



UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Teoria dos Grafos e Aplicações: Redes Eléctricas e de Transportes Rodoviário

Orientação | Carlos Correia Ramos

Mestrando | Gabriel Lima Maquengo

Mestrado em Matemática e Aplicações

Área de Especialização | Matemática e Aplicações

Dissertação

ÉVORA, 2019

ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Teoria dos Grafos e Aplicações: Redes
Eléctricas e de Transportes Rodoviário**

Orientação | Carlos Correia Ramos

Mestrando | Gabriel Lima Maquengo

Mestrado em Matemática e Aplicações

Área de Especialização | Matemática e Aplicações

Dissertação

ÉVORA, 2019

Profa. Auxiliar Dulce Maria Oliveira Gomes, departamento de Matemática – UE

Presidente do Júri

Prof. Auxiliar Luís Miguel Zorro Bandeira, departamento de Matemática – UE

Vogal-Arguente

Prof. Auxiliar Carlos Correia Ramos, departamento de Matemática – UE

Vogal-Orientador

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha família que esteve sempre ao meu lado me dando apoio, coragem e força, a Direcção Geral da EMAE, Direcção Geral de Recursos Naturais e a Direcção Geral de Transporte Rodoviário, Instituto Nacional de Estradas que me consideraram algumas informações para conclusão desse trabalho.

Agradecimentos

Agradeço a DEUS que me deu a força e coragem de continuar, ao meu orientador que me apoiou durante as etapas deste trabalho, bem como a todos os professores e professoras que lecionaram as cadeiras aos Mestrandos de Matemática e Aplicações, na conceituada Instituição portuguesa, Universidade de Évora nos anos 2016/2018.

Resumo

Gabriel Maquengo. **Teoria de grafos e aplicações: redes eléctricas e redes de transportes. S. Tomé**, 2018. 89p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática, Universidade de Évora.

Este trabalho aborda a teoria de grafos como uma ferramenta de base para comunicação nos sistemas da rede eléctrica e rodoviária, através de formulação matemática, possibilitando tomadas de decisão. A concessionária de energia já utilizava, desde a década de 1920, algumas técnicas de comunicação através da rede de energia em alta tensão, para aplicações como intercomunicação, telemedição, telecontrole, as quais exigiam baixa taxa de transferência de dados. No entanto, dada a complexidade da infraestrutura é necessário que a mesma deve simplificar de forma a poder, com ajuda de outras tecnologias, analisar a melhor tomada de decisão. De igual modo, a rede viária é submetida a mesma analogia de forma que com estudo matemático, com ênfase na teoria de grafos, e com todos os seus conceitos admissíveis a essas duas aplicações servirão de ajudar aos operadores/gestores de rede eléctrica e a de rede viária analisar a melhor saída para a problema encontrado. Eis a importância deste trabalho com intuito de espelhar matematicamente a utilização da teoria de grafos para resolução dos problemas. Ou seja, explora-se o potencial da teoria dos grafos como suporte ao tratamento de redes viárias e eléctricas destacando-se a importância da rede rodoviária urbana, modelando-se as redes por meio de um grafo onde cada interseção/subestações/posto de corte é considerado um vértice/nó e as arestas/ramos são trechos de estradas asfaltadas/linha eléctricas ligando as interseções.

Palavras-chave

Grafos, redes, viária, energia, transporte.

Abstract

Gabriel Maquengo. **Theory of graphs and applications: electrical networks and transport networks**. S. Tome, 2018. 89p. MSc. Dissertation. Department of Mathematics, University of Evora.

This work deals with the theory of graphs as a basic tool for communication in the electric and road network systems, through mathematical formulation, enabling decision making. Since the 1920, the power utility has been using some communication techniques through the high voltage power network for applications such as intercommunication, telemetry, remote control, which required low data transfer rates. However, given the complexity of the infrastructure, it is necessary to simplify them to be able, with the help of other technologies, to analyze better the decision-making. Similarly, the road network is subemtped the same analogue so that with mathematical study, with emphasis on graph theory and with all its concepts admissible to these two applications will be to help the operators / managers of the electrical network and the road network analyze the best output for the problem found. It is the importance of this work with the intention of mathematically mirroring the use of graph theory to solve problems, that is, the potential of graph theory is explored as a support for the treatment of road and electrical networks, highlighting the importance of the urban road network, which contemplates the scientific rigor based on the logical-mathematical principle by modeling the networks by means of a graph where each intersection / substation / cut-off point is considered a vertex / node and the edges / branches are stretches of asphalted roads / electric lines linking intersections.

Keywords

Graphs, networks, road, energy, transport.

ÍNDICE

1	Introdução	1
1.1	Contexto	2
1.2	Histórico	3
1.3	Objectivos	4
1.4	Organização	4
2	Características das redes eléctricas	5
2.1	Introdução	6
2.2	Características das Subestações	6
2.3	Características das Linhas de Transmissão	7
2.3	Características das linhas de distribuição	9
2.3.1	Linhas aéreas de distribuição em média tensão	10
2.4	Aspectos regulatórios	12
2.5	Considerações Finais	14
3	Características das redes rodoviárias	15
3.1	Introdução	16
3.2	Hierarquia do sistema viário	16
3.4	Aspectos regulatórios	19
3.5	Considerações finais	20
4	Introdução à teoria de grafos	21
4.1	Introdução	22
4.2	Teoria de Grafos. Definições	22
4.2.1	Tipos de grafos	22
4.3	Considerações finais	45
5	Teoria de grafos aplicada a sistema eléctrico	46
5.1	Introdução	47
5.2	Estruturação	48
5.3	Grafo da rede eléctrica nacional	50
5.4	Análise de redes eléctricas	52
5.5	Fluxo de Potência Eléctrica	57
5.6	Considerações Finais	60
6	Teoria de grafos aplicado a sistema rodoviário	62
6.1	Introdução	63
6.2	Estruturação	63
6.3	Grafo de rede rodoviário	64
6.4	Fluxo rodoviário	68
6.6	Considerações finais	71
7	Conclusões finais	72

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Rede subterânea de média tensão na área urbana (Fonte: EMAE)	9
Figura 2 Rede aérea de média tensão, de São Tomé, em 30 kV (Fonte: EMAE)	9
Figura 3 Mapa da rede subterrânea de 6 kV na Capital (Fonte: EMAE)	10
Figura 4 Linhas convencionais de média tensão (Fonte: Imagem.google, 2018).	11
Figura 5 Linha torçada (Fonte: Foto do autor).	11
Figura 6 Estrutura de um sistema eléctrico (Fonte: Imagem.google, 2018).....	12
Figura 7 Classificação viária	17
Figura 8 Exemplo de sistema viário simplificado (Fonte: Wordpress, 2018).....	18
Figura 9 Grafo trivial.....	23
Figura 10 Grafo orientado	23
Figura 11 Grafo não orientado.....	24
Figura 12 (a) Grafo não rotulado. (b) Grafo rotulado.....	25
Figura 13 Grafo simétrico.....	26
Figura 14 Grafo Completo.....	26
Figura 15 Grafo planar representado de dois modos.....	27
Figura 16 Matriz latina	32
Figura 17 Vértice adjacente.....	32
Figura 18 Árvore geradora resultante	34
Figura 19 Exemplo de mapa de um bairro	34
Figura 20 Árvore resultante do exemplo acima.....	35
Figura 21 Grafo bipartido para o exemplo acima.....	36
Figura 22 Ávore de identificação de palavras	37
Figura 23 Grafo de uma empresa	38
Figura 24 Vértices adjacente	39
Figura 25 Árvore geradora do grafo	40
Figura 26 Representação de um grafo concreto	42
Figura 27 Árvore geradora resultante.....	44
Figura 28 Grafo da rede aérea de São Tomé	50
Figura 29 Grafo de rede subterânea de S. Tomé	50
Figura 30 Matriz adjacente do grafo do sistema eléctrico.....	51
Figura 31 Árvore do grafo do sistema eléctrico	52
Figura 32 Modelo π para linha de transmissão.....	52
Figura 33 Lei de Kirchhoff para a corrente (LKC)	54
Figura 34 Lei Kirchhoff para tensão (LKT) (Fonte: Imagem.google, 2018)	55
Figura 35 Grafo para exemplo de corte	56
Figura 36 Corte de um grafo	57
Figura 37 Relação entre a barras	59
Figura 38 Sistema eléctrico de potência.....	59
Figura 39 Mapa de rede viária de São Tomé (Fonte INE)	65
Figura 40 Grafo da rede rodoviária de São Tomé	66
Figura 41 Matriz de adjacência de grafo do sistema rodoviário de ST	67
Figura 42 Árvore do sistema viário de São Tomé	68
Figura 43 Medição de fluxo numa secção de via	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Tabela de resumo das informações.....	38
Tabela 2: Tipos de barras.....	59

LISTA DE ABREVIATURAS

AGER- Autoridade Geral de Regulação

ANP - Agência Nacional do Petróleo

BT -Baixa Tensão

CNPq - Centro Nacional de Pesquisa

DGA - Direcção Geral do Ambiente

DGRNE- Direcção Geral dos Recursos Naturais e Energia

DI- Direcção da Indústria

EMAE - Empresa de Água e Electricidade

INAE- Instituto Nacional de Estrada

kV - kilo Volt

MOPIRNA-Ministério das Obras Públicas, Infraestruturas, Recursos Naturais e Ambiente

MT- Media Tensão

MVA - Mega Volt Ampére

PC -Posto de Corte

RAP - Região Autónoma do Príncipe

REN - Redes Eléctrica Nacional

RJSE - Regime Jurídico da Organização do Sector Eléctrico

SE1- Susbestação nº 1

SE2- Susbestação nº 2

SEN - Sistema Eléctrico Nacional

UE - Universidade de Évora

UFG - Universidade Federal de Goiás

1

Introdução

O presente capítulo será dedicado a demonstrar a relevância do tema a ser apresentado, delineando a estrutura do trabalho, ressaltando os objectivos gerais e específicos, no qual serão fundamentados a abrangência e a organização da tese. Uma visão histórica também será abordada.

<u>1.1 Contexto</u>	2
<u>1.2 Histórico</u>	3
<u>1.3 Objectivos</u>	4
<u>1.4 Organização</u>	4

1.1 Contexto

A estrutura do sistema eléctrico nacional respeitando a sua classificação quanto a infraestrutura de distribuição e transporte enfatizando a caracterização do sistema de geração eléctrica. De igual forma para o sistema rodoviário onde serão qualificados por via principal e secundária, com ênfase em critério de gestão.

Com o objectivo de resolver ou minimizar qualquer problema do género, o trabalho baseado em métodos matemáticos, ao nível do sector eléctrico e rodoviário espelhando as infraestruturas das redes eléctricas e rodoviárias.

A Empresa de Água e Electricidade - EMAE em consonância com a crescente importância que vem assumindo no sector eléctrico nacional devido aos investimentos em tecnologias avançadas de monitoração, controle e automação da rede eléctrica, antevê na tese a evolução do sistema bem como a sua projecção para um futuro a curto prazo. Assim, um esforço coordenado e focado para modernizar o sistema eléctrico, desde a geração, transmissão, distribuição até o consumo final faz-se necessário. Grande parte do mesmo está em andamento através do projecto financiado pelo Banco Mundial e Banco Europeu de Investimento e outros.

A INAE - Instituto Nacional de Estrada e a DTT - Direcção de Transporte Terrestre - em consonância com a crescente importância que vem assumindo no sector de nacional viário devido aos investimentos em tecnologias avançadas de melhoramento, controle e automação do fluxo rodoviário, antevê na tese a evolução do sistema bem como a sua projecção para um futuro a curto prazo. Assim, um esforço coordenado e focado para modernizar o sistema rodoviário, cujo grande parte do mesmo está em andamento através do projecto financiado pelos parceiros.

Neste contexto, a arquitetura da teoria de grafos surge como uma importante iniciativa que visa a demonstração plena de cada um dos sistemas, de energia e rodoviário, como forma de possibilitar um sistema organizado, flexível e que atenda as necessidades actuais dos consumidores/utilizadores finais.

O avançado estado tecnológico e o facto da concessionária e o instituto serem proprietárias da rede de energia eléctrica, segundo o Decreto-Lei 26/2014, e da rede rodoviária, fazem da teoria de grafos, como plataforma base de orientação, uma importante aliada na execução dos objectivos futuros.

Será apresentada e sintetizada a teoria de grafos de um ponto de vista matemático, tendo a perspectiva de aplicar a teoria ao estudo de redes reais como as redes eléctricas e de transportes rodoviário.

Produzir processos estáveis em redes complexas de energia, transportes ou de qualquer fluxo que se queira considerar para obter um balanço equilibrado nas entradas e saídas da rede.

Nas redes eléctricas actuais, devido a crescente tendência de uso de fontes de energia renováveis, caracterizados por uma forte intermitência e de fornecimento descentralizado, é grande o desafio de equilibrar a rede com a procura distribuída. Nos transportes existem também questões prementes de optimização de fluxo em redes viárias cada vez maiores e com grandes flutuações. Neste caso, além de desenho há também questões de regulação dos fluxos para obter um escoamento optimizado. Fala-se então de redes inteligentes e de métodos matemáticos baseados em desenvolvimentos da teoria de grafos e sistemas dinâmicos.

Assim, o trabalho proposto incidirá na apresentação e desenvolvimento da teoria de grafos de métodos dinâmicos adequados à abordagem pretendida.

Espera-se que o trabalho desenvolvido possa ter resultados aplicáveis em redes concretas.

1.2 Histórico

Desde o século dezanove, a indústria de energia eléctrica tem experimentado contínuas mudanças e avanços tecnológicos revolucionando o modo de geração, distribuição e consumo de energia eléctrica. Entretanto, a falta de investimentos na infra-estrutura crítica do sistema eléctrico nos últimos anos, o crescimento exponencial do consumo de energia eléctrica e a procura por uma maior confiabilidade e flexibilidade na sua distribuição, têm levado o sistema de energia eléctrica ao seu limite. Somado a isso, falta de tecnologias de sistemas de monitoração instantânea impossibilitando radicalmente a análise da natureza das cargas eléctricas, resultando em uma procura não programada de forma a atender as evolução do país e bem como as necessidades económicas.

O sector rodoviário não fica de fora, tem características de base idênticas às da electricidade respeitando os seus limite e falta de investimentos de igual modo.

1.3 Objectivos

O principal objectivo é mostrar os métodos para determinação do fluxo de sistema eléctrico em média tensão e de fluxo do sistema rodoviário em vias urbanizadas, baseado na teoria de grafos, permitindo o melhor planeamento das respectivas redes. Como objectivos específicos desta tese, podem ser referidos:

- Mostrar os processos de demonstração da infraestrutura do sistema eléctrico e do rodoviário com aplicação da teoria de grafos, a fim de garantir fácil análise de qualidade, segurança, confiabilidade e disponibilidade dos fluxos e serviços da concessionária de energia e do instituto rodoviário, respectivamente;
- Apresentar o modelo de um sistema eléctrico e rodoviário aos requisitos definidos pela teoria de grafos, que permita analisar o fluxo, através de estudos das redes, relativamente aos pontos vitais da rede eléctrica de média tensão e da rede de transporte rodoviário urbano.

1.4 Organização

O Capítulo 2 é dedicado a demonstrar a relevância das características da rede eléctrica do país e os seus termos regulatórios.

O Capítulo 3 é dedicado a demonstrar a relevância das características da rede rodoviária do país e os seus termos regulatórios.

O Capítulo 4 é dedicado a descrever a introdução à teoria de grafos, formalizando conceitos básicos e suas principais características, através de algumas definições.

O Capítulo 5 é dedicado a descrever as diretivas da teoria de grafos com base na integração do sistema de energia.

O Capítulo 6 é dedicado a descrever as diretivas da teoria de grafos com base na integração do sistema de rodoviário.

No Capítulo 7 são delineadas as conclusões finais e os plausíveis estudos futuros.

2

Características das Redes Eléctricas

Nesse capítulo apresenta-se uma compilação das informações referente às características da rede de energia eléctrica são-tomense como meio de transmissão e distribuição de carga eléctrica.

<u>2.1 Introdução</u>	6
<u>2.2 Características das subestações</u>	6
<u>2.3 Características das linhas de transmissão</u>	7
<u>2.3 Características das linhas de distribuição</u>	9
<u>2.3.1 Linhas aéreas de distribuição em média tensão</u>	10
<u>2.4 Aspectos regulatórios</u>	12
<u>2.5 Considerações Finais</u>	14

2.1 Introdução

O uso da rede de transmissão e distribuição de energia eléctrica, como meio de transmissão de sinais eléctricos é conhecido desde século XIX e, até recentemente, por onde passam fluxo de potência para os fim de distribuição/transmissão segundo os objectivos da concessionária de energia eléctrica.

A rede de transporte compreende as subestações (MT/MT), posto de corte, as linhas de transmissão e unidades produtoras. Os níveis de tensão utilizados são de 30 kV (*unidade de tensão eléctrica*) no caso aéreo e de 6 kV caso subterrâneo, este último apenas na capital. E a rede de distribuição compreende as postos de transformação (MT/BT) e as linhas de distribuição. Onde os níveis de tensão utilizado na mesma são de 30/0,4 kV aéreo e de 6/0,4 kV este último no caso subterrâneo em São Tomé e mista na Região Autónoma de Príncipe.

