



UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ESCOLA DE CIÊNCIAS SOCIAIS

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

TÍTULO | MODELO DE OPTIMIZAÇÃO A UM FACTOR: APLICAÇÃO AO FTSE-100

Nome do Mestrando | Augusto Flores Pinto de Melo

Orientação | Prof.^a Doutora Elisabete Gomes Santana Félix

Mestrado em Economia Monetária e Financeira

Área de Especialização | Finanças

Dissertação

Évora, 2018



UNIVERSIDADE DE ÉVORA

JÚRI:

Presidente: Fernanda Peixe

Orientador: Elisabete Gomes Santana Félix

Arguente: Carlos Manuel Rodrigues Vieira



UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ESCOLA DE CIÊNCIAS SOCIAIS

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

TÍTULO | MODELO DE OPTIMIZAÇÃO A UM FACTOR: APLICAÇÃO AO FTSE-100

Nome do Mestrando | Augusto Flores Pinto de Melo

Orientação | Prof.^a Doutora Elisabete Gomes Santana Félix

Mestrado em Economia Monetária e Financeira

Área de Especialização | Finanças

Dissertação

Évora, 2018

A

António Melo e Ana Carmelino, meus pais queridos, pela dedicação em todas as batalhas.

Janyce Melo, filha querida, por me ter levado a aprender o sentido da vida.

Domingas Melo, minha esposa, por me ter proporcionado este motivo de felicidade e por toda a força e coragem.

Resumo

O objectivo da presente dissertação é comparar o desempenho de uma carteira, composta por acções que compõem o FTSE100, do modelo de optimização a um factor com o desempenho do próprio índice FTSE-100 no período compreendido entre 2010-2017.

A gestão de carteiras permite estabelecer uma relação de risco e rentabilidade, procurando desta forma e através de técnicas que têm sido estudadas e desenvolvidas por diversos investigadores de forma a otimizar os recursos disponíveis, dado que estes apresentam uma aversão ao risco.

A metodologia utilizada consistiu em avaliar os resultados obtidos com recurso ao modelo de Elton, Gruber and Padberg (1976), através da optimização da carteira no período analisado, verificou-se que existiam diversas empresas a integrarem a carteira óptima, conseguindo desta forma obter uma carteira bastante diversificada.

De forma a aferir a significância estatística realizaram-se os testes de Kolmogorov-Smirnov e Kruskal-Wallis. Da realização destes testes conclui-se que a utilização do modelo de Elton et al (1976) permite obter retornos superiores do que quando aplicado no FTSE-100.

Palavras-Chave: FTSE100, Mercado de Capitais, Optimização Financeira, Teoria de Carteiras.

ONE FACTOR OPTIMIZATION MODEL: APPLICATION TO THE FTSE-100

Abstract

The objective of this dissertation is to compare the performance of a portfolio, comprising the FTSE100 shares, from the optimization model of a one factor with the performance of the FTSE-100 index, in the period 2010-2017.

Portfolio management makes it possible to establish a risk and profitability relationship, looking in this way and through techniques that have been studied and developed by several researchers in order to optimize the available resources, since these have a risk aversion.

The methodology used was to evaluate the results obtained using the model of de Elton et al (1976), through the optimization of the portfolio in the analyzed period, it was found that there were several companies to integrate the optimal portfolio, achieving this way to get a fairly diversified portfolio.

In order to assess the statistical significance, the Kolmogorov-Smirnov and Kruskal-Wallis tests were performed. These results show that the use of the de Elton et al model (1976) allows higher returns than when applied in the FTSE-100.

Keywords: FTSE-100, Capital Markets, Financial Optimization, Portfolio Theory.

Agradecimentos

Sempre acreditei que para atingirmos determinado objectivo, precisamos agregar três variáveis: tempo; dedicação; e, colaboração. Estou grato a muitas pessoas que me apoiaram e incentivaram nas horas difíceis durante esta longa e difícil caminhada.

Primeiramente a Deus, por sentir a sua iluminação em cada passo por mim dado.

Aos meus pais, qualquer palavra que escreva nunca será suficiente para agradecer tudo o que são para mim e por isso dedico-lhes este trabalho.

À minha esposa, Domingas Melo, e à minha filha, Janyce Melo, pela paciência que tiveram ao longo destes tempos, pela minha ausência para poder redigir este trabalho.

À Prof.^a Doutora Elisabete Félix, orientadora desta dissertação, pela sua competência profissional, excelente orientação e valiosas sugestões que me foi dando durante a investigação.

À Coordenadora do Mestrado em Economia Monetária e Financeira, Prof.^a Doutora Fernanda Peixe, pela disponibilidade apresentada ao longo desta caminhada.

A todos os Professores do Mestrado em Economia Monetária e Financeira que contribuíram para que este sonho fosse possível de alcançar.

LISTA DE ABREVIATURAS

APT – Arbitrage Pricing Theory

B – Big

B/M – Book value/ Market value

CAPM – Capital Asset Pricing Model

C-CAPM – Conditional Capital Asset Pricing Model

CRSP – Center for Research in Security Prices

CSRT – Cross-Sectional Regression Test

D-CAPM – Downside Capital Asset Pricing Model

FTSE-100 – The Financial Times Stock Exchange Index

GRS – Gamma-ray spectra

H – High

HML – High minus Low

L – Low

LRT – Likelihood Ratio Test

M – Medium

MPT – Modern Portfolio Theory

NASDAQ – National Association of Securities Dealers Automated Quotations

NYSE – New York Stock Exchange

P/E – Price-Earnings Ratio

S – Small

SMB – Small minus Big

TSE – Tokyo Stock Exchange

VAR – Value-at-risk

WML – Win minus Lose

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	13
1.1 Enquadramento do Tema e Justificações da Escolha	13
1.2 Formulação do Problema e Objectivos	15
1.3 Metodologia.....	15
1.4 Estrutura do Trabalho	16
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
2.1 Modelos de gestão de carteiras.....	17
2.1.1 Teoria da Carteira de Markowitz	18
2.1.2 Capital Asset Pricing Model - CAPM.....	19
2.1.2.1 Críticas e testes ao CAPM	21
2.1.3 Modelo de Elton & Gruber.....	28
2.1.4 Modelos Multifactor	30
2.1.4.1 The Arbitrage Pricing Theory (APT).....	30
2.1.4.2 Modelo de três factores (Fama e French, 1993).....	33
2.1.4.3 Modelo de quatro factores (Carhart, 1997).....	36
2.1.4.4 Modelo de cinco factores (Fama e French, 2015)	37
3 METODOLOGIA	43
3.1 Objectivos e Hipóteses.....	43
3.2 Recolha de Dados e Amostra final	43
3.3 Variáveis e Modelos.....	45
4 RESULTADOS	49
4.1. Problema e objectivos.....	49
4.2. Análise à carteira óptima com recurso ao modelo de Elton & Gruber.....	54
4.3 Testes	60
5 CONCLUSÃO	63

6 BIBLIOGRAFIA..... 65

ÍNDICE DE EQUAÇÕES

Equação 1 – Variância da taxa de rentabilidade.....	18
Equação 2 – Modelo CAPM.....	20
Equação 3 – Retorno esperado da carteira óptima	29
Equação 4 – Risco da carteira óptima.....	29
Equação 5 – Peso dos activos na carteira	30
Equação 6 – Modelo APT	31
Equação 7 – Modelo de três factores	35
Equação 8 – Modelo de quatro factores	36
Equação 9 – Valor total de mercado da empresa.....	40
Equação 10 – Valor de mercado/ valor patrimonial.....	40
Equação 11 – Modelo de cinco factores.....	41
Equação 12 – Logaritmo Neperiano.....	44
Equação 13 – Ponto de corte.....	47
Equação 14 – Peso dos activos na carteira	47
Equação 15 – Fórmula Z_i	47
Equação 16 – Rentabilidade esperada da carteira óptima	48
Equação 17 – Beta da carteira óptima.....	48
Equação 18 – Risco da carteira óptima.....	48

ÍNDICE DE TABELAS

<u>Tabela 1: Descrição das empresas analisadas no FTSE-100</u>	50
<u>Tabela 2: Rendibilidade média das empresas cotadas no FTSE-100</u>	51
<u>Tabela 3: Retorno de mercado e retorno esperado</u>	56
<u>Tabela 4: Índice de atractividade e ponto de corte</u>	57
<u>Tabela 5: Retorno e risco da carteira óptima (FTSE-100)</u>	58
<u>Tabela 6: Rendibilidade do FTSE-100 e da carteira óptima</u>	60
<u>Tabela 7: Resultados do teste Kolmogorov-Smirnov</u>	61
<u>Tabela 8: Resultados do teste Kruskal-Wallis</u>	61

ÍNDICE DE GRÁFICOS

<u>Gráfico 1: Rendibilidade média dos activos</u>	52
<u>Gráfico 2: Risco dos activos</u>	53

1. INTRODUÇÃO

1.1 Enquadramento do Tema e Justificações da Escolha

No actual contexto do mercado de capitais e perante a incerteza em relação aos contornos da presente crise, a análise da taxa de retorno esperada num dado investimento mostra-se cada vez mais crucial. Para estimar essa taxa a metodologia mais utilizada segundo Raifur (2008), é o CAPM – Capital Asset Pricing Model, desenvolvido por Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966), utilizando como base o trabalho realizado por Markowitz (1952) acerca da teoria de carteiras e, por Tobin (1958) sobre a teoria de separação.

O modelo CAPM impulsionou o aprofundamento da investigação em finanças, através da relação linear estabelecida entre o retorno do activo e o retorno de mercado, perante uma situação de equilíbrio. Em virtude da sua importância passou a ser sobejamente estudado e testado (Rizzi, 2012).

Trabalhos iniciais apresentaram evidências aquando da utilização do modelo CAPM para explicar uma boa parte dos retornos observados (Black et al., 1972; Fama e French, 1973). Por outro lado, outras investigações realizadas, assinalaram o modelo CAPM como sendo incompleto e que determinadas características da empresa, tais como, dimensão, índice de valor contabilístico sobre o preço de mercado, crescimento das vendas, entre outros, provavelmente poderiam ser utilizadas para melhorar a explicação dos retornos observados (Basu, 1977; Banz, 1981; Fama e French, 1992).

Na tentativa de aperfeiçoar o modelo desenvolvido por Sharpe (1964), Fama e French (1993) propuseram a inclusão de dois factores ao modelo do CAPM: a dimensão da empresa; e, o índice de valor contabilístico do capital próprio sobre preço de mercado (índice *Book-to-Market* ou B/M). Estes factores foram escolhidos tendo como base os estudos de anomalias de mercado, constituindo, assim, o modelo multifactorial que ficou conhecido como o modelo de três factores de Fama e French (1993). Segundo os autores, os retornos das acções poderiam ser justificados pelo retorno do mercado, conforme apresentado no CAPM, pela dimensão da empresa e pelo índice *Book-to-Market*.

O estudo de modelos de equilíbrio de preços de activos é uma das áreas mais exploradas nos estudos académicos em finanças. Desde a taxonomia apresentada por Fama (1970) acerca da hipótese

de eficiência do mercado de capitais, desde então abriu-se espaço para a formulação de modelos de equilíbrio, utilizando diversas especificações para o comportamento dos diferentes activos. Tendo presente, que os investidores têm expectativas racionais, estes modelos são baseados em hipóteses restritivas acerca do comportamento dos investidores e o seu conjunto de oportunidades de investimento, o que implica alguma dificuldade na sua avaliação, ou seja, um teste específico aos modelos de comportamento dos retornos esperados representa um teste conjunto de modelos e de hipóteses sobre os quais são construídos. Podendo, assim, verificar-se que uma rejeição leva a duas interpretações: sendo a primeira atribuída à rejeição das hipóteses subjacentes, devendo o modelo ser ajustado; a segunda hipótese defende que a atribuição do fracasso se deve à má especificação do modelo.

Esta questão reveste-se de especial importância no que se refere à componente de risco não sistemático, que encontra-se associada a cada acção em particular, pode ser inteiramente diversificada, o presente modelo sugere que o índice de mercado não é capaz de capturar inteiramente toda a parcela de risco sistemático a que todas as acções estão sujeitas em maior ou menor intensidade. Ou seja, existem outros factores de risco sistemático, para o mercado de acções, ainda não identificados e que são condensados por factores relacionados a estratégias de investimento.

A presente dissertação baseia-se no facto de que as acções são afectadas pelo risco não sistemático, o que implica que a composição de uma carteira, por parte das instituições, está fortemente baseada na matriz de covariância entre as acções e o índice de mercado.

O objectivo do presente estudo é comparar o desempenho do modelo de optimização a um factor com o desempenho do índice FTSE-100 no período compreendido entre 2010-2017.

Perante isto, o presente trabalho tem como principal meta responder à seguinte questão:

Quais os títulos que deveriam incorporar a carteira óptima no índice FTSE, de modo a maximizar a riqueza do investidor?

Procurar compreender a aplicação deste modelo é crucial para conseguir-se evitar uma análise inadequada que pode sobre ou subavaliar o retorno esperado para um determinado activo, o que poderia impactar decisões de financiamento e investimento.

Por outro lado, esta dissertação visa: 1) contribuir para a promoção de discussões acerca do modelo de Elton et al (1976); 2) auxiliar quanto ao poder de análise do modelo de Elton et al (1976) (daqui em diante designado por Elton & Gruber), bem como, na relevância dos seus factores para poderem explicar os retornos dos activos e 3) encontrar evidências acerca do tema que permitam compreender a sua aplicação no Índice FTSE.

1.2 Formulação do Problema e Objectivos

O principal objectivo deste estudo é comparar o desempenho de uma carteira, composta por acções que compõem o FTSE100, do modelo de optimização a um factor com o desempenho do próprio índice FTSE-100 no período compreendido entre 2010-2017.

Para alcançar o principal objectivo deste trabalho foram estabelecidos os seguintes objectivos específicos:

- Proceder à recolha dos dados por forma a ser realizado o tratamento das séries temporais;
- Analisar as séries temporais obtidas;
- Testar empiricamente o modelo de Elton & Gruber, nas empresas listadas no FTSE.

1.3 Metodologia

Tendo presente como objectivo de facilitar a obtenção da carteira óptima apresentada por Markowitz (1952), Elton & Gruber sugeriram a aceitação do modelo de índice único com vista a facilitar a estimativa dos dados necessários à sua implementação, elevado tempo dispendido e os custos associados, tendo presente que o modelo é obtido com recurso à programação quadrática, sendo necessária a preparação dos profissionais na selecção das carteiras, de forma a poderem compreender a importância da relação existente entre o risco e o retorno.

Seguidamente, e tal como apresentado por Elton & Gruber, pretende-se construir a carteira óptima através da obtenção do índice de atractividade e do ponto de corte.

1.4 Estrutura do Trabalho

Tendo como finalidade a prossecução dos objectivos traçados, o presente trabalho está organizado em cinco capítulos: Introdução, Revisão da Literatura, Metodologia, Resultados e Considerações Finais.

O capítulo inicial apresentou a introdução ao trabalho, estando estruturada da seguinte forma: enquadramento do tema e justificações da escolha, formulação do problema e dos objectivos, metodologia e descrição da estrutura do trabalho.

O capítulo dois apresenta a revisão da literatura, onde é exposta as principais teorias para a constituição da carteira de investimentos, nomeadamente a teoria da carteira de Markowitz, modelo CAPM, modelo de Elton & Gruber, modelo multifactor, ou seja, apresenta a moderna teoria de carteiras e alguns dos principais modelos de precificação de activos no mercado financeiro, para além de apresentar os principais trabalhos empíricos que testaram o modelo CAPM e os modelos dele derivados.

No terceiro capítulo, apresentamos e descrevemos a metodologia a ser seguida na elaboração do estudo empírico, de forma a poderem ser atingidos os objectivos propostos. Sendo apresentados os objectivos e hipóteses de investigação, a recolha de dados e amostra, as variáveis e os modelos empíricos.

No quarto capítulo, é realizada a análise dos resultados, nesta fase é realizada a análise dos resultados obtidos através da utilização do modelo de Elton & Gruber.

Finalmente, o capítulo cinco e último apresenta as conclusões relativamente aos resultados obtidos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A fundamentação teórica procura explicar os principais modelos para a determinação do retorno esperado para investimentos. Os tópicos estão divididos em Risco, Capital Asset Pricing Model, Arbitrage Pricing Theory, Modelo de três factores de Fama e French, Modelo de quatro factores de Carhart e, por último, Modelo de cinco factores de Fama e French.

2.1 Modelos de gestão de carteiras

Markowitz (1959) afirma que a incerteza é uma característica saliente dos investimentos em activos, pois as forças económicas não são compreendidas suficientemente bem para que a previsão esteja livre de qualquer dúvida ou erro. Mesmo que as consequências das condições económicas sejam entendidas perfeitamente, há ainda influências não económicas que podem mudar o rumo do nível de mercado ou de um activo em particular.

Dada a grande complexidade em se trabalhar com risco na área de investimentos, surge a necessidade do desenvolvimento de teorias que ajudam os investidores a tomar decisões relacionadas à alocação de um portfólio de activos.

Num contexto de incerteza e tendo recursos limitados, os investidores seleccionam alguns activos em detrimento de outros, tendo em conta a diversidade de oportunidades oferecidas pelo mercado, e com vista à maximização da sua utilidade. Esta escolha é designada por carteira de activos ou, ainda, por portfólio. O investidor escolhe, assim, o portfólio óptimo tendo em consideração exclusivamente a média e a variância da rentabilidade dos activos, sendo que esta noção de eficiência da carteira parte do princípio de que o bem-estar do investidor aumenta com a rentabilidade esperada e diminui com o risco. Podemos ainda dizer, que uma carteira só é eficiente se, para o mesmo nível de risco, não existir uma outra carteira que permita obter uma rentabilidade esperada superior a esta. Este método é designado como a teoria da carteira de Markowitz.

