

# Análise Matemática II

Feliz Minhós



# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>Objectivos Gerais</b>	<b>3</b>
<b>Programa</b>	<b>5</b>
<b>1 Funções de <math>\mathbb{R}^n</math> em <math>\mathbb{R}^m</math></b>	<b>7</b>
1.1 Espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ . . . . .	7
1.2 Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	13
1.3 Intervalos em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	17
1.4 Tipos de função, domínio e gráfico . . . . .	17
1.5 Definição de limite . . . . .	20
1.6 Propriedades algébricas dos limites . . . . .	22
1.7 Limites relativos . . . . .	24
1.8 Continuidade. Propriedades das funções contínuas . . . . .	28
1.9 Continuidade uniforme . . . . .	31
1.10 Exercícios . . . . .	35
<b>2 Cálculo diferencial em <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>39</b>
2.1 Derivação parcial de 1 <sup>a</sup> ordem . . . . .	40
2.2 Significado geométrico das derivadas de 1 <sup>a</sup> ordem . . . . .	42
2.3 Derivadas de ordem superior . . . . .	42
2.4 Derivada direcciona . . . . .	45
2.5 Funções diferenciáveis. Diferencial e gradiente . . . . .	48
2.6 Funções vectoriais . . . . .	61
2.7 Regra de derivação de funções compostas . . . . .	63
2.8 Derivada de uma função composta de ordem superior . . . . .	68
2.9 Algumas aplicações das derivadas em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	72
2.9.1 Funções homogéneas. Teorema de Euler . . . . .	72
2.9.2 Plano tangente e recta normal a uma superfície . . . . .	75

2.9.3	Operadores diferenciais . . . . .	79
2.10	Invertibilidade de funções em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	81
2.11	Funções implícitas . . . . .	86
2.12	Derivada da função implícita . . . . .	90
2.13	Diferenciais de ordem superior para funções reais em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	94
2.14	Estudo dos extremos de funções reais de $n$ variáveis reais . . . . .	102
2.14.1	Extremos em pontos interiores do domínio . . . . .	103
2.14.2	Classificação dos pontos críticos . . . . .	105
2.15	Máximos e mínimos de funções definidas implicitamente . . . . .	112
2.16	Extremos condicionados . . . . .	115
2.16.1	Método dos multiplicadores de Lagrange . . . . .	116
2.16.2	Método do Hessiano orlado . . . . .	116
2.17	Exercícios . . . . .	124
<b>3</b>	<b>Integrais de linha ou curvilíneos</b> . . . . .	<b>131</b>
3.1	Definição e propriedades . . . . .	131
3.2	Integrais de linha em relação ao comprimento de arco . . . . .	135
3.3	Aplicações do integral de linha . . . . .	137
3.4	Campo conservativo e potencial . . . . .	140
3.5	Exercícios . . . . .	148
<b>4</b>	<b>Integrais duplos</b> . . . . .	<b>151</b>
4.1	Definição de integral duplo . . . . .	151
4.2	Propriedades do integral duplo . . . . .	153
4.3	Integrais duplos inferior e superior . . . . .	154
4.4	O integral duplo por integração iterada . . . . .	156
4.5	Interpretação geométrica do integral duplo . . . . .	157
4.6	Integrabilidade de funções contínuas . . . . .	158
4.7	Integrabilidade de funções limitadas com descontinuidades . . . . .	160
4.8	Integrais duplos em regiões mais gerais . . . . .	162
4.9	Aplicações a áreas e volumes . . . . .	169
4.10	Outras aplicações dos integrais duplos . . . . .	169
4.11	Teorema de Green no plano . . . . .	172
4.12	Mudança de variáveis num integral duplo . . . . .	174
4.12.1	Coordenadas polares . . . . .	175
4.12.2	Transformações lineares . . . . .	177
4.13	Exercícios . . . . .	179

<b>5</b>	<b>Integrais triplos</b>	<b>183</b>
5.1	Propriedades do integral triplo . . . . .	184
5.2	Cálculo de integrais triplos . . . . .	184
5.3	Aplicações dos integrais triplos . . . . .	186
5.4	Mudança de coordenadas em integrais triplos . . . . .	189
5.4.1	Coordenadas cilíndricas . . . . .	190
5.4.2	Coordenadas esféricas . . . . .	191
5.5	Exercícios . . . . .	194
<b>6</b>	<b>Integrais de superfície</b>	<b>195</b>
6.1	Definição . . . . .	195
6.2	Aplicações . . . . .	196
6.2.1	Área de uma superfície . . . . .	196
6.2.2	Centro de massa e momento de inércia . . . . .	196
6.2.3	Fluxo de um fluido através de uma superfície . . . . .	199
6.3	Teorema de Stokes . . . . .	202
6.4	Teorema de Gauss ou Teorema da divergência . . . . .	203
6.5	Exercícios . . . . .	206



# Introdução

Unidade Curricular: Análise Matemática II

Tipo: Obrigatória

Nível: Base

Ano: 1º

Semestre: 2º

Carga horária semanal: 3 horas de Aulas Teóricas e 2 horas de Aulas

Práticas

Créditos (ECTS): 6



# Objectivos Gerais

Considerando esta unidade curricular no âmbito da formação pessoal e científica, em geral, e da formação matemática em particular, o aluno deverá:

- Desenvolver capacidades de abstracção, dedução lógica e análise.
- Adquirir métodos e técnicas estruturantes do raciocínio científico e matemático que proporcione um espírito crítico.
- Dominar conteúdos matemáticos associados à Análise real vectorial, nomeadamente sucessões, funções, Cálculo Diferencial e Integral em  $\mathbb{R}^n$ , ao nível de conceitos e aplicações.
- Utilizar conhecimentos matemáticos na resolução de problemas e interpretação da realidade.
- Adquirir competências matemáticas que possam vir a ser desenvolvidas e aplicadas em contexto profissional empresarial, de investigação ou de ensino.



# Programa

O aluno deverá dominar os conteúdos programáticos do Ensino Secundário e da Análise Matemática I, nomeadamente ao nível do estudo de funções reais de variável real, geometria analítica, cálculo diferencial e integral,...

Em cada capítulo do programa são apresentadas secções com os seguintes conteúdos:

- ▷ Resumo dos principais resultados bem como considerações que permitem ilustrar a metodologia seguida;
- ▷ Exemplos, aplicações e exercícios resolvidos;
- ▷ Lista de exercícios sugeridos.

O que é a Análise Matemática ou simplesmente Análise?

É o ramo da Matemática que se ocupa dos números e das relações entre eles, expressos por meio de igualdades, desigualdades e operações.

As operações fundamentais da Análise são: adição, subtracção, multiplicação, divisão, radiciação e passagem ao limite.

A Análise diz-se Análise Algébrica ou Álgebra quando não emprega a passagem ao limite.

Diz-se Análise Infinitesimal se usar a noção de limite, e portanto de infinito, quer directa quer indirectamente (séries, derivadas, integrais,...).

A Análise Matemática II generaliza os conceitos da Análise Matemática I, elaborados em  $\mathbb{R}$  (unidimensional), para espaços vectoriais (multidimensionais).



# Capítulo 1

## Funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$

### 1.1 Espaço vectorial $\mathbb{R}^n$

O espaço vectorial multidimensional pode ser considerado como um produto de  $n$  factores  $\mathbb{R}$ . Mas como se define o produto de conjuntos?

Chama-se **produto cartesiano** de dois conjuntos  $A$  e  $B$ , e representa-se por  $A \cdot B$  ou  $A \times B$ , ao conjunto de todos os pares ordenados  $(x, y)$  que é possível formar com os conjuntos  $A$  e  $B$  de forma a que o primeiro elemento do par ordenado pertença a  $A$  e o segundo a  $B$ . Isto é,

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Análogamente, o produto cartesiano de  $n$  conjuntos  $A_1, \dots, A_n$ , é formado por sequências de  $n$  elementos tais que

$$\begin{aligned} A_1 \times \dots \times A_n &= \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Interessa-nos particularmente um caso particular de produto cartesiano de  $n$  factores:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R},$$

constituído por todos os elementos da forma

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ tais que } x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n.$$

Se  $n = 1$ , tem-se a recta real  $\mathbb{R}$ . Se  $n = 2$ ,  $\mathbb{R}^2$  representa o plano cartesiano bidimensional. Se  $n = 3$ , o espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ .

Em  $\mathbb{R}^n$  define-se uma operação **adição** entre elementos de  $\mathbb{R}^n$  e uma **multiplicação por um número real**, do seguinte modo:

$$\begin{aligned}x + y &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \\ \lambda x &= \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

O conjunto  $\mathbb{R}^n$  com estas duas operações constitui um **espaço vectorial real**.

Os elementos  $(x_1, \dots, x_n)$ , ou  $\vec{x}$ , ou  $(x_i)$ , são os **vectores** (ou pontos) e os números reais são os **escalares** do espaço.

Os  $n$  vectores

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \quad \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

são **linearmente independentes** e formam uma **base** (a **base canónica**) de  $\mathbb{R}^n$ , que assim tem **dimensão**  $n$ .

**Definição 1.1.1** *Um espaço vectorial (real ou complexo) diz-se **normado**, quando a cada vector  $x$  está associado um número real não negativo (chamado a norma de  $x$ , e que se designa por  $\|x\|$ ) que verifica as seguintes propriedades:*

1.  $\|x\| > 0$  se  $x \neq 0$  e  $\|0\| = 0$ ;
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ;
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (*desigualdade triangular*).

**Exemplo 1.1.2 a)** *O espaço vectorial  $\mathbb{R}^n$  passa a constituir um espaço normado, tomando para norma de  $x = (x_1, \dots, x_n)$  a expressão*

$$\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2} \quad (\text{norma euclideana}).$$

**b)** *Há uma infinidade de normas que se podem considerar em  $\mathbb{R}^n$ . Por exemplo:*

$$\begin{aligned}\|x\|_M &= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \quad (\text{norma do máximo}), \\ \|x\|_S &= |x_1| + \dots + |x_n| \quad (\text{norma da soma}).\end{aligned}$$

**Exercício 1.1.3** *Prove que as normas anteriores verificam as condições da Definição 1.1.1.*

**Exercício 1.1.4** *Mostre que*

$$\|x\|_M \leq \|x\| \leq \|x\|_S \leq n \|x\|_M, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(Estas desigualdades servem para mostrar que estas três normas são equivalentes).

**Resolução:** Para a primeira desigualdade temos, para um certo  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \|x\|_M &= \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\} = |x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2} = \|x\|. \end{aligned}$$

Para a segunda desigualdade, note-se que

$$(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \leq (|x_1| + \dots + |x_n|)^2.$$

Então

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2} \leq \sqrt{(|x_1| + \dots + |x_n|)^2} \\ &\leq |x_1| + \dots + |x_n| = \|x\|_S. \end{aligned}$$

No caso da última desigualdade como se tem

$$\|x\|_M = \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\} = |x_i|, \quad \text{para um certo } 1 \leq i \leq n,$$

então

$$\|x\|_S = |x_1| + \dots + |x_n| \leq |x_i| + \dots + |x_i| = n |x_i| = n \|x\|_M.$$

□

**Observação 1.1.5** *Em particular, no caso de  $n = 1$ , tem-se que  $\|x\| = |x|$ , pelo que a norma generaliza a  $\mathbb{R}^n$  muitas das propriedades do valor absoluto dos números reais.*

**Exercício 1.1.6** *Mostre que*

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**Resolução:** Para provar a desigualdade referida é necessário mostrar que

$$\|x\| - \|y\| \geq -\|x - y\| \wedge \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Para provar a primeira desigualdade escreva-se  $x = (x - y) + y$  e apliquemos a desigualdade triangular:

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|.$$

Então

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Para a segunda desigualdade escreva  $y = (y - x) + x$  e aplique o mesmo processo.  $\square$

Todo o espaço normado se pode transformar num **espaço métrico**, definindo uma **distância** entre dois vectores através da igualdade

$$d(x, y) = \|x - y\|. \quad (1.1.1)$$

Em particular, para o espaço euclidiano, tem-se

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

**Exercício 1.1.7** *Mostre que uma distância, como em 1.1.1, verifica as seguintes propriedades:*

- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .
- $d(x, y) = d(y, x)$ .
- $x \neq y \implies d(x, y) > 0$ .

**Sugestão:** Aplique a definição de norma e as propriedades da Definição 1.1.1.

**Definição 1.1.8** *No espaço vectorial  $\mathbb{R}^n$ , chama-se **produto interno**, ou **produto escalar**, de dois vectores  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  ao número real*

$$x | y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

**Exercício 1.1.9** *Mostre que o produto interno verifica as propriedades:*

- $x | y = y | x$
- $(\alpha x + \beta y) | z = \alpha (x | z) + \beta (y | z), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- $x | x \geq 0$  e  $x | x = 0 \iff x = 0$ .

**Observação 1.1.10** Com esta definição de produto interno obtém-se uma norma fazendo

$$\|x\| = \sqrt{x | x}, \quad (1.1.2)$$

isto é, todo o espaço com produto interno pode ser considerado como um espaço normado.

**Proposição 1.1.11 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$  tem-se

$$|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|,$$

dando-se a igualdade se, e só se, os vectores  $x$  e  $y$  são colineares.

**Dem.** Note-se que, para  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\lambda x + y\|^2 = (\lambda x + y | \lambda x + y) \\ &= \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda (x | y) + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Para que esta desigualdade seja verdadeira para qualquer valor do parâmetro  $\lambda$ , o binómio discriminante tem que ser não positivo:  $\Delta \leq 0$ . Isto é,

$$4(x | y)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0.$$

Ora a desigualdade só acontece se

$$(x | y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

ou seja,

$$|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

■

**Exercício 1.1.12** Utilizando as propriedades que caracterizam um produto interno e a Definição 1.1.2, prove a **lei do paralelogramo**:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Em linguagem corrente:

A soma dos quadrados das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos seus quatro lados.

**Dem.** Somando termo a termo as duas igualdades

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= ((x + y) | (x + y)) = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2 \\ \|x - y\|^2 &= ((x - y) | (x - y)) = \|x\|^2 - 2(x | y) + \|y\|^2 \end{aligned}$$

obtem-se a igualdade pretendida. ■

**Observação 1.1.13** *A lei do paralelogramo não é válida para todo o tipo de normas. Por exemplo, a norma do máximo e a norma da soma em  $\mathbb{R}^n$ , não a verificam.*

*Logo estas normas não se podem definir à custa de um produto interno em  $\mathbb{R}^n$ .*

**Proposição 1.1.14** *Duas normas quaisquer no espaço  $\mathbb{R}^q$  são equivalentes.*

**Dem.** Seja  $\|u\|_S$  a norma da soma, isto é,  $\|u\|_S = |u_1| + \dots + |u_q|$ .

Pela transitividade da relação de equivalência, basta provar que uma norma arbitrária  $\|\cdot\|$  é equivalente a  $\|\cdot\|_S$ .

Designa-se por  $e := \max \{\|\vec{e}_1\|, \dots, \|\vec{e}_q\|\}$ . Então, para cada  $u \in \mathbb{R}^q$  tem-se

$$\begin{aligned} \|u\| &= \|u_1 \vec{e}_1 + \dots + u_q \vec{e}_q\| \leq |u_1| \|\vec{e}_1\| + \dots + |u_q| \|\vec{e}_q\| \\ &\leq |u_1| e + \dots + |u_q| e = e \|u\|_S. \end{aligned}$$

Basta agora provar a desigualdade inversa, isto é,

$$\exists \alpha > 0 : \|u\|_S \leq \alpha \|u\|, \quad \forall u \in \mathbb{R}^q.$$

Suponhamos, por absurdo, que tal não acontece.

Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe uma sucessão  $u_n \in \mathbb{R}^q$  tal que

$$\|u_n\|_S > n \|u_n\|. \quad (1.1.3)$$

Defina-se a sucessão  $v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_S}$ . Então, por (1.1.3),

$$\|v_n\| = \frac{\|u_n\|}{\|u_n\|_S} < \frac{1}{n}$$

e

$$\|v_n\|_S = \frac{\|u_n\|_S}{\|u_n\|_S} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então a sucessão  $v_n$  é limitada em relação à norma da soma.

Recordemos o Corolário do Teorema de Bolzano-Weierstrass:

"Toda a sucessão limitada em  $\mathbb{R}$  admite, pelo menos, uma subsucessão convergente."

Assim,  $v_n$  admite uma subsucessão, que se designa por  $v_{n_k}$ , que é convergente para um certo  $v \in \mathbb{R}^q$ . Ou seja, quando  $k \rightarrow +\infty$ ,

$$\|v_{n_k}\|_S \rightarrow \|v\|_S = 1, \quad (1.1.4)$$

pelo que  $v \neq 0$ .

Por outro lado, para todo o  $k \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|v - v_{n_k} + v_{n_k}\| \leq \|v - v_{n_k}\| + \|v_{n_k}\| \\ &\leq \epsilon \|v - v_{n_k}\|_S + \frac{1}{n_k}. \end{aligned}$$

Como as duas últimas parcelas tendem para 0, quando  $k \rightarrow +\infty$ , tem-se que

$$\|v\| \leq 0.$$

Logo  $v = 0$ , que contradiz a normalização de (1.1.4), demonstrando o teorema. ■

## 1.2 Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$

Nesta secção apresentam-se algumas noções importantes para o estudo de funções definidas nalgum conjunto  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  com valores em  $\mathbb{R}^m$  ( $m, n \geq 1$ ), nomeadamente para as propriedades que envolvam os conceitos de limite e continuidade.

Estas noções são apresentadas para espaços normados em geral, mas também se podem adaptar a espaços métricos, usando a distância  $d(x, y)$  no lugar da norma  $\|x - y\|$ .

**Definição 1.2.1** *Seja  $E$  um espaço normado.*

*Chama-se **bola (aberta)** de centro  $c$  e raio  $r$  ao conjunto*

$$B_r(c) = \{x \in E : \|x - c\| < r\}.$$

*O conjunto de elementos  $x \in E$  tais que  $\|x - c\| \leq r$  é uma bola fechada de centro  $c$  e raio  $r$ .*

A forma geométrica das bolas varia com o espaço e com a norma.

- Para  $n = 1$ , isto é, em  $\mathbb{R}$ , a bola reduz-se a um **intervalo**.
- Para  $n = 2$ , em  $\mathbb{R}^2$ , a bola também se chama um **disco**.
- Para  $n = 3$ , em  $\mathbb{R}^3$ , a bola é uma **esfera**.

- Se em  $\mathbb{R}^2$ , para  $x = (x_1, x_2)$  e  $c = (c_1, c_2)$ , tomarmos a norma do máximo  $\|x\|_M = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ , tem-se

$$\begin{aligned} B_r(c) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - c\|_M < r\} \\ &= \max\{|x_1 - c_1|, |x_2 - c_2|\} < r. \end{aligned}$$

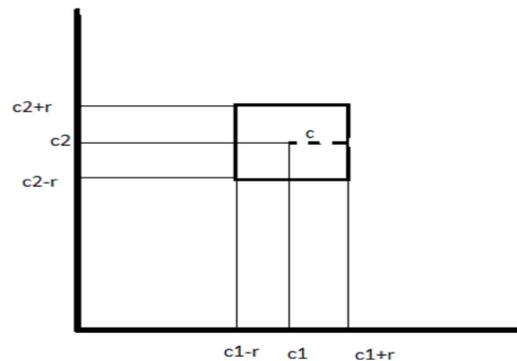
Então

$$|x_1 - c_1| < r \wedge |x_2 - c_2| < r$$

e

$$(c_1 - r < x_1 < c_1 + r) \wedge (c_2 - r < x_2 < c_2 + r).$$

Graficamente, temos um quadrado centrado em  $c$  e com os lados paralelos aos eixos coordenados e de comprimento  $2r$ .



- Se, em  $\mathbb{R}^2$ , tomarmos a norma da soma  $\|x\|_S = |x_1| + |x_2|$ , tem-se

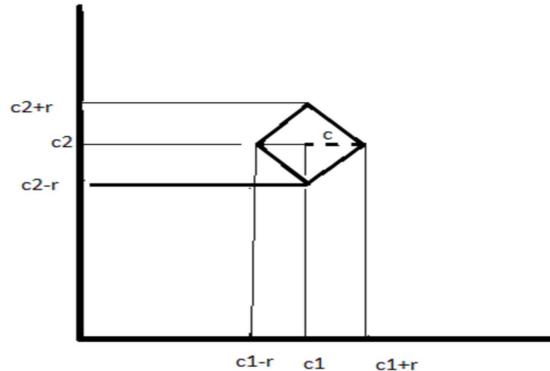
$$B_r(c) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - c\|_S \leq r\},$$

ou seja

$$|x_1 - c_1| + |x_2 - c_2| \leq r.$$

Se  $x_1 = c_1$  então  $|x_2 - c_2| \leq r$  e se  $x_2 = c_2$  então  $|x_1 - c_1| \leq r$ . Como temos a soma de duas quantidades não negativas, quando uma distância aumenta a outra diminui. Graficamente a bola é um quadrado cujas diagonais são paralelas aos eixos coordenados e de comprimento

$2r$ .



- Em  $\mathbb{R}^3$ , com a norma do máximo as bolas são cubos centrados em  $c$  e de aresta  $2r$  paralelas aos eixos coordenados. Com a norma da soma, as bolas são octaedros, com as diagonais de comprimento  $2r$ , paralelas aos eixos coordenados.

Num espaço vectorial genérico  $E$ , vejamos algumas noções topológicas básicas:

**Definição 1.2.2** Chama-se **vizinhança** de  $c$  a qualquer subconjunto de  $E$  que contenha uma bola (aberta) de centro em  $c$ .

**Definição 1.2.3** Um conjunto diz-se limitado se existir alguma bola que o contenha.

Num espaço normado os conceitos topológicos de ponto interior, exterior e ponto fronteiro, bem como as definições que daí derivam (interior, exterior, fronteira, aderência,...) são análogos aos definidos em  $\mathbb{R}$ , e que sintetizamos na definição seguinte:

**Definição 1.2.4** Seja  $E$  um espaço normado,  $S \subseteq E$  e  $a \in E$ .

- a diz-se um **ponto interior** de  $S$  se existir uma bola (aberta) de centro em  $a$ , totalmente contida em  $S$ .
- O conjunto de todos os pontos interiores de  $S$  designa-se por **interior de  $S$**  e representa-se por  $\text{int } S$ . Em linguagem simbólica

$$a \in \text{int } S \iff \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq S.$$

(iii)  $a$  é um **ponto exterior** de  $S$  se existir uma bola (aberta) de centro em  $a$ , totalmente contida em  $E \setminus S$ .

(iv) Chama-se **exterior de  $S$** ,  $ext S$ , ao conjunto de todos os pontos exteriores de  $S$ . Assim,

$$\begin{aligned} a \in ext S &\iff \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq E \setminus S \\ &\iff \exists r > 0 : B_r(a) \cap S = \emptyset. \end{aligned}$$

(v)  $a$  é um **ponto fronteiro** de  $S$  se não for ponto interior nem ponto exterior. Isto é, se qualquer bola centrada em  $a$  contém pontos de  $S$  e do seu complementar.

(vi) Designa-se por **fronteira de  $S$** ,  $fr S$ , o conjunto de todos os pontos fronteiros. Então

$$a \in fr S \iff \forall r > 0, (B_r(a) \cap S \neq \emptyset) \wedge (B_r(a) \cap E \setminus S \neq \emptyset).$$

(vii) Chama-se **aderência** ou **fecho** de  $S$ ,  $ad S$ , ao conjunto

$$ad S = S \cup fr S.$$

(viii)  $S$  é um conjunto **aberto** se, e só se,  $S = int S$ .

$S$  é um conjunto **fechado** se, e só se,  $S = ad S$ .

$S$  é um conjunto **denso em  $E$**  se, e só se,  $ad S = E$ .

(ix) Um ponto  $a \in S$  diz-se um **ponto isolado** se existir uma bola centrada em  $a$ , que só tenha o ponto  $a$  em comum com  $S$ . Isto é,

$$a \text{ é um ponto isolado sse } \exists r > 0 : B_r(a) \cap S = \{a\}.$$

(x) Um ponto  $a \in E$  diz-se um **ponto de acumulação** de  $S$  se toda a bola centrada em  $a$  contém pelo menos um ponto de  $S$ , distinto de  $a$ . Assim

$$a \text{ é um ponto de acumulação de } S \text{ sse } \forall r > 0, B_r(a) \cap (S \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

(xi) Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de  $S$  chama-se conjunto derivado de  $S$ ,  $S'$ .

### 1.3 Intervalos em $\mathbb{R}^n$

**Definição 1.3.1** (i) Sejam  $a = (a_1, \dots, a_n)$  e  $b = (b_1, \dots, b_n)$  dois pontos de  $\mathbb{R}^n$ . Diz-se que  $a < b$  desde que

$$a_i < b_i, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

(ii) O conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : a < x < b\}$ , diz-se um intervalo aberto de extremos  $a$  e  $b$  e representa-se por  $(a, b)$  ou  $]a, b[$ .

(iii)  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\}$  é o intervalo fechado com os mesmos extremos.

**Observação 1.3.2** Para  $n > 1$ , há  $4^n$  tipos de intervalos, pois o intervalo pode ser considerado como o produto cartesiano de  $n$  intervalos de  $\mathbb{R}$ , e cada um deles pode ser aberto, fechado ou aberto de um lado e fechado de outro. Por exemplo, para  $n = 2$ , tem-se  $a = (a_1, a_2)$  e  $b = (b_1, b_2)$  e

$$\begin{aligned} ]a_1, b_1[ \times ]a_2, b_2[ &= ]a, b[; \quad ]a_1, b_1[ \times ]a_2, b_2] = ]a, b]; \\ [a_1, b_1[ \times ]a_2, b_2[ &= [a, b[; \quad [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = [a, b]. \end{aligned}$$

Contudo  $]a_1, b_1[ \times [a_2, b_2]$  não está incluído em nenhum destes quatro casos. O mesmo acontece com outros 11 casos.

Graficamente pode dizer-se que, em  $\mathbb{R}^2$ , os intervalos são rectângulos, enquanto em  $\mathbb{R}^3$  são paralelepípedos ou prismas.

### 1.4 Tipos de função, domínio e gráfico

No que se segue consideram-se funções  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $n, m \in \mathbb{N}$ ) cujo domínio é um conjunto  $D$  de um espaço  $\mathbb{R}^n$  e com valores num espaço  $\mathbb{R}^m$ . Isto é,  $f$  é uma correspondência unívoca de  $\mathbb{R}^n$  para  $\mathbb{R}^m$ , fazendo corresponder a cada elemento  $a = (a_1, \dots, a_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ .

Supõem-se fixadas no espaço  $\mathbb{R}^n$  uma base ortonormada  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  e uma norma  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ , e no espaço  $\mathbb{R}^m$  uma base também ortonormada  $\{f_1, \dots, f_m\}$  e uma norma  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ .

Em termos de notação, escreve-se  $y = f(x)$  com  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ , o que equivale a

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Se  $n = m$ , tem-se  $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^m$  e consideram-se bases idênticas à partida e à chegada.

Se  $m = 1$ , tem-se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real de  $n$  variáveis e designa-se por campo escalar (a cada ponto  $(x_1, \dots, x_n)$  associa-se um número real, um escalar).

Se  $m > 1$ , tem-se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  um campo vectorial (aplica pontos em vectores).

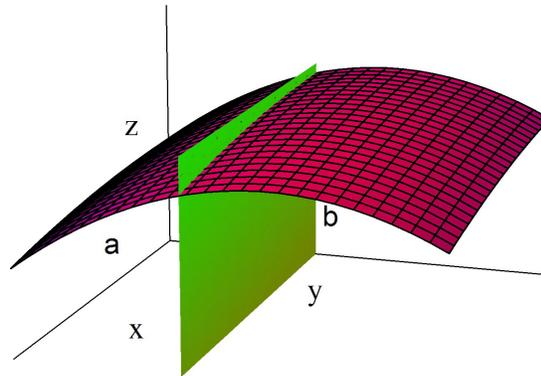
O estudo de uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  necessita de um espaço de  $n + m$  dimensões. Assim se se pretender um suporte gráfico (geométrico) ter-se-á apenas os casos em que  $n + m \leq 3$ .

Por exemplo, a representação gráfica de uma função real de duas variáveis,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto z, \end{aligned}$$

necessita de um espaço a três dimensões.

Se fixarmos uma variável, por exemplo,  $y = b$ , obtem-se  $z = f(x, b)$ , que, na prática é uma função que depende apenas de uma variável  $x$ . Geometricamente consiste e intersectar o plano  $y = b$  com a superfície (gráfico da função, o que vai resultar numa linha.



**Exercício 1.4.1** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

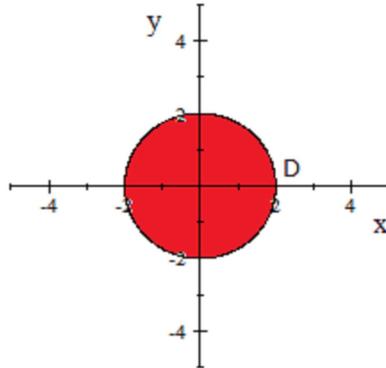
$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

- Indique o domínio  $D$  de  $f$  e represente-o graficamente.
- Descreva  $\text{int } D$ ,  $\text{ext } D$ ,  $\text{fr } D$  e o conjunto derivado de  $D$  ( $D'$ ).

c)  $D$  é um conjunto aberto ? É fechado ?

d) Indique o contradomínio de  $f$  e qual a sua representação gráfica.

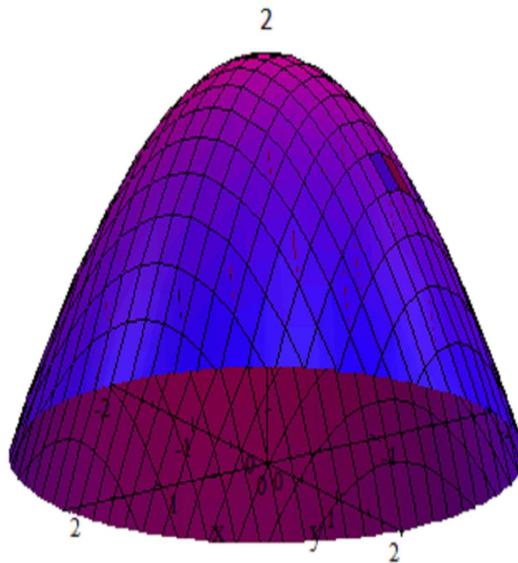
**Resolução:** a)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$



b) **int**  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ , **ext**  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 4\}$ ,  
**fr**  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ ,  $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

c)  $D$  é um conjunto fechado.

d) Contradomínio de  $D = [0, 2]$ , pois  $0 \leq z = f(x, y) \leq 2$ .



**Exercício 1.4.2** Para  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

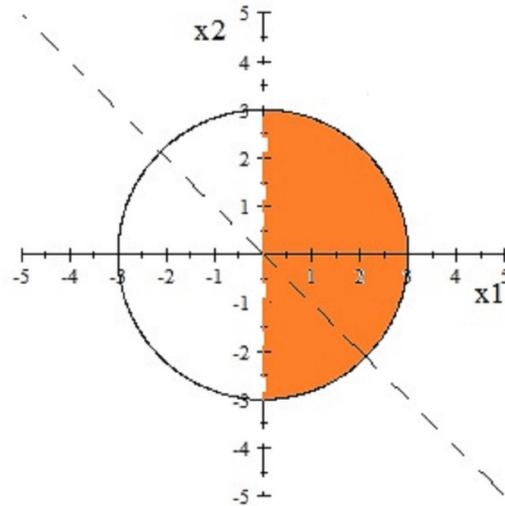
$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} y_1 & = & \frac{1}{x_1+x_2} \\ y_2 & = & \log(x_1) \\ y_3 & = & \sqrt{9-x_1^2-x_2^2} \end{cases}$$

a) Indique o domínio  $D$  de  $g$  e represente-o graficamente.

b) Descreva  $\text{int } D$ ,  $\text{ext } D$  e  $\text{fr } D$ .

**Resolução:** Considerar, simultaneamente, as condições referentes a cada uma das funções coordenadas.

$$\begin{aligned} \text{a) } D &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \neq 0 \wedge x_1 > 0 \wedge 9 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq -x_2 \wedge x_1 > 0 \wedge x_1^2 + x_2^2 \leq 9\}. \end{aligned}$$



$$\text{b) int } D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq -x_2 \wedge x_1 > 0 \wedge x_1^2 + x_2^2 < 9\},$$

$$\text{fr } D = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 = -x_2 \wedge 0 \leq x_1 \leq 3) \vee (x_1 \geq 0 \wedge x_1^2 + x_2^2 = 9) \vee (x_1 = 0 \wedge -3 \leq x_2 \leq 3) \right\},$$

$$\text{ext } D = \mathbb{R}^2 \setminus (\text{int } D).$$

## 1.5 Definição de limite

Começemos pela definição de limite:

**Definição 1.5.1** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função e  $a$  um ponto de acumulação do domínio de  $f$ ,  $D$ .*

*Diz-se que  $b \in \mathbb{R}^m$  é limite de  $f$  no ponto  $a$  (ou quando  $x$  tende para  $a$ ), e escreve-se*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

*se para cada  $\delta > 0$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\|f(x) - b\|_{\mathbb{R}^m} < \delta$ , para todos os pontos  $x$  tais que  $\|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon$  e  $x \in D$ .*

*Simbolicamente,*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : (\|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon \wedge x \in D) \Rightarrow \|f(x) - b\|_{\mathbb{R}^m} < \delta.$$

**Exercício 1.5.2** *Prove, usando a Definição 1.5.1, que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2},$$

*tem por domínio  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$$

**Resolução:** Pretende-se provar que

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : \sqrt{x^2 + y^2} < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \delta$$

ou

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : x^2 + y^2 < \epsilon^2 \Rightarrow \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} < \delta.$$

Atendendo a que

$$(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 y^2 = (x^2 - y^2)^2 \geq 0,$$

tem-se que

$$(x^2 + y^2)^2 \geq 4x^2 y^2 \Leftrightarrow \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} \geq x^2 y^2.$$

Assim

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{4(x^2 + y^2)} = \frac{x^2 + y^2}{4} < \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Então para que

$$\frac{\epsilon^2}{4} < \delta \Leftrightarrow \epsilon^2 < 4\delta$$

basta tomar  $\epsilon < 2\sqrt{\delta}$ . Então  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

Tal como para funções reais de variável real, pode-se também definir o limite à custa de sucessões:

**Teorema 1.5.3** (*Limite segundo Heine*) *Considere-se  $a \in \mathbb{R}^q$  um ponto de acumulação do domínio  $D$  de  $f : D \subseteq \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ .*

*Tem-se que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  se, e só se, para cada sucessão  $u_n$  com limite  $a$ , a correspondente sucessão  $f(u_n)$  converge para  $b$ .*

*Simbolicamente,*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall u_n, u_n \in D, u_n \neq a, \lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = b.$$

**Dem.**  $\Rightarrow$

Suponhamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ . Considere-se uma sucessão  $u_n \in D \setminus \{a\}$  tal que  $\lim u_n = a$ .

Pela definição de limite de uma sucessão, a partir de uma certa ordem  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tem-se que  $\|u_n - a\|_{\mathbb{R}^q} < \epsilon$ . Então, por hipótese,  $\|f(u_n) - b\|_{\mathbb{R}^m} < \delta$ . Logo  $\lim f(u_n) = b$ .

$\Leftarrow$

Hipótese:  $\forall u_n, u_n \in D, u_n \neq a, \lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = b$ .

Tese:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

Suponhamos, por contradição, que

$$\exists \delta > 0 : \forall \epsilon > 0, \|x - a\|_{\mathbb{R}^q} < \epsilon \wedge \|f(x) - b\|_{\mathbb{R}^m} \geq \delta,$$

isto é,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq b$ .

Então pode considerar-se, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , um ponto  $u_n \in D \setminus \{a\}$  tal que

$$\|u_n - a\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{1}{n} \wedge \|f(u_n) - b\|_{\mathbb{R}^m} \geq \delta.$$

Assim, obtém-se uma sucessão  $u_n$  tal que  $u_n \rightarrow a$ , sem que a correspondente sucessão  $f(u_n)$  tendesse para  $b$ , o que está em contradição com a hipótese, demonstrando-se o teorema. ■

## 1.6 Propriedades algébricas dos limites

Os teoremas que se seguem relacionam as propriedades algébricas fundamentais com as noções de convergência e limite.

**Teorema 1.6.1** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . O limite de  $f(x)$ , no ponto  $a$ , quando existe é único.*

**Teorema 1.6.2** *Considerem-se as funções  $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $h : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tais que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b; \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c, \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lambda.$$

*Então:*

- a)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = b + c;$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow a} [h(x)f(x)] = \lambda b.$

Uma regra prática para calcular o limite de uma função vectorial é dada pela proposição seguinte:

**Proposição 1.6.3** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Então é válida a equivalência*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f_j(x) = b_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, m.$$

*Ou seja, cada coordenada de  $f$  admite como limite a respectiva coordenada de  $b$  se, e só se,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .*

**Dem.** Por uma questão de conveniência utiliza-se a norma do máximo.  
 $\Rightarrow$

Suponhamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , isto é,

$$\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 : (\|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon \wedge x \in D) \Rightarrow \|f(x) - b\|_M < \delta.$$

Ora

$$\begin{aligned} \|f(x) - b\|_M < \delta &\Leftrightarrow \max_{i=1, \dots, m} \{|f_i(x) - b_i|\} < \delta \\ &\Leftrightarrow |f_1(x) - b_1| < \delta \wedge \dots \wedge |f_m(x) - b_m| < \delta. \end{aligned}$$

Fazendo os cálculos para a primeira componente

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 : (\|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon \wedge x \in D) &\Rightarrow |f_1(x) - b_1| < \delta \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1. \end{aligned}$$

Análogamente para as outras componentes.

$\Leftarrow$

Considere-se que  $\lim_{x \rightarrow a} f_j(x) = b_j$ , para  $j = 1, \dots, m$ .

Então, dado  $\delta > 0$ ,  $\exists \epsilon > 0: (\|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon \wedge x \in D) \Rightarrow |f_i(x) - b_i| < \delta$ , para  $i = 1, \dots, m$ , e

$$\|f(x) - b\| = \max_{i=1, \dots, m} \{|f_i(x) - b_i|\} < \delta.$$

Assim  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ . ■

**Exercício 1.6.4** Considere-se a função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

Prove que

$$\lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|b\|.$$

**Resolução:** Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  então  $\lim_{x \rightarrow a} f_j(x) = b_j$ , para  $j = 1, \dots, m$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| &= \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{(f_1(x))^2 + \dots + (f_m(x))^2} \\ &= \sqrt{\left(\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)\right)^2 + \dots + \left(\lim_{x \rightarrow a} f_m(x)\right)^2} \\ &= \sqrt{(b_1)^2 + \dots + (b_m)^2} = \|b\|. \end{aligned}$$

Um teorema importante refere-se à composição de funções:

**Teorema 1.6.5** Seja  $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $f : B \rightarrow C \subseteq \mathbb{R}^p$ .

Represente-se por  $u = f \circ g$  a função composta de  $g$  e  $f$ .

Se  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$  e  $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = c$  então  $\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [(f \circ g)(x)] = c$ .

**Dem.** Considere-se uma sucessão  $(u_n) \subset A$  e tal que  $u_n \rightarrow a$ .

Pelo Teorema 1.5.3,  $\lim_{x \rightarrow a} g(u_n) = b$  e  $\lim_{g(u_n) \rightarrow b} f[g(u_n)] = c$ . ■

## 1.7 Limites relativos

Na recta real  $x$  apenas se pode aproximar de um certo número vindo de duas direcções: pela esquerda ou pela direita do número. Por isso se tinha, em  $\mathbb{R}$ , os limites laterais.

Em  $\mathbb{R}^n$  temos limites segundo direcções ou relativos a um certo conjunto.

**Definição 1.7.1** *Seja  $A$  um subconjunto de  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $a$  um ponto de acumulação de  $A$ . Chama-se **limite** de  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , no ponto  $a$ , **relativo a  $A$**  (ou limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  no conjunto  $A$ ) ao limite em  $a$  (quando exista) da restrição de  $f$  a  $A$ .*

*Designa-se por*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x).$$

**Exemplo 1.7.2** *Para funções definidas em  $\mathbb{R}$ , os limites laterais*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x),$$

*são casos particulares de limites relativos a um conjunto. Concretamente a*

$$\{x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad \text{e} \quad \{x \in \mathbb{R} : x < a\},$$

*respectivamente.*

**Exemplo 1.7.3** *Para funções definidas em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , a tendência de  $x$  para  $a$  não se limita à "esquerda" ou "à direita de  $a$ ", já que existem outras direções de aproximação.*

*Os pontos da forma*

$$x = a + mv,$$

*com  $a, v \in \mathbb{R}^n$  elementos fixos e tomando  $m \in \mathbb{R}$ , qualquer valor real, constituem uma "recta em  $\mathbb{R}^n$ ", passando por  $a$  e com a direcção de  $v$ , chamam-se os **limites direccionais de  $f$**  no ponto  $a$  e na direcção de  $v$ .*

**Observação 1.7.4** *(i) Pela unicidade do limite, se existir  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  então existem e são iguais todos os limites direccionais de  $f(x)$  no ponto  $a$ .*

*(ii) Para  $n \geq 2$ , podem existir todos os limites direccionais no ponto  $a$ , e com o mesmo valor, sem que exista  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .*

*Por um ponto  $x$ ,  $f$  pode aproximar-se de  $a$  por outros caminhos que não sejam rectilíneos, o que torna possível o aparecimento de limites relativos com valor diferente do dos limites direccionais, conforme se pode ver nos exercícios seguintes:*

**Exercício 1.7.5** *Para  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

*determinar:*

a) Domínio de  $f$ .

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

**Resolução: a)**  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

b) Como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{0}{0}$ , calculam-se os limites direccionais:

Limite segundo o eixo das abcissas ( $y = 0$ ) :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1;$$

Limite segundo o eixo das ordenadas ( $x = 0$ ) :

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x=0}} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{y^2}{y^2} = -1.$$

Logo não existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

**Exercício 1.7.6** Repita o exercício anterior para  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + 4y^2}.$$

**Resolução 1.7.7 a)**  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

b) Como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{0}{0}$ , calculam-se os limites direccionais:

Limite segundo o eixo das abcissas ( $y = 0$ ) :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0;$$

Limite segundo o eixo das ordenadas ( $x = 0$ ) :

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x=0}} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{4y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0;$$

Limite segundo rectas do tipo  $y = mx$  ( $m \neq 0$ ) :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=mx}} f(x,mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Como o limite depende de  $m$ , logo, pela unicidade do limite, não existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y).$$

**Exercício 1.7.8** *Idem, para  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

**Resolução:** a)  $D = \mathbb{R}^2$

b) Como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{0}{0}$ , calculam-se os limites direccionais:

Limite segundo o eixo das abcissas ( $y = 0$ ):  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} f(x,0) = 0$ ;

Limite segundo o eixo das ordenadas ( $x = 0$ ):  $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x=0}} f(0,y) = 0$ ;

Limite segundo rectas do tipo  $y = mx$  ( $m \neq 0$ ):

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=mx}} f(x, mx) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=mx}} \frac{mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=mx}} \frac{mx}{x^2 + m^2} = \frac{0}{m^2} = 0.$$

Apesar de os limites direccionais existirem e serem todos iguais a 0, nada se pode concluir quanto à existência do limite.