Recentemente, com a crescente procura por serviços de electricidade como fornecimento eléctrico, por exemplo, a rede de distribuição de energia eléctrica vem sendo remodelada possibilitando a estabilidade do sistema eléctrico.

Baseando-se no objectivo desta tese, que é demonstrar a utilização da teoria de grafo para sistema eléctrico. Serão comentadas em seguida algumas das características da rede eléctrica santomense como das linhas de transmissão utilizadas para escoamento de potências pelas grandes unidades produtoras e linhas de distribuição de energia no país respeitando os seus aspectos regulatórios.

2.2 Características das Subestações

Atualmente encontram-se em serviço duas subestações destinadas a alimentar a rede de Média Tensão (MT) do Sistema Eléctrico Nacional (SEN). As potências instaladas pelos diferentes escalões de transformação são as seguintes:

SE1 (Subestação nº 1): 30/6 kV 2x10 MVA

SE2 (Subestação nº2): 30/6,6 kV 2x5 MVA

Os painéis existentes nas subestações são distinguidos por nível de tensão. Os diagramas de carga apresentam características diferenciadas, dependendo da área geográfica e do tipo de actividade.

No caso da subestação - SE2 em manga, as transferências de energia nos transformadores são substancialmente modificadas, dada a presença de componentes não desprezáveis de produção intermitente (minoritariamente hidroeléctrica) ligadas na rede de transmissão/distribuição MT.

No período 2018/20, prevê-se a construção de novas subestações e posto de corte, onde atualmente temos 4 postos de corte a 30 kV em toda ilha de São Tomé.

2.3 Características das Linhas de Transmissão

As linhas de transmissão para sistema eléctrico caracterizam-se por possuir grande uniformidade construtiva ao longo de toda sua extensão, apresentando, desta forma, valores de indutância, capacitância e resistência, em série e em paralelo, que se repetem em qualquer troço que seja considerado.

Em geral, as linhas de transmissão apresentam as seguintes características principais:

- ***Impedância Característica Uniforme:*** esta condição garante que, uma vez realizada a adaptação de impedância da linha. Quanto mais precisa, estável e uniforme se apresente a linha em relação à suas propriedades dimensionais, eléctricas e construtivas, melhor será seu desempenho.
- ***Baixa irradiação e captação de sinais:*** esta característica se refere à menor tendência de uma linha de transmissão de irradiar sinais que possam causar interferências em outros serviços, bem como sofrer interferências de sinais externos.

A rede de transmissão destina-se a efetuar o transporte de energia entre as subestações.

A rede a 30 kV é a mais antiga e extensa, com origem nos anos 50. A parte da rede mais antiga tem vindo, progressivamente, a ser remodelada no sentido de garantir mais elevados padrões de fiabilidade, e de uma maior capacidade de transporte.

Os principais tipos de condutores e cabos utilizados atualmente na construção de novas ligações são os seguintes:

Rede de 6 kV

LXHIOLE 3x1x240 mm² (20 MVA);

LXHIOLE 3x1x150 mm² (12 MVA);

Al-Aço 90 mm² (25 MVA).

Rede de 30 kV

Al-Aço 90 mm² (25 MVA).

ASTER 228 mm² (45 MVA).

Nas redes mais antigas são utilizados condutores CU 16, 25, 35 e 50 mm² Al nos traçados aéreos e cabos do tipo PCIAV 120 mm² nos traçados subterrâneos.

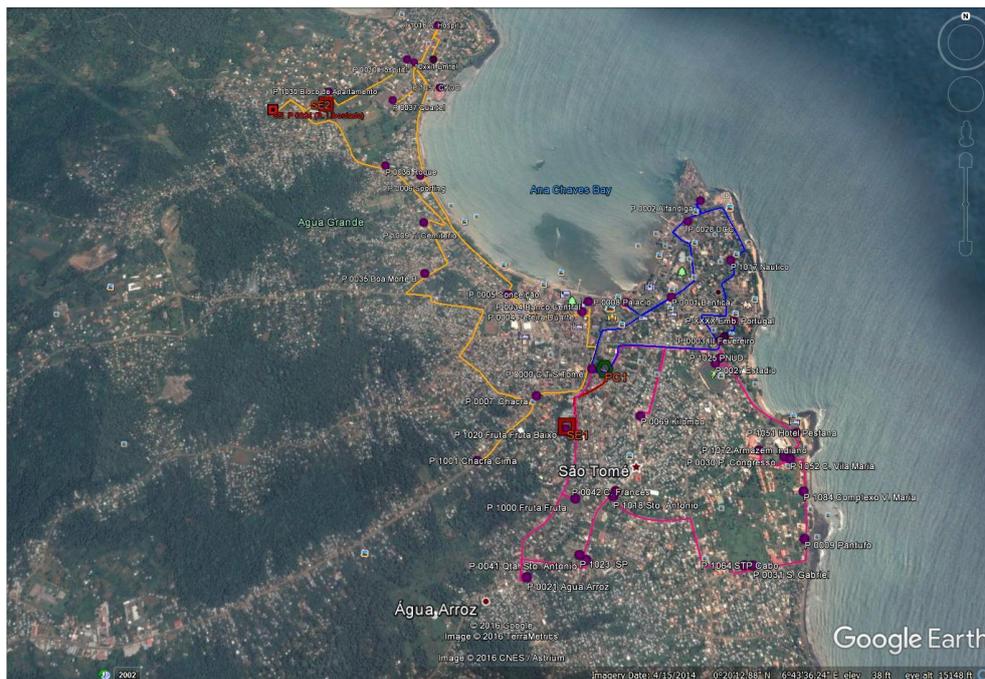


Figura 1 Rede subterânea de média tensão na área urbana (Fonte: EMAE)

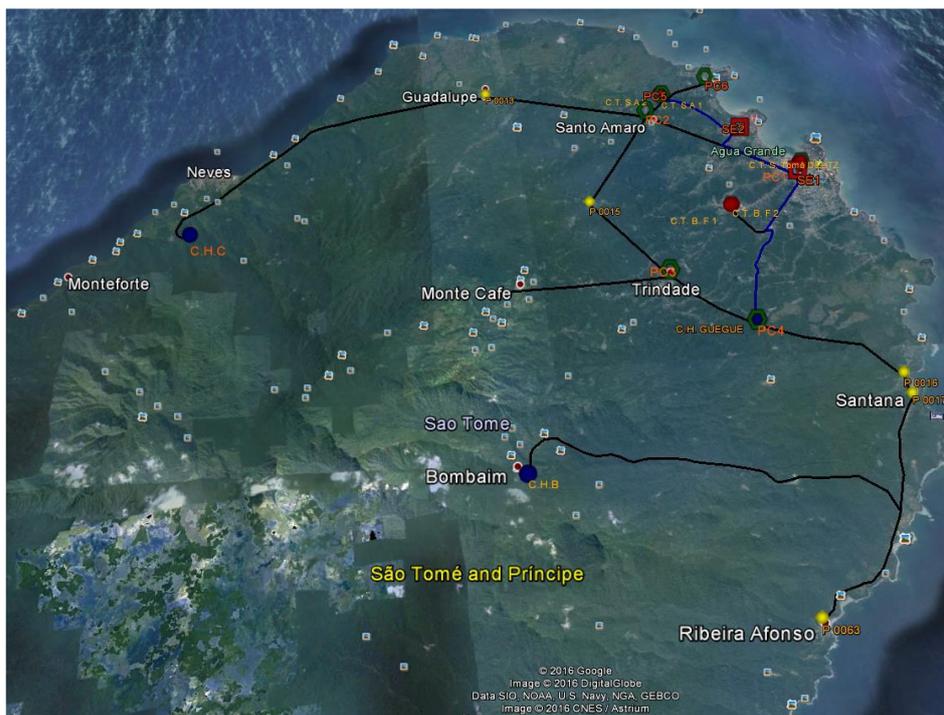


Figura 2 Rede aérea de média tensão, de São Tomé, em 30 kV (Fonte: EMAE)

2.3 Características das linhas de distribuição

As linhas de distribuição de energia eléctrica padronizadas em São Tomé e Príncipe podem ser classificadas em função de seus parâmetros construtivos e da porção do sistema em que estão inseridas, conforme sua finalidade.

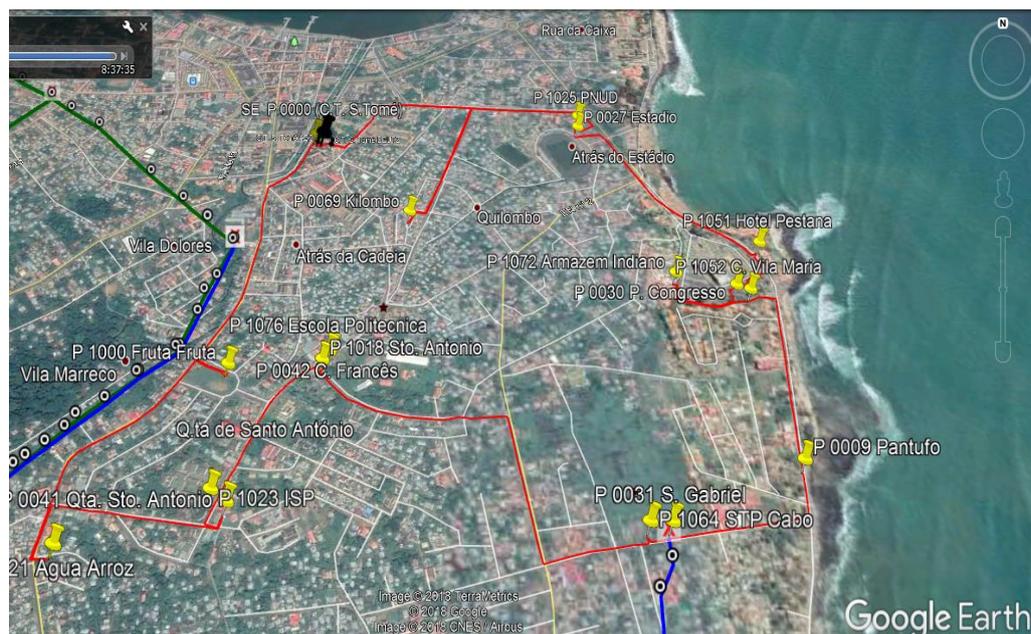


Figura 3 Mapa da rede subterrânea de 6 kV na Capital (Fonte: EMAE)

2.3.1 Linhas aéreas de distribuição em média tensão

Estas linhas apresentam dois diferentes tipos de realização construtiva, sendo elas as linhas da rede convencional e as linhas da rede torçadas, como a seguir:

- **Linha convencional de média tensão:** utiliza cabos condutores não isolados de cobre ou alumínio suportados por isoladores transversais montados na parte superior dos postes e suspensos por baixo das travessas. Os cabos podem estar situados num mesmo plano ou em planos diferentes, com uma distância entre cabos variando entre 30 a 100 centímetros.
- **Linhas torçadas para média tensão:** estas linhas são formadas por três cabos condutores de média tensão isolados que são enrolados em um cabo de aço e montados em fixadores na parte lateral dos postes.



Figura 4 Linhas convencionais de média tensão (Fonte: Imagem.google, 2018).



Figura 5 Linha torçada (Fonte: Foto do autor).

A rede de distribuição MT destina-se a efetuar a distribuição de energia a partir das subestações de distribuição. Na rede MT, a tensão de exploração predominante é a de 30kV, muito embora se utilize também os 6 kV, em situações de pequenas escala, subterrâneas.

Na caracterização da rede MT considera-se o seguinte:

- PT's existentes;
- Caracterização das saídas das subestações;
- Principais congestionamentos das saídas MT;
- Capacidade para novas cargas nas saídas MT;
- Expansão da rede de distribuição MT etc.

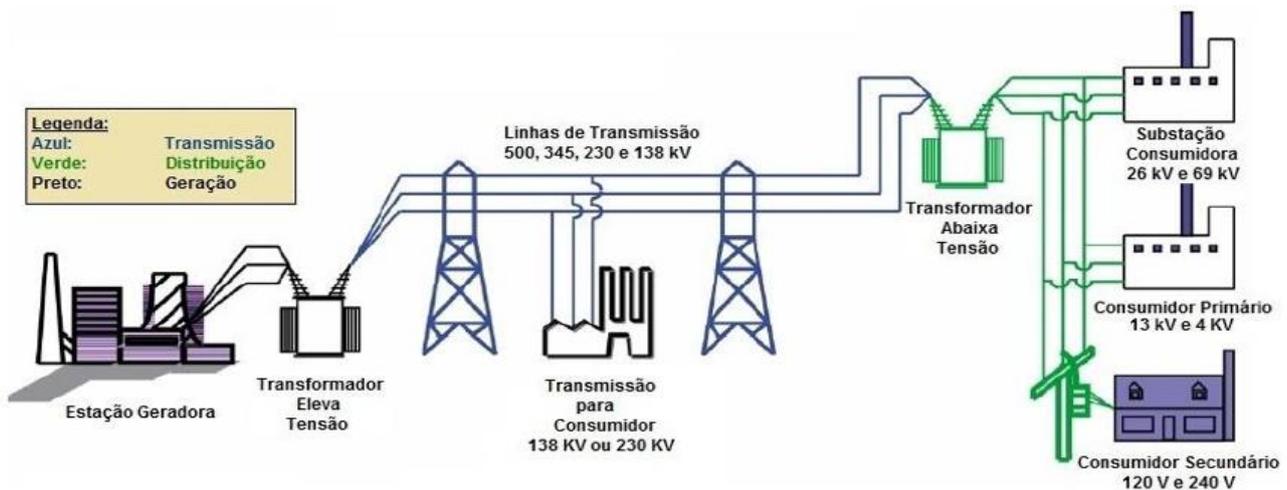


Figura 6 Estrutura de um sistema eléctrico (Fonte: Imagem.google, 2018)

2.4 Aspectos regulatórios

Actualmente as instituições do sector eléctrico podem ser agrupadas em instituições do sector público e instituições do sector privado. No quadro do sector público, o estado é a principal instituição que manifesta a sua actividade através do governo, particularmente da Direcção Geral dos Recursos Naturais e Energia (DGRNE) no quadro do ministério responsável pelo sector. Além do Estado, respectivos organismos dependentes e empresas públicas, as autarquias locais e a Região Autónoma de Príncipe (RAP) têm um papel importante. No seu conjunto, as instituições públicas do sector energético são as seguintes:

- Ministério das Obras Públicas, Infra-Estruturas, Recursos Naturais e Ambiente (MOPIRNA)
- Direcção Geral dos Recursos Naturais e Energia (DGRNE)
- Autoridade Geral de Regulação (AGER)
- Região Autónoma do Príncipe (RAP)
- Autarquias Locais
- Empresa Nacional de Água e Electricidade (EMAE)
- Agência Nacional do Petróleo (ANP)
- Direcção da Indústria (DI)
- Direcção Geral do Ambiente (DGA)

Importa referir que a estrutura actual do sector reflecte também o período de profundas reformas que tem vindo a sofrer desde 2014, com a entrada em vigor do Regime Jurídico da organização do Sector Eléctrico (RJSE), aprovado pelo Decreto-Lei n.º 26/2014, de 31 de Dezembro. E por sua vez considerando a liberalização do Sector Eléctrico Nacional.

Considerando que no mercado eléctrico nacional compreende as actividades de produção, transporte, distribuição e comercialização de electricidade e é composto pelos sujeitos privados, sob a regulação da entidade reguladora e demais entidades públicas competentes, conforme dispõe o artigo 8º do Decreto-Lei n.º 26/2014.

Tendo em conta as insuficiências legais em termos das disposições subjacente ao Decreto-lei n.º 26/2014, de 31 de Dezembro e da necessidade de consolidar a estrutura legal do sector eléctrico nacional;

Considerando que a finalidade desta regulamentação é de dispor o país de quadros normativos que estabelecem:

(i) os requisitos e condições técnico-económicas para as interligações no Sistema Eléctrico Nacional

(ii) os princípios essenciais a observar nas relações comerciais de energia eléctrica entre diferentes sujeitos do SEN, capaz de prevenir conflitos de interesses e garantir além de adequado funcionamento do sector, um clima de confiança e atraente para investimentos;

Sendo ainda que, alínea d) do artigo 10º e o nº 3 do artigo 13º, do Decreto - Lei 26/2014, de 31 de Dezembro confere ao governo a faculdade de emitir regulamentos específicos no sistema eléctrico nacional. Portanto foi aprovado o anteprojecto do Regulamento de Interligação de Sistema Eléctrico Nacional, que consta parte integrante do anteprojetos de Regulamentos de Interligação e de Relações de Compra e Venda de Energia Eléctrica.

2.5 Considerações Finais

Neste capítulo foram abordadas as características das redes eléctrica nacional como parte inicial do sistema de planeamento de aplicação de teoria de grafo para o sistema de eléctrico, ou seja, um conhecimento inicial necessário ao objectivo final da tese.

