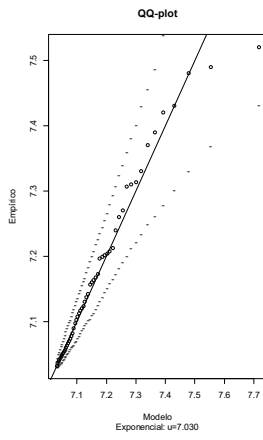


$u=8.487$

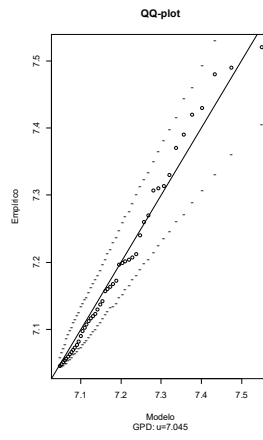
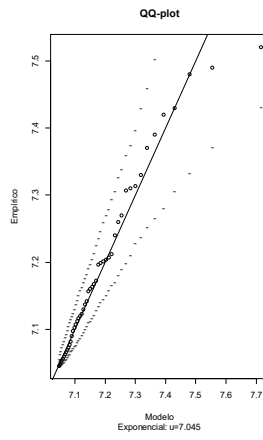


**Anexo 5.2.4. Salto em comprimento – mulheres**

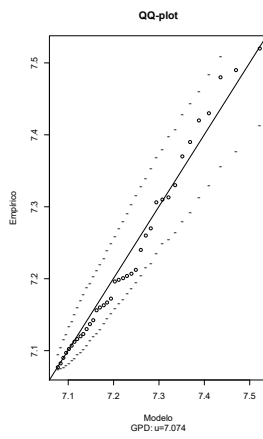
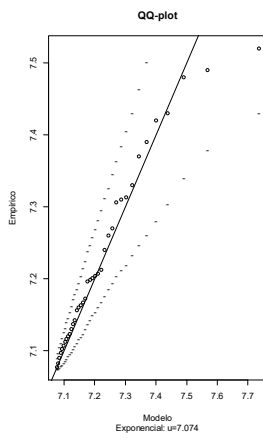
$u=7.030$



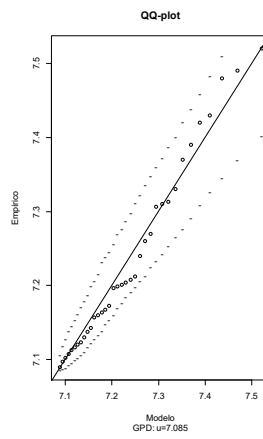
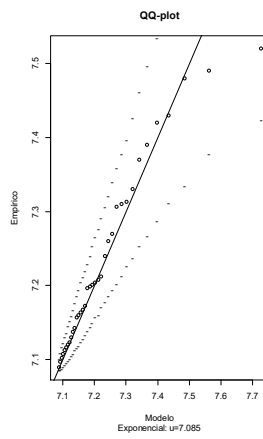
$u=7.045$



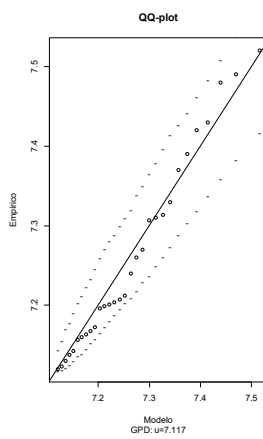
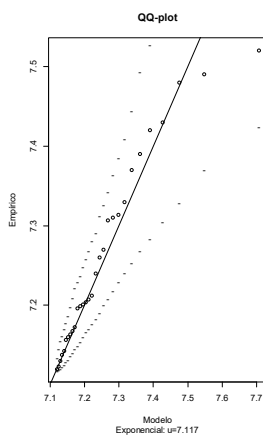
$u=7.074$



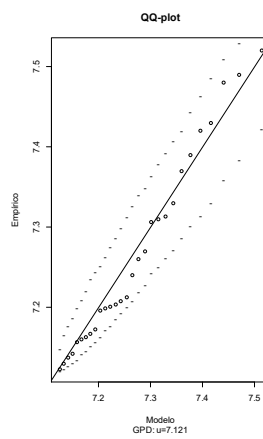
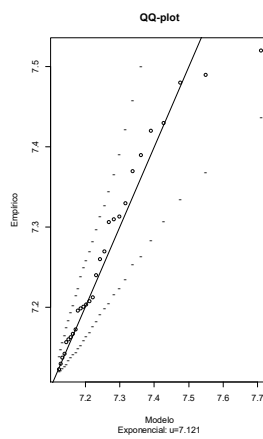
$u=7.085$



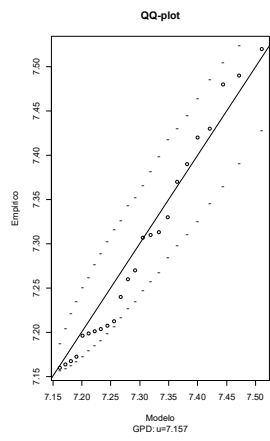
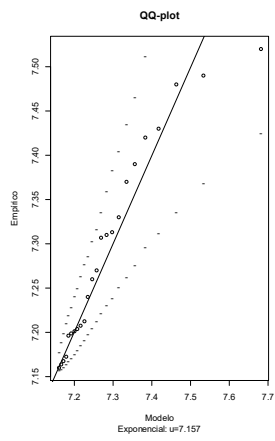
$u=7.117$



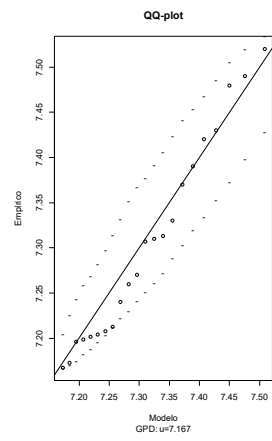
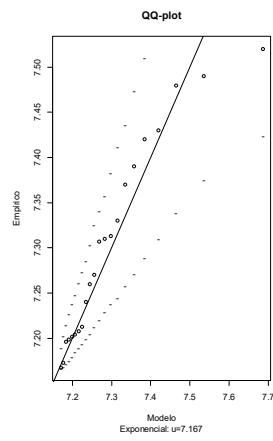
$u=7.121$



$u=7.157$

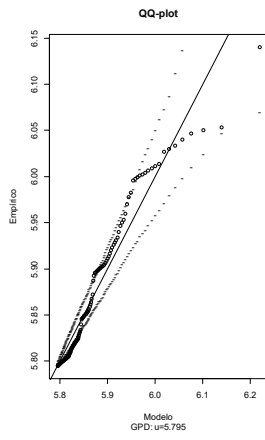
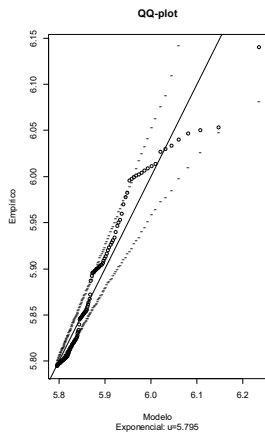


$u=7.167$

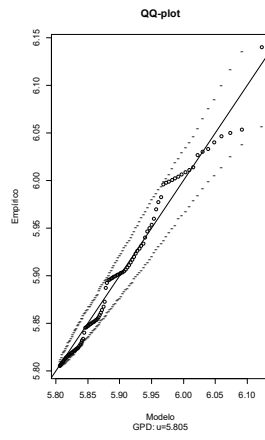
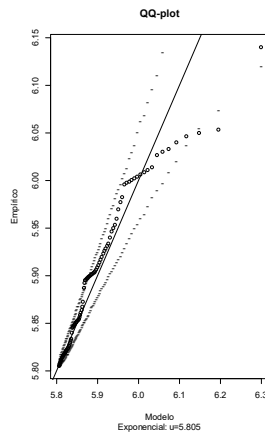


Anexo 5.2.5. Salto com vara – homens

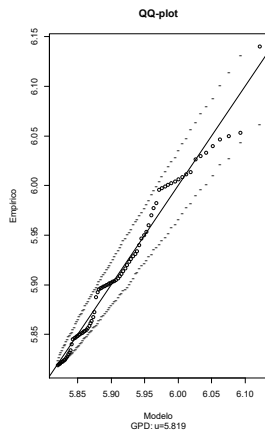
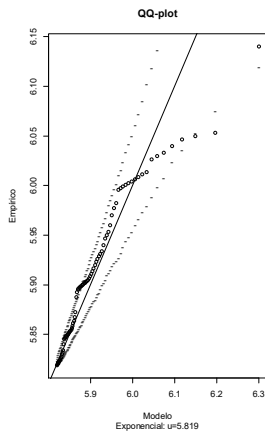
$u=5.795$



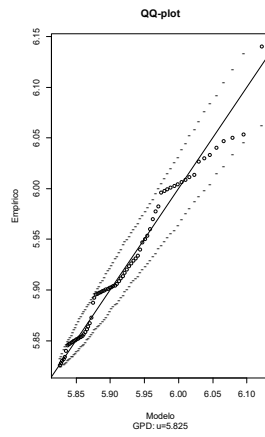
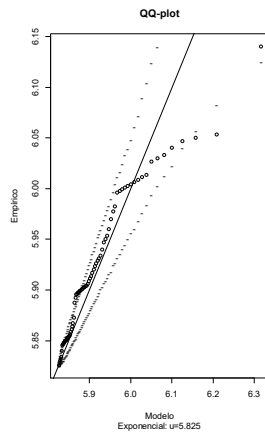
$u=5.805$



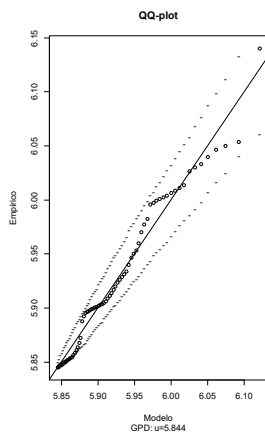
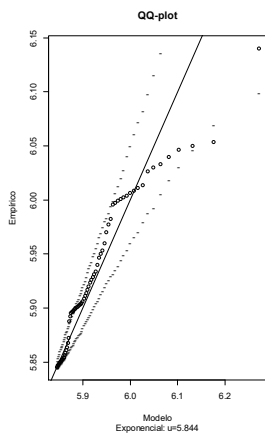
$u=5.819$



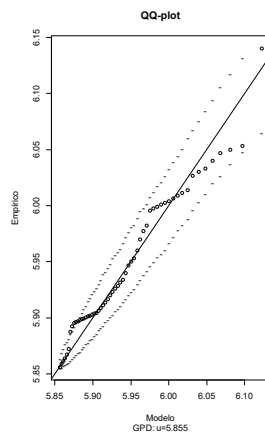
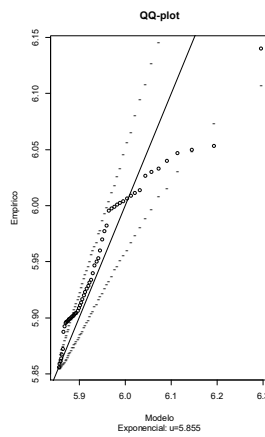
$u=5.825$



$u=5.844$

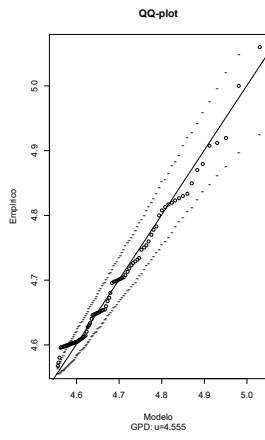
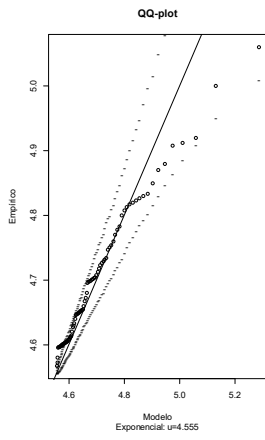


$u=5.855$

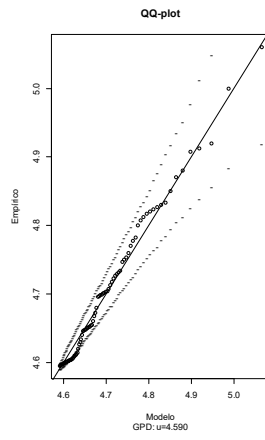
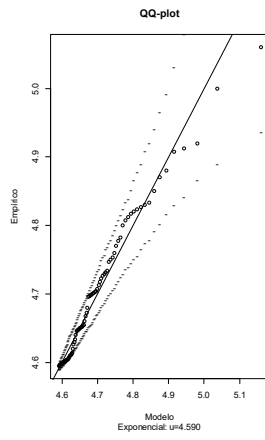


Anexo 5.2.6. Salto com vara – mulheres

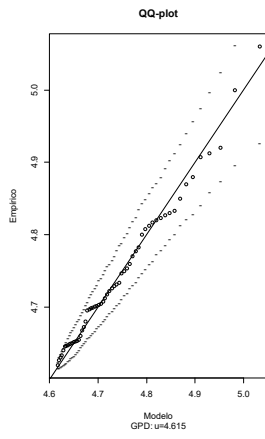
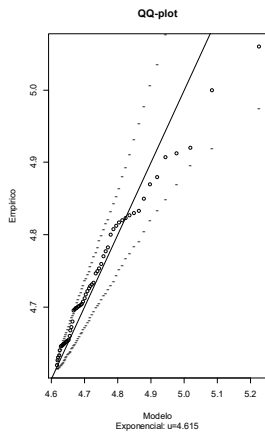
$u=4.555$



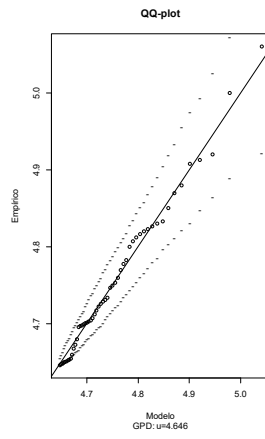
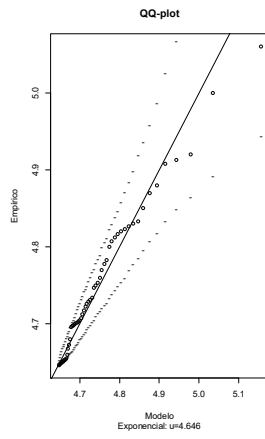
$u=4.590$



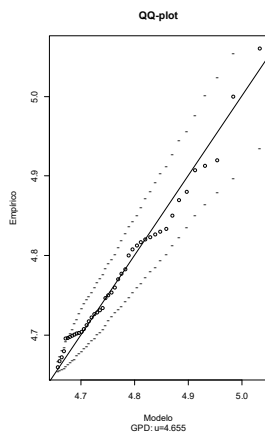
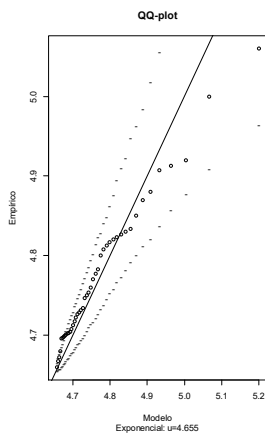
$u=4.615$



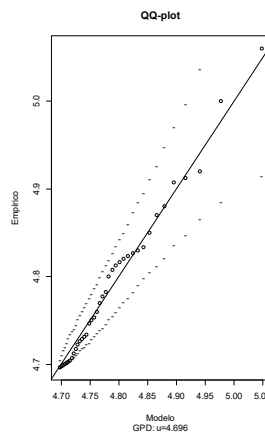
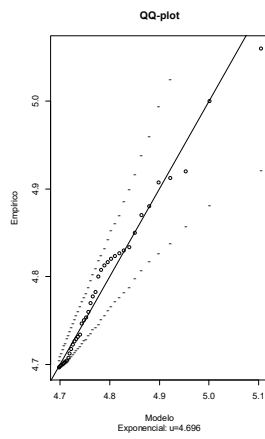
$u=4.646$



$u=4.655$



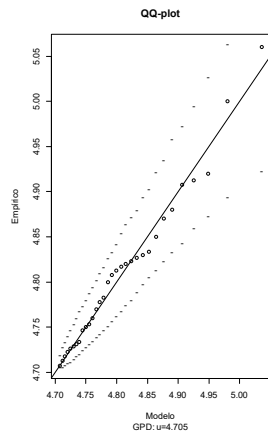
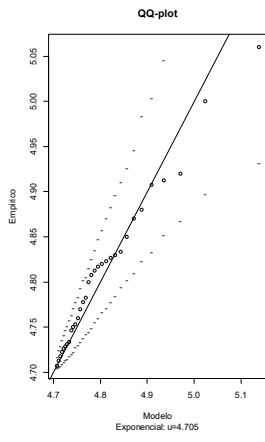
$u=4.696$



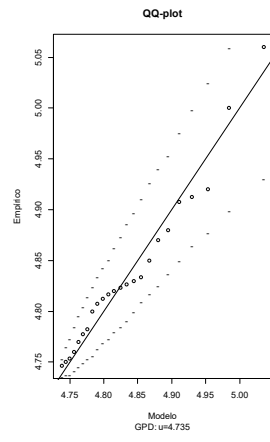
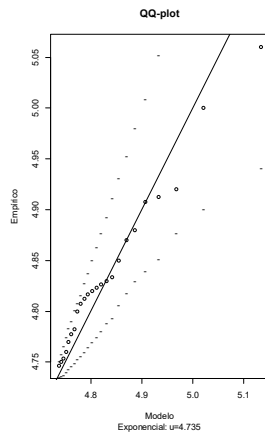


Anexos

$u=4.705$

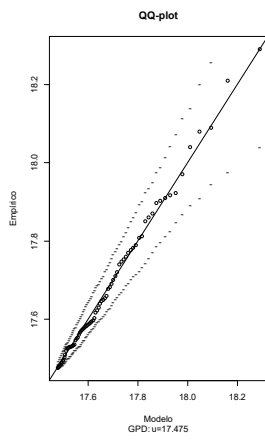
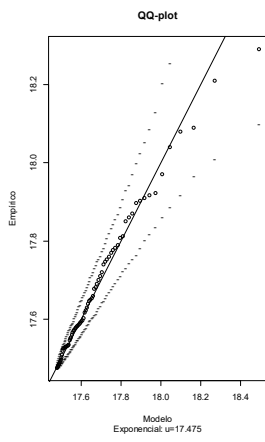


$u=4.735$

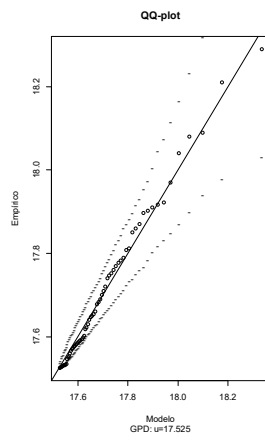
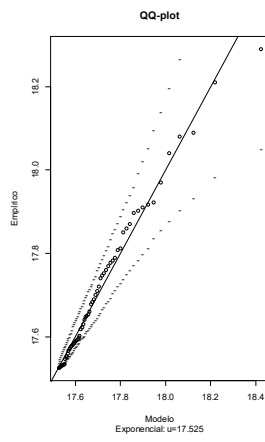


Anexo 5.2.7. Triplo-salto – homens

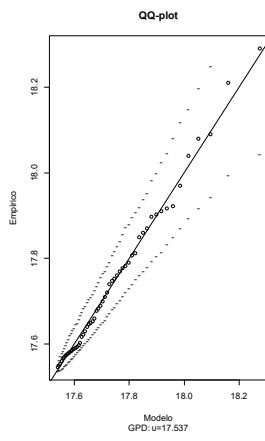
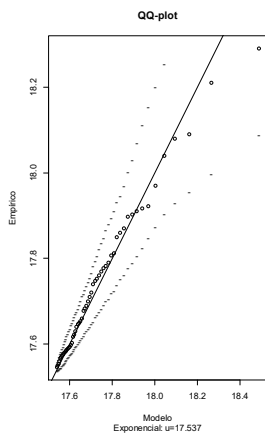
$u=17.475$



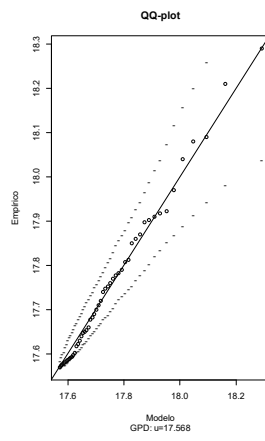
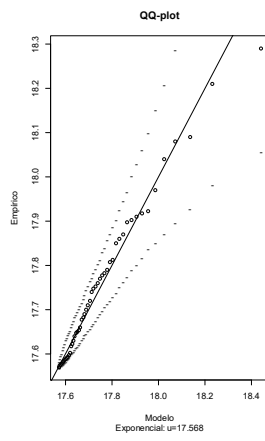
$u=17.525$



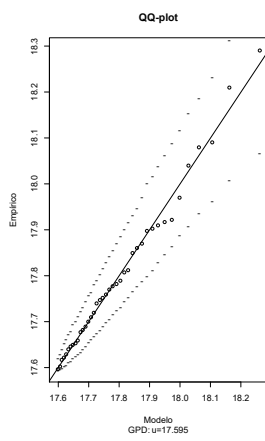
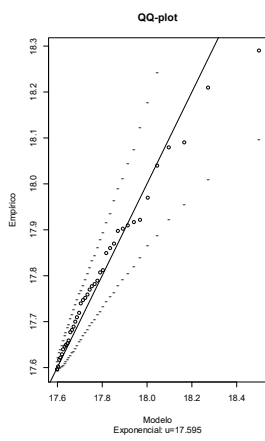
$u=17.537$



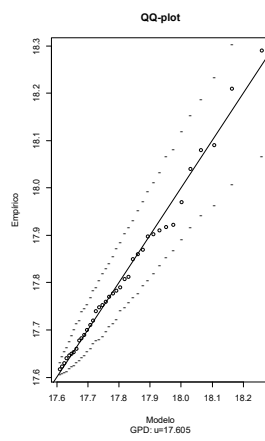
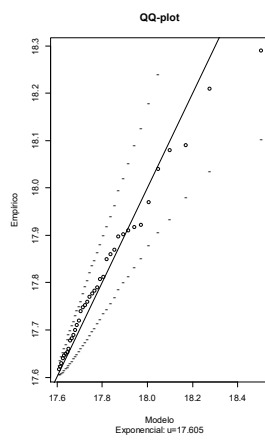
$u=17.568$



$u=17.595$

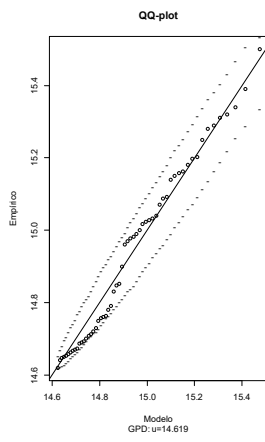
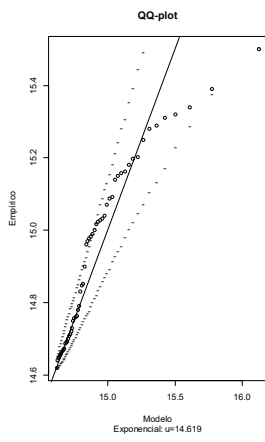


$u=17.605$

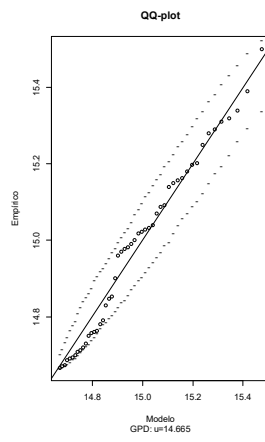
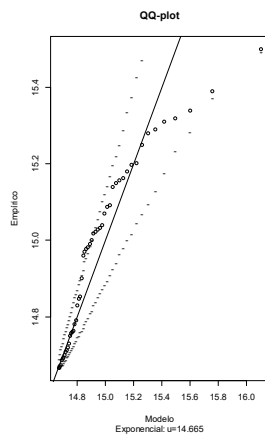


### Anexo 5.2.8. Triplo-salto – mulheres

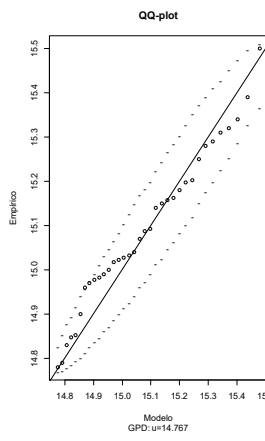
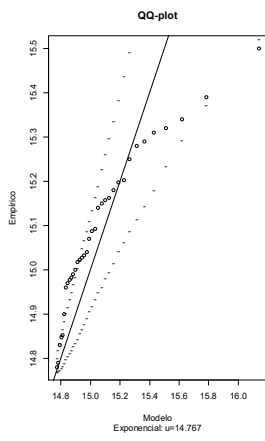
$u=14.619$



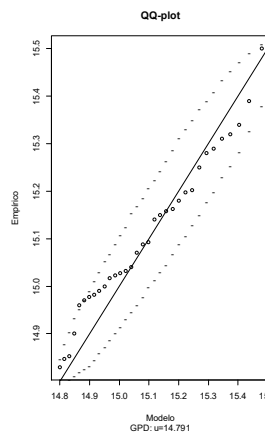
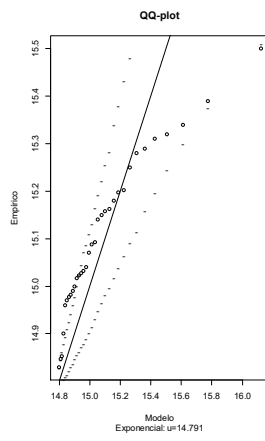
$u=14.665$



