Tópicos de Análise Funcional

Feliz Minhós

Conteúdo

Introdução

Unadade Curricular: Tópicos de Análise Funcional

Tipo: Optativa

Nível: 2^o Ciclo

Ano: 2^o

Semestre: 1^o

Carga horária semanal: 3 horas de Aulas Teóricas

Créditos (ECTS): 7,5

Objectivos Gerais

Aprofundar os conhecimentos de alguns ramos de Análise Funcional e de métodos analíticos.

Adquirir competências para aplicar estes métodos em vários campos da matemática.

A análise funcional é um ramo abstracto da Matemática que se originou da análise clássica. O seu desenvolvimento começou há um século atrás, e os métodos e resultados analíticos funcionais de hoje em dia são importantes em vários campos da Matemática e das suas aplicações.

Os matemáticos observaram que os problemas provenientes de várias áreas, tais como a Álgebra Linear, as Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais, o Cálculo das variações, as Equações Integrais, e em diferentes aplicações, mostravam frequentemente propriedades semelhantes e interrelacionados.

Este facto sugeriu uma abordagem unificadora em relação a tais problemas, tendo por base a omissão de detalhes não essenciais. Daí a vantagem de uma abordagem abstracta, concentrada nas questões essenciais, para que esses fatos se tornem claramente visíveis e a atenção do investigador não seja perturbada por detalhes sem importância. Neste aspecto, o método abstrato é o mais simples e mais "económico"para analisar sistemas matemáticos, que poderá ter, várias realizações concretas (modelos).

Uma abordagem abstracta, geralmente, parte de um conjunto de elementos satisfazendo certos axiomas. A natureza dos elementos não é especificada, propositadamente. A teoria consiste então em consequências lógicas, que resultam dos axiomas, e que podem ser registadas como teoremas ou outro tipo de asserções. Isto significa que, neste método axiomático, obtém-se uma estrutura matemática cuja teoria é desenvolvida de maneira abstrata. Os teoremas, de carácter geral, podem depois ser aplicados a vários conjuntos específicos que satisfaçam o quadro axiomático.

Na análise funcional, por exemplo, fazemos a ligação entre a Álgebra e espaços abstractos de grande importância (espaços de Banach, espaços de Hilbert) que serão vistos em detalhe. Neste contexto, o conceito de "espaço", que remonta a M. Fréchet (1906), será um conjunto de elementos (não especificados) que satisfazem determinados axiomas. Escolhendo diferentes conjuntos de axiomas, devemos obter diferentes tipos de espaços.

Capítulo 1

Espaços métricos

Neste capítulo consideramos espaços métricos. Estes são fundamentais na análise funcional, porque desempenham um papel semelhante ao que os números reais têm no cálculo. Na verdade, generalizam $\mathbb{R}$ e foram criados de modo a fornecerem uma base para um tratamento unificado de problemas importantes em vários ramos de análise.

Primeiro definimos espaços métricos e conceitos relacionados e ilustramos com exemplos típicos. Espaços especiais com grande importância prática são discutido em detalhe. É dada muita atenção ao conceito de completude, uma propriedade que um espaço métrico pode, ou não, ter.

1.1 Espaços métricos

No cálculo, estudamos funções definidas na recta real $\mathbb{R}$. Usamos o facto de que em $\mathbb{R}$ definirmos uma função distância, que associa um valor real não-negativo

$$d(x, y) = |x - y|$$

a cada par de pontos $x, y \in \mathbb{R}$. No plano e no espaço tridimensional a situação é semelhante.

Na Análise Funcional, estudaremos "espaços"e "funções"mais gerais. Chegamos a uma abordagem mais geral substituindo o conjunto $\mathbb{R}$ por um conjunto abstrato X (conjunto de elementos cuja natureza não é especificada) e introduzimos em X uma "função de distância", que possui algumas das propriedades mais fundamentais da função distância em $\mathbb{R}$.

Definição 1.1.1 *Um **espaço métrico** é um par* (X, d)*, onde* X *é um conjunto e* d *é uma métrica em* X *(ou função de distância em* X*), isto é, uma função definida em* $X \times X$ *tal que, para todo* $x, y, z \in X$*:*

(M1) d *é uma função com valores reais, finitos e não negativos.*

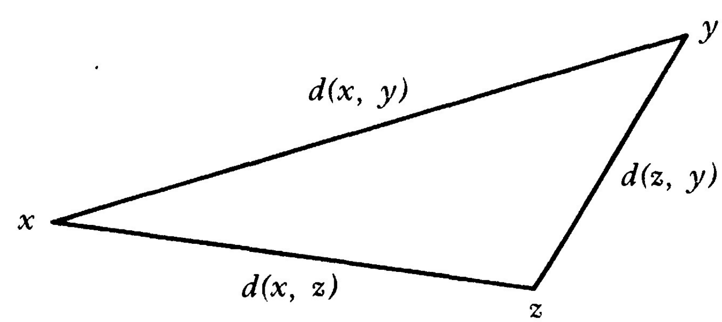
(M2) $d(x, y) = 0$ *se e somente se* $x = y$*.*

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ *(**Simetria**).*

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(**Desigualdade triangular**).*

Os elementos de X são designados como pontos. Para x, y fixos, chamamos ao número não negativo $d(x, y)$ a distância de x a y. As propriedades (M1) a (M4) são os axiomas da métrica referida.

A designação "Desigualdade triangular"é motivada por um conceito geometrico:



Desigualdade triangular no plano

A partir de (M4) obtem-se por indução a desigualdade triangular generalizada

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

Em vez de (X, d), pode-se simplesmente escrever X se não houver perigo de confusão.

Um **subespaço** (Y, d) de (X, d) é obtido se tomarmos um subconjunto $Y \subset X$ e restrição de d a $Y \times Y$. Assim, a métrica em Y é a restrição

$$\widetilde{d} = d|_{Y \times Y}$$

e designa-se $\widetilde{d}$ como a **métrica induzida** em Y por d.

Alguns exemplos de espaços métricos:

Exemplo 1.1.2 ***Recta real*** $\mathbb{R}$.

Este é o conjunto de todos os números reais, tomando a métrica usual definida por

$$d(x,y) = |x-y|\,. \tag{1.1.1}$$

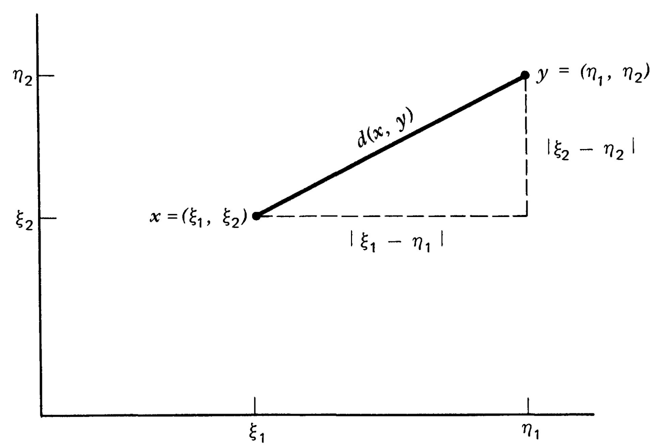
Exemplo 1.1.3 ***Plano euclidiano*** $\mathbb{R}^2$.

Neste caso consideramos o plano Euclidiano, tomando o conjunto de pares ordenados de números reais, $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$, ... A métrica euclidiana será definida por

$$d(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}. \tag{1.1.2}$$

No espaço euclidiano podemos definir uma outra métrica através da soma dos módulos:

$$d_1(x,y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|\,. \tag{1.1.3}$$



Métrica euclidiana no plano.

Por este exemplo, pode concluir-se que dado um determinado conjunto (com mais que um elemento), podemos obter vários espaços métricos escolhendo métricas diferentes.

Exemplo 1.1.4 ***Espaço euclidiano*** $\mathbb{R}^3$.

Este espaço métrico é composto pelo conjunto de ternos ordenados de números reais $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3), ...$, e a métrica euclidiana no espaço será definida por

$$d(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2}. \tag{1.1.4}$$

Exemplo 1.1.5 ***Espaço euclidiano*** $\mathbb{R}^n$, ***plano complexo*** $\mathbb{C}^n$.

Os exemplos anteriores são casos particulares do espaço euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Este espaço é obtido se tomarmos o conjunto de todas as sequências ordenadas de n números reais: '

$$x = (\xi_1, ..., \xi_n), y = (\eta_1, ..., \eta_n),$$

e a métrica euclidiana definida por

$$d(x,y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)^2}. \tag{1.1.5}$$

Se se considerar o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, designando por $\mathbb{C}^n$ o conjunto de todas as sequências ordenadas de n números complexos com uma métrica definida por

$$d(x,y) = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \cdots + |\xi_n - \eta_n|^2}.$$

Quando $n = 1$ este é o plano complexo $\mathbb{C}$ com a métrica usual definida por

$$d(x,y) = |x - y|.$$

Exemplo 1.1.6 ***Espaço de sucessões*** l^∞.

Este exemplo, tal como o próximo, mostram como o conceito de espaço métrico pode ser muito geral.
Como conjunto X, considere-se o conjunto de todas as sucessões de números complexos. Isto é, cada elemento de X é uma sucessão complexa (isto é, cada ponto é uma sucessão)

$$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$$

ou, abreviadamente, $x = \left(\xi_j\right)$, $j = 1, 2, ...$, tal que

$$\left|\xi_j\right| \leq c_x,$$

em que c_x é um número real, não negativo, que pode depender de x, mas não dependem de j. A métrica é definida por

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left|\xi_j - \eta_j\right|$$

com $y = (\eta_j) \in X$ e *sup* indica o supremo.

Exemplo 1.1.7 ***Espaço de funções*** $C[a, b]$.

Considere-se X como o conjunto de todas as funções reais de valor real $x, y, ...$ com uma independente t, definidas e contínuas num intervalo fechado $J = [a, b]$. Escolhe-se a métrica definida por

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|.$$

Este é um espaço de função porque cada ponto de $C[a, b]$ é uma função.

Exemplo 1.1.8 ***Espaço métrico discreto***.

Considere-se um conjunto X e defina-se a chamada métrica discreta para X, definida por

$$d(x, x) = 0, \quad d(x, y) = 1 \text{ se } x \neq y.$$

1.2 Casos particulares de espaços métricos

Dois exemplos de espaços métricos com uma importânvia relevante na Análise Funcional.

Exemplo 1.2.1 ***Espaço*** $B(A)$ ***das funções limitadas***.

Por definição, cada elemento $x \in B(A)$ é uma função definida e limitada num determinado conjunto A, com a métrica é definida por

$$d(x, y) = \sup_{t \in A} |x(t) - y(t)|,$$

em que *sup* indica o supremo. No caso de um intervalo $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ escreve-se $B[a, b]$ para $B(A)$.

Vejamos que $B(A)$ é um espaço métrico. Os axiomas (M1) e (M3) são evidentes. Além disso, $d(x, x) = 0$ é óbvio. Por outro lado, $d(x, y) = 0$ implica $x(t) - y(t) = 0$ para todo o $t \in A$, de modo que $x = y$. Isso dá (M2). Para provar a desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \\ &\leq \sup_{t \in A} |x(t) - z(t)| + \sup_{t \in A} |z(t) - y(t)|, \end{aligned}$$

o que mostra que $x - y$ é limitado em A. Como a limitação dada pela segunda linha não depende de t, podemos passar ao supremo à esquerda e obter (M4).

Exemplo 1.2.2 ***Espaço*** l^p ***e espaço de sucessões*** l^2.

Seja $p \geq 1$ um número real fixo. Por definição, cada elemento do espaço l^p é uma sucessão $x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, ...)$ de números tais que $|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + ...$ converge, isto é

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty. \tag{1.2.1}$$

A métrica é definida por

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.2.2}$$

onde $y = (\eta_j)$ e $\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p < \infty$. Se considerarmos sucessões reais (satisfazendo (1.2.1), obtemos o espaço real l^p, e se tomarmos sucessões complexas (verificando (1.2.1), obtem-se o espaço complexo l^p.

No caso $p = 2$, temos o famoso espaço de sucessões de Hilbert l^2, com a métrica definida por

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^2}.$$

Este espaço foi introduzido e estudado por D. Hilbert (1912) em relacionado com equações integrais e é o primeiro exemplo do que é agora designado como **espaços de Hilbert**.

Provemos em seguida que l^p é um espaço métrico. Claramente, (1.2.2) satisfaz (M1), (M2) e (M3), desde que as séries à direita sejam convergentes.

A demonstração que (M4) também se verifica, é dividida em quatro passos.

(i) Uma desigualdade auxiliar.

Seja $p > 1$ e defina-se q tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.2.3}$$

p e q são designados por **expoentes conjugados**. Outras formas de relacionar estes dois expoentes podem ser dadas por

$$1 = \frac{p+q}{pq}, \text{ ou } pq = p+q, \text{ ou } (p-1)(q-1) = 1.$$

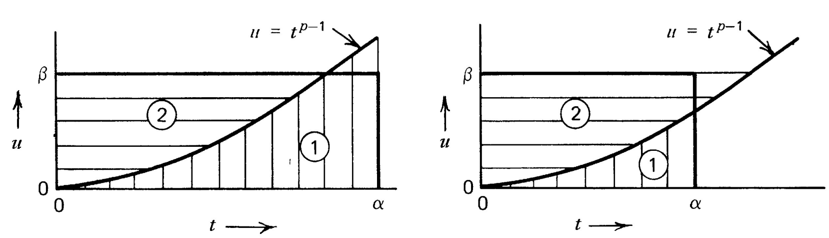
Desta última desigualdade temos

$$u = t^{p-1} \text{ implica } t = u^{q-1}.$$

Sejam α e β números positivos quaisquer. Uma vez que $\alpha\beta$ é a área dum rectângulo, obtemos por integração a desigualdade

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha t^{p-1} dt + \int_0^\beta u^{q-1} du = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \tag{1.2.4}$$

Note-se que esta desigualdade fica trivialmente verdadeira se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.



Representaço geometrica de (1.2.4a), em que 1 corresponde ao primeiro integral e 2 ao segundo.

(ii) **Desigualdade de Hölder para somas.**

Sejam $\left(\widetilde{\xi}_j\right)$ e $\left(\widetilde{\eta}_j\right)$ tais que

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\widetilde{\xi}_j\right|^p = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\left|\widetilde{\eta}_j\right|^q = 1. \tag{1.2.5}$$

Definindo $\alpha := \left|\widetilde{\xi}_j\right|$ e $\beta := \left|\widetilde{\eta}_j\right|$, por (1.2.4), temos a desigualdade

$$\left|\widetilde{\xi}_j\widetilde{\eta}_j\right| \leq \frac{1}{p}\left|\widetilde{\xi}_j\right|^p + \frac{1}{q}\left|\widetilde{\eta}_j\right|^q.$$

Aplicando o somatório em j, por (1.2.5) e (1.2.3)

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\widetilde{\xi}_j\widetilde{\eta}_j\right| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.2.6}$$

Considerem-se as sucessões não nulas $x = (\xi_j) \in l^p$ e $y = (\eta_j) \in l^q$ e coloquemos

$$\widetilde{\xi}_j = \frac{\xi_j}{\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{e} \quad \widetilde{\eta}_j = \frac{\eta_j}{\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\eta_j\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}}. \tag{1.2.7}$$

Então (1.2.5) verifica-se, pelo que podemos aplicar (1.2.6). Substituindo (1.2.7) em (1.2.6) e multiplicando a desigualdade resultante pelo produto dos denominadores em (1.2.7), obtem-se a **desigualdade de Hölder** para somas, obtida por O. Hölder (1889)

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\widetilde{\xi}_j\widetilde{\eta}_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\eta_j\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.2.8}$$

em que $p > 1$ e $1/p + 1/q = 1$.

Se $p = 2$, então $q = 2$ e (1.2.8) assume a forma da **desigualdade de Cauchy-Schwarz** para somas:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\widetilde{\xi}_j\widetilde{\eta}_j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\left|\eta_j\right|^2} \tag{1.2.9}$$

Este caso particular em que $p = q = 2$ em que p é igual ao seu conjugado q, é muito rico e terá um papel importante posteriormente.

(iii) **Desigualdade de Minkowski para somas**.

Provemos agora a desigualdade de Minkowski para somas:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j + \eta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\eta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.2.10}$$

com $x = (\xi_j) \in l^p$ $y = (\eta_j) \in l^p$ e $p \geq 1$.

Para somas finitas, esta desigualdade foi apresntada por H. Minkowski (1896).

Para $p = 1$, a desigualdade é consequência directa da desigualdade triangular para números.

Seja $p > 1$. Para simplificar as fórmulas, escrevemos $\xi_j + \eta_j = \omega_j$. Pela desigualdade triangular temos

$$|\omega_j|^p = \left|\xi_j + \eta_j\right| |\omega_j|^{p-1} \leq \left(\left|\xi_j\right| + \left|\eta_j\right|\right) |\omega_j|^{p-1}.$$

Somando em j de 1 até qualquer n fixo, obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} |\omega_j|^p \leq \sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j\right| |\omega_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} \left|\eta_j\right| |\omega_j|^{p-1}. \tag{1.2.11}$$

No primeiro somatório à direita, aplicamos a desigualdade de Hölder, pelo que

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j\right| |\omega_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(|\omega_j|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

(note-se que $(p-1)q = p$).

Aplicando o mesmo processo ao último somatório de (1.2.11), obtem-se

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\eta_j\right| |\omega_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\eta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\omega_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Juntando os dois somatórios

$$\sum_{j=1}^{n} |\omega_j|^p \leq \left[\left(\sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\eta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{j=1}^{n} |\omega_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dividindo pelo último factor à direita e observando que $1 - 1/q = 1/p$, obtemos (1.2.10) com n em vez de ∞. Passando ao limite com $n \to \infty$, obtêm-se à direita duas séries que convergem porque $x, y \in l^p$.

Então a série do primeiro membro também converge, pelo que (1.2.10) fica provado.

(iv) Desigualdade triangular.

Por (1.2.10), conclui-se que para x e y em l^p a série em (1.2.2) converge. Considere-se quaisquer $x, y, z \in l^p$. Para $z = (\zeta_j)$, pela desigualdade triangular e (1.2.10), obtemos

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j - \eta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\left|\xi_j - \zeta_j\right| + \left|\zeta_j - \eta_j\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j - \zeta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\zeta_j - \eta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

O que conclui a prova que l^p é um espaço métrico.

1.3 Conjuntos abertos, conjuntos fechados e vizinhanças

Há um número considerável de conceitos auxiliares que têem um papel importante na sua relação com espaços métricos.

Em primeiro lugar vejamos alguns tipos importantes de subconjuntos de um espaço métrico $X = (X, d)$.

Definição 1.3.1 *Um subconjunto M de um espaço métrico X diz-se **aberto** se contiver uma bola centrada em cada um de seus pontos.*
*O subconjunto K de X é **fechado** se o seu complementar (em X) for um conjunto aberto, isto é, $\overline{K} = X \backslash K$ é um conjunto aberto.*

Uma bola aberta $B(x_0, \varepsilon)$ de raio $\varepsilon > 0$ é muitas vezes designada como *vizinhança centrada em x_0 e raio ε.*

Vemos diretamente a partir da definição de que cada vizinhança de x_0 contém x_0. Além disso, se N é uma vizinhança de x_0 e $N \subset M$, então M também é uma vizinhança de x_0.

Diz-se que x_0 é um **ponto interior** de um conjunto $M \subset X$ se M é uma vizinhança de x_0. O **interior** de M é o conjunto de todos os pontos interiores de M e pode representa-se por $int(M)$.

$Int(M)$ é um conjunto aberto e é o maior conjunto aberto contido em M.

Não é difícil mostrar que a coleção de todos os subconjuntos abertos de X, que designaremos por $\mathcal{T}$, tem as seguintes propriedades :

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.

(T2) A união de elementos de $\mathcal{T}$ é um elemento de $\mathcal{T}$.

(T3) A intersecção de um número finito de elementos de $\mathcal{T}$ é um elemento de $\mathcal{T}$.

Dem. (T1) é verdade, observando que $\emptyset$ é um conjunto aberto porque $\emptyset$ não possui elementos e, obviamente, X é aberto.

Qualquer ponto x do reunião U de conjuntos abertos pertence a (pelo menos) um desses conjuntos, que se designa por M.

M contém uma bola B centrada em x, uma vez que M é aberto. Então, $B \subset U$, pela definição de reunião. Isto prova (T2).

Finalmente, se y é um ponto da interseção de n conjuntos abertos $M_1, ..., M_n$, então cada M_i contém uma bola centrada em y e considerando o menor destes raios, esta bola está contida nessa intersecção, provando (T3). ■

As propriedades (T1) para (T3) definem um **espaço topológico** $(X, \mathcal{T})$, sendo X e a coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X, definidos de modo que $\mathcal{T}$ satisfaça os axiomas (T1), (T2) e (T3).

Além disso, desta definição temos que:

Um espaço métrico é um espaço topológico.

Os conjuntos abertos também desempenham um papel importante nas aplicações contínuas, em que a continuidade é uma generalização do conceito de continuidade conhecido da Análise Matemática:

Definição 1.3.2 *Sejam $X = (X, d)$ e $Y = (Y, \widetilde{d})$ espaços métricos. Uma aplicação $T : X \to Y$ diz contínua num ponto $x_0 \in X$ se, para cada $\varepsilon > 0$, há um $\delta > 0$ tal que*

$$d(x, x_0) < \delta \implies \widetilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon.$$

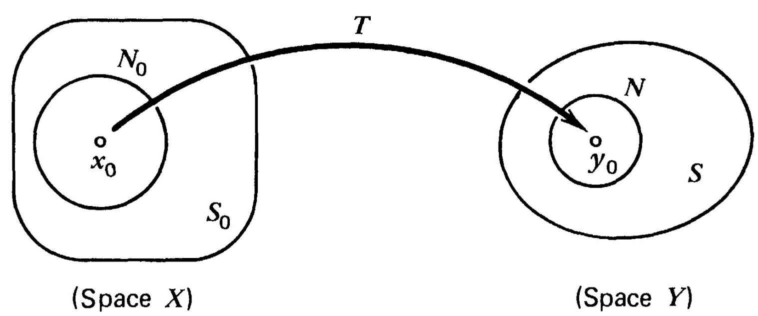
T é contínuo se for contínuo em cada ponto de X.

É interessante que as aplicações contínuas possam ser caracterizadas em termos de conjuntos abertos:

Teorema 1.3.3 *Uma aplicação T de um espaço métrico X num ouy*

Teorema 1.3.4 *tro espaço métrico Y diz-se contínua se, e somente se, a imagem inversa de qualquer subconjunto aberto de Y é um subconjunto aberto de X.*

Dem. ($\Rightarrow$)Suponha que a aplicação T é contínua. Seja $S \subset Y$ um aberto e S_0 a imagem inversa de S. Se $S_0 = \emptyset$, então é aberto. Seja $S_0 \neq \emptyset$. Para qualquer $x_0 \in S_0$, designe-se $y_0 = Tx_0$. Como S é aberto, então contém uma vizinhança V de y_0. Como T é contínuo, existe uma vizinhança N_0 de x_0 que é aplicada em N. Como $N \subset S$, temos $N_0 \subset S_0$, pelo que S_0 é aberto porque $x_0 \in S_0$ foi tomada arbitrariamente.



($\Longleftarrow$) Inversamente, suponha-se que a imagem inversa de cada conjunto aberto em Y é um conjunto aberto em X. Então, para cada $x_0 \in X$ e qualquer vizinhança N de Tx_0, a imagem inversa N_0 de N é um aberto, já que N é aberto e contém x_0. Então N_0 contém uma vizinhança de x_0 que é aplicada em N, porque N_0 está aplicado em N. Por definição, T é contínuo em x_0 e como $x_0 \in X$ foi considerado arbitrariamente, então, T é contínuo. ■

Dois novos conceitos, que estão relacionados.

Seja M um subconjunto de um espaço métrico X. Então um ponto x_0 de X (que pode ser, ou não, elemento de M) é um de **ponto de acumulação** de M se cada vizinhança de x_0 contém pelo menos um ponto $y \in M$ distinto de x_0 .

O conjunto composto pelos pontos de M e pelos pontos de acumulação de M é chamado de **fecho ou aderência** de M e é notado por $\overline{M}$.

$\overline{M}$ é o conjunto fechado mais pequeno que contém M.

Usando o conceito de aderência, temos a seguinte definição que vai ser particularmente importante:

Definição 1.3.5 *(i) Um subconjunto M de um espaço métrico X é **denso em** X se $\overline{M} = X$.*
*(ii) X diz-se **separável** se existir um subconjunto contável que seja denso em X.*

Note-se que se M é denso em X, então qualquer bola em X, eventualmente com um raio muito pequeno, conterá pontos de M. Isto é, neste caso, não há nenhum ponto $x \in X$ que tenha uma vizinhança que não contenha pontos de M.

Os espaços métricos separáveissão um pouco "mais simples"do que os não separáveis.

Alguns exemplos importantes de espaços separáveis e não separáveis:

Exemplo 1.3.6 *O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, é separável.*

Dem. O conjunto $\mathbb{Q}$ de todos os números racionais é contável e é denso em $\mathbb{R}$. ■

Exemplo 1.3.7 *O plano complexo $\mathbb{C}$ é separável.*

Dem. Um subconjunto denso contável de $\mathbb{C}$ é o conjunto de todos os números complexos cujas partes reais e imaginárias são racionais. ■

Exemplo 1.3.8 *Um espaço métrico discreto X é separável se, e somente se X for contável.*

Dem. O tipo de métrica implica que nenhum subconjunto próprio de X pode ser denso em X. Portanto, o único conjunto denso em X é o próprio X . ■

Exemplo 1.3.9 *O espaço l^∞ não é separável.*

Dem. Seja $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, ...)$ uma sucessão de zeros e uns.

Então, $y \in l^\infty$. A y associamos o número real $\widehat{y}$ com uma representação binária dada por

$$\frac{\eta_1}{2^1} + \frac{\eta_2}{2^2} + \frac{\eta 3}{2^3} + \cdots$$

Como o intervalo $[0, 1]$ não é numerável, ou contável, cada $\widehat{y} \in [0, 1]$ tem uma representação binária, e diferentes $\widehat{y}$ têm representações binárias diferentes. Por isso, há um número não numerável de sucessões de zeros e uns.

A métrica em l^∞ mostra que qualquer dois y, que não sejam iguais, estão a uma distância de 1. Se cada uma destas sucessões for o centro de uma bola pequena, digamos, de raio $1/3$, estas bolas não se intersectam e teremos um número não contável de bolas.

Se M for um conjunto denso em l^∞, cada uma destas bolas que não se intersectam contém um elemento de M. Portanto, M não pode ser contável. Como M foi um conjunto denso arbitrário, isso mostra que l^∞ não pode ter subconjuntos densos que sejam contáveis. Conseqüentemente, l^∞ não é separável. ■

Exemplo 1.3.10 *O espaço l^p com $1 \leq p < +\infty$ é separável.*

Dem. Seja M o conjunto de todas as sucessões y da forma

$$y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n, 0, 0, ...)$$

onde n é um inteiro positivo qualquer e os η_i são racionais. M é contável.

Mostremos que M é denso em l^p.

Seja $x = (\xi_j) \in l^p$ um ponto arbitrário.

Então, para cada $\varepsilon > 0$ existe um n (dependendo de ε) tal que

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^p < \frac{\varepsilon^p}{2},$$

porque na esquerda temos o restante de uma série convergente.

Como os racionais são densos em $\mathbb{R}$, para cada ξ_j existe um racional η_j próximo dele.

Portanto, podemos encontrar $y \in M$ verificando

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j - \eta_j\right|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Então

$$(d(x,y))^p = \sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j - \eta_j\right|^p + \sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^p < \varepsilon^p.$$

Assim, temos $d(x,y) < \varepsilon$ e verificamos que M é denso em l^p. ■

1.4 Convergência, Sucessão de Cauchy, Completude

As sucessões de números reais desempenham um papel importante na Análise Matemática, e é a métrica em $\mathbb{R}$ que nos permite definir o conceito de sucessão convergente.

O mesmo é válido para sucessões de números complexos, usando neste caso a métrica no plano complexo.

Num espaço métrico arbitrário $X = (X, d)$ a situação é muito semelhante, ou seja, podemos considerar uma sucessão (x_n) de elementos x_1, x_2, ... de X e usar a métrica d para definir convergência de forma análoga à usada na Análise Matemática:

Definição 1.4.1 *Uma sucessão (x_n) num espaço métrico $X = (X, d)$ diz-se* ***convergente*** *se existir $x \in X$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

x é o limite de (x_n) e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

ou simplesmente,

$$x_n \to x.$$

Dizemos que (x_n) converge para x ou tem o limite x. Se (x_n) não for convergente, diz-se que é **divergente**.

Como é utilizada a métrica d nesta definição?

Vejamos que d produz uma sucessão de números reais $a_n = d(x_n, x)$ cuja convergência implica a convergência (x_n). Portanto, se $x_n \to x$, e sendo $\varepsilon > 0$ dado, existe $N = N(\varepsilon)$ de modo que todos os x_n com $n > N$ estejam na vizinhança $B(x, \varepsilon)$ de x.

Para evitar mal-entendidos triviais, observemos que o limite de uma sucessão convergente deve ser um ponto do espaço X.

Por exemplo, se $X = (0, 1)$ em $\mathbb{R}$ com a métrica usual definida por $d(x, y) = |x - y|$, então a sucessão $\left(\frac{1}{n}\right)_{n>1}$ não é convergente, uma vez que 0 não está em X.

Vamos primeiro mostrar que duas propriedades comuns às sucessões convergentes (unicidade do limite e limitação):

Definição 1.4.2 *Um subconjunto não vazio $M \subset X$ diz-se um **conjunto limitado** se o seu diâmetro*

$$\delta(M) = \sup_{x,y \in M} d(x,y)$$

é finito.
*Uma **sucessão** (x_n) em X é **limitada** se o conjunto de pontos correspondentes é um subconjunto limitado de X.*

Obviamente, se M é limitado, então $M \subset B(x_0, r)$, onde $x_0 \in X$ é um arbitrário e r é um número real positivo (eventualmente, grande) .

Lema 1.4.3 *Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Então:*

a) *Uma sucessão convergente em X é limitada e o seu limite é único.*

b) *Se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ em X, então $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.*

Dem. **a)** Suponha que $x_n \to x$. Então, tomando $\varepsilon = 1$, podemos encontrar um N tal que $d(x_n, x) < 1$ para todos $n > N$. Portanto, pela desigualdade triangular, para qualquer n temos $d(x_n, x) < 1 + m$, sendo

$$m = \max\{d(x_1, x), ..., d(x_N, x)\},$$

o que mostra que (x_n) é limitada.
Para provar a unicidade, considere-se que $x_n \to x$ e $x_n \to z$. Por (M4), obtemos

$$0 \leq d(x, z) \leq d(x, x_n) + d(x_n, z) \to 0 + 0,$$

pelo que a unicidade $x = z$ segue de (M2).

b)Pela desigualdade triangular, temos

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n),$$

pelo que

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, y_n).$$

pode obter-se uma desigualdade semelhante ao trocar x_n e x, bem como y_n e y, e multiplicando por -1. Somando os dois,

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y, y_n) \to 0,$$

quando $n \to \infty$. ■

Para definir o conceito de completude precisamos de uma propriedade adicional que um espaço métrico pode, ou não, ter, mas que tornará os **espaços métricos completos** muito mais interessantes e simples do que os espaços métricos não completos.

Recordemos a Análise Matemática, em que uma sucessão (x_n), real ou complexa, convergia, em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{C}$, respectivamente, se e somente se, satisfizia o **critério de Cauchy,** isto é, se e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \ \forall \ m, n > N. \tag{1.4.1}$$

Agora $|x_m - x_n|$ é substituido pela distância $d(x_m, x_n)$ de x_m para x_n na recta linha real ou no plano complexo.

Portanto, podemos escrever a desigualdade do critério de Cauchy na forma

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon, \ \forall \ m, n > N.$$

Se uma sucessão (x_n) satisfizer a condição do critério de Cauchy, designa-se por **sucessão de Cauchy**. Então, o critério de Cauchy simplesmente diz que uma sucessão de números reais ou complexos converge, em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{C}$, se e somente se, for uma sucessão de Cauchy.

Isto acontece em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{C}$. Infelizmente, em espaços mais gerais, a situação pode ser mais complicado, e pode haver sucessões de Cauchy que não sejam convergentes.

Esta propriedade é tão importante na organização do espaço que se chama : **completude**.

Essa consideração, dá origem à seguinte definição, que foi dada pela primeira vez por M. Frechet (1906):

Definição 1.4.4 *Uma sucessão (x_n) dum espaço métrico $X = (X, d)$ diz-se sucessão de Cauchy (ou fundamental) se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $N = N(\varepsilon)$ tal que*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon, \ \forall \ m, n > N.$$

O espaço X diz-se completo se cada sucessão de Cauchy em X converge (ou seja, tem um limite que é um elemento de X).

Expressa em termos de completude, o critério da convergência de Cauchy implica o seguinte:

Teorema 1.4.5 *$\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são espaços métricos completos.*

Os espaços métricos completos e incompletos são importantes em várias aplicações serão consideradas na próxima secção.

Por enquanto, vejamos alguns exemplos simples de espaços incompletos:

Tirando um ponto a a $\mathbb{R}$, obtem-se o espaço incompleto $\mathbb{R}\setminus\{a\}$.

Por outro lado, $\mathbb{Q}$ também é um espaço incompleto, já que se retira a $\mathbb{R}$ todos os números irracionais.

Um intervalo aberto (a, b) com a métrica induzida por $\mathbb{R}$ é outro espaço métrico incompleto.

Fica claro que, num espaço métrico arbitrário, a condição (1.4.1), não é uma condição suficiente para garantir a convergência.

Vejamos o caso seguinte:

Seja $X = (0, 1]$, com a métrica usual definida por $d(x, y) = |x - y|$ e a sucessão (x_n), com $x_n = 1/n$ e $n = 1, 2, \ldots$. Esta é uma sequência de Cauchy, mas não converge em X, porque o ponto $0 \notin X$.

Isso também ilustra que o conceito de convergência não é uma propriedade intrínseca da própria sucessão, mas depende do espaço em que se encontra a sucessão. Ou seja, uma sucessão convergente não é convergente "por si só", mas depende do espaço em que está definida.

Embora a condição (1.4.1) não seja suficiente para a convergência, é contudo uma condição necessária, como o confirma o próximo resultado:

Teorema 1.4.6 *Toda a sucessão convergente num espaço métrico é uma sucessão de Cauchy.*

Dem. Se $x_n \to x$, então, para todo o $\varepsilon > 0$ existe um $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, n > N.$$

Pela desigualdade triangular temos para $m, n > N$,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que mostra que (x_n) é Cauchy. ■

Terminamos esta secção com três teoremas que relacionam a convergência e completude.

Teorema 1.4.7 *Seja M um subconjunto não vazio de um espaço métrico (X, d) e $\overline{M}$ a aderência de M.*
Então:

a) *$x \in \overline{M}$ se e somente se houver uma sucessão (x_n) em M tal que $x_n \to x$.*

b) *M é fechado se e somente se para $x_n \in M$, $x_n \to x$ implica que $x \in M$.*

Dem. **a)** Seja $x \in \overline{M}$. Se $x \in M$, uma sucessão deste tipo será $(x, x, ...)$. Se $x \notin M$, então x é um ponto de acumulação de M. Portanto, para cada $n = 1, 2, \cdots$ a bola $B(x, 1/n)$ contém um $x_n \in M$ e $x_n \to x$ porque $1/n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Inversamente, se (x_n) estiver em M e $x_n \to x$, então $x \in M$ ou toda a vizinhança de x contém pontos $x_n \neq x$, de modo que x é um ponto de acumulação de M. Portanto, $x \in \overline{M}$, pela definição de aderência.

b) M é fechado se e somente se $M = \overline{M}$, de modo que b) segue imediatamente a partir de a). ■

Teorema 1.4.8 *Um subespaço M de um espaço métrico completo X é ele próprio completo, se e somente se o conjunto M é fechado em X.*

Dem. Seja M completo. Pelo Teorema 1.4.7 a), para cada $x \in \overline{M}$ existe uma sucessão (x_n) em M que converge para x. Uma vez que (x_n) é uma sucessão de Cauchy e M é completo, (x_n) converge em M, sendo o limite único.

Assim, $x \in M$. Isto prova que M está fechado porque $x \in \overline{M}$ foi tomado arbitrariamente.

Inversamente, considere-se M fechado e (x_n) uma sucessão de Cauchy em M. Então $x_n \to x \in X$, o que implica que $x \in \overline{M}$, pelo Teorema 1.4.7 a), e $x \in M$ uma vez que $M = \overline{M}$, por hipótese.

Portanto, a sucessão arbitrária de Cauchy (x_n) converge em M, o que prova a completude de M. ■

Este teorema é muito útil, e precisamos dele com bastante frequência.

Vejamos agora a importância da convergência de sucessões relacionada com a continuidade de uma aplicação:

Teorema 1.4.9 *Uma aplicação $T : X \to Y$ de um espaço métrico (X, d) num espaço métrico $(Y, \widetilde{d})$ é contínua num ponto $x_0 \in X$ se, e somente se, $x_n \to x_0$ implica $Tx_n \to Tx_0$.*

Dem. Suponha-se que T é contínua em x_0. Então, para um dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \text{ implica } \widetilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon.$$

Seja $x_n \to x_0$. Então, há um N tal que, para todos os $n > N$, temos

$$d(x_n, x_0) < \delta.$$

Por isso, para todos os $n > N$,

$$\widetilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon.$$

Por definição, isso significa que $Tx_n \to Tx_0$.

Recíprocamente, assumimos que $x_n \to x_0$ implica $Tx_n \to Tx_0$, e queremos provar que T é contínuo em x_0.

Suponha que isso seja falso.

Então há um $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe um $x \neq x_0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \text{ mas } \widetilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon.$$

Em particular, para $\delta = 1/n$ existe um x_n verificando

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad \text{mas} \quad \widetilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon.$$

Claramente $x_n \to x_0$ mas (Tx_n) não converge para Tx_0. Ora, isto contradiz $Tx_n \to Tx_0$, provando o Teorema. ■

1.5 Exemplos e demonstrações de completude

Em resumo, dado um conjunto X, procura-se transformá-lo num espaço métrico, escolhendo uma métrica adequada. A tarefa restante é então descobrir se (X, d) é completo, geralmente usando a completude de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Para provar a completude, tomamos uma sucessão de Cauchy arbitrária (x_n) em X e mostra-se que converge em X.

Estas demonstrações podem ter um grau de complexidade muito variado, mas seguem o mesmo procedimento:

(i) Construir um elemento x (para ser usado como um limite).

(ii) Provar que x está no espaço considerado.

(iii) Provar a convergência $x_n \to x$ (no sentido da métrica).

Exemplo 1.5.1 $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{C}^n$ *são espaços completos.*

Dem. Utilizemos a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^n$, definida por

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2},$$

com $x = (\xi_i)$ e $y = (\eta_i)$.

Consideramos uma sucessão de Cauchy qualquer (x_m) em $\mathbb{R}^n$, escrevendo $x_m = (\xi_1^{(m)}, ..., \xi_n^{(m)})$. Uma vez que (x_m) é de Cauchy, para cada $\varepsilon > 0$ existe um N tal que

$$d(x_m, x_r) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(r)}\right)^2} < \varepsilon, \quad \forall m, r > N. \tag{1.5.1}$$

Elevando ao quadrado, temos para $m, r > N$ e $j = 1,..., n$

$$\left(\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(r)}\right)^2 < \varepsilon^2 \text{ e } \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(r)}\right| < \varepsilon.$$

Isto mostra que, para cada j fixo, $(1 \leq i \leq n)$, a sucessão $(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, ...)$ é uma sucessão de Cauchy de números reais, logo convergente pelo Teorema 1.4.5, isto é

$$\xi_i^{(m)} \to \xi_i \text{ quando } m \to +\infty.$$

Usando estes n limites, nós definimos $x = (\xi_1..., \xi_n)$. Claramente, $x \in \mathbb{R}^n$.

De (1.5.1), com $r \to +\infty$,

$$d(x_m, x) \leq \varepsilon, \quad \forall m > N.$$

Isto mostra que x é o limite de (x_m) e prova a completude de $\mathbb{R}^n$, porque (x_m) foi tomada como uma sucessão de Cauchy arbitrária .

A completude de $\mathbb{C}^n$ prova-se pelo mesmo método. ■

Exemplo 1.5.2 *O espaço l^∞ é completo.*

Dem. Seja (x_m) uma sucessão de Cauchy qualquer no espaço l^∞, com $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, ...)$.

Como a métrica em l^∞ é dada por

$$d(x,y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|,$$

(em que $x = (\xi_i)$ e $y = (\eta_i)$) e (x_m) é uma sucessão de Cauchy, então para qualquer $\delta > 0$ existe N tal que para $m, n > N$,

$$d(x_m, x_n) = \sup_i \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}\right| < \varepsilon.$$

Portanto, por cada i fixo,

$$\left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}\right| < \varepsilon, \quad \forall m, n > N, \tag{1.5.2}$$

pelo que a sucessão $(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, ...)$ é uma sucessão de Cauchy de números, convergente, pelo Teorema 1.4.5. Isto é, $\xi_i^{(m)} \to \xi_i$, quando $m \to +\infty$.

Usando esses infinitos limites $\xi_1, \xi_2, ...$, nós definimos $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ e vamos mostrar $x \in l^\infty$ e $x_m \to x$.

De (1.5.2), com $n \to +\infty$ temos

$$\left|\xi_i^{(m)} - \xi_i\right| < \varepsilon, \quad \forall m, n > N. \tag{1.5.3}$$

Sincexm $x_m = (\xi_i^{(m)}) \in l^\infty$, há um número real k_m tal que $\left|\xi_i^{(m)}\right| \leq k_m$ forall i. Portanto, pela desigualdade triangular,

$$|\xi_i| \leq \left|\xi_i - \xi_i^{(m)}\right| + \left|\xi_i^{(m)}\right| \leq \varepsilon + k_m, \quad \forall m > N.$$

Esta desigualdade é válida para cada i, e o lado direito não envolve i. Por isso (ξ_i) é uma sucessão limitada de números, o que implica que $x = (\xi_i) \in l^\infty$. Além disso, por (1.5.3) obtemos

$$d(x_m, x) = \sup_i \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i\right| \leq \varepsilon, \quad \forall m > N.$$

Isto mostra que $x_m \to x$, e uma vez que (x_m) é uma sucessão de Cauchy arbitrária, então l^∞ é completo. ■

Exemplo 1.5.3 *O espaço c, formado por todas as sucessões convergentes $x = (\xi_i)$ de números complexos, com a métrica induzida por l^∞, é completo.*

Dem. c é um subespaço de l^∞ e, se mostramos que c é fechado em l^∞, então a demonstração conclui-se pelo Teorema 1.4.8.

Considere-se um sucessão qualquer $x = (\xi_i) \in \bar{c}$, a aderência de c. Pelo Teorema 1.4.7 a), existem $x_n = (\xi_i^{(n)}) \in c$ tais que $x_n \to x$. Assim, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um N talque para $n \geq N$ e todos i temos

$$\left|\xi_i^{(n)} - \xi_i\right| \leq d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{3},$$

por exemplo, para $n = N$ e todo o i.