De facto, se os pontos se aproximarem de  $(0,0)$  segundo parábolas do tipo  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ), tem-se

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=ax^2}} f(x, ax^2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=ax^2}} \frac{a^2 x^4}{x^4 + a^2 x^4} = \frac{a^2}{1 + a^2}.$$

Como o limite depende de  $a$ , logo, pela unicidade do limite, não existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y).$$

**Exercício 1.7.9** *Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y) & = & 2x + 5y \\ f_2(x,y) & = & \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \\ f_3(x,y) & = & \frac{x+2}{y-3}. \end{cases}$$

Calcular  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ .

**Resolução:** Pela Proposição 1.6.3, calculam-se os limites componente a componente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x,y) = 0; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_3(x,y) = -\frac{2}{3}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x,y) = \frac{0}{0}.$$

**Resolução 1.7.10** *Limite segundo rectas do tipo  $y = mx$  ( $m \neq 0$ ):*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} f_2(x, mx) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} \frac{2x^3 m^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} \frac{2xm^2}{1 + m^2} = 0.$$

O  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x,y)$ , se existir, será 0. Para provar que é este valor, há que recorrer à definição:

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : \sqrt{x^2 + y^2} < \epsilon \Rightarrow |f_2(x,y) - 0| < \delta.$$

Então

$$\left| \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{2|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Portanto, desde que  $2\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ , isto é,  $\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{\delta}{2}$ , tem-se, para  $\epsilon = \frac{\delta}{2}$ , que  $|f_2(x,y) - 0| < \delta$ , provando-se que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x,y) = 0$ .

Então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \left( 0, 0, -\frac{2}{3} \right).$$

## 1.8 Continuidade. Propriedades das funções contínuas

A definição de continuidade para funções vectoriais é análogo ao caso unidimensional:

**Definição 1.8.1** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $a \in D$ .*

(i) *Diz-se que  $f$  é contínua no ponto  $a$  se*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

*Note-se que esta definição é equivalente a*

$$\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 : (\|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon \wedge x \in D) \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m} < \delta.$$

(ii)  *$f$  é contínua num conjunto  $X \subseteq D$  quando for contínua em todos os pontos de  $X$ .*

*Diz-se simplesmente que  $f$  é contínua, quando o for em todo o seu domínio.*

1.8. CONTINUIDADE. PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS 29

**Exemplo 1.8.2** *Um caso trivial de continuidade:*

Se  $a$  é um ponto isolado do conjunto  $D$  então toda a função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  é necessariamente contínua no ponto  $a$ .

Com efeito  $\exists \epsilon > 0 : V_\epsilon(a) \cap D = \{a\}$ , por ser um ponto isolado. Então, para qualquer  $\delta > 0$ , tomando este valor de  $\epsilon$ , tem-se

$$x \in D, \|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon \Rightarrow x = a \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m} = 0 < \delta.$$

As funções reais contínuas de  $n$  variáveis, gozam de propriedades e caracterização semelhantes às conhecidas para funções de uma só variável.

**Proposição 1.8.3** *Uma função é contínua em  $a$  se, e só se, para cada sucessão  $(u_n) \subset D$  tal que  $u_n \rightarrow a$  se tem  $f(u_n) \rightarrow f(a)$ .*

**Dem.**  $f$  é contínua em  $a$  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  e, pelo Teorema 1.5.3, para toda a sucessão  $u_n \rightarrow a$  se tem  $f(u_n) \rightarrow f(a)$ . ■

**Proposição 1.8.4** *(Propriedades das funções contínuas) Sejam  $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $h : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .*

Se  $f, g$  e  $h$  são funções contínuas em  $a \in D$ , então as funções

$$f + g, h f, \|f\| \text{ e } \frac{f}{h}, \text{ com } h(a) \neq 0,$$

são contínuas em  $a \in D$ .

**Dem.** A demonstração resulta directamente das propriedades dos limites (Teorema 1.6.2) e do Exercício 1.6.4. ■

**Exercício 1.8.5** *Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Estudar  $f$  quanto à continuidade.

**Resolução:** Para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , a função é contínua porque é o produto, soma e cociente de funções contínuas em que o denominador não se anula.

Para  $(x, y) = (0, 0)$ , calcular  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \left( \frac{0}{0} \right)$ . Aplicando limites direccionais, temos

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, mx) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} \frac{x^3 m^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} \frac{x m^2}{1 + m^2} = 0.$$

O limite, se existir, seria 0. Logo  $f(x, y)$  nunca poderá ser contínua em  $(0, 0)$ , pelo que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

**Exercício 1.8.6** *Estudar quanto à continuidade a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por*

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y) & = x - 2y \\ f_2(x, y) & = \frac{1}{x-y}. \end{cases}$$

**Resolução:**  $D_f = \{(x, y) : (x, y) \in D_{f_2}\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = y\}$ . Então  $f$  é contínua no seu domínio (pelas propriedades das funções contínuas).

**Teorema 1.8.7** (*Continuidade da função composta*) *Se  $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua em  $a \in A$  e  $f : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  é uma função contínua em  $b = g(a)$  então a função composta  $f \circ g$  é contínua em  $a$ .*

**Dem.** Se  $g$  é contínua em  $a$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ . Como  $f$  é contínua em  $g(a)$ , então  $\lim_{x \rightarrow g(a)} f(x) = f[g(a)]$ .

Pelo Teorema 1.6.5 tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow a} [f \circ g](x) = \lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = f[g(a)] = [f \circ g](a).$$

■

**Proposição 1.8.8** *Se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua num conjunto compacto  $A \subseteq D$ , então  $f(A)$  é um conjunto compacto de  $\mathbb{R}^m$ .*

Este enunciado é equivalente a : Se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua num conjunto  $A \subseteq D$  limitado e fechado de  $\mathbb{R}^n$ , então  $f(A)$  é um conjunto limitado e fechado de  $\mathbb{R}^m$ .

**Dem.** A demonstração é análoga ao caso de funções reais de variável real.

Apresenta-se aqui um outro proceso de demonstração baseado na caracterização de espaço compacto:

"Um espaço (normado ou métrico) diz-se compacto (para as sucessões) se toda a sucessão tem uma subsucessão convergente."

Seja  $y_n$  uma sucessão de  $f(A)$ . Então existe uma sucessão  $(u_n) \subset A$  tal que  $f(u_n) = y_n$ .

Como  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  é um conjunto compacto (limitado e fechado) então a sucessão  $u_n$  é uma sucessão limitada. Logo pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsucessão  $u_{n_k}$  convergente para  $a \in A$ .

Assim,  $y_{n_k} = f(u_{n_k}) \rightarrow f(a)$  ( porque  $f$  é contínua).

Então qualquer sucessão  $(y_n) \subset f(A)$  tem uma subsucessão convergente., isto é,  $f(A)$  é compacto. ■

## 1.9 Continuidade uniforme

Na definição de continuidade (Definição 1.8.1), mesmo depois de fixado um  $\delta > 0$ , os correspondentes  $\epsilon$  possíveis dependem do  $a$ , a que a definição diz respeito.

Há, no entanto, funções para as quais é possível, fixado um  $\delta > 0$ , encontrar um  $\epsilon > 0$  que "sirva" para todos os pontos do conjunto.

Esta situação, de grande utilidade teórica, designa-se por **continuidade uniforme**:

**Definição 1.9.1** *Uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uniformemente contínua em  $D$  se, e só se, para cada  $\delta > 0$  dado, existe um  $\epsilon > 0$ , tal que, para quaisquer  $x, y \in D$  com  $\|x - y\| < \epsilon$  se tem  $\|f(x) - f(y)\| < \delta$ .*

*Simbolicamente,  $f$  é uniformemente contínua em  $D \Leftrightarrow$*

$$\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 : \forall x, y \in D, \|x - y\| < \epsilon \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \delta.$$

**Exemplo 1.9.2** *Toda a aplicação linear*

$$A_{m \times n} : \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ x \mapsto Ax \end{array}$$

*é uniformemente contínua.*

*De facto, considerando  $x, y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|x - y\| < \epsilon$ , tem-se*

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| = \|A\| \|x - y\|.$$

*Então, dado um  $\delta > 0$  toma-se  $\epsilon = \frac{\delta}{\|A\|}$  e obtem-se, para todo os  $x, y \in \mathbb{R}^n$  que verifiquem  $\|x - y\| < \epsilon$ ,*

$$\|Ax - Ay\| = \|A\| \|x - y\| < \|A\| \frac{\delta}{\|A\|} = \delta.$$

Tal como para a continuidade pontual, pode definir-se a continuidade uniforme recorrendo a sucessões:

**Teorema 1.9.3** *Uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uniformemente contínua em  $D$  se, e só se, para quaisquer sucessões  $x_k$  e  $y_k$  em  $D$ , com  $\lim (x_k - y_k) = 0$  se tem  $\lim (f(x_k) - f(y_k)) = 0$ .*

**Dem.**  $\Rightarrow$

Suponha-se  $f$  uma função uniformemente contínua em  $D$  e sejam  $x_k$  e  $y_k$  duas sucessões em  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , com  $\lim (x_k - y_k) = 0$ .

Dado  $\delta > 0$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\|x - y\| < \epsilon, x, y \in D \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \delta$ .

Para esse  $\epsilon > 0$ , como  $\lim (x_k - y_k) = 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $k > k_0$  se tem  $\|f(x_k) - f(y_k)\| < \delta$ .

Pela arbitrariedade de  $\delta > 0$ ,  $\lim (f(x_k) - f(y_k)) = 0$ .

$\Leftarrow$

Por hipótese, para quaisquer  $x_k$  e  $y_k$  em  $D$  tais que  $\lim (x_k - y_k) = 0$  tem-se  $\lim (f(x_k) - f(y_k)) = 0$ .

Suponhamos, por absurdo, que  $f$  não é uma função uniformemente contínua em  $D$ . Então

$$\exists \delta > 0 : \forall \epsilon > 0, \exists x, y \in D : \|x - y\| < \epsilon \wedge \|f(x) - f(y)\| \geq \delta.$$

Neste caso considerando sucessivamente  $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, \dots$  obtem-se, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , um par de pontos  $x_k, y_k \in D$  com

$$\|x_k - y_k\| < \frac{1}{k} \quad \wedge \quad \|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \delta > 0.$$

Então tem-se  $\lim (x_k - y_k) = 0$  mas não se tem  $\lim (f(x_k) - f(y_k)) = 0$ , o que contradiz a hipótese. ■

**Exemplo 1.9.4** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \cos(x^2)$  não é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$ , apesar de ser uma função contínua.

Como contra-exemplo, considere-se

$$x_n = \sqrt{(n+1)\pi} \quad e \quad y_n = \sqrt{n\pi}.$$

Então

$$\begin{aligned} x_n - y_n &= \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} \\ &= \frac{(\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi})(\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi})}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}}. \end{aligned}$$

Logo  $\lim (x_n - y_n) = 0$ . Contudo

$$f(x_n) = \cos(x_n^2) = \cos\left[\left(\sqrt{(n+1)\pi}\right)^2\right] = \cos((n+1)\pi) = \pm 1$$

e

$$f(y_n) = \cos(y_n^2) = \cos\left[(\sqrt{n\pi})^2\right] = \cos(n\pi) = \mp 1,$$

pelo que

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim não se tem  $\lim(f(x_n) - f(y_n)) = 0$ .

O exemplo anterior mostra que em  $\mathbb{R}$ , num conjunto não limitado, o facto de a função ser contínua não implica a continuidade uniforme.

O mesmo se passa em intervalos abertos. Por exemplo,  $f(x) = \frac{1}{x}$  em  $]0, 1[$ .

Contudo em conjuntos compactos, a continuidade é sempre uniforme.

**Teorema 1.9.5** (Teorema de Cantor) *Se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua num compacto  $C \subseteq D$ , então  $f$  é uniformemente contínua em  $C$ .*

**Dem.** Suponhamos, por contradição que  $f$  não é uniformemente contínua num compacto  $C \subseteq D$ . Isto é,

$$\exists \delta > 0 : \forall \epsilon > 0, \exists x_k, y_k \in D : \|x_k - y_k\| < \epsilon \wedge \|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \delta.$$

Para  $\epsilon = \frac{1}{k}$ , tem-se  $\|x_k - y_k\| < \frac{1}{k} \wedge \|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \delta$ .

Como  $C$  é compacto e  $x_k$  é limitada, pode considerar-se uma subsucessão convergente  $(x_{k_j}) \subset C$  e cujo limite  $l$  também pertence a  $C$ .

Como  $\|x_k - y_k\| < \frac{1}{k}$ , a subsucessão correspondente (com os mesmos índices)  $(y_{k_j}) \subset C$  também seria convergente para  $l$ . Assim

$$\lim_{k_j \rightarrow +\infty} [f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})] = f(l) - f(l) = 0,$$

o que está em contradição com  $\|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \delta > 0$ .

Logo  $f$  é uniformemente contínua em  $C$ . ■

Vejamos conceitos de continuidade mais fortes que a continuidade uniforme, isto é, que exigem mais da função.

**Definição 1.9.6** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .*

i)  $f$  é uma função **Lipschitz** (ou contínua no sentido de Lipschitz, ou que satisfaz a condição de Lipschitz) em  $X \subseteq D$ , se existir uma constante  $k > 0$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|, \forall x, y \in X.$$

- ii)  $f$  é uma função **Hölder-contínua** (ou contínua no sentido de Hölder, ou que satisfaz a condição de Hölder de ordem  $\alpha$ ) em  $X \subseteq D$ , se existirem constantes  $k > 0$  e  $0 < \alpha \leq 1$  tais que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|^\alpha, \quad \forall x, y \in X.$$

## 1.10 Exercícios

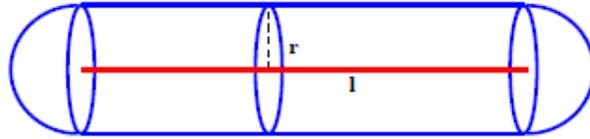
1. Determine o valor de cada uma das funções definidas de  $\mathbb{R}^2$  para  $\mathbb{R}$ , nos pontos indicados:

a)  $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2 - x$  em  $(0, 1)$ ,  $(-2, 3)$  e  $(2, -3)$ ;

b)  $g(s, t) = \frac{2st}{s^2+t^2}$  em  $(1, 0)$ ,  $(-3, 4)$  e  $(5, 5)$ ;

c)  $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$  em  $(-1, 0)$ ,  $(e, 0)$  e  $(-3, -4)$ .

2. Um tanque para armazenamento de oxigênio líquido num hospital deve ter a forma de um cilindro de raio  $r$  e de altura  $l$  (ambos dados em metros), com um hemisfério em cada extremidade.



- a) Calcule a capacidade do tanque em função da altura  $l$  e do raio  $r$ .
- b) Calcule o valor da capacidade de um tanque de altura  $8m$  e de raio  $1m$ .

3. O índice de massa corporal humano (IMC) é expresso em função do peso  $P$ , em quilos, e da altura  $A$ , em metros, por

$$IMC(P, A) = \frac{P}{A^2}.$$

O IMC indica se uma pessoa está acima ou abaixo do peso ideal, segundo a seguinte tabela da Organização Mundial da Saúde:

Condição ponderal	IMC
Abaixo do peso	$IMC < 18.5$
Peso normal	$18.5 \leq IMC \leq 25$
Excesso de peso	$25 \leq IMC \leq 30$
Obesidade	$IMC > 30$

- a) Qual a condição ponderal de uma pessoa que mede  $1.65m$  e pesa  $95kg$  ?
- b) Se uma pessoa mede  $1.80m$  entre que valores poderá variar o seu peso, de modo a possuir uma condição ponderal normal ?

4. Quando um poluente é emitido por uma chaminé de  $h$  metros de altura, a concentração do poluente, a  $x$  metros da origem da emissão e a  $y$  metros do chão pode ser aproximada por

$$P(x, y) = \frac{a}{x^2} \left( e^{h(x,y)} + e^{k(x,y)} \right)$$

com

$$h(x, y) = -\frac{b}{x^2} (y - h)^2 \quad \text{e} \quad k(x, y) = -\frac{b}{x^2} (y + h)^2.$$

A concentração do poluente  $P$  é medido em  $\mu g/m^2$  ( $\mu g$ =microgramas), sendo  $a$  e  $b$  constantes que dependem das condições atmosféricas e da taxa de emissão do poluente.

Considere  $a = 200$  e  $b = -0.002$ .

- a) Se uma fábrica tiver uma chaminé de  $10m$  de altura, determine a contaminação a  $1km$  de distância e a uma altura de  $2m$ .
- b) Para os valores indicados dos parâmetros, se a altura da chaminé de uma fábrica for de  $15m$ , a que distância da fábrica se deve colocar da fábrica, de modo que a contaminação a altura de  $1m$  seja, no máximo, de  $0.05\mu g/m^2$  ?

5. O fluxo sanguíneo através de um vaso, como artérias ou veias, que se consideram como vasos com formato cilíndrico não elástico (Lei do fluxo laminar de Poiseuille).

sangue



Represente-se por  $R$  o raio e  $l$  o comprimento, medidos em  $cm$ . Devido à fricção nas paredes do vaso, a velocidade  $v$  do sangue é maior ao longo do eixo central do vaso e decresce se a distância  $d$  ( $cm$ ) do eixo à parede cresce e é zero na parede.

A função velocidade  $v$  é uma função de quatro variáveis:

$$v(P, R, l, d, \eta) = \frac{P (R^2 - d^2)}{4l\eta},$$

onde  $\eta$  é a viscosidade do sangue e  $P$  a diferença entre a pressão da entrada e a da saída do sangue no vaso.

Experimentalmente, para o sangue humano numa veia, temos  $\eta = 0.0027$ .

Calcule a velocidade do fluxo sanguíneo, se  $l = 1.675$ ,  $R = 0.0075$ ,  $P = 4 \times 10^3$  e  $d = 0.004$ .

**6.** Um modelo simplificado (modelo de Cobb-Douglas) para estimar o crescimento da economia de um país, é determinado pela quantidade de trabalho e pelo capital investido. A função utilizada para modelar a produção é da forma

$$P(T, C) = 1,01 T^{0,75} C^{0,25},$$

onde  $P$  é a produção total (valor dos bens produzidos no ano),  $T$  é a quantidade de trabalho (número total de pessoas-hora trabalhadas no ano) e  $C$  é o capital investido (valor monetário das máquinas, equipamentos e prédios).

**a)** Determine o domínio da função  $P$ . Faça um esboço.

**b)** No ano A, os valores da produção, do trabalho e do capital, foram respectivamente, de 231, 194 e 407 em unidades apropriadas.

Calcular a produção no ano A.

**c)** O que acontece com a produção se o trabalho e o capital investido duplicarem ambos?

**d)** Que alteração tem a produção se o trabalho e o capital investido forem multiplicados por um número positivo  $k$  ?

**7.** Encontre o domínio  $D$  das funções abaixo e, quando possível, represente-os graficamente:

**a)**  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 16}$

**b)**  $g(x, y) = \ln(y + x^2)$

**c)**  $h(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} + \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$

**d)**  $f(x, y) = \arcsen(x + y)$ .

**8.** Para as funções abaixo indicadas, indique o seu domínio, indique, se existir, o limite na origem e o conjunto onde a função é contínua:

**a)**  $f(x, y) = \frac{x^2 - 2}{3 + xy}$

**b)**  $g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

c) 
$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2+3y^2}{3x^2-y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad D = \{3x^2 - y^2 \neq 0\} \cup \{(0, 0)\},$$
  
não tem limite, é contínua em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

d) 
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \operatorname{sen}(y) y^2 \operatorname{sen}(x)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{contínua em } \mathbb{R}^2$$

## Capítulo 2

# Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

Recorde-se a definição de derivada para funções reais de variável real, isto é,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , e do seu significado geométrico:

**Definição 2.0.1** *Seja  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo aberto e  $a \in I$ .*

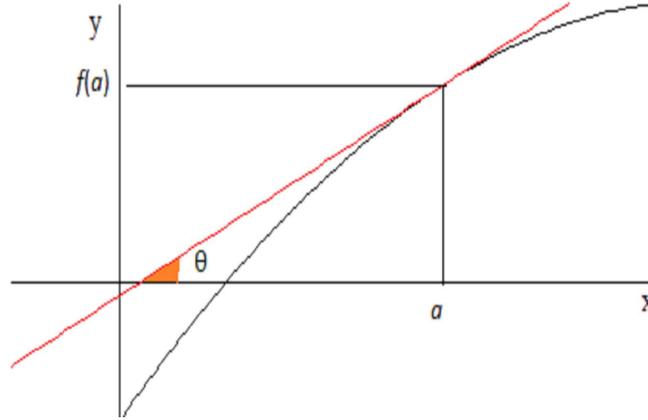
(i) *Designa-se por **derivada** de  $f$  no ponto  $a$  (quando exista) e representa-se por*

$$\left(\frac{df}{dx}\right)(a) \text{ ou } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

(ii) *Se este limite existir e for finito, a função diz-se **derivável** ou **diferenciável** no ponto  $a$ .*

*Geometricamente, representando  $f(x)$  num referencial ortonormado, se  $f$  é diferenciável em  $a$ , e designando por  $\theta$  o ângulo que a tangente à curva no ponto  $(a, f(a))$  forma com a parte positiva do eixo das abscissas, tem-se  $f'(a) = \tan \theta$  (coeficiente angular da tangente ou declive*

da recta tangente).



- (iii) Se  $f(x)$  for diferenciável em todos os pontos de um conjunto  $I$ , chama-se derivada de  $f$  à função que a cada  $x \in I$ , associa  $f'(x)$  (ou  $\frac{df}{dx}$ ).

Passando a funções reais definidas em  $\mathbb{R}^n$ , por economia de escrita restringe-se a funções de duas variáveis.

## 2.1 Derivação parcial de 1<sup>a</sup> ordem

**Definição 2.1.1** Seja  $(a, b)$  um ponto do domínio da função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (i) Fazendo  $y = b$ , obtém-se uma função de apenas uma variável  $f(x, b)$ . Se esta última função for derivável no ponto  $a$ , chama-se **derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  no ponto  $(a, b)$**  a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a, b) \text{ ou } f'_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

- (ii) De modo análogo, chama-se **derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$  no ponto  $(a, b)$**  a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a, b) \text{ ou } f'_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}.$$

(iii) Se a função  $f$  tiver derivada parcial em ordem a  $x$  em todos os pontos de  $A \subseteq D$ , chama-se **derivada parcial de  $f$  em ordem a  $x$**  à função que a cada ponto de  $(x, y) \in A$  associa  $f'_x(x, y)$ , designando-se então por  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ou  $f'_x$ .

Analogamente se define a função **derivada parcial de  $f$  em ordem a  $y$** , designando-se então por  $\frac{\partial f}{\partial y}$  ou  $f'_y$ .

A definição anterior mostra que o cálculo das derivadas parciais se sujeita às regras de derivação válidas para funções de variável real.

**Exemplo 2.1.2** Determinar as derivadas parciais de  $f(x, y) = x^3 + y^2$  no ponto  $(1, 2)$

a) Usando a definição:

b) Aplicando as regras de derivação.

**Resolução:** a)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(1, 2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 2) - f(1, 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 + 4 - 5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(1, 2) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(1, 2+k) - f(1, 2)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1 + (2+k)^2 - 5}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{4 + 4k + k^2 - 4}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} (4 + 4k) = 4. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = 3x^2; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(1, 2) = 3 \times 1 = 3.$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = 2y; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(1, 2) = 2 \times 2 = 4.$$

Generalizando a Definição 2.1.1 a funções de  $n$  variáveis, tem-se

**Definição 2.1.3** Considere-se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in D$ . Chama-se **derivada parcial de  $f$  em relação à  $i$ -ésima variável** ( $1 \leq i \leq n$ ) ao limite

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) \text{ ou } f'_{x_i}(a) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(a + \eta e_i) - f(a)}{\eta},$$

quando este exista.

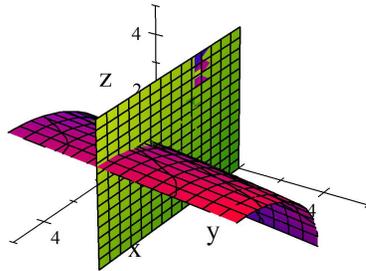
## 2.2 Significado geométrico das derivadas de 1<sup>a</sup> ordem

Para a função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , ao conjunto

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\}$$

chama-se o gráfico de  $f(x, y)$  e os pontos de  $\mathbb{R}^3$  que o constituem representam uma parte de uma superfície, sendo  $x$  a abcissa,  $y$  a ordenada e  $z = f(x, y)$  a cota de cada um dos seus pontos no referencial ortonormado.

Fazer  $y = b$  em  $f(x, y)$  corresponde a seccionar a superfície  $z = f(x, y)$  por um plano  $y = b$ , paralelo a  $xOz$ .



Tal como a função real de variável real,  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a, b)$  representa o declive da tangente a  $f(x, b)$  no plano  $y = b$ , no ponto  $(a, b)$ . De modo análogo,  $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a, b)$  representa o declive da tangente a  $f(a, y)$  no plano  $x = a$ , no ponto  $(a, b)$ .

## 2.3 Derivadas de ordem superior

Tal como para as funções reais de variável real, é possível falar-se de derivadas de ordem superior à primeira.

Veja-se o caso de funções reais de duas variáveis, que possuem duas derivadas de 1<sup>a</sup> ordem ( $f'_x(x, y)$  e  $f'_y(x, y)$ ) as quais, por sua vez, são também funções de duas variáveis, definidas em conjuntos de  $\mathbb{R}^2$ .

Designa-se por  $f''_{x^2}$  ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  a derivada parcial de 2<sup>a</sup> ordem de  $f(x, y)$  duas vezes em relação a  $x$ . Análogamente para  $f''_{y^2}$  ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ .

Representa-se por  $f''_{xy}$  ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  a derivada parcial de 2ª ordem de  $f(x, y)$  primeiro em ordem a  $x$  e depois em ordem a  $y$ . De modo semelhante para  $f''_{yx}$  ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

A partir destas definiremos as derivadas de 3ª ordem e assim sucessivamente, como sugere o esquema:

$$f(x, y) = \begin{cases} f'_x(x, y) \begin{cases} f''_{x^2}(x, y) \begin{cases} f'''_{x^3}(x, y) \\ f'''_{x^2y}(x, y) \end{cases} \\ f''_{xy}(x, y) \begin{cases} f'''_{xyx}(x, y) \\ f'''_{xy^2}(x, y) \end{cases} \end{cases} \\ f'_y(x, y) \begin{cases} f''_{yx}(x, y) \begin{cases} f'''_{yx^2}(x, y) \\ f'''_{yxy}(x, y) \end{cases} \\ f''_{y^2}(x, y) \begin{cases} f'''_{y^2x}(x, y) \\ f'''_{y^3}(x, y) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

As derivadas do tipo  $f''_{x^2}$  e  $f''_{y^2}$  designam-se por **derivadas quadradas** e as do tipo  $f''_{xy}$  e  $f''_{yx}$  por **derivadas cruzadas ou mistas**.

De uma forma análoga se definem as derivadas parciais de uma função com três variáveis  $f(x, y, z)$  definidas em subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ .

Por exemplo,  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$  representa a derivada parcial de 3ª ordem, primeiro em relação a  $x$ , depois a  $y$  e finalmente em ordem a  $z$ .

**Observação 2.3.1** De uma forma geral:

- (i) Uma função de duas variáveis possui  $2^n$  derivadas de ordem  $n$ .
- (ii) Uma função de  $p$  variáveis possui  $p^n$  derivadas de ordem  $n$ .

Veja-se a título de exemplo, como se pode estender a definição de segundas derivadas parciais, para uma função de duas variáveis:

**Exemplo 2.3.2** Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in D$ .

$$\text{a) } f''_{x^2}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(a+h, b) - f'_x(a, b)}{h};$$

$$\text{b) } f''_{xy}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f'_x(a, b+k) - f'_x(a, b)}{k};$$

$$\text{c) } f''_{yx}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(a+h, b) - f'_y(a, b)}{h};$$

$$\text{d)} \quad f''_{y^2}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f'_y(a, b+k) - f'_y(a, b)}{k}.$$

Caso não seja obrigatório o recurso às definições anteriores, pode aplicar-se as regras de derivação para calcular as derivadas.

**Exercício 2.3.3** *Calcular as segundas derivadas da função*

$$f(x, y) = x^2 \cos y + y^3.$$

**Resolução:**

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x \cos y; & f''_{x^2}(x, y) &= 2 \cos y; & f''_{xy}(x, y) &= -2x \operatorname{sen} y; \\ f'_y(x, y) &= -x^2 \operatorname{sen} y + 3y^2; & f''_{yx}(x, y) &= -2x \operatorname{sen} y; \\ f''_{y^2}(x, y) &= -x^2 \cos y + 6y. \end{aligned}$$

**Exercício 2.3.4** *Considere a função*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calcular: **a)**  $f''_{xy}(0, 0)$ ;

**b)**  $f''_{yx}(0, 0)$

**Resolução:** **a)** É necessário utilizar a definição

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, 0+k) - f'_x(0, 0)}{k}.$$

Note-se que o cálculo de  $f'_x(0, k)$  pode ser realizado com recurso às regras de derivação. Assim  $f'_x(0, k) = \frac{1}{k}$ .

O cálculo de  $f'_x(0, 0)$  tem que ser por definição

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Então

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{k} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k^2} = +\infty.$$

**b)** O processo é análogo ao anterior.

**Exercício 2.3.5** Calcular  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$  para

$$f(x, y) = e^{xy} - 4y^2x + 5x^2y.$$

**Exercício 2.3.6** Considere

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

a) Indique o domínio de definição de  $f$ ,  $D$

b) Mostre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \quad \forall (x, y, z) \in D.$$

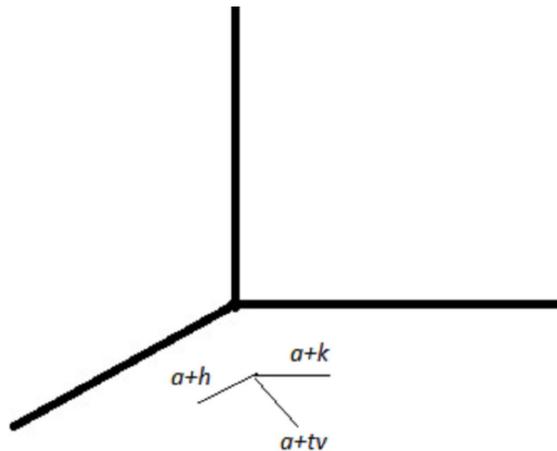
## 2.4 Derivada direccional

A definição de derivadas parciais de 1ª ordem (Definição 2.1.1) para funções  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  permite concluir que as razões incrementais, quando os limites existem, resultam de considerar acréscimos da função segundo segmentos paralelos a algum dos eixos coordenados.

Este facto sugere uma generalização do conceito de derivada parcial: derivada segundo um vector ou derivada direccional ou derivada dirigida.

**Definição 2.4.1** Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida num conjunto  $D$  aberto,  $a \in D$  e  $v \in \mathbb{R}^n$ . chama-se **derivada de  $f$  no ponto  $a$  segundo o vector  $v$  ao limite**, quando existe,

$$f'_v(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$



**Observação 2.4.2 (i)** A derivada de  $f$  segundo um vector  $v$  pode ser entendida como a derivada no ponto  $t = 0$  da função composta entre  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\lambda : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , isto é,  $(f \circ \lambda) : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $\lambda$  é o caminho rectilíneo  $\lambda(t) = a + tv$ , para o qual se tem  $\lambda(0) = a$  e  $\lambda'(t) = v, \forall t$ .

Nesta definição  $\varepsilon$  é escolhido suficientemente pequeno para que a imagem de  $\lambda$  esteja contida em  $D$ .

**(ii)** Quando  $\|v\| = 1$  as derivadas segundo vectores costumam designar-se por **derivadas direccionais**.

Outra designação, é a de **derivada dirigida segundo  $v$** . Esta designação revela-se mais correcta pois a derivada não depende apenas da direcção do vector, mas também do seu sentido.

**(iii)** A derivada segundo um vector é uma generalização das derivadas parciais. De facto se, por exemplo, em  $\mathbb{R}^2$ , considerarmos a base canónica  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , calculando

$$\begin{aligned} f'_{\vec{e}_1}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\vec{e}_1) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t} = f'_x(a). \end{aligned}$$

Analogamente para  $f'_{\vec{e}_2}(a) = f'_y(a)$ .

**(iv)** O significado da derivada dirigida ( $\|v\| = 1$ ) é análogo:  $f'_v(a) = \tan \theta$ , sendo  $\theta$  ângulo formado:

- pela tangente à curva que resulta da intersecção do plano perpendicular a  $X_1OX_2$  que contem o vector  $v$  aplicado ao ponto  $a$ ;
- pelo vector  $v$  no plano  $X_1OX_2$ .

**Exercício 2.4.3** Calcular a derivada de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = \ln(e^{2x} + e^y)$  no ponto  $(1, 2)$ , segundo uma direcção que forma com o eixo  $OX$  um ângulo de  $\frac{\pi}{4}$ .

**Resolução 2.4.4** A direcção considerada pode ser representada por vários vectores. Vejamos dois casos:

a) segundo o vector  $v = (1, 1)$

$$\begin{aligned} f'_v(1, 2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((1, 2) + t(1, 1)) - f(1, 2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2(1+t)} + e^{2+t}) - \ln(e^2 + e^2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2+2t} + e^{2+t}) - \ln(2e^2)}{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{2e^{2+2t} + e^{2+t}}{e^{2+2t} + e^{2+t}}}{1} = \frac{3e^2}{2e^2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

b) segundo o vector  $u = (2, 2)$

$$f'_u(1, 2) = 3 = 2 \times f'_v(1, 2).$$

**Exercício 2.4.5** Prove que a derivada de  $f$  segundo um vector depende linearmente de  $v$ . Isto é, para  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in D$ ,  $f'_v(a)$  existe se, e só se,  $f'_{\alpha v}(a)$  existe  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e em caso afirmativo

$$f'_{\alpha v}(a) = \alpha f'_v(a).$$

**Resolução:**

$$\begin{aligned} f'_{\alpha v}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\alpha v) - f(a)}{t} \\ &= \alpha \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + (t\alpha)v) - f(a)}{\alpha t} = \alpha f'_v(a). \end{aligned}$$

**Observação 2.4.6** (i) Um caso particular do resultado anterior será, para  $\alpha = -1$

$$f'_{-v}(a) = -f'_v(a).$$

(ii) Fixado um vector  $u$ , há vantagem em considerar a derivada segundo o versor de  $u := \frac{u}{\|u\|}$ , de modo a obter um vector unitário, que fornece uma unidade geradora para a derivada.

Isto é, para obter  $|f'_w(a)|$  com  $w = kv$ , basta fazer  $\|w\| |f'_{vers v}(a)|$ .

**Exercício 2.4.7** Considere-se  $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Prove que a derivada de  $g(x, y)$  existe segundo qualquer vector em qualquer ponto de  $\mathbb{R}^2$ .

**Resolução:** Para  $(x, y) \neq (0, 0)$  trata-se de um cálculo directo, aplicando a definição.

Para  $(x, y) = (0, 0)$  tem-se

$$\begin{aligned} g'_v(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g((0, 0) + t(v_1, v_2)) - g(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2 v_1^2 + t v_2}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2}}{t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^3 (v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}. \end{aligned}$$

Então  $g(x, y)$  admite derivadas em qualquer ponto de  $\mathbb{R}^2$  segundo qualquer vector de  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.5 Funções diferenciáveis. Diferencial e gradiente

Atente-se no seguinte exercício:

**Exercício 2.5.1** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{se } x = 0 \vee y = 0 \\ 1 & \text{se } x \neq 0 \wedge y \neq 0. \end{cases}$$

- a) Mostre que  $f$  tem derivadas parciais finitas em  $(0, 0)$ .  
 b) Prove que  $f$  não é contínua em  $(0, 0)$ .

**Resolução: a)**  $f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1.$

$f'_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{k} = 1.$

**b)**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = 0}} f(x, 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = 0}} x = 0,$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx \ (m \neq 0)}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx \ (m \neq 0)}} f(x, mx) = 1.$

Logo, não existe  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ , pelo que  $f$  não é contínua em  $(0, 0)$ .

**Observação 2.5.2** A existência de derivadas parciais finitas num ponto não implica a continuidade nesse ponto. No entanto implica a continuidade relativamente a cada variável.

O mesmo acontece com as derivadas segundo um vector, conforme se comprova no exercício seguinte.

**Exercício 2.5.3** Seja  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Prove que existem derivadas direccionais finitas de  $g$  em  $(0, 0)$ .

b) Mostre que  $g$  é descontínua em  $(0, 0)$ .

**Resolução: a)**

$$\begin{aligned} g'_v(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g((0, 0) + t(v_1, v_2)) - g(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 v_1^3 t v_2}{t^6 v_1^6 + t^2 v_2^2}}{t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t v_1^3 v_2}{t^4 v_1^6 + v_2^2} = 0. \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x^3}} g(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x^3}} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \frac{1}{2} \neq g(0, 0).$$

Assim, mesmo que o limite exista, será  $\frac{1}{2} \neq g(0, 0)$ . Então  $g(x, y)$  não é contínua em  $(0, 0)$ .

A hipótese de existência das derivadas segundo qualquer vector, ou, em particular, das derivadas parciais, embora fraca, não é desprovida de utilidade. Entre outras, permite demonstrar o teorema seguinte, que constitui a generalização do Teorema de Lagrange a funções de mais de uma variável:

**Teorema 2.5.4** (*Teorema do valor médio ou dos acréscimos finitos*) Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida num conjunto aberto  $D$ . Suponhamos que  $[a, a + v] \subseteq D$ , que  $f$  é contínua em  $[a, a + v]$  e que existe a derivada de  $f$  segundo o vector  $v$ ,  $f'_v(x)$ , para todo o ponto  $x \in ]a, a + v[$ . Então, existe  $\theta \in ]0, 1[$  tal que

$$f(a + v) - f(a) = f'_v(a + \theta v).$$

**Dem.** Defina-se a função real de variável real  $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\eta(t) = f(a + tv)$ .

Note-se que  $\eta(0) = f(a)$  e  $\eta(1) = f(a + v)$ .

Pelas hipóteses sobre  $f$ , a função  $\eta$  é contínua em  $[0, 1]$  e diferenciável em  $]0, 1[$ . Pelo Teorema de Lagrange para funções de uma variável real, existe

$\theta \in ]0, 1[$  tal que

$$\begin{aligned} f(a+v) - f(a) &= \frac{\eta(1) - \eta(0)}{1 - 0} = \eta'(\theta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta(\theta + t) - \eta(\theta)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + (\theta + t)v) - f(a + \theta v)}{t} = f'_v(a + \theta v). \end{aligned}$$

■

Para recuperar a relação entre diferenciabilidade e continuidade é necessário uma nova definição de função diferenciável:

**Definição 2.5.5** Considere-se uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  um conjunto aberto e  $a \in D$ .

(i) A função  $f$  diz-se **diferenciável no ponto**  $a$  se existirem constantes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tais que, para todo o vector  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  se tenha

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= h_1\alpha_1 + \dots + h_n\alpha_n + \varepsilon\rho, \\ \text{com } \rho &= \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2} \text{ e } \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon = 0. \end{aligned}$$

(ii) Se  $f$  é diferenciável em todos os pontos de  $D$ , diz-se simplesmente que  $f$  é **diferenciável**.

**Observação 2.5.6 a)** Resulta da definição anterior que se é diferenciável em  $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$  então:

- $f$  é contínua em  $a$ , porque  $\lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ \vdots \\ h_n \rightarrow 0}} f(a+h) = f(a)$ .

- $f$  admite derivadas parciais de 1ª ordem em  $a$ , com

$$\begin{aligned} f'_{x_1}(a) &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(\alpha_1 + h_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) - f(a)}{h_1} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\alpha_1 h_1 + \varepsilon\rho}{h_1} \\ &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\alpha_1 h_1 + \varepsilon|h_1|}{h_1} = \alpha_1. \end{aligned}$$

Analogamente se prova que  $f'_{x_i}(a) = \alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**b)** Note-se que a recíproca da alínea anterior não é verdadeira.

Veja-se o contra-exemplo da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  e definida em todo o plano.

A função  $f(x, y)$  :

2.5. FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS. DIFERENCIAL E GRADIENTE 51

- admite derivadas parciais na origem ( $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ );
- é contínua em  $(0, 0)$ , pois

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : \forall (x, y), \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon \implies |f(x, y) - 0| < \delta$$

e

$$\sqrt{|xy|} = \sqrt{|x||y|} \leq \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon < \delta.$$

- não é diferenciável em  $(0, 0)$ , pois

$$f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) = h_1 f'_x(0, 0) + h_2 f'_y(0, 0) + \varepsilon \rho$$

com  $\rho = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ . Assim  $f(h_1, h_2) = \varepsilon \rho$  e então

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Para verificar se  $\lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \rightarrow 0}} \varepsilon = 0$ , note-se que

$$\lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 = m h_1}} \varepsilon = \lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 = m h_1}} \frac{\sqrt{|m|} h_1^2}{\sqrt{h_1^2 + m^2 h_1^2}} = \lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 = m h_1}} \frac{\sqrt{|m|} |h_1|}{\sqrt{1 + m^2} |h_1|} = \frac{\sqrt{|m|}}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Logo este limite não existe.

c) Na prática, a diferenciabilidade traduz que a função pode ser aproximada, na vizinhança de  $a$ , por uma função linear  $h_1 \alpha_1 + \dots + h_n \alpha_n + f(a)$ , com um erro desprezável em comparação com  $\rho$  ( $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon = 0$ ).

**Exercício 2.5.7** Estude a função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

quanto à diferenciabilidade no ponto  $(0, 0)$ .

