

# Índice

<b>Prefácio</b>	<b>xv</b>
<b>1 Limites e continuidade</b>	<b>1</b>
1.1 Noção de função . . . . .	1
1.2 Espaço $\mathbb{R}^n$ . . . . .	2
1.2.1 Noções de norma e distância . . . . .	3
1.3 Funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ . . . . .	4
1.3.1 Exemplos do caso $n > 1$ em Economia . . . . .	5
1.3.2 Exemplos do caso $m > 1$ em Economia . . . . .	6
1.3.3 Domínio . . . . .	7
1.3.4 Caso especial de $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , representação geométrica . . . . .	7
1.4 Limite de uma função . . . . .	9
1.4.1 Limite de uma sucessão . . . . .	9
1.4.2 Algumas noções de topologia . . . . .	11
1.4.3 Limite de uma função . . . . .	14
1.4.4 Exemplos . . . . .	16
1.4.5 Limite da função segundo um «caminho» específico . . . . .	18
1.4.6 Resultados importantes sobre limites . . . . .	20
1.5 Continuidade . . . . .	24
1.5.1 Resultados de funções contínuas . . . . .	26
1.6 Exercícios . . . . .	31
<b>2 Diferenciabilidade</b>	<b>35</b>
2.1 Derivada de uma função real de variável real . . . . .	35
2.1.1 Exemplos económicos — custo marginal e receita marginal . . . . .	37
2.1.2 Elasticidade . . . . .	38
2.1.3 Diferenciabilidade . . . . .	39
2.2 Derivadas parciais . . . . .	41
2.2.1 Vector gradiente e matriz jacobiana . . . . .	43

2.3	Derivadas de ordem superior e matriz hessiana . . . . .	44
2.4	Derivada da função num ponto segundo um vector . . . . .	46
2.5	Diferenciabilidade . . . . .	48
2.5.1	Função real de duas variáveis . . . . .	49
2.5.2	Função real de $n$ variáveis . . . . .	53
2.5.3	Função vectorial . . . . .	54
2.5.4	Condição suficiente para diferenciabilidade . . . . .	55
2.5.5	Diferenciabilidade e derivada segundo um vector . . . . .	57
2.6	Exercícios . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Teorema da função composta</b> . . . . .	<b>65</b>
3.1	Derivada da função composta . . . . .	65
3.2	Funções homogéneas e funções homotéticas . . . . .	69
3.2.1	Dois exemplos económicos . . . . .	70
3.2.2	Teorema de Euler . . . . .	72
3.2.3	$f(x)/x_1^\alpha$ como função das razões $x_i/x_1$ . . . . .	74
3.2.4	Homogeneidade das derivadas parciais . . . . .	75
3.2.5	Funções homotéticas . . . . .	77
3.3	Exercícios . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Fórmula de Taylor</b> . . . . .	<b>83</b>
4.1	Teorema dos acréscimos finitos . . . . .	83
4.1.1	Máximos e mínimos . . . . .	83
4.1.2	Teorema de Rolle . . . . .	84
4.1.3	Teorema dos acréscimos finitos para $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	85
4.1.4	Teorema dos acréscimos finitos . . . . .	87
4.1.5	Teorema de Schwarz-Young . . . . .	90
4.2	Fórmulas de Taylor e de McLaurin . . . . .	90
4.2.1	Função real de variável real . . . . .	91
4.2.2	Função real de várias variáveis reais . . . . .	94
4.3	Exercícios . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Função inversa e função implícita</b> . . . . .	<b>103</b>
5.1	Teorema da função inversa . . . . .	103
5.1.1	Funções reais de uma variável . . . . .	104
5.1.2	Funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	106
5.2	Teorema da função implícita . . . . .	114
5.2.1	Matriz jacobiana da função definida implicitamente . . . . .	119
5.2.2	Modelo keynesiano de determinação do rendimento . . . . .	123