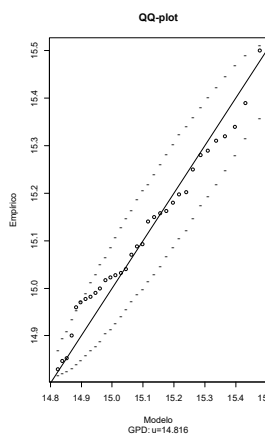
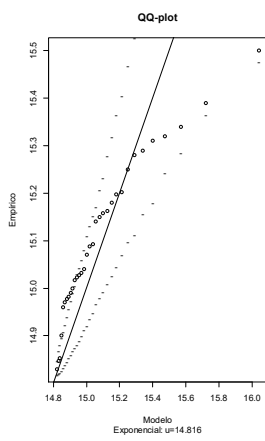
$u=14.767$



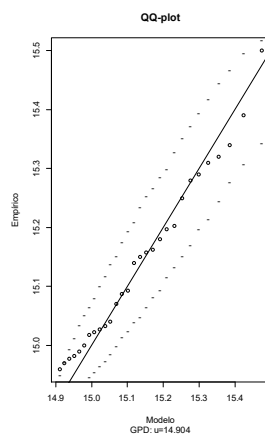
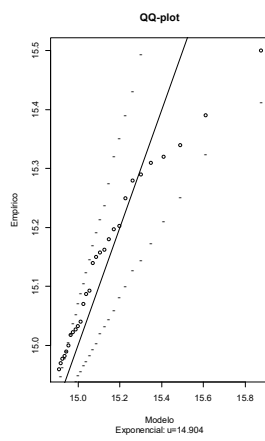
$u=14.791$



$u=14.816$

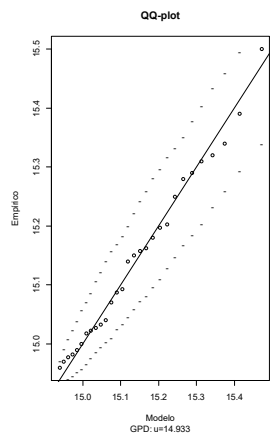
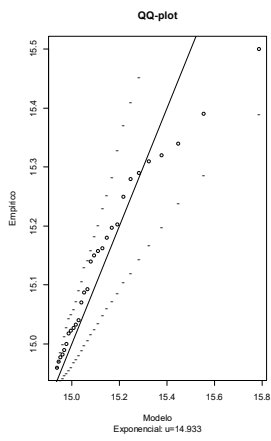


$u=14.904$

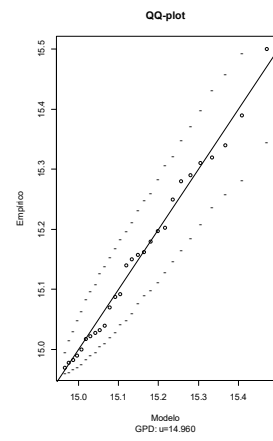
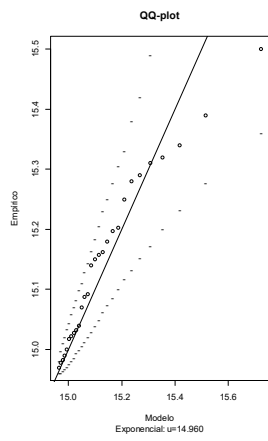


Anexos

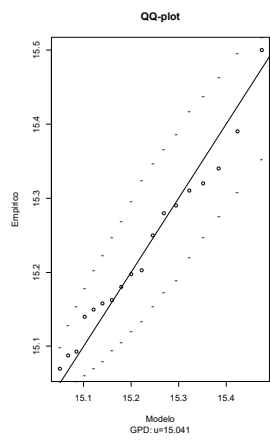
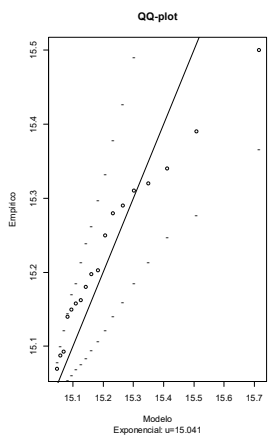
$u=14.933$



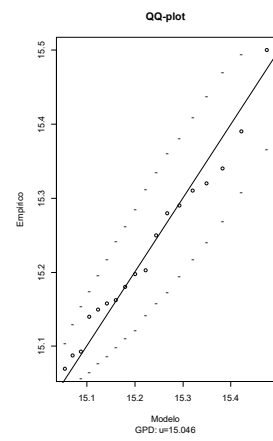
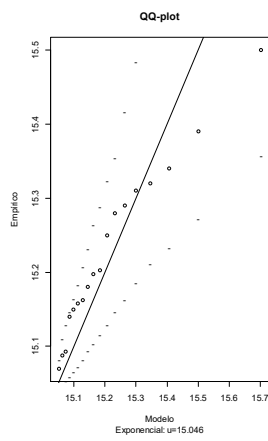
$u=14.960$



$u=15.041$



$u=15.046$

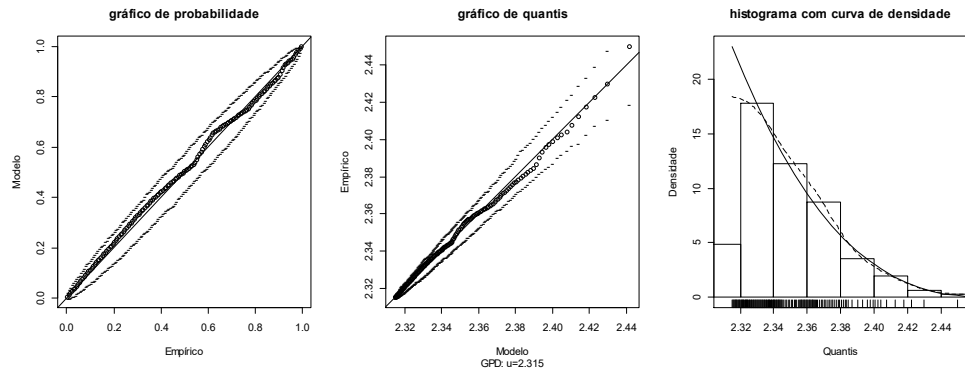


**ANEXO 5.3. Método *Peaks Over Threshold*: diagnóstico dos modelos  $\mu_i$  vs  $\mu_j$ , com  $j>i$**

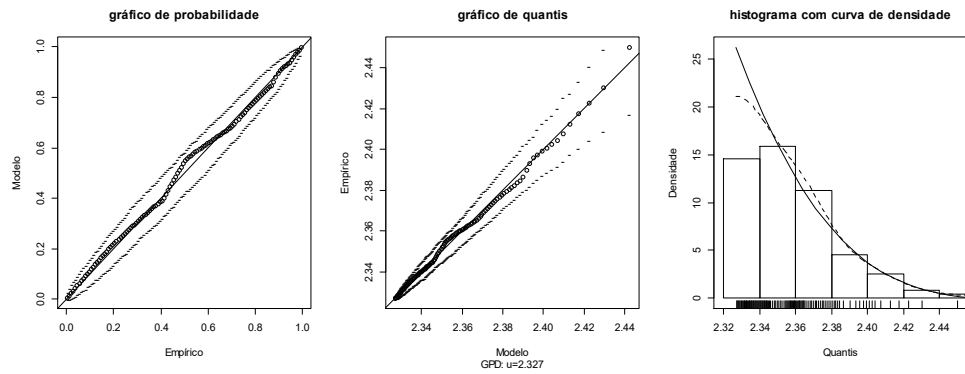
Gráficos *PP-Plot*, *QQ-Plot* e histograma com a curva de densidade associados ao ajuste da distribuição Exponencial ou distribuição generalizada de Pareto, conforme resultados da comparação distribuição Exponencial vs GPD, referentes aos dados dos saltos do atletismo, segundo vários limiares.

**Anexo 5.3.1. Salto em altura – homens**

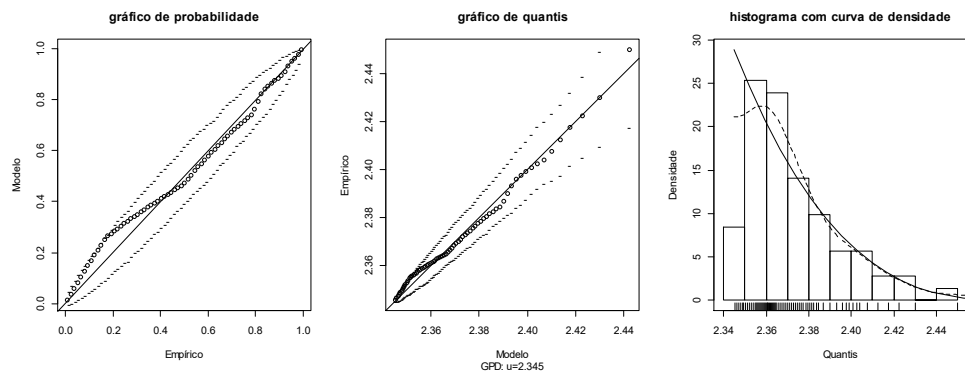
**$u=2.315$**



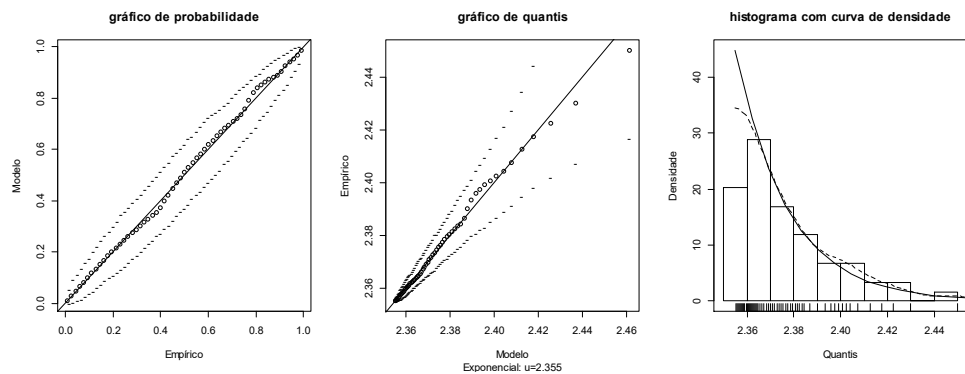
**$u=2.327$**



**$u=2.345$**

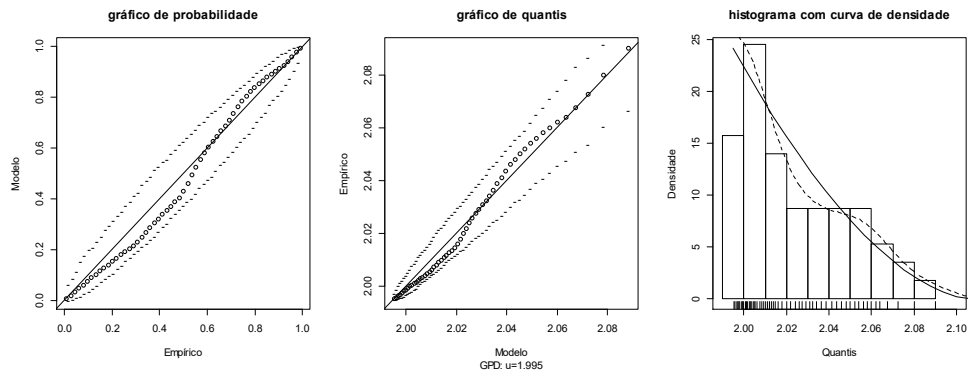


**$u=2.355$**

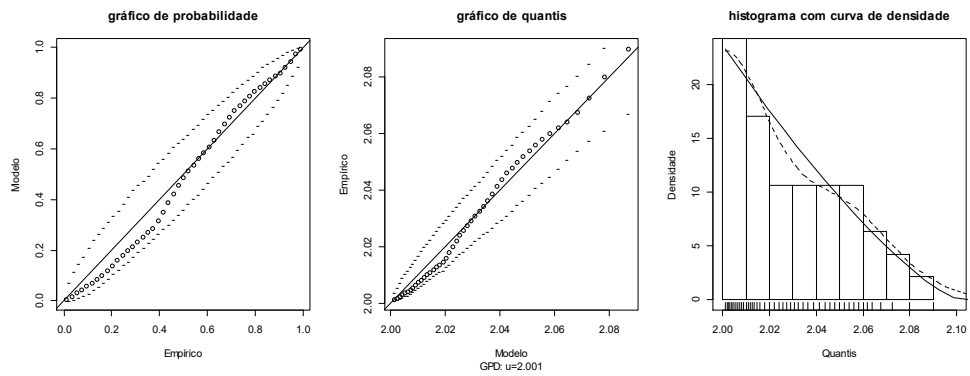


**Anexo 5.3.2. Salto em altura – mulheres**

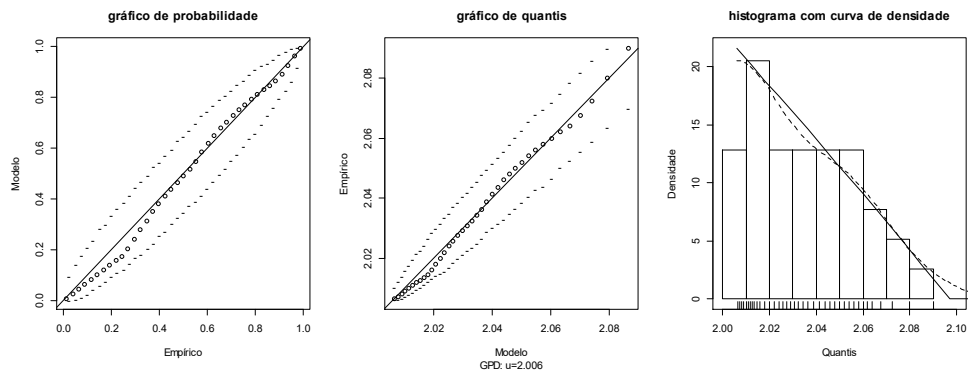
**$u=1.995$**



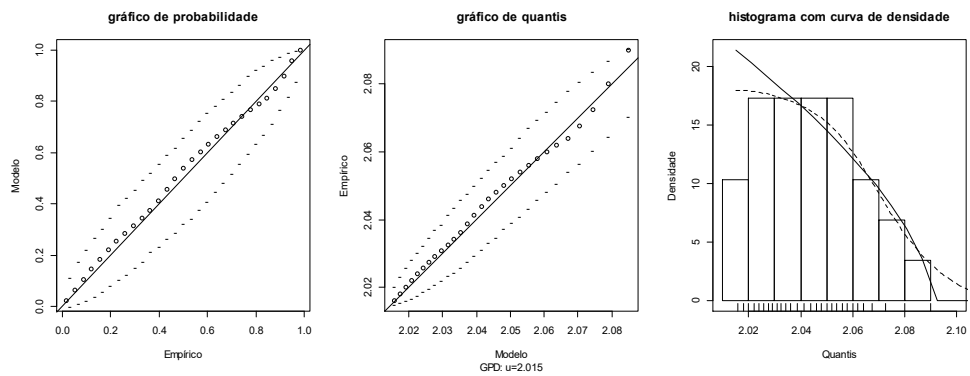
**$u=2.001$**



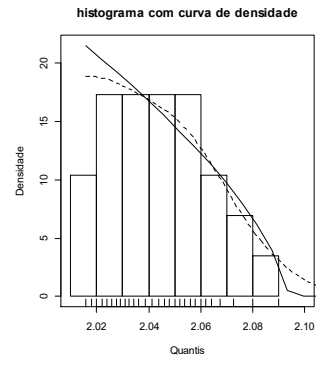
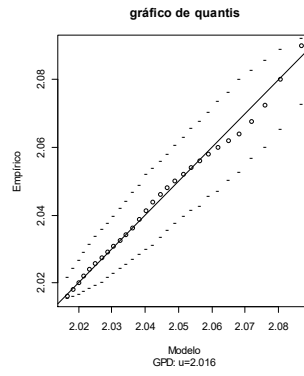
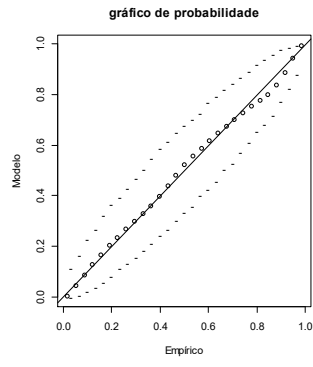
**$u=2.006$**



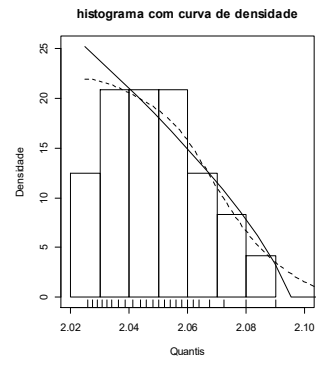
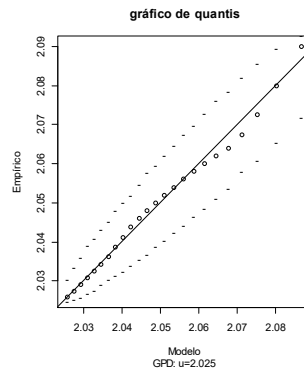
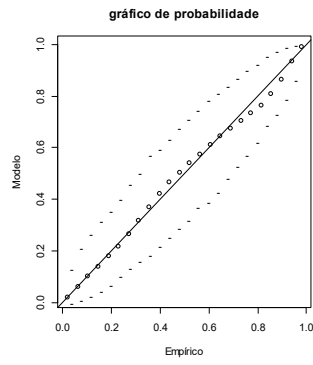
**$u=2.015$**



**$u=2.016$**

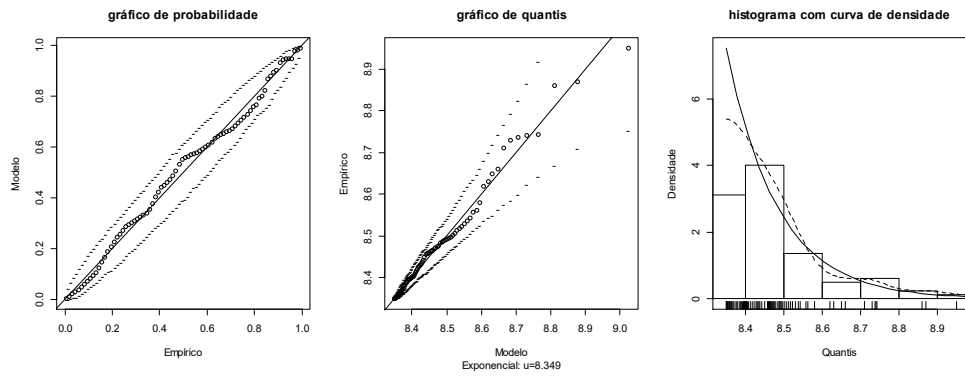


**$u=2.025$**

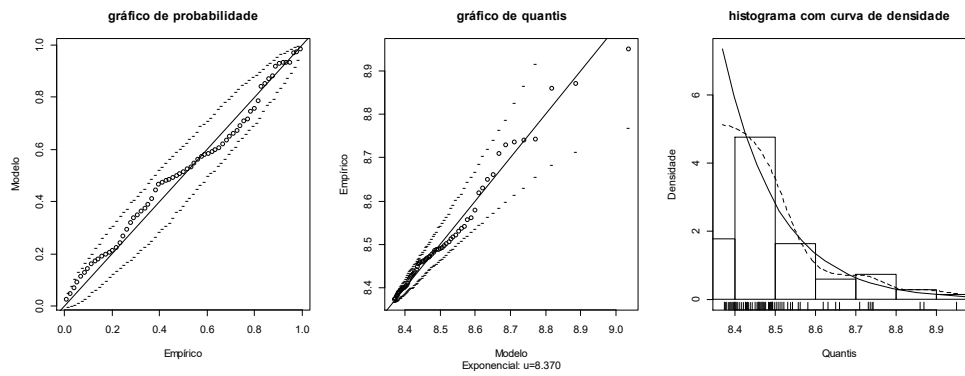


**Anexo 5.3.3. Salto em comprimento – homens**

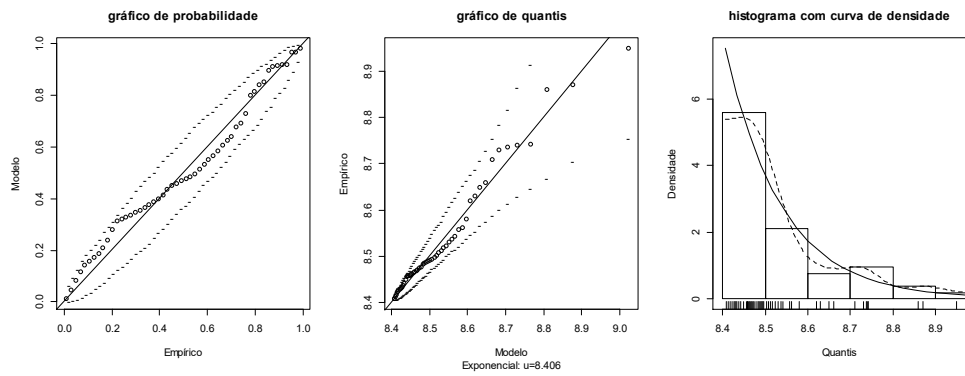
**$u=8.349$**



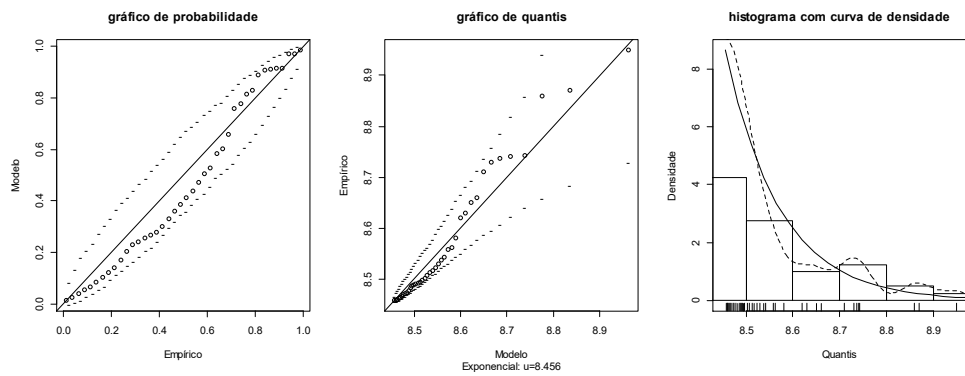
**$u=8.370$**



**$u=8.406$**

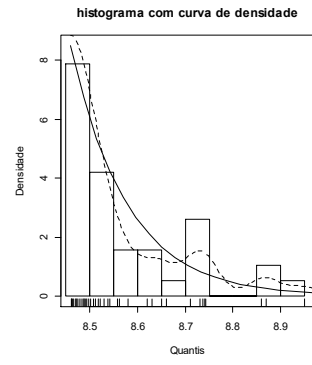
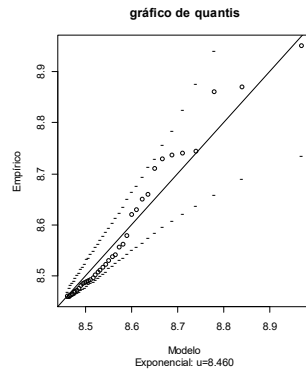
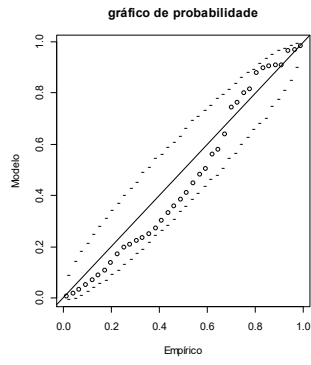


**$u=8.456$**

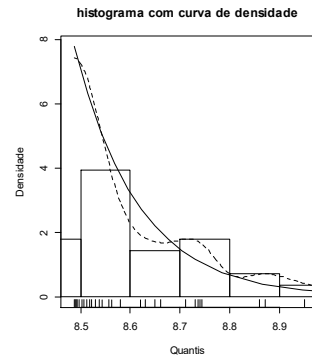
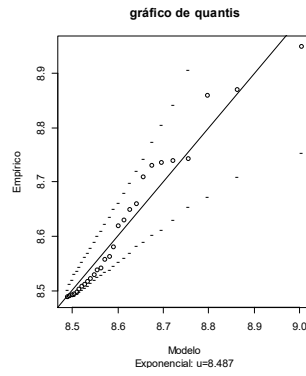
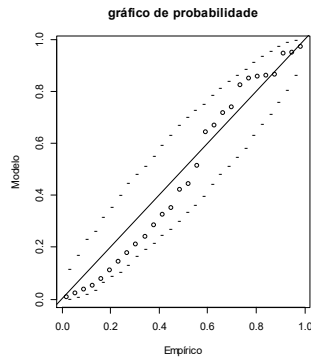