**Resolução:** Pretende-se verificar se  $f(h_1, h_2) - f(0, 0) = h_1 f'_x(0, 0) + h_2 f'_y(0, 0) + \varepsilon \rho$ , com  $\rho = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$  e  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon = 0$ . Como  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ , tem-se

$$\frac{h_1^3 h_2}{h_1^2 + h_2^2} = \varepsilon \sqrt{h_1^2 + h_2^2}, \text{ pelo que } \varepsilon = \frac{h_1^3 h_2}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Para verificar se  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{h_1^3 h_2}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right| &= \frac{|h_1^3| |h_2|}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{(\sqrt{h_1^2 + h_2^2})^3 \sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \eta < \delta. \end{aligned}$$

Então  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon = 0$ , pelo que  $f(x, y)$  é diferenciável em  $(0, 0)$ .

Em face da Observação 2.5.6 a), a diferenciabilidade de uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $D$  aberto, no ponto  $a$  pode reescrever-se relacionando as constantes  $\alpha_i$  com as derivadas parciais no ponto  $a$  :

**Teorema 2.5.8** *A função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $a$  se, e só se, nalguma vizinhança desse ponto se tiver, para  $h = (h_1, \dots, h_n)$ ,*

$$f(a + h) - f(a) = h_1 f'_{x_1}(a) + \dots + h_n f'_{x_n}(a) + \varepsilon \rho,$$

com  $\rho = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$  e  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon = 0$ .

**Dem.** Aplicar a Observação 2.5.6 na Definição 2.5.5. ■

O acréscimo representado pelo primeiro membro depende não só do ponto  $a$ , mas também do vector  $h = (h_1, \dots, h_n)$ , o mesmo acontecendo à soma  $h_1 f'_{x_1}(a) + \dots + h_n f'_{x_n}(a)$ , que dará um valor aproximado desse acréscimo.

**Definição 2.5.9** *À soma  $h_1 f'_{x_1}(a) + \dots + h_n f'_{x_n}(a)$  chamamos diferencial da função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  no ponto  $a$ , relativo ao vector  $h = (h_1, \dots, h_n)$ , e escreve-se*

$$(df)_h(a) = h_1 f'_{x_1}(a) + \dots + h_n f'_{x_n}(a).$$

**Definição 2.5.10** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma diferenciável num conjunto aberto  $D$ . Ao operador*

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i$$

*chama-se gradiente de  $f$  e representa-se por  $\text{grad } f$  ou  $\nabla f$ .*

**Observação 2.5.11** *Uma consequência imediata desta definição é que o escalar definido na Definição 2.5.9 pode escrever-se, para  $h = (h_1, \dots, h_n)$ ,*

$$(df)_h(a) = (\text{grad } f)(a) \mid h.$$

Na Observação 2.5.6 provou-se que a recíproca da implicação

$$f \text{ é diferenciável em } x \implies f \text{ é contínua em } x$$

não é verdadeira. No entanto, há toda a vantagem em estabelecer condições suficientes de diferenciabilidade:

**Teorema 2.5.12** *Se a função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  admite derivadas parciais de 1ª ordem, então  $f$  é diferenciável em todos os pontos em que  $n-1$  dessas derivadas sejam contínuas.*

**Dem.** Limitando-nos a  $\mathbb{R}^2$  considere-se a igualdade

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) &= [f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2)] \\ &\quad + [f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2)]. \end{aligned}$$

Note-se que:

- Atendendo à definição de derivada (Definição 2.1.1), a segunda parcela do segundo membro pode escrever-se

$$f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2) = h_1 [f'_{x_1}(a_1, a_2) + \varepsilon_1],$$

$$\text{com } \lim_{h_1 \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0;$$

- Pelo Teorema 2.5.4 aplicado à 2ª variável, na primeira parcela, tem-se

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) = h_2 [f'_{x_2}(a_1 + h_1, a_2) + \theta h_2].$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) &= h_1 [f'_{x_1}(a_1, a_2) + \varepsilon_1] \\ &\quad + h_2 [f'_{x_2}(a_1 + h_1, a_2 + \theta h_2)], \end{aligned}$$

$$\text{com } 0 < \theta < 1 \text{ e } \lim_{h_1 \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0.$$

Por hipótese, pelo menos uma das derivadas é contínua. Suponhamos que  $f'_{x_2}$  é contínua em  $(a_1, a_2)$ .

Então

$$f'_{x_2}(a_1 + h_1, a_2 + \theta h_2) = f'_{x_2}(a_1, a_2) + \varepsilon_2,$$

com  $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_2 = 0$ . Então

$$\begin{aligned} & f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \\ &= h_1 [f'_{x_1}(a_1, a_2) + \varepsilon_1] + h_2 [f'_{x_2}(a_1, a_2) + \varepsilon_2] \\ &= h_1 f'_{x_1}(a_1, a_2) + \varepsilon_1 h_1 + h_2 f'_{x_2}(a_1, a_2) + \varepsilon_2 h_2. \end{aligned}$$

Como se verifica que  $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} (\varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2) = 0$ , então  $f$  é diferenciável em  $(a_1, a_2)$ .

Se se admitisse que  $f'_{x_1}$  fosse contínua então a demonstração começaria com a igualdade

$$\begin{aligned} & f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \\ &= [f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2)] + [f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)] \\ &= h_1 f'_{x_1}(a_1 + \theta h_1, a_2 + h_2) + h_2 [f'_{x_2}(a_1, a_2) + \varepsilon_2]. \end{aligned}$$

■

A demonstração para uma função de  $n$  variáveis é análoga, incrementando uma variável de cada vez e admitindo a continuidade numa delas.

**Definição 2.5.13** Uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se de classe  $C^r$ ,  $r \in \mathbb{N}_0$ , num conjunto  $S \subseteq D$ , e representa-se por  $f \in C^r(S)$ , se admite derivadas parciais contínuas até à ordem  $r$ , em todos os pontos de  $S$ .

Do teorema anterior resulta que:

**Corolário 2.5.14** Toda a função de classe  $C^1$  é diferenciável.

**Dem.** Se  $f \in C^1$  então  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são contínuas. Logo, pelo Teorema 2.5.12,  $f$  é diferenciável. ■

As condições do Teorema 2.5.12 e do Corolário 2.5.14 são suficientes mas não necessárias, como se pode comprovar pelo exercício seguinte:

**Exercício 2.5.15** Mostre que a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) & \text{se } xy \neq 0 \\ x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \wedge y = 0 \\ y^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) & \text{se } x = 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é diferenciável na origem apesar de nenhuma das derivadas parciais aí ser contínua.

**Resolução:** Da igualdade

$$f(h_1, h_2) - f(0, 0) = h_1 f'_x(0, 0) + h_2 f'_y(0, 0) + \varepsilon \rho,$$

e como

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(h_1, 0) - 0}{h_1} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{h_1^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h_1}\right)}{h_1} = 0 = f'_y(0, 0),$$

resulta

$$h_1^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h_1}\right) + h_2^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h_2}\right) = \varepsilon \rho$$

e

$$\varepsilon = \frac{h_1^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h_1}\right) + h_2^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h_2}\right)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Basta agora provar, por definição, que  $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon = 0$ , isto é,

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : \sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \eta \Rightarrow |\varepsilon - 0| < \delta.$$

Ora, como

$$\left| \frac{h_1^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h_1}\right) + h_2^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h_2}\right)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leq \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \eta,$$

basta tomar  $\eta < \delta$  para que  $|\varepsilon| < \delta$ . Então  $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon = 0$ , pelo que  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ .

Por outro lado

$$f'_x(x, 0) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Quando  $x \rightarrow 0 \wedge y = 0$ , não existe  $\lim f'_x$ , pelo que  $f'_x$  não é contínua em  $(0, 0)$ .

Analogamente para  $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x=0}} f'_y$ .

**Exercício 2.5.16** Considere a função  $f(x, y) = (\ln x) \sqrt{y}$ .

- a) Estude  $f$  quanto à diferenciabilidade.
- b) Calcule, recorrendo ao diferencial, um valor aproximado de  $f(1.07; 3.98)$ .

**Resolução:** a) Domínio de  $f$

$$Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y \geq 0\}.$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}\sqrt{y}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = (\ln x) \frac{1}{2\sqrt{y}}$ , pelo Teorema 2.5.12,  $f(x, y)$  é diferenciável num conjunto que contenha

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\},$$

pelo que neste conjunto, pelo menos uma das derivadas é contínua.

b)

$$\begin{aligned} f(1 + 0.07; 4 - 0.02) - f(1.4) &= \frac{\partial f}{\partial x}(1.4) \times 0.07 + \frac{\partial f}{\partial y}(1.4) \times (-0.02) \\ &= 2 \times 0.07 + 0 = 0.14. \end{aligned}$$

Pode demonstrar-se que se uma função real  $f$  é diferenciável então:

- $f$  admite derivada segundo qualquer vector  $u$ ;
- $f'_u(a)$  identifica-se com o diferencial, ou seja, é combinação linear das derivadas parciais, fornecendo uma regra prática para o determinar:

**Teorema 2.5.17** *Se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $a \in D$ , conjunto aberto, então, para qualquer  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,*

$$f'_u(a) = f'_{x_1}(a) \times u_1 + \dots + f'_{x_n}(a) \times u_n = (df)_u(a)$$

ou seja,

$$f'_u(a) = (df)_u(a) = (\text{grad } f)(a) \mid u.$$

**Dem.** Pela definição de derivada segundo um vector, Definição 2.4.1,

$$\begin{aligned} f'_u(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tu_1 f'_{x_1}(a) + \dots + tu_n f'_{x_n}(a) + \varepsilon \rho}{t}. \end{aligned}$$

2.5. FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS. DIFERENCIAL E GRADIENTE 57

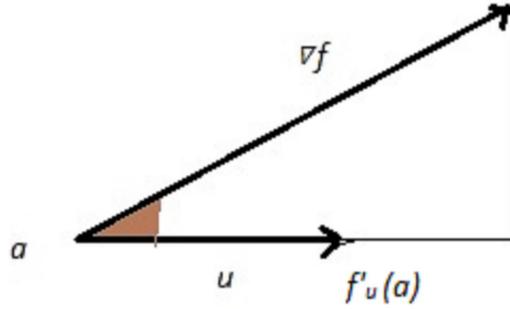
Como  $\rho = \sqrt{t^2 u_1^2 + \cdots + t^2 u_n^2} = |t| \|u\|$ , temos

$$\begin{aligned} f'_u(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t [u_1 f'_{x_1}(a) + \cdots + u_n f'_{x_n}(a) \pm \varepsilon \|u\|]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} u_1 f'_{x_1}(a) + \cdots + u_n f'_{x_n}(a) \pm \varepsilon \|u\| \\ &= u_1 f'_{x_1}(a) + \cdots + u_n f'_{x_n}(a) = (df)_u(a) \\ &= (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n})(a) \mid (u_1, \dots, u_n) = (\text{grad } f)(a) \mid u. \end{aligned}$$

■

Este processo de escrever a derivada direccional permite uma interpretação geométrica quando  $\|u\| = 1$ , ou seja, neste caso é possível atribuir um significado geométrico ao gradiente:

Suponha-se que  $(\text{grad } f)(a) \neq 0$  e designe-se por  $\theta$  o ângulo entre  $\nabla f(a)$  e  $u$ .



Pelo Teorema 2.5.17,

$$f'_u(a) = (\text{grad } f)(a) \mid u = \|\nabla f(a)\| \|u\| \cos \theta = \|\nabla f(a)\| \cos \theta.$$

Então

$$\cos \theta = \frac{f'_u(a)}{\|\nabla f(a)\|},$$

pelo que  $f'_u(a)$  é a componente do vector gradiente na direcção de  $u$ .

Como consequência, registemos que:

1.  $f'_u(a)$  toma o valor máximo quando  $\cos \theta = 1$ , isto é, quando  $\theta = 0$ , ou ainda, quando os vectores  $\nabla f(a)$  e  $u$  têm a mesma direcção e sentido. Análogamente, toma o valor mínimo se  $\theta = \pi$ , isto é, se os vectores  $\nabla f(a)$  e  $u$  têm a mesma direcção mas sentidos opostos.

2. Se  $\nabla f(a)$  é perpendicular a  $u$  então  $f'_u(a) = 0$ .

A partir do conceito de diferenciabilidade pode-se garantir a simetria das derivadas mistas, facilitando o seu cálculo:

**Teorema 2.5.18** (Teorema de Scharwz) *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real de  $n > 1$  variáveis reais. Então as derivadas de 2ª ordem  $f''_{x_j x_i}$  e  $f''_{x_i x_j}$  são iguais em todos os pontos em que  $f'_{x_i}$  e  $f'_{x_j}$  sejam diferenciáveis.*

**Dem.** Fazemos a demonstração para duas variáveis, já que para  $n > 2$  variáveis o processo é análogo.

Defina-se a expressão

$$\begin{aligned} \Delta_2 f & : = [f(a_1 + h, a_2 + h) - f(a_1 + h, a_2)] - [f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)] \\ & = [f(a_1 + h, a_2 + h) - f(a_1, a_2 + h)] - [f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)] \end{aligned}$$

e provar-se-á que  $\frac{\Delta_2 f}{h^2}$  tende, quando  $h \rightarrow 0$ , quer para  $f''_{x_1 x_2}(a_1, a_2)$  quer para  $f''_{x_2 x_1}(a_1, a_2)$  (e pela unicidade do limite prova-se a igualdade entre as derivadas mistas).

Definindo

$$\varphi(x_1) := f(x_1, a_2 + h) - f(x_1, a_2)$$

e

$$\psi(x_2) := f(a_1 + h, x_2) - f(a_1, x_2),$$

pode escrever-se

$$\Delta_2 f = \varphi(a_1 + h) - \varphi(a_1) = \psi(a_2 + h) - \psi(a_2).$$

Pelo Teorema dos Acréscimos finitos para funções de uma variável tem-se que

$$\begin{aligned} \varphi(a_1 + h) - \varphi(a_1) & = \varphi'(a_1 + \theta_1 h) h \\ \psi(a_2 + h) - \psi(a_2) & = \psi'(a_2 + \theta_2 h) h, \end{aligned}$$

com  $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ , e, portanto,

$$\frac{\Delta_2 f}{h} = \varphi'(a_1 + \theta_1 h) = \psi'(a_2 + \theta_2 h).$$

Atendendo ao modo como se definiu  $\varphi$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_2 f}{h} & = f'_{x_1}(a_1 + \theta_1 h, a_2 + h) - f'_{x_1}(a_1 + \theta_1 h, a_2) \\ & = [f'_{x_1}(a_1 + \theta_1 h, a_2 + h) - f'_{x_1}(a_1, a_2)] - [f'_{x_1}(a_1 + \theta_1 h, a_2) - f'_{x_1}(a_1, a_2)]. \end{aligned}$$

Utilizando a diferenciabilidade de  $f'_{x_1}$  em  $(a_1, a_2)$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_2 f}{h} &= \left[ \theta_1 h f''_{x_1^2}(a_1, a_2) + h f''_{x_1 x_2}(a_1, a_2) + o(h) \right] \\ &\quad - \left[ \theta_1 h f''_{x_1^2}(a_1, a_2) + o(h) \right] \\ &= h f''_{x_1 x_2}(a_1, a_2) + o(h). \end{aligned}$$

De uma forma análoga prova-se que

$$\frac{\Delta_2 f}{h} = \psi'(a_2 + \theta_2 h)$$

e a diferenciabilidade de  $f'_{x_2}$  em  $(a_1, a_2)$ , conduzem a

$$\frac{\Delta_2 f}{h} = h f''_{x_2 x_1}(a_1, a_2) + o(h).$$

Então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_2 f}{h^2} = f''_{x_1 x_2}(a_1, a_2) = f''_{x_2 x_1}(a_1, a_2).$$

■

O teorema anterior apenas garante a simetria das derivadas pontualmente, conforme se ilustra no exercício seguinte:

**Exercício 2.5.19** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ .

b) Prove que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Quando se pode garantir que as derivadas mistas são iguais:

**Corolário 2.5.20** Se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  for de classe  $C^2$  então

$$f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

**Dem.** Se  $f$  é de classe  $C^2$  então as várias derivadas de  $1^a$  ordem,  $f'_{x_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) são de classe  $C^1$  (Definição 2.5.13).

Logo  $f'_{x_i}$  são funções diferenciáveis (Corolário 2.5.14) e, pelo Teorema de Schwarz, Teorema 2.5.18,

$$f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

■

O Teorema de Schwarz pode aplicar-se para derivadas mistas de ordem superior à segunda:

**Corolário 2.5.21** *Se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  for de classe  $C^r$  ( $r \in \mathbb{N}_0$ ) então é indiferente a ordem de derivação até à ordem  $r$ .*

**Dem.** O resultado obtém-se provando sucessivamente que a igualdade se verifica para dois elementos sucessivos

$$\left( \left( f^{(p)} \right)''_{\alpha_i, \alpha_{i+1}} \right)^{(q)} = \left( \left( f^{(p)} \right)''_{\alpha_{i+1}, \alpha_i} \right)^{(q)},$$

com  $p + q + 2 \leq r$ . ■

Veja-se o exemplo:

**Exemplo 2.5.22** *Seja  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  um aberto e  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função 3 vezes diferenciável em  $D$ . Há 6 derivadas de  $3^a$  ordem para  $f$ :*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}; \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}; \\ & \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}; \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}; \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}; \end{aligned}$$

mas apenas duas delas podem ser diferentes, pois as derivadas da primeira linha são iguais, bem com as da segunda linha.

Com efeito, pelo Teorema de Schwarz, Teorema 2.5.18,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}. \end{aligned}$$

Para as outras derivadas o processo é análogo.

## 2.6 Funções vectoriais

Estamos agora em condições de generalizar as condições anteriores ao caso geral de funções  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , as quais se podem escrever na forma

$$\begin{cases} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Começemos pela derivada segundo um vector.

A expressão

$$f'_u(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$$

pode desdobrar-se em  $m$  igualdades, uma para cada componente de  $f$  :

$$(f'_i)_u(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a + tu) - f_i(a)}{t}.$$

Supondo diferenciáveis todas as funções  $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , o Teorema 2.5.17 permite escrever, representando os vectores de  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$  por matrizes colunas,

$$f'_u(a) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}'(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} (a) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

Da Álgebra Linear é conhecido que, fixadas bases em  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$  (bases canónicas) a matriz  $m \times n$  da igualdade anterior representa um operador linear  $D_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  pelo que se pode escrever

$$f'_u(a) = D_a u.$$

**Definição 2.6.1** *Seja  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , uma função de componentes  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$  (com coordenadas dadas nas bases canónicas dos espaços) e  $a$  um ponto interior de  $X$ .*

*Ao operador linear  $D_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definido pela matriz  $J_a = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$  chama-se **derivada de  $f$  no ponto  $a$**  e designa-se por **matriz jacobiana do sistema**  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, m$ .*

*Quando  $m = n$ , o determinante de  $J$  diz-se o **jacobiano da função  $f$**  e designa-se por  $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ .*

A relação entre os conceitos de derivada e de diferencial estabelece-se do mesmo modo que o estudado para o caso  $m = 1$ .

**Definição 2.6.2** *Seja  $a$  um ponto interior do domínio da função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .*

(i) *Diz-se que  $f$  é diferenciável em  $a$  quando nalguma vizinhança deste ponto, a função se representa na forma*

$$f(a + u) - f(a) = L_a u + o(\|u\|),$$

*sendo  $L_a$  um operador linear de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$  e  $o(\|u\|)$  um vector de  $\mathbb{R}^m$  tal que*

$$\lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{o(\|u\|)}{\|u\|} = 0.$$

(ii) *Ao operador  $L_a = (df)(a)$  chama-se diferencial de  $f$  no ponto  $a$ .*

(iii) *A aplicação linear  $L_a u = (df)_u(a)$  chama-se diferencial de  $f$  no ponto  $a$  relativo ao vector  $u$ .*

Tal como para o caso de  $m = 1$  (Teorema 2.5.17), temos:

**Teorema 2.6.3** *Se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável em  $a$ , então,  $\forall u \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$(df)_u(a) = f'_u(a) = f'(a) \mid u = J_a \cdot U,$$

*sendo  $U$  a matriz coluna referente a  $u$ .*

**Dem.** Exercício

Sugestão: Com as notações da definição de matriz jacobiana, provar que cada função componente  $f_i$  de  $f$ , é diferenciável.

O operador  $L_a$  da Definição 2.6.2 é representado pela matriz jacobiana.

■

**Exercício 2.6.4** *Considere a função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por*

$$f(x, y, z) = \begin{cases} y_1 = 2x + 3y^2 + 2z \\ y_2 = x - \cos y \\ y_3 = 2y + \tan z. \end{cases}$$

a) *Calcule a matriz jacobiana e o jacobiano.*

- b) Determine a derivada de  $f$  no ponto  $(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$  segundo o vector  $u = (2, -1, 3)$ .

**Resolução:**

**Resolução 2.6.5**

a)

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial y} & \frac{\partial y_1}{\partial z} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} & \frac{\partial y_2}{\partial y} & \frac{\partial y_2}{\partial z} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x} & \frac{\partial y_3}{\partial y} & \frac{\partial y_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6y & 2 \\ 1 & \operatorname{sen} y & 0 \\ 0 & 2 & \sec^2 z \end{bmatrix}.$$

$$|J| = 2 \operatorname{sen} y \sec^2 z + 4 - 6y \sec^2 z.$$

b)

$$\begin{aligned} f'_{(2,-1,3)} \left( 1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right) &= J_{(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})} \times (2, -1, 3)^T \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3\pi & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 3\pi \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ou } (10 - 3\pi) \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

## 2.7 Regra de derivação de funções compostas

Estudada a diferenciabilidade pode-se construir uma regra para derivar funções compostas.

Num caso geral temos

$$g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow g(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^m \text{ e } f : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q.$$

Como derivar a função composta  $u = f \circ g$  ?

Comecemos pelo caso particular de  $n = 1$ ,  $m = 2$ ,  $q = 1$ , isto é

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

uma função  $u$  com duas variáveis mas em que cada uma delas depende apenas de uma variável.

**Teorema 2.7.1** *Seja  $u(t)$  a função real de variável real que resulta de se compor  $z = f(x, y)$  definida em  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  com  $x = \varphi(t)$  e  $y = \psi(t)$  ambas definidas num intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  (com  $\varphi(t)$  e  $\psi(t) \subseteq D$ ) ( $u(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ ). Se  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$  são diferenciáveis num ponto  $t_0 \in I$  e  $f$  é diferenciável em  $(a, b) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$  então a função composta também é diferenciável em  $t_0$  e*

$$\frac{du}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \frac{d\varphi}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \frac{d\psi}{dt}(t_0).$$

**Dem.** Escrevendo  $u(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ , tem-se

$$\begin{aligned} u(t_0 + h) - u(t_0) &= f[\varphi(t_0 + h), \psi(t_0 + h)] - f[\varphi(t_0), \psi(t_0)] \\ &= f[\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0) + \varphi(t_0), \psi(t_0 + h) - \psi(t_0) + \psi(t_0)] \\ &\quad - f[\varphi(t_0), \psi(t_0)] \\ &= f(a + \Delta\varphi, b + \Delta\psi) - f(a, b), \end{aligned}$$

com

$$\Delta\varphi = \varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0) \quad \text{e} \quad \Delta\psi = \psi(t_0 + h) - \psi(t_0).$$

Pela diferenciabilidade de  $f$ ,  $\varphi$  e  $\psi$  (ver Teorema 2.5.8), com  $\rho = \sqrt{(\Delta\varphi)^2 + (\Delta\psi)^2}$  tem-se que

$$\begin{aligned} u(t_0 + h) - u(t_0) &= f(a + \Delta\varphi, b + \Delta\psi) - f(a, b) \\ &= f'_x(a, b)\Delta\varphi + f'_y(a, b)\Delta\psi + o(\rho) \\ &= f'_x(a, b)(h\varphi'(t_0) + o(h)) + f'_y(a, b)(h\psi'(t_0) + o(h)) + o(\rho) \\ &= h[f'_x(a, b)\varphi'(t_0) + f'_y(a, b)\psi'(t_0)] + o(h). \end{aligned}$$

Note-se que  $o(\rho)$  é um  $o(h)$  porque

$$\frac{o(\rho)}{h} = \frac{o(\rho)}{\rho} \frac{\rho}{h} \rightarrow 0 \quad \text{quando } h \rightarrow 0,$$

pois  $\frac{\rho}{h}$  é limitado pois

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{h} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta\varphi}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\psi}{h}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h}\right)^2 + \left(\frac{\psi(t_0 + h) - \psi(t_0)}{h}\right)^2} \\ &= \sqrt{(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2} \end{aligned}$$

é finito porque  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$  são diferenciáveis.

Logo

$$\begin{aligned} u'(t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h} \\ &= f'_x(a, b)\varphi'(t_0) + f'_y(a, b)\psi'(t_0). \end{aligned}$$

■

A regra dada pelo teorema anterior pode escrever-se, para  $z = f(x, y)$ ,

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(a, b) \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(a, b) \frac{dy}{dt}(t_0),$$

ou, na forma matricial

$$[u'(t_0)] = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right]_{(a,b)} \left[ \begin{array}{c} \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{d\psi}{dt} \end{array} \right]_{(t_0)}.$$

Pode resumir-se a derivada pela seguinte cadeia (regra da cadeia)

$$u \begin{cases} x = \varphi \\ y = \psi \end{cases} t.$$

Analise-se o caso em que  $z = f(x, y)$  é diferenciável em  $(a, b)$  e  $x = \varphi(s, t)$  e  $y = \psi(s, t)$  são funções diferenciáveis em  $(s_0, t_0)$ , com  $a = \varphi(s_0, t_0)$  e  $b = \psi(s_0, t_0)$ , ou seja o caso em que  $n = 2$ ,  $m = 2$ ,  $q = 1$ .

Procedendo como no teorema anterior, escreve-se

$$u(s, t) = f[\varphi(s, t), \psi(s, t)] \tag{2.7.1}$$

e obtém-se, para

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi(s_0 + h, t_0 + h) - \varphi(s_0, t_0), \\ \Delta\psi &= \psi(s_0 + h, t_0 + h) - \psi(s_0, t_0), \\ \rho &= \sqrt{(\Delta\varphi)^2 + (\Delta\psi)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u(s_0 + h, t_0 + h) - u(s_0, t_0) \\
&= f[\varphi(s_0 + h, t_0 + h), \psi(s_0 + h, t_0 + h)] - f[\varphi(s_0, t_0), \psi(s_0, t_0)] \\
&= f(a + \Delta\varphi, b + \Delta\psi) - f(a, b) \\
&= f'_x(a, b)\Delta\varphi + f'_y(a, b)\Delta\psi + o(\rho) \\
&= f'_x(a, b)[h\varphi'_s(s_0, t_0) + k\varphi'_t(s_0, t_0) + o(\rho)] \\
&\quad + f'_y(a, b)[h\psi'_s(s_0, t_0) + k\psi'_t(s_0, t_0) + o(\rho)] + o(\rho) \\
&= h[f'_x(a, b)\varphi'_s(s_0, t_0) + f'_y(a, b)\psi'_s(s_0, t_0)] \\
&\quad + k[f'_x(a, b)\varphi'_t(s_0, t_0) + f'_y(a, b)\psi'_t(s_0, t_0)] + o(\rho).
\end{aligned}$$

Esta igualdade permite não só garantir a diferenciabilidade de  $u$  em  $(s_0, t_0)$  mas também obter a expressão das derivadas parciais  $\frac{\partial u}{\partial s}$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}$  no ponto  $(s_0, t_0)$ .

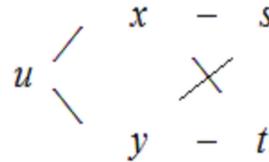
Considerando as derivadas num ponto genérico  $(s, t)$  tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s}, \\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Em notação matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial s} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{bmatrix},$$

ou resumindo na regra da cadeia



Finalmente considere-se o caso em que todas as funções envolvidas são vectoriais:

**Teorema 2.7.2** *Seja  $g$  uma função de domínio  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e contradomínio  $g(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^m$ , e  $f : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$ .*

*Designa-se por  $u = f \circ g$  a função composta de  $g$  e  $f$ .*

*Se  $g$  é diferenciável em  $a$  e  $f$  é diferenciável em  $b = g(a)$  então  $u = f \circ g$  é diferenciável em  $a$  e*

$$(f \circ g)'(a) = f'[g(a)] \cdot g'(a).$$

**Dem.** Represente-se  $g(x) = y$ ,  $z = f(y)$  e  $u(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)]$ . Desdobrando cada uma destas funções nas suas componentes tem-se

$$\begin{cases} u_1(x) = f_1[g(x)] = f_1[g_1(x), \dots, g_m(x)] \\ \vdots \\ u_q(x) = f_q[g(x)] = f_q[g_1(x), \dots, g_m(x)]. \end{cases}$$

Aplicando o Teorema 2.7.1 a cada uma das componentes  $u_i(x)$ , prova-se que as funções  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , são diferenciáveis.

Então a função  $u$  também é diferenciável e tem-se

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_q}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_q}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(a)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{(g(a))} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(a)}.$$

Como cada uma destas matrizes jacobianas representa (nas bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^q$ ), pode escrever-se

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x).$$

■

**Exercício 2.7.3** Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = 2x^2 - y^2.$$

- a) Para  $x = \varphi(t) = \sin t$  e  $y = \psi(t) = \cos t$ , calcular  $\frac{du}{dt}$ , designando por  $u(t) = f(x, y) = f(\varphi(t), \psi(t))$ .
- b) Para  $x = \varphi(s, t) = \sin(st)$  e  $y = \psi(s, t) = \cos(st)$ , calcular  $\frac{\partial u}{\partial t}$  e  $\frac{\partial u}{\partial s}$ , designando por  $u(s, t) = f(x, y) = f(\varphi(s, t), \psi(s, t))$ .

**Resolução:** a) Uma possível resolução será

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 4x \cos t + 2y \sin t \\ &= 4 \sin t \cos t + 2 \cos t \sin t = 6 \sin t \cos t \\ &= 3 \sin(2t). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 4x s \cos(st) + 2y s \sin(st) \\ &= 4 \sin(st) s \cos(st) + 2 \cos(st) s \sin(st) \\ &= 6 \sin(st) s \cos(st) = 3s \sin(2st). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = 4x t \cos(st) + 2y t \operatorname{sen}(st) \\ &= 6 t \operatorname{sen}(st) \cos(st) \\ &= 3t \operatorname{sen}(2st).\end{aligned}$$

**Exercício 2.7.4** Seja  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

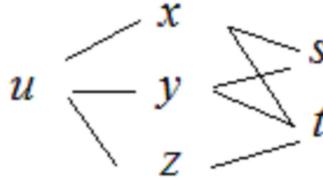
$$g(x, y, z) = 3x + 4y + \cos z,$$

com

$$x = t^3 + e^s, \quad y = \arctan(st) + \operatorname{sen}(t^2) \quad e \quad z = 3t^2,$$

Calcular  $\frac{\partial u}{\partial t}$  e  $\frac{\partial u}{\partial s}$ , sendo  $u(s, t) = g(x, y, z)$ .

**Resolução:** Gráficamente temos



Então

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = 3 e^s + 4 \frac{t}{1 + (st)^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= 3 \cdot 3t^2 + 4 \left[ \frac{s}{1 + (st)^2} + 2t \cos(t^2) \right] - \operatorname{sen}(z) 6t \\ &= 9t^2 + \frac{4s}{1 + (st)^2} + 8t \cos(t^2) - 6t \operatorname{sen}(3t^2).\end{aligned}$$

## 2.8 Derivada de uma função composta de ordem superior

Para funções vectoriais  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $m > 1$ ) a função derivada de  $f$  (que a cada  $x \in D_1 \subseteq D$  associa  $f'(x)$ ) é uma aplicação linear e limitada, conforme indicado na Definição 2.6.1,

$$f' : D_1 \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m),$$

## 2.8. DERIVADA DE UMA FUNÇÃO COMPOSTA DE ORDEM SUPERIOR 69

dada pela matriz jacobiana e denotando  $B(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  o conjunto dos operadores lineares limitados de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$ .

Note que o conjunto de chegada já não é  $\mathbb{R}^m$ , como o era para  $f$  e para  $f'_u$  mas sim  $B(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ .

Assim ao considerar derivadas de ordem superior à primeira, surgem espaços cada vez mais "afastados de  $\mathbb{R}^m$ ". Por exemplo

$$\begin{aligned} f & : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ f' & : D_1 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), \\ f'' & : D_2 \subseteq D_1 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B(\mathbb{R}^n; B(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)), \dots \end{aligned}$$

Neste curso só consideraremos derivadas de ordem superior à primeira segundo vectores. E, neste caso, podemos limitar-nos a funções com valores em  $\mathbb{R}$ , pois para  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  a derivada  $f'_u$  obtem-se à custa das suas componentes  $(f_i)'_u$ , com  $f_i$  funções reais.

Desta forma, limitando-nos a  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a regra de derivação de funções compostas pode estender-se a derivadas parciais de ordem superior à primeira.

Considerando a função  $u(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ , definida no Teorema 2.7.1, e admitindo -se que existem as derivadas de 2ª ordem envolvidas, obtem-se a igualdade

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d\psi}{dt}$$

que

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2\psi}{dt^2}. \quad (2.8.1)$$

Considerando que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são funções de  $x$  e  $y$  que, por sua vez, são funções de  $t$ , aplica-se a derivada da função composta dada pelo Teorema 2.7.1, isto é,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{d\psi}{dt}$$

e

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{d\psi}{dt}.$$

Substituindo em (2.8.1), obtem-se a regra para obter a 2ª derivada da função

composta  $u$  :

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{d\psi}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{d\psi}{dt} \right) \frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2\psi}{dt^2}. \end{aligned}$$

No caso da função  $u(s, t) = f[\varphi(s, t), \psi(s, t)]$  definida em (2.7.1), admitindo -se a existência das respectivas derivadas de 2ª ordem, obtem-se a partir da igualdade

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial s}$$

que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} \\ &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{d\psi}{ds} \right) \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}, \end{aligned}$$

e de modo análogo para  $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}$ .

Da igualdade

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial s} \\ &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s} \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{d\psi}{ds} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial s}. \end{aligned}$$

Analogamente para  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ .

**Exercício 2.8.1** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função cujas derivadas mistas de 2ª ordem são nulas e tal que  $F \in C^2$ .*

*Para*

$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2 \text{ e } \psi(x, y) = y^3,$$

2.8. DERIVADA DE UMA FUNÇÃO COMPOSTA DE ORDEM SUPERIOR 71

designando por  $u(x, y)$  a função composta de  $F$  com  $\varphi$  e  $\psi$ ,  $(F(\varphi(x, y), \psi(x, y)))$ , prove que

$$\frac{x}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ com } x, y \neq 0. \quad (2.8.2)$$

**Resolução:** Calculemos os termos envolvidos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2x \frac{\partial F}{\partial \varphi},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( 2x \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = 2 \frac{\partial F}{\partial \varphi} + 2x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \\ &= 2 \frac{\partial F}{\partial \varphi} + 2x \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial F}{\partial \varphi} + 4x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( 2x \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = 2x \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \\ &= 2x \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -4xy \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.8.2),

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{x}{y} \left( -4xy \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) + 2 \frac{\partial F}{\partial \varphi} + 4x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \\ &= -4x^2 y \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial \varphi} + 4x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 2 \frac{\partial F}{\partial \varphi} \\ &= \frac{1}{x} 2x \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

**Exercício 2.8.2** Considere  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(x, y) = x^2 + y^3,$$

com

$$x = \varphi(s, t) = 2s + e^t \text{ e } y = \psi(s, t) = t^2.$$

Designando por  $u(s, t)$  a função composta de  $g$  com  $\varphi$  e  $\psi$ , calcule

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}.$$

**Resolução:**

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 2x e^t + 3y^2 2t \\ &= 2(2s + e^t) e^t + 3(t^2)^2 2t = 4s e^t + 2e^{2t} + 6t^5, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} &= 4 e^t.\end{aligned}$$

## 2.9 Algumas aplicações das derivadas em $\mathbb{R}^n$

### 2.9.1 Funções homogêneas. Teorema de Euler

**Definição 2.9.1** (i) Uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se uma **função homogênea de grau**  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n), \quad \forall x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{com } tx \in D,$$

ou, abreviadamente,

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \quad \forall x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{com } tx \in D. \quad (2.9.1)$$

(ii) Se a igualdade anterior for válida apenas para  $t \geq 0$ , a função diz-se **positivamente homogênea de grau**  $\alpha$ .

A igualdade (2.9.1) permite estender a função a todos os pontos das semi-rectas que saem da origem (eventualmente com exclusão desta) e passam em algum ponto do domínio inicial  $D$ .

Para estas funções enuncia-se o Teorema de Euler, cuja demonstração é uma aplicação da regra da derivação de funções compostas.

**Teorema 2.9.2** (Teorema de Euler) Uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e positivamente homogênea de grau  $\alpha$  se, e só se, verifica a igualdade de Euler

$$x_1 f'_{x_1} + \dots + x_n f'_{x_n} = \alpha f, \quad \forall x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Dem.** ( $\Rightarrow$ )

Se  $f$  é positivamente homogênea de grau  $\alpha$ , então

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Derivando em ordem a  $t$

$$x_1 f'_{u_1}(tx_1, \dots, tx_n) + \dots + x_n f'_{u_n}(tx_1, \dots, tx_n) = \alpha t^{\alpha-1} f(x_1, \dots, x_n),$$

com  $u_i = tx_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e, para  $t = 1$ , obtem-se

$$\sum_{i=1}^n x_i f'_{u_i}(x_1, \dots, x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

( $\Leftarrow$ )

Suponhamos que  $f$  é uma função diferenciável e verifica a igualdade de Euler

$$\sum_{i=1}^n x_i f'_{u_i}(x_1, \dots, x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

Defina-se a função

$$\varphi(t) = f(tx_1, \dots, tx_n) - t^\alpha f(x_1, \dots, x_n). \quad (2.9.2)$$

Fazendo  $u_i = tx_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , temos

$$\begin{aligned} t \varphi'(t) &= (tx_1) f'_{u_1} + \dots + (tx_n) f'_{u_n} - \alpha t^\alpha f(x_1, \dots, x_n) \quad (2.9.3) \\ &= \alpha f(tx_1, \dots, tx_n) - \alpha t^\alpha f(x_1, \dots, x_n) = \alpha \varphi(t). \end{aligned}$$

Defina-se  $\psi(t) := \frac{\varphi(t)}{t^\alpha}$ . Então, fixando o ponto  $(x_1, \dots, x_n)$ , tem-se, por (2.9.3),

$$\psi'(t) = \frac{\varphi'(t) t^\alpha - \varphi(t) \alpha t^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}} = \frac{\frac{\alpha \varphi(t)}{t} t^\alpha - \varphi(t) \alpha t^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}} = 0,$$

logo  $\psi(t)$  é uma função constante. Como

$$\psi(1) = \varphi(1) = f(x_1, \dots, x_n) - 1^\alpha f(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

então  $\psi(t) \equiv 0$ , para  $t > 0$  (estuda-se a possibilidade de  $f$  ser positivamente homogênea), pelo que  $\frac{\varphi(t)}{t^\alpha} \equiv 0$ , ou seja  $\varphi(t) = 0$ . Assim, por (2.9.2),

$$f(tx_1, \dots, tx_n) - t^\alpha f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

■

**Exercício 2.9.3** Considere a função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}.$$

a) Mostre que  $f$  é homogênea e indique o seu grau de homogeneidade.

- b) Mostre que  $f'_x$  também é homogénea.  
 c) Verifique a igualdade de Euler para  $f$ .

**Resolução:** a) Grau 1, pois

$$f(tx, ty) = \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{tx + ty} = t \frac{x^2 + y^2}{x + y} = tf(x, y).$$

b)

$$f'_x = \frac{2x(x+y) - (x^2 + y^2)}{(x+y)^2} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x+y)^2},$$

$$f'_x(tx, ty) = \frac{t^2x^2 + 2t^2xy - t^2y^2}{(tx + ty)^2} = \frac{t^2(x^2 + 2xy - y^2)}{t^2(x+y)^2} = t^0 f'_x(x, y).$$

$f'_x$  é homogénea de grau 0.

**Observação:** Se  $f$  é uma função homogénea de grau  $\alpha$ , as suas derivadas de 1ª ordem são funções homogéneas de grau  $\alpha - 1$ .

c) Pretende-se mostrar que  $xf'_x + yf'_y = 1 f$ . Então

$$f'_y = \frac{y^2 + 2xy - x^2}{(x+y)^2},$$

e

$$\begin{aligned} xf'_x + yf'_y &= x \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x+y)^2} + y \frac{y^2 + 2xy - x^2}{(x+y)^2} \\ &= \frac{x^3 + 2x^2y - xy^2 + y^3 + 2xy^2 - yx^2}{(x+y)^2} \\ &= \frac{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3}{(x+y)^2} = \frac{x^2(x+y) + y^2(x+y)}{(x+y)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2}{x+y} = f(x, y). \end{aligned}$$

**Exercício 2.9.4** Dada a função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y, z) = x^2 + \frac{x^\alpha y^\beta}{z^3} - z^{3\alpha} y^\beta,$$

determine  $\alpha$  e  $\beta$  de modo que  $f$  seja homogénea e indique o seu grau de homogeneidade.

**Resolução:**

$$\begin{aligned} f(tx, ty, tz) &= t^2 x^2 + \frac{t^\alpha x^\alpha t^\beta y^\beta}{t^3 z^3} - t^{3\alpha} z^{3\alpha} t^\beta y^\beta \\ &= t^2 x^2 + \frac{t^{\alpha+\beta-3} x^\alpha y^\beta}{z^3} - t^{3\alpha+\beta} z^{3\alpha} y^\beta. \end{aligned}$$

Para ser possível colocar  $t$  em evidência é necessário que

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 3 = 2 \\ 3\alpha + \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{2} \\ \beta = \frac{13}{2} \end{cases}.$$

Para estes valores  $f$  é homogénea de grau 2.

### 2.9.2 Plano tangente e recta normal a uma superfície

Recordemos alguns conceitos:

1. Chama-se **trajectória** ou **caminho** a uma aplicação contínua  $\varphi : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que se pode representar na forma paramétrica

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b,$$

sendo  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas.

2. Se a função  $\varphi$  for de classe  $C^k$ , diz-se que a trajectória é de classe  $C^k$ .
3. Se  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , a equação  $\varphi(x, y, z) = 0$  define uma **superfície**.
4. Uma **recta** é **tangente** à superfície  $\varphi(x, y, z) = 0$  no ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  se for tangente a uma curva traçada sobre a superfície e que passe pelo ponto  $P_0$ .  
Como existem uma infinidade de curvas traçadas sobre a superfície que passam por  $P_0$ , existe também uma infinidade de tangentes.
5.  $P$  é um **ponto singular** da superfície se as derivadas

$$\varphi'_x(P) = \varphi'_y(P) = \varphi'_z(P) = 0.$$

$P$  é um **ponto simples** da superfície se as derivadas  $\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z$  existirem, forem contínuas e, pelo menos, uma for não nula.

