

UNIVERSIDADE DE ÉVORA
ESCOLA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA RURAL



RESISTÊNCIA DE MATERIAIS

ESFORÇO TRANSVERSO

(Apontamentos para uso dos Alunos)

JOSÉ OLIVEIRA PEÇA

ÉVORA

2016

INDICE

Nota do autor	3
1. Tensões tangenciais em planos paralelos à superfície neutra.....	4
1.1. Esforço de escorregamento em planos longitudinais	10
1.1.1 Problemas resolvidos	10
1.1.2. Problemas não resolvidos	13
1.2. Esforço de escorregamento em peças mistas.....	13
1.2.1. Exemplo resolvido.....	16
1.2.2. Problemas não resolvidos	17
2. Tensões tangenciais em secções transversais	19
2.1. Em peças abertas de paredes finas.....	20
2.1.1. Problemas resolvidos	25
2.1.2. Problemas não resolvidos	32
2.2. Em peças fechadas de paredes finas	34
2.2.1. Problema resolvido	36
2.2.2. Problemas não resolvidos	36
2.3. Centro de corte em peças de paredes finas	37
2.3.1. Problemas resolvidos	38
2.3.2. Problemas não resolvidos	43
3. Estado de tensão sob momento flector e esforço transversal	44
3.1. Problema resolvido	45
3.2. Problemas não resolvidos	46
4. Caderno de problemas	48
4.1. Esforço de escorregamento em planos longitudinais	48
4.1.1 Esforço de escorregamento em peças mistas.....	54
4.2. Tensões tangenciais em secções transversais	55
4.3. Centro de corte em secções de paredes finas.....	59
4.4. Estado de tensão em flexão simples	64
Referências	71

Nota do autor

Tendo sido interrompido, a partir do ano lectivo de 2015/2016, o 1º Ciclo do Curso de Engenharia Civil, o autor resolveu reunir toda a informação que foi disponibilizada aos alunos da disciplina de Resistência de Materiais, durante os 8 anos em que o curso funcionou na Universidade de Évora.

O presente trabalho versa o tema do *Esforço transverso* da Resistência de Materiais e é uma edição revista e acrescentada das edições que foram publicadas em 2013; 2009 e 2008.

No curso, a disciplina de Resistência de Materiais tinha a duração de um único semestre (4º semestre), pelo que foi necessário seleccionar os temas mais relevantes a ensinar sobre *Esforço transverso*.

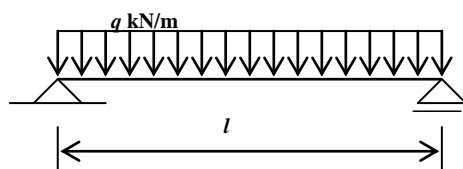
Nos diversos pontos deste trabalho são apresentados os aspectos formais importantes, completados com problemas resolvidos e não resolvidos de aplicação.

No último ponto estão incluídos todos os exercícios de aplicação sobre *Esforço transverso* abordados nas aulas práticas e os que foram alvo de avaliação nas provas de frequência e de exame.

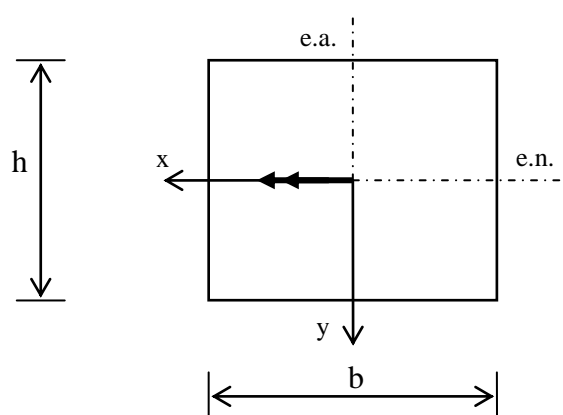
1. Tensões tangenciais em planos paralelos à superfície neutra

Recorre-se a um exemplo para apresentar as tensões tangenciais em planos paralelos à superfície neutra (*shearing stress on longitudinal sections*):

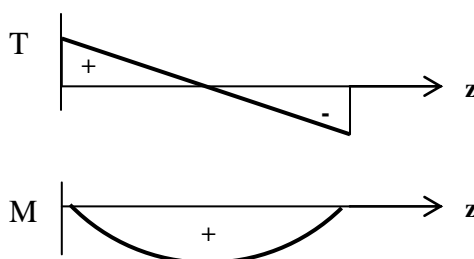
Admita a seguinte barra sujeita a flexão simples (*transverse bending*) ($M \neq 0$; $T \neq 0$; $N = 0$; $M_t = 0$):



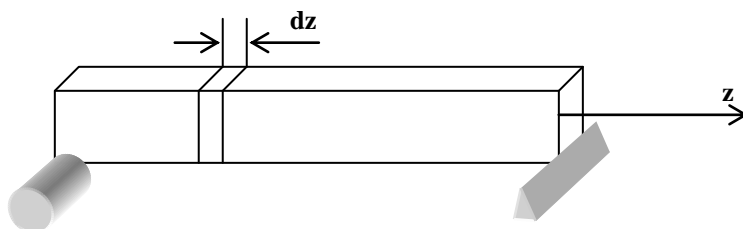
Cuja secção transversal está representada na figura seguinte:

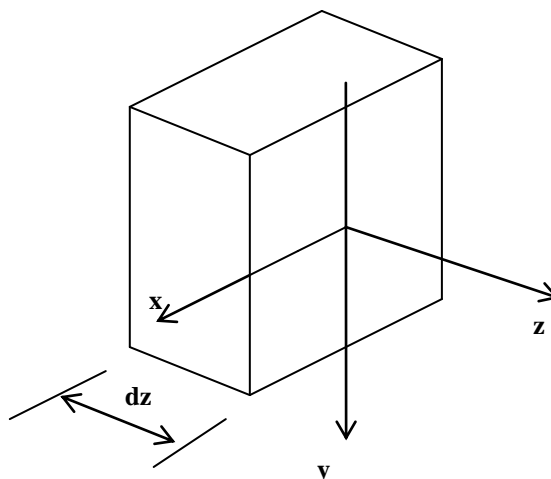


A figura seguinte mostra os diagramas de esforços na barra (*shearing force and bending moment diagrams*):

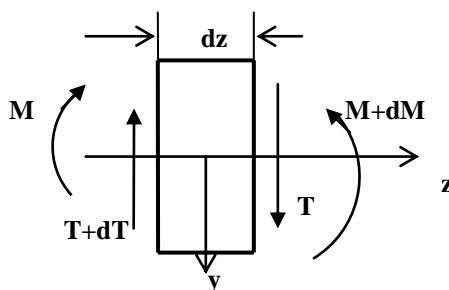


Admitamos um segmento transversal, infinitesimal, de barra com comprimento dz :





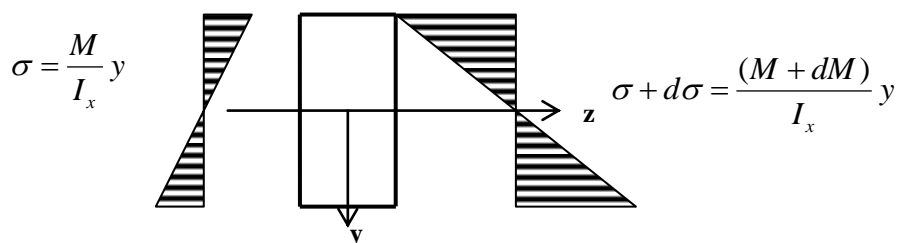
Atendendo à variação do esforço transversal e momento flector, acima indicados no diagrama de esforços, podemos admitir a figura seguinte;



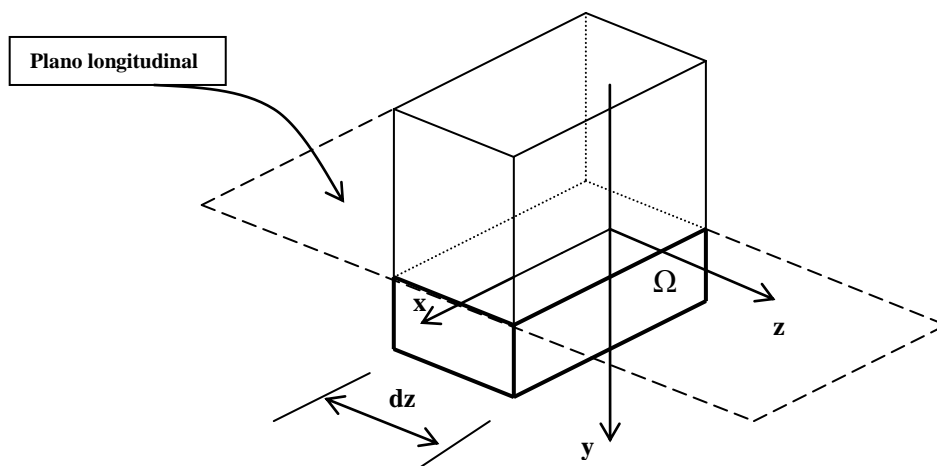
Na figura anterior dM e dT , são as variações do momento flector e do esforço transversal no elemento infinitesimal de comprimento dz .

Admitamos que a peça é linear, isto é, a barra tem um comprimento muito grande relativamente à altura da secção ($l \gg h$), para que possamos desprezar o efeito do esforço transversal na distribuição das tensões normais (*normal stresses*) nas secções, devido à flexão.

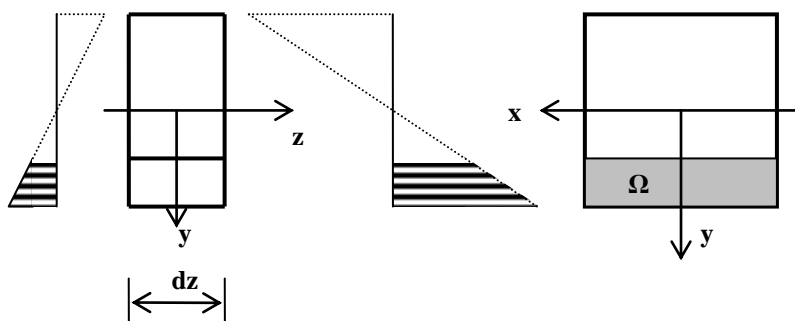
A distribuição das tensões normais nas secções está representada na figura seguinte:



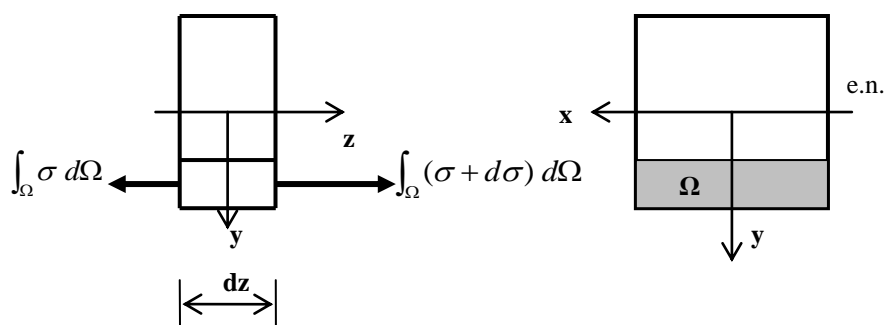
Admitamos o segmento representado na figura, obtido através da intercepção do segmento transversal por um plano, paralelo ao plano xz , doravante denominado plano longitudinal.



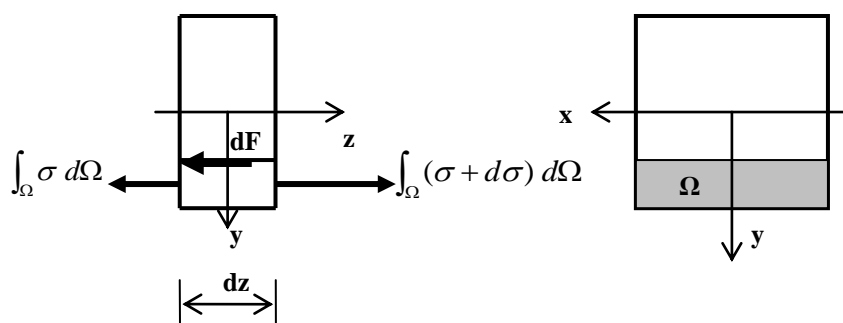
A figura seguinte mostra a distribuição de tensões normais devido à flexão, no segmento atrás definido e cuja secção transversal é Ω :



As tensões normais integradas na área Ω correspondem às forças axiais representadas na figura seguinte:



O equilíbrio de forças do referido segmento pressupõe a existência de uma força dF , tangencialmente ao plano longitudinal:



$$dF = \int_{\Omega} d\sigma d\Omega$$

Uma vez que em flexão recta:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y \Rightarrow d\sigma = \frac{dM_x}{I_x} y$$

$$dF = \int_{\Omega} \frac{dM_x}{I_x} y d\Omega = \frac{dM_x}{I_x} \int_{\Omega} y d\Omega = \frac{dM_x}{I_x} S_x$$

em que S_x é o **momento estático** (*static moment*) da área Ω da secção, relativamente ao eixo neutro.

Verifica-se que a presença de um momento flector não constante (ou seja esforço transversal diferente de zero) ao longo da barra, provoca o aparecimento de tensões tangenciais τ_{yz} no plano longitudinal. São essas tensões tangenciais que, no referido plano, induzem a força dF .

$$dF = \tau_{yz} b dz = \frac{dM_x}{I_x} S_x$$

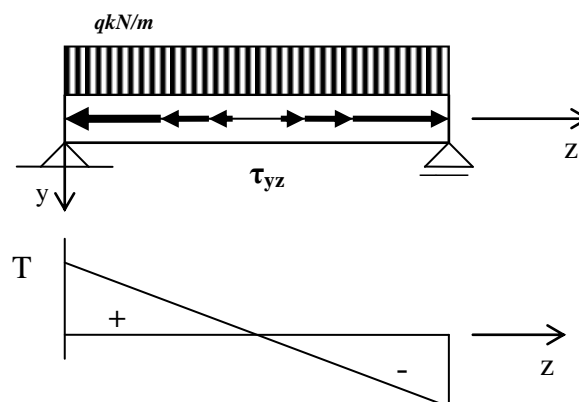
Da expressão anterior tira-se o valor da tensão tangencial τ_{yz} no plano longitudinal:

$$\tau_{yz} = \frac{S_x}{b I_x} \frac{dM_x}{dz}$$

Atendendo à noção de esforço transversal, obtém-se finalmente:

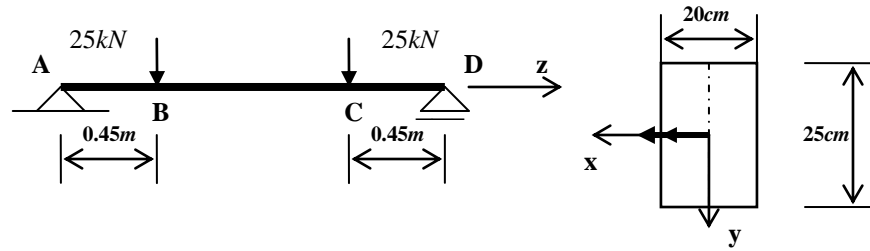
$$\tau_{yz} = \frac{S_x}{b I_x} T_y$$

O valor da tensão tangencial τ_{yz} é máximo no local da peça onde o esforço transversal for máximo e no plano longitudinal da peça correspondente ao valor máximo do momento estático; esse plano longitudinal é a superfície neutra (*neutral layer*).



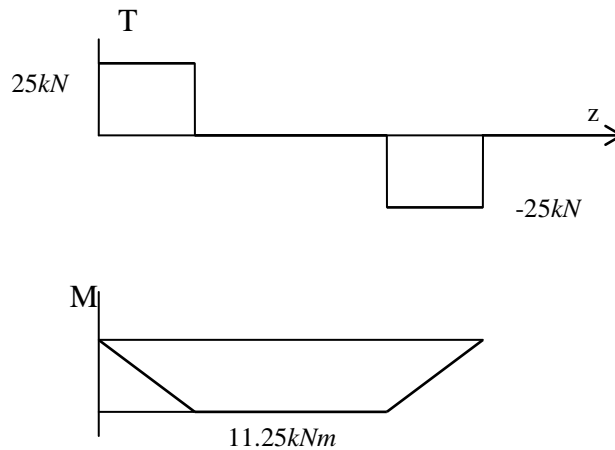
Problema resolvido

Admita a barra de secção rectangular carregada como mostra a figura seguinte:



- Determinar as tensões normais máximas;
- Determinar as tensões tangenciais máximas.

Resolução

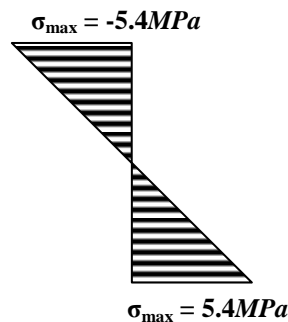


a)

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} \quad \text{com} \quad W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = 2083.3 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Substituindo: $\sigma_{\max} = 5.4 \text{ MPa}$

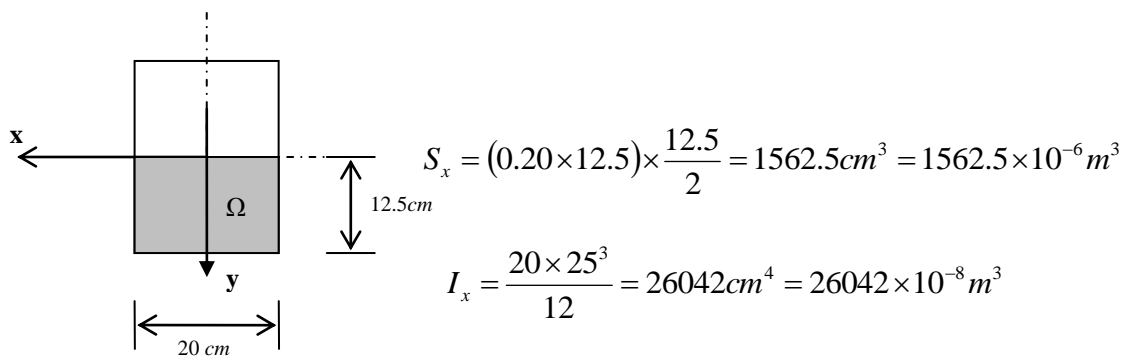
Em qualquer secção transversal da barra situada entre B e C, temos a seguinte distribuição de tensões normais:



b)

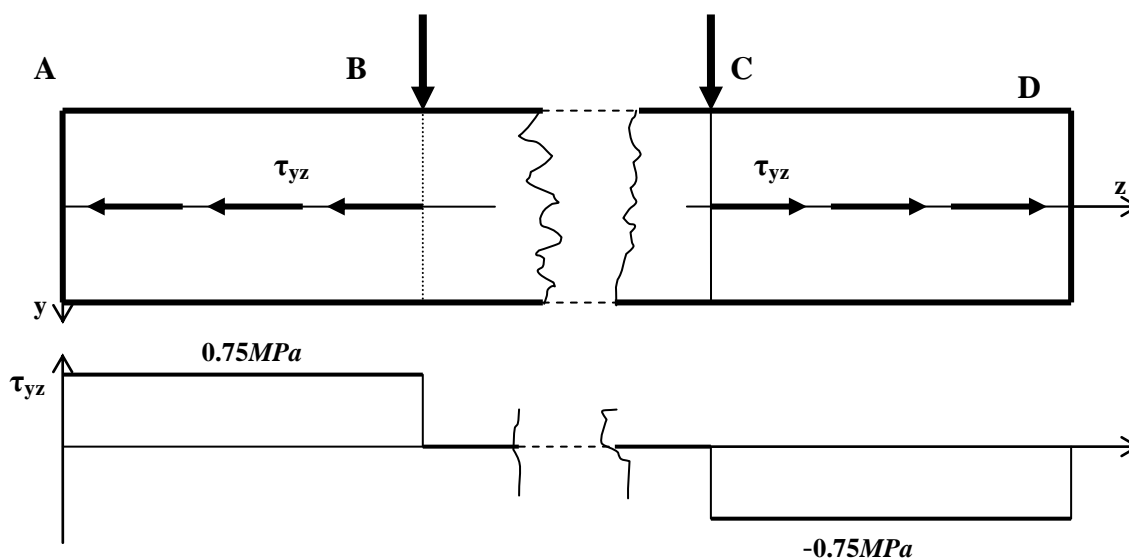
$$\tau_{yz} = \frac{S_x}{bI_x} T_y$$

O valor da tensão tangencial τ_{yz} é máximo na superfície neutra (*neutral layer*), uma vez que S_x toma o valor máximo em relação ao eixo neutro:



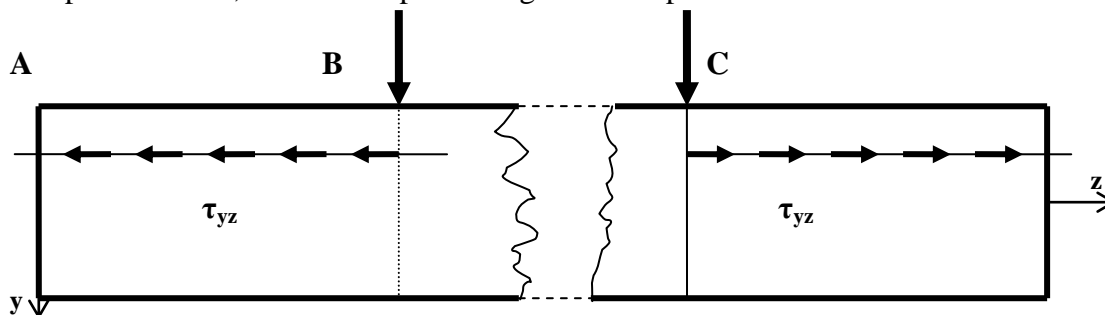
$$\tau_{yz} = \frac{S_x}{bI_x} T_y = \frac{1562.5 \times 10^{-6}}{0.20 \times 26042 \times 10^{-8}} \times 25 = 750 \text{ kPa} = 0.75 \text{ MPa}$$

Na superfície neutra da peça, entre A e B e entre C e D, actuam tensões tangenciais de valor igual a 0.75 MPa . A figura seguinte mostra a tensão tangencial τ_{yz} aplicada pela parte superior da barra sobre a parte inferior, ao nível da superfície neutra:



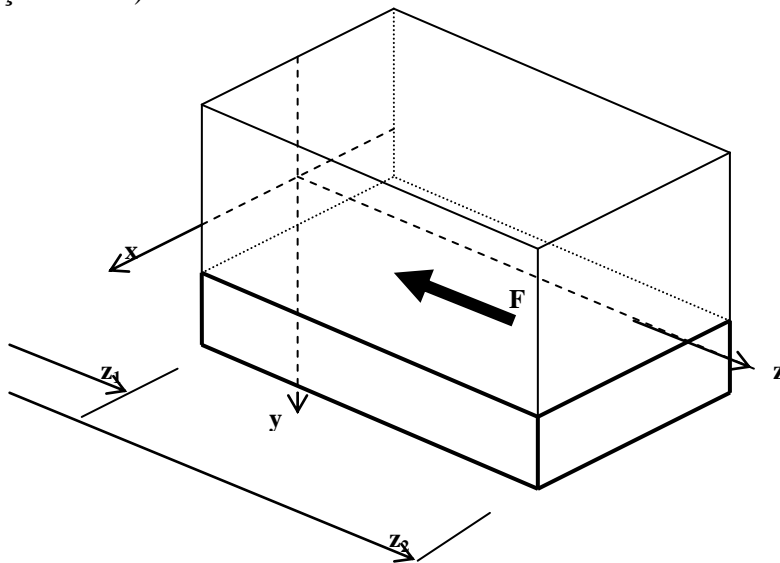
Em outros planos longitudinais da barra (entre A e B e entre C e D), paralelas à superfície neutra actuam igualmente tensões tangenciais. O valor dessas tensões diminui com o afastamento à superfície neutra, até que nas faces superior e inferior da barra, o valor é zero.