Como $x_N \in c$, seus termos $\xi_i^{(N)}$ formam uma sucessão convergente, que é uma sucessão de Cauchy. Por isso, há um N_1 tal que

$$\left|\xi_i^{(N)} - \xi_k^{(N)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall i, k \geq N_1.$$

Pela desigualdade triangular, tem-se para todos $i, k \geq N_1$ a desigualdade:

$$|\xi_i - \xi_k| \leq \left|\xi_i - \xi_i^{(N)}\right| + \left|\xi_i^{(N)} - \xi_k^{(N)}\right| + \left|\xi_k^{(N)} - \xi_k\right| < \varepsilon.$$

Isto mostra que a sucessão $x = (\xi_i)$ é convergente. Assim, $x \in c$ e como $x \in \bar{c}$ é arbitrário, isso prova que c é fechado em l^∞. A completude de c resulta segue do Teorema 1.4.8. ■

Exemplo 1.5.4 *O espaço l^p é completo, para* $1 \leq p < +\infty$.

Dem. Seja (x_n) uma sucessão qualquer de Cauchy no espaço l^p, com $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, ...)$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ existe N tal que para $m, n > N$,

$$d(x_m, x_n) = \left[\sum_{i=1}^{+\infty} \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{1.5.4}$$

Então, para cada $i = 1, 2, ...$ temos

$$\left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}\right| < \varepsilon, \ \forall m, n > N. \tag{1.5.5}$$

Fixemos i. De (1.5.5) temos que $(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)},...)$ é uma sucessão de Cauchy de números reais, que é convergente, pois $\mathbb{R}$ é completo, para, por exemplo, $\xi_i^{(m)} \to \xi_i$, quando $m \to +\infty$.

Usando estes limites, definimos $x = (\xi_1, \xi_2...)$ e vamos mostrar que $x \in l^p$ e $x_m \to x$.

De (1.5.4) temos para todos $m, n > N$,

$$\sum_{i=1}^{k} \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}\right|^p < \varepsilon^p, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Quand $m \to +\infty$, obtemos para $m > N$,

$$\sum_{i=1}^{k} \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i\right|^p \leq \varepsilon^p, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Considerando, agora $k \to +\infty$, obtem-se, para $m > N$,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left|\xi_i^{(m)} - \xi_i\right|^p \leq \varepsilon^p \tag{1.5.6}$$

Isto mostra que $x_m - x = (\xi_i^{(m)} - \xi_i) \in l^p$. Como $x_m \in l^p$, pela desigualdade de Minkowski temos

$$x = x_m + (x - x_m) \in l^p.$$

Além disso, a série em (1.5.6) representa $(d(x_m, x))^p$, de modo que (1.5.6) implica que $x_m \to x$. Uma vez que (x_m) é uma sucessão de Cauchy arbitrária em l^p, isso prova a completude de l^p, para $1 \leq p < +\infty$. ■

Exemplo 1.5.5 *O espaço de funções contínuas $C[a, b]$ é completo.*

Dem. Seja (x_m) sucessão de Cauchy arbitrária em $C[a, b]$. Então, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que para $m, n > N$ temos

$$d(x_m, x_n) = \max_{t \in J} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon, \tag{1.5.7}$$

com $J = [a, b]$. Por isso, para qualquer t fixo, $t = t_0 \in J$,

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \varepsilon, \quad \forall m, n > N.$$

Isto mostra que $(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots)$ é uma sucessão de Cauchy de números reais. Como $\mathbb{R}$ é completo, a sucessão converge, digamos,$x_m(t_0) \to x(t_0)$ quando $m \to +\infty$. Desta forma, podemos associar a cada $t \in J$ um único número real $x(t)$.

Isto define (pontualmente) uma função x em J, e mostra que $x \in C[a, b]$ e $x_m \to x$.

De (1.5.7) com $n \to +\infty$ temos

$$\max_{t \to J} |x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon, \ \forall m > N.$$

Portanto, para cada $t \in J$,

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon, \ \forall m > N,$$

o que mostra que $(x_m(t))$ converge para $x(t)$ uniformemente em J.

Como os x_m são contínuas em J e a convergência é uniforme, então a função limite x é contínua em J.

Assim, $x \in C[a,b]$ e $x_m \to x$, o que prova a completude de $C[a,b]$. ■

No resultado anterior assumimos que as funções x tinham valores reais, por simplicidade. Podemos chamar a este espaço: espaço real $C[a,b]$.

Da mesma forma, obtemos o espaço complexo $C[a,b]$ se tomarmos funções contínuas com valores complexos definidas em $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Este espaço também é completo e a sua demonstração faz-se de modo análogo.

Além disso, nesta demonstração fica claro que:

Teorema 1.5.6 *A convergência $x_m \to x$ no espaço $C[a,b]$ é uniforme, isto é, (x_m) converge uniformemente em $[a,b]$ para x.*

Por este facto a métrica em C [a, b] descreve a convergência uniforme em $[a,b]$ e, por esse motivo, é designada por **métrica uniforme**.

1.6 Exemplos de espaços métricos incompletos

Exemplo 1.6.1 *O espaço $\mathbb{Q}$, conjunto de todos os números racionais com a habitual métrica dada por $d(x,y) = |x - y|$, onde $x, y \in \mathbb{Q}$, não é completo.*

Exemplo 1.6.2 *Seja X o conjunto de todos os polinómios considerados como funções de t nalgum intervalo fechado limitado $J = [a,b]$. Defina-se a métrica d em X por*

$$d(x,y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|.$$

Este espaço métrico (X,d) não é completo.
Um exemplo de uma sucessão de Cauchy que não é convergente em X é dada

por qualquer sucessão de polinómios que converge uniformemente em J para uma função contínua, não seja um polinómio.

Exemplo 1.6.3 *Seja X o conjunto de todas as funções contínuas de valor real em $J = [0,1]$, e seja*

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt.$$

Este espaço métrico (X, d) não é completo.

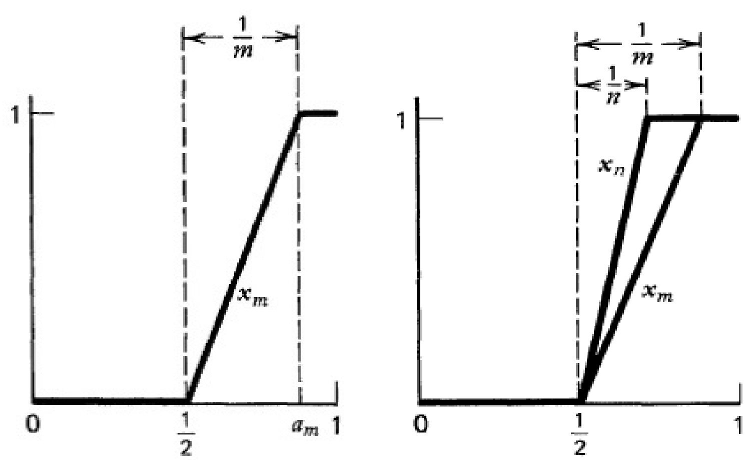
Dem. As funções x_m na figura abaixo, formam uma sucessão de Cauchy, porque $d(x_m, x_n)$ é a área do triângulo, e para cada $\varepsilon > 0$,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{quando} \quad m, n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Mostremos que esta sucessão de Cauchy não converge.
Temos então que

$$x_m(t) = \begin{cases} 0 \quad , & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \\ 1 \quad , & t \in [a_m, 1]\,, \end{cases}$$

com $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$.



Portanto para $x \in X$,

$$\begin{aligned} d(x_m, x) &= \int_0^1 |x_m(t) - x(t)|\, dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |x_m(t) - x(t)|\, dt + \int_{a_m}^1 |1 - x(t)|\, dt. \end{aligned}$$

Como as funções integrandas são não negativas então cada os integrais também são não negativos. Assim, $d(x_m, x) \to 0$ implica que cada integral também tende para zero. Como x é contínuo, temos

$$x(t) = 0 \text{ se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \quad x(t) = 1 \text{ se } \ t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right].$$

Mas isto é impossível para uma função contínua. Por isso (x_m) não converge, isto é, não tem limite em X, pelo que que X não é completo . ■

1.7 Completude de espaços métricos

Sabemos que $\mathbb{Q}$ não é completo, mas pode ser "ampliado"para $\mathbb{R}$, que já é completo, e de modo que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

É bastante importante que um espaço métrico incompleto arbitrário possa ser "completado"de forma algo semelhante. Para esse processo precisamos de dois conceitos relacionados, que também têm Várias outras aplicações.

Definição 1.7.1 *Sejam $X = (X, d)$ e $\widetilde{X} = (\widetilde{X}, \widetilde{d})$ dois espaços métricos. Então:*

a) *Uma aplicação T de X em $\widetilde{X}$ é uma **isometria** se T preservar distâncias, ou seja, se para todo $x, y \in X$,*

$$\widetilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y),$$

em que Tx e Ty são as imagens de x e y, respectivamente.

b) *O espaço X diz-se **isométrico** com o espaço $\widetilde{X}$ se existir uma isometria bijective de X para $\widetilde{X}$. Os espaços X e $\widetilde{X}$ são então **espaços isométricos**.*

Os espaços isométricos podem diferir, na maioria, pela natureza de seus pontos, mas são indistinguíveis do ponto de vista da métrica. E em qualquer estudo em que a natureza dos pontos não importe, podemos considerar os dois espaços como idênticos - como duas cópias do mesmo espaço genérico.

O teorema que prova que cada espaço métrico pode ser completado, chama-se **teorema da completude** do espaço X.

Teorema 1.7.2 *Para um espaço métrico $X = (X, d)$ existe um espaço métrico completo $\widehat{X} = (\widehat{X}, \widehat{d})$ que tem um subespaço W que é isométrico a X e é denso em $\widehat{X}$. Este espaço $\widehat{X}$ é único excepto para isometrias, ou seja, se $\widetilde{X}$ é um espaço métrico completo qualquer, contendo um subespaço denso $\widetilde{W}$ isométrico com X, então $\widetilde{X}$ e $\widehat{X}$ são isométricos.*

Dem. A prova é um pouco longa, pelo que a subdividimos em quatro etapas. Na primeira (a) construímos o espaço $\widehat{X} = (\widehat{X}, \widehat{d})$ e em (b) uma isometria T de X em W, onde $\overline{W} = \widehat{X}$. Depois provamos em (c) a completude de $\widehat{X}$ e em (d) a unicidade de $\widehat{X}$, a menos de uma isometria.

a) Construção de $\widehat{X} = (\widehat{X}, \widehat{d})$: Sejam (x_n) e (x'_n) duas sucessões de Cauchy em X. Defina-se (x_n) como **equivalente** a $(x_n\prime)$, e escreve-se $(x_n)\tilde{}(x'_n)$, se

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x'_n) = 0. \tag{1.7.1}$$

Seja $\widehat{X}$ o conjunto de todas as classes de equivalência $\widehat{x}$, $\widehat{y}$, de sucessões de Cauchy assim obtidas.

Escrevemos $(x_n)\in \widehat{x}$ para significar que (x_n) é um membro da classe $\widehat{x}$ (ou um representante da classe $\widehat{x}$).

Defina-se

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n), \tag{1.7.2}$$

com $(x_n)\in \widehat{x}$ e $(y_n)\in \widehat{y}$. Mostremos, em primeiro lugar, que este limite existe. De facto

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n),$$

isto é,

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n).$$

Trocando m e n, obtem-se uma desigualdade semelhante, pelo que

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n).$$

Uma vez que (x_n) e (y_n) são sucessões de Cauchy, podemos fazer o lado direito tão pequeno quanto se queira. Isso implica que o limite em (1.7.2) existe porque $\mathbb{R}$ é completo.
É necessário mostrar que o limite em (1.7.2) é independente da sscolha dos representantes das classes. Na verdade, se $(x_n)\tilde{}(x'_n)$ e $(y_n)\tilde{}(y'_n)$, então por (1.7.1),

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \longrightarrow 0,$$

quando $n \to +\infty$, o que implica a afirmação

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} d(x'_n, y'_n).$$

Provámos, assim, que $\widehat{d}$ em (1.7.2) é uma métrica em $\widehat{X}$. Obviamente, $\widehat{d}$ satisfaz (M1), bem como $\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{x}) = 0$, ou seja (M3). Além disso,

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = 0 \Longrightarrow (x_n)\tilde{}(y_n) \Longrightarrow \widehat{x} = \widehat{y}$$

dá (M2), e (M4) para $\widehat{d}$ segue de

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n),$$

fazendo $n \to +\infty$.

b) Construção de uma isometria $T : X \longrightarrow W \subset \widehat{X}$: A cada $b \in X$ associamos a classe $\widehat{b} \in \widehat{X}$ que contém a sucessão de Cauchy constante $(b, b, ...)$. Define-se assim uma aplicação $T : X \longrightarrow W$ para o subespaço $W = T(X) \subset \widehat{X}$. A aplicação T é dado por $b \longmapsto \widehat{b} = Tb$, com $(b, b, ...) \in \widehat{b}$.
Vemos que T é uma isometria uma vez que (1.7.2) fica simplesmente

$$\widehat{d}(\widehat{b}, \widehat{c}) = \widehat{d}(b, c),$$

sendo $\widehat{c}$ a classe de (y_n) onde $y_n = c$ para todo a valor de n. Qualquer isometria é injectiva e $T : X \longrightarrow W$ é sobrejectiva desde que $T(X) =$

W. Portanto, W e X são isométricos.
Mostremos agora que W é denso em $\widehat{X}$. Consideramos um qualquer $\widehat{x} \in \widehat{X}$ e $(x_n) \in \widehat{X}$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe um N tal que

$$d(x_n, x_N) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para } n > N.$$

Considere-se a sucessão constante $(x_N, x_N, ...) \in \widehat{x}_N$. Então $\widehat{x}_N \in W$ e, por (1.7.2),

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{x}_N) = \lim_{n \to +\infty} d(x_n, x_N) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Isto mostra que para toda a vizinhança de raio ε de $\widehat{x} \in \widehat{X}$ arbitrário contém um elemento de W. Portanto, W é denso em $\widehat{X}$.

c) Completude de $\widehat{X}$: Seja $(\widehat{x}_n)$ uma sucessão de Cauchy arbitrária, em $\widehat{X}$. Como W é denso em $\widehat{X}$, para cada $\widehat{x}_n$ há um $\widehat{z}_n \in W$ tal que

$$\widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{z}_n) < \frac{1}{n}. \tag{1.7.3}$$

Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} \widehat{d}(\widehat{z}_m, \widehat{z}_n) &\leq \widehat{d}(\widehat{z}_m, \widehat{x}_m) + \widehat{d}(\widehat{x}_m, \widehat{x}_n) + \widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{z}_n) \\ &< \frac{1}{m} + \widehat{d}(\widehat{x}_m, \widehat{x}_n) + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

e esta expressão é menor do que qualquer $\varepsilon > 0$ para m e n suficientemente grandes, porque $(\widehat{x}_m)$ é uma sucessão de Cauchy. Portanto, $(\widehat{z}_m)$ também é uma sucessão de Cauchy. Como $T : X \longrightarrow W$ é uma isometria e $\widehat{z}_m \in W$, a sucessão (z_m), com $z_m = T^{-1}\widehat{z}_m$, é de Cauchy em X.
Seja $\widehat{x} \in \widehat{X}$ a classe a que (z_m) pertence. Mostremos que $\widehat{x}$ é o limite de $(\widehat{x}_n)$. Por (1.7.3),

$$\widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{x}) \leq \widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{z}_n) + \widehat{d}(\widehat{z}_n, \widehat{x}) < \frac{1}{n} + \widehat{d}(\widehat{z}_n, \widehat{x}). \tag{1.7.4}$$

Como $(z_m) \in \widehat{x}$ e $\widehat{z}_n \in W$, então $(z_n, z_n, z_n, ...) \in \widehat{z}_n$, então (1.7.4) fica

$$\widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{x}) < \frac{1}{n} + \lim_{m \to +\infty} d(z_n, z_m),$$

sendo o lado direito menor do que qualquer $\varepsilon > 0$ para n suficientemente grande. Portanto, a sucessão de Cauchy arbitrária $(\widehat{x}_n)$ em $\widehat{X}$ tem por limite $\widehat{x} \in \widehat{X}$, pelo que $\widehat{X}$ é completo.

d) Unicidade de $\widehat{X}$, a menos de uma isometria: Se $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ for um outro espaço métrico completo com um subespaço $\widetilde{W}$ denso em $\widetilde{X}$ e isométrico com X, então para quaisquer $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$ temos sucessões $(\widetilde{x}_n)$, $(\widetilde{y}_n)$ em $\widetilde{W}$ tais que $\widetilde{x}_n \longrightarrow \widetilde{x}$ e $\widetilde{y}_n \longrightarrow \widetilde{y}$. Logo

$$\widetilde{d}\,(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \lim_{n \to +\infty} \widetilde{d}\,(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n)$$

e

$$\left| \widetilde{d}\,(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - \widetilde{d}\,(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) \right| \leq \widetilde{d}\,(\widetilde{x}, \widetilde{x}_n) + \widetilde{d}\,(\widetilde{y}, \widetilde{y}_n) \longrightarrow 0.$$

Como $\widetilde{W}$ é isométrico com $W \subset \widehat{X}$ e $\overline{W} = \overline{X}$, as distâncias em $\widetilde{X}$ e $\widehat{X}$ devem ser as mesmas. Daí $\widetilde{X}$ e $\widehat{X}$ serem isométricos.

■

1.8 Exercícios

1. Mostre que a linha real $\mathbb{R}$ é um espaço métrico.

2. A função $d(x, y) = (x - y)^2$ define uma métrica no conjunto de todos os números reais?

3. Prove que $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ define uma métrica no conjunto de todos os númerosxreais.

4. Seja d uma métrica em X. Determine todas as constantes k tal que (i) kd e (ii) $d + k$ é uma métrica em X.

5. Mostre que d no exemplo 1.1.6 satisfaz a desigualdade triangular.

6. Mostre que outra métrica d no conjunto X o exemplo 1.1.7 é definida por
$$d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt.$$

7. Prove, usando a desigualdade triangular que

   a)
   $$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w).$$

b)

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

8. Usando (1.2.4), mostre que a média geométrica de dois números positivos não excede a média aritmética.

9. Mostre que a desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.2.9) implica

$$(|\xi_1| + \cdots + |\xi_n|)^2 \leq n\left(|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2\right).$$

10. Encontre uma sucessão que convirja para 0, mas não esteja em nenhum espaço l^p, com $1 \leq p < +\infty$.

11. Indique uma sucessão x que esteja em l^p, com $p > 1$ mas $x \notin l^1$.

12. O diâmetro $\delta(A)$ de um conjunto não vazio A num espaço métrico (X, d) é definido como sendo

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

A é limitado se $\delta(A) < \infty$. Mostre que $A \subset B$ implica $\delta(A) \leq \delta(B)$.

13. Mostre que $\delta(A) = 0$ se, e só se, A for constituído por um único ponto.

14. A distância $D(A, B)$ entre dois subconjuntos não vazios A e B de um espaço métrico (X, d) é definida por

$$D(A, B) = \inf_{a \in A,\ b \in B} d(a, b).$$

Mostre que D não define uma métrica no conjunto de todos os subconjuntos de X.

15. Se $A \cap B \neq \emptyset$, mostre que $D(A, B) = 0$. A implicação inversa é verdadeira?

16. Se (X, d) é um espaço métrico, mostre que outra métrica em X pode ser definida por

$$\overline{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

e que X é limitado na métrica $\overline{d}$.

17. O produto cartesiano $X = X_1 \times X_2$ de dois espaços métricos (X_1, d_1) e (X_2, d_2) pode ser considerado um espaço métrico (X, d) de várias formas. Por exemplo, mostre que uma métrica d pode ser definida por

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2),$$

com $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

18. Mostre que outra métrica para o produto cartesiano X pode ser dada por

$$\overline{d}(x, y) = \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + (d_2(x_2, y_2))^2}.$$

19. Prove que uma terceira métrica em X pode ser definida por

$$\widehat{d}(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}.$$

20. Um **ponto fronteiro** x dum conjunto $A \subset (X, d)$ é um ponto de X (que pode pertencer, ou não, a A), tal que toda a vizinhança de x contém pontos de A e pontos que não pertencem a A..
Chama-se fronteira ao conjunto de todos os pontos fronteiros de A.
Descreva a fronteira

a) dos intervalos $(-1, 1)$, $[-1, 1)$, $[-1, 1]$ on $\mathbb{R}$;

b) do conjunto dos números racionais em R;

c) dos discos $\{z : |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$ e and $\{z : |z| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$.

21. Mostre que $B[a, b]$, $a < b$, não é separável.

22. Prove que a aplicação $T : X \to Y$ é contínua se, e só se, a imagem inversa de um conjunto fechado $M \subset Y$ é um conjunto fechado em X.

23. Se uma sucessão (x_n) num espaço métrico X for convergente e tiver limite x, mostre que toda a subsucessão (x_{n_k}) de (x_n) é convergente e tem o mesmo limite x.

24. Se (x_n) for uma sucessão de Cauchy e tiver uma subsucessão convergente, digamos, $x_{n_k} \to x$, mostre que (x_n) é convergente com o limite x.

25. Mostre que $x_n \to x$ se e somente se para toda a vizinhança V de x existe um número inteiro n_0 tal que $x_n \in V$ para todos $n > n_0$.

26. Mostre que uma sucessão de Cauchy é limitada.

27. A limitação de uma sucessão num espaço métrico é suficiente para garantir que a sucessão é de Cauchy? E convergente?

28. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Mostre que o intervalo aberto (a, b) é um subespaço incompleto de $\mathbb{R}$, enquanto o intervalo fechado $[a, b]$ é completo.

29. Seja X o espaço de todas as sequências ordenadas de n números reais, $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ e
$$d(x, y) = \max_i |\xi_i - \eta_i|,$$
com $y = (\eta_i)$. Mostre que (X, d) é completo.

30. Mostre que o espaço formado por $\mathbb{R}$ com a métrica
$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$$
é um espaço incompleto.

31. Prove que o subespaço $Y \subset C[a, b]$ formado por todos $x \in C[a, b]$ tal que $x(a) = x(b)$ é completo.

32. Um **homeomorfismo** é uma aplicação bijetiva e contínua $T : X \to Y$ cujo inverso é contínuo. Neste caso, os espaços métricos X e Y dizem-se homeomórfico. Ilustre com um exemplo um espaço métrico completo e outro incompleto que possam ser homeomórficos.

Capítulo 2

Espaços normados. Espaços de Banach

Os espaços métricos são particularmente úteis e importantes se considerarmos um espaço vetorial dotado de uma métrica induzida por uma norma. A um espaço deste tipo chama-se **espaço normado**. Se for uma métrica completa então o espaço designa-se como **espaço de Banach**.

A teoria dos espaços normados, e em particular, dos espaços de Banach e a teoria dos operadores lineares neles definidos constituem uma parte importante da Análise Funcional.

2.1 Alguns conceitos

Um espaço normado é um espaço vetorial com uma métrica definida através de uma norma. Um espaço de Banach é um espaço normado completo.

Uma vantagem importante é que num espaço normado, podemos definir e usar séries infinitas.

Uma aplicação de um espaço normado X para um espaço normado Y designa-se por um **operador**.

Uma aplicação de X para o campo escalar $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ designa-se por **funcional**.

Os operadores lineares limitados e os funcionais lineares limitados têm particular importância uma vez que são contínuos e tiram proveito do estrutura vetorial do espaço.

Um exemplo de um resultado importante e surpreendente é o que indica que um **operador linear é contínuo se, e somente se, for limitado**. Este é um resultado fundamental.

É fácil de verificar que o **conjunto de todos os operadores lineares limitados de um espaço normado** X **num espaço normado** Y, é ele próprio um espaço normado, representado por $B(X,Y)$.

Da mesma forma, o conjunto de todos os funcionais lineares limitados em X torna-se um espaço normado, designado por **espaço dual** X'de X.

Na Análise Funcional, os espaços de dimensões infinitas são mais importantes do que os espaços de dimensão finita. Estes são mais simples, e os operadores neles definidos podem ser representados por matrizes

Ao longo do curso, designamos os espaços por X e Y,os operadores por letras maiúsculas, a imagem de x por T por Tx (sem parêntesis), funcionais por letras minúsculas e o valor de f em x por $f(x)$ (com parêntesis).

2.2 Espaço vectorial

Os espaços vetoriais têm um papel importante em vários ramos da Matemática. Na verdade, em vários problemas práticos e teóricos, tem-se um conjunto X cujos elementos podem ser vectores de várias dimensões, sucessões de números, ou funções. Esses elementos podem ser adicionados e multiplicados por constantes (números) de modo a que o resultado seja ainda novamente um elemento de X.

A definição envolve um corpo geral K, que em análise funcional, K será $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cujos elementos são designados de **escalares**.

Definição 2.2.1 *Um **espaço vectorial** (ou **espaço linear**) sobre um corpo K é um conjunto não vazio X de elementos x, y, ... (chamados **vectores**) equipado com duas operações algébricas: **adição de vectores** e **multiplicação de vectores por escalares**, isto é, por elementos de K.*

A adição de vectores associa a cada par ordenado (x, y) um vector $x+y$, chamado **soma** de x e y, verificando as seguintes propriedades:

A adição de vectores é **comutativa** e **associativa**, isto é

$$\begin{aligned} x+y &= y+x, \\ x+(y+z) &= (x+y)+z, \ \forall x, y, z \in X. \end{aligned}$$

Além disso, existe um vector 0, chamado **vector nulo**, e para cada vector x existe um vector $-x$, tal que

$$\begin{aligned} x+0 &= x \\ x+(-x) &= 0,\ \forall x \in X. \end{aligned}$$

A multiplicação por escalares associa-se a cada vector x e escalar α um vector (αx), chamado produto de α e x, de modo que para todos os vectores x, y e escalares α, β, temos

$$\begin{aligned} \alpha(\beta x) &= (\alpha\beta)\, x, \\ 1x &= x, \end{aligned}$$

e as propriedades distributivas

$$(\alpha+\beta)\, x = ax + \beta x.$$

A partir da definição, vemos que a adição de vectores pode ser considerada como aplicação $X \times X \to X$, enquanto a multiplicação por escalares é uma aplicação $K \times X \to X$.

K designa-se por **campo escalar** (ou **campo de coeficientes**) do espaço vectorial X e X diz-se **espaço vectorial real** se $K = \mathbb{R}$ e **espaço vetorial complexo** se $K = \mathbb{C}$.

Exemplo 2.2.2 *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é um espaço vectorial real com as duas operações algébricas definidas do modo habitual*

$$\begin{aligned} x+y &= (\xi_1+\eta_1, ..., \xi_n+\eta_n), \\ \alpha x &= (\alpha\xi_1, ..., \alpha\xi_n), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.3 *O espaço $\mathbb{C}^n$ é um espaço vectorial complexo com as operações algébricas definidas como no exemplo anterior, com $\alpha \in \mathbb{C}$.*

Exemplo 2.2.4 *O espaço $C[a,b]$ forma um espaço vectorial real com as operações algébricas definidas da maneira usual:*

$$\begin{aligned} (x+y)(t) &= x(t)+y(t), \\ (\alpha x)(t) &= \alpha x(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Na verdade, $x+y$ e αx são funções contínuas de valor real definidas em $[a,b]$ se x e y também forem funções contínuas e α real.

Exemplo 2.2.5 *O espaço l^2 é um espaço vectorial com as operações algébricas por*

$$\begin{aligned}(\xi_1, \xi_2, ...) + (\eta_1, \eta_2, ...) &= (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, ...)\,,\\ \alpha(\xi_1, \xi_2, ...) &= (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, ...)\end{aligned}$$

Na verdade, $x = (\xi_j) \in l^2$ e $y = (\eta_j) \in l^2$ implica que $x+y \in l^2$, por aplicação da desigualdade de Minkowski . Análogamente $\alpha x \in l^2$.

Outros espaços vectoriais de sucessões são l^∞ e l^p com $1 \leq p < +\infty$.

Um **subespaço** de um espaço vectorial X é um subconjunto não vazio Y de X tal que para $y_1, y_2 \in Y$ e para quaisquer os escalares α, β temos

$$ay_1 + \beta y_2 \in Y.$$

Note-se que Y é, ele próprio, um espaço vectorial, sendo as duas operações algébricas as induzidas por X.

Um subespaço especial de X é o **subespaço impróprio** $Y = X$.

Outro subespaço de X ($\neq \{0\}$) é designado por **espaço próprio**.

Outro subespaço particular de qualquer espaço vectorial X é $Y = \{0\}$.

Uma **combinação linear** de vectores $x_1...., x_m$ de um espaço vectorial X é uma expressão da forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m$$

onde os coeficientes $\alpha_1, ..., \alpha_m$ são escalares arbitrários.

Para qualquer subconjunto não vazio, $M \subset X$ o conjunto de todas as combinações lineares de vectores de M designa-se por **gerador** de M, e representa-se por *span* M.

Obviamente, *span* M é um subespaço Y de X, e diz-se que Y é **gerado** por M.

Definição 2.2.6 *Considere-se um conjunto M de vectores $x_1...., x_r$, $r \geq 1$, num espaço vectorial X, definidos por meio da equação*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_r x_r = 0, \tag{2.2.1}$$

com $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_r$ escalares.
*Se a equação (2.2.1) se verificar com $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$, o conjunto M é diz-se **linearmente independente.** M é **linearmente dependente** se (2.2.1) acontecer com um conjunto de escalares em que pelo menos um deles é não nulo.*

Um subconjunto arbitrário M de X é **linearmente independente** se todo subconjunto finito não vazio de M é linearmente independente. Caso contrário M é **linearmente dependente**.

Uma motivação para esta terminologia resulta do facto de que, se $M = \{x_1...., x_r\}$ é linearmente dependente, então pelo menos um vector de M pode ser escrito como uma combinação linear dos outros.

Por exemplo, se (2.2.1) verificar com, pelo menos um, $\alpha_r \neq 0$, então M é **linearmente dependente** e podemos escrever

$$x_r = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_{r-1} x_{r-1}, \text{ com } \beta_j = -\frac{\alpha_j}{\alpha_r}.$$

Podemos usar os conceitos de dependência e independência linear para definir a dimensão de um espaço vectorial:

Definição 2.2.7 *Um espaço vectorial X tem dimensão finita se existir um número inteiro positivo n, tal que X contém um conjunto linearmente independente de n vectores, enquanto que qualquer conjunto de, pelo menos, $n+1$ vectores de X é linearmente dependente.*
*Ao número n chama-se **dimensão** de X, $n = \dim X$.*
*Por definição, $X = \{0\}$ é um espaço de **dimensão finita** e $\dim X = 0$. Se X não tem dimensão finita, então diz-se que tem **dimensão infinita**.*

Em Análise Funcional, os espaços vectoriais com dimensão infinita são mais interessantes que os de dimensão finita.

Por exemplo, $C[a, b]$ e l^2 têm dimensão infinita, enquanto $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são n-dimensionais.

Se $\dim X = n$, um conjunto de n vectores linearmente independentes de X forma uma **base** de X . Se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base de X, cada $x \in X$ tem uma representação única como uma combinação linear dos vectores da base:

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Por exemplo, uma base para $\mathbb{R}^n$ é

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0), \; e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), ..., e_n = (0, 0, \cdots, 1),$$

designada por **base canónica** de $\mathbb{R}^n$.

De uma forma geral, se X é um espaço vectorial qualquer, não necessariamente de dimensão finita, e B é um subconjunto linearmente independente de X que é gerador de X, então B é uma **base** (ou uma **base de Hamel**) para X.

Portanto, se B é uma base de X, então, cada $x \in X$ não nulo possui uma representação única como combinação linear de elementos de B com escalares diferentes de zero como coeficientes.

Todo espaço vectorial $X \neq \{0\}$ tem uma base.

Esta afirmação é evidente no caso de dimensões finitas. Para um espaço vectorial de dimensão infinita é necessário recorrermos ao Lema de Zorn para o provarmos.

Contudo, note-se que todas as bases de um dado espaço vectorial X (finito ou infinito) tem a mesma dimensão.

Teorema 2.2.8 *Seja X um espaço vectorial n dimensional. Então, qualquer subespaço próprio Y de X tem dimensão menor que n.*

Dem. Se $n = 0$, então $X = \{0\}$ e não possui um subespaço próprio.

Se $\dim Y = 0$, então $Y = \{0\}$, e $X \neq Y$ implica $\dim X \geq 1$. Claramente, $\dim Y \leq \dim X = n$. Se $\dim Y = n$, então Y teria uma base de n elementos, que também seria uma base para X, uma vez que $\dim X = n$, isto é, $X = Y$. Isso mostra que qualquer conjunto linearmente independente de vectores em Y deve ter menos do que n elementos, e $\dim Y < n$. ■

2.3 Espaço normado. Espaço de Banach

Os exemplos da última seção ilustram que, em muitos casos, um espaço vectorial X pode, ao mesmo tempo, ser um espaço métrico desde que seja definida uma métrica d em X.

No entanto, se não houver relação entre a estrutura algébrica e a métrica, pode não ser possível tirar vantagem dos conceitos algébricos e métricos. Para garantir essa relação entre as propriedades "algébricas"e "geométricas"de X, define-se em X uma métrica d de forma especial.

Primeiro apresentamos um conceito auxiliar: **a norma,** que usa as operações algébricas do espaço vectorial. Em seguida, empregamos a norma para obter uma métrica d que seja do tipo desejado. Essa idéia leva ao conceito de um espaço normado.

De facto, um grande número de espaços métricos podem ser considerados como espaços normados, de modo que um espaço normado é, provavelmente, o mais importante tipo de espaço em Análise Funcional.

Definição 2.3.1 *Um espaço normado X é um espaço vectorial com uma* ***norma*** *definida.*
Uma norma num espaço vectorial (real ou complexo) X é uma função de valor real em X cujo valor num $x \in X$ é dado por $\|x\|$, e que tem as propriedades

(N1) $\|x\| \geq 0$;

(N2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$;

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *(desigualdade triangular),*
com x e y vectores arbitrários em X e α um escalar.

Definição 2.3.2 *Um espaço de Banach é um espaço normado completo.*

Esta definição foi dada, independentemente, por S. Banach (1922), H. Hahn (1922) e N. Wiener (1922).

Uma norma em X define uma métrica d em X que é dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \text{ para } x, y \in X \tag{2.3.1}$$

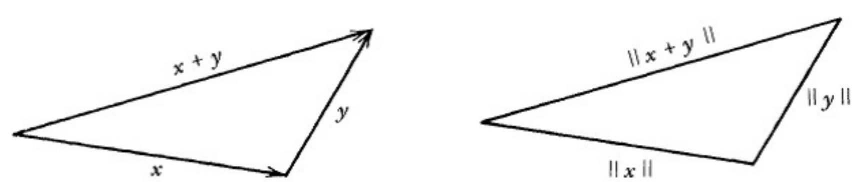
que é a **métrica induzida pela norma**.

Assim o espaço normado é designado por $(X, \|\cdot\|)$ ou simplesmente por X.

As propriedades (N1) a (N4) são sugeridas e motivadas pelo comprimento $|x|$ de um vector x. Assim, num espaço unidimensional, temos $\|x\| = |x|$.

Na verdade, (N1) e (N2) afirmam que todos os vectores têm comprimentos positivos exceto o vector zero, que tem comprimento nulo. (N3) significa que quando um vetor é multiplicado por um escalar, o seu comprimento é multiplicado pelo valor absoluto do escalar.

(N4) significa que o comprimento de um lado de um triângulo não pode exceder a soma dos comprimentos dos dois outros lados.



Não é difícil concluir que das propriedades (N1) a (N4) a relação (2.3.1) define uma métrica. Por isso, espaços normados e espaços de Banach são espaços métricos.

Repare-se que (N4) implica

$$\left|\|y\| - \|x\|\right| \leq \|y - x\|,$$

e implica uma importante propriedade da norma:

Proposição 2.3.3 *A norma é **contínua**, isto é, $x \to \|x\|$ é uma aplicação contínua de $(X, \|\cdot\|)$ para $\mathbb{R}$.*

Veremos mais adiante, que nem todas as métricas de um espaço vectorial podem ser obtidas a partir de uma norma.

Exemplo 2.3.4 *Os espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são espaços de Banach com norma definida por*

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left|\xi_1\right|^2 + \cdots + \left|\xi_n\right|^2}. \tag{2.3.2}$$

De fato, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são espaços completos e (2.3.2) define a métrica

$$d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{\left|\xi_1 - \eta_1\right|^2 + \cdots + \left|\xi_n - \eta_n\right|^2}.$$

Exemplo 2.3.5 *O espaço l^p , $1 \leq p < +\infty$, é um espaço de Banach, completo, com norma dada por*

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \left|\xi_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Esta norma induz a métrica

$$d(x,y) = \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \left|\xi_j - \eta_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exemplo 2.3.6 *O espaço l^∞ é um espaço Banach, completo, com a métrica obtida a partir da norma definida por*

$$\|x\| = \sup_j \left|\xi_j\right|$$

Exemplo 2.3.7 *O espaço $C[a,b]$, é um espaço Banach, completo, com norma dada por*

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|\,.$$

Alguns exemplos de espaços normados incompletos:

Exemplo 2.3.8 *O espaço incompleto dado no Exemplo 1.6.3, possui a métrica induzida pela norma*

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\, dt.$$

Todo o espaço normado incompleto pode ser completado? A resposta é sim, se for considerado como um espaço métrico.

E quanto ao prolongamento das operações de um espaço vectorial e da norma tendo em vista a completude ?

Vejamos num caso concreto como se pode completar um espaço incompleto:

Exemplo 2.3.9 *O espaço vectorial de todas as funções contínuas de valor real em $[a,b]$ forma um espaço normado X com norma definida por*

$$\|x\| = \left(\int_a^b (x(t))^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3.3}$$

Este espaço não é completo.
Por exemplo, se $[a,b]=[0,1]$, a sucessão dada no Exemplo 1.6.3 também é sucessão de Cauchy no actual espaço X.
De facto, pela definição de x_n dada no Exemplo 1.6.3, por integração e para $n>m$ obtemos

$$\|x_n - x_m\|^2 = \int_0^1 (x_n(t) - x_m(t))^2\, dt = \frac{(n-m)^2}{3mn^2} < \frac{1}{3m} - \frac{1}{3n}.$$

Esta sucessão de Cauchy não converge. A demonstração é análoga à prova do Exemplo 1.6.3, com a métrica substituída pela métrica atual.
Para um intervalo geral $[a,b]$ podemos construir uma sucessão de "Cauchy"similar que não converge em X.

O espaço X pode ser completado pelo espaço de Banach $L^2[a,b]$. Na verdade, a norma em X e as operações de espaço vectorial podem ser estendidas até à completude de X.

De forma mais geral, para qualquer número real fixo $p \geq 1$, o espaço de Banach $L^p[a,b]$ é a completude do espaço normado que de todas as funções contínuas de valor real em $[a,b]$, como anteriormente, e a norma definida por

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O índice p deve lembrar-nos que esta norma depende da escolha de p, que é mantida fixa. Note que para $p = 2$ isso é igual (2.3.3).

Pode uma métrica num espaço vectorial ser sempre obtida a partir de uma norma?

A resposta é não.

O seguinte lema indica duas propriedades básicas de uma métrica d obtida a partir de uma norma. A primeira propriedade designa-se como **invariância por translação** de d.

Lema 2.3.10 *Uma métrica d induzida por uma norma num espaço normado X satisfaz as propriedades*

$$\begin{aligned} d(x+z, y+z) &= d(x,y), \\ d(\alpha x, \alpha y) &= |\alpha| \, d(x,y), \end{aligned}$$

para todo $x, y, z \in X$ e todo o escalar α.

Dem. Basta notar que

$$d(x+z, y+z) = \|x+z-(y+z)\| = \|x-y)\| = d(x,y)$$

e

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \, \|x-y)\| = |\alpha| \, d(x,y).$$

■

2.4 Outras propriedades dos Espaços de Banach

Um subespaço Y de um espaço normado X, por definição, é um subespaço de X, considerado como um espaço vectorial, com a norma em X restringinda ao subconjunto Y. Esta norma em Y diz-se induzida pela norma de X. Se Y é fechado em X, então Y é um subespaço fechado de X.

Por definição, um subespaço Y de um espaço de Banach X é um subespaço de X considerado como um espaço normado. Portanto, não exigimos que Y seja completo.

Teorema 2.4.1 *Um subespaço Y de um espaço de Banach X é completo se e somente se o conjunto Y é fechado em X.*

A demonstração é uma consequência directa do Teorema 1.4.8.

A convergência de sucessões e os conceitos relacionados em espaços normados é análogo às definições correspondentes para espaços métricos e resulta da relação $d(x, y) = \|x - y\|$:

(i) Uma sucessão (x_n) num espaço normado é convergente se X contém x tal que

$$\lim_{n \to +\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Então escrevemos $x_n \to x$ e x é designado como o limite de (x_n).

(ii) Uma sucessão (x_n) num espaço normado X é de Cauchy se para cada $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon, \quad \forall m, n > N.$$

Num espaço normado, podemos usar **séries**.

As séries infinitas podem agora ser definidas de forma semelhante à utilizada na Análise Matemática:

Se (x_k) é uma sucessão num espaço normado X, podemos associar a (x_k) a sucessão (s_n) das somas parciais

$$s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

com $n = 1, 2, ...$ Se (s_n) for convergente, digamos,

$$s_n \to s, \text{ isto é, } \|s_n - s\| \to 0,$$

então a série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = x_1 + x_2 + ...$$

diz-se **convergente**, e s é a **soma** da série e escreve-se

$$s = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k = x_1 + x_2 + ... \; . \tag{2.4.1}$$

Se a sucessão $\|x_1\| + \|x_2\| + ...$ converge, a série (2.4.1) é **absolutamente convergente**.

No entanto, num espaço normado X, a **convergência absoluta implica a convergência (simples) se e somente se X for completo**.

O conceito de convergência de uma série pode ser usado para definir uma "base"do espaço, da seguinte forma:

Se um espaço normado X contém uma sucessão (e_n) com a propriedade de que para cada $x \in X$ existe uma única sucessão de escalares (α_n) tal que

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\| \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Então (e_n) designa-se por **base de Schauder** (ou apenas **base**) para X. A série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k,$$

que tem a soma x é designada por **expansão de** x em relação a (e_n), e escreve-se

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k.$$

Por exemplo, o espaço l^p tem uma base de Schauder (e_n), do tipo

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0, \cdots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, \cdots), \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \cdots), ... \end{aligned}$$

Se um espaço normado X tiver uma base Schauder, então X **é separável.**

Por outro lado, será que todo o espaço de Banach separável tem uma base de Schauder ?

Esta é uma famosa questão levantada pelo próprio Banach no sec. XX. Quase todos os espaços separados de Banach separáveis conhecidos tinham uma base Schauder. No entanto, a surpreendente resposta à pergunta é não.