**$u=8.460$**

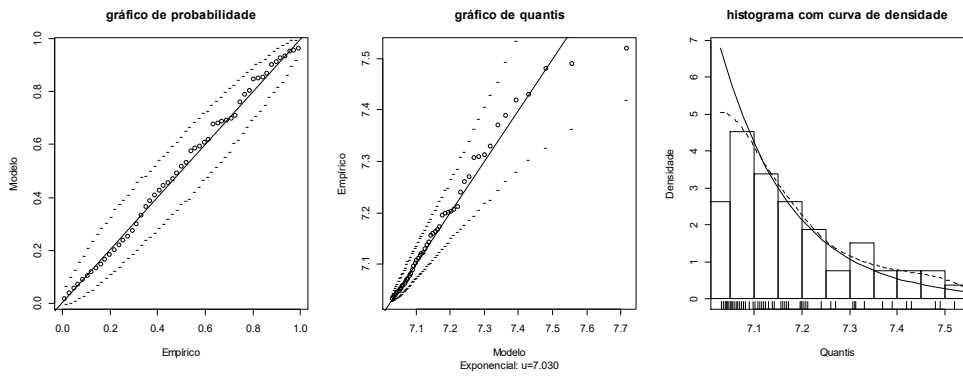


**$u=8.487$**

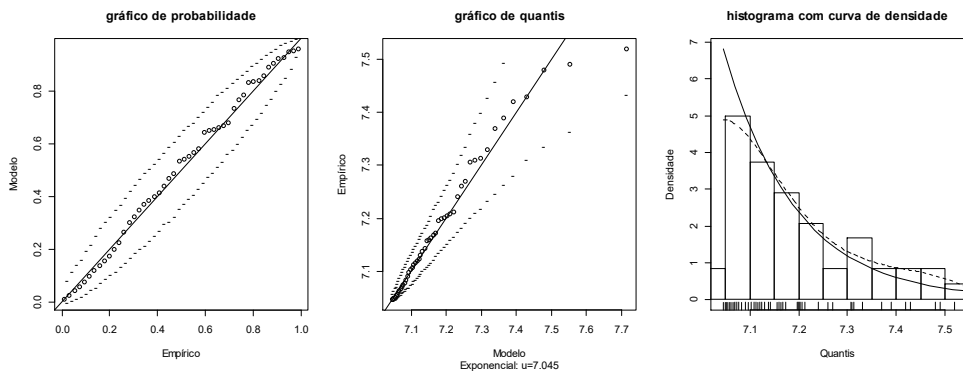


**Anexo 5.3.4. Salto em comprimento – mulheres**

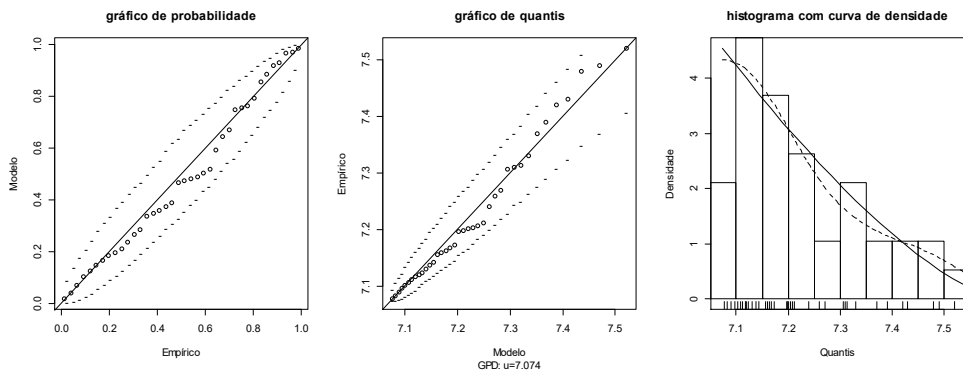
**$u=7.030$**



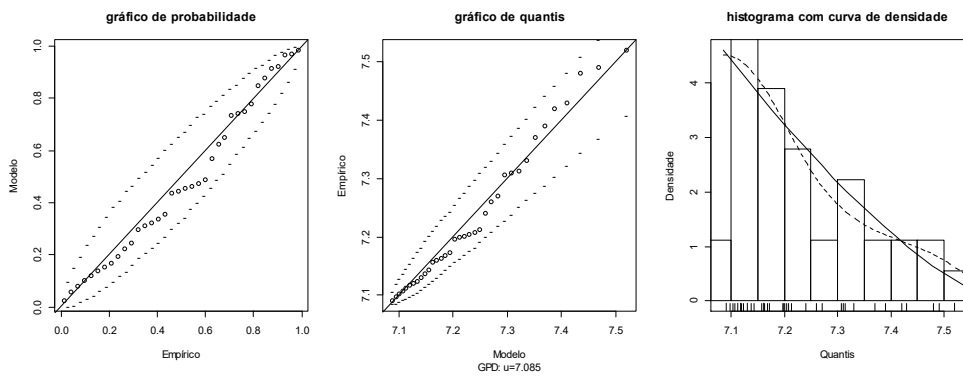
**$u=7.045$**



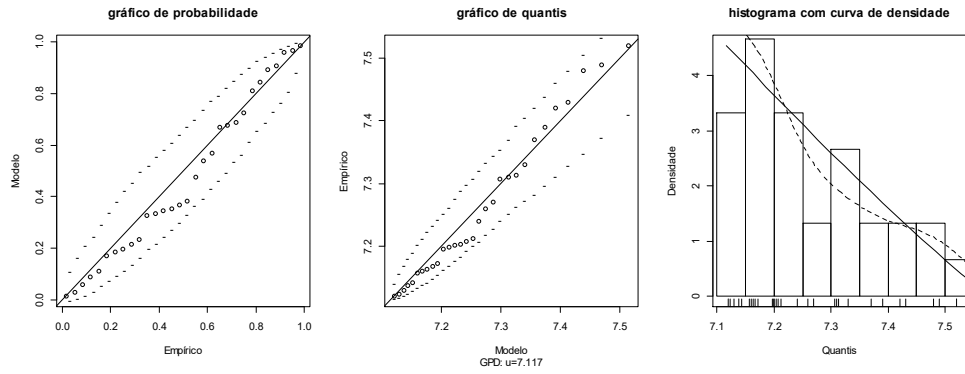
**$u=7.074$**



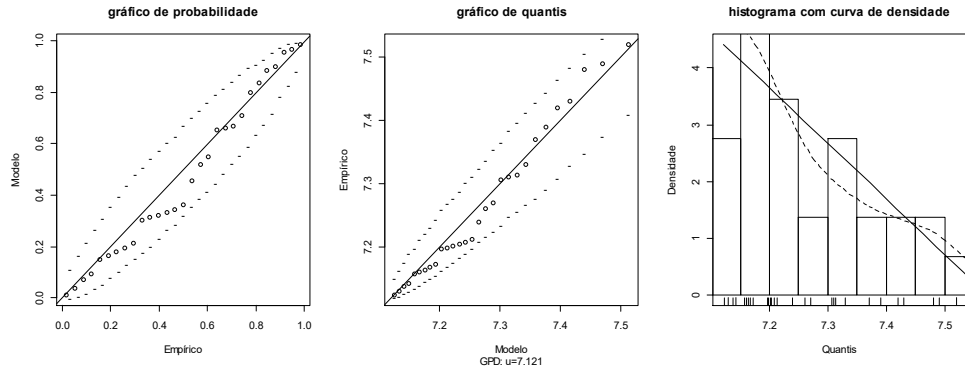
**$u=7.085$**



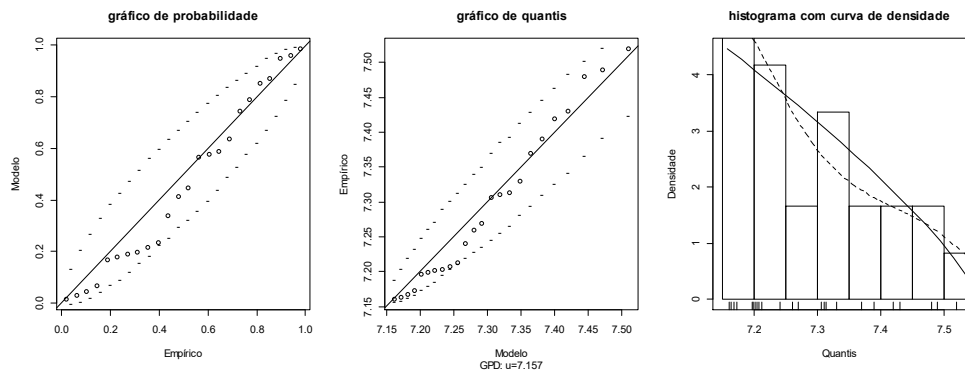
$u=7.117$



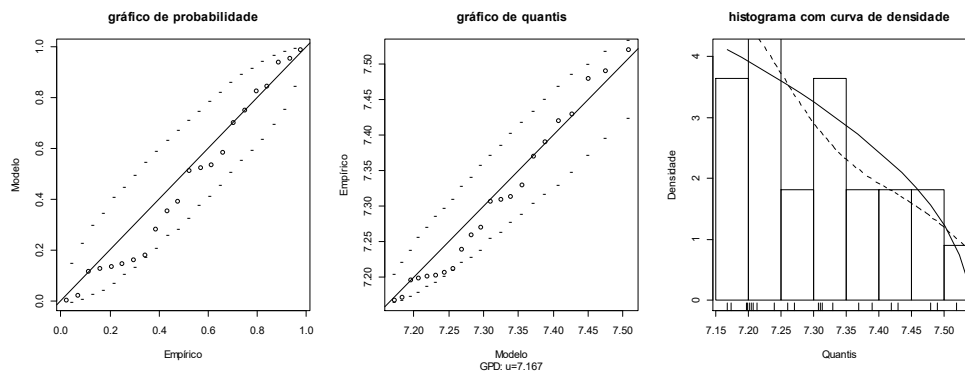
$u=7.121$



$u=7.157$

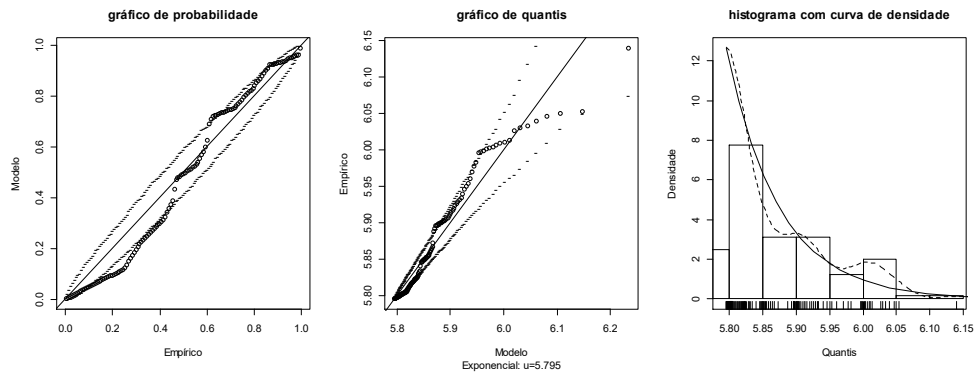


$u=7.167$

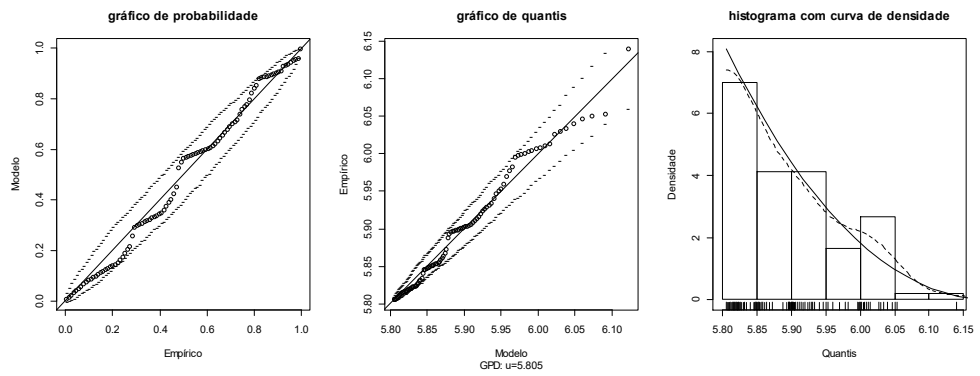


**Anexo 5.3.5. Salto com vara – homens**

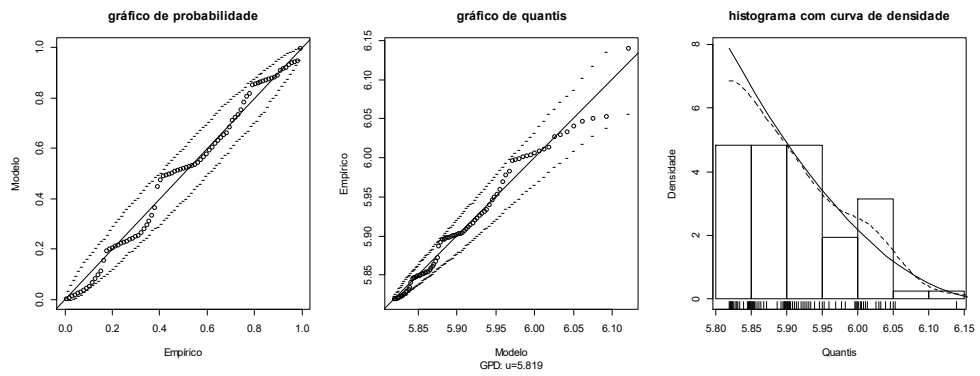
**$u=5.795$**



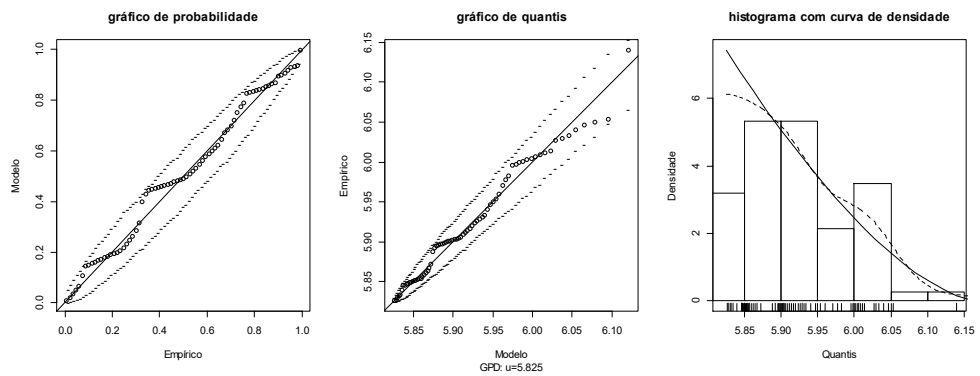
**$u=5.805$**



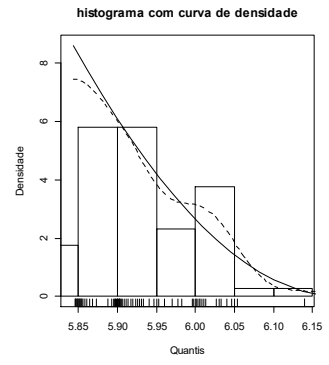
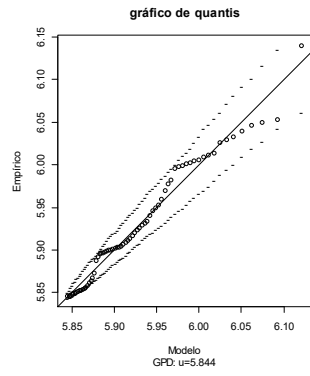
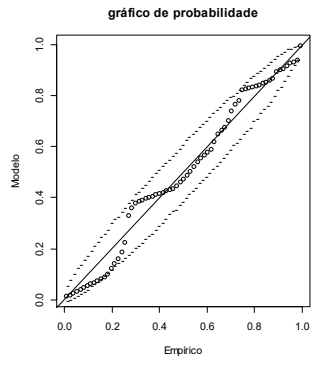
**$u=5.819$**



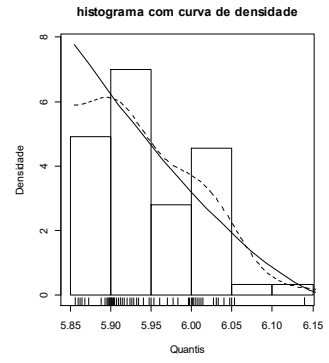
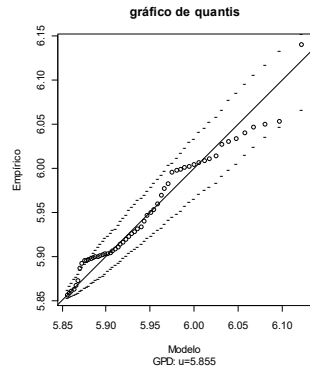
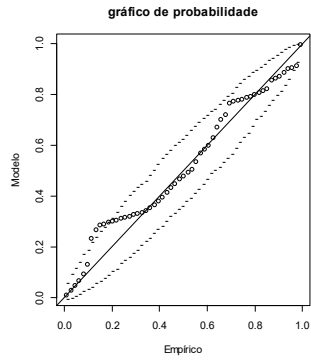
**$u=5.825$**



$u=5.844$

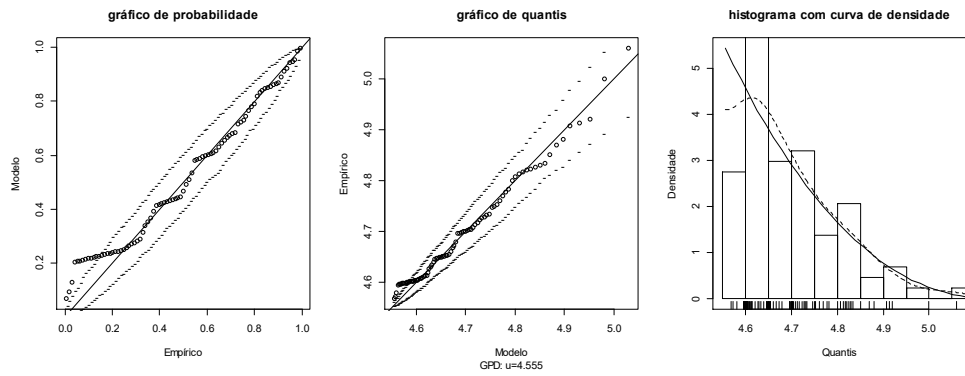


$u=5.855$

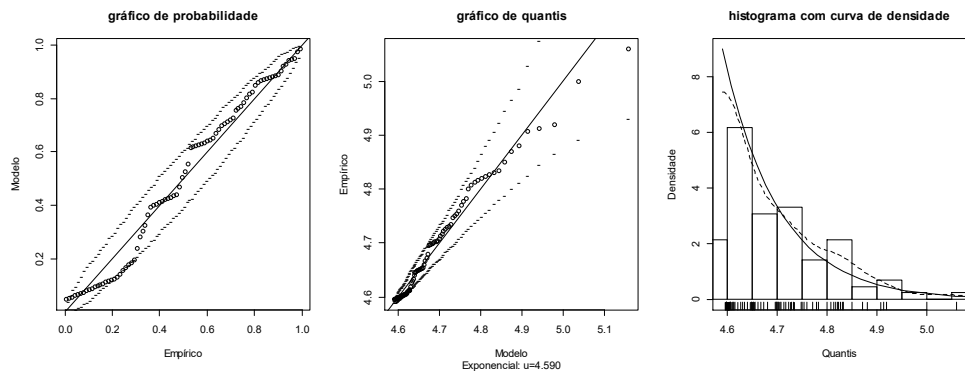


**Anexo 5.3.6. Salto com vara – mulheres**

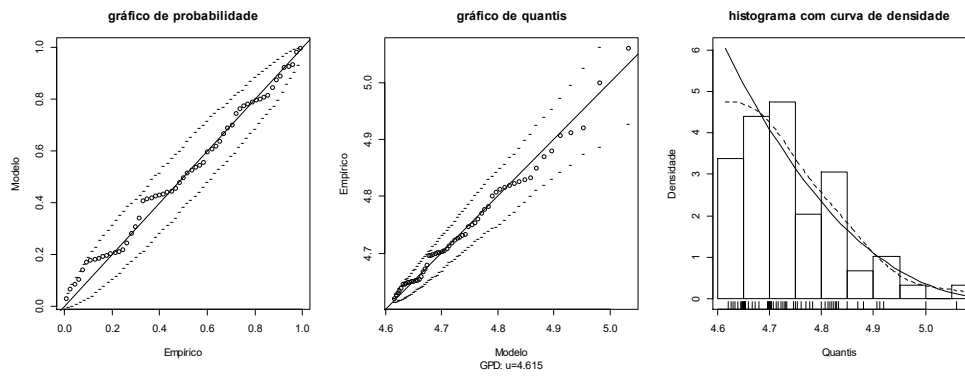
**$u=4.555$**



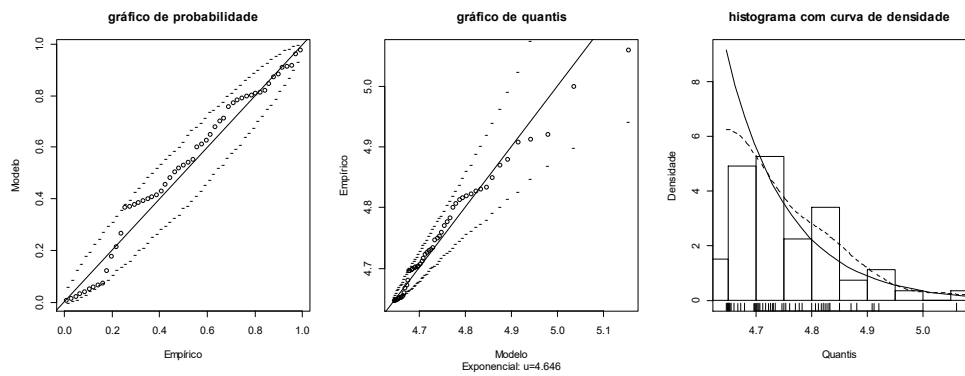
**$u=4.590$**



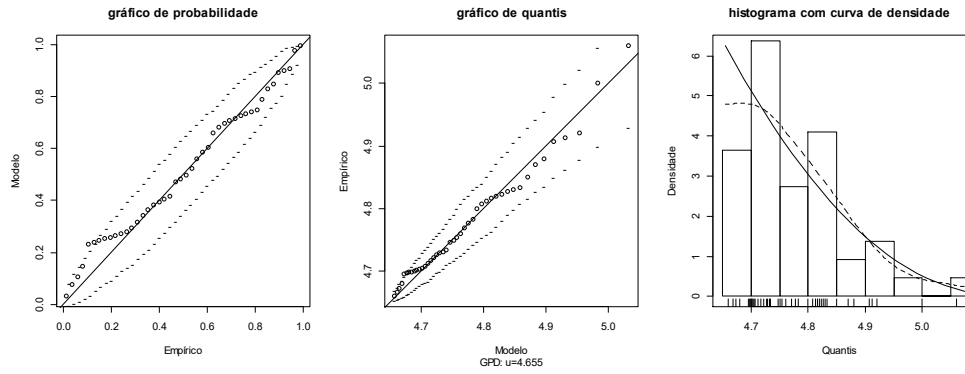
**$u=4.615$**



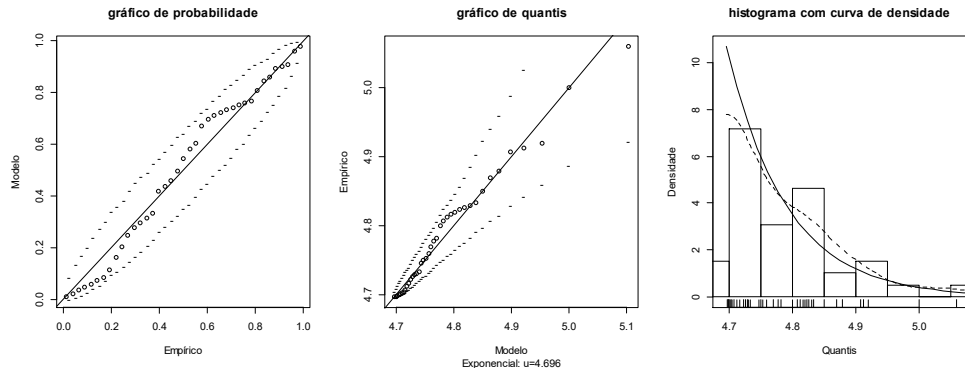
**$u=4.646$**



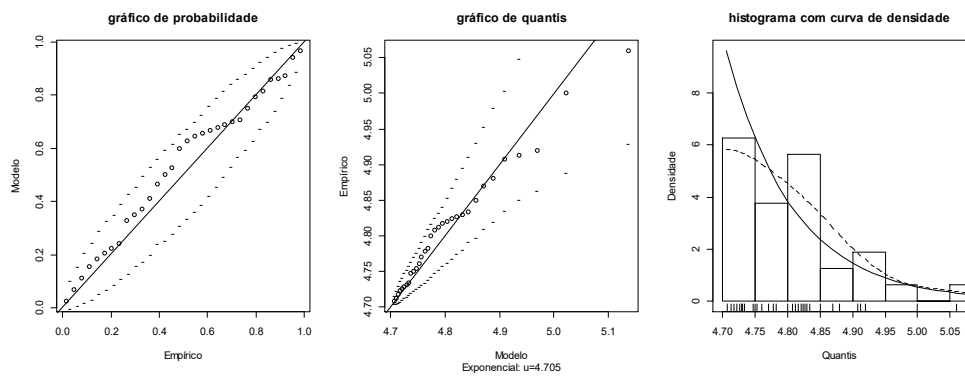
$u=4.655$



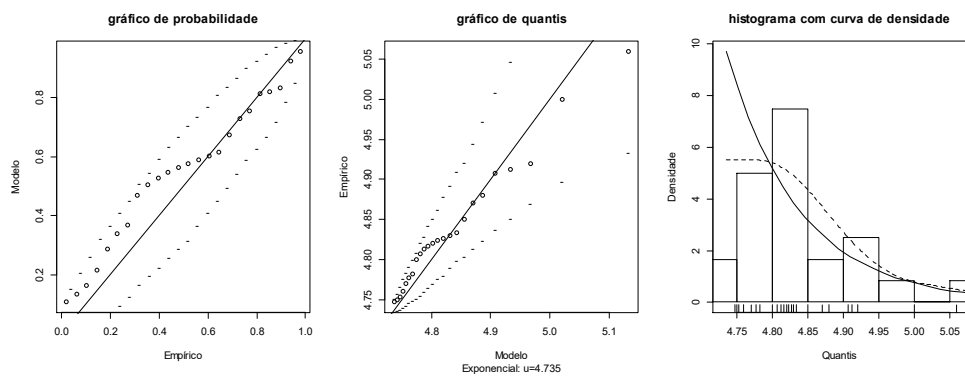
$u=4.696$



$u=4.705$

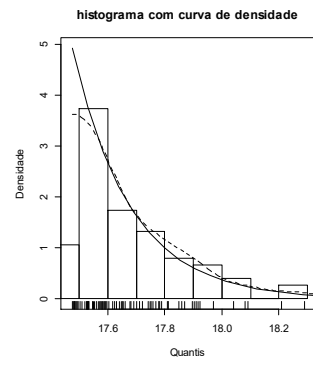
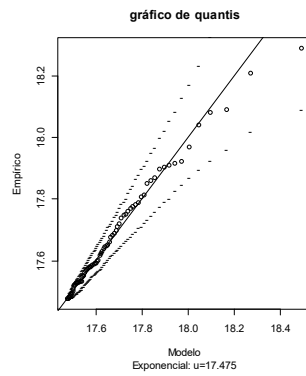
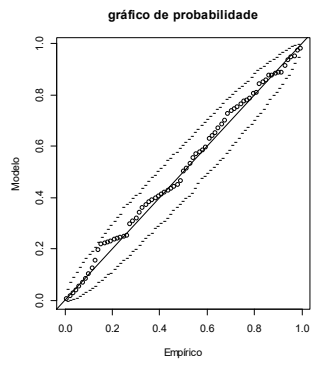


