UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TÍTULO | SEMIGRUPOS NUMÉRICOS – NÚMERO DE FROBENIUS

Nome do Mestrando | Ilvécio Fernandes Ramos

Orientação | Professor Doutor Manuel Baptista Branco

Mestrado em Matemática e Aplicações
Área de Especialização | Matemática e Aplicações
Dissertação

Évora, 2019

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TÍTULO | SEMIGRUPOS NUMÉRICOS – NÚMERO DE FROBENIUS

Nome do Mestrando | Ilvécio Fernandes Ramos

Orientação | Professor Doutor Manuel Baptista Branco

Mestrado em Matemática e Aplicações
Área de Especialização | Matemática e Aplicações
Dissertação

Évora, 2019

Júri

Orientador: Manuel Branco, Universidade de Évora, Departamento de Matemática

Arguente: Carlos Ramos, Universidade de Évora, Departamento de Matemática

Presidente : Dulce Gomes, Universidade de Évora, Departamento de Matemática

mai-19

Resumo

O problema de Frobenius consiste em encontrar uma fórmula, em termos dos elementos de um sistema minimal de geradores de um semigrupo numérico, para calcular o número de Frobenius e o género. Neste trabalho apresentaremos algumas classes de semigrupos numéricos para o qual este problema foi resolvido. Damos fórmulas para o número Frobenius, tipo e o género para MED-semigrupos, semigrupos numéricos de Mersenne, semigrupos numéricos de Thabit, semigrupos numéricos de Repunit e semigrupos numéricos com multiplicidade igual a quatro.

Palavras-chave: Semigrupos numéricos, número de Frobenius, género e tipo.

Numerical semigroup - Frobenius number

ABSTRACT

The Frobenius coin problem consists in finding a formula, in terms of the elements in a minimal system of generators of S, for computing the Frobenius number and the genus. In this work we will present some classes of numerical semigroups for which this problem is solved. We give formulas for the Frobenius number, type and the genus for MED-semigroups, Mersenne numerical semigroups, Thabit numerical semigroups, Repunit numerical semigroups and numerical semigroups with multiplicity four.

Agradecimentos

Para que esse trabalho tivesse lugar começo por agradecer a Deus por me ter concedido a vida e por trilhar o meu trajecto profissional e académico nesta área científica. A seguir agradeço ao meu orientador Professor Manuel Branco pela sua incessante dedicação durante a elaboração deste trabalho. Os meus agradecimentos são extensivos às duas mulheres da minha vida. Primeiro à minha mãe Josefa Octávia Fernandes Lopes por ter sido a pessoa que sempre me acompanhou durante todo o meu percurso escolar e depois à minha querida esposa Akaiza da Conceição Costa Ramos pelas palavras de encorrajamento e pela compreensão durante os dias que tive de estar ausente por causa deste trabalho.

Conteúdo

1. Introdução

Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto de números inteiros relativos e $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros não negativos. Um semigrupo numérico é um subconjunto S de $\mathbb{N}$, fechado para adição, contém 0 e o seu complementar é finito em $\mathbb{N}$. O problema de Frobenius (muitas vezes conhecido por problema da moeda de Frobenius em homenagem a Ferdinand Frobenius) consiste em encontrar a maior quantidade de dinheiro que se pode obter utilizando só moedas com denominações específicas.

Se $a_1, \ldots, a_n$ são inteiros positivos com $p \geq 2$ e $\operatorname{mdc}\{a_1, \ldots, a_p\} = 1$ então o cojunto

$$\langle a_1, \ldots, a_p \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p \mid \lambda_i \in \mathbb{N}, i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

é um semigrupo numérico. Além disto qualquer semigrupo numérico pode ser escrito desta forma. Portanto o estudo dos semigrupos numéricos pode ser visto como o estudo das soluções inteiras não negativas duma equação linear não homogénea com coeficientes inteiros positivos. De facto trata-se de um problema clássico amplamente tratado na literatura (ver por exemplo [2]).

A partir da segunda metade do século passado o estudo dos semigrupos numéricos foi essencialmente motivado pelas suas aplicações na Geometria Algébrica. Seguindo esta linha clássica, dois invariantes têm especial relevância: o maior inteiro não pertencente a S (respectivamente o cardinal de $\mathbb{N}\backslash S$) é chamado número de Frobenius (respectivamente, género de S), é denotado por $\mathrm{F}(S)$ (respectivamente, $\mathrm{g}(S)$). Frobenius propôs nas suas palestras os seguintes problemas. Dados $a_1, \ldots, a_p$ inteiros positivos com mdc $\{a_1, \ldots, a_p\}$ encontrar uma fórmula para obter $\mathrm{F}(S)$ e $\mathrm{g}(S)$ em termos dos inteiros dados anteriormente. Este problema foi resolvido por Sylvester para semigrupos com $p = 2$ e encontras-se em aberto para $p \geq 3$. O nosso objectivo neste trabalho é encontrar fórmulas para resolver este problema para algumas classes de semigrupos numéricos: MED-semigrupos, semigrupos numéricos de Mersenne, semigrupos numéiricos de Thabit, semigrupos numéricos de Repunit e semigrupos numéricos gerados por $\{4 < a_2 < a_3\}$ (ver em [12], [11], [13], [14], e [15])).

Dizemos que um semigrupo numérico tem dimensão de imersão maximal (MED-semigroup) se $a_1 = p$, isto é, tem um número máximo de geradores.

Um inteiro positivo x é um número de Mersenne se $x = 2^n - 1$ para algum $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Estes números são assim nomeados em homenagem a Marin Mersenne, um padre francês, que os estudou no início do século XVII. Estes números têm sido estudados pelas suas propriedades notáveis de a cada primo de Mersenne corresponde exatamente um número perfeito. Além disso, é muito mais fácil testar se um dado número de Mersenne é primo do que fazer o mesmo teste a outro qualquer número arbitrário do mesmo tamanho.

Dizemos que o semigrupo numérico S é um semigrupo numérico de Mersenne se existe $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tal que $S = \langle\{2^{n+i} - 1 \mid i \in \mathbb{N}\}\rangle$. Esta classe de semigrupos numéricos será denotada por $S(n) = \langle\{2^{n+i} - 1 \mid i \in \mathbb{N}\}\rangle$.

Dois números m e n são chamados de números amigáveis se a soma dos seus divisores próprios (os divisores excluindo o próprio número) de um número é igual ao outro. A título de exemplo, pense no número 220. Se dividido por 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110, o resultado é um número inteiro. Por isso, estes números chamam-se divisores de 220. Se os somarmos todos obtemos 284. Acontece que a soma dos divisores de 284, que são 1, 2, 4, 71 e 142, é 220. E é por causa desta coincidência que o 220 e o 284 se chamam números amigáveis. Um inteiro positivo x é um número de Thabit se $x = 3.2^n - 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$ (assim chamado em homenagem ao matemático, médico, astrônomo e tradutor Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani 826-901). Estes números expressos em representação binária têm $n + 2$ dígitos de comprimento, começa por "10"seguido de n 1's, isto é, $1011\ldots1$. Thabit ibn Qurra foi o primeiro a estudar estes números bem como a sua relação com os números amigáveis (ver [5]). Ele descobriu e provou que se $p = 3.2^n - 1$, $q = 3.2^{n-1} - 1$ e $r = 9.2^{n-1} - 1$ são números primos, então $M = 2^n pq$ e $N = 2^n r$ são um par de números amigáveis.

Dizemos que S é um semigrupo numérico de Thabit se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S = \langle\{3.2^{n+i} - 1 \mid i \in \mathbb{N}\}\rangle$. Esta classe de semigrupos numéricos será denotada por $T(n) = \langle\{3.2^{n+i} - 1 \mid i \in \mathbb{N}\}\rangle$.

Na teoria dos números, um repunit é um número que consiste de cópias do único dígito 1. Os números $1, 11, 111$ ou 1111, etc., são exemplos de repunits. O termo significa uma unidade repetida e foi cunhado por Albert H. Beiler em (ver [3]). Um semigrupo numérico S é um semigrupo numérico repunit se existirem inteiros $b \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ e

$n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tal que $S = \left\langle \left\{ \frac{b^{n+i}-1}{b-1} \mid i \in \mathbb{N} \right\} \right\rangle$. Esta classe de semigrupos numéricos será denotada por $S(b,n) = \left\langle \left\{ \frac{b^{n+i}-1}{b-1} \mid i \in \mathbb{N} \right\} \right\rangle$. Observar que todos os dígitos dos números de Mersenne na base-2 são iguais a 1 e portanto são números de repunit.

A finalizar estudamos os semigrupos numéricos gerados por $\{4 < a_2 < a_3\}$ em que estes elementos são relativamente primos. Se S é gerado por $\{a_1, a_2, a_3\}$ e $d = mdc\{a_1, a_2\}$, então como consequencia de [6] e [9], temos que $\mathrm{F}(S) = d.\mathrm{F}\left(\left\langle \frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, a_3 \right\rangle\right) + (d-1)\,a_3$ e $\mathrm{g}(S) = d.\mathrm{g}\left(\left\langle \frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, a_3 \right\rangle\right) + \frac{1}{2}\,(d-1)\,(a_3-1)$.

Por isso, para resolver o problema de Frobenius dos semigrupos numéricos gerados por $\{4 < a_2 < a_3\}$, focamos o nosso estudo no caso em que os geradores são relativamente primos.

2. Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas noções e defições básicas sobre semigrupos numéricos, que vão ser necessárias ao longo deste trabalho.

Seja $\mathbb{N}$ o conjunto de números inteiros não negativos. O semigrupo numérico é um submonóide de $\mathbb{N}$ por isso começamos por introduzir algumas definições sobre os mesmos.

Um semigrupo é um par $(S,+)$, em que S é um conjunto e $+$ é uma operação binária que é associativa em S. Um subsemigrupo T do semigrupo S é um subconjunto que é fechado para a operação binária considerada em S. Claramente, a intersecção dos subsemigrupos de um semigrupo S é ainda um subsemigrupo de S. Assim dado um subconjunto não vazio A de S, o menor subsemigrupo de S que contém A é a intersecção de todos os subsemigrupos de S que contém A. Denotamos este semigrupo por $\langle A\rangle$, e dizemos que é subsemigrupo gerado pelo conjunto A. Donde temos que

$$\langle A\rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{N},\ i \in \{1,\ldots,n\}\}.$$

Dizemos que S é gerado por $A \subseteq S$ se $S = \langle A\rangle$. Neste caso, A é um sistema de geradores de S. Se A for finito, então dizemos que S é finitamente gerado. Um semigrupo M é um monóide se tiver o elemento neutro, isto é, existe um elemento neutro em M, denotado por 0 tal que $0 + a = a$ para todo $a \in$ M (aqui estamos a assumir que o semigrupo é comutativo, e isto é válido para os monóides). O subconjunto N de M é um submonóide de M se é um subsemigrupo de

M e $0 \in \mathbb{N}$. Temos que se M é um monóide, então $\{0\}$ é um submonóide de M, chamado submonoide trivial de M. Como nos semigrupos, a intersecção dos submonóides de um monoide é também um monoide. O menor submonóide de M que contém um conjunto A é

$$\langle A \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{N}\ ,\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

diz-se submonóide de M gerado por A. Também como no caso dos semigrupos, o conjunto A é um sistema de geradores de M se $\langle A \rangle = M$, e diremos também que M é gerado por A. Além disso , dizemos que um monóide M é finitamente gerado se existe um sistema de geradores de M com um número finito de elementos. Note que $\langle \emptyset \rangle = \{0\} = \langle 0 \rangle$. Dados dois semigrupos X e Y a aplicação $f\colon X \to Y$ é um homomorfimo de semigrupo se $f(a+b) = f(a) + f(b)$ para todo $a, b \in X$. Dizemos que f é um monomorfirmo, um epimorfismo, ou um isomorfismo se é injectiva, sobrejectiva ou bijectiva respectivamente. Claramente, se f é um isomorfismo então a sua inversa é f^{-1}. Dois semigrupos X e Y são ditos isomorfos se existe um isomorfismo entre eles. Vamos denotá-los por $X \cong Y$. Uma aplicação $f\colon X \to Y$ com X e Y monóides é um homomorfismo de monoide se for um homomorfismo de semigrupo e $f(0) = 0$. Os conceitos de monomorfismo, epimorfismo e isomorfirmo do monóide estão definidos para semigrupos.

Se S é um semigrupo numérico e $S = \langle A \rangle$, tal que $S \neq \langle X \rangle$ para todo $X \subsetneq A$, então A é um sistema minimal de geradores de S. O cardinal de um sistema minimal de geradores de um semigrupo numérico S é conhecido como dimensão de imersão de S, denota-se por $\mathrm{e}(S)$. A multiplicidade é o menor inteiro positivo que pertence a S, denota-se por $\mathrm{m}(S)$.

Se S é um semigrupo numérico então $\mathbb{N} \backslash S$ tem-se um número finito de elementos. O conjunto formado por $\mathbb{N} \setminus S$ é chamado conjunto das lacunas de S e denota-se por $G(S)$. Por sua vez, o cardinal de $G(S)$ é chamado género de S (ou grau de singularidade de S), denota-se por $\mathrm{g}(S)$. O maior inteiro que não pertence a S é conhecido como o número de Frobenius de S, isto é, o menor inteiro tal que $x + n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$, denotado por $\mathrm{F}(S)$.

O seguinte resultado dá-nos outra forma de definir semigrupo numérico.

Lema 1. *Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$. Então $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico se e somente se mdc $(A) = 1$.*

Prova. Seja $d = mdc(A)$. Claramente, se s pertence a $\langle A \rangle$, então $d \mid s$. Como $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico, $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ é finito, então existe um inteiro positivo x tal que $d \mid x$ e $d \mid x + 1$. Assim tem-se que $d = 1$. Para provar a implicação contrária é suficiente mostrar que $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ é finito. Se $1 = mdc(A)$ então existem inteiros $z_1, \ldots, z_n$ e $a_1, \ldots, a_n \in A$ tais que $z_1 a_1 + \cdots + z_n a_n = 1$. Movendo estes termos com z_i negativo para o lado direito, podemos encontrar $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $z_{i1} a_{i1} + \cdots + z_{ik} a_{ik} = 1 - z_{j1} a_{j1} - \cdots - z_{jl} a_{jl}$. Consequentemente existe $s \in \langle A \rangle$ tal que $s + 1$ também pertence a $\langle A \rangle$. Provemos que se $n \geq (s-1)s + s - 1$, então $n \in \langle A \rangle$. Seja q e r inteiros tais que $n = qs + r$ com $0 \leq r < s$. De $n \geq (s-1)s + (s-1)$, deduzimos que $q \geq s - 1 > r$. De onde segue que $n = (rs + r) + (q - r)s = r(s+1) + (q-r)s \in \langle A \rangle$. $\square$

Trivialmente temos seguinte resultado.