P. Enflo (em 1973) conseguiu construir um espaço separável de Banach que não possui uma base de Schauder.

Passemos finalmente ao problema de completar um espaço normado:

Teorema 2.4.2 *Seja* $X = (X, \|\cdot\|)$ *um espaço normado. Então, há um espaço de Banach* $\widehat{X}$ *e uma isometria* A *de* X *para um subespaço* W *de* $\widehat{X}$ *que é denso em* $\widehat{X}$. *O espaço* $\widehat{X}$ *é único, a menos de isometrias.*

Dem. O Teorema 1.7.2 implica a existência de um espaço métrico completo $\widehat{X} = (\widehat{X}, \widehat{d})$ e uma isometria $A : X \longrightarrow W = A(X)$, sendo W denso em $\widehat{X}$ e $\widehat{X}$ único, com excepção de isometrias.

Consequentemente, para provar o teorema actual, devemos tornar $\widehat{X}$ em um espaço vectorial e, em seguida, introduzir em $\widehat{X}$ uma norma adequada.

Para definir em $\widehat{X}$ as duas operações algébricas de um espaço vectorial, considerem-se $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{X}$ e dois representantes $(x_n) \in \widehat{x}$ e $(y_n) \in \widehat{y}$. Recorde-se que $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$ são classes de equivalência de sucessões de Cauchy em X. Defina-se $z_n = x_n + y_n$. Então (z_n) é uma sucessão de Cauchy em X uma vez que

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n + y_n - (x_m + y_m)\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| .$$

Colocando $\widehat{z} = \widehat{x} + \widehat{y}$, sendo $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$ as classes de equivalência para as quais (z_n) é um representante, ou seja, $(z_n) \in \widehat{z}$.

Esta definição não depende da escolha das sucessões de Cauchy pertencentes a $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$. Na verdade, por (1.7.1) temos que se $(x_n) \sim (x_n')$ e $(y_n) \sim (y_n')$, então $(x_n + y_n) \sim (x_n' + y_n')$ porque

$$\|x_n + y_n - (x_n' + y_n')\| \leq \|x_n - x_n'\| + \|y_n - y_n'\| .$$

Da mesma forma, definimos o produto $\alpha\widehat{x} \in \widehat{X}$ de um escalar α por $\widehat{x}$, a classe de equivalência para a qual (αx_n) é um representante.

Novamente, esta definição é independente da escolha particular de um representante da classe $\widehat{x}$.

O elemento nulo de $\widehat{X}$ é a classe de equivalência contendo todas as sucessões de Cauchy que convergem para zero.

Não é difícil verificar que estas duas operações algébricas possuem todas as propriedades exigidas pela definição, para que $\widehat{X}$ seja um espaço vectorial.

Por definição, temos que em W as operações do espaço vectorial induzidas por $\widehat{X}$ concordam com as induzidas em X por meio de A.

Além disso, A induz em W uma norma $\|\cdot\|_1$, cujo valor em cada $\widehat{y} = Ax \in W$ é

$$\|\widehat{y}\|_1 = \|x\| .$$

A métrica correspondente em W é a restricção de $\widehat{d}$ para W, uma vez que A é uma isometria.

Podemos estender a norma $\|\cdot\|_1$ a $\widehat{X}$, definindo

$$\|\widehat{x}\|_2 = \widehat{d}\left(\widehat{0}, \widehat{x}\right),$$

para cada $\widehat{x} \in \widehat{X}$. Na verdade, é óbvio que $\|\cdot\|_2$ satisfaz (N1) e (N2), enquanto os outros dois axiomas (N3) e (N4) são daqueles se obtêm a partir de $\|\cdot\|_1$ passando ao limite. ■

2.5 Espaços normados de dimensão finita e subespaços

Os espaços normados de dimensão finita são mais simples que os espaços de dimensão infinita ? Em que aspecto?

Vejamos alguns resultados neste sentido.

O próximo lema indica, resumidamente, que, no caso de independência linear de vectores, não podemos encontrar uma combinação linear que envolva escalares "grandes", mas que represente um vector pequeno.

Lema 2.5.1 *Seja $\{x_1, ..., x_n\}$ um conjunto de vectores linearmente independentes num espaço normado X (de qualquer dimensão). Então há um número $c > 0$ tal que para quaisquer escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ temos*

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c\left(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|\right). \tag{2.5.1}$$

Dem. Defina-se $s := |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. Se $s = 0$, todos os α_j são zero, para que (2.5.1) se verifique para qualquer c.

Considere-se então $s > 0$. Então (2.5.1) é equivalente à desigualdade que se obtem dividindo (2.5.1) por s e escrevendo $\beta_j = \frac{\alpha_j}{s}$, isto é,

$$\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| \geq c, \text{ com } \sum_{j=1}^{n} \left|\beta_j\right| = 1. \tag{2.5.2}$$

Por isso, basta provar a existência de um $c > 0$ tal que (2.5.2) se verifique para quaiquer escalares $\beta_1, ..., \beta_n$ com $\sum_{j=1}^{n} \left|\beta_j\right| = 1$.

Suponhamos, por absurdo, que isto é falso.

Então existe uma sucessão (y_m) de vectores

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \text{ com } \sum_{j=1}^{n} \left| \beta_j^{(m)} \right| = 1,$$

tal que

$$\|y_m\| \to 0, \text{ quando } m \to +\infty.$$

Como $\sum_{j=1}^{n} \left| \beta_j^{(m)} \right| = 1$, temos que $\left| \beta_j^{(m)} \right| \leq 1$. Então, para cada j fixo a sucessão

$$\left(\beta_j^{(m)} \right) = \left(\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, ... \right)$$

é limitada e, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, $(\beta_1^{(m)})$ tem uma subsucessão convergente. Seja β_1 o limite dessa subsucessão, e designe-se por $(y_{1,m})$ a subsucessão correspondente de (y_m).

Pelo mesmo raciocínio $(y_{1,m})$ tem uma subsucessão $(y_{2,m})$ para a qual a subsucessão correspondente de escalares $\beta_2^{(m)}$ converge.e represente-se por β_2 o seu limite.

Continuando desta forma, após n passos obtemos uma subsucessão $(y_{n,m})$= $(y_{n,1}, y_{n,2}, ...)$ de (y_m) cujos termos são da forma

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(m)} x_j, \text{ com } \sum_{j=1}^{n} \left| \gamma_j^{(m)} \right| = 1,$$

e com escalares $\gamma_j^{(m)}$ tais que $\gamma_j^{(m)} \to \beta_j$ quando $m \to +\infty$. Portanto, quando $m \to +\infty$,

$$y_{n,m} \to y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j, \text{ com } \sum_{j=1}^{n} \left| \beta_j \right| = 1,$$

de modo que nem todos β_j podem ser zero.

Uma vez que $\{x_1, ..., x_n\}$ é um conjunto de vectores linearmente independente, temos assim $y \neq 0$. Por outro lado, $y_{n,m} \to y$ implica $\|y_{n,m}\| \to \|y\|$, pela continuidade da norma.

Como $\|y_m\| \to 0$ e $(y_{n,m})$ é uma subsucessão de (y_m), então temos $\|y_{n,m}\| \to 0$. Portanto, $\|y\| = 0$, de modo que $y = 0$ por (N2).

Ora, isto contradiz $y \neq 0$, e o lema fica provado. ■

Uma primeira aplicação deste lema é o seguinte resultado de completude:

Teorema 2.5.2 *Todo subespaço de dimensão finita Y de um espaço normado X é completo. Em particular, todos os espaços normados de dimensão finita são completos.*

Dem. Consideremos uma sucessão de Cauchy arbitrária (y_m) em Y e provemos que é convergente em Y, com limite notado por y.

Seja $\dim Y = n$ and $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base qualquer de Y. Então cada y_m tem uma única representação da forma

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n.$$

Uma vez que (y_m) é uma sucessão de Cauchy, para cada $\varepsilon > 0$ existe um N tal que $\|y_m - y_r\| < \varepsilon$ quando $m, r > N$. Então, pelo Lema 2.5.1 temos para um certo $c > 0$

$$\varepsilon > \|y_m - y_r\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)} \right) e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)} \right|$$

com $m, r > N$. Dividindo por $c > 0$ dá

$$\left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)} \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)} \right| < \frac{\varepsilon}{c}, \text{ para } m, r > N.$$

Isto mostra que cada uma das n sucessões

$$\left(\alpha_j^{(m)} \right) = \left(\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, ... \right), \quad j = 1, ..., n,$$

é uma sucessão de Cauchy, em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pelo que converge para um certo limite α_j. Usando estes n limites $\alpha_1, ..., \alpha_n$, pode definir-se

$$y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Assim, $y \in Y$ e

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j^{(m)} - \alpha_j \right) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j \right| \|e_j\|.$$

Como $\alpha_j^{(m)} \to \alpha_j$, então $\|y_m - y\| \to 0$, isto é, $y_m \to y$.

Isto mostra que (y_m) é convergente em Y. Uma vez que (y_m) era uma sucessão de Cauchy arbitrária em Y, então Y é completo. ∎

A partir deste teorema e do Teorema 1.4.8, temos o seguinte Teorema

Teorema 2.5.3 *Todo o subespaço Y de dimensão finita de um espaço normado X é fechado em X.*

Observe-se que os **subespaços de dimensão infinita não precisam de ser fechados.**

Exemplo 2.5.4 *Seja $X = C[0,1]$ e $Y = span(x_0, x_1, \cdots)$, onde $x_j(t) = t^j$. Ou seja, Y é o conjunto de todos os polinómios e Y não é fechado em X.*

Outra propriedade interessante de um espaço vectorial de dimensão finita X é que todas as normas em X levam à mesma topologia para X . Ou seja, os subconjuntos abertos de X são os mesmos, independentemente da escolha da norma em X.

Definição 2.5.5 *Uma norma $\|\cdot\|$ num espaço vectorial X é diz-se equivalente a uma norma $\|\cdot\|_0$ em X se existirem números positivos a e b, de modo que, para todo o $x \in X$, temos*

$$a \|x\|_0 \leq \|x\| \leq b \|x\|_0 . \tag{2.5.3}$$

Este conceito é motivado pelo facto de:

As normas equivalentes em X definem a mesma topologia para X.

Usando Lema 2.5.1, podemos provar o seguinte teorema, que não é válido para espaços de dimensão infinita.

Teorema 2.5.6 *Num espaço vectorial de dimensão finita X, qualquer norma $\|\cdot\|$ é equivalente a outra norma $\|\cdot\|_0$.*

Dem. Considere-se $\dim X = n$ and $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base qualquer de X. Então cada $x \in X$ tem uma representação única do tipo

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Pelo Lema 2.5.1, há uma constante positiva c tal que

$$\|x\| \geq c \left(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|\right).$$

Por outro lado, pela desigualdade triangular temos

$$\|x\|_0 \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \, \|e_j\|_0 \leq k \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \, , \text{ para } k = \max_j \|e_j\|_0 \, ,$$

pelo que $\alpha \|x\|_0 \leq \|x\|$, onde $\alpha = c/k > 0$.

A outra desigualdade em (2.5.3) é obtido por uma troca dos papéis de $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_0$ no argumento anterior. ■

Este teorema é de considerável importância prática. Por exemplo, implica que a convergência ou divergência de uma sucessão num espaço vectorial de dimensão finita, não depende da escolha particular da norma nesse espaço.

2.6 Compacidade e dimensão finita

Algumas propriedades básicas dos espaços normados de dimensão finita e dos subespaços estão relacionados com o conceito de compacidade.

Definição 2.6.1 *Um espaço métrico X é compacto (ou sequencialmente compacto), se toda a sucessão em X admitir uma subsucessão convergente.*
Um subconjunto M de X é compacto se M for compacto como um subespaço de X, ou seja, se toda a sucessão em M tiver uma subsucessão convergente cujo limite é um elemento de M.

Uma propriedade geral de conjuntos compactos:

Lema 2.6.2 *Um subconjunto compacto M de um espaço métrico é fechado e limitado.*

Dem. Para cada $x \in \overline{M}$ existe uma sucessão (x_n) em M tal que $x_n \to x$. Como M é compacto, $x \in M$, então M é fechado porque $x \in \overline{M}$ é arbitrário.

Provemos que M é limitado.

Se M não fosse limitado, conteria uma sucessão não limitada (y_n) tal que $d(y_n, b) > n$, com b é um qualquer elemento fixo. Esta sucessão não pode ter uma subsucessão convergente, uma vez que uma subsucessão convergente tem de ser limitada. ■

O contrário deste lema é, em geral, falso.

Para provar esse facto importante, consideramos a sucessão (e_n) em l^2, com $e_n = (\delta_{nj})$ tem o n-ésimo termo 1 e todos os outros termos iguais a 0. Esta sucessão é limitada, pois $\|e_n\| = 1$. Os termos constituem um conjunto de pontos que é fechado porque não tem nenhum ponto de acumulação. Pelo mesmo motivo, esse conjunto de pontos não é compacto.

No entanto, para um espaço normado de dimensão finita, temos:

Teorema 2.6.3 *Num espaço normado de dimensão finita X, qualquer subconjunto $M \subset X$ é compacto se e somente se M for fechado e limitado.*

Dem. A compacidade implica o fecho e a limitação, pelo Lema 2.6.2, pelo que falta apenas provar o inverso.

Seja M fechado e limitado, com $\dim X = n$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base qualquer de X. Consideremos uma sucessão arbitrária (x_m) em M. Cada x_m pode escrever-se na forma

$$x_m = \xi_1^{(m)} e_1 + \cdots + \xi_n^{(m)} e_n.$$

Como M é limitado, (x_m) também é limitada, digamos, $\|x_m\| \leq k$ para todo o m. Pelo Lema 2.5.1,

$$k \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \left| \xi_j^{(m)} \right| e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^{n} \left| \xi_j^{(m)} \right|,$$

com $c > o$. Portanto a sucessão de números $(\xi_j^{(m)})$ (com j fixo) é limitada e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, tem um ponto de acumulação ξ_j, para $1 \leq j \leq n$. Como na demonstração do Lema 2.5.1, podemos concluir que (x_m) tem uma subsucessão (z_m) que converge para $z = \sum \xi_j e_j$. Como M é fechado, $z \in M$.

Isto mostra que a sucessão arbitrária (x_m) em M tem uma subsucessão que converge em M, pelo que M é compacto. ∎

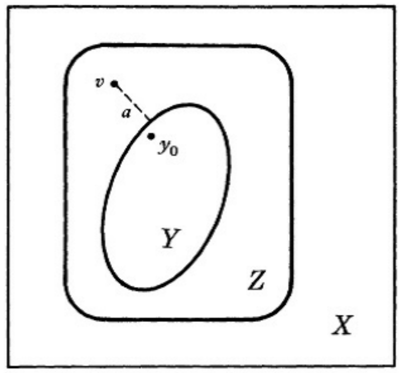
Um resultado interessante para o que se segue é o Lema de Riesz de F. Riesz (1918).

Lema 2.6.4 *Sejam Y e Z subespaços de um espaço normado X (de qualquer dimensão), e suponha que Y é fechado e é um subconjunto próprio de Z. Então, para cada número real θ no intervalo $(0, 1)$ existe $z \in Z$ tal que*

$$\|z\| = 1, \quad \|z - y\| \geq \theta, \ \forall y \in Y.$$

Dem. Considere-se $v \in Z - Y$ e represente-se sua distância de Y por a, isto é,

$$a = \inf_{y \in Y} \|v - y\|.$$



Obviamente, $a > 0$ uma vez que Y é fechado.

Tomemos qualquer $\theta \in (0,1)$. Pela definição de ínfimo, existe $y_0 \in Y$ tal que

$$a \leq \|v - y_0\| \leq \frac{a}{\theta}, \tag{2.6.1}$$

e note-se que $\frac{a}{\theta} > a$, pois $0 < \theta < 1$.

Defina-se

$$z = c\,(v - y_0)\,, \quad \text{com } c = \frac{1}{\|v - y_0\|}.$$

Então, $\|z\| = 1$, e mostremos que $\|z - y\| \geq \theta$, $\forall y \in Y$.

Como

$$\|z - y\| = \|c\,(v - y_0) - y\| = c\left\|v - y_0 - \frac{1}{c}y\right\| = c\,\|v - y_1\|\,,$$

com $y_1 = y_0 + \frac{1}{c}y$.

A forma de obter y_1 mostra que $y_1 \in Y$. Daí que $\|v - y_1\| \geq a$, pela definição de a.

Usando a expressão de c e usando (2.6.1), obtemos

$$\|z - y\| = c\,\|v - y_1\| \geq ca = \frac{a}{\|v - y_0\|} \geq \frac{a}{\frac{a}{\theta}} = \theta.$$

Como $y \in Y$ é arbitrário, a demonstração fica completa. ■

Num espaço normado de dimensão finita, a bola unitária fechada é compacta pelo Teorema 2.6.3. Por outro lado, o Lema de Riesz dá o notável resultado:

Teorema 2.6.5 *Se um espaço normado X tiver a propriedade de que a bola unitária fechada $M = \{x : \|x\| \leq 1\}$ é compacta, então X tem dimensão finita.*

Dem. Assuma-se que M é compacto, mas $\dim X = +\infty$, e mostremos que isto leva a uma contradição.

Escolha-se um qualquer x_1 de norma 1. Este x_1 gera um subespaço unidimensional X_1 de X, que é fechado e é um subespaço próprio de X uma vez que desde $\dim X = +\infty$.

Pelo Lema de Riesz existe um $x_2 \in X$ de norma 1 tal que

$$\|x_2 - x_1\| \geq \theta = \frac{1}{2}.$$

Os elementos x_1, x_2 geram um subespaço bidimensional, fechado, próprio X_2 de X. Pelo Lema de Riesz existe um x_3 de norma 1 tal que para $x \in X_2$ temos

$$\|x_3 - x\| \geq \frac{1}{2}.$$

Em particular,

$$\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

Procedendo por indução, obtem-se uma sucessão (x_n) de elementos $x_n \in M$, tal que

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}, \text{ para } m \neq n.$$

Obviamente, (x_n) não pode ter uma subsucessão convergente. Ora, isto contradiz a compacidade de M. Daí a hipótese de $\dim X = +\infty$ é falsa, pelo que $\dim X < +\infty$. ■

Os conjuntos compactos são "bem comportados", porque têm várias propriedades básicas semelhantes às dos conjuntos finitos e que não válidas para conjuntos não compactos.

Por exemplo, em relação com as aplicações contínuas, uma propriedade fundamental é que os conjuntos compactos possuem imagens compactas:

Teorema 2.6.6 *Sejam X e Y espaços métricos e $T : X \to Y$ uma aplicação contínua. Então a imagem por T, de um subconjunto compacto M de X é compacto.*

Dem. Pela definição de compacidade basta mostrar que qualquer sucessão (y_n) na imagem $T(M) \subset Y$ contém uma subsucessão que converge em $T(M)$.

Como $y_n \in T(M)$, temos $y_n = Tx_n$, para alguma sucessão $x_n \in M$.

Uma vez que M é compacto, (x_n) contém uma subsucessão (x_{n_k}) que converge em M. A imagem de (x_{n_k}) é uma subsucessão de (y_n) que converge em $T(M)$, porque T é contínuo.

Portanto, $T(M)$ é compacto. ■

A partir deste teorema, concluímos a seguinte propriedade, bem conhecido da Análise Matemática, para funções contínuas, entre espaços métricos:

Teorema 2.6.7 *Uma aplicação contínua T, de um subconjunto compacto M de um espaço métrico X em $\mathbb{R}$ assume um máximo e um mínimo nalguns pontos de M.*

Dem. $T(M) \subset \mathbb{R}$ é compacto pelo Teorema 2.6.6, fechado e limitado pelo Lema 2.6.2 [aplicado a $T(M)$], de modo que $\inf T(M) \in T(M)$, $\sup T(M) \in T(M)$, e as imagens inversas desses dois pontos são pontos de M em que Tx é mínimo ou máximo, respectivamente. ■

2.7 Operadores lineares

Na Análise Matemática considerámos a linha real $\mathbb{R}$ e funções de valor real em $\mathbb{R}$, ou em um subconjunto de $\mathbb{R}$. Qualquer dessas funções é uma aplicação do seu domínio em $\mathbb{R}$.

Na Análise Funcional, consideramos espaços mais gerais, como espaços métricos e espaços normados, e aplicações entre estes espaços.

No caso de espaços vectoriais e, em particular, espaços normados, uma aplicação entre os espaços designa-se por **operador**.

São de especial interesse os operadores que "preservam"as duas operações algébricas do espaço vetorial:

Definição 2.7.1 *Um **operador linear** T é um operador que:*

(i) *o seu **domínio** $\mathcal{D}(T)$ é um espaço vectorial e o **contradomínio** ou **imagem** $\mathcal{R}(T)$ encontra-se num espaço vectorial sobre o mesmo corpo;*

(ii) *para $x, y \in \mathcal{D}(T)$ e escalares α, verificam-se as igualdades*

$$\begin{aligned} T(x+y) &= Tx + Ty, \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx. \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

O **espaço nulo**, ou **núcleo**, de T , $\mathcal{N}(T)$, é o conjunto de todos os pontos $x \in \mathcal{D}(T)$ tal que $Tx = 0$.

Precisemos alguma notação e conceitos sobre operadores.

Sejam $\mathcal{D}(T) \subset X$ e $\mathcal{R}(T) \subset Y$, com X e Y espaços vectoriais, ambos reais ou ambos complexos.

Então, T é um operador de $\mathcal{D}(T)$ sobre $\mathcal{R}(T)$, e escreve-se

$$T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{R}(T),$$

ou de $\mathcal{D}(T)$ para Y, e, neste caso

$$T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y.$$

Se $\mathcal{D}(T)$ é todo o espaço X, então escreve-se

$$T : \mathcal{X} \longrightarrow Y.$$

É fácil de verificar que (2.7.1) é equivalente a

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

Considerando $\alpha = 0$ em (2.7.1) obtemos que

$$T0 = 0.$$

As propriedades acima referidas tornam os operadores lineares particularmente importantes na Análise Funcional.

Vejamos alguns exemplos básicos de operadores lineares. Como exercício, verifique a linearidade em cada um dos casos.

Exemplo 2.7.2 *O* ***operador identidade*** *$I_X : X \to X$ é definido por $I_X x = x$ para todo o $x \in X$. Também escrevemos simplesmente para I Assim, $Ix = x$.*

Exemplo 2.7.3 *O* ***operador zero,*** *$0 : X \to Y$ é definido por $0x = 0$, $\forall x \in X$.*

Exemplo 2.7.4 *(**Operador diferenciação**) Seja X o espaço vectorial de todos os polinómios em $[a,b]$. Podemos definir um operador linear T em X definindo*

$$Tx(t) = x'(t),$$

para cada $x \in X$. Este operador T aplica X nele próprio.

Exemplo 2.7.5 *(**Operador integração**) Um operador linear T de $C[a,b]$ em si próprio, pode ser definido por*

$$Tx(t) = \int_a^t x(\tau)d\tau, \text{ para } t \in [a,b].$$

Exemplo 2.7.6 *(**Operador multiplicação por** t) Outro operador linear de $C[a,b]$ nele próprio definido por*

$$Tx(t) = tx(t).$$

Exemplo 2.7.7 *O **produto externo** com um factor fixo define um operador linear $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Da mesma forma, o **produto interno** com um fator fixo define um operador linear $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dado por*

$$T_2x = x \cdot a = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3,$$

com $a = (a_j) \in \mathbb{R}^3$ é fixo.

Exemplo 2.7.8 *Uma matriz real $A = (a_{jk})$ com r linhas e n colunas define um operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ por meio de*

$$y = Ax$$

com $x = (\xi_j)$ com n componentes e $y = (\eta_j)$ com r componentes e ambos os vectores são escritos como matrizes coluna por causa da multiplicação usual de matrizes:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}.$$

T é linear porque a multiplicação da matriz é uma operação linear.
Se A for uma matriz complexa, definirá um operador linear de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^r$.

Nestes exemplos podemos verificar facilmente que os conjuntos imagem e os núcleos dos operadores lineares são espaços vectoriais.

Teorema 2.7.9 *Seja T um operador linear. Então:*

a) *O contradomínio $\mathcal{R}(T)$ é um espaço vectorial.*

b) *Se* $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$, *então* $\dim \mathcal{R}(T) \leq n$.

c) *O espaço nulo $\mathcal{N}(T)$ é um espaço vectorial.*

Dem. a) Considerem-se y_1,$y_2 \in \mathcal{R}(T)$ e provemos que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{R}(T)$, para escalares arbitrários α, β.

Como y_1,$y_2 \in \mathcal{R}(T)$, temos $y_1 = Tx_1$, $y_2 = Tx_2$ para alguns $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ e $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{D}(T)$ porque $\mathcal{D}(T)$ é um espaço vectorial.

Pela linearidade de T,

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Portanto $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{R}(T)$, e como y_1,$y_2 \in \mathcal{R}(T)$ foram escolhidos arbitráriamente, isso prova que $\mathcal{R}(T)$ é um espaço vectorial.

b) Escolha-se $n+1$ elementos $y_1, ..., y_{n+1}$ de $\mathcal{R}(T)$ arbitráriamente. Então temos $y_1 = Tx_1, ..., y_{n+1} = Tx_{n+1}$ para alguns $x_1, ..., x_{n+1}$ em $\mathcal{D}(T)$. Uma vez que $\dim \mathcal{D}(T) = n$, este conjunto $\{x_1, ..., x_{n+1}\}$ tem de ser linearmente dependente. Consequentemente

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0,$$

para alguns escalares $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$, não totalmente nulos. Como T é linear e $T0 = 0$, a aplicação de T em ambos os lados dá

$$T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0.$$

Isto mostra que $\{y_1, ..., y_{n+1}\}$ é um conjunto linearmente dependente porque os escalares não são todos zero.

Lembrando que este subconjunto de $\mathcal{R}(T)$ foi escolhido de forma arbitrária, concluímos que $\mathcal{R}(T)$ não tem subconjuntos de $n+1$, ou mais elementos, linearmente independentes. Por definição, isto significa que $\dim \mathcal{R}(T) \leq n$.

c) Tomemos arbitrariamente $x_1, x_2 \in \mathcal{N}(T)$. Então $Tx_1 = Tx_2 = 0$.

Como T é linear, para qualquer escalar α, β temos

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = 0,$$

ou seja, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{N}(T)$. Assim, $\mathcal{N}(T)$ é um espaço vectorial. ■

Uma consequência imediata da parte **b)** merece ser realçada:

Os operadores lineares preservam a dependência linear.

Passemos ao inverso de um operador linear.

Primeiro lembremos que uma aplicação $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ diz-se **injectiva** ou de **um-para-um** se diferentes pontos do domínio têm imagens diferentes, ou seja,

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow T x_1 \neq T x_2$$

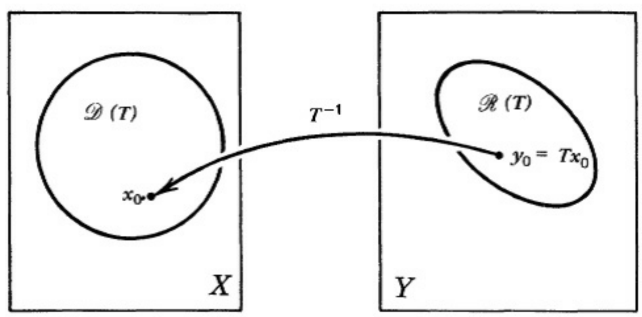
ou equivalentemente,

$$T x_1 = T x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2. \tag{2.7.2}$$

Neste caso, existe uma aplicação inversa

$$\begin{array}{rccc} T^{-1}: & \mathcal{R}(T) & \longrightarrow & \mathcal{D}(T) \\ & y_0 & \longmapsto & x_{0,} \end{array} \tag{2.7.3}$$

com $y_0 = T x_0$, que aplica cada $y_0 \in \mathcal{R}(T)$ para $x_{0,} \in \mathcal{D}(T)$ para o qual $T x_0 = y_0$. A aplicação T^{-1} designa-se por **operador inverso** de T.



De (2.7.3), facilmente se obtem

$$\begin{array}{rcl} T^{-1} T x & = & x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T), \\ T T^{-1} y & = & y, \quad \forall y \in \mathcal{R}(T). \end{array}$$

Note-se que em espaços vectoriais, o operador inverso de um operador linear existe se e somente se o espaço nulo do operador consiste apenas no vector nulo. Mais precisamente, temos o seguinte critério :

Teorema 2.7.10 *Considere dois espaços vectoriais* X, Y, *ambos reais ou ambos complexos. Seja* $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ *um operador linear com domínio* $\mathcal{D}(T) \subset X$ *e o contradomínio* $\mathcal{R}(T) \subset Y$. *Então:*

a) *O inverso* $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ *existe se e somente se*

$$Tx = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

b) *Se* T^{-1} *existe, então é um operador linear.*

c) *Se* $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$ *e* T^{-1} *existe, então* $\dim \mathcal{R}(T) = \dim \mathcal{D}(T)$.

Dem. a) Suponha que $Tx = 0$ implica $x = 0$. Considere-se $Tx_1 = Tx_2$. Como T é linear,

$$T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0,$$

pelo que $x_1 - x_2 = 0$, por hipótese.

Portanto $Tx_1 = Tx_2$ implica $x_1 = x_2$, e T^{-1} existe por (2.7.2).

Inversamente, se existir T^{-1}, então (2.7.2) é verdadeiro, e para $x_2 = 0$ temos

$$Tx_1 = T0 = 0,$$

o que completa a prova de a).

b) Suponhamos que T^{-1} existe e vamos mostrar que T^{-1} é linear.

O domínio de T^{-1} é $\mathcal{R}(T)$ e é um espaço vectorial.

Consideramos quaisquer $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ e as suas imagens

$$y_1 = Tx_1 \;\text{ e }\; y_2 = Tx_2.$$

Então

$$x_1 = T^{-1}y_1 \;\text{ e }\; x_2 = T^{-1}x_{y2}.$$

Como T é linear, para quaisquer escalares α e β temos

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = T\left(\alpha x_1 + \beta x_2\right).$$

Como $x_j = T^{-1}y_j$, então

$$T^{-1}\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2,$$

o prova que T^{-1} é linear.

c) Temos $\dim \mathcal{R}(T) \leq \dim \mathcal{D}(T)$, pelo Teorema 2.6.6, e $\dim \mathcal{D}(T) \leq \dim \mathcal{R}(T)$, pelo mesmo teorema aplicado a T^{-1}. ■

Finalmente, mencionamos uma fórmula útil para o inverso do operador composto de operadores lineares.

Lema 2.7.11 *Sejam X, Y, Z espaços vectoriais e $T : X \longrightarrow Y$ e $S : Y \longrightarrow Z$ operadores lineares bijectivos. Então o inverso $(ST)^{-1} : Z \longrightarrow X$ do produto (ou da composição) ST existe. e*

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

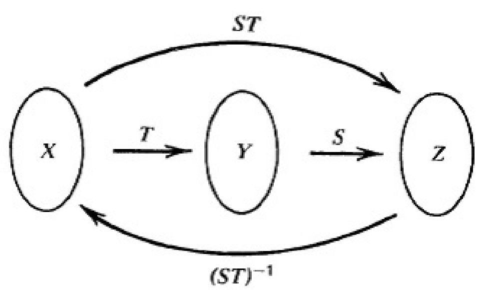
Dem. O operador $ST : X \longrightarrow Z$ é bijectivo, de modo que $(ST)^{-1}$ existe e temos

$$ST(ST)^{-1} = I_Z,$$

em que I_Z é o operador identidade em Z.

Aplicando S^{-1} e usando $S^{-1}S = I_Y$ (o operador identidade em Y), obtemos

$$S^{-1}ST(ST)^{-1} = T(ST)^{-1} = S^{-1}I_Z = S^{-1}.$$



Aplicando T^{-1} e usando $T^{-1}T = I_X$, obtem-se o resultado desejado

$$T^{-1}T(ST)^{-1} = (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

■

2.8 Operadores lineares limitados e contínuos

Na última secção não utilizámos normas. Voltamos a utilizá-las na seguinte definição :

Definição 2.8.1 *Sejam X e Y espaços normados e $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ um operador linear, onde $\mathcal{D}(T) \subset X$. O **operador** T é **limitado** se houver um número real c tal que , para todo $x \in \mathcal{D}(T)$,*

$$\|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X \ . \tag{2.8.1}$$

A fórmula (2.8.1) mostra que um operador linear limitado aplica conjuntos limitados em $\mathcal{D}(T)$ em conjuntos limitados em Y. Daí o termo "operador limitado".

Observe que em Análise Funcional a palavra "limitado"tem um sentido diferente da Análise Matemática, onde uma função limitada é uma função em que o contradomínio é um conjunto limitado.

Qual é o menor c de modo que (2.8.1) permaneça verdadeira para todos $x \in \mathcal{D}(T)$ não nulos ?

Por divisão,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c, \quad x \neq 0,$$

o que mostra que c deve ser, pelo menos, tão grande quanto o supremo da expressão à esquerda tomada sobre $\mathcal{D}(T) - \{0\}$.

Pelo que a resposta para à questão anterior, é que o menor c possível em (2.8.1) é aquele supremo, representado por $\|T\|$. Então

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{2.8.2}$$

$\|T\|$ representa a **norma do operador** T. Se $\mathcal{D}(T) = \{0\}$, define-se $\|T\| = 0$. Neste caso (relativamente desinteressante), $T = 0$, pois $T0 = 0$.

Observe que, se fizermos em (2.8.1), $c = \|T\|$ então

$$\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\| \,, \tag{2.8.3}$$

fórmula esta que será utilizada com bastante frequência.

Lema 2.8.2 *Seja T um operador linear limitado dado pela Definição 2.8.1. Então:*

a) *Uma fórmula alternativa para a norma de T é*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\| = 1}} \|Tx\| \,. \tag{2.8.4}$$

b) *A norma dada por (2.8.2) verifica as condições (N1) a (N4).*

Dem. a) Escreva-se $\|x\| = a$ e defina-se $y = (1/a)x$, onde $x \neq 0$. Então $\|y\| = \|x\|/a$, e como T é linear, (2.8.2) dá

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ x\neq 0}} \frac{1}{a}\|Tx\| = \sup_{\substack{x\in\mathcal{D}(T)\\ x\neq 0}} \left\| T\left(\frac{1}{a}x\right)\right\| = \sup_{\substack{y\in\mathcal{D}(T)\\ \|y\|=1}} \|Ty\|.$$

Substituindo x por y à direita, temos (2.8.4).

b) (N1) é óbvio, e $\|0\| = 0$. De $\|T\| = 0$ temos $Tx = 0$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$, de modo que $T = 0$. Portanto, (N2) é válido.

Além disso, (N3) é obtido a partir de

$$\sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \|Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

com $x \in \mathcal{D}(T)$. Finalmente, (N4) segue de

$$\begin{aligned}\sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)x\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T_1x + T_2x\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|T_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2x\|,\end{aligned}$$

para $x \in \mathcal{D}(T_1) \cap \mathcal{D}(T_2)$. ■

Vejamos alguns exemplos típicos de operadores lineares limitados.

Exemplo 2.8.3 *O **operador identidade** $I : X \longrightarrow X$ num espaço normado $X \neq \{0\}$ é limitado e tem a norma $\|I\| = 1$.*

Exemplo 2.8.4 *O **operador zero** $0 : X \longrightarrow Y$ num espaço normado X é limitado e tem a norma $\|0\| = 0$.*

Exemplo 2.8.5 *(**Operador de diferenciação**) Seja X o espaço normado de todos os polinómios em $J = [0,1]$ com a norma fornecida por $\|x\| = \max |x(t)|$, $t \in J$. O operador de diferenciação T está definido em X por*

$$Tx(t) = x'(t).$$

Este operador é linear, mas não é limitado. Na verdade, se considerarmos $x_n(t) = t^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Então $\|x\| = 1$ e

$$Tx_n(t) = x_n'(t) = nt^{n-1},$$

pelo que $\|Tx_n\| = n$ e $\|Tx_n\| / \|x_n\| = n$.
Como $n \in \mathbb{N}$ é arbitrário, isto mostra que não existe um número fixo c tal que $\|Tx_n\| / \|x_n\| \leq c$, pelo que T não é limitado.

Uma vez que a diferenciação é uma operação importante, este resultado indica que operadores não limitados também são de importância prática.

Exemplo 2.8.6 ***(Operador integral)*** *Podemos definir um operador integral $T : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ por*

$$y = Tx \quad com \quad y(t) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)\ d\tau,$$

em que k é uma função dada, chamada de núcleo de T e assume-se como uma função contínua no quadrado fechado $G = J \times J$ no plano $tO\tau$, e $J = [0,1]$. Este operador é linear. Para provar que T é limitado, observe-se em primeiro lugar que a continuidade de k no quadrado fechado implica que k é limitado, digamos, $|k(t,\tau)| \leq k_0$ para todos $(t,\tau) \in G$, com k_0 um número real não negativo. Além disso,

$$|x(t)| \leq \max_{t \in J} |x(t)| = \|x\|.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \|y\| &= \|Tx\| = \max_{t\in J} \left| \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)\ d\tau \right| \\ &\leq \max_{t\in J} \int_0^1 |k(t,\tau)|\,|x(\tau)|\ d\tau \leq k_0 \|x\|, \end{aligned}$$

pelo que $\|Tx\| \leq k_0 \|x\|$. Então (2.8.1) é verdadeira com $c = k_0$, pelo que T é limitado.

Exemplo 2.8.7 *Uma matriz real $A = (a_{jk})$ com r linhas e n colunas define um operador $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^r$ definindo*

$$y = Ax \tag{2.8.5}$$

com $x = (\xi_j)$ e $y = (\eta_j)$ matrizes coluna com n e r componentes, respectivamente, e usando a multiplicação de matrizes. Em termos de componentes, (2.8.5) torna-se

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\xi_k, \quad j = 1, ..., r\ . \tag{2.8.6}$$

T é linear porque a multiplicação da matriz é uma operação linear.
Para justificar que T é limitado, consideremos a norma em $\mathbb{R}^n$ dada por

$$\|x\| = \left(\sum_{m=1}^{n} \xi_m^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

e, da mesma forma para $y \in \mathbb{R}^r$. De (2.8.6) e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \sum_{j=1}^{r} \eta_j^2 = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\xi_k\right)^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{r} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{n} \xi_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\ &= \|x\|^2 \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2. \end{aligned}$$

Observe-se que a soma dupla na última linha não depende de x, podemos escrever o resultado na forma

$$\|Tx\|^2 \leq c^2 \|x\|^2, \quad \textit{com } c = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2,$$

o que prova que T é limitado.

A limitação do operador é uma propriedade essencial em dimensão finita.

Teorema 2.8.8 *Se um espaço normado X tiver dimensão finita, então todo o operador linear em X é limitado.*

Dem. Suponhamos que $\dim X = n$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base de X. Considere-se $x = \sum \xi_j e_j$ e um operador linear T em X. Como T é linear,

$$\|Tx\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j Te_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \, \|Te_j\| \leq \max_k \|Te_k\| \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|$$

Na última soma, aplicamos o Lemma 2.5.1 com $\alpha_j = \xi_j$ e $x_j = e_j$. Então obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \leq \frac{1}{c} \left\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right\| = \frac{1}{c} \|x\|.$$

Então,

$$\|Tx\| \leq \gamma \|x\|, \quad \text{com } \gamma = \frac{1}{c} \max_k \|Te_k\|,$$

pelo que T é limitado. ■

Consideremos agora algumas propriedades importantes dos operadores lineares.

Como os operadores são aplicações, a definição de continuidade também lhe é aplicável. Curiosamente, num operador linear a continuidade e a limitação tornam-se conceitos equivalentes.

Vejamos porquê:.

Seja $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ um operador, não necessariamente linear, com $\mathcal{D}(T) \subset X$, com X e Y espaços normados. Por definição, o operador T é contínuo em $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(T) \text{ com } \|x - x_0\| < \delta.$$

T é contínuo se T é contínuo para todo $x \in \mathcal{D}(T)$.

Se T é linear, temos um resultado notável:

Teorema 2.8.9 *Seja $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ um operador linear, $\mathcal{D}(T) \subset X$, com X e Y espaços normados. Então:*

a) *T é contínuo se e somente se T é limitado.*

b) *Se T é contínuo num único ponto, então T é contínuo.*

Dem. a) Para $T = 0$, a afirmação é trivial. Seja $T \neq 0$. Então $\|T\| \neq 0$. Suponhamos que T é limitado e considere-se qualquer $x_0 \in \mathcal{D}(T)$. Dado $\varepsilon > 0$, como T é linear, para cada $x \in \mathcal{D}(T)$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta, \quad \text{para } \delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

obtemos

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \|x - x_0\| < \|T\| \delta = \varepsilon.$$

Como $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ é arbitrário, então T é contínuo.

Por outro lado, assumamos que T é contínuo em $x_0 \in \mathcal{D}(T)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, há um $\delta > 0$ tal que

$$\|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon, \text{ para } x \in \mathcal{D}(T) \text{ com } \|x - x_0\| \leq \delta. \tag{2.8.7}$$

Para qualquer $y \neq 0$ em $\mathcal{D}(T)$ defina-se

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|} y \quad \text{ou seja} \quad x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|} y$$

Portanto $\|x - x_0\| = \delta$, pelo que podemos usar (2.8.7). Como T é linear, temos

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{\|y\|} y\right) \right\| = \frac{\delta}{\|y\|} \|Ty\|$$

e, por (2.8.7),

$$\frac{\delta}{\|y\|} \|Ty\| \leq \varepsilon. \text{ Ou seja, } \|Ty\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|y\|$$

que pode ser escrito na forma $\|Ty\| \leq c\,\|y\|$, onde $c = \frac{\varepsilon}{\delta}$, o que mostra que T é limitado.

b) A continuidade de T em um ponto implica a limitação de T, pela segunda parte de a), que por sua vez implica continuidade de T por a). ■

Corolário 2.8.10 *Seja T um operador linear limitado. Então:*

a) $x_n \to x$, *com* $x_n, x \in \mathcal{D}(T)$, *implica* $Tx_n \to Tx$.

b) *O núcleo $\mathcal{N}(T)$ é fechado.*

Dem. a) Pelo Teorema 2.8.9 temos que, quando $n \to +\infty$,

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\| \|x_n - x\| \longrightarrow 0.$$

b) Para cada $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$ existe uma sucessão (x_n) em $\mathcal{N}(T)$ tal que $x_n \to x$. Portanto $Tx_n \to Tx$ pela parte a). Por outro lado, $Tx = 0$, porque $Tx_n = 0$, de modo que $x \in \mathcal{N}(T)$. Como $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$ é um ponto arbitrário, $\mathcal{N}(T)$ é fechado. ■

Saliente-se que o **contradomínio de um operador linear limitado pode, ou não, ser fechado**.

Outras fórmulas úteis, para o produto de operadores, é a seguinte

$$\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\| \quad \text{e} \quad \|T^n\| \leq \|T\|^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

válida para operadores lineares limitados $T_2 : X \longrightarrow Y$, $T_1 : Y \longrightarrow Z$ e $T : X \longrightarrow X$, com X, Y, Z são espaços normados.