A figura seguinte mostra a tensão tangencial τ_{yz} aplicada pela parte superior da barra sobre a parte inferior, ao nível do plano longitudinal representada.



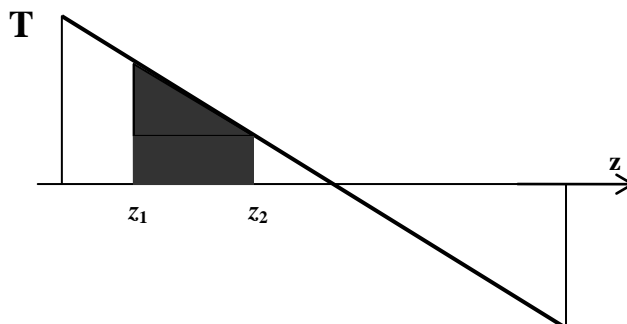
1.1. Esforço de escorregamento em planos longitudinais

Admitamos que temos um comprimento de barra entre z_1 e z_2 no qual queremos conhecer a força de escorregamento (*shearing force*) num plano longitudinal (paralela à secção neutra)



$$F = \int_{z_1}^{z_2} \tau_{zy} \times b \times dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{S_x}{I_x} T_y dz = \frac{S_x}{I_x} \int_{z_1}^{z_2} T_y dz$$

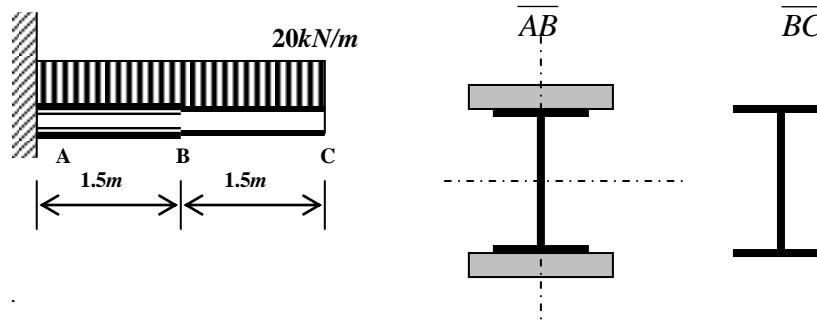
Na expressão anterior, o integral $\int_{z_1}^{z_2} T_y dz$ representa a área definida pelo diagrama de esforço transverso entre z_1 e z_2 :



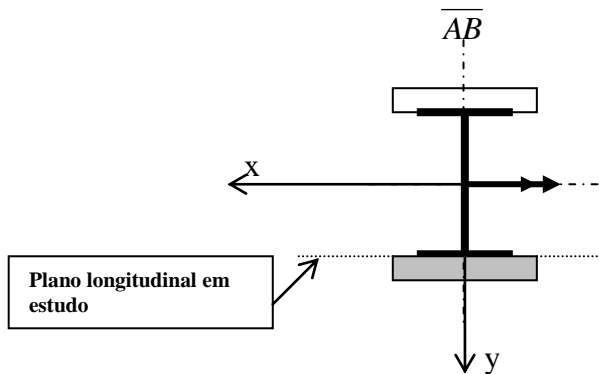
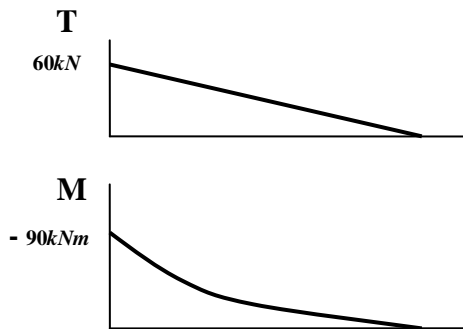
1.1.1 Problemas resolvidos

Problema 1 - Na consola representada na figura, as chapas acompanham o perfil até metade do vão. Determine os esforços para os quais devem ser dimensionadas as ligações entre as chapas e o perfil INP.

As chapas têm 1cm de espessura e 12cm de largura; o perfil é INP200



Resolução

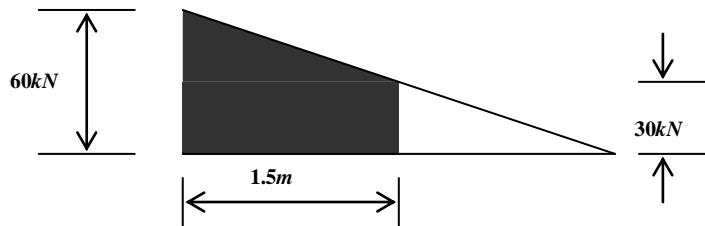


Dada a simetria do problema, apenas se torna necessário conhecer o esforço de escorregamento no plano indicado, uma vez que no plano simétrico em relação ao plano neutro a força de escorregamento tem a mesma intensidade.

$$\text{Atendendo a que: } F = \frac{S_x}{I_x} \int_0^{1.5} T_y dz$$

$$S_x = (1 \times 12) \times 10.5 = 126 \text{ cm}^3$$

$$I_x = 2140 + 2 \times \left[\frac{12 \times 1^3}{12} + (12 \times 1) \times 10.5^2 \right] = 4786 \text{ cm}^4$$

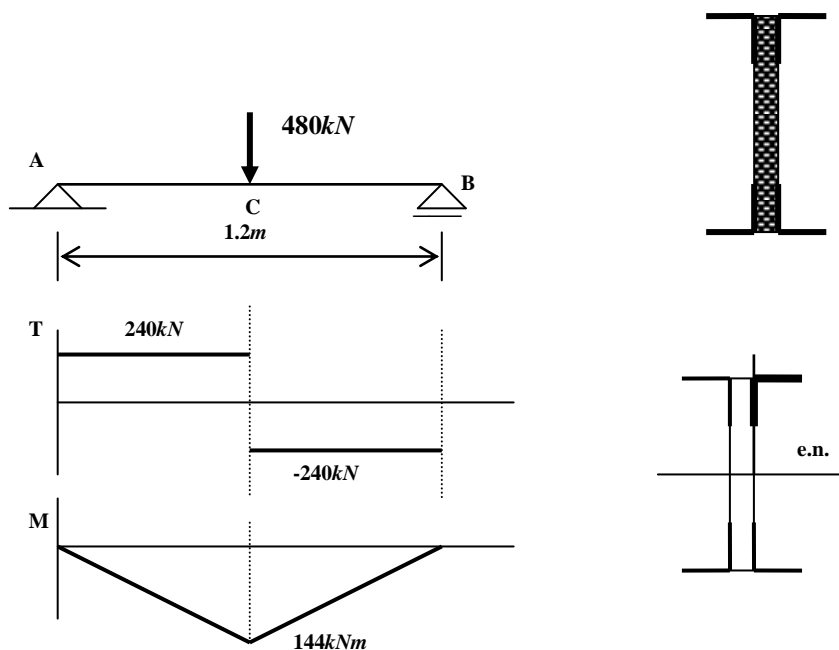


$$\int_0^{1.5} T_y dz = \frac{60 + 30}{2} \times 1.5 = 67.5 \text{ kNm}$$

Substituindo:

$$F = \frac{S_x}{I_x} \int_0^{1.5} T_y dz = \frac{126 \times 10^{-6}}{4786 \times 10^{-8}} \times 67.5 = 177.7 \text{ kN}$$

Problema 2 - A viga AB tem 1.2m de vão e suporta uma carga concentrada a meio vão de 480kN. A viga é construída ligando uma peça de secção rectangular de 12 mm × 400mm a quatro cantoneiras de abas iguais 100×100×10 (tabela anexa). Admitindo que todas as peças são de aço, determine o esforço a que tem de resistir cada uma das ligações.



S_x de uma cantoneira em relação ao eixo neutro:

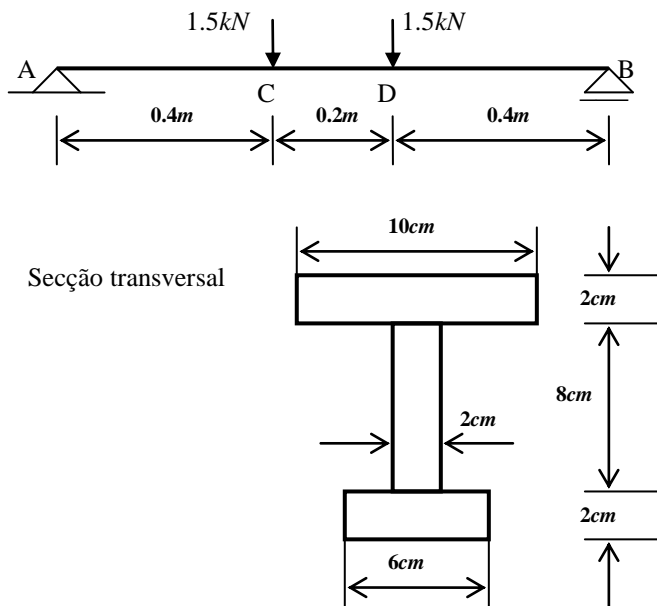
$$S_x = 19.2 \times (20 - 2.82) = 329.856 \text{ cm}^3$$

$$I_x = \frac{1.2 \times 40^3}{12} + 4 \times (177 + 19.2 \times 17.18^2) = 29775.704 \text{ cm}^4$$

$$F = \frac{S_x}{I_x} \int_{z_1}^{z_2} T_y dz = \frac{329.856}{29775.704} \int_0^{60} 240 dz = 0.01108 \times 240 \times 60 = 159.52 \text{ kN}$$

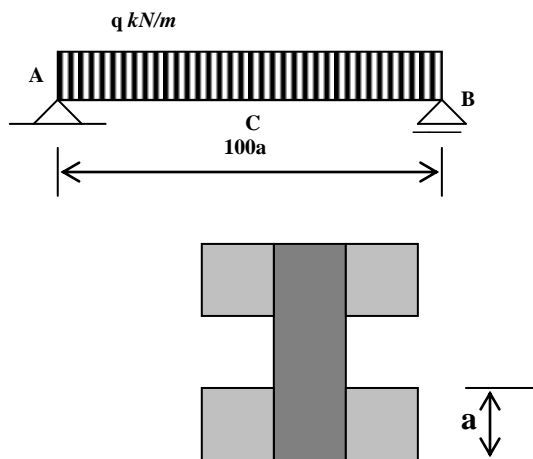
1.1.2. Problemas não resolvidos

P1.1) A viga AB é constituída por 3 peças coladas e está submetida ao carregamento indicado, o qual actua no seu plano de simetria. Determine o esforço a que a colagem terá de resistir entre as secções AC, CD e DB.



Resposta: Ligação entre a aba superior e a alma $F_{AC}=F_{DB}=5.78kN$; $F_{CD}=0$
 Ligação entre a aba inferior e a alma $F_{AC}=F_{DB}=4.85kN$; $F_{CD}=0$

P1.2) A viga AB tem $100 \times a$ de vão e suporta uma carga uniformemente distribuída q . A viga é construída ligando uma peça de secção rectangular $a \times 3a$ a quatro peças de secção quadrada $a \times a$. Determine o esforço a que tem de resistir cada uma das ligações.

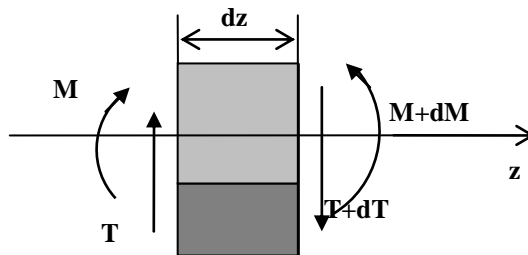


Resposta: Ligação entre cada uma das peças quadradas e a peça rectangular: $F_{AC}=F_{CB}=189.9 \times q \times a$ (kN)

1.2. Esforço de escorregamento em peças mistas

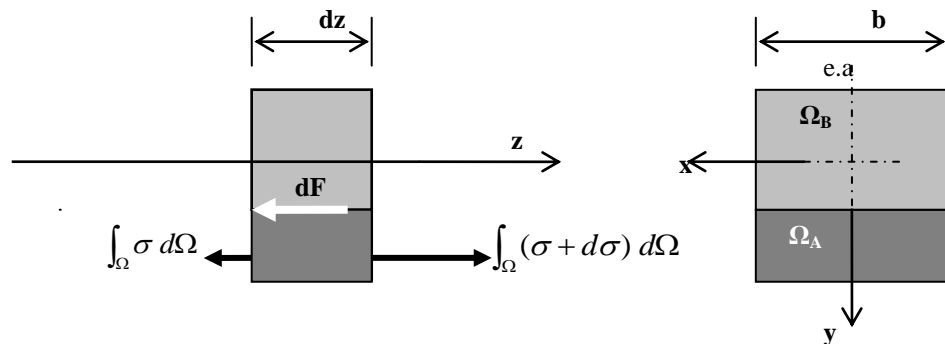
Analisa-se o caso mais simples de uma peça linear, de largura constante b , constituída por dois materiais de comportamento elástico linear sujeita a uma flexão recta em que é pertinente conhecer o esforço de escorregamento a que tem de resistir a ligação entre os dois materiais (A e B). Admitamos E_A e E_B os módulos de elasticidade dos materiais.

Como foi referido anteriormente o eixo neutro passa pelo centro de gravidade da secção ponderada com os módulos de elasticidade dos materiais que constituem a peça. Admitamos um segmento infinitesimal de barra com comprimento dz :



O equilíbrio de forças no segmento correspondente ao material **A**, fica:

$$\int_{\Omega} \sigma d\Omega$$



o que pressupõe a existência de uma força dF , tangencialmente ao plano longitudinal fronteira entre os dois materiais:

$$dF = \int_{\Omega_A} d\sigma_A d\Omega$$

Uma vez que em flexão de peças mistas:

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_{An} + \frac{E_B}{E_A} I_{Bn}} y$$

$$d\sigma_A = \frac{dM_x}{I_{An} + \frac{E_B}{E_A} I_{Bn}} y$$

$$dF = \frac{dM_x}{I_{An} + \frac{E_B}{E_A} I_{Bn}} \int_{\Omega_A} y d\Omega$$

$$dF = \frac{dM_x}{I_{An} + \frac{E_B}{E_A} I_{Bn}} S_{An}$$

S_{An} é o momento estático da área Ω_A da secção, relativamente ao eixo neutro;
 I_{An} e I_{Bn} são os momentos de inércia das secções A e B, respectivamente, em relação ao eixo neutro.

A força de corte elementar dF é fruto de uma distribuição de tensões de corte τ_{yz} no plano longitudinal fronteira entre os dois materiais, o qual tem ($b \times dz$) de área.

Assim:

$$dF = \tau_{yz} b dz = \frac{dM_x}{I_{An} + \frac{E_B}{E_A} I_{Bn}} S_{An}$$

A expressão anterior permite saber a variação, ao longo da peça, do esforço de escorregamento na secção longitudinal fronteira entre os dois materiais:

$$\frac{dF}{dz} = \frac{S_{An}}{I_{An} + \frac{E_B}{E_A} I_{Bn}} \frac{dM_x}{dz}$$

Atendendo à noção de esforço transversal, obtém-se:

$$\frac{dF}{dz} = \frac{S_{An}}{I_{An} + \frac{E_B}{E_A} I_{Bn}} T_y$$

Admitindo um comprimento l_1 de barra no qual queremos conhecer a força de escorregamento no plano longitudinal fronteira entre os dois materiais:

$$F = \frac{S_{An}}{I_{An} + \frac{E_B}{E_A} I_{Bn}} \int_0^{l_1} T_y dz$$

Na expressão anterior, o integral $\int_0^{l_1} T_y dz$ representa a área definida pelo diagrama de esforço transversal entre 0 e l_1 .

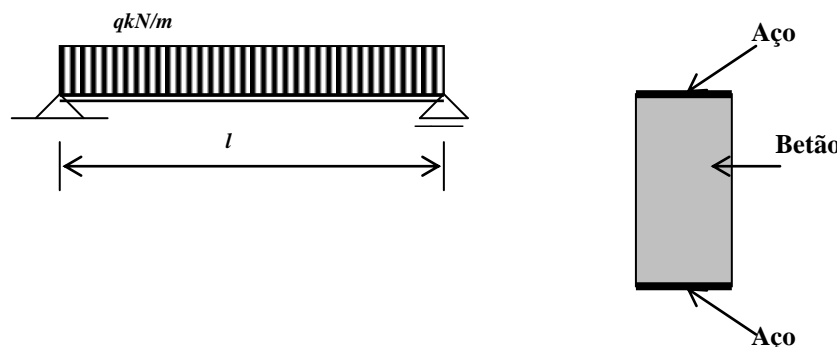
O mesmo valor de esforço de escorregamento seria obtido recorrendo à expressão seguinte:

$$F = \frac{S_{Bn}}{I_{Bn} + \frac{E_A}{E_B} I_{An}} \int_0^{l_1} T_y dz$$

S_{Bn} é o momento estático da área Ω_B da secção, relativamente ao eixo neutro.

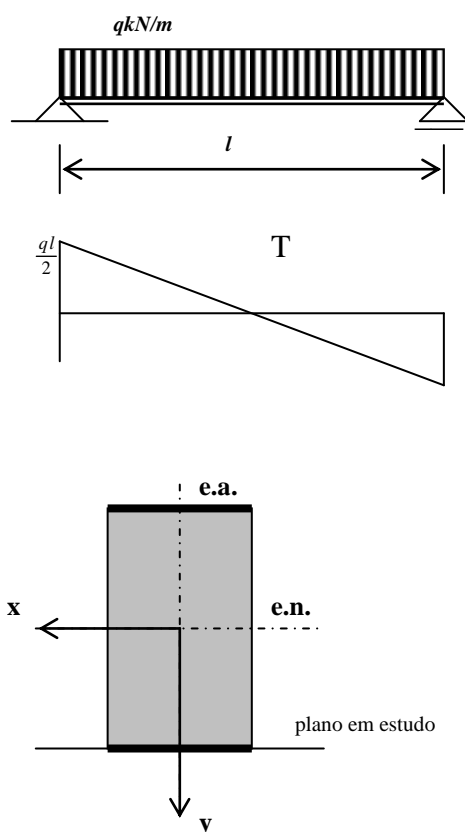
1.2.1. Exemplo resolvido

A viga representada na figura é constituída por betão e reforçada por duas chapas de aço colocadas como se indica. Calcule o esforço de escorregamento a que têm que resistir cada uma das ligações aço-betão. Considere que o módulo de elasticidade de aço (E_a) é 10 vezes o módulo de elasticidade do betão (E_b).



Admita que as chapas têm largura b e espessura $0.1b$. A peça de betão tem largura b e altura $2b$.

Resolução:



Por razões de simetria da secção da peça, o eixo neutro coincide com o eixo de simetria.

Cálculo do momento de inércia da secção em relação ao eixo neutro:

$$I_{An} = 2 \left[\frac{b \left(\frac{b}{10} \right)^3}{12} + \frac{b^2}{10} \left(b + \frac{b}{20} \right)^2 \right] = 0.2207b^4$$

$$I_{Bn} = \frac{b(2b)^3}{12} = 0.667b^4$$

Cálculo do momento estático da secção da chapa de aço inferior, em relação ao eixo neutro.

$$S_{\Omega_{An}} = b \frac{b}{10} \left(b + \frac{b}{20} \right) = 0.105b^3$$

Atendendo à expressão:

$$F = \frac{S_{An}}{I_{An} + \frac{E_B}{E_A} I_{Bn}} \int_0^{l_1} T_y dz$$

Obtém-se:

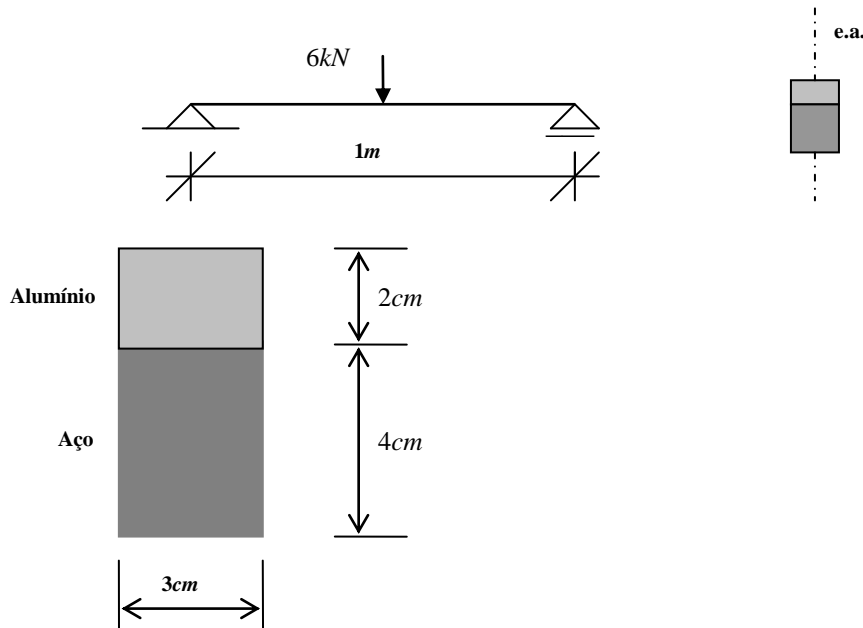
$$F = \frac{0.3654}{b} \int_0^{l_1} T_y dz$$

Integrando entre 0 e $l/2$, obtém-se:

$$F = \frac{0.3654}{b} \int_0^{\frac{l}{2}} T_y dz = \frac{0.3654}{b} \times \frac{ql}{2} \times \frac{l}{2} = 0.0457 \frac{ql^2}{b}$$

1.2.2. Problemas não resolvidos

P1.3) Uma barra de alumínio e uma barra de aço, são unidas firmemente para formar uma viga mista. Admita que o módulo de elasticidade do aço é $200GPa$ e o módulo de elasticidade do alumínio é $70GPa$.