Proposição 2. *Seja S um semigrupo numérico. Então:*

(1) $m(S) = min(S \setminus \{0\})$;

(2) $e(S) \leq m(S)$.

Notemos que $e(S) = 1$ se e somente se $S = \mathbb{N}$. Temos também que $S = \{0, m \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico com $e(S) = m = m(S)$.

O resultado seguinte diz-nos que os semigrupos numéricos classificam a menos de um isomorfismo os submonoides de $\mathbb{N}$.

Proposição 3. *Se M é um submonoide não trivial de $\mathbb{N}$, então M é isomorfo a um semigrupo numérico.*

Prova. Se $d = mdc(M)$, então temos pelo Lema 1 que $S = \left\langle\{\frac{m}{d} \mid m \in M\}\right\rangle$ é um semigrupo numérico. A aplicação $f : M \to S$, $f(m) = \frac{m}{d}$ é claramente um isomorfismo de monoides. $\square$

Seja S um semigrupo numérico. Escrevemos $S^* = S \setminus \{0\}$. Temos que o conjunto $S^* + S^*$ corresponde aos elementos de S que são soma de dois elementos não nulos em S.

Lema 4. *Seja S um submonoide de $\mathbb{N}$. Então $S^* \setminus (S^* + S^*)$, é um sistema se geradores de S. Além disso, todos os sistemas de geradores de S contém $S^* \setminus (S^* + S^*)$.*

Prova. Seja s um elemento de S^*. Se $s \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$, então existem $x, y \in S^*$ tal que $s = x + y$. Repetimos este procedimento para x e y, e depois de um número finito de passos $(s, y < s)$, encontramos

$s_1, ..., s_n \in S^* \setminus (S^* + S^*)$, tal que $s = s_1 + ... + s_n$. Isto prova que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é um sistema de geradores de S. Por outro lado, seja A um sistema de geradores de S. Suponhamos que $x \in S^* \setminus (S^* + S^*)$. Existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \lambda_1, ...\lambda_n \in \mathbb{N}$ e $a_1, ..., a_n \in A$ tal que $x = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n$. Assim $x \notin (S^* + S^*)$, deduzimos que $x = a_i$ para algum $i \in \{1, ..., n\}$. $\square$

Definição 5. [1] Seja S um semigrupo numérico e seja n um dos seus elementos não nulos. Chama-se conjunto Apéry de n em S ao conjunto $Ap(S, n) = \{s \in S \mid s - n \notin S\}$.

O conhecimento do conjunto $Ap(S, n)$ para algum $n \in S \setminus \{0\}$ dá-nos bastante informação acerca de um semigrupo numérico S. De facto, veremos que este conjunto dá-nos mais informação do que o conjunto de geradores de S.

Lema 6. *Seja S um semigrupo numérico e $n \in S \setminus \{0\}$. Então $Ap(S, n) = \{0 = w(0), w(1), ..., w(n-1)\}$, onde $w(i)$ é o menor elemento de S congruente com i módulo n para todo $i \in \{0, ..., n-1\}$.*

Prova. É suficiente mostrar que para todo $i \in (1, \ldots, n-1\}$, existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $i + kn \in S$. $\square$

Observemos que do resultado anterior concluimos que o cardinal do conjunto de $Ap(S, n)$ é igual a n.

Exemplo 7. Seja S um semigrupo numérico gerado por $\{4, 9, 11\}$. Então $S = \{0, 4, 8, 9, 11, 12, 13, 15 \rightarrow\}$ (o símbolo $\rightarrow$ significa que todo o inteiro maior do que 15 pertencem a S). Então $Ap(S, 4) = \{0, 9, 11, 18\}$ de onde temos que $0 = w(0), 9 = w(1), 11 = w(3)$ e $18 = w(2)$.

Temos que $\#Ap(S,4)$ é igual a 4.

Usando o Lema 4 facilmente deduzimos o seguinte resultado.

Lema 8. *Seja S um semigrupo numérico e $n \in S \setminus \{0\}$. Então para todo $s \in S$, existe um único $(k,w) \in \mathbb{N} \times Ap(S,n)$ tal que $s = kn + w$.*

Teorema 9. *Todo o semigrupo numérico tem um único sistema minimal de geradores. Além disso este sistema é finito.*

Prova. O Lema 4 afirma que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é um sistema minimal de geradores de S. Pelo Lema 6 temos que para qualquer $n \in S^*$, obtemos que $S = \langle Ap(S,n) \cup \{n\} \rangle$. Como $Ap(S,n) \cup n$ é finito, nós deduzimos que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é finito. □

Usando o Lema 1 temos o seguinte resultado.

Corolário 10. *Seja M um submonoide de $\mathbb{N}$. Então M tem um único sistema minimal de geradores que além disso é finito.*

Prova. Definimos $d = mdc(M)$. Então $T = \{\frac{x}{d} \mid x \in M\}$ é um submonoide de $\mathbb{N}$ tal que $mdc(T) = 1$. De acordo com o Lema 1, isto significa que T é um semigrupo numérico. Se A é o sistema minimal de geradores de T, então $\{da \mid a \in A\}$ é o sistema minimal de geradores de M. □

Seja S um semigrupo numérico. Dizemos que um inteiro x é um número pseudo-Frobenius se $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ e $x + s \in S$ para todo $s \in S \setminus \{0\}$. Denotaremos por $\mathrm{PF}(S)$ o conjunto dos números pseudo-Frobenius de S, e o seu cardinal é o tipo de S, denotado por $t(S)$ (ver [11]).

Seja S um semigrupo numérico, definimos em S a seguinte relação de ordem parcial:

$$a \leq_S b \;\text{ if }\; b - a \in S.$$

Em seguida temos a seguinte caracterização de $\mathrm{PF}(S)$ em termos dos elementos do conjunto Apéry de n em S.

Lema 11. *Seja S um semigrupo numérico e x um elemento não nulo de S. Então*

$$\mathrm{PF}(S) = \{w - x \mid w \in \max_{\leq_S} \mathrm{Ap}(S, x)\}.$$

Prova. Seja $k \in PF(S)$. Vamos assumir que $k \notin S$ e $k + x \in S$, isto é, $k + x \in Ap(S, x)$. Seja $w \in Ap(S, x)$ tal que $k + x \leq_s w$. Então $w - (k + x) = w - k - x \in S$ e isto significa que $w - x = k + s$ para algum $s \in S$. Como $w - x \notin$ e $k \in PF(S)$, pois força o s a ser zero e assim $w = x + k$. Tomemos agora $w \in \max_{\leq_S} \mathrm{Ap}(S, x)$. Então $w - x \notin S$. Se $w - x + s \notin S$ para algum elemento não nulo s de S, então $w + s \in Ap(S, x)$, contradizendo maximalidade de w. □

Exemplo 12. Seja S um semigrupo numérico gerado por $\{4, 9, 11\}$. Então $\max_{\leq_S} \mathrm{Ap}(S, x) = \{18, 11\}$, assim $\mathrm{PF}(S) = \{14, 7\}$.

Corolário 13. *Se S é um semigrupo numérico, então tem-se que* $\mathrm{t}(S) \leq \mathrm{m}(S)$.

Nenhuma fórmula é conhecida para calcular o número de Frobenius e o género de um semigrupo numérico S. No entanto se conhecermos o conjunto Apéry de n em S o seguinte resultado, introduzido por Selmer em [17], resolve-nos este problema.

Lema 14. *Seja S um semigrupo numérico e seja $x \in S\backslash\{0\}$. Então*

(1) $\mathrm{F}(S) = \max(\mathrm{Ap}(S,x)) - x$;

(2) $\mathrm{g}(S) = \frac{1}{x}\left(\sum_{w\in \mathrm{Ap}(S,x)} w\right) - \frac{x-1}{2}$.

Demonstração. Tem-se por definição dos elementos do conjunto Apéry que, $\max(\mathrm{Ap}(S,x)) - x \in S$. Se $x > \max(\mathrm{Ap}(S,x)) - x$, então $x+n > \max(\mathrm{Ap}(S,x))$ Seja $w \in Ap(S,\ x)$ tal que w e $x+n$ são congruentes módulo n Como $w < x+n$, isto implica que $n = w + kx$ para algum inteiro k, e consequentemente $n - x = w + (k-1)x$ pertence a S. Observemos que para todo o $w \in Ap(S,\ x)$, se w é congruente com i módulo x e $i \in \{0,\ ..., n-1\}$, então existe um inteiro não negativo k_i tal que $w = k_i + i$. Assim usando a notação do Lema 6, $Ap(S\ ,\ x) = \{0, w(1) = k_1n+1, w(2) = k_2x+2,\ ...\ ,\ w(n-1) = k_{n-1}x+n-1$. Um inteiro p é congruente com $w(i)$ módulo n pertencente a S se e somente se $w(i) \leq p$. Assim $g(S) = k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} = \frac{1}{n}((k_1x+1) + ... + (k_{n-1}x+n-1)) - \frac{x-1}{2} = \frac{1}{x}\sum_{w\in Ap(s,x)} w - \frac{x-1}{2}$ $\square$

3. Semigrupos de dimensão de imersão 2 e MED-semigrupos

Neste capítulo vamos fornecer fórmulas para os números de Frobenius e género de semigrupos tais que $\mathrm{e}(S) = 2$ e para Med- semigrupos.

Se S é um semigrupo numérico tal que $e(s) = 2$ e gerado por $\langle a, b\rangle$, então $Ap(S, a) = \{0, b, 2b, ..., (a-1)b\}$.

Proposição 15. *Se a e b são inteiros positivos com $mdc(a, b) = 1$ então:*

(1) $F(\langle a, b\rangle) = ab - aq - b$;

(2) $g(\langle a, b\rangle) = \frac{ab-a-b-1}{2}$

Dizemos que S é um semigrupo numérico com dimensão de imersão maximal (MED-semigroup) se $e(S) = m(S)$.

Proposição 16. *Seja S um semigrupo numérico minimalmente gerado por $\{n_0 < n_1 \cdots < n_{p-1}\}$. Então S é um MED-semigrupo se e somente se $Ap(S, n_0) = \{0, n_1, \ldots, n_{p-1}\}$.*

Como consequência do resultado anterior temos o seguinte.

Corolário 17. *Seja S um MED-semigrupo minimalmente gerado por $\{n_0 < n_1 < \cdots < n_{p-1}\}$. Então*

(1) $\mathrm{F}(S) = n_{p-1} - n_0$;

(2) $\mathrm{g}(S) = \frac{1}{n_0}\left(\sum_{i=1}^{p-1} n_i\right) - \frac{n_0-1}{2}$;

(3) $\mathrm{t}(S) = n_0 - 1$.

4. Semigrupos numéricos de Mersenne

Um inteiro positivo x é um número de Mersenne se $x = 2^n - 1$ para algum $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Estes números são assim nomeados em homenagem a Marin Mersenne, um padre francês, que os estudou no início do século XVII. Estes números têm sido estudados pelas suas as propriedades notáveis de a cada primo de Mersenne corresponde exactamente um número perfeito. Além disso, é muito mais fácil testar se um dado número de Mersenne é primo do que fazer o mesmo teste a outro qualquer número arbitrário do mesmo tamanho.

Definição 18. Dizemos que um semigrupo numérico S é um semigrupo numérico de Mersenne se existe $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tal que $S = \langle\{2^{n+i} - 1 \mid i \in \mathbb{N}\}\rangle$ e será denotado por $S(n)$.

Uma sucessão $(a_1, \ldots, a_k)$ é k-upla residual se satisfaz as seguintes condições:

(1) para todos $i \in \{1, \ldots, k\}$ temos que $a_i \in \{0, 1, 2\}$;

(2) se $i \in \{2, \ldots, k\}$ e $a_i = 2$ então $a_1 = \cdots = a_{i-1} = 0$.

Teorema 19. *Seja n um inteiro maior ou igual a dois e seja $S(n)$ um semigrupo numérico de Mersenne minimalmente gerado por $\{2^n - 1, 2^{n+1} - 1, \ldots, 2^{2n-1} - 1\}$. Então* $\mathrm{Ap}\,(S(n), s_0) = \Big\{a_1(2^{n+1} - 1) + \cdots + a_{n-1}(2^{2n-1} - 1) \mid (a_1, \ldots, a_{n-1})$ *é um* $(n-1)-\text{upla residual}\Big\}$.

Agora como consequências do Lema 14 e do Teorema 19 temos o seguinte.

Corolário 20. *Seja n um inteiro maior ou igual a dois e seja $S(n)$ um semigrupo numérico de Mersenne associado a n. Então* $\mathrm{F}\left(S(n)\right) = 2^{2n} - 2^n - 1$.

Corolário 21. *Seja n um inteiro maior ou igual a dois e seja $S(n)$ um semigrupo numérico de Mersenne associado a n. Então* $\mathrm{t}\left(S(n)\right) = n - 1$. *Além disso*

$$\mathrm{PF}\left(S(n)\right) = \left\{\mathrm{F}\left(S(n)\right), \mathrm{F}\left(S(n)\right) - 1, \ldots, \mathrm{F}\left(S(n)\right) - (n-2)\right\}.$$

Corolário 22. *Seja n um inteiro positivo e seja $S(n)$ um semigrupo numérico de Mersenne associado a n. Então* $\mathrm{g}\left(S(n)\right) = 2^{n-1}\left(2^n + n - 3\right)$.

4.1. **A dimensão de imersão.** Seja n um inteiro positivo. Vamos começar esta secção provando que $S(n)$ é um semigrupo numérico verificando $2s+1 \in S\left(n\right)$ para todo $s \in S(n)\backslash\{0\}$.

Lema 23. *Seja A um subconjunto dos inteiro não negativo tal que $M = \langle A \rangle$. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) $2a + 1 \in M$ *para todo* $a \in A$*;*
(2) $2m + 1 \in M$ *para todo* $m \in M\backslash\{0\}$.

Prova. 1) $\rightarrow$ 2). Se $m \in M\backslash\{0\}$, então existe $a_1, \ldots, a_k \in A$ tal que $m = a_1 + \cdots + a_k$. Se $k = 1$ então $m = a_1$ e portanto $2m+1 = 2a_1+1 \in M$. Se $k \geq 2$ então $2m + 1 = 2(a_1 + \cdots + a_{k-1}) + 2a_k + 1 \in M$, porque M é fechado para adição.

2) $\rightarrow$ 1). Trivial. $\square$

Proposição 24. *Se n é um inteiro positivo então $S(n)$ é um semigrupo numérico. Além disso, $2s+1 \in S(n)$ para todo $s \in S(n)\backslash\{0\}$.*

Prova. Claramente, $S(1) = \mathbb{N}$ é um semigrupo numérico e para todo $s \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ temos que $2s+1 \in \mathbb{N}$. Suponhemos agora $n \geq 2$ e vamos mostrar que $S(n)$ é um semigrupo numérico. Desde que $S(n)$ seja um monoide de $(\mathbb{N}, +)$ é suficiente provar que $\mathbb{N}\backslash S$ é finito, isto é equivalente a $mdc\,(S(n)) = 1$. Desde que $2^n - 1$ e $2^{n+1} - 1 \in S(n)$, obtemos que $mdc\,\{2^n - 1, 2^{n+1} - 1\} = mdc\,\{2^n - 1, 2\,(2^n - 1) + 1\} = 1$.