Outros conceitos aplicados a operadores lineares:

Comecemos por definir a igualdade de operadores:

Dois operadores T_1 e T_2 são **iguais**, $T_1 = T_2$, se tiverem o mesmo domínio, $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$ e se $T_1 x = T_2 x$ para todos $x \in \mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$.

A **restrição** de um operador $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ a um subconjunto $B \subset \mathcal{D}(T)$, representa-se por $T|_B$ e é o operador definido por

$$T|_B : B \longrightarrow Y \text{ tal que } T|_B x = Tx, \, \forall x \in B.$$

Uma **extensão** de T para um conjunto $M \supset \mathcal{D}(T)$ é um operador

$$\widetilde{T} : M \longrightarrow Y \quad \text{tal que} \quad \widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = t,$$

isto é, $\widetilde{T}x = Tx$, $\forall x \in \mathcal{D}(T)$.

De outra forma, T é uma restrição de $\widetilde{T}$ a $\mathcal{D}(T)$.

Se $\mathcal{D}(T)$ for um subconjunto próprio de M, então um operador T tem muitas extensões. Interessa-nos particularmente as extensões que preservam a linearidade e/ou a limitação.

Teorema 2.8.11 *Seja $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$ um operador linear limitado, em que $\mathcal{D}(T)$ está em um espaço normado X e Y é um espaço de Banach. Então, T tem uma extensão*

$$\widetilde{T} : \overline{\mathcal{D}(T)} \longrightarrow Y,$$

com $\widetilde{T}$ um operador linear limitado de norma

$$\left\| \widetilde{T} \right\| = \|T\|.$$

Dem. Considere-se $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$. Pelo Teorema 1.4.7 existe uma sucessão (x_n) em $\mathcal{D}(T)$ tal que $x_n \to x$. Como T é linear e limitado, temos

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\|.$$

Isto mostra que (Tx_n) é uma sucessão de Cauchy porque (x_n) converge. Por hipótese, Y é completo, pelo que (Tx_n) converge, digamos,

$$Tx_n \to y \in Y.$$

Defina-se $\widetilde{T}$ por $\widetilde{T}x = y$.

Mostrámos que os cálculos acima são independentes da escolha particular da sucessão em $\mathcal{D}(T)$, convergente para x.

Suponhamos que $x_n \to x$ e $z_n \to x$. Com estas duas sucessões constrói-se outra sucessão (v_m) na forma

$$(x_1, z_1, x_2, z_2, ...) .$$

Portanto $v_m \to x$ e (Tv_m), e as duas subsucessões (Tx_n) e (Tz_n) de (Tv_m) têm o mesmo limite. Isso prova que $\widetilde{T}$ está unívocamente definido em $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$.

$\widetilde{T}$ é linear e $\widetilde{T}x = Tx$ para cada $x \in \mathcal{D}(T)$, de modo que $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$ é uma extensão de T. Para a norma usamos

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \, \|x_n\| .$$

Fazendo $n \to +\infty$, temos $Tx_n \to y = Tx$. Como $x \to \|x\|$ define uma aplicação contínua, obtemos

$$\left\|\widetilde{T}x\right\| \leq \|T\| \, \|x\| .$$

Portanto, $\widetilde{T}$ é limitado e $\left\|\widetilde{T}\right\| \leq \|T\|$.

Claro que, $\left\|\widetilde{T}\right\| \geq \|T\|$ porque a norma é definida por um supremo, e não pode diminuir numa extensão. Das duas expressões temos $\left\|\widetilde{T}\right\| = \|T\|$. ■

2.9 Funcionais lineares

Um funcional é um operador cujo contradomínio está contido em $\mathbb{R}$ ou em no plano complexo $\mathbb{C}$. A análise Funcional foi inicialmente a análise os funcionais.

Iremos representar os funcionais por letras minúsculas $f, g, h, ...$, o domínio de f por $\mathcal{D}(f)$, o contradomínio ou imagem por $\mathcal{R}(f)$ e o valor de f em $x \in \mathcal{D}(f)$ por $f(x)$.

Os funcionais são operadores, de modo que as definições anteriores permanecem válidas.

Definição 2.9.1 *Um **funcional linear** é um operador linear com domínio num espaço vectorial X e contradomínio num campo escalar K de X. Isto é,*

$$f : \mathcal{D}(f) \longrightarrow K,$$

com $K = \mathbb{R}$ se X é real e $K = \mathbb{C}$ se X for complexo.

Definição 2.9.2 *Um **funcional linear e limitado** f é um operador linear e limitado com contradomínio no campo escalar do espaço normado X em que se encontra o domínio $\mathcal{D}(f)$.*

Assim, existe um número real c tal que para todo $x \in \mathcal{D}(f)$,

$$|f(x)| \leq c \|x\| .$$

Além disso, a norma de f é dada por

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

ou

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)| . \tag{2.9.1}$$

Por (2.8.3), temos

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\| , \tag{2.9.2}$$

e um caso especial do Theorem 2.8.9:

Teorema 2.9.3 *Um funcional linear com domínio $\mathcal{D}(f)$ num espaço normado, é **contínuo** se e só se, f é limitado.*

Alguns exemplos de funcionais:

Exemplo 2.9.4 *A norma $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ num espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é um funcional em X que não é linear.*

Exemplo 2.9.5 *O produto interno com um factor fixo define um funcional $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$f(x) = x \cdot a = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3,$$

com $a = (a_j) \in \mathbb{R}^3$ é fixo.

f é linear e limitado, pois

$$|f(x)| = |x \cdot a| \leq \|x\| \, \|a\| \, ,$$

pelo que, por (2.9.1) e tomando o supremo em x, temos $\|f\| \leq \|a\|$.

Por outro lado, colocando $x = a$ e usando (2.9.2), obtem-se

$$\|f\| \geq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\| \, .$$

Portanto $\|f\| = \|a\|$.

Exemplo 2.9.6 *O integral definido é um número se considerarmos uma única função. No entanto, a situação muda completamente se considerarmos esse integral para todas as funções num determinado espaço de funções. Então, a integral torna-se um funcional nesse espaço, e representemo-lo por f.*
Como espaço, podemos escolher $C[a,b]$, e definir f por

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt, \quad \textit{para } x \in C[a,b].$$

f é linear e provemos que f é limitado e que tem norma $\|f\| = b - a$.

Na verdade, escrevendo $J = [a,b]$ e lembrando a norma em $C[a,b]$, temos

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)dt \right| \leq (b-a) \max_{t \in J} |x(t)| = (b-a) \, \|x\| \, .$$

Aplicando o supremo sobre todos os x unitários, obtemos $\|f\| \leq b - a$.

Para obter $\|f\| \geq b - a$, escolhemos em particular $x = x_0 = 1$, e usamos (2.9.2):

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = |f(x_0)| = \int_a^b dt = b - a.$$

Exemplo 2.9.7 *Outro funcional importante em $C[a,b]$ é obtido escolhendo um $t_0 \in J = [a,b]$ e fazendo*

$$f_1(x) = x(t_0), \quad x \in [a,b].$$

f_1 é linear e limitado com norma $\|f_1\| = 1$. Na verdade, temos

$$|f_1(x)| = |x(t_0)| \leq \|x\|,$$

o que implica, por (2.9.1), $\|f_1\| \leq 1$. Por outro lado, para $x_0 = 1$, temos, $\|x_0\| = 1$ e obter de (2.9.2), que

$$\|f_1\| \geq |f_1(x_0)| = 1.$$

Exemplo 2.9.8 *Podemos obter um funcional linear f no espaço l^2 escolhendo um $a = (\alpha_j) \in l^2$ fixo e colocando*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \alpha_j,$$

com $x = (\xi_j) \in l^2$. Esta série converge absolutamente e f é limitado, pois a desigualdade de Cauchy-Schwarz dá

$$|f(x)| = \left|\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \alpha_j\right| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \left|\xi_j \alpha_j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{+\infty} \left|\xi_j\right|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{+\infty} \left|\alpha_j\right|^2} \leq \|x\| \, \|a\|.$$

O conjunto de todos os funcionais lineares definidos num espaço vetorial X pode, ele próprio, ser um espaço vetorial.

Este espaço é representado por X^* e é chamado **espaço dual algébrico** de X.

As operações algébricas deste espaço vetorial são definidas de forma natural.

A **soma** $f_1 + f_2$ de dois funcionais f_1 e f_2 é o funcional s cujo valor em cada $x \in X$ é

$$s(x) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

e o **produto** αf de um escalar α e um funcional f é o funcional p cujo valor em $x \in X$ é

$$p(x) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Podemos considerar o dual algébrico $(X^*)^*$ de X^*, cujos elementos são os funcionais lineares definidos em X^*, que designaremos por X^{**}, como o **espaço segundo dual algébrico** de X ou **bidual** de X.

Por que consideramos X^{**}? O objetivo é que possamos obter uma relação interessante e importante entre X e X^{**}, da seguinte forma.

Espaço	Elementos do espaço	Valor num ponto
X	x	
X^*	f	$f(x)$
X^{**}	g	$g(f)$

Podemos obter $g \in X^{**}$, que é um funcional linear definido em X^*, escolhendo um $x \in X$ fixo e colocando

$$g(f) = g_x(f) = f(x), \quad \text{com } x \in X \text{ fixo}, f \in X^* \text{variável}.$$

O x em índice é apenas para lembrar que obtivemos g pelo uso de um certo $x \in X$.

Note-se que aqui f é a variável, enquanto que x é fixo. Tendo isto em mente, vemos que g_x é linear, pois

$$g_x(\alpha f_1 + \beta f_2) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \alpha g_x(f_1) + \beta g_x(f_2). \tag{2.9.3}$$

Portanto g_x é um elemento de X^{**}, pela definição de X^{**}.

A cada $x \in X$ corresponde um $g \in X^{**}$. Isso define uma aplicação $C : X \longrightarrow X^{**}$, chamada de **injecção canónica** ou **aplicação canónica**, de X em X^{**}.

C é linear, pois seu domínio é um espaço vectorial e temos

$$\begin{aligned}
(C(\alpha x + \beta y))(f) &= g_{\alpha x + \beta y}(f) = f(\alpha x + \beta y) \\
&= \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha g_x(f) + \beta g_y(f) \\
&= \alpha (Cx)(f) + \beta (Cy)(f).
\end{aligned}$$

Comum aos vários espaços considerados temos sempre um conjunto, digamos, X e uma "estrutura"definida em X.

Num espaço métrico, a estrutura é a métrica.

Num espaço vectorial, as duas operações algébricas formam a estrutura.

Num espaço normado a estrutura é formada pelas duas operações algébricas e pela norma.

Dado dois espaços X e $\widetilde{X}$ do mesmo tipo (por exemplo, dois espaços vectoriais), é interessante saber se X e $\widetilde{X}$ são "essencialmente idênticos ", ou seja, se eles diferem, no máximo, devido à natureza dos seus pontos.

Podemos considerar X e $\widetilde{X}$ como idênticos - como duas cópias do mesmo espaço "abstrato- sempre que a estrutura seja equivalente, pois é o principal objecto de estudo, enquanto a natureza dos pontos não importa.

Esta situação sugere o conceito de **isomorfismo**: uma aplicação bijectiva de X em $\widetilde{X}$ que preserva a estrutura.

Consequentemente, um isomorfismo T de um espaço métrico $X = (X, d)$ num espaço métrico $X = (\widetilde{X}, \widetilde{d})$ é uma aplicação bijectiva que preserva a distância. Isto é, para todo $x, y \in X$,

$$\widetilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y).$$

Diz-se então que X é **isomórfico** a $\widetilde{X}$.

Um isomorfismo T de um espaço vectorial X num espaço vectorial $\widetilde{X}$ sobre o mesmo corpo é uma aplicação bijectiva que preserva as duas operações algébricos do espaço vectorial. Ou seja, para todo $x, y \in X$ e escalares α,

$$\begin{aligned} T(x+y) &= Tx + Ty, \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx, \end{aligned}$$

isto é, $T : X \longrightarrow \widetilde{X}$ é um operador linear bijectivo. X diz-se isomórfico com $\widetilde{X}$, ou X e $\widetilde{X}$ são espaços vectoriais isomórficos.

Os isomorfismos para espaços normados são isomorfismos entre espaços vectoriais que também preservam as normas.

Pode-se mostrar que a aplicação canónica C é injectiva (daí o termo injecção).

Como C é linear, é um isomorfismo de X sobre o contradomínio $\mathcal{R}(C) \subset X^{**}$.

Se X é isomórfico com um subespaço de um espaço vectorial Y, dizemos que X é injectável em Y. Portanto, X é injectável em X^{**} e C também se designa por **injecção canónica** de X em X^{**}.

Se C é sobrejectivo (portanto, bijetivo), isto é, $\mathcal{R}(C) = X^{**}$, então X é **reflexivo**.

2.10 Operadores e funcionais lineares em espaços de dimensão finita

Os espaços vectoriais de dimensão finita são mais simples que os de dimensão infinita, e pode perguntar-se como se manifesta esta simplificação no que diz respeito aos operadores e funcionais lineares definidos em tal espaço.

Os operadores lineares em espaços vectoriais de dimensão finita podem ser representados em termos de matrizes. Desta forma, as matrizes tornam-se ferramentas importantes para estudar os operadores lineares no caso de dimensão finita.

Sejam X e Y espaços vectoriais de dimensão finita sobre o mesmo corpo e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Escolhe-se uma base $E = \{e_1, ..., e_n\}$ para X e uma base $B = \{b_1, ..., b_r\}$ para Y.

Então cada $x \in X$ tem uma representação única do tipo

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n. \tag{2.10.1}$$

Como T é linear, x tem a imagem

$$y = Tx = T\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k T e_k. \tag{2.10.2}$$

Como a representação (2.10.1) é única, temos o primeiro resultado:

T fica univocamente determinado se as imagens $y_k = Te_k$ dos n vetores de base $e_1, ..., e_n$ forem dados.

Como y e $y_k = Te_k$ estão em Y, eles próprios, também têm representações únicas na forma

$$y = \sum_{j=1}^{r} \eta_j b_j \quad \text{e} \quad Te_k = \sum_{j=1}^{r} \tau_{jk} b_j.$$

A substituição em (2.10.2) dá

$$y = \sum_{j=1}^{r} \eta_j b_j = \sum_{k=1}^{n} \xi_k T e_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{j=1}^{r} \tau_{jk} b_j = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} \tau_{jk} \xi_k\right) b_j.$$

Como os b_j formam um conjunto linearmente independente, os coeficientes de cada b_j, à esquerda e à direita devem ser os mesmos, isto é,

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} \tau_{jk} \xi_k, \quad j = 1, \cdots, r. \tag{2.10.3}$$

Temos então que:

A imagem $y = Tx = \sum_{j=1}^{r} \eta_j b_j$ de $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ pode ser obtida a partir de (2.10.3).

Os coeficientes em (2.10.3) formam uma matriz

$$T_{EB} = (\tau_{jk})$$

com r linhas e n colunas. Se uma base E para X e uma base B para Y são dadas, com os elementos de E e B ordenados, então a matriz T_{EB} fica univocamente determinada pelo operador linear T.

Dizemos que a matriz T_{EB} **representa** o operador T em relação a essas bases.

Passemos agora a funções lineares em X, onde $dimX = n$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base para X.

Estes funcionais constituem o espaço dual algébrico X^* de X.

Para cada funcional f e cada $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \in X$ temos

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j, \tag{2.10.4}$$

com

$$\alpha_j = f(e_j), \quad j = 1, ..., n,$$

e f fica univocamente determinado por estes valores α_j dos n vectores da base de X.

Recíprocamente, cada sequência de n escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$, determina um funcional linear em X por (2.10.4).

Em particular, consideremos as sequências com n elementos

$$\begin{aligned}
&(1, 0, 0, ..., 0, 0) \\
&(0, 1, 0, ..., 0, 0) \\
&\vdots \\
&(0, 0, 0, ..., 0, 1).
\end{aligned}$$

Por (2.10.4), estas sequências originam n funcionais, que denotamos por $f_1, ..., f_n$, com valores

$$f_k(e_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & , \ j \neq k \\ 1 & , \ j = k. \end{cases} \tag{2.10.5}$$

O símbolo δ_{jk} é chamado **delta de Kronecker** .

$\{f_1, ..., f_n\}$ designa-se como a **base dual** da base $\{e_1, ..., e_n\}$ para X.

Teorema 2.10.1 *Seja X um espaço vectorial de dimensão n e $E = \{e_1, ..., e_n\}$ uma base de X. Então $F = \{f_1, ..., f_n\}$ dado por (2.10.5) é uma base para o dual algébrico X^* de X, e $dimX^* = dimX = n$.*

Dem. F é um conjunto linearmente independente pois

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(x) = 0, \quad x \in X, \tag{2.10.6}$$

com $x = e_j$ dá

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_{jk} = \beta_k = 0,$$

de modo que todos os β_k em (2.10.6) são zero.

Mostramos que todo $f \in X^*$ pode ser representado como uma combinação linear dos elementos de F em um único modo. Escrevendo $f(e_j) = \alpha_j$, por (2.10.4), temos

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j$$

por cada $x \in X$. Por outro lado, por (2.10.5) obtem-se

$$f_j(x) = f_j\left(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n\right) = \xi_j.$$

Assim

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x).$$

Portanto a representação única de um funcional arbitrário f em X em termos dos funcionais $f_1, ..., f_n$ é

$$f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n.$$

■

Lema 2.10.2 *Seja X um espaço vectorial de dimensão finita. Se $x_0 \in X$ tiver a propriedade de que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X^*$, então $x_0 = 0$.*

Dem. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ seja uma base para X e $x_0 = \sum_{j=1}^{n} \xi_{0j} e_j$. Então por (2.10.4) tem-se

$$f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \xi_{0j} \alpha_j.$$

Por hipótese, esta expressão é zero para cada $f \in X^*$, isto é, para cada escolha de $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Portanto, todos ξ_{0j} devem ser zero. ■

Usando esse lema, obtemos

Teorema 2.10.3 *Um espaço vectorial de dimensão finita é reflexivo.*

Dem. A aplicação canónica $C : X \longrightarrow X^{**}$ é linear. $Cx_0 = 0$ significa que para todo $f \in X^*$ temos

$$(Cx_0)(f) = g_{x_0}(f) = f(x_0) = 0,$$

pela definição de C. Isto implica $x_0 = 0$, pelo Lema 2.10.2. Portanto, pelo Teorema 2.7.10, a aplicação C tem um inverso $C^{-1} : \mathcal{R}(C) \longrightarrow X$, onde $\mathcal{R}(C)$ é o contradomínio de C. Pelo mesmo teorema, $\dim \mathcal{R}(C) = \dim X$.

Agora, pelo Teorema 2.10.1,

$$\dim X^{**} = \dim X^* = \dim X.$$

■

Então, $\dim \mathcal{R}(C) = \dim X^{**}$ e, por consequência, $\mathcal{R}(C) = X^{**}$ porque $\mathcal{R}(C)$ é um espaço vetorial e um subespaço próprio de X^{**} tem dimensão menor que X^{**}, pelo Teorema 2.2.8.

Por definição, isto prova a reflexividade .

2.11 Espaços normados de operadores. Espaço dual

Considere-se dois espaços normados X e Y (ambos reais ou ambos complexos) e considere o conjunto $B(X, Y)$, que contém todos os operadores lineares limitados de X em Y. Isto é, cada um destes operadores está definido em X e o seu contradomínio está em Y.

Queremos mostrar que $B(X, Y)$ pode ser transformado num espaço normado.

Em primeiro lugar, $B(X,Y)$ torna-se um espaço vectorial se definimos a soma T_1+T_2 de dois operadores $T_1, T_2 \in B(X,Y)$ por

$$(T_1+T_2)\,x = T_1x + T_2x$$

e o produto αT de $T \in B(X,Y)$ por um escalar α por

$$(\alpha T)x = \alpha Tx.$$

Teorema 2.11.1 *O espaço vectorial $B(X,Y)$ de todos os operadores lineares limitados a partir de um espaço normado X num espaço normado Y é um espaço normado com uma norma definida por*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \|Tx\|\,.$$

Em que condições $B(X,Y)$ será um espaço de Banach?

É notável que a condição necessária não envolva X, isto é, X pode, ou não ser completo:

Teorema 2.11.2 *Se Y é um espaço de Banach, então $B(X,Y)$ é um espaço de Banach.*

Dem. Consideremos uma sucessão de Cauchy arbitrária (T_n) em $B(X,Y)$ e vamos mostrar que (T_n) converge para um operador $T \in B(X,Y)$.

Uma vez que (T_n) é uma sucessão de Cauchy, para cada $\varepsilon > 0$ existe um N tal que

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon, \quad \forall m,n > N.$$

Para todo $x \in X$ e $m,n > N$, obtemos

$$\|T_nx - T_mx\| = \|(T_n - T_m)\,x\| \leq \|T_n - T_m\|\,\|x\| < \varepsilon\,\|x\|\,. \qquad (2.11.1)$$

Para qualquer x fixo e $\widetilde{\varepsilon}$ dado, podemos escolher $\varepsilon = \varepsilon_x$ de modo que $\varepsilon_x\,\|x\| < \widetilde{\varepsilon}$. Então, a partir de (2.11.1) temos $\|T_nx - T_mx\| < \widetilde{\varepsilon}$ e que (T_nx) é uma sucessão de Cauchy em Y.

Uma vez que Y é completo, (T_nx) converge, digamos, $T_nx \longrightarrow y$. Claramente, o limite $y \in Y$ depende da escolha de $x \in X$. Isto define um operador $T : X \longrightarrow Y$, onde $y = Tx$.

O operador T é linear pois

$$\lim T_n(\alpha x + \beta z) = \lim(\alpha T_n x + \beta T_n z) = \alpha \lim T_n x + \beta \lim T_n z.$$

Falta provar que T é limitado e $T_n \longrightarrow T$, isto é, $\|T_n - T_m\| \longrightarrow 0$.

Por (2.11.1), para cada $m > N$ e $T_m x \longrightarrow Tx$, pelo que podemos considerar $m \to +\infty$. Usando a continuidade da norma, então obtemos de (2.11.1) que por cada $n > N$ e todo $x \in X$,

$$\|T_n x - Tx\| = \left\| T_n x - \lim_{m\to+\infty} T_m x \right\| = \lim_{m\to+\infty} \|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\|. \tag{2.11.2}$$

Isto mostra que $(T_n - T)$ com $n > N$ é um operador linear limitado. Como T_n é limitado, $T = T_n - (T_n - T)$ é limitado, isto é, $T \in B(X, Y)$. Além disso, se em (2.11.2) tomarmos o supremo em x com norma 1, obtemos

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

pelo que $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$. ■

Este teorema tem uma consequência importante em relação ao espaço dual X' de X :

Definição 2.11.3 *Seja X um espaço normado. Então o conjunto de todos os funcionais lineares limitados em X constitui um espaço normado com a norma definida por*

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|,$$

*que se designa por **espaço dual** de X, que se representa por X'.*

Uma vez que um funcional linear em X aplica X em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (o campo escalar associado a X), e como $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, com a métrica usual, é completo, vemos que $X' \in B(X, Y)$ com o espaço completo $Y = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Teorema 2.11.4 *O espaço dual X' de um espaço normado X é um espaço de Banach (seja-o ou não X).*

Em Análise Funcional a análise de propriedades em espaços são, geralmente, relacionadas com os dos espaços duais.

Por isso vale a pena considerar alguns dos espaços mais frequentes e descobrir como são os seus duais.

Nesse sentido, é importante o conceito de **isomorfismo**.

Um isomorfismo de um espaço normado X num espaço normado $\widetilde{X}$ é um operador linear bijectivo $T : X \longrightarrow \widetilde{X}$ que preserva a norma, isto é, para todo $x \in X$,

$$\|Tx\| = \|x\| .$$

Assim, diz-se que X é **isomórfico** com $\widetilde{X}$ e X e $\widetilde{X}$ são **espaços normados isomórficos.**

Exemplo 2.11.5 *O espaço dual de $\mathbb{R}^n$ é $\mathbb{R}^n$.*

Dem. Pelo Teorema 2.8.8, temos $(\mathbb{R}^n)' = (\mathbb{R}^n)^*$, e cada $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ tem uma representação na forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \gamma_k, \quad \gamma_k = f(e_k).$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz ,

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k \gamma_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2} = \|x\| \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2}.$$

Aplicando o supremo sobre todo x de norma 1, obtemos

$$\|f\| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2}.$$

No entanto, uma vez que para $x = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ a igualdade é alcançada na desigualdade de CauchySchwarz, então

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2}.$$

Isto prova que a norma de f é a norma euclidiana, e $\|f\| = \|c\|$, com $c = (\gamma_k) \in \mathbb{R}^n$.

Portanto a aplicação de $(\mathbb{R}^n)'$ em $(\mathbb{R}^n)^*$, definido por $f \longmapsto c = (\gamma_k)$, $\gamma_k = f(e_k)$, preserva a norma e, como é linear, é bijectiva, pelo que é um isomorfismo. ■

Exemplo 2.11.6 *O espaço dual de l^1 é l^∞.*

Dem. Uma base de Schauder para l^1 é (e_k), com $e_k = (\delta_{kj})$ tem 1 na k-ésima componente e zeros em todas as outras. Então cada $x \in l^1$ tem uma representação única

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k e_k.$$

Consideremos qualquer $f \in (l^1)'$, onde $(l^1)'$ é o espaço dual de l^1. Como f é linear e limitada,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \gamma_k, \quad \gamma_k = f(e_k), \tag{2.11.3}$$

com os números $\gamma_k = f(e_k)$ são determinados univocamente por f. Também $\|e_k\| = 1$,

$$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leq \|f\| \, \|e_k\| = \|f\| \text{ e } \sup_k |\gamma_k| \leq \|f\|. \tag{2.11.4}$$

Pelo que $(\gamma_k) \in l^\infty$.

Por outro lado, para cada $b = (\beta_k) \in l^\infty$ podemos obter um funcional linear limitado correspondente g em l^1. Na verdade, podemos definir g em l^1 por

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \beta_k,$$

com $x = (\xi_k) \in l^1$. Então g é linear, e a limitação surge de

$$|g(x)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k \beta_k| \leq \sup_j |\beta_j| \sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k| = \|x\| \sup_j |\beta_j|.$$

Pelo que $g \in (l^1)'$.

Finalmente mostramos que a norma de f é a norma no espaço l^∞.

De (2.11.3) temos

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k \gamma_k| \leq \sup_j \left|\gamma_j\right| \sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k| = \|x\| \sup_j \left|\gamma_j\right| .$$

Passando ao supremo sobre todo x com norma 1, temos

$$\|f\| \leq \sup_j \left|\gamma_j\right| .$$

Então, por (2.11.4),

$$\|f\| = \sup_j \left|\gamma_j\right| ,$$

que é a norma em l^∞.

Portanto, esta fórmula pode ser escrita $\|f\| = \|c\|_\infty$, com $c = (\gamma_j) \in l^\infty$, o que prova que a aplicação linear e bijectiva de $(l^1)'$ em l^∞, definida por $f \longmapsto c = (\gamma_j)$ é um isomorfismo. ■

Exemplo 2.11.7 *O espaço dual de l^p é l^q, com $1 < p < +\infty$ e q é o conjugado de p, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Dem. Uma base de Schauder para l^p é (e_k), com $e_k = (\delta_{kj})$, como no exemplo anterior. Então, cada $x \in l^p$ tem uma representação única

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k e_k.$$

Considere-se $f \in (l^p)'$, onde $(l^p)'$ é o espaço dual de l^p. Como f é linear e limitada,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \gamma_k, \quad \gamma_k = f(e_k), \tag{2.11.5}$$

Seja q o conjugado de p e considere $x_n = (\xi_k^{(n)})$ com

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{|\gamma_k|^q}{\gamma_k} & , \quad k \leq n \text{ e } \gamma_k \neq 0, \\ & \\ 0 & , \quad k > n \text{ ou } \gamma_k = 0. \end{cases} \tag{2.11.6}$$

Substituindo em (2.11.5) obtemos

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k^{(n)} \gamma_k = \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q .$$

Por ouro lado, usando (2.11.6) e $(q-1)p = q$,

$$\begin{aligned} f(x_n) &\leq \|f\| \, \|x_n\| = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \xi_k^{(n)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q \right)^{\frac{1}{p}} . \end{aligned}$$

Combinando as duas expressões,

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q \leq \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Dividindo pelo último fator e usando $1 - 1/p = 1/q$, obtemos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\| .$$

Como n é arbitrário, fazendo $n \to +\infty$, obtemos

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\gamma_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\| , \tag{2.11.7}$$

pelo que $(\gamma_k) \in l^q$.

Recíprocamente, para qualquer $b = (\beta_k) \in l^q$ podemos obter um funcional linear limitado correspondente g em l^p. Na verdade, podemos definir g em l^p por

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \beta_k$$

com $x = (\xi_k) \in l^p$. Então g é linear, e a limitação segue da desigualdade de Hölder. Portanto $g \in (l^p)'$.

Finalmente provemos que a norma de f é a norma no espaço l^q.

De (2.11.5) e da desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{+\infty}\xi_k\gamma_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|\gamma_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|x\|\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|\gamma_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Portanto, tomando o supremo sobre todo x de norma 1 obtemos

$$\|f\| \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty}|\gamma_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.11.8}$$

De (2.11.7) vemos que se verifica a igualdade, isto é,

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{+\infty}|\gamma_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

o que pode ser escrito na forma $\|f\| = \|c\|_q$, onde $c = (\gamma_k) \in l^q$ e $\gamma_k = f(e_k)$.

A aplicação $(l^p)'$ em l^q definido por $f \longmapsto c$ é linear, bijectivo, e de (2.11.8) vemos que preserva a norma, de modo que é um isomorfismo. ■

2.12 Exercícios

1. Descreva o espaço gerado por $M = \{(1,1,1),(0,0,2)\}$ em $\mathbb{R}^3$.

2. Que subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ constituem um subespaço de $\mathbb{R}^3$?

   a) $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ com $\xi_1 = \xi_2$ e $\xi_3 = 0$;
   b) $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ com $\xi_1 = \xi_2 + 1$;
   c) $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ com $\xi_1 > 0, \xi_2 > 0, \xi_3 > 0$.
   d) $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ com $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = k \in \mathbb{R}$.

3. Mostre que $\{x_1, ..., x_n\}$, onde $x_j(t) = t^j$, é um conjunto linearmente independente no espaço $C[a,b]$.

3. Para um intervalo fixo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, considere o conjunto X formado pelos polinómios com coeficientes reais e de grau não superior a um dado n, e o polinômio $x = 0$ (para o qual o grau não está definido). Mostre que X, com a adição e a mulplicação usual por números reais é um espaço vectorial real de dimensão $n + 1$.
   Encontre uma base para X.

4. Se Y e Z forem subespaços de um espaço vectorial X, mostre que $Y \cap Z$ é um subespaço de X, mas $Y \cup Z$ pode, ou não, sê-lo. Dar exemplos.

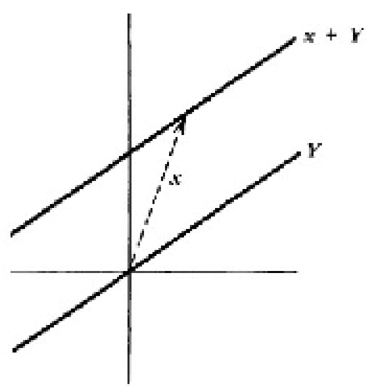
5. Mostre que o conjunto de todas as matrizes quadradas reais de ordem 2 forma um espaço vectorial X.
   Qual é o vetor nulo em X ?
   Determine $\dim X$. Encontre uma base para X. Dê exemplos de subespaços de X.

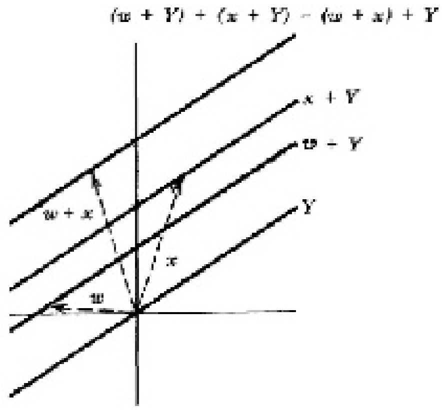
6. Mostre que o produto cartesiano $X = X_1 \times X_2$ de dois espaços vectoriais sobre o mesmo corpo, forma um espaço vectorial com as operações algébricas definidas por

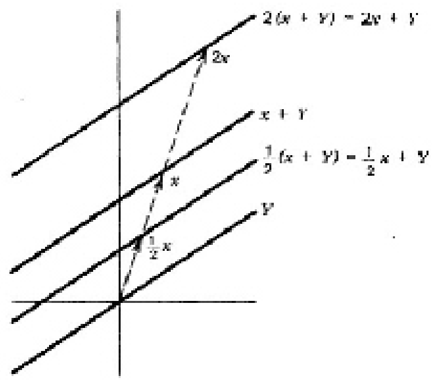
$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \\ \alpha(x_1, x_2) &= (\alpha x_1, \alpha x_2). \end{aligned}$$

7. Seja Y um subespaço de um espaço vectorial X. O **co-conjunto** de um elemento $x \in X$ em relação a Y representa-se por $x + Y$ e é definido como o conjunto

$$x + Y = \{v : v = x + y, y \in Y\}.$$







Mostre que para as operações definidas por

$$\begin{aligned} (w+Y)+(x+Y) &= (w+x)+Y, \\ \alpha(x+Y) &= \alpha x+Y, \end{aligned}$$

estes co-conjuntos constituem os elementos de um espaço vectorial.
Este espaço é designado como **espaço quociente** de X por Y (ou **módulo** Y) e nota-se por X/Y.
À dimensão de X/Y chama-se **codimensão de Y** e nota-se por $co\dim Y$, isto é,

$$co\dim Y = \dim(X/Y).$$

8. Seja $X = \mathbb{R}^3$ e $Y = \{(\xi_1, 0, 0) : \xi_1 \in \mathbb{R}\}$. Encontre X/Y, X/X, $X/\{0\}$.

9. Mostre que a norma $\|x\|$ de x é a distância de x à origem.

10. Seja $X = \mathbb{R}^2$ o espaço vectorial de todos os pares ordenados $x = (\xi_1, \xi_2)$. Mostre que em X as seguintes relações definem normas:

$$\begin{aligned} \|x\|_S &= |\xi_1| + |\xi_2| \text{ (norma da soma)}, \\ \|x\| &= \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \text{ (norma euclideana)}, \\ \|x\|_\infty &= \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} \text{ (norma do máximo)}. \end{aligned}$$

11. Existem várias normas de importância prática no espaço vectorial $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_S = |\xi_1| + |\xi_2| + \cdots + |\xi_n| \ , \tag{2.12.1}$$

$$\|x\|_p = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \cdots + |\xi_n|^p)^{\frac{1}{p}} \ ,(1 < p < +\infty) \tag{2.12.2}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|\xi_1|, ..., |\xi_n|\} \ . \tag{2.12.3}$$

Em cada caso, verifique se (N1) a (N4) são verdadeiras.

12. Mostre que num espaço normado X, a adição de vetores e a multiplicação por escalares são operações contínuas em relação à norma. Ou seja, as aplicações definidas por

$$\begin{aligned} (x, y) &\longmapsto x + y, \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha\, x \end{aligned}$$

são contínuas.

13. Prove que $x_n \to x$ e $y_n \to y$ implica $x_n + y_n \to x + y$, e que $\alpha_n \to \alpha$ e $x_n \to x$ implica $\alpha_n x_n \to \alpha\, x$.

14. Mostre que a aderência $\overline{Y}$ de um subespaço Y de um espaço normado X é ainda um subespaço vetorial.

15. Mostre que a convergência de

$$\|y_1\| + \|y_2\| + \|y_3\| + \cdots$$

pode não implicar convergência de

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots .$$

Sugestão: Considere Y o subconjunto de todas as sucessões com apenas finitos termos diferentes de zeros e

$$y_n = \left(\eta_j^{(n)}\right), \text{ com } \eta_n^{(n)} = \frac{1}{n^2} \text{ e } \eta_j^{(n)} = 0 \text{ se } j \neq n.$$

16. Se $(X_1, \|\cdot\|_1)$ e $(X_2, \|\cdot\|_2)$ são espaços normados, prove que o espaço vectorial produto $X = X_1 \times X_2$ é um espaço normado se definimos a norma na forma
$$\|(x_1, x_2)\| = \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\}.$$

17. Qual é o maior valor possível para c em (2.5.1) se $X = \mathbb{R}^2$ e $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$? E em $X = \mathbb{R}^3$ com $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (0,1,0)$, $x_3 = (0,0,1)$?

18. O Teorema 2.5.6 implica que $\|\cdot\|_2$, dada em (2.12.2), e $\|\cdot\|_\infty$, em (2.12.3), são equivalente. Demonstre esta afirmação.

19. Mostre que a norma da soma, em (2.12.1), e a norma $\|\cdot\|_2$, em (2.12.2), com $p = 2$, verificam
$$\frac{1}{n}\|x\|_S \le \|x\|_2 \le \|x\|_S.$$

20. Se duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num espaço vectorial X são equivalentes, mostre que
$$\|x_n - x\|_1 \to 0 \text{ implica } \|x_n - x\|_2 \to 0,$$
e vice-versa.

21. Mostre que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ não são compactos.

22. Se $\dim Y < \infty$ mostre que, no Lema 2.6.4, pode até escolher-se $\theta = 1$.

23. Se X for um espaço métrico compacto e $M \subset X$ é fechado, mostre que M é compacto.

24. Sejam X e Y dois espaços métricos com X compacto e $T : X \to Y$ bijetiva e contínua. Mostre que T é um homeomorfismo

25. Mostre que os operadores T_1, T_2, T_3, T_4 de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definidos por
$$\begin{array}{rcl} a)\ (\xi_1, \xi_2) & \longmapsto & (\xi_1, 0), \\ b)\ (\xi_1, \xi_2) & \longmapsto & (0, \xi_2), \\ c)\ (\xi_1, \xi_2) & \longmapsto & (\xi_2, \xi_1), \\ d)\ (\xi_1, \xi_2) & \longmapsto & (\gamma\xi_1, \gamma\xi_2), \end{array}$$
respectivamente, são lineares e interprete esses operadores geometricamente.

26. Indique o domínio, o contradomínio e espaço nulo de T_1, T_2, T_3.

27. Qual é o espaço nulo de T_4 ?

28. Seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Mostre que a imagem de um subespaço V de X é um espaço vectorial, assim como a imagem inversa de um subespaço W de Y.

29. Prove que se o produto (ou a composição) de dois operadores lineares existir, então é linear.

30. Seja X um espaço vectorial, $S : X \longrightarrow X$ e $T : X \longrightarrow X$ uns operadores. Diz-se que S e T **comutam** se $ST = TS$, isto é, $(ST)x = (TS)x$ para todo $x \in X$.
    T_1 e T_3 comutam?

31. Seja X o espaço vectorial de todas as matrizes complexas 2×2 e defina $T : X \longrightarrow X$ por $Tx = bx$, onde $b \in X$ é fixo e bx representa o produto usual de matrizes.
    Mostre que T é linear. Em que condição T^{-1} existe?

32. Seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear e $\dim X = \dim Y = n < \infty$. Mostre que $\mathcal{R}(T) = Y$ se e somente se T^{-1} existir .

33. Considere o espaço vectorial X de todas as funções de valor real que são definidas em $\mathbb{R}$ e possuem derivadas de todos as ordens em $\mathbb{R}$. Defina $T : X \longrightarrow X$ por $y(t) = Tx(t) = x'(t)$. Mostre que $\mathcal{R}(T) = X$, mas T^{-1} não existe. Compare com o exercício anterior 14 e comente.

34. Se $T \neq 0$ é um operador linear limitado, mostre que para qualquer $x \in \mathcal{D}(T)$ tal que $\|x\| < 1$ temos a desigualdade estrita $\|Tx\| < \|T\|$.

35. Mostre que o operador $T : l^\infty \longrightarrow l^\infty$ definido por

    $$y = (\eta_j) = Tx, \eta_j = \frac{\xi_j}{j}, x = (\xi_j), \tag{2.12.4}$$

    é linear e limitado.

36. Seja T um operador linear limitado de um espaço normado X para um espaço normado Y. Se houver um positivo b tal que

    $$\|Tx\| \geq b\,\|x\|\,, \quad \forall x \in X,$$

mostre que $T^{-1} : Y \longrightarrow X$ existe e é limitado.

37. Mostre que o inverso $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \longrightarrow X$ de um operador linear delimitado $T : X \longrightarrow Y$ não precisa ser limitado.
Sugestão: Utilize (2.12.4).

38. Seja $T : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ definido por
$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau.$$
Determine $\mathcal{R}(T)$ e $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \longrightarrow C[0,1]$.
T^{-1} é linear e limitado?

39. Em $C[0,1]$ defina S e T por
$$y(s) = s\int_0^1 x(t)dt \quad \text{e} \quad y(s) = sx(s),$$
respectivamente. S e T permutam? Determine $\|S\|$, $\|T\|$, $\|ST\|$ e $\|TS\|$.

40. Mostre que os funcionais definidos em $C[a,b]$ por
$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_a^b x(t)y_0(t)dt\ , \quad y_0 \in C[a,b], \\ f_2(x) &= \alpha x(a) + \beta x(b), \quad \alpha, \beta \text{ fixos}, \end{aligned}$$
são lineares e limitados.

41. Determine a norma do funcional linear f definido em $C[-1,1]$ por
$$f(x) = \int_{-1}^0 x(t)dt - \int_0^1 x(t)dt$$

42. Prove que
$$\begin{aligned} f_1(x) &= \max_{t\in[a,b]} x(t), \\ f_2(x) &= \min_{t\in[a,b]} x(t), \end{aligned}$$
definem funcionais em $C[a,b]$. São lineares? E limitados?

43. Mostre que, duma sucessão qualquer dum X, podemos definir um funcional f linear definindo $f(x) = \xi_n$ (n fixo), onde $x = (\xi_j)$. f é limitada se $X = l^\infty$?

44. Se f é um funcional linear limitado num espaço normado complexo, então $\overline{f}$ (conjugado de f) é limitado? E linear?

45. O núcleo $\mathcal{N}(M)$ de um conjunto $M \subset X$ é definido como sendo o conjunto de todos $x \in X$ tal que $f(x) = 0$ para todos $f \in M$. Mostre que $\mathcal{N}(M)$ é m espaço vectorial.

46. Seja $f \neq 0$ um funcional linear qualquer num espaço vectorial X e x_0 um lemento fixo de $X - \mathcal{N}(f)$, onde $\mathcal{N}(f)$ é o núcleo de f. Mostre que qualquer $x \in X$ tem uma representação única $x = \alpha x_0 + y$, onde $y \in \mathcal{N}(f)$.

47. Determine o núcleo do operador $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ representado por
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

48. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \longmapsto (\xi_1, \xi_2, -\xi_1 - \xi_2)$. Determinar $\mathcal{R}(T)$, $\mathcal{N}(T)$ e uma matriz que represente T.

49. Encontre a base dual de $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ para $\mathbb{R}^3$.

50. Seja $\{f_1, f_2, f_3\}$ a base dual de $\{e_1, e_2, e_3\}$ para $\mathbb{R}^3$, onde $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,-1)$, $e_3 = (1,-1,-1)$. Encontrar $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, onde $x = (1,0,0)$.