2.1.1 Teoria da Carteira de Markowitz

Harry Markowitz (1952), alargou os horizontes acerca da, à altura referida como, nova teoria financeira associando o problema de valorização e da selecção de acções ao da gestão de carteiras, sendo o seu modelo um dos mais utilizados. A sua aproximação para a selecção de carteiras, que denominou de eficientes, baseava-se na rendibilidade esperada das acções e na variabilidade na obtenção dessas rendibilidades, ou seja, o risco da carteira. A finalidade do seu modelo foi a de combinar as acções numa carteira para reduzir o risco para um mesmo nível de rendibilidade. De realçar que a diversificação dos activos é conhecida como o marco mais importante na teoria das carteiras.

Considerando-se uma carteira composta por n títulos, a variância da taxa de rentabilidade é dada por:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{i,j} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_i x_j \sigma_{i,j} \quad (1)$$

Através da equação 1, temos que σ_p^2 corresponde ao risco da carteira medido pela variância, x_i peso do activo i na carteira, x_j peso do activo j na carteira e $\sigma_{i,j}$ covariância entre o activo i e j .

Um investidor racional irá procurar otimizar a rentabilidade esperada e minimizar o risco, perante esta situação, enfrenta um problema de escolha da combinação dos títulos que compõem a carteira, de formar à prossecução dos seus objectivos. Assim, a função do investidor é identificar aqueles activos em que deverá realizar o investimento, bem como as proporções do investimento total a ser aplicado em cada um dos activos.

Markowitz (1959), apresenta que, para o investidor, o retorno esperado e a volatilidade dos retornos esperados são os aspectos chave ao tentar estabelecer-se um portfolio óptimo.

Bodie, Kane e Marcus (2002) sustentam que, quanto maior for o número de activos considerados numa carteira, menor será o risco incorrido; todavia, atingir-se-á um ponto em que o risco tenderá para um valor fixo, sugerindo, desta feita, que, a partir de um determinado número de activos, a diversificação não produzirá efeitos expressivos.

Um dos contributos mais relevantes de Markowitz no âmbito da Moderna Teoria das Carteiras (MPT) foi, sem dúvida, o estabelecimento do conceito de fronteira eficiente, que corresponde ao lugar geométrico das carteiras que maximizam o rendimento esperado para cada nível de risco, considerando um determinado universo de activos. Nessa fronteira, encontra-se a denominada carteira eficiente, ou seja, aquela que otimiza a combinação entre o risco e a rentabilidade esperada.

2.1.2 Capital Asset Pricing Model - CAPM

Martins e Fernandes (2003, p. 221), referem que «A construção de modelos de equilíbrio geral permite obter uma medida relevante de risco para cada título, bem como a relação entre rentabilidade esperada e risco para cada activo quando os mercados estão em equilíbrio».

Entre os modelos que intentam determinar o preço dos activos financeiros em equilíbrio, pondera o CAPM. O CAPM marcou o início da teoria da avaliação de activos, permanecendo, no entanto, como uma das ferramentas mais utilizadas no domínio das finanças.

Embora a presente teoria esteja ancorada na teoria da carteira avançada por Markowitz e no modelo de mercado proposto por Sharpe (1963), a formalização do CAPM, tal como hoje a conhecemos, decorre, essencialmente, dos contributos autónomos de Sharpe (1964), de Lintner (1965) e de Mossin (1966). Estes contributos foram, em certa medida, complementares, pois, muito embora se encontrem, todos eles, focalizados no modo de determinação do preço dos activos, encerram diferentes perspectivas de análise e, outrossim, níveis diversos de complexidade matemática. A ideia fundamental subjacente ao CAPM é que, em equilíbrio, o mercado remunera os investidores em função do nível de risco assumido no seu investimento. No entanto, dado que parte do risco total de um activo pode ser eliminado via diversificação, apenas a parte do risco não eliminável é remunerada, estando o prémio de risco de um determinado título directamente relacionado com o contributo desse título para uma carteira eficientemente diversificada.

No presente modelo, o preço de um activo financeiro resulta do nível de risco de mercado associado a esse activo, tendo em conta que esse risco permite determinar o nível de rentabilidade pretendida pelo investidor. Por outro lado, o conceito de prémio de risco representa um papel principal

no âmbito do CAPM, dado que o investidor pretende ser compensado pelo facto de investir as suas poupanças em activos com risco, em alternativa ao activo sem risco.

Desta forma, obtemos a seguinte equação do modelo CAPM:

$$E(r_i) = r_f + [E(r_m) - r_f]\beta_i \quad (2)$$

Esta equação estabelece que, $E(r_i)$ rendibilidade esperada do activo i , r_f rendibilidade do activo sem risco, $E(r_m) - r_f$ corresponde ao prémio de risco, β_i risco de mercado da carteira i .

O CAPM assenta em determinados pressupostos relativos quer ao modo de funcionamento do mercado como também ao comportamento dos investidores, tais como: 1) O mercado de capitais é um mercado de concorrência perfeita, ou seja, nenhum investidor individual tem possibilidade de influenciar o preço dos activos; 2) O conjunto de possibilidades de investimento é apenas composto por activos transaccionados em mercados financeiros e tais activos financeiros são perfeitamente divisíveis, sendo o fundamental para assegurar a continuidade da fronteira eficiente de Markowitz, bem como da *Capital Market Line*; 3) Todos os investidores possuem um horizonte temporal de investimento igual a um período; 4) Não existem impostos, para o investidor é indiferente a forma como é remunerado o investimento, isto é, a remuneração por ganhos de capital ou a remuneração por dividendos é indiferente, por outro lado, também não existe custos de transacção; 5) Toda a informação está disponível de forma gratuita e instantânea a qualquer investidor; 6) Os investidores podem efectuar aplicações financeiras e contrair financiamentos à taxa de juro do activo sem risco (r_f); 7) Os investidores são racionais: são não saciáveis e são avessos ao risco; 8) Os investidores formulam as suas decisões apenas com base na taxa de rentabilidade esperada e respectivo desvio-padrão dos títulos ou carteiras de investimento; 9) Todos os investidores têm as mesmas expectativas quanto às taxas de rentabilidade esperadas, ao desvio-padrão das taxas de rentabilidade esperadas e às covariâncias entre a rentabilidade dos diversos activos financeiros.

No modelo CAPM, a economia funciona como se existisse um único investidor que opera num mercado de concorrência perfeita.

2.1.2.1 Críticas e testes ao CAPM

Entre as críticas mais marcantes dirigidas ao CAPM encontra-se a proferida por Roll (1977), a qual envolve questões tanto de foro teórico como do foro empírico.

No foro teórico, Roll (1977) aponta, desde logo, um paradoxo significativo: o CAPM erigiu-se, enquanto modelo, tendo por base a eficiência da carteira cópia de mercado; no entanto, paradoxalmente, a forma de testar a eficiência do mercado é por intermédio do CAPM. Assim, a eficiência do mercado e a eficiência do modelo devem ser testadas conjuntamente. Roll (1977) formalizou aquela que ficaria conhecida na literatura financeira como hipótese conjunta.

Em termos empíricos, Roll (1977) considera que a carteira cópia de mercado deve incluir todo o tipo de activos presentes numa dada economia e para os quais os investidores possam canalizar a sua poupança. Desta forma, a carteira de mercado, além dos activos financeiros, deve contemplar activos reais.

Segundo Sharpe, Alexander e Bailey (1995, p. 262), «devemos construir um modelo, de modo a observarmos como se forma o preço dos activos. Esta tarefa requer simplificação na qual quem formaliza o modelo deve abstrair-se da inteira complexidade da situação e focar apenas os elementos mais importantes. Isto poderá ser alcançado estabelecendo certos pressupostos a respeito da envolvente. Estes pressupostos devem ser simplistas...».

No entanto, existem algumas contradições relativamente ao modelo CAPM. Black, Jensen e Scholes (1972), constataram que existem fortes evidências para a rejeição do modelo CAPM, uma vez que, o retorno não é proporcional ao retorno do mercado, um aspecto relevante na determinação do retorno dos activos. Por outro lado, Black, Jensen e Scholes (1972), evidenciaram que existem outras hipóteses económicas que corroboram a existência de um segundo factor que permita o equilíbrio com o mercado. De forma a evidenciar esse facto, Fama e French (1992) destacaram não terem sido encontradas evidências que suportem o modelo CAPM.

Roll (1977), perspectivou o problema da composição da carteira de mercado, discutindo como sendo impossível compor uma carteira deste tipo, ou seja, uma carteira tal que incluia todos os activos do mercado. Sendo alguns destes activos difíceis de avaliar, como é o caso do capital intelectual, ou por

outro lado, sendo a conciliação difícil entre os preços das acções e os restantes activos, tais como imóveis. Desta forma, e como aproximação à carteira de mercado, no processo de resolução prático utiliza-se normalmente o índice de mercado, podendo esta abordagem para a formação da carteira de mercado distorcer os resultados do estudo, ou seja, o valor do coeficiente beta.

O coeficiente beta também tem sido alvo de críticas, Levy (1971) e Blume (1975) prestaram especial atenção à estabilidade do beta ao longo do tempo. Levy (1971) conclui que, com a utilização de betas históricos na previsão dos betas futuros, pode-se constatar uma subestimação das carteiras de beta inferior e sobrestimação das carteiras de beta superior. Por outro lado, Blume (1975) concluiu que, a longo prazo, o beta tende para um, isto é, converge para a média dos coeficientes beta, e o risco associado a cada empresa tende para o risco médio da indústria. Desta forma, podemos constatar que os betas históricos altos, isto é > 1 , tendem a sobrestimar betas em futuros períodos de tempo, e betas históricos baixos, ou seja < 1 , tendem a subestimar betas em períodos futuros.

Outro factor que também tem sido objecto de crítica é o activo livre de risco. Tendo presente que, na prática, utiliza-se o rendimento de títulos emitidos pelo Estado, para os quais o risco de incumprimento é reduzido, no entanto, havendo a possibilidade dessa ocorrência. Verifica-se que por vezes a taxa real dos retornos é apresentada muitas vezes como sendo negativa, devido à inflação.

Stambaugh (1982), ampliou a carteira de mercado, adicionando às acções norte-americanas comuns, acções preferenciais, obrigações públicas e privadas, investimentos móveis e imóveis. A análise incidiu sobre o período de Fevereiro de 1953 a Dezembro de 1976, tendo sido desenvolvida por constituição de quatro *proxys* para o índice de mercado. Estes resultados revelaram que o teste realizado ao CAPM não é sensível às alterações na carteira *proxy*, nomeadamente, através da ampliação da carteira a diferentes activos daqueles que correspondem às acções comuns. De salientar que, este facto verifica-se pela volatilidade dos retornos de mercado da nova carteira constituída serem dominados pela volatilidade dos retornos das acções. Stambaugh (1982), identifica ainda a impossibilidade de se conhecer todos os activos existentes e daí decorre a prática de se restringir a análise às acções. Observando, desta forma que, à medida que incluímos acções comuns no índice, aumenta a correlação das acções comuns no índice com o índice de mercado. Concluindo, assim, o autor que, pela utilização destas *proxies*, os testes rejeitam o CAPM tradicional, enquanto que na versão de Black (1972) não é rejeitada.

Roll e Ross (1994) e Kandel e Stambaugh (1995) discutem que o problema não se encontra no modelo, mas sim na incapacidade de identificar-se uma carteira de mercado para a *proxy* ser eficiente.

Kandel e Stambaugh (1987), derivaram a correlação entre uma carteira arbitrária e uma carteira situada sobre a fronteira eficiente. O seu estudo comprovou que a correlação existente surge maximizada quando as duas carteiras observam o mesmo retorno esperado, utilizando desta forma o resultado na derivação de testes à eficiência de uma determinada carteira em relação à *proxy* de mercado utilizada. A premissa que motiva a sua análise é a de que a *proxy* de mercado utilizada pode não coincidir, em média e variância, com a real carteira de mercado, tal como postula a teoria. Desta forma, e por analogia, observaram a carteira que admitia elevada correlação com a *proxy* de mercado e, explicando-a como a verdadeira *proxy* de mercado.

Gibbons (1982), determinou um rácio de verosimilhança (*Likelihood Ratio Test – LRT*) para o índice CSRP (*Center for Research in Security Prices*) na versão do CAPM ignorando o activo isento de risco. Os testes realizados rejeitaram a hipótese de eficiência em cinco dos dez subperíodos de cinco anos entre 1926 e 1975, bem como para o período completo mencionado. A maioria dos modelos financeiros é tipicamente estudada utilizando métodos de regressão *cross-section*, tal é o caso da análise da relação existente entre os retornos e os betas. Quando os betas são observáveis, tais modelos dependem de *proxys* ou estimativas que contêm necessariamente erros.

Shanken (1985), tal como apresentado por Gibbons (1982), examinou o CSRP, com ausência do activo sem risco, com recurso a regressões *cross-section* (*Cross-Sectional Regression Test – CSRT*). Apresentando como objectivo o teste *ex-ante* da relação linear entre os betas e os retornos esperados, implicando desta forma a eficiência da carteira de mercado, tendo os seus testes rejeitado a possibilidade de eficiência de mercado. Concluindo desta forma que os testes realizados por Gibbons (1982) tendem a rejeitar, em excesso, a eficiência, em média e variância, para amostras finitas. Alegando que ao contrário daquilo defendido por Gibbons (1982), Shanken (1985) discute que os testes multivariados devem ser entendidos como uma ferramenta adicional a utilizar conjuntamente com os métodos tradicionais e não necessariamente como um método alternativo, desta forma, o seu poder de explicação poderá ser maximizado. Devido ao facto de que a ineficiência detectada não ter sido explicada através do efeito dimensão.

Gibbons, Ross e Shanken (1989), desenvolveram um teste de *Wald* para a eficiência da carteira de mercado. Os autores aplicaram o teste com base num conjunto de dados bastante similares àqueles que foram utilizados por Black, Jensen e Scholes (1972). Esta abordagem multivariada conduziu a conclusões mais apropriadas que as inferências baseadas em conjuntos de estatísticas univariadas. Desta forma, o teste não rejeitou a hipótese nula do CSRP ser eficiente para o período de 1926 a 1982, apesar de rejeitá-la para alguns subperíodos de dez anos.

Haugen e Baker (1991), estudaram a eficiência das carteiras de acções ponderadas pela sua capitalização (*cap-weighted stock portfolios*). Tendo concluído que, mesmo na assumpção de mercados de capitais informacionalmente eficientes e de que todos os investidores agem racionalmente na optimização do binómio risco-retorno, estas carteiras representam a investimentos ineficientes.

Basak, Jagannathan e Sun (2002), desenvolveram um teste geométrico que apresentou como critério de decisão a distância horizontal da carteira face à fronteira eficiente, com particular adequação a investidores que pretendam a maximização dos retornos esperados dos seus investimentos. Por outro lado, Brière et al. (2012), abordaram um conjunto de investidores com diferentes objectivos, contornando a limitação anteriormente apresentada. O teste é baseado na medida da ineficiência vertical de Kandel e Satmbaugh (1995), Wang (1998) e Li et al. (2003), nomeadamente da diferença observada em termos do retorno esperado da carteira e do retorno esperado do seu valor homólogo de igual variância na fronteira eficiente. Sendo estes dois testes complementares. De forma idêntica ao teste de eficiência da carteira de mercado, onde as duas dimensões apresentadas, risco e retorno, são simultaneamente levadas em consideração, os testes horizontal e vertical podem ser utilizados em simultâneo.

Levy e Roll (2010) apresentam que pequenas variações dos parâmetros da amostra permitem tornar a proxy de mercado eficiente. Concludentemente os parâmetros dos retornos e a composição da carteira de mercado estimada empiricamente são consistentes com o CAPM. Os autores esclarecem que, enquanto os estudos realizados anteriormente sugerem variações distintas dos parâmetros dos retornos relativamente à amostra dos parâmetros e verificam em que medida estas variações conduzem a uma proxy de mercado eficiente, no entanto, os autores, adoptaram uma abordagem inversa.

Levhari e Levy (1977), demonstraram que se o horizonte temporal escolhido for menor que o verdadeiro, a estimativa do beta surgirá enviesada. Os autores referem que a duração do verdadeiro horizonte de investimento afecta os preços dos activos, sob condições de incerteza. Desta forma, concluíram que o horizonte temporal desempenha um papel fundamental no âmbito dos testes empíricos, e que qualquer desvio face ao verdadeiro horizonte provoca erro sistemático no coeficiente de regressão, ou seja, no risco sistemático. Por outro lado, este causa um erro sistemático no desempenho de cada título e, portanto, assiste-se ao distanciamento entre o modelo teórico e a evidência empírica.

Jensen (1969), testou a estacionaridade dos betas de 56 fundos de investimento, de forma sucessiva, durante os períodos de 1945-54 e 1955-64. Tendo apurado uma correlação significativa entre os dois períodos amostrais, para os quais se procedeu à estimação dos respectivos betas, concluindo desta forma, que os fundos tendem a suportar o seu nível de risco sistemático ao longo do tempo.

Levy (1971), analisou a estacionaridade, no curto prazo, dos betas de títulos e carteiras. Analisando, para o efeito, 13, 26 e 52 retornos semanais durante o período de Dezembro de 1960 a Dezembro 1970. Os resultados indicaram que a estabilidade dos betas variou positivamente com a dimensão da carteira e com o horizonte temporal, tal como já tinha sido concluído por Klemkosky e Martin (1975), à medida que se eleva o tamanho da carteira, os erros de previsão diminuem e, portanto, tende-se a observar a estabilidade do coeficiente ao longo do tempo. Levy (1971) conclui que, fazendo uso de betas históricos na previsão dos betas futuros, verifica-se a sobrestimação das carteiras de beta superior e a subestimação das carteiras de beta inferior.