Temos que $S(n) = \langle\{2^{n+i} - 1 \mid i \in \mathbb{N}\}\rangle$. Se $i \in \mathbb{N}$ então $2(2^{n+i} - 1) + 1 = 2^{n+i+1} - 1 \in S(n)$. Pelo Lema 1, concluimos que $2s+1 \in S(n)$ para todo $s \in S(n)\backslash\{0\}$. $\square$

O nosso próximo objectivo é fornecer um sistema minimal de geradores para o semigrupo numérico de Mersenne.

Lema 25. *Seja n um inteiro positivo e seja $S = \langle\{2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}\rangle$. Então $2s+1 \in S$ para todo $s \in S\backslash\{0\}$.*

Prova. Se $n = 1$ então $S = \mathbb{N}$ e o resultado é verdade. Suponha agora que $n \geq 2$. Se $i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, então $2(2^{n+i} - 1) + 1 = 2^{n+i+1} - 1 \in S$. Por outro lado, $2(2^{2n-1} - 1) + 1 = 2^{2n} - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1) \in S$. Aplicando o Lema 1, obtemos que $2s+1 \in S$ para todo $s \in S\backslash\{0\}$. $\square$

Antes de apresentarmos os próximos resultados, notemos que se X e Y são conjuntos de números inteiros não vazios tais que $Y \subseteq X$ e $X \subseteq \langle Y\rangle$, então obtemos que $\langle X\rangle = \langle Y\rangle$

Proposição 26. *Se n é um inteiro positivo, então* $S(n) = \langle\{2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}\rangle$.

Prova. Seja $S = \langle\{2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}\rangle$. Pela nota precedente, é suficiente mostrar que $2^{n+i} - 1 \in S$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Usamos indução em i. Para $i = 0$ o resultado é trivial. Assumamos que a proposição é verdadeira para i e vamos mostrar para $i + 1$. Assim $2^{n+i+1} - 1 = 2\,(2^{n+i} - 1) + 1$ assim pela hipótese de indução e pelo Lema 4 nós temos que $2^{n+i+1} - 1 \in S$. $\square$

A proposição acima diz-nos que $\{2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$ é um sistema de geradores de $S(n)$. O próximo resultado é fundamental para mostrar que esse conjunto é o sistema minimal de geradores de $S(n)$.

Lema 27. *Seja n um inteiro maior ou igual a dois. Então* $2^{2n-1} - 1 \notin \langle\{2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}\}\rangle$.

Prova. Assumamos pelo contrário que existe $a_o, \ldots, a_{n-2} \in \mathbb{N}$ tal que $2^{2n-1} - 1 = a_o(2^n - 1) + \cdots + a_{n-2}(2^{2n-2} - 1)$. Então $2^{2n-1} - 1 = a_o 2^n + \cdots + a_{n-2} 2^{2n-2} - (a_o + \cdots + a_{n-2})$ e consequentemente $(a_o + \cdots + a_{n-2}) \equiv 1(\text{mod } 2^n)$. Com isso, temos que $(a_o + \cdots + a_{n-2}) = 1 + 2^n k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Se $k = 0$ então $a_o + \cdots + a_{n-2} = 1$ e assim existe $i \in \{0, 1, \ldots n-2\}$ tal que $a_i = 1$ e $a_j = 0$ para todo $j \in \{0, 1, \ldots, n-2\} \setminus \{i\}$. Assim deduzimos que $2^{2n-1} - 1 = 2^{n+i} - 1$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots n-2\}$, o que é absurdo . Se $k \neq 0$ então $a_o + \cdots + a_{n-2} \geq 1 + 2^n$. Isto implica que $a_o(2^n - 1) + \cdots + a_{n-2}(2^{2n-2} - 1) \geq$

$(a_o + \cdots + a_{n-2})(2^n - 1) \geq (1 + 2^n)(2^n - 1) = 2^{2n} - 1 > 2^{2n-1} - 1$, o que é absurdo. $\square$

Podemos agora enunciar os resultados sobre o sistema minimal de geradores de $S(n)$ anunciado acima .

Teorema 28. *Seja n um inteiro positivo e seja $S(n)$ o semigrupo numérico de Mersenne associado a n, então $e(S(n)) = n$. Além disso $\{2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$ é o sistema minimal de geradores de $S(n)$.*

Prova. Para $n = 1$, o resultado segue trivialmente. Assim, suponhemos que $n \geq 2$. Usando a Proposição 2 temos que $\{2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$ é um sistema de geradores de $S(n)$. Se não for minimal então existe $h \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $2^{n+h} - 1 \in \langle\{2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \ldots, h-1\}\}\rangle$. Seja $S = \langle\{2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \ldots, h-1\}\}\rangle$. Se $i \in \{0, 1, \ldots, h-2\}$ então $2(2^{n+i} - 1) + 1 = 2^{n+i+1} - 1 \in S$. Além disso $2\left(2^{n+h-1} - 1\right) + 1 = 2^{n+h} - 1 \in S$. Aplicando o Lema 23 obtemos que $2s + 1 \in S$ para todo $s \in S \backslash \{0\}$. Agora vamos usar a indução em i para provar que $2^{n+i} - 1 \in S$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Para $i = 0$ o resultado é válido. Assumamos que o resultado se verifica para i e provemos para $i + 1$. Assim $2^{n+i+1} - 1 = 2(2^{n+i} - 1) + 1$ aplicando a hipótese de indição e $2s + 1 \in S$ para todo $s \in S \backslash \{0\}$, obtemos que $2^{n+i+1} - 1 \in S$. Consequentemente $2^{2n-1} - 1 \in S$, o que contradiz o Lema 27. $\square$

Observemos que, como consequência dos resultados nessa secção nós obtemos que para todo o inteiro positivo n existe um único semigrupo numérico de Mersenne $S(n)$ com a dimensão de imersão n. De facto, $S(4) = \langle\{2^4-1, 2^5-1, 2^6-1, 2^7-1\}\rangle = \langle\{15, 31, 63, 127\}\rangle$ é o único semigrupo numérico de Mersenne com a dimensão de imersão igual a 4.

4.2. **O conjunto Apéry.** O nosso objectivo nesta secção é de descrever o conjunto $\mathrm{Ap}(S(n), 2^n-1)$, em seguida nós vamos denotar por s_i os elementos $2^{n+i}-1$, para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Sendo assim, com esta notação, nós temos que $\{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ é o sistema minimal de geradores de $S(n)$. É facil de deduzir as seguintes igualdades.

Lema 29. *Seja n um inteiro maior ou igual a dois. Então:*

(1) *se $0 < i \le j < n-1$ então $s_i + 2s_j = 2s_{i-1} + s_{j+1}$;*
(2) *se $0 < i \le n-1$ então $s_i + 2s_{n-1} = 2s_{i-1} + (2^n+1)\, s_0$.*

Dizemos que uma sequência $(a_1, \dots, a_k)$ é um k-upla residual se satisfizer as seguintes condições:

(1) para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ temos que $a_i \in \{0, 1, 2\}$;
(2) se $i \in \{2, \dots, k\}$ e $a_i = 2$ então $a_1 = \cdots = a_{i-1} = 0$.

Lema 30. *Seja n um inteiro maior ou igual a dois. Se $x \in \mathrm{Ap}\,(S(n), s_0)$ então existe um $(n-1)$-upla residual $(a_1, \dots, a_{n-1})$ tal que $x = a_1 s_1 + \cdots + a_{n-1} s_{n-1}$.*

Prova. Vamos provar este Lema usando o princípio de indução em x. O resultado fica claro para $x = 0$. Suponhamos que $x > 0$ e seja $j = \min\{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid x - s_i \in S(n)\}$. Observemos que $j \neq 0$

porque $x \in \operatorname{Ap}(S(n), s_0)$. Por hipótese de indução existe um $(n-1)$-upla residual $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ tal que $x - s_j = a_1 s_1 + \cdots + a_{n-1} s_{n-1}$. Consequentemente $x = a_1 s_1 + \cdots + (a_j + 1) s_j + \cdots + a_{n-1} s_{n-1}$. Para concluir a prova nós só precisamos mostrar que $(a_1, \ldots, a_j + 1, \ldots, a_{n-1})$ é um $(n-1)$-upla residual. Se $a_j + 1 = 3$ então, aplicando o Lema 29, percebemos que $(a_j + 1) s_j = 3 s_j = 2 s_{j-1} + s_{j+1}$ no caso $j < n-1$ ou $(a_j + 1) s_j = 3 s_j = 2 s_{j-1} + (2^n + 1) s_0$ no caso $j = n - 1$. Em ambos os casos isto leva a $x - s_{j-1} \in S(n)$, cantradizendo a minimalidade de j. Se existir $k > j$ tal que $a_k = 2$ então, usando novamente o Lema 29, ebtemos $s_j + 2 s_k = 2 s_{j-1} + s_{k+1}$ no caso $k < n-1$ ou $s_j + 2 s_k = 2 s_{j-1} + (2^n + 1) s_0$ no caso $k = n-1$. Em ambos os casos obtemos mais uma vez que $x - s_{j-1} \in S(n)$ contradizendo a minimalidade de j. Agora pela minimalidade de j temos que $a_1 = \cdots = a_{j-1} = 0$ e consequentemente $(a_1, \ldots, a_j + 1, \ldots a_{n-1})$ é um $(n-1)$-upla residual. $\square$

Notemos que se h é um inteiro positivo, então a sequência dos números $2^n, 2^{n+1}, \ldots, 2^{n+h}$ é uma progressão geométrica com razão igual a 2 e a soma dos seus termos é $2^n + 2^{n+1} + \cdots + 2^{n+h}$ que é igual a $2^{n+h+1} - 2^n$.

Teorema 31. *Seja n um inteiro maior ou igual a dois e seja $S(n)$ um semigrupo numérico de Mersenne minimalmente gerado por $\{s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\}$. Então* $\operatorname{Ap}(S(n), s_0) = \{a_1 s_1 + \cdots + a_{n-1} s_{n-1} \mid (a_1, \ldots, a_{n-1})$ *é um* $(n-1) -$ upla residual.$\}$

Prova. Denotemos por R o conjuntos de todas as $(n-1)$-uplas residuais. Está claro que $R = \{0,1\}^{n-1} \cup \{(a_1,\ldots,a_{n-1}) \in R \mid a_1 = 2\} \cup \cdots \cup \{(a_1,\ldots,a_{n-1}) \in R \mid a_{n-1} = 2\}$. Observemos que R é a união disjunta desses conjuntos, consequentemente o cardinal de R é igual a $2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^0 = 2^n - 1 = s_0$.

Sabemos que

$$\mathrm{Ap}\,(S(n), s_0) \subseteq \{a_1s_1 + \cdots + a_{n-1}s_{n-1} \mid (a_1,\ldots,a_{n-1}) \in R\}.$$

Por outro lado, pelo parágrafo anterior, obtivemos que o cardinal do conjunto $\{a_1s_1 + \cdots + a_{n-1}s_{n-1} \mid (a_1,\ldots,a_{n-1}) \in R\}$ é menor ou igual a s_0. Já tinhamos visto que o cardinal de $\mathrm{Ap}\,(S(n), s_0)$ é exactamente s_0, e consequentemente $\mathrm{Ap}\,(S(n), s_0) = \{a_1s_1 + \cdots + a_{n-1}s_{n-1} \mid (a_1,\ldots,a_{n-1}) \in R\}$. $\square$

Como consequência imediata da prova do Teorema anterior temos o seguinte resultado.

Corolário 32. *Seja n um inteiro maior ou igual a dois e sejam $(a_1,\ldots,a_{n-1})$ e $(b_1,\ldots,b_{n-1})$ dois distintos $(n-1)$-uplas residuais. Então nós temos que $a_1s_1 + \cdots + a_{n-1}s_{n-1} \neq b_1s_1 + \cdots + b_{n-1}s_{n-1}$*

Vamos ilustrar o Teorema anterior com um exemplo.

Exemplo 33. Vamos calcular $\mathrm{Ap}\,(S(4), s_0)$. Temos que $s_0 = 15$ e $S(4) = \langle\{15, 31, 63, 127\}\rangle$. As 3-uplas residuais são $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,1)$, $(2,0,0)$, $(2,1,0)$, $(2,0,1)$, $(2,1,1)$, $(0,2,0)$, $(0,2,1)$ e $(0,0,2)$. Desde que $s_1 = 31$

$s_2 = 63$ e $s_3 = 127$, pelo Teorema 19, obtemos que $\mathrm{Ap}\,(S(4), s_0) = \{0, 63, 127, 190, 31, 94, 158, 221, 62, 125, 189, 252, 126, 253, 254\}$.

Vamos terminar esta secção dando um procedimento para ver se um inteiro positivo pertence ou não a $S(4)$. Lembremos que S é um semigrupo numérico, $x \in S\backslash\{0\}$ então $\mathrm{Ap}(S, x) = \{w(0) = 0, w(1), \ldots, w(x-1)\}$ onde $w(i)$ é o menor elemento de S que é congruente com i módulo n. Então podemos concluir que um inteiro z pertence a S se e somente se $z \geq w(z \bmod x)$ (onde $z \bmod x$ denota o resto da divisão de z por x).

Como vimos no exemplo anterior

$\mathrm{Ap}\,(S(4), s_0) = \{w(0) = 0, w(1) = 31, w(2) = 62, w(3) = 63, w(4) = 94,$ $w(5) = 125, w(6) = 126, w(7) = 127, W(8) = 158, w(9) = 189, w(10) = 190,$ $w(11) = 221, w(12) = 252, w(13) = 253, w(14) = 254\}$.

A partir daí, facilmente segue que $172 \in S(4)$ e $222 \notin S(4)$, porque $172 \geq w(172 \bmod 15) = w(7) = 127$ e $222 < w(222 \bmod 15) = w(12) = 252$.

Teorema 34. *Seja n um inteiro maior ou igual a dois e seja $S(n)$ um semigrupo numérico de Mersenne associado a n. Então* $\mathrm{F}\,(S(n)) = 2^{2n} - 2^n - 1$.

Prova. Aplicando o Teorema 19, o Lema 14 e a Proposição 15, Deduzimos que $\max\,(\mathrm{Ap}\,(S(n), s_0)) = 2s_{n-1}$. Usando agora o Lema 14, obtemos que $\mathrm{F}\,(S(n)) = 2s_{n-1} - s_0 = 2\,(2^{2n-1} - 1)) - (2^n - 1) = 2^{2n} - 2^n - 1$. $\square$

O nosso próximo objectivo é determinar o conjunto de todos os números pseudo-Frobenius e o tipo de $S(n)$. O seguinte resultado fornece uma fórmula para os números pseudo-Frobenius em função do conjunto Apéry.