As características das subestações e posto de corte, linhas de transmissão e as linhas de distribuição de energia eléctrica utilizadas no arquipélago, como meio de transmissão e distribuição de potência serve de base no conhecimento das redes eléctrica, mas para o seu complemento faz-se necessário o conhecimento de tecnologias para a gestão de um sistema de energia mais eficiente, e também, de uma infraestrutura de comunicação integrada à infraestrutura de energia por meio de uma rede inteligente. A arquitetura dessa rede será o objecto de estudo do próximo capítulo, baseada da teoria de grafos.

3

Características das redes rodoviárias

Nesse capítulo apresenta-se uma compilação das informações referente às características da redes rodoviárias São-Tomense como meio de tramitação de bens e pessoas por todo o país.

O uso das redes rodoviárias onde conta nesta tese as vias principais e as secundárias, desde a era colonial e até recentemente, por onde passam fluxo de transportes para os fim de distribuição segundo os objectivos da instituição responsável pelas rodovias, a INAE.

<u>3.1 Introdução</u>	16
<u>3.2 Hierarquia funcional do sistema viário</u>	16
<u>3.4 Aspectos regulatórios</u>	19
<u>3.5 Considerações finais</u>	20

3.1 Introdução

Com a progressiva urbanização mundial, a rede urbana de uma cidade tornou-se um dos principais objectos de estudos da geografia. As redes urbanas são formadas por um conjunto de quarteirões fixos interconectados por fluxos materiais e imateriais. Para São Tomé e Príncipe, a rede urbana constitui-se no conjunto das áreas urbanas articuladas entre si. Uma área urbana constitui um tipo particular de rede, na qual os vértices são pontos de intercessões em diferentes pontos urbanos ou bairros/quarteirões, e as arestas, os caminhos ou ligações pelos quais passam os diversos fluxos entre esses núcleos.

Nesta tese, escolhe-se a malha rodoviária asfaltada das áreas urbanas ao redor do centro da capital, sendo estas mais fáceis de se obter informações, tais como, conectividade da rede, pontos de ligação, caminhos de menor custo, centros, entre outros.

3.2 Hierarquia do sistema viário

A organização do trânsito nas cidades tornou-se um desafio extremamente complexo, sobretudo nos grandes centros urbanos. No planeamento, interesses diversos, por vezes incompatíveis devem ser considerados, visando sempre um sistema viário com fluidez eficaz, democrático e seguro.

Existe uma certa hierarquia nas vias da cidade capital. Existem aquelas vias consideradas principais, que geralmente são asfaltadas, tem um fluxo maior de veículos e possuem uma grande diversidade de bens e serviços, enquanto outras têm um uso mais residencial, com um fluxo menor de veículos, e que dão acesso às vias tidas como principais. Essa diferenciação constitui uma estratégia muito importante em engenharia de tráfego: o princípio da hierarquização funcional das vias. Esse princípio auxilia os reguladores de trânsito a definir aquilo que é permitido e o que não é no espaço viário, visando diminuir o impacto potencial de conflitos e problemas.

Por vezes, não é simples diferenciar vias principais de não principais ou secundárias. Não existe apenas uma classificação possível para distinguir as vias quanto à sua função dentro do sistema viário. Segundo a DNER, uma possível classificação viária fornece três classes de via: arteriais, coletoras ou secundárias, e locais. Enquanto as vias **arteriais**

suportam os grandes volumes de veículos, as **coletoras** fazem a ligação entre as áreas de tráfego local e as restantes vias e as **locais** destinam-se a permitir o acesso e regresso aos bairros e quarteirões, restringindo o fluxo de passagem. A classificação mais frequente admite ainda um outro tipo, a via **expressa**, que, assim como a arterial, é chamada de estrutural. Elas podem ser classificadas desta forma:

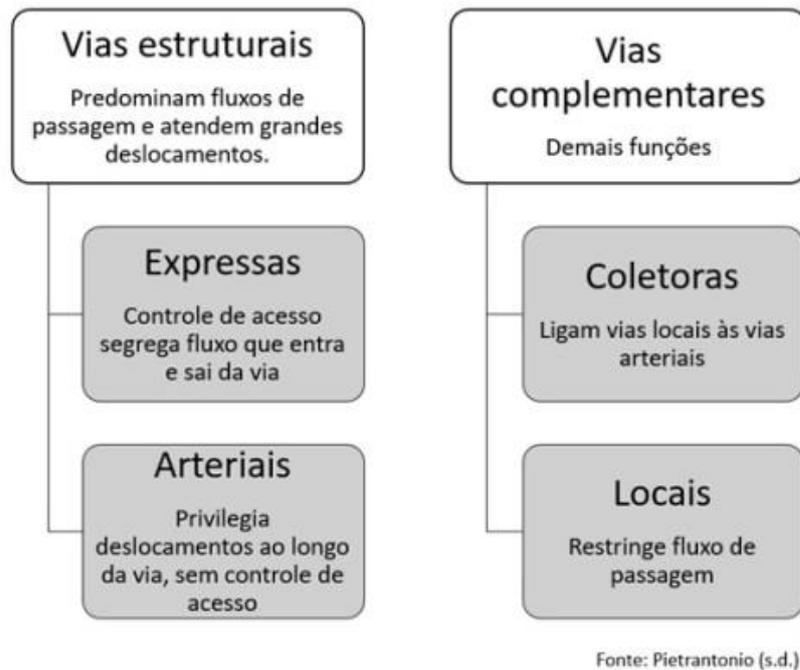


Figura 7 Classificação viária

No modelo abaixo, que decorre de uma simplificação para fins expositivos, podemos visualizar entre eles como esses tipos de vias se integram fisicamente e como cada um exerce um papel diferente num eventual percurso.

Observa-se que simultaneamente em que as vias coletoras recebem o tráfego que flui das vias arteriais e distribui para as vias locais, também coleta o das vias locais e o conduz para as vias arteriais; as interseções entre as vias coletoras e arteriais, com semáforos e com certas passagens proibidas, levando à necessidade de contornar o quarteirão; os cruzamentos entre as vias expressas e as arteriais, em desnível, garantindo a fluidez necessária para essas vias.



Figura 8 Exemplo de sistema viário simplificado (Fonte: Wordpress, 2018)

Em São Tomé e Príncipe, o Código de Estrada (Lei 04/2013, de 05 de Junho de 2013) rege as classificações adotadas no país.

É conveniente designar as vias consoante a sua função na rede viária:

Via local – caracterizada por interseções sem semáforo, destinada apenas ao acesso local ou a áreas restritas;

Via secundária – destinada a distribuir o trânsito que tenha necessidade de entrar ou sair das vias de trânsito rápido ou arteriais, possibilitando o trânsito dentro das regiões da cidade;

Via arterial – caracterizada por interseções em nível, geralmente controlada por semáforo, com acessibilidade às vias secundárias e locais, possibilitando o trânsito entre as regiões da cidade;

Por vezes esta classificação pode não ser capaz de contemplar a complexidade da rede viária de uma cidade em mudança acelerada. Na prática, muitas vezes é importante distinguir outro tipo de vias, como por exemplo, vias semi-expressas, intermédias entre as vias expressas e as vias arteriais, ou mesmo combinar a função com outros critérios, como: ciclovia, via exclusiva de pedestre, etc. Ou ainda pensar no papel que a via desempenha numa escala

urbana ou regional: vias arteriais radiais, vias arteriais perimetrais, vias locais centrais ou de bairro, entre outras.

É importante, ainda, observar que a hierarquia diz respeito à classificação viária clássica. Nos projetos de engenharia de tráfego não se deve ignorar os meios não motorizados de transporte. Os princípios mencionados aqui são importantes para organizar o sistema viário de uma cidade e, conseqüentemente, o trânsito.

3.4 Aspectos regulatórios

O transporte rodoviário é regido pelo “Direcção de Transporte Terrestre” firmado pelo país, no sentido de regulamentar o transporte terrestre no país de acordo a Lei nº 04/2013.

Este documento trata dos aspectos pertinentes ao transporte nacional por rodovias e dos procedimentos relativos aos assuntos migratórios e disposições gerais de operacionalidade do sistema. Este documento permite determinar os direitos e obrigações dos transportadores, bem como garantir o tráfego regular de veículos e viagens diretas entre distritos.

Princípios e organização do INAE é um instituto público, dotado de personalidade jurídica, estatutos próprios, autonomia administrativa e financeira e patrimonial, sujeito à tutela do Ministro responsável pelo sector de Obras Públicas e Infraestruturas. O INAE é constituído por uma Direcção executiva e por quatro unidades tratando-se de Planificação e Seguimento Estatístico, Concursos e Contratos, Estudos Obras e Fiscalização e uma unidade de Administração.

Missão e objectivos do INAE de acordo com decreto-lei nº 26/2005 publicado em Diário da República de 15 de Novembro, constitui missão do INAE:

a) Zelar pela manutenção permanente das condições de infra-estruturas e conservação e salvaguarda do estado da estrada que permita a livre e segura a circulação de bens e pessoas;

b) Velar pela política e estratégia de desenvolvimento da rede rodoviária;

c) Planear e programar as intervenções nas infra-estruturas do património rodoviário;

d) Assegurar a gestão e desenvolvimento das actividades conferidas no sector rodoviário;

e) Proceder a estudos sistemáticos da problemática da rede rodoviária nacional;

f) Assegurar um seguimento estatístico dos indicadores rodoviários, a alimentação de uma base de dados rodoviária e a colecta de informações sociais e ambientais nas suas interacções com a rede rodoviária;

g) Realizar ou proceder ao acompanhamento de estudos, anteprojectos, projectos e elaboração de cadernos de encargos;

h) Proceder ao lançamento de concursos públicos e participar na avaliação das propostas e adjudicação dos trabalhos.

i) Assegurar o seguimento administrativo e técnico dos contratos com as empresas privadas nomeadamente, estudos, obras e fiscalização.

3.5 Considerações finais

Neste capítulo foram abordadas as características da rede viária nacional sendo das vias principais e secundárias distribuindo e recolhendo o fluxo viário na zona urbana do arquipélago, como meio de transportar os bens e pessoas e com base nesse conhecimento das redes viárias, faz-se necessário o conhecimento de tecnologias necessárias à gestão de um sistema viário mais eficiente, e também, de uma infraestrutura de transporte de integração à infraestrutura de vias por meio de uma rede inteligente. A arquitetura dessa rede será o objecto de estudo do próximo capítulo, baseada da teoria de grafos. Com base num dos objectivos desta tese, que é demonstrar a utilização da teoria de grafos para sistema rodoviário. Fez-se comentários de algumas das características da redes viárias, mas dando a enfase aos aspectos urbanos, respeitando os seus aspectos regulatórios.

4

Introdução à teoria de grafos

Neste capítulo formalizam-se conceitos básicos de grafos e suas principais características, através de algumas definições e exemplos. Tais conceitos serão importantes para nossos estudos nos capítulos seguintes.

<u>4.1 Introdução</u>	22
<u>4.2 Teoria de grafos. Definições</u>	22
<u>4.2.1 Tipos de grafos</u>	22
<u>4.3 Considerações finais</u>	45

4.1 Introdução

O termo *rede* deriva do latim *rete* e está relacionado com os conceitos de teia, conjunto entrelaçado de fios, cordas, arames, com aberturas regulares, fixadas por malhas e nós. A partir da segunda metade do século XX, o conceito de rede foi sendo modificado e tornou-se abstracto. As redes têm sido usadas em diversas ciências: sociais, computacionais, biológicas, etc. Assim, são vários os tipos de redes reais que podem ser modelados abstractamente para a solução de problemas: redes neuronais, redes de negócios, redes eléctrica, redes viárias urbanas, etc. Para cada caso, é necessário conhecer as propriedades capazes de esclarecer os comportamentos e, conseqüentemente, permitir estudos e tomadas de decisão. Tanto na sociedade como nos sistemas naturais, a maioria das redes é dinâmica, sobretudo em função dos movimentos de entrada e saída.

Assim sendo, a teoria de grafos neste trabalho será implementada na base das redes eléctrica e rodoviárias do país afim que apresentar a sua arquitetura e modelagem matemática para diversos fins que se pretender utilizar.

4.2 Teoria de Grafos. Definições

De acordo com a linguagem matemática, um *grafo* é um conjunto de objectos $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ chamados vértices, nós ou pontos, e outro conjunto $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}$ tal que u_i é chamado arco ou aresta, relacionados entre si através de uma relação que constitui o grafo $G = (X, U)$. O arco ou aresta, de um grafo é definido por $u_r = (x_i, x_j)$, onde x_i recebe o nome de vértice inicial e x_j o nome de vértice final. Neste caso os vértices x_i, x_j dizem-se *adjacentes* e os vértices x_i, x_j dizem-se *incidentes* na aresta u_r . Têm-se, portanto, elementos genéricos cujo significado depende do problema estudado. O grafo nesse caso é representado como $G = (X, U)$, constituindo uma ferramenta útil, para o tratamento de inúmeros problemas da vida real.

4.2.1 Tipos de grafos

E possível classificar os grafos como: grafo trivial, hipergrafos, grafos orientados e não orientados, grafos rotulados e não rotulados, grafos valorados e não valorados, grafo simétrico, grafo completo, grafo complementar, subgrafos, grafo bipartido, grafo planar, etc.

Grafo trivial

O *grafo trivial* um grafo que possui um único vertice e um único arco ou aresta, o qual se fecha sobre si mesmo constituindo o que se chama um *elo*, *anel* ou *laço*.

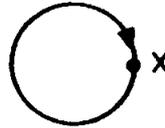


Figura 9 Grafo trivial

Grafo orientado ou digrafo

Se $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ é um subconjunto do conjunto $X \times X$ (produto cartesiano) o *grafo* $G = (X, U, F, H)$ é chamado um *grafo orientado*. Cada arco é representado por uma seta cujo sentido corresponde à orientação do par ordenado, sendo esta orientação representada pelas funcionais $F(u)$ e $H(u)$ com u em U , onde $F(u)$ é o vértice inicial de u e $H(u)$ é o vértice final de u .

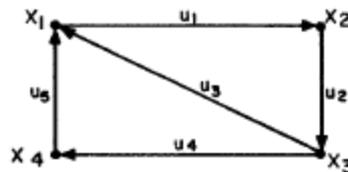


Figura 10 Grafo orientado

Para a figura 10 a representação do *grafo orientado* é:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_3, x_1)\},$$

e por exemplo, $F((x_1, x_2)) = \{x_1\}$ e $H((x_1, x_2)) = \{x_2\}$.

Grafo não orientado

Se $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ é uma família de partes de X a dois elementos. O par $G = (X, U)$ nesse caso é chamado de *grafo não orientado*.

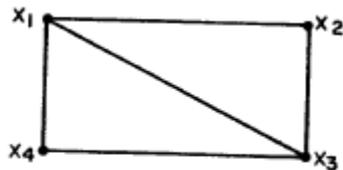


Figura 11 Grafo não orientado

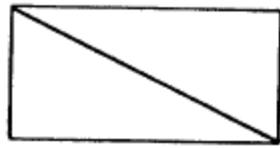
Para a Figura 11 a representação do *grafo não orientado* é:

$$U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_1, x_3), (x_3, x_1), (x_1, x_4), (x_4, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_3)\}$$

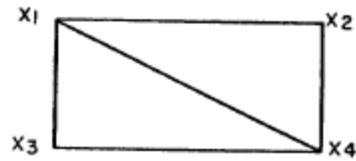
Dado que cada arco está representado duas vezes (por exemplo o arco que une os vértices x_1 e x_2 aparece como (x_1, x_2) e (x_2, x_1) se pode apreciar, dentro desta representação, uma óbvia redundância. Um *grafo* G qualquer, tem associado um e somente um *grafo não orientado*.

Grafo rotulado

Um *grafo rotulado* é aquele no qual foi realizada a identificação dos vértices, através de uma função determinada. Um exemplo de um *grafo não rotulado* é dado na Figura 12(a). Já um exemplo de um *grafo rotulado* é dado na Figura 12(b).



(a)



(b)

Figura 12 (a) Grafo não rotulado. (b) Grafo rotulado

Grafo valorado

Um *grafo* é valorado se existem uma ou mais funções relacionando X e/ou U com conjuntos numéricos.

$$f : X \rightarrow P$$

$$x_i \rightarrow p_i \text{ ou seja } f(x_i) = p_i$$

$$g : U \rightarrow Q$$

$$u_i \rightarrow q_i \text{ ou seja } g(u_i) = q_i$$

Ou:

$$(x_i, x_j) \rightarrow q_{ij} \text{ ou seja } g(x_i, x_j) = q_{ij}$$

A caracterização dessas funções depende do problema em causa. Em certas aplicações de grafos a problemas de engenharia, é necessário considerar grandezas tais como distâncias, capacidades, fluxos, que definem os vértices e as arestas do grafo. No entanto, em muitos problemas, interessa apenas o inter-relacionamento dos vértices e não se definem funções, ou se considera que elas são constantes. Diz-se então que o *grafo não é valorado*.

Os conjuntos P e Q podem ser definidos especialmente, ou podem ser \mathbb{N} , \mathbb{R} , etc. Para grafos não valorados pode-se dizer que $P = \{1\}$, e $Q = \{1\}$.