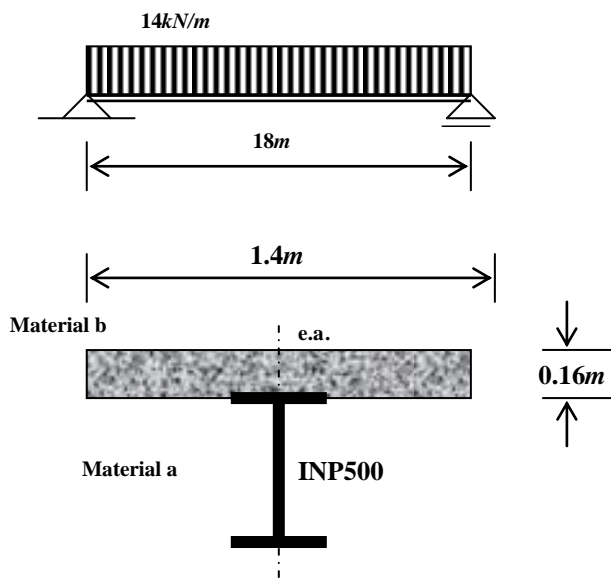


a) Com a barra submetida à flexão, como se mostra na figura, determine o eixo neutro.

- b) Com a barra submetida à flexão, como se mostra na figura, calcule o maior valor de tensão normal no alumínio.
 c) Determine o esforço de escorregamento para o qual deve ser dimensionado a ligação entre os dois materiais.

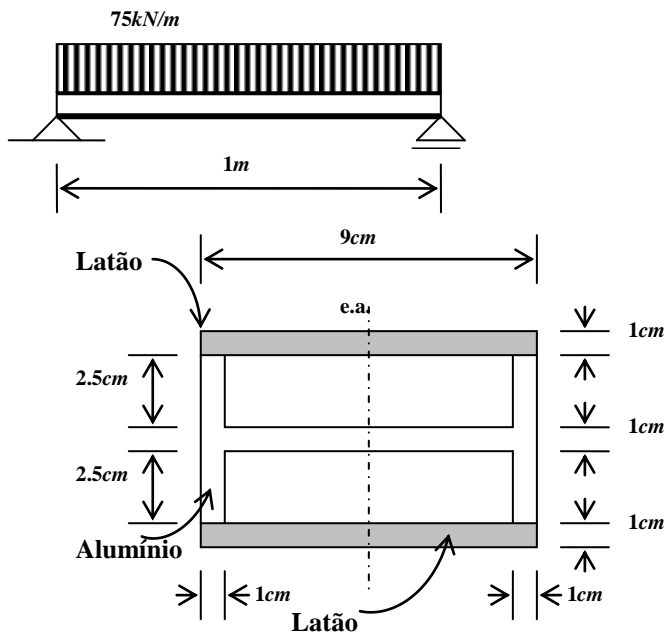
Resposta: b) $\sigma_{al} = - 56.9MPa$; c) $F = 24.53kN$

P1.4) Considere a peça mista de betão e aço ($E_b/E_a=0.1$). Determine os esforços para os quais devem ser dimensionados os elementos de ligação.



Solução: $F = 1049kN$

P1.5) A viga representada na figura é constituída por um perfil de alumínio reforçado por duas barras de latão colocadas como se indica.



Considere:

	Alumínio	Latão
Módulo de elasticidade	70GPa	105Gpa
Valor de cálculo da tensão resistente	100MPa	160MPa

a) Considerando apenas o momento flector, verifique a segurança da viga, quer no latão quer no alumínio.

b) Calcule o valor do esforço de escorregamento a que têm que resistir a ligação de cada uma das barras de latão na ligação com o perfil de alumínio.

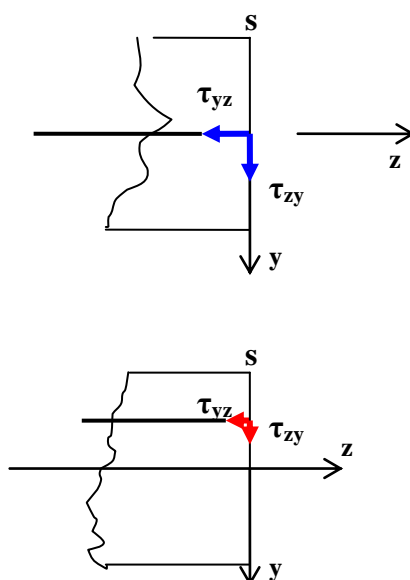
Resposta: a) $\sigma_{al} = 76.1Mpa$, verifica; $\sigma_{latão} = 152.2Mpa$, verifica; b) $F \approx 120kN$

2. Tensões tangenciais em secções transversais

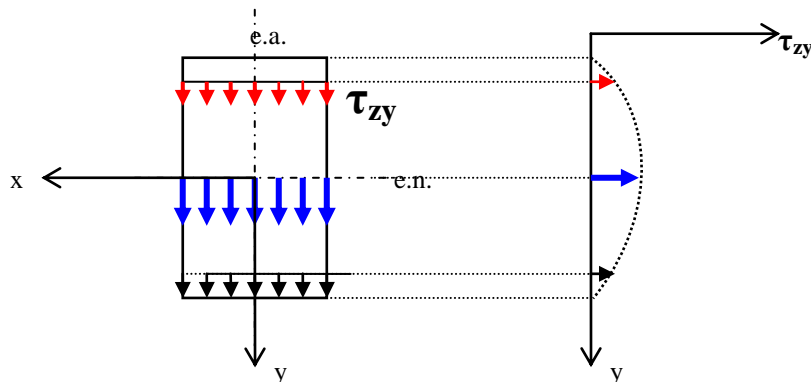
Atendendo-se à **condição de reciprocidade das tensões tangenciais** (*condition of equality of shearing stresses*) o qual afirma que *as componentes das tensões tangenciais que actuam em duas facetas ortogonais e são perpendiculares à aresta comum às duas facetas, são iguais e têm sentidos tais que convergem ambas para a aresta comum ou divergem ambas da mesma*.

A presença de tensões tangenciais τ_{yz} em planos longitudinais, vai implicar a existência de tensões tangenciais τ_{zy} em secções transversais (*shearing stress at cross sections*) da viga.

Numa qualquer secção s :



Assim na secção transversal \underline{s} haverá uma distribuição de tensões tangenciais, representando-se na figura seguinte:



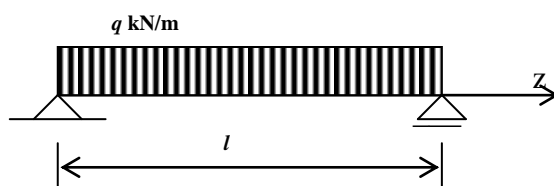
É a integração destas tensões tangenciais nesta secção que constitui o esforço transverso T na secção.

NOTAR

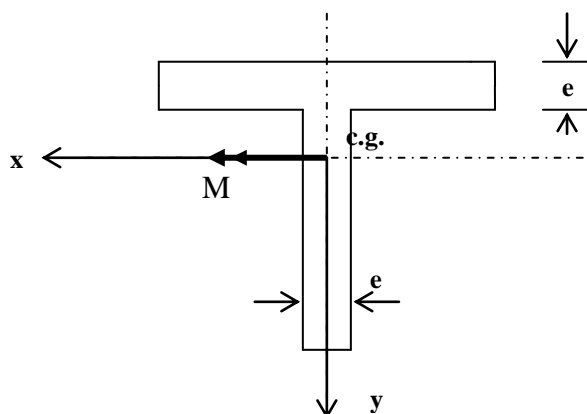
As tensões tangenciais são máximas junto de fibras situadas no centro da peça, local onde são mínimas ou nulas as tensões normais provocadas na flexão. Os valores máximos das tensões tangenciais são normalmente muito inferiores aos das tensões normais.

2.1. Em peças abertas de paredes finas

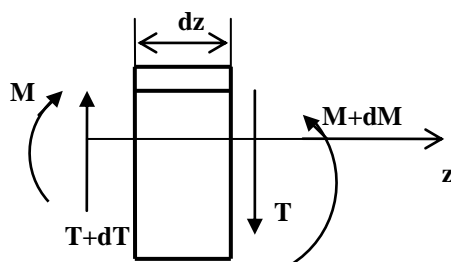
Admita a seguinte barra constituída por uma peça aberta de paredes finas (*thin-walled bar*) sujeita a flexão simples (*transverse bending*) ($M \neq 0$; $T \neq 0$; $N = 0$; $M_t = 0$):



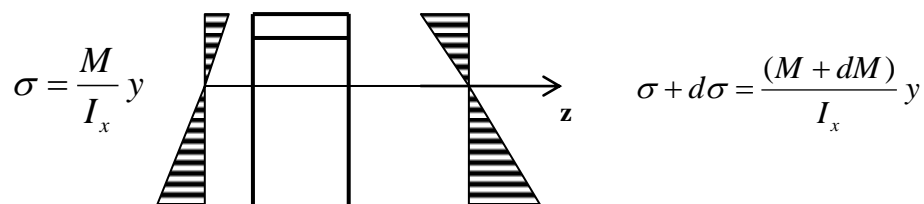
Cuja secção transversal está representada na figura seguinte:



Admitamos um segmento transversal, infinitesimal, de barra com comprimento dz . Atendendo à variação, ao longo da barra, do esforço transverso e momento flector, podemos admitir a figura seguinte:



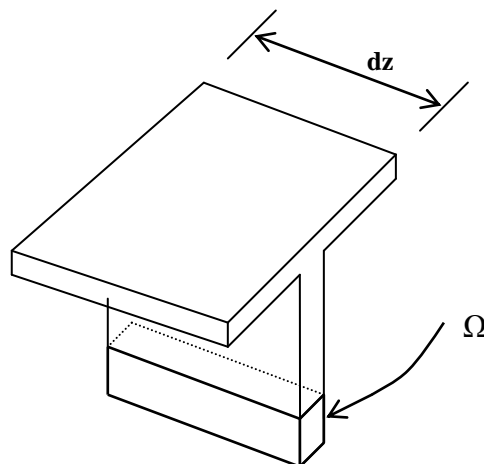
Na figura anterior dM e dT , são as variações do momento flector e do esforço transverso no elemento, transversal, infinitesimal de comprimento dz . A distribuição das tensões normais nas secções está representada na figura seguinte:



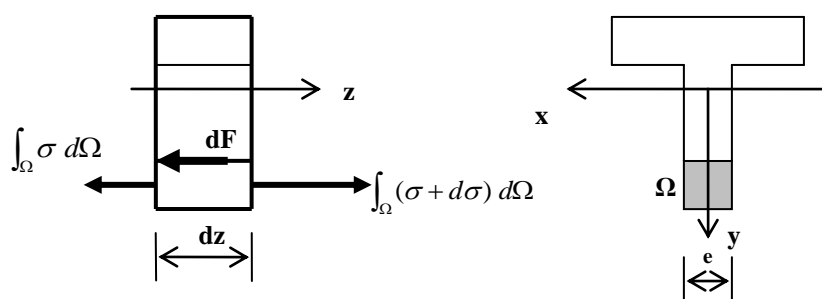
$$\sigma = \frac{M}{I_x} y \qquad \sigma + d\sigma = \frac{(M + dM)}{I_x} y$$

Admitamos o segmento representado na figura, obtido através da intercepção do segmento transversal por um plano, paralelo ao plano xz, doravante denominado plano longitudinal da alma.

:



O equilíbrio de forças do referido segmento, fica:



o que pressupõe a existência de uma força dF , tangencialmente ao plano longitudinal:

$$dF = \int_{\Omega} d\sigma d\Omega$$

Uma vez que em flexão:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y \Rightarrow d\sigma = \frac{dM_x}{I_x} y$$

$$dF = \int_{\Omega} \frac{dM_x}{I_x} y d\Omega = \frac{dM_x}{I_x} \int_{\Omega} y d\Omega = \frac{dM_x}{I_x} S_x$$

em que S_x é o **momento estático** (*static moment*) da área Ω da secção, relativamente ao eixo neutro.

A força de corte elementar dF é fruto de uma distribuição de tensões tangenciais τ_{yz} no plano longitudinal.

Assim:

$$dF = \tau_{yz} e dz = \frac{dM_x}{I_x} S_x$$

Da expressão anterior tira-se o valor da tensão de tangencial τ_{yz} no plano longitudinal da

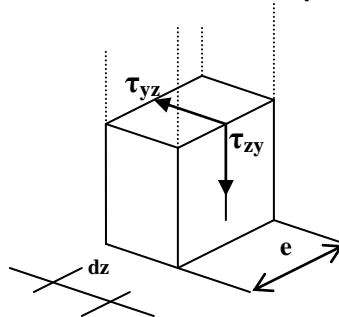
peça: $\tau_{yz} = \frac{S_x}{e I_x} \frac{dM_x}{dz}$

Atendendo à noção de esforço transverso, obtém-se finalmente:

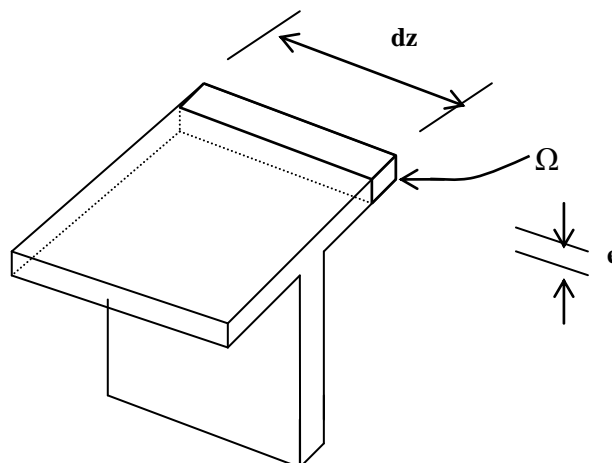
$$\tau_{yz} = \frac{S_x}{e I_x} T_y$$

O valor da tensão de tangencial τ_{yz} é máximo no local da peça onde o esforço transverso for máximo e no plano longitudinal da peça correspondente ao valor máximo do momento estático.

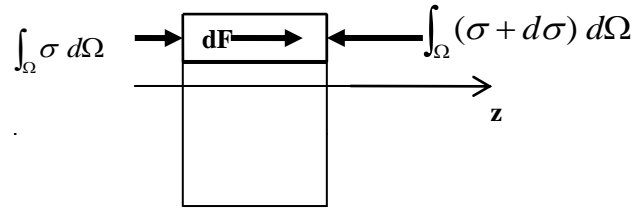
Atendendo à **condição de reciprocidade das tensões tangenciais**, na secção transversal \underline{s} haverá uma distribuição de tensões tangenciais τ_{zy} .



Todo o percurso de raciocínio apresentado será seguidamente repetido nas abas. Admitamos o segmento representado na figura, obtido através da intercepção do segmento transversal por um plano, paralelo ao plano yz, doravante denominado plano longitudinal da aba.



Uma vez que a aba está a compressão, o equilíbrio de forças do referido segmento, fica:



o que pressupõe a existência de uma força dF , tangencialmente ao plano longitudinal da aba:

$$dF = \int_{\Omega} d\sigma d\Omega$$

Uma vez que em flexão:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y \Rightarrow d\sigma = \frac{dM_x}{I_x} y$$

$$dF = \int_{\Omega} \frac{dM_x}{I_x} y d\Omega = \frac{dM_x}{I_x} \int_{\Omega} y d\Omega = \frac{dM_x}{I_x} S_x$$

em que S_x é o **momento estático** (*static moment*) da área Ω da secção, relativamente ao eixo neutro.

A força elementar dF é fruto de uma distribuição de tensões tangenciais τ_{xz} no plano longitudinal da aba.

Assim:

$$dF = \tau_{xz} e dz = \frac{dM_x}{I_x} S_x$$

Da expressão anterior tira-se o valor da tensão tangencial τ_{xz} no plano longitudinal da

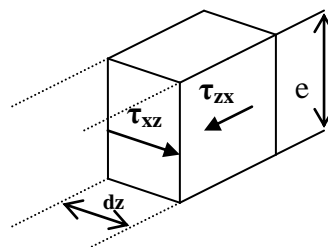
$$\text{aba: } \tau_{xz} = \frac{S_x}{e I_x} \frac{dM_x}{dz}$$

Atendendo à noção de esforço transverso, obtém-se finalmente:

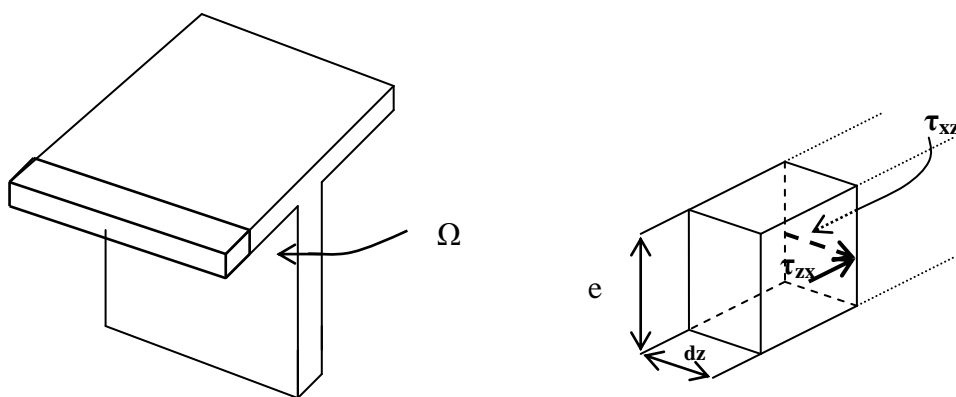
$$\tau_{xz} = \frac{S_x}{e I_x} T_y$$

O valor da tensão tangencial τ_{xz} é máximo no local da peça onde o esforço transverso for máximo e no plano longitudinal da aba correspondente ao valor máximo do momento estático.

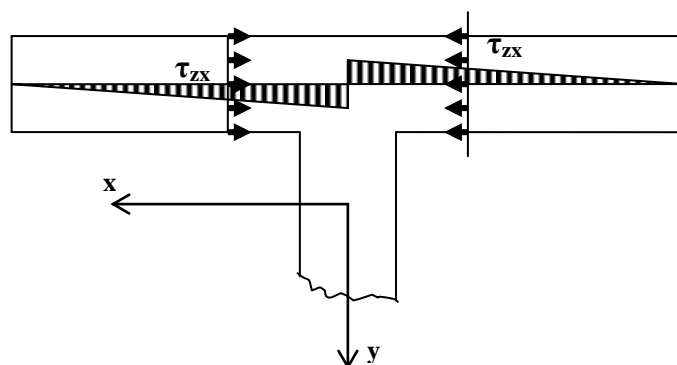
Atendendo à **condição de reciprocidade das tensões tangenciais**, na secção transversal \underline{s} haverá uma distribuição de tensões tangenciais τ_{zx} .



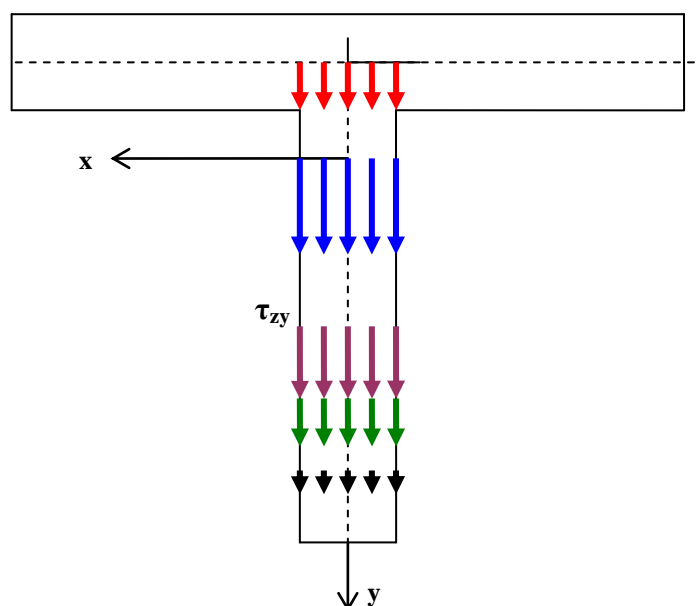
A repetição do raciocínio para no segmento longitudinal oposto, conduz a tensões tangenciais representadas na figura seguinte:



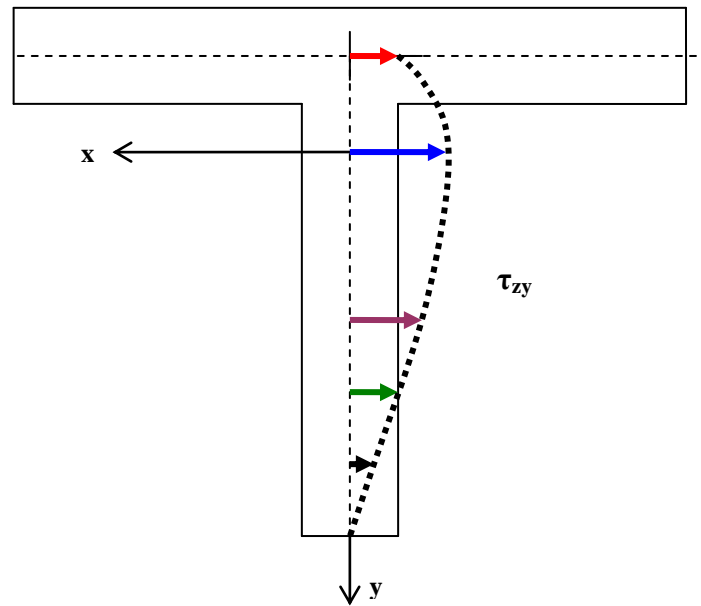
A figura seguinte mostra (setas) as tensões tangenciais em determinado nível da secção transversal da aba. As tensões são nulas em ambas as extremidades da aba, crescendo linearmente para o centro. A distribuição triangular representa o valor das tensões em cada nível da secção da aba.