**Teorema 2.9.5** *Todas as rectas tangentes à superfície  $\varphi(x, y, z) = 0$  num ponto simples  $P_0$ , pertencem ao mesmo plano.*

**Dem.** Seja  $r(t)$  um caminho escrito na forma paramétrica por

$$r(t) = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b,$$

que passa pelo ponto simples  $P_0 = r(t_0) = (f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ .

O vector director da recta tangente a  $r(t)$  é  $\tau = \left(\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}\right)$  e a sua equação vectorial será

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k \left(\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}\right)_{(t_0)}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Como os pontos de  $r(t)$  pertencem à superfície  $\varphi$ , então os seus pontos verificam a igualdade  $\varphi(f(t), g(t), h(t)) = 0$ . Derivando (derivada da função composta) temos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{df}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dh}{dt} = 0. \quad (2.9.4)$$

Considere-se o vector  $n = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$ , cujas componentes não são simultaneamente nulas em  $P_0$ . Assim,  $\|n\| \neq 0$ .

O vector  $n$  é perpendicular ao vector director da tangente à curva no ponto  $P_0$ , pois, por (2.9.4),

$$\begin{aligned} n|\tau &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \left|\left(\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}\right)\right. \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{df}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dh}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade da curva  $r$ , que passa pelo ponto  $P$ , na superfície  $\varphi$ , todas as tangentes a esta superfície, e que passam por  $P$ , são perpendiculares a este mesmo vector  $n$ , pertencendo portanto todas a um mesmo plano perpendicular a  $n$ . ■

**Definição 2.9.6** *O plano formado por todas as rectas tangentes num ponto  $P$ , às curvas traçadas sobre uma superfície  $\varphi$  que passe por  $P(x_0, y_0, z_0)$ , chama-se plano tangente à superfície  $\varphi$  no ponto  $P$ .*

A equação é dada por

$$n|\tau = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{(x_0, y_0, z_0)} \mid (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

**Observação 2.9.7** Se  $P$  for um ponto singular da curva, o plano tangente pode não existir, visto que em tais pontos as tangentes podem não pertencer ao mesmo plano. Isto é, não há a garantia de serem perpendiculares, pois

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{(x_0, y_0, z_0)} = (0, 0, 0).$$

**Definição 2.9.8** (i) Chama-se **recta normal à superfície**  $\varphi(x, y, z) = 0$  num ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  à recta perpendicular ao plano tangente nesse ponto.

A sua equação cartesiana é dada por

$$\frac{x - x_0}{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0, z_0)}} = \frac{y - y_0}{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0, z_0)}} = \frac{z - z_0}{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{(x_0, y_0, z_0)}}.$$

(ii) Chama-se **plano normal à curva**  $r(t)$  no ponto  $P_0$  ao plano que passa por  $P_0$  e é perpendicular à recta tangente a  $r(t)$  no ponto  $P_0$ .

A equação é dada por

$$r'(t_0) \mid (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0,$$

ou seja

$$\left( \frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt} \right)_{(t_0)} \mid (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

**Exercício 2.9.9** Considere a superfície  $\varphi$  dada pela igualdade  $z = 2x^2 + 4y^2$  e um ponto  $P = (1, 2, 18)$ .

- Mostre que  $P \in \varphi$ .
- Determine a equação do plano tangente a  $\varphi$  em  $P$ .
- Indique a equação da recta normal a  $\varphi$  em  $P$ .

**Resolução:** a)  $18 = 2 \times 1 + 4 \times 2^2$

b)  $\varphi(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 - z = 0$  e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 8y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -1.$$

Em  $P = (1, 2, 18)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 2, 18) = 4, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 2, 18) = 16, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 2, 18) = -1.$$

A equação do plano tangente a  $\varphi$  em  $P$  será

$$(4, 16, -1) \mid (x - 1, y - 2, z - 18) = 0,$$

isto é  $4x + 16y - z - 18 = 0$ .

c) Na forma cartesiana

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 2}{16} = \frac{z - 18}{-1},$$

ou, na forma vectorial

$$(x, y, z) = (1, 2, 18) + k(4, 16, -1), k \in \mathbb{R}.$$

**Exercício 2.9.10** Indique a equação do plano tangente e da recta normal à superfície

$$3xyz - z^3 = 8,$$

no ponto com a abcissa nula e ordenada 2.

**Resolução:** Coordenadas do ponto de tangência  $P$ :

$$3 \times 0 \times 2 \times z - z^3 = 8 \Leftrightarrow z = -2.$$

Logo  $P = (0, 2, -2)$ .

$$\varphi(x, y, z) = 3xyz - z^3 - 8 = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = 3yz|_{(P)} = -12;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(P) = 3xz|_{(P)} = 0; \frac{\partial \varphi}{\partial z}(P) = 3xy - 3z^2|_{(P)} = -12.$$

Plano tangente:

$$(-12, 0, -12) \mid (x, y - 2, z + 2) = 0 \Leftrightarrow x + z + 2 = 0.$$

Equação cartesiana da recta normal

$$\frac{x}{-12} = \frac{z + 2}{-12} \wedge y = 2.$$

### 2.9.3 Operadores diferenciais

Considere-se uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

#### Definição 2.9.11

- (i) Se  $m = 1$  (campo escalar) chama-se **gradiente** de  $f$  ao campo vectorial, e representa-se por  $\text{grad } f$  ou  $\nabla f$ , a

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i.$$

- (ii) Se  $m = n$  chama-se **divergência** de  $f$  ao campo escalar

$$\text{div } f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

(traço da matriz jacobiana).

- (iii) Se  $m = n = 3$  chama-se **rotacional** de  $f$  ao campo vectorial

$$\begin{aligned} \text{rot } f &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 \\ &+ \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Esta expressão costuma-se escrever na forma de um determinante

$$\text{rot } f = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix},$$

entendendo-se que deve ser calculado aplicando o Teorema de Laplace à 1ª linha e com  $\frac{\partial}{\partial x_i} f_j$  a significar  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ .

- (iv) Se  $m = 1$  chama-se **matriz hessiana** de  $f$  à matriz de ordem  $n$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Note-se que a matriz hessiana pode ser entendida como sendo a matriz jacobiana do sistema

$$\begin{cases} y_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ y_n = \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{cases}.$$

Sendo a matriz hessiana sempre uma matriz quadrada, pode calcular-se o seu determinante: o **hessiano**.

(v) Ao traço da matriz hessiana chama-se laplaciano de  $f$  e representa-se por  $Lap f$  ou  $\Delta f$ . Assim

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

**Exercício 2.9.12** Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x(\rho, \theta) = \rho \cos \theta \\ y(\rho, \theta) = \rho \operatorname{sen} \theta \end{cases}, \rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Calcule  $\operatorname{div} f$ .

**Resolução:**  $\operatorname{div} f = \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial y}{\partial \theta} = \cos \theta + \rho \cos \theta.$

**Exercício 2.9.13** Para  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$g(x, y, z) = \begin{cases} g_1 = x^2 + y - z \\ g_2 = xyz^2 \\ g_3 = 2xy - y^2z \end{cases}.$$

Calcular

a)  $\operatorname{div} g$

b)  $\operatorname{rot} g$

**Resolução: a)**

$$\operatorname{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} = 2x + xz^2 - y^2.$$

b)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} g &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} \\ &= (2x - 2yz - 2xyz) \vec{e}_1 + (-2y - 1) \vec{e}_2 + (yz^2 - 1) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

**Exercício 2.9.14** Seja  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$h(x, y, z) = 5xy + 3x^2y + 2xz + 5yz - z^3.$$

Calcule

a)  $\nabla h$

b) o hessiano de  $h$  em  $(0, b, 1)$

c)  $\Delta h$

**Resolução: a)**

$$\begin{aligned} \nabla h &= \frac{\partial h}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial h}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial h}{\partial z} \vec{e}_3 \\ &= (2x - 2yz - 2xyz) \vec{e}_1 + (5x + 3x^2 + 5z) \vec{e}_2 + (2x + 5y - 3z^2) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6y & 5 + 6x & 2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & -6z \end{vmatrix} \\ &= 60x - 150y + 150z + 180xz + 100. \end{aligned}$$

No ponto  $(0, b, 1)$ ,

$$|\mathcal{H}|_{(0,b,1)} = -150b + 250.$$

c)

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 6y - 6z.$$

## 2.10 Invertibilidade de funções em $\mathbb{R}^n$

Consideremos uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida e de classe  $C^1$  num aberto  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Que condições se deverá exigir a  $f$  de modo a garantir que seja injectiva (logo bijectiva em  $D$ ) e, portanto invertível ?

Para  $n = 1$  tem-se o seguinte teorema para a derivada da função inversa:

**Teorema 2.10.1** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em  $[a, b]$  e de classe  $C^1$  em  $]a, b[$ , com  $f'(x) \neq 0$  para  $x \in ]a, b[$ , então  $f^{-1}$  é diferenciável em  $b = f(a)$  e*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

**Dem.** Note-se que  $f'(x) \neq 0$  implica que  $f$  é injectiva, pois, pelo Teorema de Labrange

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(c)$$

e se  $f(x_1) = f(x_2)$  então  $x_1 = x_2$  (pois  $f'(c) \neq 0$ ).

Represente-se  $y = f(x)$  e observe-se que se  $y \neq b$  então  $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b) = a$ . Então

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{y-b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{f[f^{-1}(y)] - f(a)}{f^{-1}(y) - a}}.$$

Como  $f$  é diferenciável, logo contínua, então  $f^{-1}$  é contínua (teorema da continuidade da função inversa) e quando

$$y \rightarrow b \implies f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(b) = a.$$

Fazendo uma mudança de variável no limite tem-se

$$\lim_{f^{-1}(y) \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f[f^{-1}(y)] - f(a)}{f^{-1}(y) - a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

■

O enunciado do teorema anterior tem sentido em  $\mathbb{R}^n$  (com  $n > 1$ ), sendo então  $f'$  o operador linear representado pela matriz jacobiana.

Contudo a condição da 1ª derivada não se anular assume um aspecto particular. Veja-se o seguinte exemplo:

Tome-se  $f$  linear definida por

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}.$$

Neste caso a matriz jacobiana  $J = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$  é dada pela matriz  $A = [a_{ij}]$ . Sabe-se da Álgebra Linear que para a aplicação ser invertível deve exigir-se que  $|A| \neq 0$ .

Assim para obter um enunciado correspondente ao Teorema 2.10.1, para  $n > 1$ , é necessário exigir que

$$\det \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \neq 0.$$

Num caso geral, esta hipótese não é suficiente para garantir a bijectividade da função  $f$  no conjunto  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  em que esteja definida.

Veja-se o exemplo da função dada por

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos(x_2) \\ y_2 = x_1 \sin(x_2) \end{cases}.$$

É uma função de classe  $C^1$  e tem o jacobiano não nulo em qualquer conjunto aberto contido no semiplano  $x_1 > 0$ , isto é,  $|J| = x_1 > 0$ .

Contudo a função não é injectiva, já que os pontos  $(a_1, a_2)$  e  $(a_1, a_2 + 2\pi)$  têm a mesma imagem.

Porque são diferentes os resultados para  $n = 1$  e  $n > 1$  ?

Para  $n = 1$ , a injectividade resulta directamente do Teorema de Lagrange. Para funções  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n > 1$ ), conduz, para  $a, b \in \mathbb{R}^n$  e  $c_i \in ]a, b[$ , a

$$f(b) - f(a) = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_{(c_1)} & \cdots & \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)_{(c_1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \left( \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right)_{(c_n)} & \cdots & \left( \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)_{(c_n)} \end{bmatrix} [b - a]$$

e o não anulamento do jacobiano nos pontos de  $D$  não chega para garantir a invertibilidade da matriz, porque os pontos  $c_i \in ]a, b[$  variam de linha para linha, e, por isso, não se trata da matriz jacobiana de  $f$  num certo ponto do domínio.

Com funções de jacobiano não nulo apenas se consegue garantir uma invertibilidade local (restrição a um conjunto de pontos onde o jacobiano é não nulo):

**Teorema 2.10.2** (Teorema da função inversa) *Seja  $f$  uma função de classe  $C^1$  num aberto  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  e com valores em  $\mathbb{R}^n$  e tal que  $(\det(f'))_{(a)} \neq 0$ ,  $a \in D$ .*

*Nestas condições existem conjuntos abertos  $A \subseteq D$  e  $B \subseteq f(D)$  tais que:*

**a)** *Existência da função inversa:*

- (i)  $a \in A$ ,  $f(a) \in B$  e  $f|_A$  é uma função bijectiva de  $A$  sobre  $B$ ;
- (ii) A função  $g$ , inversa de  $f|_A$  é de classe  $C^1$  em  $B$ .
- b) Derivada da função inversa:
- iii)  $g'[f(x)] = \frac{1}{f'(x)}$ ,  $\forall x \in A$ .

**Exercício 2.10.3** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}, \text{ com } \rho > 0 \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

- a) Calcule  $f'(x)$  (matriz jacobiana de  $f$ ).
- b) Em que condições existe  $f^{-1}(x)$  ?
- c) Determine  $f^{-1}$  e  $(f^{-1})'$  (matriz jacobiana de  $f^{-1}$ ).
- d) Prove que  $f' \times (f^{-1})' = I$ .

**Resolução: a)**

$$f' = J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix}.$$

b)

$$\det(f') = |J_f| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho > 0.$$

Então  $\det(f') \neq 0$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Como  $x = f_1(\rho, \theta)$  e  $y = f_2(\rho, \theta)$  são de classe  $C^1$  então  $f$  é de classe  $C^1$ . Assim  $f(x, y)$  é invertível  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

c) Neste caso é fácil determinar a expressão de  $f^{-1}$ . A partir de:

$$\begin{cases} x^2 = \rho^2 \cos^2(\theta) \\ y^2 = \rho^2 \sin^2(\theta) \end{cases} \implies \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, (\rho > 0);$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \implies \frac{y}{x} = \tan \theta \Leftrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Então

$$f^{-1} = \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

e

$$(f^{-1})' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix}.$$

d)

$$\begin{aligned} f' \circ (f^{-1})' &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\rho \cos(\theta)}{\rho} & \frac{\rho \operatorname{sen}(\theta)}{\rho} \\ -\frac{\rho \operatorname{sen}(\theta)}{\rho^2} & \frac{\rho \cos(\theta)}{\rho^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta & \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \cos \theta \operatorname{sen} \theta & \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Exercício 2.10.4** Seja  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$g = \begin{cases} u = 2x + 3y + 5z \\ v = x - y \\ w = 2y + 3z \end{cases}.$$

a) Verifique se  $g$  é invertível.b) Calcule  $(g^{-1})'$ .**Resolução:** a)  $g$  é de classe  $C^1$  pois  $u, v$  e  $w$  são funções polinomiais logo  $C^1$ . Como

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

tem-se  $|J_g| = -5 \neq 0$ , pelo que  $g$  é localmente invertível,  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

b) Como se trata de uma função linear, pode ser representada por uma equação matricial

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

pelo que

$$\begin{bmatrix} x \\ t \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

Assim basta calcular

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix},$$

para obter a derivada da função inversa.

## 2.11 Funções implícitas

Uma forma corrente de definir uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  consiste em dar uma expressão analítica que permita calcular o valor de  $f$  em cada ponto  $x \in D$ . Por exemplo  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  define uma função real de variável  $x = (x_1, x_2)$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Na correspondência  $x \mapsto y = f(x)$  designa-se  $x$  por variável independente e  $y$  por variável dependente.

Outras vezes a função  $x \mapsto y = f(x)$  é traduzida por uma relação da forma

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{2.11.1}$$

não resolvida em ordem à variável dependente, mas permitindo, apesar disso, associar a cada  $x$ , pertencente a um certo domínio  $D$ , um determinado valor para  $y$  (raiz da equação (2.11.1) para o  $x$  previamente fixado).

Nestes casos diz-se que  $f$  está definida implicitamente ou, embora de um modo menos correcto, que é uma função implícita.

A teoria destas funções tem por objectivo estudar as suas propriedades mais importantes (incluindo condições de existência e o cálculo das derivadas, por exemplo), se necessidade de explicitar a função, pois tal não será, em geral, possível.

Note-se que para uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , afirmar que  $x = g(y)$  é invertível é dizer que a equação  $x - g(y) = 0$  permite associar a cada  $x$  (num certo conjunto) um determinado  $y$  (a raiz, eventualment, única, daquela equação para o  $x$  considerado). Como nem sempre é possível explicitar  $y$  tem-se um caso particular de função implícita.

O teorema central da teoria das funções implícitas é um teorema de existência local:

**Teorema 2.11.1** (Teorema das funções implícitas) *Se:*

- $\varphi(x, y)$  com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^m$  for uma função de classe  $C^1$  num aberto  $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  e com valores em  $\mathbb{R}^m$ ;
- $(x_0, y_0) \in D$  for solução da equação  $\varphi(x, y) = 0$ ;
- o jacobiano de  $\varphi$  em relação a  $y$  for diferente de zero em  $(x_0, y_0)$ .  
Então existe uma vizinhança  $V(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$  e uma função  $\phi: V(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^1$  em  $V(x_0)$  tal que  $\phi(x_0) = y_0$  e  $\varphi(x, \phi(x)) = 0$  em  $V(x_0)$ , isto é, a equação  $\varphi(x, y) = 0$  define implicitamente  $y = (y_1, \dots, y_m)$  como função de  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Uma outra versão deste teorema pode ser enunciado utilizando coordenadas:

**Teorema 2.11.2** *Se:*

- $(x_0, y_0) = (x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01}, \dots, y_{0m})$  for uma solução do sistema

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \end{cases}$$

com as funções  $\varphi_i \in C^1$  num aberto  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  contendo  $(x_0, y_0)$ ;

•

$$\left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \right|_{(x_0, y_0)} \neq 0;$$

Então existe uma vizinhança  $V(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$  e existem funções reais  $\phi_i$  de classe  $C^1$  em  $V(x_0)$  tais que  $\phi_i(x_{01}, \dots, x_{0n}) = (y_{01}, \dots, y_{0m})$  e  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n, \phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_n)) = 0$  em  $V(x_0)$ .

No caso particular de  $m = 1$  (funções com valores reais), obtém-se uma versão mais simples:

**Teorema 2.11.3** *Se:*

- $(x_0, y_0) = (x_{01}, \dots, x_{0n}, y_0)$  for uma solução da equação  $\varphi(x_1, \dots, x_n, y) = 0$  com  $\varphi \in C^1$  num aberto  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  contendo  $(x_0, y_0)$ ;

- $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} \neq 0$ ;

Então existe uma vizinhança  $V(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$  e uma função  $\phi$  de classe  $C^1$  em  $V(x_0)$  tais que  $\phi(x_{01}, \dots, x_{0n}) = y_0$  e  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n, \phi(x_1, \dots, x_n)) = 0$  em  $V(x_0)$ , ou seja, a equação  $\varphi(x_1, \dots, x_n, y) = 0$  define implicitamente  $y$  como função de  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

**Dem.** Considere a função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ , dada por

$$(x, y) \xrightarrow{f} (u, v) \text{ com } \begin{cases} u = x \\ v = \varphi(x, y) \end{cases},$$

isto é, indicando as coordenadas

$$(u, v) = f(x, y) \text{ com } \begin{cases} u_1 = x_1 \\ \vdots \\ u_n = x_n \\ v_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ v_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \end{cases}.$$

Como  $(x_0, y_0)$  é solução da equação  $\varphi(x, y) = 0$ , então

$$f(x_0, y_0) = (x_0, \varphi(x_0, y_0)) = (x_0, 0) \quad (2.11.2)$$

e  $f$  é de classe  $C^1$ , pelas hipóteses do Teorema ( $\varphi \in C^1$  e  $u = x$  é a função identidade, também de classe  $C^1$ ) e, além disso,

$$\begin{aligned} (\det f')_{(x_0, y_0)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} & \frac{\partial u_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial y_m} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} & \frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_m}{\partial x_n} & \frac{\partial v_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial v_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \left(\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}\right) & & \vdots \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)} \\ &= \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \right|_{(x_0, y_0)} \neq 0. \end{aligned}$$

Como se verificam as hipóteses do Teorema da função inversa (Teorema 2.10.2), pelo que existe um conjunto aberto  $V(x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  que é aplicado biunivocamente, por  $f$ , sobre outro aberto  $\tilde{V}(x_0, 0) \subseteq f(D) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  e onde  $f^{-1}$  é de classe  $C^1(\tilde{V}(x_0, 0))$ .

Represente-se  $f^{-1}$  por

$$(u, v) \xrightarrow{f^{-1}} (x, y) \text{ com } \begin{cases} x = u \\ y = \psi(u, v) \end{cases}, \quad (2.11.3)$$

ou seja, em termos de coordenadas

$$\begin{cases} x_1 = u_1 \\ \vdots \\ x_n = u_n \\ y_1 = \psi_1(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m) \\ \vdots \\ y_m = \psi_m(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m) \end{cases}.$$

Compondo  $f^{-1}$  com  $f$  (restringidas aos conjuntos abertos considerados) obtém-se a aplicação identidade:

$$(f \circ f^{-1})(u, v) = f[f^{-1}(u, v)] = f(x, y) = (u, v),$$

ou seja, por (2.11.3),

$$f(x, y) = f[u, \psi(u, v)] = (u, v).$$

Então pode escrever-se, para todos os pontos de  $\tilde{V}(x_0, 0)$  (onde há a garantia que a função é invertível), atendendo apenas à 2ª componente de  $f$ ,

$$v = \varphi(x, y) = \varphi(u, \psi(u, v)).$$

Limitando-nos agora à 1ª componente consideremos a vizinhança  $V(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$  que resulta de  $\tilde{V}(x_0, 0)$  considerando nulas as  $m$  componentes de. Então

$$\varphi(u, \psi(u, 0)) = 0, \quad \forall u \in V(x_0). \quad (2.11.4)$$

Tendo presente que  $u = x$  e definindo  $\phi(x) := \psi(x, 0)$  (função definida em  $V(x_0)$  e com valores em  $\mathbb{R}^m$ ), obtém-se, por (2.11.4), que

$$\varphi(u, \phi(x)) = 0, \quad \text{em } V(x_0).$$

Para concluir a demonstração basta observar que :

- $\phi(x_0) = y_0 \iff \psi(x, 0) = y_0$ , e esta última igualdade resulta de  $f^{-1}(x_0, 0) = (x_0, y_0)$ , por (2.11.2);
- $\phi$  é de classe  $C^1$  em  $V(x_0)$  porque, pelo Teorema da Função Inversa (Teorema 2.10.2),  $f^{-1}$  é de classe  $C^1$  em  $\tilde{V}(x_0, 0)$ . Logo a sua 2ª componente  $\psi(u, v)$  também será de classe  $C^1$ .

■

## 2.12 Derivada da função implícita

O Teorema 2.11.3, além de garantir a existência de uma função implícita  $\phi$  (de classe  $C^1$  num certo aberto em  $V(x_0)$ ), garante também a existência da sua derivada  $\phi'$ .

Vejam os como obter essa derivada.

Comece-se pelo caso mais simples, em que  $m = 1$ .

Pela Definição 2.6.1,  $\phi'$  é o operador representado pela matriz (linha) jacobiana

$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right] = \left[ \frac{\partial y}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial y}{\partial x_n} \right].$$

Para calcular cada uma das derivadas parciais  $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ , recorde-se que se pode definir

$$F(x_1, \dots, x_n) := \varphi(x_1, \dots, x_n, \phi(x_1, \dots, x_n))$$

como a função composta de  $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$  com

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ \vdots \\ x_n = x_n \\ y = \phi(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Como  $\varphi(x_1, \dots, x_n, \phi(x_1, \dots, x_n)) = 0$  em  $V(x_0)$  então  $F(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$  em  $V(x_0)$ .

Pela regra de derivação de funções compostas,

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) (x_0) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) (x_0, y_0) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (x_0, y_0) \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) (x_0) = 0,$$

ou seja,

$$\left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) (x_0) = - \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) (x_0, y_0)}{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (x_0, y_0)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

(observe-se que o denominador é não nulo, de acordo com o Teorema 2.11.3).

Para um ponto genérico que verifique as condições do Teorema da função implícita, tem-se

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Para  $m > 1$ , compondo as funções  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  com  $y_i = \phi_i(x_1, \dots, x_n)$  obtêm-se as funções  $F_i(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$  numa vizinhança de  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ .

Calculando as suas derivadas em ordem a  $x_i$ , obtém-se, pela regra de derivação de funções compostas,

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0. \end{cases}$$

Para cada  $i$  tem-se um sistema linear com  $m$  equações e  $m$  incógnitas,  $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$ , ( $j = 1, \dots, m$ ), cujo determinante (que se supõe calculado num ponto  $(x_0, y_0)$  e que verifica as condições do Teorema 2.11.3) é não nulo, pelo que o sistema é possível e determinado.

Em notação matricial pode escrever-se

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \end{bmatrix}.$$

Designando, numa forma abreviada, por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \end{bmatrix}, \quad j, k = 1, \dots, m, \quad i \text{ fixo,}$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \end{bmatrix}.$$

Como se tem uma igualdade deste tipo para cada  $i$ , as  $m \times n$  derivadas parciais  $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$  ( $j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n$ ) podem calcular-se através da equação matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

De forma sintética pode escrever-se a regra de derivação da função implícita, num caso geral, como

$$\left[ \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} \right] \times \left[ \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right] = - \left[ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right], \quad j, k = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Exercício 2.12.1** Considere a equação

$$x + 2y - z = \text{sen}(3xyz).$$

a) Verifique que a equação define  $z$  como uma função de  $x$  e  $y$  numa vizinhança de  $(0, 0, 0)$ .

b) Mostre que

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) (0, 0) = 1 \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) (0, 0) = 2.$$

**Resolução:** a) Caso  $m = 1$ .

- $(0, 0, 0)$  é solução da equação;
- $\varphi(x, y, z) = 0 \implies \varphi(x, y, z) = x + 2y - z - \text{sen}(3xyz) = 0$ .  
 $\varphi \in C^1$ ?

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 1 - 3yz \cos(3xyz); & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 2 - 3yz \cos(3xyz); \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -1 - 3yz \cos 3xyz. \end{aligned}$$

Todas estas derivadas, bem como  $\varphi$  são funções contínuas em  $\mathbb{R}^3$ , logo, em particular, numa vizinhança de  $(0, 0, 0)$ .

- $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) (0, 0, 0) = -1 \neq 0$ .

Então, pelo Teorema 2.11.3, existe uma vizinhança de  $(0, 0, 0)$  em que a equação define  $z$  como uma função de  $x$  e  $y$ .

b)

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) (0, 0) = - \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (0, 0, 0)}{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) (0, 0, 0)} = 1; \quad \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) (0, 0) = - \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (0, 0, 0)}{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) (0, 0, 0)} = 2.$$

**Exercício 2.12.2** Considere o sistema

$$\begin{cases} e^{xy} - u + \ln(v+x) = 1 \\ x^2 + y^3 + u^2 - v^3 = 0. \end{cases}$$

- a) Mostre que o sistema define implicitamente  $(u, v)$  como função de  $(x, y)$  numa vizinhança de  $(x, y, u, v) = (0, 1, 0, 1)$ .
- b) Calcular

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0, 1); \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(0, 1); \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(0, 1); \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(0, 1).$$

**Resolução:** a)  $(0, 1, 0, 1)$  é solução do sistema.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= ye^{xy} + \frac{1}{v+x}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} &= xe^{xy}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} &= -1; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} &= \frac{1}{v+x}; \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= 2x; & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} &= 3y^2; & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} &= 2u; & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} &= -3v^2. \end{aligned}$$

Todas as derivadas são contínuas numa vizinhança de  $(0, 1, 0, 1)$ , já que aqui  $v+x \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)}\right)_{(0,1,0,1)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(0,1,0,1)} = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{v+x} \\ 2x & -3v^2 \end{vmatrix}_{(0,1,0,1)} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema 2.11.3, o sistema define  $\phi_1(x, y) = u$  e  $\phi_2(x, y) = v$  na vizinhança de  $(0, 1, 0, 1)$ .

b)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{(0,1)} &= - \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{bmatrix}_{(0,1,0,1)}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(0,1,0,1)} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0, 1) &= 2, & \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(0, 1) &= 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(0, 1) &= 1, & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(0, 1) &= 1. \end{aligned}$$

### 2.13 Diferenciais de ordem superior para funções reais em $\mathbb{R}^n$

Neste curso, como foi referido anteriormente, só serão estudadas derivadas de ordem superior para derivadas segundo vectores e, neste caso, podemos limitar-nos a funções com valores reais (pois  $f'_u$  obtem-se à custa das suas componentes  $(f_i)'_u$ , com  $f_i$  funções reais).

Nestas condições, considere-se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1(D)$ . Recorde-se que, então:

- $f$  é diferenciável (Corolário 2.5.14);
- $f'_u(a) = (df)_u(a) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a) \times u_i$  (Teorema 2.5.17).

No conjunto  $D$  (onde  $f$  é diferenciável) pode considerar-se uma nova função

$$f'_u : x \mapsto f'_u(x)$$

a partir da qual se pode definir o diferencial de 2ª ordem de  $f$ .

**Definição 2.13.1** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \in C^1(D)$ . Chama-se diferencial de 2ª ordem de  $f$ , primeiro em relação a  $u$  e depois em relação a  $v$  (ou a 2ª derivada de  $f$  relativo aos vectores  $u$  e  $v$  (por esta ordem)) a*

$$f''_{uv} := (f'_u)'_v = d_v(d_u f) := d_{uv}^2 f.$$

Como regra prática:

**Proposição 2.13.2** *Se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2(D)$  então*

$$f''_{uv} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} u_i v_j.$$

**Dem.** Se  $f \in C^2 \implies f \in C^1$  e, pelo Teorema 2.5.17, para um ponto genérico de  $D$ ,

$$\begin{aligned} f''_{uv} &= d_v(d_u f) = d_v \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i \right) = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) u_i \right] v_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} u_i v_j = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} u_i v_j. \end{aligned}$$

■

**Observação 2.13.3** Se  $f$  é de classe  $C^2$  então:

(i) Pelo Corolário 2.5.20,

$$f''_{uv} = f''_{vu}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) No caso particular em que  $u = v$  ( $:= h$ ), fala-se em diferencial (ou derivada) de  $2^{\text{a}}$  ordem de  $f$  em relação a  $h$  e, em vez de  $f''_{hh}$  ou  $d_{hh}^2 f$ , escreve-se apenas

$$f''_h (= d_h^2 f) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j,$$

que é uma **forma quadrática bilinear** nas variáveis  $h_i$ , cuja matriz (simétrica) se representa pela matriz hessiana

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

(iii) Utilizando a matriz hessiana pode-se determinar o escalar indicado por  $f''_{uv}(a)$  através de

$$f''_{uv}(a) = U^T \mathcal{H}(a) V,$$

sendo  $U$  e  $V$  as matrizes colunas contendo as coordenadas dos vectores  $u$  e  $v$ .

(iv) Em escrita simbólica (e sintética) pode indicar-se:

$$\begin{aligned} f''_h &= d_h^2 f = \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 f \\ &= (h_1 D_1 + \cdots + h_n D_n)^2 f, \end{aligned}$$

sendo

$$D_i D_j f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

(v) Para funções de classe  $C^m(D)$ , definem-se do mesmo modo as derivadas (ou diferenciais) de ordem  $m$  segundo o vector  $h$ :

$$f_h^{(m)} = \left( f_h^{(m-1)} \right)'_h = d_h (d_h^{m-1} f) = d_h^m f.$$

Ou escrevendo simbólica e sinteticamente

$$\begin{aligned} f_h^{(m)} &= d_h^m f = \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m f \\ &= (h_1 D_{1h} + \cdots + h_n D_{nh})^m f. \end{aligned}$$

**Proposição 2.13.4** Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^m(D)$ .

Prove que

$$f_h^{(m)} = \|h\|^m f_{vers h}^{(m)} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

**Dem.** Como

$$vers h = \frac{h}{\|h\|} \iff h = \|h\| vers h,$$

então, pelo Exercício 2.4.5,

$$f'_h = f'_{\|h\|vers h} = \|h\| f'_{vers h}.$$

A demonstração faz-se por indução matemática em  $m$ .

Hipótese de indução:

$$f_h^{(p)} = \|h\|^p f_{vers h}^{(p)}.$$

Tese:

$$f_h^{(p+1)} = \|h\|^{p+1} f_{vers h}^{(p+1)}.$$

Então

$$\begin{aligned} f_h^{(p+1)} &= \left( f_h^{(p)} \right)'_h = \left( \|h\|^p f_{vers h}^{(p)} \right)'_h = \|h\|^p \left( f_{vers h}^{(p)} \right)'_{\|h\|vers h} \\ &= \|h\|^p \|h\| f_{vers h}^{(p+1)} = \|h\|^{p+1} f_{vers h}^{(p+1)}. \end{aligned}$$

■

**Exercício 2.13.5** Calcule o  $\mathcal{D}$  diferencial de  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(x, y, z) = e^{2x-y+3z}.$$

2.13. DIFERENCIAIS DE ORDEM SUPERIOR PARA FUNÇÕES REAIS EM  $\mathbb{R}^N$  97

**Resolução:** A função  $g$  é de classe  $C^2$ . Como não é referido nem ponto nem vector, pretende-se uma função de ambos. Seja  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  e  $h = (h_1, h_2, h_3)$ .

$$\begin{aligned} d_h^2 g &= g_h'' = \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} + h_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g \\ &= (h_1)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + 2h_1 h_3 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} + 2h_2 h_3 \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \\ &\quad + (h_2)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + (h_3)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ &= \left[ 4(h_1)^2 - 4h_1 h_2 + 12h_1 h_3 - 6h_2 h_3 + (h_2)^2 + 9(h_3)^2 \right] e^{2x-y+3z}. \end{aligned}$$

**Exercício 2.13.6** Para  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) = xy^4 - e^{x+4y},$$

calcular o diferencial de 3ª ordem.

**Dem.** Como  $f$  é de classe  $C^3$  logo as derivadas parciais são contínuas e há simetria das derivadas cruzadas.

$$\begin{aligned} d_h^3 f &= f_h''' = \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f \\ &= (h_1)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3(h_1)^2 h_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3h_1 (h_2)^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + (h_2)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}. \end{aligned}$$

■

Os diferenciais poderão ser utilizados para aproximar funções complexas por funções lineares ou mais "linearizadas", como é indicado pelo próximo teorema:

**Teorema 2.13.7** (Teorema de Taylor) Se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^{m+1}$  numa vizinhança de  $a$  que contenha  $a + h$ , então

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f_h'(a) + \frac{1}{2!} f_h''(a) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{m!} f_h^{(m)}(a) + \frac{1}{(m+1)!} f_h^{(m+1)}(a + \theta h), \end{aligned}$$

com  $0 < \theta < 1$ .

Escrevendo a mesma expressão utilizando diferenciais obtém-se

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + (d_h f)(a) + \frac{1}{2!} (d_h^2 f)(a) + \dots \\ &+ \frac{1}{m!} (d_h^m f)(a) + \frac{1}{(m+1)!} (d_h^{m+1} f)(a + \theta h), \end{aligned}$$

com  $0 < \theta < 1$ .

Em particular:

(i) Se  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots \\ &+ \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(a) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(a + \theta h), \end{aligned}$$

com  $0 < \theta < 1$ .

(ii) Se  $n > 1$ ,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \|h\| f'_{vers h}(a) + \frac{\|h\|^2}{2!} f''_{vers h}(a) + \dots \\ &+ \frac{\|h\|^m}{m!} f^{(m)}_{vers h}(a) + \frac{\|h\|^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}_{vers h}(a + \theta h), \end{aligned}$$

com  $0 < \theta < 1$ .

Note-se que

$$f^{(k)}_{vers h}(a) = \left( \frac{h_1}{\|h\|} D_1 + \dots + \frac{h_n}{\|h\|} D_n \right)^k f.$$

**Observação 2.13.8 1.** A fórmula de Taylor, para o caso de  $n = 1$ , pode escrever-se, substituindo  $a + h = x$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ &+ \frac{(x-a)^m}{m!} f^{(m)}(a) + \frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(c), \end{aligned}$$

com  $a < c < x$  ou  $x < c < a$ .

2. Esta última igualdade no caso de  $a = 0$  é conhecida como **fórmula de MacLaurin**:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^m}{m!}f^{(m)}(0) + \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m+1)}(c),$$

com  $0 < c < x$  ou  $x < c < 0$ .

3. Uma função de classe  $C^m$  pode ser aproximada por um polinómio de grau  $m$ .

**Dem. (i)** Definindo  $b = a + h$ , considere-se a função

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) + \cdots \\ & - \frac{(b-x)^m}{m!}f^{(m)}(x) - \frac{(b-x)^{m+1}}{(m+1)!}\lambda, \end{aligned}$$

com  $\lambda$  uma constante a determinar.

Note-se que assim definida,  $\varphi(b) = 0$ .

A função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável em  $[a, b]$ , pelas hipóteses sobre  $f$  ( $f \in C^{m+1}$ ), e pode obter-se

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = & -f'(x) + f'(x) - (b-x)f''(x) + (b-x)f''(x) - \frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x) + \cdots \\ & + \frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m)}(x) - \frac{(b-x)^m}{m!}f^{(m+1)}(x) + \frac{(b-x)^m}{m!}\lambda, \end{aligned}$$

ou seja

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^m}{m!} \left[ \lambda - f^{(m+1)}(x) \right]. \quad (2.13.1)$$

Considere-se  $\lambda$  de modo que  $\varphi(a) = 0$ . Então:

$\varphi$  é contínua em  $[a, b]$ ,  $\varphi$  é derivável em  $[a, b]$ ,  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , pelo que é aplicável o Teorema de Rolle a  $\varphi$  no intervalo  $[a, b]$ . Assim existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $\varphi'(c) = 0$ .

Substituindo em (2.13.1), tem-se

$$\varphi'(c) = 0 \implies \lambda = f^{(m+1)}(c).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(a) = & f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots \\ & - \frac{(b-a)^m}{m!}f^{(m)}(a) - \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!}\lambda. \end{aligned}$$

Aplicando aqui que  $b = a + h$ , ou seja,  $h = b - a$ , e  $\lambda = f^{(m+1)}(c)$ , com  $c$  um valor entre  $a$  e  $b$ , obtem-se a igualdade dada em (i).

(ii) Defina-se  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\varphi(t) = f(a + th). \quad (2.13.2)$$

Tal como foi feito no Teorema 2.5.4, tem-se

$$\varphi'(t) = f'_h(a + th)$$

e, iterando o processo,

$$\varphi^{(k)}(t) = f_h^{(k)}(a + th).$$

A fórmula de MacLaurin para a função  $\varphi(t)$  e para o intervalo  $[0, 1]$ , permite escrever

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{f_h^{(k)}(a)}{m!} + \frac{\varphi^{(m+1)}(c)}{(m+1)!},$$

com  $c$  um valor entre 0 e 1. Por (2.13.2),

$$f(a + th) = f(a) + f'_h(a) + \frac{f''_h(a)}{2!} + \dots + \frac{f_h^{(m)}(a)}{m!} + \frac{f_h^{(m+1)}(a + \theta h)}{(m+1)!},$$

com  $0 < \theta < 1$ .

A expressão de (ii) resulta observando que, pela Proposição 2.13.4,

$$f_h^{(k)} = \|h\| f_{vers h}^{(m)} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

■

**Observação 2.13.9** *Em qualquer das formas apresentadas, a última parcela é conhecida por resto da fórmula de Taylor, podendo assumir várias formas:*  
*Exemplo 1. Resto de Lagrange :*

$$R_{m+1} = \frac{f_h^{(m+1)}(a + \theta h)}{(m+1)!}, \quad \text{com } 0 < \theta < 1,$$

ou qualquer das formas equivalentes, como

$$R_{m+1} = \frac{\|h\|^{m+1}}{(m+1)!} f_{vers h}^{(m+1)}(a + \theta h), \quad \text{com } 0 < \theta < 1, \quad (2.13.3)$$

ou, para  $n = 1$ ,

$$R_{m+1} = \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(c), \quad \text{com } a < c < b.$$

*Exemplo 2. Resto de Peano* : Se considerar  $f \in C^{m+1}$ ,  $f_h^{(m+1)}$  é uma função contínua e então

$$f_h^{(m+1)}(a + \theta h) = f_h^{(m+1)}(a) + \alpha,$$

com

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

Assim, o resto de Peano será

$$R_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!} \left( f_h^{(m+1)}(a) + \alpha \right), \quad \text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

**Exercício 2.13.10** Escrever um polinómio de grau 2, que aproxime

$$f(x, y) = \arctan(xy)$$

em torno do ponto  $(1, 1)$  e calcule um valor aproximado para  $\arctan(0.99)$ .

**Resolução:**

$$f((1, 1) + (h_1, h_2)) = f(1, 1) + f'_h(1, 1) + \frac{1}{2!} f''_h(1, 1).$$

Como

$$\begin{aligned} f'_h(1, 1) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(1,1)} | (h_1, h_2) = \frac{1}{2} (h_1 + h_2), \\ f''_h(1, 1) &= \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)_{(1,1)}^2 f = \\ &= \left( h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{(1,1)} = -\frac{1}{2} (h_1^2 + h_2^2) \end{aligned}$$

então

$$f(1 + h_1, 1 + h_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} (h_1 + h_2) - \frac{1}{4} (h_1^2 + h_2^2).$$

Assim

$$\arctan(0.99) = \arctan(1.1 \times 0.9) = \arctan[(1 + 0.1) \times (1 - 0.1)],$$

temos o ponto  $(1, 1)$  e  $h = (0.1; -0.1)$ , pelo que

$$\arctan(0.99) \simeq \frac{\pi}{4} - \frac{0.02}{4}.$$

Se no Teorema 2.13.7 a função  $f$  for de classe  $C^\infty$  e

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} R_{m+1}(a, h) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{f_h^{(m+1)}(a + \theta h)}{(m+1)!}, \quad \text{com } 0 < \theta < 1,$$

para todos os pontos os pontos numa vizinhança de  $a$ , então  $f$  pode ser representada pela série de Taylor em torno de um ponto  $a$ .

**Definição 2.13.11** *Se  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^\infty$ , dá-se o nome de **série de Taylor de  $f$**  no ponto  $a \in I$  a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n.$$

Note-se que a série pode ser, ou não, convergente. Contudo  $f$  só pode ser traduzida pela série de Taylor se o resto convergir para 0.