Grafo simétrico

Um grafo $G = (X, U)$ é simétrico se:

$$x_i, x_j \in X : (x_i, x_j) \in U \Leftrightarrow (x_j, x_i) \in U$$

Um grafo simétrico pode ser associado a um grafo não orientado, substituindo-se cada par de arcos de sentidos opostos por uma aresta, assim como é mostrado na Figura 13.

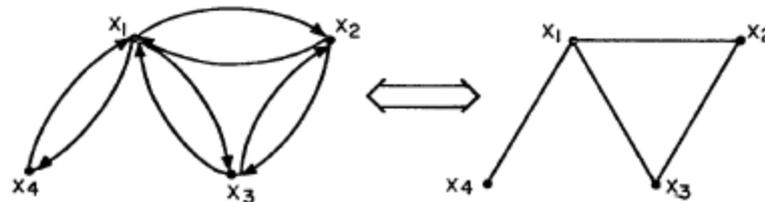


Figura 13 Grafo simétrico

Grafo completo

Um grafo $G = (X, U)$ é completo se:

$$x, y \in X : (x, y) \in U$$

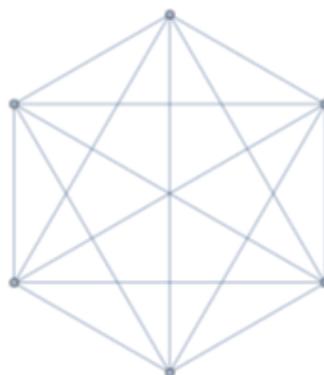


Figura 14 Grafo Completo

Subgrafo

Um *subgrafo* G' de $G = (X, U)$ é um grafo tal que:

$$G' = (Y, V)$$

onde

i) $Y \subset X$

ii) $x, y \in Y$ e $(x, y) \in U$ então $(x, y) \in V$.

Um subgrafo é obtido, pela supressão de vértices de G (condição (i)), e dos arcos adjacentes a esses vértices (condição (ii)).

Grafo planar

Um *grafo* é planar quando existe alguma forma de se dispor seus vértices no plano, preservando a topologia, de tal modo que nenhum par de arestas se cruze. O grafo completo da figura 14 é não planar. O grafo da figura 15 é planar.

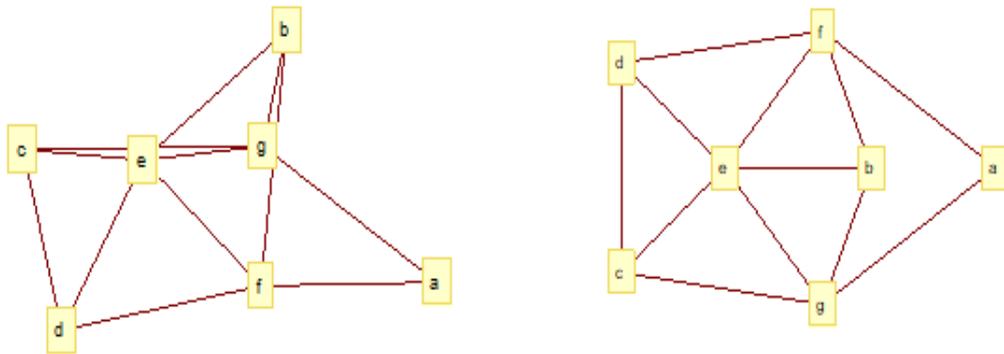


Figura 15 Grafo planar representado de dois modos.

Dentro da óptica deste trabalho, o interesse se concentrará sobre os conceitos de *grafo rotulado, não valorado, orientado e não orientado*, sempre sem elos (*laço de ligação a si mesmo*).

Os tipos mais comuns de representação de grafos são através de certas *matrizes e listas*. Pode-se distinguir três formas principais de realizar esta representação que são:

- Por meio de listas;
- Por meio de matrizes Booleanas;
- Por meio da representação sagital.

A seguir são examinadas cada um destes tipos de representação de modo mais detalhado.

1) Representação por meio de listas

A representação por meio de listas pode ser obtida por sua vez através das três formas abaixo:

a) Lista do conjunto dos arcos

Tendo numerados os n vértices do grafo de uma forma arbitrária, uma lista do conjunto dos arcos é uma representação onde se listam todos os arcos do grafo como pares de vértices.

$$\text{Lista} = \{u_i \in U, | u_i = (x_k, x_l), i = 1, \dots, m\}$$

As representações já utilizadas neste capítulo, às figuras 11 e 12, são exemplos da forma de representar um *grafo* como uma lista do conjunto dos arcos.

b) Lista dos arcos descrita pelas extremidades iniciais e finais

Uma lista dos arcos, descrita pelas extremidades iniciais e finais, é uma pequena variação da representação anterior. Trata-se de representar o *grafo* por dois arranjos lineares onde cada elemento de cada arranjo corresponde a um vértice, assim:

$F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ Extremidades iniciais.

$H = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ Extremidades finais.

O i -ésimo arco u_i está entre a extremidade inicial f_i e a extremidade final h_i . A forma de representar o grafo da figura 11 por meio da lista dos arcos descrita pelas extremidades iniciais e finais é a seguinte;

$F = (x_1, x_2, x_1, x_3, x_1, x_4, x_2, x_3, x_3, x_4)$

$H = (x_2, x_1, x_3, x_1, x_4, x_1, x_3, x_2, x_4, x_3)$.

C) Lista de sucessores

Uma lista de sucessores é uma forma de representação onde, depois de assinalar os vértices numa ordem qualquer, representa-se cada vértice k por um arranjo linear, no qual o primeiro elemento é k e o resto dos elementos são os vértices sucessores de k . No caso de um *grafo não orientado*, são os elementos adjacentes de k . Para o grafo do exemplo da figura 11 a representação seria a seguinte:

I-Vértice i Sucessores de i

x_1 : x_2, x_3, x_4

x_2 : x_1, x_3

x_3 : x_2, x_1, x_4

x_4 : x_1, x_3

A representação por meio de matrizes pode ser realizada através da definição dos três tipos de matrizes associadas a um grafo G, que são:

a) A matriz de adjacência ou matriz de conexão, A. Matriz de ordem $n \times n$, onde n é o número de vértices do grafo. Adjacências ou matriz de conexão é uma matriz booleana, sendo definida pelas relações:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{se } (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

Para o Grafo da Figura 11 a matriz de adjacência será:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz de adjacência é uma matriz comumente utilizada já que através de um tratamento matemático envolvendo-a, se podem obter informações que são de grande ajuda para a solução do problema que é tratado no presente trabalho. Este tratamento matemático da matriz de adjacência é baseado em: se A é a matriz de adjacência do grafo $G=(X,U)$ e se

$$A^k = (a_{ij}^{(k)})$$

é a sua k-ésima potência booleana, então

$$a_{ij}^{(k)} = 1$$

se e somente se existe entre x_i e x_j um caminho de comprimento k.

b) A matriz de incidência é uma matriz, B , de ordem $n \times m$, onde n é o número de vértices e m o número de arcos. Nesta matriz as colunas correspondem aos arcos do Grafo, e as linhas aos vértices. A matriz de incidência, definida para um *grafo orientado*, é dada pelas relações:

$$B = (b_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,m}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } u_j = (_, x_i) \\ -1 & \text{se } u_j = (x_i, _) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Esta matriz especifica, portanto, se o vértice x_i é extremidade inicial ou final, do arco u_j . Para a figura 10 a matriz de incidência será

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) A matriz latina é uma matriz cujos elementos são conjuntos de vértices. Esta matriz é usada em problemas de enumeração de caminhos. Seja $M_{|1)}$ uma matriz latina dos caminhos de comprimento 1 e $M'_{|1)}$ é a mesma matriz, mas onde as sequências não contêm as extremidades iniciais, a multiplicação de $M_{|1)}$ * $M'_{|1)}$ fornece $M_{|2)}$, que é precisamente a matriz latina dos caminhos de comprimento 2. Assim, sucessivamente se obterão os caminhos de comprimentos seguintes.

Este procedimento permite a enumeração dos caminhos de comprimento 1,2,3,...,n, sem omissões nem repetições

A matriz latina M dos caminhos de longitude 1 é apresentada na figura 16 (a). A matriz latina sem as extremidades iniciais é apresentada na figura 16 (b).

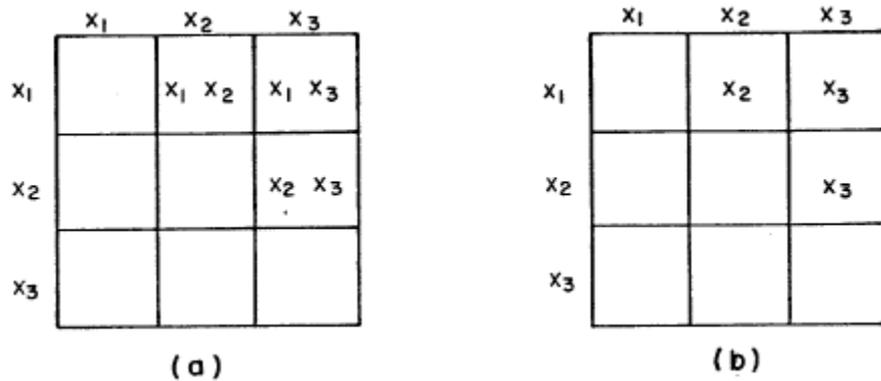


Figura 16 Matriz latina

A representação sagital é a representação do grafo de modo figurativo, sendo utilizada somente para fins de apreciação visual. Exemplos deste tipo de representação são todas as figuras de grafos apresentados neste Capítulo.

Relativamente a conexidade, para se chegar á definição de conexidade de um grafo é necessário antes esclarecer alguns conceitos a ela relacionados, como segue:

Vértice adjacente, ou vizinho, de x_i , a todo x_j ligado a x_i por um arco pelo menos.

$$x_i \text{ vizinho a } x_j \Leftrightarrow \exists (x_i, x_j)$$

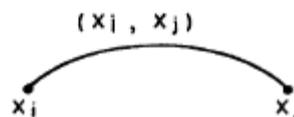


Figura 17 Vértice adjacente

O conjunto de vértices adjacentes ou vizinhos a x_i é expresso como $V(x_i)$

$$V(x_i) = \{x_j : (x_i, x_j) \text{ é aresta}\}.$$

Cadeia é uma seqüência de arcos de um grafo, tal que cada arco tem:

- uma extremidade comum com o arco antecedente (a exceção do primeiro)

- a outra extremidade em comum com o arco subsequente (a exceção do último).

Como não se especifica de quais terminais se trata, o conceito de cadeia é não orientado. Uma cadeia pode ser representada pela sequência dos arcos que a constituem ou dos vértices que são por ela visitados.

(u_1, u_2, \dots, u_m) ou (x_1, x_2, \dots, x_n)

Caminho é uma cadeia na qual todos os arcos possuem a mesma orientação. O conceito de caminho não tem sentido em grafos não orientados. Um caminho é fechado (ou ciclo) se o vértice inicial coincide com o final.

Conexidade de um grafo corresponde ao "estado de ligação" dos vértices de um grafo; ou seja, à possibilidade de se transitar num grafo de um vértice a um outro qualquer.

Grafo conexo é um grafo tal que para todos x_i, x_j , pertencentes a X , existe uma cadeia de x_i a x_j .

Grafo fortemente conexo é um grafo no qual todo par de vértices participa de um caminho fechado. Pode-se dizer, também, que é um grafo no qual todo par de vértices está unido por pelo menos um caminho, ou ainda que, dados dois vértices quaisquer, cada um pode ser atingido a partir do outro.

Grafo não conexo é um grafo no qual existe pelo menos um par de vértices x_i, x_j , que não está ligado por nenhuma cadeia. Um *grafo não conexo* é formado por pelo menos dois subgrafos conexos.

Os seguintes exemplos ilustram o potencial de aplicação da teoria de grafos a diferentes áreas. Estes exemplos são simples, mas por eles se percebe o ganho do ponto de vista conceptual e de optimização que se pode conseguir. Representam tópicos importantes na área de teoria de grafos e existem algoritmos específicos para analisar casos gerais de cada situação, ver [Tucker].

Exemplo 1:

Consideremos o grafo da figura abaixo que representa uma rede de linha telefónica (ou de transmissão energia eléctrica). Estamos interessados na vulnerabilidade da rede a alguma disrupção acidental. Vamos identificar as linhas e os nodos que são necessários preservar para evitar desconectar a rede. No caso considerado não existe linha (aresta) que possa desconectar o grafo, mas existe um nodo. O vértice representado por d , se retirado separa a rede em duas. Vamos supor que queremos determinar um conjunto minimal de arestas que permite ligar todos os nodos. Existem diferentes conjuntos minimais de arestas, por exemplo $\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,e),(e,f)\}$.

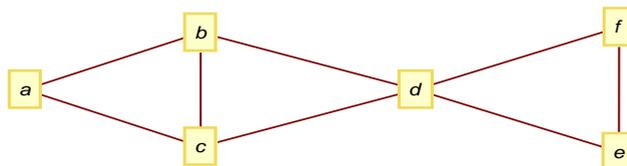


Figura 18 Árvore geradora resultante

Exemplo 2:

Considerando uma zona de um mapa das ruas de uma cidade, como apresentado na figura abaixo. Quer-se colocar um polícia em cada esquina de modo a que cada quarteirão (associado a uma aresta) fique sobre vigilância, ou seja cada aresta deve ter um polícia em pelo menos uma esquina ou seja um vértice.

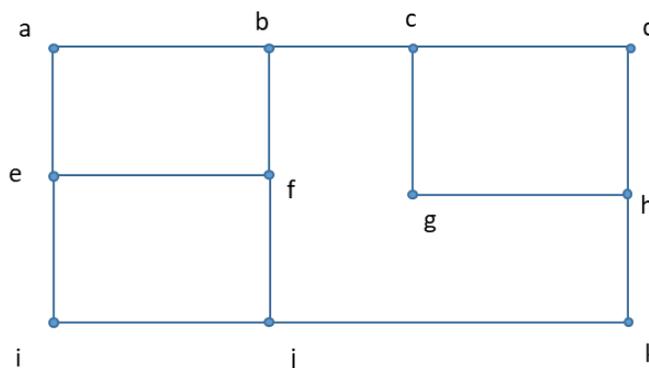


Figura 19 Exemplo de mapa de um bairro

Quantos policiais são necessários? O número de arestas são 14. Os vértices b,c,e,f,h e j são incidentes com três arestas e os vértices a,d,g,i e k são incidentes a duas arestas.

Fazendo uma análise pode-se constatar que a escolha b,c,e,h, e j cobrem todas as esquinas e quarteirões.

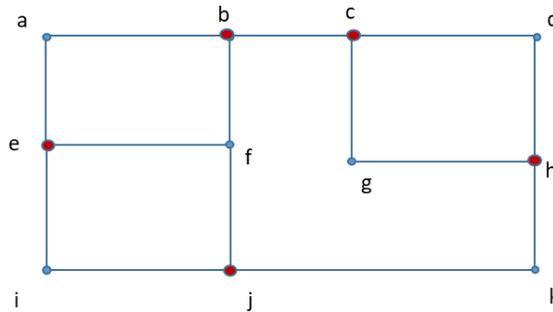


Figura 20 Árvore resultante do exemplo acima

Existem outras soluções, sempre com cinco policiais que é o mínimo requerido.

Exemplo 3:

Supondo que tem cinco pessoas A, B, C, D, E, e cinco trabalhos a, b, c, d, e. Diferentes pessoas estão qualificadas para diferentes trabalhos. O problema é determinar uma correspondência um-para-um de pessoas e trabalhos. Ou mostrar que tal correspondência não existe. Pode-se representar a situação através de um grafo com certos vértices a representar pessoas, e outro tipo de vértices a representar trabalhos, havendo aresta se a pessoa é qualificada para o trabalho. Deste modo obtem-se um grafo usualmente chamado bipartido. Ver figura abaixo.

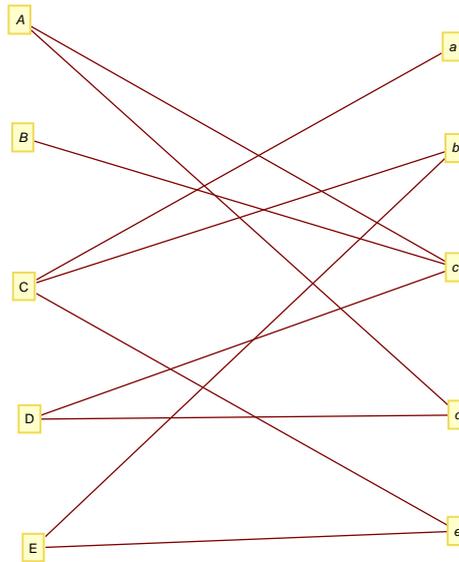


Figura 21 Grafo bipartido para o exemplo acima

Será que no caso apresentado existe solução? A resposta é não e isso pode-se ver directamente considerando as pessoas A,B e D. Este conjunto de pessoas é qualificada apenas para dois trabalhos c e d. Assim não há possível correspondência para este conjunto de pessoas e também não haverá para o conjunto todo.

Exemplo 4:

Considerando o problema de identificar uma palavra de controlo X desconhecida num compilador. Supor que as palavras possíveis são ADD, DO, FILL, GET, REPLACE, STORE, e WAIT. Nos computadores palavras são números e assim pode-se testar a palavra X num processo de ramificação com três ramos (menor que, igual a, maior que). O problema é determinar um processo eficiente para testar e identificar X. Aqui eficiente significa que minimiza o numero de testes a fazer para identificar a palavra.