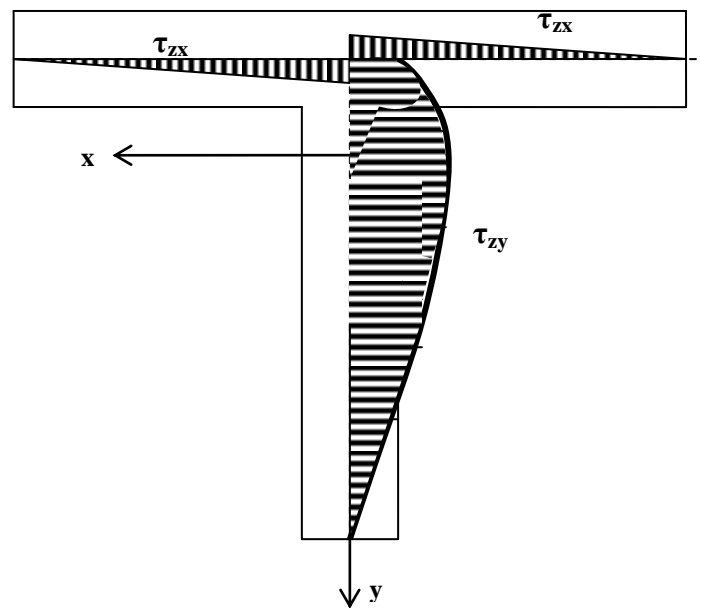
A figura seguinte mostra (setas) as tensões tangenciais em determinados níveis da secção transversal da alma. No topo da alma, as tensões são em valor absoluto a soma das tensões no centro da aba. As tensões aumentam, atingindo o máximo no eixo neutro e, de seguida vão diminuindo até serem nulas na extremidade inferior da alma.



A figura seguinte mostra as tensões rebatidas lateralmente para se desenhar a distribuição (curva) das tensões ao longo da secção da alma.

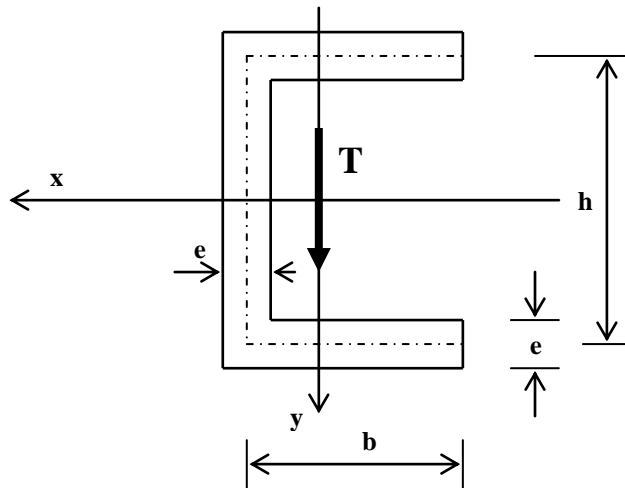


Na figura seguinte mostra-se a distribuição das tangenciais em toda a secção.



2.1.1. Problemas resolvidos

Problema 1 - Determinar a distribuição de tensões tangenciais na secção U (*channel*) submetida a flexão simples (*transverse bending*). Determinar a resultante dessas tensões tangenciais



Resolução

Cálculo do momento de inércia I_x

$$I_x = 2 \left[\frac{\left(b + \frac{e}{2}\right) e^3}{12} + \left(b + \frac{e}{2}\right) e \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right] + \frac{e(h-e)^3}{12}$$

Desenvolvendo a expressão, fica:

$$I_x = be \left(\frac{e^2}{6} + \frac{h^2}{2} \right) + eh \left(\frac{h^2}{12} + \frac{e^2}{4} \right)$$

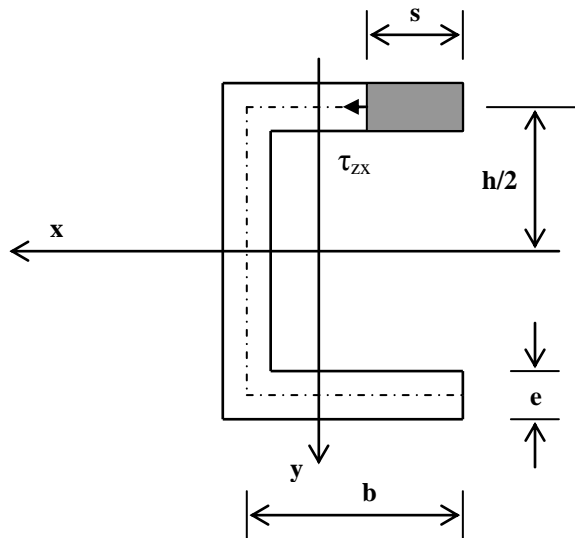
Atendendo ao facto de ser uma secção de paredes finas, então:

$$\frac{e^2}{6} + \frac{h^2}{2} \approx \frac{h^2}{2} \quad \text{e} \quad \frac{h^2}{12} + \frac{e^2}{4} \approx \frac{h^2}{12}$$

pelo que a expressão simplifica-se, ficando:

$$I_x = \frac{eh^2}{12} (h + 6b)$$

Tensões nas abas (*flange*)



A tensão tangencial τ_{zx} representada na figura é dada pela seguinte expressão:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{S_x}{eI_x} T_y$$

O momento estático S_x :

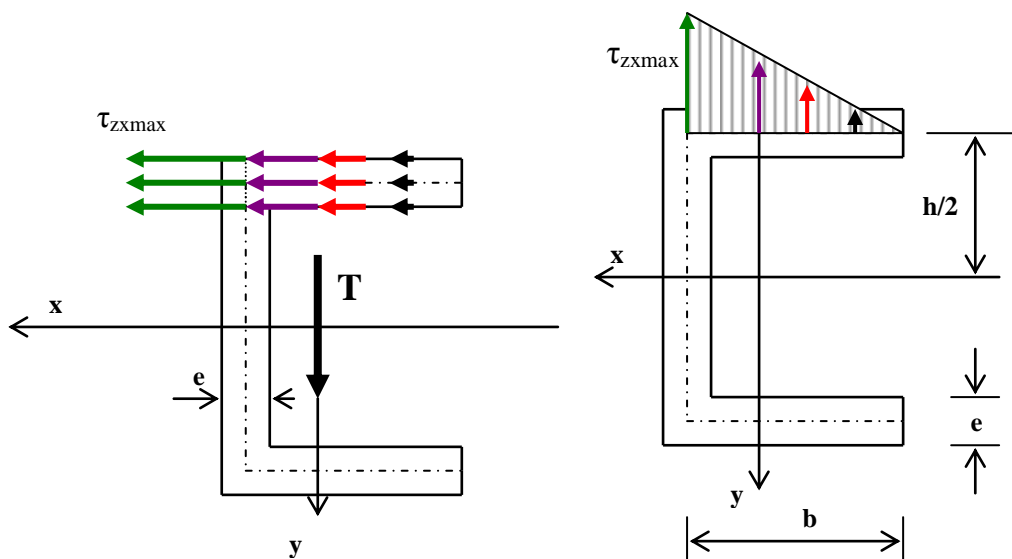
$$S_x = s \times e \times \frac{h}{2}$$

Substituindo:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{6T_y}{eh(h+6b)} s$$

A expressão anterior corresponde a uma distribuição linear de tensões tangenciais nas abas (em função de s),

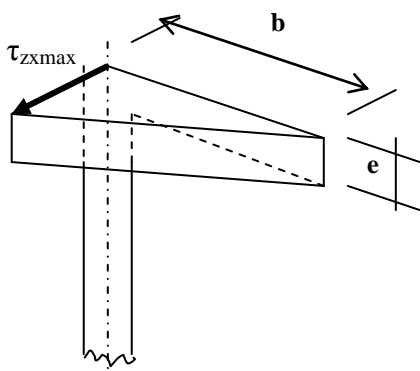
A figura seguinte mostra (setas) as tensões tangenciais em determinados níveis da secção transversal da aba superior. As tensões são nulas na extremidade da aba, crescendo linearmente para o centro. A distribuição triangular representa o valor das tensões em cada nível da secção da aba.



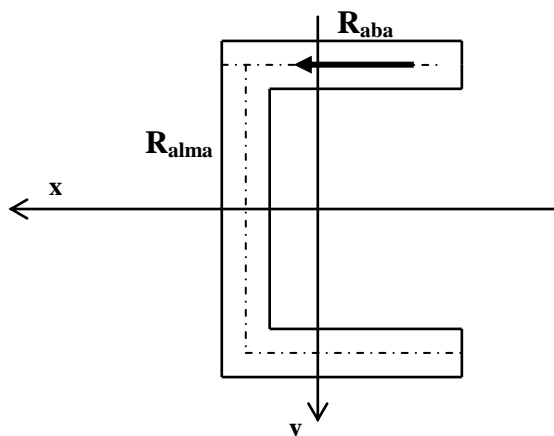
atingindo o valor máximo para $s=b$:

$$\tau_{zx_{max}} = \tau_{xz_{max}} = \frac{6T_y}{eh(h+6b)} b$$

Rebatendo as tensões para uma posição perpendicular à secção, fica definido o sólido, que é um prisma cuja secção é a distribuição triangular ilustrada na figura anterior.

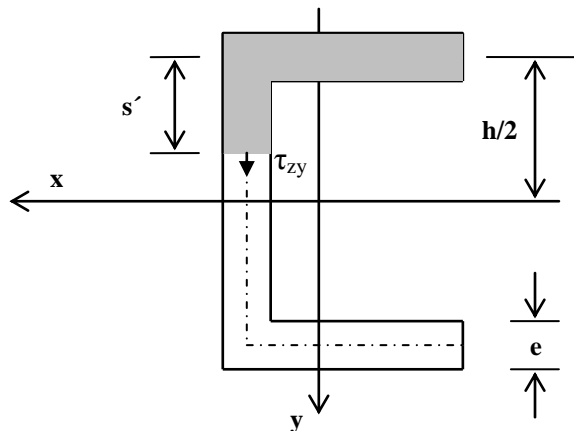


A resultante das tensões na aba é a força R_{aba} ilustrada na figura seguinte e corresponde ao volume do prisma triangular;



$$R_{aba} = \frac{\tau_{zy\max} \times b}{2} \times e = \frac{6T_y}{eh(h+6b)} b \times \frac{b}{2} \times e = \frac{3b^2}{h(h+6b)} T_y$$

Tensões na alma



A tensão tangencial τ_{zy} representada na figura é dada pela seguinte expressão:
A área de aba indicada na figura, está submetida a tensões tangenciais τ_{zx} , dadas pela seguinte expressão:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{S_x}{eI_x} T_y$$

O momento estático S_x :

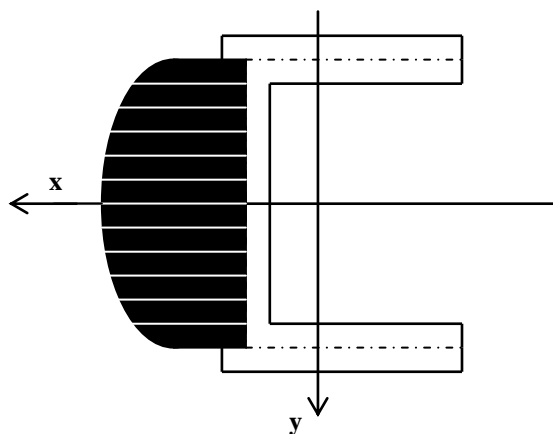
$$S_x = s' \times e \times \left(\frac{h-s'}{2} \right) + b \times e \times \frac{h}{2}$$

Substituindo e desenvolvendo:

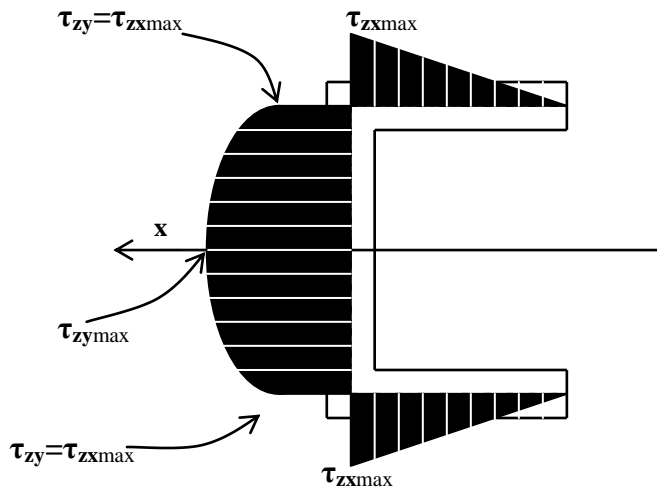
$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{6T_y}{eh(h+6b)} \left[\frac{s'(h-s')}{h} + b \right]$$

A expressão anterior corresponde a uma distribuição quadrática de tensões tangenciais na alma (em função de s'), atingindo o valor máximo para $s' = h/2$:

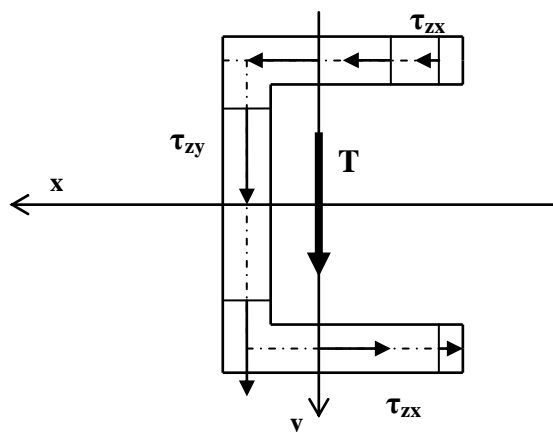
$$\tau_{zy\max} = \tau_{yz\max} = \frac{3T_y}{2eh} \times \frac{h+4b}{h+6b}$$



Em toda a secção a distribuição de tensões fica:



Ao longo do contorno da secção, não há mudança de sinal do valor das tensões, pelo que na representação abaixo indicada as tensões fluem ao longo do contorno da secção sem mudar de sentido, sendo este ditado pelo sentido do vector esforço transverso.



Resultante das tensões na alma:

$$R_{alma} = \int_{alma} \tau_{zy} d\Omega = \int_0^h \tau_{zy} e ds' = \frac{T_y}{I_x} \int_0^h S_x ds'$$

Uma vez que:

$$S_x = s' \times e \times \left(\frac{h-s'}{2} \right) + b \times e \times \frac{h}{2} = \frac{e}{2} (hs' - s'^2) + \frac{e}{2} \times b \times h = \frac{e}{2} (hs' - s'^2 + bh)$$

$$R_{alma} = \frac{e T_y}{2 I_x} \int_0^h (hs' - s'^2 + bh) ds'$$

$$R_{alma} = \frac{e T_y}{2 I_x} \left[\frac{hs'^2}{2} - \frac{s'^3}{3} + bhs' \right]_0^h = \frac{e T_y}{2 I_x} \left(\frac{h^3}{6} + bh^2 \right)$$

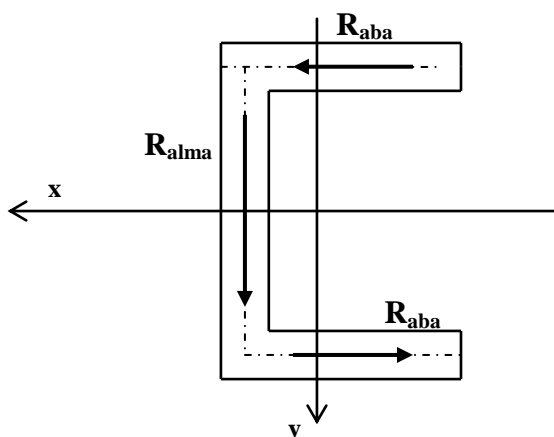
Atendendo a que:

$$I_x = \frac{eh^2}{12}(h + 6b)$$

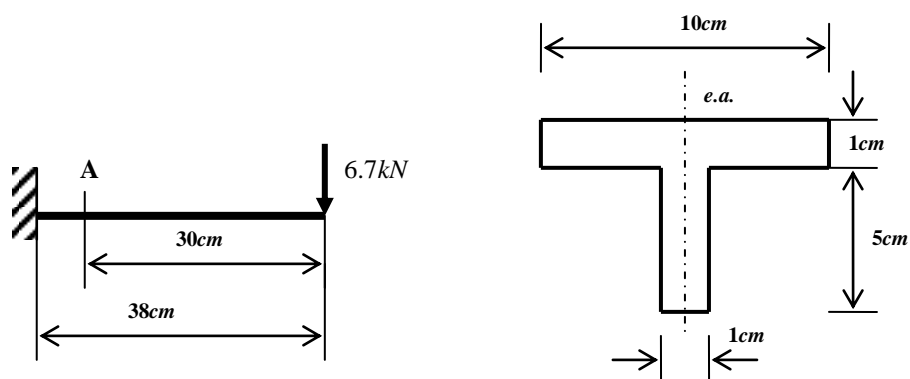
$$R_{alma} = \frac{h + 6b}{h + 6b} T_y = T_y$$

Portanto a resultante das tensões na alma é o esforço transversor.

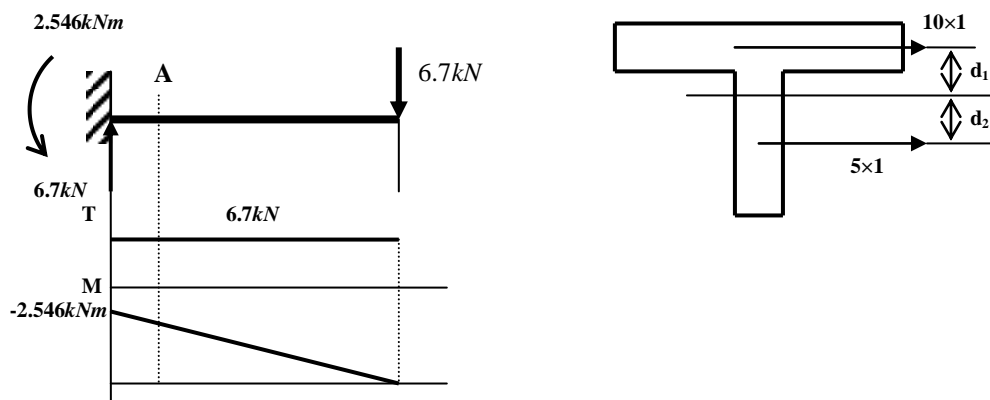
Resultante das tensões em toda a secção fica como na figura seguinte:



Problema 2 - A consola da figura está submetida ao carregamento indicado.

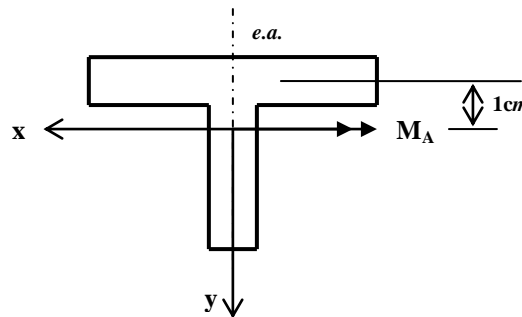


a) Determine a máxima tensão de compressão na secção A.



$$T_A = 6.7 \text{ kN} \quad M_A = \frac{0.3}{0.38} \times (-2.546) = -2.01 \text{ kNm} \quad 10 \times d_1 = 5 \times d_2 \quad d_1 + d_2 = 3 \text{ cm}$$

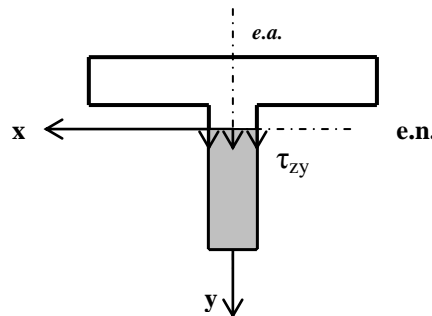
$$d_1 = 1 \text{ cm} \quad d_2 = 2 \text{ cm}$$



$$I_x = \frac{10 \times 1^3}{12} + 10 \times 1 \times 1^2 + \frac{1 \times 5^3}{12} + 1 \times 5 \times 2^2 = 41.25 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{\text{max. comp}} = \frac{-2.01}{41.25 \times 10^{-8}} \times 4.5 \times 10^{-2} = -219.3 \text{ MPa}$$

b) Determine a tensão tangencial máxima na secção A



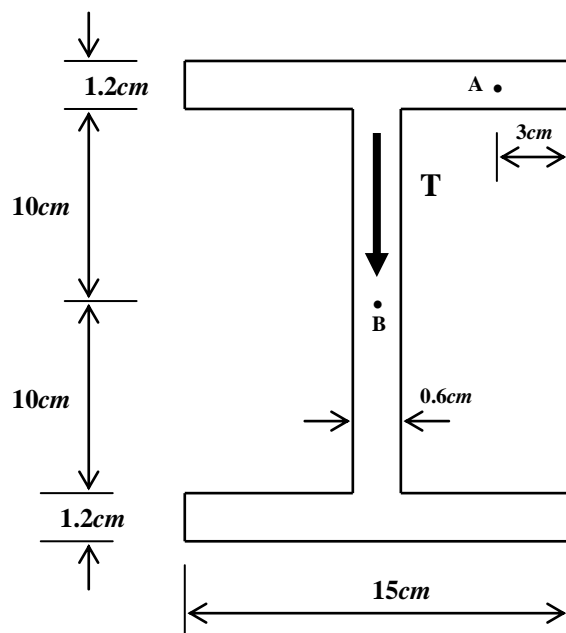
$$\tau_{zy} = \frac{S_x}{eI_x} T_y \quad S_x = 4.5 \times 1 \times \frac{4.5}{2} = 10.125 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{zy} = \frac{10.125}{1 \times 41.25} \times 6.7 = 1.644 \text{ kNcm}^{-2} = 16.44 \text{ MPa}$$

2.1.2. Problemas não resolvidos

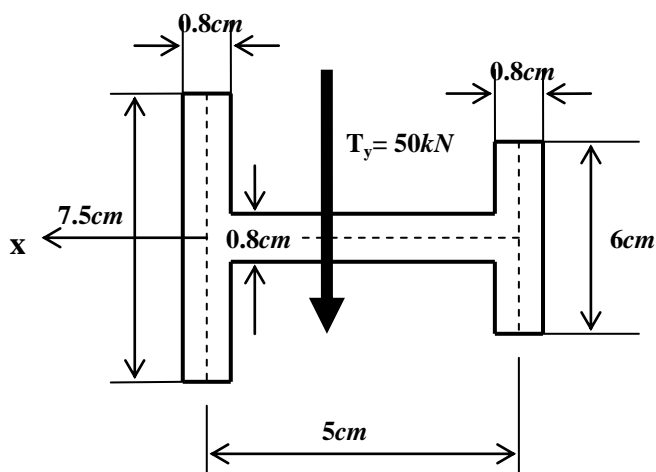
P2.1) Considere a secção da viga da figura seguinte e admita que está sujeita a um esforço transversal de 10kN. Determine:

- A evolução das tensões tangenciais na alma e nas abas;
- O valor das tensões tangenciais nos pontos A e B.