Teorema 35. *Seja n um inteiro maior ou igual a dois e seja $S(n)$ o semigrupo numérico de Mersenne associado a n. Então $\mathrm{t}\,(S(n)) = n-1$. Além disso*

$$\mathrm{PF}\,(S(n)) = \{\mathrm{F}\,(S(n))\,, \mathrm{F}\,(S(n)) - 1, \ldots, \mathrm{F}\,(S(n)) - (n-2)\}\,.$$

Prova. Pelo Teorema 19 e o Lema 11, deduzimos que $\max_{\leq_{S(n)}} \mathrm{Ap}\,(S(n), s_0) \subseteq \{2s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}, 2s_2 + s_3 + \cdots + s_{n-1}, \ldots, 2s_{n-1}\}$. Usando o Lema 14, temos que os elementos nesse conjunto são inteiros positivos consecutivos e assim a diferença entre qualquer par destes números é menor ou igual a $n-2$. Desde que $2^n - 1$ seja menor inteiro positivo em $S(n)$ e $2^n - 1 > n - 2$ então concluimos que a diferença entre dois quaisquer elementos distintos de $\{2s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}, 2s_2 + s_3 + \cdots + s_{n-1}, \ldots, 2s_{n-1}\}$ não está em $S(n)$. Consequentemente $\max_{\leq_{S(n)}} \mathrm{Ap}\,(S(n), s_0) = \{2s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}, 2s_2 + s_3 + \cdots + s_{n-1}, \ldots, 2s_{n-1}\}$.
Temos que $\mathrm{F}\,(S(n)) = 2s_{n-1} - s_0$. Do Lema 25, Obtemos que $\max_{\leq_{S(n)}} \mathrm{Ap}\,(S(n), s_0) = \{\mathrm{F}\,(S(n)) + s_0, \mathrm{F}\,(S(n)) + s_0 - 1, \ldots, \mathrm{F}\,(S(n)) + s_0 - (n-2)\}$.
Finalmente, pelo Lema 27, obtemos $\mathrm{PF}\,(S(n)) = \{\mathrm{F}\,(S(n))\,, \mathrm{F}\,(S(n)) - 1, \ldots, \mathrm{F}\,(S(n)) - (n-2)\}$. $\square$

Observemos que o Teorema anterior não é válido para $n = 1$, desde que $S(1) = \mathbb{N}$, $\mathrm{PF}\,(S(1)) = \{-1\}$ e consequentemente $\mathrm{t}\,(S(1)) = 1$.

O próximo resultado fornece uma fórmula para obtermos o género do semigrupo numérico de Mersenne $S(n)$.

Teorema 36. *Seja n um inteiro positivo e seja $S(n)$ um semigrupo numérico de Mersenne associado a n. Então $\mathrm{g}\,(S(n)) = 2^{n-1}\,(2^n + n - 3)$.*

Prova. Para $n = 1$ o resultado é trivial. Suponha que $n \geq 2$ e seja R o conjunto de todas as $(n-1)$-uplas residuais. Aplicando o Lema 14, o Teorema 19 e o Corolário 13 temos que

$$\mathrm{g}\,(S(n)) = \frac{1}{s_0}\left(\sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R} a_1 s_1 + \cdots + a_{n-1}s_{n-1}\right) - \frac{s_0 - 1}{2}.$$

É claro que

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R} a_1 s_1 + \cdots + a_{n-1}s_{n-1} = \sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R,\ a_1=1} s_1 +$$

$$+ \sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R,\ a_1=2} 2s_1 + \cdots + \sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R,\ a_{n-1}=1} s_{n-1} + \sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R,\ a_{n-1}=2} 2s_{n-1}.$$

Seja $i \in \{1, \cdots, n-1\}$. Podemos provar o seguinte:

- o cardinal de $\{(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in R \mid a_i = 2\}$ é 2^{n-1-i};
- o cardinal de $\{(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in R \mid a_i = 1 \text{ e } 2 \notin \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}\}$ is 2^{n-2};
- se $1 \leq j < i$ então o cardinal de $\{(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in R \mid a_i = 1 \text{ e } a_j = 2\}$ is 2^{n-j-2}.

De onde deduzimos que

$$\sum_{(a_1,\dots,a_{n-1})\in R} a_1 s_1+\dots+a_{n-1}s_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(2^{n-2}+2^{n-3}+\dots+2^{n-1-i}\right)s_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}2^{n-1-i}2s_i = \sum_{i=1}^{n-1}\left(2^{n-1}-2^{n-1-i}\right)s_i+\sum_{i=1}^{n-1}2^{n-i}s_i =$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(2^{n-1}-2^{n-1-i}+2^{n-i}\right)s_i = \sum_{i=1}^{n-1}\left(2^{n-1}+2^{n-1-i}\right)s_i =$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(2^{n-1}+2^{n-1-i}\right)\left(2^{n+i}-1\right) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(2^{2n+i-1}+2^{2n-1}-2^{n-1}-2^{n-1-i}\right) =$$

$$=2^{3n-1}-2^{2n}+(n-1)\,2^{2n-1}-(n-1)\,2^{n-1}-\left(2^{n-1}-1\right) =$$

$$=2^{3n-1}-2^{2n}+(n-1)2^{2n-1}-n2^{n-1}+1 =$$

$$=\left(2^n-1\right)\left(2^{2n-1}-2^n+n2^{n-1}-1\right).$$

Consequentemente, obtemos que

$$\mathrm{g}\left(S(n)\right) = 2^{2n-1}-2^n+n2^{n-1}-1-\frac{2^n-2}{2} = 2^{2n-1}-2^n+(n-1)\,2^{n-1} =$$

$$=2^{n-1}\left(2^n+n-3\right).$$

□

Concluimos esta secção dando um exemplo que ilustra o resultado anterior.

Exemplo 37. Vamos calcular o número de Frobenius, o tipo e o género do semigrupo numérico de Mersenne $S(4)$. Pelo Lema 14 obtemos que $\mathrm{F}\left(S(4)\right) = 2^8-2^4-1 = 239$. Usando o Teorema 19 obtemos que

$\mathrm{t}\,(S(4)) = 3$ e $\mathrm{PF}\,(S(4)) = \{239, 238, 237\}$. Finalmente, aplicando agora o Corolário 17 temos que $\mathrm{g}\,(S(4)) = 2^3\,(2^4 + 4 - 3) = 136$.

5. Semigrupos numéricos de Thabit

Dois números m e n são chamados números amigáveis se a soma dos divisores próprios (todos os divisores excluindo o próprio números) de um número for igual ao outro e vice versa. Um inteiro positivo x é um numero de Thabit se $x = 3.2^n - 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$ (nomeado em honra do matemático, físico, astrónomo e tradutor Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani 826- 901). Estes números expressados na representação binária têm $n+2$ dígitos, sendo $''10''$ seguido de n $1's$. Thabit ibn Qurra foi o primeiro a estudar estes números e a sua relação com os números amigáveis (ver [5]). Ele descobriu e provou que se $p = 3.2^n - 1$, $q = 3.2^{n-1} - 1$ e $r = 9.2^{n-1} - 1$ são números primos, então $M = 2^n pq$ e $N = 2^n r$ são um par de números amigáveis.

Dizemos que um semigrupo numérico S é um semigrupo numérico de Thabit se existem $n \in \mathbb{N}$ tais que $S = \langle \{3.2^{n+i} - 1 \mid i \in \mathbb{N}\} \rangle$ e será denotado por $T(n)$.

Lema 38. *Seja n um inteiro não negativo e seja $S = \langle \{3.2^{n+i} - 1 | i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}\} \rangle$. Então $2s + 1 \in S$ para todo o $s \in S \setminus \{0\}$.*

Prova. Se $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, então $2(3.2^{n+i} - 1) + 1 = 3.2^{n+i+1} - 1 \in S$. Além disso, $2(3.2^{2n+1} - 1) + 1 = 3.2^{2n+2} - 1 = (3.2^n - 1)^2 + (3.2^{n+1} - 1) + (3.2^{2n} - 1) \in S$. E portanto, pelo Lema 27 obtemos o resultado esperado. $\square$

Teorema 39. *Seja n um inteiro não negativo e seja $T(n)$ um semigrupo numérico de Thabit associado a n, então $e(T(n)) = n+2$. Além disso $\{3.2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots, n+1\}\}$ é o sistema minimal de geradores de $T(n)$.*

Prova. Seja $S = \langle\{3.2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots, n+1\}\}\rangle$. Compreende-se facilmente que $S \subseteq T(n)$. Para provarmos a outra inclusão, precisamos mostrar que $3.2^{n+1} - 1 \in S$ para todo o $i \in \mathbb{N}$. Para isso, vamos usar o princípio de indução em relação a i. Para $i = 0$ o resultado é trivial. Assumindo que é válido para i, precisamos mostrar que também será válida para $i+1$. Se $3.2^{n+i+1} - 1 = 2(3.2^{n+i} - 1) + 1$ então, por hipótese de indução e Lema 38, concluimos que $3.2^{n+i+1} - 1 \in S$. $\square$

Vamos mostrar a seguir que $3.2^{(2n+1)} - 1$ pertence ao sistema minimal de geradores de $T(n)$.

Lema 40. *Seja n um inteiro não negativo, então $3.^{2n+1} - 1 \notin \langle\{3.2^{n+i} - 1 | i \in \{0, 1, \dots, n\}\}\rangle$.*

Prova. Suponhemos que $3.2^{2n+1} - 1 \in \langle\{3.2^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \dots, n\}\}\rangle$. Então existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ tal que $3.2^{2n+1} - 1 = a_0(3.2^n - 1) + \cdots + a_n(3.2^{2n} - 1) = 3(a_0 2^n + \cdots + a_n 2^{2n}) - (a_0 + \cdots + a_n)$ e consequentemente $a_0 + \cdots + a_n \equiv 1 (mod 3.2^n)$. Se $a_0 + \cdots + a_n = 1 + k3.2^n$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado está claro que $k \neq 0$ e portanto $a_0 + \cdots + a_n \geq 1 + 3.2^n$. E com isso $a_0(3.2^n - 1) + \cdots + a_n(3.2^{2n} - 1) \geq (a_0 + \cdots + a_n)(3.2^n - 1) \geq (1 + 3.2n)(3.2n - 1) = 9.2^{2n} - 1 > 3.2^{2n+1} - 1$, que é absurdo. $\square$

O conjunto Apéry do número $3.2^n - 1$ para o semigrupo numérico de Thabit $T(n)$ será definido por $Ap(T(n), 3.2^n - 1)$. Passaremos a representar os elementos de $3.2^{n+i}-1$ por s_i para cada $i \in \{0,1,\dots,n+1\}$. Assim, o sistema minimal de geradores de $T(n)$ é $s_0, s_1, \dots, s_{n+1}$.

Lema 41. *Seja n um inteiro não negativo. Então:*

(1) *se $0 < i \leq j < n+1$ então $s_i + 2s_j = 2s_{i-1} + s_{j+1}$;*

(2) *se $0 < i \leq n+1$ então $s_i + 2s_{n+1} = 2s_{i-1} + s_0^2 + s_1 + s_n$.*

Prova. (1) Se $0 < i \leq j < n+1$, então nós temos que $s_i + 2s_j = 3.2^{n+i} - 1 + 2(3.2^{n+j} - 1^) = 2(3.2^{n+i-1}) + 3.2^{n+j+1} - 1 = 2s_{i-1} + s_{j+1}$.

(2) Se $0 < i \leq j < n+1$, obtemos portanto que $s_i + 2s_{n+1} = 3.2^{n+i} - 1 + 2(3.2^{2n+1} - 1) = 3.2^{n+i} - 2 + 3.2^{2n+2} - 1 = 2(3.2^{2n+i-1} - 1) + (3.2^n - 1)^2 + (3.2^{n+1} - 1) + (3.2^{2n} - 1) = 2s_{i-1} + s_0^2 + s_1 + s_n$.

□

Denotamos $A(n)$ o conjunto de todos os elementos $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \{0,1,2\}^{n+1}$ obedecendo à seguinte condição: se $1 \leq i < j \leq n+1$ e $a_j = 2$ então $a_i = 0$. E denotamos por $R(n)$ o conjunto das sucessões $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in A(n)$ satisfazendo as seguintes condições:

(1) $a_{n+1} \in \{0,1\}$;

(2) se $a_n = 2$ então $a_{n+1} = 0$;

(3) se $1 \leq i < n$ e $a_n = a_{n+1} = 1$ então $a_i = 0$.

Lema 42. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $T(n)$ um semigrupo numérico de Thabit minimalmente gerado por $\{s_0, \dots, a_{n+1}\}$. Então $Ap(T(n), s_0) \subseteq \{a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1} \mid (a_1, \dots, a_{n+1}) \in A(n)\}$.*

Prova. Vamos tomar um $k \in Ap(T(n), s_0)$. Vamos usar indução em k e provar que $k = a_1 s_1 + \dots + a_{n+1} s_{n+1}$ com $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in A(n)$. Para

$k = 0$ então $k = 0s_1 + \cdots + 0s_{n+1}$ e com isso fica claro. Assumamos $k > 0$ e $j = min\{i \in \{0, \ldots, n+1\} \mid x - s_i \in T(n)\}$. Se $k \in Ap(A(n), s_0)$ observemos que $j \neq 0$ e $k - s_j = a_1 s_1 + \cdots + a_{n+1}s_{n+1}$. Desde que $k = a_1 s_1 + \cdots (a_j + 1)s_j + \cdots + a_{n+1}s_{n+1}$. Para finalizarmos a prova, é suficiente observar que $(a_1, \ldots, a_j + 1, \ldots, a_{n+1}) \in A(n)$. Provando com isso que $(a_1, \ldots, a_j + 1, \ldots, a_{n+1}) \in \{0, 1, 2\}^{n+1}$ é suficiente para verificarmos que $a_j + 1 \neq 3$. Suponhemos que $a_j + 1 = 3$. Usando o Lema 42, identificamos dois casos a depender do valor de j:

- se $j < n + 1$ então $(a_j + 1)s_j = 3s_j = 2s_{j-1} + s_j + 1$;
- se $j = n + 1$ então $(a_j + 1)s_j = 3s_j = 2s_{j-1} + s_0^2 + s_1 + s_n$.

Nos dois casos, deduzimos que $k - s_{j-1} \in T(n)$ contradizendo de novo a minimalidade de j. Por conseguinte, apartir da minimalidade de j temos que $a_i = 0$ para $1 \leq i < j$. Verifiquemos que não existe um $m > j$ tal que $a_m = 2$ Assumamos agora pelo contrário que $a_m = 2$, pelo Lema 41 temos que :

- se $m < n + 1$ então $s_j + 2s_m = 2s_{j-1} + s_{k+1}$;
- se $m = n + 1$ então $s_j + 2s_m = 2s_{j-1} + s_0^2 + s_1 + s_n$.