5.2.3	Equilíbrio no mercado de um bem . . . . .	125
5.3	Exercícios . . . . .	127
<b>6</b>	<b>Optimização: introdução</b>	<b>131</b>
6.1	Introdução . . . . .	131
6.2	Algumas noções importantes . . . . .	134
6.2.1	Máximos e mínimos e o teorema de Weierstrass . . . . .	134
6.2.2	Como encontrar máximos e mínimos? . . . . .	135
6.2.3	Formas quadráticas . . . . .	136
6.2.4	Condição suficiente para um máximo local ser máximo global . . . . .	139
6.3	Conjuntos e funções convexas e quase-convexas . . . . .	140
6.3.1	Conjuntos convexas . . . . .	140
6.3.2	Funções convexas/côncavas . . . . .	141
6.3.3	Funções quase-convexas . . . . .	150
6.4	Exercícios . . . . .	156
<b>7</b>	<b>Optimização livre</b>	<b>159</b>
7.1	Função real de variável real . . . . .	159
7.1.1	Condição necessária para o extremo local de uma função . . . . .	160
7.1.2	Condições suficientes para o extremo local de uma função . . . . .	161
7.1.3	Demonstração das condições necessárias e suficientes para uma função de classe $C^2$ . . . . .	162
7.2	Função real de várias variáveis . . . . .	166
7.2.1	Função real de duas variáveis . . . . .	167
7.2.2	Função real de $n$ variáveis . . . . .	175
7.2.3	Condições suficientes para extremos globais . . . . .	178
7.2.4	Exemplo — maximização do lucro . . . . .	179
7.3	O teorema do envelope . . . . .	180
7.3.1	Exemplo — lema de Hotelling . . . . .	183
7.4	Exercícios . . . . .	183
<b>8</b>	<b>Optimização com restrições de igualdade</b>	<b>185</b>
8.1	Duas variáveis de decisão, uma restrição . . . . .	185
8.1.1	Resolução gráfica . . . . .	185
8.1.2	Método da substituição . . . . .	187
8.1.3	Método dos multiplicadores de Lagrange . . . . .	189
8.1.4	Condições suficientes . . . . .	191
8.2	$n$ variáveis de decisão, $m$ restrições . . . . .	193
8.2.1	Método dos multiplicadores de Lagrange . . . . .	193

8.2.2	Condições suficientes . . . . .	195
8.3	Interpretação dos multiplicadores de Lagrange . . . . .	197
8.3.1	Exemplos económicos . . . . .	199
8.4	Teorema do envelope . . . . .	199
8.4.1	Exemplo — lema de Shepard . . . . .	201
8.5	Exercícios . . . . .	202
<b>9</b>	<b>Optimização com restrições de desigualdade</b>	<b>207</b>
9.1	Introdução . . . . .	207
9.2	Condições de Kuhn-Tucker . . . . .	208
9.2.1	Restrições de não-negatividade . . . . .	208
9.2.2	Restrições de desigualdade . . . . .	211
9.2.3	Os sinais dos multiplicadores de Lagrange . . . . .	213
9.2.4	As condições de complementaridade . . . . .	216
9.3	Discussão das condições de Kuhn-Tucker . . . . .	217
9.3.1	Exemplo económico — o problema do consumidor . . . . .	217
9.4	Teorema de Kuhn-Tucker . . . . .	221
9.4.1	Teorema da suficiência . . . . .	221
9.4.2	Restrição de qualificação . . . . .	224
9.5	Programação quase-côncava . . . . .	227
9.6	Exercícios . . . . .	228
<b>10</b>	<b>Integração</b>	<b>233</b>
10.1	Primitivação e integração em $\mathbb{R}$ . . . . .	233
10.1.1	Primitivação . . . . .	233
10.1.2	Integral definido . . . . .	239
10.1.3	Relação entre integração e primitivação . . . . .	244
10.1.4	Integrais impróprios . . . . .	248
10.2	Integrais múltiplos . . . . .	250
10.2.1	Cálculo de integrais duplos e mudança da ordem de integração . . . . .	252
10.2.2	Outras regiões de integração . . . . .	253
10.2.3	Método da substituição . . . . .	256
10.3	Integrais paramétricos . . . . .	260
10.4	Exemplos económicos . . . . .	262
10.4.1	Relação entre investimento e <i>stock</i> de capital . . . . .	262
10.4.2	Excedente do consumidor . . . . .	263
10.5	Exercícios . . . . .	264