$u=4.735$

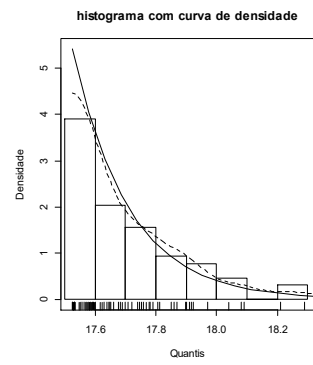
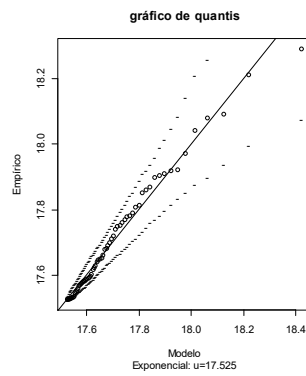
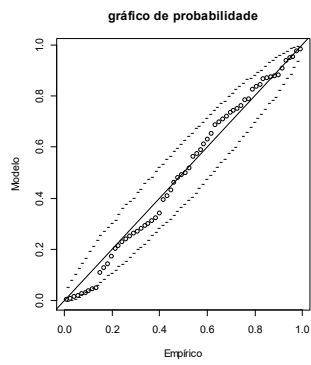


**Anexo 5.3.7. Triplo-salto – homens**

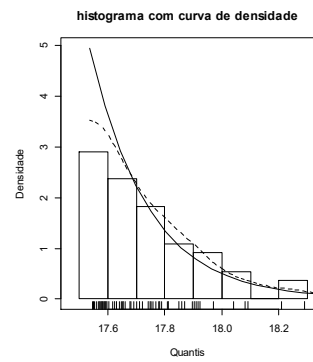
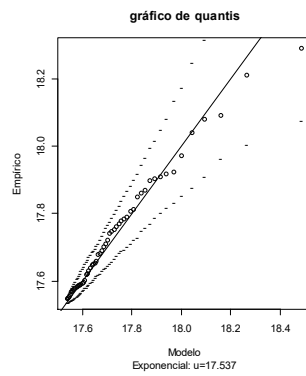
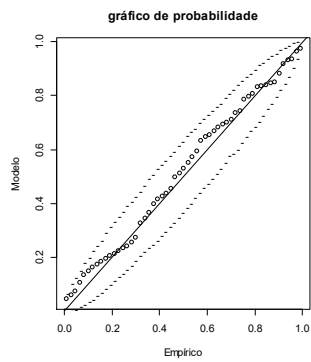
**$u=17.475$**



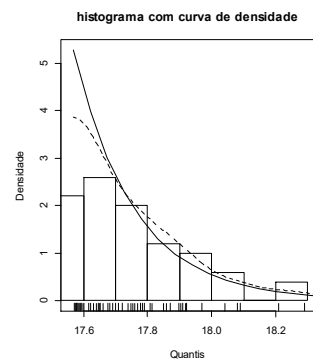
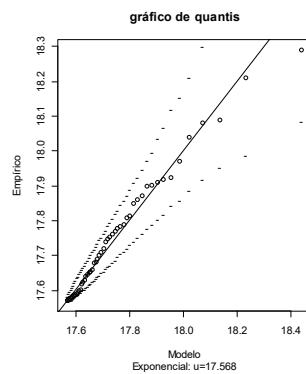
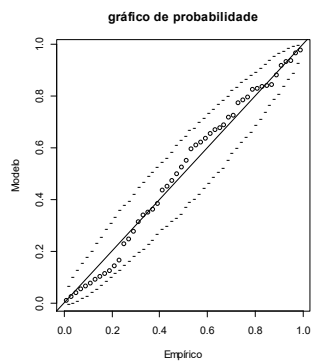
**$u=17.525$**



**$u=17.537$**

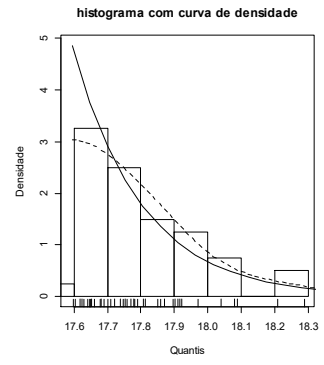
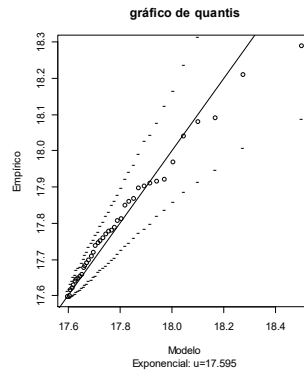
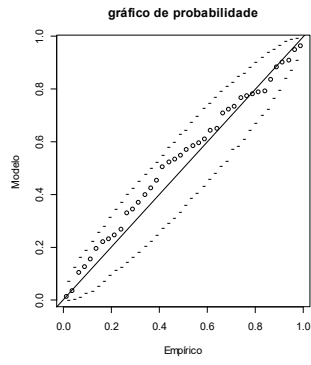


**$u=17.568$**

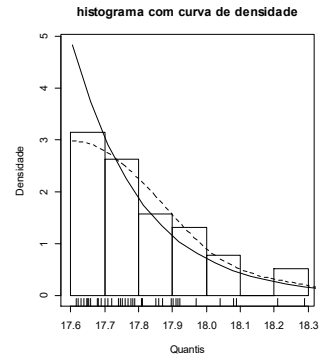
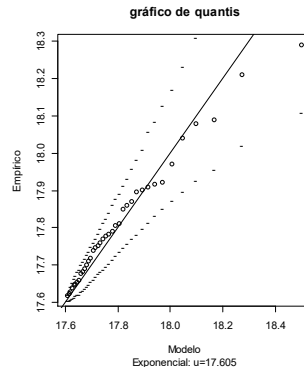
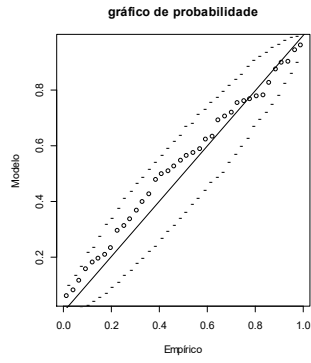




$u=17.595$

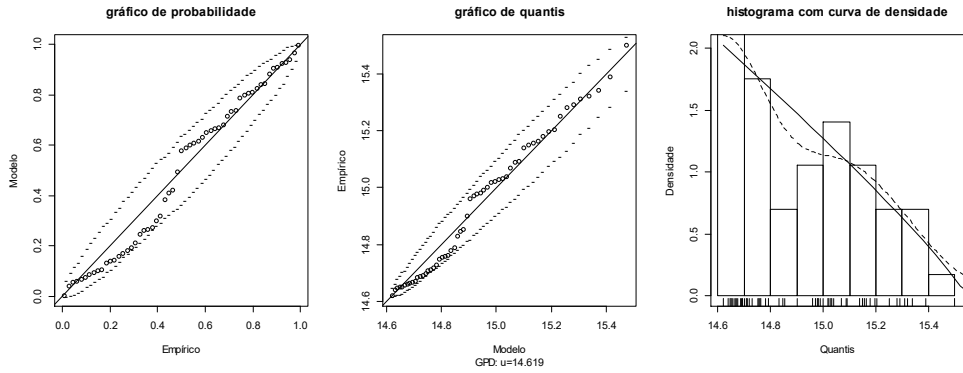


$u=17.605$

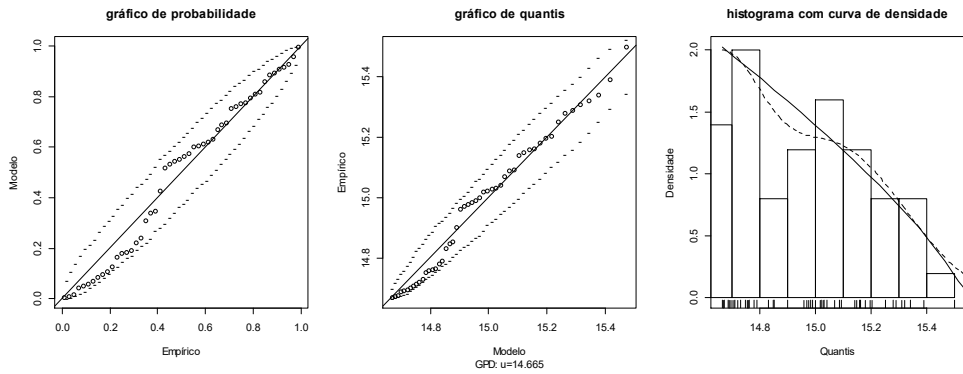


**Anexo 5.3.8. Triplo-salto – mulheres**

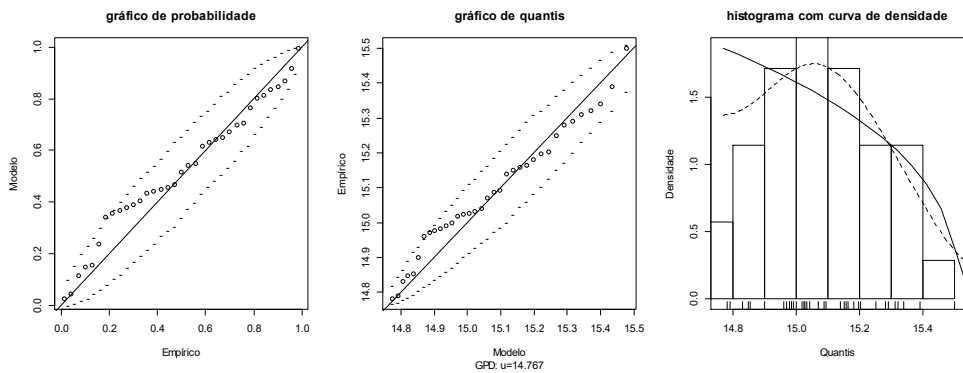
**$u=14.619$**



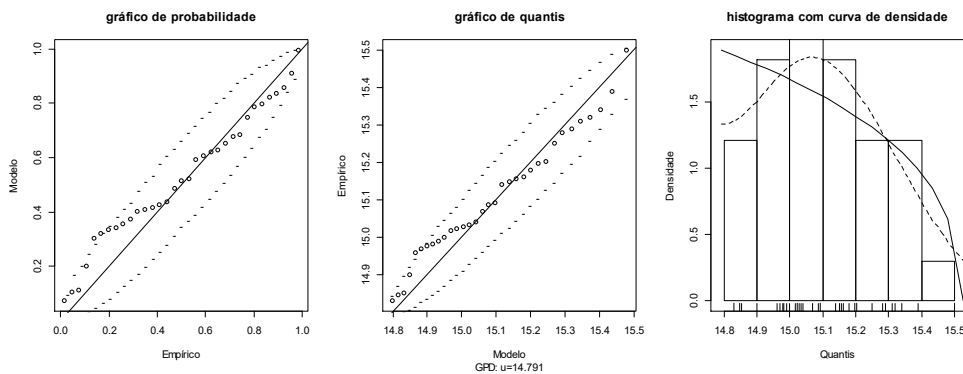
**$u=14.665$**



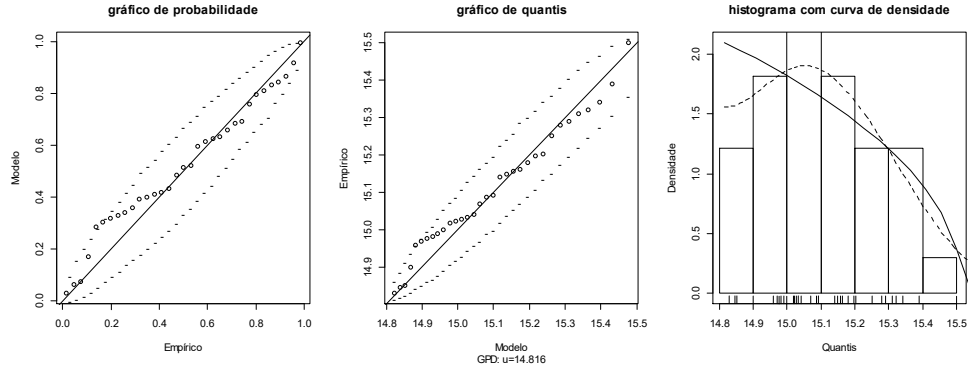
**$u=14.767$**



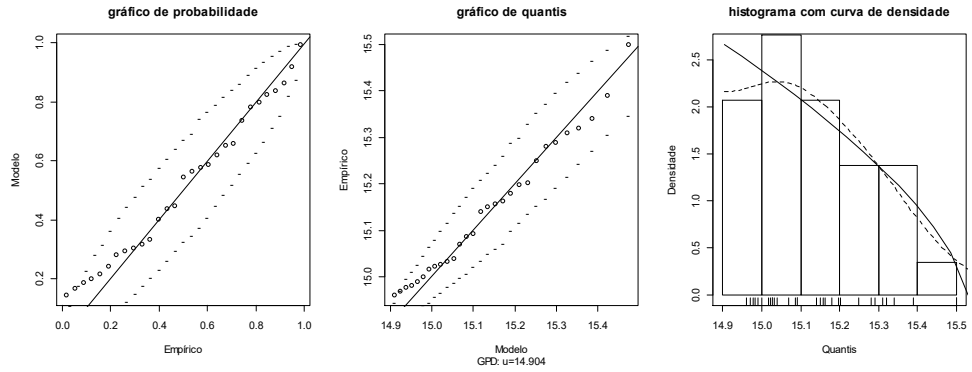
**$u=14.791$**



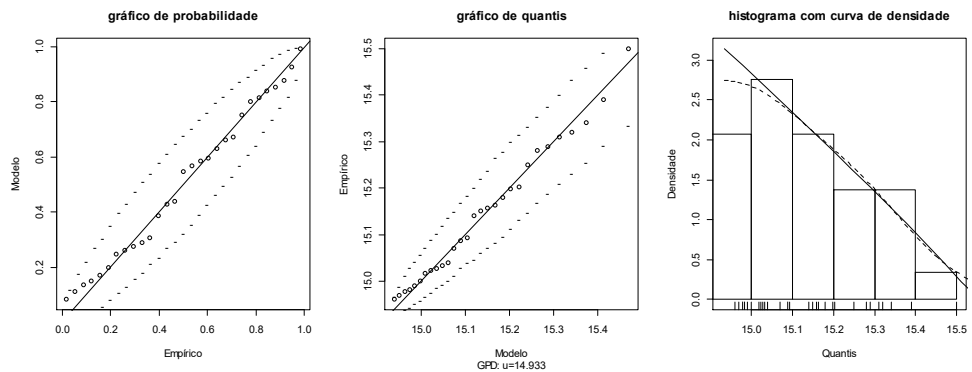
$u=14.816$



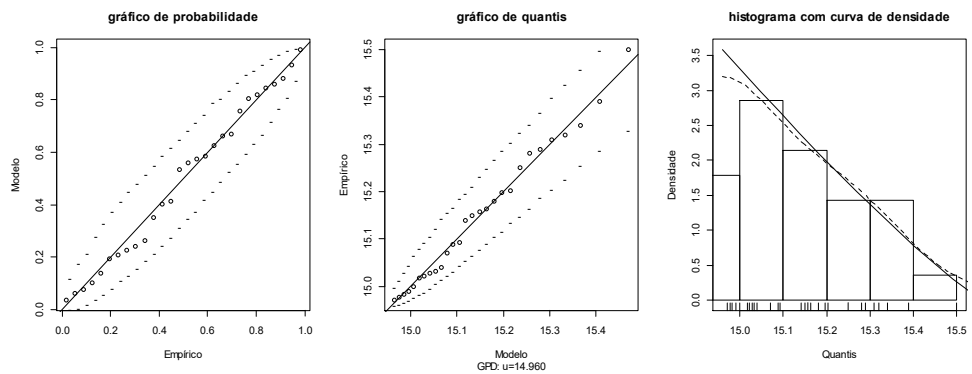
$u=14.904$



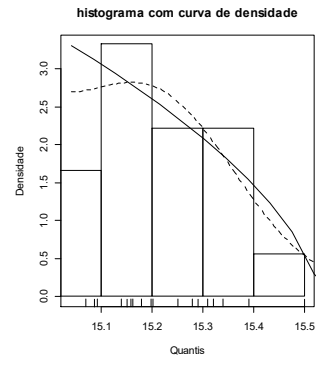
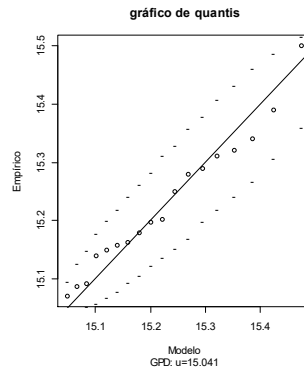
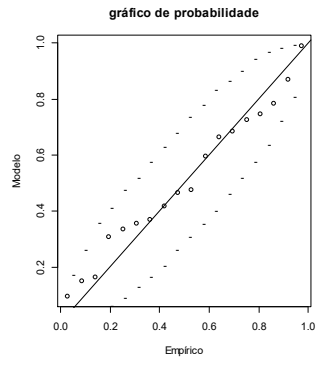
$u=14.933$



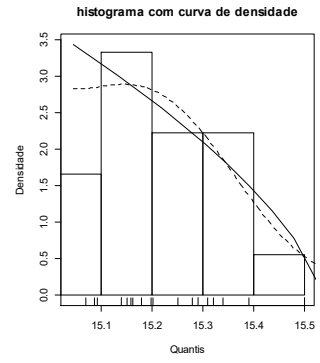
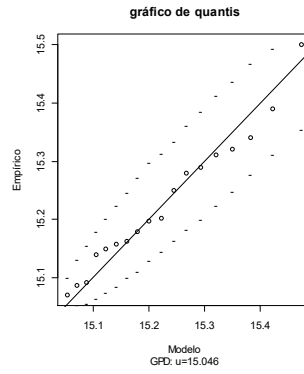
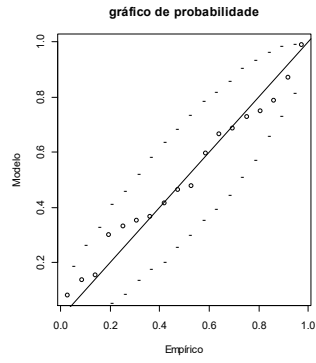
$u=14.960$



**$u=15.041$**



**$u=15.046$**



## ANEXO 5.4: Níveis de retorno

## Anexo 5.4.1. Salto em altura – homens

$U(t)$			$U(t)$			$U(t)$		
$t$	$u=2.345$	$u=2.355$	$t$	$u=2.345$	$u=2.355$	$t$	$u=2.345$	$u=2.355$
100	2.405	2.401	860	2.437	2.449	1600	2.443	2.463
120	2.408	2.406	880	2.437	2.449	1620	2.443	2.464
140	2.411	2.409	900	2.437	2.450	1640	2.444	2.464
160	2.413	2.412	920	2.438	2.451	1660	2.444	2.464
180	2.415	2.415	940	2.438	2.451	1680	2.444	2.464
200	2.417	2.417	960	2.438	2.452	1700	2.444	2.465
220	2.419	2.419	980	2.438	2.452	1720	2.444	2.465
240	2.420	2.421	1000	2.438	2.453	1740	2.444	2.465
260	2.421	2.423	1020	2.439	2.453	1760	2.444	2.465
280	2.422	2.424	1040	2.439	2.454	1780	2.444	2.466
300	2.423	2.426	1060	2.439	2.454	1800	2.444	2.466
320	2.424	2.427	1080	2.439	2.454	1820	2.445	2.466
340	2.425	2.429	1100	2.440	2.455	1840	2.445	2.466
360	2.426	2.430	1120	2.440	2.455	1860	2.445	2.467
380	2.427	2.431	1140	2.440	2.456	1880	2.445	2.467
400	2.427	2.432	1160	2.440	2.456	1900	2.445	2.467
420	2.428	2.433	1180	2.440	2.456	1920	2.445	2.467
440	2.429	2.434	1200	2.440	2.457	1940	2.445	2.468
460	2.429	2.435	1220	2.441	2.457	1960	2.445	2.468
480	2.430	2.436	1240	2.441	2.458	1980	2.445	2.468
500	2.430	2.437	1260	2.441	2.458	2000	2.445	2.468
520	2.431	2.438	1280	2.441	2.458	2500	2.447	2.473
540	2.431	2.439	1300	2.441	2.459	3000	2.449	2.477
560	2.432	2.440	1320	2.441	2.459	3500	2.450	2.481
580	2.432	2.441	1340	2.442	2.459	4000	2.451	2.484
600	2.433	2.441	1360	2.442	2.460	4500	2.452	2.486
620	2.433	2.442	1380	2.442	2.460	5000	2.453	2.489
640	2.433	2.443	1400	2.442	2.460	5500	2.453	2.491
660	2.434	2.444	1420	2.442	2.461	6000	2.454	2.493
680	2.434	2.444	1440	2.442	2.461	6500	2.455	2.494
700	2.434	2.445	1460	2.442	2.461	7000	2.455	2.496
720	2.435	2.445	1480	2.443	2.462	7500	2.456	2.498
740	2.435	2.446	1500	2.443	2.462	8000	2.456	2.499
760	2.435	2.447	1520	2.443	2.462	8500	2.456	2.500
780	2.436	2.447	1540	2.443	2.462	9000	2.457	2.502
800	2.436	2.448	1560	2.443	2.463	9500	2.457	2.503
820	2.436	2.448	1580	2.443	2.463	10000	2.457	2.504
840	2.437	2.449						

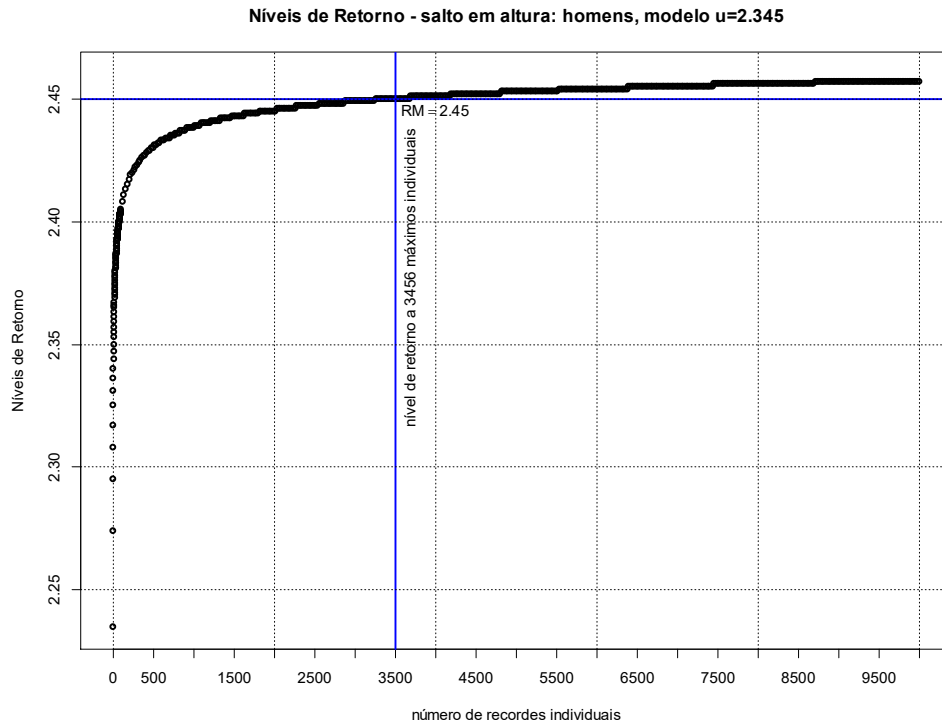


Figura A5.1 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -recortes individuais na amostra de salto em altura – homens, para o modelo com limiar  $u=2.345$ .