Solução: $\tau_A = 714.7kPa$; $\tau_B = 8409.9kPa$

P2.2) Admita uma barra com a secção indicada na figura sujeita a um esforço transversor $T_y = 50kN$:



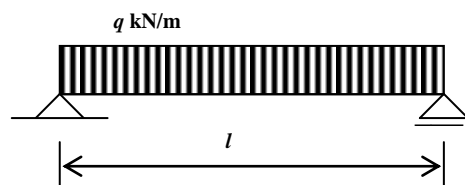
- Determine a expressão geral da distribuição das tensões tangenciais τ_{zy} no troço vertical do lado direito;
- Utilize a expressão geral obtida na alínea anterior para calcular a tensão τ_{zy} a meio do troço vertical do lado direito;
- Calcule a resultante da distribuição das tensões tangenciais τ_{zy} no troço vertical do lado direito;
- Mostre que são nulas as tensões tangenciais τ_{zx} em qualquer ponto do troço horizontal da secção. (0.5 valor)

Solução: b) $52.8MPa$; c) $R = 16.86kN$

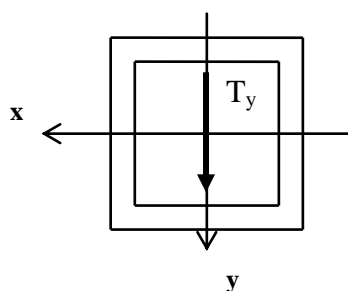
2.2. Em peças fechadas de paredes finas

Neste ponto serão apresentadas peças fechadas de paredes finas em que o esforço transversal está aplicado segundo um eixo de simetria.

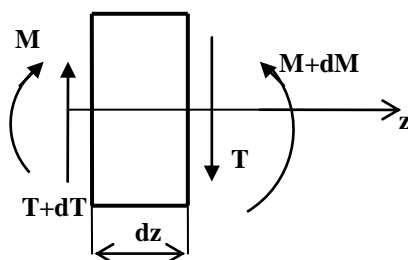
Admita a seguinte barra constituída por uma peça fechada de paredes finas (*thin-walled bar*) sujeita a flexão simples (*transverse bending*) ($M \neq 0$; $T \neq 0$; $N = 0$; $M_t = 0$):



Cuja secção transversal está representada na figura seguinte:

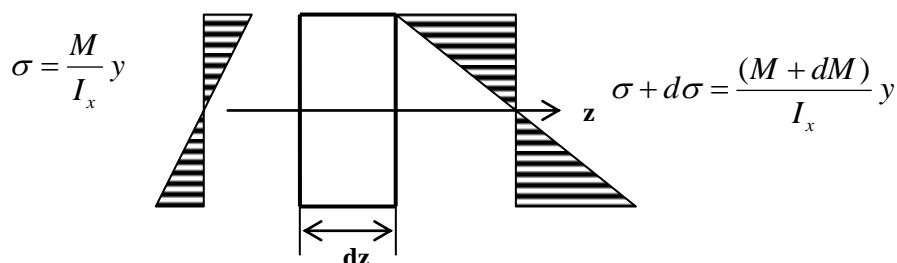


Admitamos um segmento infinitesimal de barra com comprimento dz . Atendendo à variação, ao longo da barra, do esforço transversal e momento flector, podemos admitir a figura seguinte:

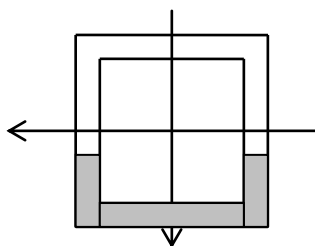


Na figura anterior dM e dT , são as variações do momento flector e do esforço transversal no elemento infinitesimal de comprimento dz .

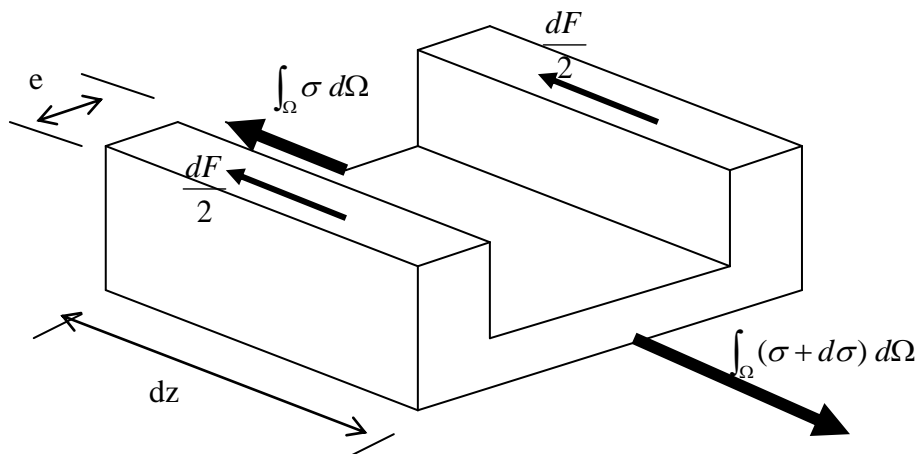
A distribuição das tensões normais nas secções está representada na figura seguinte:



Admitamos o segmento longitudinal representado na figura:

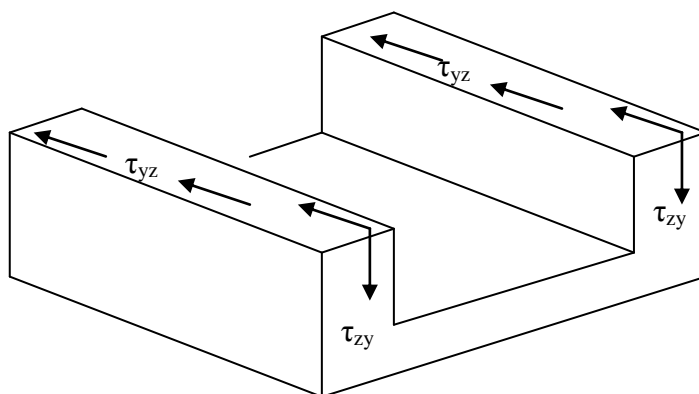


O equilíbrio de forças do referido segmento, fica:



o que pressupõe a existência de duas forças $\frac{dF}{2}$, tangencialmente à secção longitudinal da peça.

As forças elementares $\frac{dF}{2}$ são fruto de uma distribuição de tensões de tangenciais τ_{yz} na secção longitudinal da peça e, atendendo à **condição de reciprocidade das tensões tangenciais**, conduz a uma distribuição de tensões tangenciais τ_{zy} na secção transversal.

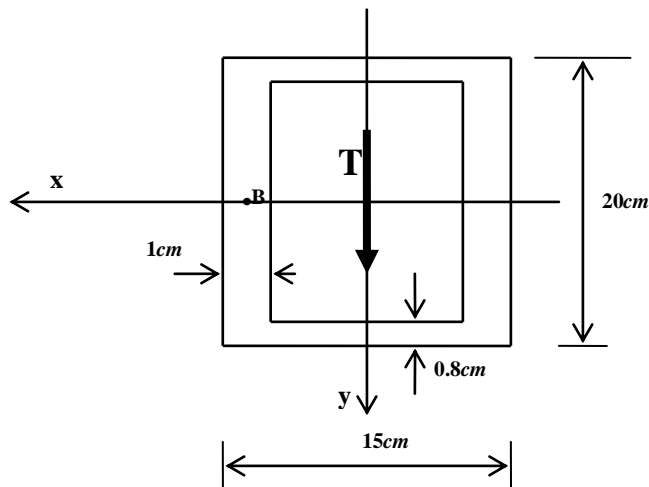


Aplicando a mesma dedução matemática efectuada nas secções abertas, obtém-se para as secções fechadas a seguinte expressão geral da tensão tangencial:

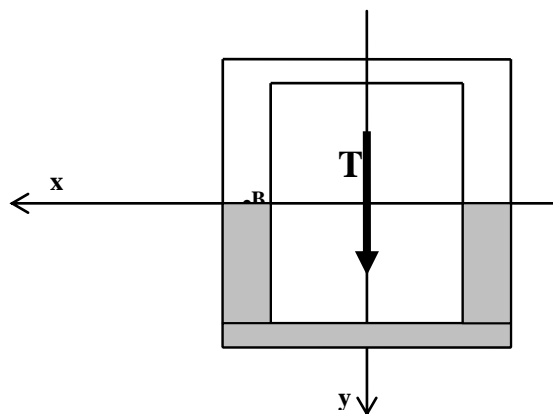
$$\tau_{zy} = \frac{S_x}{2eI_x} T_y$$

2.2.1. Problema resolvido

Determine o valor das tensões tangenciais no ponto B da secção indicada na figura:



Resolução



$$\tau_{zy} = \frac{S_x}{2eI_x} T_y$$

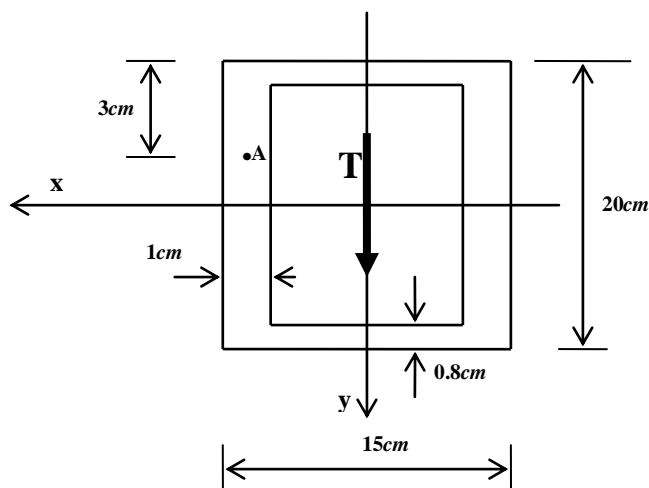
$$S_x = 15 \times 0.8 \times (10 - 0.4) + 2 \times \left[(10 - 0.8) \times 1 \times \frac{10 - 0.8}{2} \right] = 199.84 \text{ cm}^3$$

$$I_x = \frac{15 \times 20^3}{12} - \frac{13 \times 18.4^3}{12} = 3251.37 \text{ cm}^4$$

$$\tau_{zy} = \frac{199.84}{2 \times 1 \times 3251.37} \times 10 = 0.3073 \text{ kN cm}^{-2} = 3.07 \text{ MPa}$$

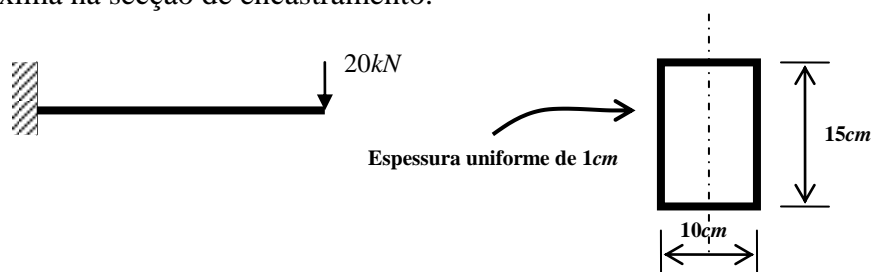
2.2.2. Problemas não resolvidos

P2.3) Para $T = 10 \text{ kN}$, determine o valor das tensões tangenciais no ponto A da secção indicada na figura:



Solução
 $\tau_{zyA}=2.3MPa$

P2.4) A consola da figura está submetida ao carregamento indicado. Determine a tensão tangencial máxima na secção de encastramento.



Solução: $\tau_{zy\max}=8.33MPa$

2.3. Centro de corte em peças de paredes finas

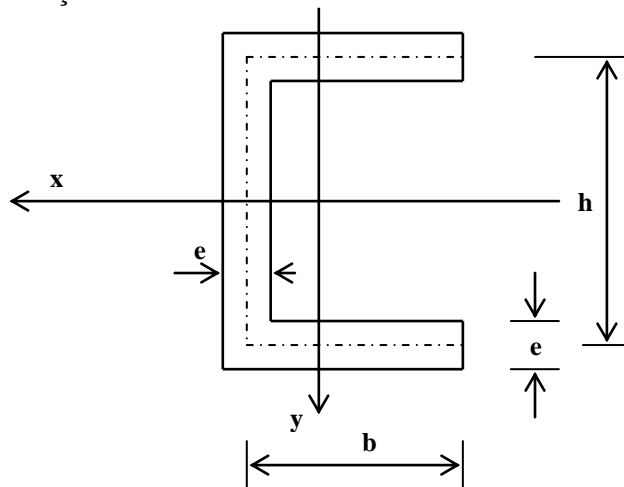
Nos pontos anteriores foram deduzidas expressões que permitem o cálculo de tensões tangenciais induzidas pelo esforço transversor, nomeadamente em secções transversais de vigas em flexão simples ($M \neq 0$; $T \neq 0$; $N = 0$; $M_t = 0$).

Porém, a condição de momento torçor nulo ($M_t = 0$) só acontece se a linha de acção do esforço transversor passar por um ponto conhecido por **centro de corte** (*shear centre*) ou **centro de torção**. Caso a linha de acção do esforço transversor não passe pelo centro de corte, então existirá igualmente um momento torçor o qual induzirá na secção tensões tangenciais suplementares.

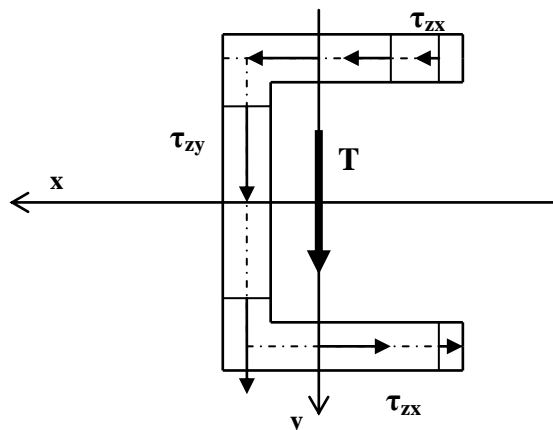
A determinação do centro de corte pressupõe o conhecimento da distribuição de tensões tangenciais devidas ao esforço transversor na secção, tarefa que é relativamente simples em secções de paredes finas.

2.3.1. Problemas resolvidos

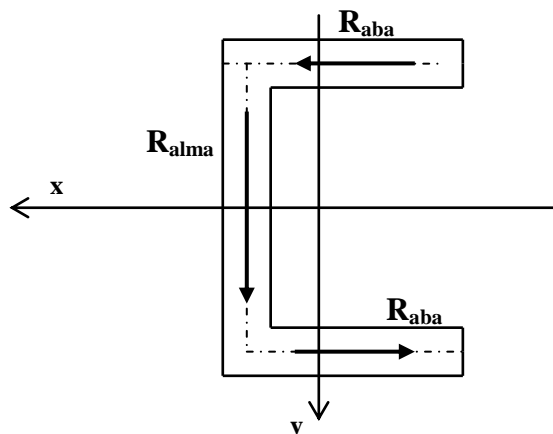
Retomando a secção



verificámos uma distribuição de tensões devidas ao esforço transversal (T):

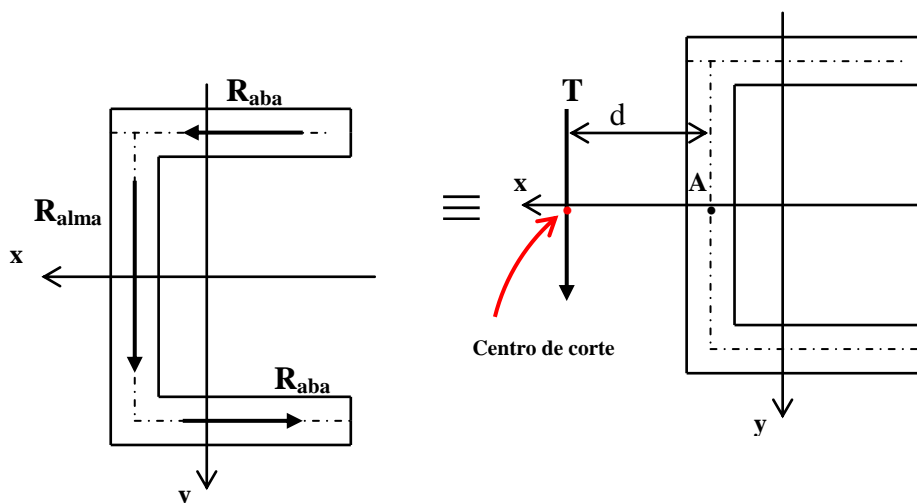


o que pressupõe a existência de resultantes das tensões tangenciais:



$$R_{aba} = \frac{3b^2}{h(h+6b)} T_y \quad R_{alma} = T_y$$

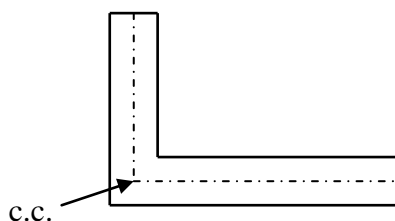
Para que o esforço transversal T seja exclusivamente responsável pelo aparecimento das forças resultantes indicadas na figura anterior então, a força T tem de ser uma força equivalente ao sistema de forças formadas pelas forças R_{aba} e R_{alma} , ou seja:



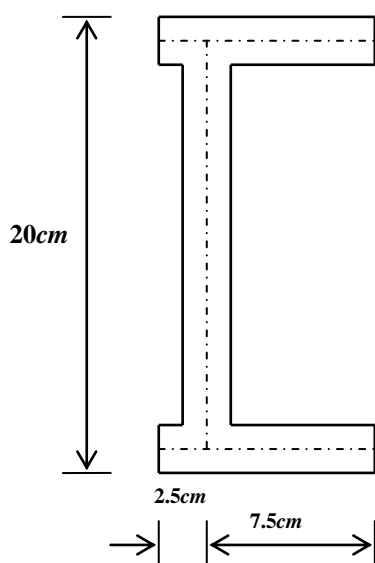
Fazendo momentos em relação ao ponto A indicado:

$$T \times d = 2 \times R_{aba} \times (h/2) \qquad d = \frac{3b^2}{h + 6b}$$

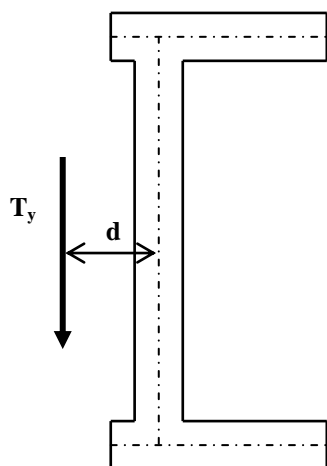
O centro de corte (c.c.) está sempre localizado num eixo de simetria da secção. Em casos em que a secção seja constituída por troços, cujas linhas médias concorrem num ponto, o c.c. coincide necessariamente com esse ponto.



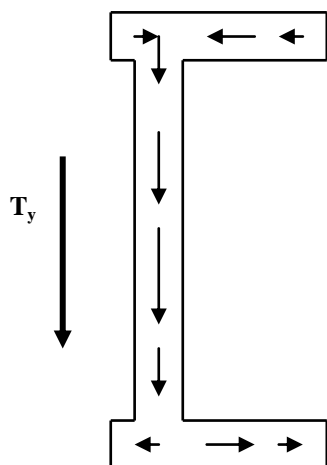
Determine o centro de corte da secção seguinte, a qual tem espessura uniforme igual a 0.5cm:



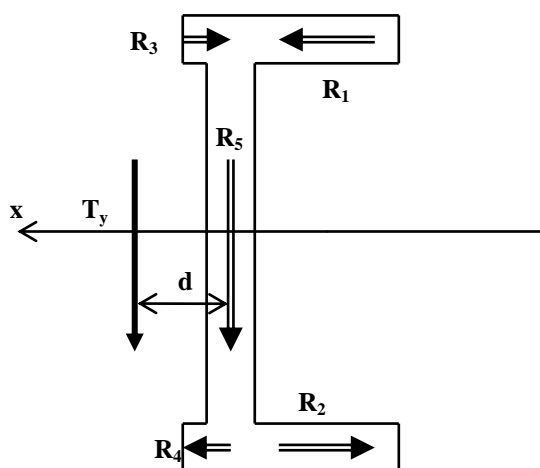
Uma vez que a secção tem um eixo de simetria, então o c.c. está sobre ele. Bastará, portanto conhecer a distância (d) do c.c. em relação ao eixo da alma da secção.



Devido ao esforço transverso a secção terá uma distribuição de tensões tangenciais como se indica:

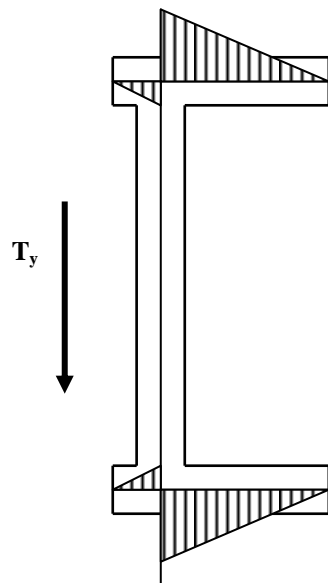


A figura seguinte mostra a resultante das tensões tangenciais nas abas e na alma:



Por razões de simetria, $|R_1|=|R_2|$ e $|R_3|=|R_4|$. Os sistemas de forças formados pela força T_y e pelas forças R_1 ; R_2 ; R_3 ; R_4 ; R_5 são equivalentes. A determinação da distância d ,

pode ser feita efectuando os momentos em relação à linha média da alma, o que, por si só, simplifica o problema, uma vez que não se necessita de conhecer a força R_5 . A figura seguinte mostra o tipo de distribuição das tensões nas abas (distribuição linear).