Fabozzi e Francis (1978), defenderam que, em termos gerais, os betas das acções deslocam-se de forma aleatória ao longo do tempo, ao invés de permanecerem estáveis como pressupõe a teoria. Segundo os autores, permite explicar o facto de as acções da New York Stock Exchange (NYSE), em média, terem menos de metade do seu risco total explicado por factores de mercado. O beta verdadeiro desloca-se de forma aleatória, enquanto o beta previsto pelos modelos não é mais que uma estimativa pontual, que se mantém inalterada ao longo do período de amostra.

Handa et al.(1989) defenderam a possibilidade de estimação de diferentes betas, para a mesma acção, se considerados diferentes intervalos de análise dos retornos. Relatando, a este propósito, que o

efeito dimensão é sensível à magnitude do intervalo de retornos utilizado para estimar os betas. Concluindo assim os autores que os betas de acções com risco superior ao do mercado aumentam com o intervalo, enquanto os betas de acções com risco inferior ao do mercado diminuem com o intervalo dos retornos.

Handa et al.(1993), testaram o CAPM com a utilização de dados mensais e anuais. Rejeitaram o modelo quando utilizaram dados mensais sobre os retornos, pelo que o resultado é consistente com estudos já realizados. No entanto, quando alteraram a frequência dos dados, pela utilização de dados anuais, observou-se a não rejeição do modelo.

Face a estas críticas, o CAPM passou a ser alvo de inúmeros testes empíricos. A partir destes, surgiram algumas das suas falhas, uma vez que o poder explicativo do modelo não se apresentava como satisfatório face às análises, e portanto, a efectividade do mesmo passou a ser bastante questionada. De acordo com estas críticas, aguçou a curiosidade dos investigadores em finanças, nomeadamente no que se refere à procura de soluções que aumentassem o factor explicativo do CAPM. Novos modelos foram desenvolvidos com o objectivo de melhorar a medição do binómio risco-retorno na esfera financeira, tal como, o Modelo Condicional CAPM (*C-CAPM – Conditional Capital Asset Pricing Model*), o *Downside Capital Asset Pricing Model (D-CAPM)* e o Modelo de Avaliação por Arbitragem (*APT – Arbitrage Pricing Theory*), os quais suportariam um maior número de variáveis e uma melhor adequação dos pressupostos, tendo em vista as características de cada mercado.

Uma versão menos conhecida do CAPM, é uma versão de Black ou versão beta-zero (Black, 1972). Tal como na versão clássica do CAPM (versão Sharpe-Lintner), o retorno esperado de qualquer activo é proporcional ao seu risco relativo, que é uma medida da covariância dos retornos de activos e qualquer um dos portfólios eficientes. Contrariamente ao apresentado na versão clássica, o modelo CAPM na versão Black não implica a existência no mercado do activo sem risco. A diferença nas conclusões do modelo Black é que o retorno esperado de qualquer activo pode ser descrito pelo retorno esperado de qualquer carteira eficiente e pela rentabilidade de uma carteira hipotética, isto é, o activo com o beta igual a zero. Assim, o activo com o beta igual a zero é a combinação de activos com risco, cujo retorno tem uma covariância zero com a dada carteira eficiente e um menor nível de risco.

Uma outra versão apresentada acerca do modelo CAPM é o *Downside Capital Asset Pricing Model (D-CAPM)* desenvolvido por Estrada (2000). O modelo *D-CAPM* considera a semivariância como medida de dispersão, em alternativa à variância. Se a distribuição das rentabilidades dos activos é simétrica, não há problema algum em medir o risco pela variância, pois a probabilidade de ocorrerem desvios negativos e positivos face à média é a mesma. Se a distribuição é assimétrica, o que ocorre normalmente nos mercados emergentes, a variância deixa então de ser uma medida eficaz de risco, uma vez que a probabilidade de ocorrer um rendimento acima da média é diferente da probabilidade de se obter um rendimento abaixo da média. Uma das vantagens da semivariância é que esta considera indesejáveis apenas os retornos abaixo do esperado, enquanto a variância considera igualmente indesejáveis todas as variações dos retornos.

Hogan e Warren (1974), apresenta que o principal factor que motiva o uso da semivariância no lugar da variância é que a minimização da semivariância concentra-se na redução das perdas, por outro lado, a variância identifica como indesejáveis tanto ganhos extremos como perdas extremas. Isto é, o retorno esperado talvez seja sacrificado na eliminação de ambos os extremos.

Jagannatan e Wang (1996) desenvolveram o modelo CAPM condicional, considerando que a economia é dinâmica e tem vários ciclos de negócio, o que é compatível com a ideia de que os investidores estão continuamente a rever as suas expectativas em relação aos retornos dos activos.

Fama e French (1992), observaram que o CAPM tinha capacidade de explicação de 57% da variação *cross-section* dos retornos, pelo que a representação da carteira de mercado sugerida pelos autores introduz melhorias ao nível do desempenho do investimento.

Ribenboim (2004) realça o facto que o CAPM condicional permite que o prémio de risco de um activo possa mudar a partir da variância condicional entre o retorno do activo, o retorno da carteira de mercado e o prémio de risco da carteira de mercado. Segundo Ribenboim (2002) o CAPM condicional estabelece uma forma conveniente para a incorporação das variâncias e covariâncias que são alvo de modificações ao longo do tempo.

O modelo CAPM não considera todos os factores que afectam a rentabilidade, uma vez que é um modelo de um factor, sendo esta a sua principal desvantagem. Para além disso, a sua aplicação

torna-se algo limitada, dado que todas as condições prévias necessárias não são incluídas, tais como, não inclusão de impostos, custos de transacção, a opacidade do mercado financeiro.

No entanto, e apesar de todas as críticas de que tem sido alvo, o CAPM continua a ser ainda uma das principais conquistas científicas na área de finanças.

2.1.3 Modelo de Elton & Gruber

Para determinar a carteira óptima, tendo presente o modelo apresentado por Elton & Gruber, torna-se necessário aceitar o modelo de índice único e o modelo de correlação constante como uma fonte da estrutura de covariâncias entre os diversos activos.

O modelo apresentado por Markowitz (1952) não deixa de ser valorizado por Elton, Gruber e Padberg (1976), no entanto, salientam os obstáculos da operacionalidade no momento do seu desenvolvimento e a indisponibilidade de recursos tecnológicos.

Elton et al. (1976), apresentam alguns inconvenientes operacionais no desenvolvimento do modelo de Markowitz, tais como: apresenta alguma dificuldade para se estimar os dados necessários à sua implementação; elevado tempo despendido e os custos associados, uma vez que o modelo deverá ser obtido com o auxílio da programação quadrática; e, apresenta dificuldades no sentido de preparar e instruir os profissionais na escolha das carteiras, para que consigam compreender a importância da relação existente entre o risco e o retorno, tendo como ponto de partida as taxas de retorno, covariâncias e o desvio padrão.

Samanez (2006) afirma que o modelo de Markowitz (1952) necessita de estimativas das correlações de cada par de títulos que permitem a constituição de uma carteira. Este processo exige que para tal o analista detenha um certo nível de compreensão a nível da construção bem como a nível da interpretação da matriz de covariância, através do aumento do número de activos envolvidos aumenta o nível de complexidade.

Elton e Gruber (1995) apresentam que o modelo de selecção de carteiras óptimas de investimento tem como principal vantagem a maior facilidade na construção do modelo. Apresentando o modelo um método adequado quando considera o modelo de índice único, sendo a melhor maneira de apresentar a estrutura de covariância entre as taxas de retornos dos activos.

Segundo Reilly e Norton (2008), a covariância é uma medida que pode ser afectada pela variabilidade existente entre os dois índices de retorno individuais. Perante este facto, verifica-se que se o valor for negativo estamos perante a existência de uma relação negativa entre os índices, caso os dois índices sejam voláteis.

A selecção de carteiras óptimas, para além de ter uma metodologia de cálculo simples, demonstra o porquê de uma acção pertencer a uma carteira óptima.

Elton e Gruber (2004), afirmam que o índice de atractividade de Treynor, ou modelo de índice único, é o processo pelo qual utiliza-se para identificar os activos que serão seleccionados para a carteira óptima e tem como principal objectivo obter resultados similares aos obtidos com recurso à programação quadrática.

Através do índice de atractividade sabe-se que quanto maior for esse indicador maior será a rentabilidade excedente esperada por unidade de risco sistemático (Tosta de Sá, 1999).

Segundo Elton e Gruber (2004), após terem sido determinadas as proporções a serem investidas em cada título que irá compor a carteira óptima, dever-se-á efectuar os cálculos necessários para determinar o retorno esperado e o risco da carteira. Sendo assim, o retorno esperado da carteira óptima é obtido do seguinte modo:

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^N X_i \bar{R}_i \quad (3)$$

E,

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N X_i \sigma_{ei}^2 \quad (4)$$

O modelo apresentado (Elton e Gruber), demonstra que o somatório dos pesos dos títulos que compõem a carteira deverá ser igual a 1, isto é,

$$\sum_{i=1}^N |X_i| = 1 \quad (5)$$

2.1.4 Modelos Multifactor

Alguns estudos empíricos permitiram concluir que, na maioria dos casos, o valor da rentabilidade estimada pelo CAPM se afastava consideravelmente das cotações efectivamente observadas. Neste sentido, foram desenvolvidos modelos que incluísem mais do que uma carteira de activos de modo a aferir o risco de mercado. Estes modelos são designados por modelos multifactor, levando em consideração que cada um desses portfólios é identificado como um factor de risco, o modelo APT pode ser apreendido enquanto modelo multifactor, na medida em que comporta vários factores de risco (Neves e Quelhas, 2013).

2.1.4.1 *The Arbitrage Pricing Theory (APT)*

Em 1976, Ross propôs um modelo de valorização baseado nos princípios subjacentes às operações de arbitragem e que ficaria conhecido como Arbitrage Pricing Theory (APT). Enquanto o CAPM – bem como os modelos que dele procederam – se construíram tendo por base o binómio rentabilidade/risco, o modelo de arbitragem sustenta-se no princípio do preço único, de acordo com o qual o mesmo bem – no caso, o mesmo activo financeiro – não pode ser vendido, no mesmo momento, a dois ou mais preços diferentes.

Este modelo ultrapassa algumas das dificuldades observadas no âmbito do CAPM, levantando, no entanto, outros obstáculos à sua aplicação. No âmbito do CAPM, a rentabilidade esperada de um activo é função do respectivo risco de mercado; enquanto isso, no contexto do modelo APT a rentabilidade esperada de um activo depende de J factores de risco diferentes. Para além disso, a

aplicação do CAPM pressupõe a identificação inequívoca da carteira cópia do mercado, o que não constitui, de todo, um dos requisitos do modelo APT (Neves e Quelhas, 2013).

Se adoptarmos as directrizes relativas a dois portfólios, tais como, rendibilidade esperada, b_{p1} e b_{p2} , poderemos circunscrever um plano, segundo o qual as carteiras que resultem de possíveis combinações entre esses três portfólios se situam, necessariamente, nesse mesmo plano. Qualquer investimento realizado fora do plano assim definido cria oportunidades de arbitragem. Sem qualquer acréscimo de capital e sem incorrer em riscos adicionais, o investidor obterá ganhos até que esta carteira se coloque sobre o plano circunscrito pelos portfolios originais. Segundo Ross (1976), num mercado eficiente, as oportunidades de arbitragem serão rapidamente detectadas e eliminadas pelos investidores racionais.

$$E(r_i) = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} \quad (6)$$

A equação 6 apresenta, $E(r_i)$ que corresponde à rendibilidade esperada do activo i , λ_i a variação na rentabilidade esperada do activo i decorrente de uma variação unitária em b_{im} .

Hubermann (1982) sustenta que a principal vantagem do APT é que os seus testes empíricos não estão focados no portfólio de mercado, tal como acontece com outros modelos. Ross, Westerfield e Jaffe (2002) apresentam como conclusão que uma das vantagens do APT centra-se no facto de apresentar uma capacidade de lidar com vários factores, sendo este facto ignorado no modelo CAPM.

O modelo APT permite-nos responder a diversas questões empíricas que o modelo CAPM não consegue solucionar. Por outro lado, também permite a discussão dos diversos factores macroeconómicos que influenciam os retornos esperados dos diversos activos conjuntamente, não sendo estes factos, captados pelo CAPM.

O CAPM apresenta algumas limitações, em que se procurou ultrapassar com a implementação deste modelo, no entanto, levou à criação de outros obstáculos na sua aplicação. No âmbito do CAPM, a rendibilidade esperada de um activo é função do respectivo risco de mercado; por outro lado, no contexto do modelo APT, a rendibilidade esperada de um activo depende de J factores de risco diferentes. Para além disso, a aplicação do CAPM estabelece a identificação inequívoca da carteira cópia

de mercado, o que não constitui, na sua essência, um dos requisitos do modelo APT (Neves e Quelhas, 2013).

Roll e Ross (1980), realizaram um influente teste empírico ao APT que consistiu em dois passos: i) análise com séries temporais de rentabilidade de activos individuais, em que no primeiro passo, seria necessário estimar as rentabilidades esperadas e as exposições com base no método estatístico de *maximum-likelihood factor analysis*; ii) análise *cross-section*, em que neste passo, tendo presente os resultados obtidos anteriormente, estima-se, recorrendo a regressões *cross-section* das rentabilidades nos b_{ij} , os prémios de risco para cada factor.

Tal como podemos verificar, existem semelhanças entre este teste e os testes iniciais ao CAPM. De notar, contudo, que aqui temos uma importante diferença: enquanto no CAPM temos um único factor, ou seja, o índice de mercado; no caso do APT, temos também a determinação de quantos e quais os factores a entrar no modelo.

Roll e Ross (1980) utilizaram dados diários de 3 de Julho de 1962 a 31 de Dezembro de 1972, para 42 grupos de 30 títulos cada, cotados nos NYSE e AMEX (*American Stock Exchange*). Os resultados deste estudo serviram de apoio ao APT, ao indicar mais que um factor como sendo significativo. Os resultados no primeiro passo indicaram que, em 16 dos 42 grupos, há uma probabilidade superior a 90% que cinco factores sejam suficientes. Esta análise sugeriu que há grande probabilidade que a inclusão de cinco factores fosse suficiente. No segundo passo, os autores concluíram que pelo menos três factores são significativos, mas que é improvável que mais que quatro estejam presentes. De notar, que a sua análise variou, mediante a imposição ou não de uma taxa livre de risco de 6%.

Chen (1983), apresenta um outro estudo, utilizando *factor analysis*, utilizando uma base de dados diários de 1963 a 1978, obtendo resultados que o APT, recorrendo a cinco factores, tem um bom desempenho na explicação da rentabilidade. Encontrando também que o poder explicativo do APT é superior ao do CAPM.

Dhrymes, Friend e Gultekin (1984) colocaram em causa este tipo de análise pois observou, com *factor analysis*, o número de factores significativos aumenta com o número de títulos incluídos na análise.

Beenstock e Chan (1988), utilizando dados para o Reino Unido para realizar um teste ao APT, da lista de potenciais importantes variáveis macroeconómicas constam, por exemplo, oferta de moeda, um índice de custos da indústria manufactora, índice salarial, dias de paragem na indústria, volume de exportações, preço relativo das exportações, produto interno bruto, entre outros.

Grinold e Kahn (2000), referem que a maior dificuldade que poderá ser encontrada na tentativa de implementar o APT reside no facto de conseguir estabelecer os factores que expliquem a rentabilidade de uma forma consistente. Segundo os autores, o APT deixa bastante espaço para a criatividade que dois especialistas, trabalhando de forma independente, não chegarão a modelos práticos iguais na base da mesma informação. Não sendo de estranhar que a tarefa da selecção dos factores a integrar no APT, tenha já sido referenciado como envolvendo quase tanta arte como ciência:

“Selecting an appropriate set of macroeconomic factors involves almost as much art as it does science, and by now, it is a highly developed art.” Roll e Ross, 1994, p. 7).

Tal como verificado, têm existido bastantes trabalhos empíricos sugerindo a influência de vários factores na determinação da rentabilidade dos activos. Os resultados empíricos apresentam desta forma uma visão mais abrangente que o CAPM original, assumindo que, vários possíveis factores podem contribuir para o risco sistemático e não apenas um.

2.1.4.2 Modelo de três factores (Fama e French, 1993)

French e Fama (1993, 1996) propuseram um modelo explicativo da rendibilidade dos activos financeiros, com o qual intentaram ultrapassar algumas das críticas entretanto dirigidas ao CAPM.

Uma das primeiras hipóteses a ser testada foi o efeito dimensão, em que foi observado entre o período compreendido entre 1936-1975 que as empresas de pequena dimensão atingiam de forma reiterada retornos efectivos mais elevados do que os determinados por intermédio dos respectivos betas (Banz, 1981). Segundo Banz (1981), não existe qualquer fundamentação teórica para esse efeito e, desta forma, questiona a existência deste factor ou se, por outro lado, estaria correlacionado a qualquer outro factor desconhecido. No entanto, este factor desconhecido poderia ser a variável *B/M* (*Book*

value/Market Value), que relaciona os retornos médios das acções com o capital próprio e o mercado. Por outro lado, Reinganum (1981) constatou que esta relação desaparece quando a amostra é controlada pelo valor de mercado das empresas, desta forma exclui-se a possibilidade de o factor desconhecido poder ser explicado. No entanto, Reinganum (1980) constata que o efeito dimensão, tal como é conhecido na literatura financeira, ainda é significativo quando controlado pela relação *B/M*, desta forma constata-se que o efeito *B/M* é uma parte representativa para o efeito dimensão.