## 2.14 Estudo dos extremos de funções reais de $n$ variáveis reais

As definições de extremos de funções reais com  $n$  variáveis reais são análogas ao caso escalar:

**Definição 2.14.1** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in D$ .*

(i) *Diz-se que  $f(a)$  é um **mínimo** (respectivamente, um **máximo**) local ou relativo de  $f$  se existir uma vizinhança  $V(a)$  tal que*

$$f(x) \geq f(a) \quad (\text{resp.}, f(x) \leq f(a)), \quad \forall x \in V(a) \cap D.$$

(ii) *Aos máximos e mínimos dá-se o nome de extremos. Quando a desigualdade só se verifica para  $x = a$ , diz-se que  $f(a)$  é um extremo local estrito.*

### 2.14.1 Extremos em pontos interiores do domínio

Antes de classificar os extremos vejamos algumas condições necessárias para a sua existência:

**Teorema 2.14.2** *Considere-se  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $a \in \text{int } D$ .*

*É condição necessária, embora não suficiente, para que exista um extremo (local) em  $x = a$  que  $f'(a) = 0$ . (Note-se que no caso de  $n > 1$ , tal significa que  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ ).*

**Dem.** Para  $n = 1$ , no caso em que  $f(a)$  é mínimo tem-se que  $f'(a^-) \leq 0$  e  $f'(a^+) \geq 0$ .

Como  $f$  é diferenciável em  $a$ , então  $f'(a^-) = f'(a^+) = 0$ .

Analogamente no caso em que  $f(a)$  é máximo.

No caso geral:

- a diferença  $f(a+h) - f(a)$  ( $= f'_h(a+\theta h)$ ,  $0 < \theta < 1$ ) só tem sinal constante numa vizinhança  $V(a)$  se o mesmo suceder com o vector  $h$  "paralelo" a cada um dos vectores da base de  $\mathbb{R}^n$ ,  $e_i$ ;
- para cada derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  (apenas incrementada segundo o vector  $e_i$ ), é possível calcular derivadas laterais. Pela primeira parte (caso  $n = 1$ ), tem-se  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , e logo  $f'_h(a) = 0$ .

■

A condição  $f'(a) = 0$  não é suficiente para a existência de extremos. Veja-se o seguinte contra-exemplo:

Para  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^3$ , temos  $f'(x) = 3x^2$ ,  $0 \in \text{int } D$ ,  $f'(0) = 0$  e  $f(0) = 0$  não é nenhum extremo.

**Definição 2.14.3** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Os pontos  $x$  em que  $f'(x) = 0$ , dizem-se **pontos de estacionaridade** ou **pontos críticos** de  $f$ .*

Para  $n = 1$  foram estabelecidas algumas regras para esclarecer se um ponto crítico é, ou não, um extremante da função.

Vejam-se, a título de exemplo, o seguinte teorema que sintetiza algumas dessas regras:

**Teorema 2.14.4** *Considere-se  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^m$  e  $a \in \text{int } I$  um ponto crítico de  $f$ .*

*Seja  $m > 1$  a mais baixa ordem das derivadas de  $f$  que não se anulam em  $a$ . Então:*

- a) Se  $m$  é par e  $f^{(m)}(a) > 0$  então  $f(a)$  é um mínimo (local) estrito;
- b) Se  $m$  é par e  $f^{(m)}(a) < 0$  então  $f(a)$  é um máximo (local) estrito;
- c) Se  $m$  é ímpar e  $f^{(m)}(a) > 0$  então  $f$  é crescente nalguma vizinhança de  $a$ ;
- d) Se  $m$  é ímpar e  $f^{(m)}(a) < 0$  então  $f$  é decrescente nalguma vizinhança de  $a$ .

**Dem.** Daremos apenas uma ideia intuitiva da demonstração usando a fórmula de Taylor:

Se  $m > 1$  é a mais baixa ordem das derivadas de  $f$  que não se anulam em  $a$ , então

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^m}{m!} f^{(m)}(a) + R_{m+1}.$$

Se considerarmos  $R_{m+1}$  o resto de Peano, quando  $x \rightarrow a$  (ou  $h \rightarrow 0$ ), tem-se que  $R_{m+1} \rightarrow 0$ , pelo que é desprezável. Assim

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^m}{m!} f^{(m)}(a),$$

e o sinal de  $f(x) - f(a)$  é o mesmo que o sinal de  $(x-a)^m f^{(m)}(a)$ .

Se  $f(x) - f(a) > 0$ , então  $f(x) > f(a)$ ,  $\forall x \in V(a)$ , e  $f(a)$  é um mínimo.

■

Para  $n > 1$ , o processo é análogo, recorrendo ao  $m$  (primeira ordem das derivadas dirigidas que não se anulam no ponto crítico  $a$ ) e à fórmula de Taylor.

Assim tem-se, utilizando o resto de Peano (2.13.3),

$$f(a+h) = f(a) + \frac{\|h\|^m}{m!} \left[ f_{vers h}^{(m)}(a) + \alpha \right], \quad \text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

Então o sinal de

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\|h\|^m}{m!} \left[ f_{vers h}^{(m)}(a) + \alpha \right],$$

depende do sinal de  $f_{vers h}^{(m)}(a)$  que é um **polinómio homogéneo** de grau  $m$  (ou uma **forma** de grau  $m$ ) nas componentes de  $vers h$  (veja-se. por exemplo, o Exercício 2.13.10).

### 2.14.2 Classificação dos pontos críticos

Em primeiro lugar vejamos a classificação das formas (polinómios homogéneos) e, posteriormente, a sua relação com a existência de extremos, ou seja o sinal de  $f_{vers h}^{(m)}(a)$ .

**Definição 2.14.5** *Uma forma diz-se:*

- a) **indefinida**, se puder tomar valores positivos e valores negativos (não tem sinal constante);
- b) **definida**, se tiver sinal constante, sem nunca se anular (como se considera *vers h*, que tem norma 1, as suas coordenadas não se podem anular todas simultaneamente):
  - b.1) **definida positiva**, se for positiva;
  - b.2) **definida negativa**, se for negativa;
- c) **semi-definida**, se tomar valores de um só sinal mas se se puder anular com os  $h_i$  (componentes de  $h$ ) não todos nulos. Isto é, existem **direcções singulares**, direcções de  $h \neq 0$  segundo as quais a forma se anula.

Classifiquemos então os pontos críticos:

**Teorema 2.14.6** *Considere-se uma função de classe  $C^{m+1}$ ,  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in \text{int } D$  um ponto crítico de  $f$ .*

*Seja  $m > 1$  a mais baixa ordem das derivadas dirigidas de  $f$  que não se anulam (identicamente) em  $a$ . Então*

- a)  $f(a)$  é um **mínimo** (resp. **máximo**) local estrito se  $m$  é par e  $f_{vers h}^{(m)}(a)$  é uma forma definida positiva (resp. negativa);
- b) o ponto  $x = a$  não é um extremante para a função  $f$  se:
  - b.1)  $m$  é ímpar (neste caso caso a forma é indefinida);
  - b.2)  $m$  é par mas  $f_{vers h}^{(m)}(a)$  é uma forma indefinida ;
  - b.3)  $m$  é par e  $f_{vers h}^{(m)}(a)$  é uma forma semi-definida, mas há alguma direcção singular ao longo da qual a primeira derivada dirigida que não se anula é de ordem ímpar ou, sendo par, tem sinal contrário ao que tinha  $f_{vers h}^{(m)}(a)$  fora das direcções singulares;

c) o recurso às derivadas dirigidas não é conclusivo quando se verificam simultaneamente as condições:

$m$  é par,  $f_{vers h}^{(m)}(a)$  é semi-definida e ao longo de cada direcção singular ou as derivadas dirigidas de ordem superior a  $m$  continuam a anular-se todas no ponto  $a$ , ou a primeira que não se anula é de ordem par e toma um valor do mesmo sinal que assume  $f_{vers h}^{(m)}(a)$  nas direcções não singulares.

**Dem.** Nas hipóteses do teorema temos

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\|h\|^m}{m!} \left[ f_{vers h}^{(m)}(a) + \alpha \right],$$

com  $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha = 0$ .

a) Se  $m$  é par e  $f_{vers h}^{(m)}(a)$  é uma forma definida (toma valores com sinal constante, sem se anular) então no conjunto  $\{(h_1, \dots, h_n) : h_1^2 + \dots + h_n^2 = 1\}$  (limitado e fechado) a função (contínua) de  $h$ ,  $f_{vers h}^{(m)}(a)$  assume um mínimo e um máximo. Em qualquer dos casos a função  $|f_{vers h}^{(m)}(a)|$  tem um mínimo positivo  $\mu$ .

Como  $\alpha$  é um infinitésimo com  $h$  é possível fixar  $h$  tal que

$$|\alpha| < \mu \leq |f_{vers h}^{(m)}(a)|, \quad \forall h \neq 0.$$

Então existe uma vizinhança de  $a$  onde o sinal de  $f(a+h) - f(a)$  tem o mesmo sinal de  $f_{vers h}^{(m)}(a)$ , pelo que há um extremo estrito em  $a$ :

- máximo, se  $f_{vers h}^{(m)}(a) < 0$  (forma definida negativa), pois  $f(a+h) < f(a)$ ;
- mínimo, se  $f_{vers h}^{(m)}(a) > 0$  (forma definida positiva), pois  $f(a+h) > f(a)$ ;

**b.1)** Se  $m$  é ímpar, então o polinómio  $f_{vers h}^{(m)}(a)$  (em  $h_i, i = 1, \dots, n$ ) tem grau ímpar, pelo que tanto pode tomar valores negativos como positivos. Ou seja,  $f_{vers h}^{(m)}(a)$  é uma forma indefinida;

**b.2)** Se  $m$  é par e  $f_{vers h}^{(m)}(a)$  é uma forma indefinida (toma valores positivos e negativos), pelo que não há uma vizinhança de  $a$  onde  $f(a+h) - f(a)$  mantenha sinal constante e, assim,  $a$  não será extremante para a função  $f$ ;

- b.3)** Se a forma é semi-definida (pode tomar valores só de um sinal, mas pode anular-se com  $h_i$  não todos nulos (direcções singulares)), então já não há a garantia de que para direcções vizinhas destas, em

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\|h\|^m}{m!} \left[ f_{vers h}^{(m)}(a) + \alpha \right],$$

temos  $\left| f_{vers h}^{(m)}(a) \right| > \alpha$ , pelo que não é possível garantir o sinal de  $f(a+h) - f(a)$ .

A única conclusão que podemos tirar é que não há extremo se, ao longo de uma direcção singular  $v$ , a primeira derivada dirigida que não se anula,  $f_{vers h}^{(m+k)}(a)$ , puder ter o sinal contrário ao que tinha a forma semi-definida  $f_{vers h}^{(m)}(a)$  fora das direcções singulares (pois, neste caso, por menor que seja o raio da vizinhança  $V(a)$ ,  $f(a+h) - f(a)$  assume valores de um sinal ao longo das direcções não singulares e valores de sinal contrário ao longo da direcção  $v$ ).

É, por exemplo, o que se passa sempre que  $m+k$  seja ímpar.

- c)** Se não se verificar a diferença de sinal da alínea anterior, isto é, se ao longo das direcções singulares, as primeiras derivadas dirigidas que não se anulam em  $a$  são de ordem par e tomam todas valores do mesmo sinal que assume  $f_{vers h}^{(m)}(a)$  fora das direcções singulares, então só um estudo directo e individualizado do comportamento da função na vizinhança de  $a$ , poderá dar alguma informação.

■

O teorema anterior é útil, na prática, quando  $m = 2$ , pelo que é importante a classificação da forma quadrática  $f_{vers h}''(a)$  através da matriz hessiana,  $\mathcal{H}(a) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]_{(a)}$ :

**Corolário 2.14.7** *Seja  $A$  uma matriz simétrica de ordem  $n$ . Considere-se a cadeia de menores principais de  $A$ :*

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n = \det(A),$$

em que cada  $\Delta_i$  (determinante de ordem  $i$ ) é menor principal do determinante  $\Delta_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ .

1. Se a característica de  $A$  ( $r(A)$ ) é igual a  $n$ , então a forma  $f_{vers h}''(a)$  (ou  $\mathcal{H}(a)$ ) é:

- a) definida positiva se  $\Delta_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  
 b) definida negativa se  $(-1)^i \Delta_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  
 c) indefinida se houver permanência e variação de sinal.
2. Se  $r(A) = p < n$  (quadrática degenerada; há  $n - p$  colunas nulas), a forma é:
- a) semi-definida positiva se  $\Delta_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $\Delta_j = 0$ ,  $j = p + 1, \dots, n$ ;  
 b) semi-definida negativa se  $(-1)^i \Delta_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $\Delta_j = 0$ ,  $j = p + 1, \dots, n$ ;  
 c) indefinida se na cadeia houver permanência e variação de sinal.

**Exercício 2.14.8** Estudar a existência de extremos livres das funções:

- a)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy;$$

- b)  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(x, y) = 2(y^3 + x^2 + xy);$$

- c)  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$h(x, y) = 2(x - y)^2 - 2(y^4 + x^4).$$

**Resolução:** a) Os pontos críticos de  $f$  são dados pelas soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2z - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + z - x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2x + 6z + y = 0. \end{cases}$$

Como é um sistema linear homogêneo com característica 3, é possível e determinado, pelo que admite apenas a solução nula  $(0, 0, 0)$ .

O estudo da forma  $f''_{vers h}(0, 0, 0)$  pode ser feito através da matriz hessiana

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais é

$$1; \Delta_1 = 2; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \Delta_3 = |\mathcal{H}| = 4.$$

Como são todos positivos,  $\mathcal{H}$  é definida positiva, pelo que  $f(0,0,0)$  é um mínimo local, pelo Teorema 2.14.6.

Em alternativa à matriz hessiana, pode calcular-se a derivada dirigida de 2ª ordem em  $(0,0,0)$ , designando *vers*  $h = (h_1, h_2, h_3)$  e calculando a forma

$$f''_{\text{vers } h}(0,0,0) = \left[ \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} + h_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f \right]_{(0,0,0)}.$$

b) Os pontos estacionários de  $g$  são dados pelo sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 4x + 2y = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 6y^2 + 2x = 0 \end{cases}$$

cujas soluções são

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{1}{12} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

A matriz hessiana é

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 12y \end{bmatrix}.$$

Então

$$\mathcal{H}(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e a cadeia de menores principais será

$$1; \Delta_1 = 4; \Delta_2 = |\mathcal{H}(0,0)| = -4.$$

Então  $g''_{\text{vers } h}(0,0)$  é uma forma indefinida ( $m = 2$ , par) pelo que, pelo Teorema 2.14.6,  $g(0,0)$  não é ponto de máximo nem de mínimo.

Para o ponto crítico  $(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$  temos

$$\mathcal{H}\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$1; \Delta_1 = 4; \Delta_2 = \left| \mathcal{H}\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right) \right| = 4.$$

Assim  $\mathcal{H}(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$  é definida positiva, pelo que  $(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$  é um ponto de mínimo.

c) Os pontos críticos de  $h$  são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial x} = 4(x-y) - 8x^3 = 0 \\ \frac{\partial a}{\partial y} = -4(x-y) - 8y^3 = 0, \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

A matriz hessiana é

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 24x^2 & -4 \\ -4 & 4 - 24y^2 \end{bmatrix}.$$

Para

$$\mathcal{H}(-1, 1) = \begin{bmatrix} -20 & -4 \\ -4 & -20 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$1; \Delta_1 = -20; \Delta_2 = |\mathcal{H}(-1, 1)| = 384,$$

pelo que  $a''_{vers h}(-1, 1)$  é uma forma definida negativa. Logo  $(-1, 1)$  é um ponto de máximo.

O mesmo acontece para  $(1, -1)$ .

No outro caso, obtem-se

$$\mathcal{H}(0, 0) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$1; \Delta_1 = 4; \Delta_2 = |\mathcal{H}(0, 0)| = 0.$$

Então  $a''_{vers h}(0, 0)$  é uma forma semi-definida positiva e é necessário estudar as direcções singulares.

A expressão da forma é, considerando  $h = (h_1, h_2)$ ,

$$a''_{vers h}(0, 0) = 4h_1^2 - 8h_1h_2 + 4h_2^2 = 4(h_1 - h_2)^2.$$

Assim

$$a''_{vers h}(0, 0) = 0 \iff h_1 = h_2.$$

Como

$$\|vers h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 1 \quad (2.14.1)$$

tem-se que  $h_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , pelo que existem duas direcções singulares

$$u = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ e } v = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

É preciso agora encontrar a primeira ordem da derivada dirigida que não se anula identicamente em  $(0, 0)$ . Começemos por verificar a 3ª ordem:

$$\begin{aligned} a'''_{vers h}(0, 0) &= h_1^3 a'''_{x^3}(0, 0) + 3h_1^2 h_2 a'''_{x^2 y}(0, 0) \\ &\quad + 3h_2^2 h_1 a'''_{xy^2}(0, 0) + h_2^3 a'''_{y^3}(0, 0) \\ &= 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Passando à 4ª derivada

$$\begin{aligned} a^{(iv)}_{vers h}(0, 0) &= h_1^4 a^{(iv)}_{x^4}(0, 0) + 4h_1^3 h_2 a^{(iv)}_{x^3 y}(0, 0) + 6h_1^2 h_2^2 a^{(iv)}_{x^2 y^2}(0, 0) \\ &\quad + 4h_1 h_2^3 a^{(iv)}_{xy^3}(0, 0) + h_2^4 a^{(iv)}_{y^4}(0, 0) \\ &= -48(h_1^4 + h_2^4). \end{aligned}$$

Esta derivada não se anula porque, por (2.14.1),  $h_1$  e  $h_2$  não se podem anular simultaneamente. Então, em  $(0, 0)$ , a primeira derivada dirigida que não se anula identicamente é 4, isto é,  $m = 4$ .

Determine-se, agora, o sinal da forma segundo a direcção singular  $u = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ :

$$a^{(iv)}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}(0, 0) = -48 \left( \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 \right) < 0.$$

(o sinal é o mesmo para a direcção singular  $\left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ ).

O sinal de  $a''_{vers h}(0, 0)$  fora das direcções singulares é positivo. Então, pelo Teorema 2.14.6 b.3), o ponto  $(0, 0)$  não é um extremante.

**Exercício 2.14.9** Para a função

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2 y^2 + y^4 + 1,$$

- a) prove que qualquer ponto da forma  $(x, x)$  ou  $(x, -x)$  é um ponto estacionário;
- b) Determine as direcções singulares;

- c) mostre que todas as derivadas dirigidas se anulam segundo as direcções singulares;
- d) prove que 1 é um mínimo absoluto de  $f$ .  
(Sugestão: escreva  $f$  na forma  $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2 + 1$ )

## 2.15 Máximos e mínimos de funções definidas implicitamente

A teoria anterior é aplicável a uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida implicitamente por uma relação da forma  $\varphi(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ , desde que  $\varphi$  seja diferenciável até uma ordem conveniente e atendendo às condições típicas das funções implícitas:

- As condições de estacionaridade  $\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0$ , escrevem-se agora na forma  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), supondo que  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$ ;
- Como as variáveis  $x_i$  e o valor  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  correspondente têm que verificar a igualdade  $\varphi(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ , o sistema para determinar os pontos críticos será

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \end{cases}$$

(supondo que  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$ , que é uma condição necessária para ser função implícita).

- Se  $A = (a_1, \dots, a_n, b)$  for solução do sistema (em que  $b = f(a_1, \dots, a_n)$  é o valor da função no ponto crítico), também se pode recorrer à matriz hessiana  $\mathcal{H}(A) = \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{(A)}$  (caso não seja a matriz nula, o que corresponde a admitir que  $f''_{vers h}(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ ) para se verificar se  $(a_1, \dots, a_n)$  é, ou não, extremante.
- O cálculo das segundas derivadas  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}$  faz-se a partir de

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}, \quad (2.15.1)$$

2.15. MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DEFINIDAS IMPLICITAMENTE 113

utilizando o facto de  $A$  ser um ponto de estacionaridade. Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}(A) &= \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \right] (A) = \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \right) \right] (A) \\ &= \left[ -\frac{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2} \right] (A) \\ &= \left[ -\frac{\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial y} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right)}{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2} \right] (A). \end{aligned}$$

Como  $A$  é um ponto crítico do sistema  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(A) = 0$  e, por (2.15.1),  $\frac{\partial y}{\partial x_i}(A) = 0$ , tem-se

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}(A) = \left[ -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \right] (A). \quad (2.15.2)$$

Estas considerações podem resumir-se no teorema seguinte:

**Teorema 2.15.1** *Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ) definida implicitamente por uma relação da forma  $\varphi(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ , segundo as condições do Teorema 2.11.3.*

*Então:*

**a)** *Os pontos críticos de  $f$  são as soluções do sistema*

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \varphi(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \end{cases}$$

*(com  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$ );*

**b)** *Para cada ponto crítico  $A = (a_1, \dots, a_n, b)$ , a condição de  $b = f(a_1, \dots, a_n)$  ser um extremo, depende :*

1. *se  $n = 1$ , do sinal de (2.15.2), caso seja não nulo, nos termos do Teorema 2.14.4;*
2. *se  $n > 1$ , da natureza da forma quadrática da matriz (2.15.2), se não for nula, nos termos do Teorema 2.14.6.*

**Exercício 2.15.2** Considere a equação

$$x + 2xy + 3z^2 + x^2z - 1 = 0.$$

- a) Indique os pontos onde a equação define  $z$  como função de  $x$  e  $y$ .  
 b) Determine, se existirem, os extremos da função  $z$ .

**Resolução: a)**  $\varphi(x, y, z) = x + 2xy + 3z^2 + x^2z - 1$  é de classe  $C^1$  e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 6z + x^2 \neq 0 \iff z \neq -\frac{x^2}{6}.$$

A equação define  $z$  como função de  $x$  e  $y$  nos pontos pertencentes ao conjunto

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x, y, z) = 0 \wedge z \neq -\frac{x^2}{6} \right\}.$$

- b) Os pontos críticos são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1 + 2y + 2xz = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x = 0 \\ x + 2xy + 3z^2 + x^2z - 1 = 0, \end{cases}$$

isto é

$$\left( 0, -\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

Para classificar os pontos críticos, estuda-se a matriz

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_\varphi \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{6z + x^2} \begin{bmatrix} 2z & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

No ponto  $A = \left( 0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$  a matriz será

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2\frac{\sqrt{3}}{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Como  $\Delta_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $\Delta_2 = -\frac{1}{3}$ , tem-se uma matriz indefinida, pelo que o ponto  $\left( 0, -\frac{1}{2} \right)$  não é um ponto extremante da função  $z$ .

Em  $B = \left( 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ , obtém-se  $\Delta_1 = \frac{1}{3}$ ,  $\Delta_2 = -\frac{1}{3}$ , a situação é análoga.

**Exercício 2.15.3** *Seja a equação*

$$x^2 + xy + y^2 = 27.$$

- a) *Indique o conjunto de pontos para os quais a equação define  $y$  como função de  $x$ .*
- b) *Determine, caso existam, os extremos de  $y$ .*

**Resolução:** a)  $\varphi(x, y) = x^2z + xy + y^2 - 27 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + 2y \neq 0 \iff y \neq -\frac{x}{2}.$$

A equação define  $y$  como função de  $x$  nos pontos do conjunto

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x, y) = 0 \wedge y \neq -\frac{x}{2} \right\}.$$

b) Os pontos críticos são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x + y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 27 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ x^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -6 \\ x = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 6 \\ x = -3 \end{cases}.$$

A classificação dos pontos críticos faz-se através do sinal de

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ x + 2y \end{bmatrix}_{(3, -6)} = \frac{2}{9} > 0.$$

Pelo Teorema 2.14.4,  $-6$  é um mínimo local de  $y$  (o minimizante é  $3$ ).

No ponto  $(-3, 6)$ , o sinal é negativo, logo  $6$  é um máximo local de  $y$ .

## 2.16 Extremos condicionados

Admitamos que interessa determinar os extremos de uma função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , mas sujeita a restrições caracterizadas por  $m < n$  relações da forma

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

sendo  $f$  e  $\varphi_i$  funções de classe  $C^r(\mathbb{R}^n)$ , ( $r \geq 2$ ), com  $\varphi_i$  funções linearmente independentes, o seu jacobiano  $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$  (caso contrário consideram-se apenas as  $m$  funções linearmente independentes).

### 2.16.1 Método dos multiplicadores de Lagrange

Este método baseia-se na construção de uma nova função (Lagrangeana) que resulta da soma de  $f$  com uma combinação linear das restrições

$$\mathcal{L} := f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1, \dots, x_n),$$

ou,

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) := f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x_1, \dots, x_n),$$

com os componente  $\lambda_i$  a determinar.

Por este motivo também se chama "Método dos multiplicadores indeterminados".

Os possíveis pontos críticos de  $f$ , sujeitos às restrições apresentadas, terão de ser também pontos críticos de  $\mathcal{L}$ , isto é, de satisfazer o sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{array} \right.$$

ou, sinteticamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{array} \right.$$

Determinados os pontos críticos de problemas com extremos condicionados, há que investigar quais são os pontos de máximo ou de mínimo ou os que não são extremantes.

### 2.16.2 Método do Hessiano orlado

Este método é válido quando o sinal do segundo diferencial permite determinar a natureza do ponto crítico.

Antes do resultado geral veja-se um exemplo:

**1º Caso:** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sujeita à restrição  $\varphi(x, y) = 0$ .  
A função Lagrangeana é

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

e os pontos críticos de  $\mathcal{L}$  são soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (2.16.1)$$

Seja  $(a, b, \lambda_0)$  um ponto estacionário de  $\mathcal{L}$ .

Partindo de

$$(df)_h = \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2$$

e aplicando a  $\varphi$  tem-se

$$(d\varphi)_h = \frac{\partial \varphi}{\partial x} h_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} h_2 = 0,$$

pois  $\varphi(x, y) = 0$ .

Considerando o  $x$  como variável independente na expressão  $\varphi(x, y) = 0$ , pode considerar-se  $h_2$  como uma função de  $x$ ,  $y$  e  $h_1$ , dada por

$$h_2 = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} h_1. \quad (2.16.2)$$

(Note-se que se  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$  então  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} h_1 = 0 \implies \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \implies \varphi(x, y) \equiv 0$ , pelo  $\varphi$  seria a função nula, logo não seria nenhuma restrição.)

Calculando o diferencial de 2ª ordem de  $\varphi$ , temos

$$\begin{aligned} 0 &= d_h^2 \varphi = d_h (d_h \varphi) = \frac{\partial}{\partial x} (d_h \varphi) h_1 + \frac{\partial}{\partial y} (d_h \varphi) h_2 \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} h_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} h_2 \right) h_1 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} h_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} h_2 \right) h_2 \\ &= \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} h_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} h_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x} \right] h_1 + \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} h_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} h_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial y} \right] h_2 \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (h_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} (h_2)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \underbrace{\left( \frac{\partial h_2}{\partial x} h_1 + \frac{\partial h_2}{\partial y} h_2 \right)}_{=d_h h_2}. \end{aligned}$$

Então o diferencial de  $h_2$  é dado por

$$d_h h_2 = -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} (h_1)^2 - 2\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} h_1 h_2 - \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} (h_2)^2. \quad (2.16.3)$$

Aplicando o mesmo processo para determinar o diferencial de 2ª ordem de  $f$  e substituindo em (2.16.3), obtem-se

$$\begin{aligned} d_h^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (h_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (h_2)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} d_h h_2 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (h_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (h_2)^2 \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y} \left( -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} (h_1)^2 - 2\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} h_1 h_2 - \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} (h_2)^2 \right), \end{aligned}$$

colocando em evidência  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_1 h_2$  temos

$$\begin{aligned} d_h^2 f &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) (h_1)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) h_1 h_2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) (h_2)^2, \end{aligned}$$

obtendo-se assim uma forma quadrática nas componentes de  $h = (h_1, h_2)$ .

Como se pretende calcular esta forma nos pontos críticos, isto é, nos pontos que verificam (2.16.1), tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \iff \lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}},$$

e, substituindo em  $d_h^2 f$ ,

$$\begin{aligned} d_h^2 f(a, b) &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \lambda_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{(a,b)} (h_1)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \lambda_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right)_{(a,b)} h_1 h_2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \lambda_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_{(a,b)} (h_2)^2. \end{aligned}$$

Pela construção Lagrangeana ( $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ ), obtém-se a forma quadrática

$$d_h^2 f(a, b) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(a, b, \lambda_0) (h_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x}(a, b, \lambda_0) h_1 h_2 \quad (2.16.4) \\ + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}(a, b, \lambda_0) (h_2)^2.$$

Por outro lado tem-se

$$f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b) = \underbrace{(d_h f)_{(a,b)}}_{=0} + \frac{1}{2!} d_h^2 f(a, b) + R_3.$$

Como  $(d_h f)_{(a,b)} = 0$ , o sinal do primeiro membro, numa vizinhança suficientemente pequena de  $(a, b)$  (em que o resto tende para 0), depende do sinal da forma quadrática  $d_h^2 f(a, b)$ .

Atendendo a (2.16.2), pode-se modificar (2.16.4):

$$d_h^2 f(a, b) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(a, b, \lambda_0) (h_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x}(a, b, \lambda_0) h_1 \left( -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} h_1 \right) \\ + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}(a, b, \lambda_0) \left( -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} h_1 \right)^2 \\ = \left( \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} \left( \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \right)^2 \right) (h_1)^2 \\ = \frac{1}{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2} \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] (h_1)^2 \\ = -\frac{1}{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} \end{vmatrix}}_{\overline{\mathcal{H}}(a,b,\lambda_0)} (h_1)^2.$$

Como os outros factores são quadrados, o sinal de  $f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b)$  vai depender do determinante  $\overline{\mathcal{H}}$  (**Hessiano orlado**) no ponto  $(a, b, \lambda_0)$ , que se obtém do hessiano de  $\mathcal{L}$  em  $(a, b, \lambda_0)$  rodeado das derivadas das restrições  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b)$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b)$ , do modo como se indica:

**Observação 2.16.1** Considerando  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b) \neq 0$ :

- Se  $\bar{\mathcal{H}}(a, b, \lambda_0) > 0$ ,  $d_h^2 f(a, b)$  é uma forma definida negativa, pelo que  $f(a, b)$  é um máximo;
- Se  $\bar{\mathcal{H}}(a, b, \lambda_0) < 0$ ,  $d_h^2 f(a, b)$  é uma forma definida positiva, e  $f(a, b)$  é um mínimo.

**2º Caso:** (caso geral)

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sujeita às restrições  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ , com  $i = 1, \dots, m$ , em que  $f, \varphi_i \in C^r$ , ( $r \geq 2$ ).

A função lagrangeana será

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) &= f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\quad + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

e o hessiano orlado é um determinante de ordem  $n + m$  dado por,

$$\bar{\mathcal{H}}_{n+m} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

**Observação 2.16.2** Calculam-se  $n - m$  determinantes:

- $\bar{\mathcal{H}}_{n+m}$ ;
- $\bar{\mathcal{H}}_{n+m-1}$ , suprimindo a linha e a coluna  $n + m$ ;
- ...
- $\bar{\mathcal{H}}_{2m+1}$ , suprimindo as  $n - m - 1$  últimas linhas e colunas.

Para cada ponto crítico  $(a_1, \dots, a_n)$  tem-se os seguintes casos

1. Se os determinantes  $\bar{\mathcal{H}}_k$  ( $2m + 1 \leq k \leq n + m$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ) são alternadamente positivos e negativos, tendo  $\bar{\mathcal{H}}_{2m+1}$  o sinal de  $(-1)^{m+1}$ , então  $(a_1, \dots, a_n)$  é um ponto de máximo (já que a forma é definida negativa);

2. Se os determinantes  $\overline{\mathcal{H}}_k$  ( $2m + 1 \leq k \leq n + m$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ) têm todos o mesmo sinal de  $(-1)^m$ , então  $(a_1, \dots, a_n)$  é um ponto de mínimo (já que a forma é definida positiva);
3. Se  $\overline{\mathcal{H}}_{2m+1} = 0$ , nada se pode concluir e só o estudo local pode dar informação.  
O mesmo acontece para os outros casos não referenciados anteriormente.

**Exemplo 2.16.3** Determinar os extremos de  $f(x, y) = 2x - 3y$  que pertencem à elipse

$$x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 10.$$

**Resolução:** Para a lagrangeana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2x - 3y + \lambda \left( x^2 + \frac{3}{2}y^2 - 10 \right)$$

calculam-se os pontos críticos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 + 2x\lambda = 0 \\ -3 + 3y\lambda = 0 \\ x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

O hessiano orlado será

$$\overline{\mathcal{H}} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 3y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 3y & 0 & 3\lambda \end{vmatrix}.$$

Calculando-o em cada um dos pontos críticos:

$$\overline{\mathcal{H}} \left( 2, -2, -\frac{1}{2} \right) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 4 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 60 > 0,$$

então  $f(2, -2)$  é máximo;

$$\overline{\mathcal{H}} \left( -2, 2, \frac{1}{2} \right) = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 6 \\ -4 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -60 < 0,$$

então  $f(-2, 2)$  é mínimo.

**Exemplo 2.16.4** Estudar os extremos de  $g(x, y, z) = x^2 + 2y + z$  que pertencem aos planos

$$x + y + z = 2 \text{ e } x + 2y = 1.$$

**Resolução:**

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + 2y + z + \lambda_1(x + y + z - 2) + \lambda_2(x + 2y - 1),$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 1 + \lambda_1 = 0 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{8} \\ z = \frac{9}{8} \\ \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\overline{\mathcal{H}}_{2+3} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

Calcular 3-2 determinantes. Neste caso apenas  $\overline{\mathcal{H}}_5 = 8 > 0$ , que é o mesmo sinal de  $(-1)^m = (-1)^2 = 1$ . Logo o ponto crítico é um ponto de mínimo, tomano  $f$  o valor mínimo de  $f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{9}{8}\right) = \frac{31}{16}$ .

**Exemplo 2.16.5** Determinar três números cuja soma seja 150 e de modo que o produto seja o máximo.

**Resolução:**  $f(x, y, z) = xyz$  e  $\varphi(x, y, z) = x + y + z = 150$ ,

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - 150),$$

os pontos críticos são

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = yz + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = xz + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = xy + \lambda = 0 \\ x + y + z = 150 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 50 \\ y = 50 \\ z = 50 \\ \lambda = -2500 \end{cases},$$

excluem-se os valores nulos, pois neste caso o produto seria nulo.

Provar que o produto é máximo neste ponto:

$$\overline{\mathcal{H}}_{3+1} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

É necessário calcular  $n - m = 3 - 1 = 2$  determinantes:  $\overline{\mathcal{H}}_4$  e  $\overline{\mathcal{H}}_3$ . Assim

$$\overline{\mathcal{H}}_4(50, 50, 50, -2500) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 50 & 50 \\ 1 & 50 & 0 & 50 \\ 1 & 50 & 50 & 0 \end{vmatrix} = -7500 < 0,$$

$$\overline{\mathcal{H}}_3(50, 50, 50, -2500) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 50 \\ 1 & 50 & 0 \end{vmatrix} = 100 > 0.$$

Temos sinais alternados com  $\overline{\mathcal{H}}_{2m+1=3} > 0$  que é o mesmo sinal de  $(-1)^{m+1=2}$ .  
Pela Observação 2.16.2 (1) o ponto crítico é um ponto de máximo.  
Assim os números são  $x = y = z = 50$ .

## 2.17 Exercícios

1. Determine, utilizando a definição, as derivadas parciais de 1ª ordem das funções, nos pontos indicados:

a)  $f(x, y) = \frac{2x+y+3}{x-3y+1}$  em  $(-1, 1)$ ;

b)  $g(s, t) = \sqrt{st}$  em  $(1, 1)$ .

2. Calcule, caso existam, as derivadas parciais de 1ª ordem das seguintes funções:

a)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2+3y^3}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

b)  $g(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

3. Para as funções

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 \cos(x) y^3, & g(x, y, z) &= \frac{2x}{yx^2 + z^2}, \\ h(x, y, z) &= \arctan(xyz), & j(x, y) &= (3x + 2y)^6, \end{aligned}$$

calcular:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{\partial f}{\partial x} & \text{b)} \frac{\partial f}{\partial y} & \text{c)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \text{d)} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \text{e)} \frac{\partial g}{\partial y} & \text{f)} \frac{\partial g}{\partial z} & \text{g)} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} & \text{h)} \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} \\ \text{i)} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} & \text{j)} \frac{\partial j}{\partial x} & \text{l)} \frac{\partial^3 j}{\partial y \partial x^2} & \text{m)} \frac{\partial^4 j}{\partial y^2 \partial x^2}. \end{array}$$

4. Recorrendo à definição, calcule a derivada das seguintes funções, segundo o vector  $u$  e nos pontos  $P$  indicados:

a)  $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ ,  $u = (1, 1)$  e  $P = (2, -1)$ ;

b)  $g(s, t) = 2s + 5t^2$ ,  $u = (1, \sqrt{2})$  e  $P = (-1, 1)$ .

5. Determine a derivada direccional  $f'_u$  no ponto  $P$ .

a)  $f(x, y) = e^{5xy}$ ,  $u = (1, 1)$  e  $P = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ ;

b)  $g(s, t) = \ln(2 + s + y^2)$ ,  $u = (1, 0)$  e  $P = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

**6.** A altura em relação ao nível das águas do mar de um ponto  $(x, y)$  de uma certa montanha é dado por

$$z = 2500 - 2x^2 - 3y^2,$$

em que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são definidos em metros. O semi-eixo positivo  $OX$  aponta para Oriente e o semi-eixo positivo  $OY$  indica o Norte.

Um montanhista está no ponto  $(-10, 5, 2225)$  e pode caminhar em qualquer direcção

- Se se dirigir em direcção a Ocidente, o montanhista estará subindo ou descendo ?
- Se caminhar em direcção a Nordeste, o montanhista estará subindo ou descendo e a que taxa?
- Em que direcção/direcções deverá caminhar para seguir uma curva de nível ?

**7.** Mostre que as funções abaixo têm derivadas parciais de 1ª ordem na origem mas não são diferenciáveis em  $(0, 0)$ .

- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0), \end{cases}$
- $g(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

**8.** Estude a diferenciabilidade e a continuidade das seguintes funções:

- $f(x, y) = xy$
- $g(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2x^2-x^4}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

**9.** Calcule o diferencial total das funções:

- $z = 2x^2 + y^2 - 5x - 3y$  no ponto  $(-2, 1)$  para os acréscimos  $dx = 0.1$  e  $dy = -0.3$ .

b)  $z = x^2 \ln\left(\frac{x}{y}\right)$  em  $(1, 1)$  para os acréscimos  $dx = -0.2$  e  $dy = 0.2$ .

**10.** Utilizando o diferencial indique um valor aproximado para:

a)  $f(1.02, 0.96)$  para  $f(x, y) = 4x^2 + 3xy + \frac{x}{y^2}$ .

b)  $g(1.003, 1.002)$  para  $g(x, y) = \ln(y) x^2 + \frac{y^2}{1+x^2}$ .

**11.** Considere uma função  $f$  diferenciável no ponto  $(1, 2)$  com

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 3.$$

Se  $f(1, 2) = 4$  indique uma aproximação para o valor de  $f(0.99, 2.03)$ .

**12.** Para a função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$f(x, y, z) = \left( x^2 + e^z, \arctan\left(\frac{x + 2y + 3z}{3}\right) \right),$$

escreva a matriz jacobiana em  $(0, 0, 0)$ .

**13.** Considere a função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(x, y, z) = (\text{sen}(xy), \cos(xy), xz).$$

Calcule o diferencial de  $f$  no ponto  $P = (0, 2, 1)$  segundo o vector  $u = (-1, 2, 1)$ .

**14.** Dada a função  $z(x, y) = \tan(x^2 + y^3)$ , com  $x = t^2 + 2t$  e  $y = \ln t$ , calcule  $\frac{dz}{dt}$ .

**15.** Seja a função  $f(x, y, z) = 3x - 2y + 4z$ , em que  $x(t) = \ln t$ ,  $y(t) = 3t$ ,  $z(t, w) = 2^t + \cos w$ .

Calcular  $\frac{\partial f}{\partial t}$  e  $\frac{\partial f}{\partial w}$ .

**16.** Considere as funções  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f$  de classe  $C^1(\mathbb{R}^3)$  e  $g$  dada por

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x).$$

Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 0,$$

para qualquer ponto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**17.** Sejam as funções  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$  e  $z(s, t) = h(x(s, t), y(s, t))$  com  $x(s, t) = s^2 - t^2$  e  $y(s, t) = 2st$ .

Prove que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = 4x \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - 2y \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial h}{\partial y}.$$

**18.** Verifique que as seguintes funções são homogêneas:

- a)  $f(x, y) = \frac{4x^2 + 3xy}{x^2 + y^2}$   
 b)  $g(x, y) = 2xy^2 + \ln(4x^3)$ .

**19.** Considere a função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y, z) = x^2 y + \frac{\sqrt{x^\alpha y}}{\sqrt{z^\beta}} + y^{\beta-1} z.$$

Determine os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  de modo que a função seja homogênea.

Indique o grau de homogeneidade e verifique o Teorema de Euler.

**20.** Considere o parabolóide  $z = f(x, y) = 1 + 4x^2 + y^2$ .

- a) Verifique que o ponto  $P = (\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 5)$  pertence ao parabolóide.  
 b) Determine a equação do plano tangente ao parabolóide em  $P$ .  
 c) Indique uma equação da recta normal ao parabolóide no ponto  $P$ .  
 d) Determine o ponto  $Q$  de intersecção da recta perpendicular ao gráfico de  $f$  em  $P$  com o plano  $XOY$ .

**21.** Indique a equação do plano tangente e da recta normal à superfície  $x^2 - 4y^2 + 2z = -2$  no ponto  $(2, 1, -1)$ .

**22.** Determine a equação de um plano tangente à superfície  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$  de modo que seja paralelo ao plano  $y = 2z$ .

**23.** Calcule a divergência e o rotacional das seguintes funções:

- a)  $f(x, y, z) = (xy, yz, zx)$   
 b)  $g(x, y, z) = (xe^y) \vec{e}_2 + (yez) \vec{e}_3$ .

**24.** Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma função de classe  $C^2(\mathbb{R}^3)$ . Prove que:  $\text{rot}(\nabla f) = (0, 0, 0)$ .

**25.** Considere uma função  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$g(x, y, z) = \begin{cases} u &= x + y + z \\ v &= 2y + z \\ w &= -x + 2z. \end{cases}$$

- Determine o jacobiano de  $g$ .
- Que pode afirmar quanto à sua invertibilidade ?
- Se possível, calcule  $g^{-1}$ .