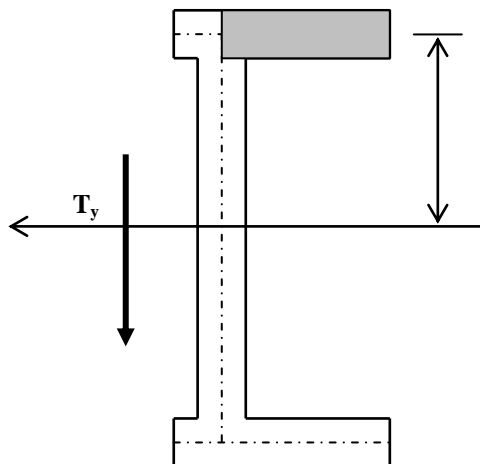
Tratando-se de uma secção aberta de paredes finas:

$$\tau_{zx} = \frac{S_x}{eI_x} T_y$$

Cálculo do momento de inércia I_x :

$$I_x = 2 \times \left[\frac{10 \times 0.5^3}{12} + (10 \times 0.5) \times \left(\frac{19.5}{2} \right)^2 \right] + \frac{0.5 \times 19^3}{12} = 1236.6 \text{ cm}^4$$

Cálculo do valor máximo da tensão tangencial na aba superior direita:



$$S_x = 7.5 \times 0.5 \times \frac{19.5}{2} = 36.56 \text{ cm}^3$$

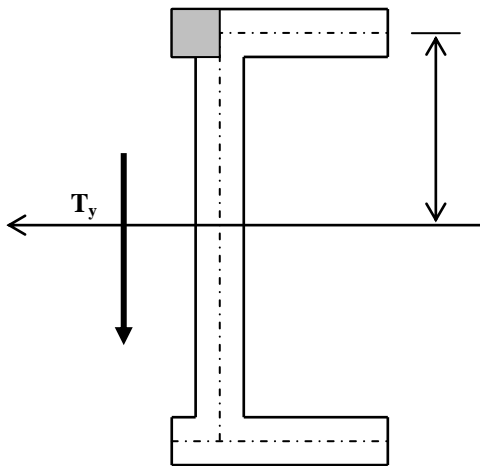
$$\tau_{zx} = \frac{36.56}{0.5 \times 1236.6} \times T_y = 0.05913 \times T_y$$

Na expressão anterior τ_{zx} vem em kN/cm^2 .

Cálculo da força resultante (R_1) na aba superior direita:

$$R_1 = 0.5 \times \frac{7.5 \times (0.05913 \times T_y)}{2} = 0.1109 \times T_y \quad (kN)$$

Cálculo do valor máximo da tensão tangencial na aba superior esquerda:



$$S_x = 2.5 \times 0.5 \times \frac{19.5}{2} = 12.19 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{zx} = \frac{12.19}{0.5 \times 1236.6} \times T_y = 0.01971 \times T_y$$

Na expressão anterior τ_{zx} vem em kN/cm^2 .

Cálculo da força resultante (R_3) na aba superior esquerda:

$$R_3 = 0.5 \times \frac{2.5 \times (0.01971 \times T_y)}{2} = 0.0123 \times T_y \quad (kN)$$

Cálculo da distância d:

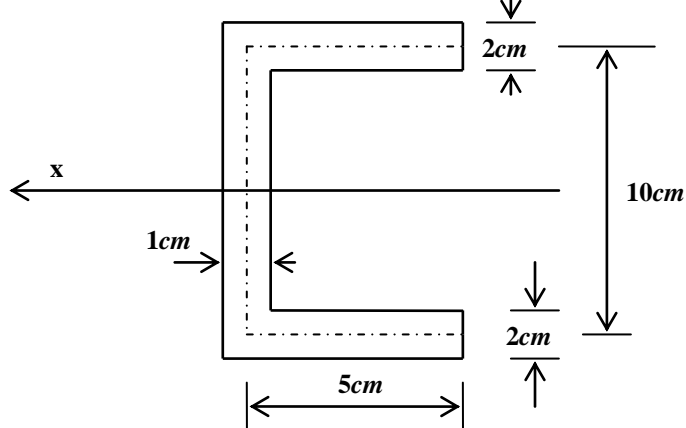
$$T_y \times d = 2 \times (0.1109 \times T_y) \times \frac{19.5}{2} - 2 \times (0.0123 \times T_y) \times \frac{19.5}{2}$$

Da equação anterior conclui-se que **d = 1.92cm**.

Assim o centro de corte da secção em estudo, encontra-se no eixo de simetria, 1.92cm para a esquerda da linha média da alma.

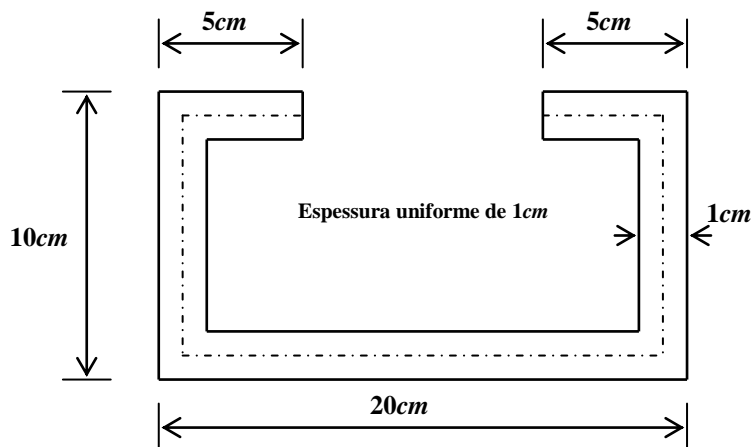
2.3.2. Problemas não resolvidos

P2.5) Determine o centro de corte da secção da figura:



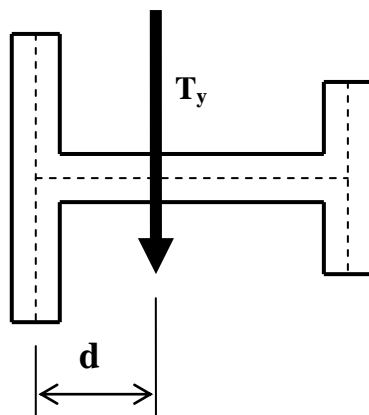
Solução: No eixo de simetria, $d=2.08\text{cm}$ para a esquerda da linha média da alma

P2.6) Determine o centro de corte da secção da figura:



Solução: No eixo de simetria, $d=5.22\text{cm}$ abaixo da linha média da aba maior.

P2.7) Em continuação do problema P2.2, admita que T_y passa pelo centro de corte. Calcule a distância d .



Solução: $d=1.686\text{cm}$

3. Estado de tensão sob momento flector e esforço transverso

A verificação do estado de tensão (*state of stress*), ou seja da segurança, em peças sujeitas a flexão simples ($M \neq 0$; $T \neq 0$; $N = 0$; $M_t = 0$) compreende, de uma maneira geral, três pontos:

- 1) Verificação da tensão normal máxima nas fibras mais afastadas do eixo neutro;

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{Rd}$$

sendo σ_{Rd} o valor de cálculo da tensão resistente do material.

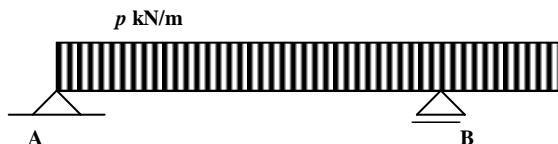
- 2) Verificação da tensão tangencial máxima que, geralmente ocorre ao nível do eixo neutro;

$$\tau_{\max} \leq \frac{\sigma_{Rd}}{\sqrt{3}}$$

- 3) Verificação do estado duplo de tensão nos pontos em que tanto a tensão normal como a tensão tangencial atinjam valores elevados. Nestes pontos a verificação de segurança deverá obedecer a um critério de resistência. Em materiais dúcteis como o aço, usa-se habitualmente o critério de Von Mises.

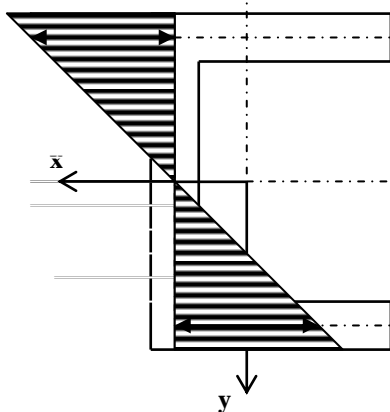
$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{Rd}$$

A terceira verificação é importante em vigas em I ou em U nos pontos de inserção da alma nos banzos, em secções em que tanto o momento flector como o esforço transverso atinjam valores máximos, como nas secções próximas do apoio B da figura seguinte:

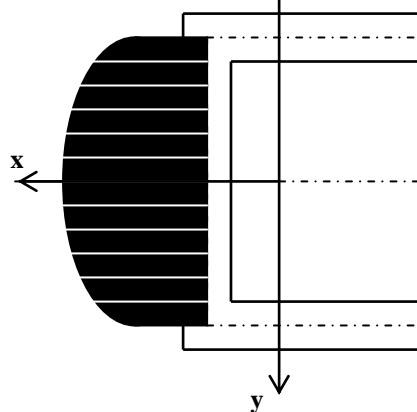


Nos pontos de inserção da alma nos banzos a tensão normal aproxima-se do máximo e a tensão tangencial é pouco inferior à tensão ao nível do eixo neutro:

Distribuição de tensões normais σ_z na secção devido ao momento flector

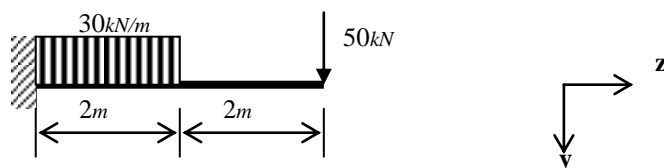


Distribuição de tensões tangenciais τ_{zy} na alma devido ao esforço transverso



3.1. Problema resolvido

Utilizando um perfil INP dimensione a seguinte viga em aço, admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material $\sigma_{Rd}=235MPa$



Resolução

Reacções nos apoios

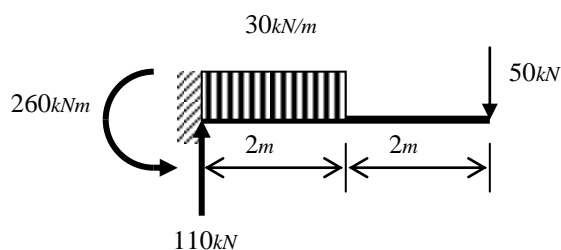
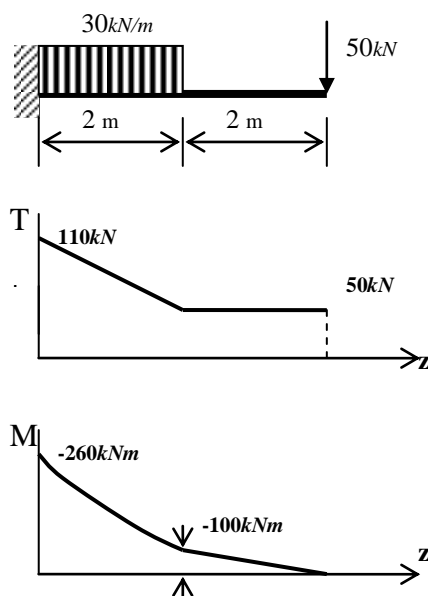


Diagrama de esforços



Dimensionamento da secção à tensão normal:

$$\sigma_{z_{\max}} = \frac{|M_x|}{W_x} = \frac{260}{W_x} \leq 235 \times 10^3 \Rightarrow W_x \geq 1.106 \times 10^{-3} m^3 = 1106 cm^3 \Rightarrow INP 380$$

Atendendo às Tabelas Técnicas o módulo de flexão do perfil seleccionado é:

$$W_x = 1260 cm^3$$

$$\sigma_{z_{\max}} = \frac{|M_x|}{W_x} = \frac{260}{1260 \times 10^{-6}} = 206.35 \times 10^3 \text{ kPa} = 206.35 \text{ MPa}$$

$$206.35 \text{ MPa} \leq 235 \text{ MPa} \quad \text{VERIFICA}$$

Verificação da tensão tangencial máxima:

Esta tensão ocorre no eixo neutro (a meio da alma)

$$\tau_{zy} = \frac{S_x}{eI_x} T_y$$

$S_x = 741 \text{ cm}^3$ (momento estático de meia secção em relação ao eixo dos xx – Tabelas Técnicas);

$I_x = 24010 \text{ cm}^4$ (momento de inércia da secção em relação ao eixo dos xx – Tabelas Técnicas);

$e = 13.7 \text{ mm}$ (espessura da alma – Tabelas Técnicas).

$$\tau_{zy_{\max}} = \frac{741}{1.37 \times 24010} \times 110 = 2.48 \text{ kNcm}^{-2} = 24.8 \text{ MPa}$$

$$24.8 \text{ MPa} \ll \frac{235}{\sqrt{3}} \text{ MPa} \quad \text{VERIFICA}$$

Verificação do estado de tensão na inserção da alma nos banzos:

Uma aproximação, **por excesso**, é a de utilizar os valores de $\sigma_{z_{\max}}$ e de $\tau_{zy_{\max}}$ das alíneas anteriores, dado que ambos são superiores aos valores que efectivamente se verificam nos pontos de inserção da alma nos banzos.

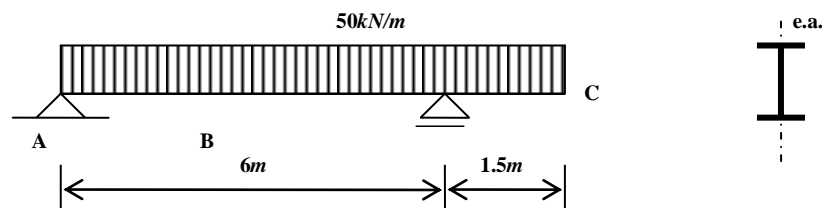
Tratando-se de um material dúctil, usa-se habitualmente o critério de Von Mises:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{Rd}$$

$$\sqrt{206.35^2 + 3 \times 24.8^2} = 210.77 \text{ MPa} \leq 235 \text{ MPa} \quad \text{VERIFICA}$$

3.2. Problemas não resolvidos

P3.1) Para a seguinte viga em aço, admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material $\sigma_{Rd} = 235 \text{ MPa}$:



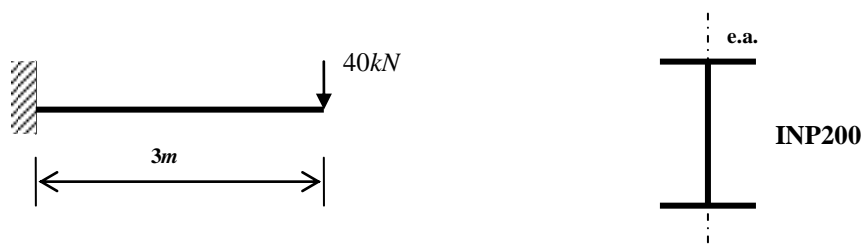
- Trace os diagramas de esforço transversal e de momento flector para a viga;
- Dimensione a viga à flexão, utilizando um perfil INP;

- De acordo com o diagrama de momento flector ao longo da viga, seleccione, agora, um INP adequado para suportar, não o valor máximo de momento flector do diagrama, mas o pico de momento imediatamente abaixo;
- Reforce o INP da resposta anterior, soldando chapa de 15mm de espessura em cada banzo, na zona de máximo momento flector do diagrama. Determine qual a largura da chapa a soldar;
- De acordo com o diagrama de esforço transversal, verifique o dimensionamento à tensão tangencial;
- Utilizando o critério de Von Mises, faça a verificação do estado de tensão no final da parte recta da alma, na secção mais desfavorável. Ver nas Tabelas Técnicas a dimensão da parte recta da alma.

Solução: b) INP340; c) INP220 d) $d = 18\text{cm}$; e) $\tau_{zy\text{max}} = 104.2\text{MPa}$;

f) $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 217.2\text{MPa}$

P3.2) Considere a seguinte viga feita de aço ($\sigma_{Rd} = 235\text{MPa}$).

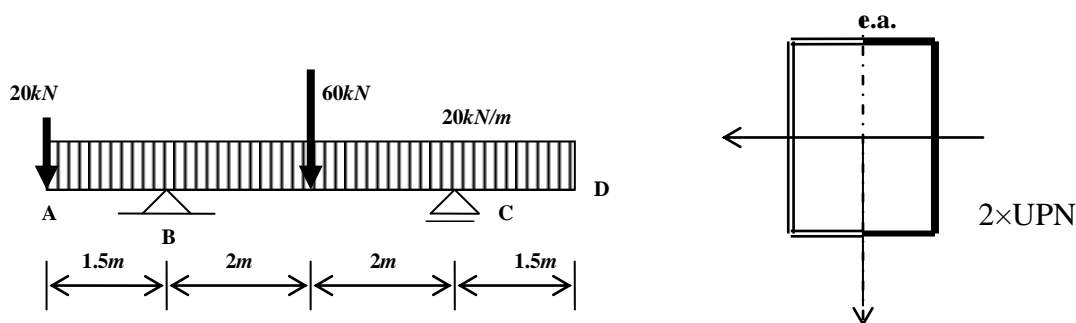


- Verifique a segurança;
- Se a viga não estiver em segurança reforce-a com chapas nos banzos onde for necessário.

Solução:

a) Não verifica; b) 2 chapas com 1.2cm de espessura e 13.3cm de largura, em 1.74m.

P3.3) Para a seguinte viga em aço, admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material $\sigma_{Rd} = 275\text{MPa}$:



- Trace os diagramas de esforço transversal e de momento flector para a viga;
- Dimensione a viga à flexão, utilizando dois perfis UNP;
- De acordo com o diagrama de esforço transversal, verifique o dimensionamento à tensão tangencial;
- De acordo com os diagramas de esforço transversal e de momento flector, verifique o dimensionamento segundo o critério de Von Mises na secção a meio vão e no ponto de inserção da alma nas abas (use o método expedito);

- e) De acordo com os diagramas de esforço transversal e de momento flector, verifique o dimensionamento segundo o critério de Von Mises na secção em B e no ponto de inserção da alma nas abas (use o método expedito);
- f) De acordo com os diagramas de esforço transversal e de momento flector, verifique o dimensionamento segundo o critério de Von Mises na secção em C e no ponto de inserção da alma nas abas (use o método expedito).

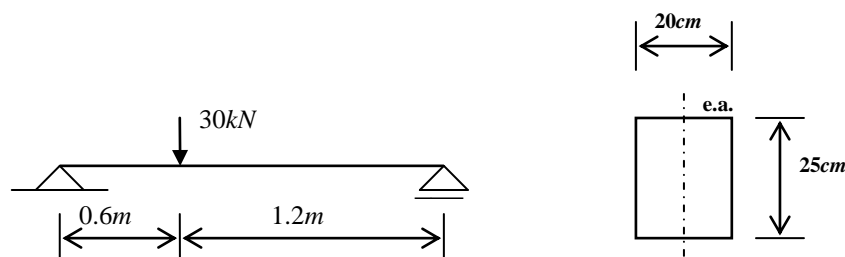
Solução: b) $2 \times \text{UNP 160}$; c) $\tau_{zy\text{max}} = 37.3 \text{ MPa}$; d) $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 271.2 \text{ MPa}$

e) $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 235.3 \text{ MPa}$; f) $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 110.1 \text{ MPa}$

4. Caderno de problemas

4.1. Esforço de escorregamento em planos longitudinais

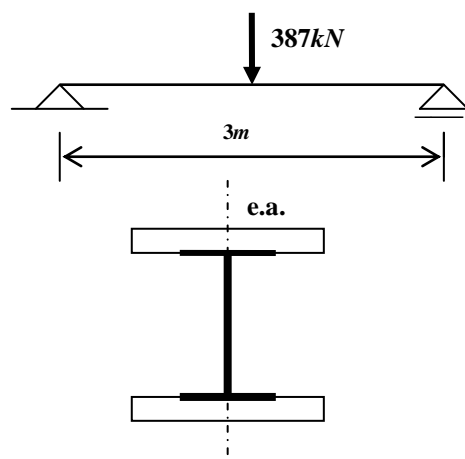
1) Para a viga representada na figura:



- a) Faça a distribuição das tensões tangenciais no plano neutro.
 b) Determine a força de escorregamento no plano neutro.

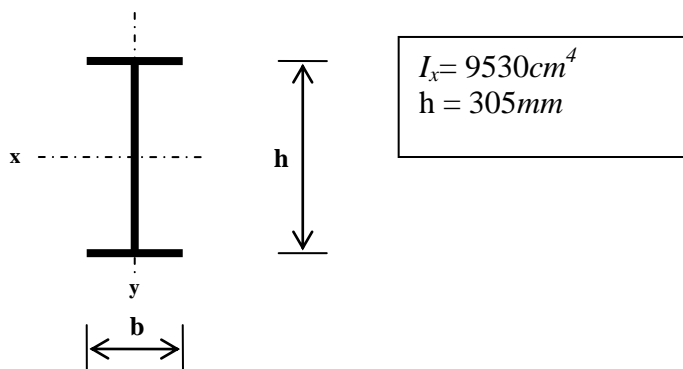
Solução: b) $F = 72 \text{ kN}$

2) A figura seguinte mostra uma viga com uma carga concentrada a meio vão:



A viga é um perfil I de aço reforçado com chapas de aço de 16 mm de espessura e 200 mm de largura, conforme a figura anterior.