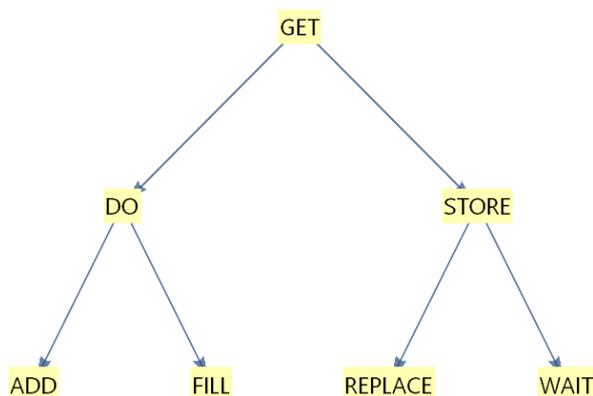


Figura 22 Ávore de identificação de palavras

No grafo acima tem-se um esquema eficiente de teste. Um grafo deste tipo é chamado árvore.

O processo inicia-se testando a palavra com GET: (a) $X = \text{GET}$ (b) $X < \text{GET}$ e testa-se com DO ou (c) $X > \text{GET}$ e testa-se com STORE. Depois do segundo teste (Se X for diferente de GET) identifica-se a palavra.

Um teste directo de cada palavra com X levaria a 8 testes. Usando o esquema acima bastam 3 testes.

No caso de as identificações forem muito grandes como em programas de correção automática de palavras (com mais de 50000 palavras a reconhecer) as eficiências de métodos baseados em árvores são essenciais. O numero de testes é proporcional ao \log_2 do numero de palavras. [Tucker]

Exemplo 5:

Considerando uma empresa de cortinas que se prepara para iniciar uma nova produção e vendas num país estrangeiro. As tarefas chave são: A – estudo de mercado, B – contratação e treino de empregados, C – aluguer ou construção da fábrica, D – contratação de pessoal de vendas, E – aluguer ou construção de mostruários, F – inicio de produção. O projecto pode ser modelado através de um grafo como o da figura abaixo.

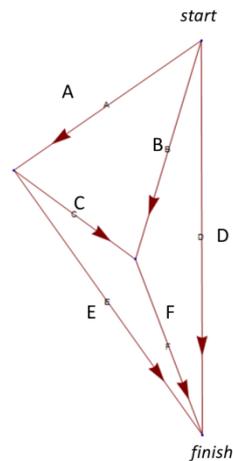


Figura 23 Grafo de uma empresa

Para cada tarefa pode-se atribuir um número indicando o número de meses necessários para completar a tarefa. Na verdade, o procedimento standard considera três números para cada tarefa: o valor estimado, o tempo melhor possível e o pior cenário. Na tabela seguinte apresenta-se um exemplo.

Tabela 1 Tabela de resumo das informações

Duração	A	B	C	D	E	F
Estimada	2	5	4	3	4	4
Melhor situação	2	2	1	1	2	4
Pior situação	3	8	12	4	15	5

Usando estes números, podemos calcular a máxima duração do projecto com diversos constrangimentos. Podem-se identificar tarefas onde existam estrangulamentos para os quais o tempo de pior situação afecta o tempo total do projecto. Quando identificado este estrangulamento recursos podem ser direccionados para melhorar a prestação da tarefa, não comprometendo a duração total do projecto. Se apenas uma tarefa leva o seu pior tempo e as restantes tarefas levam o tempo estimado então o tempo mais longo que o projecto leva a completar corresponde ao maior caminho desde start até finish, passando por essa tarefa. Por exemplo, a sequência de tarefas A-C-F levará $2+12+4=18$ meses, assumindo que C leva o pior tempo possível.

Um dos conceitos mais importantes na teoria de grafos é o conceito de *árvore*.

Uma *árvore* é um grafo conexo, sem ciclos e deve ter pelo menos um vértice. No caso da árvore ter uma vértice só, ela é chamada de árvore trivial, conforme é mostrado na figura abaixo

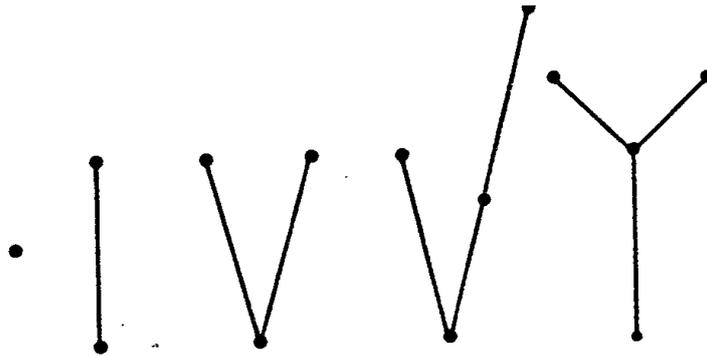


Figura 24 Vértices adjacente

Seja $G = (X,U)$ um *grafo* com $n > 2$. As propriedades seguintes são equivalentes para caracterizar G como uma árvore:

- a) G é conexo e sem ciclos;
- b) G é sem ciclos e tem $n-1$ arestas;
- c) G é conexo e tem $n-1$ arestas;
- d) G é sem ciclos e pela adição de uma aresta se cria um ciclo;
- e) G é conexo mas deixa de sê-lo se uma aresta é suprimida;

Uma *árvore* T é dita uma *árvore geradora* do grafo G , se T é um *subgrafo* de G e contém todos os vértices de G . Por exemplo, o subgrafo em **negrito** da figura abaixo é uma *árvore geradora* do grafo apresentado.

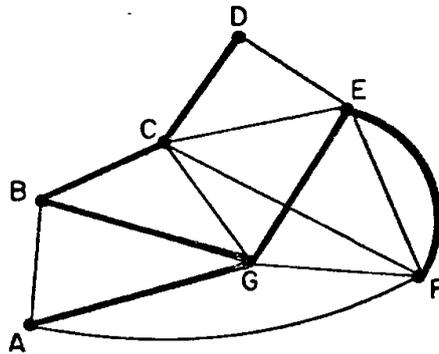


Figura 25 Árvore geradora do grafo

Um *grafo* $G = (X,U)$, admite uma árvore geradora se, e somente se, G é conexo. É importante apresentar a demonstração deste teorema já que ela fornece a base para o algoritmo, destinado à determinação de uma *árvore geradora* de um *grafo*.

Em problemas de conexão em redes, onde n pontos (nós) devem ser conectados através de $n-1$ arestas, geralmente é apresentado por um algoritmo.

Um *algoritmo de busca*, ou *de varrimento*, é um algoritmo que percorre todos os vértices de um *grafo* passando pelas arestas. Há muitas maneiras de realizar tal procedimento. Cada algoritmo de busca é caracterizado pela ordem em que os vértices são visitados.

O algoritmo de busca em profundidade (*depth-first search*), ou busca DFS, trata-se de uma generalização de um algoritmo mais simples chamado de algoritmo da *acessibilidade*. Nesse caso o objetivo é decidir se um vértice é acessível a outro através de um caminho. Aqui, o objetivo é visitar todos os vértices e *numerando-os* na ordem em que são descobertos.

A busca em profundidade não responde a um problema concreto ou específico. É um processo típico usado para a resolução eficiente de vários problemas concretos.

A ideia geral de uma busca em profundidade, tendo em conta uma ordenação dos vértices do grafo e começando o procedimento pelo primeiro vértice referido como inicial. Em

seguida processa-se o vértice adjacente ao inicial seguindo a ordem referida. Em seguida, percorre-se um caminho P de vértice adjacente, assim sucessivamente, esgotando todos os vértices, e chegando a uma situação em que não há mais vértices para processar. Retrocede-se no caminho P já realizado até um vértice onde haja uma ramificação, iniciando-se novo caminho. O processo repete-se até correr todos os vértices do grafo.

De seguida mostra-se um algoritmo deste tipo para produzir uma árvore geradora de um grafo conexo arbitrário dado. Se o grafo não é conexo este algoritmo produz uma árvore geradora para uma das componentes conexas do grafo.

Algoritmo: Determinação de árvore geradora de um grafo $G = (X,U)$.

Considera-se uma enumeração dos vértices de G, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tendo a seguinte sequencia:

1. Seja $k = 1$ e $x_{i_{k,0}} = x_1$.

2. Considera-se o vértice $x_{i_{k,0}}$ e forma-se a cadeia $V_k = \{x_{i_{k,0}}, x_{i_{k,1}}, \dots, x_{i_{k,r_k}}\}$ com cada vértice $x_{i_{k,j}}$ escolhido sendo $i_{k,j}$, os mínimos índices tais que $\{x_{i_{k,j}}, x_{i_{k,j+1}}\} \in U$, $j \in \{1, \dots, r_k\}$, $r_k \leq n$. O valor r_k corresponde ao índice para o qual não existe j , $r_k < j \leq n$ com $\{x_{i_{k,r_k}}, x_{i_{k,j+1}}\} \in U$ e $x_{i_{k,j+1}} \notin \cup_{t=1}^k V_t$. Forma-se $U_k = \left\{ \{x_{i_{k,j}}, x_{i_{k,j+1}}\} : j \in \{0, \dots, r_k\} \right\}$.

3. Se $\cup_{t=1}^k V_t = X$, define-se $T = \cup_{t=1}^k U_t$ e stop, se não, passo 4.

4. Considera-se o vértice $x_{i_{k+1,0}}$ escolhido sendo $i_{k+1,0}$ o máximo índice com $\{x_{i_{k+1,0}}, x_{i_{k+1,1}}\} \in U$ e $x_{i_{k+1,0}} \in \cup_{t=1}^k V_t$ e $x_{i_{k+1,1}} \notin \cup_{t=1}^k V_t$. Ir para passo 2, com $k = k + 1$.

O conjunto T obtido é uma árvore geradora de G.

Exemplo: Aplicação do algoritmo, passo a passo, para um grafo concreto.

Seja o seguinte grafo:

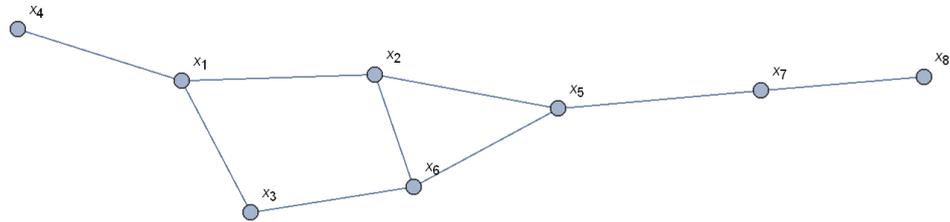


Figura 26 Representação de um grafo concreto

Consideremos a ordenação $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ como indicado na figura.

A realização do algoritmo toma a forma:

$$1. k = 1, \quad x_{i_{1,0}} = x_1.$$

$$2. x_{i_{1,0}} = x_1, x_{i_{1,1}} = x_2, x_{i_{1,2}} = x_5, x_{i_{1,3}} = x_6. \text{ Seja } V_1 = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}.$$

Não existe vértice adjacente seguinte a x_6 que não esteja em V_1 , então $r_1 = 3$.

$$\text{Define-se } U_1 = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_5\}, \{x_5, x_6\}\}.$$

$$3. V_1 \neq X, \text{ passo 4.}$$

4. O vértice x_5 escolhido como o máximo índice possível em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, com $\{x_5, x_7\} \in U$ e $x_5 \in V_1$ e $x_7 \notin V_1$. Ir para passo 2, com $k = 2$, e com $i_{2,0} = 5$.

$2. x_{i_{2,0}} = x_5, x_{i_{2,1}} = x_7, x_{i_{2,2}} = x_8. V_2 = \{x_5, x_7, x_8\}$. Não existe vértice adjacente seguinte a x_8 que não esteja em $V_1 \cup V_2$. Então $r_2 = 2$.

$$\text{Define-se } U_2 = \{\{x_5, x_7\}, \{x_7, x_8\}\}.$$

3. $V_1 \cup V_2 \neq X$, passo 4.

4. O vértice x_1 escolhido como o máximo índice possível em $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, com $\{x_1, x_3\} \in U$ e $x_1 \in V_1 \cup V_2$ e $x_3 \notin V_1 \cup V_2$. Ir para passo 2, com $k = 3$, e com $i_{3,0} = 1$.

2. $x_{i_{3,0}} = x_1$, $x_{i_{3,1}} = x_3$. Seja $V_3 = \{x_1, x_3\}$. Não existe vértice adjacente seguinte a x_3 que não esteja em $V_1 \cup V_2 \cup V_3$. Então $r_3 = 1$.

Define-se $U_3 = \{\{x_1, x_3\}\}$.

3. $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \neq X$, passo 4.

4. O vértice x_1 escolhido como o máximo índice possível em $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, com $\{x_1, x_4\} \in U$ e $x_1 \in V_1 \cup V_2 \cup V_3$ e $x_4 \notin V_1 \cup V_2 \cup V_3$. Ir para passo 2, com $k = 4$, e com $i_{4,0} = 1$.

2. $x_{i_{4,0}} = x_1$, $x_{i_{4,1}} = x_4$. Seja $V_4 = \{x_1, x_4\}$. Não existe vértice adjacente seguinte a x_4 que não esteja em $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ e então $r_4 = 1$.

Define-se $U_4 = \{\{x_1, x_4\}\}$.

3. $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 = X$, define-se $T = \cup_{t=1}^4 U_t$ estop.

Assim $T = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_5\}, \{x_5, x_6\}, \{x_5, x_7\}, \{x_7, x_8\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}\}$ é uma árvore geradora para G . Ver figura abaixo.

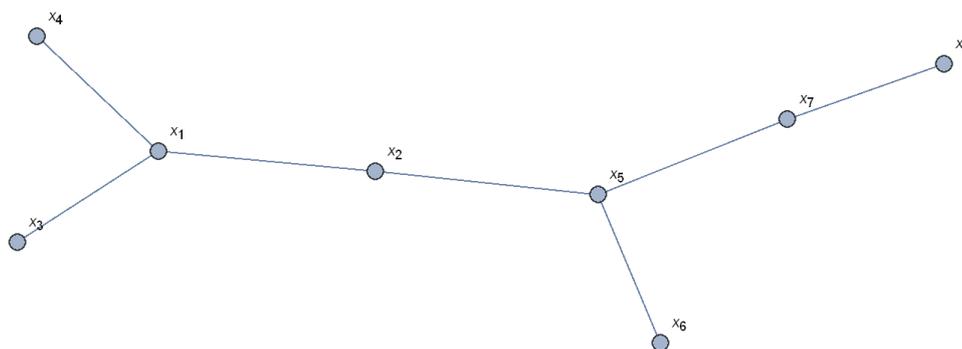


Figura 27 Árvore geradora resultante

Nota: A condição do passo 2 de excluir vértices adjacentes que possam existir, mas já considerados em passos anteriores, é necessária para obter uma árvore. Vejamos no exemplo acima, para $k = 3$:

Temos $x_{i_{3,0}} = x_1$, $x_{i_{3,1}} = x_3$. Existe um vértice adjacente seguinte a x_3 que é x_6 , e nesse caso, senão houvesse a condição adicional de excluir vértices já existentes teríamos que incluir x_6 em V_3 tornando-se $\{x_1, x_3, x_6\}$, em vez de $\{x_1, x_3\}$, e teríamos $U_3 = \{\{x_1, x_3\}, \{x_3, x_6\}\}$. Nesse caso, no final do procedimento teríamos um ciclo formado por $U_1 = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_5\}, \{x_5, x_6\}\}$ e $U_3 = \{\{x_1, x_3\}, \{x_3, x_6\}\}$, não se obtendo uma árvore. Exigindo que vértices já incluídos em passos anteriores não sejam considerados permite evitar esta situação.

Nota: Os vértices na intersecção dois a dois dos conjuntos V_1, \dots, V_k obtidos a cada passo do algoritmo são vértices de ramificação, ou seja de grau maior que 2. No exemplo acima temos $V_1 \cap V_2 = \{5\}$, $V_1 \cap V_3 = \{1\}$, $V_2 \cap V_3 = \emptyset$, $V_1 \cap V_4 = \{1\}$.

Teorema: Um grafo $G = (X, U)$, admite uma árvore geradora se, e somente se, U é conexo.

Demonstração: Se G admite árvore geradora então qualquer par de vértices está ligado por um caminho usando as arestas da árvore, e assim G é conexo. Por outro lado, se um grafo é conexo através do procedimento descrito no algoritmo acima obtemos uma árvore geradora: pelo procedimento referido todos os vértices do grafo são visitados. Por outro lado, nenhum ciclo é produzido pois o conjunto final $T = \bigcup_{t=1}^k U_t$ é uma união de grafos lineares,

$U_t, t = 1, \dots, k$, colados em apenas uma extremidade, os pontos de ramificação da nota acima, e como tal T é uma árvore. Logo o resultado final T é uma árvore geradora. \square

4.3 Considerações finais

A teoria de grafos serve de uma ferramenta importante, com a utilização de algoritmos, para o estudo de redes, sejam elas uma rede eléctrica de transporte e ou de distribuição e a rede de transportes viário, como uma malha rodoviária.