**26.** Considere as funções

$$f(u, v, w) = \begin{cases} x &= 2u + bv + w \\ y &= u + (b + 2)v + 2w \\ z &= u + 2bw \end{cases}$$

e

$$g(x, y, z) = \begin{cases} u &= bx + 2y + z \\ v &= 2x + (b + 2)y + 2z \\ w &= 6x - y + 3z. \end{cases}$$

- Em cada caso, determine o parâmetro  $b$  de modo a que as funções sejam invertíveis.
- Para um valor conveniente de  $b$ , determine, para cada uma das funções, a respectiva função inversa.

**27.** Prove que as equações seguintes, definem  $z$  como função de  $x$  e  $y$  na vizinhança dos pontos referidos e calcule  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  nesses pontos:

- $\ln(x + 2y + 3z) = 4xy$  na vizinhança de  $(1, 0, 0)$ .
- $2x + y - 3z - 1 + \cos(x + 2y + z) = 0$  na vizinhança da origem.

**28.** Considere a equação

$$x + 2xy + 3z^2 + 2x^2z = 1.$$

- Para que valores de  $z$  a equação define, implicitamente,  $z$  como função de  $x$  e  $y$  na vizinhança de  $(1, 0, z)$ .

b) Calcule as derivadas parciais de  $z$  como função de  $x$  e  $y$  na vizinhança dos pontos anteriores.

c) Nos pontos referidos, calcule

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

**29.** Considere o sistema

$$\begin{cases} xy + \ln(z + w) = 0 \\ zw + \ln(x + y) = 0. \end{cases}$$

a) Mostre que este sistema define  $z$  e  $w$  como funções implícitas de  $x$  e  $y$ , na vizinhança de  $(1, 0, 1, 0)$ .

b) Calcule

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y},$$

na vizinhança de  $(1, 0)$ .

**30.** Estude os extremos relativos das seguintes funções:

a)  $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 5;$

b)  $g(x, y) = x^2 + xy - 2y - 2x - 3;$

c)  $h(x, y) = x^2 + y - e^y;$

d)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + 2y + 2x + 10.$

**31.** Determine os máximos e mínimos relativos (locais) da função  $y(x)$  definida implicitamente pela equação

$$y^3 - 3x^2y + x^3 - 3 = 0.$$

**32.** Calcule os extremos da função  $z(x, y)$  definida implicitamente pela igualdade

$$x + 2xy + 3z^2 + x^2z = 2,$$

na vizinhança dos pontos adequados.

**33.** Determinar e classificar os extremos das funções seguintes nas regiões indicadas:

a)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - x + 3$  na região

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\};$$

b)  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3$  sobre a curva  $C$  dada por  $4x^2 - 8x + y^2 - 2y + 1 = 0$ ; Máximo: (1,3) e (1,-1); Mínimo (2,1) e (0,1)

c)  $h(x, y) = x^2 + y^2 + xy^2$  na região

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, |y| \leq 1\};$$

d)  $f(x, y, z) = 2x^2 + y + z$  sujeita às restrições

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y = 6 \end{cases};$$

e)  $g(x, y, z) = 2x + y^2 + 2z$  sujeita às restrições

$$\begin{cases} x + 2y + z = 10 \\ x + 2z = 8 \end{cases}.$$

**34.** Determine a distância mínima da origem à superfície  $z = \frac{1}{xy}$ .

**35.** Indique o(s) ponto(s) do cone  $z^2 = x^2 + y^2$  que estão mais próximos do ponto (4, 2, 0).

**36.** Determinar o paralelepípedo rectangular de volume máximo inscrito numa esfera de raio  $r$ .

**37.** Num secador de cereais de formato cilíndrico com raio de 1 metro, a temperatura do ar na saída do secador num ponto  $(x, y)$  da secção transversal do tubo de descarga do secador, considerando a origem no centro do tubo, é dada pela função

$$T(x, y) = 8(3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 5).$$

Encontre a maior e a menor temperatura na secção de saída do secador.

## Capítulo 3

# Integrais de linha ou curvilíneos

Neste capítulo generaliza-se a noção de integral.

O intervalo  $[a, b]$  é substituído por uma curva do espaço a  $n$  dimensões, definida por uma função vectorial  $\alpha$ . A função integranda é também uma função vectorial  $f$ , definida e limitada ao longo da curva.

Os integrais de linha são importantes em Matemática pura e aplicada. Aparecem ligados com os conceitos de trabalho, energia potencial, fluxo de calor, circulação de um fluido, e noutros conceitos físicos em que se estuda o comportamento de uma função (escalar ou vectorial) ao longo de uma curva.

### 3.1 Definição e propriedades

Seja  $I = [a, b]$ .

#### Definição 3.1.1

- a) Uma função  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  **contínua** em  $I$ , diz-se uma *linha contínua* de  $\mathbb{R}^n$ ;
- b)  $\alpha$  é uma **linha regular** se a derivada  $\alpha'$  existe e é contínua num intervalo  $]a, b[$ ;
- c)  $\alpha$  é uma **linha seccionalmente regular** (*regular por intervalos*) se se pode fazer uma partição de  $[a, b]$  num número finito de subintervalos e, em cada um deles,  $\alpha$  é regular.

*Exemplo*



*Esta curva admite tangente (derivada) em todos os pontos excepto num número finito de pontos (bicos).*

**Definição 3.1.2** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma linha seccionalmente regular e seja  $f$  uma função vectorial e limitada sobre o gráfico de  $\alpha$ ,  $C$ . O integral de linha de  $f$  ao longo de  $\alpha$ , representa-se por*

$$\int_C f \, d\alpha \text{ ou } \int f \cdot d\alpha \text{ ou } \oint_C f \, d\alpha \text{ (para curvas fechadas),}$$

e define-se

$$\int_C f \, d\alpha = \int_a^b f[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t) \, dt.$$

Quando  $f$  e  $\alpha$  se exprimem em função das suas componentes,  $f = (f_1, \dots, f_n)$  e  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  temos

$$\int_C f \, d\alpha = \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k[\alpha(t)] \cdot \alpha'_k(t) \, dt.$$

Neste caso o integral de linha também se pode escrever

$$\int_C f \, d\alpha = \int_C f_1 \, d\alpha_1 + \dots + \int_C f_n \, d\alpha_n.$$

**Exemplo 3.1.3** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(x, y) = (\sqrt{y}, x^3 + y)$ .*

1. *Determinar  $D$ ;*
2. *Calcular o integral de linha de  $f$  de  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$  ao longo dos seguintes caminhos:*

- a) recta de equações paramétricas  $x = t, y = t, 0 \leq t \leq 1$ ;  
 b) curva de equações paramétricas  $x = t^2, y = t^3, 0 \leq t \leq 1$ ;  
 c) curva de equações paramétricas  $x = t, y = t^{\frac{3}{2}}, 0 \leq t \leq 1$ .

**Resolução: 1.**  $D = \{(x, y) : y \geq 0\}$

2. a)  $\alpha(t) = (t, t), \alpha'(t) = (1, 1)$  e

$$\int_C f d\alpha = \int_0^1 (\sqrt{t}, t^3 + t) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 (\sqrt{t} + t^3 + t) dt = \frac{17}{12}.$$

- b)  $\alpha(t) = (t^2, t^3), \alpha'(t) = (2t, 3t^2)$  e

$$\int_C f d\alpha = \int_0^1 (\sqrt{t^3}, t^6 + t^3) \cdot (2t, 3t^2) dt = \int_0^1 (2t^{\frac{5}{2}} + 3t^8 + 3t^5) dt = \frac{59}{42}.$$

**Observação 3.1.4** O exercício mostra que o integral de um ponto a outro, depende, em geral, do caminho percorrido.

- c)  $\beta(t) = (t, t^{\frac{3}{2}}), \beta'(t) = (1, \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}})$  e

$$\int_C f d\beta = \int_0^1 (\sqrt{t^{\frac{3}{2}}}, t^3 + t^{\frac{3}{2}}) \cdot (1, \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}) dt = \int_0^1 (t^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}t^{\frac{7}{2}} + \frac{3}{2}t^2) dt = \frac{59}{42}.$$

**Observação 3.1.5** O valor do integral de linha é independente da representação paramétrica da curva.

Algumas propriedades dos integrais de linha são semelhantes às dos integrais de Riemann.

1. **Linearidade do integral** (em relação à função integranda)

$$\int_C (k_1 f + k_2 g) d\alpha = k_1 \int_C f d\alpha + k_2 \int_C g d\alpha.$$

2. **Aditividade do integral:**

$$\int_C f d\alpha = \int_{C_1} f d\alpha + \int_{C_2} f d\alpha,$$

onde  $C = C_1 \cup C_2$ , isto é, a curva  $C$  é definida pela função  $\alpha(t)$  no intervalo  $[a, b]$  e  $C_1$  e  $C_2$ , definidas por  $\alpha(t)$  com  $t$  a variar em  $[a, c]$  e  $[c, b]$  para  $a < c < b$ .

Vejam como se pode confirmar a conjectura da Observação 3.1.5.

Sejam:  $\alpha(t)$  uma linha contínua definida em  $[a, b]$ ,  $u$  uma função real de variável real com  $u'(x) \neq 0, \forall x \in [c, d]$ , e  $u([c, d]) = [a, b]$ .

Então a função  $\beta$  definida em  $[c, d]$  por  $\beta(x) = \alpha[u(x)]$  é uma linha contínua com o mesmo gráfico de  $\alpha$ .

Duas linhas  $\alpha$  e  $\beta$  assim relacionadas dizem-se **linhas equivalentes** e proporcionam representações paramétricas distintas da mesma curva.

A função  $u$  define uma mudança de parâmetro.

Seja  $C$  o gráfico comum de duas linhas equivalentes,  $\alpha$  e  $\beta$ .

Se  $u'(x) > 0, \forall x \in [c, d]$ ,  $u$  preserva a orientação, isto é,  $\alpha$  e  $\beta$  correspondem a  $C$  com o mesmo sentido.

Se  $u'(x) < 0, \forall x \in [c, d]$ ,  $u$  inverte a orientação, isto é,  $\alpha$  e  $\beta$  percorrem  $C$  com sentidos opostos.

Então temos o Teorema

**Teorema 3.1.6** (*Comportamento de um integral curvilíneo sob uma mudança de parâmetro*) Se  $\alpha$  e  $\beta$  são duas linhas seccionalmente regulares, então tem-se:

a) se  $\alpha$  e  $\beta$  originam  $C$  com o mesmo sentido

$$\int_C f \, d\alpha = \int_C f \, d\beta;$$

b) e  $\alpha$  e  $\beta$  corresponde a  $C$  com sentidos opostos

$$\int_C f \, d\alpha = - \int_C f \, d\beta.$$

**Dem.** A demonstração faz-se apenas para linhas regulares. Para linhas seccionalmente regulares, basta decompor o intervalo e utilizar a aditividade em relação à linha.

As linhas  $\alpha$  e  $\beta$  estão relacionadas por  $\beta(x) = \alpha[u(x)]$ , com  $u$  definida em  $[c, d]$  e  $\alpha$  em  $[a, b]$ .

### 3.2. INTEGRAIS DE LINHA EM RELAÇÃO AO COMPRIMENTO DE ARCO 135

Então  $\beta'(x) = \alpha'[u(x)] u'(x)$ , pelo que

$$\int_C f d\beta = \int_c^d f[\beta(x)] \cdot \beta'(x) dx = \int_c^d f(\alpha[u(x)]) \cdot \alpha'[u(x)] u'(x) dx.$$

Fazendo, no último integral, a substituição  $v = u(x)$  e  $dv = u'(x)dx$  obtém-se

$$\begin{aligned} \int_C f d\beta &= \int_{u(c)}^{u(d)} f[\alpha(v)] \cdot \alpha'(v) dv = \pm \int_a^b f[\alpha(v)] \cdot \alpha'(v) dv \\ &= \pm \int_C f d\alpha, \end{aligned}$$

utilizando-se o sinal  $+$  se  $u(c) = a$  e  $u(d) = b$  e o sinal  $-$  se  $u(d) = a$  e  $u(c) = b$ .

No primeiro caso  $\alpha$  e  $\beta$  originam  $C$  com o mesmo sentido. o segundo com sentidos opostos. ■

## 3.2 Integrais de linha em relação ao comprimento de arco

Seja  $\alpha \in C^1([a, b])$ . Então o gráfico de  $\alpha$  é uma curva rectificável.

Se designarmos por  $ds$  o comprimento do arco  $\alpha$ , então  $ds = \|\alpha'(t)\| = s'(t)$ .

**Definição 3.2.1** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida e limitada em  $C$  (gráfico de  $\alpha$ ). O integral de linha de  $f$  com respeito ao **comprimento de arco** ao longo de  $C$ , define-se por*

$$\int_C f ds = \int_a^b f[\alpha(t)] \cdot s'(t) dt = \int_a^b f[\alpha(t)] \times \|\alpha'(t)\| dt,$$

sempre que o integral do 2º membro exista.

**Exercício 3.2.2** *Calcular os integrais de linha, com respeito ao comprimento do arco:*

1.  $\int_C (x + y) ds$ , onde  $C$  é o triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ , percorrido em sentido directo.

2.  $\int_C z ds$ , onde  $C$  é o gráfico definido pela função  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t),$$

com  $0 \leq t \leq t_0$ .

**Resolução:** 1. Decompondo

$$\int_C (x + y) ds = \int_{C_1} (x + y) ds + \int_{C_2} (x + y) ds + \int_{C_3} (x + y) ds,$$

sendo

$$C_1 : \alpha_1(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \text{ com } t \in [0, 1],$$

$$C_2 : \alpha_2(t) = \begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \end{cases}, \text{ com } t \in [0, 1],$$

$$C_3 : \alpha_3(t) = \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}, \text{ com } t \in [0, 1].$$

Como

$$\|\alpha'_1(t)\| = 1, \quad \|\alpha'_2(t)\| = \sqrt{2}, \quad \|\alpha'_3(t)\| = 1,$$

temos

$$\int_{C_1} (x + y) ds = \int_0^1 t \times 1 dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_{C_2} (x + y) ds = \int_1^0 (t - t + 1) \times \sqrt{2} dt = -\sqrt{2},$$

$$\int_{C_3} (x + y) ds = \int_1^0 t \times 1 dt = -\frac{1}{2},$$

logo

$$\int_C (x + y) ds = -\sqrt{2}.$$

2. Para a curva  $\alpha$  temos

$$\alpha'(t) = (\cos t - t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + t \cos t, 1)$$

e

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2 + t^2}.$$

Então

$$\int_C z ds = \int_0^{t_0} t \sqrt{2 + t^2} dt = \frac{1}{3} \left[ (2 + t_0)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2} \right].$$

### 3.3 Aplicações do integral de linha

#### Trabalho de uma força

Considere-se uma partícula que se move ao longo de uma curva  $\alpha$  sob a acção de uma força  $f$ .

Se a curva  $\alpha$  é seccionalmente regular, o trabalho produzido por  $f$  define-se através do integral de linha  $\int f \cdot d\alpha$ .

Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 3.3.1** *O trabalho produzido por uma força constante  $f = k$ , ao deslocar uma partícula de um ponto  $a$  para um ponto  $b$ , ao longo de qualquer trajetória seccionalmente regular unindo  $a$  e  $b$  é*

$$k \cdot (b - a).$$

**Dem.** Seja  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , com  $t \in [t_0, t_1]$ , uma linha unindo  $a$  e  $b$ , isto é,  $\alpha(t_0) = a$  e  $\alpha(t_1) = b$ , e  $k = (k_1, \dots, k_n)$ .

Admitindo que  $\alpha'$  é contínua em  $[a, b]$ , o trabalho realizado por  $f$  é

$$\begin{aligned} \int f d\alpha &= \sum_{i=1}^n k_i \int_{t_0}^{t_1} \alpha'_i(t) dt = \sum_{i=1}^n k_i [\alpha_i(t_1) - \alpha_i(t_0)] \\ &= k \cdot [\alpha(t_1) - \alpha(t_0)] = k \cdot (b - a). \end{aligned}$$

■

**Observação 3.3.2** *Se a força é constante, o trabalho depende apenas dos extremos  $a$  e  $b$  e não da curva que os une (**campo conservativo**).*

**Exemplo 3.3.3 Princípio do trabalho e energia:** *Uma partícula de massa  $m$  move-se ao longo de uma curva sob acção de uma força  $f$ . Se a velocidade da partícula no instante  $t$  é  $v(t)$ , a sua energia cinética é dada por*

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2(t).$$

**Proposição 3.3.4** *A variação da energia cinética num intervalo de tempo é igual ao trabalho realizado por  $f$  nesse intervalo de tempo.*

**Dem.** Sela  $e(t)$  a posição da partícula no instante  $t$ . O trabalho efectuado por  $f$  durante o intervalo de tempo  $[t_0, t_1]$  é dado por

$$\int_{e(t_0)}^{e(t_1)} f \cdot d\alpha.$$

Pela lei do movimento de Newton  $F = ma$ , temos  $f(e(t)) = mv'(t)$  e

$$\begin{aligned} f(e(t)) \cdot e'(t) &= f(e(t)) \cdot v(t) = mv'(t) \cdot v(t) \\ &= \frac{1}{2}m \frac{d}{dt} [v^2(t)]. \end{aligned}$$

Integrando em  $[t_0, t_1]$ ,

$$\begin{aligned} \int_{e(t_0)}^{e(t_1)} f \cdot de &= \int_{t_0}^{t_1} f(e(t)) \cdot e'(t) dt = \frac{1}{2}m \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [v^2(t)] dt \\ &= \frac{1}{2}m [v^2(t)]_{t_0}^{t_1} = \frac{1}{2}mv^2(t_1) - \frac{1}{2}mv^2(t_0). \end{aligned}$$

■

**Exemplo 3.3.5 Distribuição de massas ao longo de uma curva:** *Consideremos um fio  $A$  de densidade variável, definida por  $f$ . Ou seja  $f(x, y, z)$  representa a massa por unidade de comprimento no ponto  $(x, y, z)$  de  $A$ . Então a **massa total**  $M$  do fio é dada pelo integral de linha relativo ao comprimento de arco*

$$M = \int_A f(x, y, z) ds.$$

O **centro de massa** do fio é o ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  cujas coordenadas são dadas pelas fórmulas

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{1}{M} \int_A x f(x, y, z) ds; & y_0 &= \frac{1}{M} \int_A y f(x, y, z) ds; \\z_0 &= \frac{1}{M} \int_A z f(x, y, z) ds.\end{aligned}$$

Um fio de densidade constante diz-se **homogêneo** e, neste caso, o centro de massa diz-se o **centróide**.

**Exercício 3.3.6** Determinar a massa  $M$  e as coordenadas do centro de gravidade de uma espira completa de uma mola helicoidal cilíndrica de equação vectorial

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt),$$

se a densidade em  $(x, y, z)$  for dada por  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

**Resolução:**

$$\begin{aligned}M &= \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds \\&= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt \\&= \sqrt{a^2 + b^2} \left[ a^2 t + \frac{b^2 t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \sqrt{a^2 + b^2} \left( 2\pi a^2 + \frac{8}{3} b^2 \pi^3 \right).\end{aligned}$$

A coordenada  $x_0$  será

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{1}{M} \int_A x (x^2 + y^2 + z^2) ds \\&= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} a \cos t (a^2 + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt \\&= \frac{6ab^2}{3a^2 + 4b^2\pi^3}.\end{aligned}$$

As coordenadas  $y_0$  e  $z_0$  obtêm-se de modo análogo.

**Exemplo 3.3.7** *Momento de inércia de um fio em relação a um eixo:* Se  $\delta(x, y, z)$  representar a distância de um ponto  $(x, y, z)$  de  $C$  a um eixo  $L$ , o momento de inércia  $I_L$  define-se por

$$I_L = \int_C \delta^2(x, y, z) f(x, y, z) ds,$$

em que  $f(x, y, z)$  é a densidade em  $(x, y, z)$ .

Os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados apresentam-se por  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$ .

**Exercício 3.3.8** Calcular o momento de inércia  $I_z$  da espira completa da mola helicoidal referida no exercício anterior.

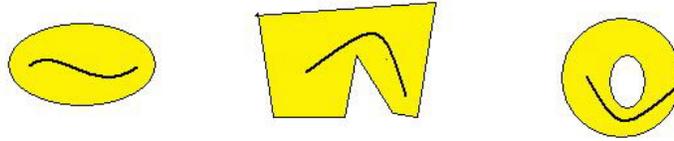
**Resolução:** Como  $\delta^2(x, y, z) = x^2 + y^2 = a^2$  e  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , então

$$\begin{aligned} I_z &= \int_C (x^2 + y^2) (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= a^2 \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = Ma^2. \end{aligned}$$

### 3.4 Campo conservativo e potencial

Comecemos pela definição de conjunto conexo por arcos:

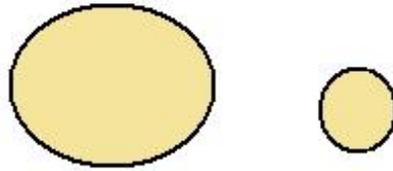
**Definição 3.4.1** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto.  $\Omega$  diz-se conexo por arcos se cada par de pontos de  $\Omega$  se pucer unir por uma linha seccionalmente regular, cujo gráfico esteja em  $\Omega$ . Isto, para cada par de pontos  $a$  e  $b$  existe uma linha seccionalmente regular  $\gamma$ , definida em  $[t_0, t_1]$ , tal que  $\gamma(t) \in \Omega$ ,  $\forall t \in [t_0, t_1]$ , com  $\gamma(t_0) = a$  e  $\gamma(t_1) = b$ .



Conjuntos conexos por arcos

**Definição 3.4.2** Um conjunto aberto diz-se não conexo se é a reunião de

dois ou mais conjuntos abertos não vazios e disjuntos.



Conjunto no conexo

**Definição 3.4.3** Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função vectorial contínua, com  $\Omega$  aberto e conexo. A função  $f$  diz-se um campo vectorial conservativo, quando o integral de linha de  $f$ , ao longo de qualquer curva fechada é zero (o integral não depende do caminho).

**Teorema 3.4.4** Se  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  aberto e conexo em  $\mathbb{R}^n$ , é uma função diferenciável com gradiente contínuo, então para quaisquer dois pontos  $a$  e  $b$  ligados por uma linha  $\gamma$  seccionalmente regular em  $\Omega$ , tem-se

$$\int_a^b \nabla f \cdot d\gamma = f(b) - f(a).$$

**Dem.** Suponhamos dois pontos arbitrários  $a$  e  $b$  em  $\Omega$ , unidos por uma linha  $\gamma$  seccionalmente regular em  $\Omega$ , definida num intervalo  $[t_0, t_1]$ .

a) Se  $\gamma$  é regular em  $[t_0, t_1]$  então

$$\begin{aligned} \int_a^b \nabla f \cdot d\gamma &= \int_{t_0}^{t_1} \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} g'(t) dt \\ &= g(t_1) - g(t_0) = f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_0)) = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

b) Se  $\gamma$  é seccionalmente regular, efectua-se uma partição do intervalo  $[t_0, t_1]$  num número finito  $k$  de subintervalos  $[t_{i-1}, t_i]$ , em cada um dos quais

$\gamma$  é regular e aplicamos a alínea a):

$$\begin{aligned} \int_a^b \nabla f \cdot d\gamma &= \sum_{i=1}^k \int_{\gamma(t_{i-1})}^{\gamma(t_i)} \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \sum_{i=1}^k [f(\gamma(t_i)) - f(\gamma(t_{i-1}))] = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

■

**Observação 3.4.5** Se  $b = a$ , isto é, para uma linha fechada,  $f(b) - f(a) = 0$ , pelo que:

O integral de linha de um gradiente contínuo é nulo ao longo de toda a linha fechada seccionalmente regular em  $\Omega$ .

**Definição 3.4.6** Se  $f = \nabla\varphi$  então  $\varphi$  chama-se uma função potencial para  $f$ .

**Exemplo 3.4.7** Em  $\mathbb{R}^3$ , seja  $\varphi(x, y, z) = f^n$ , com  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Note-se que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $\nabla(f^n) = n f^{n-2} \cdot r(x, y, z)$ , com  $r(x, y, z) = (x, y, z)$ . De facto, para  $n = 1$ ,

$$\nabla f = f^{-1}r = \frac{r}{f} = \frac{r}{\|r\|}.$$

Admitindo, por hipótese, que  $\nabla(f^p) = p f^{p-2} \cdot r$  tem-se que

$$\begin{aligned} \nabla(f^{p+1}) &= \nabla(f^p f) = \nabla(f^p) f + f^p \nabla f = (p f^{p-2} \cdot r) f + f^p f^{-1} r \\ &= (p f^{p-1} + f^{p-1}) \cdot r = (p+1) f^{p-1} \cdot r. \end{aligned}$$

Então, por indução matemática  $\nabla(f^n) = n f^{n-2} \cdot r, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Desta forma  $\varphi$  é um potencial da função vectorial  $f(x, y, z) = n f^{n-2} \cdot r(x, y, z)$ .

Ou seja, as superfícies equipotenciais de  $\varphi$  são esferas centradas na origem.

**Observação 3.4.8 1.** Num campo conservativo não se realiza trabalho no movimento de uma partícula ao longo de uma curva fechada, voltando ao ponto de partida.

2. Um campo de forças não é conservativo se no sistema existirem atrito ou viscosidade, uma vez que estes tendem a transformar a energia mecânica

em energia calorífica.

**3.** Um campo de forças que admite uma função potencial, diz-se conservativo porque a energia total (soma das energias cinética e potencial) se conserva.

O teorema seguinte generaliza o Teorema Fundamental do Cálculo Integral a integrais de linha, ao longo de uma curva  $C$ , seccionalmente regular, entre um ponto fixo  $a \in \Omega$  e um ponto genérico  $x$ .

**Teorema 3.4.9** Se  $f$  é uma função vectorial contínua num conjunto conexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , se o integral de linha de  $f$  é independente da linha considerada em  $\Omega$  e se  $a$  é um ponto fixo de  $\Omega$ , então:

- a função escalar  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$\varphi = \int_a^x f \cdot d\alpha,$$

com  $\alpha$  uma qualquer linha seccionalmente regular de  $\Omega$ , unindo  $a$  a  $x$ ;

- o gradiente de  $\varphi$  existe e é igual a  $f$ , isto é,

$$\nabla\varphi(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

**Dem.** Como  $f(x)$  é uma função vectorial, provaremos que para a componente de ordem  $k$ , a derivada parcial  $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$  existe e é igual a  $f_k(x)$ , para  $k = 1, \dots, n$  e para cada valor de  $x$  em  $\Omega$ .

Seja  $B_r(x) \subset \Omega$ . Se  $y$  é um vector tangente unitário, o ponto  $x + hy$  também está em  $\Omega$  (porque é conexo), para todo o  $h \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < |h| < r$ .

Então

$$\varphi(x + hy) - \varphi(x) = \int_x^{x+hy} f \cdot d\alpha,$$

sendo que a linha que une  $x$  a  $x + hy$  pode ser uma linha qualquer seccionalmente regular.

Em particular podemos utilizar o segmento definido por  $\alpha(t) = x + thy$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Assim

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x + thy) \cdot y \, dt &= \frac{1}{h} \int_0^1 f(x + thy) \cdot h y \, dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 \nabla\varphi(x + thy) \cdot h y \, dt \\ &= \frac{1}{h} [\varphi(x + thy)]_0^1 = \frac{\varphi(x + hy) - \varphi(x)}{h}. \end{aligned}$$

Considerando agora  $y = e_k$ , o vector de ordem  $k$  da base ortonormada, temos

$$f(x + thy) \cdot y = f(x + the_k) \cdot e_k.$$

Fazendo uma mudança de variável  $u = th$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x + hy) - \varphi(x)}{h} &= \int_0^1 f(x + thy) \cdot y \, dt = \int_0^1 f(x + the_k) \, dt \quad (\text{B.4.1}) \\ &= \int_0^h f(x + ue_k) \frac{1}{h} du = \frac{g(h) - g(0)}{h}, \end{aligned}$$

sendo  $g$  a função definida em  $] -r, r[$  por  $g(t) = \int_0^t f_k(x + ue_k) \, du$ .

Como cada componente  $f_k$  é contínua em  $\Omega$ , o Teorema Fundamental do Cálculo Integral garante que  $g'(t) = f_k(x + te_k)$ . Em particular,  $g'(0) = f_k(x)$ .

Passando ao limite em (3.4.1) com  $h \rightarrow 0$ , tem-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + hy) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0) = f_k(x).$$

Então  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = f_k(x)$ . ■

O próximo teorema fornece uma condição necessária e suficiente para que uma função vectorial seja um gradiente:

**Teorema 3.4.10** *Se  $f$  é uma função vectorial contínua num conjunto conexo e aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , então são equivalentes as três propriedades:*

- (i)  $f$  é o gradiente de alguma função potencial em  $\Omega$ ;
- (ii) o integral de linha de  $f$  é independente da linha considerada em  $\Omega$ ;
- (iii) o integral de linha de  $f$ , ao longo de qualquer linha fechada seccionalmente regular contida em  $\Omega$  é zero.

**Dem.** (ii)  $\implies$  (i) foi provada no Teorema 3.4.9.

(i)  $\implies$  (iii) foi provada no Teorema 3.4.4, no caso particular de  $b = a$ .

(iii)  $\implies$  (ii)

Suponhamos duas quaisquer curvas,  $C_1$  e  $C_2$ , seccionalmente regulares em  $\Omega$  e com as mesmas extremidades. Seja  $C_1$  o gráfico de uma função  $\alpha$  definida em  $[a, b]$  e  $C_2$  o gráfico de  $\beta$  definida em  $[c, d]$ .

Consideremos uma função  $\gamma$  definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ \beta(b + d - t) & \text{se } b \leq t \leq b + d - c. \end{cases}$$

Então  $\gamma$  define uma curva fechada  $C$ , pois

$$\gamma(a) = \alpha(a) \text{ e } \gamma(b + d - c) = \beta(b + d - b - d + c) = \beta(c).$$

Como  $C_1$  e  $C_2$  têm as mesmas extremidades,  $\alpha(a) = \beta(c)$ , pelo que  $\gamma$  é uma curva fechada.

Por outro lado, como  $\alpha$  e  $\beta$  têm sentidos opostos,

$$\int_C f \cdot d\gamma = \int_{C_1} f \cdot d\alpha - \int_{C_2} f \cdot d\beta,$$

e  $\oint_C f \cdot d\gamma = 0$  pelo que

$$\int_{C_1} f \cdot d\alpha = \int_{C_2} f \cdot d\beta,$$

ou seja, o integral é independente do caminho. ■

**Observação 3.4.11** 1. Se  $\oint_C f \cdot d\gamma \neq 0$ , para  $C$  uma curva fechada, então  $f$  não é um gradiente.

2. Se  $\oint_C f \cdot d\gamma = 0$ , para  $C$  uma curva fechada particular não implica necessariamente que  $f$  seja um gradiente.

Vejamos um contra-exemplo:  $\oint_C f \cdot d\gamma$ , com  $\gamma$  o círculo com centro na origem, raio qualquer e  $f(x, y) = (x, xy)$ , é nulo. Todavia  $f$  não é um gradiente.

3. O Teorema 3.4.9 pode ser utilizado para verificar se uma dada função vectorial é um gradiente num conjunto aberto e conexo  $\Omega$ , procedendo do modo seguinte:

1º) Integrando  $f$  desde um ponto fixo até um ponto arbitrário  $x \in \Omega$ , ao longo de uma linha conveniente de  $\Omega$ , construindo-se  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ;

2º) Calculando-se as derivadas parciais de  $\varphi$  e comparando  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$  com  $f_k$  :

Se  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = f_k(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$  e  $k$  qualquer, então  $f$  é um gradiente em  $\Omega$  e  $\varphi$  é um potencial.

Se  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) \neq f_k(x)$ , para algum  $x \in \Omega$ , então  $f$  não é um gradiente em  $\Omega$ .

O teorema seguinte fornece uma condição necessária para verificar se um função vectorial não é um gradiente:

**Teorema 3.4.12** *Seja  $f = (f_1, \dots, f_n)$  um campo vectorial continuamente diferenciável num aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $f$  é um gradiente em  $\Omega$ , então as derivadas parciais das componentes de  $f$  verificam*

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \forall x \in \Omega, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

**Dem.** Se  $f$  é um gradiente então  $f = \nabla\varphi$  para alguma função potencial  $\varphi$ . Assim  $f_j = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ , para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Derivando ambos os membros em relação a  $x_i$ , encontramos

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \right).$$

Analogamente, temos

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right).$$

Como as derivadas parciais  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  e  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  são contínuas em  $\Omega$ , as duas derivadas mistas são iguais em  $\Omega$ . ■

**Exercício 3.4.13** *Verificar se a função vectorial*

$$f(x, y) = (3x^2y, x^3y)$$

*é, ou não, um gradiente em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .*

**Resolução:**

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 3x^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 3x^2y.$$

Então para  $x \neq 0 \wedge y \neq 1$ , a função  $f$  não é um gradiente.

As condições do teorema anterior são necessárias mas não suficientes, como se pode verificar pelo próximo exercício:

**Exercício 3.4.14** *Seja  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por*

$$f(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

*Mostre que  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$  em  $\Omega$ , mas que, apesar disso,  $f$  não é um gradiente.*

**Resolução:**

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Para provar que  $f$  não é um gradiente em  $\Omega$ , calcula-se o integral de linha de  $f$  ao longo do círculo unitário definido por

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t < 2\pi :$$

$$\begin{aligned} \oint_C f \cdot d\alpha &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Como o integral não é nulo, pelo Teorema 3.4.10,  $f$  não é um gradiente.

### 3.5 Exercícios

1. Calcular o integral de linha das funções vectoriais indicadas ao longo das linhas especificadas:

a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$f(x, y) = (x^2 - 2xy) \vec{e}_1 + (y^2 - 2xy) \vec{e}_2,$$

ao longo da parábola  $y = x^2$  entre os pontos  $(-1, 1)$  e  $(1, 1)$ ;

b)  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$g(x, y) = (2a - y, x),$$

ao longo da linha definida por

$$\alpha(t) = a(t - \text{sen}(t)) \vec{e}_1 + a(1 - \cos t) \vec{e}_2,$$

para  $0 \leq t \leq 2\pi$  e  $a > 0$ ;

c)  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$h(x, y, z) = (y^2 - z^2) \vec{e}_1 + 2yz \vec{e}_2 - x^2 \vec{e}_3,$$

ao longo da linha dada por

$$\alpha(t) = t \vec{e}_1 + t^2 \vec{e}_2 + t^3 \vec{e}_3,$$

para  $0 \leq t \leq 1$ ;

d)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(x, y, z) = (2xy, x^2 + z, y),$$

ao longo do segmento de recta que une os pontos  $A(1, 0, 2)$  e  $B(3, 4, 1)$ ;

2. Considere uma força  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(x, y, z) = yz \vec{e}_1 + xz \vec{e}_2 + x(y + 1) \vec{e}_3.$$

Calcular o trabalho realizado por  $f$  ao deslocar uma partícula ao longo do contorno do triângulo de vértices  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 1)$  e  $C(-1, 1, 1)$ , por esta ordem.

3. Calcular os integrais de linha, com respeito ao comprimento de arco:

a)  $\int_C xy \, ds$  sobre a curva  $C$  dada por  $y = \frac{x^2}{2}$  da origem ao ponto  $(1, \frac{1}{2})$ ;

b)  $\int_C z \, ds$ , onde  $C$  tem a equação vectorial

$$\alpha(t) = t \cos t \, \vec{e}_1 + t \sin t \, \vec{e}_2 + t \, \vec{e}_3,$$

com  $0 \leq t \leq t_0$ .

c)  $\int_C (2 + x^2y) \, ds$ , onde  $C$  é a parte da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ , para  $x \geq 0$ , percorrida o sentido anti-horário;

d)  $\int_C (x^2 + y^2 - z) \, ds$ , em que  $C$  é a hélice dada pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases}$$

do ponto  $P(1, 0, 0)$  até ao ponto  $Q(1, 0, 2\pi)$ .

**5.** Considere um fio **homogêneo** de forma semi-circular e raio  $r$ .

a) Prove que o centro de massa está situado sobre o eixo de simetria, a uma distância de  $\frac{2r}{\pi}$  do centro (origem).

b) Mostre que o momento de inércia em relação ao diâmetro que passa pelas extremidades do fio é  $\frac{1}{2}Mr^2$ , em que  $M$  é a massa do fio.

**6.** Um fio tem a forma circular com raio  $r$ . Determine a sua massa e o momento de inércia em relação ao diâmetro, sabendo que a sua densidade em  $(x, y)$  é dada por  $|x| + |y|$ .

**7.** Verifique se as funções vectoriais indicadas são, ou não, um gradiente e, em caso afirmativo, determine a função potencial correspondentê:

a)  $f(x, y) = x \, \vec{e}_1 + y \, \vec{e}_2$ ;

b)  $g(x, y) = (3x^2y, x^3)$ ;

c)  $h(x, y, z) = (x + z) \, \vec{e}_1 - (y + z) \, \vec{e}_2 + (x - y) \, \vec{e}_3$ ;

d)  $f(x, y, z) = (4xy - 3x^2z^2 + 1, 2x^2 + 2, -2x^3z - 3z^2)$ .



## Capítulo 4

# Integrais duplos

Inicialmente estudaram-se integrais do tipo  $\int_a^b f(x)dx$  para funções definidas e limitadas em intervalos limitados e, posteriormente, para funções não limitadas e/ou definidas em intervalos não limitados.

No capítulo anterior introduziram-se os integrais de linha ou curvilíneos. Agora iremos substituir o intervalo  $[a, b]$  por uma região  $\mathcal{R}$  (região de integração).

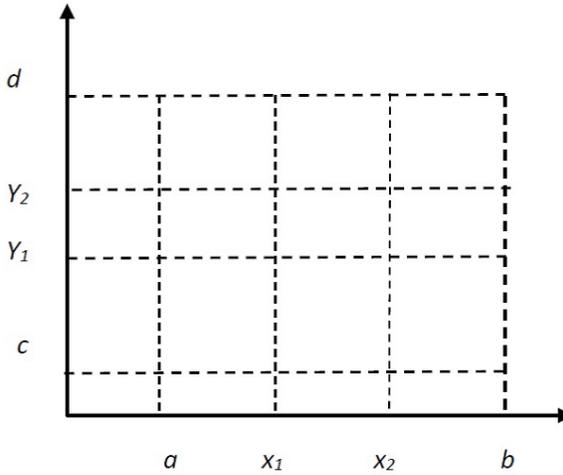
### 4.1 Definição de integral duplo

Seja  $\mathcal{R}$  um rectângulo definido pelo produto cartesiano dos intervalos fechados  $[a, b]$  e  $[c, d]$  :

$$\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : x \in [a, b] \text{ e } y \in [c, d]\}.$$

Consideremos duas partições  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente de  $[a, b]$  e  $[c, d]$  :  $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  e  $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ , onde  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ ,  $y_0 = c$ ,

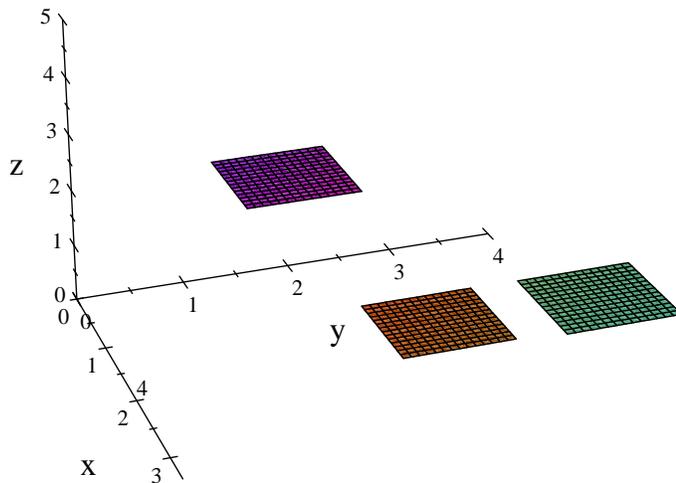
$$y_m = d.$$



Como  $P_1$  decompõe  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos e  $P_2$  decompõe  $[c, d]$  em  $m$  subintervalos, então a partição  $P := P_1 \times P_2$  divide a região  $\mathcal{R}$  em  $n \times m$  rectângulos.

**Definição 4.1.1** *Uma função  $f$  definida num rectângulo  $\mathcal{R}$  diz-se ser uma função em escada se existe uma partição  $P$  de  $\mathcal{R}$ , tal que  $f$  seja constante em cada um dos rectângulos abertos de  $P$ .*

O gráfico é formado por placas rectangulares paralelas ao eixo  $XOY$ .



Uma função em escada tem os pontos de contorno dos rectângulos bem definidos, mas esses pontos não são relevantes para a teoria de integração.

Intuitivamente, se  $P_1$  e  $P_2$  são partições de  $\mathcal{R}$ , tal que  $f$  seja constante nos rectângulos abertos de  $P_1$  e  $g$  constante nos de  $P_2$ , então a função  $\alpha f + \beta g$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , é constante nos rectângulos de  $P_1 \cup P_2$  (refinamento de  $P_1$  e  $P_2$ ). Ou seja:

**Proposição 4.1.2** *Se  $f$  e  $g$  são duas funções em escada num dado rectângulo  $\mathcal{R}$ , então a combinação linear  $\alpha f + \beta g$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , é também uma função em escada.*

Seja  $P = P_1 \times P_2$  uma partição do rectângulo  $\mathcal{R}$ , em  $n \times m$  rectângulos abertos. Designemos por  $\mathcal{R}_{ij}$  o rectângulo determinado por  $[x_{i-1}, x_i]$  e  $[y_{j-1}, y_j]$  e seja  $\alpha_{ij}$  o valor constante de  $f$  no interior de  $\mathcal{R}_{ij}$ .

Se  $f$  é positiva, o volume  $V$  do paralelepípedo com base  $\mathcal{R}_{ij}$  e altura  $\alpha_{ij}$  é dado por

$$V_{\mathcal{R}_{ij}} = \alpha_{ij} (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1})$$

ou, abreviadamente,

$$V_{\mathcal{R}_{ij}} = \alpha_{ij} \Delta x_i \Delta y_j.$$

Estamos agora em condições de definir o integral duplo:

**Definição 4.1.3** *Seja  $f$  uma função em escada, que toma o valor constante  $\alpha_{ij}$  no rectângulo aberto  $]x_{i-1}, x_i[ \times ]y_{j-1}, y_j[$  de um rectângulo  $\mathcal{R}$ . O integral duplo de  $f$  em  $\mathcal{R}$  define-se por*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \Delta x_i \Delta y_j.$$

Tal como para os integrais definidos em  $\mathbb{R}$ , o valor do integral não se altera se a partição  $P$  for substituída por uma partição mais fina.