Klein e Bawa (1977), apresentam uma possível explicação do efeito dimensão ao corroborarem que, quando a informação disponível relativamente a um determinado activo é insuficiente, os investidores evitam a sua inclusão por não conseguirem determinar o risco, limitando desta forma a diversificação dos activos com mais informações, por outro lado, pode-se concluir que os investidores exigem retornos maiores por assumirem um maior risco em investirem em empresas de menor dimensão, para as quais existe menor informação por forma a fundamentar as suas decisões.

Basu (1983) observou que os activos com índice *P/E (Price-Earnings Ratio)* elevado apresentam rendibilidades mais elevadas do que o CAPM. Stattman (1980) e Fama e French (2004) afirmam que activos com elevados índices *B/M* têm elevadas rendibilidades médias que não são captadas pelos seus betas.

De acordo com Bhandari (1988), verificou-se a existência de correlação positiva entre alavancagem e rendibilidade esperada dos activos. Bhandari (1988) conclui que as empresas que apresentam um maior índice *debt-to-equity* eram as que evidenciavam os parâmetros beta mais elevados.

Foram apresentadas evidências que o retorno médio é influenciado pela relação *B/M*, o chamado efeito valor (Stattman, 1980). Por outro lado, Fama e French (1993) afirmam que empresas com baixo *B/M* têm retornos persistentemente mais elevados e empresa com um *B/M* alto apresentam retornos persistentemente menores.

Desta forma, Fama e French (1993) apresentaram o modelo de três factores (Mercado, Dimensão e Valor), no qual os factores Dimensão e Valor permitiam capturar a variação dos retornos, independentemente de outras variáveis, ou seja, a relação existente entre *B/M*, *P/E* e alavancagem. Desta forma, concluíram que o modelo de três factores era eficiente para explicar o retorno médio das

acções. Assim, o factor qualitativo dimensão poderia ser *B (Big)*, *M (Medium)* e *S (Small)* e o factor qualitativo *B/M (Book Value/Market Value)* poderia ser *H (High)*, *M (Middle)* e *L (Low)*. A partir destas classificações, consideraram seis (*SL, SM, SH, BL, BM* e *BH*) das nove combinações possíveis, criaram várias carteiras e trabalharam com valores médios mensais.

$$R_{it} - R_{Ft} = \alpha_i + b_i(R_{Mt} - R_{Ft}) + s_iSMB_t + h_iHML_t + e_{it} \quad (7)$$

Nesta equação, temos que R_{it} é o retorno do activo i no período t , R_{Ft} é o retorno do activo livre de risco no período t , R_{Mt} é o retorno da carteira de mercado no período t , SMB_t é a diferença entre os retornos de uma carteira diversificada de acções com baixo valor de mercado e alto valor de mercado no período t , HML_t , é a diferença entre os retornos de carteiras diversificadas com alto B/M e baixo B/M no período t .

Fama e French (1992), utilizando uma abordagem por regressão transversal sobre acções dos índices NYSE, AMEX e NASDAQ (*National Association of Securities Dealers Automated Quotations*), para o período compreendido entre 1940-1990 testaram em simultâneo o efeito das variáveis consideradas como anomalias no mercado, dimensão, índice (B/M e P/E) e risco de mercado, onde constataram que: 1) para o período entre 1963-1990 não existe relação positiva entre o risco de mercado medido pelo coeficiente beta e as rendibilidades médias; 2) para o período de 1961-1990 existe uma relação fraca, entre o risco de mercado e as rendibilidades médias; 3) existe uma relação negativa entre o efeito dimensão e as rendibilidades médias; 4) existência de uma relação positiva entre o índice B/M e rendibilidades médias; 5) os poderes explicativos do índice P/E e alavancagem são absorvidos pela combinação das variáveis dimensão e índice B/M .

Chan et al. (1991) recorrendo a dados de acções cotadas na Tokyo Stock Exchange (TSE), no período entre 1971 e 1988, verificaram a existência de uma relação significativa seccional, quer do ponto de vista estatístico quer do ponto de vista económico, entre o PBV e a taxa de rentabilidade das acções. Fama e French (1998) confirmaram, ainda, este resultado efectuando uma análise internacional que incluiu os EUA, 12 países da Europa, Austrália e a Ásia Oriental no período entre 1975-1995.

O factor SMB (*Small minus Big*) é obtido pela diferença mensal entre a média simples das rendibilidades das três carteiras *Small (S/L, S/M, S/H)* e a média das rendibilidades sobre as três carteiras *High (B/L, B/M, B/H)*. O factor de risco HML (*High minus Low*) é obtido pela diferença mensal entre a

média simples das rendibilidades das duas carteiras *High* (*S/H*, *B/H*), e a média das rendibilidades sobre as duas carteiras *Low* (*B/L*, *S/L*).

2.1.4.3 Modelo de quatro factores (Carhart, 1997)

Jegadeesh e Titman (1993) observaram um comportamento padrão tendo em consideração os activos com altas/baixas rendibilidades alcançadas no passado que tendem a apresentar rendibilidades superiores/inferiores durante um certo período de tempo e concluíram que este comportamento poderá dever-se à introdução de novas informações no mercado susceptíveis em estimar ou subestimar temporariamente o preço dos activos.

Segundo Carhart (1997), através da incorporação sucessiva de portfolios adicionais, será possível minimizar os erros de avaliação dos activos financeiros. Segundo o autor, a consideração de portfólios adicionais permitirá uma avaliação mais precisa e próxima do valor real dos activos.

Fama e French (1996, 2004) reconhecem que o modelo trifactorial não é capaz de explicar o comportamento anómalo designado por *momentum* por Carhart (1997), que classificam de efeito ímpeto e que consideram como sendo útil em aplicações cujos objectivos sejam para abstrair-se dos padrões conhecidos das rendibilidades médias que revelam efeitos associados a determinadas informações. No entanto, Fama e French (2004) referem que é irrelevante para a determinação da estimativa do custo do capital próprio.

A equação 8, representa o modelo de quatro factores de Carhart (1997), assim temos:

$$R_{it} - R_{Ft} = \alpha_i + b_i(R_{Mt} - R_{Ft}) + s_iSMB_t + h_iHML_t + c_iWML_t + e_{it} \quad (8)$$

Carhart (1997) propôs incluir ao modelo trifactorial de Fama e French (1993) o factor *momento* que se obtém através da diferença entre altas rendibilidades e baixas rendibilidades dos activos nos últimos 3 a 12 meses, referenciados por *Win Minus Lose* – *WML*, o qual evidencia ser capaz de captar grande parte da variação da rendibilidade dos fundos de investimento abertos, cujo modelo CAPM e trifactorial não conseguem explicar.

2.1.4.4 Modelo de cinco factores (Fama e French, 2015)

Novy-Marx (2013), identificou que as empresas que apresentam alta rentabilidade geram retornos médios significativamente superiores, o que leva a concluir que o factor Rentabilidade, tem um maior poder explicativo para os retornos do que para os lucros. Para além disso, Aharoni, Grundy e Zeng (2013), através dos testes realizados, concluíram que existe uma relação negativa entre os investimentos e o retorno, ou seja, constataram a existência do factor Investimento. Desta forma, Fama e French (2015) apresentaram o modelo de cinco factores, uma vez que os retornos médios relacionados à rentabilidade e ao investimento é deixado inexplicado pelo modelo de três factores de Fama e French (1993), o que leva os autores a examinarem um modelo que agrega rentabilidade e factores de investimento, aos factores mercado, dimensão e B/M ao modelo de três factores.

No entanto, após a apresentação do modelo de Fama e French (1993), começaram a ser testados novos factores ao modelo. Entre eles temos a Rentabilidade, que é determinada pela relação do lucro antes do imposto dividido pelo valor patrimonial da empresa ($RAII/VP$), desta forma, esperava-se que as empresas que apresentavam elevada rentabilidade tivessem retornos maiores do que aquelas que apresentavam rentabilidades menores. Novy-Marx (2013), após o seu estudo, verificou que empresas rentáveis geram retornos médios significativamente maiores do que empresas não rentáveis, mesmo apresentando um baixo B/M , o que indicaria um baixo retorno. O autor conclui, assim, que o factor Rentabilidade apresenta aproximadamente o mesmo poder do factor Valor para prever a média dos retornos, bem como que a rentabilidade apresenta um maior poder explicativo para explicar os retornos do que os lucros, desta forma contrapondo Fama e French (2006), que consideraram que os lucros tinham maior poder de explicação dos retornos.

Campbell e Shiller (1988), afirmam que a escolha de factores de rentabilidade e de investimento para aumentar a explicação do modelo deve-se à tautologia que define a taxa interna de rendibilidade e pela maior parte das investigações dos retornos serem numa perspectiva de curto prazo.

Chan, Hamao e Lakonishok (1991), Fama e French (1998, 2012), Griffin (2002), Hou, Karolyi e Kho (2011), identificam padrões de dimensão e B/M nos retornos de acções internacionais. De forma a estudar como os retornos internacionais relacionam-se com a rentabilidade e o investimento, Titman,

Wei e Xie (2013) mostram que o elevado investimento é acompanhado por reduzidos retornos médios em muitos mercados. Sun, Wei e Xie (2013) e Watanabe, Yu, Yao e Yu (2013) confirmam esse resultado e mostram que maior rentabilidade está associada a maiores retornos futuros.

Chordia, Goyal e Shanken (2015) afirmam que existem evidências de prémios beta positivos sobre os factores de rentabilidade e investimento de Fama e French (2014), existência de um prémio negativo sobre o factor dimensão e um prémio positivo no factor mercado.

Fama e French (2016) afirmam que o modelo de cinco factores melhora significativamente o desempenho para os padrões de anomalia dos retornos médios. No entanto, diferentes regiões apresentam diferentes tipos de anomalias, o que implica que a importância de um determinado Factor é diversa para diferentes regiões, tais como, os factores valor, rentabilidade e investimento são fortes para a América do Norte, Europa e Ásia-Pacífico, mas para o Japão há pouca relação dos retornos médios com rentabilidade e investimento (Fama e French, 2012, 2016).

Outra variável que foi estudada foi o factor Investimento, que pode ser determinada pelo crescimento nominal dos activos em relação com o ano anterior, ou seja, a diferença verificada entre o total do activo no ano $t-1$ e total do activo no ano $t-2$, divididos pelo total do activo em $t-1$. Aharoni, Grundy e Zeng (2013) concluíram que existe uma relação positiva entre o factor Retorno e os factores Valor, Retorno e Rentabilidade, no entanto, verificaram que a relação existente entre os factores Investimento e Retorno apresenta uma relação negativa. Segundo os autores, os trabalhos anteriores falharam na busca desta relação uma vez que utilizaram dados contabilísticos ao invés de utilizarem os dados de mercado para realizarem a análise da empresa.

Com efeito, Chordia, Goyal e Shanken (2015), demonstram que através da realização de testes para uma amostra das acções da NYSE, AMEX e NASDAQ durante o período 1963-2013, o que resulta na evidência de um prémio beta positivo sobre a rentabilidade (*RMW*) e de investimento (*CMA*), um prémio negativo sobre o factor dimensão (*SMB*) e um prémio positivo, no entanto, apresentando pouca robustez para o prémio do factor *B/M* (*HML*) ou o *momentum* (*MOM*). Por outro lado, verificaram que as taxas estimadas para o beta zero excederam a taxa livre de risco em pelo menos 6 pontos percentuais.

Fama e French (2015) constatam que o teste GRS (*Gamma-ray spectra*) rejeita todos os modelos considerados, isto é, indica que todos os modelos apresentados são descrições incompletas dos

retornos esperados. No entanto, Fama e French (2015) observam que o modelo de cinco factores, quando comparado ao modelo de três factores, não apresenta apenas estatísticas *GRS* menores, mas também a média dos interceptos é menor, o que indica que o modelo de cinco factores é mais adequado para explicar o retorno das acções.

Fama e French (2015) chegaram à conclusão que o factor valor é redundante, uma vez que a estatística *GRS* não melhora se compararmos o modelo de cinco factores com um modelo de quatro factores utilizando todos os factores, excepto o factor valor.

O modelo de cinco factores de Fama e French (2015) é de grande importância para explicar o retorno das acções, uma vez que consegue explicar entre 71% e 94% desses retornos verificados na NYSE, desta forma podemos afirmar que as principais variáveis já se encontram no modelo e a introdução de novas variáveis iria apenas obter ganhos marginais.

Baseado em evidências, os retornos médios das acções estão relacionados com as variáveis *B/M*, rentabilidade operacional e investimentos. Fama e French (2015) utilizaram o modelo de dividendos actualizados, isto é, o somatório do valor presente dos dividendos esperados, o que permite obter o valor de mercado de uma dada acção, por forma a explicar teoricamente o facto de as variáveis se relacionarem com os retornos.

Ruiz (2015), procurou replicar as metodologias apresentadas no estudo de Fama e French (2015) de forma a comparar os modelos de cinco, quatro e três factores para o mercado de capitais brasileiro.

Ruiz (2015), constatou que o factor Mercado apresenta um grande poder explicativo, uma vez que os coeficientes de regressão são estatisticamente significativos para os seis portfólios analisados, por outro lado, obteve sinal positivo, o que permite evidenciar que quanto maior o retorno do mercado, mais elevado será o retorno da carteira. Segundo o autor, o factor Dimensão apresentou que três coeficientes de regressão são estatisticamente significativos, uma vez que todos os portfólios possuíam acções de empresas que tinham sido classificadas como pequenas, sendo o sinal positivo, o que evidencia que quanto mais elevada for a diferença entre a dimensão das empresas pequenas e as grandes, maior será o retorno das acções das empresas menores. No que diz respeito ao factor Valor, os coeficientes de regressão são estatisticamente significativos, excluindo apenas o portfólio de empresas grandes e de valor neutro, ressalta-se ainda que os parâmetros com baixo *B/M* apresentam sinais

negativos, o que sugere que empresas com maior valor de mercado em relação ao património têm menores retornos. No entanto, os coeficientes com elevado B/M apresentam sinais positivos, o que evidencia que baixos valores de mercado relativamente ao seu património permitem aumentar os retornos. Por fim, quanto ao factor Rentabilidade apresenta sinais negativos nos portfólios com reduzido B/M , contrariando aquilo que seria de esperar, uma vez que seria de esperar uma relação positiva entre o retorno e a rentabilidade. Por outro lado, o factor Investimentos apresenta um sinal negativo, o que evidencia que grandes empresas e com elevado B/M tem um retorno menor. Segundo o autor, e tal como verificado por Fama e French (2015), apresentava como objectivo verificar qual dos modelos é mais adequado para analisar os retornos das acções brasileiras, utilizando para tal a estatística GRS , e apesar da estatística GRS indicar p-value alto para todos os modelos apresentados, é indicado que os modelos são incompletos, no entanto, verifica-se que o p-value reduz-se com a introdução dos novos factores, o que evidencia que o modelo de cinco factores apresenta melhorias em relação ao modelo de três factores.

De acordo com Fama e French (2015), Miller e Modigliani (1961) demonstram que o valor total de mercado da empresa é igual a:

$$VM_t = \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{E(Y_{t+\tau} - dB_{t+\tau})}{(1+r)^\tau} \quad (9)$$

A equação 9, apresenta que $Y_{t+\tau}$ representa o lucro total para o período $t + \tau$ e $dB_{t+\tau} = B_{t+\tau} - B_{t+\tau-1}$, representa a variação patrimonial.

Desta forma, se dividirmos a equação 10, pelo valor patrimonial em t , temos:

$$\frac{VM_t}{VP_t} = \frac{\sum_{\tau=1}^{\infty} E(Y_{t+\tau} - d_{t+\tau}) / (1+r)^\tau}{VP_t} \quad (10)$$

Por forma a identificarmos a relação existente entre o retorno esperado e B/M deve-se dar especial atenção à variável VM_t e τ . Se se verificar que as demais variáveis permanecem constantes, e caso haja aumento do valor de mercado de uma empresa, deverá existir uma redução da taxa de retorno de forma a que a equação permaneça constante, isto é, as empresas com maior valor de mercado devem apresentar menores retornos.

Para identificar a relação existente entre os factores retorno esperado e Investimento deve-se avaliar as variáveis B_t e τ . Caso as restantes variáveis permaneçam inalteradas, e caso se verifique que houve aumento dos investimentos esperados, que se verificam através do crescimento da variação patrimonial, deverá existir uma redução da taxa de retorno de forma a que a equação permaneça constante. Isto é, o crescimento dos investimentos resulta na diminuição dos retornos.

Por forma a identificar a relação existente entre o retorno esperado e rentabilidade devem-se avaliar as variáveis Y_t e τ . Caso as demais variáveis permaneçam inalteradas, e caso haja aumento do lucro, deverá existir um aumento da taxa de retorno para a equação permanecer constante. Isto é, maiores dividendos resultam em maiores retornos.

Tendo presente a análise apresentada e o factor rendimento, apresentado por Novy-Marx (2013), e o factor investimentos, apresentado por Aharoni, Grundy e Zeng (2013), que referem que ao modelo de três factores podemos adicionar estes dois factores de forma a aumentar o seu poder de explicação.

Assim, obtemos a equação do modelo de cinco factores:

$$R_{it} - R_{Ft} = \alpha_i + b_i(R_{Mt} - R_{Ft}) + s_iSMB_t + h_iHML_t + r_iRMW_t + c_iCMA_t + e_{it} \quad (11)$$

Através da equação 11, temos que R_{it} é o retorno do activo i no período t , R_{Ft} é o retorno do activo livre de risco no período t , R_{Mt} é o retorno do portfólio de mercado no período t , SMB_t é a diferença existente entre os retornos de um portfólio diversificado de acções com baixo valor de mercado e alto valor de mercado no período t , HML_t é a diferença existente entre os retornos de portfólios diversificados com alto B/M e baixo B/M no período t , RMW_t é a diferença existente entre os retornos de portfólios diversificados de acções com rentabilidade robusta e fraca no período t , e CMA_t é a diferença existente entre os retornos de portfólios diversificados de acções com investimentos conservadores e agressivos no período t e e_{it} representa o erro.