Neste contexto, a arquitetura da teoria de grafo surge como uma importante iniciativa que visa à demonstração plena de cada um dos sistemas, de energia e rodoviário, respectivamente, como forma de possibilitar um sistema organizado, flexível e que atenda as necessidades actuais dos consumidores/utilizadores finais.

Foi sintetizada a teoria de grafos de um ponto de vista matemático, tendo a perspectiva de aplicar a teoria ao estudo de redes reais como as redes eléctricas e de transportes rodoviário.

5

Teoria de grafos aplicada a sistema eléctrico

Este capítulo aborda os conceitos de aplicação da teoria de grafos para uma modelação de rede de transmissão e ou de distribuição de energia eléctrica baseando nas suas principais características, através de algumas definições da estrutura existente.

<u>5.1 Estruturação</u>	47
<u>5.2 Estruturação</u>	48
<u>5.3 Grafo da rede eléctrica nacional</u>	50
<u>5.4 Análise de redes eléctricas</u>	52
<u>5.5 Fluxo de potência eléctrica</u>	57
<u>5.6 Considerações finais</u>	60

5.1 Introdução

As tecnologias básicas que são necessárias à gestão de um sistema de energia eléctrica mais eficiente, confiável e flexível já estão disponíveis ou já podem ser vislumbradas. O desafio atual é, portanto, descobrir como integrá-las para tornar esta infraestrutura capaz de atender à procura futura de geração, transmissão, distribuição e comercialização da energia eléctrica.

Procuras estas que requerem uma infraestrutura de gestão integrada à infraestrutura de energia, propiciando a formação de uma rede inteligente, capaz de oferecer a flexibilidade e as funcionalidades exigidas por uma sociedade cada vez mais digitalizada.

Com a aplicação da teoria de grafos para uma modelção da rede de distribuição de energia eléctrica. Sua missão é, portanto, possibilitar o desenvolvimento, integração e aplicação de tecnologias que promoverão a transformação da infraestrutura de energia eléctrica, para que seja capaz de prover estudos, de maneira eficiente e barata, serviços e produtos com segurança, qualidade e confiabilidade.

O principal objetivo de teoria de *grafo* é desenvolver ferramentas e métodos necessários para o processo de gestão e integração da infraestrutura do sistema eléctrico, por meio da integração dos sistemas eléctricos, a fim de garantir qualidade, segurança, confiabilidade e disponibilidade dos produtos e serviços da concessionária de energia.

Existe uma procura particular na concessionária das redes eléctrica por uma infraestrutura organizada (padronização e tecnologia) que permita uma interoperabilidade de baixo custo entre os produtos e serviços de diferentes produtores. Nesse sentido, também é objectivo da aplicação de promover a integração dos diversos sistemas para que operem de maneira cooperada e sincronizada.

Os benefícios específicos para o sector eléctrico através da teoria de grafos são:

- Aumento da confiabilidade, disponibilidade e segurança do sistema eléctrico;

- Predição e auto recuperação de situações de emergência;
- Redução dos custos de operação e manutenção através da integração das “ilhas de automação”;
- Padronização de componentes e aumento da competitividade.

5.2 Estruturação

A rede malhada do sistema de potência pode ser representada através de um grafo associado tal como, $G = (X, U)$, onde:

X: Conjunto de barras do sistema de potência. Estes serão os vértices do grafo da rede.

U: Conjunto de equipamentos série do sistema de potência. Estes serão os arcos do grafo da rede.

No caso de um grafo associado a uma rede eléctrica a conectividade pressupõe a existência de uma cadeia de ligações eléctricas. Para que o grafo G global da rede possa ser determinado é preciso inicialmente determinar os subgrafos associados a cada subestação que compõem a rede eléctrica.

O problema da determinação da configuração da rede eléctrica consiste em obter a representação matemática deste grafo, o que significa identificar biunivocamente as barras (X) e os equipamentos série (U) do grafo global G do sistema de potência.

A determinação da topologia global é um processo que consiste em percorrer as seguintes etapas:

1) Identificação dos subgrafos de cada subestação. Estes subgrafos conterão os vértices do grafo global da rede. Os arcos que compõem estes subgrafos são os dispositivos lógicos fechados. Dada a dinâmica da variação de estado dos dispositivos lógicos, uma subestação pode ser dividida em vários subgrafos.

2) Obtenção dos equipamentos electricamente conectados a cada subgrafo de subestação obtido na etapa 1. Dentro do conjunto destes equipamentos o subconjunto de equipamentos série contém os arcos do grafo global da rede.

3) Identificação da cadeia de subgrafos de subestação conectados electricamente entre si, através de equipamentos série. Os conjuntos de subgrafos de subestação conexos formarão o conjunto dos vértices do grafo, ou grafos, em que está dividida a rede total do sistema de potência. Desta forma fica determinado o grafo $G = (X,U)$ da rede total. A orientação ou não do grafo depende da natureza do estudo que será realizado a partir da obtenção do grafo da rede.

Como se pode ver, o problema de configuração da rede pode ser definidas em dois sub-problemas. O primeiro é aquele relacionado com os passos 1 e 2 do processo acima e corresponde à etapa de configuração de subestações. O segundo corresponde ao passo 3 e é aquele que trata da configuração da rede.

5.3 Grafo da rede eléctrica nacional

Circuitos eléctricos também são formados por ramos (arestas) e nós (vértices) e podem ser representados por grafos. Logo o grafo da rede eléctrica em causa neste estudo está representado na figura abaixo.



Figura 28 Grafo da rede aérea de São Tomé



Figura 29 Grafo de rede subterânea de S. Tomé

Apesar de se terem as duas representações apenas será desenvolvido a matriz adjacente e demais passos sobre a rede aérea de MT. Considerando que o grafo seja mesmo um grafo não orientado pode-se obter a seguinte matriz adjacente considerando todos os vértices da figura e de igual forma tomar-se em consideração as informações sobre as arestas da mesma figura, sendo assim é gerada uma matriz do mesmo grafo, considerando que haja uma desconexão no ponto M.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	O	P
A	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
C	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
E	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
H	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
J	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
M	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Figura 30 Matriz adjacente do grafo do sistema eléctrico

Relativamente ao grafo da figura 29 temos duas estruturas numa mesma infraestrutura de rede, logo a rede principal de média tensão é da lógica alfabética de seguinte forma: A, B, C, D, E, F, G, O e P. Enquanto que para a rede secundária de média tensão passa a ser de seguinte sequência: (BJ), (DM), (GLM), (GHI) e (GHK), com a possibilidade de abertura em M, onde temos um chaveamento.

O grafo, na verdade pelo processo de construção é uma árvore, é o seguinte:

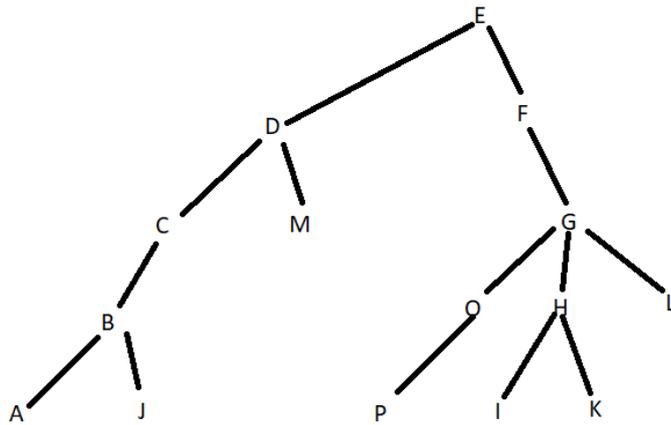


Figura 31 Árvore do grafo do sistema eléctrico

5.4 Análise de redes eléctricas

A principal função de uma linha de transmissão de energia eléctrica é o transporte de energia de fontes onde é gerada aos pontos onde é consumida. As linhas de transmissão são representadas pelo modelo π para o cálculo do fluxo de potência (Richard Dorf and James Svoboda, 2003).

Neste tipo de modelo existem barras terminais onde a linha está ligada, a impedância série, as admitâncias *shunt* e a terra, conforme se mostra na figura abaixo:

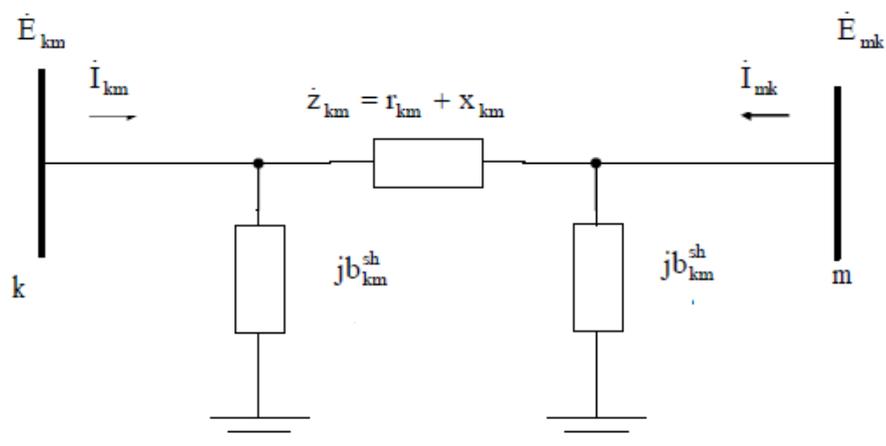


Figura 32 Modelo π para linha de transmissão

O elemento série da linha de transmissão é expresso em Ohms (impedância série), e o elemento *shunt* é expresso em Siemens (admitância shunt). Ambos dependem do comprimento da linha. O elemento série tem característica indutiva e o elemento shunt tem característica capacitiva.

A impedância série é normalmente expressa por:

$$\dot{Z}_{km} = r_{km} + jX_{km}$$

Onde :

r_{km} : resistência série

X_{km} : reatância série

Fazendo o inverso da impedância série, obtemos a admitância série da linha:

$$y_{km} = z_{km}^{-1} \longrightarrow \frac{1}{r_{km} + jX_{km}} = g_{km} + jb_{km}$$

Onde :

g_{km} : condutância série

b_{km} : susceptância série

Ou seja:

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + X_{km}^2} \quad b_{km} = - \frac{X_{km}}{r_{km}^2 + X_{km}^2}$$

Quando o modelo π da Fig. 32 representa uma linha de transmissão, tem-se que r_{km} e X_{km} são positivos, o que implica em g_{km} positivo e b_{km} negativo (indutivo).

Toda a análise de nós e malhas pode ser sistematizada e sintetizada se for utilizada a teoria de grafos e a notação matricial. De seguida, mostra-se como esta sistematização pode simplificar a análise de redes. Todas as redes podem ser resolvidas a partir de uma só equação e esta abordagem é útil para simulação e análise computacional de redes.

As **Leis de Kirchhoff** são fundamentais para a análise de circuitos e servem para encontrar as intensidades das correntes em circuitos eléctricos que não podem ser reduzidas a circuitos simples. Constituídas por um conjunto de regras, elas foram introduzidas em 1845 pelo físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) (Richard Dorf e James Svoboda, 2003):

- Primeira Lei de Kirchhoff é chamada de lei dos nós ou lei de Kirchhoff para a Corrente (LKC). Indica que a soma das correntes que chegam em um nó é igual à soma das correntes que saem. Esta lei é consequência da conservação da carga eléctrica, a soma algébrica das cargas existentes num sistema fechado é constante. Num circuito, o número de vezes que devemos aplicar a lei dos nós é igual ao número de nós do circuito menos um, $(n-1)$.

$$i_1 + i_2 = i_3 + i_4 \text{ ou } i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

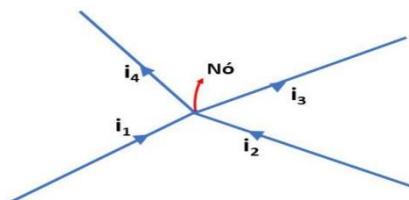


Figura 33 Lei de Kirchhoff para a corrente (LKC)

- A segunda lei de Kirchhoff é chamada de lei da malha, sendo aplicada aos caminhos fechados de um circuito, e é consequência da conservação da energia. Ela indica que quando percorremos uma malha num sentido, a soma algébrica das diferenças de potencial (ddp ou tensão) é igual a zero. Para aplicar a lei das malhas ou leis Kirchhoff para tensão (LKT), devemos indicar o sentido que

iremos percorrer o circuito. A tensão poderá ser positiva ou negativa, de acordo com o sentido que designamos para percorrer o circuito.

$$U_{AB} + U_{BE} + U_{EF} + U_{FA} = 0$$

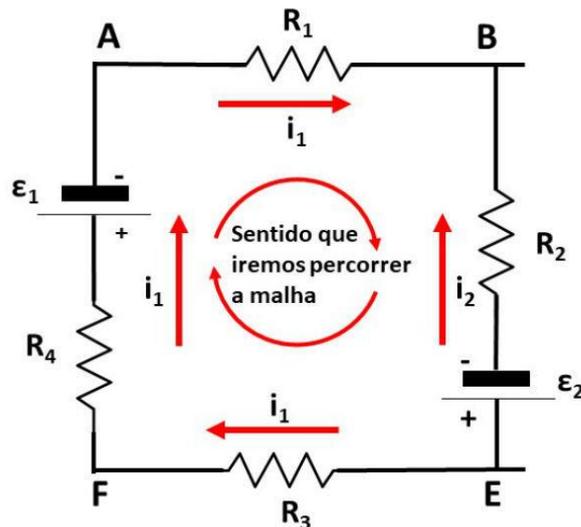


Figura 34 Lei Kirchoff para tensão (LKT) (Fonte: Imagem.google, 2018)

As leis de Kirchoff não dependem da natureza dos elementos da rede, é natural reduzir a rede a um grafo. Conceitos da teoria de grafos são então usadas para formular de modo preciso a LKT e LKC. O processo é realizado para obter uma forma sistemática de análise de circuitos que sirva para redes de qualquer complexidade e possa ser simulada.

A representação de um circuito por um grafo é realizada pela correspondência da aresta por um segmento de reta que pode estar orientado (grafo orientado) e que é chamado de ramo. Os nós do circuito são os nós do grafo e também podem ser chamados de vértices ou junções. Os nós delimitam os extremos de um ramo. A orientação dos ramos coincide com a orientação dos sentidos de referência associados de tensão e corrente, adotados pela convenção referida. Definidos assim, grafos mais simples possuem apenas um nó ou um ramo e um nó. Como vimos anteriormente, os grafos também podem ser divididos em subgrafos.

Um percurso fechado em um grafo é todo subgrafo ligado onde cada nó deste subgrafo está conectado a apenas dois ramos.

Um corte, de um grafo $G = (X, U)$, é uma partição do conjunto de vértices X em dois subconjuntos $X = X_A \cup X_B$. Um conjunto de corte C_{AB} é um conjunto minimal de arestas que se forem removidas tornam o grafo desconexo. Com a característica adicional de nenhum subconjunto ter esta propriedade.

Exemplo: Seja o grafo $G = (X, U)$ determinado pelos seguintes conjuntos de vértices $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e conjunto de arestas U de modo representado na figura abaixo.

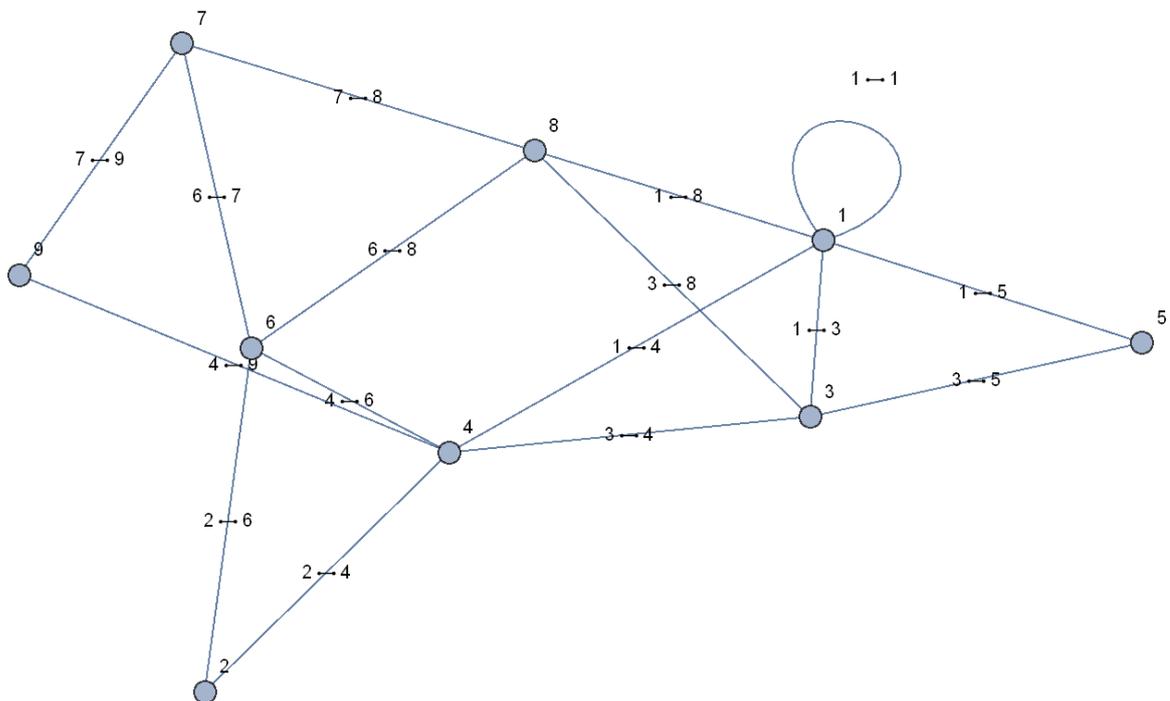


Figura 35 Grafo para exemplo de corte

Um exemplo de corte é $X_A = \{2,4,6,7,8,9\}$, $X_B = \{1,3,5\}$. O conjunto de corte associado é $C_{AB} = \{\{1,8\}, \{3,8\}, \{1,4\}, \{3,4\}\}$. Se retirarmos todas estas arestas obtemos um grafo desconexo. Se não retirarmos uma das arestas de C_{AB} então o grafo permanece conexo. O conjunto de corte e o corte estão assim directamente relacionados.