Nos dois casos obtemos que $k - s_{j-1} \in T(n)$ contradizendo de novo a minimalidade de j. Concluimos portanto que $(a_1, \ldots, a_j + \ldots, a_{n+1}) \in A(n)$. □

Exemplo 43. Vejamos que $T(1) = \langle\{5, 11, 23\}\rangle$ e que $Ap(T(1), 5) = \{0, 11, 22, 23, 34\}$. É claro que $A(1) = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0)(1,1), (2,0), (2,1)\}$ e assim $\{a_1 11 + a_2 23 \mid (a_1, a_2) \in A(1)\} = \{0, 23, 46, 11, 34, 22, 45\}$.

O nosso próximo objectivo é encontrar um subconjunto $R(n)$ de $A(n)$ que preserve a igualdade verificada no Lema 41 se substituirmos $A(n)$ por R(n).

Lema 44. *Seja $k \in T(n)$ e $k \not\equiv 0$ mod s_0 então $k-1 \in T(n)$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.*

Prova. Se $k \in T(n)$ então existem $a_0, ..., a_{n+1} \in \mathbb{N}$ tal que $k = a_0 s_0 + ... + a_{n+1}s_{n+1}$. Por outro lado se $k \not\equiv 0$ *mod* s_0 então existem $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ tais que $a_i \neq 0$. Consequentemente $k - 1 = a_0 s_0 + \cdots + (a_i - 1)s_i + \cdots a_{n+1}s_{n+1} + 3.2^{n+i} - 2 = a_0 s_0 + \cdots + (a_i - 1)s_i + \cdots + a_{n+1}s_{n+1} + 2(3.2^{n+i-1} - 1) = a_0 s_0 + \cdots + (a_{i-1} + 2)s_{i-1} + (a_i - 1)s_i + \cdots + a_{n+1}s_{n+1} \in T(n)$. □

O proximo resultado mostra que se $Ap(T(n), s_0) = \{w(0), w(1), \ldots, w(s_0 - 1)\}$ então $\{w(0) < w(1) < \cdots < w(s_0 - 1)\}$.

Lema 45. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $w(i)$ o menor elemento de $T(n)$ congruente com i módulo s_0 para todo $i \in \{0, \ldots, s_0 - 1\}$. Então $\{w(0) < w(1) < \cdots < w(s_0 - 1)\}$.*

Prova. Mostremos que $w(i) < w(i+1)$ para todo o $i \in \{0, \ldots, s_0 - 2\}$. Se $w(i+1) \in T(n)$ e $w(i+1) \not\equiv 0$ *mod* s_0, temos que $w(i+1) - 1 \in T(n)$ pelo Lema 44. como $w(i+1) - 1 \equiv i$ *mod* s_0, podemos deduzir que $w(i) \leq w(i+1) - 1$. □

Como resultado do lema anterior obtemos que $w(s_0 - 1) = max(Ap(T(n), s_0))$.

Lema 46. *Se $n \in \mathbb{N}$ então $max(Ap(T(n), s_0)) \leq s_n + s_{n+1}$.*

Prova. Tomemos $s_n + s_{n+1} = 3.2^{2n} - 1 + 3.2^{2n+1} - 1 = 2^n(3.2^n - 1) + (2^n - 1) + 2^{n+1}(3.2^n - 1) + (2^{n+1} - 1) = (2^n + 2^{n+1})s_0 + 2^n - 1 + 2^{n+1} - 1 = (2^n + 2^{n+1})s_0 + s_0 - 1$, podemos concluir que $s_n + s_{n+1} \equiv s_0 - 1 \; mod \; s_0$. Sendo assim $w(s_0 - 1) \leq s_n + s_{n+1}$ e pelo Lema 45 obtemos o resultado desejado. □

Como consequência do Lema 46 obtemos o seguinte resultado.

Lema 47. *Seja $n \in \mathbb{N}$ então*

(1) $s_{n+1} \notin Ap(T(n), s_0)$;

(2) $s_n + s_{n+1} + s_i \notin Ap(T(n), s_0)$ *para todo* $i \in \{0, \ldots, n+1\}$.

Vamos supor a partir de agora que que n é um número inteiro maior ou igual a 1. Denotaremos por $R(n)$ o conjunto das sequências $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in A(n)$ satisfazendo as seguintes condições:

(1) $a_n + 1 \in \{0, 1\}$;

(2) se $a_n = 2$ então $a_{n+1} = 0$;

(3) se $1 \leq i < n$ e $a_n = a_{n+1} = 1$ então $a_i = 0$.

O nosso objectivo é provar que $Ap(T(n), s_0) = \{a_1 s_1 + \cdots + a_{n+1} s_{n+1} \mid (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in R(n)\}$.

Nota 48. Notemos que se $n \geq 2$ então $R(n)$ é o conjunto das sequências $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in A(n)$ que satisfazem as seguintes condições:

(1) $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \neq (0, \ldots, 0, 2)$;

(2) $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \neq (0, \ldots, 2, 1)$;

(3) se $a_n = a_{n+1} = 1$ então $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$

Lema 49. *Seja n um inteiro positivo, então $\#R(n) = 3.2^n - 1$.*

Prova. Vamos distinguir dois casos.

(1) Se $(a_1,\ldots,a_{n+1}) \in R(n)$ *e* $2 \notin \{a_1,\ldots,a_{n+1}\}$, então $a_i \in \{0,1\}$ para todo $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ e além disso $a_n = a_{n+1} = 0$ ou $a_n = 0$ e $a_{n+1} = 1$ou $a_n = 1$ e $a_{n+1} = 0$ ou $(a_1,\ldots,a_{n+1}) = (0,\ldots,0,1,1)$. Onde $\#\{a_1,\ldots,a_{n+1} \in R(n) \mid 2 \notin \{a_1,\ldots,a_{n+1}\}\} = 3.2^{n-1}+1$.

(2) Se $(a_1,\ldots,a_{n+1}) \in R(n)$ e $2 \in \{a_1,\ldots,a_{n+1}\}$, então existe um único $i \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $a_i = 2$. Além disso, se $i = n$ então $(a_1,\ldots,a_{n+1}) = (0,\ldots 0,2,0)$. Por outro lado, se $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ então $a_1 = \ldots = a_{i-1} = 0$ $a_{i+1},\ldots,a_{n-1} \in \{0,1\}$ e com isso, ou $a_n = a_{n+1} = 0$ *ou* $a_n = 0$ e $a_{n+1} = 1$ ou $a_n = 1$ e $a_{n+1} = 0$. Por outro lado $\#\{(a_1,\ldots,a_{n+1}) \in R(n) \mid 2 \in \{a_1,\ldots,a_{n+1}\}\} = 3\sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i-1} + 1$. Consequentemente $\#R(n) = 3.2^{n-1} + 1 + 3\sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i-1} + 1 = 3.2^{n-1} + 1 + 3(2^{n-1} - 1 + 1 = 6.2^{n-1} - 1 = 3.2^n - 1$.

□

Teorema 50. *Seja* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *e seja* $T(n)$ *semi-grupos numéricos de Thabit minimalmente gerado por* $\{3.2^n-1, 3.2^{n+1}-1,\ldots,3.2^{2n+1}-1\}$. *Então* $\mathrm{Ap}\,(T(n),s_0) = \Big\{a_1(3.2^{n+1}-1)+\cdots+a_{n+1}(3.2^{2n+1}-1) \mid (a_1,\ldots,a_{n+1}) \in R(n)\Big\}$.

Prova. Notemos que a cada $3.2^{n+i} - 1 = s_i \mid i = (0,1,\ldots,n+1)$.

Como consequência dos Lemas 42 e 47, obtemos que $Ap(T(n),s_0) \subseteq \{a_1s_1+\cdots+a_{n+1}s_{n+1} \mid (a_1,\ldots,a_{n+1}) \in R(n)\}$. Aplicando os Lemas 6 e 47, vamos ter $\#\{a_1s_1+\cdots,+a_{n+1}s_{n+1} \mid (a_1,\ldots,a_{n+1}) \in R(n)\} \leq$

$\#R(n) = 3.2^n - 1 = s_0 = \#Ap(T(n), s_0)$. Sendo assim $Ap(T(n), s_0) \subseteq \{a_1 s_1 + \cdots + a_{n+1}s_{n+1} \mid (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in R(n)\}$. □

Como consequência da prova do Teorema anterior, temos o seguinte resultado.

Corolário 51. *Se* $(a_1, \ldots, a_{n+1}), (b_1, \ldots, b_{n+1}) \in R(n)$ *e* $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \neq (b_1, \ldots, b_{n+1})$, *estão temos que* $a_1 s_1 + \cdots + a_{n+1}s_{n+1} \neq b_1 s_1 + \cdots + b_{n+1}s_{n+1}$.

Reparemos que, pela Nota 48, desde que $(0, 0, \ldots, 1, 1)$ esteja em $R(n)$ quando $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ então $s_n + s_{n+1} \in Ap(T(n), s_0)$. Usando o Lema 46 temos que $max(Ap(T(n), s_0)) = s_n + s_{n+1}$. Por outro lado o Lema 14 fornece uma fórmula para o número de Frobenius.

Corolário 52. *Seja* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *então* $F(T(n)) = s_n + s_{n+1} - s_0 = 9.2^{2n} - 3.2^n - 1$.

Ilustremos o último resultado com um exemplo.

Exemplo 53. Seja $T(1) = \langle\{5, 11, 23\}\rangle$. Pelo Corolário 52, obtemos que $F(T(1)) = 11 + 23 - 5 = 29$. Temos que $R(1) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$ e asim, pelo Teorema 50, $Ap(T(1), 5) = \{0, 23, 11, 34, 22\}$. Seja $T(2) = \langle\{11, 23, 47, 95\}\rangle$. Usando o Corolário 52, obtemos que $F(T(2)) = 95 + 47 - 11 = 131$. É fácil verificar que $R(2) = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1),$
$(1, 1, 0)(2, 0, 0), (2, 0, 1), (2, 1, 0)\}$.

Consequentemente

$Ap(T(2), 11) = \{0, 95, 47, 142, 94, 23, 118, 70, 46, 141, 93\}$. Observemos que para $T(2)$ temos que $Ap(T(2), 11) = \{w(0) = 0, w(1) = 23, w(2) = 46, w(3) = 47, w(4) = 70, w(5) = 93, w(6) = 94, w(7) = 95, w(8) = 118, w(9) = 141, w(10) = 142\}$. Temos que, por exemplo $129 \in T(2)$ e $119 \notin T(2)$, portanto $129 \geq w(129 \ mod\ 11) = w(8) = 118$ e $119 < w(119 \ mod\ 11) = w(9) = 141$.

5.1. **Números pseudo-Frobenius e o tipo.** Notemos que se w , $w' \in Ap(S, x)$, então $w' - w \in S$ se e somente se $w' - w \in Ap(S, x)$. assim sendo $\text{Maximais}_{\leq s}(Ap(S, x)) = \{w \in Ap(S, x) \mid w' - w \notin Ap(S, x) \setminus \{0\}$ para todo o $w' \in Ap(S, x)\}$. Consequentemente, temos que $\text{Maximais}_{\leq T(1)}(Ap(T(1), 5)) = \{22, 34\}$ (vejamos o Exemplo 53). Pelo Lema 11, temos que $PF(T(1)) = \{17, 29\}$ e então $t(T(1)) = 2$. Seja n um inteiro maior ou igual a 2. Está claro que os elementos maximais em $R(n)$ (com respeito a ordem do produto) são

$(2, 1, \ldots, 1, 0), (0, 2, 1, \ldots, 1, 0), \ldots (0, \ldots, 0, 2, 1, 0), (0, \ldots, 0, 2, 0),$

$(2, 1, \ldots, 1, 0, 1), (0, 2, 1, \ldots, 1, 0, 1), \ldots, (0, \ldots, 0, 2, 0, 1), (0, \ldots, 0, 1, 1),.$

Por outro lado, desde que $2s_i + 1 = s_{i+1}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ temos que $\{a_1 s_1 + \cdots, +a_{n+1}s_{n+1} \mid (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in (2, 1, \ldots, 1, 0), (0, 2, 1, \ldots, 1, 0), \ldots (0, \ldots, 0, 2, 1, 0), (0, \ldots, 0, 2, 0)\} = \{2s_n - (n-1), \ \ldots \ , 2s_n - 1 \ , \ 2s_n\}$ e $\{a_1 s_1 + \cdots + a_{n+1}s_{n+1} \mid (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in (2, 1, \ldots, 1, 0, 1), (0, 2, 1, \ldots, 1, 0, 1), \ldots, (0, \ldots, 0, 2, 0, 1), (0, \ldots, 0, 1, 1)\} = \{s_n + s_{n+1} - (n-1), \ldots, s_n + s_{n+1} - 1, s_n + s_{n+1}$. Como uma consequência do Teorema 50, obtemos o seguinte.

Lema 54. *Seja n um inteiro maior ou igual a 2 , então* $\max_{\leq_{T(n)}}(Ap(T(n),s_0)) = \max_{\leq_{T(n)}}\{2s_n, 2s_n-1, \ldots, 2s_n-(n-1), s_n+s_{n+1}, s_n+s_{n+1}-1, \ldots, s_n+s_{n+1}-(n-1)\}$

Estamos agora em condições de apresentar o próximo resultado, que é o mais importante nesta secção.

Teorema 55. *Seja n um inteiro maior ou igual a 2 e seja $T(n)$ um semigrupo numérico de Thabit associado a n. Então* $\max_{\leq_{T(n)}}(Ap(T(n),s_0)) = \{2s_n-(n-1), s_n+s_{n+1}, s_n+s_{n+1}-1, \ldots, +s_{n+1}-(n-1)\}$.