Importa realçar que para obtermos o modelo de três factores através deste modelo basta subtrair ao modelo os factores RMW_t e CMA_t à equação 11.

Por outro lado, Fama e French (2015), afirmam que se os cinco factores existentes no modelo capturarem toda a variação existente nos retornos esperados, o parâmetro α_i deve ser zero para qualquer portfólio.

3 METODOLOGIA

No capítulo anterior realizou-se uma breve revisão das evidências teóricas e empíricas produzidas nos últimos anos acerca da gestão de carteiras. Neste terceiro capítulo do presente trabalho pretende-se apresentar os objectivos e hipóteses da investigação, recolha dos dados e a amostra, as variáveis.

3.1 Objectivos e Hipóteses

O objectivo do trabalho consiste em comparar o desempenho de uma carteira, composta por acções que compõem o FTSE100, do modelo de optimização a um factor com o desempenho do próprio índice FTSE-100 no período compreendido entre 2010-2017, onde os investidores são avessos ao risco e desejam minimizar o risco mantendo o mesmo nível de rendibilidade, ou por outro lado, mantendo o mesmo nível de risco e procurando maximizar a rendibilidade esperada. Por forma a obter esta carteira óptima recorreu-se ao modelo de Elton e Gruber (1976).

Para alcançar o objectivo primordial da presente dissertação foram estabelecidos os seguintes objectivos específicos:

- Proceder à recolha dos dados por forma a ser realizado o tratamento das séries temporais;
- Analisar as séries temporais obtidas;
- Testar empiricamente o modelo de Elton & Gruber, nas empresas listadas no FTSE.

3.2 Recolha de Dados e Amostra final

A metodologia utilizada obedeceu a três etapas: (1) identificação da proxy da carteira de mercado: para tal, foi observado o índice FTSE-100, nomeadamente as acções das empresas listadas neste índice, para o período de 2010-2017, utilizando-se os dados semanais que foram extraídos da base

de dados da bolsa de valores, obtidas a partir do site <http://www.yahoo.finance.com>. Para este propósito foram utilizados os dados históricos de forma a poderem ser estimados os retornos e risco esperado para cada uma destas empresas que compõem o FTSE-100, pelo facto de haver uma grande subjectividade e dificuldades inerentes na sua previsão, partindo do pressuposto que estes dados históricos são relevantes, o que nos leva a crer que estes dados correspondem a uma representação razoável daquilo que poderá vir a ocorrer no futuro.

A amostra foi definida através das empresas constituintes do índice FTSE-100, no período referido anteriormente, levando em consideração a data de admissão e a data de saída da bolsa de valores, de tal forma, que a amostra apenas representa as empresas incluídas no FTSE-100.

Com o objectivo de comparar o desempenho da carteira óptima recorrendo ao modelo de optimização a um factor com o desempenho do índice FTSE-100, foram obtidos os dados das cotações de cada um dos activos que compõem o FTSE-100, utilizando para tal os dados obtidos no site <http://www.yahoo.finance.com>, em que para os quais foram determinadas as rendibilidades esperadas para cada um dos activos que compõem o FTSE-100, através do recurso às cotações semanais em retornos contínuos, tal como apresentado por Cerqueira (2015), utilizando para tal a seguinte fórmula:

$$t = \ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) \quad (12)$$

Tendo como base as cotações de fecho de cada segunda-feira para um período compreendido entre o dia 01 de Janeiro de 2010 e 30 de Abril de 2017, extraíram-se os dados das cotações. De realçar, que as cotações não estão corrigidas de dividendos. Posteriormente, e através do recurso às cotações semanais em retornos contínuos, obtiveram-se as respectivas rendibilidades esperadas de cada empresa, tendo sido analisadas apenas 79 empresas, devido ao facto de as restantes empresas não possuírem uma série temporal para todo o período analisado.

Para a determinação da taxa livre de risco, utilizou-se a média semanal da LIBOR para o período analisado.

3.3 Variáveis e Modelos

Para o modelo de Elton e Gruber, após terem sido determinadas as proporções a serem investidas em cada título que irá compor a carteira óptima, dever-se-á efectuar os cálculos necessários para determinar o retorno esperado e o risco da carteira, para tal, é necessário calcular o ponto de corte uma vez que este permite seleccionar as acções que irão compor a carteira óptima.

Elton e Gruber apresentaram o modelo de selecção de carteiras óptimas de investimento, tendo como principal vantagem a simplicidade metodológica nos cálculos de sua construção.

Este modelo apresenta detalhadamente um método que é adequado quando se considera o modelo de índice único a melhor maneira de descrever a estrutura da covariância entre as taxas de retorno dos activos.

Reilly e Norton (2008), definem covariância como sendo uma medida que pode ser afectada pela variabilidade existente entre os dois índices de retorno individuais. Se o valor assumido for negativo então estamos perante a existência de uma relação negativa entre os índices, caso os dois sejam voláteis.

A selecção de carteiras óptimas, para além de ter uma metodologia de cálculo simples, explica o facto de uma acção pertencer a uma carteira óptima. O modelo proposto utiliza as seguintes variáveis para um determinado período de tempo.

Primeiramente, calcula-se o retorno esperado por acção \bar{R}_i , seus respectivos retornos excessivos $(\bar{R}_i - R_f)$, sendo ambos em percentagens, betas β_i e o índice de atractividade $(\bar{R}_i - R_f)/\beta_i$, ou seja, o quociente entre o retorno excessivo e o beta de cada acção.

O índice de atractividade (IA) de Treynor, ou modelo de índice único, é o processo utilizado para identificar os activos que serão seleccionados nas carteiras óptimas, apresentando como objectivo reter resultados similares aqueles que são obtidos com o uso da programação quadrática.

“O índice de atractividade (IA) assume que o investidor não pode ficar à espera de ser remunerado pelo seu investimento por assumir um risco diversificável (σ_{ei}), visto que esse risco

possivelmente será eliminado por um processo de diversificação eficiente. Deste modo, o investidor apenas pode exigir uma remuneração adicional sobre a rentabilidade do título de renda fixa sem risco em virtude daquele risco não diversificável ou sistemático, em que ele é sempre obrigado a correr caso pretenda investir em activos de retorno incerto. A atractividade dos activos estará definida quando estas forem classificadas de acordo com o índice de atractividade uma vez que quanto maior o índice maior será a rentabilidade excedente esperada por unidade de risco sistemático” (Tosta de Sá, 1999, p. 103).

Ainda nesta etapa, deve-se ordenar as acções pela razão excedente sobre beta, da mais elevada à mais reduzida, este ordenamento representa o grau de interesse em incluir a acção na carteira.

Simplificando, se uma acção com razão $(\bar{R}_i - R_f)/\beta_i$ é incluída numa carteira óptima significa que todas as acções com razão mais elevada também são incluídas. O mesmo acontece se uma acção com razão $(\bar{R}_i - R_f)/\beta_i$ é excluída da carteira óptima significa que todas as acções com razão inferior são excluídas. Assim, o número de acções a incluir na carteira é determinado pela razão adoptada para fazer o corte.

A determinação do ponto de corte (C^*) tem por objectivo seleccionar as acções que deverão constituir a carteira óptima. As acções com índice de atractividade inferiores ao ponto de corte serão retiradas da carteira óptima, uma vez que aquelas que assumirem um índice de atractividade superior são consideradas para a constituição da carteira óptima.

Elton e Gruber (2004), apresentam que o valor do ponto de corte (C^*) é determinado utilizando as características de todas as acções pertencentes à carteira óptima. Para determinar é necessário calcular seu valor como se existissem diferentes números de acções na carteira óptima.

Em termos mais práticos, se admitirmos que C_i é um candidato a C^* , o valor de C_i é determinado com a pressuposição de que i acções pertencem à carteira óptima.

O cálculo de uma variável C_i como se acção fosse obtida em primeiro lugar, depois de ordenar de forma decrescente o índice de atractividade, fizesse parte da carteira óptima ($i = 1$); e tal que a

primeira e a segunda fizessem parte ($i = 2$); e como se a primeira, segunda e terceira fizessem parte ($i = 3$), e assim sucessivamente.

A equação do ponto de corte, defendida por Elton e Gruber (1976), é a seguinte:

$$C_i = \frac{\sigma_M^2 \sum_{j=1}^i \frac{(\bar{R}_j - R_f) \beta_j}{\sigma_{e_j}^2}}{1 + \sigma_M^2 \sum_{j=1}^i \frac{\beta_j^2}{\sigma_{e_j}^2}} \quad (13)$$

Onde:

C_i : valores determinados para as carteiras construídas somente com o primeiro activo (C_1), com os dois primeiros activos (C_2), etc., até aos quatro primeiros activos (C_4);

σ_M^2 : variância da carteira de mercado;

$\sigma_{e_j}^2$: risco residual.

Numa terceira etapa, e logo após se determinar as acções que fazem parte da carteira óptima, determina-se a proporção dos recursos disponíveis que devem ser investidos em cada acção, recorrendo à seguinte equação, onde X_i é a proporção a ser investida em cada acção:

$$X_i = \frac{Z_i}{\sum \text{inclu\u00eddos} Z_j} \quad (14)$$

$$Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{e_i}^2} \left(\frac{\bar{R}_i - R_f}{\beta_i} - C^* \right) \quad (15)$$

Onde C^* é o valor calculado na etapa anterior, aquando da determinação do ponto de corte.

A equação (14) representa o peso de cada uma das acções sendo que o somatório das suas componentes deve perfazer o total de um, assegurando assim a totalidade dos recursos (Elton e Gruber, 1976).

A equação (15) quantifica o valor de investimento associado a cada acção, a variância residual representada por, σ_{ei}^2 , determinando assim o valor investido por cada acção.

Depois de determinar a proporção de recursos a serem investidos em cada acção que deverão compor a carteira óptima, deve-se proceder aos cálculos necessários para a determinação do retorno esperado e risco da carteira.

Deste modo, o retorno esperado da carteira óptima pode ser apresentado pela seguinte equação:

$$\bar{R}_p = X_1\bar{R}_1 + X_2\bar{R}_2 + X_3\bar{R}_3 + \dots + X_n\bar{R}_n \quad (16)$$

Onde $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_n$, são as taxas médias de rentabilidade dos activos que compõem a carteira e os X_1, X_2, \dots, X_n , são as proporções a serem investidas na carteira pretendida.

Pode-se ainda, mensurar o beta da carteira óptima com o objectivo de analisar o nível de volatilidade na carteira, que é determinado da seguinte forma:

$$\beta_p = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + X_3\beta_3 + \dots + X_n\beta_n \quad (17)$$

Onde $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$, são os coeficientes betas de cada acção individual.

Uma vez calculado o beta da carteira óptima procede-se com o último cálculo que consiste no cálculo do risco da carteira óptima pela seguinte fórmula:

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2\sigma_M^2 + X_1^2\sigma_2^2 + X_2^2\sigma_3^2 + \dots + X_n^2\sigma_n^2 \quad (18)$$

Caso se verifique a primeira parcela do cálculo apresentado anteriormente, $\beta_p^2\sigma_M^2$, apercebe-se que está associada à variabilidade do retorno da carteira óptima em relação à carteira de mercado.

No entanto, verifica-se que a segunda parcela relaciona a variabilidade do retorno da carteira à variabilidade do risco residual de cada acção que compõe a carteira.

4 RESULTADOS

Para realizar-se a implementação do modelo de Elton & Gruber, tal como apresentado no capítulo da metodologia, construiu-se a carteira óptima, utilizando para tal as empresas representadas no índice FTSE-100 para o período em análise, tendo sido alvo da análise o risco, o retorno e o beta da carteira.

4.1. Problema e objectivos

Com o objectivo de comparar o desempenho da carteira óptima obtida através do modelo de optimização a um factor com o desempenho do índice FTSE-100. Para tal, este processo obedeceu a três etapas: (1) identificação da proxie da carteira de mercado: tendo sido analisado o índice FTSE-100, em particular as acções das empresas cotadas neste índice, para o período analisado (2010 – 2017), utilizaram-se os dados semanais que foram extraídos a partir do site <http://www.yahoo.finance.com>. Para a prossecução deste propósito foram utilizados os dados históricos de forma a poderem ser estimados os retornos e risco esperado para cada uma das empresas cotadas no FTSE-100, dada a dificuldade na determinação da previsão e uma elevada subjectividade, partiu-se do pressuposto que estes dados históricos eram relevantes, o que nos leva a crer que estes dados apresentam uma razoável representação daquilo que poderá porventura vir a ocorrer no futuro; (2) Determinação, pelo modelo de Elton & Gruber (1976), pretendendo-se construir a carteira óptima que minimize o risco. Para tal, e de forma a cumprir com os pressupostos do modelo, foram calculadas a variância e os retornos esperados dos títulos que estão representados no índice em análise, o beta de cada um dos activos e o respectivo índice de atractividade, e, por último, o ponto de corte para cada uma das acções; (3) Análise da Carteira quanto à eficiência e observância do efeito diversificação, neste ponto, procurou-se verificar a eficiência da carteira recorrendo a testes estatísticos.

Para a definição da amostra das empresas a constituir o FTSE-100 no período de 2010 – 2017, levou-se em consideração a data de admissão e a data de saída da bolsa de valores, de tal forma, que a amostra apenas representa as empresas incluídas no FTSE-100 durante o período analisado. Após este

critério de selecção dos activos a inserir para determinar a composição da carteira óptima, obteve-se a seguinte listagem de empresas a serem analisadas para o FTSE-100 constante da tabela 1.

Tabela 1: Descrição das empresas analisados no FTSE-100

Descrição empresas FTSE-100							
Símbolo	Nome		Símbolo	Nome		Símbolo	Nome
ADM.L	Admiral Group		IHG.L	Intercontinental Hotels Group		RDSB.L	Scotland Group Royal Dutch Shell-B
ATST.L	Alliance Trust		ITRK.L	Intertek Group		RSA.L	RSA Insurance Group
AAL.L	Anglo American		JMAT.L	Johnson Matthey		SGE.L	Sage Group
ANTO.L	Antofagasta		KAZ.L	KAZ Minerals		SBRY.L	Sainsbury
ABF.L	Associated British Foods		KGFL	Kingfisher		SDRC.L	Schroders PLC NON- VTG
AZN.L	Astrazeneca		LAND.L	Land Securities Group		SDR.L	Schroders PLC VTG
AV.L	Aviva		LGEN.L	Legal & General Group		SGRO.L	Segro
BA.L	BAE Systems		LLOY.L	Lloyds Banking Group		SRP.L	Serco Group
BARC.L	Barclays		LSE.L	London Stock Exchange Group		SVT.L	Severn Trent
BLT.L	BHP Billiton		LMI.L	Lonmin		SHP.L	Shire
BP.L	BP		EMG.L	Man Group		SN.L	Smith & Nephew
BATS.L	British American Tobacco		MKS.L	Marks and Spencer Group		SMIN.L	Smiths Group
BLND.L	British Land Company		MRW.L	Morrison Supermarkets		SSE.L	SSE
BT-A.L	BT Group		NG.L	National Grid		STAN.L	Standard Chartered
BNZL.L	Bunzl		NXT.L	Next		SL.L	Standard Life Aberdeen
CNE.L	Cairn Energy		OML.L	Old Mutual		TSCO.L	Tesco
CPI.L	Capita		PERSON.L	Pearson		TCG.L	Thomas Cook Group
CCL.L	Carnival		PRU.L	Prudential		TLW.L	Tullow Oil
CNA.L	Centrica		RRS.L	Randgold Resources		ULVR.L	Unilever
COB.L	Cobham		RB.L	Reckitt Benckiser Group		UU.L	United Utilities Group
CPG.L	Compass Group		REL.L	Relx		VOD.L	Vodafone Group
DGE.L	Diageo		RTO.L	Rentokil Initial		WTB.L	Whitbread
EXPN.L	Experian		RIO.L	Rio Tinto		WOS.L	Wolseley
FRES.L	Fresnillo		RR.L	Rolls-Royce Holdings		WPP.L	WPP
GFS.L	G4S		RBS.L	Royal Bank of			
GSK.L	Glaxosmithkline						
HMSO.L	Hammerson						
HSBA.L	HSBC Holdings						
IMT.L	Imperial Brands						
ISAT.L	Inmarsat						

Fonte: Elaboração própria

Sendo o FTSE-100 um índice que tem como base as 100 maiores empresas cotadas no Reino Unido, e sendo a base de dados constituída pelos retornos semanais durante o período de 01 de Janeiro de 2010 e 30 de Abril de 2017. Destes dados apresentados irão ser excluídas as empresas que não apresentem cotações na bolsa por um período superior a 8 anos.

Com o objectivo de obter a composição da carteira óptima, procedeu-se à determinação das rendibilidades esperadas em retornos contínuos para cada um dos activos que constituíram a nossa base de dados, para tal, recorreu-se aos dados das cotações semanais para cada um dos activos.

Tendo presente que os dados extraídos correspondem à cotação de fecho de cada segunda-feira para um período compreendido entre o dia 01 de Janeiro de 2010 e 30 de Abril de 2017.