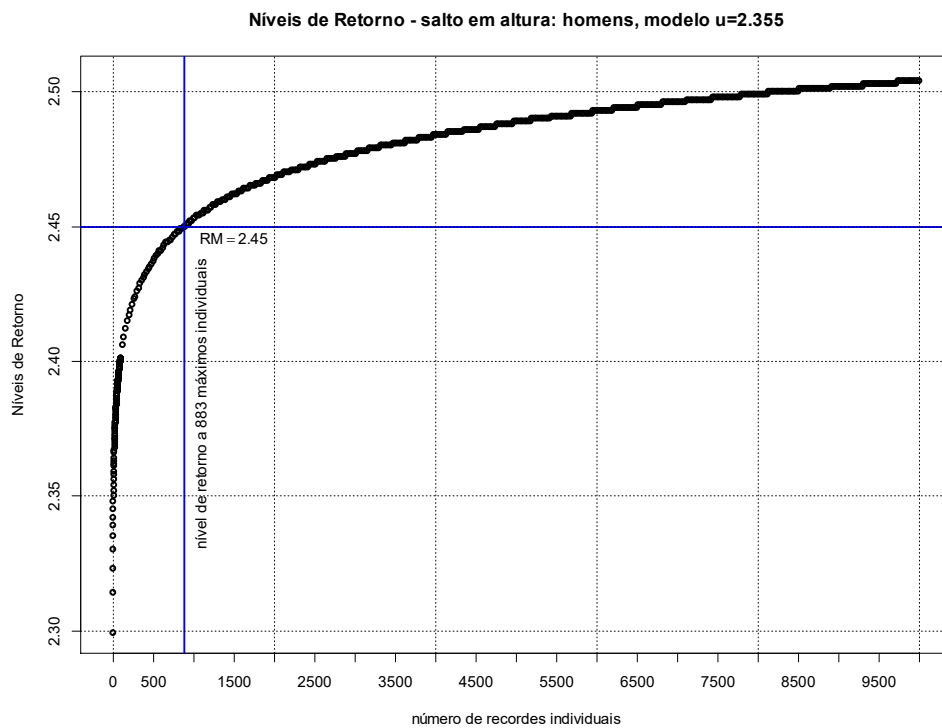


Figura A5.2 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -recortes individuais na amostra de salto em altura – homens, para o modelo com limiar  $u=2.355$ .

**Anexo 5.4.2. Salto em altura – mulheres**

<i>U(t)</i>			<i>U(t)</i>			<i>U(t)</i>		
<i>t</i>	<i>u=2.006</i>	<i>u=2.025</i>	<i>t</i>	<i>u=2.006</i>	<i>u=2.025</i>	<i>t</i>	<i>u=2.006</i>	<i>u=2.025</i>
<b>100</b>	2.077	2.078	<b>860</b>	2.090	2.090	<b>1600</b>	2.092	2.091
<b>120</b>	2.079	2.080	<b>880</b>	2.090	2.090	<b>1620</b>	2.092	2.091
<b>140</b>	2.080	2.081	<b>900</b>	2.090	2.090	<b>1640</b>	2.092	2.091
<b>160</b>	2.081	2.082	<b>920</b>	2.090	2.090	<b>1660</b>	2.092	2.091
<b>180</b>	2.082	2.083	<b>940</b>	2.090	2.090	<b>1680</b>	2.092	2.091
<b>200</b>	2.083	2.083	<b>960</b>	2.090	2.090	<b>1700</b>	2.092	2.091
<b>220</b>	2.083	2.084	<b>980</b>	2.090	2.090	<b>1720</b>	2.092	2.091
<b>240</b>	2.084	2.084	<b>1000</b>	2.090	2.090	<b>1740</b>	2.092	2.091
<b>260</b>	2.085	2.085	<b>1020</b>	2.091	2.090	<b>1760</b>	2.092	2.091
<b>280</b>	2.085	2.085	<b>1040</b>	2.091	2.090	<b>1780</b>	2.092	2.091
<b>300</b>	2.085	2.086	<b>1060</b>	2.091	2.090	<b>1800</b>	2.092	2.091
<b>320</b>	2.086	2.086	<b>1080</b>	2.091	2.090	<b>1820</b>	2.092	2.091
<b>340</b>	2.086	2.086	<b>1100</b>	2.091	2.090	<b>1840</b>	2.092	2.091
<b>360</b>	2.086	2.087	<b>1120</b>	2.091	2.090	<b>1860</b>	2.092	2.091
<b>380</b>	2.087	2.087	<b>1140</b>	2.091	2.090	<b>1880</b>	2.092	2.091
<b>400</b>	2.087	2.087	<b>1160</b>	2.091	2.090	<b>1900</b>	2.092	2.091
<b>420</b>	2.087	2.087	<b>1180</b>	2.091	2.090	<b>1920</b>	2.092	2.091
<b>440</b>	2.087	2.087	<b>1200</b>	2.091	2.090	<b>1940</b>	2.092	2.091
<b>460</b>	2.088	2.088	<b>1220</b>	2.091	2.090	<b>1960</b>	2.092	2.091
<b>480</b>	2.088	2.088	<b>1240</b>	2.091	2.091	<b>1980</b>	2.092	2.091
<b>500</b>	2.088	2.088	<b>1260</b>	2.091	2.091	<b>2000</b>	2.092	2.091
<b>520</b>	2.088	2.088	<b>1280</b>	2.091	2.091	<b>2500</b>	2.093	2.092
<b>540</b>	2.088	2.088	<b>1300</b>	2.091	2.091	<b>3000</b>	2.093	2.092
<b>560</b>	2.088	2.088	<b>1320</b>	2.091	2.091	<b>3500</b>	2.093	2.092
<b>580</b>	2.089	2.088	<b>1340</b>	2.091	2.091	<b>4000</b>	2.094	2.092
<b>600</b>	2.089	2.089	<b>1360</b>	2.091	2.091	<b>4500</b>	2.094	2.093
<b>620</b>	2.089	2.089	<b>1380</b>	2.091	2.091	<b>5000</b>	2.094	2.093
<b>640</b>	2.089	2.089	<b>1400</b>	2.091	2.091	<b>5500</b>	2.094	2.093
<b>660</b>	2.089	2.089	<b>1420</b>	2.091	2.091	<b>6000</b>	2.094	2.093
<b>680</b>	2.089	2.089	<b>1440</b>	2.091	2.091	<b>6500</b>	2.094	2.093
<b>700</b>	2.089	2.089	<b>1460</b>	2.092	2.091	<b>7000</b>	2.094	2.093
<b>720</b>	2.089	2.089	<b>1480</b>	2.092	2.091	<b>7500</b>	2.094	2.093
<b>740</b>	2.089	2.089	<b>1500</b>	2.092	2.091	<b>8000</b>	2.094	2.093
<b>760</b>	2.090	2.089	<b>1520</b>	2.092	2.091	<b>8500</b>	2.094	2.093
<b>780</b>	2.090	2.089	<b>1540</b>	2.092	2.091	<b>9000</b>	2.095	2.093
<b>800</b>	2.090	2.089	<b>1560</b>	2.092	2.091	<b>9500</b>	2.095	2.093
<b>820</b>	2.090	2.089	<b>1580</b>	2.092	2.091	<b>10000</b>	2.095	2.093
<b>840</b>	2.090	2.090						

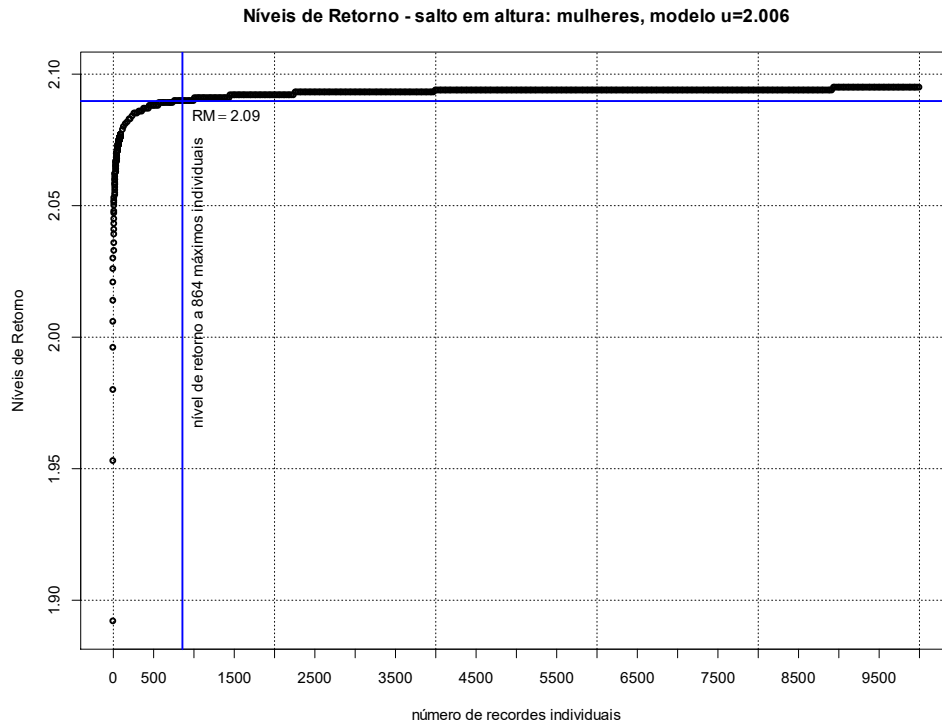


Figura A5.3 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -recordes individuais na amostra de salto em altura – mulheres, para o modelo com limiar  $u=2.006$ .

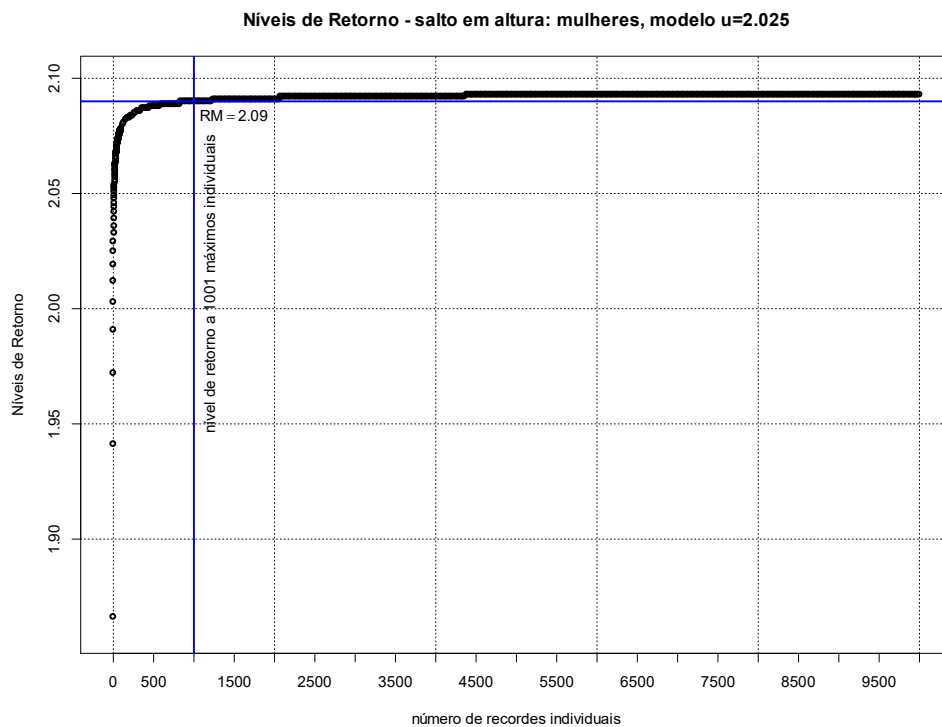


Figura A5.4 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -recordes individuais na amostra de salto em altura – mulheres, para o modelo com limiar  $u=2.025$ .



**Anexo 5.4.3. Salto em comprimento – homens**

$U(t)$			$U(t)$			$U(t)$		
$t$	$u=8.370$	$u=8.406$	$t$	$u=8.370$	$u=8.406$	$t$	$u=8.370$	$u=8.406$
<b>100</b>	8.666	8.661	<b>860</b>	8.958	8.948	<b>1600</b>	9.043	9.030
<b>120</b>	8.690	8.686	<b>880</b>	8.962	8.951	<b>1620</b>	9.045	9.032
<b>140</b>	8.711	8.706	<b>900</b>	8.965	8.954	<b>1640</b>	9.046	9.034
<b>160</b>	8.730	8.724	<b>920</b>	8.968	8.957	<b>1660</b>	9.048	9.035
<b>180</b>	8.746	8.740	<b>940</b>	8.970	8.960	<b>1680</b>	9.049	9.037
<b>200</b>	8.760	8.754	<b>960</b>	8.973	8.962	<b>1700</b>	9.051	9.038
<b>220</b>	8.773	8.766	<b>980</b>	8.976	8.965	<b>1720</b>	9.053	9.040
<b>240</b>	8.785	8.778	<b>1000</b>	8.979	8.968	<b>1740</b>	9.054	9.042
<b>260</b>	8.796	8.789	<b>1020</b>	8.982	8.970	<b>1760</b>	9.056	9.043
<b>280</b>	8.806	8.798	<b>1040</b>	8.984	8.973	<b>1780</b>	9.057	9.045
<b>300</b>	8.815	8.808	<b>1060</b>	8.987	8.976	<b>1800</b>	9.059	9.046
<b>320</b>	8.824	8.816	<b>1080</b>	8.989	8.978	<b>1820</b>	9.060	9.047
<b>340</b>	8.832	8.824	<b>1100</b>	8.992	8.981	<b>1840</b>	9.062	9.049
<b>360</b>	8.840	8.832	<b>1120</b>	8.994	8.983	<b>1860</b>	9.063	9.050
<b>380</b>	8.847	8.839	<b>1140</b>	8.997	8.985	<b>1880</b>	9.065	9.052
<b>400</b>	8.854	8.846	<b>1160</b>	8.999	8.988	<b>1900</b>	9.066	9.053
<b>420</b>	8.861	8.852	<b>1180</b>	9.001	8.990	<b>1920</b>	9.068	9.055
<b>440</b>	8.867	8.859	<b>1200</b>	9.004	8.992	<b>1940</b>	9.069	9.056
<b>460</b>	8.873	8.865	<b>1220</b>	9.006	8.994	<b>1960</b>	9.070	9.057
<b>480</b>	8.879	8.870	<b>1240</b>	9.008	8.996	<b>1980</b>	9.072	9.059
<b>500</b>	8.885	8.876	<b>1260</b>	9.010	8.999	<b>2000</b>	9.073	9.060
<b>520</b>	8.890	8.881	<b>1280</b>	9.012	9.001	<b>2500</b>	9.104	9.090
<b>540</b>	8.895	8.886	<b>1300</b>	9.015	9.003	<b>3000</b>	9.128	9.114
<b>560</b>	8.900	8.891	<b>1320</b>	9.017	9.005	<b>3500</b>	9.149	9.134
<b>580</b>	8.905	8.895	<b>1340</b>	9.019	9.007	<b>4000</b>	9.167	9.152
<b>600</b>	8.909	8.900	<b>1360</b>	9.021	9.009	<b>4500</b>	9.183	9.168
<b>620</b>	8.914	8.904	<b>1380</b>	9.023	9.011	<b>5000</b>	9.198	9.182
<b>640</b>	8.918	8.908	<b>1400</b>	9.025	9.013	<b>5500</b>	9.211	9.195
<b>660</b>	8.922	8.913	<b>1420</b>	9.027	9.014	<b>6000</b>	9.223	9.206
<b>680</b>	8.926	8.917	<b>1440</b>	9.028	9.016	<b>6500</b>	9.233	9.217
<b>700</b>	8.930	8.920	<b>1460</b>	9.030	9.018	<b>7000</b>	9.244	9.227
<b>720</b>	8.934	8.924	<b>1480</b>	9.032	9.020	<b>7500</b>	9.253	9.236
<b>740</b>	8.938	8.928	<b>1500</b>	9.034	9.022	<b>8000</b>	9.262	9.244
<b>760</b>	8.942	8.931	<b>1520</b>	9.036	9.024	<b>8500</b>	9.270	9.253
<b>780</b>	8.945	8.935	<b>1540</b>	9.038	9.025	<b>9000</b>	9.278	9.260
<b>800</b>	8.949	8.938	<b>1560</b>	9.039	9.027	<b>9500</b>	9.285	9.267
<b>820</b>	8.952	8.941	<b>1580</b>	9.041	9.029	<b>10000</b>	9.292	9.274
<b>840</b>	8.955	8.945						

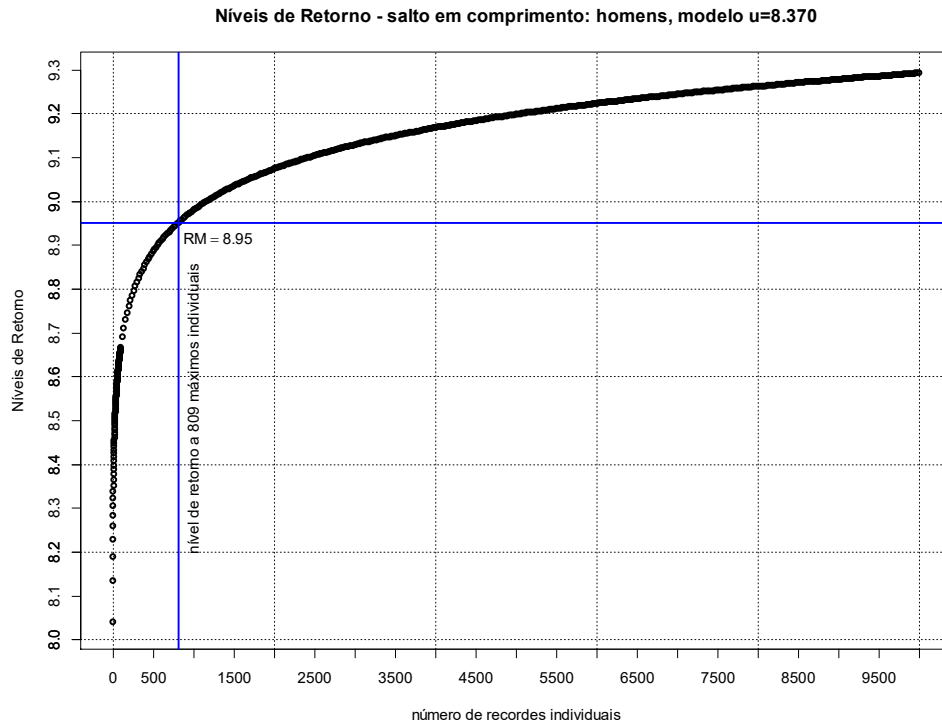


Figura A5.5 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -recordes individuais na amostra de salto em comprimento – homens, para o modelo com limiar  $u=8.370$ .

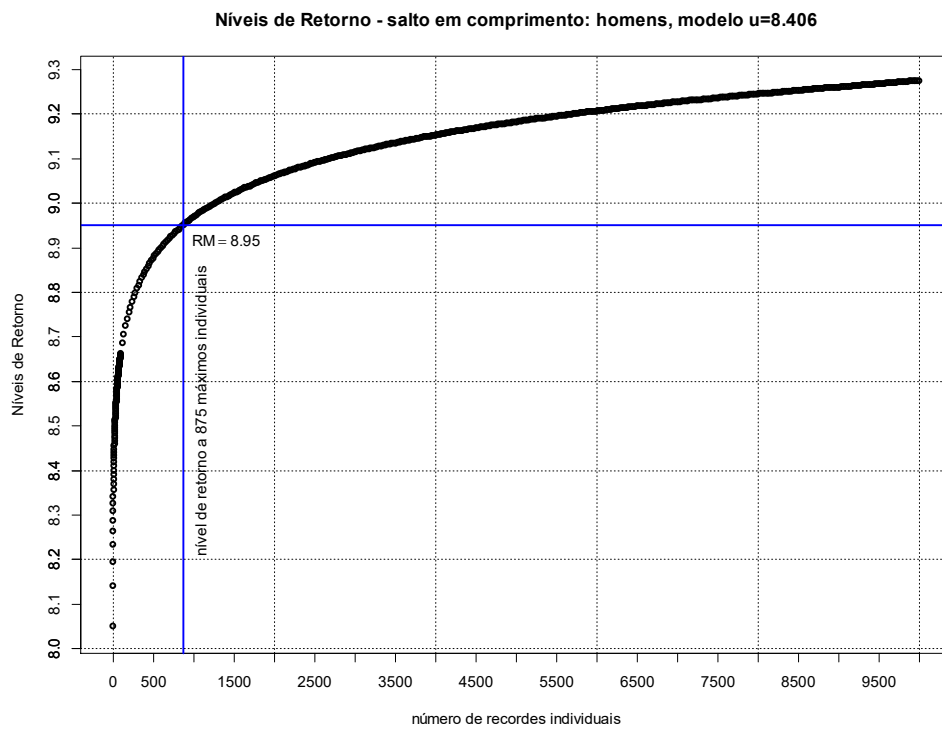


Figura A5.6 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -recordes individuais na amostra de salto em comprimento – homens, para o modelo com limiar  $u=8.406$ .

**Anexo 5.4.4. Salto em comprimento – mulheres**

$U(t)$			$U(t)$			$U(t)$		
$t$	$u=7.074$	$u=7.085$	$t$	$u=7.074$	$u=7.085$	$t$	$u=7.074$	$u=7.085$
100	7.430	7.430	860	7.537	7.536	1600	7.554	7.553
120	7.443	7.443	880	7.538	7.537	1620	7.554	7.553
140	7.453	7.453	900	7.538	7.537	1640	7.555	7.553
160	7.462	7.462	920	7.539	7.538	1660	7.555	7.554
180	7.469	7.469	940	7.540	7.539	1680	7.555	7.554
200	7.475	7.475	960	7.540	7.539	1700	7.556	7.554
220	7.480	7.480	980	7.541	7.540	1720	7.556	7.554
240	7.485	7.485	1000	7.542	7.541	1740	7.556	7.555
260	7.489	7.489	1020	7.542	7.541	1760	7.556	7.555
280	7.493	7.492	1040	7.543	7.542	1780	7.557	7.555
300	7.496	7.496	1060	7.543	7.542	1800	7.557	7.556
320	7.499	7.499	1080	7.544	7.543	1820	7.557	7.556
340	7.502	7.501	1100	7.544	7.543	1840	7.557	7.556
360	7.504	7.504	1120	7.545	7.544	1860	7.558	7.556
380	7.507	7.506	1140	7.545	7.544	1880	7.558	7.556
400	7.509	7.508	1160	7.546	7.545	1900	7.558	7.557
420	7.511	7.511	1180	7.546	7.545	1920	7.558	7.557
440	7.513	7.512	1200	7.547	7.546	1940	7.559	7.557
460	7.515	7.514	1220	7.547	7.546	1960	7.559	7.557
480	7.516	7.516	1240	7.548	7.546	1980	7.559	7.558
500	7.518	7.517	1260	7.548	7.547	2000	7.559	7.558
520	7.520	7.519	1280	7.548	7.547	2500	7.564	7.562
540	7.521	7.520	1300	7.549	7.548	3000	7.568	7.566
560	7.522	7.522	1320	7.549	7.548	3500	7.570	7.569
580	7.524	7.523	1340	7.550	7.548	4000	7.573	7.571
600	7.525	7.524	1360	7.550	7.549	4500	7.575	7.573
620	7.526	7.525	1380	7.550	7.549	5000	7.576	7.574
640	7.527	7.526	1400	7.551	7.550	5500	7.578	7.576
660	7.528	7.527	1420	7.551	7.550	6000	7.579	7.577
680	7.529	7.528	1440	7.552	7.550	6500	7.580	7.578
700	7.530	7.529	1460	7.552	7.551	7000	7.581	7.579
720	7.531	7.530	1480	7.552	7.551	7500	7.582	7.580
740	7.532	7.531	1500	7.553	7.551	8000	7.583	7.581
760	7.533	7.532	1520	7.553	7.552	8500	7.583	7.581
780	7.534	7.533	1540	7.553	7.552	9000	7.584	7.582
800	7.535	7.534	1560	7.554	7.552	9500	7.585	7.583
820	7.536	7.535	1580	7.554	7.552	10000	7.585	7.583
840	7.536	7.535						

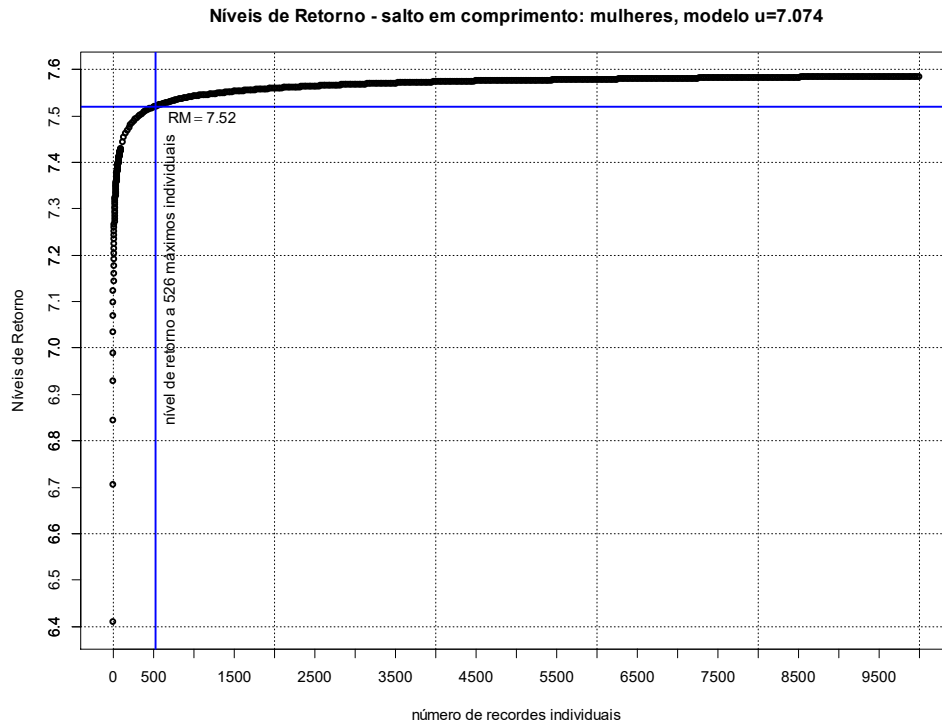


Figura A5.7 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -recordes individuais na amostra de salto em comprimento – mulheres, para o modelo com limiar  $u=7.074$ .