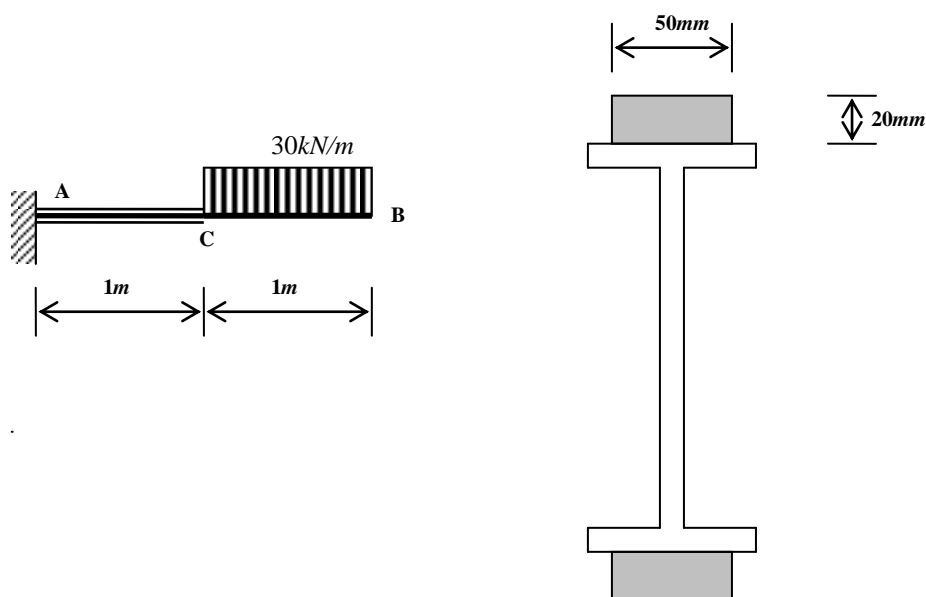
O perfil I tem as seguintes características:



- Determine a distribuição das tensões normais na secção mais solicitada.
- Determine a força de escorregamento para qual deve ser dimensionada a ligação entre a chapa de reforço e o banzo do perfil I.
- Optimize o comprimento do reforço tendo em consideração um valor de cálculo de resistência do material de 235 MPa .
- Calcule a força de corte na ligação do reforço da alínea anterior.

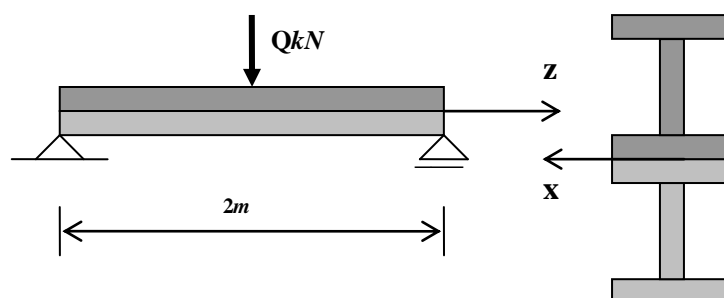
Solução: a) $\sigma_{max. comp} = -187.89 \text{ MPa}$; $\sigma_{max. trac} = 187.89 \text{ MPa}$, b) $F = 572.69 \text{ kN}$; c) reforço com 1.5 m de comprimento, centrado no vão; d) $F = 286.4 \text{ kN}$

- A consola AB da figura seguinte, é constituída por um perfil INP 16. No troço AC o perfil está reforçado por barra de secção $50 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$, soldada em ambos os banzos. Determine os esforços para os quais devem ser dimensionadas as ligações entre as chapas e o perfil INP.



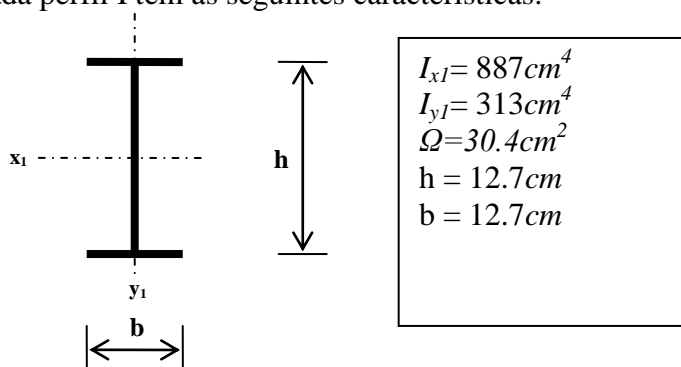
Solução: $F = 105.4 \text{ kN}$

4) A figura seguinte mostra uma viga com uma carga concentrada a meio vão:



A viga é constituída por dois perfiz I de aço soldados pelos banzos, conforme a figura anterior.

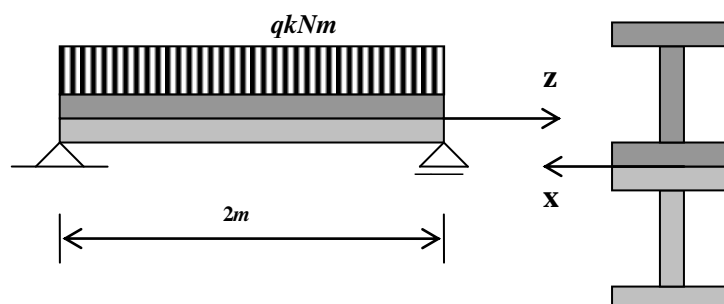
Cada perfil I tem as seguintes características:



Admitindo que a força de escorregamento na ligação dos dois I não deve ultrapassar o valor de $960kN$, determine o máximo valor da carga Q .

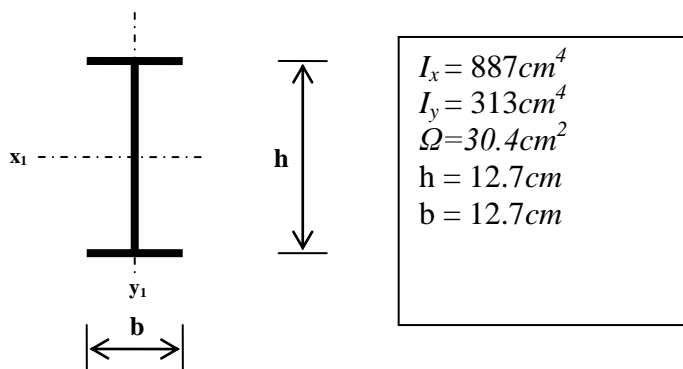
Solução: $Q \leq 420kN$

5) A figura seguinte mostra uma viga com uma carga uniforme q :



A viga é constituída por dois perfiz I de aço soldados pelos banzos, conforme a figura anterior.

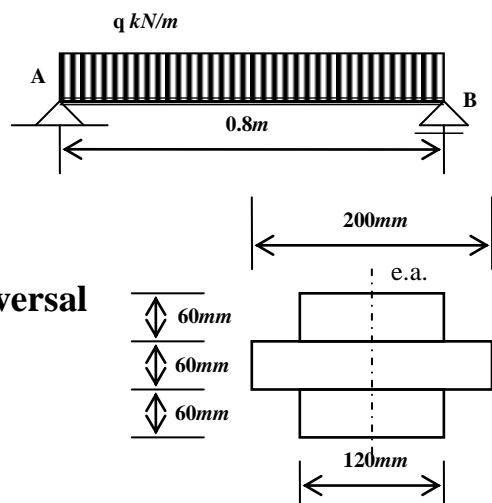
Cada perfil I tem as seguintes características:



Admitindo que a força de escorregamento na ligação dos dois I não deve ultrapassar o valor de $960kN$, determine o máximo valor da carga q .

Solução: $q=420kN/m$

6) A viga AB suporta uma carga uniformemente distribuída q . A viga é construída ligando 3 peças de secção rectangular, todas do mesmo material, como se mostra na figura:



Secção transversal

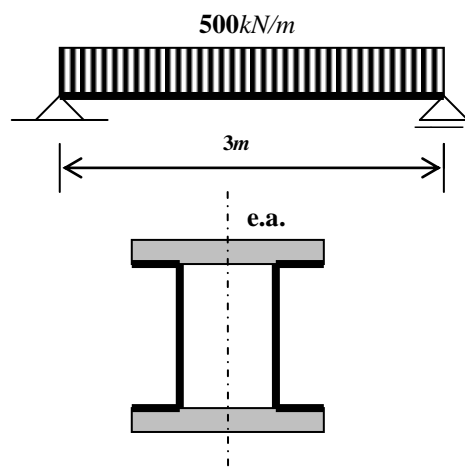
Admitindo que o esforço de escorregamento admissível na ligação das peças é de $2.132kN$, calcule o valor máximo admissível para a carga q .

Solução: $q=3.69kN/m$

7) A figura seguinte mostra uma viga com uma carga distribuída e uniforme.

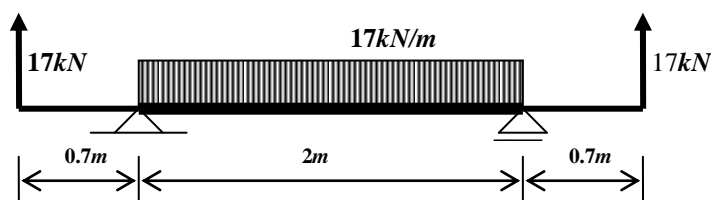
A viga é constituída por perfilz UNP 280 de aço reforçado com chapas de aço de $16mm$ de espessura e $400mm$ de largura, conforma a figura anterior.

Determine a força de escorregamento para qual deve ser dimensionada a ligação entre chapas de reforço e o banzo de cada perfil.

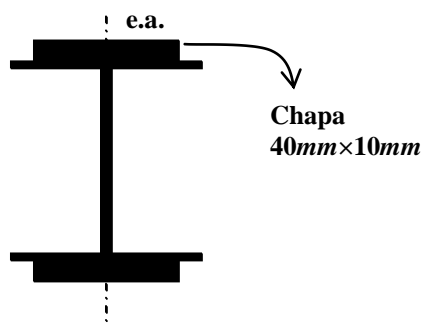


Solução: $F=655.76kN$, em cada banzo

8) A viga tem aplicada acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura:



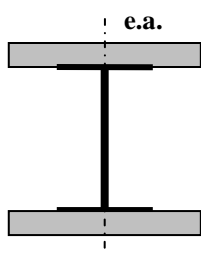
A viga é constituída por um perfil INP 12 reforçado no troço entre os apoios com duas chapas de aço, iguais, ligadas aos banzos.



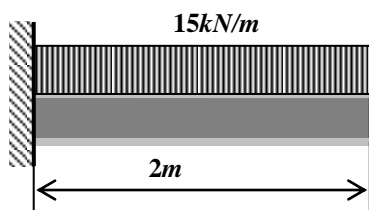
Determine o esforço de escorregamento na ligação dos dois materiais.

Solução: $F=33.15kN$

9) A viga é um perfil INP14 de aço reforçado com chapas de aço de 5mm de espessura e 80mm de largura, conforme a figura seguinte:



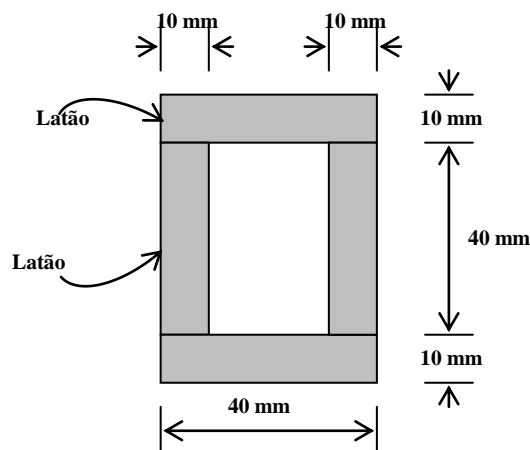
A viga está solicitada como indicado na figura seguinte:



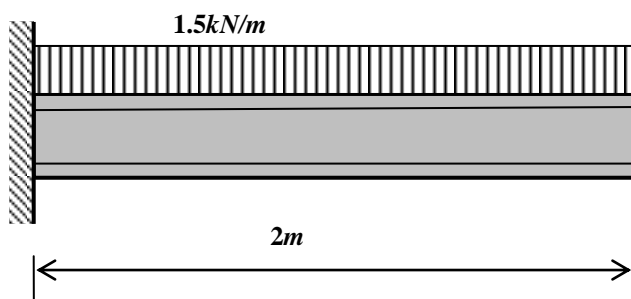
Determine a força de escorregamento para qual deve ser dimensionada a ligação entre chapas de reforço e os banzos do perfil I.

Solução: $F=87.55kN$

10) Quatro barras de latão estão unidas firmemente, formando a secção composta ilustrada:



A qual está solicitada como indicado na figura seguinte:

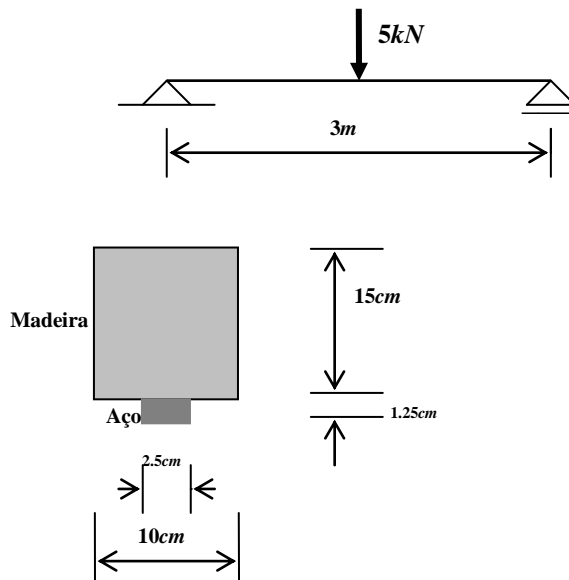


- Determine o esforço de escorregamento nos primeiros 50cm de viga, a contar do encastramento, para o qual tem de estar dimensionada cada ligação;
- Determine o esforço de escorregamento nos segundos 50cm de viga, a contar do encastramento, para o qual tem de estar dimensionada cada ligação;
- Determine o esforço de escorregamento nos últimos 100cm de viga até à extremidade livre, para o qual tem de estar dimensionada cada ligação.

Solução: a) $F=21.4kN$, b) $F=15.29kN$, c) $F=12.23kN$

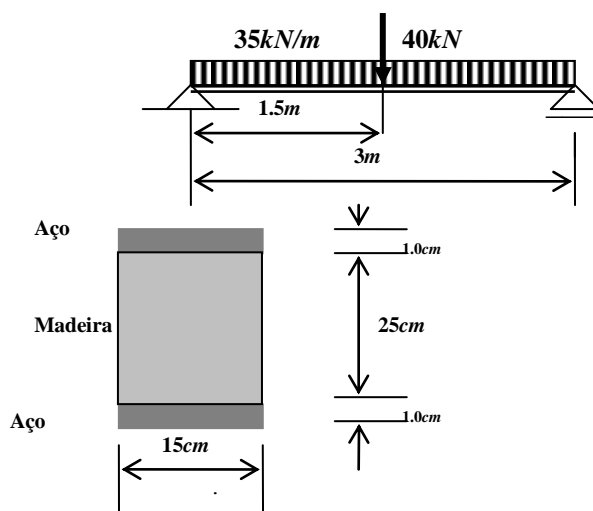
4.1.1 Esforço de escorregamento em peças mistas

11) Para a viga mista de madeira reforçada com uma placa de aço, determine o esforço de escorregamento na ligação dos dois materiais. Admita que o módulo de elasticidade do aço é 20 vezes o módulo de elasticidade da madeira



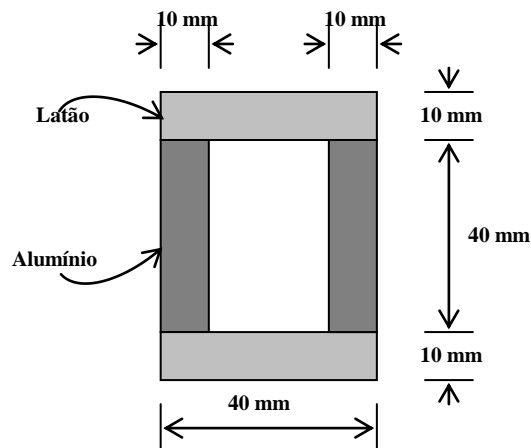
Solução: $F=23.44kN$

12) A viga de madeira reforçada com duas placas de aço está sujeita a cargas cujos valores de cálculo estão indicados na figura. Determine o esforço de escorregamento na ligação dos dois materiais. Admita: $E_{\text{madeira}}=13Gpa$; $E_{\text{aço}}=200Gpa$.

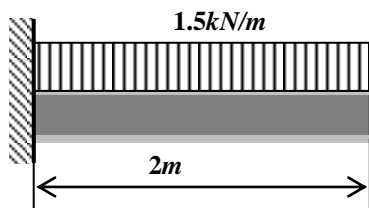


Solução: $F=213.31kN$

13) Duas barras de latão estão unidas firmemente a duas barras de alumínio, formando a secção composta ilustrada:



A qual está solicitada como indicado na figura seguinte:



Admitindo:

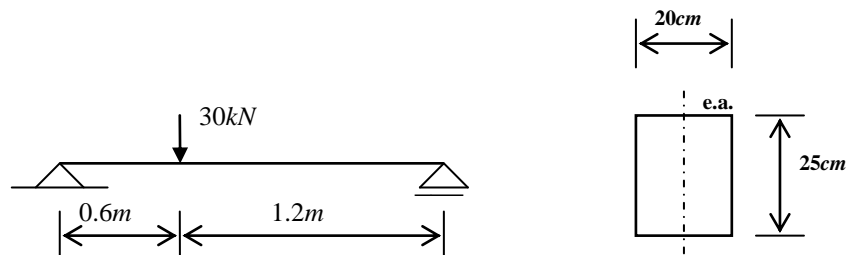
- Latão - módulo de elasticidade de 105 GPa;
- valor de cálculo para a tensão resistente de 160 MPa.
- Alumínio - módulo de elasticidade de 70 GPa;
- valor de cálculo para a tensão resistente de 100 MPa.

Determine o esforço de escorregamento na ligação dos dois materiais.

Solução: $F=51.9kN$

4.2. Tensões tangenciais em secções transversais

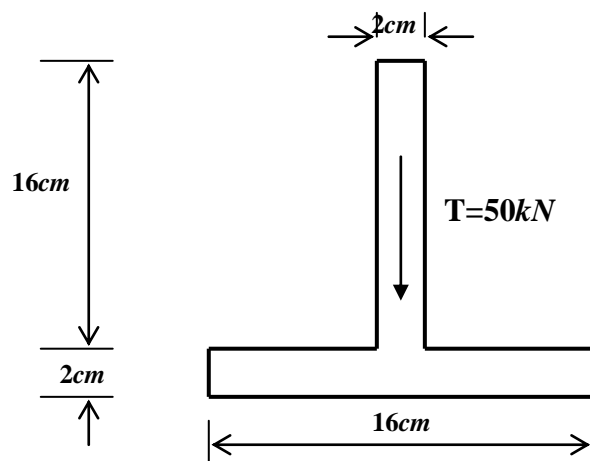
14) Para a viga representada na figura:



- a) Faça a representação da distribuição das tensões normais na secção mais solicitada.
- b) Faça a distribuição das tensões tangenciais na secção mais solicitada.

Solução: a) $\sigma_{max. comp} = -5.76MPa$; $\sigma_{max. trac} = 5.76MPa$, b) $\tau_{max} = 600kPa$

15) Na secção indicada na figura, sujeita a um esforço transverso de $50kN$, determine:

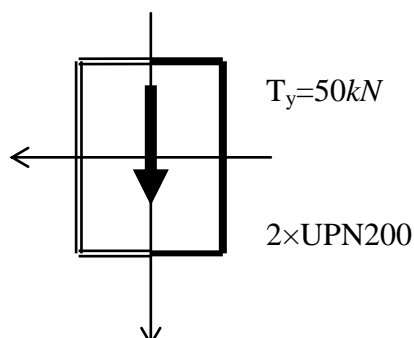


- e) Determine a expressão geral da distribuição das tensões tangenciais na alma;
- f) Calcule a resultante da distribuição das tensões na alma;
- g) Determine a expressão geral da distribuição das tensões tangenciais na aba;
- h) Calcule a resultante da distribuição das tensões na aba.

Solução: a) $\tau_{\max} = 19.64 MPa$; b) $R_{\text{alma}} \approx 50 kN$; c) $\tau_{\max} = 9.05 MPa$; d) $R_{\text{aba}} = 7.24 kN$

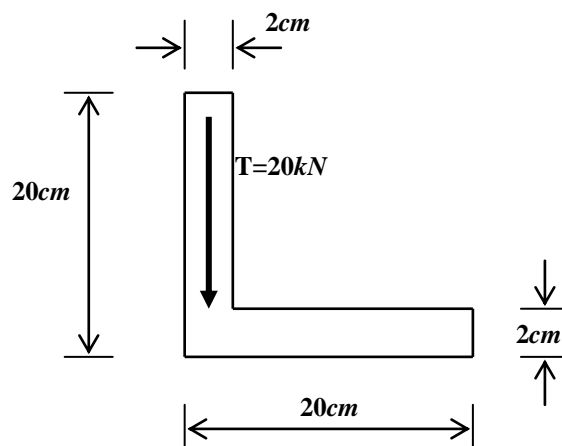
16) Determine o valor das tensões tangenciais devido a esforço transverso:

- a) Máxima;
- b) No ponto mais afastado da parte recta da alma.



Solução: a) $\tau_{\max} = 17.55 MPa$; b) $\tau = 13.82 MPa$

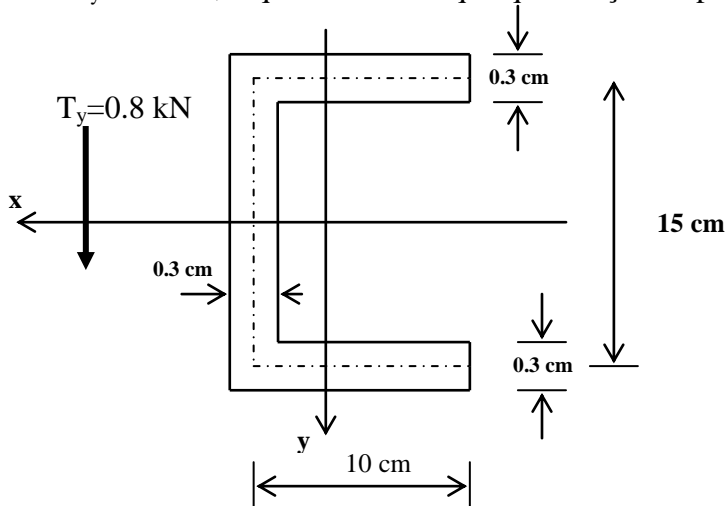
17) Considere a seguinte secção sujeita a um esforço transverso de $20kN$:



- Determine a expressão geral da distribuição das tensões tangenciais no troço vertical da secção (alma);
- Calcule a resultante da distribuição das tensões na alma.