A rendibilidade esperada para cada um dos activos pode ser visualizada na Tabela 2:

Tabela 2: Rendibilidade média das empresas cotadas no FTSE-100 (%)

Rendibilidade média das empresas cotadas no FTSE-100 (%)					
Empresas Cotadas	Rendibilidade Média	Empresas Cotadas	Rendibilidade Média	Empresas Cotadas	Rendibilidade Média
Admiral Group	0,1454	HSBC Holdings	-0,0340	Royal Bank S. G.	0,5380
Alliance Trust	-1,0191	Imperial Brands	0,1796	Royal Dutch B	0,0315
Anglo American	-0,2355	Inmarsat	0,0400	RSA Insurance	0,4198
Antofagasta	-0,0523	Interc. Hot. G.	0,3877	Sage Group	0,2775
Assc. Bri. Foods	0,3290	Intertek Group	0,3065	Sainsbury	-0,0467
Astrazeneca	0,1209	Joh. Matthey	0,1632	Schr. NON-VTG	0,1901
Aviva	0,0763	KAZ Minerals	-0,2890	Schroders VTG	0,2215
BAE Systems	0,1455	Kingfisher	0,0932	Segro	0,0872
Barclays	-0,0647	Land Secur. G.	0,1316	Serco Group	-0,3955
BHP Billiton	-0,1392	Legal & Gen. G.	0,3115	Severn Trent	0,2033
BP	-0,0818	Lloyds Bank. G.	0,0622	Shire	0,3437
Bri. Ame. Toba.	0,2530	London S. E. G.	0,4020	Smith & Nephe.	0,1774
Bri. L. Company	0,0879	Lonmin	-0,7728	Smiths Group	0,1129
BT Group	0,2143	Man Group	-0,1865	SSE	0,0518
Bunzl	0,3316	Marks & Spenc.	-0,0305	Standard Chart.	-0,2124
Cairn Energy	-0,1556	Morrison Supe.	-0,0489	Standard Life A.	0,1437
Capita	-0,0759	National Grid	0,1056	Tesco	-0,2321
Carnival	0,2004	Next	0,1847	Thomas Cook	-0,2454
Centrica	-0,0890	Old Mutual	0,1541	Tullow Oil	-0,4825
Cobham	-0,1634	Pearson	-0,0876	Unilever	0,1838
Compass Group	0,3182	Prudential	0,2551	United Utilities	0,1792
Diageo	0,1932	Randgold Reso.	0,0799	Vodafone	0,0909
Experian	0,2559	Reckitt Benckis.	0,2045	Whitbread	0,2950
Fresnillo	0,1678	Relx	0,2977	Wolseley	0,3503
G4S	0,0352	Rentokil Initial	0,1959	WPP	0,2692
Glaxosmithkline	0,0442	Rio Tinto	-0,0285		
Hammerson	0,0963	Rolls-Royce	0,1313		

Fonte: Elaboração própria

Da tabela acima podemos observar que das empresas cotadas no índice FTSE-100, a maioria destas empresas apresenta uma rendibilidade superior a zero, ou seja, positiva. Sendo as empresas com rendibilidade média mais elevada as seguintes: Royal Bank of Scotland Group (0,54%), RSA Insurance Group (0,42%), London Stock Exchange Group (0,40%), Intercontinental Hotels Group (0,39%) e

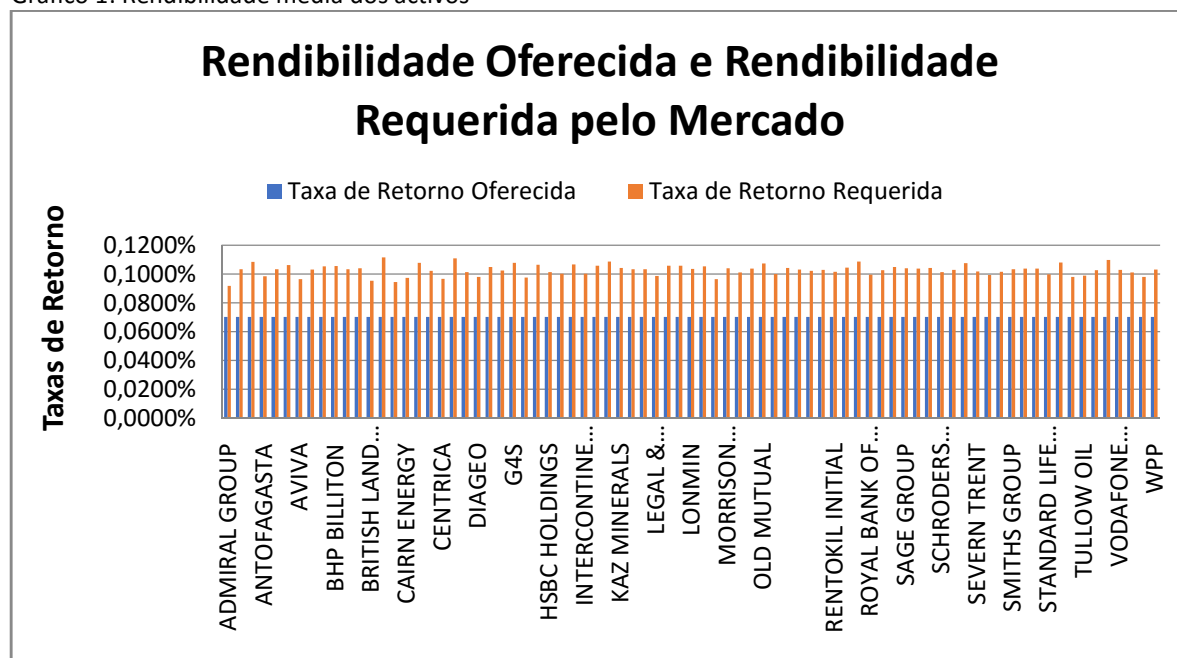
Wolseley (0,35%). De realçar pelo aspecto negativo da rendibilidade média obtida, a Alliance Trust que apresentou uma rendibilidade negativa de 1,02%.

De salientar o facto de as empresas com rendibilidade média positiva serem de sectores de actividade distintos, no entanto, com maior incidência no sector financeiro.

Recorrendo aos dados apresentados na tabela anterior, iremos determinar a carteira óptima, ou seja, a carteira que minimiza o risco.

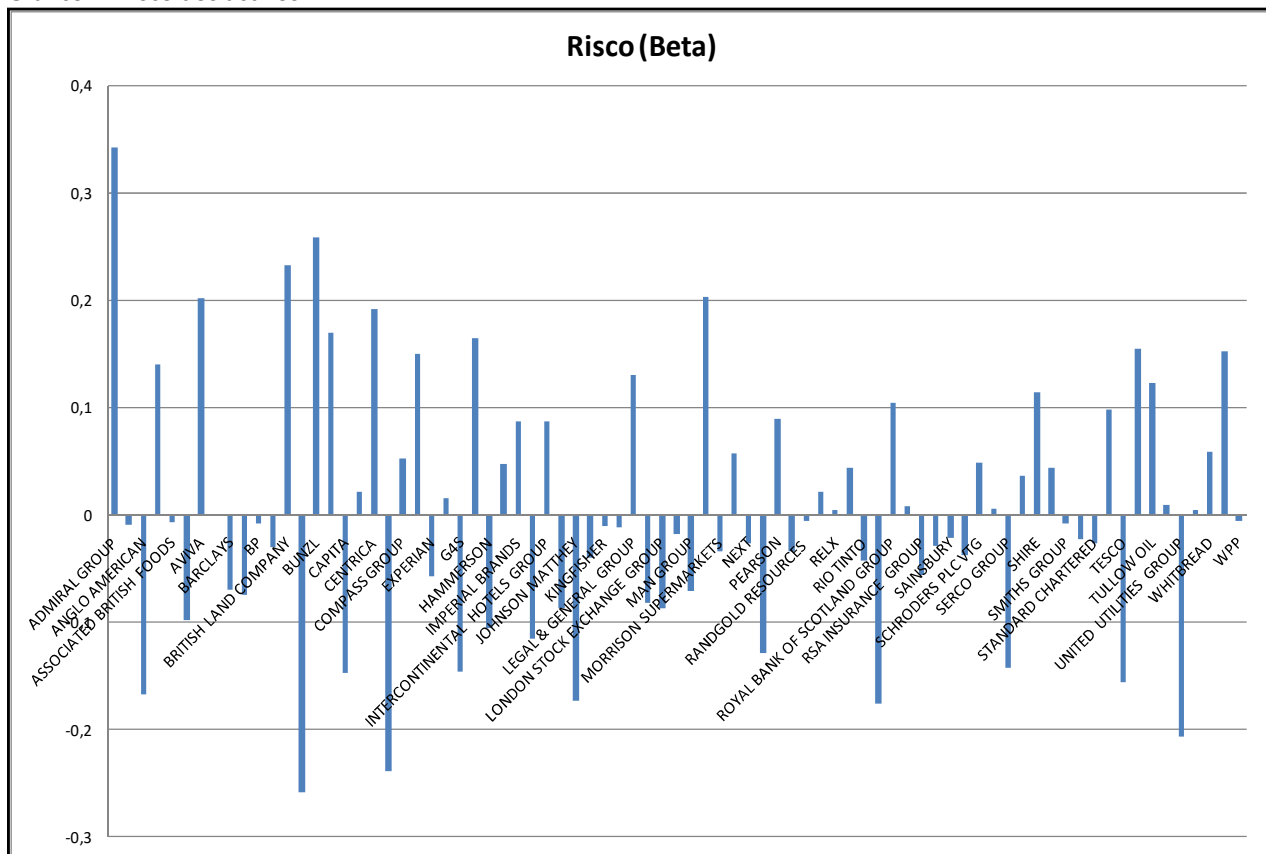
Os gráficos 1 e 2 introduzem a análise dos títulos afectos ao FTSE-100, em termos do retorno esperado e risco, medido pelo beta para cada um dos activos, que permite medir a sensibilidade dos activos às variações na rentabilidade da carteira de mercado. Sendo os gráficos apresentados referentes ao período de Janeiro de 2010 a Abril de 2017. Por outro lado, pode-se também verificar no gráfico 2 o risco para cada uma destas empresas.

Gráfico 1: Rendibilidade média dos activos



Fonte: Elaboração própria

Gráfico 2: Risco dos activos



Fonte: Elaboração própria

Conforme pode-se analisar a partir do gráfico 1, quando a acção é considerada boa para venda, as taxas de retorno requeridas pelo mercado encontram-se acima das taxas oferecidas pelo mercado, o que nos leva a interpretar como sendo uma boa oportunidade para que os agentes económicos vendam essas acções. No caso do FTSE-100, verificamos que as 79 empresas analisadas no FTSE-100 todas foram indicadas como sendo boas para venda.

Analisando os retornos oferecidos e os requeridos pelo mercado constatamos que o mercado oferece uma taxa média de rentabilidade em torno de 0,0702%, durante o período analisado, a taxa de retorno requerida encontra-se acima da taxa de retorno oferecida pelo mercado para todas as empresas analisadas. O que indica que estas acções encontram-se sobreavaliadas, ou seja, boas para venda.

Observando o gráfico 2, e segundo Cerqueira (2015), existem acções que apresentam um beta > 1, o que leva a caracterizar esse activo como sendo agressivo, ou seja, apresenta a mesma trajectória

que a do mercado, os restantes activos, apresentam um $\beta < 1$, o que nos leva a caracterizá-lo como sendo activos defensivos.

4.2. Análise à carteira óptima com recurso ao modelo de Elton & Gruber

Importa realçar que, na data em análise (Janeiro de 2018), o índice FTSE-100 apresentava cotações de 102 empresas. No entanto, para a nossa análise, foram retiradas as empresas que não apresentaram cotações para alguns dos períodos em causa, que para tal não serão alvo da nossa análise (Cerqueira, 2015).

Através do modelo de Elton & Gruber procedeu-se à determinação da carteira de variância mínima. Para tal, e de forma a cumprir com os pressupostos do modelo, foram calculadas a variância e os retornos esperados dos títulos que estão representados no índice em análise, o β de cada um dos activos e o respectivo índice de atractividade, e por último, o ponto de corte para cada uma das acções.

Através do modelo de Elton & Gruber procedeu-se à optimização da carteira de forma a obter-se a carteira de variância mínima, determinando-se primeiramente o retorno esperado pelo mercado e o retorno do mercado, de forma a decidir se compramos ou vendemos a acção (observe-se a tabela 3 abaixo). Desta forma, aquelas acções que apresentarem um retorno esperado pelo mercado superior ao retorno de mercado a decisão será de comprar a acção, com o objectivo da obtenção de um ganho (Cerqueira, 2015).

Pretende-se identificar aquelas acções que estejam subavaliadas em relação à taxa representativa de mercado, as quais podem ser sugeridas ao processo de compra e serem, eventualmente, vendidas em momento futuro ao justo valor¹, mantendo-se desta forma a expectativa de ganho (Cerqueira, 2015).

¹ «O justo valor revela as condições actuais do mercado, proporcionando, desta forma, informação atempada e, provavelmente, mais transparente» (Sá Silva, 2014 p. 11).

Desta forma, submeteram-se as acções ao modelo CAPM com a finalidade de poderem ser identificadas aquelas acções que se encontrem subavaliadas, ou seja, boas para serem adquiridas, ou sobreavaliadas, ou seja, boas para venda, de forma a poderem ser incluídas na carteira.

Tabela 3: Retorno de esperado e Retorno esperado pelo Mercado (segundo CAPM) para as empresas analisadas no FTSE-100 (%)

Ação	Retorno esperado	Retorno Esperado pelo Mercado	Decisão
ADMIRAL GROUP	0,0702	0,0918	Vender
ALLIANCE TRUST	0,0702	0,1033	Vender
ANGLO AMERICAN	0,0702	0,1085	Vender
ANTOFAGASTA	0,0702	0,0984	Vender
ASS. BRIT. FOODS	0,0702	0,1032	Vender
ASTRAZENECA	0,0702	0,1062	Vender
AVIVA	0,0702	0,0964	Vender
BAE SYSTEMS	0,0702	0,1030	Vender
BARCLAYS	0,0702	0,1053	Vender
BHP BILLITON	0,0702	0,1055	Vender
BP	0,0702	0,1033	Vender
BRIT. AM.TOBAC.	0,0702	0,1040	Vender
BRIT. LAND COMP.	0,0702	0,0954	Vender
BT GROUP	0,0702	0,1114	Vender
BUNZL	0,0702	0,0945	Vender
CAIRN ENERGY	0,0702	0,0974	Vender
CAPITA	0,0702	0,1078	Vender
CARNIVAL	0,0702	0,1023	Vender
CENTRICA	0,0702	0,0967	Vender
COBHAM	0,0702	0,1108	Vender
COMPASS GROUP	0,0702	0,1013	Vender
DIAGEO	0,0702	0,0981	Vender
EXPERIAN	0,0702	0,1049	Vender
FRESNILLO	0,0702	0,1025	Vender
G4S	0,0702	0,1078	Vender
GLAXOSMITHKLIN	0,0702	0,0976	Vender
HAMMERSON	0,0702	0,1064	Vender
HSBC HOLDINGS	0,0702	0,1014	Vender
IMPER. BRANDS	0,0702	0,1002	Vender
INMARSAT	0,0702	0,1068	Vender
INTERCO. HOTELS	0,0702	0,1001	Vender
INTERTEK GROUP	0,0702	0,1058	Vender
JOHN. MATTHEY	0,0702	0,1087	Vender
KAZ MINERALS	0,0702	0,1043	Vender
KINGFISHER	0,0702	0,1033	Vender
LAND SECURITIES	0,0702	0,1034	Vender
LEGAL & GENE.	0,0702	0,0987	Vender
LLOYDS BANKING	0,0702	0,1057	Vender
LONDON ST. E. G.	0,0702	0,1058	Vender
LONMIN	0,0702	0,1036	Vender
MAN GROUP	0,0702	0,1053	Vender

Ação	Retorno esperado	Retorno Esperado pelo Mercado	Decisão
MARKS & SPENC.	0,0702	0,0964	Vender
MORRIS. SUPER.	0,0702	0,1041	Vender
NATIONAL GRID	0,0702	0,1011	Vender
NEXT	0,0702	0,1039	Vender
OLD MUTUAL	0,0702	0,1072	Vender
PEARSON	0,0702	0,1001	Vender
PRUDENTIAL	0,0702	0,1041	Vender
RANDGOLD RES.	0,0702	0,1032	Vender
RECKITT BENCKIS.	0,0702	0,1023	Vender
RELX	0,0702	0,1028	Vender
RENTOKIL INITIAL	0,0702	0,1016	Vender
RIO TINTO	0,0702	0,1044	Vender
ROLLS-ROYCE	0,0702	0,1088	Vender
ROYAL BA. SCOT.	0,0702	0,0996	Vender
ROYAL DUTCH B	0,0702	0,1027	Vender
RSA INSURANCE	0,0702	0,1048	Vender
SAGE GROUP	0,0702	0,1039	Vender
SAINSBURY	0,0702	0,1037	Vender
SCHR. NON-VTG	0,0702	0,1042	Vender
SCHRODERS VTG	0,0702	0,1014	Vender
SEGRO	0,0702	0,1028	Vender
SERCO GROUP	0,0702	0,1077	Vender
SEVERN TRENT	0,0702	0,1018	Vender
SHIRE	0,0702	0,0993	Vender
SMITH & NEPH.	0,0702	0,1016	Vender
SMITHS GROUP	0,0702	0,1033	Vender
SSE	0,0702	0,1037	Vender
STAND. CHART.	0,0702	0,1039	Vender
STAND. LIFE AB.	0,0702	0,0998	Vender
TESCO	0,0702	0,1081	Vender
THOMAS COOK	0,0702	0,0979	Vender
TULLOW OIL	0,0702	0,0990	Vender
UNILEVER	0,0702	0,1027	Vender
UNITED UTILITIES	0,0702	0,1098	Vender
VODAFONE	0,0702	0,1029	Vender
WHITBREAD	0,0702	0,1011	Vender
WOLSELEY	0,0702	0,0980	Vender
WPP	0,0702	0,1032	Vender

Fonte: Elaboração própria

Após a decisão de compra ou venda de uma determinada acção, determinou-se o índice de atractividade. Com a obtenção do índice de atractividade, utilizou-se a técnica de ordenamento e determinação do índice de atractividade, de forma a serem submetidos ao modelo de Elton & Gruber para se fixar efectivamente as acções a comporem a carteira.