Prova. Seja $i \in \{0, \ldots, n-2\}$. então $s_n + s_{n+1} - (i+1) - (2s_n - i) = s_n + s_{n+1} - (2s_n + 1) = s_n + s_{n+1} - s_{n+1} = s_n$ e consequentemente temos que $(2s_n - i)_{\leq_{T(n)}} s_n + s_{n+1} - (i+1)$. Pelo Lema 54 obtemos que $\max_{\leq_{T(n)}}(Ap(T(n),s_0)) = \max_{\leq_{T(n)}}\{2s_n-(n-1), s_n+s_{n+1}, s_n+s_{n+1}-1, \ldots, s_n+s_{n+1}-(n-1)\}$. Como $2s_n-(n-1) < s_n+s_{n+1}-(n-1)$, os elementos $s_n+s_{n+1}-(n-1), \ldots, s_n+s_{n+1}-1, s_n+s_{n+1}$ são n inteiros consecutivos e $n < 3.2^n - 1$ então deduzimos que $\{s_n+s_{n+1}-(n-1), \ldots, s_n+s_{n+1}-1, s_n+s_{n+1}\} \subseteq max_{\leq_{T(n)}}(Ap(T(n),s_0))$. Finalmente, vamos mostrar que $s_n+s_{n+1}-i-(2s_n-(n-1)) \notin T(n)$ $\max_{\leq_{T(n)}}(Ap(T(n),s_0)) = \max_{\leq_{T(n)}}\{2s_n, 2s_n-1, \ldots, 2s_n-(n-1), s_n+s_{n+1}, s_n+s_{n+1}-1, \ldots, s_n+s_{n+1}-(n-1)\}$, ou igualmente $s_n+n-i \notin T(n)$ $\max_{\leq_{T(n)}}(Ap(T(n),s_0)) = \max_{\leq_{T(n)}}\{2s_n, 2s_n-1, \ldots, 2s_n-(n-1), s_n+s_{n+1}, s_n+s_{n+1}-1, \ldots, s_n+s_{n+1}-(n-1)\}$. Assumamos que existem $\max_{\leq_{T(n)}}(Ap(T(n),s_0)) = \max_{\leq_{T(n)}}\{2s_n, 2s_n-1, \ldots, 2s_n-(n-1), s_n+s_{n+1}, s_n+s_{n+1}-1, \ldots, s_n+s_{n+1}-(n-1)\}$ tal que $s_n+n-i \in T(n)$.

Desde que $s_n+n-i=3.2^{2n}-1+n-i=2^n(3.2^n-1)+2^n-1+n-i$ e $1\leq 2^n-1+n-i<3.2^n-1$, pelo Lema 44, concluimos que $s_n+1\in T(n)$. Então existem $a_0,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{N}$ tal que $s_n+1=a_0s_0+\cdots+a_{n+1}s_{n-1}$. Como $s_n+1\not\equiv 0 \ mod \ s_0$ então existem $j\in\{1,\ldots,n-1\}$ tal que $a_j\neq 0$. Portanto $s_n=a_0s_0+\cdots+(a_j-1)s_j+\cdots+a_{n-1}s_{n-1}+3.2^{n+j}-2=a_0s_0+\cdots+(a_j-1)s_j+\cdots+a_{n-1}s_{n-1}+2(3.2^{n+j-1}-1)=a_0s_0+\cdots+(a_j-1)s_j+\cdots+a_{n-1}s_{n-1}+2s_{j-1}$. Consequentemente $s_n\in\langle\{s_0,\ldots,s_{n-1}\}\rangle$ o que contraria o Teorema 39. □

Aplicando agora o Lema 11 e o Corolário 52 obtemos o seguinte resultado.

Corolário 56. *Seja n um inteiro positivo e seja $T(n)$ um semigrupo numérico de Thabit associado a n. Então*
$PF(T(n))=\{F(T(n))-i\mid i\in\{0,\ldots,n-1\}\}\cup\{2s_n-s_0-(n-1)\}$
e $t(T(n))=n+1$.

Ilustremos com um exemplo.

Exemplo 57. Seja $T(2)=\langle\{11,23,47,95\}\rangle$. Pelo Corolário 52 sabemos que $F(T(2))=95+47-11=131$. Além disso, temos que $2s_n-s_0-(n-1)=2\times 47-11-1=82$. Aplicando agora o Corolário 56, obtemos que $PF(T(2))=\{131,130,82\}$.

5.2. **O género de $T(n)$.** Vamos a seguir, introduzir e demonstrar o Teorema 60 que nos irá fornecer uma fórmula para calcular o género de $T(n)$. Para isso, precisamos de alguns resultados preliminares.

Lema 58. *Seja n um inteiro maior ou igual a dois e seja $i \in \{1,\ldots,n+1\}$. Então* $\#\{(a_1,\ldots,n+1) \in R(n) \mid a_i = 2\} = \begin{cases} 3.2^{n-i-1} & se\ i \in \{1,\ldots,n-1\}, \\ 1 & se\ i = n, \\ 0 & se\ i = n+1. \end{cases}$

Prova. Se $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, $(a_1,\ldots,a_{n+1}) \in R(n)$ e $a_i = 2$, então nós temos que $a_1 = a_2 = \cdots = a_{i-1} = 0, a_{i+1},\ldots,a_{n+1} \in \{0,1\}$ e além disso ou $a_n = 0$ ou $a_{n+1} = 0$. Consequentemente $\#\{(a_1,\ldots,a_{n+1}) \in R(n) \mid a_i = 2\} = 3.2^{n-i-1}$. Por outro lado, também está claro que $\{(a_1,\ldots,a_{n+1}) \in R(n) \mid a_N = 2\} = \{(0,\ldots,0,2,0)\}$ e $\{(a_1,\ldots,a_{n+1}) \in R(n) \mid a_{n+1} = 2\} = \emptyset$. $\square$

Lema 59. *Seja n um inteiro maior ou igual a dois e seja $i \in \{1,\ldots,n+1\}$. Então* $\#\{(a_1,\ldots,n+1) \in R(n) \mid a_i = 1\} = \begin{cases} 3(2^{n-1} - 2^{n-i-1}) & se\ i \in \{1,\ldots,n-1\}, \\ 2^n & se\ i \in \{n,n+1\}. \end{cases}$

Prova. (1) Seja $i \in \{1,\ldots,n-1\}$. Vamos identificar dois casos.

1.1 Se $2 \notin \{a_1,\ldots,a_{i-1}\}$, então $a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{n+1} \in \{0,1\}$ e $a_n = 0$ ou $a_{n+1} = 0$. Sendo assim $\#\{(a_1,\ldots,n+1) \in R(n) \mid a_i = 1\ e\ 2 \notin \{a_1,\ldots,a_{i-1}\}\} = 3.2^{n-2}$.

1.2 Se $2 \in \{a_1, \ldots, ai - 1\}$, então $a_j = 2$ para algum $j \in \{1, \ldots, i-1\}$. Assim $a_1 = \cdots = a_{j-1} = 0, a_{j+1}, \ldots, a_{n+1} \in \{0,1\}, a_i = 1$ e $a_n = 0$ ou $a_n + 1 = 0$. Assim $\#\{(a_1, \ldots, n+1) \in R(n) \mid a_i = 1 \; e \; a_j = 2\} = 3.2^{n-j-2}$. Consequentemente $\#\{(a_1, \ldots, n+1) \in R(n) \mid a_i = 1\} = 3.2^{n-2} + \sum_{j=1}^{i-1} 3.2^{n-j-2} =$
$= 3.2^{n-2} + 3.2^{n-3} + \cdots + 3.2^{n-i-1} = 3(2^{n-1} - 2^{n-i-1})$.

(2) Seja $i = n$. Vamos distinguir dois casos.

2.1 se $2 \notin \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ então $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1} \in \{0,1\}$. Se por outro lado $a_{n+1} = 1$, então $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Assim $\#\{(a_1, \ldots, n+1) \in R(n) \mid a_n = 1 \; e \; 2 \notin \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}\} = 2^{n-1} + 1$.

2.2 Se $2 \in \{a_1, \ldots, a_{n-1}$, então $a_j = 2$ para algum $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Nesse caso $a_1 = \cdots = a_{j-1} = 0, a_{j+1}, \ldots, a_{n+1} \in \{0,1\}$ e $a_{n+1} = 0$. Onde $\#\{(a_1, \ldots, n+1) \in R(n) \mid a_i = 1 \; e \; a_j = 2\} = 2^{n-j-1}$. Finalmente $\#\{(a_1, \ldots, n+1) \in R(n) \mid a_i = 1\} = 2^{n-1} + 1 + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{n-j-1} =$
$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^0 + 1 = 2^n$.

(3) Para $i = n+1$. Temos também dois casos.

3.1 Se $2 \notin \{a_1, \ldots, a_n$, então $a_1, \ldots, a_n \in \{0,1\}$. Se por outro lado $a_n = 1$, então $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Assim $\#\{(a_1, \ldots, n+1) \in R(n) \mid a_{n+1} = 1 \; e \; 2 \notin \{a_1, \ldots, a_n\}\} = 2^{n-1} + 1$.

3.2 Se $2 \in \{a_1, \ldots, a_n$, então $a_j = 2$ para algum $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Nesse caso $a_1 = \cdots = a_{j-1} = 0, a_{j+1}, \ldots, a_{n-1} \in \{0,1\}$ e $a_n = 0$. (Observemos que nesse caso não existem elementos tal que $a_n = 2$ e $a_n = 1$). Consequentemente $\#\{(a_1, \ldots, n+1) \in R(n) \mid a_{n+1} = 1 \ e \ a_j = 2\} = 2^{n-j-1}$. Consequentemente

$$\#\{(a_1, \ldots, n+1) \in R(n) \mid a_{n+1} = 1\} = 2^{n-1} + 1 + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{n-j-1} = 2^n$$

□

Teorema 60. *Seja n um inteiro não negativo e seja $T(n)$ um semigrupo numérico de Thabit associado a n. Então*

$$\mathrm{g}\,(T(n)) = 9.2^{2n-1} + (3n-5)\,2^{n-1}.$$

Prova. Podemos facilmente verificar que o resultado é também verdadeiro para $n \in \{0, 1\}$. Suponhemos agora que $n \geq 2$. Aplicando o Lema 14, Teorema 50 e o corolário 51, temos que

$$g(T(n)) = \frac{1}{s_0}\left(\sum_{(a_1,\ldots,a_{n+1})\in R(n)} a_1 s_1 + \cdots + a_{n+1}s_{n+1}\right) - \frac{s_0 - 1}{2}.$$

Claramente,

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_{n+1})\in R(n)} a_1 s_1 + \cdots + a_{n+1}s_{n+1} =$$

$$= \sum_{(a_1,\ldots,a_{n+1})\in R(n), a_1=1} s_1 + \sum_{(a_1,\ldots,a_{n+1})\in R(n), a_1=2} 2s_1 + \cdots$$

$$\ldots + \sum_{(a_1,\ldots,a_{n+1})\in R(n), a_{n+1}=1} s_{n+1} + + \sum_{(a_1,\ldots,a_{n+1})\in R(n), a_{n+1}=2} 2s_{n+1}.$$

Usando agora os Lemas 58 e 59, obtemos que

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_{n+1})\in R(n)} a_1s_1 + \cdots + a_{n+1}s_{n+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} 3.2^{n-i-1}2s_i + 2s_n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} 3(2^{n-1} - 2^{n-i-1})s_i + 2^n s_n + 2^n s_{n+1} =$$

$$= 3\sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i}(3.2^{n+1} - 1) + 3.2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(3.2^{n+i} - 1) -$$

$$-3\sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i-1}(3.2^{n+i} - 1) + (2^n + 2)s_n + 2^n a_{n+1} =$$

$$= 3\sum_{i=1}^{n-1} 3.2^{2n} - 3\sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i} +$$

$$+9.2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} 2^{n+i} - (n-1)3.2^{n-1} -$$

$$-9\sum_{i=1}^{n-1} 2^{2n-1} + 3\sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i-1} + (2^n + 2)s_n + s_{n+1} =$$

$$= 9(n-1)2^{2n} - 3(2^n - 2) + 9.2^{n-1}(2^{2n} - 2^{n+1}) -$$

$$-3(n-1)2^{n-1} - 9(n-1)22n - 1 + 3(2^{n-1} - 1) +$$

$$+(2^n + 2)(3.2^{2n} - 1) + 2^n(3.2^{2n+1} - 1) =$$

$$= 27.2^{3n-1} + (9n-15)2^{2n-1} - (3n+4)2^{n-1} + 1 =$$

$$= (3.2^n - 1)(9.2^{2n-1} + (3n-2)2^{n-1} - 1).$$

Assim sendo,

$g(T(n)) = 9.2^{2n-1} + (3n-2)2^{n-1} - 1 - \frac{3.2^n - 2}{2} =$

$= 9.2^{2n-1} + (3n-5)2^{n-1}.$ $\square$

6. Semigrupos numéricos de repunit

Na teoria dos números, um repunit é um número que consiste nas cópias do algarismo 1. Os números 1, 11, 111 ou 1111, etc, são exemplos de repunit. O termo significa repetir unidades e foi criado por Albert H. Beiler em [3].

Um semigrupo numérico S é um semigrupo numérico de repunit se existem inteiros $b \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ e $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tais que $S = \left\langle \left\{ \frac{b^{n+i}-1}{b-1} \mid i \in \mathbb{N} \right\} \right\rangle$ e será denotado por $S(b,n)$.

Seja $M(b,n)$ um submonoide de $(\mathbb{N},+)$ gerado por $\{b^{n+i}-1 \mid i \in \mathbb{N}\}$. O Lema 62 a baixo mostra que $S(b,n) = \left\{ \frac{m}{b-1} \mid m \in M(b,n) \right\}$. Daí a aplicação $\varphi : M(b,n) \longrightarrow S(b,n)$, definido por $\varphi(m) = \frac{m}{b-1}$, é um isomorfirmo do monoide.

6.1. **Dimensão de imersão.** Nesta secção, b representa um inteiro maior do que 2 e n denota um inteiro positivo. Comprende-se facilmente que $b^n = (b-1)(b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+b+1)$ e assim $\frac{b^n-1}{b-1}$ é um número inteiro. Por outro lado $mdc\{\frac{b^n-1}{b-1}, \frac{b^{n+1}-1}{b-1}\} = \frac{1}{b-1}(mdc\{b^n-1, b^{n-1}-1\}) = \frac{1}{b-1}(mdc\{b^n-1, b(b^n-1)+b-1\}) = \frac{1}{b-1}(mdc\{b^n-1, b-1\}) = \frac{1}{b-1}(b-1) = 1$.

Essa informação mostra que:

Proposição 61. *$S(b,n)$ é um semigrupo numérico.*

Lema 62. *Se $n \in M(b,n) \setminus \{0\}$, então $bm+b-1 \in M(b,n)$.*

Prova. Como $M(b,n) = \langle\{b^{n+i} - 1 \mid i \in \mathbb{N}\}\rangle$ e $b(b^{n+i} - 1) + b - 1 = b^{n+i+1} - 1 \in M(b,n)$ então pelo Lema 23, obtemos que $bm + b - 1 \in M(b,n)$ para todo o $m \in M(b,n) \setminus \{0\}$. □

Lema 63. *O conjunto $\{b^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ é um sistema de geradores de $M(b,n)$.*

Prova. Assumamos que $M = \langle\{b^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}\rangle$. Para já temos que mostrar que se $m \in M \setminus \{0\}$ então $bm + b - 1 \in M$. Para $n = 1$ o resultado é verdade. assim, suponhemos que $n \geq 2$. Se $i \in \{0, \ldots, n-2$, então $b(b^{n+i} - 1) + b - 1 = b^{n+i+1} - 1 \in M$. Além disso $b(b^{2n-1} - 1) + b - 1 = b^{2n} - 1 = (b^n - 1)(b^n - 1) \in M$. Pelo Lema 23, obtemos que $bm + b - 1 \in M$ para todo $n \in M \setminus \{0\}$. Vamos agora mostrar que $M(b,n) = M$. Para isso basta mostrarmos que $b^{n+i} - 1 \in M$ para todo o $i \in \mathbb{N}$. Aplicando o princípio de indução em relação a i temos: Para $i = 0$ o resultado é válido. Vamos mostrar que é válido para $i+1$ se ela for válida para i. como $b^{n+i+1} - 1 = b(b^{n+i} - 1) + b - 1$ então, pela hipótese de indução e como $bm + b - 1 \in M$ para todo o $n \in M \setminus \{0\}$, obtemos que $b^{n+i+1} - 1 \in M$. □

Estamos agora em condições mostrarmos que o sistema de geradores de $M(b,n)$ apresentado no lema precedente é minimal.