51. Se f é um funcional linear num espaço vectorial de dimensão n, qual é a dimensão do núcleo $\mathcal{N}(f)$?

52. Encontre uma base para o núcleo do funcional f definido em $\mathbb{R}^3$, com $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, para

    a) $f(x) = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3$,

    b) $f(x) = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3$, $\alpha_1 \neq 0$.

53. Seja X o espaço vetorial de todos os polinómios reais de uma variável real e grau inferior a n, juntamente com o polinómio $x = 0$.
    Seja $f(x) = x^{(k)}(a)$, o valor da derivada de ordem k (k fixo) de $x \in X$ num ponto fixo $a \in \mathbb{R}$. Mostre que f é um funcional linear em X.

54. Se x e y são vectores diferentes dum espaço vectorial de dimensão finita X, mostra que existe um funcional f em X tal que $f(x) \neq f(y)$.

55. Seja Z um subespaço próprio de um espaço vectorial X, e seja f um funcional linear em Z. Mostre que f pode ser estendido linearmente a X, ou seja, existe um funcional linear $\widetilde{f}$ em X, de modo que $\widetilde{f}|_Z = f$.

56. Qual é o elemento zero do espaço vetorial $B(X,Y)$? O inverso de $T \in B(X,Y)$?

57. Se X for um espaço normado e $\dim X = \infty$, mostre que o espaço dual X' não é idêntico ao espaço dual algébrico X^*.

58. Seja $M \neq \varnothing$ um subconjunto de um espaço normado X. O **aniquilador** M^a de M é o conjunto de todos os funcionais lineares e limitados em X que dão zero em todos os pontos de M.
    Assim, M^a é um subconjunto do espaço dual X' de X. Mostre que M^a é um subespaço vetorial de X' e 'e fechado.
    O que são X^a e $\{0\}^a$?

59. Seja $M = \{(1,0,-1),(1,-1,0),(0,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Determine uma base para M^a.

Capítulo 3

Espaços com produto interno. Espaços de Hilbert

Num espaço normado, podemos adicionar vetores e multiplicá-los por escalares. Além disso, a norma sobre o espaço generaliza o conceito elementar do comprimento de um vetor.

No entanto, o que ainda falta num espaço normado é algo análogo ao produto interno

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

fórmulas resultantes, tais como

$$|a| = \sqrt{a \cdot a},$$

e a condição de ortogonalidade

$$a \cdot b = 0$$

que são ferramentas importantes em muitas aplicações.

Daí a surge questão se o produto interno e a ortogonalidade podem ser generalizados para espaços vectoriais arbitrários. Na verdade, isso pode ser feito e leva a espaços providos de produto interno, e, no caso de serem completos, a espaços de Hilbert.

Historicamente, os espaços com produto interno são mais antigos do que os espaços normados gerais. A sua teoria é mais rica e conserva muitas características do espaço euclidiano, tal como a ortogonalidade. Toda a teoria foi iniciada pelo trabalho de D. Hilbert (1912) em equações integrais. A notação geométrica atualmente utilizada e a terminologia análoga à da geometria euclidiana e foi elaborada por . E. Schmidt (1908), que seguiu uma sugestão de G. Kowalewski

Estes espaços têm sido, até agora, os espaços mais úteis e ricos em aplicações práticas da Análise Funcional.

Alguns conceitos e notações importantes:

Um espaço com produto interno X é um espaço vectorial com um produto interno definido $\langle x, y\rangle$, que generaliza o produto interno de vetores, e é usado para definir outros conceitos:

(i) uma **norma** $\|\cdot\|$ dada por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$;

(ii) **ortogonalidade** definida por $\langle x, y\rangle = 0$.

Um **espaço de Hilbert** H é um espaço completo com produto interno.

A teoria do produto interno e dos espaços de Hilbert são mais ricos que os espaços normados em geral e que os espaços de Banach.

Eis algumas características que os distinguem:

a) representação de H como uma **soma direta** de um subespaço fechado e do seu **complemento ortogonal**;

b) **conjuntos** e **sucessões ortonormais** e correspondentes representações de elementos de H;

c) **representação de Riesz** de funcionais lineares limitados através de produto interno;

d) o **operador adjunto** T^* de um operador linear e limitado.

3.1 Espaço com produto interno. Espaço de Hilbert

Os espaços com produto interno deste capítulo são definidos da seguinte forma:

Definição 3.1.1 *Um **espaço com produto interno** é um espaço vectorial X com um produto interno definido em X. Um **espaço de Hilbert** é um espaço completo com produto interno.*

Precisemos que um **produto interno** em X é uma aplicação de $X \times X$ para um campo escalar K de X. Isto é, para cada par de vetores x e y associa-se um escalar escrito como

$$\langle x, y \rangle$$

e que é chamado **produto interno** de x e y, de modo que para todos os vetores x, y, z e escalares α temos

Definição 3.1.2

(PI1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(PI2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

(PI3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(PI4) $\langle x, x \rangle \geq 0, \;\; \langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

Um produto interno em X define uma **norma** em X dada por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \;(\geq 0), \tag{3.1.1}$$

e uma **métrica** em X dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Desta forma, os espaços com produto interno são espaços normados e espaços de Hilbert são espaços de Banach.

Em (PI3), a barra representa a conjugação complexa. Consequentemente, se X for um espaço vectorial real, temos simplesmente

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \text{(simetria)}.$$

De (PI1) a (PI3) obtemos as fórmulas

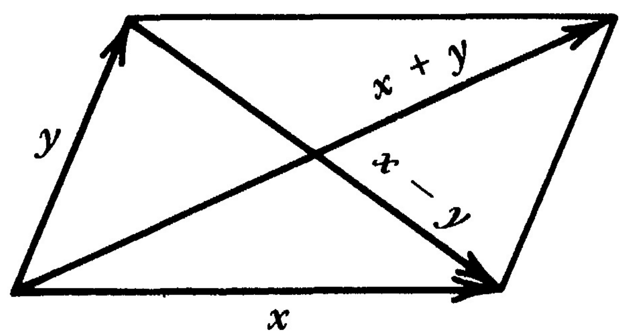
$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y, z \rangle &= \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \quad \text{(linearidade)} \\ \langle x, \alpha y \rangle &= \overline{\alpha} \langle x, y \rangle, \\ \langle x, \alpha y + \beta z \rangle &= \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle, \; \text{(sesquilinearidade)} \end{aligned}$$

que são muito utilizadas.

Uma norma num espaço com produto interno satisfaz a igualdade do paralelogramo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \tag{3.1.2}$$

Este nome é sugerido pela geometria, como vemos na figura



(3.1.3)

se lembrarmos que a norma generaliza o conceito de comprimento de um vector.

Saliente-se o facto de que, se uma norma não satisfizer (3.1.3), então não pode ser obtida a partir de um produto interno pelo uso de (3.1.1). Tais normas existem, pelo que podemos dizer:

Nem todos os espaços normados são espaços com produto interno.

Antes de apresentar alguns exemplos, vamos definir o conceito de ortogonalidade:

Sabemos que se o produto interno de dois vectores em espaços tridimensionais é zero, ss vectores são ortogonais, ou seja, são perpendiculares ou pelo menos um deles é o vector nulo.

Definição 3.1.3 *Um elemento x de um espaço com produto interno X diz-se* ***ortogonal*** *a um elemento $y \in X$ se*

$$\langle x, y\rangle = 0,$$

e escreve-se $x \perp y$.
De modo análogo para subconjuntos $A, B \subset X$ escrevemos $x \perp A$ se $x \perp a$, $\forall a \in A$, e $A \perp B$ se $a \perp b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$.

Exemplo 3.1.4 *O espaço $\mathbb{R}^3$ é um espaço de Hilbert com produto interno definido por*

$$\langle x, y\rangle = \xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n, \tag{3.1.4}$$

com $x = (\xi_j) = (\xi_1, ..., \xi_n)$ e $y = (\eta_j) = (\eta_1, ..., \eta_n)$.

De facto, de (3.1.4) obtemos

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2},$$

e, a partir de aqui, a métrica euclidiana definida por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle} = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)^2}.$$

Se $n = 3$, a fórmula (3.1.4) dá o produto interno usual e a ortogonalidade

$$\langle x, y\rangle = x \cdot y = 0,$$

está de acordo com o conceito elementar de perpendicularidade.

Exemplo 3.1.5 *No espaço $L^2[a, b]$, a norma dada por (2.3.3) pode ser obtida a partir do produto interno definido por*

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt. \tag{3.1.5}$$

No Exemplo 2.3.9, as funções foram assumidas como de valor real, por simplicidade. Removendo essa restrição podemos considerar funções de valor complexo (mantendo $t \in [a, b]$ real, como antes). Estas funções formam um espaço vectorial complexo, que se torna num espaço com produto interno se definimos

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt. \tag{3.1.6}$$

Note-se que a barra denota o conjugado complexo, e isso tem o efeito de (PI3) ser verdadeira, ainda que $\langle x, x\rangle$ seja real.

Esta propriedade é novamente necessária para obter a norma, que agora é definida por

$$\|x\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 \, dt},$$

porque $x(t)\overline{x(t)} = |x(t)|^2$.

A completude do espaço métrico correspondente a (3.1.5) é análoga ao espaço real $L^2[a,b]$, feita no Exemplo 2.3.9. Da mesma forma, a completude do espaço métrico correspondente a (3.1.6), que é o espaço complexo $L^2[a,b]$, é feito de modo semelhante, isto é $L^2[a,b]$ **é um espaço de Hilbert**.

O espaço l^2 é um espaço de Hilbert, com o produto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \overline{\eta}_j.$$

A convergência desta série decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz e do facto de que $x, y \in l^2$, por suposição.

A norma é definida por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{+\infty} \left|\xi_j\right|^2}.$$

A completude foi demonstrada no Exemplo 1.5.4.

Exemplo 3.1.6 *O espaço l^p com $p \neq 2$ não é um espaço com produto interno, e, portanto, não é um espaço de Hilbert.*

Dem. A afirmação supra significa que a norma de l^p com $p \neq 2$, não pode ser obtida a partir de um produto interno. Provaremos isto mostrando que a norma não satisfaz a igualdade do paralelogramo.

De facto, consideremos $x = (1, 1, 0, 0, \cdots) \in l^p$ e $y = (1, -1, 0, 0, \cdots) \in l^p P$ e calculemos

$$\|x\| = \|y\| = 2^{\frac{1}{p}} \text{ e } \quad \|x + y\| = \|x - y\| = 2.$$

Agora vemos que (3.1.2) não se verifica para $p \neq 2$.

l^p é completo. Daí l^p com $p \neq 2$ é um espaço de Banach mas não é um espaço de Hilbert. ■

O mesmo vale para o espaço do próximo exemplo:

Exemplo 3.1.7 *O espaço $C[a,b]$ não é um espaço com produto interno e, portanto, não é um espaço de Hilbert.*

Dem. Mostremos que a norma definida por

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

não pode ser obtida a partir de um produto interno, uma vez que esta norma não satisfaz a igualdade do paralelogramo (3.1.2).

De facto, se tomarmos $x(t) = 1$ e $y(t) = (t-a)/(b-a)$, temos que $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ e

$$\begin{aligned} x(t)+y(t) &= 1+\frac{t-a}{b-a}, \\ x(t)-y(t) &= 1-\frac{t-a}{b-a}. \end{aligned}$$

Portanto, $\|x+y\| = 2$, $\|x-y\| = 1$ e

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 5 \quad \text{mas } 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right) = 4.$$

■

Vejamos o seguinte facto:

A um produto interno corresponde uma norma, que é dada por (3.1.1). Reciprocamente, pode-se "construir"um produto interno a partir da norma correspondente. De facto, é fácil de verificar que um espaço real com produto interno verifica

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \tag{3.1.7}$$

e um espaço complexo com produto interno satisfaz

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle x,y\rangle &= \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ \operatorname{Im}\langle x,y\rangle &= \tfrac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right), \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

designada como **igualdade de polarização**.

3.2 Mais propriedades de um espaço com produto interno

Em primeiro lugar verifiquemos que (3.1.1) define uma norma:

(Nl) e (N2) resultam de (IP4). Além disso, (N3) é obtida por (PI2) e (PI3), pois

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha\overline{\alpha}\,\langle x,x\rangle = |\alpha|^2\,\|x\|^2.$$

Finalmente, (N4) resulta do lema:

Lema 3.2.1 *Um produto interno e a norma correspondente satisfaz a desigualdade de Schwarz e a desigualdade triangular da seguinte forma:*

a) temos a desigualdade de Schwarz :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \,, \tag{3.2.1}$$

em que a igualdade acontece se, e somente se, $\{x, y\}$ for um conjunto linearmente dependente;

b) a norma satisfaz a desigualdade triangular :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \,, \tag{3.2.2}$$

dando-se a igualdade se, e somente se, $y = 0$ ou $x = cy$ (c real e não negativo).

Dem. a) Se $y = 0$, então (3.2.1) é válido pois $\langle x, 0\rangle = 0$. Se $y \neq 0$, para um escalar α arbitrário, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \alpha y\|^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \overline{\alpha} \langle x, y\rangle - \alpha \left[\langle y, x\rangle - \overline{\alpha} \langle y, y\rangle\right]. \end{aligned}$$

Se escolhermos $\overline{\alpha} = \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}$, vemos que a expressão entre os parênteses rectos é zero. A desigualdade restante fica

$$0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} \langle x, y\rangle = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2},$$

usando o facto de $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$. Multiplicando por $\|y\|^2$, transferindo o último termo para a esquerda e aplicando as raízes quadradas, obtemos (3.2.1).

A igualdade acontece se, e somente se, $y = 0$ ou $0 = \|x - \alpha y\|^2$, isto é, x - ay = 0, de modo que $x - \alpha y$, o que mostra a dependência linear .

b) Note-se que

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 .$$

Pela desigualdade de Schwarz,

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle y, x\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| .$$

Pela desigualdade triangular para números reais, obtemos

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2\,|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 . \end{aligned}$$

Aplicando raízes quadradas em ambos os lados, temos (3.2.2).

A igualdade sucede se, e somente se,

$$\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = 2\,\|x\|\,\|y\| .$$

O lado esquerdo é $2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle$, onde Re representa a parte real. A partir daqui e de (3.2.1),

$$\operatorname{Re}\langle x,y\rangle = \|x\|\,\|y\| \geq |\langle x,y\rangle| . \tag{3.2.3}$$

Uma vez que a parte real de um número complexo não pode exceder o valor absoluto, temos a igualdade, o que implica dependência linear por a), digamos, $y = 0$ ou $x = cy$.

Mostrámos que $c \geq 0$ é real. No caso da igualdade em (3.2.3), temos $\operatorname{Re}\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|$. Mas se a parte real de um número complexo é igual ao valor absoluto, a parte imaginária deve ser zero. Por isso $\langle x,y\rangle = \operatorname{Re}\langle x,y\rangle \geq 0$, por (3), e $c \geq 0$ segue de

$$0 \leq \langle x,y\rangle = \langle cy,y\rangle = c\,\|y\|^2 .$$

■

A desigualdade de Schwarz é bastante importante e será usada repetidas vezes.

A próxima propriedade dá-nos a continuidade do produto interno:

Lema 3.2.2 *Se num espaço com produto interno, $x_n \to x$ e $y_n \to y$, então $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$.*

Dem. Subtraindo e adicionando um termo, usando a desigualdade triangular para números e, por último, a desigualdade de Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| &= |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x_n,y\rangle + \langle x_n,y\rangle - \langle x,y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

desde que $y_n - y \to 0$ e $x_n - x \to 0$ quando $n \to +\infty$. ■

Como primeira aplicação deste lema, vamos provar que todo o espaço com produto interno pode ser completado como um espaço de Hilbert único, a menos de isomorfismos.

Definição 3.2.3 *Um* ***isomorfismo*** T *de um espaço com produto interno* X *num espaço com produto interno* $\widetilde{X}$ *sobre o mesmo corpo é um operador linear bijetivo* $T : X \to \widetilde{X}$ *que preserva o produto interno, isto é, para todos* $x, y \in X$,

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle ,$$

representando os produtos internos em X *e* $\widetilde{X}$ *pelo mesmo símbolo, para simplicidade.*
Diz-se então que X *é* ***isomórfico*** *com* $\widetilde{X}$, *e* X *e* $\widetilde{X}$ *são chamados* ***espaços com produtos internos isomórficos***.

Observe que T é um isomorfismo se preserva toda a estrutura do espaço interno do produto. Diz-se também que T é uma **isometria** de X em $\widetilde{X}$ porque as distâncias em X e $\widetilde{X}$ são determinadas pelas normas definidas pelos produtos internos em X e $\widetilde{X}$.

O teorema sobre a completude de um espaço com produto interno pode ser indicado da seguinte forma:

Teorema 3.2.4 *Para qualquer espaço com produto interno* X *existe um espaço de Hilbert* H *e um isomorfismo* A *de* X *para um subespaço denso* $W \subset H$. *O espaço* H *é único, a menos de um isomorfismo.*

Dem. Pelo Teorema 2.4.2 existe um espaço de Banach H e uma isometria A de X para um subespaço W de H que é denso em H. Por continuidade sob isometrias, somas e multiplicação por escalares de elementos em X e W, correspondem uns aos outros, de modo que A é ainda um isomorfismo de X em W, ambos considerados como espaços normados.

O Lema 3.2.2 mostra que podemos definir um produto interno em H por

$$\langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle x_n, y_n \rangle ,$$

usando a notação do Teorema 2.4.2, isto é (x_n) e (y_n) são representantes das classes $\widehat{x} \in H$ e $\widehat{y} \in H$, respectivamente. Aplicando (3.1.7) e (3.1.8), vemos que A é um isomorfismo de X em W, ambos considerados como espaços com produto interno.

O Teorema 2.4.2 também garante que H é único, a menos de uma isometria, ou seja, para duas completudes, H e $\widetilde{H}$ de X, estão relacionadas por uma isometria $T : H \longrightarrow \widetilde{H}$.

Argumentando como no caso da aplicação A, concluímos que T tem de ser um isomorfismo do espaço de Hilbert H para o espaço de Hilbert $\widetilde{H}$. ■

Um **subespaço** Y de um espaço de produto interno X define-se como um subespaço vectorial de X, tomado com o produto interno em X restrito a $Y \times Y$.

Da mesma forma, um **subespaço** Y de um espaço Hilbert H é definido como sendo um subespaço de H, considerado como um espaço de produto interno.

Note-se que Y não precisa de ser um espaço de Hilbert porque Y pode não ser completo.

De facto, dos Teoremas 2.4.1 e 2.5.2 resulta imediatamente temos as duas primeiras asserções do seguinte teorema:

Teorema 3.2.5 *Considere-se Y um subespaço de um espaço de Hilbert H. Então:*

a) *Y é completo se e somente se Y é fechado em H.*

b) *Se Y tem dimensão finita então Y é completo.*

c) *Se H é separável então Y é separável. De forma mais geral, cada subconjunto de um espaço com produto interno separável é separável.*

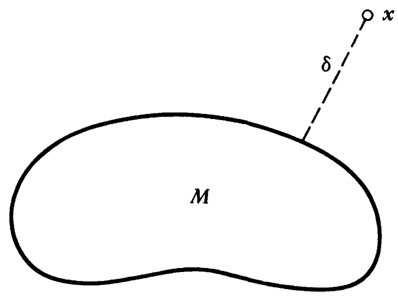
3.3 Complementos ortogonais e somas directas

Num espaço métrico X, a distância δ de um elemento $x \in X$ para um subconjunto $M \subset X$, não vazio, é definido como

$$\delta = \inf_{\widetilde{y} \in M} d(x, \widetilde{y}), \quad M \neq \varnothing.$$

Num espaço normado, a definição fica

$$\delta = \inf_{\widetilde{y} \in M} \|x - \widetilde{y}\|, \quad M \neq \varnothing.$$



Uma questão importante é saber se existe $y \in M$ de tal modo que

$$\delta = \|x - y\|, \tag{3.3.1}$$

isto é, se existe um ponto $y \in M$ que é o mais próximo do ponto dado x, e, caso exista, se é único.

A próxima figura ilustra que mesmo num espaço muito simples, como o plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, pode não se verificar (3.3.1), pode haver precisamente um, ou mais que um y.

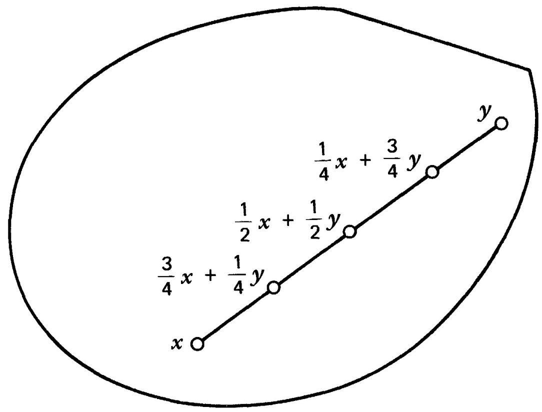
Assim, é de esperar que em outros espaços, em particular com dimensões infinitas, esta situação seja mais complicada. Isto acontece em espaços normados em geral, mas, para os espaços de Hilbert, a situação permanece relativamente simples. Este facto é surpreendente e tem várias consequências quer em aspectos teóricos quer práticos, e é uma das principais razões pelas quais a teoria de espaços de Hilbert é mais simples do que em espaços de Banach gerais.

Para enunciar o resultado principal sobre este tema, precisamos de dois conceitos:

O **segmento** que une dois elementos dados x e y de um espaço vectorial X é definido como o conjunto de todos os $z \in X$ na forma

$$z = \alpha x + (1 - \alpha) y, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Um subconjunto M de X é dito **convexo** se por cada $x, y \in M$ o segmento que une x e y está contido em M.



Por exemplo, todo subespaço Y de X é convexo e a intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Teorema 3.3.1 *Seja X um espaço com produto interno e $M \neq \varnothing$ um subconjunto convexo que é completo (na métrica induzida pelo produto interno). Então, para cada $x \in X$, existe um único $y \in M$ tal que*

$$\delta = \inf_{\widetilde{y} \in M} \|x - \widetilde{y}\| = \|x - y\| . \tag{3.3.2}$$

Dem. a) Existência. Pela definição de ínfimo, existe uma sucessão (y_n) em M tal que

$$\delta_n \longrightarrow \delta \ , \ \text{com } \delta_n = \|x - y_n\| . \tag{3.3.3}$$

Mostremos que (y_n) é uma sucessão de Cauchy.

Escrevendo $y_n - x = v_n$, temos $\|v_n\| = \delta_n$ e

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\| = 2 \left\| \frac{1}{2}(y_n + y_m) - x \right\| \geq 2\delta,$$

porque M é convexo, logo $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$. Além disso, temos $y_n - y_m = v_n - v_m$.

Pela igualdade do paralelogramo,

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|v_n - v_m\|^2 = - \|v_n + v_m\|^2 + 2\left(\|v_n\|^2 + \|_m\|^2\right) \\ &\leq -(2\delta)^2 + 2\left(\delta_n^2 + \delta_m^2\right), \end{aligned}$$

e (3.3.3) implica que (y_n) é uma sucessão de Cauchy. Como M é completo, (y_n) converge, isto é, $y_n \longrightarrow y \in M$. Então $\|x-y\| \geq \delta$. Além disso, por (3.3.3),

$$\|x-y\| \leq \|x-y_n\| + \|y_n - y\| = \delta_n + \|y_n - y\| \longrightarrow \delta,$$

o que mostra que $\|x-y\| = \delta$.

b) Unicidade: Considere-se $y \in M$ e $y_0 \in M$ tais que

$$\|x-y\| = \delta \quad \text{e} \quad \|x-y_0\| = \delta$$

e provemos que $y = y_0$.

Pela igualdade do paralelogramo,

$$\begin{aligned}
\|y-y_0\|^2 &= \|(y-x)-(y_0-x)\|^2 \\
&= 2\|y-x\|^2 + \|y_0-x\|^2 - \|(y-x)+(y_0-x)\|^2 \\
&= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2\left\|\frac{1}{2}(y+y_0) - x\right\|^2.
\end{aligned}$$

À direita, $\frac{1}{2}(y+y_0) \in M$, pelo que

$$\left\|\frac{1}{2}(y+y_0) - x\right\| \geq \delta.$$

Isto implica que o lado direito é menor ou igual a $2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$. Por isso, temos a desigualdade $\|y-y_0\| \leq 0$, donde $y = y_0$. ■

Passando de conjuntos convexos arbitrários para subespaços, obtemos um lema que generaliza a idéia familiar da geometria elementar de que o único ponto y num subespaço dado Y mais próximo de x é encontrado fazendo uma projecção na perpendicular de x para Y.

Lema 3.3.2 *No Teorema 3.3.1, considere-se M um subespaço completo Y e $x \in X$ fixos. Então $z = x - y$ é ortogonal a Y.*

Dem. Suponhamos, por contradição, que $z \perp Y$ é falso.

Então, existe $y_1 \in Y$ tal que

$$\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0. \tag{3.3.4}$$

Obviamente que $y_1 \neq 0$, pois de outra forma $\langle z, y_1 \rangle = 0$. Além disso, para qualquer escalar α,

$$\begin{aligned}
\|z - \alpha y_1\|^2 &= \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\
&= \langle z, z \rangle - \overline{\alpha} \langle z, y_1 \rangle - \alpha \left(\langle y_1, z \rangle - \overline{\alpha} \langle y_1, y_1 \rangle \right) \\
&= \langle z, z \rangle - \overline{\alpha} \beta - \alpha \left(\overline{\beta} - \overline{\alpha} \langle y_1, y_1 \rangle \right).
\end{aligned}$$

Se escolhermos

$$\overline{\alpha} = \frac{\overline{\beta}}{\langle y_1, y_1 \rangle}$$

a expressão entre parêntesis é zero.

De (3.3.2) temos $\|z\| = \|x - y\| = \delta$, de modo que a equação agora ficará

$$\|z - \alpha y_1\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} < \delta^2.$$

Mas isso é impossível porque temos

$$z - \alpha y_1 = x - y_2, \quad \text{com } y_2 = y + \alpha y_1 \in Y,$$

pelo que $\|z - \alpha y_1\| \geq \delta$ pela definição de δ. Portanto, (3.3.4) não se pode verificar e o lema fica provado. ■

De seguida iremos representar o espaço de Hilbert como uma **soma directa**, o que faz uso da ortogonalidade.

Comecemos por introduzir o conceito de uma soma directa.

Definição 3.3.3 *Um espaço vectorial X diz-se uma soma directa de dois subespaços Y e Z de X, e representa-se por*

$$X = Y \oplus Z$$

se cada $x \in X$ tiver uma representação única na forma

$$x = y + z, \quad \textit{com} \ \ y \in Y, \ z \in Z.$$

Então, Z é o complemento algébrico de Y em X e vice-versa.

Por exemplo, $Y = \mathbb{R}$ é um subespaço do plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. É óbvio que Y tem infinitos complementos algébricos em $\mathbb{R}^2$, sendo cada um deles a recta real.

Da mesma forma, no caso de um espaço de Hilbert H, a principal vantagem baseia-se nas representações de H como uma soma directa de um subespaço fechado Y e seu **complemento ortogonal**

$$Y^{\perp} = \{z \in H : z \perp Y\},$$

que é o conjunto de todos os vectores ortogonais a Y.

Teorema 3.3.4 *Seja Y um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H. Então*

$$H = Y \oplus Z, \quad \textit{com} \quad Z = Y^{\perp}. \tag{3.3.5}$$

Dem. Como H é completo e Y é fechado, Y é completo pelo Teorema 1.4.8. Como Y é convexo, o Teorema 3.3.1 e o Lema 3.3.2 implicam que, para cada $x \in H$, existe $y \in Y$ tal que

$$x = y + z, \quad \text{com } z \in Z = Y^{\perp}. \tag{3.3.6}$$

Para provar a unicidade, assuma-se que

$$x = y + z = y_1 + z_1,$$

com $y, y_1 \in Y$ e $z, z_1 \in Z$. Então $y - y_1 = z - z_1$.

Como $y - y_1 \in Y$ e $z - z_1 \in Z = Y^{\perp}$, vemos que $y - y_1 \in Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$. Ora isto implica que $y = y_1$. Da mesma forma se prova que $z = z_1$. ■

Em (3.3.6), a y chama-se a **projecção ortogonal de x em Y**, ou, somente, **a projecção de x em Y**.

Este termo é motivado por razões geométricas. Por exemplo, podemos considerar $H = \mathbb{R}^2$ e projectar qualquer ponto $x = (\xi_1, \xi_2)$ no eixo de ξ_1, que então desempenha o papel de Y. A projecção é $y = (\xi_1, 0)$.

A equação (3.3.6) define uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} P: & H & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & y = Px, \end{array}$$

que se designa por **projecção (ortogonal)** (ou **operador de projecção**) de H em Y. Obviamente que P é um operador linear e limitado. P aplica

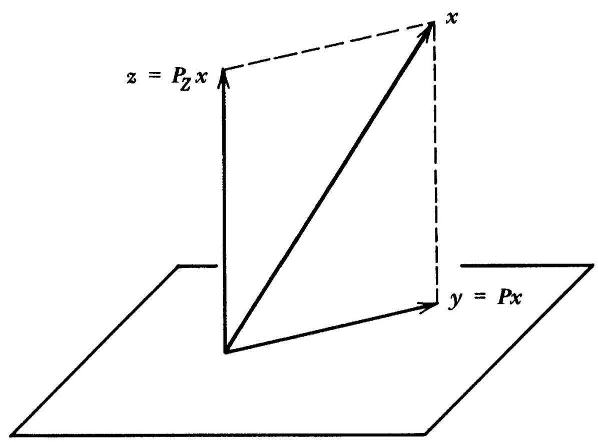
$$H \text{ em } Y,$$
$$Y \text{ em si próprio},$$
$$Z = Y^{\perp} \text{ em } \{0\},$$

e é idempotente, isto é,

$$P^2 = P,$$

pois, para cada $x \in H$,

$$P^2 x = P(Px) = Px.$$



Portanto, $P|_Y$ é o operador identidade em Y. E para $Z = Y^{\perp}$?

Definição 3.3.5 *O complemento ortogonal $Y^{\perp}$ de um subespaço fechado Y de um espaço Hilbert H é o espaço nulo, $\mathcal{N}(P)$ da projecção ortogonal P de H em Y.*

Um **complemento ortogonal** é um **aniquilador especial**, onde, por definição, o aniquilador $M^{\perp}$ de um conjunto $M \neq \varnothing$ num espaço de produto interno X é o conjunto

$$M^{\perp} = \{x \in X : x \perp M\}.$$

Assim, $x \in M^{\perp}$ se, e somente se, $\langle x, v \rangle = 0$ para todos $v \in M$. Isso explica o nome.

Note-se que $M^{\perp}$ é um espaço vectorial pois, para $x, y \in M^{\perp}$ implica para todo $v \in M$ e todos os escalares α, β

$$\langle \alpha x + \beta y, v \rangle = \alpha \langle x, v \rangle + \beta \langle y, v \rangle = 0,$$

pelo que $\alpha x + \beta y \in M^{\perp}$.

$M^{\perp}$ é fechado.

$(M^\perp)^\perp$ escreve-se $M^{\perp\perp}$. Em geral, temos

$$M \subseteq M^{\perp\perp} \tag{3.3.7}$$

porque

$$x \in M \Longrightarrow x \perp M^\perp \Longrightarrow x \in M^{\perp\perp}.$$

Para subespaços fechados, temos até que:

Lema 3.3.6 *Se Y é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H, então*

$$Y = Y^{\perp\perp}. \tag{3.3.8}$$

Dem. Por (3.3.7), $Y \subseteq Y^{\perp\perp}$. Mostremos então que $Y \supseteq Y^{\perp\perp}$.

Considere-se $x \in Y^{\perp\perp}$. Então por (3.3.3), $x = y + z$, com $y \in Y \subseteq Y^{\perp\perp}$, por (3.3.7). Como $Y^{\perp\perp}$ é um espaço vectorial e $x \in Y^{\perp\perp}$, por hipótese, também temos $z = x - y \in Y^{\perp\perp}$, e, portanto, $z \perp Y^\perp$. Mas, por (3.3.3), $z \in Y^\perp$. Então $z \perp z$, portanto, $z = 0$, pelo que $x = y$, Isto é, $x \in Y$. Desde $x \in Y^{\perp\perp}$. foi considerado arbitrário, isso prova que $Y \supseteq Y^{\perp\perp}$. ■

O resultado dado por (3.3.8) é o principal motivo para o uso de subespaços fechados no contexto atual.

Como $Z^\perp = Y^{\perp\perp} = Y$, a fórmula (3.3.5) também pode ser escrita

$$H = Z \oplus Z^\perp.$$

Por outro lado $x \longmapsto z$ define uma projecção

$$P_Z : H \longrightarrow Z$$

de H em Z, cujas propriedades são bastante semelhantes às da projecção P considerada antes.

Nos espaços de Hilbert poe fazer-se uma caracterização de conjuntos cuja extensão é densa:

Lema 3.3.7 *Para qualquer subconjunto $M \neq \varnothing$ de um espaço de Hilbert H, o conjunto gerado por M (span de M) é denso em H se e somente se $M^\perp = \{0\}$.*

Dem. a) Seja $x \in M^\perp$ e suponha que $V = span\ M$ é denso em H. Então $x \in \overline{V} = H$.

Pelo Teorema 1.4.7 existe uma sucessão (x_n) em V tal que $x_n \longrightarrow x$. Como $x \in M^\perp$ e $M^\perp \perp V$, temos que $\langle x_n, x\rangle = 0$.

A continuidade do produto interno (Lema 3.2.2) implica que $\langle x_n, x\rangle \longrightarrow \langle x, x\rangle$. Então, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$, de modo que $x = 0$. Como $x \in M^\perp$ é arbitrário, isso mostra que $M^\perp = \{0\}$.

b) Por outro lado, suponha que $M^\perp = \{0\}$.

Se $x \perp V$, então $x \perp M$, de modo que $x \in M^\perp$ e $x = 0$. Assim, $V^\perp = \{0\}$. Observando que V é um subespaço de H, obtemos $\overline{V} = H$ com $Y = \overline{V}$. ■

3.4 Conjuntos e sucessões ortonormais

A ortogonalidade entre elementos desempenha um papel fundamental no produto interno e em espaços de Hilbert. Uma primeira ideia deste facto foi dado na secção anterior. De particular interesse são conjuntos cujos elementos são ortogonais dois a dois. Por exemplo, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, um conjunto deste tipo é o conjunto dos três vetores unitários nas direções positivas dos eixos de um sistema de coordenadas rectangulares. Chamemos a estes vetores e_1, e_2, e_3. Estes vectores formam uma base para $\mathbb{R}^3$, de modo que cada $x \in \mathbb{R}^3$ tem uma única representação

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

Agora, vemos uma grande vantagem da ortogonalidade. Dado x, podemos determinar facilmente os coeficientes desconhecidos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, aplicando o produto interno. De facto, para obter α_1, devemos multiplicar esta representação de x por e_1, isto é,

$$\langle x, e_1\rangle = \alpha_1 \langle e_1, e_1\rangle + \alpha_2 \langle e_2, e_2\rangle + \alpha_3 \langle e_3, e3\rangle = \alpha_1,$$

e assim por diante.

Em espaços com produto interno mais gerais, existem outras possibilidades para o uso de conjuntos ortogonais e ortonormais e sucessões.

Comecemos por introduzir os conceitos necessários.

Definição 3.4.1 *Um* ***conjunto ortogonal*** *M num espaço de produto interno X é um subconjunto de $M \subset X$ cujos elementos formam um par ortogonal.*

Um ***conjunto ortonormal*** $M \subset X$ *é um conjunto ortogonal em* X *cujos elementos têm norma 1, isto é, para todos os* $x, y \in M$*,*

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0 & , \quad x \neq y \\ 1 & , \quad x = y. \end{cases}$$

Se um conjunto ortogonal ou ortonormal M é contável, podemos organizá-lo em uma sucessão (x_n) e designá-la por **sucessão ortogonal** ou **ortonormal**, respectivamente.

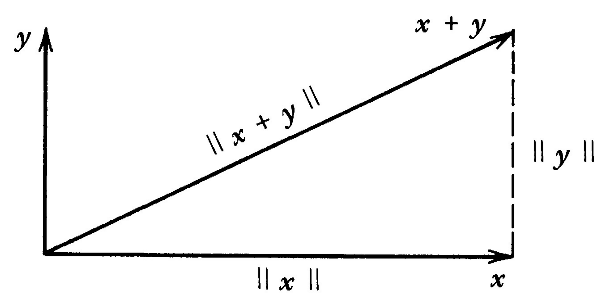
Mais geralmente, um **conjunto indexado**, ou **família**, (x_α), $\alpha \in I$, diz-se **ortogonal** se $x_\alpha \perp x_\beta$, para todos $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$. A família diz-se **ortonormal** se for ortogonal e todos os x_α têm norma 1, isto é, para todos $\alpha, \beta \in I$, temos

$$\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & , \quad \alpha \neq \beta \\ 1 & , \quad \alpha = \beta. \end{cases}$$

Vamos agora considerar algumas propriedades e exemplos de conjuntos ortogonais e ortonormais.

Para os elementos ortogonais x, y temos $\langle x, y\rangle = 0$, de modo que se obtém a relação pitagórica

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 . \tag{3.4.1}$$



Mais geralmente, se $\{x_1, ..., x_n\}$ é um conjunto ortogonal, então

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2 .$$

Na verdade, $\langle x_j, x_k\rangle = 0$ se $j \neq k$, e, consequentemente,

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j, \sum_{j=1}^{n} x_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \langle x_j, x_k\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x_j, x_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 .$$

Por outro lado:

Lema 3.4.2 *Um conjunto ortonormal é linearmente independente.*

Dem. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ ortonormal e considere a equação

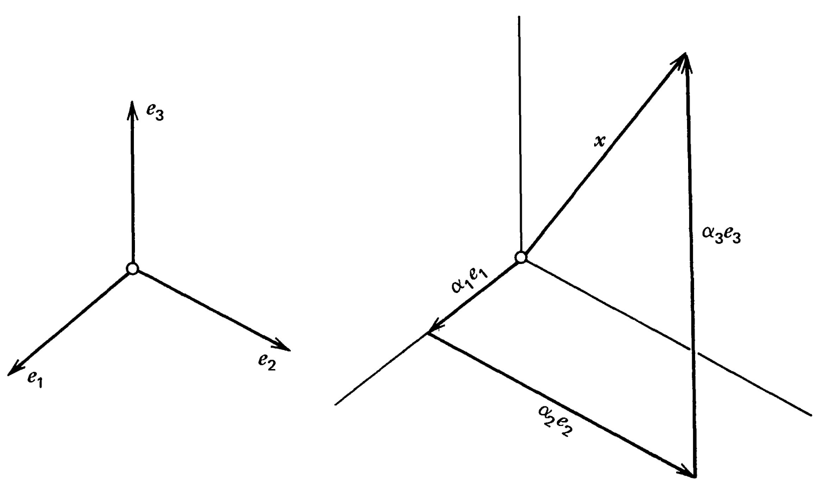
$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0.$$

A multiplicação por um e_j fixo dá

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j \langle e_j, e_j \rangle = \alpha_j = 0,$$

o que prova a independência linear de qualquer conjunto finito ortonormal. O mesmo processo pode ser aplicado a um conjunto ortonormal infinito. ■

Exemplo 3.4.3 *No espaço* $\mathbb{R}^3$*, os três vectores unitários* $(1,0,0)$*,* $(0,1,0)$*,* $(0,0,1)$ *na direcção dos três eixos de um sistema de coordenadas rectangulares forma um conjunto ortonormal.*



Exemplo 3.4.4 *No espaço* l^2*, uma sucessão* $e_n = (\delta_{nj})$ *em que possui o n-ésimo elemento* 1 *e todos os outros zero.*

Exemplo 3.4.5 *Seja* X *o espaço com produto interno de todas as funções contínuas de valor real em* $[0, 2\pi]$ *com o produto interno definido por*

$$\langle x, y \rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt. \tag{3.4.2}$$

n

Exemplo 3.4.6 *Uma sucessão ortogonal em X é*

$$u_n(t) = \cos nt, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

Outra sucessão ortogonal em X é

$$v_n(t) = sen\ nt, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

De facto, or integração obtemos

$$\langle u_m, u_n \rangle = \int_0^{2\pi} \cos mt \ \cos nt \ dt = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \pi & , \quad m = n = 1, 2, ... \\ 2\pi & , \quad m = n = 0, \end{cases}$$

e, analogamente, (v_n).

Portanto uma sucessão ortonormal é (e_n), com

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_n(t) = \frac{u_n(t)}{\|u_n\|} = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

De (v_n) obtemos a sucessão ortonormal $(\widetilde{e}_n)$, onde

$$\widetilde{e}_n = \frac{v_n(t)}{\|v_n\|} = \frac{sen\ nt}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Note-se que até temos $u_m \perp v_n$ para todos os m e n. (Verifique)

Estas sucessões aparecem nas séries de Fourier, como veremos na próxima secção.

Uma grande vantagem das sucessões ortonormais em relação a sucessões arbitrárias linearmente independentes são as seguintes:

Se soubermos que um elemento x dado, pode ser representado por uma combinação linear de alguns elementos de uma sucessão ortonormal, então a ortonormalidade torna a determinação dos coeficientes muito fácil.

Na verdade, se $(e_1, e_2, ...)$ é uma sucessão ortonormal num espaço de produto interno X, temos para $x \in span\{e_1...., e_n\}$, com n fixo, então pela definição de conjunto gerador,

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k. \tag{3.4.3}$$

Aplicando o produto interno por um e_j fixo, obtemos

$$\langle x, e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j.$$

Com esses coeficientes, (3.4.3) fica

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \tag{3.4.4}$$

o que mostra um processo para a determinação dos coeficientes desconhecidos em (3.4.3).

Outra vantagem da ortonormalidade resulta de, em (3.4.3) e (3.4.4) adicionarmos outro termo $\alpha_{n+1}e_{n+1}$. Neste caso precisamos de calcular apenas mais um coeficiente, uma vez que os outro coeficientes permanecem inalterados.

De forma mais geral, se considerarmos qualquer $x \in X$, não necessariamente em $Y_n = span\{e_1, ..., e_n\}$, podemos definir $y \in Y_n$, escrevendo

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k,$$

com n fixo, como antes, e depois considerar z tal que

$$x = y + z,$$

isto é, $z = x - y$. Queremos, agora, provar que $z \perp y$.

Como todo o $y \in Y_n$ é uma combinação linear da forma

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$

e $\alpha_k = \langle y, e_k \rangle$, pelos cálculos anteriores, vamos escolher um $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$,$k = 1, ..., n$, de modo a obter um y tal que $z = x - y \perp y$.

Primeiro observemos que, pela ortonormalidade,

$$\|y\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 , \tag{3.4.5}$$

pelo que $z \perp y$, pois

$$\begin{aligned} \langle z, y \rangle &= \langle x - y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle \\ &= \left\langle x, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle - \|y\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = 0 \end{aligned}$$

Por (3.4.1),

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 ,$$

e, por (3.4.5), segue-se que

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 .$$

Como $\|z\| \geq 0$, temos para cada $n = 1, 2, ...$

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Estas somas têm termos não negativos, pelo que formam uma sucessão monótona crescente, que converge porque é limitada por $\|x\|^2$.