Desta forma, conclui-se a primeira etapa, que consiste em colocar por ordem decrescente do índice de atractividade as acções que serão incluídas na carteira óptima. Observe-se então a tabela 4.

Tabela 4: Índice de Atractividade e Ponto de Corte (FTSE-100)

Acção	Índice de Atractividade $(\bar{R}_i - R_f)/\beta_i$	Ponto de Corte C_i	Acção	Índice de Atractividade $(\bar{R}_i - R_f)/\beta_i$	Ponto de Corte C_i
ALLIANCE TRUST	1.1243	0.0000	COBHAM	0.0111	0.0024
RELX	0.4885	0.0011	IMPERIAL BRANDS	0.0089	0.0024
LONMIN	0.4749	0.0011	BUNZL	0.0089	0.0025
BP	0.2204	0.0013	KINGFISHER	0.0087	0.0025
STANDARD CHART.	0.1145	0.0014	DIAGEO	0.0061	0.0025
UNILEVER	0.0967	0.0016	INMARSAT	0.0055	0.0025
KAZ MINERALS	0.0954	0.0016	LLOYDS BANKING	0.0049	0.0025
SAINSBURY	0.0673	0.0017	G4S	0.0046	0.0025
RECKITT BENCKISER	0.0483	0.0018	STANDARD LIFE AB.	0.0042	0.0025
CARNIVAL	0.0470	0.0019	ADMIRAL GROUP	0.0012	0.0025
MORRISON SUPER.	0.0446	0.0020	HAMMERSON	0.0006	0.0025
FRESNILLO	0.0433	0.0020	NATIONAL GRID	0.0005	0.0025
ROYAL BANK OF S. G	0.0419	0.0020	BRITISH LAND C.	-0.0020	0.0025
COMPASS GROUP	0.0414	0.0020	AVIVA	-0.0013	0.0025
MAN GROUP	0.0401	0.0020	ROLLS-ROYCE	-0.0016	0.0025
RANDGOLD RESO.	0.0386	0.0020	ASTRAZENECA	-0.0018	0.0025
SERCO GROUP	0.0349	0.0020	JOHNSON MATTHEY	-0.0035	0.0025
WHITBREAD	0.0331	0.0021	GLAXOSMITHKLINE	-0.0036	0.0025
INTERCON. HOTELS	0.0328	0.0021	UNITED UTILITIES	-0.0037	0.0025
BHP BILLITON	0.0319	0.0021	OLD MUTUAL	-0.0039	0.0025
RIO TINTO	0.0301	0.0021	BT GROUP	-0.0043	0.0025
SEVERN TRENT	0.0284	0.0022	MARKS & SPENCER	-0.0066	0.0025
SCHRODERS VTG	0.0246	0.0022	CENTRICA	-0.0100	0.0024
BARCLAYS	0.0236	0.0022	ANTOFAGASTA	-0.0111	0.0024
SSE	0.0219	0.0023	SMITHS GROUP	-0.0113	0.0024
RENTOKIL INITIAL	0.0217	0.0023	CAIRN ENERGY	-0.0152	0.0024
TESCO	0.0214	0.0023	PEARSON	-0.0216	0.0024
SHIRE	0.0213	0.0023	LAND SECURITIES	-0.0221	0.0024
ANGLO AMERICAN	0.0202	0.0023	THOMAS COOK	-0.0225	0.0024
SMITH & NEPHEW	0.0175	0.0024	SCHROD. NON-VTG	-0.0226	0.0023
WOLSELEY	0.0162	0.0024	INTERTEK GROUP	-0.0234	0.0023
LEGAL & GENERAL	0.0160	0.0024	EXPERIAN	-0.0262	0.0023
CAPITA	0.0121	0.0024	HSBC HOLDINGS	-0.0288	0.0022

Acção	Índice de Atractividade $(\bar{R}_i - R_f)/\beta_i$	Ponto de Corte C_i
SEGRO	-0.0295	0.0022
NEXT	-0.0303	0.0022
LONDON STOC. E. G.	-0.0343	0.0021
VODAFONE GROUP	-0.0372	0.0021
PRUDENTIAL	-0.0439	0.0020
TULLOW OIL	-0.0478	0.0020
BRIT. AM. TOBACCO	-0.0488	0.0019

Acção	Índice de Atractividade $(\bar{R}_i - R_f)/\beta_i$	Ponto de Corte C_i
RSA INSURANCE	-0.0564	0.0019
SAGE GROUP	-0.0600	0.0018
ROYAL DUTCH B	-0.0905	0.0017
ASSOC. BRIT. FOODS	-0.2957	0.0013
WPP	-0.2964	0.0009
BAE SYSTEMS	-0.5138	0.0009

Fonte: Elaboração própria

A segunda etapa consiste em investir naquelas acções nas quais o índice de atractividade seja superior ao ponto de corte. Para tal, determinou-se o ponto de corte, isto é, o ponto que identifica quais as acções que deverão compor a carteira óptima.

O ponto de corte para as acções que compõem o FTSE-100 pode ser observado recorrendo à Tabela 4.

Elton & Gruber (2004) referem que para que uma acção incorpore a carteira óptima deverá possuir um índice de atractividade superior ao ponto de corte, evidenciando que aquelas acções cujo índice de atractividade seja inferior a este ponto deverão ser excluídas.

Após essa etapa, determinou-se, para aquelas acções cujo índice de atractividade era superior ao ponto de corte, o peso de cada activo na carteira, o retorno da carteira, beta da carteira e o risco da carteira. Na tabela 5, podem-se observar esses dados.

Tabela 5: Retorno e Risco da Carteira Óptima (FTSE-100)

Acção	Peso do Activo na Carteira	Retorno da Carteira Óptima	Beta da Carteira Óptima	Risco da Carteira Óptima
ALLIANCE TRUST	0,0181%	-0,0002%	0,0000	0,0031%
RELX	0,3693%	0,0011%	0,0000	0,0002%
LONMIN	0,0321%	-0,0002%	0,0000	0,0044%
BP	0,3085%	-0,0003%	0,0000	0,0005%
STANDARD CHARTERED	1,2302%	-0,0026%	-0,0003	0,0025%
UNILEVER	0,2938%	0,0005%	0,0000	0,0002%
KAZ MINERALS	0,5880%	-0,0017%	-0,0002	0,0046%
SAINSBURY	0,8852%	-0,0004%	-0,0002	0,0009%
RECKITT BENCKISER GROUP	1,0726%	0,0022%	0,0002	0,0006%
CARNIVAL	0,3862%	0,0008%	0,0001	0,0006%
MORRISON SUPERMARKETS	1,5504%	-0,0008%	-0,0005	0,0014%
FRESNILLO	0,0739%	0,0001%	0,0000	0,0003%

Acção	Peso do Activo na Carteira	Retorno da Carteira Óptima	Beta da Carteira Óptima	Risco da Carteira Óptima
ROYAL BANK OF SCOTLAND	0,6483%	0,0035%	0,0007	0,0125%
COMPASS GROUP	0,0062%	0,0000%	0,0000	0,0029%
MAN GROUP	1,5761%	-0,0029%	-0,0011	0,0060%
RANDGOLD RESOURCES	0,0145%	0,0000%	0,0000	0,0000%
SERCO GROUP	7,1588%	-0,0283%	-0,0102	0,0185%
WHITBREAD	2,9436%	0,0087%	0,0017	0,0031%
INTERCONTINENTAL HOTELS	5,6522%	0,0219%	0,0049	0,0072%
BHP BILLITON	1,9160%	-0,0027%	-0,0015	0,0050%
RIO TINTO	0,6563%	-0,0002%	-0,0003	0,0016%
SEVERN TRENT	1,3208%	0,0027%	0,0005	0,0009%
SCHRODERS PLC VTG	0,9637%	0,0021%	0,0005	0,0016%
BARCLAYS	1,2044%	-0,0008%	-0,0009	0,0034%
SSE	0,4527%	0,0002%	-0,0001	0,0003%
RENTOKIL INITIAL	0,9906%	0,0019%	0,0004	0,0011%
TESCO	9,0714%	-0,0211%	-0,0142	0,0128%
SHIRE	4,1814%	0,0144%	0,0047	0,0068%
ANGLO AMERICAN	3,4437%	-0,0081%	-0,0058	0,0142%
SMITH & NEPHEW	0,8730%	0,0015%	0,0004	0,0008%
WOLSELEY	7,0820%	0,0248%	0,0108	0,0104%
LEGAL & GENERAL GROUP	4,4723%	0,0139%	0,0058	0,0075%
CAPITA	3,8811%	-0,0029%	-0,0058	0,0059%
COBHAM	7,6883%	-0,0126%	-0,0184	0,0142%
IMPERIAL BRANDS	1,9279%	0,0035%	0,0017	0,0013%
BUNZL	18,8427%	0,0625%	0,0487	0,0128%
KINGFISHER	0,0231%	0,0000%	0,0000	0,0000%
DIAGEO	4,0051%	0,0077%	0,0060	0,0023%
INMARSAT	0,6559%	0,0003%	-0,0008	0,0012%
LLOYDS BANKING GROUP	0,2028%	0,0001%	-0,0002	0,0005%
G4S	1,0443%	0,0004%	-0,0015	0,0013%
STANDARD LIFE ABERDEEN	0,2924%	0,0004%	0,0003	0,0005%
Carteira	100,00%	0,0897%	0,0253	0,1760%

Fonte: Elaboração própria

O factor decisivo para definir a participação na carteira é o risco diversificável, próprio de cada acção, ou seja, independentemente do índice de atractividade, que expressa o retorno excessivo por beta (Tosta de Sá, 1999).

Este fenómeno explica o facto de a Alliance Trust participar com apenas 0,02% na carteira óptima possuindo um índice de atractividade de 1,1243, enquanto a Bunzl possuía 0,0089 de índice de atractividade representa 18,84% na composição da carteira óptima.

Após a análise verificou-se que a carteira apresenta um retorno esperado de 0,090% e um risco da carteira de 0,18%.

Se analisarmos esse facto tendo em conta a rendibilidade esperada da carteira de mercado (FTSE-100), verificamos que a rendibilidade obtida com esta carteira, que foi composta através do modelo de Elton & Gruber, é superior à obtida no índice FTSE-100, tal como pode ser verificado na tabela 6.

Tabela 6: Rendibilidade do FTSE-100 e da Carteira Óptima- EG

Carteira	Rendibilidade Esperada
FTSE-100	0,0702%
Carteira Óptima - EG	0,0897%

Fonte: Elaboração própria

Para a elaboração da tabela 6, utilizou-se a estimativa do FTSE-100, incluindo as 102 empresas que o compunham àquela data, para o período analisado (2010-2017), e procedeu-se à comparação com a rendibilidade esperada obtida através da utilização das 79 empresas que foram utilizadas para a obtenção da carteira óptima, recorrendo ao modelo de Elton & Gruber, através do qual 42 dessas empresas obtiveram um índice de atractividade superior ao ponto de corte, pelo que a carteira de Elton & Gruber é composta por essas 42 empresas.

Com a carteira óptima recorrendo ao modelo de Elton & Gruber, melhorou-se a rendibilidade esperada em cerca de 0,0195 pontos percentuais.

Na secção seguinte apresentam-se os resultados obtidos com os testes estatísticos, de forma a verificar se as diferenças existentes nos retornos da carteira óptima, obtida através do modelo de Elton & Gruber e o índice FTSE-100 são significativas.

4.3 Testes

Tendo como objectivo analisar a significância estatística para a média entre as duas amostras, ou seja, a carteira óptima obtida através do modelo de Elton & Gruber e o índice FTSE-100, realizaram-se os testes não paramétricos Kolmogorov-Smirnov e Kruskal-Wallis. O teste Kolmogorov-Smirnov, a um

nível de significância (α) de 5%, para a média da carteira de Elton & Gruber e para o índice FTSE-100 indicaram a normalidade dos dados.

A tabela 7 apresenta os resultados obtidos com a utilização deste teste não paramétrico (Kolmogorov-Smirnov).

Tabela 7: Resultados do Teste Kolmogorov-Smirnov

Teste Kolmogorov-Smirnov	Carteira Elton & Gruber	FTSE-100
N	382	382
Média	1341,06	60,45
Desvio-Padrão	174,97	5,31
Estatística de Teste	0,4996	0,4974
Valor Crítico		1,3581
Nível de significância		5%
Resultado do Teste (H_0)	Não se rejeita	Não se rejeita

Fonte: Elaboração própria

Dado que o valor observado da estatística de teste é 0,4996 é inferior ao valor crítico (1,3581), então não se rejeita a hipótese nula de diferença para a média entre as duas amostras, da carteira ótima de Elton & Gruber e o índice FTSE-100. Há, portanto, evidência estatística, ao nível de significância de 5%, de que os valores da análise se distribuem de forma diferente nas duas carteiras, ou seja, podemos afirmar que há diferença entre os retornos obtidas na carteira ótima de Elton & Gruber e no índice FTSE-100.

Da mesma forma, e para analisar a igualdade das medianas dos retornos ao nível de significância estatística de 5%, realizou-se o teste para a normalidade Kruskal-Wallis. Na tabela 8 são apresentados os principais resultados deste teste.

Tabela 8: Resultados do Teste Kruskal-Wallis

Teste Kruskal-Wallis		
Carteira	N	Ave Rank
Carteira Elton & Gruber	382	573,5
FTSE-100	382	191,5
Nível de Significância		5%
Df		1
H Test Statistic		572,2431
p-Value		0,0000
Resultado do Teste (H_0)		Rejeição

Fonte: Elaboração própria

Os resultados do teste Kruskal-Wallis apresentados na tabela 8 permitem aferir que, ao nível de significância de 5%, há evidência suficiente para rejeitar a hipótese nula para a igualdade das medianas dos retornos, isto é, utilizando este teste estatístico podemos afirmar que existe diferença entre os retornos da carteira óptima obtida através do modelo de Elton & Gruber e o índice FTSE-100.

Bruni e Paixão (2009), analisaram se as diferenças entre os retornos das carteiras de acções e índices são significativos, tendo para tal utilizado os testes não-paramétricos Kruskal-Wallis e Mood a um nível de significância de 5% para os retornos das carteiras de Elton-Gruber e para a Ibovespa, chegando à conclusão que há evidência suficiente para rejeitar a hipótese nula para a igualdade das medianas dos retornos, ou seja, os autores afirmam que existe diferença entre os retornos das carteiras optimizadas através do modelo de Elton-Gruber e a Ibovespa. Por outro lado, Cerqueira (2015), de forma a testar a normalidade da carteira, utilizou o teste não-paramétrico Kolmogorov-Smirnov, de forma a comparar a função de distribuição cumulativa empírica dos dados da amostra com a distribuição esperada considerando-se dados normais, analisando-se a um nível de significância de 5% para as carteiras de Elton-Gruber e para o PSI-20, tendo os testes referenciado a não normalidade dos dados.

Estes resultados corroboram com a utilização do modelo de Elton & Gruber e o FTSE-100, indicando que existem vantagens da utilização do modelo apresentado. Validando desta forma a hipótese apresentada inicialmente, que, com a utilização do modelo de Elton & Gruber, podemos obter desempenho superior àquele verificado no índice FTSE-100 para o período compreendido entre Janeiro de 2010 e Abril de 2017.

5 CONCLUSÃO

A investigação científica em mercado de capitais tem evoluído nos últimos anos de forma significativa, o que levou inúmeros investigadores a analisarem determinados factores que poderiam influenciar a decisão do investidor, principalmente devido ao surgimento de diversos produtos financeiros, procurando otimizar os seus recursos.

Para este estudo procurou-se otimizar uma carteira (obtenção da composição da carteira de mínima variância) recorrendo ao modelo de optimização a um factor, ao longo do período de 2010-2017, no grupo de empresas cotadas no FTSE-100.

Recorrendo aos dados históricos realizou-se a optimização da carteira através do modelo de Elton & Gruber, sendo o modelo de Elton & Gruber caracterizado pelo modelo de índice único para incorporação dos activos na carteira óptima. Tendo-se obtido a composição da carteira óptima das empresas cotadas no índice FTSE-100, em que 42 dessas empresas apresentaram um índice de atractividade superior ao ponto de corte, o que levou a que essas empresas fossem incluídas na carteira óptima. A metodologia de Elton & Gruber apresentou um maior retorno esperado da carteira (0,0897%), enquanto que o índice FTSE-100 apresentou um retorno esperado de 0,0702%, o que permite evidenciar um melhor desempenho recorrendo a esta metodologia. Por outro lado, após a realização da optimização da carteira, realizou-se os testes estatísticos não-parâmetros para a normalidade, nomeadamente, Kolmogorov-Smirnov e Kruskal-Wallis, de forma a analisar a significância estatística para a média entre a carteira óptima obtida pelo modelo de Elton-Gruber e o índice FTSE-100. Tendo-se verificado que a utilização do modelo de Elton & Gruber para a optimização de carteiras mostrou-se eficiente no índice FTSE-100, uma vez que ao nível de significância de 5% não se rejeitou a hipótese nula de diferença para a média entre as duas carteiras, a carteira de Elton-Gruber e índice FTSE-100 para o teste Kolmogorov-Smirnov, ou seja, os valores da análise distribuem-se de forma diferente nas duas carteiras. Por outro lado, constatou-se através do teste Kruskal-Wallis que existe evidência para rejeitar a hipótese nula para a igualdade da mediana dos retornos, ou seja, podemos afirmar que há diferença entre os retornos da carteira de Elton-Gruber e a carteira do FTSE-100.