<b>11</b>	<b>Equações diferenciais</b>	<b>267</b>
11.1	Introdução . . . . .	267
11.2	Equações diferenciais . . . . .	268
11.3	Equações diferenciais ordinárias . . . . .	269
11.3.1	Alguns tipos de equações diferenciais ordinárias . . . . .	270
11.3.2	Um exemplo simples . . . . .	271
11.4	Equações não-lineares de primeira ordem . . . . .	272
11.4.1	Equações diferenciais exactas . . . . .	272
11.4.2	Equações separáveis . . . . .	274
11.4.3	Equação diferencial homogénea . . . . .	275
11.4.4	Diagramas de fases e estabilidade . . . . .	277
11.4.5	Exemplo económico — modelo neoclássico de crescimento . . . . .	278
11.5	Equações lineares com coeficientes constantes . . . . .	280
11.5.1	Equações lineares de primeira ordem . . . . .	280
11.5.2	Equações lineares de segunda ordem . . . . .	287
11.5.3	Equações lineares com coeficientes constantes de ordem superior . . . . .	297
11.6	Exercícios . . . . .	300
<b>12</b>	<b>Sistemas de equações diferenciais</b>	<b>303</b>
12.1	Transformação de uma equação de ordem superior num sistema . . . . .	303
12.2	Algumas propriedades da solução geral do sistema . . . . .	305
12.3	Solução do sistema homogéneo . . . . .	306
12.3.1	Caso das raízes reais e distintas . . . . .	307
12.3.2	Caso das raízes complexas . . . . .	308
12.3.3	Caso das raízes reais repetidas . . . . .	308
12.3.4	Uma forma alternativa de explicar a solução complementar . . . . .	311
12.4	Solução particular, equilíbrio e estabilidade . . . . .	312
12.5	Diagrama de fases com duas variáveis . . . . .	313
12.5.1	Tipos de equilíbrio . . . . .	315
12.6	Exemplo económico — inflação e desemprego . . . . .	316
12.7	Exercícios . . . . .	318
<b>13</b>	<b>Equações e sistemas de equações às diferenças</b>	<b>321</b>
13.1	Diferenças e <i>lags</i> . . . . .	322
13.1.1	Operador diferença . . . . .	322
13.1.2	Operadores avanço e atraso . . . . .	323
13.2	Equações às diferenças . . . . .	324
13.2.1	Exemplo simples . . . . .	326
13.3	Equações lineares com coeficientes constantes . . . . .	328

13.3.1	Resultados básicos sobre equações lineares . . . . .	328
13.3.2	Equações de segunda ordem . . . . .	330
13.3.3	Equações de ordem superior . . . . .	335
13.3.4	Exemplo económico — modelo da «teia de aranha» . . . . .	337
13.4	Sistemas de equações às diferenças . . . . .	337
13.4.1	Solução de sistemas de equações às diferenças . . . . .	339
13.4.2	Resolução em notação matricial . . . . .	340
13.4.3	Exemplo — sondagens usando painéis . . . . .	341
13.5	Exercícios . . . . .	342
<b>14</b>	<b>Optimização dinâmica</b>	<b>347</b>
14.1	Introdução . . . . .	347
14.2	O problema de controle . . . . .	348
14.2.1	Exemplo económico — extração de um recurso não-renovável . . . . .	350
14.3	Cálculo de variações . . . . .	351
14.3.1	A equação de Euler . . . . .	351
14.3.2	Condição de transversalidade . . . . .	354
14.4	Programação dinâmica . . . . .	356
14.4.1	Problema de controle em tempo discreto . . . . .	358
14.4.2	Exemplo económico — consumo intertemporal . . . . .	359
14.5	O princípio do óptimo . . . . .	361
14.5.1	Interpretação do princípio do óptimo . . . . .	366
14.5.2	Exemplo económico — crescimento económico óptimo . . . . .	368
14.6	Exercícios . . . . .	372
	<b>Solução dos exercícios</b>	<b>375</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>415</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>417</b>