Por outro lado, esta é a sucessão das somas parciais de uma série infinita, que é, então, convergente.

Acabámos de provar a **desigualdade de Bessel**:

Teorema 3.4.7 *Considere-se* (e_k) *uma sucessão ortonormal num espaço com produto interno* X*. Então, para cada* $x \in X$*,*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \textbf{\textit{(Desigualdade de Bessel)}} \tag{3.4.6}$$

Os produtos internos $\langle x, e_k \rangle$ em (3.4.6) são chamados os **coeficientes de Fourier** de x em relação à sucessão ortonormal (e_k).

Note-se que se X tiver dimensão finita, então todo o conjunto ortonormal em X tem de ser finito porque sãolinearmente independentes. Por isso, em (3.4.6) temos uma soma finita.

Vimos que as sequências ortonormais são muito convenientes por facilitarem o cálculo dos coeficientes.

O problema prático que se coloca é como obter uma sucessão ortonormal a partir de uma sucessão arbitrária linearmente independente ?

Um processo construtivo baseia-se no **método de Gram-Schmidt,** (apresentado por E. Schmidt (1907) e J. P. Gram (1883)) para ortonormalizar uma sucessão linearmente independente (x_j) num espaço com produto interno. A sucessão ortonormal resultante (e_j) é tal que, para cada n,

$$span\{e_1, ..., e_n\} = span\{x_1, ..., x_n\}.$$

O processo é o seguinte:

1^o passo. O primeiro elemento de (e_k) é

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}.$$

2^o passo. O elemento x_2 pode ser escrito na forma

$$x_2 = \langle x_2, e_1 \rangle e_1 + v_2.$$

Note-se que

$$v_2 = x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1$$

não é o vector nulo, pois que (x_j) é linearmente independente. Por outro lado $v_2 \perp e_1$, pois $\langle v_2, e_1 \rangle = 0$, pelo podemos considerar

$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}.$$

3^o passo. O vector

$$v_3 = x_3 - \langle x_3, e_1 \rangle e_1 - \langle x_3, e_2 \rangle e_2$$

não é o vector nulo, $v_3 \perp e_1$ e $v_3 \perp e_2$, pelo que consideramos

$$e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}.$$

n-ésimo passo. O vector

$$v_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k \rangle e_k$$

não é o vector nulo e é ortogonal a $e_1, ..., e_{n-1}$. Então

$$e_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}.$$

3.5 Séries relacionadas com sucessões e conjuntos ortonormais

Existem alguns factos e questões relacionados com a desigualdade de Bessel . Em primeiro lugar justifiquemos a razão da designação "coeficientes de Fourier"com algumas definições.

Uma série trigonométrica é uma série da forma

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt)\right). \tag{3.5.1}$$

Uma função $x(t)$ diz-se **periódica** no domínio D, se existir um número positivo P tal que

$$x(t+P) = x(t), \quad \forall t \in D.$$

O número P designa-se por **período** de $x(t)$.

Seja 2π o período de $x(t)$, uma função contínua.

A **Série de Fourier** de $x(t)$ é a série trigonométrica (3.5.1) com coeficientes a_k e b_k dados pelas fórmulas de Euler

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos(kt)dt, \quad k = 1,2,3,..., \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\operatorname{sen}(kt)dt, \quad k = 1,2,3,.... \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Estes coeficientes são chamados **coeficientes de Fourier** de x.

Se a série de Fourier de x converge para cada t e tem a soma $x(t)$, então escrevemos

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt)\right). \tag{3.5.3}$$

Como x é uma função periódica do período 2π, podemos substituir o intervalo de integração $[0, 2\pi]$ em (3.5.2), por qualquer outro intervalo de comprimento 2π, por exemplo $[-\pi, \pi]$.

As séries de Fourier surgiram pela primeira vez relacionadas com problemas físicos considerados por D. Bernoulli (corda vibrante, 1753) e J. Fourier (condução do calor, 1822).

Estas séries ajudam a representar fenómenos periódicos complicados através de funções periódicas simples (coseno e seno), contínuas ou não, com domínio $\mathbb{R}$ ou estendidas a $\mathbb{R}$.

Exercício 3.5.1 ***(Onda rectangular)***

a) *Determinar a série de Fourier correspondente à função*

$$x(t) = \begin{cases} -\alpha & , \quad -\pi < t < 0 \\ \alpha & , \quad 0 < t < \pi \end{cases} \quad , \quad \alpha > 0, \quad f(t + 2\pi) = f(t).$$

b) *Utilize a série da alínea anterior para encontrar a soma da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Resolução:

a) Por (3.5.2) conclui-se que $a_0 = 0$ e tem-se

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\alpha\cos(kt)\,dt + \int_{0}^{\pi} \alpha\cos(kt)\,dt\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\alpha\frac{sen\,(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\alpha\frac{sen\,((kt))}{k}\right]_{0}^{\pi}\right) = 0. \end{aligned}$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\alpha\ sen\,(kt)\,dt + \int_{0}^{\pi} \alpha\ sen\,(kt)\,dt\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[\alpha\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0} - \left[\alpha\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{0}^{\pi}\right) \\ &= \frac{\alpha}{k\pi}\left[1 - \cos(-k\pi) - \cos(k\pi) + 1\right] = \frac{2\alpha}{k\pi}\left[1 - \cos(k\pi)\right]. \end{aligned}$$

Como

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} -1 & , \quad \text{se } k \text{ ímpar} \\ 1 & , \quad \text{se } k \text{ par} \end{cases}$$

então

$$1 - \cos(k\pi) = \begin{cases} 2 & , \quad \text{se } k \text{ ímpar} \\ 0 & , \quad \text{se } k \text{ par.} \end{cases}$$

Assim, os coeficientes de Fourier b_n da função dada serão

$$b_1 = \frac{4\alpha}{\pi}, \; b_2 = 0, \; b_3 = \frac{4\alpha}{3\pi}, \; b_4 = 0, ... ,$$

pelo que a série de Fourier de $x(t)$ é

$$\frac{4\alpha}{\pi}\left(\operatorname{sen} t + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(5t) + ...\right).$$

b) Admitindo que a série é convergente, tem-se

$$x(t) = \frac{4\alpha}{\pi}\left(\operatorname{sen} t + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(5t) + ...\right)$$

e

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha = \frac{4\alpha}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...\right),$$

pelo que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4}.$$

Este resultado espectacular, que foi obtido por Leibniz em 1673 utilizando argumentos geométricos, ilustra como a soma de algumas séries numéricas pode ser obtida através do cálculo de séries de Fourier, calculadas em pontos específicos.

Podemos perguntar como estas séries de Fourier se enquadram no nosso estudo.

Consideremos as funções coseno e seno em (3.5.3) como sucessões (u_k) e (v_k) no Exemplo 3.4.5, isto é,

$$u_k(t) = \cos kt, \quad v_k(t) = \operatorname{sen} kt.$$

Portanto, podemos escrever (3.5.3) na forma

$$x(t) = a_0 u_0(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k u_k(t) + b_k v_k(t)\right). \tag{3.5.4}$$

Multiplicando (3.5.4) por um u_j fixo e integrando em t de 0 a 2π, obtem-se o produto interno por u_j, conforme definido em (3.4.2). Assumindo a integrabilidade e usando a ortogonalidade de (u_j) e (v_k), bem como o facto de que $u_j \perp v_k$ para todos j, k, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle x, u_j \rangle &= a_0 \langle u_0, u_j \rangle + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \langle u_k, u_j \rangle + b_k \langle v_k, u_j \rangle\right) \\
&= a_j \langle u_j, u_j \rangle \\
&= a_j \|u_j\|^2 = \begin{cases} 2\pi a_0 & , \quad j = 0 \\ \pi a_j & , \quad j = 1, 2, ... \end{cases}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, multiplicando (3.5.4) por v_j e procedendo de modo análogo, chegamos a

$$\langle x, v_j \rangle = b_j \|v_j\|^2 = \pi b_j, \quad j = 1, 2, ...$$

Determinados a_j e b_j e usando as sucessões ortonormais (e_j) e $(\widetilde{e}_j)$, com $e_j = \frac{u_j}{\|u_j\|}$ e $\widetilde{e}_j = \frac{v_j}{\|v_j\|}$, obtemos

$$\begin{aligned}
a_j &= \frac{1}{\|u_j\|^2} \langle x, u_j \rangle = \frac{1}{\|u_j\|} \langle x, e_j \rangle, \\
b_j &= \frac{1}{\|v_j\|^2} \langle x, v_j \rangle = \frac{1}{\|v_j\|} \langle x, \widetilde{e}_j \rangle,
\end{aligned}$$

que é análogo a (3.5.2).

Isto mostra que, em (3.5.4),

$$a_k u_k(t) = \frac{1}{\|u_k\|} \langle x, e_k \rangle u_k(t) = \langle x, e_k \rangle e_k(t)$$

e, similarmente para $b_k v_k(t)$. Por isso, podemos escrever a série de Fourier (3.5.3) na forma

$$x(t) = \langle x, e_0 \rangle e_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\langle x, e_k \rangle e_k(t) + \langle x, \widetilde{e}_k \rangle \widetilde{e}_k(t)\right).$$

Este exemplo sobre séries levanta a questão de saber como podemos estender a outras sucessões ortonormais e o que podemos dizer sobre a convergência das séries correspondentes.

Dada qualquer sucessão ortonormal (e_k) num espaço Hilbert H, podemos considerar séries da forma

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k e_k, \tag{3.5.5}$$

com α_1, α_2,... escalares. Uma série deste tipo converge e tem soma s se houver um $s \in H$ tal que a sucessão (s_n) das somas parciais

$$s_n = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

converge para s, isto é, $\|s_n - s\| \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Teorema 3.5.2 *Seja (e_k) uma sucessão ortonormal num espaço de Hilbert H. Então:*

a) *a série (3.5.5) converge (na norma de H) se e somente se a série seguinte converge:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 ; \tag{3.5.6}$$

b) *se (3.5.5) converge, então os coeficientes a_k são os coeficientes de Fourier $\langle x, e_k \rangle$, onde x representa a soma de (3.5.5). Portanto, neste caso, (3.5.5) pode ser escrita*

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle \, e_k;$$

c) *Para $x \in H$, a série (3.5.5) com $a_k = \langle x, e_k \rangle$ converge (na norma de H).*

Dem. a) Considerem-se

$$s_n = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \quad \text{e} \quad \sigma_n = |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 .$$

Então, pela ortonormalidade, para quaisquer m e $n > m$,

$$\begin{aligned} \|s_n - s\|^2 &= \|a_{m+1} e_{m+1} + \cdots + a_n e_n\|^2 \\ &= |a_{m+1}|^2 + \cdots + |a_n|^2 = \sigma_n - \sigma_m. \end{aligned}$$

Portanto (s_n) é uma sucessão de Cauchy em H se e somente se (σ_n) é uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Como H e $\mathbb{R}$ são completos, prova-se a primeira parte do teorema.

b) Calculando o produto interno de s_n e e_j e usando a ortonormalidade, temos

$$\langle s_n, e_j \rangle = \alpha_j, \quad \text{para } j = 1, ..., k, \; k \leq n \text{ fixo.}$$

Por hipótese, $s_n \to s$. Como o produto interno é contínuo,

$$\alpha_j = \langle s_n, e_j \rangle \longrightarrow \langle x, e_j \rangle, \quad \text{para } \; j \leq k.$$

Considerando k ($\leq n$) suficientemente grande, porque $n \to +\infty$, então temos $a_j = \langle x, e_j \rangle$ para cada $j = 1, 2, ...$

c) Pela desigualdade de Bessel (Teorema 3.4.7) temos que a série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

converge. Então, por a), concluímos que c) é verdade. ■

Note-se que, se uma família ortonormal (e_k), $k \in I$, num espaço com produto interno X é não numerável (isto acontece se o conjunto de índices I é não numerável), podemos ainda construir os coeficientes de Fourier $\langle x, e_k \rangle$ de um $x \in X$, com $k \in I$.

Lema 3.5.3 *Qualquer x num espaço de produto interno X pode ter, no máximo, uma quantidade numerável de coeficientes de Fourier $\langle x, e_k \rangle$ não nulos, em relação a uma família ortonormal (e_k), $k \in I$, em X.*

Dem. Seja (w_m) um rearranjo de (e_n).

Por definição, isto significa que existe uma aplicação bijectiva $n \longmapsto m(n)$ de $\mathbb{N}$ sobre si próprio, de modo que os termos correspondentes das duas sucessões sejam iguais, isto é, $w_{m(n)} = e_n$. Definimos

$$a_n = \langle x, e_n \rangle, \quad \beta_m = \langle x, w_m \rangle$$

e

$$x_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n, \quad x_2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \beta_m w_m.$$

Então, pelo Teorema 3.5.2, b),

$$a_n = \langle x, e_n \rangle = \langle x_1, e_n \rangle, \quad \beta_m = \langle x, w_m \rangle = \langle x_2, w_m \rangle.$$

Como $e_n = w_{m(n)}$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle x_1 - x_2, e_n \rangle &= \langle x_1, e_n \rangle - \left\langle x_2, w_{m(n)} \right\rangle \\ &= \langle x, e_n \rangle - \left\langle x, w_{m(n)} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

e, de forma semelhante, $\langle x_1 - x_2, w_m \rangle = 0$. Isto implica que

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|^2 &= \left\langle x_1 - x_2, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n - \sum_{m=1}^{+\infty} \beta_m w_m \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{a}_n \langle x_1 - x_2, e_n \rangle - \sum_{m=1}^{+\infty} \overline{\beta}_m \langle x_1 - x_2, w_m \rangle = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, $x_1 - x_2 = 0$ e $x_1 = x_2$. Como o rearranjo (w_m) de (e_n) foi arbitrário, a demonstração fica concluída. ■

3.6 Representação de funcionais em espaços de Hilbert

Na prática é importante conhecer o "aspecto"dos funcionais lineares limitados em vários espaços. Em espaços gerais de Banach este assunto não é trivial, no entanto, em espaços de Hilbert a situação é surpreendentemente simples, devido ao **Teorema de Riesz**:

Teorema 3.6.1 *Um funcional linear limitado f num espaço de Hilbert H pode ser representado por um produto interno, nomeadamente,*

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \tag{3.6.1}$$

onde z, depende de f, é univocamente determinado por f e tem norma

$$\|z\| = \|f\|. \tag{3.6.2}$$

Dem. A prova faz-se em três passos:
a) f tem uma representação como em (3.6.1);
b) z em (3.6.1) é único,
c) a igualdade (3.6.2) é verdadeira.
Em detalhe:

a) Se $f = 0$, então (3.6.1) e (3.6.2) verificam-se considerando $z = 0$.
Seja então $f \neq 0$.
Que propriedades deve ter z para existir uma representação (3.6.1) ?.
Em primeiro lugar, $z \neq 0$, caso contrário, $f = 0$.

Além disso, $\langle x, z \rangle = 0$ para todo o x para o qual $f(x) = 0$, ou seja, para todo $x \in \mathcal{N}(f)$. Portanto $z \perp \mathcal{N}(f)$. Isso sugere que podemos considerar $\mathcal{N}(f)$ e o seu complemento ortogonal $\mathcal{N}(f)^{\perp}$.

Pelo Teorema 2.7.9, $\mathcal{N}(f)$ é um espaço vectorial e é fechado, pelo Corolário 2.8.10. Além disso, $f \neq 0$ implica que $\mathcal{N}(f) \neq H$, pelo que $\mathcal{N}(f)^{\perp} \neq \{0\}$, pelo Teorema 3.3.4. Portanto $\mathcal{N}(f)^{\perp}$ contém um $z_0 \neq 0$.

Defina-se

$$v = f(x)z_0 - f(z_0)x,$$

com $x \in H$ arbitrário. Aplicando f, obtemos

$$f(v) = f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x),$$

o que mostra que $v \in \mathcal{N}(f)$. Como $z_0 \perp \mathcal{N}(f)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v, z_0 \rangle = \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 \rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z_0 \rangle - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle . \end{aligned}$$

Observando que $\langle z_0, z_0 \rangle = \|z_0\|^2 \neq 0$, podemos calcular $f(x)$:

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0 \rangle} \langle x, z_0 \rangle .$$

Isto pode ser escrito na forma de (3.6.1), com

$$z = \frac{\overline{f(z_0)}}{\langle z_0, z_0 \rangle} \langle x, z_0 \rangle .$$

Como $x \in H$ é arbitrário, (3.6.1) fica provado.

b) Para provar que z em (3.6.1) é único, consideremos, para $x \in H$,

$$f(x) = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle .$$

Então $\langle x, z_1 - z_2 \rangle = 0$ para todo o x. Escolhendo, em particular, $x = z_1 - z_2$, obtemos

$$\langle x, z_1 - z_2 \rangle = \langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle = \|z_1 - z_2\|^2 = 0.$$

Assim, $z_1 - z_2 = 0$, de modo que $z_1 = z_2$, pelo que temos a unicidade.

c) Se $f = 0$, então $z = 0$ e (3.6.2) é verdadeira.

Para $f \neq 0$, temos $z \neq 0$. Fazendo $x = z$ em (3.6.1) e com (2.9.2) obtemos

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = f(z) \leq \|x\| \|z\|.$$

Dividindo por $\|z\| \neq 0$ tem-se produz $\|z\| \leq \|f\|$. Resta agora mostrar que $\|f\| \leq \|z\|$.

Por (3.6.1) e pela desigualdade de Schwarz vemos que

$$|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|x\| \|z\|,$$

o que implica

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z \rangle| \leq \|z\|.$$

■

A idéia para provar a unicidade na parte b) sugere o seguinte resultado:

Lema 3.6.2 *Se $\langle v_1, w \rangle = \langle v_2, w \rangle$ para qualquer w num espaço de produto interno X, então $v_1 = v_2$.*
Em particular, $\langle v_1, w \rangle = 0$ para qualquer $w \in X$ implica $v_1 = 0$.

Dem. Por hipótese, para qualquer w,

$$\langle v_1 - v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle - \langle v_2, w \rangle = 0.$$

Para $w = v_1 - v_2$, temos $\|v_1 - v_2\|^2 = 0$ e, portanto, $v_1 = v_2$.

Em particular, $\langle v_1, w \rangle = 0$ com $w = v_1$, dá $\|v_1\|^2 = 0$, de modo que $v_1 = 0$. ■

3.7 Exercícios

1. Se $x \perp y$ num espaço de produto interno X, mostre que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ (Teorema de Pitágoras).}$$

2. Se X no exercício anterior é real, mostre que, inversamente, a relação dada implica que $x \perp y$.
   Justifique que isso pode não ser verdadeiro se X for complexo. Dê exemplos.

3. Se um espaço de produto interno X for real, mostre que a condição $\|x\| = \|y\|$ implica $\langle x + y, x - y \rangle = 0$.
   Qual o significado geométrico desta relação se $X = \mathbb{R}^2$?

4. Verifique por cálculo directo que, para quaisquer elementos de um espaço com produto interno se tem

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + 2 \left\| z - \frac{1}{2}(x + y) \right\|^2 .$$

   (**Igualdade de Apolónio**).
   Mostre que esta identidade também pode ser obtida a partir da igualdade doparalelogramo.

5. Se num espaço de produto interno, $\langle x, u \rangle = \langle x, v \rangle$ para todo o x, mostre que $u = v$.

6. Sejam z_1 e z_2 dois números complexos. Mostre que

$$\langle z_1, z_2 \rangle = z_1 \overline{z_2}$$

   define um produto interno, que produz a métrica usual no plano complexo. Em que condição temos ortogonalidade?

7. Seja X o espaço vectorial de todos os pares ordenados de números complexos. Podemos obter a norma definida em X por

$$\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2| , \quad \text{para } x = (\xi_1, \xi_2)$$

   a partir de um produto interno?

8. Enuncie e prove a desigualdade de Schwarz em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$.

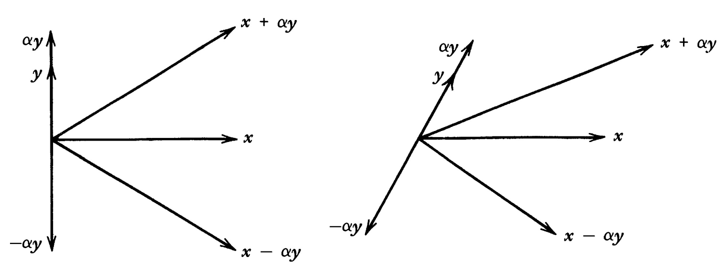
9. Seja X um espaço com produto interno consistindo no polinómio $x = 0$ e todos os polinómios reais em t, de grau não superior a 2, considerando t real tal que $t \in [a, b]$, com produto interno definido por (3.1.5). Mostre

que X é completo.
Seja Y o conjunto de todos os $x \in X$ tal que $x(a) = 0$. Y é um subespaço de X? Todos os $x \in X$ de grau 2 formam um subespaço de X?

10. Mostre que $y \perp x_n$ e $x_n \longrightarrow x$ implicam $x \perp y$.

11. Prove que, para uma sucessão (x_n) num espaço com produto interno, as condições $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$ e $\langle x_n, x\rangle \longrightarrow \langle x, x\rangle$ implicam convergência $x_n \longrightarrow x$.

12. Mostre que num espaço de produto interno, $x \perp y$ se, e somente se, tivermos $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ para todos os escalares α.



$|x + \alpha y| = |x - \alpha y|$ $\qquad$ $|x + \alpha y| \neq |x - \alpha y|$

13. Seja H um espaço de Hilbert, $M \subset H$ um subconjunto convexo e (x_n) uma sucessão em M tal que

$$\|x_n\| \longrightarrow \inf_{x \in M} \|x\|.$$

Mostre que (x_n) converge em H. Dê um exemplo ilustrativo em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

14. Mostre que o espaço vectorial X de todas as funções contínuas de valor real em $[-1, 1]$ é a soma direta do conjunto de tas funções pares e o conjunto de todas as funções contínuas ímpares em $[-1, 1]$.

15. Seja$X = \mathbb{R}^2$. Encontre $M^\perp$ se M é:
a) $\{x\}$, onde $x = (\xi_1, \xi_2) \neq 0$;
b) um conjunto linearmente independente $\{x_1, x_2\} \subset X$.

16. Sejam A e $B \supset A$ dois subconjuntos não vazios de um espaço de produto interno X. Mostreque:

    a) $A \subset A^{\perp\perp}$;

    b) $B^{\perp} \subset A^{\perp}$;

    c) $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$.

17. Mostre que um subespaço Y de um espaço H de Hilbert é fechado em H se, e somente se, $Y = Y^{\perp\perp}$.

18. Mostre que num espaço de produto interno de dimensão finita n tem uma base $\{b_1, ..., b_n\}$ de vectores ortonormais.

19. 5. Se (e_k) é uma sucessão ortonormal num espaço de produto interno X, e $x \in X$, mostre que $x - y$ com y dado por

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \quad \text{sendo } \alpha_k = \langle x, e_k \rangle ,$$

    é ortogonal ao subespaço $Y_n = span\,\{e_1, ..., e_n\}$.

20. Seja (e_k) uma sucessão ortonormal num espaço com produto interno X. Mostre que para qualquer $x, y \in X$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

21. Ortonormalize os três primeiros termos da sucessão $(x_0, x_1, x_2, ...)$, onde $x_j(t) = t^j$, no intervalo $[-1, 1]$, com

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^{1} x(t) \; y(t) \; dt.$$

22. Considere $x_1(t) = t^2$, $x_2(t) = t$ e $x_3(t) = 1$. Ortonormalize x_1, x_2, x_3, por esta ordem, no intervalo $[-1, 1]$ em relação ao produto interno dado no problema anterior.

23. Se a série (3.5.5) convergir com a soma x, mostre que (3.5.6) também converge e tem por soma $\|x\|^2$.

24. Ilustre com um exemplo que uma série convergente do tipo $\sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ pode não ter a soma x.

25. Se (x_j) é uma sucessão num espaço com produto interno X tal que a série $\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$ converge, mostre que (s_n) é uma sucessão de Cauchy, sendo $s_n = x_1 + \cdots + x_n$.

26. Mostre que, num espaço Hilbert H, a convergência de $\sum_{j=1}^{+\infty} \|x_j\|$ implica a convergência $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$.

27. Seja (e_k), uma sucessão ortonormal num espaço de Hilbert H. Prove que, para $x \in H$, o vector

$$y = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$$

existe em H e $x - y$ é ortogonal a qualquer e_k.

28. Desenvolva em série de Fourier as seguintes funções e esboce os gráficos das respectivas extensões periódicas, de período 2π :

a) $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$

b) $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

29. Utilizando as séries do exercício anterior, mostre que:

a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$

b) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \cdots = \frac{\pi^2}{12}$.

30. Mostre que qualquer funcional linear em $\mathbb{R}^3$ pode ser representado pelo produto interno

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3,$$

para $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $z = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

31. Prove que todo o funcional linear e limitado em l^2 pode ser representado na forma
$$f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j \overline{\beta}_j,$$
com $x = (\alpha_j) \in l^2$, $z = \left(\beta_j\right) \in l^2$.

32. Se z for qualquer elemento fixo de um espaço com produto interno X, mostre que $f(x) = \langle x, z \rangle$ define um funcional linear limitado em X, da norma $\|z\|$.

Capítulo 4

Teoremas fundamentais em espaços normados e de Banach

Este capítulo contém alguns resultados e conceitos mais avançados, sem os quais a utilidade da teoria dos espaços Normados e de Banach seria bastante limitada.

4.1 Lema de Zorn

A demonstração do Teorema de Hahn-Banach requer o Lema de Zorn, para o qual necessitamos de alguns conceitos:

Definição 4.1.1 *Um conjunto M é parcialmente ordenado se é possível definir em M uma* ***ordem parcial****, isto é, uma relação binária, simbolizada por $\leq$ satisfaz as condições*

(PO1) $a \leq a, \ \forall a \in M$ *(reflexividade)*

(PO2) *Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$ (antisimetria)*

(PO3) *Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$ (transitividade).*

O termo "parcialmente"enfatiza que M pode conter elementos a e b para os quais não se verifica nem $a \leq b$ nem $b \leq a$. Então a e b designam-se por **elementos incomparáveis**.

Pelo contrário, dois elementos a e b dizem-se **elementos comparáveis** se se verifica $a \leq b$ ou $b \leq a$ (ou ambos).

Um conjunto **totalmente ordenado** ou **cadeia** é um conjunto parcialmente ordenado, tal que todos os elementos do conjunto são comparáveis. Em outras palavras, uma cadeia é um conjunto parcialmente encomendado que não tem elementos incomparáveis.

Um **limite superior** de um subconjunto W de um conjunto parcialmente ordenado M é um elemento $u \in M$ tal que

$$x \leq u, \quad \forall x \in W.$$

Note-se que, dependendo de M e W, este u pode não existir.

O elemento maximal de M é um $m \in M$ tal que

$$m \leq x \text{ implica } m = x.$$

Note ainda que um elemento maximal não tem de ser um limite superior.

Exemplo 4.1.2 *Seja M o conjunto de todos os números reais com $x \leq y$ com o significado usual. M é totalmente ordenado. M não tem elemento maximal.*

Exemplo 4.1.3 *Sejam $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de um conjunto X dado (conjunto de todos os subconjuntos de X). Defina-se $A \leq B$ a significar $A \subset B$, ou seja, A é um subconjunto de B.*
Então, $\mathcal{P}(X)$ é parcialmente ordenado. O único elemento maximal de ordenado é X.

Exemplo 4.1.4 *Seja M o conjunto de todas as sequências ordenadas de n números reais , $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $y = (\eta_1, ..., \eta_n)$, ... em que $x \leq y$ significa $\xi_j \leq \eta_j$ para cada $j = 1, ..., n$, onde $\xi_j \leq \eta_j$ tem o seu significado usual. Isso define uma ordem parcial em M.*

Exemplo 4.1.5 *Seja $M = N$, o conjunto de todos os inteiros positivos, em que $m \leq n$ significa que m divide n. Esta relação define uma ordem parcial em $\mathbb{N}$.*

Com os conceitos acima podemos formular o **Lema de Zorn**, que aqui será considerado como um axioma:

Lema 4.1.6 *Seja $M \neq \varnothing$ um conjunto parcialmente ordenado. Suponha que toda a cadeia $C \subset M$ tem um limite superior. Então, M tem pelo menos um elemento maximal.*

4.2 Teorema de Hann-Banach

O teorema de Hahn-Banach é um teorema de extensão para funcionais lineares.

O teorema foi apresentado por H. Hahn (1927), e reformulado na versão actual de S. Banach (1929)

De um modo geral, num problema de extensão, considera-se um objecto matemático (por exemplo, uma aplicação) definido num subconjunto Z de um dado o conjunto X e pretende-se estender o objeto de Z para o todo o conjunto X de tal forma que certas propriedades básicas do objeto se mantenham.

No teorema de Hahn-Banach, o objecto a ser estendido é um funcional linear f que é definido num subespaço Z de um espaço vectorial X e tem uma certa propriedade de limitação que será formulada em termos de um **funcional sublinear**.

Por definição, um funcional sublinear é um funcional de valor real p num espaço vectorial X que é subaditivo, isto é,

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \ , \forall x, y \in X, \tag{4.2.1}$$

e positivo-homogéneo, isto é,

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \ , \forall \alpha \geq 0 \text{ em } \mathbb{R} \text{ e } x \in X.$$

Observe que a norma num espaço normado pode ser considerada como um funcional.

Teorema 4.2.1 *Seja X um espaço vectorial real e p um funcional sublinear em X. Além disso, considere-se f um funcional linear que é definido num subespaço Z de X e satisfaz*

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in Z.$$

Então f tem uma extensão linear $\widetilde{f}$ de Z para X que satisfaz

$$\widetilde{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X, \tag{4.2.2}$$

ou seja, $\widetilde{f}$ é um funcional linear em X, satisfaz (4.2.2) em X e $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para cada $x \in Z$.

Dem. Procedendo passo a passo, devemos provar que:

a) O conjunto E de todas as extensões lineares g de f satisfazendo $g(x) \leq p(x)$ no domínio $\mathcal{D}(g)$ é parcialmente ordenado e pelo Lema de Zorn garante a existência de um elemento maximal $\widetilde{f}$ de E.

b) $\widetilde{f}$ é definido em todo o espaço X.

c) Uma relação auxiliar utilizada em b).

Comecemos então a demonstração:

a) Seja E o conjunto de todas as extensões lineares g de f que satisfazem a condição

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}(g).$$

Claramente, $E \neq \varnothing$, uma vez que $f \in E$.

Em E, podemos definir uma ordem parcial por

$$g \leq h \text{ significando } h \text{ é uma extensão de } g,$$

isto é, por definição, $\mathcal{D}(h) \supset \mathcal{D}(g)$ e $h(x) = g(x)$ para cada $x \in \mathcal{D}(g)$.

Para qualquer cadeia $C \subset E$, definimos $\widehat{g}$ por

$$\widehat{g}(x) = g(x), \quad \text{se} \quad x \in \mathcal{D}(g) \quad (g \in C).$$

$\widehat{g}$ é um funcional linear, com domínio

$$\mathcal{D}(\widehat{g}) = \bigcup_{g \in C} \mathcal{D}(g),$$

que é um espaço vectorial, uma vez que C é uma cadeia, pelo que $\widehat{g}$ está bem definido. De facto, para $x \in \mathcal{D}(g_1) \cap \mathcal{D}(g_2)$, com $g_1, g_2 \in C$, temos $g_1(x) = g_2(x)$ uma vez que C é uma cadeia, de modo que $g_1 \leq g_2$ ou $g_2 \leq g_1$.

Claramente, $g \leq \widehat{g}$ para todos o $g \in C$. Portanto, $\widehat{g}$ é um limite superior de C. Como $C \subset E$ é arbitrário, o Lema de Zorn implica, que E tem um elemento maximal $\widetilde{f}$. Pela definição de E, esta é uma extensão linear de f que satisfaz

$$\widetilde{f}(x) \leq p(x), \quad x \in \mathcal{D}(\widetilde{f}). \tag{4.2.3}$$

b) Agora mostramos que $\mathcal{D}(\widetilde{f}) = X$.

Suponha que esta afirmação é falsa.

Então, podemos escolher um $y_1 \in X - \mathcal{D}(\widetilde{f})$ e considerar o subespaço Y_1 de X gerado por $\mathcal{D}(\widetilde{f})$ e y_1. Note-se que $y_1 \neq 0$, pois $0 \in \mathcal{D}(\widetilde{f})$. Qualquer $x \in Y_1$ pode ser escrito

$$x = y + \alpha\, y_1, \quad y \in \mathcal{D}(\widetilde{f}).$$

Esta representação é única. Na verdade, $y+\alpha y_1 = \widetilde{y}+\beta y_1$ com $\widetilde{y} \in \mathcal{D}(\widetilde{f})$ implica $y-\widetilde{y} = (\beta-\alpha)y_1$ onde $y-\widetilde{y} \in \mathcal{D}(\widetilde{f})$ enquanto $y_1 \notin \mathcal{D}(\widetilde{f})$, de modo que a única solução é $y-\widetilde{y} = 0$ e $\beta-\alpha = 0$. Isto garante a unicidade.

Um funcional g_1 em Y_1 é definido por

$$g_1\,(y+\alpha y_1) = \widetilde{f}(y) + \alpha c, \tag{4.2.4}$$

onde c é uma constante real. Não é difícil ver que g_1 é linear.

Além disso, para $\alpha = 0$ temos $g_1\,(y) = \widetilde{f}(y)$. Portanto g_1 é uma extensão própria de $\widetilde{f}$. ou seja, uma extensão tal que $\mathcal{D}(\widetilde{f})$ é um subconjunto próprio de $\mathcal{D}(g_1)$.

Consequentemente, se pudermos provar que $g_1 \in E$ mostrando que

$$g_1(x) \leq p(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}(g_1), \tag{4.2.5}$$

isto contradiz o facto de $\widetilde{f}$ ser máximo, de modo que $\mathcal{D}(\widetilde{f}) \neq X$ é falso e $\mathcal{D}(\widetilde{f}) = X$ é verdadeiro.

c) Vamos, finalmente, mostrar que g_1 com um c adequado em (4.2.4) que satisfaça (4.2.5).

Considere-se y e z em $\mathcal{D}(\widetilde{f})$. De (4.2.3) e (4.2.1) obtemos

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(z) &= \widetilde{f}(y-z) \leq p(y-z) \\ &= p(y+y_1-y_1-z) \\ &\leq p(y+y_1) + p(-y_1-z). \end{aligned}$$

Trocando o último termo para a esquerda e o termo $\widetilde{f}(y)$ para a direita, temos

$$-p(-y_1-z) - \widetilde{f}(z) \leq p(y+y_1) - \widetilde{f}(y) \tag{4.2.6}$$

com y_1 fixo. Como y não aparece à esquerda e z não aparece à direita, a desigualdade continua a manter-se se tomarmos o supremo com $z \in \mathcal{D}(\widetilde{f})$ à esquerda (designemo-lo por m_0) e o ínfimo com $y \in \mathcal{D}(\widetilde{f})$ à direita, notado por m_1. Então $m_0 \leq m_1$ e para c com $m_0 \leq m_1$ nós temos, de (4.2.6),

$$-p(-y_1-z) - \widetilde{f}(z) \leq c, \quad \forall z \in \mathcal{D}(\widetilde{f}), \tag{4.2.7}$$

$$c \leq p(y+y_1) - \widetilde{f}(y), \quad \forall y \in \mathcal{D}(\widetilde{f}). \tag{4.2.8}$$

Vamos provar (4.2.5) primeiro para α negativo em (4.2.4) e depois para α positivo.

Para $\alpha < 0$ usamos (4.2.7) com z substituído por $\frac{y}{\alpha}$, isto é,

$$-p\left(-y_1 - \frac{y}{\alpha}\right) - \widetilde{f}\left(\frac{y}{\alpha}\right) \leq c.$$

Multiplicando por $-\alpha > 0$ dá

$$\alpha p\left(-y_1 - \frac{y}{\alpha}\right) - \widetilde{f}(y) \leq -\alpha c.$$

Então, por (4.2.4), e usando $y + \alpha y_1 = x$, obtem-se a desigualdade desejada

$$g_1(x) = \widetilde{f}(y) + \alpha c \leq -\alpha p\left(-y_1 - \frac{y}{\alpha}\right) = p\left(\alpha y_1 + y\right) = p(x).$$

Para $\alpha = 0$, temos de imediato $x \in \mathcal{D}(\widetilde{f})$.
Para $\alpha > 0$ usamos (4.2.8) com y substituído por $\frac{y}{\alpha}$ para obter

$$\alpha c \leq \alpha p\left(\frac{y}{\alpha} + y_1\right) - \widetilde{f}\left(\frac{y}{\alpha}\right).$$

Multiplicando por $\alpha > 0$ dá

$$\alpha c \leq \alpha p\left(\frac{y}{\alpha} + y_1\right) - \widetilde{f}(y) = p(x) - \widetilde{f}(y)\cdot$$

A partir daqui e (4.2.4),

$$g_1(x) = \widetilde{f}(y) + \alpha c \leq p(x).$$

■

4.3 Teorema de Hahn-Banach em espaços complexos

O Teorema de Hahn-Banach 4.2.1 aplica-se a espaços vectoriais reais. Eis uma generalização que inclui espaços vectoriais complexos

Teorema 4.3.1 *Seja X espaço vectorial real ou complexo e p um funcional de valor real em X que é subaditivo, isto é, para todo $x, y \in X$,*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \tag{4.3.1}$$

e para cada escalar α satisfaz

$$p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x). \tag{4.3.2}$$

Além disso, assuma-se que f é um funcional linear que é definida num subespaço Z de X verificando

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in Z. \tag{4.3.3}$$

Então f tem uma extensão linear $\widetilde{f}$ de Z para X que satisfaz

$$\left|\widetilde{f}(x)\right| \leq p(x), \quad \forall x \in X. \tag{4.3.4}$$

Dem. a) Espaço vectorial real.

Se X é real, a situação é simples. Então (4.3.3) implica $f(x) \leq p(x)$ para todo o $x \in Z$. Pelo Teorema Hahn-Banach 4.2.1 existe uma extensão linear $\widetilde{f}$ de Z a X tal que

$$\widetilde{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X. \tag{4.3.5}$$

Assim, por (4.3.2) obtemos

$$-\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x),$$

isto é, $\widetilde{f}(x) \geq -p(x)$. Juntamente com (4.3.5) obtem-se (4.3.4).

b) Espaço vectorial complexo.

Considere-se X complexo. Então Z é um espaço vectorial complexo, também. Portanto, f é complexo, e podemos escrever

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad x \in Z,$$

onde f_1 e f_2 são funções de valor real.

Se considerarmos X e Z como espaços vectoriais reais e denotá-los por X_r e Z_r, respectivamente. Isto apenas significa que restringimos a multiplicação por escalares a números reais (em vez de números complexos).

Como f é linear em Z e f_1 e f_2 são funções com valores reais, f_1 e f_2 são funcionais lineares em Z. Então $f_1(x) \leq |f(x)|$ porque a parte real de um número complexo não pode exceder o seu valor absoluto. Assim, por (4.3.3),

$$f_1(x) \leq p(x), \quad \forall x \in Z_r.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach 4.2.1 há uma extensão linear $\widetilde{f}_1$ de f_1 de Z_r a X_r, de modo que

$$\widetilde{f}_1(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X_r. \tag{4.3.6}$$

Passemos para f_2. Voltando a Z e usando $f = f_1 + if_2$, temos para cada $x \in Z$,

$$i\left[f_1(x) + if_2(x)\right] = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix).$$

Como as partes reais em ambos os lados devem ser iguais então

$$f_2(x) = -f_1(ix), \quad \forall x \in Z. \tag{4.3.7}$$

Portanto, se, para todo o $x \in X$, estabelecermos

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}_1(x) - i\widetilde{f}_1(ix), \quad \forall x \in X, \tag{4.3.8}$$

vemos de (4.3.7) que $\widetilde{f}(x) = f(x)$ em Z. Isto mostra que $\widetilde{f}$ é uma extensão de f de Z para X.

Falta então provar que:

(i) $\widetilde{f}$ é um funcional linear no espaço vectorial complexo X;

(ii) $\widetilde{f}$ satisfaz (4.3.4) no X.

O item (i) pode ser visto a partir do seguinte cálculo que usa (4.3.8) e a linearidade de $\widetilde{f}_1$ no espaço vetorial real X_r.

Representando um escalar complexo qualquer por $a + ib$, com a e b reais, tem-se

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}((a+ib)\,x) &= \widetilde{f}_1\,(ax + ibx) - i\widetilde{f}_1\,(iax - bx) \\
&= a\widetilde{f}_1\,(x) + b\widetilde{f}_1\,(ix) - i\left[a\widetilde{f}_1\,(ix) - b\widetilde{f}_1\,(x)\right] \\
&= (a+ib)\left[\widetilde{f}_1\,(x) - i\widetilde{f}_1\,(ix)\right] = (a+ib)\,\widetilde{f}\,(x)\,.
\end{aligned}$$

Para provar (ii), considere-se x tal que $\widetilde{f}\,(x) = 0$. Isto acontece porque $p(x) \geq 0$ por (4.3.1) e (4.3.2). Seja x tal que $\widetilde{f}\,(x) \neq 0$. Então podemos escrever, usando a forma polar de complexos,

$$\widetilde{f}\,(x) = \left|\widetilde{f}\,(x)\right| e^{i\theta}, \text{ logo } \quad \left|\widetilde{f}\,(x)\right| = \widetilde{f}\,(x)\,e^{-i\theta} = \widetilde{f}\left(e^{-i\theta}x\right).$$

Como $\left|\widetilde{f}\,(x)\right|$ é real, a última expressão é real e, portanto, igual à sua parte real. Assim, por (4.3.2),

$$\left|\widetilde{f}\,(x)\right| = \widetilde{f}\left(e^{-i\theta}x\right) = \widetilde{f}_1\left(e^{-i\theta}x\right) \leq p\left(e^{-i\theta}x\right) = \left|e^{-i\theta}\right| p(x) = p(x),$$

o que completa a prova. ■

Embora o teorema de Hahn-Banach não diga nada sobre continuidade, uma aplicação principal do teorema trata de limites de funcionais lineares. o básico

Teorema 4.3.2 *Seja f um funcional linear limitado num subespaço Z de um espaço normado X. Então existe um funciona linear limitado $\widetilde{f}$ em X, que é uma extensão de f para X e que tem a mesma norma,*

$$\left\|\widetilde{f}\right\|_X = \|f\|_Z\,, \tag{4.3.9}$$

com

$$\left\|\widetilde{f}\right\|_X = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \left|\widetilde{f}(x)\right| \quad e \quad \|f\|_Z = \sup_{\substack{x\in Z\\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

sendo $\|f\|_Z = 0$ no caso trivial de $Z = \{0\}$.

Dem. Se $Z = \{0\}$, então $f = 0$, e a extensão é $\widetilde{f} = 0$.