Podemos, assim, afirmar que utilizando o modelo de Elton & Gruber podemos obter um desempenho superior àquele que é obtido recorrendo ao índice FTSE-100, ou seja, a utilização do modelo e segundo (Elton & Gruber, 2004) existe evidência quanto às vantagens da utilização deste modelo de optimização de carteiras.

Para a realização deste estudo surgiram alguns constrangimentos, tais como, teria sido vantajoso a utilização de outros modelos de optimização de carteiras para verificar de que forma a utilização de outros modelos poderia melhorar o desempenho da carteira a constituir. Por outro lado, existiram alguns constrangimentos relativamente à disponibilidade da base de dados Amadeus, o que levou à alteração do tema da dissertação que em primeira instância seria o modelo de cinco factores de French & Fama (2015), no entanto, pela dificuldade na obtenção dos dados levou à necessidade de efectuar-se essa alteração.

Para futuras investigações relacionadas com o tema sugere-se a utilização conjunta de outros modelos de optimização de carteiras, de forma a perceber-se de que forma poderia ser melhorado o desempenho da carteira, aumentando o período de análise, de forma a verificar se surgiriam alterações decorrentes da utilização de um período maior relativamente à utilização de um período menor, a comparação do FTSE-100 com outros índices europeus, nomeadamente, CAC-40, e/ou DAX-30, de forma a poder-se verificar se o comportamento do índice FTSE-100 segue a mesma tendência dos índices CAC-40 e DAX-30.

6 BIBLIOGRAFIA

- AHARONI, G., GRUNDY, B., ZENG, Q. (2013). Stock returns and the Miller Modigliani valuation formula: Revisiting the Fama French analysis. *Journal of Financial Economics*, 110 (2), pp. 347-357.
- BHANDARI, L. (1988). Debt/equity ratio and expected common stock returns: empirical evidence. *Journal of Finance*, 43 (2), pp. 507-528.
- BANZ, R. (1981). The relationship between return and market value of common stock. *Journal of Financial Economics*, 9(1), pp. 3-18.
- BASAK, G., JAGANNATHAN, R., SUN, G. (2002). A Direct Test for the Mean-Variance Efficiency of a Portfolio. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26(7-8), pp. 1195-1215.
- BASU, S. (1977). Investment performance of common stocks in relation to their price-earnings ratios: a test of market efficiency. *The Journal of Finance*, 32(3), pp. 663-682.
- BASU, S. (1983). *The relationship between earnings yield, market value, and return for NYSE common stocks: further evidence. Journal of Financial Economics*. 12(1), pp. 129-156.
- BECKERS, S., GRINOLD, R., RUDD, A., STEFEK, D. (1992). The relative importance of common factors across the European equity markets. *Journal of Banking and Finance*, 16(1), pp. 75-95.
- BEENSTOCK, M., CHAN, K. F. (1988). Economic Forces in the London Stock-Market. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 50(1), pp. 27-39.
- BLACK, F. (1972). Capital market equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business*, 45(3), pp. 444-454.
- BLACK, F., JENSEN, M. C., SCHOLES, M. (1972). The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests, in *Studies in the Theory of Capital Markets*, org. por Michael C. Jensen, Nova Iorque, *Praeger Publishers*, pp. 79-121.
- BLUME, M. (1975). Betas and Their Regression Tendencies. *Journal of Finance*, 30(3), pp. 785-795.

- BODIE, Z., KANE, A., MARCUS, A. (2002). *Investments*, Boston, McGraw Hill, 5ª edição.
- BRIÈRE, M., MIGNON, V., OOSTERLINCK, K., SZAFARZ, A. (2012). Is the Market Portfolio Efficient? A New Test of Mean-Variance Efficiency when All Assets are Risky. Université Libre de Bruxelles – *Solvay Brussels School of Economics and Management Centre Emile Bernheim*, Working Paper nº 12/003.
- CAMPBELL, J., SHILLER, R. (1988). The dividend-price ratio and expectations for future dividends and discount factors. *Review of Financial Studies*, 1 (3), pp. 195–228.
- CARHART, M. (1997). On Persistence in Mutual Fund Performance, *The Journal of Finance*, 52(1), pp. 57-82.
- CERQUEIRA, A. (2015). *Aplicação do modelo de Elton-Gruber para a construção de carteira no índice PSI-20*. Porto: Dissertação de Mestrado.
- CHAN, L. K. C., HAMAOKA, Y., LAKONISHOK, J. (1991). Fundamentals and stock returns in Japan. *Journal of Finance*, 46(5), pp. 1739–1764.
- CHEN, N. (1983). Some Empirical Tests of the Theory of Arbitrage Pricing. *Journal of Finance*, 38(5), pp. 1393-1414.
- CHORDIA, T., GOYAL, A., SHANKEN, J. (2015). Cross-sectional asset pricing with individual stocks: Betas versus characteristics. papers.ssrn.com.
- DAMODARAN, A. (2002). *Investment Valuation: Tools and techniques for determining the value of any asset*. New York: Wiley Finance.
- DHRYMES, P., FRIEND, L., GULTEKIN, N. (1984). A Critical Re-examination of the Empirical-Evidence on the Arbitrage Pricing Theory. *Journal of Finance*, 39(2), pp. 323-346.
- ELTON, E. J., GRUBER, M. J., PADBERG, M. W. (1976). Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 31 (5), pp. 1341-1357.
- ELTON, E. J., GRUBER, M. J. (1995). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. 5th ed. New York. John Wiley & Sons Inc.
- ELTON, E. J., GRUBER, M. J. (2004). *Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos*. São Paulo: Atlas.

- ESTRADA, J. (2000). The cost of equity in emerging markets: a downside risk approach. *Emerging Markets Quarterly*, 13(1), pp. 19-30.
- FABOZZI, F., FRANCIS, J. (1978). Beta as a Random Coefficient. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13(1), pp.101-116.
- FAMA, E. F., MACBETH, J. D. (1973). Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests. *Journal of Political Economy*, 81(3), pp. 607-636.
- FAMA, E. F., MALKIEL, B. G. (1970). Efficient Capital Markets: A review of theory and empirical work. *The Journal of Finance*, 25 (2), pp. 383-417.
- FAMA, E. F. (1976). Reply. *The Journal of Finance*, 31(1), pp. 143–146.
- FAMA, E. F., FRENCH, K. R. (1992). The cross-section of expected stock returns. *The Journal of Finance*, 47(2), pp. 427-465.
- FAMA, E. F., FRENCH, K. R. (1993). Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds, *Journal of Financial Economics*, 33(1), pp. 3-56.
- FAMA, E., FRENCH, K. (1996). Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies. *Journal of Finance*, 51(1), pp. 55-84.
- FAMA, E., FRENCH, K. (1998). Value versus growth: the international evidence. *Journal of Finance*, 53(6), pp. 1975–1999.
- FAMA, E. F., FRENCH, K. R. (2004). The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. *Journal of Economic Perspectives*, 18(3), pp. 25-46.
- FAMA, E. F., FRENCH, K. R. (2006). Profitability, investment, and average returns. *Journal of Financial Economics*, 82(3), pp. 491–518.
- FAMA, E., FRENCH, K. (2012). Size, value, and momentum in international stock returns. *Journal of Financial Economics*, 105(3), pp. 457–472.
- FAMA, E. F., FRENCH, K. R. (2015). A Five-factor asset pricing model. *Journal of Financial Economics*, 116 (1), pp. 1-22.

- FAMA, E., FRENCH, K. (2016).Dissecting anomalies with a five-factor model.*Review of Financial Studies*, 29 (1), pp. 69–103.
- FERNANDES, C., MARTINS, A. (2003).*A Teoria Financeira Tradicional e a Psicologia dos investidores: Uma Síntese*, *Boletim de Ciências Económicas*, XLVI, pp. 201-292.
- GIBBONS, M. R. (1982).Multivariate tests of financial models: a new approach. *Journal of Financial Economics*, 10 (1), pp. 3-27.
- GIBBONS, M. R., ROSS, S. A., SHANKEN, J. (1989).A test of the efficiency of a given portfolio.*Econometrica*, 57 (5),pp. 1121-1152.
- GITMAN, L. J. (1997).*Princípios da Administração Financeira*. São Paulo: Habra.
- GRIFFIN, J. (2002).Are the Fama and French factors global or country specific?*Review of Financial Studies*, 15 (3), pp. 783–803.
- GRINOLD, R., KAHN, R. (2000).*Active Portfolio Management: A Quantitative Approach for Providing Superior Returns and Controlling Risk*, 2ª edição, McGraw-Hill.
- HANDA, P., KOTHARI, S., WASLEY, C. (1989).The Relation between the Return Interval and Betas: Implications for the Size Effect.*Journal of Financial Economics*, 23 (1), pp. 79-100.
- HANDA, P., KOTHARI, S., WASLEY, C. (1993).Sensitivity of multivariate tests of the capital asset pricing to the return interval measurement. *Journal of Finance*, 48 (4), pp. 15–43.
- HAUGEN, R., BAKER, N. (1991).The Efficient Market Inefficiency of Capitalization-Weighted Stock Portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, 17 (3), pp. 35-40.
- HOGAN, W. W., WARREN, J. M. (1974).Toward the development of an equilibrium capital market model based on semi-variance. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 9 (1), pp. 1- 11.
- HOU, K. , KAROLYI, G. , KHO, B. (2011).What factors drive global stock returns?*Review of Financial Studies*, 24 (8), pp. 2527–2574.
- HUBERMAN, G. (1982).A simple approach to arbitrage pricing. *Journal of Economic Theory*. 28 (1), pp. 183–91.

- JAGANNATHAN, R., WANG, Z. (1996).The conditional CAPM and the cross-section of expected returns. *Journal of Finance*, 51 (1), pp. 3-53.
- JEGADEESH, N., TITMAN, S. (1993). Returns to buying winners and selling losers: Implications for stock market efficiency.*Journal of Finance*, 48 (1), pp. 65–91.
- JENSEN, M. (1969).Risk, The Pricing of Capital Assets, and the Evaluation of Investments Portfolios. *The Journal of Business*, 42 (2), pp.167-247.
- JORION, P. (1997).*Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*. McGraw-Hill, NY.
- JORION, P. (1998).*Value at Risk: a nova fonte de referência para o controle de risco de mercado*. São Paulo: BM&F.
- KANDEL, S., STAMBAUGH, R. F. (1987).On Correlations and Inferences about Mean-Variance Efficiency. *Journal of Financial Economics*, 18 (1), pp. 61-90.
- KANDEL, S., STAMBAUGH, R. F. (1995).Portfolio inefficiency and the cross-section of expected returns. *Journal of Finance*, 50 (1), pp. 157-184.
- KLEIN, R. W., BAWA, V. S. (1977).The effect of limited information and estimation risk on optimal portfolio diversification.*Journal of Financial Economics*, 5 (1), Aug., pp. 89-111.
- KLEMKOSKY, R., MARTIN, J. (1975).The Effect of Market Risk on Portfolio Diversification.*Journal of Finance*, 30 (1), pp.147-154.
- KONNO, H., YAMAZAKI, H. (1991).Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market. *Management Science*, 37 (5), pp. 519-531.
- LEVHARI, D., LEVY, H. (1977).The Capital Asset Pricing Model and The Investment Horizon.*Review of Economics and Statistics*, 59 (1), pp.92-104.
- LEVY, R. (1971).On the Short-Term Stationarity of Beta Coefficients. *Financial Analyst Journal*, 27 (6), pp.55-62.
- LEVY, R., ROLL, R. (2010).The market portfolio may be mean/variance efficient after all. *The Review of Financial Studies*, 23 (6), pp. 2464 – 2491.
- LI, K., SARKAR, A., WANG, Z. (2003).Diversification Benefits of Emerging Markets Subject to Portfolio Constraints.*Journal of Empirical Finance*, 10 (1-2), pp.57-80.

- LINTNER, J. (1965). The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47 (1), pp. 13-37.
- MARKOWITZ, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7 (1), pp. 77-91.
- MARKOWITZ, H. (1959). *Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments*. Yale University Press, New Haven.
- MARKOWITZ, H. (1991). Foundations of portfolio theory. *The Journal of Finance*, 46 (2), pp. 469-477.
- MILLER, M., MODIGLIANI, F. (1961). Dividend policy, growth, and the valuation of shares. *Journal of Business*, 34 (4), pp. 411-433.
- MOSSIN, J. (1966). Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*, 34 (4), pp. 768-783.
- NEVES, M. E., QUELHAS, A. P. (2013). *Carteiras de Investimento: Gestão e Avaliação do Desempenho*. Almedina, Coimbra.
- NOVY-MARX, R. (2013). The other side of value: The gross profitability premium. *Journal of Financial Economics*, 108 (1), pp. 1-28.
- PINHEIRO, J. L. (2007). *Mercado de Capitais: Fundamentos e técnicas*. São Paulo: Atlas.
- PINHO, P., VALENTE, R., MADALENO, M., VIEIRA, E. (2011). *Risco Financeiro: Medida e Gestão*. Edições Sílabo, Lisboa.
- RAIFUR, L. (2008). *Teoria e prática em avaliação de empresas: estudo exploratório dos laudos da CVM nos anos de 2006 e 2007*. Dissertação (Mestrado em Contabilidade) – Programa de Mestrado em Contabilidade, Sector de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- REILLY, F. Y., NORTON, E. A. (2008). *Investimentos*. 7ª ed. São Paulo. Cengage Learning.
- REINGANUM, M., (1981). Misspecification of capital asset pricing: Empirical anomalies based on earnings yields and market values. *Journal of Financial Economics*, 9 (1), pp. 19-46.
- RIBENBOIM, G. (2002). *Teste de modelo CAPM com dados brasileiros*. In : Bonomo, Marco Antônio (ed.), *Finanças aplicadas ao Brasil*. Rio de Janeiro: Editora FGV.

- RIBENBOIM, G. (2004). *Teste de modelo CAPM com dados brasileiros*. In: BONOMO, M. A. (Org.). *Finanças aplicadas ao Brasil*. 2. ed. Rio de Janeiro: FVG.
- RIZZI, L. (2012). *Análise comparativa de modelos para determinação do custo de capital próprio: CAPM, três factores de Fama e French (1993) e quatro factores de Carhart (1997)*. São Paulo: Dissertação de Mestrado.
- ROCKAFELLAR, R. T., URYASEV, S. (2000). Optimization of Conditional Value-at-Risk. *The Journal of Risk*, 2 (3), pp. 21-41.
- ROLL, R. (1977). A critique of the asset pricing theory's tests. Part I: On past and potential testability of the theory. *Journal of Financial Economics*, 4 (2), pp. 129-176.
- ROLL, R., ROSS, S. (1980). An empirical investigation of the arbitrage pricing theory. *Journal of Finance*, 35 (5), pp. 1073-103.
- ROLL, R., ROSS, S. (1994). On the Cross-sectional Relation between Expected Returns and Betas. *Journal of Finance*, 49 (1), pp. 101-121.
- ROSS, S. A. (1976). The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing. *Journal of Economic Theory*, 13 (3), December, pp. 341-360.
- ROSS, S. A., WESRTERFIELD, R. W., JAFRFE, J. F. (2002). *Administração Financeira*. São Paulo: Atlas.
- RUIZ, R. (2015). *Modelo de cinco factores de Fama e French: o caso do mercado brasileiro*. São Paulo: Dissertação de Mestrado.
- SAMANEZ, C. P. (2006). *Gestão de Investimentos e Geração de Valor*. Pearson – Prentice Hall. São Paulo.
- SÁ SILVA, E. (2014). *A Avaliação de Ativos e o justo valor das NCRF*. VidaEconómica, Porto.
- SECURATO, J. R. (2007). *Decisões Financeiras em Condições de Risco*. 2nd. São Paulo: Saint Paul.
- SHANKEN, J. (1985). Multi-Beta CAPM or Equilibrium APT: A Reply. *Journal of Finance*, 40 (4), pp.1189-1196.
- SHARPE, W. F. (1963). A Simplified Model for Portfolio Analysis. *Management Science*, 9 (2), pp. 277-293.

- SHARPE, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, 19 (3), pp. 425-442.
- SHARPE, W. F., ALEXANDER, G. J., BAILEY, J. V. (1995). *Investments*, 5^a ed., New Jersey, Prentice Hall.
- STAMBAUGH, R. F. (1982). On the exclusion of assets from tests of the two-parameter model: a sensitivity analysis. *Journal of Financial Economics*, 10 (3), pp. 237-268.
- STATTMAN, D. (1980). Book values and stock returns. *The Chicago MBA: A Journal of Selected Papers*, 4, pp. 25-45.
- SUN, L., WEI, C., XIE, F. (2013). *On explanations for the gross profitability effect: insights from international equity markets*. Manuscript. Hong Kong University of Science and Technology.
- TITMAN, S., WEI, C., XIE, F. (2013). Market development and the asset growth effect: international evidence. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 48 (5), pp. 1405–1432.
- TOBIN, J. (1958). Liquidity Preference as a Behavior Toward Risk. *Review of Economic Studies*, 25 (2), pp. 65-86.
- TOSTA DE SÁ, G. (1999). *Administração de Investimentos: Teoria de Carteiras e Gerenciamento do Risco*. Rio de Janeiro. Qualitymark Ed.
- WANG, Z. (1998). Efficiency Loss and Constraints on Portfolio Holdings. *Journal of Financial Economics*, 48 (3), pp. 359-375.
- WATANBE, A., YU, Y., YAO, T., YU, T. (2013). The asset growth effect: insights from international equity markets. *Journal of Financial Economics*, 108 (2), pp. 529–563.
- YOUNG, M. R. (1998). A MiniMax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution. *Management Science*, 44 (5), pp. 673-683.