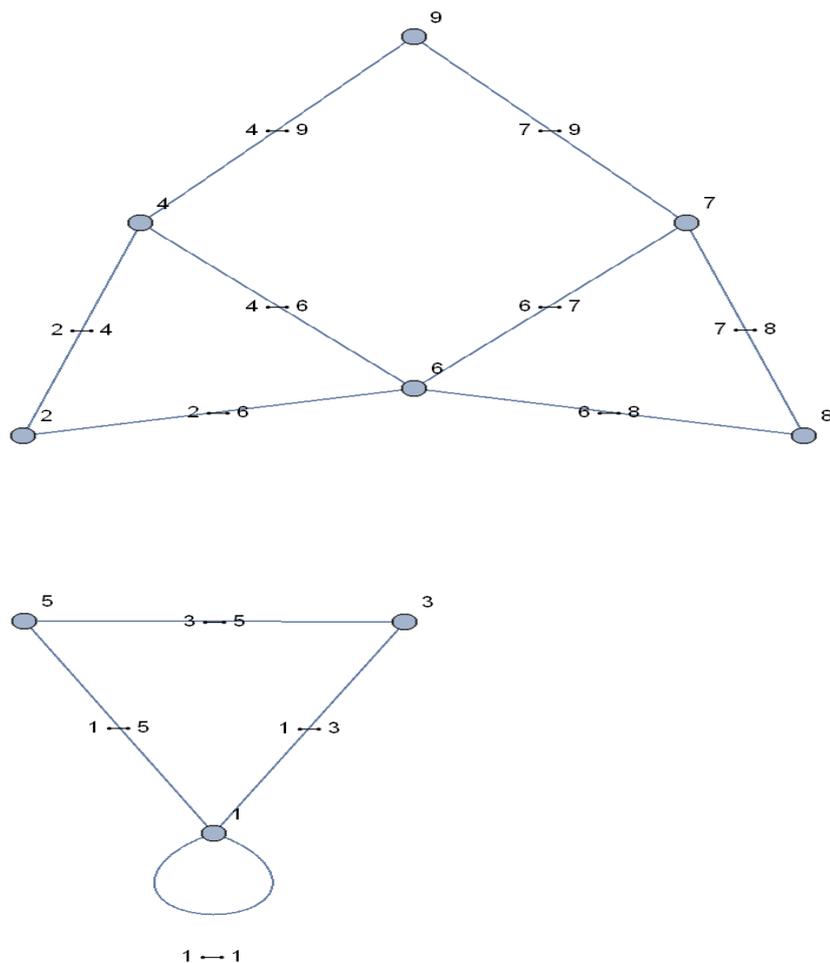


Figura 36 Corte de um grafo

Duas partes desconexas, obtidas removendo o conjunto de corte $C_{AB} = \{\{1,8\}, \{3,8\}, \{1,4\}, \{3,4\}\}$.

5.5 Fluxo de Potência Eléctrica

Um sistema eléctrico de potência, é um conjunto definido de linhas e subestações que garante a transmissão e distribuição de energia eléctrica. A análise do fluxo de potência em barramentos permite que os operadores dos sistemas de potência tenham um conhecimento real acerca do estado das operação e das condições de segurança do sistema.

A necessidade de se obterem sistemas eléctricos cada vez mais seguros e eficientes, tem motivado o desenvolvimento de métodos de análise de fluxos de potência, procurando soluções que facilitem a obtenção de informações referentes às grandezas eléctricas.

Os componentes de um sistema eléctrico são classificados em dois grupos (Monticelli): os componentes que estão ligados entre um nó arbitrário e o nó terra, como é o caso de geradores, cargas, resistências e condensadores, e os que estão ligados entre um par arbitrário de nós da rede, como é o caso de linhas de transmissão e transformadores. Os geradores e cargas são considerados como a parte externa do sistema. A parte interna do sistema é constituída pelos restantes componentes.

O fluxo de potência é uma das ferramentas básicas em análise de sistemas eléctricos. As equações de fluxo de potência podem ser aplicadas tanto em sistemas de grande porte quanto em pequenas instalações. Através da análise do fluxo de potência pode-se conhecer o desempenho de sistemas sobre o ponto de vista de operação ou planificação.

As equações de fluxo de potência quase sempre se resumem em:

$$[y_{no}] [V_{no}] = [i_{no}] = [S_{no}/V_{no}]$$

Na equação acima $[y]$ é a matriz de admitância nodal, $[v]$ é o vetor das tensões, $[i]$ é o vetor das correntes de injeções nodais onde a corrente de cada nó é dada pelo conjugado da divisão da potência pela tensão. A equação acima pode ter característica linear ou não linear, dependendo do modelo das potências nas barras ou de hipóteses simplificadoras.

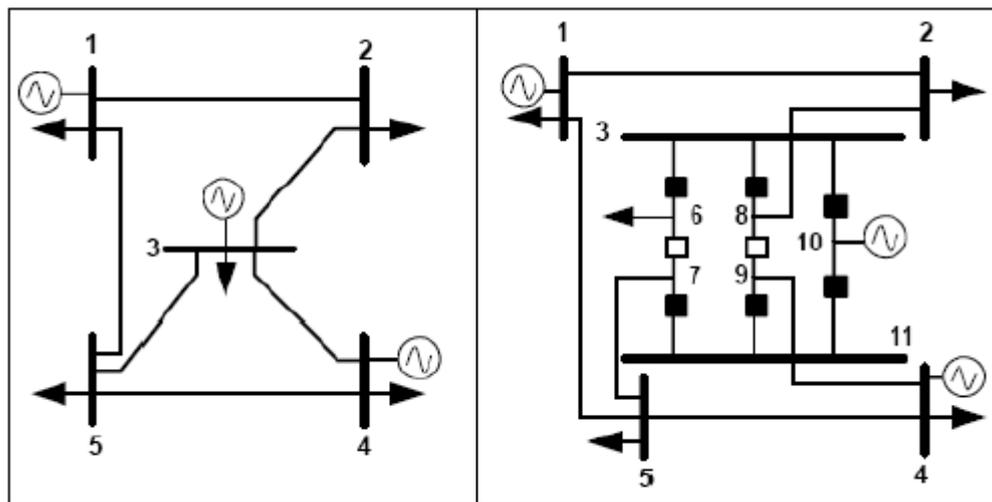
Um sistema de potência normalmente contém barras de carga e barras de geração. Ao se resolver as equações de fluxo de potência, normalmente adota-se uma barra como referência também conhecida como barra de balanço ou barra infinita. O nome de barra infinita vem do fato de que a tensão permanece constante independente do valor de corrente ou potência. O valor da tensão e do defasamento angular da barra de referência são conhecidos. O mais comum é adotar uma barra de geração como referência.

Uma outra denominação para as barras classifica-as como barras PQ ou barras PV. Denominam-se barras PQ as barras onde os valores da potência ativa (P) e potência reativa (Q) são conhecidos, tanto as barras de geração quanto as barras de carga podem ser do tipo PQ. Nas barras do tipo PQ as correspondentes tensões e defasamentos angulares são incógnitas nas equações de fluxo de potência.

A barra PV é um tipo de barra com tensão controlada ou em outras palavras barra onde a tensão é conhecida e mantida constante através de injeções de reativos. Na barra PV a potência ativa (P) e o módulo da tensão são conhecidos e a potência reativa (Q) e o defasamento angular da tensão são incógnitas, de acordo a tabela abaixo:

Tabela 2: Tipos de barras

TIPO	BARRA	ESPECIFICADO	CALCULADO	CARACTERÍSTICA
0	PQ	P_K e Q_K	V_K e θ_K	Barra de carga
1	PV	P_K e V_K	θ_K e Q_K	Barra de geração
2	P θ	V_K e θ_K	P_K e Q_K	Barra de referência



MODELAGEM BARRA - RAMO

MODELAGEM NÍVEL DE SUBESTAÇÃO

Figura 37 Relação entre a barras

Exemplo de uma aplicação eléctrica simples tomando em consideração a barra de referência:

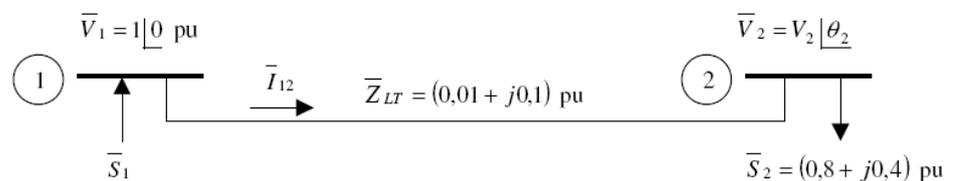


Figura 38 Sistema eléctrico de potência

Considere o sistema eléctrico composto por duas barras e uma linha de transmissão ilustrada na figura acima. Para este sistema são conhecidos os fasores de tensão

na barra 1, utilizada como referência angular pois $\theta_1=0$, e a procura de potência da barra 2, que constitui uma barra de carga, S_2 . Deseja-se determinar o fasor de tensão na barra 2, V_2 , e a injeção líquida de potência da barra 1, S_1 .

Embora o sistema eléctrico da figura acima seja extremamente simples, a determinação dos fasor de tensão da barra 2 não é imediata. Sendo a barra 1 a de referência, pois já se conhece o fasor de tensão e consequentemente na barra 2, a de carga, pois a sua injeção de potência já é conhecida.

De análise do circuito eléctrico, observa-se que a tensão na barra 2 está vinculada a corrente I_{12} que percorre a linha de transmissão, pois :

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_1 - \bar{Z}_{LT} \bar{I}_{12} \quad , \quad \bar{I}_{12} = \left(\frac{\bar{S}_2}{\bar{V}_2} \right)^* \quad \text{e} \quad \bar{S}_1 = \bar{V}_1 \bar{I}_{12}^*$$

De acordo aos estudos do fluxo de carga das redes de transmissão tem por objectivos primordiais:

- Analisar as solicitações de manutenção;
- Substituição de linhas de transmissão e equipamentos;
- Planificação da operação;
- Expansão do sistema.

5.6 Considerações Finais

O que se pretendeu neste capítulo foi chegar a formulação matemática do problema da configuração da rede através de uma revisão matemática da teoria dos grafos.

Para poder definir matematicamente o problema da configuração de rede achou-se oportuno basear nas definições dos diferentes tipos de grafos, os tipos de representação usuais de um grafo e os conceitos de conexidade e de árvore.

Um outro objectivo que foi perseguido neste capítulo, através da formulação matemática do problema, foi o de fornecer ao leitor uma base matemática de modo a tornar confortável a leitura do capítulo.

Este capítulo descreveu a teoria de grafos como parte da integração do sistema de eléctrico.

Conclui-se que com a importância da teoria de grafos de forma a resolver e dinamizar através de um método computacional e respeitando todas as definições de grafos a aplicação do conceito eléctrico e resolvendo assim os grandes problemas e rápidos, respeitando os conceitos da teoria de grafos.

Dando sequência, é necessário agora tratar da infra-estrutura rodoviária a ser utilizada no sistema de análise do fluxo, visto que a distribuição de energia e a arquitetura da rede já estão esclarecidas.

6

Teoria de grafos aplicado a sistema rodoviário

Neste capítulo faz-se uma abordagem similar aos demais capítulos estudados acima, e se associa a aplicação de conceitos das características da rede viária, enfatizando na teoria de grafos.

<u>6.1 Introdução</u>	63
<u>6.2 Estruturação</u>	63
<u>6.3 Grafo de rede rodoviário</u>	64
<u>6.4 Fluxo rodoviário</u>	68
<u>6.5 Considerações finais</u>	71

6.1 Introdução

O comércio depende de muitos aspectos ligados ao sistema rodoviário, sendo também uma importante área estruturante das políticas económicas dos países. Um dos aspectos, crucial, é o transporte de bens vendidos, comprados ou trocados, ou seja, o transporte destes bens do seu ponto de origem até ao seu ponto de destino. Pelo seu peso e valor relativo na transação, o transporte é uma componente decisiva no custo final da mercadoria, cumprimento de prazos e condições de entrega. A logística de transporte montada adequadamente, baseada nestas variáveis importantes do processo, pode representar o lucro ou o prejuízo na actividade exportadora ou importadora e, conseqüentemente, a sua manutenção, incremento ou retirada do jogo das trocas entre localidades. A rede viária em muitos contextos é uma das formas privilegiadas de transporte de bens e pessoas, sendo por isso um tópico importante de se estudar.

6.2 Estruturação

A rede malhada do sistema rodoviário pode ser representada através de um grafo associado tal como: $G = (X, U)$ onde:

X: Conjunto de interseções do sistema viário. Estes serão os vértices do grafo da rede.

U: Conjunto de trechos de estradas asfaltadas no sistema viário. Estes serão os arcos do grafo da rede.

No caso de um grafo associado a uma rede viária a conexidade pressupõe a existência de uma cadeia de ligações de vias. Para que o grafo G global da rede possa ser determinado é preciso inicialmente determinar os subgrafos associados a cada infraestrutura que compõem a rede viária.

O problema da determinação da configuração da rede viária consiste em obter a representação matemática deste grafo, o que significa identificar biunivocamente as interseções (X) e os trechos de estradas asfaltadas (U) do *grafo* global G do sistema rodoviários.

A determinação da topologia global é um processo que consiste em percorrer as seguintes etapas:

1) Identificação dos subgrafos. Estes subgrafos conterão os vértices do grafo global da rede. Os arcos que compõem estes subgrafos são os elementos urbanísticos. Dada a dinâmica da variação de utilização ou interseção da via, trechos de estradas asfaltadas pode ser dividida em vários subgrafos.

2) Obtenção dos troços de estradas asfaltadas conectados a cada subgrafo da via obtido na etapa 1.

3) Identificação da cadeia de subgrafos de troços conectados entre si. Os conjuntos de subgrafos dos troços de estradas asfaltadas conexos formarão o conjunto dos vértices do grafo em que está dividida a rede total do sistema de viário. Desta forma fica determinado o *grafo* $G = (X,U)$ da rede total. A orientação ou não do grafo depende da natureza do estudo que será realizado a partir da obtenção do grafo da rede.

Como se pode ver, o problema de configuração da rede pode ser definidas em dois sub-problemas. O primeiro é aquele relacionado com os passos 1 e 2 do processo acima e corresponde á etapa de configuração de infraestrutura. O segundo corresponde ao passo 3 e é aquele que trata da configuração da rede.

6.3 Grafo de rede rodoviário

Como vimos no capítulo 4, um grafo é um conjunto de vértices e arestas, sendo esta última com a condição em que cada comece e termine em um vértice. Circuitos viários também são formados por ramos (arestas) e nós (vértices) e por isso podem ser representados por grafos. Logo o grafo da rede viária em causa neste trabalho está para a ilha de São Tomé representado de acordo a figura 38 abaixo.