Teorema 64. *O conjunto $\{b^{n+i} - 1 \mid i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$ é o sistema minimal de geradores de $M(b,n)$.*

Prova. Se $n = 1$ o resultado é válido. Assim, suponhemos que $n \geq 2$. em primeiro lugar, vamos provar que $b^{2n-1} -$

$1 \notin \langle\{b^{n+i}-1 \mid i\in\{0,1,\dots,n-2\}\}\rangle$. De outra forma existem $a_0,\dots,a_{n-2}\in\mathbb{N}$ tal que $b^{2n-1}-1 = a_0(b^n-1)+\cdots+a_{n-2}(b^{2n-2}-1) = a_0b^n+\cdots+a_{n-2}b^{2n-2}-(a_0+\cdots+a_{n-2})$. Por isso $a_0+\cdots+a_{n-2}\equiv 1(mod\, b^n)$ implica que $a_0+\cdots+a_{n-2} = 1+kb^n$ para algum $k\in\{N\backslash\{0\}\}$ e assim $a_0+\cdots+a_{n-2}geq1+b^n$. Consequentemente, temos que $b^{2n-1}-1 = a_0(b^n-1)+\cdots+a_{n-2}(b^{2n-2}-1)\geq(a_0+\cdots+a_{n-2})(b^n-1)\geq(1+b^n)(b^n-1) = b^{2n}-1 > b^{2n-1}-1$, o que é impossível. Pelo Lema 63, sabemos que $\{b^{n+i}-1 \mid i\in\{0,\dots,n-1\}\}$ é um sistema de geradores de $M(b,n)$. E se este não for o sistema minimal de geradores, então existe $h\in\{1,\dots,n-1\}$ tal que $b^{n+h}-1\in\langle\{b^{n+i}-1 \mid i\in\{0,\dots,h-1\}\}\rangle$. Seja $M = \langle\{b^{n+i}-1 \mid i\in\{0,\dots,h-1\}\}\}$. Se $i\in\{0,\dots,h-2\}$ então $b(b^{n+i}-1)+b-1 = b^{n+i+1}-1\in M$. Além disso, relativamente ao parágrafo anterior $b(b^{n+h-1}-1)+b-1 = b^{n+h}-1\in M$. Sendo assim, pelo Lema 47 obtemos que $bm+b-1\in M$ para todo o $m\in M\setminus\{0\}$. Usando a indução em relação a i é fácil mostrar que $b^{n+i}-1\in M$ para todo o $i\in\mathbb{N}$. Para $i=0$ o resultado é válido. Assumamos que é válido para i. Por definição e, dada a hipótese de indução $b^{n+i+1}-1 = b(b^{n+i}-1)+b-1$ nós podemos deduzir que $b^{n+i+1}-1\in M$. Como consequência, temos que $b^{2n-1}-1\in M\subseteq\langle\{b^{n+i}-1 \mid i\in\{0,\dots,n-2\}\}\rangle$, o que contradiz o facto de que $b^{2n-1}-1\notin\langle\{b^{n+i}-1 \mid i\in\{0,\dots,n-2\}\}\rangle$. □

Como consequência do teorema anterior temos:

Corolário 65. *O semigrupo numérico $S(b,n)$ tem dimensão de imersão n. Além disso, o seu sistema minimal de geradores é* $\left\{\frac{b^{n+i}-1}{b-1} \mid i\in\{0,\dots,n-1\}\right\}$.

6.2. **O conjunto Apéry.** Vamos basear das definições, dos Lemas 6 e 14 para estender o conceito do conjunto Apéry para os submonoides de $(\mathbb{N},+)$. Se M é um submonoide de $(\mathbb{N},+)$ e $m \in M \setminus \{0\}$ então o conjunto Apéry de m em M é $Ap(M,m) = \{x \in M \mid x - m \notin M\}$. O próximo resultado fica fácil de provar.

Lema 66. *Seja M um submonoide de $(\mathbb{N},+)$ tal que $M \neq \{0\}$ e seja $d = \mathrm{mdc}(M)$. Assim*

(1) $S = \left\{\frac{m}{d} \mid m \in M\right\}$ *é um semigrupo numérico;*
(2) *se $m \in M \setminus \{0\}$ assim $\mathrm{Ap}(M,m) = \left\{dw \mid w \in \mathrm{Ap}(S, \frac{m}{d})\right\}$;*
(3) *o cardinal de $\mathrm{Ap}(M,m)$ é $\frac{m}{d}$.*

Denotemos por $R(b,n)$ o conjunto de todos os $(n-1)$-upla $(a_1,\ldots,a_{n-1})$ que verificam as seguintes condições:

(1) para todo $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ temos que $a_i \in \{0,1,\ldots,b\}$;
(2) se $i \in \{2,\ldots,n-1\}$ e $a_i = b$ então $a_1 = \cdots = a_{i-1} = 0$.

Vamos também considerar, apartir daqui, que $m_i = b^{n+i} - 1$ para cada $i \in \{0,\ldots,n-1\}$. Teremos com isso que o conjunto $\{m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}\}$ é o sistema minimal de geradores de $M(b,n)$ e $\{\frac{m_0}{b-1}, \frac{m_1}{b-1}, \ldots, \frac{m_n-1}{b-1}\}$ é o sistema minimal de geradores de $S(b,n)$.

Lema 67. *Seja n um inteiro maior ou igual a 2. Então*

(1) *se $0 < i \leq j < n-1$ então $m_i + bm_j = bm_{i-1} + m_{j+1}$;*
(2) *se $0 < i \leq n-1$ então $m_i + bm_{n-1} = bm_{i-1} + (b^n+1)m_0$.*

Lema 68. *Seja n um inteiro maior ou igual a 2. Se $x \in Ap(M(b,n), m_0)$ então existe $(a_1,\ldots,an-1) \in R(b,n)$ tal que $x = a_1m_1 + \cdots + a_{n-1}m_{n-1}$.*

Prova. Podemos usar indução em x atendendo a notação mencionada anteriormente relativa ao m_i. Para $x = 0$ o resultado é claro. Suponhemos que $x > 0$ e seja $j = min\{i \in \{0, \ldots, n-1\} \mid x - m_i \in M(b,n)\}$. Observemos que, como $x \in Ap(M(b,n), m_0)$ obtemos que $j \neq 0$. Por hipótese de indução, existem $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in R(b,n)$ tal que $x - m_j = a_1m_1 + \cdots + a_{n-1}m_{n-1}$. Portanto $x = a_1m_1 + \cdots + (a_j + 1)m_j + \cdots + a_{n-1}m_{n-1}$. Antes de proseguir vamos verificar que $(a_1, \ldots, a_j + 1, \ldots, a_{n-1}) \in R(b,n)$ Se $a_j + 1 = b + 1$, então aplicando o Lema 67, verificam-se as seguintes condições:

- se $j < n-1$ então $(a_j + 1)m_j = (b+1)m_j = bm_{j-1} + m_{j+1}$,
- se $j = n-1$ então $(a_j+1)m_j = (b+1)m_j = bm_{j-1} + (b^n+1)m_0$.

Deduzimos em ambos casos que $x - m_{j-1} \in M(b,n)$ o que contradiz a minimalidade de j. Suponhemos agora que $k > j$ tal que $a_k = b$ então, pelo Lema 68, temos as seguintes condições:

- se $k < n-1$ então $m_j + bm_k = bm_{j-1} + m_{k+1}$,
- se $k = n-1$ então $m_j + bm_k = bm_{j-1} + (b^n + 1)m_0$.

Obtemos nos dois casos que $x - m_{j-1} \in M(b,n)$, que contradiz a minimalidade de j. Além disso, pela minimalidade de j sabemos que $a_1 = \cdots = a_{j-1} = 0$. Concluimos assim que $(a_1, \ldots, a_j + 1 \ldots, a_{n+1}) \in R(b,n)$. □

Teorema 69. *Seja n um inteiro maior ou igual a 2. Então* $\mathrm{Ap}\left(M\left(b,n\right), b^n - 1\right) = \{a_1(b^{n+1} - 1) + \cdots + a_{n-1}(b^{2n-1} - 1) \mid (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in R\left(b,n\right)\}$.

Prova. Claramente $R(b,n) = \{0,\ldots,b-1\}^{n-1} \cup \{(a_1,\ldots,a_{n-1}) \in R(b,n) \mid a_1 = b\} \cup \cdots \cup \{(a_1,\ldots,a_{n-1}) \in R(b,n) \mid a_{n-1} = b\}$. Então $R(b,n)$ é igual a $b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+b^0 = \frac{b^n-1}{b-1} = \frac{m_0}{b-1}$. Pelo Lema 68, temos que $Ap(M(b,n),m_0) \subseteq \{a_1m_1+\cdots+a_{n-1}m_{n-1} \mid (a_1,\ldots,a_{n-1}) \in R(b,n)\}$. Percebe-se pelo Lema 66 que o cardinal de $Ap(M(b,n),m_0)$ é igual a $\frac{m_0}{b-1}$. Além disso, no parágrafo anterior, sabemos que o cardinal do conjunto $\{a_1m_1+\cdots+a_{n-1}m_{n-1} \mid (a_1,\ldots,a_{n-1}) \in R(b,n)\}$ é menor ou igual a $\frac{m_0}{b-1}$. E com isso concluimos que $Ap(M(b,n),m_0) = \{a_1m_1+\cdots+a_{n-1}m_{n-1} \mid (a_1,\ldots,a_{n-1}) \in R(b,n)\}$. □

Como consequência imediata do Lema 66 e do Teorema 69, temos o seguinte resultado.

Corolário 70. *Seja n um inteiro maior ou igual a 2. Então* $\mathrm{Ap}\left(S\left(b,n\right), \frac{b^n-1}{b-1}\right) = \left\{a_1\frac{b^{n+1}-1}{b-1}+\cdots+a_{n-1}\frac{b^{2n-1}-1}{b-1} \mid (a_1,\ldots,a_{n-1}) \in R\left(b,n\right)\right\}$.

A partir destes resultados e para conhecer os elementos maximais (com respeito à ordem do produto) em $R\left(b,n\right)$ temos o seguinte.

6.3. **O problema de Frobenius.** Em seguida vamos obter uma fórmula para o número de Frobenius de $S(b,n)$. O lema que se segue é de resultado imediato.

Lema 71. *Seja n um inteiro maior ou igual a três. Então os elementos maximais (relativo à ordem do produto) em R(b,n) são* $(b,b-1,\ldots,b-1),(0,b,b-1.\ldots,b-1)$ *e* $(0,\ldots,0,b)$.

O próximo resultado mostra que $bm_1 + (b-1)m_2 + \cdots + (b-1)m_{n-1}, bm_2 + (b-1)m_3 + \cdots + (b-1)m_{n-1}, \ldots, bm_{n-1}$ é uma sequência de inteiros em que cada termo se obtém adicionando $b-1$ ao anterior .

Lema 72. *Seja n uma inteiro maior ou igual a três e seja $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, então $bm_i + b - 1 = m_i + 1$.*

Prova. De facto, $bm_i + b - 1 = b(b^{n+i} - 1) + b - 1 = b^{n+i+1} - 1$. $\square$

Teorema 73. *Seja n um inteiro mior ou igual a 2. Então* $\mathrm{F}\left(S\left(b,n\right)\right) = \frac{b^n-1}{b-1}b^n - 1$.

Prova. Pelo Corolário 70 e dos Lemas 71 e 72, deduzimos que $max(Ap(S(b,n), \frac{m_0}{b-1})) = b\frac{m_n-1}{b-1}$. Aplicando o Teorema 19, obtemos que $F(S(b,n)) = b\frac{m_n-1}{b-1} - \frac{m_0}{b-1} = \frac{b(b^{2n-1}-1)}{b-1} - \frac{b^n-1}{b-1} = \frac{b^n-1}{b-1}b^n - 1$. $\square$

É de salientar que para $n = 1$ a fórmula anterior não se aplica, pois $S(b,1) = \mathbb{N}$ e $F(\mathbb{N}) = -1 \neq \frac{b-1}{b-1}b - 1 = b - 1$.

Exemplo 74. Vamos calcular o número de Frobenius para o semigrupo $S(3,4) = \left\langle \frac{3^4-1}{3-1}, \frac{3^5-1}{3-1}, \frac{3^6-1}{3-1}, \frac{3^7-1}{3-1} \right\rangle = \langle 40, 121, 364, 1093\rangle$. Usando o Teorema 73 obtemos que $F(D(3,4)) = \frac{3^4-1}{3-1}3^4 - 1 = 3239$.

A seguir vamos determinar o conjunto de todos os números pseudo-Frobenius e o tipo de $S(b,n)$.

Recordemos que, como consequência do Corolário 17, se quisermos calcular o número pseudo-Frobenius de $S(b,n)$ basta calcularmos o conjunto dos $\max_{\leq_{S(b,n)}}\left(Ap(S(b,n), \frac{m_0}{b-1})\right)$.

Teorema 75. *Seja n um inteiro maior ou igual a dois. Então* $\mathrm{t}(S(b,n)) = n-1$. *Além disso* $\mathrm{PF}(S(b,n)) = \{\mathrm{F}(S(b,n)) - i \mid i \in \{0,\dots,n-2\}\}$.