Considere-se então $Z \neq \{0\}$. Para usar o Teorema 4.3.1, devemos primeiro descobrir um p conveniente. Para todo o $x \in Z$, temos

$$|f(x)| \leq \|f\|_Z \|x\|\,.$$

Esta expressão tem a forma (4.3.3), com

$$p(x) = \|f\|_Z \|x\|\,.$$

Vemos que p está definido em todo o X. Além disso, p satisfaz (4.3.1) em X já que, pela desigualdade triangular,

$$p(x+y) = \|f\|_Z \|x+y\| \leq \|f\|_Z (\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y).$$

p também satisfaz (4.3.2) em X porque

$$p(\alpha x) = \|f\|_Z \|\alpha x\| = |\alpha| \|f\|_Z \|x\| = |\alpha| p(x).$$

Portanto, podemos aplicar o Teorema 4.3.1 e concluir que existe um funcional linear $\widetilde{f}$ em X que é uma extensão de f e satisfaz

$$\left|\widetilde{f}(x)\right| \leq p(x) = \|f\|_Z \|x\|, \text{ para } x \in X.$$

Tomando o supremo sobre todo $x \in X$ de norma 1, obtemos a desigualdade

$$\left\|\widetilde{f}\right\|_X = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \left|\widetilde{f}(x)\right| \leq \|f\|_Z .$$

Uma vez que, numa extensão, a norma não pode diminuir, também temos $\left\|\widetilde{f}\right\|_X \geq \|f\|_Z$, pelo que se obtem (4.3.9). ■

Em casos especiais, a situação pode tornar-se muito simples, como no caso dos espaços de Hilbert. Na verdade, se Z é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert $X = H$, então f tem uma representação de Riesz, (Teorema 3.6.1), digamos,

$$f(x) = \langle x, z\rangle, \quad \text{para } z \in Z,$$

com $\|z\| = \|f\|$. Claro que, como o produto interno é definido em todo o H, isso dá imediatamente uma extensão linear $\widetilde{f}$ de f de Z para H, e $\widetilde{f}$ tem a mesma norma que f porque $\left\|\widetilde{f}\right\| = \|z\| = \|f\|$, pelo Teorema 3.6.1. Por isso, neste caso, a extensão é imediata.

É possível obter outro resultado útil que, grosso modo, mostra que o espaço duplo X' de um espaço normado X consiste em muitos funcionais lineares limitados para distinguir entre os pontos de X.

Teorema 4.3.3 *Seja X um espaço normado e $x_0 \neq 0$ um qualquer elemento de X. Então existe um funcional linear limitado $\widetilde{f}$ em X tal que*

$$\left\|\widetilde{f}\right\| = 1, \quad \widetilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

Dem. Consideremos o subespaço Z de X formado por todos os elementos $x = \alpha x_0$ onde α é um escalar. Em Z, definimos um funcional linear f por

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|. \tag{4.3.10}$$

Então f é limitado e tem norma 1 porque

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|.$$

O Teorema 4.3.2 implica que f tem uma extensão linear $\widetilde{f}$ de Z para X, de norma $\left\|\widetilde{f}\right\| = \|f\| = 1$. De (4.3.10) vemos que $\widetilde{f}\,(x_0) = f\,(x_0) = \|x_0\|$. ■

Corolário 4.3.4 *Para cada x num espaço normado X, temos*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}. \tag{4.3.11}$$

Portanto se x_0 é tal que $f(x_0) = 0$, para todo o $f \in X'$, então $x_0 = 0$.

Dem. Pelo Teorema 4.3.3 temos, escrevendo x no lugar de x_0,

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \frac{\left|\widetilde{f}(x)\right|}{\left\|\widetilde{f}\right\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|,$$

e de $|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$ obtemos

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\|.$$

■

4.4 Teorema da limitação uniforme

O teorema da limitação uniforme (S. Banach e H. Steinhaus (1927)) é de grande importância, permitindo caracterizar algumas propriedades dos espaços de Banach, que os espaços normados em geral podem não ter.

Em primeiro lugar devemos provar o Teorema de Categoria de Baire para, a partir dele, provar o Teorema de limitação uniforme.

Alguns conceitos necessários para o Teorema de Baire:

Definição 4.4.1 *Um subconjunto M de um espaço métrico X designa-se por :*

a) ***rarefeito*** *("rare"ou "nowhere dense") em X se a sua aderência $\overline{M}$ não tem pontos interiores.*

b) ***de primeira categoria*** *em X se M é a união de um número contável de conjuntos, cada um dos quais é rarefeito em X,*

c) ***de segunda categoria*** *em X se M não é de primeira categoria em X.*

Teorema 4.4.2 *Se um espaço métrico $X \neq \varnothing$ é completo, então é de segunda categoria nele próprio.*
Portanto, se $X \neq \varnothing$ é completo e

$$X = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k, \quad \textit{(com } A_k \textit{ fechado)}$$

então, pelo menos, um A_k contém um subconjunto aberto não vazio.

Dem. A idéia da prova é simples. Suponha que o espaço métrico $X \neq \varnothing$ é completo é rarefeito em si próprio. Então

$$X = \bigcup_{k=1}^{+\infty} M_k, \tag{4.4.1}$$

com cada M_k rarefeito em X. Iremos construir uma sucessão de Cauchy (p_k) cujo limite p (que existe porque o espaço é completo) não está em nenhum M_k, contradizendo a representação (4.4.1).

Por hipótese, M_1 é rarefeito em X, de modo que, por definição, $\overline{M}_1$ não contém um conjunto aberto não vazio. Mas X, ele próprio, contém. Isto implica $\overline{M}_1 \neq X$. Portanto, o complementar de $\overline{M}_1$, $X - \overline{M}_1$, não é vazio e aberto. Podemos, portanto, escolher um ponto p_1 em $X - \overline{M}_1$ e uma bola aberta, B_1, contida no complementar,

$$B_1 = B_{\varepsilon_1}(p_1) \subset X - \overline{M}_1, \quad \text{com } \varepsilon_1 < \frac{1}{2}.$$

Por hipótese, M_2 é rarefeito em X, de modo que o $\overline{M}_2$ não contém um conjunto aberto não vazio. Por isso, não contém a bola aberta $B_{\frac{\varepsilon_1}{2}}(p_1)$. Isto implica que $\left(X - \overline{M}_2\right) \cap B_{\frac{\varepsilon_1}{2}}(p_1)$ não é vazio e é aberto, pelo que se pode escolher uma bola aberta neste conjunto, digamos,

$$B_1 = B_{\varepsilon_2}(p_2) \subset \left(X - \overline{M}_2\right) \cap B_{\frac{\varepsilon_1}{2}}(p_1), \quad \text{com } \varepsilon_2 < \frac{1}{2}\varepsilon_1.$$

Por indução obtemos assim uma sucessão de bolas

$$B_k = B_{\varepsilon_k}(p_k), \quad \text{com } \varepsilon_k < \frac{1}{2^k},$$

de modo que $B_k \cap M_k = \varnothing$ e

$$B_{k+1} \subset B_{\frac{\varepsilon_k}{2}}(p_k) \subset B_k, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Desde $\varepsilon_k < \frac{1}{2^k}$, a sucessão (p_k) dos centros das bolas é uma sucessão de Cauchy convergente, digamos, $p_k \longrightarrow p \in X$ porque X é completo por hipótese. Além disso, para m e $n > m$ temos $B_n \subset B_{\frac{m}{2}}(p_m)$, pelo que

$$\begin{aligned} d(p_m, p) &\leq d(p_m, p_n) + d(p_n, p) \\ &< \frac{\varepsilon_m}{2} + d(p_n, p) \longrightarrow \frac{\varepsilon_m}{2}, \end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$. Portanto, $p \in B_m$ por cada m. Como $B_m \subset \left(X - \overline{M}_m\right)$, então $p \notin M_m$ para todo o m, pelo que $p \notin \bigcup M_m = X$. Ora isto contradiz $p \in X$. ■

Do Teorema de Baire podemos obter o Teorema da Limitação Uniforme. Este teorema afirma que se X é um espaço de Banach e existe uma sucessão de operadores $T_n \in B(X, Y)$ limitada em cada ponto $x \in X$, então a sucessão é uniformemente limitada. Por outras palavras, a limitação pontual implica uma limitação mais forte, nomeadamente, a limitação uniforme.

Teorema 4.4.3 *Seja (T_n) uma sucessão de operadores lineares limitados $T_n : X \longrightarrow Y$ de um espaço de Banach X num espaço normado Y tal que $(\|T_n x\|)$ é limitado para cada $x \in X$, digamos,*

$$\|T_n x\| \leq c_x, \quad n = 1, 2, ..., \tag{4.4.2}$$

onde c_x é um número real. Então a sucessão das normas $\|T_n\|$ é limitada, isto é, existe um $c > 0$ tal que

$$\|T_n\| \leq c, \quad n = 1, 2, \dots .$$

(O número real c_x em (4.4.2), varia, em geral, com x. O ponto essencial é que o c_x não depende de n.)

Dem. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $A_k \subset X$ o conjunto de todos os x tais que,

$$\|T_n x\| \leq k, \quad n = 1, 2, ... \tag{4.4.3}$$

A_k é fechado, porque para qualquer $x \in A_k$ há uma sucessão (x_j) em A_k convergindo para x. Isso significa que, para cada n fixo, temos $\|T_n x_j\| \leq k$ e $\|T_n x\| \leq k$ porque T_n é contínuo, bem como a norma. Assim, $x \in A_k$ e A_k é fechado.

Por (4.4.2), cada $x \in X$ pertence a algum A_k. Portanto

$$X = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k.$$

Como X é completo, o Teorema de Baire implica que algum A_k contém uma bola aberta, por exemplo,

$$B_0 = B_r(x_0) \subset A_{k_0}. \tag{4.4.4}$$

Seja $x \in X$ arbitrário, não zero. Defina-se

$$z = x_0 + \gamma x, \quad \text{com } \gamma = \frac{r}{2\|x\|}. \tag{4.4.5}$$

Então, $\|z - x_0\| < r$, de modo que $z \in B_0$. Por (4.4.4) e pela definição de A_{k_0}, temos $\|T_n z\| \leq k_0$ para todo o n. Assim $\|T_n x_0\| \leq k_0$ uma vez que $x_0 \in B_0$. A partir de (4.4.5) obtemos

$$x = \frac{1}{\gamma}(z - x_0),$$

o que implica, para todo o n

$$\|T_n x\| = \frac{1}{\gamma}\|T_n(z - x_0)\| \leq \frac{1}{\gamma}(\|T_n z\| + \|T_n x_0\|) \leq \frac{4}{r}\|x\| k_0.$$

Por isso, para todo o n,

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x\| \leq \frac{4}{r} k_0,$$

que é da forma de (4.4.3) com $c = \frac{4}{r} k_0$. ■

Vejamos algumas aplicações do teorema anterior.

Exemplo 4.4.4 *O espaço normado X de todos os polinómios com norma definida por*

$$\|x\| = \max_j |\alpha_j|, \tag{4.4.6}$$

com $\alpha_0, \alpha_1, ...$ os coeficientes de x,não é completo.

Dem. A ideia baseia-se na construção de uma sucessão de operadores lineares limitados em X que satisfaz (4.4.2) mas não (4.4.3), de modo que X não pode ser completo.

Podemos escrever um polinómio $x \neq 0$ de grau N_x na forma

$$x(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j t^j, \quad \text{com } \alpha_j = 0 \text{ para } j > N_x.$$

Como uma sucessão de operadores em X consideramos a sucessão de funcionais $T_n = f_n$ definida por

$$\begin{aligned} T_n 0 &= f_n(0) = 0, \\ T_n x &= f_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}. \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

f_n é linear e é limitada pois $|\alpha_j| \leq \|x\|$, por (4.4.6), de modo que $|f_n(x)| \leq n\|x\|$.

Além disso, para cada $x \in X$ fixo, a sucessão $(|f_n(x)|)$ satisfaz (4.4.2), porque um polinómio x de grau N_x possui $N_x + 1$ coeficientes. Então, por (4.4.7) temos

$$|f_n(x)| \leq (N_x + 1) \max_j |\alpha_j| = c_x,$$

que é do tipo de (4.4.2).

Mostremos, agora, que (f_n) não satisfaz (4.4.3), isto é, não existe c de modo que $\|T_n\| = \|f_n\| \leq c$ para todo o n.

Para tal vamos escolher casos particulares de polinómios. Para f_n, escolhemos x definido por

$$x(t) = 1 + t + ... + t^n.$$

Então, $\|x\| = 1$, por (4.4.6) e

$$f_n(x) = 1 + 1 + ... + 1 = n = n\|x\|.$$

Portanto, $\|f_n\| \geq \frac{|f_n(x)|}{\|x\|} = n$, de modo que $(\|f_n\|)$ não é ilimitada. ∎

Defina-se agora um funcional g_x em X' escolhendo um $x \in X$ fixo e colocando

$$g_x(f) = f(x), \quad f \in X' \text{ variável.} \tag{4.4.8}$$

Note-se que f é limitado e para a limitação de g_x temos o seguinte lema:

Lema 4.4.5 *Para cada x fixo num espaço normado X, o funcional g_x definido por (4.4.8) é um funcional linear limitado em X', então $g_x \in X''$, e tem a norma*

$$\|g_x\| = \|x\|. \tag{4.4.9}$$

Dem. A linearidade de g_x é conhecida por (2.9.3), e (4.4.9) obtem-se por (4.4.8) e pelo (4.3.4):

$$\|g_x\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|g_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|.$$

■

Exemplo 4.4.6 *Relembremos que a série de Fourier de uma função periódica x de período 2π é da forma*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(a_m \cos(mt) + b_k \ sen(mt)\right). \tag{4.4.10}$$

com os coeficientes de Fourier de x dados pelas fórmulas de Euler

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos(mt)dt, \ \ b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t) \ sen(mt)dt. \tag{4.4.11}$$

Sabe-se que as séries (4.4.10) podem convergir mesmo em pontos onde x é descontínua. Isto mostra que a continuidade não é necessária para a convergência. Surpreendente é o facto de a continuidade não ser também suficiente para garantir a convergência.
Usando o Teorema da limitaçãouniforme podemos mostrar o seguinte:
***Existem funções contínuas de valor real cuja série de Fourier divergem num determinado ponto** t_0.*

Dem. Seja X o espaço normado de todas as funções reais, contínuas e de período 2π com norma definida por

$$\|x\| = \max |x(t)|. \tag{4.4.12}$$

X é um espaço de Banach, pelo Exemplo 1.5.5, com $a = 0$ e $b = 2\pi$. Sem perda de generalidade, considere-se $t_0 = 0$. Para provar a nossa afirmação, vaplicar o Teorema da Limitação Uniforme, Teorema 4.4.3 para $T_n = f_n$, com $f_n(x)$ é o valor em $t = 0$ da n-ésima soma parcial da série de Fourier de x.

Uma vez que para $t = 0$ os termos com seno são zero e o cosseno é um, temos de (4.4.10) e (4.4.11) que

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{n} a_m \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos(mt)\right]dt. \end{aligned}$$

Queremos determinar a função representada pela soma sob o sinal de integral. Para isso, calculamos

$$\begin{aligned} 2\ \mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{m=1}^{n}\cos(mt) &= \sum_{m=1}^{n} 2\ \mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\cos(mt) \\ &= \sum_{m=1}^{n}\left[-\mathrm{sen}\left(\left(m-\frac{1}{2}\right)t\right) + \mathrm{sen}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right)\right] \\ &= -\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}t\right) + \mathrm{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os termos por $\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)$ e adicionando 1 em ambos os lados, temos

$$1 + 2\sum_{m=1}^{n}\cos(mt) = \frac{\mathrm{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)} := q_n(t).$$

Consequentemente, a fórmula para $f_n(x)$ pode ser escrita na forma

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(t)\ q_n(t)dt. \tag{4.4.13}$$

Então, podemos mostrar que o funcional linear f_n é limitado. De facto, por (4.4.12) e (4.4.13),

$$
\begin{aligned}
|f_n(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \max |x(t)| \int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \|x\| \int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt,
\end{aligned}
$$

o que mostra que f_n é limitado. Além disso, tomando o supremo sobre todo x de norma 1, obtemos

$$\|f_n\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt.$$

Na verdade, é a igualdade que acontece, como agora vamos provar. Escreva-se $q_n(t)$ na forma

$$|q_n(t)| = y(t)\ q_n(t),$$

com $y(t) = +1$ em cada t onde $q_n(t) \geq 0$ e $y(t) = -1$ nos outros pontos.

A função y não é contínua, mas para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, pode ser modificado para um x contínuo de norma 1, de modo que, para este , se tenha

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} [x(t) - y(t)]\, q_n(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Escrevendo em dois integrais e usando (4.4.13), obtemos

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} x(t) q_n(t) dt - \int_0^{2\pi} y(t) q_n(t) dt - \right| = \left| f_n(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_n(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário e $\|x\| = 1$ então temos

$$\|f_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt. \tag{4.4.14}$$

Finalmente vamos mostrar que a sucessão $(\|f_n\|)$ é ilimitada.

Substituindo em (4.4.14) a expressão para q_n de (4.4.13), usando o facto de que $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)\right| < \frac{1}{2}t$ para $t \in (0, 2\pi]$ e fazendo a mudança de variável $\left(n+\frac{1}{2}\right)t = v$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|f_n\| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)}\right|dt \\
&> \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right|}{t}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\operatorname{sen} v|}{v}dv = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\operatorname{sen} v|}{v}dv \\
&\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\operatorname{sen} v|\,dv \\
&= \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1} \longrightarrow +\infty \text{ quando } n \to +\infty,
\end{aligned}$$

uma vez que a série harmónica diverge. Por isso $(\|f_n\|)$ é ilimitado, pelo que (4.4.3) não se verifica.

Uma vez que X é completo, isto implica que (4.4.2) não se pode segurar para todo o x. Portanto, deve haver um $x \in X$ tal que $(|f_n(x)|)$ é ilimitado. Mas, pela definição de f_n, isso significa que a série de Fourier de x diverge em $t = 0$. ■

4.5 Convergências forte e fraca

Na Análise Matemática define-se diferentes tipos de convergência (convergência pontual, absoluta, uniforme,...). Isso gera maior flexibilidade no estudo das sucessões e séries.

Na análise funcional, a situação é semelhante, existindo uma maior variedade de possibilidades que se revelam de interesse prático.

A convergência de sucessões de elementos num espaço normado, a partir de agora, será chamada de **convergência forte**, para a distinguir da "**convergência fraca**", a ser introduzida em breve.

Definição 4.5.1 *Uma sucessão (x_n) num espaço normado X é* ***fortemente convergente*** *(ou convergente em norma) se existe um $x \in X$ tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0,$$

e escreve-se

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

ou simplesmente

$$x_n \longrightarrow x.$$

x designa-se como o limite forte de (x_n).

A convergência fraca é definida em termos de funcionais lineares limitados em X da seguinte forma:

Definição 4.5.2 *Uma sucessão (x_n) num espaço normado X é* ***fracamente convergente*** *se houver um $x \in X$ tal que, para cada $f \in X'$,*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x),$$

e escreve-se

$$x_n \rightharpoonup x.$$

O elemento x é chamado de ***limite fraco*** *de (x_n).*

Note-se que a convergência fraca significa convergência de sucessões de números $a_n = f(x_n)$ para cada $f \in X'$.

A convergência fraca tem várias aplicações (por exemplo, no cálculo das variações e na teoria geral de equações diferenciais). O conceito ilustra um princípio básico da análise funcional, ou seja, o fato de que a investigação de espaços é muitas vezes relacionados com os seus espaços duais.

Lema 4.5.3 *Seja (x_n) ser uma sucessão fracamente convergente num espaço normado X, digamos, $x_n \rightharpoonup x$. Então:*

a) *O limite fraco x de (x_n) é único.*

b) *Toda a subsucessão de (x_n) converge fracamente para x.*

c) *A sucessão $(\|x_n\|)$ é limitada.*

Dem. a) Suponhamos que $x_n \rightharpoonup x$ e $x_n \rightharpoonup y$. Então $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ bem como $f(x_n) \longrightarrow f(y)$. Uma vez que $(f(x_n))$ é uma sucessão de números, seu limite é único. Daí $f(x) = f(y)$, isto é, para cada $f \in X'$ temos

$$f(x) - f(y) = f(x - y) = 0.$$

Isso implica que $x - y = 0$ e mostra que o limite fraco é único.

b) Resulta do facto de que $(f(x_n))$ é uma sucessão convergente de números, de modo que toda a subsucessão de $(f(x_n))$ converge e tem o mesmo limite que a sucessão.

c) Uma vez que $(f(x_n))$ é uma sucessão convergente de números, é limitada, digamos, se $|f(x_n)| \le c_f$ para todo o n, com c_f uma constante dependente de f, mas não de n. Usando a aplicação canónica $C : X \longrightarrow X''$, podemos definir $g_{x_n} \in X''$ por

$$g_{x_n}(f) = f(x_n), \quad f \in X'.$$

Então, para todo o n,

$$|g_{x_n}(f)| = |f(x_n)| \le c_f,$$

isto é, a sucessão $(g_{x_n}(f))$ é limitada para cada $f \in X'$. Como X' é completo, pelo Teorema 2.11.4, então o teorema da limitação uniforme (Teorema 4.4.3) é aplicável e implica que $(\|g_{x_n}\|)$ é limitada. Além disso $\|g_{x_n}\| = \|x_n\|$, pelo Lema 4.4.5, pelo que c) fica provado. ■

4.6 Exercícios

1. De que categoria é o conjunto de todos os números racionais $\mathbb{Q}$:

   a) em $\mathbb{R}$?

   b) em $\mathbb{Q}$, tomado com a métrica usual?

2. De qual categoria é o conjunto de todos os inteiros $\mathbb{Z}$:

   a) em $\mathbb{R}$?

   b) em $\mathbb{Z}$, tomado com a métrica induzida por $\mathbb{R}$?

3. Seja X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $T_n \in B(X,Y)$, $n = 1, 2, ...$, de modo que $\sup\limits_n \|Tn\| = +\infty$. Mostre que existe $x_0 \in X$ tal que $\sup\limits_n \|T_n x_0\| = +\infty$.
   Nota: O ponto x_0 é freqüentemente chamado de **ponto de ressonância**.

4. Seja X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $T_n \in B(X,Y)$, tais que $(T_n x)$ é uma sucessão de Cauchy em Y para cada $x \in X$. Mostre que $(\|T_n\|)$ está limitado.

5. Para ilustrar que uma série de Fourier de uma função x pode convergir mesmo num ponto em que x é descontínuo:

   a) Escreva a série de Fourier de

   $$x(t) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq t < \pi \end{cases} \quad \text{e } x(t+2\pi) = x(t);$$

   b) Faça a representação gráfica de x;

   c) Clacule as somas parciais s_0, s_1, s_2 e s_3;

   d) Mostre que em $t = \pm\, n\pi$ a série tem o valor $1/2$, que é a média aritmética dos limites direito e esquerdo de x.

6. Seja X o conjunto de todas as funções de valor real x no intervalo $[0, 1]$, $x \leq y$ a y significar que $x(t) \leq y(t)$ para todo $t \in [0, 1]$. Mostre que a relação define uma ordem parcial. É uma ordem total? O X tem elementos maximaix ?

7. Mostre que o conjunto de todos os números complexos $z = x + iy$, $w = u + iv$, ... pode ser parcialmente ordenado definindo $z \leq w$ a significar $x \leq u$ e $y \leq v$, em que para números reais, $\leq$ tem o seu significado usual.

8. Uma **seminorma** num espaço vectorial X é uma aplicação $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (N1), (N3), (N4).
   Mostre que:

   a) $p(0) = 0$, $|p(y) - p(x)| \leq p(y - x)$; (Portanto, se $p(x) = 0$ implica $x = 0$, então p é uma norma)

b) as condições (4.3.1) e (4.3.2) implicam $p(0) = 0$ e $p(x) \geq 0$, pelo que é uma seminorma.

9. Prove que (4.3.1) e (4.3.2) implicam

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y).$$

10. Se $f(x) = f(y)$ para cada funcional linear limitado num espaço normado X, mostre que $x = y$.

Capítulo 5

Teoria do ponto fixo de Banach e aplicações

O teorema do ponto fixo de Banach é importante para obter resultados de existência e unicidade em diferentes ramos de análise.

O teorema ilustra o poder dos métodos analíticos funcionais e a utilidade dos teoremas de ponto fixo em Análise.

5.1 Teorema de Ponto Fixo de Banach

Um **ponto fixo** de uma aplicação $T : X \longrightarrow X$ de um conjunto X em si próprio é um ponto $x \in X$, que é aplicado em si próprio (que se mantém invariante por T), isto é,

$$Tx = x,$$

ou seja a imagem Tx coincide com x.

Alguns exemplos:

- uma translação não tem pontos fixos;
- uma rotação no plano tem um único ponto fixo (o centro de rotação);
- a aplicação $x \longmapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ em si próprio tem dois pontos fixos (0 e 1);
- a projeção $(\xi_1, \xi_2) \longmapsto \xi_1$ de $\mathbb{R}^2$ no eixo ξ_1 tem infinitos pontos fixos (todos os pontos do eixo ξ_1).

O teorema do ponto fixo de Banach a ser indicado abaixo é um teorema de existência e unicidade de pontos fixos de determinadas aplicações. Por outro lado também oferece um procedimento construtivo para obter boas aproximações ao ponto fixo (a solução do problema prático).

Este procedimento designa-se por **iteração**. Por definição, é um método em que escolhemos um x_0 arbitrário num determinado conjunto e calculamos recursivamente uma sucessão $x_0, x_1, x_2, ...$ de uma relação da forma

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Isto é, escolhemos x_0 arbitrário e determinamos sucessivamente $x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1$,... .

O teorema de Banach dá condições suficientes para a existência (e unicidade) de um ponto fixo para uma classe de aplicações chamadas **contracções**.

Definição 5.1.1 *Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Uma aplicação $T : X \longrightarrow X$ diz-se uma **contracção** em X se existir um número real positivo $\alpha < 1$ tal que para $x, y \in X$,*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha \; d(x, y). \tag{5.1.1}$$

Geometricamente, isso significa que quaisquer pontos x e y têm imagens que estão mais próximas entre si do que os pontos x e y. Ou, de outra forma, a relação $d(Tx, Ty)/d(x, y)$ não excede uma constante α que é estritamente menos que 1.

Por este motivo o **Teorema de Ponto Fixo de Banach** também é designado por **Teorema de Contracção** :

Teorema 5.1.2 *Considere um espaço métrico $X = (X, d)$, onde $X \neq \varnothing$. Suponha-se que X é completo e $T : X \longrightarrow X$ é uma contracção em X. Então T tem precisamente um ponto fixo.*

Dem. A estratégia passa pela construção de uma sucessão de Cauchy (x_n), logo convergente, no espaço completo X, provamos que o limite x é um ponto fixo de T e que T não tem mais pontos fixos.

Escolha-se $x_0 \in X$ e definimos uma sucessão por recorrência (x_n) por

$$x_0, \; x_1 = Tx_0, \; x_2 = Tx_1 = T^2x_0, ..., x_n = T^n x_0, ... \tag{5.1.2}$$

Provemos que (x_n) é uma sucessão de Cauch.

Por (5.1.1) e (5.1.2),

$$\begin{aligned} d\left(x_{m+1}, x_m\right) &= d\left(Tx_m, Tx_{m-1}\right) \leq \alpha d\left(x_m, x_{m-1}\right) \\ &= \alpha d\left(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}\right) \leq \alpha^2 d\left(x_{m-1}, x_{m-2}\right) \\ &\quad \cdots \\ &\leq \alpha^n d\left(x_1, x_0\right). \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular e pela fórmula para a soma de uma progressão geométrica, obtemos para $n > m$,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \left(\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}\right) d\left(x_0, x_1\right) \\ &= \alpha^m \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} d\left(x_0, x_1\right). \end{aligned}$$

Uma vez que $0 < \alpha < 1$, no numerador, temos $1 - \alpha^{n-m} < 1$. Consequentemente,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d\left(x_0, x_1\right), \quad n > m. \tag{5.1.3}$$

Como $0 < \alpha < 1$ e $d\left(x_0, x_1\right)$ é fixo, podemos fazer o lado direito tão pequeno quanto quisermos tomando m suficientemente grande (e $n > m$). Isto prova que (x_m) é uma sucessão de Cauchy.

Como X é completo, (x_m) converge para, digamos, $x_m \longrightarrow x$.

Mostremos que esse limite x é um ponto fixo da aplicação T.

Da desigualdade triangular e de (5.1.1) temos

$$\begin{aligned} d\left(x, Tx\right) &\leq d\left(x, x_m\right) + d\left(x_m, Tx\right) \\ &\leq d\left(x, x_m\right) + \alpha\ d\left(x_{m-1}, x\right) \end{aligned}$$

e podemos considerar a segunda linha tão pequena quanto se queira, por exemplo, mais pequena que $\varepsilon > 0$ porque $x_m \longrightarrow x$.

Concluímos assim, que $d(x, Tx) = 0$, pelo que $x = Tx$, por (M2). Isto é, x é um ponto fixo de T.

Este x é o único ponto fixo de T porque, se houvesse dois, x e $\widetilde{x}$, de $Tx = x$ e $T\widetilde{x} = \widetilde{x}$, obtinhamos, por (5.1.1)

$$d\left(x, \widetilde{x}\right) = d\left(Tx, T\widetilde{x}\right) \leq \alpha d\left(x, \widetilde{x}\right),$$

o que implica $d(x, \widetilde{x}) = 0$, pois $\alpha < 1$.

Então $x = \widetilde{x}$ por (M2), concluindo-se a demonstração. ■

Esta iteração permite ainda obter majorações para o erro da aproximação:

Corolário 5.1.3 *Nas condições do Teorema 5.1.2 a sucessão iterativa (5.1.2) com $x_0 \in X$ arbitrário converge para o único ponto fixo x de T. O majorante do erro é dado pelas estimações a priori*

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \tag{5.1.4}$$

e a posteriori

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m) . \tag{5.1.5}$$

Dem. A primeira afirmação é óbvia a partir da prova anterior.

A desigualdade (5.1.4) segue de (5.1.3) fazendo $n \to +\infty$.

Para obter a expressão (5.1.5), considere-se $m = 1$ e escreva-se y_0 para x_0 e y_1 para x_1. Então, por (5.1.4),

$$d(y_1, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(y_0, y_1) .$$

Definindo $y_0 = x_{m-1}$, temos $y_1 = Ty_0 = x_m$ e obtemos (5.1.5). ■

A limitação para o erro dada por (5.1.4) pode ser usada para estimar o número de etapas necessárias para obter uma determinada precisão dada.

Frequentemente acontece que uma aplicação T é uma contracção, mas não em todo o espaço X, apenas num subconjunto de $Y \subset X$. Um resultado típico e útil desta situação é o seguinte:

Teorema 5.1.4 *Seja T uma aplicação de um espaço métrico completo $X = (X, d)$ em si próprio. Suponha-se que T é uma contracção numa bola fechada $Y = \{x : d(x, x_0) \leq r\}$, isto é, T satisfaz (5.1.4) para $x, y \in Y$.*
Além disso, assuma-se que

$$d(x_0, Tx_0) < (1-\alpha)r. \tag{5.1.6}$$

Então, a sucessão iterativa (5.1.2) converge para um $x \in Y$. Este x é um ponto fixo de T e é o único ponto fixo de T em Y.

Dem. Simplesmente temos que mostrar que todos os x_m e x estão em Y.

Coloquemos $m = 0$ em (5.1.3), alterando n para m, e usemos (5.1.6) para obter

$$d(x_0, x_m) \leq \frac{1}{1-\alpha} d\left(x_0, x_1\right) < r.$$

Portanto, todos os x_m estão em Y. Também $x \in Y$ pois $x_m \to x$ e Y é fechado.

A afirmação do teorema, agora, decorre da prova do Teorema 5.1.2. ∎

Pode ainda facilmente provar-se que:

Lema 5.1.5 *Uma contracção T num espaço métrico X é uma aplicação contínua.*

5.2 Aplicações do Teorema de Banach a Equações Diferenciais

As aplicações mais interessantes do Teorema do Ponto Fixo de Banach surgem em espaços de funções, uma vez que o teorema fornece a existência e unicidade de equações diferenciais e integrais.

Nesta secção consideramos uma equação diferencial ordinária explícita de primeira ordem

$$x'(t) = f(t, x). \tag{5.2.1}$$

Um problema de valor inicial para equação equação é formado pela equação e por uma condição inicial

$$x(t_0) = x_0, \tag{5.2.2}$$

com t_0 e x_0 números reais dados.

Em primeiro lugar usamos o teorema de Banach para provar o **Teorema da Existência e Unicidade de Picard** (Charles Émile Picard (1856 - 1941)), que tem um papel importante na teoria das equações diferenciais ordinárias.

A abordagem é bastante simples: o problema (5.2.1), (5.2.2) é convertido numa equação integral, que define uma aplicação T. As condições do teorema irão implicar que T é uma contracção de modo que o seu ponto fixo seja solução do nosso problema.

Teorema 5.2.1 *Seja f uma função contínua num rectângulo*

$$R = \{(t,x) : |t - t_0| \leq a, \ \ |x - x_0| \leq b\}$$

e, portanto, limitada em R, isto é,

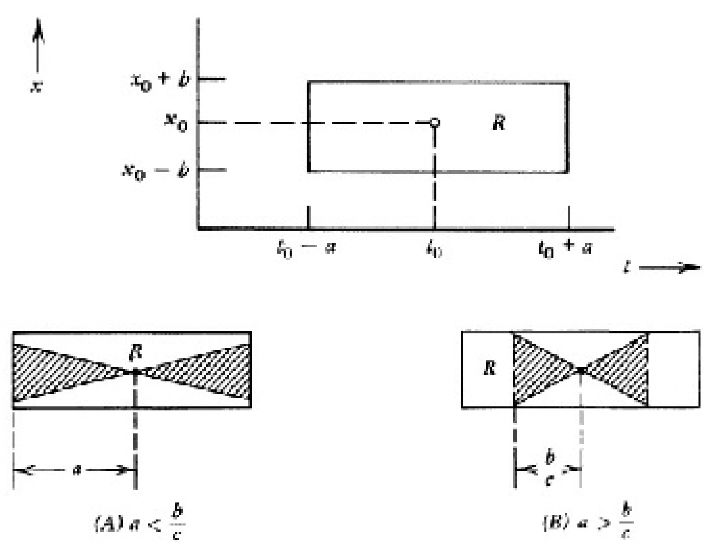
$$|f(t,x)| \leq c, \ \ \forall (t,x) \in R, \ c > 0. \tag{5.2.3}$$

*Suponha que f satisfaz uma **condição de Lipschitz** em R em relação a segundo argumento, isto é, existe uma constante k (**constante de Lipschitz**) que para $(t,x), (t,v) \in R$,*

$$|f(t,x) - f(t,v)| \leq k\,|x - v|\,. \tag{5.2.4}$$

Então, o problema do valor inicial (5.2.1), (5.2.2) tem uma única solução. Esta solução existe num intervalo $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, com

$$\beta < \min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}. \tag{5.2.5}$$



Dem. Seja $C(J)$ o espaço métrico de todas as funções contínuas de valor real no intervalo $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ com a métrica d definida por

$$d(x,y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|\,.$$

$C(J)$ é completo. Seja $\widetilde{C}$ o subespaço de $C(J)$ de todas as funções $x \in C(J)$ que satisfaçam

$$|x(t) - x_0| \leq c\beta.$$

$\widetilde{C}$ é fechado em $C(J)$, de modo que $\widetilde{C}$ é completo, pelo Teorema 1.4.8.

Por integração, vemos que (5.2.1), (5.2.2) pode ser escrito como $x = Tx$, com $T : \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{C}$ é definido por

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau. \tag{5.2.6}$$

Na verdade, T é definido para todo $x \in \widetilde{C}$, porque $c\beta < b$ por (5.2.5), de modo que se $x \in \widetilde{C}$, então $\tau \in J$ e $(\tau, x(\tau)) \in R$, e o integral em (5.2.6) existe uma vez que f é contínua em R. Para ver que T aplica $\widetilde{C}$ em si próprio, podemos usar (5.2.6) e (5.2.3), obtendo

$$|Tx(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \right| \leq c\,|t - t_0| \leq c\beta.$$

Mostremos de seguida, que T é uma contracção em $\widetilde{C}$. Pela condição de Lipschitz (5.2.4),

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Tv(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \left[f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, v(\tau)) \right]\, d\tau \right| \\ &\leq |t - t_0| \max_{\tau \in J} k\, |x(\tau) - y(\tau)| \\ &\leq k\beta d\,(x, v)\,. \end{aligned}$$

Como a última expressão não depende de t, podemos tomar o máximo à esquerda e ter

$$d\,(Tx, Tv) \leq \alpha\ d\,(x, v)\,,\ \text{com } \alpha = k\beta.$$

De (5.2.5) vemos que $\alpha = k\beta < 1$, de modo que T é realmente uma contracção em $\widetilde{C}$. O Teorema 5.1.2 implica, que T possui um único ponto fixo $x \in \widetilde{C}$, isto é, uma função contínua x em J que satisfaz $x = Tx$. Escrevendo $x = Tx$ para fora, temos por (5.2.6),

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau. \tag{5.2.7}$$

Como $(\tau, x(\tau)) \in R$ onde f é contínuo, (5.2.7) pode ser diferenciado. Assim, x é mesmo diferenciável e satisfaz (5.2.6) e (5.2.3). Por outro lado, toda a solução de (5.2.6) e (5.2.3) deve satisfazer (5.2.7). ■

O Teorema de Banach também implica que a solução x do problema de valor inicial (5.2.1), (5.2.2) é o limite da sucessão $(x_0, x_1, ...)$ obtida pela **iteração de Picard**

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau))\, d\tau$$

onde $n = 0, 1, ...$ No entanto, a utilidade prática desta maneira de obter aproximações à solução de (5.2.1), (5.2.2) é bastante limitada devido às integrações envolvidas.

Considera-se como ponto de partida uma função contínua $x_0(t)$, frequentemente $x_0(t) \equiv x_0$, que constitui a "**aproximação inicial**" à solução de (5.2.1).

No passo seguinte, define-se

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau))\, d\tau$$

e a terceira aproximação como

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_1(\tau))\, d\tau$$

Iterando este processo otem-se a $(n+2)$-ésima aproximação como

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau))\, d\tau, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{5.2.8}$$

A sucessão $(x_n(t))$ converge uniformemente para uma função contínua $x(t)$ num intervalo I que contenha t_0 e $(t, x_n(t)) \in D$, para todo o $t \in I$. Passando ao limite nos dois membros de (5.2.8), obtem-se

$$x(t) = \lim x_{n+1}(t) = x_0 + \lim \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau))\, d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau,$$

pelo que $x(t)$ é a solução pretendida.

Exemplo 5.2.2 *O problema de valor inicial*

$$x' = -x, \quad x(0) = 1,$$

é equivalente à equação integral

$$x(t) = 1 - \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

Considerando $x_0(t) \equiv 1$ *então*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 - \int_0^t 1 d\tau = 1 - t \\ x_2(t) &= 1 - \int_0^t (1-\tau)\, d\tau = 1 - t + \frac{t^2}{2} \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

Recordando os desenvolvimentos em série de Taylor tem-se $\lim x_n(t) = e^{-t}$. *De facto* $x(t) = e^{-t}$ *é solução do problema inicial para* $I = \mathbb{R}$.

5.3 Aplicações do Teorema de Banach a Equações Integrais

Consideremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach para garantir teoremas de existência e unicidade para equações integrais.

Uma equação integral da forma

$$x(t) - \mu \int_a^b k\,(t, \tau)\ \ x\,(\tau)\ \ d\tau = v(t) \tag{5.3.1}$$

diz-se uma **equação de Fredholm de segunda espécie**, em que:

- $[a, b]$ é um intervalo dado;
- x é uma função em $[a, b]$ que é desconhecida;
- μ é um parâmetro;

- A função núcleo k da equação é uma função dada no quadrado $G = [a, b] \times [a, b]$;
- v é uma função dada em $[a, b]$.

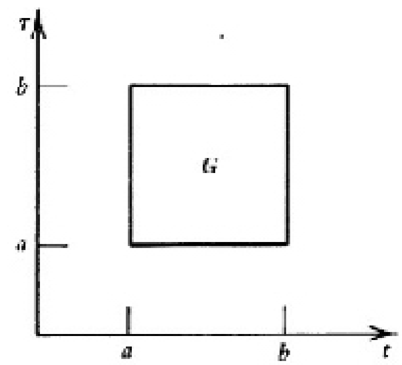
A presença do termo $x(t)$ permite aplicar a iteração dada na secção anterior. Uma equação sem esse termo, isto é, da forma

$$\int_a^b k(t, \tau)\ x(\tau)\ d\tau = v(t),$$

chama-se **equação de Fredholm de primeira espécie**.

As equações integrais podem ser consideradas em vários espaços de funções. Nesta seção, consideramos (5.3.1) no espaço completo $C[a, b]$, o espaço de todas as funções contínuas definidas no intervalo $J = [a, b]$ com métrica d dada por

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|. \tag{5.3.2}$$



Considere-se $v \in C[a, b]$ e k contínuo em G. Então k é uma função limitada em G, digamos,

$$|k(t, \tau)| \leq c, \quad \forall (t, \tau) \in G. \tag{5.3.3}$$

O problema (5.2.1), (5.2.2) pode ser escrito na forma $x = Tx$ com

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau)\ x(\tau)\ d\tau. \tag{5.3.4}$$

Como v e k são contínuos, a igualdade (5.3.4) define um operador $T : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$.

Para garantir que T é uma contracção, torna-se necessário impo uma restrição a μ. Pelas relações de (5.3.2) a (5.3.4) temos

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max_{t \in J} |Tx(t) - Ty(t)| \\ &= |\mu| \max_{t \in J} \left| \int_a^b k(t,\tau) \;\; [x(\tau) - y(\tau)] \;\, d\tau \right| \\ &\leq |\mu| \, c \max_{\sigma \in J} |x(\sigma) - y(\sigma)| \int_a^b \; d\tau \\ &\leq |\mu| \;\, c \; d(x,y) \;\, (b-a) \, . \end{aligned}$$

Esta expressão pode ser escrita $d(Tx, Ty) \leq \alpha \; d(x,y)$, sendo

$$\alpha = |\mu| \;\, c \;\, (b-a) \, .$$

Então T é uma contracção ($\alpha < 1$) se

$$|\mu| < \frac{1}{c \;\, (b-a)}. \tag{5.3.5}$$

O processo iterativo descrito na secção anterior pode, agora, ser resumido no seguinte **Teorema de Fredholm para equações integrais**:

Teorema 5.3.1 *Assuma-se que k e v em (5.3.1) são funções contínuas em $J \times J$ e em $J = [a,b]$, respectivamente, e que μ satisfaz (5.3.5) com c definido em (5.3.3). Então (5.3.1) tem uma solução única x em J.*
Esta função x é o limite da sucessão recorrente $(x_0, x_1, ...)$, onde x_0 é qualquer função contínua em J e para $n = 0, 1, ...$,

$$x_{n+1}(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t,\tau) \;\; x_n(\tau) \;\; d\tau. \tag{5.3.6}$$

As equações integrais de Fredholm serão discutidas mais à frente. De momento, dediquemo-nos à **equação integral de Volterra**

$$x(t) - \mu \int_a^t k(t,\tau) \;\; x(\tau) \;\; d\tau = v(t) \tag{5.3.7}$$

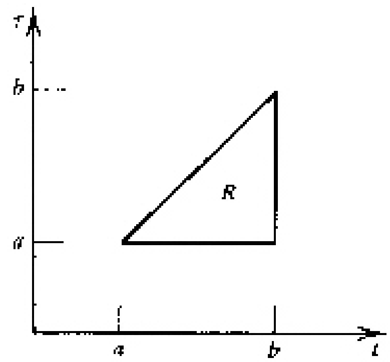
A diferença entre (5.3.1) e (5.3.7) reside no limite superior do integral: no primeiro integral b é constante, enquanto que no segundo é variável. Isto é

essencial. Na verdade, sem qualquer restrição em μ, temos o **Teorema de Volterra, de existência e unicidade para equações integrais**:

Teorema 5.3.2 *Considere-se que* v *em (5.3.7) é contínuo em* $[a,b]$ *e a função núcleo* k *é contínua na região triangular* R *no plano* $tO\tau$ *dada por* $a \leq \tau \leq t$, $a \leq t \leq b$. *Então (5.3.7) tem uma única solução* x *em* $[a,b]$ *para todo o* μ.