Assim, o valor do integral é independente da escolha da partição  $P$ , desde que  $f$  seja constante nos rectângulos abertos de  $\mathcal{R}$ .

## 4.2 Propriedades do integral duplo

Estas propriedades são generalizações dos correspondentes teoremas para o caso de integrais definidos em  $\mathbb{R}$ .

**Proposição 4.2.1** *Sejam  $f$  e  $g$  funções em escada definidas num rectângulo  $\mathcal{R}$  não degenerado (isto é,  $\mathcal{R}$  não é nem um ponto nem um segmento de recta). Então são válidas as seguintes propriedades:*

1. (Linearidade)  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{R}} [\alpha_1 f(x, y) + \alpha_2 g(x, y)] dx dy \\ &= \alpha_1 \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy + \alpha_2 \iint_{\mathcal{R}} g(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

2. (Aditividade) Se  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$  com  $\text{int}\mathcal{R}_1 \cap \text{int}\mathcal{R}_2 = \emptyset$  então

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{R}_1} f(x, y) dx dy + \iint_{\mathcal{R}_2} f(x, y) dx dy.$$

3. (Comparação) Se  $f(x, y) \leq g(x, y)$ ,  $\forall (x, y) \in \mathcal{R}$ , então

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\mathcal{R}} g(x, y) dx dy.$$

Em particular se  $f(x, y) \geq 0$ ,  $\forall (x, y) \in \mathcal{R}$ , então

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy \geq 0.$$

As demonstrações são consequências directas de definição de integral duplo e das propriedades dos somatórios.

### 4.3 Integrais duplos inferior e superior

Seja  $f$  uma função definida e limitada num rectângulo  $\mathcal{R}$ . Isto é, existe  $M > 0$  tal que

$$|f(x, y)| \leq M, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{R}.$$

Então  $f$  pode ser limitada superiormente e inferiormente por duas funções em escada,  $s$  e  $t$ , onde  $s(x, y) = -M$  e  $t(x, y) = M$ ,  $\forall (x, y) \in \mathcal{R}$ , por exemplo.

**Definição 4.3.1** Considere-se duas funções em escada,  $s$  e  $t$ , definidas em  $\mathcal{R}$ , tais que

$$s(x, y) \leq f(x, y) \leq t(x, y), \forall (x, y) \in \mathcal{R}.$$

Se existir **um, e só um, número**  $I$  tal que

$$\iint_{\mathcal{R}} s(x, y) dx dy \leq I \leq \iint_{\mathcal{R}} t(x, y) dx dy,$$

então  $f$  diz-se integrável em  $\mathcal{R}$ , sendo

$$I = \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy.$$

Designa-se por  $S$  o conjunto de todos os números  $\iint_{\mathcal{R}} s(x, y) dx dy$ , obtidos quando se considera  $s(x, y)$  no conjunto de todas as funções em escada que limitam  $f$  inferiormente, e por  $T$  quando se tomam as funções em escada  $t(x, y)$  que limitam  $f$  superiormente.

Note-se que  $S$  e  $T$  não são vazios pois  $f$  é limitada.

Por outro lado, temos

$$\iint_{\mathcal{R}} s(x, y) dx dy \leq \iint_{\mathcal{R}} t(x, y) dx dy,$$

pelo que cada elemento de  $S$  é menor que qualquer elemento de  $T$ .

Portanto  $S$  tem um supremo e  $T$  tem um ínfimo, que satisfazem as desigualdades

$$\iint_{\mathcal{R}} s(x, y) dx dy \leq \sup S \leq \inf T \leq \iint_{\mathcal{R}} t(x, y) dx dy.$$

Então, tanto  $\sup S$  como  $\inf T$  verificam as desigualdades da definição anterior.

Assim pode dizer-se que

$$f \text{ é integrável em } \mathcal{R} \Leftrightarrow \sup S = \inf T = \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy.$$

Ao número  $\sup S$  chama-se **integral inferior** de  $f$  e nota-se por  $\underline{I}(f)$ . A  $\inf T$  chama-se **integral superior** de  $f$  e nota-se por  $\bar{I}(f)$ .

As afirmações anteriores podem resumir-se no seguinte teorema

**Teorema 4.3.2** *Toda a função  $f$  limitada num rectângulo  $\mathcal{R}$  tem integral inferior e superior, tal que*

$$\iint_{\mathcal{R}} s(x, y) dx dy \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \iint_{\mathcal{R}} t(x, y) dx dy,$$

para todas as funções em escada  $s$  e  $t$  com  $s \leq f \leq t$ .

A função é integrável em  $\mathcal{R}$  se, e só se, os integrais inferior e superior são iguais e, neste caso

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \underline{I}(f) = \bar{I}(f).$$

Como as definições anteriores são análogas ao caso dos integrais definidos em  $\mathbb{R}$ , todas as propriedades referidas na Proposição 4.2.1 são válidas para integrais duplos em geral.

#### 4.4 O integral duplo por integração iterada

Vejam os como calcular alguns integrais duplos por intermédio de duas integrações sucessivas:

**Teorema 4.4.1** *Seja  $f$  uma função definida e limitada em  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$  e admita-se que  $f$  é integrável em  $\mathcal{R}$ . Para cada  $y$  fixo em  $[c, d]$ , admita-se que  $\int_a^b f(x, y) dx$  existe e é igual a  $A(y)$ .*

*Se  $\int_c^d A(y) dy$  existe, então será igual ao integral duplo  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$ . Ou seja,*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

**Dem.** Escolham-se duas funções em escada arbitrárias  $s(x, y)$  e  $t(x, y)$  tais que  $s \leq f \leq t$  em  $\mathcal{R}$ .

Integrando relativamente a  $x$ , em  $[a, b]$ , temos

$$\int_a^b s(x, y) dx \leq A(y) \leq \int_a^b t(x, y) dx.$$

Visto que  $\int_c^d A(y)dy$  existe, pode integrar-se ambas as desigualdades relativamente a  $y$  em  $[c, d]$ . Então

$$\iint_{\mathcal{R}} s(x, y) dx dy \leq \int_c^d A(y) dy \leq \iint_{\mathcal{R}} t(x, y) dx dy.$$

Visto que  $f$  é integrável em  $\mathcal{R}$ , pela Definição 4.3.1, o único número com estas propriedades é o integral duplo de  $f$  em  $\mathcal{R}$ . Então

$$\int_c^d A(y) dy = \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy.$$

■

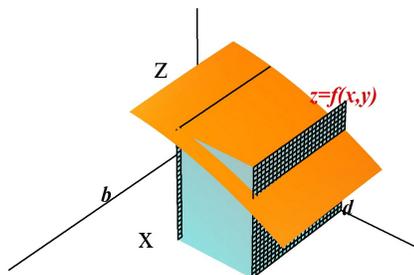
Se mudarmos a ordem de integração, obtem-se de forma análoga,

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx,$$

sendo a igualdade válida se supusermos que  $\int_c^d f(x, y) dy$  existe para cada  $x$  fixo em  $[a, b]$  e é integrável em  $[a, b]$ .

## 4.5 Interpretação geométrica do integral duplo

Consideremos a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Restringindo-a a um rectângulo  $\mathcal{R}$ , obtemos um conjunto  $S$ , formado por todos os pontos entre o rectângulo  $\mathcal{R}$  e a superfície  $z = f(x, y)$ .



Para cada  $y$  fixo no intervalo  $[c, d]$  o integral  $A(y) = \int_a^b f(x, y)dx$  é a área da secção plana de  $S$ , definida por um plano paralelo ao plano  $XOZ$ .

Como a área  $A(y)$  é integrável em  $[c, d]$  o integral  $\int_c^d A(y)dy$  é igual ao volume do paralelepípedo formado por  $S$ .

Isto é, para funções não negativas, o volume do conjunto das imagens de  $f$  sobre o domínio  $\mathcal{R}$ , é dado pelo integral duplo  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y)dxdy$ .

**Exemplo 4.5.1** Calcular o volume dos paralelepípedos cuja base é a região  $\mathcal{R}$ , e são limitados superiormente pelo gráfico de  $f(x, y)$ , em  $\mathcal{R} = [-1, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$  sendo  $f(x, y) = x \operatorname{sen}(y) - y e^x$ .

$$\begin{aligned} \text{Resolução: } V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^1 (x \operatorname{sen}(y) - y e^x) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{x^2}{2} \operatorname{sen}(y) - y e^x \right]_{-1}^1 dy = \left[ \frac{y^2}{2} \left( e + \frac{1}{e} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} \left( e + \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

## 4.6 Integribilidade de funções contínuas

Para funções contínuas temos o seguinte resultado:

**Teorema 4.6.1** Se  $f$  é contínua num rectângulo  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ , então:

- (i)  $f$  é integrável em  $\mathcal{R}$ ;
- (ii) o valor do integral pode obter-se por integração unidimensional iterada,

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y)dxdy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y)dx \right] dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y)dy \right] dx.$$

**Dem. (i)** O Teorema 4.3.2 mostra que se  $f$  é limitada em  $\mathcal{R}$  então  $f$  admite um integral superior e um integral inferior. Para provar o teorema basta demonstrar que  $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ .

Fixado  $\varepsilon > 0$ , escolhe-se uma partição  $P$  de  $\mathcal{R}$ , num número finito de subrectângulos  $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ , tais que a oscilação (valor máximo absoluto–valor mínimo absoluto) de  $f$  em cada subrectângulo é menor que  $\varepsilon$ .

Isso é, notando por  $M_k(f)$  o valor máximo absoluto de  $f$  e por  $m_k(f)$  o valor mínimo absoluto de  $f$ , em  $\mathcal{R}_k$ , temos

$$M_k(f) - m_k(f) < \varepsilon, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Sejam agora  $s$  e  $t$  duas funções em escada definidas no interior de cada  $\mathcal{R}_k$  da forma seguinte

$$s(x, y) = m_k(f), \quad t(x, y) = M_k(f),$$

se  $x \in \text{int}\mathcal{R}_k$ . Nos pontos fronteira definimos  $s(x, y) = m$  e  $t(x, y) = M$ , em que  $m$  e  $M$  são, respectivamente, o máximo e o mínimo absolutos em  $\mathcal{R}$ .

Então

$$s(x, y) \leq f(x, y) \leq t(x, y), \quad \forall x \in \mathcal{R}.$$

Do mesmo modo temos, designando por  $A(\mathcal{R}_k)$  a área de cada rectângulo  $\mathcal{R}_k$ ,

$$\iint_{\mathcal{R}} s(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^n m_k(f) A(\mathcal{R}_k)$$

e

$$\iint_{\mathcal{R}} t(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^n M_k(f) A(\mathcal{R}_k).$$

A diferença entre estes dois integrais é

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} t(x, y) dx dy - \iint_{\mathcal{R}} s(x, y) dx dy &= \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] A(\mathcal{R}_k) \\ &< \varepsilon \sum_{k=1}^n A(\mathcal{R}_k) = \varepsilon A(\mathcal{R}), \end{aligned}$$

sendo  $A(\mathcal{R})$  a área de  $\mathcal{R}$ .

Uma vez que

$$\iint_{\mathcal{R}} s(x, y) dx dy \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \iint_{\mathcal{R}} t(x, y) dx dy,$$

então resulta a desigualdade

$$0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \varepsilon A(\mathcal{R}).$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos  $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$ , pelo que  $f$  é integrável em  $\mathcal{R}$ .

(ii) Para cada  $y$  fixo em  $[c, d]$  o integral simples  $\int_a^b f(x, y)dx$  existe, pois a função integranda é contínua em  $\mathcal{R}$ .

Seja  $A(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ . Pretende-se provar que  $A(y)$  é contínuo em  $[c, d]$  (por (i)).

Considerem-se  $y_1$  e  $y$  dois pontos arbitrários de  $[c, d]$ . Assim temos

$$A(y_1) - A(y) = \int_a^b [f(x, y_1) - f(x, y)] dx,$$

pelo que

$$\begin{aligned} |A(y_1) - A(y)| &\leq \int_a^b |f(x, y_1) - f(x, y)| dx \\ &\leq (b - a) \max_{a \leq x \leq b} |f(x, y_1) - f(x, y)| \\ &\leq (b - a) |f(x_0, y_1) - f(x_0, y)|, \end{aligned}$$

onde  $x_0$  é o ponto de  $[a, b]$  no qual  $|f(x, y_1) - f(x, y)|$  atinge o seu valor máximo.

Fazendo  $y \rightarrow y_1$  então  $f(x, y) \rightarrow f(x, y_1)$ , pelo que  $A(y) \rightarrow A(y_1)$ , ou seja,  $A(y)$  é contínuo em  $y_1$ .

Deste modo

$$\int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y)dx \right] dy$$

existe e pelo Teorema 4.4.1 é igual a  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y)dxdy$ .

O raciocínio é análogo quando se inverte a ordem de integração. ■

## 4.7 Integrabilidade de funções limitadas com descontinuidades

No teorema anterior provámos que o integral duplo de  $f$  sobre  $\mathcal{R}$  existe se  $f$  for contínua em todos os pontos de  $\mathcal{R}$ .

Agora provaremos que o integral também existe se  $f$  tem descontinuidades em  $\mathcal{R}$ , desde que o conjunto das descontinuidades não seja demasiado grande. Para tal necessitamos do seguinte conceito:

**Definição 4.7.1** *Seja  $A$  um conjunto limitado do plano. Diz-se que  $A$  é um conjunto de medida nula se para todo o  $\varepsilon > 0$  existe um conjunto*

finito de rectângulos cuja união contém  $A$  e cuja soma das áreas não exceda  $\varepsilon$ .

Ou seja, um conjunto plano limitado de medida nula pode ser coberto com uma reunião de rectângulos cuja área total seja arbitrariamente pequena.

Vejam algumas propriedades dos conjuntos de medida nula:

**Proposição 4.7.2** (i) Qualquer conjunto finito de pontos do plano tem medida nula.

(ii) A reunião de um número finito de conjuntos limitados de medida nula tem também medida nula.

(iii) Todos os subconjuntos de conjuntos de medida nula, têm medida nula.

(iv) Todo o segmento de recta tem medida nula.

**Teorema 4.7.3** Seja  $f$  uma função definida e limitada em  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ . Se o conjunto dos pontos de descontinuidade de  $f$  em  $\mathcal{R}$  é um conjunto de medida nula, então o integral  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$  existe.

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$$

**Dem.** Como  $f$  é limitada, existe  $L > 0$  tal que  $|f| \leq L$  em  $\mathcal{R}$ .

Seja  $D$  o conjunto de pontos de descontinuidade de  $f$  em  $\mathcal{R}$ .

Dado  $\delta > 0$ , considere-se uma partição  $P$  de  $\mathcal{R}$  tal que a soma das áreas de todos os subrectângulos de  $P$ , que contêm pontos de  $D$ , seja menor que  $\delta$ . (Só é possível porque  $D$  tem medida nula).

Nestes subrectângulos definam-se  $s(x, y)$  e  $t(x, y)$  funções em escada tais que

$$s(x, y) = -L \text{ e } t(x, y) = L.$$

Nos restantes subrectângulos de  $P$  definam-se  $s$  e  $t$ , como no teorema anterior, isto é,  $s(x, y) = m_k(f)$  e  $t(x, y) = M_k(f)$ .

Seguindo a técnica da demonstração do teorema anterior, temos

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{R}} t(x, y) dx dy - \iint_{\mathcal{R}} s(x, y) dx dy \\ = & \underbrace{\sum_{k=1}^{p_0} [M_k(f) - m_k(f)] A(\mathcal{R}_k)}_{\text{Rectângulos sem descontinuidades}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p_1} 2L}_{\text{Rectângulos com pontos de } D} \\ < & \varepsilon A(\mathcal{R}) + 2L\delta. \end{aligned}$$

Obtem-se assim a desigualdade

$$0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \varepsilon A(\mathcal{R}) + 2L\delta.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tem-se que  $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$ , pelo que  $f$  é integrável em  $\mathcal{R}$ . ■

## 4.8 Integrais duplos em regiões mais gerais

Até aqui os integrais duplos foram definidos para domínios de integração rectangulares. Vamos agora estender esse conceito a domínios mais gerais.

Sejam  $S$  uma região limitada contida em  $\mathcal{R}$  e  $f$  uma função definida e limitada em  $S$ .

Defina-se uma nova função  $\tilde{f}$  em  $\mathcal{R}$  do modo seguinte

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in S \\ 0 & \text{se } (x, y) \in \mathcal{R} \setminus S. \end{cases}$$

Isto é, estende-se  $f$  a todo o rectângulo  $\mathcal{R}$ , fazendo com que seja nula no exterior de  $S$ .

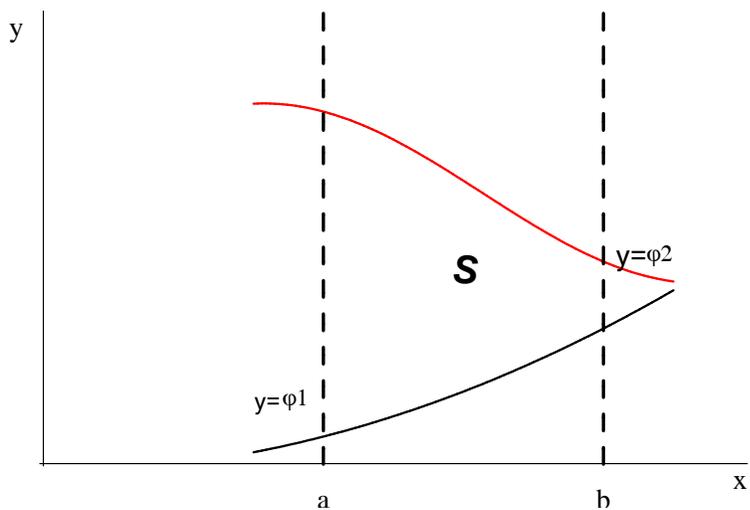
Se supusermos  $\tilde{f}$  integrável em  $\mathcal{R}$ , então  $f$  é integrável em  $S$  e

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{R}} \tilde{f}(x, y) dx dy .$$

Consideremos em primeiro lugar conjuntos  $S$  de pontos do plano  $XOY$  definidos na forma

$$S = \{(x, y) : a \leq x \leq b \wedge \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}, \quad (4.8.1)$$

onde  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são funções contínuas em  $[a, b]$ . Por exemplo:

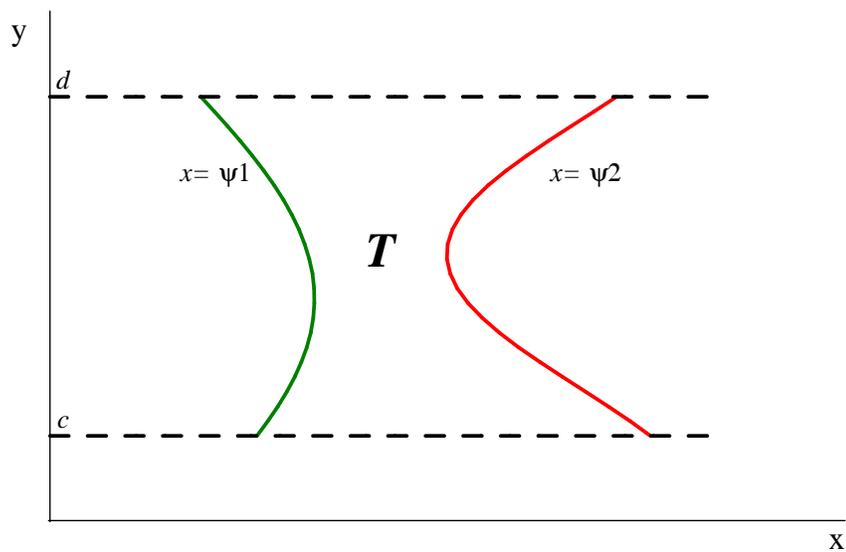


A região  $S$  é limitada (necessariamente) porque  $\varphi_1(x)$  e  $\varphi_2(x)$  são funções contínuas, logo limitadas em  $[a, b]$ .

Outro exemplo de conjunto será

$$T = \{(x, y) : c \leq y \leq d \wedge \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

onde  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são funções contínuas em  $[c, d]$ .



$T$  é uma região limitada, por motivos análogos.

Todas as regiões que se considerem, serão de um destes dois tipos, ou poderão ser decompostas num número finito de partes, cada uma das quais de um destes dois tipos.

Analisemos agora os pontos de descontinuidade.

Em primeiro lugar, note-se que, se os pontos de descontinuidade estiverem na fronteira da região, podem ser desprezados.

Considere-se  $\tilde{f}$  definido como anteriormente. As descontinuidades de  $\tilde{f}$  em  $\mathcal{R}$  serão as de  $f$  em  $S$ , mais aqueles pontos de fronteira de  $S$  nos quais  $f$  não se anula.

No primeiro exemplo, a fronteira de  $S$  é constituída pelos gráficos de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  e pelos dois segmentos de recta verticais que unem as extremidades dos gráficos.

Cada um destes segmentos de recta tem medida nula.

O teorema seguinte garante que os gráficos têm também medida nula.

**Teorema 4.8.1** *Se  $\varphi$  é uma função real contínua em  $[a, b]$ , então o seu gráfico tem medida nula.*

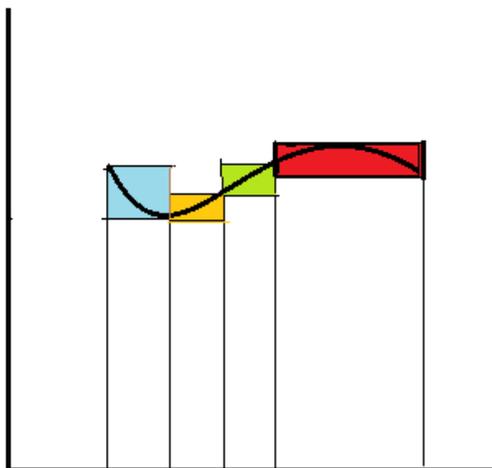
**Dem.** Seja  $A$  o gráfico de  $\varphi$ , isto é,

$$A = (x, y) : y = \varphi(x) \wedge a \leq x \leq b.$$

Fixemos  $\varepsilon > 0$  e escolha-se uma partição  $P$  de  $[a, b]$  com um número finito de subintervalos tais que a oscilação de  $\varphi$  em cada subintervalo de  $P$  seja menor que  $\frac{\varepsilon}{b-a}$ .

Portanto, relativamente a cada subintervalo de  $P$ , o gráfico de  $\varphi$  está

situado num rectângulo de altura  $\frac{\varepsilon}{b-a}$ .



Logo todo o gráfico de  $\varphi$  está contido numa reunião finita de rectângulos, cuja soma das áreas é  $\varepsilon$ .

Isto prova que o gráfico tem medida nula. ■

O próximo teorema prova a existência do integral duplo se  $f$  for contínua no *int*  $S$ .

**Teorema 4.8.2** *Seja  $S$  uma região compreendida entre os gráficos de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , admita-se que  $f$  está definida e limitada em  $S$  e que  $f$  é contínua no interior de  $S$ . Então  $\iint_S f(x, y) dx dy$  existe e pode calcular-se por integração*

*repetida:*

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

**Dem.** Sejam  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$  um rectângulo que contem  $S$  e  $\tilde{f}$  uma função definida como anteriormente.

Os únicos pontos de descontinuidade para  $\tilde{f}$  são os pontos da fronteira de  $S$ .

Uma vez que a fronteira de  $S$  tem medida nula,  $\tilde{f}$  é integrável em  $\mathcal{R}$ . Para cada  $x$  fixo em  $[a, b]$ , o integral  $\int_c^d \tilde{f}(x, y) dx dy$  existe, pois a função integranda tem, no máximo, dois pontos de descontinuidade em  $[c, d]$ .

Pelo Teorema 4.4.1, temos

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \right] dx.$$

Se  $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$  então  $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$ , enquanto  $\tilde{f}(x, y) = 0$  para os restantes valores de  $y$  em  $[c, d]$ .

Assim

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

pelo que da igualdade anterior se obtém

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

■

Análogamente se prova um resultado semelhante para a região  $T$ .

Se as regiões forem simultaneamente de um e outro tipo, a ordem de integração é irrelevante, isto é,

$$\int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

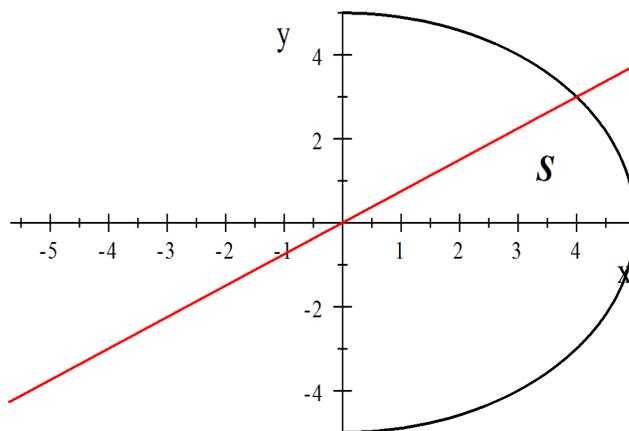
Nalguns casos um destes integrais pode ser mais fácil de calcular do que o outro, pelo que se torna vantajoso examiná-los antes de se proceder ao cálculo.

**Exercício 4.8.3** Considere o integral duplo

$$\int_0^3 \left[ \int_{\frac{4y}{3}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx \right] dy.$$

Determine a região  $S$  de integração e permuta a ordem de integração.

**Resolução:** A região  $S$  é dada por



Ao inverter a ordem de integração obtêm-se duas regiões do primeiro tipo:

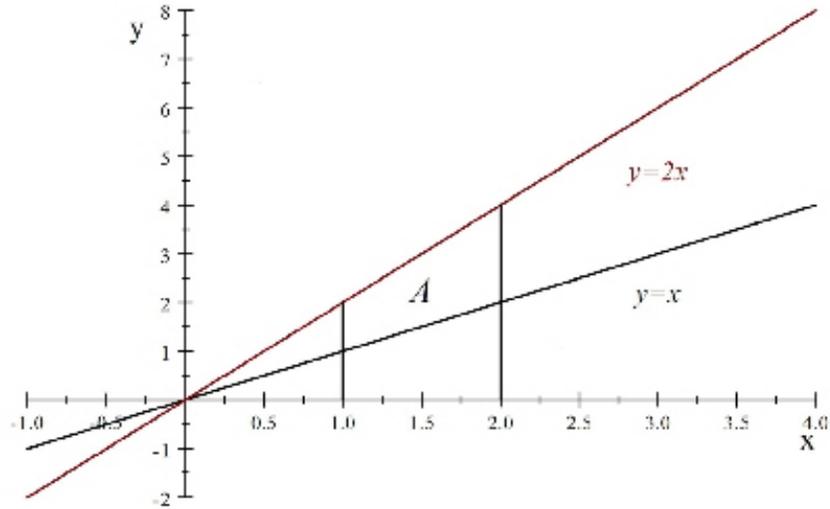
$$\int_0^4 \left[ \int_0^{\frac{3}{4}x} f(x, y) dy \right] dx + \int_4^5 \left[ \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy \right] dx.$$

**Exercício 4.8.4** Calcular os integrais duplos das funções  $f$  que se seguem nas regiões indicadas:

a)  $f(x, y) = (x + y)^{-2}$  na região  $A = \{(x, y) : x \leq y \leq 2x, 1 \leq x \leq 2\}$ ;

b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  na região  $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**Resolução:** a) Representemos graficamente a região de integração:



$$\int_1^2 \int_x^{2x} (x+y)^{-2} dy dx = \int_1^2 \left[ \frac{-1}{x+y} \right]_x^{2x} dx = \int_1^2 \frac{1}{6x} dx = \frac{1}{6} \ln 2.$$

b) Restringindo a região de integração ao 1º quadrante temos

$$\begin{aligned} \iint_B f(x,y) dx dy &= 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= 4 \int_0^1 \frac{(\sqrt{1-y^2})^3}{3} dy + \int_0^1 (\sqrt{1-y^2} y) dy \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt + 4 \left[ -\frac{y}{2} (\sqrt{1-y^2})^3 \frac{2}{3} \right]_0^1 \\ &\quad + \frac{4}{3} \int_0^1 (\sqrt{1-y^2})^3 dy \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3} \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

## 4.9 Aplicações a áreas e volumes

Para uma região  $S$  como anteriormente definida em (4.8.1), podemos aplicar o Teorema 4.8.2 com  $f(x, y) = 1$ . Assim temos

$$\iint_S dx dy = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx,$$

sendo este último integral igual à **área** da região  $S$ .

Em  $\mathbb{R}^3$ , considere-se o conjunto de pontos  $(x, y, z)$  tais que  $(x, y) \in S$  e  $0 \leq z \leq f(x, y)$ . Então o integral duplo  $\iint_S f(x, y) dx dy$  é igual ao **volume** do conjunto de pontos indicados.

Mais geralmente se  $f$  e  $g$  são ambas contínuas em  $S$ , com  $f \leq g$ , então  $\iint_S (g(x, y) - f(x, y)) dx dy$  é igual ao volume do sólido compreendido entre os gráficos das funções  $f$  e  $g$ .

Analogamente para as regiões do tipo da região  $T$ .

**Exercício 4.9.1** *Determinar o volume do sólido no 1º octante limitado na base pelos eixos coordenados e pela equação  $2x + y = 2$  e superiormente por  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ .*

**Resolução:** Então

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_0^{2-2x} dx = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

## 4.10 Outras aplicações dos integrais duplos

Considere-se uma lâmina plana  $S$ , construída com uma matéria de **densidade** conhecida. Ou seja, existe uma função não negativa,  $f(x, y)$ , definida em  $S$ , que representa a massa por unidade de área no ponto  $(x, y)$ .

Se a lâmina é constituída por um material **homogêneo**, então a densidade é **constante** e, neste caso, a **massa total** obtém-se efectuando o **produto da densidade pela área** da lâmina.

Quando a densidade varia de ponto para ponto, utilizamos o integral duplo da densidade como definição da massa total. Isto é, se a função densidade  $f$  é integrável sobre  $S$ , define-se a massa total,  $m(S)$ , por

$$m(S) = \iint_S f(x, y) dx dy.$$

Ao quociente

$$\frac{\text{massa}}{\text{área}} = \frac{\iint_S f(x, y) dx dy}{\iint_S dx dy}$$

chama-se **densidade média** da placa, ou lâmina,  $S$ .

Se  $S$  é considerada como uma figura geométrica em vez de uma placa, este quociente define o valor médio da função  $f$  em  $S$ . Neste caso não se exige que  $f$  seja não negativa.

Define-se **centro de massa** como sendo o ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$  dado pelas equações

$$\bar{x} m(S) = \iint_S x f(x, y) dx dy, \quad (4.10.1)$$

$$\bar{y} m(S) = \iint_S y f(x, y) dx dy.$$

Os integrais dos segundos membros são os **momentos da placa** relativamente ao eixo  $OY$  e  $OX$ , respectivamente.

Quando a densidade é constante, por exemplo  $f(x, y) = c$ ,  $c > 0$ , tem-se

$$\bar{x} m(S) = \bar{x} \iint_S f(x, y) dx dy = \bar{x} c \iint_S dx dy = \bar{x} c a(S),$$

sendo  $a(S)$  a área de  $S$ . Substituindo em (4.10.1), tem-se

$$\bar{x} a(S) = \iint_S x dx dy.$$

Analogamente

$$\bar{y} a(S) = \iint_S y dx dy.$$

Nestas hipóteses, ao ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$  chama-se **centróide** da placa, ou região,  $S$ .

Considerando no plano da placa uma recta  $r$ , designe-se por  $\delta(x, y)$  a distância de um ponto  $(x, y)$  de  $S$  a  $r$ . Então ao número  $I_r$ , definido por

$$I_r = \iint_S \delta^2(x, y) f(x, y) dx dy,$$

chama-se **momento de inércia da placa  $S$  relativamente a  $r$** .

Os **momentos de inércia em relação aos eixos  $OX$  e  $OY$**  representam-se por  $I_x$  e  $I_y$  e são dados por

$$I_x = \iint_S y^2 f(x, y) dx dy \text{ e } I_y = \iint_S x^2 f(x, y) dx dy.$$

À soma destes dois integrais chama-se **momento polar de inércia  $I_0$  em relação à origem**:

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_S (x^2 + y^2) f(x, y) dx dy .$$

**Observação 4.10.1 1.** *A massa e o centro de massa da placa são propriedades do corpo e são independentes da localização da origem e das direcções dos eixos coordenados.*

**2.** *O momento polar de inércia depende da localização da origem, mas não das direcções escolhidas para os eixos coordenados.*

**3.** *Os momentos de inércia em relação aos eixos  $OX$  e  $OY$  dependem da localização da origem e da orientação dos eixos.*

**4.** *Se uma placa homogénea admite um eixo de simetria, o centróide está sobre esse eixo.*

**5.** *Se existirem dois eixos de simetria, numa placa homogénea, o centróide estará sobre o ponto de intersecção.*

**Exemplo 4.10.2** *Determinar o centróide da região plana limitada por um arco de sinusóide.*

*Por definição de centróide, considera-se a densidade constante. Considere-se a região  $S$  limitada pela curva  $y = \sin x$ , com  $0 \leq x \leq \pi$ .*

Como a região é homogênea e admite um eixo de simetria, o centróide está sobre esse eixo, isto é,  $\bar{x} = \frac{\pi}{2}$ . Então

$$\bar{y} = \frac{\iint_S y \, dx dy}{a(S)} = \frac{\int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen} x} y \, dy dx}{\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx} = \frac{\int_0^\pi \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{\operatorname{sen} x} dx}{\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx} = \frac{\pi}{8},$$

pelo que o centróide tem por coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$ .

### 4.11 Teorema de Green no plano

O Teorema de Green, em homenagem a George Green (1793-1841), matemático inglês que se debruçou sobre as aplicações da Matemática à electricidade e magnetismo, fluxo de fluidos e à reflexão e refração da luz e do som, permite exprimir um integral duplo estendido a uma região plana  $\mathcal{R}$  como um integral de linha ao longo de uma curva fechada  $C$ , que constitui a fronteira de  $\mathcal{R}$ .

Há, contudo, condições de natureza geométrica que devem ser impostas a  $C$ .

**Definição 4.11.1** *Suponhamos que  $C$  é descrita por uma função vectorial contínua  $\alpha$  definida em  $[a, b]$ .*

A curva  $C$  diz-se:

- **Fechada**, se  $\alpha(a) = \alpha(b)$ ;
- **Fechada simples**, se  $\alpha$  é injectiva, isto é, para quaisquer valores diferentes de  $t \in ]a, b[$  dão lugar a pontos distintos da curva. Simbolicamente

$$t_1 \neq t_2 \implies \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2).$$

- **Curva de Jordan**, se for uma curva fechada simples.

**Observação 4.11.2** *Toda a Curva de Jordan  $C$  decompõe o plano em dois conjuntos abertos conexos disjuntos, admitindo  $C$  como fronteira comum. Uma dessas regiões é limitada (**interior de  $C$** ), sendo a outra não limitada (**exterior de  $C$** ).*

Enunciemos então o Teorema de Green para regiões planas limitadas por curvas de Jordan seccionalmente regulares:

**Teorema 4.11.3** *Sejam  $P$  e  $Q$  duas funções escalares, isto é,  $P, Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , continuamente diferenciáveis num conjunto aberto  $S$  do plano  $XOY$ . Considere-se  $C$  uma curva de Jordan seccionalmente regular,  $\mathcal{R}$  a reunião de  $C$  com o seu interior e  $\mathcal{R} \subset S$ . Então verifica-se a igualdade*

$$\iint_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint P dx + Q dy,$$

onde o integral de linha se considera ao longo de  $C$  no sentido directo.

**Observação 4.11.4** *A igualdade anterior é equivalente às duas fórmulas:*

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \oint Q dy, \\ \iint_{\mathcal{R}} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \oint P dx. \end{aligned}$$

Se ambas forem verdadeiras, somando-as membro a membro, obtém-se a igualdade inicial.

Recíprocamente, fazendo no teorema  $P = 0$  obtém-se a primeira e com  $Q = 0$  temos a segunda.

Vejamos uma vantagem deste resultado:

Calcular, usando o Teorema de Green, o trabalho efectuado por

$$f(x, y) = \underbrace{(y + 3x)}_P, \underbrace{(2y - x)}_Q,$$

que actua sobre uma partícula obrigando-a a descrever a  $4x^2 + y^2 = 4$  no sentido directo.

O trabalho é dado pelo integral de linha

$$\begin{aligned} \oint P dx + Q dy &= \iint_{\mathcal{E}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\mathcal{E}} (-2) dx dy \\ &= -2 a(\mathcal{E}) = -4\pi. \end{aligned}$$

A vantagem da utilização do Teorema de Green, consiste na não necessidade de parametrização da elipse  $\alpha$  e dos cálculos de  $f[\alpha(t)]$  e  $\alpha'(t)$ .

Por outro este exemplo mostra que uma área também pode ser expressa como um integral de linha.

**Observação 4.11.5** Para uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)),$$

continuamente diferenciável num conjunto aberto e conexo  $S$  do plano, pelo Teorema 3.4.10, uma condição necessária e suficiente para que  $f$  seja um gradiente, é dada por.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

## 4.12 Mudança de variáveis num integral duplo

Na teoria de integração a uma dimensão, o método de substituição permite-nos, frequentemente, calcular integrais "complicados", transformando-os noutros mais simples ou noutro tipo de integral que pode ser mais facilmente calculado.

O método baseia-se na igualdade

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt$$

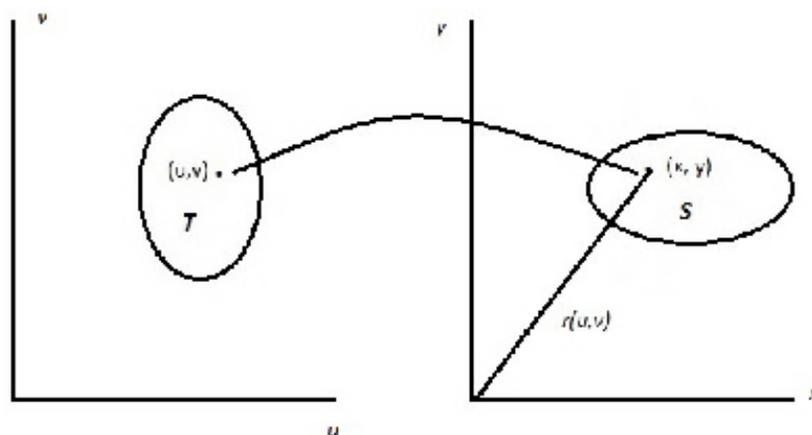
com  $c = \varphi^{-1}(a)$  e  $d = \varphi^{-1}(b)$ , sob as hipóteses de  $\varphi$  ter derivada contínua em  $[c, d]$  e que  $f$  seja contínua no conjunto de valores que toma  $\varphi(t)$  com  $t \in [c, d]$ .

Para o caso bidimensional existem duas substituições a efectuar: uma para  $x$  e outra para  $y$ . Assim, em vez de uma função  $\varphi$ , existirão duas funções, por exemplo,  $\varphi$  e  $\psi$ , as quais relacionam  $x$  e  $y$  com  $u$  e  $v$ , do modo seguinte

$$x = \varphi(u, v) \text{ e } y = \psi(u, v).$$

Com estas duas relações, define-se uma função vectorial

$$r(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v)).$$



Quando  $(u, v)$  percorre a região  $T$  a extremidade de  $r(u, v)$  descreve os pontos de  $S$ .

Consideraremos apenas aplicações para as quais as funções  $\varphi$  e  $\psi$  são contínuas e têm derivadas parciais contínuas  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ .

A fórmula para mudança de variáveis nos integrais duplos pode escrever-se como

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_T f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] |J(u, v)| du dv,$$

sendo  $|J(u, v)|$  o módulo do jacobiano, isto é,

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Vejamos dois casos particulares da fórmula de mudança de variáveis:

#### 4.12.1 Coordenadas polares

Neste caso escreveremos  $\rho$  e  $\theta$  em vez de  $u$  e  $v$ , e definimos a aplicação pelas duas equações

$$\varphi(\rho, \theta) = x = \rho \cos \theta \text{ e } \psi(\rho, \theta) = y = \rho \sin \theta.$$

Para obtermos uma aplicação bijectiva, considera-se apenas  $\rho > 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

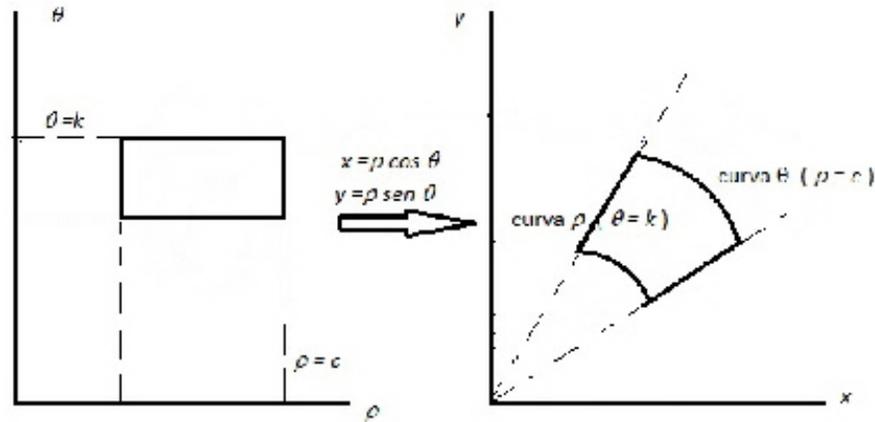
O jacobiano será

$$J(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho.$$

Então a fórmula de mudança de variáveis tem a forma

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_T f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta.$$

A transformação por coordenadas polares pode traduzir-se pelo esquema



Note-se que :

- As curvas  $\rho$  são rectas que passam pela origem e as curvas  $\theta$  são círculos centrados na origem.
- A imagem de um rectângulo no plano  $\rho = \theta$  é um "quadrilátero" no plano  $XOY$  limitados por raios e dois arcos de circunferência.
- As coordenadas polares são adequadas quando a região de integração tem fronteiras ao longo das quais  $\rho$  e/ou  $\theta$  são constantes (circunferências, sectores circulares,...)

**Exemplo 4.12.1** O volume de um octante de esfera de raio  $a$  ( $a > 0$ ) será dado por

$$V = \iiint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

onde  $S$  é a região do 1º quadrante de um círculo  $x^2 + y^2 \leq a^2$ . Assim

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} \, dydx \\ &= \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-\rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \, \rho \, d\theta d\rho \\ &= \int_0^a \rho \sqrt{a^2-\rho^2} \, [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\rho = \frac{\pi}{6} a^3. \end{aligned}$$

### 4.12.2 Transformações lineares

Uma transformação linear é uma aplicação definida por duas equações da forma

$$x = \alpha u + \beta v \text{ e } y = \gamma u + \delta v,$$

com  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ .