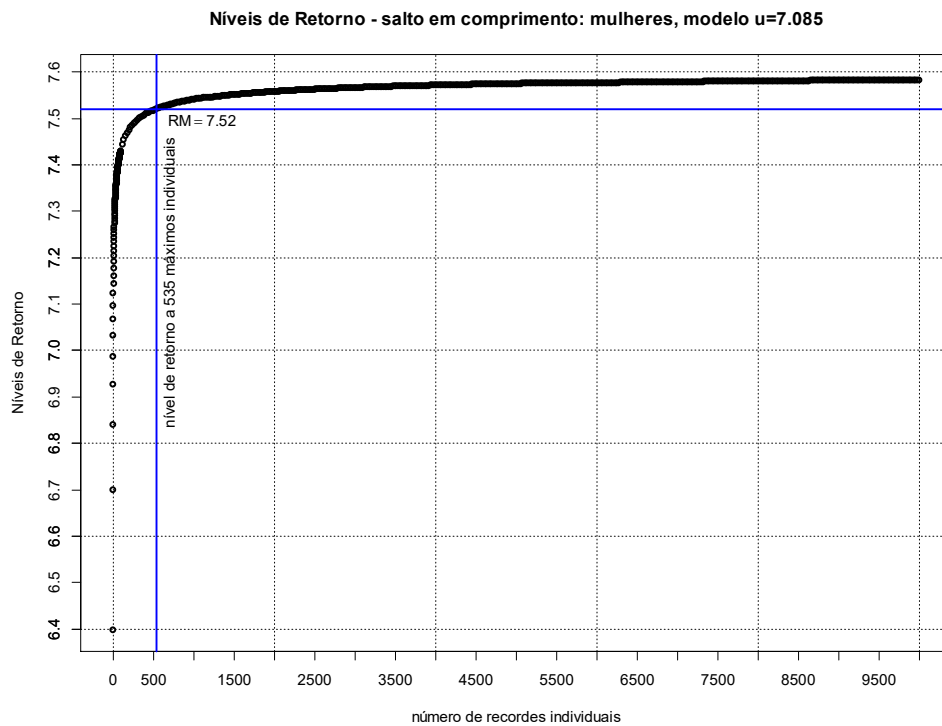


Figura A5.8 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -recordes individuais na amostra de salto em comprimento – mulheres, para o modelo com limiar  $u=7.085$ .

**Anexo 5.4.5. Salto com vara – homens**

$U(t)$			$U(t)$			$U(t)$		
$t$	$u=5.825$	$u=5.844$	$t$	$u=5.825$	$u=5.844$	$t$	$u=5.825$	$u=5.844$
<b>100</b>	6.027	6.023	<b>860</b>	6.108	6.107	<b>1600</b>	6.122	6.121
<b>120</b>	6.037	6.032	<b>880</b>	6.109	6.107	<b>1620</b>	6.122	6.122
<b>140</b>	6.045	6.040	<b>900</b>	6.109	6.108	<b>1640</b>	6.122	6.122
<b>160</b>	6.051	6.047	<b>920</b>	6.110	6.108	<b>1660</b>	6.122	6.122
<b>180</b>	6.056	6.052	<b>940</b>	6.110	6.109	<b>1680</b>	6.123	6.122
<b>200</b>	6.061	6.057	<b>960</b>	6.111	6.110	<b>1700</b>	6.123	6.123
<b>220</b>	6.065	6.061	<b>980</b>	6.111	6.110	<b>1720</b>	6.123	6.123
<b>240</b>	6.068	6.064	<b>1000</b>	6.112	6.111	<b>1740</b>	6.123	6.123
<b>260</b>	6.072	6.068	<b>1020</b>	6.112	6.111	<b>1760</b>	6.123	6.123
<b>280</b>	6.074	6.070	<b>1040</b>	6.113	6.112	<b>1780</b>	6.124	6.124
<b>300</b>	6.077	6.073	<b>1060</b>	6.113	6.112	<b>1800</b>	6.124	6.124
<b>320</b>	6.079	6.076	<b>1080</b>	6.114	6.112	<b>1820</b>	6.124	6.124
<b>340</b>	6.081	6.078	<b>1100</b>	6.114	6.113	<b>1840</b>	6.124	6.124
<b>360</b>	6.083	6.080	<b>1120</b>	6.114	6.113	<b>1860</b>	6.124	6.125
<b>380</b>	6.085	6.082	<b>1140</b>	6.115	6.114	<b>1880</b>	6.125	6.125
<b>400</b>	6.087	6.084	<b>1160</b>	6.115	6.114	<b>1900</b>	6.125	6.125
<b>420</b>	6.088	6.085	<b>1180</b>	6.116	6.115	<b>1920</b>	6.125	6.125
<b>440</b>	6.090	6.087	<b>1200</b>	6.116	6.115	<b>1940</b>	6.125	6.125
<b>460</b>	6.091	6.088	<b>1220</b>	6.116	6.115	<b>1960</b>	6.125	6.126
<b>480</b>	6.093	6.090	<b>1240</b>	6.117	6.116	<b>1980</b>	6.125	6.126
<b>500</b>	6.094	6.091	<b>1260</b>	6.117	6.116	<b>2000</b>	6.126	6.126
<b>520</b>	6.095	6.092	<b>1280</b>	6.117	6.117	<b>2500</b>	6.129	6.130
<b>540</b>	6.096	6.093	<b>1300</b>	6.118	6.117	<b>3000</b>	6.132	6.134
<b>560</b>	6.097	6.094	<b>1320</b>	6.118	6.117	<b>3500</b>	6.134	6.136
<b>580</b>	6.098	6.096	<b>1340</b>	6.118	6.118	<b>4000</b>	6.136	6.138
<b>600</b>	6.099	6.097	<b>1360</b>	6.118	6.118	<b>4500</b>	6.138	6.140
<b>620</b>	6.100	6.098	<b>1380</b>	6.119	6.118	<b>5000</b>	6.139	6.142
<b>640</b>	6.101	6.098	<b>1400</b>	6.119	6.119	<b>5500</b>	6.140	6.143
<b>660</b>	6.102	6.099	<b>1420</b>	6.119	6.119	<b>6000</b>	6.141	6.144
<b>680</b>	6.102	6.100	<b>1440</b>	6.120	6.119	<b>6500</b>	6.142	6.145
<b>700</b>	6.103	6.101	<b>1460</b>	6.120	6.119	<b>7000</b>	6.143	6.146
<b>720</b>	6.104	6.102	<b>1480</b>	6.120	6.120	<b>7500</b>	6.144	6.147
<b>740</b>	6.105	6.103	<b>1500</b>	6.120	6.120	<b>8000</b>	6.144	6.148
<b>760</b>	6.105	6.103	<b>1520</b>	6.121	6.120	<b>8500</b>	6.145	6.149
<b>780</b>	6.106	6.104	<b>1540</b>	6.121	6.121	<b>9000</b>	6.145	6.149
<b>800</b>	6.107	6.105	<b>1560</b>	6.121	6.121	<b>9500</b>	6.146	6.150
<b>820</b>	6.107	6.105	<b>1580</b>	6.121	6.121	<b>10000</b>	6.146	6.151
<b>840</b>	6.108	6.106						

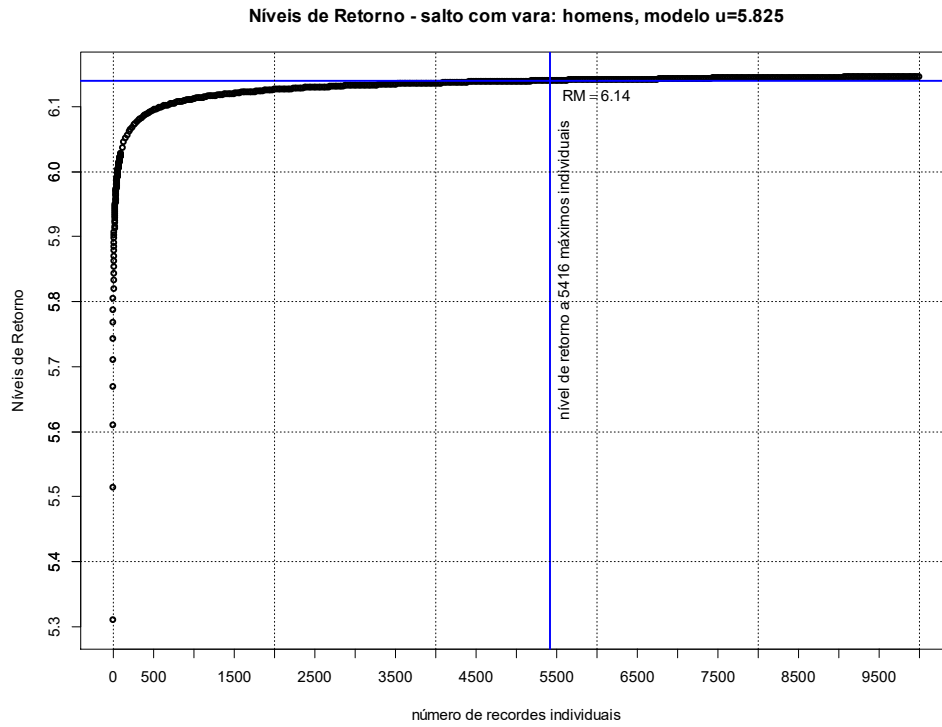


Figura A5.9 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -recordes individuais na amostra de salto com vara – homens, para o modelo com limiar  $u=5.825$ .

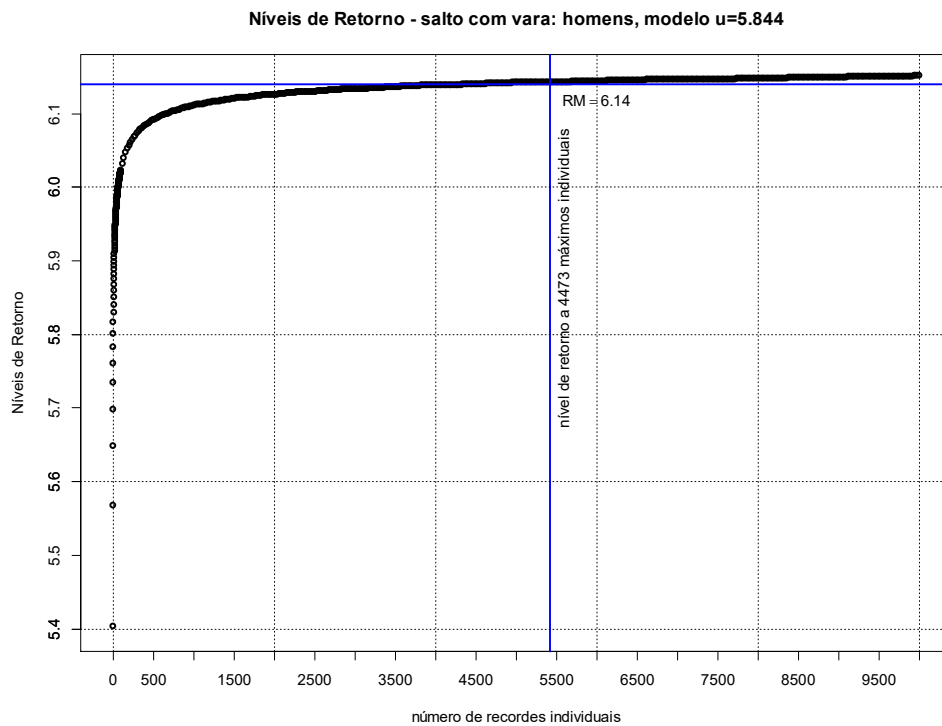


Figura A5.10 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -recordes individuais na amostra de salto com vara – homens, para o modelo com limiar  $u=5.844$ .

**Anexo 5.4.6. Salto com vara – mulheres**

$U(t)$			$U(t)$			$U(t)$		
$t$	$u=4.615$	$u=4.696$	$t$	$u=4.615$	$u=4.696$	$t$	$u=4.615$	$u=4.696$
<b>100</b>	4.890	4.874	<b>860</b>	5.020	5.075	<b>1600</b>	5.044	5.133
<b>120</b>	4.905	4.891	<b>880</b>	5.021	5.077	<b>1620</b>	5.045	5.134
<b>140</b>	4.917	4.905	<b>900</b>	5.022	5.079	<b>1640</b>	5.045	5.136
<b>160</b>	4.926	4.918	<b>920</b>	5.023	5.081	<b>1660</b>	5.046	5.137
<b>180</b>	4.935	4.929	<b>940</b>	5.024	5.083	<b>1680</b>	5.046	5.138
<b>200</b>	4.942	4.939	<b>960</b>	5.025	5.085	<b>1700</b>	5.046	5.139
<b>220</b>	4.948	4.948	<b>980</b>	5.026	5.087	<b>1720</b>	5.047	5.140
<b>240</b>	4.953	4.956	<b>1000</b>	5.026	5.089	<b>1740</b>	5.047	5.141
<b>260</b>	4.958	4.963	<b>1020</b>	5.027	5.091	<b>1760</b>	5.048	5.142
<b>280</b>	4.963	4.970	<b>1040</b>	5.028	5.093	<b>1780</b>	5.048	5.143
<b>300</b>	4.967	4.977	<b>1060</b>	5.029	5.095	<b>1800</b>	5.048	5.144
<b>320</b>	4.971	4.983	<b>1080</b>	5.029	5.096	<b>1820</b>	5.049	5.145
<b>340</b>	4.974	4.988	<b>1100</b>	5.030	5.098	<b>1840</b>	5.049	5.146
<b>360</b>	4.977	4.994	<b>1120</b>	5.031	5.100	<b>1860</b>	5.049	5.147
<b>380</b>	4.980	4.999	<b>1140</b>	5.032	5.102	<b>1880</b>	5.050	5.148
<b>400</b>	4.983	5.003	<b>1160</b>	5.032	5.103	<b>1900</b>	5.050	5.149
<b>420</b>	4.986	5.008	<b>1180</b>	5.033	5.105	<b>1920</b>	5.051	5.150
<b>440</b>	4.988	5.012	<b>1200</b>	5.034	5.106	<b>1940</b>	5.051	5.151
<b>460</b>	4.991	5.017	<b>1220</b>	5.034	5.108	<b>1960</b>	5.051	5.152
<b>480</b>	4.993	5.021	<b>1240</b>	5.035	5.109	<b>1980</b>	5.052	5.153
<b>500</b>	4.995	5.024	<b>1260</b>	5.035	5.111	<b>2000</b>	5.052	5.154
<b>520</b>	4.997	5.028	<b>1280</b>	5.036	5.112	<b>2500</b>	5.059	5.175
<b>540</b>	4.999	5.032	<b>1300</b>	5.037	5.114	<b>3000</b>	5.065	5.192
<b>560</b>	5.000	5.035	<b>1320</b>	5.037	5.115	<b>3500</b>	5.069	5.207
<b>580</b>	5.002	5.038	<b>1340</b>	5.038	5.117	<b>4000</b>	5.073	5.219
<b>600</b>	5.004	5.041	<b>1360</b>	5.038	5.118	<b>4500</b>	5.076	5.230
<b>620</b>	5.005	5.045	<b>1380</b>	5.039	5.119	<b>5000</b>	5.078	5.240
<b>640</b>	5.007	5.047	<b>1400</b>	5.039	5.121	<b>5500</b>	5.081	5.249
<b>660</b>	5.008	5.050	<b>1420</b>	5.040	5.122	<b>6000</b>	5.083	5.257
<b>680</b>	5.010	5.053	<b>1440</b>	5.040	5.123	<b>6500</b>	5.085	5.264
<b>700</b>	5.011	5.056	<b>1460</b>	5.041	5.125	<b>7000</b>	5.086	5.271
<b>720</b>	5.012	5.059	<b>1480</b>	5.041	5.126	<b>7500</b>	5.088	5.278
<b>740</b>	5.013	5.061	<b>1500</b>	5.042	5.127	<b>8000</b>	5.089	5.284
<b>760</b>	5.015	5.064	<b>1520</b>	5.042	5.128	<b>8500</b>	5.091	5.290
<b>780</b>	5.016	5.066	<b>1540</b>	5.043	5.130	<b>9000</b>	5.092	5.295
<b>800</b>	5.017	5.068	<b>1560</b>	5.043	5.131	<b>9500</b>	5.093	5.300
<b>820</b>	5.018	5.071	<b>1580</b>	5.044	5.132	<b>10000</b>	5.094	5.305
<b>840</b>	5.019	5.073						

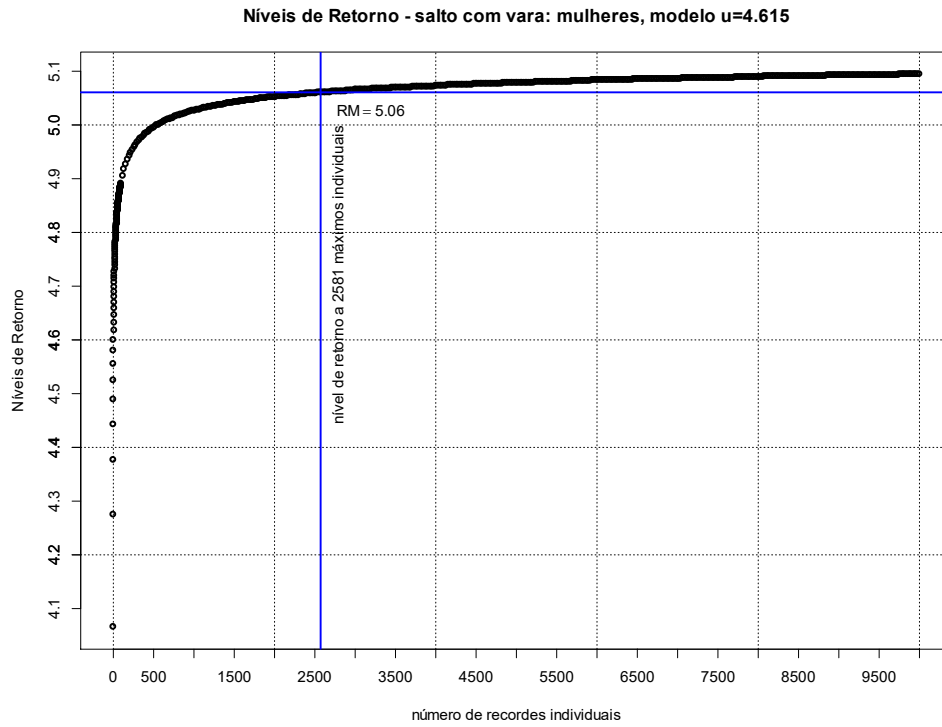


Figura A5.11 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -recordes individuais na amostra de salto com vara – mulheres, para o modelo com limiar  $u=4.615$ .

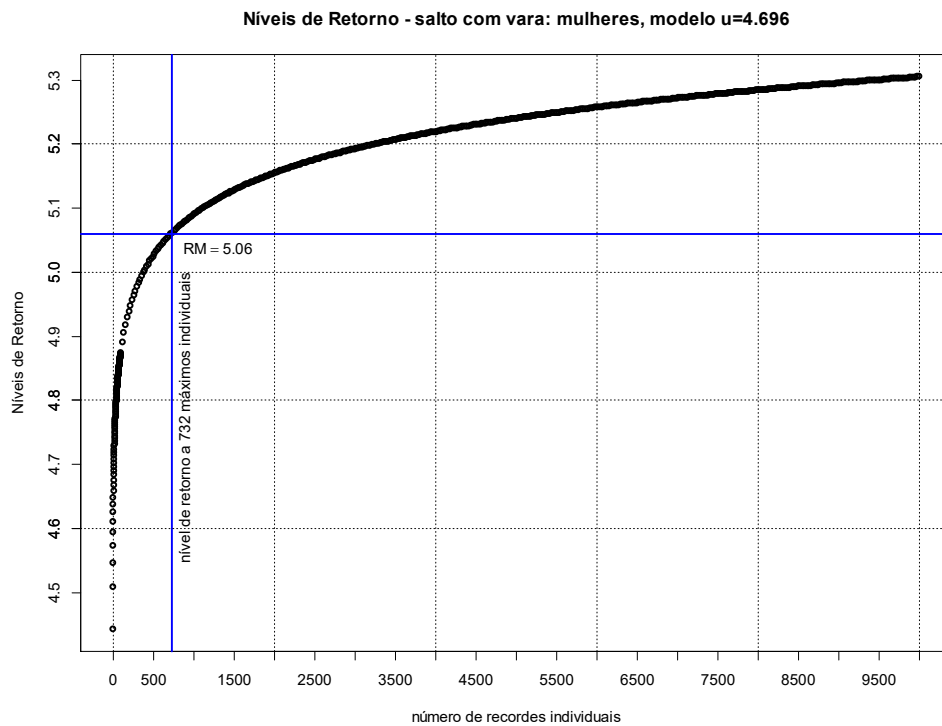


Figura A5.12 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -recordes individuais na amostra de salto com vara – mulheres, para o modelo com limiar  $u=4.696$ .



**Anexo 5.4.7. Triplo-salto – homens**

$U(t)$			$U(t)$			$U(t)$		
$t$	$u=17.568$	$u=17.605$	$t$	$u=17.568$	$u=17.605$	$t$	$u=17.568$	$u=17.605$
<b>100</b>	18.013	18.034	<b>860</b>	18.420	18.479	<b>1600</b>	18.538	18.607
<b>120</b>	18.047	18.072	<b>880</b>	18.425	18.484	<b>1620</b>	18.540	18.610
<b>140</b>	18.077	18.103	<b>900</b>	18.429	18.488	<b>1640</b>	18.543	18.612
<b>160</b>	18.102	18.131	<b>920</b>	18.433	18.493	<b>1660</b>	18.545	18.615
<b>180</b>	18.124	18.155	<b>940</b>	18.437	18.497	<b>1680</b>	18.547	18.617
<b>200</b>	18.144	18.177	<b>960</b>	18.441	18.502	<b>1700</b>	18.550	18.620
<b>220</b>	18.162	18.197	<b>980</b>	18.445	18.506	<b>1720</b>	18.552	18.622
<b>240</b>	18.179	18.215	<b>1000</b>	18.449	18.510	<b>1740</b>	18.554	18.625
<b>260</b>	18.194	18.231	<b>1020</b>	18.453	18.514	<b>1760</b>	18.556	18.627
<b>280</b>	18.208	18.247	<b>1040</b>	18.456	18.518	<b>1780</b>	18.558	18.629
<b>300</b>	18.221	18.261	<b>1060</b>	18.460	18.522	<b>1800</b>	18.560	18.632
<b>320</b>	18.233	18.274	<b>1080</b>	18.464	18.526	<b>1820</b>	18.563	18.634
<b>340</b>	18.245	18.287	<b>1100</b>	18.467	18.530	<b>1840</b>	18.565	18.636
<b>360</b>	18.255	18.299	<b>1120</b>	18.471	18.534	<b>1860</b>	18.567	18.638
<b>380</b>	18.266	18.310	<b>1140</b>	18.474	18.537	<b>1880</b>	18.569	18.641
<b>400</b>	18.275	18.321	<b>1160</b>	18.477	18.541	<b>1900</b>	18.571	18.643
<b>420</b>	18.285	18.331	<b>1180</b>	18.480	18.544	<b>1920</b>	18.573	18.645
<b>440</b>	18.294	18.340	<b>1200</b>	18.484	18.548	<b>1940</b>	18.575	18.647
<b>460</b>	18.302	18.349	<b>1220</b>	18.487	18.551	<b>1960</b>	18.577	18.649
<b>480</b>	18.310	18.358	<b>1240</b>	18.490	18.555	<b>1980</b>	18.578	18.651
<b>500</b>	18.318	18.367	<b>1260</b>	18.493	18.558	<b>2000</b>	18.580	18.653
<b>520</b>	18.325	18.375	<b>1280</b>	18.496	18.561	<b>2500</b>	18.623	18.700
<b>540</b>	18.332	18.383	<b>1300</b>	18.499	18.564	<b>3000</b>	18.657	18.737
<b>560</b>	18.339	18.390	<b>1320</b>	18.502	18.568	<b>3500</b>	18.686	18.769
<b>580</b>	18.346	18.397	<b>1340</b>	18.505	18.571	<b>4000</b>	18.712	18.797
<b>600</b>	18.352	18.404	<b>1360</b>	18.507	18.574	<b>4500</b>	18.734	18.821
<b>620</b>	18.358	18.411	<b>1380</b>	18.510	18.577	<b>5000</b>	18.754	18.843
<b>640</b>	18.364	18.418	<b>1400</b>	18.513	18.580	<b>5500</b>	18.772	18.863
<b>660</b>	18.370	18.424	<b>1420</b>	18.515	18.583	<b>6000</b>	18.789	18.881
<b>680</b>	18.376	18.430	<b>1440</b>	18.518	18.586	<b>6500</b>	18.804	18.897
<b>700</b>	18.381	18.436	<b>1460</b>	18.521	18.588	<b>7000</b>	18.818	18.913
<b>720</b>	18.387	18.442	<b>1480</b>	18.523	18.591	<b>7500</b>	18.831	18.927
<b>740</b>	18.392	18.448	<b>1500</b>	18.526	18.594	<b>8000</b>	18.843	18.940
<b>760</b>	18.397	18.453	<b>1520</b>	18.528	18.597	<b>8500</b>	18.855	18.953
<b>780</b>	18.402	18.459	<b>1540</b>	18.531	18.599	<b>9000</b>	18.865	18.965
<b>800</b>	18.407	18.464	<b>1560</b>	18.533	18.602	<b>9500</b>	18.876	18.976
<b>820</b>	18.411	18.469	<b>1580</b>	18.536	18.605	<b>10000</b>	18.885	18.986
<b>840</b>	18.416	18.474						

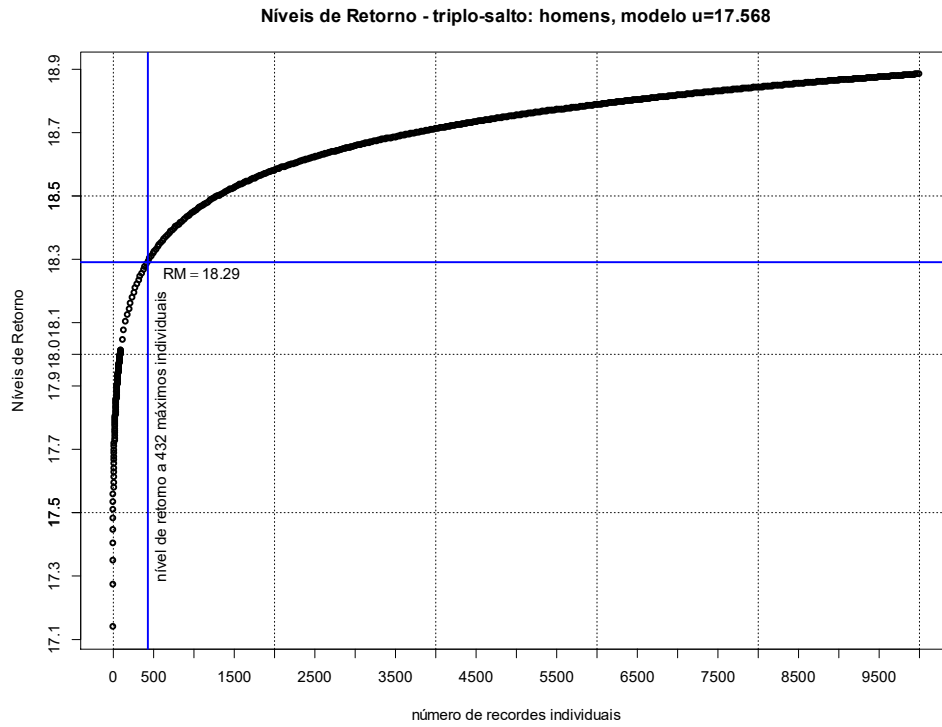


Figura A5.13 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -records individuais na amostra de triplo-salto – homens, para o modelo com limiar  $u=17.568$ .