Prova. Assumamos que A é o conjunto dos elementos maximal em $R(b,n)$ (respeitando a ordem do produto) e $B = \{a_1\frac{m_1}{b-1} + \cdots + a_{n-1}\frac{m_n-1}{b-1} \mid (a_1,\dots,a_{n-1}) \in A\}$. Pelo Corolário 70, deduzimos que $\max_{\leq_{S(b,n)}}\left(Ap(S(b,n),\frac{m_0}{b-1})\right) = \max_{\leq_{S(b,n)}} B$. Então, aplicando os Lemas 71 e 72, o conjunto B é formado por $n-1$ inteiros positivos consecutivos. Sendo assim, a diferença entre dois quaisquer elementos de B é menor ou igual a $n-2$. Como $\frac{m_0}{b-1} = \frac{b^n-1}{b-1}$ é o menor inteiro positivo em $S(b,n)$ e $\frac{b^n-1}{b-1} > n-2$, podemos com isso concluir que B é o conjunto dos elementos incomparáveis com respeito a ordem $\leq_S (b,n)$ e assim $\max_{\leq_{S(b,n)}} B = B$. Usando agora o Corolário 17, obtemos que $PF(S(b,n)) = \{w - \frac{m_0}{b-1} \mid w \in B\}$ A partir da prova do Teorema 73 temos que $max(B) = F(S(b,n)) + \frac{m_0}{b-1}$ e consequentemente $PF(S(b,n)) = \{F(S(b,n)) - i \mid i \in \{0,\dots,n-2\}\}$. $\square$

Notemos que para $n=1$ o Teorema anterior não se verifica, isto porque $S(b,1) = \mathbb{N}$, $PF(\mathbb{N}) = \{-1\}$ e assim $t(\mathbb{N}) = 1$. Informamos ainda que para cada inteiro positivo n existem infinitos semigrupos numéricos de Repunit com o tipo n. Este conjunto é igual a $\{S(b,n+1) \mid b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\}$ e coincide com o conjuntos de todos os semigrupos numéricos de Repunit com a dimensão de imersão $n+1$.

Exemplo 76. Calculemos os números pseudo-Frobenius para o semigrupo numérico $S(3,4)$. Do exemplo 74 sabemos que $F(S(3,4)) =$

3239. Aplicando o Teorema 75 temos que $PF(S(b,n)) = \{3239, 3238, 3237\}$.

O próximo resultado fornece-nos uma fórmula para o género do semigrupo numérico de Repunit.

Corolário 77. *Seja n um inteiro positivo. Então* $\mathrm{g}\left(S\left(b,n\right)\right) = \frac{b^n}{2}\left(\frac{b^n-b}{b-1}+n-1\right)$.

Prova. Para $n=1$ o resultado é trivial. Assumamos agora que $n \geq 2$ e para cada $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ definimos $s_i = \frac{m_i}{b-1}$. Usando o Lema 14 temos que

$$g(S(b,n)) = \frac{1}{s_0}\left(\sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R(b,n)} a_1 s_1 + \cdots + a_{n-1}s_{n-1}\right) - \frac{s_0-1}{2}.$$

Claramente,

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R(b,n)} a_1 s_1 + \cdots + a_{n-1}s_{n-1} =$$

$$= \sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R(b,n),a_1=1} s_1 + \cdots + \sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R(b,n),a_1=b} bs_1 + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R(b,n),a_{n-1}=1} s_{n-1} + \cdots\cdots + \sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R(n),a_{n-1}=b} bs_{n-1}.$$

Seja $i \in \{1,\cdots,n-1\}$. Prova-se facilmente que:

- o cardinal de $\{(a_1,\ldots,a_{n-1}) \in R(b,n) \mid a_i = b\}$ é b^{n-1-i};
- se $x \in \{1,\ldots,b-1\}$, o cardinal de $\{(a_1,\ldots,a_{n-1}) \in R(b,n) \mid a_i = x\}$ e $b \notin \{a_1,\ldots,a_{i-1}\}\}$ é b^{n-2};

- se $1 \leq j < i$ então o cardinal de $\{(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in R(b,n) \mid a_i = x\}$ e $a_j = b\}$ é b^{n-j-2}.

Aplicando o último resultado, temos que

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in R(b,n)} a_1 s_1 + \cdots + a_{n-1}s_{n-1} =$$

$$= \sum_{x=1}^{b-1}\left(x\sum_{i=1}^{n-1}(b^{n-2}+b^{n-3}+\cdots+b^{n-1-i})s_i\right)+b\sum_{i=1}^{n-1}b^{n-1-i}bs_i =$$

$$= \frac{b(b-1)}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(b^{n-2}+\cdots+b^{n-1-i}\right)s_i + b\sum_{i=1}^{n-1}b^{n-i-1}s_i =$$

$$= \frac{b(b-1)}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b^{n-1}-b^{n-i-1}}{b-1}s_i+b\sum_{i=1}^{n-1}b^{n-i-1}s_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(b^n+b^{n-i})s_i+\sum_{i=1}^{n-1}b^{n-i}s_i =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(b^n+b^{n-i})s_i == \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(b^n+b^{n-i})\left(\frac{b^{n+i}-1}{b-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2(b-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(b^{2n+i}-b^n+b^{2n}-b^{n-i}) =$$

$$= \frac{1}{2(b-1)}\left(\frac{b^{3n}-b^{2n+1}}{b-1}-(n-1)b^n+(n-1)b^{2n}-\left(\frac{b^n-b}{b-1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2(b-1)}\left(\frac{(b^n-1)(b^{2n}-b^{n+1}+b^n-b)}{b-1}+(n-1)b^n(b^n-1)\right) =$$

$$= \frac{b^n-1}{2(b-1)}\left(\frac{b^{2n}-b^{n+1}+b^n-b}{b-1}+(n-1)b^n\right).$$

$\square$

Exemplo 78. Calculemos o género do semigrupo numérico $S(3,4)$. aplicando o Corolário 77 temos que $g(S(3,4)) = \frac{3^4}{2}\left(\frac{3^4-3}{3-1}+4-1\right) =$ 1701

7. O problema de Frobenius com multiplicidade quatro

Se S é um semigrupo numérico com um sistema minimal de geradores $\{n_1, n_2, n_3\}$ e $d = \mathrm{mdc}\{n_1, n_2\}$, então como consequência de [6] e [9], temos que $\mathrm{F}(S) = d\mathrm{F}\left(\left\langle \frac{n_1}{d}, \frac{n_2}{d}, n_3 \right\rangle\right) + (d-1)\, n_3$ e $\mathrm{g}(S) = d.\mathrm{g}\left(\left\langle \frac{n_1}{d}, \frac{n_2}{d}, n_3 \right\rangle\right) + \frac{1}{2}(d-1)(n_3 - 1)$.

Por isso, para resolver o problema de Frobenius com a dimensão de imersão três, podemos focar o nosso estudo nos semigrupos numéricos tais que os seus três geradores mínimais são primos entre si.

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todos os semigrupos numéricos S com multiplicidade quatro, dimensão de imersão três e os seus geradores minimais são primos entre si.

Proposição 79. *Seja S um semigrupo numérico em $\mathcal{F}$ com sistema minimal de geradores $\{4 < n_2 < n_3\}$, então* $\mathrm{Ap}(S, 4) = \{0, n_2, n_3, 2n_2\}$.

Prova. Notemos em primeiro lugar que n_2 e n_3 são inteiros ímpares e positivos. Claramente temos que $\{0, n_2, n_3\} \subseteq Ap(S, 4)$. Para concluirmos a prova é suficiente provarmos que $2n_2 - 4 \notin S$. Se $2n_2 - 4 \in S$, então existiriam $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{N}$ tal que $2n_2 - 4 = \lambda 4 + \mu n_2 + \gamma n_3$. Está claro que $\mu \leq 1$ e $\gamma \leq 1$. Se $\mu = 1$, então $n_2 = (\lambda + 1)4 + \gamma n_3 \in \langle 4, n_3 \rangle$, contradiz a hipótese inicial. Consequentemente $\mu = 0$ e assim $2n_2 - 4 = \lambda 4 + \gamma n_3$. Como $\gamma \leq 1, n_3$ é ímpar e $2n_2 - 4$ é par, podemos deduzir que $\gamma = 0$. Assim sendo $2n_2 = (\lambda + 1)4$ e assim n_2 é um número par, o que é mais uma vez contraditório. $\square$

Como consequência do Lema 14 e Proposição 79, vem o seguinte resultado.

Corolário 80. *Seja S um semigrupo numérico em $\mathcal{F}$ com o conjunto minimal de geradores $\{4 < n_2 < n_3\}$. Então*

(1) $\mathrm{F}(S) = \max\{n_3, 2n_2\} - 4$, *(note que* $\mathrm{F}(S) = n_3 - 4$ *é ímpar e* $\mathrm{F}(S) = 2n_2 - 4$ *é par);*

(2) $\mathrm{g}(S) = \frac{3n_2+n_3-6}{4}$.

Corolário 81. *Seja S um semigrupo numérico em $\mathcal{F}$ com o conjunto minimal de geradores $\{4 < n_2 < n_3\}$. Então* $\mathrm{PF}(S) = \{n_3-4, 2n_2-4\}$.

Exemplo 82. Para $(S) = \langle 4 < 5 < 7\rangle$, temos:

$F(S) = max\{7\ ,\ 2 \times 5\} - 4 = 10 - 4 = 6$

$g(S) = \frac{3\times 5+7-6}{4} = \frac{15+1}{4} = 4$

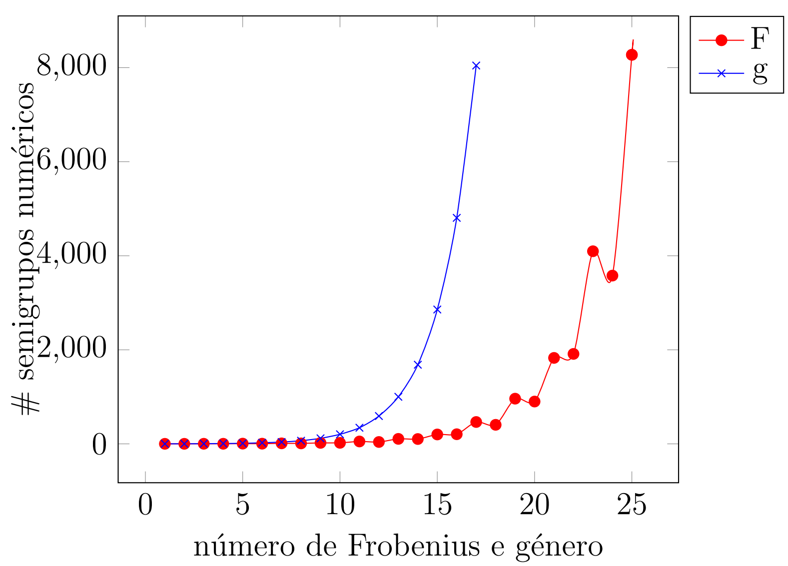
$Ap(S, 4) = \{0, 5, 7, 10\}$

$PF(S) = \{7 - 4\ ,\ 2 \times 5 - 4\} = \{3, 6\}$

Na tabela que se segue estão calculados os números de Frobenius e o género até 39. Para cada inteiro positivo F (respectivamente, inteiro g) Escrevemos o número de semigrupos numéricos (n_F) dos números de Frobenius dados F(S) (respectivamente, o número de semigrupo numérico (n_g) dos géneros dados g(S)). Bras-Amorós em [4] calculou o número do semigrupos numéricos com um género fixado menor ou igual a 50. Contudo ainda não está provado que existem mais semigrupos de género g do que de género $g + 1$.

F	n_F	F	n_F	F	n_F	F	n_F
1	1	11	51	21	1828	31	70854
2	1	12	40	22	1913	32	68681
3	2	13	106	23	4096	33	137391
4	2	14	103	24	3578	34	140661
5	5	15	200	25	8273	35	292081
6	4	16	205	26	8175	36	270258
7	11	17	465	27	16132	37	591443
8	10	18	405	28	1627	38	582453
9	21	19	961	29	34903	39	1156012
10	22	20	900	30	31822	-	-

g	n_g	g	n_g	g	n_g	g	n_g
0	1	10	204	20	37396	30	5646773
1	1	11	343	21	62194	31	9266788
2	2	12	592	22	103246	32	15195070
3	4	13	1001	23	170963	33	24896206
4	7	14	1693	24	282828	34	40761087
5	12	15	2857	25	467224	35	66687201
6	23	16	4806	26	770832	36	109032500
7	39	17	8045	27	1270267	37	178158289
8	67	18	13467	28	2091030	38	290939807
9	118	19	22464	29	3437839	39	474851445



Referências

[1] Apéry, R.: Sur les branches superlinéaires des courbes algébriques, C. R. Acad. Sci. Paris, **222**, 1198–1200, (1946).

[2] Barucci V., Dobbs D. E. and Fontana M., "Maximality Properties in Numerical Semigroups and Applications to One-Dimensional Analytically Irreducible Local Domains", Memoirs of the Amer. Math. Soc. 598 (1997).

[3] Beiler, Albert H.: "Recreations in the Theory of numbers : The Queen of Mathematics Entertains", Dover Publications, New York, 1964.

[4] Bras-Amorós M.: Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups of a given genus Semigroup Forum, **vol. 76**, Issue 2, 379–384, (2008).

[5] Brents, Sonja, Hogendijk, Jan P: Notes on Thabit ibn Qurra and his rule for amicable numbers, Historia Math, **16**, 373-378, (1989).

[6] Johnson,S. M.: A linear diofhantine problem, Can. J. Math., **12**, 390-398, (1960).

[7] Ramirez Alfonsín, J.L.: "The Diophantine Forbenius Problem ", Oxford University Press, London (2005).

[8] Fernandes Sara, Clara Gracio Clara, Correia Ramos Carlos: Systoles in discrete dynamical systems, Journal of Geometry and Physics, **63**, 129-139, (2013).

[9] Rødseth, Ø . J.:On a linear Diophantine problem of Frobenius, J. Reine Angew. Math. **301**, 171-178, (1978).

[10] Rosales, J.C., Branco M.B.: Numerical semigroups that can be expressed as an intersection of symmetric numerical semigroups, J. Pure and Applied Algebra, **171**, 303-314 (2002).

[11] Rosales, J.C., Branco M.B.: Irreducible numerical semigroups, Pacific J. Math. **209**, 131–143, (2003).

[12] Rosales, J.C. and Branco, M.B.: The Frobenius problem for numerical semigroups with multiplicity four, Semigroup Forum **83**, n°3, 468-478, (2011).

[13] Rosales, J.C., Branco, M.B., Torrão, D.: The Frobenius problem for Thabit numerical semigroups, J. of Number Theory **155**, 85-99, (2015).

[14] Rosales, J.C., Branco. M.B., Torrão, D.: The Frobenius problem for Repunit numerical semigroups, The Ramanujan Journal, 1-12, (2015).

[15] J. C. Rosales, J.C., Branco, M.B., Torrão, D,: The Frobenius problem for Mersernne numerical semigroups, Mathematische Zeitschrift, 286:741-749 DOI 10.1007/s00209-016-1781-z, (2017).

[16] Rosales, J.C., García-Sânchez, P.A.: "Numerical semigroups ", Developments in Mathematics, **vol. 20**, Springer, New York, (2009).

[17] Selmer, E.S.,: On linear diophantine problem of Frobenius, J. Reine Angew. Math., **293/294**, 1-17, (1977).