O jacobiano  $|J(u, v)| = \alpha\delta - \beta\gamma$ .

Para podermos obter  $u$  e  $v$  em função de  $x$  e  $y$  deve supor-se que  $|J(u, v)| \neq 0$  (para que o sistema seja possível e determinado).

Note-se que :

- As transformações lineares transformam rectas paralelas em rectas paralelas. Portanto a imagem de um rectângulo no plano UOV é um paralelogramo no plano XOY, sendo a sua área multiplicada pelo factor  $|\det J(u, v)| = |\alpha\delta - \beta\gamma|$ .
- A fórmula da mudança de variáveis assume a forma

$$\iint_S f(x, y) dx dy = |\alpha\delta - \beta\gamma| \iint_T f(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v) du dv.$$

**Exemplo 4.12.2** Calculemos o valor do integral

$$\iint_S e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy,$$

sendo  $S$  o triângulo limitado pela recta  $y + x = 2$  e pelos eixos coordenados. A presença de  $y - x$  e  $y + x$  na função integranda sugere a substituição

$$u = y - x \text{ e } v = y + x.$$

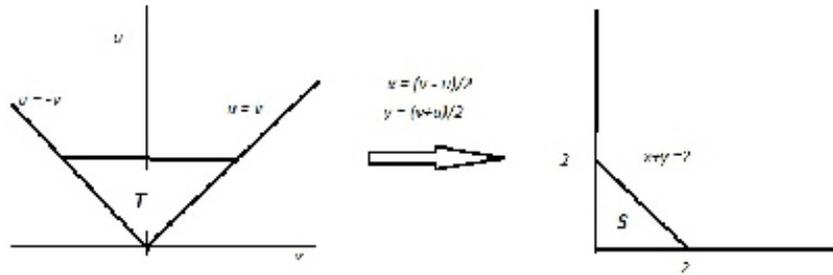
Resolvendo relativamente a  $x$  e a  $y$ , temos

$$\varphi(u, v) = x = \frac{v - u}{2} \text{ e } \psi(u, v) = y = \frac{v + u}{2}$$

e o jacobiano

$$|J(u, v)| = \left| \begin{array}{cc} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right| = -\frac{1}{2}.$$

Gráficamente



Para determinar a imagem  $T$  de  $S$  no plano  $UOV$ , observe-se que:

- as rectas  $x = 0$  e  $y = 0$  aplicam-se, respectivamente, nas rectas  $u = v$  e  $u = -v$ .
- a recta  $x + y = 2$  transforma-se na recta  $v = 2$ .

Então

$$\begin{aligned} \iint_S e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy &= \iint_T e^{\frac{u}{v}} \left| -\frac{1}{2} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[ \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du \right] dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 v \left[ e^{\frac{u}{v}} \right]_{-v}^v dv = e - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

### 4.13 Exercícios

1. Calcular os seguintes integrais duplos :

a)  $\iint_R xy(x+y) dx dy$  com  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ ;

b)  $\iint_R (\sqrt{y} + x - 3xy^2) dx dy$  com  $R = [0, 1] \times [1, 3]$ ;

c)  $\int_0^\pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y dx dy$ ;

d)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x+2y) dx dy$ ;

e)  $\iint_R \left( y^{-3} e^{\frac{t x}{y}} \right) dx dy$  com  $R = [0, t] \times [1, t]$ ,  $t > 1$ .

2. Esboce a região de integração e calcule os integrais duplos :

a)  $\iint_R (1 - x - y) dx dy$  com  $R = \{(x, y) : x + y \leq 1\}$ ;

b)  $\iint_R (x + y) dx dy$  com  $R = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 2x^2\}$ ;

c)  $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$  com  $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;

d)  $\iint_R \frac{1}{(x+y)^2} dx dy$  com  $R = \{(x, y) : x \leq y \leq 2x\}$ ;

e)  $\iint_R (x \cos(x+y)) dx dy$  sendo  $R$  a região triangular de vértices  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$  e  $(\pi, \pi)$ .

f)  $\iint_R x^2 y^2 dx dy$  sendo  $R$  a região do 1º quadrante entre as hipérbolas  $xy = 1$  e  $xy = 2$  e as duas rectas  $y = x$  e  $y = 4x$ .

g)  $\iint_R e^{x+y} dx dy$  com  $R = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ .

3. Admitindo que os integrais em causa existem, esboce a região de integração e permuta a ordem de integração :

a)  $\int_0^1 \int_0^y f(x, y) dx dy;$

b)  $\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx dy;$

c)  $\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx;$

d)  $\int_{-6\frac{x^2-4}{4}}^2 \int_{2-x} f(x, y) dy dx.$

4. Considere uma placa homogénea com o formato da região  $S$  limitada pelas curvas abaixo. Em cada caso represente gráficamente a região  $S$  e calcule as coordenadas do centróide :

a)  $y = x^2$  e  $x + y = 2$ ;

b)  $y^2 = x + 3$  e  $y^2 = 5 - x$ ;

c)  $y = \text{sen } x$ ,  $y = \cos x$  e  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ .

5. Calcular o momento de inércia de uma placa delgada  $S$  no plano  $XOY$ , limitada pelas curvas definidas pelas equações abaixo, representando por  $f(x, y)$  a densidade de  $S$  num ponto arbitrário  $(x, y)$  :

a)  $y = \text{sen}^2 x$ ,  $y = -\text{sen}^2 x$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$  e  $f(x, y) = 1$ ;

- b)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ,  $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$ ,  $y = 0$ ,  $0 < c < a$ ,  $b > 0$  e  $f(x, y) = 1$ ;  
 c)  $xy = 1$ ,  $xy = 2$ ,  $x = 2y$ ,  $y = 2x$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$  e  $f(x, y) = 1$ ;  
 d)  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$  e  $f(x, y) = xy$ .

6. Aplicar o Teorema de Green para calcular o integral de linha

$$\oint_C y^2 dx + x dy,$$

quando:

- a)  $C$  é o quadrado com vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$  e  $(0, 2)$ ;  
 b)  $C$  é o quadrado com vértices  $(\pm 2, 0)$  e  $(0, \pm 2)$ ;  
 c)  $C$  é a circunferência de raio 2 e centro na origem.

7. Calcular o valor dos integrais, passando para coordenadas polares:

a)  $\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx;$

b)  $\int_0^1 \int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} dy dx;$

c)  $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy.$

8. Considere a aplicação definida pelas equações

$$x = u + v, \quad y = v - u^2.$$

- a) Calcular o jacobiano  $J(u, v)$ ;  
 b) Um triângulo  $T$  no plano  $UOV$  tem vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  e  $(0, 2)$ . Desenhe a sua imagem  $S$  no plano  $XOY$ ;  
 c) Calcular a área de  $S$  por intermédio de um integral duplo estendido a  $S$  e por outro estendido a  $T$ ;

d) Calcular

$$\iint_S (x - y + 1)^{-2} dx dy.$$

9. Calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies:

- a)  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x + y + z = 2$  e  $z = 0$ .
- b)  $z = x^2 + y^2$ ,  $y = x^2$ ,  $xy = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ .
- c)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $z + y = 2a$  e  $z = 0$  ( $0 < b < 2a$ ).

## Capítulo 5

# Integrais triplos

Começemos pela definição de integral triplo de uma função.

**Definição 5.0.1** *Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $A \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto fechado.*

*Seguindo a mesma metodologia que para os integrais duplos, chama-se **soma integral** de  $f(x, y, z)$  relativamente a uma decomposição  $D_n = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  de  $A$  à expressão*

$$S = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta A_i,$$

*onde  $f(x_i, y_i, z_i)$  será o valor de  $f$  num ponto escolhido  $(x_i, y_i, z_i)$  de  $A_i$ .*

Considerando uma sucessão de decomposições com o diâmetro  $\Delta A_i$  a tender para zero, com limite finito então diz-se que  $f(x, y, z)$  é **integrável** em  $A$ .

Ao valor desse limite chama-se integral triplo de  $f$  no domínio e representa-se por

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

## 5.1 Propriedades do integral triplo

1. O integral triplo da soma de duas funções  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y, z)$  em  $A$  é igual à soma dos integrais de cada uma delas no mesmo domínio  $A$ :

$$\begin{aligned} & \iiint_A [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] \, dx dy dz \\ &= \iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz \pm \iiint_A g(x, y, z) \, dx dy dz. \end{aligned}$$

2. Para  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$\iiint_A k f(x, y, z) \, dx dy dz = k \iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

3. Se o domínio de integração  $A$  está dividido em dois domínios  $A_1$  e  $A_2$  tais que  $\text{int}A_1 \cap \text{int}A_2 = \emptyset$ , então

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{A_1} f(x, y, z) \, dx dy dz + \iiint_{A_2} f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Precisemos agora o que se entende por domínio regular:

**Definição 5.1.1** Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^3$  é um domínio regular se:

- a) A sua superfície fronteira é cortada em apenas dois pontos por qualquer recta vertical que passe por um ponto interior;
- b) A sua projecção sobre o plano  $XOY$  constitui um plano regular como em a) (convexo);
- c) Qualquer parte de  $A$  que se obtenha por secção de planos paralelos a qualquer dos planos coordenados, verifica as propriedades a) e b).

## 5.2 Cálculo de integrais triplos

Consideremos, então  $\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz$  em que  $A$  é um subconjunto regular de  $\mathbb{R}^3$ .

Suponhamos que  $A$  é limitado por uma superfície  $S$  cuja equação, na sua parte superior é  $z = \varphi(x, y)$  e, na inferior,  $z = \psi(x, y)$  e cuja projecção no plano  $XOY$  é a região limitada  $Q$ .

Nestas condições

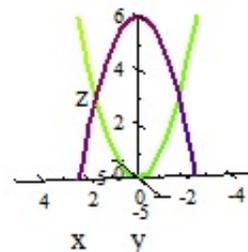
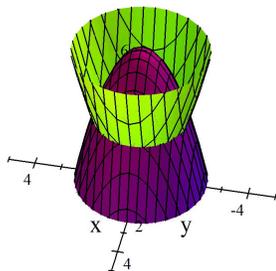
$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_Q \left[ \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right] dx dy.$$

Isto é, a primeira integração é feita em relação a  $z$ , reduzindo-o a um integral duplo sobre a projecção  $Q$ , o qual pode ser resolvido pelos métodos já expostos.

**Exemplo 5.2.1** Calculemos

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^x \int_0^y (xyz) \, dz dy dx &= \int_0^2 \int_0^x xy \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^y dy dx = \int_0^2 \int_0^x x \frac{y^3}{2} dy dx \\ &= \int_0^2 \frac{x}{2} \left[ \frac{y^4}{4} \right]_0^x dx = \frac{1}{8} \int_0^2 x^5 dx = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

**Exemplo 5.2.2** Calculemos agora  $\iiint_A y \, dz dy dx$ , sendo  $A$  o domínio limitado pelos parabolóides  $z = 6 - x^2 - y^2$  e  $z = x^2 + y^2$ .  
Graficamente o sólido será



A intersecção entre os dois parabolóides é dado pelo círculo  $x^2 + y^2 \leq 3$  à cota  $z = 3$ . Assim  $A$  é limitado superiormente por  $z = 6 - x^2 - y^2$  e inferiormente por  $z = x^2 + y^2$ .

A projecção de  $A$  em  $XOY$  é o círculo de centro em  $(0, 0)$  e raio  $\sqrt{3}$ . O domínio é, obviamente, regular, pelo que

$$\begin{aligned} \iiint_A y \, dz dy dx &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} y \, dz dy dx \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} y [z]_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} dy dx \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} (6y - 2x^2y - 2y^3) dy dx = 0 \end{aligned}$$

### 5.3 Aplicações dos integrais triplos

Os integrais triplos podem ser utilizados para calcular volumes, massas, centros de massa, momentos de inércia e outros conceitos físicos relacionados com sólidos.

Se  $S$  é um sólido, o seu **volume**  $V$  é dado por

$$V = \iiint_S 1 \, dx dy dz.$$

Se o sólido se supõe com densidade  $f(x, y, z)$  em cada um dos seus pontos  $(x, y, z)$  (massa por unidade de volume), a sua **massa**  $M$  é dada por

$$M = \iiint_S f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

e o respectivo **centro de massa** será o ponto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  em que

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_S x f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

e de modo análogo para  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$ .

O momento de inércia  $I_{xy}$  em relação ao plano  $XOY$  é definido por

$$I_{xy} = \iiint_S z^2 f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

O momento de inércia  $I_L$  em relação à recta  $L$  é definido por

$$I_L = \iiint_S \delta^2(x, y, z) f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

em que  $\delta^2(x, y, z)$  representa a distância de um ponto genérico  $(x, y, z)$  de  $S$  à recta  $L$ .

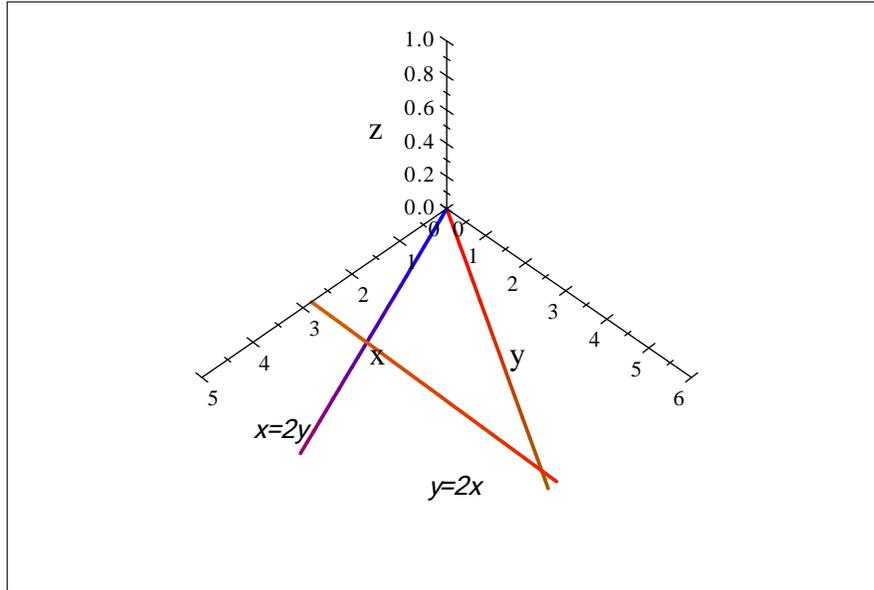
**Exemplo 5.3.1** *Seja  $S$  o sólido limitado pela superfície cilíndrica  $x^2 = 2z$  e pelos planos  $x - 2y = 0$ ,  $x = 2\sqrt{2}$  e  $z = 0$ .*

*Supondo que a sua densidade é constante, calcular:*

- a) *o volume de  $S$ .*
- b) *A massa de  $S$  e o centro de massa.*
- c) *O momento de inércia de  $S$  em relação ao plano  $XOY$ .*

**Resolução:** O sólido  $S$  é limitado inferiormente por  $z = 0$  e superiormente por  $z = \frac{x^2}{2}$ . Lateralmente é limitado pelos planos  $y = \frac{x}{2}$ ,  $y = 2x$  e  $x = 2\sqrt{2}$ .

O esquema gráfico da projecção tem a seguinte forma



a)

$$V = \int_0^{2\sqrt{2}x} \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x^2}{2}} \int_0^{2\sqrt{2}x} dz dy dx = \int_0^{2\sqrt{2}x} \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x^2}{2}} \frac{x^2}{2} dy dx = 12.$$

b)

$$M = \iiint_S k dz dy dx = k V = 12k.$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{12k} \iiint_S x k dz dy dx = \frac{1}{12} \int_0^{2\sqrt{2}x} \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x^2}{2}} \int_0^{2\sqrt{2}x} x dz dy dx \\ &= \frac{1}{12} \int_0^{2\sqrt{2}x} \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x^2}{2}} \frac{x^3}{2} dy dx = \frac{8}{5} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{12k} \iiint_S y k \, dz dy dx = \frac{1}{12} \int_0^{2\sqrt{2}2x} \int_{\frac{x}{2}}^{x^2} y \frac{x^2}{2} dy dx \\ &= \frac{1}{12} \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{15}{16} x^4 dx = 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{12k} \iiint_S z k \, dz dy dx = \frac{1}{12} \int_0^{2\sqrt{2}2x} \int_{\frac{x}{2}}^{x^2} \frac{x^4}{4} dy dx = \frac{4}{3}.$$

Então o centro de massa tem por coordenadas

$$\left( \frac{8}{5}\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \frac{4}{3} \right).$$

c)

$$\begin{aligned}I_{xy} &= \iiint_S z^2 k \, dz dy dx = k \int_0^{2\sqrt{2}2x} \int_{\frac{x}{2}}^{x^2} \int_0^{z^2} z^2 \, dz dy dx \\ &= k \int_0^{2\sqrt{2}2x} \int_{\frac{x}{2}}^{x^2} \frac{x^6}{24} dy dx = 32k.\end{aligned}$$

## 5.4 Mudança de coordenadas em integrais triplos

À semelhança do que fizemos com os integrais duplos, consideremos um domínio  $D \subset \mathbb{R}^3$ , limitado, onde estão definidas novas variáveis  $u, v$  e  $w$  (funções de  $x, y$  e  $z$ ) pelas igualdades

$$u = \Phi_1(x, y, z), \quad v = \Phi_2(x, y, z), \quad w = \Phi_3(x, y, z),$$

sendo  $u, v$  e  $w$  funções bijectivas contínuas num domínio  $D'$ , transformado de  $D$ .

Nestas condições temos que

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{D'} f(u, v, w) |J((u, v, w))| \, du dv dw,$$

com

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

o jacobiano da transformação dada.

Consideraremos dois casos particulares importantes:

#### 5.4.1 Coordenadas cilíndricas

Um ponto que em coordenadas cartesianas é dado por  $(x, y, z)$ , será escrito em coordenadas cilíndricas da seguinte forma: o  $x$  e o  $y$  serão substituídos pelas suas coordenadas polares, e mantém-se o  $z$  inalterado.

Isto é, definimos as aplicações

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z.$$

Neste caso o jacobiano será

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Então

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \, \rho \, d\rho d\theta dz.$$

**Observação 5.4.1** *Note-se que:*

- Para obtermos aplicações injectivas deve-se fazer  $\rho \geq 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi[$ .
- As coordenadas cilíndricas são utilizadas, sobretudo, quando o domínio  $D$  tem simetria axial.
- O jacobiano anula-se quando  $\rho = 0$ , mas isso não afecta a validade da fórmula, porque o conjunto de pontos com  $\rho = 0$  tem medida nula.

**Exemplo 5.4.2** *Calculemos o volume limitado pelos parabolóides*

$$z = 8 - x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad z = x^2 + y^2.$$

Os parabolóides intersectam-se à cota  $z = 4$ , que se projecta no plano  $XOY$  segundo uma circunferência de centro na origem e raio 2.

O volume será dado por

$$V = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz dy dx.$$

Como o sólido é simétrico em relação ao eixo  $OZ$ , pelo que se pode reduzir o cálculo do volume ao 1º octante:

$$V = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz dy dx.$$

Devido à simetria axial utilizaremos as coordenadas cilíndricas. Assim

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho^2}^{8-\rho^2} \rho dz d\theta d\rho = 4 \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\rho - 2\rho^3) d\theta d\rho \\ &= 4 \int_0^2 (4\rho\pi - \rho^3\pi) d\rho = 16\pi. \end{aligned}$$

### 5.4.2 Coordenadas esféricas

Um ponto  $(x, y, z)$ , em coordenadas cartesianas, é dado em coordenadas esféricas pelas relações

$$x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \varphi,$$

sendo:

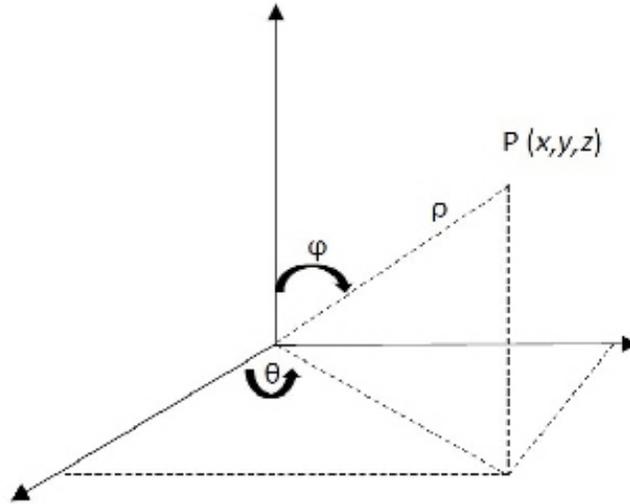
- $\rho$  a distância do ponto à origem;
- $\varphi$  o ângulo que a recta que une o ponto à origem faz com o eixo  $OZ$ ;
- $\theta$  o ângulo formado com a parte positiva do eixo  $OX$  e pela recta que une a origem à projecção do ponto no plano  $XOY$ .

Para se obterem aplicações injectivas faz-se

$$\rho \geq 0, \quad \varphi \in [0, \pi] \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

Gráficamente

*esfv2*



*32.jpg*

O determinante jacobiano é

$$\begin{aligned}
 J(\rho, \varphi, \theta) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \text{sen } \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \text{sen } \varphi \text{sen } \theta \\ \text{sen } \varphi \text{sen } \theta & \rho \cos \varphi \text{sen } \theta & \rho \text{sen } \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \text{sen } \varphi & 0 \end{vmatrix} \\
 &= -\rho^2 \text{sen } \varphi.
 \end{aligned}$$

Como  $\varphi \in [0, \pi]$  logo  $\text{sen } \varphi \geq 0$  e  $|J| = \rho^2 \text{sen } \varphi$ .

Então

$$\begin{aligned}
 &\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz \\
 &= \iiint_{D'} f(\rho \text{sen } \varphi \cos \theta, \rho \text{sen } \varphi \text{sen } \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \text{sen } \varphi \, d\rho d\varphi d\theta.
 \end{aligned}$$

Embora o jacobiano se anule quando  $\rho = 0$  ou  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pi$ , a fórmula de mudança de variáveis é ainda válida porque o conjunto de pontos onde tal se verifica tem medida nula.

As coordenadas esféricas utilizam-se sobretudo quando o domínio de integração  $D$  é simétrico em relação a um ponto (centro de simetria).

As superfícies  $\rho = k$  são esferas centradas na origem.

As superfícies  $\theta = k$  são planos verticais contendo o eixo  $OZ$ .

As superfícies  $\varphi = k$  são cones circulares com o eixo de simetria coincidente com o eixo  $OZ$ .

O exemplo seguinte pode ser considerado como uma demonstração para a fórmula conhecida do volume de uma esfera:

**Exemplo 5.4.3** *Calcular o volume de uma esfera de centro na origem e raio  $r$ .*

*A equação da superfície esférica é dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , sendo a sua projecção no plano  $XOY$  uma circunferência de equação  $x^2 + y^2 = r^2$ .*

*Como o sólido tem simetria em relação à origem, pode utilizar-se coordenadas esféricas e calcular o volume apenas num octante:*

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz dy dx \\ &= 8 \int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta d\rho = \int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\theta d\rho \\ &= \int_0^r \rho^2 \frac{\pi}{2} d\rho = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

## 5.5 Exercícios

1. Calcular os integrais triplos:

a)  $\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x + y + z) \, dx dy dz$ ,  $a, b, c > 0$ ;

b)  $\int_0^a \int_0^x \int_0^y (xyz) \, dz dy dx$ ,  $a > 0$ ;

c)  $\iiint_S (xy^2z^3) \, dx dy dz$ , onde  $S$  é o sólido limitado pela superfície  $z = xy$  e os planos  $y = x$ ,  $x = 1$  e  $z = 0$ ;

d)  $\iiint_S (1 + x + y + z)^{-3} \, dx dy dz$ , com  $S$  o sólido limitado pelos três planos coordenados e pelo plano  $x + y + z = 1$ .

2. Calcular o volume dos sólidos pelas superfícies dadas, utilizando integrais triplos:

a) pelos cilindros  $z = 4 - y^2$ ,  $z = y^2 + 2$  e pelos planos  $x = -1$  e  $x = 2$ ;

b) pelos parabolóides  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = x^2 + 2y^2$  e pelos planos  $y = x$ ,  $y = 2x$  e  $x = 1$ ;

c) pelos parabolóides  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2x^2 + 2y^2$ , pelo cilindro  $y = x^2$  e o plano  $y = x$ .

3. Calcular o volume dos sólidos limitados pelas superfícies indicadas, utilizando integrais triplos e uma mudança de variáveis conveniente:

a) pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e pelo parabolóide  $x^2 + y^2 = 3z$ ;

b) pela superfície de equação  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x$ ,  $a > 0$ ;

c) pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  e pelo parabolóide  $x^2 + y^2 = r^2 - 2zr$ ,  $z \geq 0$ ;

d) pelas esferas  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  e por  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , com  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  e  $z \geq 0$ .

## Capítulo 6

# Integrais de superfície

Os integrais de superfície são, em muitos aspectos, análogos aos integrais de linha, sendo a integração estendida a uma superfície em vez de uma curva.

### 6.1 Definição

Definimos anteriormente os integrais de linha mediante a representação paramétrica para a curva. Análogamente, definiremos integrais de superfície por intermédio de uma representação paramétrica da superfície.

Recorde-se que se entende como superfície o lugar geométrico definido por um ponto que se move no espaço com dois graus de liberdade. Daí que as equações paramétricas das superfícies necessitem de dois parâmetros.

**Definição 6.1.1** *Seja  $S = g(u, v)$ , com  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , uma superfície na representação paramétrica descrita por uma função  $g$  definida numa região  $D$  do plano. Considere-se uma função escalar  $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  limitada em  $S$ .*

*O integral de superfície de  $f$  sobre  $S$  representa-se por*

$$\text{ou } \iint_{g(D)} f \, dS$$

*e calcula-se*

$$\iint_{g(D)} f \, dS = \iint_D f[g(u, v)] \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| \, dudv,$$

*sendo  $\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$  o produto externo dos vectores.*

## 6.2 Aplicações

### 6.2.1 Área de uma superfície

Note-se que a superfície não é necessariamente plana.

Quando  $f = 1$ , a expressão anterior escreve-se

$$a(S) = \iint_{g(D)} f \, dS = \iint_D \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| \, dudv.$$

Se  $S$  é dada explicitamente por uma função da forma  $z = f(x, y)$ , pode tomar-se  $x$  e  $y$  como parâmetros e então

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| = \left\| \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \right\| = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}$$

e o integral é dado por

$$a(S) = \iint_{g(D)} f \, dS = \iint_D \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} \, dx dy.$$

### 6.2.2 Centro de massa e momento de inércia

Se a função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é interpretada como sendo a densidade de massa de uma lâmina delgada com a forma de  $S$ , a massa total  $M$  da superfície obtém-se pelo integral

$$M = \iint_S f(x, y, z) \, dS.$$

O centro de massa é o ponto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  com coordenadas definidas por

$$\bar{x} M = \iint_S x f(x, y, z) \, dS,$$

$$\bar{y} M = \iint_S y f(x, y, z) \, dS,$$

$$\bar{z} M = \iint_S z f(x, y, z) \, dS.$$

O momento de inércia  $I_L$  de  $S$  em relação a  $L$  é definido por

$$I_L = \iint_S \delta^2(x, y, z) f(x, y, z) dS,$$

sendo  $\delta(x, y, z)$  a distância a  $L$  de um ponto denético da superfície.

**Exercício 6.2.1** Para a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , calcular:

- a) a área da superfície esférica;
- b) a massa e o centro de massa, supondo a densidade constante;
- c) o momento de inércia em relação ao plano  $XOY$ .

**Resolução:** a) Calculemos a área por dois processos:

**1º processo :** Utilizando a representação paramétrica da superfície esférica

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \sen \theta \cos \varphi \\ z = r \sen \varphi, \end{cases}$$

com  $\theta \in [0, 2\pi]$  e  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , temos a função

$$g(\theta, \varphi) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \sen \theta \cos \varphi, r \sen \varphi).$$

Calculando o vector dado pelo produto externo

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} &= \begin{vmatrix} x & y & z \\ -r \sen \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & 0 \\ -r \cos \theta \sen \varphi & -r \sen \theta \sen \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= (r^2 \cos \theta \cos^2 \varphi, r^2 \sen \theta \cos^2 \varphi, r^2 \cos \varphi \sen \varphi) \end{aligned}$$

e a sua norma

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right\| &= \sqrt{r^4 \cos^4 \varphi + r^4 \cos^2 \varphi \sen^2 \varphi} \\ &= \sqrt{r^4 \cos^4 \varphi + r^4 \cos^2 \varphi \sen^2 \varphi} \\ &= \sqrt{r^4 \cos^2 \varphi} = r^2 |\cos \varphi|. \end{aligned}$$

Então a área será

$$\begin{aligned} a(S) &= \iint_S r^2 |\cos \varphi| \, dS = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \cos \varphi \, d\theta d\varphi \\ &= 4\pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

**2º processo :** Escrevendo a função de uma forma explícita:  $z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ .  
Restringindo-nos apenas à parte positiva

$$\begin{aligned} a(S) &= 2 \int_{-r-\sqrt{r^2-x^2}}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\right)^2} \, dydx \\ &= 2 \int_{-r-\sqrt{r^2-x^2}}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} \, dydx. \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares

$$a(S) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-\rho^2}} \, d\rho d\theta = 2r \int_0^{2\pi} r \, d\theta = 4\pi r^2.$$

b) Para  $k > 0$ ,

$$M = \iint_S k \, dS = k \iint_S dS = 4\pi r^2 k.$$

Atendendo aos eixos de simetria as coordenadas do centro de massa terão que ser  $(0, 0, 0)$ . A título de exemplo calculemos  $\bar{z}$  :

$$\bar{z} M = \iint_S z k \, dS = k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r \operatorname{sen} \varphi (r^2 |\cos \varphi|) \, d\theta d\varphi.$$

Como  $\varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  então  $\cos \varphi > 0$ , pelo que

$$\begin{aligned} z &= \frac{r^3}{4\pi r^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{r}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} (2\varphi) d\varphi = 0. \end{aligned}$$

c) A distância de um ponto genérico da superfície esférica ao plano  $XOY$  é dada por  $z$ . Assim

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iint_S z^2 k dS = k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^4 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi d\theta d\varphi \\ &= 2\pi k r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{2\pi k r^4}{3} [\operatorname{sen}^3 \varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi k r^4}{3}. \end{aligned}$$

### 6.2.3 Fluxo de um fluido através de uma superfície

Antes de mais recordemos alguma nomenclatura:

Considera-se um **fluido** como um conjunto de pontos ou partículas.

A cada partícula  $(x, y, z)$  atribuímos um vector  $v(x, y, z)$ , que representa a sua **velocidade**, construindo-se assim a função velocidade da corrente do fluido.

A velocidade pode, ou não, variar com o tempo. Consideraremos apenas **fluxos estacionários**, isto é, fluxos para os quais a velocidade  $v(x, y, z)$  depende apenas da posição da partícula e não do tempo.

Designemos por  $\rho(x, y, z)$  a **densidade** (massa por unidade de volume) do fluido no ponto  $(x, y, z)$ .

Se o fluido é **incompressível**, a densidade  $\rho$  é constante. Se é **compressível**, tal como num gás, a densidade pode variar de ponto para ponto. Em qualquer dos casos, a densidade é uma função escalar associada à corrente do fluido.

O produto da densidade pela velocidade representamo-lo por  $F$ , ou seja

$$F(x, y, z) = \rho(x, y, z) v(x, y, z),$$

é uma função vectorial chamada densidade do fluxo da corrente, que tem a mesma direcção que a velocidade e as dimensões

$$\begin{aligned} & \frac{\text{massa}}{\text{unidade de volume}} \times \frac{\text{distância}}{\text{unidade de tempo}} \\ = & \frac{\text{massa}}{\text{unidade de área} \times \text{unidade de tempo}}. \end{aligned}$$

Por outras palavras, o vector densidade do fluxo  $F(x, y, z)$ , diz-nos quanta massa do fluido, por unidade de área, passa pelo ponto  $(x, y, z)$  na direcção de  $v(x, y, z)$  por unidade de tempo.

Seja  $S = g(D)$  uma superfície paramétrica. Em cada ponto de  $S$  designamos por  $n$  o vector unitário normal com sentido igual ao vector  $\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$ , isto é,

$$n = \frac{\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\|}.$$

O produto interno  $F \cdot n$  dá a componente do vector densidade do fluxo segundo  $n$ .

A massa do fluido que passa através de  $S$ , na unidade de tempo, na direcção e no sentido de  $n$ , define-se pelo integral de superfície

$$\iint_{g(D)} F \cdot n \, dS = \iint_D F[g(u, v)] \cdot n \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| \, dudv.$$

**Exemplo 6.2.2** *Seja  $S$  a semi-esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$  e  $F(x, y, z) = (x, y, 0)$ . Seja  $n$  o vector normal unitário exterior a  $S$ . Calcular o valor do integral de superfície  $\iint_S F \cdot n \, dS$ , utilizando:*

a) *A representação vectorial*

$$g(\varphi, \theta) = (\text{sen } \varphi \cos \theta, \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi, \cos \varphi),$$

$$\text{com } \theta \in [0, 2\pi[ \text{ e } \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}];$$

b) *A representação explícita  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .*

**Resolução:** a) Como

$$F[g(\varphi, \theta)] = (\text{sen } \varphi \cos \theta, \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi, 0),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} x & y & z \\ \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin \theta \sin^2 \varphi, \sin \varphi \cos \varphi), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot ndS &= \iint_D F[g(\varphi, \theta)] \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial \varphi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left[ \begin{matrix} (\sin \varphi \cos \theta, \sin \theta \sin \varphi, 0) \cdot \\ (\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin \theta \sin^2 \varphi, \sin \varphi \cos \varphi) \end{matrix} \right] d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \\ &= 2\pi \left[ -\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

**b)** Utilizando a função  $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  temos  $g(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$  com  $-1 \leq x \leq 1$  e  $-1 \leq y \leq 1$ .

Neste caso

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right),$$

pelo que

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot ndS &= \iint_D F[g(x, y)] \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x, y, 0) \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right) dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy dx. \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot ndS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} \rho \, d\theta d\rho = 2\pi \int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 2\rho\sqrt{1-\rho^2} d\rho = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

### 6.3 Teorema de Stokes

O Teorema de Stokes relaciona um integral de superfície com um integral de linha, generalizando o Teorema de Green:

**Teorema 6.3.1** *Seja  $S = g(D)$  uma superfície paramétrica simples e regular, com  $D$  uma região do plano UOV limitada por uma curva de Jordan  $\Gamma$ , seccionalmente regular.*

*Admita-se que as componentes de  $g$  admitem derivadas parciais de 2ª ordem contínuas num conjunto aberto contendo  $D \cup \Gamma$ .*

*Considere-se  $C = g(\Gamma)$  o gráfico definido por uma função  $\alpha(t)$ . Então tem-se*

$$\int_C F \cdot d\alpha = \iint_S (\text{rot } F) \cdot n \, dS$$

**Exercício 6.3.2** *Determine, utilizando o Teorema de Stokes, os integrais curvilíneos:*

- a)  $\int_{\Gamma} (y+z, z+x, x+y) \cdot d\alpha$ , em que  $\Gamma$  é a circunferência resultante da intersecção de  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  com  $x + y + z = 0$ ;
- b)  $\oint_{\Gamma} (xy^2, x, z) \cdot d\alpha$ , sendo  $\Gamma$  a superfície limitada pela circunferência  $x^2 + y^2 = r^2$  e  $z = 0$ .

**Resolução:** a)  $\int_{\Gamma} F \cdot d\alpha = \iint_D (\text{rot } F) \cdot n \, dS = 0$  porque

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 0.$$

b) Como

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & x & z \end{vmatrix} = (0, 0, 1 - 2xy),$$

então

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (xy^2, x, z) \cdot d\alpha &= \iint_D (\operatorname{rot} F) \cdot ndS \\ &= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (0, 0, 1 - 2xy) \cdot (0, 0, 1) dydx. \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (xy^2, x, z) \cdot d\alpha &= \int_0^r \int_0^{2\pi} (1 - 2\rho^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta) \rho d\theta d\rho \\ &= \int_0^r 2\pi\rho - \frac{\rho^2}{2} [-\cos(2\theta)]_0^{2\pi} d\rho = \pi r^2. \end{aligned}$$

## 6.4 Teorema de Gauss ou Teorema da divergência

O Teorema de Gauss, ou Teorema da divergência, exprime uma relação entre um integral triplo estendido a um sólido e um integral de superfície tomado sobre a superfície fronteira desse sólido.

**Teorema 6.4.1** *Sejam  $V$  um sólido limitado em  $\mathbb{R}^3$  por uma superfície fechada  $S$  e  $n$  o vector normal unitário orientado para o exterior de  $S$ . Se  $F$  é uma função vectorial continuamente diferenciável definida em  $V$ , tem-se*

$$\iiint_V (\operatorname{div} F) dx dy dz = \iint_S F \cdot n dS.$$

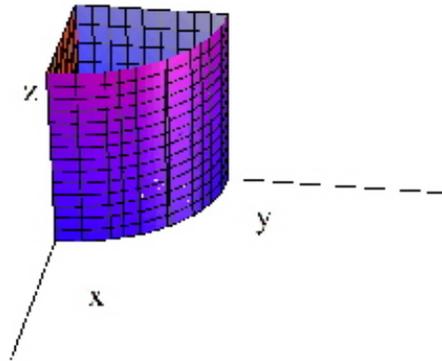
**Exemplo 6.4.2** *Calcular o fluxo de  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  para o exterior do cubo  $C$  formado pelos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 1$ , e  $z = 1$ , utilizando o Teorema da divergência.*

**Resolução:** Assim

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot n \, dS &= \iiint_C (\operatorname{div} F) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 3 \, dx \, dy \, dz = 3. \end{aligned}$$

**Exemplo 6.4.3** Determinar o fluxo de  $F(x, y, z) = (xz, xy, yz)$  para o exterior da superfície  $S$ , situada no 1º octante e formada pelo cilindro  $x^2 + y^2 = r^2$  e os planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $z = h$ .

**Resolução:** Graficamente



$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_S (\operatorname{div} F) \, dx \, dy \, dz = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_0^h (x+y+z) \, dz \, dy \, dx.$$

Passando para coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
 \iint_S F \cdot n \, dS &= \int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^h (\rho \cos \theta + \rho \operatorname{sen} \theta + z) \rho \, dz d\theta d\rho \\
 &= \int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ h\rho^2 (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) + \frac{h^2}{2}\rho \right] d\theta d\rho \\
 &= \int_0^r \left( 2h\rho^2 + \frac{\pi h^2}{4}\rho \right) d\rho = hr^2 \left( \frac{2r}{3} + \frac{\pi h}{8} \right).
 \end{aligned}$$

## 6.5 Exercícios

1. Determine uma parametrização para:

- a) a superfície de revolução de um cone de altura  $b > 0$  e gerado pela recta  $z = x, y = 0$ ;
- b) a superfície esférica de centro na origem e raio  $r$ ;
- c) a superfície definida por  $x + 2y + 3z = 4$ ;
- d) a superfície caracterizada em coordenadas rectangulares por  $x^2 + y^2 + z^2 = 16 \wedge z \geq 0$ ;
- e) a superfície caracterizada em coordenadas rectangulares por  $x^2 + y^2 + z^2 = 16 \wedge y < 0$ ;

2. Determine em coordenadas cartesianas (rectangulares) a condição que define:

a) a superfície definida parametricamente por

$$g(u, v) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases},$$

para  $(u, v) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$ ;

b) a superfície definida parametricamente por

$$g(u, v) = \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \\ z = u \end{cases},$$

para  $(u, v) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1 \wedge 0 \leq v < 2\pi\}$ ;

c) a superfície definida parametricamente por

$$g(u, v) = \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \\ z = u^2 \end{cases},$$

para  $(u, v) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1 \wedge 0 \leq v < 2\pi\}$ ;

3. Calcule a integral de superfície

$$\iint_S xy \, dS,$$

com  $S$  a superfície cilíndrica  $x^2 + y^2 = 4$  e  $-1 \leq z \leq 1$ .

4. Calcule a área da superfície  $S$  definida por  $z = x^2 + y^2$  com  $z \leq 1$ .

5. Calcule o fluxo do campo de forças

$$F(x, y, z) = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$$

através da superfície  $S$  definida por  $z = 1 - x^2 - y^2 \wedge z \geq 0$  orientada para fora.

6. Mostre que o valor do fluxo do campo de forças  $F(x, y, z) = z \vec{e}_3$  através da superfície esférica  $S$  definida por  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  orientada para fora, é  $36\pi$ .

7. Considere a circunferência  $C$  de equação  $x^2 + y^2 = 4$  limitada superiormente pela superfície  $S$  de equação  $z - 4 = -(x^2 + y^2)$  e um campo vectorial  $F(x, y, z) = (x^2y, yz, xz)$ .

Mostre que

$$\oint_C x^2y \, dx + yz \, dy + xz \, dz = \iint_S (-y, -z, -x^2) \cdot n \, dS = 4\pi.$$

8. Transforme o integral de linha

$$\int_C x^2yz \, dx + xy^2 \, dy + (x + z) \, dz$$

num integral duplo, sabendo que  $C$  é a circunferência de centro na origem e raio  $R$ .

9. Determine o trabalho efectuado pelo campo vectorial

$$F(x, y, z) = x^2 \vec{e}_1 + 4xy^3 \vec{e}_2 + y^2x \vec{e}_3$$

numa partícula que percorre, no sentido positivo, o contorno do rectângulo situado no plano  $z = y$  de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 3, 3)$  e  $(0, 3, 3)$ .

**10.** Determine, utilizando o Teorema da divergência, o integral de superfície

$$\iint_S F(x, y, z) \cdot n \, dS,$$

para as superfícies e campos vectoriais indicados:

- a)  $S$  é a região limitada pelos planos coordenados e pelos planos  $x = 1$ ,  $y = 1$  e  $z = 1$ , com  $F(x, y, z) = (2x - z, x^2, -xz^2)$ .
- b)  $S$  é a região limitada pelo cilindro  $z = 4 - x^2$  e pelos planos  $y = 5$ ,  $XOY$  e  $XOZ$ , com  $F(x, y, z) = (x^3 + \operatorname{sen} z, x^2y + \cos z, e^{x^2+y^2})$ .
- c)  $S$  é a região limitada pelo cilindro circular reto  $x^2 + y^2 = 4$  e pelos planos  $z = 0$  e  $z = 3$ , sendo  $F(x, y, z) = x^3 \vec{e}_1 + y^3 \vec{e}_2 + z^3 \vec{e}_3$ .