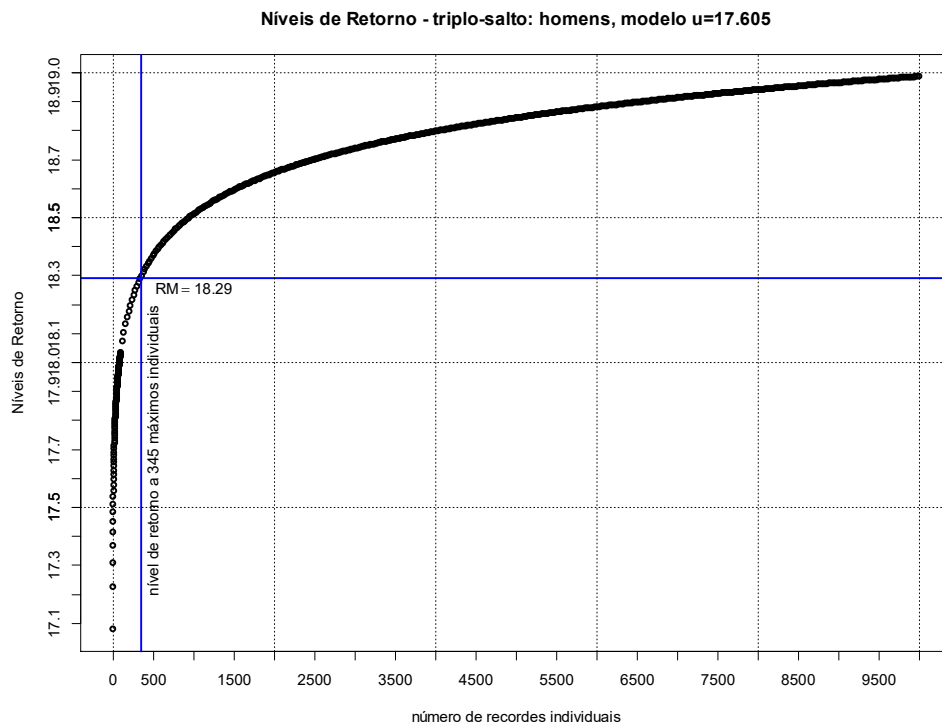


Figura A5.14 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -records individuais na amostra de triplo-salto – homens, para o modelo com limiar  $u=17.605$ .

**Anexo 5.4.8. Triplo-salto – mulheres**

$U(t)$			$U(t)$			$U(t)$		
$t$	$u=14.933$	$u=14.960$	$t$	$u=14.933$	$u=14.960$	$t$	$u=14.933$	$u=14.960$
<b>100</b>	15.361	15.353	<b>860</b>	15.485	15.486	<b>1600</b>	15.502	15.506
<b>120</b>	15.378	15.370	<b>880</b>	15.486	15.487	<b>1620</b>	15.502	15.506
<b>140</b>	15.391	15.384	<b>900</b>	15.487	15.488	<b>1640</b>	15.502	15.506
<b>160</b>	15.401	15.394	<b>920</b>	15.487	15.489	<b>1660</b>	15.503	15.507
<b>180</b>	15.410	15.403	<b>940</b>	15.488	15.489	<b>1680</b>	15.503	15.507
<b>200</b>	15.417	15.411	<b>960</b>	15.489	15.490	<b>1700</b>	15.503	15.507
<b>220</b>	15.423	15.418	<b>980</b>	15.489	15.491	<b>1720</b>	15.503	15.508
<b>240</b>	15.429	15.423	<b>1000</b>	15.490	15.492	<b>1740</b>	15.504	15.508
<b>260</b>	15.433	15.429	<b>1020</b>	15.490	15.492	<b>1760</b>	15.504	15.508
<b>280</b>	15.438	15.433	<b>1040</b>	15.491	15.493	<b>1780</b>	15.504	15.509
<b>300</b>	15.441	15.437	<b>1060</b>	15.491	15.493	<b>1800</b>	15.504	15.509
<b>320</b>	15.445	15.441	<b>1080</b>	15.492	15.494	<b>1820</b>	15.505	15.509
<b>340</b>	15.448	15.444	<b>1100</b>	15.492	15.495	<b>1840</b>	15.505	15.509
<b>360</b>	15.451	15.448	<b>1120</b>	15.493	15.495	<b>1860</b>	15.505	15.510
<b>380</b>	15.453	15.450	<b>1140</b>	15.493	15.496	<b>1880</b>	15.505	15.510
<b>400</b>	15.456	15.453	<b>1160</b>	15.494	15.496	<b>1900</b>	15.505	15.510
<b>420</b>	15.458	15.456	<b>1180</b>	15.494	15.497	<b>1920</b>	15.506	15.510
<b>440</b>	15.460	15.458	<b>1200</b>	15.495	15.497	<b>1940</b>	15.506	15.511
<b>460</b>	15.462	15.460	<b>1220</b>	15.495	15.498	<b>1960</b>	15.506	15.511
<b>480</b>	15.464	15.462	<b>1240</b>	15.496	15.498	<b>1980</b>	15.506	15.511
<b>500</b>	15.466	15.464	<b>1260</b>	15.496	15.499	<b>2000</b>	15.507	15.511
<b>520</b>	15.467	15.466	<b>1280</b>	15.496	15.499	<b>2500</b>	15.511	15.517
<b>540</b>	15.469	15.467	<b>1300</b>	15.497	15.500	<b>3000</b>	15.514	15.521
<b>560</b>	15.470	15.469	<b>1320</b>	15.497	15.500	<b>3500</b>	15.516	15.524
<b>580</b>	15.472	15.471	<b>1340</b>	15.498	15.501	<b>4000</b>	15.518	15.526
<b>600</b>	15.473	15.472	<b>1360</b>	15.498	15.501	<b>4500</b>	15.520	15.528
<b>620</b>	15.474	15.473	<b>1380</b>	15.498	15.502	<b>5000</b>	15.521	15.530
<b>640</b>	15.475	15.475	<b>1400</b>	15.499	15.502	<b>5500</b>	15.522	15.531
<b>660</b>	15.476	15.476	<b>1420</b>	15.499	15.502	<b>6000</b>	15.523	15.533
<b>680</b>	15.477	15.477	<b>1440</b>	15.499	15.503	<b>6500</b>	15.524	15.534
<b>700</b>	15.478	15.478	<b>1460</b>	15.500	15.503	<b>7000</b>	15.525	15.535
<b>720</b>	15.479	15.480	<b>1480</b>	15.500	15.504	<b>7500</b>	15.526	15.536
<b>740</b>	15.480	15.481	<b>1500</b>	15.500	15.504	<b>8000</b>	15.526	15.537
<b>760</b>	15.481	15.482	<b>1520</b>	15.501	15.504	<b>8500</b>	15.527	15.537
<b>780</b>	15.482	15.483	<b>1540</b>	15.501	15.505	<b>9000</b>	15.528	15.538
<b>800</b>	15.483	15.484	<b>1560</b>	15.501	15.505	<b>9500</b>	15.528	15.539
<b>820</b>	15.484	15.485	<b>1580</b>	15.501	15.505	<b>10000</b>	15.529	15.539
<b>840</b>	15.484	15.485						

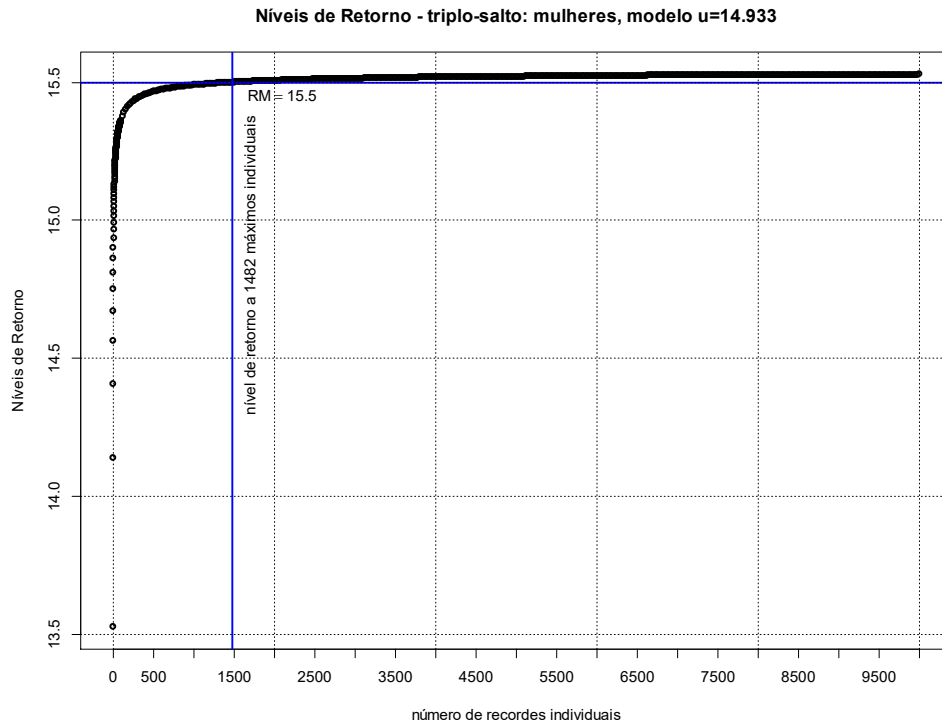


Figura A5.15 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -recordes individuais na amostra de triplo-salto – mulheres, para o modelo com limiar  $u=14.933$ .

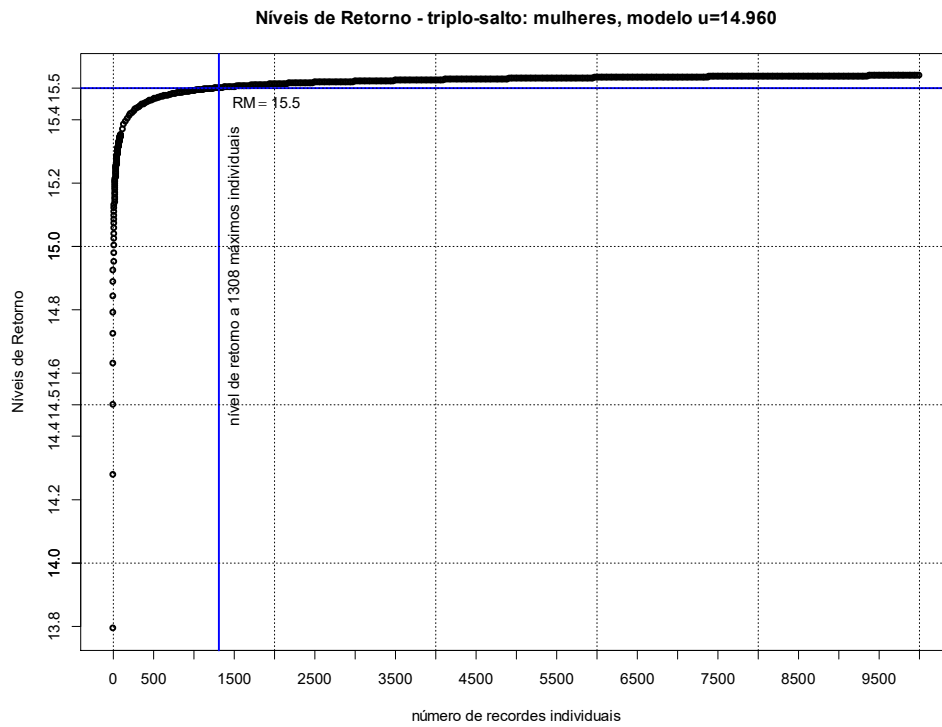


Figura A5.16 – Mapa de níveis de retorno a  $t$ -recordes individuais na amostra de triplo-salto – mulheres, para o modelo com limiar  $u=14.960$ .

## ANEXO 6 – NÃO-ESTACIONARIEDADE

### ANEXO 6.1: introduzir a covariável $t$

Considere-se, por exemplo a amostra de lançamento do disco feminino (aqui designada por `ldiscoF`), com  $m=38$  máximos de blocos anuais. O código R é o seguinte:

– No caso de **tendência linear**, uma matriz-coluna 38 x 1:

```
TLinear.ldiscoF <- matrix(ncol=1, nrow=38)
TLinear.ldiscoF[,1] <- seq(1, 38, 1)
```

No caso de **tendência quadrática**, ao procedimento anterior acrescentamos uma coluna, i.e., uma matriz retangular 38 x 2:

```
TQuadratica.ldiscoF <- matrix(ncol=2, nrow=38)
TQuadratica.ldiscoF[,1] <- seq(1, 38, 1)
TQuadratica.ldiscoF[,2] <- (TQuadratica.ldiscoF[,1]**2)
```

Observação A6.1: neste estudo os modelos com tendência cúbica foram rejeitados.

**ANEXO 6.2. Obter valores de assimetria e curtose, segundo a convenção adotada pelo****IBM SPSS**

Assimetria

$$\gamma_1 = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3$$

$$se(\gamma_1) = \sqrt{\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}}$$

Curtose

$$\gamma_2 = \left\{ \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^4 \right\} - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

$$se(\gamma_2) = 2se(\gamma_1) \sqrt{\frac{n^2-1}{(n-3)(n+5)}}$$

**Código R:**

```

assim_curt=function(x) {
n=length(x)
m1=mean(x)
m2=sum((x-m1)^2)
m3=sum((x-m1)^3)
m4=sum((x-m1)^4)
s1=sd(x)
assimetria=(n/((n-1)*(n-2)))*(m3/s1^3)
sd.assimetria=sqrt(6*n*(n-1)/((n-2)*(n+1)*(n+3)))
curtose=((n*(n+1))/((n-1)*(n-2)*(n-3)))*(m4/(s1^4))-(3*(n-1)^2)/((n-2)*(n-3))
sd.curtose=2*sd.assimetria*sqrt((n^2-1)/((n-3)*(n+5)))
matriz=matrix(c(assimetria, curtose, sd.assimetria, sd.curtose), 2,
  dimnames=list(c("assimetria", "curtose"), c("estimativa", "erro-padrão")))
return(matriz)
}

```

**Decisão**

Assimetria

 $\gamma_1=0 \rightarrow$  curva da distribuição é simétrica,  $\bar{x} = Me$  $\gamma_1>0 \rightarrow$  curva da distribuição é assimétrica positiva,  $\bar{x} > Me$  $\gamma_1<0 \rightarrow$  curva da distribuição é assimétrica negativa,  $\bar{x} < Me$ 

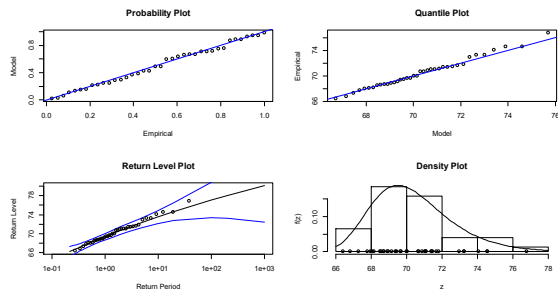
Curtose

 $\gamma_2=0 \rightarrow$  curva da distribuição é mesocúrtica $\gamma_2>0 \rightarrow$  curva da distribuição é leptocúrtica $\gamma_2<0 \rightarrow$  curva da distribuição é platicúrtica

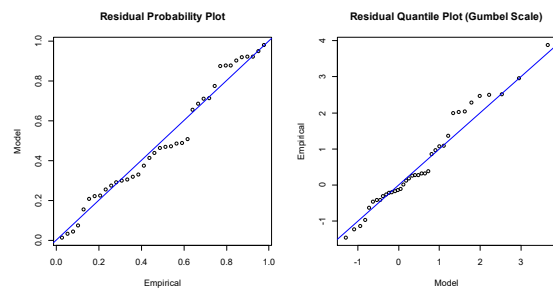
### ANEXO 6.3. Ajustamento dos modelos: LANÇAMENTO DO DISCO FEMININO

#### Anexo 6.3.1. Modelos GEV: estacionário, tendência linear e tendência quadrática

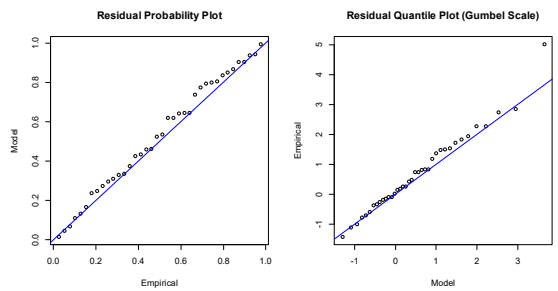
Modelo 1: estacionário



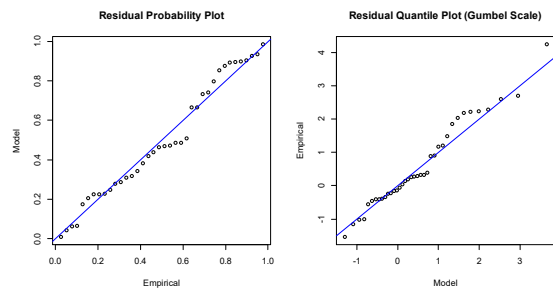
Modelo 2: tendência linear na localização



Modelo 3: tendência log-linear na escala



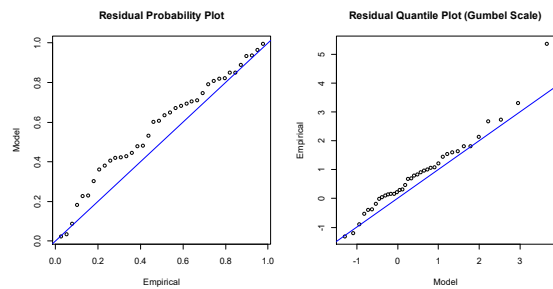
Modelo 4: tendência linear na localização e log-linear na escala



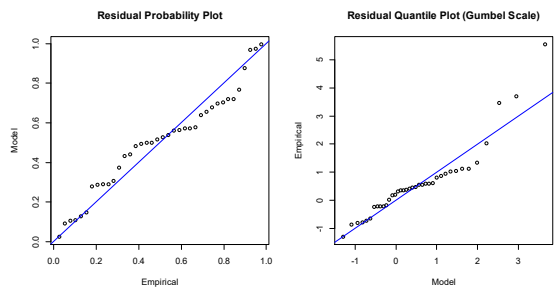
Modelo 5: tendência quadrática na localização

Não gera erros-padrão das estimativas pontuais de todos os parâmetros extremais

Modelo 6: tendência log-quadrática na escala



M7: tendência quadrática na localização e log-linear na escala



M8: tendência linear na localização e log-quadrática na escala

Não gera erros-padrão das estimativas pontuais dos parâmetros extremais:

$$se(\hat{\lambda}_0), se(\hat{\lambda}_1)$$

$$se(\hat{\delta}_0), se(\hat{\delta}_1)$$

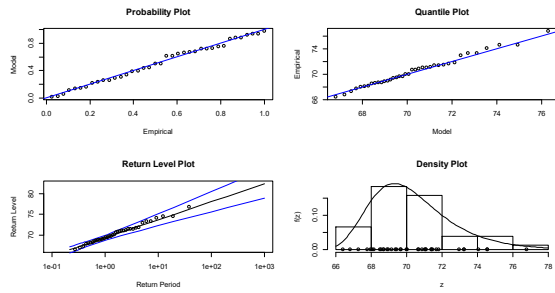
$$se(\hat{\gamma})$$

M9: tendência quadrática na localização e log-quadrática na escala

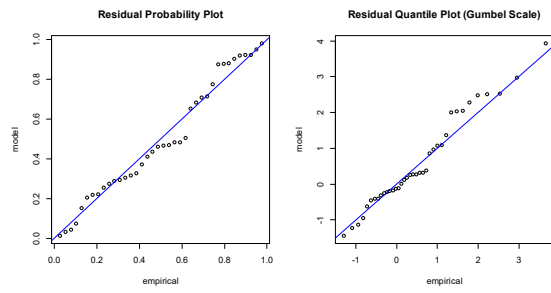
Não gera erro-padrão da estimativa pontual do parâmetro extremal  $se(\hat{\lambda}_2)$

**Anexo 6.3.2. Modelos Gumbel: estacionário, tendência linear e tendência quadrática**

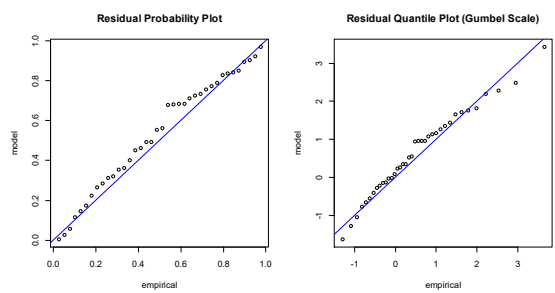
**Modelo 1: estacionário**



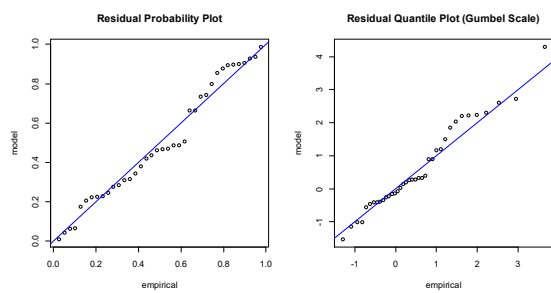
**Modelo 2: tendência linear na localização**



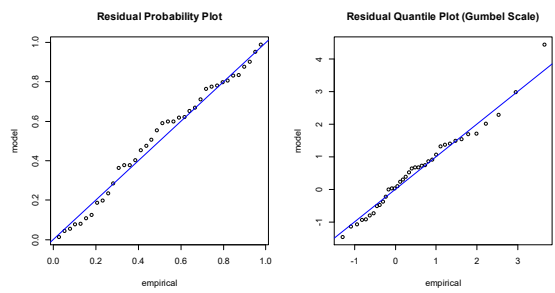
**Modelo 3: tendência log-linear na escala**



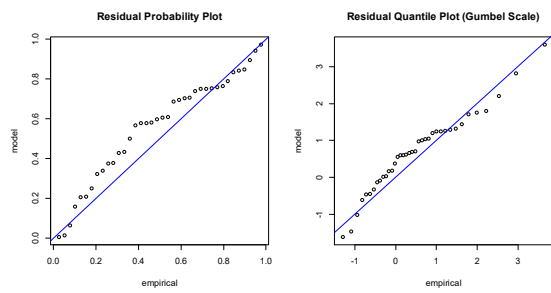
**Modelo 4: tendência linear na localização e log-linear na escala**



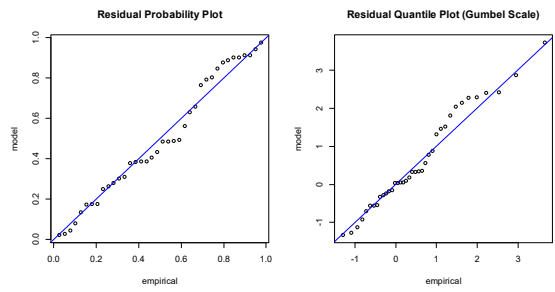
**Modelo 5: tendência quadrática na localização**



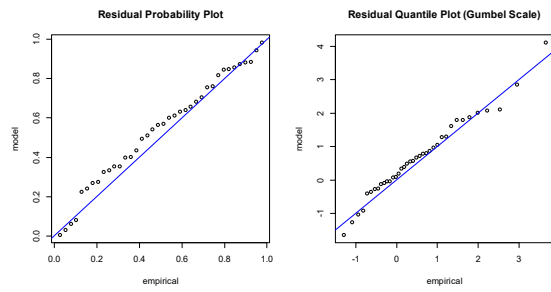
**Modelo 6: tendência log-quadrática na escala**