Dem. A equação (5.3.7) pode ser escrita como $x = Tx$ com $T : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$ definido por

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau) \; x(\tau) \; d\tau. \tag{5.3.8}$$



Como k é contínuo em R, que é fechado e limitado, então k é uma função limitada em R, por exemplo,

$$|k(t,\tau)| \leq c, \quad \forall (t,\tau) \in R.$$

Usando (5.3.2), obtemos para todo $x, y \in C[a,b]$,

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t k(t,\tau) \; [x(\tau) - y(\tau)] \; d\tau \right| \\ &\leq |\mu| \; c \; d(x,y) \int_a^t d\tau \\ &= |\mu| \; c \; d(x,y) \; (t-a). \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

Mostremos por indução que

$$|T^m x(t) - T^m y(t)| \leq |\mu|^m \; c^m \; d(x,y) \; \frac{(t-a)^m}{m!}. \tag{5.3.10}$$

Para $m = 1$,a igualdade é verdadeira, por (5.3.9).

Supondo, por hipótese de indução, que (5.3.10) é válida para qualquer m, obtemos, por (5.3.8),

$$\begin{aligned} \left|T^{m+1}x(t) - T^{m+1}y(t)\right| &= |\mu| \left| \int_a^t k(t,\tau) \ \left[T^m x(\tau) - T^m y(\tau)\right] \ d\tau \right| \\ &\leq |\mu| \ c \ d(x,y) \int_a^t |\mu|^m \ c^m \ \frac{(\tau - a)^m}{m!} \ d\tau \\ &= |\mu|^{m+1} \ c^{m+1} d(x,y) \frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!}, \end{aligned}$$

o que completa a prova da indução.

Fazendo $t-a \leq b-a$ no segundo membro de (5.3.10) e tomando o máximo sobre $t \in J$ à esquerda, obtemos

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha_m \ d(x,y),$$

onde

$$\alpha_m = |\mu|^m \ c^m \ \frac{(b-a)^m}{m!}.$$

Para qualquer μ fixo e suficientemente grande, temos $\alpha_m < 1$. Pelo que o T^m correspondente é uma contracção em $C[a,b]$ e a afirmação do Teorema resulta do seguinte Lema de ponto fixo: ■

Lema 5.3.3 *Seja $T : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua num espaço métrico completo $X = (X,d)$, e suponha que T^m é uma contracção em X para algum número inteiro positivo m. Então, T tem um único ponto fixo.*

Dem. Por hipótese, $B = T^m$ é uma contracção em X, isto é, $d(Bx, By) \leq \alpha \ d(x,y)$ para todos os $x, y \in X$, com $\alpha < 1$. Por isso, para cada $x_0 \in X$,

$$\begin{aligned} d(B^n T x_0, B^n x_0) &\leq \alpha \ d(B^{n-1} T x_0, B^{n-1} x_0) \\ &\ \ \vdots \\ &\leq \alpha^n \ d(Tx_0, x_0) \longrightarrow 0, \quad \text{se } n \to +\infty. \end{aligned} \tag{5.3.11}$$

O Teorema de Banach 5.1.2 implica que B tem um ponto fixo único, que designamos por x, e $B^n T x_0 \longrightarrow x$. Como a aplicação T é contínua, isso implica que $B^n T x_0 = T B^n x_0 \longrightarrow Tx$. Assim, pelo Lema 1.4.3,

$$d(B^n T x_0, B^n x_0) \longrightarrow d(Tx, x).$$

de modo que $d(Tx, x) = 0$, por (5.3.11). Isso mostra que x é um ponto fixo de T.

Como cada ponto fixo de T é também um ponto fixo de B, então T não pode ter mais de um ponto fixo. ■

Note-se a equação de Volterra pode ser considerada como um caso particular da equação de Fredholm cujo núcleo k é zero na parte do quadrado $[a, b] \times [a, b]$ onde $\tau > t$, e pode não ser contínuo em pontos na diagonal $(\tau = t)$.

5.4 Exercícios

1. Considere $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ e a aplicação $T : X \longrightarrow X$ definida por
$$Tx = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$
Mostre que T é uma contracção e encontre o menor α.

2. No Teorema 5.1.2, a condição (5.1.1) não pode ser substituída por
$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$
quando $x \neq y$. Como contra exemplo, considere $X = \{x : 1 \leq x < +\infty\}$, tomado com a métrica usual da linha real, e $T : X \longrightarrow X$ definida por $x \longmapsto x + \frac{1}{x}$. Mostre que $|Tx - Ty| < |x - y|$ quando $x \neq y$, mas a aplicação não tem pontos fixos.

3. Se (X, d) é um espaço métrico, $T : X \longrightarrow X$ satisfaz $d(Tx, Ty\} < d(x, y)$ quando $x \neq y$ e T tem um ponto fixo, mostre que o ponto fixo é único.

4. Prove o Lema 5.1.5.

5. Se a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe e for contínua no rectângulo R (dado pelo Teorema 5.2.1) prove que f satisfaz a condição de Lipschitz em R, em relação ao seu segundo argumento.

6. A função dada por $f(t, x) = \sqrt{|x|}$ satisfaz a condição de Lipschitz?

7. Encontre todas as condições iniciais, de modo que o problema do valor inicial

$$tx' = 2x, \quad x(t_0) = x_0,$$

 a) não tem solução;

 b) tem mais de uma solução;

 c) tem precisamente uma solução.

8. Indique as três primeiras iterações pelo método de Picard dos seguintes problemas de valor inicial, considerando como aproximação inicial $y_0(x) \equiv x$:

 a) $y' = x^2 - y^2 - 1, \quad y(0) = 0.$

 b) $y' = x^2 + y^2, \;\; y(0) = 0.$

9. Resolva por iteração, escolhendo $x_0 = v$ a equação integral

$$x(t) - \mu \int_0^1 e^{t-\tau}\; x(\tau)\; d\tau = v(t), \quad \text{com } |\mu| < 1.$$

10. Se v e k forem funções contínuas em $[a, b]$ e $C = [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$, respectivamente, e k satisfaz em G uma condição de Lipschitz da forma

$$|k(t, \tau, u_1) - k(t, \tau, u_2)| \leq l\, |u_1 - u_2|\,,$$

 mostre que a equação integral não-linear

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t, \tau, x(\tau))\; x(\tau)\; d\tau = v(t),$$

 tem uma única solução x para qualquer μ tal que $|\mu| < \frac{1}{l\,(b-a)}$.

11. As equações integrais generalizam as equações diferenciais, como se pode ver nos exercícios seguintes:

 a) Escreva o problema de valor inicial

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

 como uma equação integral e indique que tipo de equação obteve.

b) Mostre que o problema de valor inicial envolvendo a equação diferencial de segunda ordem

$$x''(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1,$$

pode ser transformado numa equação integral de Volterra.

Capítulo 6

Operadores compactos em espaços normados

Os operadores lineares compactos são muito importantes nas aplicações. Por exemplo, eles desempenham um papel central na teoria das equações integrais e em vários problemas de física matemática.

As propriedades que satisfazem são muito semelhantes às dos operadores em espaços de dimensão finita.

A compacidade de um operador linear é a caracteristica fundamental na teoria de Fredholm.

6.1 Operadores Lineares Compactos em Espaços Normados

Os operadores lineares compactos são definidos da seguinte forma:

Definição 6.1.1 *Sejam X e Y espaços normados. Um operador $T : X \longrightarrow Y$ é um* ***operador linear compacto*** *(ou* ***operador linear completamente contínuo****) se T for linear e transformar subconjuntos limitados M de X, em relativamente compactos, isto é a imagem $T(M)$ é relativamente compacto, isto é, a aderência de $T(M)$ é um conjunto compacto (Ver Definição 2.6.1).*

Muitos operadores lineares em análise são compactos.

A teoria dos operadores lineares compactos emergiu da teoria das equações integrais da forma

$$(T - \lambda I)\, x(s) = y(s), \quad \text{com} \quad Tx(s) = \int_a^b k(s,t)x(t)dt, \tag{6.1.1}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ é um parâmetro, y e o núcleo k são funções dadas (sujeitas a certas condições), e x é a função desconhecida.

Estas equações também desempenham um papel na teoria das equações diferenciais, ordinárias e parciais.

D. Hilbert (1912) descobriu o facto surpreendente de que os resultados essenciais sobre a solvabilidade de (6.1.1) não dependem da existência da representação integral de T in (6.1.1), mas unicamente da condição de T em (6.1.1) ser um operador linear compacto.

O termo "compacto"é sugerido pela definição. O termo mais antigo "completamente contínuo"pode ser motivado pelo seguinte lema, que mostra que um operador linear compacto é contínuo, enquanto que o inverso geralmente não é verdadeiro.

Lema 6.1.2 *Sejam X e Y espaços normados. Então:*

a) *Todo operador linear compacto $T : X \longrightarrow Y$ é limitado e, portanto, contínuo.*

b) *Se $dimX = +\infty$, o operador de identidade $I : X \longrightarrow X$ (que é contínuo) não é compacto.*

Dem. **a)** A esfera unitária $U = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ é limitada. Como T é compacto, $\overline{T(U)}$ é compacto, e é limitado, pelo Lema 2.6.2, de modo que

$$\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < +\infty.$$

Portanto, T é limitado e, pelo Teorema 2.8.9, é contínuo.

b) Claro, a bola unitária fechada $M = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ é limitada. Se $dimX = +\infty$, então o Teorema 2.6.5 implica que M não pode ser compacto. Então, $I(M) = M = \overline{M}$ não é relativamente compacto. ∎

A partir da definição de compacidade de um conjunto (Definição 2.6.1), podemos obter um critério de compacidade útil para os operadores:

Teorema 6.1.3 *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então, T é compacto se, e somente se, transformar sucessões limitadas (x_n) em X em sucessões (Tx_n) em Y que admitem uma subsucessão convergente.*

Dem. Se T é compacto e (x_n) é limitada, então a aderência de (Tx_n) em Y é compacto e, pela Definição 2.6.1, (Tx_n) contém uma subsucessão convergente.

Inversamente, assuma-se que toda a sucessão limitada (x_n) contém uma subsucessão (x_{n_k}) tal que (Tx_{n_k}) converge em Y.

Considere-se um subconjunto limitado arbitrário $B \subset X$, e seja (y_n) uma sucessão qualquer em $T(B)$. Então $y_n = Tx_n$ para alguma sucessão $x_n \in B$, sendo (x_n) limitada, porque B é limitado. Por hipótese, (Tx_n) contém uma subsucessão convergente. Portanto, $\overline{T(B)}$ é compacto, pela Definição 2.6.1, porque (y_n) em $T(B)$ foi considerada de modo arbitrário. Então, por definição, T é compacto. ■

A partir deste teorema é óbvio que a soma $T_1 + T_2$ de dois operadores lineares compactos $T_j : X \longrightarrow Y$ é compacto.

Da mesma forma, αT_1 é compacto, com α um escalar qualquer. Por isso, temos o resultado seguinte:

Os operadores compactos lineares de X em Y formam um espaço vectorial.

Em dimensão finita temos algumas particularidades:

Teorema 6.1.4 *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então:*

a) *Se T é limitado e $\dim T(X) < +\infty$, o operador T é compacto.*

b) *Se $\dim X < +\infty$, o operador T é compacto.*

Dem. a) Considere-se (x_n) uma qualquer sucessão limitada em X. Em seguida, a desigualdade

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \, \|x_n\|$$

mostra que (Tx_n) é limitada. Por isso (Tx_n) é relativamente compacto, pelo Teorema 2.6.3, desde que $\dim T(X) < +\infty$. Como (Tx_n) tem uma subsucessão convergente e (x_n) é uma sucessão limitada arbitrária em X, então o operador T é compacto, pelo Teorema 6.1.3.

b) A prova segue de a) tendo em conta que $\dim X < +\infty$ implica a limitação de T, pelo Teorema 2.8.8 e $\dim T(X) \leq \dim X$ pelo Teorema 2.7.9 b). ■

Refira-se que um operador $T \in B(X, y)$ com $\dim X < +\infty$, geralmente é designado por **operador de imagem finita** ou **contradomínio finito**.

O próximo teorema estabelece condições sob as quais o limite de uma sucessão de operadores lineares compactos é compacto.

O teorema também é uma importante ferramenta para comprovar a compacidade de um determinado operador, considerando-o como o operador limite, uniforme, de uma sucessão de operadores compactos lineares.

Teorema 6.1.5 *Seja (T_n) uma sucessão de operadores lineares compactos a partir de um espaço normado X num espaço de Banach Y. Se (T_n) for uniformemente convergente para o operador T, isto é, $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$, então o operador limite T é compacto.*

Dem. Usando um "método de diagonal", mostremos que para qualquer sucessão limitada (x_m) em X, a sua imagem (Tx_m) tem uma subsucessão convergente, para depois aplicarmos o Teorema 6.1.3.

Como T_1 é compacto, (x_m) tem uma subsucessão $(x_{1,m})$ tal que $(T_1 x_{1,m})$ é uma sucessão de Cauchy.

Da mesma forma, $(x_{1,m})$ tem uma subsucessão $(x_{2,m})$ tal que $(T_2 x_{2,m})$ é uma sucessão de Cauchy.

Iterando este processo, vemos que a "sucessão diagonal" $(y_m) = (x_{m,m})$ é uma subsucessão de (x_m) tal que para cada número inteiro positivo fixo, n, a sucessão $(T_n y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy. (x_m) é limitada, digamos, $\|x_m\| \leq c$, para todos os m. Então $\|y_m\| \leq c$ para todo o m.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $T_m \longrightarrow T$, existe $n = p$ tal que $\|T - T_p\| < \frac{\varepsilon}{3c}$. Como $(T_p y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy, existe N tal que

$$\|T_p y_j - T_p y_k\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para } j, k > N.$$

Portanto, obtemos para $j, k > N$,

$$\begin{aligned}
\|Ty_j - Ty_k\| &\leq \|Ty_j - T_p y_j\| + \|T_p y_j - T_p y_k\| + \|T_p y_k - Ty_k\| \\
&\leq \|T - T_p\| \, \|y_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_p - T\| \, \|y_k\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3c} c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c} c = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isto mostra que (Ty_m) é uma sucessão de Cauchy que converge, pois Y é completo. Lembrando que (y_m) é uma subsucessão da sucessão arbitrária limitada (x_m), vemos que o Teorema 6.1.3 implica que o operador T é compacto. ■

Observe-se que o teorema anterior é falso se substituímos a convergência uniforme do operador pela convergência pontual do operador $\|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0$.

Como contra-exemplo, veja-se o caso dos operadores $T_n : l^2 \longrightarrow l^2$ definido por

$$T_n x = (\xi_1, ..., \xi_n, 0, 0, ...),$$

com $x = (\xi_j) \in l^2$. Como T_n é linear e limitado, T_n é compacto, pelo Teorema 6.1.4 a). Claramente, $T_n x \longrightarrow x = Ix$, mas I não é compacto, pois $\dim l^2 = \infty$.

O próximo exercício ilustra como o teorema pode ser usado para provar a compacidade de um operador:

Exercício 6.1.6 *Prove a compacidade de $T : l^2 \longrightarrow l^2$ definido por*

$$y = (\eta_j) = Tx, \quad \textit{com } \eta_j = \frac{\xi_j}{j} \quad \textit{para} \quad j = 1, 2, ... \ .$$

Resolução: T é linear. Se $x = (\xi_j) \in l^2$, então $y = (\eta_j) \in l^2$.

Considere-se $T_n : l^2 \longrightarrow l^2$ definido por

$$T_n x = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, ..., \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, ...).$$

T_n é linear e limitada, e é compacta pelo Teorema 6.1.4 a). Além disso,

$$\begin{aligned} \|(T - T_n)\, x\|^2 &= \sum_{j=n+1}^{+\infty} |\eta_j|^2 = \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} |\xi_j|^2 \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=n+1}^{+\infty} |\xi_j|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Aplicandp o supremo sobre todo x de norma 1, temos que

$$\|T - T_n\| \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Então $T_n \longrightarrow T$ e T é compacto, pelo Teorema 6.1.5. ■

Outra propriedade interessante e básica de um operador linear compacto é que ele se transforma sucessões fracamente convergentes em sucessões fortemente convergentes da seguinte forma:

Teorema 6.1.7 *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear compacto. Suponha que (x_n) em X é fracamente convergente, digamos, $x_n \rightharpoonup x$. Então (Tx_n) é fortemente convergente em Y e tem o limite $y = Tx$.*

Dem. Sejam $y_n = Tx_n$ e $y = Tx$. Primeiro mostremos que

$$y_n \rightharpoonup y \tag{6.1.2}$$

e, depois, que

$$y_n \longrightarrow y. \tag{6.1.3}$$

Seja g um qualquer funcional linear limitado em Y. Defina-se um funcional f em X, por

$$f(z) = g(Tz), \quad z \in X.$$

O funcional f é linear elimitado porque T é compacto, e, portanto, limitado, e

$$|f(z)| = |g(Tz)| \leq \|g\| \, \|Tz\| \leq \|g\| \, \|T\| \, \|z\| \, .$$

Por definição, $x_n \rightharpoonup x$ implica $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, pelo que, $g(Tx_n) \longrightarrow g(Tx)$, isto é, $g(y_n) \longrightarrow g(y)$. Como g é arbitrário, isto prova (6.1.2).

A condição (6.1.3) será provada por contradição.

Suponha-se que (6.1.3) não se verifica. Então (y_n) tem uma subsucessão (y_{n_k}) tal que

$$\|y_{n_k} - y\| \geq \eta, \tag{6.1.4}$$

para $\eta > 0$. Uma vez que (x_n) é fracamente convergente, (x_n) é limitada, pelo Lema 4.5.3 c), pelo que x_{n_k} também é limitada. A compacidade de T agora implica, pelo Teorema 6.1.3, que (Tx_{n_k}) tem uma subsucessão convergente, designada por $(\widetilde{y}_l)$ e considere-se $\widetilde{y}_l \longrightarrow \widetilde{y}$. Assim, $\widetilde{y}_l \rightharpoonup \widetilde{y}$, pelo que $\widetilde{y} = y$ por (6.1.2) e pelo Lema 4.5.3 b). Consequentemente,

$$\|\widetilde{y}_l - y\| \longrightarrow 0.$$

Mas $\|\widetilde{y}_l - y\| \geq \eta > 0$, por (6.1.4). Esta contradição garante que (6.1.3) é verdadeira. ■

6.2 Aplicação de operadores compactos não lineares a problemas de valores na fronteira

No Capítulo 5 vimos como se poderia aplicar a Teoria do Ponto Fixo a equações diferenciais e integrais, e como estas últimas generalizam as equações diferenciais.

A teoria de existência e unicidade para os problemas com valores na fronteira apresenta mais dificuldades que os problemas de valor inicial, pois uma pequena alteração nas condições de fronteira pode provocar modificações significativas nas soluções.

Por exemplo, o problema de valor inicial

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = k_1, \quad y'(0) = k_2$$

tem uma única solução, $y(x) = k_1 \cos x + k_2 \operatorname{sen} x$, para quaisquer k_1, k_2 reais. Contudo o problema com valores na fronteira

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = \epsilon(\neq 0)$$

não tem solução; o problema

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\beta) = \epsilon, \quad 0 < \beta < \pi,$$

tem uma única solução, $y(x) = \frac{\epsilon \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \beta}$; o problema

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0,$$

tem uma infinidade de soluções, $y(x) = c \operatorname{sen} x$, com c uma constante arbitrária.

Recordemos que numa equação integral do tipo

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t, \tau) \; x(\tau) \; d\tau = v(t),$$

a função núcleo k é uma função dada no quadrado $G = [a, b] \times [a, b]$. Uma forma de as calcular é através das Funções de Green. A utilidade destas funções reside no facto de que a função do Green é independente da parte não homogénea na equação diferencial. Assim, uma vez que a função do Green é determinada, a solução do problema de valor na fronteira para qualquer termo não homogéneo $f(x)$ é obtido por uma única integração.

Note ainda que nenhuma determinação de constantes arbitrárias é necessária, uma vez que a solução $y(x)$, dada na forma integral da função Green satisfaz as condições de fronteira.

Ilustremos, através de um exercício um processo para calcular as Funções de Green, via método da variação dos parâmetros:

Exercício 6.2.1 *Considere o problema de valor na fronteira composto pela equação diferencial*

$$-y''(x) = f(x), \tag{6.2.1}$$

sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua, e as condições de fronteira*

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{6.2.2}$$

a) *Mostre pelo método de variação de parâmetros que a solução geral de (6.2.1) pode ser escrita na forma*

$$y(x) = c_1 + c_2 x - \int_0^x (x-s) f(s) ds$$

com c_1 *e* c_2 *são constantes arbitrárias.*

b) *Para que* $y(x)$ *seja solução do problema (6.2.1)-(6.2.2) é necessário ter*

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \int_0^1 (1-s) f(s) ds.$$

c) *Mostre que a solução do problema (6.2.1)-(6.2.2),* $y(x)$*, pode ser escrita na forma*

$$y(x) = \int_0^x s(1-x) f(s) ds + \int_x^1 x(1-s) f(s) ds.$$

d) *Prove que a solução tem a forma*

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s) f(s) ds,$$

definindo

$$G(x,s) = \begin{cases} s(1-x) & , \quad 0 \le s \le x \\ x(1-s) & , \quad x \le s \le 1. \end{cases}$$

Considere-se o problema de segunda ordem com condições de fronteira mistas

$$\begin{cases} u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) \\ u(a) = A, \ u'(b) = B, \end{cases} \tag{6.2.3}$$

com $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $a, b, A, B \in \mathbb{R}$ com $a < b$.

Consideremos o espaço $X := C^1([a,b])$ munido da norma

$$\|w\| := \max_{x \in [a,b]} |w(x)| .$$

Lema 6.2.2 *Uma função $u \in X$ é uma solução do problema (6.2.3) se, e só se,*

$$u(x) = A + B(x-a) + \int_a^b G(s,x) \ f(s, u(s), u'(s)) \ ds,$$

com $G(s,x)$ dada por

$$G(s,x) = \begin{cases} a-s, & a \le x \le s \le b, \\ a-x, & a \le s \le x \le b. \end{cases} \tag{6.2.4}$$

A demonstração do Lema anterior deixa-se como exercício.

Um teorema de ponto fixo muito útil em espaços de dimensão infinita é o Teorema do ponto Fixo de Schauder, cuja demonstração utiliza conceitos não abordados neste curso mas poderá ser encontrada, por exemplo, em [4] ou em [3] :

Teorema 6.2.3 *Considere-se Y um subconjunto não vazio, fechado, limitado e convexo de um espaço de Banach X, e suponha que $P : Y \to Y$ é um operador compacto. Então P tem pelo menos um ponto fixo em Y.*

A compacidade do operador pode ser obtida por aplicação do seguinte teorema :

Teorema 6.2.4 *(**Teorema de Arzèla-Ascoli**) Considere uma sucessão de funções contínuas $f_n(x)$, definidas num intervalo fechado $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Se essa sucessão é uniformemente limitada, isto é,*

$$\exists k > 0 : |f_n(x)| \leq k, \ \forall x \in [a,b], \ \forall n \in \mathbb{N},$$

e equicontínua, ou seja, para cada $\varepsilon > 0$ e cada $x \in [a,b]$, existe um $\delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então existe uma subsucessão que converge uniformemente.

Se combinarmos com o Teorema 6.1.3 pode-se enunciar uma versão diferente do Teorema de Arzèla-Ascoli:

Teorema 6.2.5 *(**Teorema de Arzèla-Ascoli**) Num espaço normado X, munido com a norma do máximo, um operador contínuo T é compacto se, e só se, T é uniformemente limitado e equicontínuo em X.*

Mais à frente, utilizar-se-á a Regra de Leibniz para a derivação de integrais paramétricos:

Regra de Leibniz: Suponhamos que $f(s,x)$ é uma função contínua, e com derivada contínua $\frac{\partial f}{\partial x}$ num domínio que contém o rectângulo $a \leq s \leq b$ e $x_1 \leq x \leq x_2$.

Então, para $x_1 \leq x \leq x_2$ temos

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(s,x)ds = \int_a^b \frac{d}{dx} f(s,x)ds.$$

Assim pode enunciar-se a seguinte versão do Teorema Fundamental do Cálculo Integral:

Teorema 6.2.6 *Se $f(s,x)$ verifica as condições da Regra de Leibniz e $a(x)$ e $b(x)$ estão definidas e têm derivadas contínuas para $x_1 \leq x \leq x_2$, então, para $x_1 \leq x \leq x_2$,*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(s,x)ds &= f\left[b(x),x\right] b'(x) - f\left[a(x),x\right] a'(x) \\ &\quad + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{d}{dx} f(s,x)ds. \end{aligned}$$

6.2.1 Operadores compactos definidos em intervalos compactos

A existência de solução para o problema (6.2.3) é garantida pelo seguinte teorema,

Teorema 6.2.7 *Seja $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe, pelo menos uma, função $u \in X$ solução de (6.2.3).*

Dem. Defina-se o operador $T : X \to X$ dado por

$$Tu\,(x) = A + B\,(x-a) + \int_a^b G(s,x)\ f(s,u(s),u'(s))\ ds, \tag{6.2.5}$$

onde $G(x,s)$ é dada por (6.2.4).

Pelo Lema 6.2.2 é óbvio que os pontos fixos de T são soluções de (6.2.3), pelo que bastará provar que T tem um ponto fixo.

Por uma questão pedagógica divide-se a demonstração em vários passos:

Passo 1: *T está bem definido e é contínuo em X.*

Como $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $Tu \in C^1([a,b])$, pois Tu é contínuo e

$$(Tu)'(x) = B - \int_a^x f(s,u(s),u'(s))\ ds.$$

Passo 2: *TB é uniformemente limitado em $B \subseteq X$.*

Seja B um subconjunto limitado de X. Como f é uma função contínua, existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tal que para $\|u\| < \alpha$ se tem

$$|f(x,u(x),u'(x)| \leq \beta_\alpha,\ \forall x \in [a,b].$$

Para $u \in B$, defina-se

$$M(s) := \max_{x\in[a,b]} |G(s,x)|\,. \tag{6.2.6}$$

Assim, definindo

$$k := \max\left\{ |A| + |B|\,(b-a) + \int_a^b M(s)\ \beta_\alpha\ ds, |B| + \beta_\alpha\,(b-a) \right\}, \tag{6.2.7}$$

temos

$$\begin{aligned}\|Tu(x)\| &\leq \max_{x\in[a,b]}\left(|A|+|B||x-a|+\int_a^b |G(s,x)|\ |f(s,u(s),u'(s)|\ ds\right)\\ &\leq |A|+|B|\,(b-a)+\int_a^b M(s)\ \beta_\alpha\ ds \leq k\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\,(Tu)'\,(x)\| &\leq \max_{x\in[a,b]}\left(|B|+\int_a^x |f(s,u(s),u'(s)|\ ds\right)\\ &\leq |B|+\int_a^x \beta_\alpha\ ds \leq |B|+\beta_\alpha\,(b-a)\leq k,\end{aligned}$$

pelo que TB *é uniformemente limitado em* $B\subseteq X$.

Passo 3: T *é equicontínuo em* X.

Considerem-se $x_1,x_2\in[a,b]$ tal que $x_1\leq x_2$.
Pela continuidade de G, obtem-se

$$\begin{aligned}&|Tu(x_1)-Tu(x_2)|\\ =\ &\left|B(x_1-x_2)+\int_a^b [G(s,x_1)-G(s,x_2)]\,f(s,u(s),u'(s)ds\right|\\ \rightarrow\ &0 \text{ uniformemente, quando } x_1\longrightarrow x_2,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}&\left|(Tu)'\,(x_1)-(Tu)'\,(x_2)\right|\\ =\ &\left|\int_a^{x_1} f(s,u(s),u'(s)ds-\int_a^{x_2} f(s,u(s),u'(s)ds\right|\\ =\ &\left|\int_{x_1}^{x_2} f(s,u(s),u'(s)ds\right|\leq\int_{x_1}^{x_2}\ ds=\beta_\alpha\,(x_1-x_2)\\ \rightarrow\ &0 \text{ uniformemente, quando } x_1\longrightarrow x_2.\end{aligned}$$

Então pelo Teorema 6.2.5 o operador $T\,:\,X\,\rightarrow X$ é compacto.

Passo 4: $T:X\rightarrow X$ *tem um ponto fixo.*

Para aplicarmos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder (Teorema 6.2.3) para o operador T, é necessário provar que $TD\subset D$, para um certo conjunto $D\subset X$, fechado, limitado e convexo.

Considere-se a bola

$$D := \{u \in X : \|u\| \leq k\},$$

com $k > 0$ dado por (6.2.7).

Seguindo o mesmo tipo de desigualdades do Passo 2 temos que

$$\|Tu\| = \max\left\{\|Tu\|, \left\|(Tu)'\right\|\right\} \leq k,$$

pelo que $TD \subset D$.

Pelo Teorema 6.2.3, o operador T, dado por (6.2.5) tem um ponto fixo u_0. Então, pelo Teorema 6.2.7, o problema (6.2.3) tem pelo menos uma solução $u_0 \in X$. ■

6.2.2 Operadores compactos definidos em intervalos não compactos

Muitos problemas têm o seu domínio de definição em domínios não compactos, basta pensar, por exemplo, num problema que lide com uma variação de tempo infinito, para o futuro, ou para o passado.

Se o inervalo onde a variável independente está definida for não compacto, o Teorema de Arzèla-Ascoli não se pode aplicar, pelo que os argumentos da secção anterior não são válidos.

Necessitamos de outro tipo de conceitos para garantir a compacidade do operador e, assim, aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

Considere-se, então, o problema não linear de segunda ordem definido num domínio não compacto, composro pela equação diferencial

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \ t \in [0, +\infty[\,, \tag{6.2.8}$$

com $f : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função L^1-Carathéodory, e as condições de fronteira

$$u(0) = A, \ u'(+\infty) = B, \tag{6.2.9}$$

com $A, B \in \mathbb{R}$, e

$$u'(+\infty) := \lim_{t \to +\infty} u'(t).$$

O espaço a definir deve incluir por um lado condições assimptóticas e por lado normas ponderadas que possam conduzir a uma limitação no infinito.

Nesse sentido considere-se o espaço

$$X = \left\{ \; x : x \in C^1([0,+\infty[) : \lim_{t\to+\infty} \tfrac{|x(t)|}{1+t} \in \mathbb{R}, \lim_{t\to+\infty} |x'(t)| \in \mathbb{R} \; \right\},$$

com a norma $\|w\|_X = \max\{\|w\|_0, \|w'\|_1\}$, em que

$$\|\Upsilon\|_0 := \sup_{t\in[0,+\infty[} \frac{|\Upsilon(t)|}{1+t} \;\text{ e }\; \|\Upsilon\|_1 := \sup_{t\in[0,+\infty[} |\Upsilon(t)|.$$

O espaço $(X, \|.\|_X)$ é um espaço de Banach.

Precisemos o que se entende por uma função L^1-Carathéodory:

Definição 6.2.8 *Uma função $g : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diz-se L^1- Carathéodory se*

i) para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t \mapsto g(t,x,y)$ é mensurável em $[0,+\infty[$;

ii) para $t \in [0,+\infty[$ quase sempre, $(x,y) \mapsto g(t,x,y)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$;

iii) para $\rho > 0$, existe uma função positiva $\phi_\rho \in L^1([0,+\infty[)$ tal que, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\sup_{t\in[0,+\infty[} \left\{ \frac{|x|}{1+t}, |y| \right\} < \rho, \tag{6.2.10}$$

tem-se

$$|g(t,x,y)| \leq \phi_\rho(t), \;\; a.e. \;\; t \in [0,+\infty[\,.$$

Tal como anteriormente o problema (6.2.8)-(6.2.9) pode ser escrito na forma integral:

Lema 6.2.9 *Seja $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então u é a solução de (6.2.8)-(6.2.9) se, e só se, u puder ser expressa como*

$$u(t) = A + Bt + \int_0^{+\infty} G(t,s) f(s, u(s), u'(s)) ds,$$

onde a função de Green é dada por

$$G(t,s) = \begin{cases} -t, & 0 \leq t \leq s \leq +\infty \\ \\ -s, & 0 \leq s \leq t \leq +\infty. \end{cases} \tag{6.2.11}$$

A demonstração deste Lema deixa-se como exercício.

O próximo lema fornece um critério muito útil para garantir a compacidade do operador e pode ser adaptado fácilmente a partir de [1], Theorem 4.3.1.

Lema 6.2.10 *Um conjunto $M \subset X$ é relativamente compacto se se verificarem as seguintes condições:*

i) Todas as funções definidas em M são uniformemente limitadas;

ii) Todas as funções definidas em M são equicontínuas em qualquer intervalo compacto de $[0, +\infty[$;

iii) Todas as funções definidas em M são equiconvergentes no infinito, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $t_\epsilon > 0$ tal que

$$\left|\frac{x(t)}{1+t} - \lim_{t\to+\infty}\frac{x(t)}{1+t}\right| < \epsilon, \left|x'(t) - \lim_{t\to+\infty} x'(t)\right| < \epsilon, \forall t > t_\epsilon, x \in M.$$

O próximo teorema irá garantir a existência de uma solução de (6.2.8)-(6.2.9), através da existência de pontos fixos de um operador conveniente.

Teorema 6.2.11 *Seja $f : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função L^1- Carathéodory. Então existe, pelo menos, uma função $u \in X$ solução do problema (6.2.8)-(6.2.9).*

Dem. Defina-se o operador $T : X \to X$ dado por

$$Tu\,(t) = A + Bt + \int_0^{+\infty} G(t,s) f(s, u(s), u'(s))ds,$$

com $G(t, s)$ definida em (6.2.11).

Passo 1: T está bem definido e é contínuo.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e pelo Lema (6.2.9),

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\frac{Tu(t)}{1+t} &= \lim_{t\to+\infty}\frac{A+Bt}{1+t} \\
&\quad + \int_0^{+\infty}\lim_{t\to+\infty}\frac{G(t,s)}{1+t} f(s,u(s),u'(s))ds \\
&\leq B + \int_0^{+\infty} |f(s,u(s),u'(s))|ds \\
&\leq B + \int_0^{+\infty} \phi_\rho(s)ds < +\infty,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}(Tu)'(t) &= B-\lim_{t\to+\infty}\int_t^{+\infty} f(s,u(s),u'(s))ds\\
&\le B+\lim_{t\to+\infty}\int_t^{+\infty} |f(s,u(s),u'(s))|ds\\
&\le B+\int_0^{+\infty} |f(s,u(s),u'(s))|ds\\
&\le B+\int_0^{+\infty} \phi_\rho(s)ds<+\infty.
\end{aligned}$$

Portanto $T\in X$, T está bem definido em X e, como f é uma função L^1- Carathéodory, T é contínuo.

Passo 2: TD é uniformemente limitado, *para D um conjunto limitado em X.*

Seja D um subconjunto limitado de X. Então, existe $\rho_1>0$ tal que

$$\|u\|_X=\max\{\|u\|_0,\|u'\|_1\}<\rho_1.$$

Para $u\in D$, defina-se

$$K:=\sup_{t\in[0,+\infty[}\left(\frac{|A|+|Bt|}{1+t}\right),\ \ K_1(s):=\sup_{t\in[0,+\infty[}\frac{|G(t,s)|}{1+t}. \tag{6.2.12}$$

Como, $0\le K_1(s)\le 1, \forall s\in[0,+\infty[$, e f é uma função L^1- Carathéodory, então

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_0 &= \sup_{t\in[0,+\infty[}\frac{|Tu(t)|}{1+t}\\
&\le \sup_{t\in[0,+\infty[}\left(\frac{|A|+|Bt|}{1+t}\right)+\int_0^{+\infty}\sup_{t\in[0,+\infty[}\frac{|G(t,s)|}{1+t}|f(s,u(s),u'(s))|ds\\
&\le K+\int_0^{+\infty}K_1(s)\phi_\rho(s)ds<+\infty,\quad \forall u\in D,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|(Tu)'\|_1 &= \sup_{t\in[0,+\infty[}|(Tu)'(t)|\\
&\le |B|+\int_t^{+\infty}|f(s,u(s),u'(s))|ds\\
&\le |B|+\int_0^{+\infty}\phi_\rho(s)ds<+\infty,\quad \forall u\in D,
\end{aligned}$$

pelo que T é TD é uniformemente limitado.

Passo 3: *TD é equicontínuo em X.*

Considerem-se $t_1, t_2 \in [0, +\infty[$ e suponha-se, sem perda de generalidade, que $t_1 \leq t_2$. Então, pela continuidade de $G(t,s)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{t_1 \to t_2} \left| \frac{Tu(t_1)}{1+t_1} - \frac{Tu(t_2)}{1+t_2} \right| &\leq \lim_{t_1 \to t_2} \left| \left(\frac{A+Bt_1}{1+t_1} - \frac{A+Bt_2}{1+t_2} \right) \right| \\
&+ \int_0^{+\infty} \lim_{t_1 \to t_2} \left| \frac{G(t_1,s)}{1+t_1} - \frac{G(t_2,s)}{1+t_2} \right| \left| f(s,u(s),u'(s)) \right| ds = 0,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \lim_{t_1 \to t_2} \left| (Tu(t_1))' - (Tu(t_2))' \right| \\
= & \lim_{t_1 \to t_2} \left| -\int_{t_1}^{+\infty} f(s,u(s),u'(s))ds \int_{t_2}^{+\infty} f(s,u(s),u'(s))ds \right| \\
= & \lim_{t_1 \to t_2} \left| -\int_{t_1}^{t_2} f(s,u(s),u'(s))ds \right| \leq \lim_{t_1 \to t_2} \int_{t_1}^{t_2} \phi_\rho(s)ds = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, TD é equicontínuo em X.

Passo 4: *TD é equiconvergente no infinito* .

Para o operador T, temos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{Tu(t)}{1+t} - \lim_{t \to +\infty} \frac{Tu(t)}{1+t} \right| &\leq \left| \frac{A+Bt}{1+t} - B \right| \\
&+ \int_0^{+\infty} \left| \frac{G(t,s)}{1+t} - \lim_{t \to +\infty} \frac{G(t,s)}{1+t} \right| \left| f(s,u(s),u'(s))ds \right| \to 0,
\end{aligned}$$

quando $t \to +\infty$.

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\left| (Tu(t))' - \lim_{t \to +\infty} (Tu(t))' \right| &= \left| -\int_t^{+\infty} f(s,u(s),u'(s))ds \right| \\
&\leq \int_t^{+\infty} \left| f(s,u(s),u'(s)) \right| ds \to 0,
\end{aligned}$$

se $t \to +\infty$.

Logo TD é equiconvergente em $+\infty$.

Pelo Lema 6.2.10, TD é relativamente compacto and, consequentemente, T é compacto.

Passo 5: $T\Omega \subset \Omega$ para um certo conjunto $\Omega \subset X$ fechado e limitado.

Considere-se

$$\Omega := \left\{ u \in X : \|u\|_X \leq \rho_2 \right\},$$

com $\rho_2 > 0$ tal que

$$\rho_2 := \max \left\{ \rho, \;\; K + \int_0^{+\infty} K_1(s)\phi_\rho(s)ds, |B| + \int_0^{+\infty} \phi_\rho(s)ds \right\}, \qquad (6.2.13)$$

com ρ dado por (6.2.10). De acordo com o Passo 2 e K, $K_1(s)$ dados por (6.2.12), temos

$$\|Tu\|_X = \max \left\{ \|Tu\|_0 \, , \; \left\|(Tu)'\right\|_1 \right\} \leq \rho_2.$$

Então, $T\Omega \subset \Omega$, e, pelo Teorema 6.2.3, o operador Tu tem um ponto fixo u.

Pelo Lema 6.2.9, este ponto fixo é solução do problema (6.2.8)-(6.2.9). ■

6.3 Exercícios

1. Se T_1 e T_2 são operadores lineares compactos de um espaço normado X num espaço normado Y, mostre que:

   a) $T_1 + T_2$ é um operador linear compacto.

   b) os operadores compactos lineares de X em Y constituem um subespaço $C(X,Y)$ de $B(X,Y)$.

   c) Se Y é um espaço de Banach, mostre que $C(X,Y)$ é um subconjunto fechado de $B(X,Y)$.

2. Mostre que um operador linear $T : X \longrightarrow X$ é compacto se e somente se para cada sucessão (x_n) de vectores de norma que não exceda 1 a sucessão (Tx_n) tem uma subsucessão convergente.

3. Se X é um espaço com produto interno, mostre que $Tx = \langle x, y \rangle\, z$ com y e z fixos define um operador linear compacto em X.

4. Considere-se o problema não linear com valores na fronteira de segunda ordem com condições de fronteira mistas

$$\begin{cases} u''(x) = x\ u(x) + (u'(x))^2, \ x \in]0,\ 1[\\ \\ u(0) = 1, \ u'(1) = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{6.3.1}$$

   Prove que o probema não linear (6.3.1) tem pelos menos uma solução $u(x) \in C^1[0,1]$.

5. Mostre que o problema não linear com valores na fronteira formado pela equação diferencial de segunda ordem

$$u''(t) = \frac{\pi\ u'(t)\ u(t) -}{t^4 + 1}, \quad t \in [0, +\infty[\,,$$

   e as condições de fronteira

$$u(0) = 0, \ u'(+\infty) = 1,$$

   tem pelo menos uma solução.

Bibliografia

[1] R. Agarwal, D. O'Regan, *Infinite Interval Problems for Differential, Difference and Integral Equations*, Kluwer Academic Publisher, Glasgow 2001.

[2] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons (1978).

[3] D. R. Smart, *Fixed Point Theorems,* Cambridge Tracts in Mathematics, 66, Cambridge University Press (1980).

[4] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: Fixed-Point Theorems*, Springer, New York (1986).