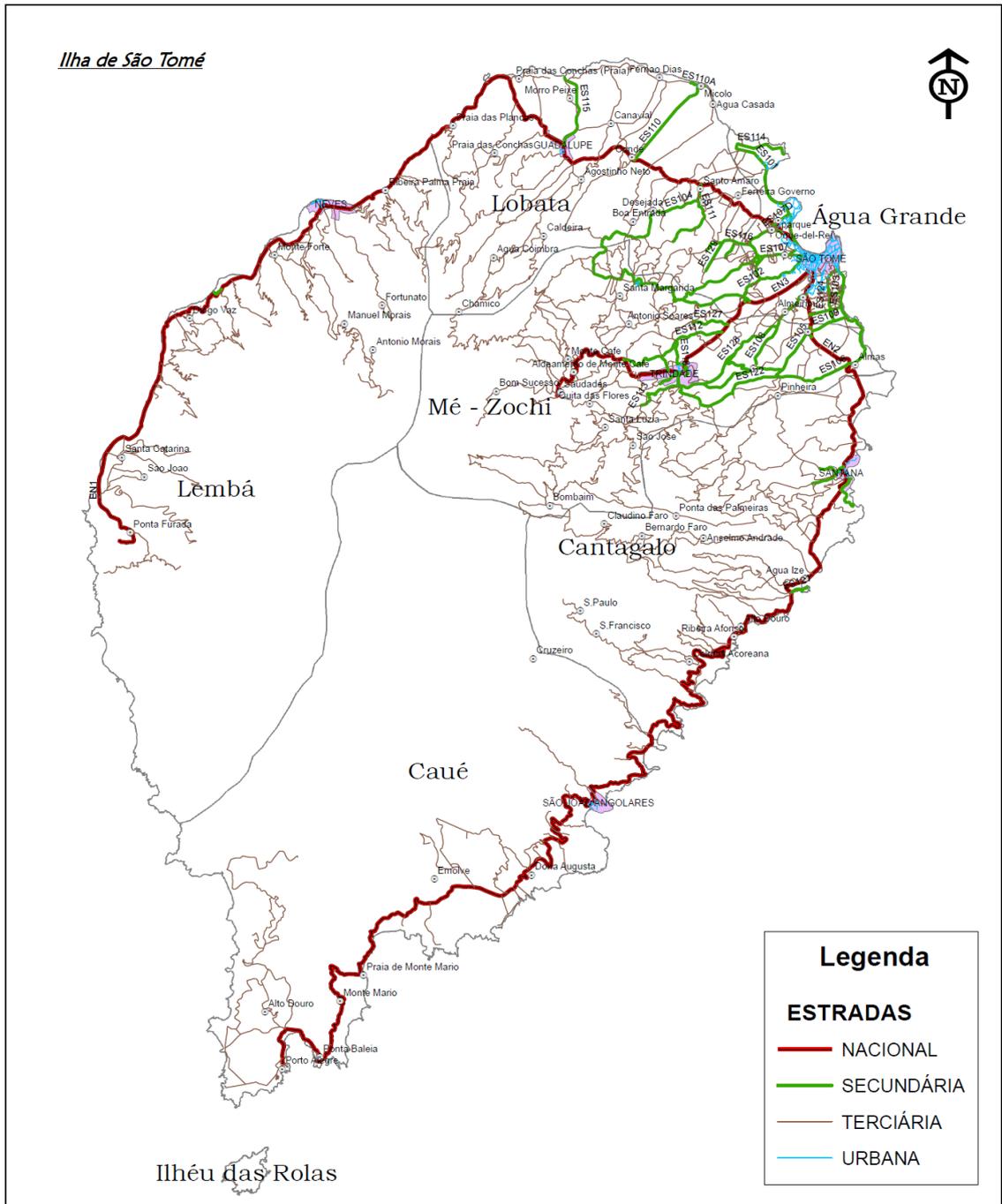


Figura 39 Mapa de rede viária de São Tomé (Fonte INE)

Primeiro são enumeradas as estradas principais, em seguida as secundárias e finalmente as terciárias. Para a rede urbana segue-se o mesmo procedimento, mas à parte. Assim as zonas urbanas são identificadas também com vértices do grafo.

As estradas nacionais são:

EN1, EN2 EN3.

As estradas nacionais secundárias são:

ES102, ES103, ES104, ES105, ES106, ES107, ES107D, ES108, ES109, ES110, ES110A, ES111, ES112, ES114, ES115, ES116, ES121, ES122, ES124, ES127, ES128, ES129

As estradas principais são particionadas de acordo com as intersecções que contém com estradas secundárias, seguindo o sentido pré-definido. Por exemplo a EN1 contém 3 intersecções com as estradas secundárias ES115, ES110, ES111. Deste modo marcamos os vértices por esta ordem 1,2,3,4, 5 incluindo as extremidades, e correspondendo o 5 à cidade de São Tomé.

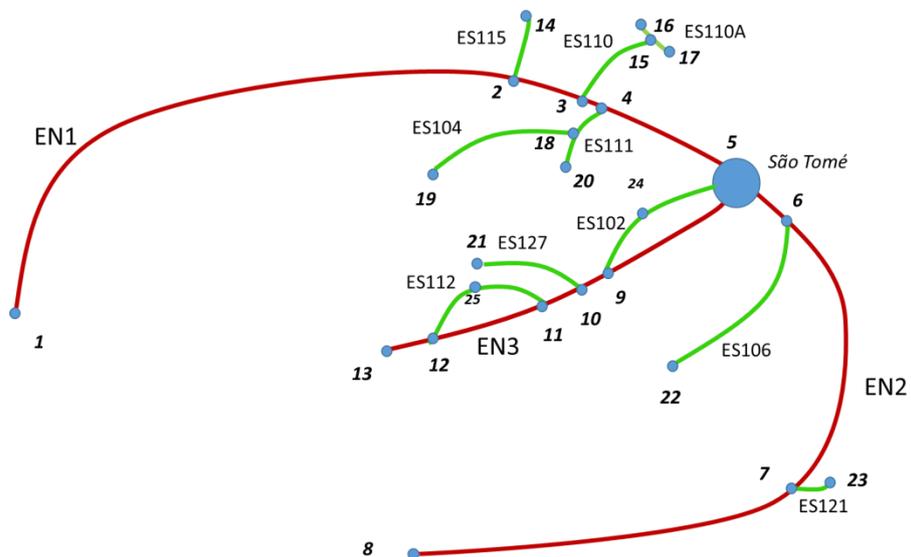


Figura 40 Grafo da rede rodoviária de São Tomé

O grafo, na verdade pelo processo de construção é uma árvore, é o seguinte:

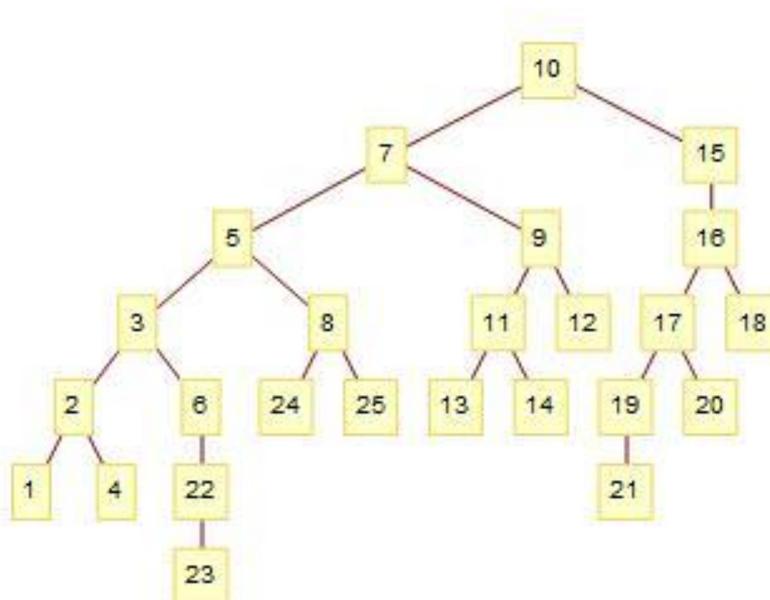


Figura 42 Árvore do sistema viário de São Tomé

6.4 Fluxo rodoviário

Actualmente o estudo de tráfego urbanístico através de certas metodologias de aquisição de dados permite-nos obter dados relativos ao número de veículos que circulam por vias determinadas em determinado período, permitindo determinar quantitativamente a capacidade das vias e, em consequência, o estabelecimento de modelos descritivos e de decisão.

O volume, a velocidade e a densidade são três características fundamentais dos aspectos dinâmicos do tráfego. A análise destes três elementos permite a avaliação global da fluidez do movimento geral de veículos. Define-se volume de tráfego, ou fluxo de tráfego, denotado por q , como o número de veículos que passam por uma seção de uma via durante uma unidade de tempo. É expresso naturalmente em veículos/dia (vpd) ou veículos/hora (vph). Para a média dos volumes de veículos que circulam durante 24 horas em um trecho de via é dada a designação de “Volume Médio Diário” (VMD).

Considere o exemplo da figura abaixo. O troço de via representado, é determinada a seção SS' que passa pelo ponto P , posicionado no eixo OX a uma distância x da origem O . Durante o intervalo de tempo T são contados os $n(x)$ veículos que atravessam a secção. O fluxo $q(x)$, em veic/h, é então definido por:

$$q(x) = \frac{n(x)}{T}$$

De acordo as informações obtidas, o procedimento utilizado no levantamento de dados de campo foi através de pesquisa realizada por observação direta.

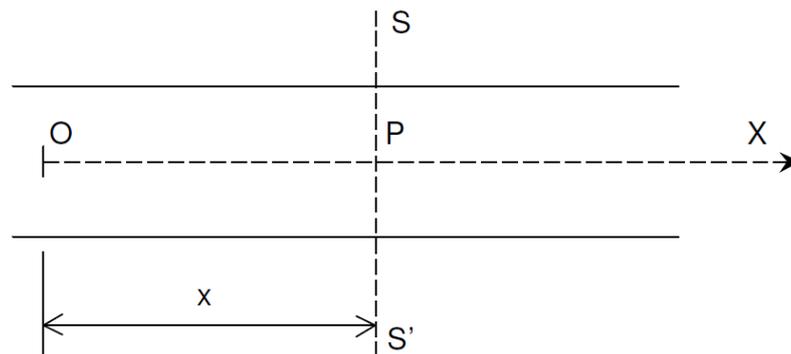


Figura 43 Medição de fluxo numa seção de via

Tomando em consideração o modelo matemático do fluxo para calcular a capacidade máxima por veículo/faixa adotam-se para a classificação qualitativa da via os seguintes critérios (Pereira, A.L., 1988):

a) Para as vias locais:

600 veic / h / faixa = folgado

850 veic / h / faixa = adequado

1000 veic / h / faixa no limite da capacidade.

b) Para as vias coletoras:

1000 veic / h / faixa = folgado

1200 veic / h / faixa = adequado

1500 veic / h / faixa no limite da capacidade.

c) Para as vias arteriais:

1200 veic / h / faixa = folgado

1500 veic / h / faixa = adequado

1800 veic / h / faixa = máximo

As contagens, de maneira geral são elaboradas para os cruzamentos das vias, (seja qual for sua classificação) e não expressam a realidade da distribuição de viagens ao longo das mesmas, pois os veículos podem entrar ou sair em transversais, as viagens podem ser curtas ou longas, por trecho do trajeto e trechos mais carregados que outro.

Não obstante aos processos abordados anteriormente o mesmo sistema também apresenta os seus pontos críticos das vias arteriais para São Tomé. Neste caso, de seguida são apresentados alguns pontos:

Av. Marginal 12 Julho

1) Sentido praça independência – S.João

Largura média da via 8 m com 2 faixas de rodagem

Largura de cada faixa = 3,75m

Capacidade permitida = 5.400 veic/hora = 100 %

Capacidade utilizada = 4.652 veic/hora = 86 %

Capacidade não utilizada = 748 veic/h = 14%

Segundo as informações colhidas na Direcção de Transporte Terrestre e o INAE as duas apresentam uma preocupação relativamente ao fluxo de viaturas nos períodos de pico da

manhã e de tarde com um valor bastante elevado. É desse modo que a teoria de grafos vem com a aplicação na modelagem de forma a tomar uma melhor solução para cada caso.

6.6 Considerações finais

Neste capítulo explora-se o potencial da teoria dos grafos ao tratamento de redes viárias. Constam neste capítulo o estudo de redes urbanas caracterizadas por um conjunto de centros urbanos funcionalmente articulados entre si. Modela-se a rede por meio de um grafo onde cada interseção viária é considerado um vértice e as arestas são tocos de estradas asphaltadas, ligando as interseções. Com base na teoria de grafos podem obter-se informações sobre a rede urbana dessa região tais como: conectividade, pontes, pontos de articulação, caminho de menor custo, centro, anti-centro e conjunto dominante mínimo. Mas neste trabalho enfatiza-se apenas nos aspectos viários e topológicos.

7

Conclusões Finais

Neste capítulo faz uma abordagem geral e conclusiva do trabalho e com apresentação de possibilidade futura de continuidade de melhoria de trabalho.

Neste trabalho foram abordadas as características das redes eléctrica e as redes rodoviárias nacional como parte inicial do sistema de planeamento, ou seja sendo das vias principais e secundárias distribuindo e recolhendo o fluxo viário/eléctrico na zona urbana do arquipélago de aplicação de teoria de grafo para o sistema de eléctrico e viário, respectivamente, ou seja, um conhecimento inicial necessário ao objectivo final da tese.

Com base no conhecimento das redes eléctrica e das rede viárias, faz-se necessário o conhecimento de tecnologias para à gestão de um sistema de energia e viário mais eficiente, e também, de uma infraestrutura de comunicação integrada à infraestrutura de energia e viária por meio de uma rede inteligente. Para utilização desse proposito essas arquitetura devem basear dos conceitos da teoria de grafos de forma a facilitar as apropriações e resoluções mais eficaz.

Logo, a arquitetura dessas redes, baseou-se dos objectivos desta tese, que é demonstrar a utilização da teoria de grafo para sistema eléctrico e rodoviário. Onde fez-se abordagens de algumas das características da redes viárias, mas dando a enfase aos aspectos urbanos em rede de transportes viário, como uma malha rodoviária, de forma similar a mesma teoria serviu de uma ferramenta importante, com a ulitização de algoritmo, para o estudo da rede eléctrica de transporte e ou de distribuição, respeitando os seus apectos regulatórios, respectivamente.

Neste contexto, a teoria de grafo surge como uma importante iniciativa que visa à demonstração plena de cada um dos sistemas, de energia e rodoviário, como forma de possibilitar um sistema organizado, flexível e conhecer padrões e propriedades capazes de esclarecer comportamentos e, conseqüentemente, permitir tomadas de decisão que atenda as necessidades actuais dos consumidores/utilizadores finais.

Para poder definir matematicamente o problema da configuração de rede eléctrica e viária foi desenvolvido através das definições dos diferentes tipos de grafos, os tipos de representação usuais de um grafo e os conceitos de conexidade e de árvore, facilitando a vida dos operadores dos sistemas em causo.

Por fim, com a importância da teoria de grafo de forma a resolver e dinamizar através de um método computacional e respeitando todas a definições de grafos a aplicação do

conceito abordados neste trabalho e resolvendo assim os grande problemas e rápidos, respeitando os conceitos da teoria de grafos. Portanto, esta sistematização vem para simplificar e muito a análise das redes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (INAE, 2018) < <http://gimestp.over-blog.com/article-instituto-nacional-de-estradas-inae-66824753.html-09/10>>. Acesso em: 25 Novembro 2018.
- (EMAE, 2017) EMAE. Relatório Técnico Final de ano 2017.
- (DGRNE, 2018) DGRNE/MOPIRNA. Relatório Técnico Final de ano 2016.
- (Portomaravilha, 2018) <<https://portomaravilha.com.br/conteudo/estudos/impacto-a-vizinhaca/V.%20Situacao%20Atual%20e%20Futura%203.%20Transporte%20-%20Demanda%20de%20Transporte%20e%20Trafego%20Viario.pdf>>. Acesso em: 18 Setembro 2018.
- (Silva,P.C.M., 1992) SILVA, P. C. M. Contribuição Metodológica à Simulação do Tráfego Urbano: uma adaptação do modelo TRANSYT/8. Tese de Mestrado da COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, Brasil,1992.
- (USP, 2018) <https://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/Algoritmos para Grafos em C via Sedgewick, Paulo Feofiloff com figuras de José Coelho de Pina>. Acesso em: 21 Novembro 2018.
- (Pereira, A.L., 1988) PEREIRA, A. L. Teoria de Fluxo de Tráfego. Notas de aula. Curso de Teoria do Fluxo de Tráfego. Programa de Engenharia de Transportes – COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, Brasil, 1988.
- (CELG, 2006a) CELG. P&D ANEEL CELG. **Relatório 1:** Arquitetura IntelliGrid – Integração dos Sistemas de Energia e Comunicação aplicada ao projeto CELG. Goiânia, 2006, 55p.
- (Wordpress, 2018) <<https://aredeurbana.wordpress.com/2018/02/08/hierarquia-funcional-do-sistema-viario/-11/10>>. Acesso em: 25 Novembro 2018.
- (Imagem.google, 2018) Imagem.google. Disponível em: <http://imagem.google.com.br/CNT_EXT_169296.jpg>. Acesso em: 31 maio 2018.

- (Imagem.google, 2018) Imagem.google. Disponível em: <http://automacao162.blogspot.com/2016/08/geracao-transmissao-e-distribuicao-de_34.html>. Acesso em: 27 de Junho 2019.
- (Domingo Cardoso, 2004/2005) Domingo Cardoso, Teoria de Grafos e Aplicações, Tese de Mestrado, 2004/2005)
- (Alan Tucker, 1984) Alan Tucker, Applied Combinatorics, Second Edition, Wiley, 1984.
- (Monticelli, 2005) MONTICELLI, A. J. Fluxo de carga em redes de energia elétrica. Unicamp, 164 p..
- (Cybele T. M.V. et all, 2004) Cybele Tavares Maia Vinagre, et all. introdução a teoria espectral de grafos e aplicações. Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, 2004.
- (RICOBOM, 2008) RICOBOM, J. R. Notas de aulas da disciplina Subestações, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008
- (Richard Dorf and James Svoboda, 2003) Dorf, Richard and Svoboda, James, Introdução aos Circuitos Elétrico, pag. 63, Rio de Janeiro, 2003