**M7: tendência quadrática na localização e log-linear na escala**



**M8: tendência linear na localização e log-quadrática na escala**

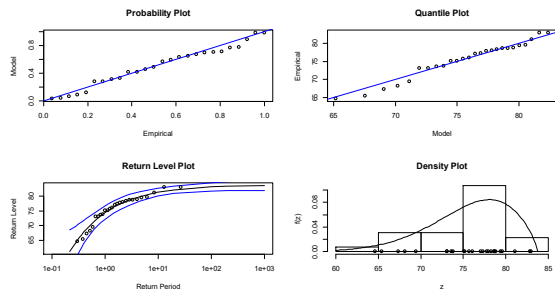




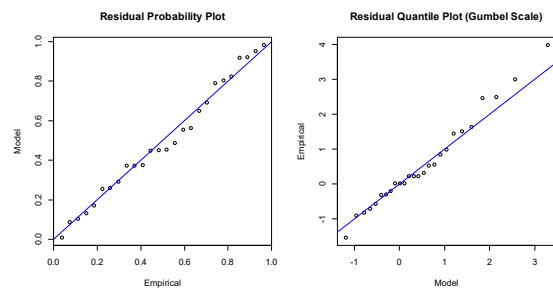
## ANEXO 6.4. Ajustamento dos modelos: LANÇAMENTO DO MARTELO FEMININO

### Anexo 6.4.1. Modelos GEV: estacionário, tendência linear e tendência quadrática

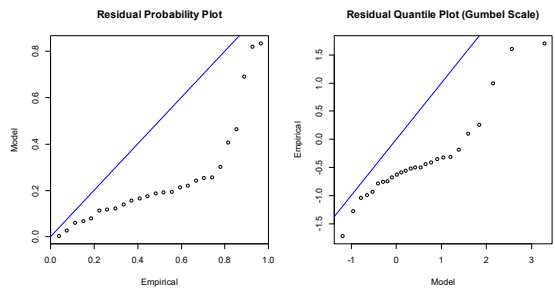
Modelo 1: estacionário



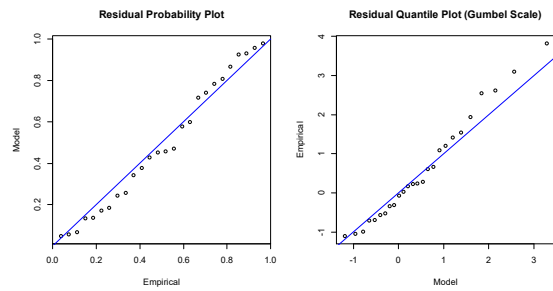
Modelo 2: tendência linear na localização



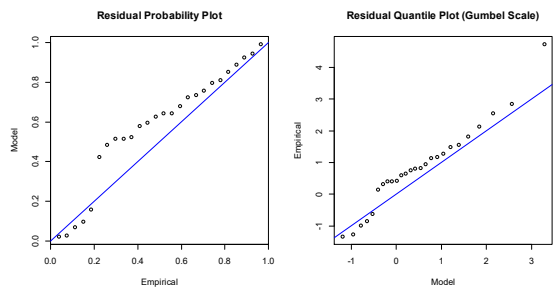
Modelo 3: tendência log-linear na escala



Modelo 4: tendência linear na localização e log-linear na escala



Modelo 5: tendência quadrática na localização



Modelo 6: tendência log-quadrática na escala

Não gera erro-padrão das estimativas pontuais do parâmetro extremo:

$$se(\hat{\delta}_0)$$

M7: tendência quadrática na localização e log-linear na escala

Não gera erros-padrão das estimativas pontuais dos parâmetros extremos:

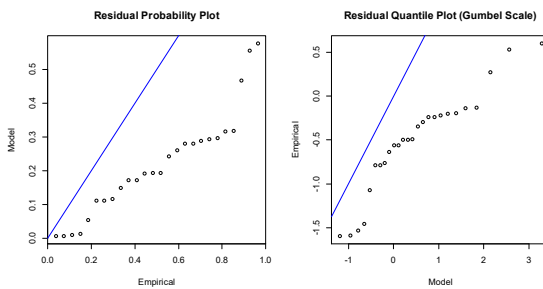
$$se(\hat{\lambda}_1), se(\hat{\lambda}_2)$$

M8: tendência linear na localização e log-quadrática na escala

Não gera erros-padrão das estimativas pontuais dos parâmetros extremos:

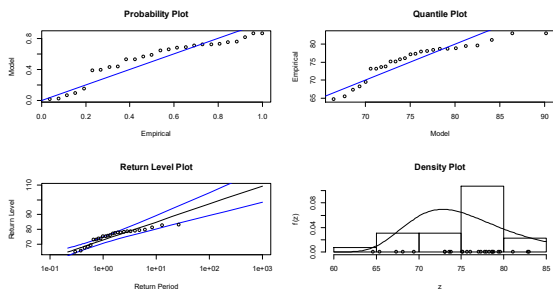
$$se(\hat{\delta}_2), se(\hat{\gamma})$$

M9: tendência quadrática na localização e log-quadrática na escala

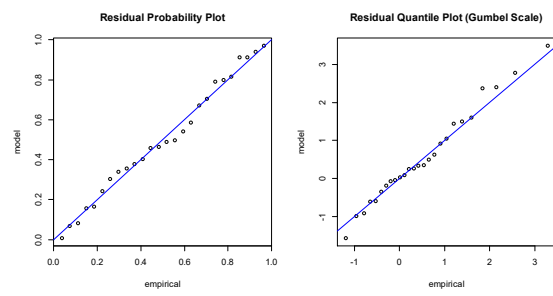


**Anexo 6.4.2. Modelos Gumbel: estacionário, tendência linear e tendência quadrática**

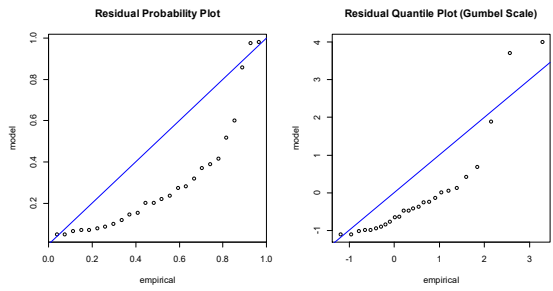
Modelo 1: estacionário



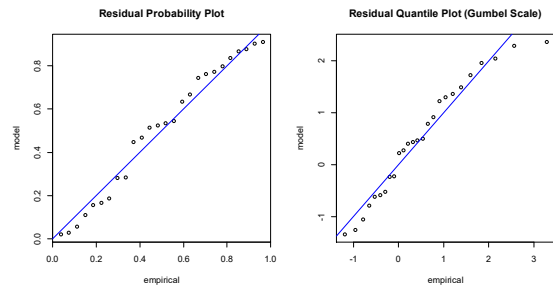
Modelo 2: tendência linear na localização



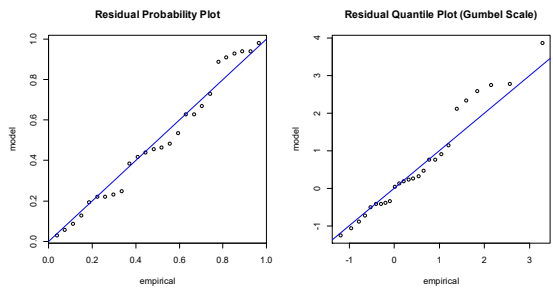
Modelo 3: tendência log-linear na escala



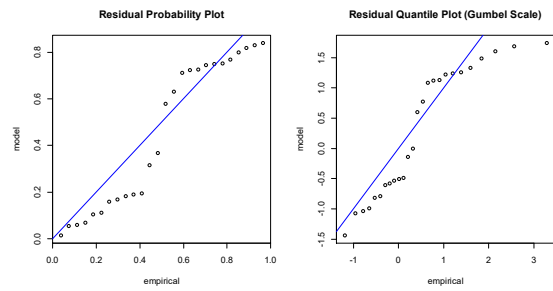
Modelo 4: tendência linear na localização e log-linear na escala



Modelo 5: tendência quadrática na localização



Modelo 6: tendência log-quadrática na escala

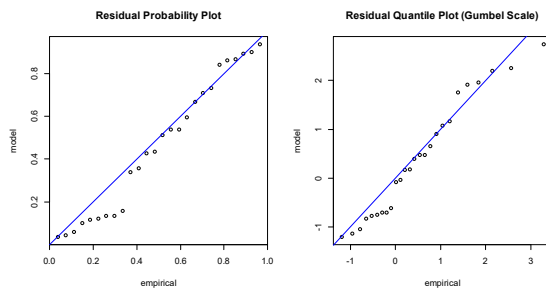


M7: tendência quadrática na localização e log-linear na escala

M8: tendência linear na localização e log-quadrática na escala

Não gera erros-padrão das estimativas pontuais dos parâmetros extremais:

$$se(\hat{\lambda}_1), se(\hat{\lambda}_2)$$



**ANEXO 6.5. Modelos GEV e Gumbel não-estacionários****Anexo 6.5.1. Lançamento do disco feminino, 1980-2017****(i) evolução do parâmetro de localização com o tempo**

<b>GEV</b>	<b>2020</b>	<b>2025</b>	<b>2030</b>	<b>2035</b>	<b>2040</b>	<b>2050</b>	<b>2070</b>	<b>2100</b>
<b>M<sub>1</sub></b>	69.37	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>2</sub></b>	66.58	65.89	65.20	64.52	63.83	62.45	59.70	55.57
<b>M<sub>3</sub></b>	69.10	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>4</sub></b>	66.48	65.77	65.07	64.37	63.66	62.25	59.43	55.21
<b>M<sub>6</sub></b>	68.53	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>7</sub></b>	72.24	74.81	77.98	81.77	86.16	96.76	125.27	186.25

<b>Gumbel</b>	<b>2020</b>	<b>2025</b>	<b>2030</b>	<b>2035</b>	<b>2040</b>	<b>2050</b>	<b>2070</b>	<b>2100</b>
<b>M<sub>1</sub></b>	69.30	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>2</sub></b>	66.57	65.88	65.20	64.51	63.82	62.45	59.71	55.59
<b>M<sub>3</sub></b>	68.98	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>4</sub></b>	66.48	65.78	65.08	64.37	63.67	62.26	59.44	55.22
<b>M<sub>5</sub></b>	69.56	70.61	71.99	73.70	75.75	80.84	95.00	126.18
<b>M<sub>6</sub></b>	68.67	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>7</sub></b>	65.97	64.69	63.26	61.69	59.97	56.08	46.53	27.79
<b>M<sub>8</sub></b>	66.04	65.30	64.57	63.83	63.09	61.62	58.68	54.26

**(ii) Evolução do parâmetro de escala com o tempo**

<b>GEV</b>	<b>2020</b>	<b>2025</b>	<b>2030</b>	<b>2035</b>	<b>2040</b>	<b>2050</b>	<b>2070</b>	<b>2100</b>
<b>M<sub>1</sub></b>	1.956	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>2</sub></b>	1.480	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>3</sub></b>	1.108	0.954	0.822	0.707	0.609	0.452	0.248	0.101
<b>M<sub>4</sub></b>	1.766	1.842	1.921	2.004	2.090	2.274	2.692	3.466
<b>M<sub>6</sub></b>	3.663	9.305	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)
<b>M<sub>7</sub></b>	0.556	0.401	0.290	0.209	0.151	0.079	0.021	0.003

(a) valores irrealistas / não-plausíveis

<b>Gumbel</b>	<b>2020</b>	<b>2025</b>	<b>2030</b>	<b>2035</b>	<b>2040</b>	<b>2050</b>	<b>2070</b>	<b>2100</b>
<b>M<sub>1</sub></b>	1.915	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>2</sub></b>	1.486	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>3</sub></b>	1.312	1.204	1.105	1.013	0.930	0.782	0.554	0.330
<b>M<sub>4</sub></b>	1.769	1.845	1.924	2.007	2.093	2.276	2.692	3.462
<b>M<sub>5</sub></b>	1.378	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>6</sub></b>	2.984	5.251	10.639	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)
<b>M<sub>7</sub></b>	1.654	1.655	1.655	1.656	1.657	1.658	1.661	1.664
<b>M<sub>8</sub></b>	3.694	7.343	16.907	45.090	(a)	(a)	(a)	(a)

(a) valores irrealistas / não-plausíveis

**Anexo 6.5.2. Lançamento do martelo feminino, 1992-2017****(i) Evolução do parâmetro de localização com o tempo**

GEV	2020	2025	2030	2035	2040	2050	2070	2100
<b>M<sub>1</sub></b>	74.43	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>2</sub></b>	84.81	88.07	91.34	94.60	97.87	104.40	117.46	137.05
<b>M<sub>3</sub></b>	79.20	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>4</sub></b>	83.99	86.84	89.70	92.56	95.41	101.12	112.55	129.69
<b>M<sub>5</sub></b>	83.61	89.29	96.10	104.05	113.14	(a)	(a)	(a)
<b>M<sub>9</sub></b>	78.41	76.36	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)

(a) valores irrealistas / não-plausíveis

Gumbel	2020	2025	2030	2035	2040	2050	2070	2100
<b>M<sub>1</sub></b>	72.83	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>2</sub></b>	84.92	88.25	91.58	94.91	98.24	104.90	118.22	138.20
<b>M<sub>3</sub></b>	78.59	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>4</sub></b>	83.81	86.70	89.58	92.46	95.35	101.12	112.65	129.96
<b>M<sub>5</sub></b>	80.73	80.19	78.63	76.04	72.44	62.17	29.36	-50.48
<b>M<sub>6</sub></b>	76.07	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>8</sub></b>	83.16	85.65	88.14	90.63	93.11	98.09	108.04	122.96

**(ii) Evolução do parâmetro de escala com o tempo**

GEV	2020	2025	2030	2035	2040	2050	2070	2100
<b>M<sub>1</sub></b>	5.386	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>2</sub></b>	1.527	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>3</sub></b>	0.533	0.256	0.123	0.059	0.028	0.007	0.00004	<0.00001
<b>M<sub>4</sub></b>	0.558	0.408	0.298	0.218	0.160	0.085	0.024	0.004
<b>M<sub>5</sub></b>	3.468	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>9</sub></b>	0.914	0.2301	0.0471	0.0078	0.0011	0.00001	<0.00001	<0.00001

Gumbel	2020	2025	2030	2035	2040	2050	2070	2100
<b>M<sub>1</sub></b>	5.282	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>2</sub></b>	1.472	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>3</sub></b>	0.786	0.469	0.280	0.167	0.100	0.036	0.005	0.0002
<b>M<sub>4</sub></b>	0.504	0.369	0.271	0.199	0.146	0.078	0.023	0.004
<b>M<sub>5</sub></b>	1.093	constante	constante	constante	constante	constante	constante	constante
<b>M<sub>6</sub></b>	11.314	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)
<b>M<sub>8</sub></b>	1.536	4.044	15.396	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)

(a) valores irrealistas / não-plausíveis

### ANEXO 6.6. RMSE, MAE, ME e %BIAS – resultados de simulação

No estudo de simulação apenas os dois melhores modelos em cada amostra foram utilizados.

Os valores preditos pelo modelo irão ser obtidos usando os  $\theta(t)[,]$ , com  $\theta(t)=(\lambda(t),\delta(t),\gamma)$ , i.e., uma matriz com três colunas no caso do modelo GEV( $\gamma \neq 0$ ) ou com duas colunas no caso do modelo Gumbel( $\gamma=0$ ), contendo os valores das estimativas pontuais de máxima log-verossimilhança dos parâmetros de localização, escala e forma em cada máximo. Notando-se que no modelo GEV a estimativa pontual do parâmetro de forma é constante para todo o  $t$ .

Mais detalhadamente:

1. Usar a distribuição GEV e Gumbel para obter as estimativas de máxima log-verossimilhança dos parâmetros extremais em cada amostra,

Lançamento do disco:  $X_t \sim GUM(\hat{\lambda}(t), \hat{\delta})$ , com  $\lambda(t)=\lambda_0+\lambda_1t+\lambda_2t^2$

Lançamento do martelo:  $X_t \sim GEV(\hat{\lambda}(t), \hat{\delta}(t), \hat{\gamma})$ , com  $\lambda(t)=\lambda_0+\lambda_1t$ ,  $\delta(t)=\exp(\delta_0+\delta_1t)$

e  $t=1,2,\dots,m$  (que corresponde ao «ano inicial, ano inicial+1, ..., 2017»).

2. Calcular valores preditos (estimados pelo modelo):

$t$	Ano	$x_j$	$\hat{\lambda}(t)$	$\hat{\delta}(t)$	$\hat{\gamma}(t)=\hat{\gamma}$
1	Inicial	$x_1$	$\hat{\lambda}(t)[1,1]$	$\hat{\delta}(t)[1,2]$	$\gamma$
2	Inicial + 1	$x_2$	$\hat{\lambda}(t)[2,1]$	$\hat{\delta}(t)[2,2]$	$\gamma$
...	...	...	...	...	...
$m$	2017	$x_m$	$\hat{\lambda}(t)[m,1]$	$\hat{\delta}(t)[m,2]$	$\gamma$

3. Gerar  $n$  números pseudoaleatórios recorrendo à função `rgev()` inserida no pacote “evd” (Stephenson, 2002) do programa R, ou seja,

`rgev(n=a, loc=vals[,1], scale=vals[,2], shape=b)`,

com

$a=38$  no lançamento do disco feminino e  $a=26$  no lançamento do martelo feminino.

$b=\gamma$  na distribuição GEV e  $b=0$  na distribuição Gumbel.

Observação A6.2:  $\lambda(t)=\text{vals}[,1]$ ,  $\delta(t)=\delta$  no lançamento do disco feminino e  $\lambda(t)=\text{vals}[,1]$ ,  $\delta(t)=\text{vals}[,2]$  e  $\gamma(t)=\gamma$  no lançamento do martelo feminino, em que

$\text{vals}[,1]$ , é o vetor de dados do parâmetro de localização,  $\hat{\lambda}(t) = \hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1t + \hat{\lambda}_2t^2$ , nas amostras de lançamento do disco feminino ou  $\hat{\lambda}(t) = \hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1t$ , do lançamento do martelo feminino.

`vals[,2]`, é o vetor de dados do parâmetro de escala,  $\hat{\delta}(t) = \hat{\delta}$  no lançamento do disco feminino ou  $\hat{\delta}(t) = \exp(\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 t)$  no lançamento do martelo feminino.

4. usar a função `replicate(n=d, ...)`, com  $d=100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000$  amostras.

5. Obter a mediana das  $n$  *replicate* amostras.

Observação A6.3: código R adotado no processo de simulação (tome-se como exemplo, o cálculo do erro absoluto médio, MAE, para as amostras com modelo GEV e Gumbel) foi o seguinte:

```
set.seed(1000)
library(evd)
# No caso do modelo GEV
modeloGEV <- replicate(n=d, {
  simulados.GEV <- rgev(n=38, loc=M.GEV$vals[,1], scale= M.GEV$vals[,2], shape=γ)
  MAE <- mean(abs(valores.observados - simulados.GEV))
  return(MAE)
})
# No caso do modelo Gumbel
modeloGUM <- replicate(n=d, {
  simulados.GUMBEL <- rgev(n=26, loc=M.GUM$vals[,1], scale= M.GUM$vals[,2], shape=0)
  MAE <- mean(abs(valores.observados - simulados.GUMBEL))
  return(MAE)
})
```

Onde

M.GEV, é o modelo GEV que gerou as estimativas dos parâmetros extremais  $(\lambda(t), \delta(t), \gamma)$

M.GUM, é o modelo Gumbel que gerou as estimativas dos parâmetros extremais  $(\lambda(t), \delta(t))$

Observação A6.4: valores simulados e observados têm que ter a mesma dimensão.

## REFERÊNCIAS

- Stephenson, A.G. (2002). `evd`: Extreme Value Distributions. R News, 2 (2): 31-32. <https://CRAN.R-project.org/doc/Rnews/> e <https://cran.r-project.org/web/packages/evd/evd.pdf>.

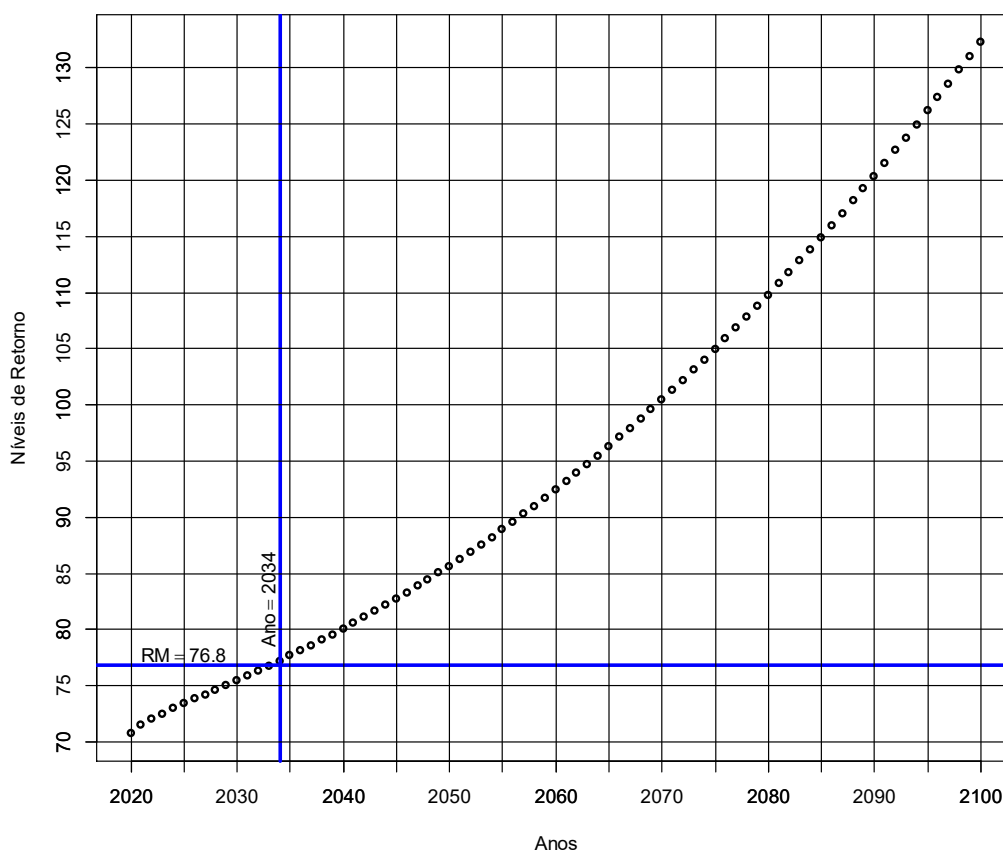
**ANEXO 6.7. Estimativa pontual dos níveis de retorno a T-anos**

**Anexo 6.7.1. Lançamento do disco feminino – Modelo M<sub>5</sub> Gumbel**

anos	NR	anos	NR	anos	NR	anos	NR	anos	NR
2020	70.80	2037	78.58	2054	88.20	2071	101.32	2088	118.14
2021	71.46	2038	79.05	2055	88.87	2072	102.21	2089	119.24
2022	72.00	2039	79.54	2056	89.56	2073	103.11	2090	120.36
2023	72.49	2040	80.04	2057	90.25	2074	104.02	2091	121.49
2024	72.95	2041	80.55	2058	90.96	2075	104.95	2092	122.64
2025	73.38	2042	81.07	2059	91.69	2076	105.88	2093	123.79
2026	73.80	2043	81.60	2060	92.42	2077	106.83	2094	124.96
2027	74.22	2044	82.14	2061	93.17	2078	107.80	2095	126.15
2028	74.64	2045	82.69	2062	93.92	2079	108.77	2096	127.34
2029	75.05	2046	83.26	2063	94.70	2080	109.76	2097	128.55
2030	75.47	2047	83.84	2064	95.48	2081	110.76	2098	129.78
2031	75.89	2048	84.42	2065	96.28	2082	111.78	2099	131.01
2032	76.32	2049	85.02	2066	97.09	2083	112.80	2100	132.26
2033	76.75	2050	85.63	2067	97.91	2084	113.84		
2034	77.20	2051	86.26	2068	98.74	2085	114.90		
2035	77.65	2052	86.89	2069	99.59	2086	115.96		
2036	78.11	2053	87.54	2070	100.45	2087	117.04		

NR – nível de retorno

**Níveis de Retorno - lançamento do disco feminino - M5 Gumbel**



**Anexo 6.7.2. Lançamento do martelo feminino – Modelo M<sub>4</sub> GEV**

anos	NR	anos	NR	anos	NR	anos	NR	anos	NR
2020	84.41	2037	94.03	2054	103.54	2071	113.17	2088	122.85
2021	85.07	2038	94.59	2055	104.10	2072	113.73	2089	123.42
2022	85.69	2039	95.14	2056	104.67	2073	114.30	2090	123.99
2023	86.27	2040	95.70	2057	105.23	2074	114.87	2091	124.56
2024	86.85	2041	96.25	2058	105.79	2075	115.44	2092	125.13
2025	87.41	2042	96.81	2059	106.36	2076	116.01	2093	125.70
2026	87.97	2043	97.37	2060	106.93	2077	116.58	2094	126.27
2027	88.52	2044	97.93	2061	107.49	2078	117.15	2095	126.84
2028	89.07	2045	98.48	2062	108.06	2079	117.72	2096	127.41
2029	89.63	2046	99.04	2063	108.63	2080	118.29	2097	127.98
2030	90.18	2047	99.60	2064	109.19	2081	118.86	2098	128.55
2031	90.73	2048	100.16	2065	109.76	2082	119.43	2099	129.12
2032	91.28	2049	100.72	2066	110.33	2083	120.00	2100	129.69
2033	91.83	2050	101.29	2067	110.89	2084	120.57		
2034	92.38	2051	101.85	2068	111.46	2085	121.14		
2035	92.93	2052	102.41	2069	112.03	2086	121.71		
2036	93.48	2053	102.97	2070	112.60	2087	122.28		

NR – nível de retorno