Solução: b) $R=19.88kN$

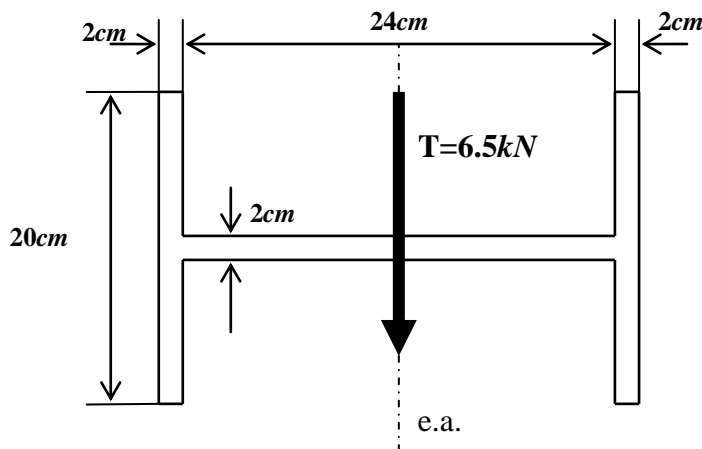
18) Admita que a secção representada na figura seguinte está sujeita a um esforço transverso de $T_y=0.8\text{ kN}$, o qual não induz qualquer torção na peça.



- Faça a representação do diagrama rebatido das tensões tangenciais devido ao esforço transverso nas abas e na alma;
- Calcule a tensão máxima devido a esforço transverso na alma;
- Calcule a tensão máxima devido a esforço transverso na aba;
- Calcule a resultante da distribuição das tensões numa das abas;
- Calcule a resultante da distribuição das tensões na alma.

Solução: b) $\tau_{zy\text{ max}}=1.955MPa$; c) $\tau_{zx\text{ max}}=1.42MPa$; d) $0.213kN$; e) $0.8kN$

19) Admita uma barra com a secção indicada na figura, sujeita a uma flexão simples e recta segundo o eixo da acção igualmente indicado na figura. Na secção o valor do esforço transverso é $6.5kN$.



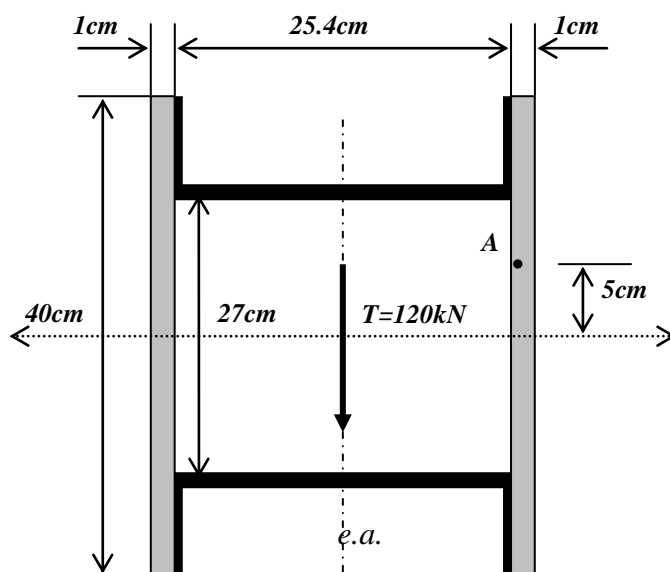
- Determine a expressão geral da distribuição das tensões tangenciais no troço vertical superior do lado esquerdo;

- b) Qual o valor máximo da tensão tangencial no troço vertical superior do lado esquerdo;
 c) Calcule a resultante da distribuição das tensões tangenciais no troço vertical superior do lado esquerdo;

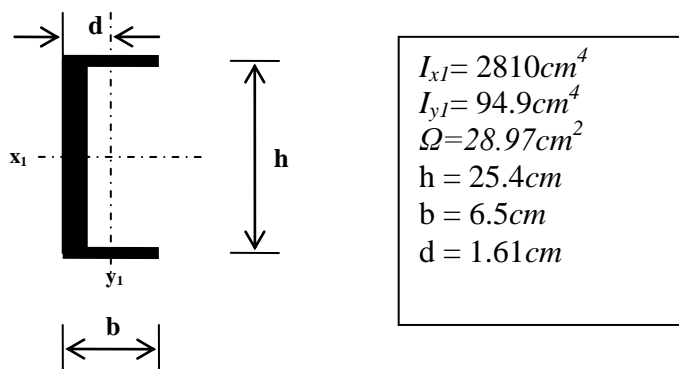
Solução: b) $\tau_{zy\ max}=1.21MPa$; c) $R=1.615kN$

20) Admita uma barra com a secção indicada na figura, sujeita a uma flexão simples e recta segundo o eixo da acção igualmente indicado na figura. Na secção o valor do esforço transverso é $120kN$.

A barra é feita de aço e constituída por dois perfiz U e duas chapas soldadas nas abas.



Cada perfil U tem as seguintes características:

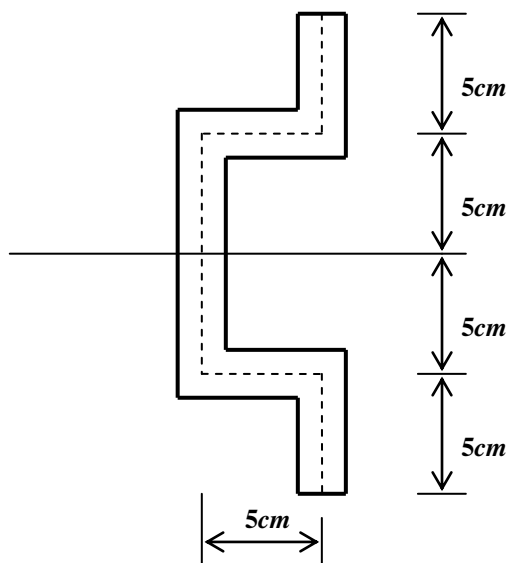


Calcule, no ponto A, o valor da tensão tangencial devido ao esforço transverso.

Solução: $\tau_{zy\ A}=20.25MPa$

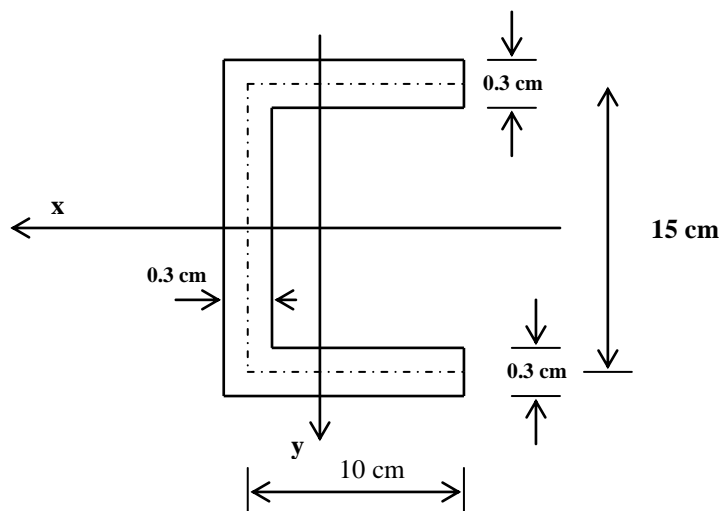
4.3. Centro de corte em secções de paredes finas

21) Determine o centro de corte da seguinte secção de espessura uniforme igual a 1 cm.



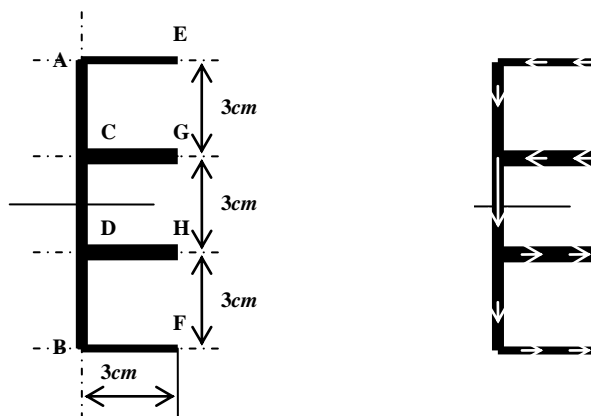
Solução: $d=15.9mm$ à esquerda da linha média de alma

22) Para o perfil indicado na figura seguinte determine a distância d do Centro de Corte à linha média da alma.



Solução: $d=40mm$ à esquerda da linha média de alma

23) Para o perfil indicado na figura seguinte localize o Centro de Corte. O fluxo das tensões tangenciais na secção estão igualmente representados na figura:

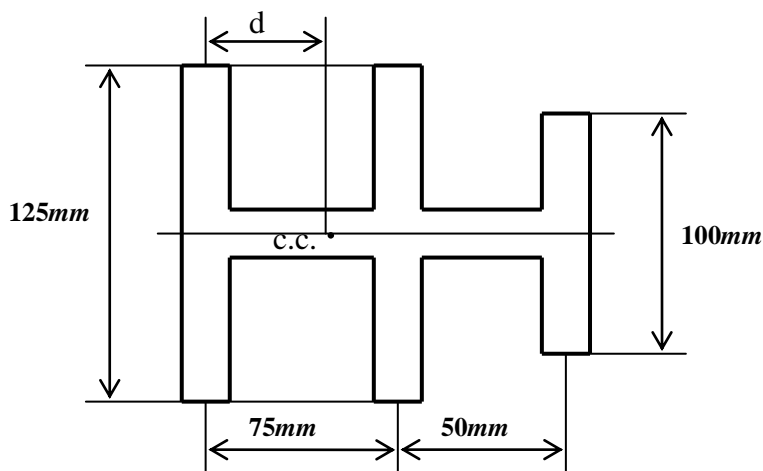


Espessuras (cm)

AB	AE	BF	CG	DH
0.6	0.4	0.4	0.6	0.6

Solução: $d=9.176mm$ à esquerda da linha média de AB

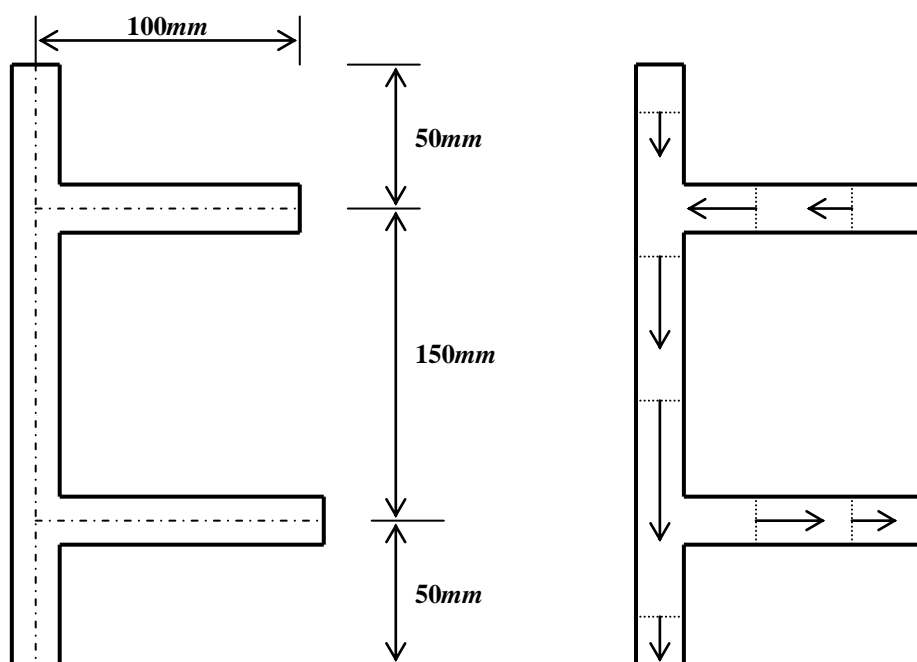
24) Para o perfil indicado na figura seguinte determine a distância d ao Centro de Corte. Admita que a secção tem espessura uniforme de 5mm.



Solução: $d=55.3mm$

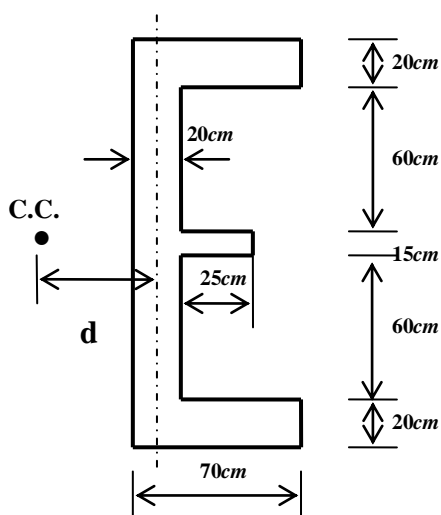
25) Determine o Centro de Corte da secção seguinte a qual tem espessura uniforme de 3mm.

Admita que o fluxo das tensões tangenciais na secção são os apresentados na figura.



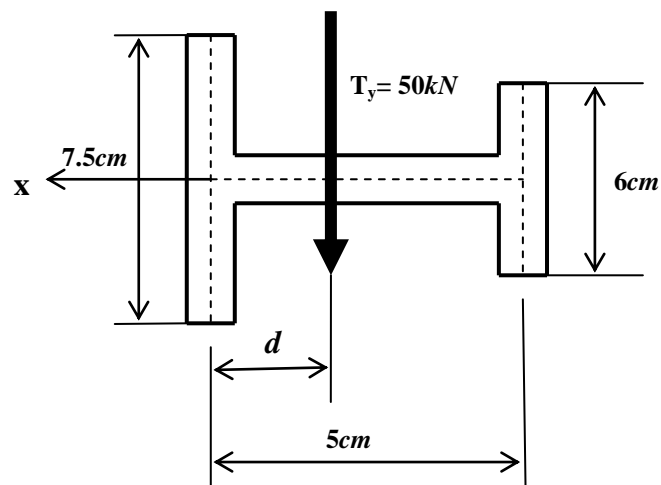
Solução: $d=23.3mm$ à esquerda da linha média da alma

26) Para o perfil indicado na figura seguinte determine a distância d ao Centro de Corte.



Solução: $d=20.57cm$ à esquerda da linha média da alma

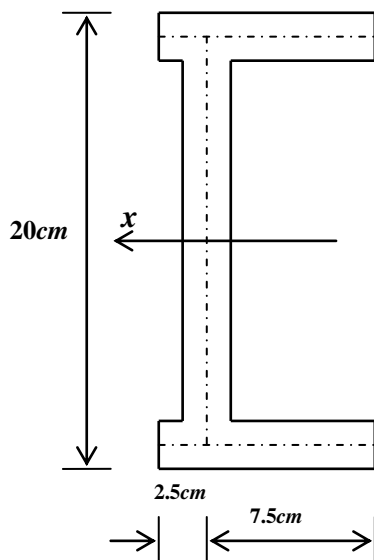
27) Admita uma barra com a secção indicada na figura, com espessura uniforme e igual a 0.8cm , sujeita a um esforço transverso $T_y = 50\text{kN}$:



- Calcule a tensão τ_{zy} a meio do troço vertical do lado direito;
- Mostre que são nulas as tensões tangenciais τ_{zx} em qualquer ponto do troço horizontal da secção.
- Admita que T_y passa pelo centro de corte. Calcule a distância d .

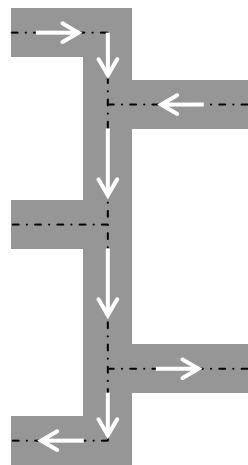
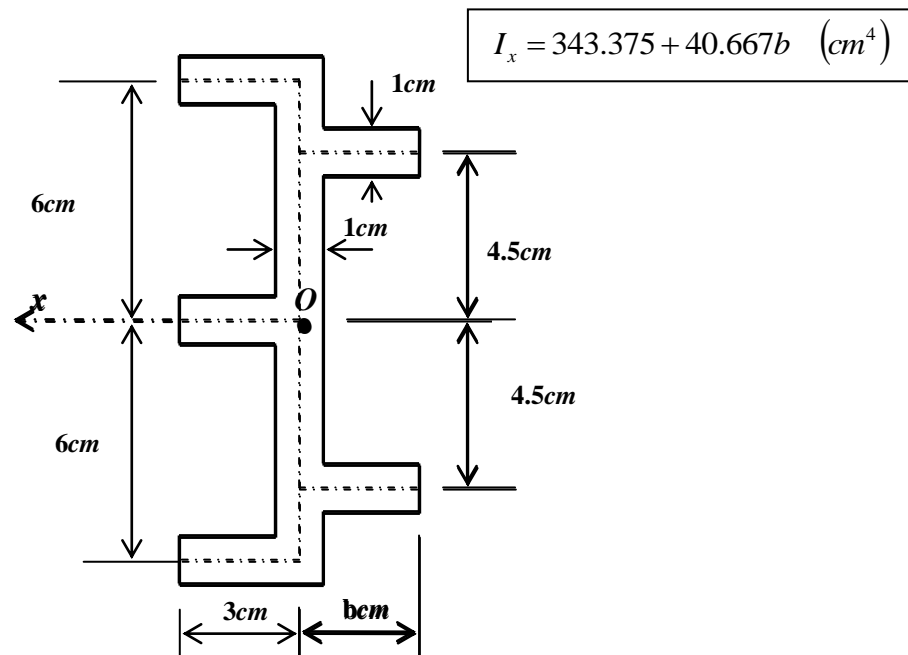
Solução: a) $\tau_{zy} = 52.7\text{MPa}$; c) $d = 1.69\text{cm}$

28) Determine o centro de corte da secção seguinte de espessura uniforme igual a 0.5cm . Admita que $I_x = 1236.6\text{cm}^4$



Solução: $d = 19.2\text{mm}$ à esquerda da linha média da alma

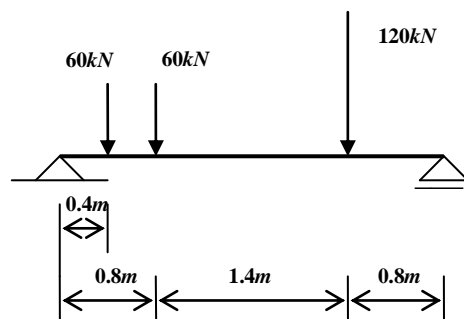
29) Para o perfil indicado na figura seguinte determine a distância \underline{b} de forma a que o Centro de Corte fique situado no ponto \underline{O} . Admita que a secção tem espessura uniforme de 1cm .



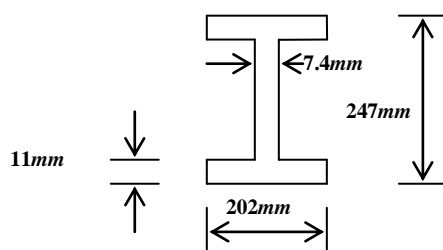
Solução: $b=4\text{cm}$

4.4. Estado de tensão em flexão simples

30) Considere a viga sujeita às acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura: seguinte:

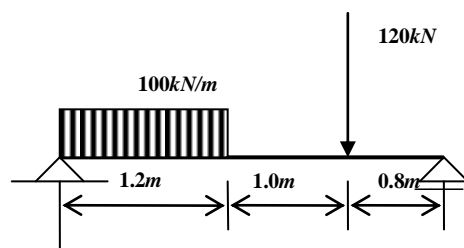


Admita que a viga tem a secção indicada na figura seguinte:

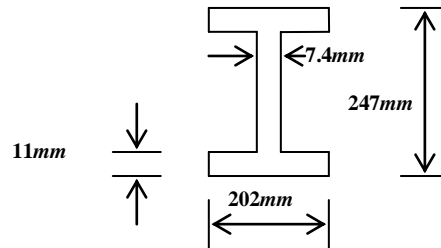


- Trace os diagramas de esforços (T; M);
 - Admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material $\sigma_{Rd} = 235MPa$, verifique a viga quanto à combinação das tensões normais e tangenciais (critério de Von Mises). Sugere-se que efectue esta verificação utilizando o “método expedito”.
- Solução: b) $198.9MPa < 235MPa$, Verifica.

31) Considere a viga sujeita às acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura: seguinte:



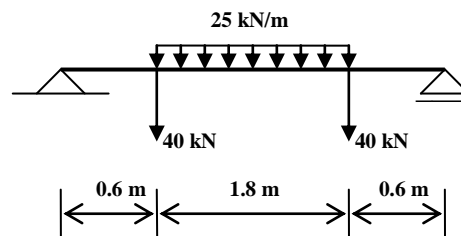
Admita que a viga tem a secção indicada na figura seguinte:



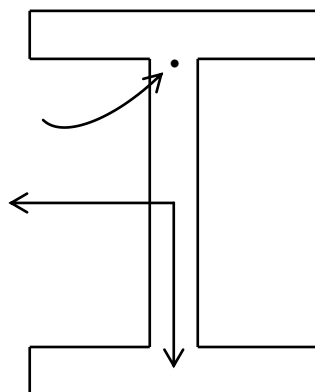
- a) Trace os diagramas de esforços (T; M);
 b) Admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material $\sigma_{Rd} = 235 \text{ MPa}$, verifique a viga quanto à combinação das tensões normais e tangenciais (critério de Von Mises). Sugere-se que efectue esta verificação utilizando o “método simplificado por excesso”.

Solução: b) $198.9 \text{ MPa} < 235 \text{ MPa}$, Verifica.

32) Considere a viga ilustrada na figura seguinte:



- a) Trace os diagramas de esforços (T; M);
 b) Dimensione a viga apenas em relação ao momento flector, assumindo um perfil INP (tabela anexa) e um valor de cálculo da tensão resistente do material, $\sigma_{Rd} = 235 \text{ MPa}$;
 c) No ponto assinalado da secção, utilize o critério de Von Mises para verificar se o perfil seleccionado na alínea anterior garante a segurança quando se combina esforço



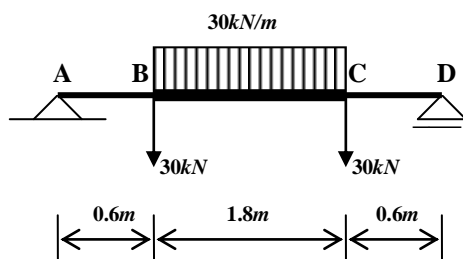
transverso e momento flector.

Para os fins exclusivos de cálculo de momento estático, assuma que os banzos do perfil são rectangulares com a espessura média indicada na tabela anexa.

- d) Verifique de novo a viga na mesma secção utilizando o “método simplificado por excesso”.

Solução: b) INP 20 c) $168.36 \text{ MPa} < 235 \text{ MPa}$, Verifica; d) $194.47 \text{ MPa} < 235 \text{ MPa}$, Verifica

33) Considere a viga sujeita a acções cujo valor de cálculo se ilustram na figura seguinte:



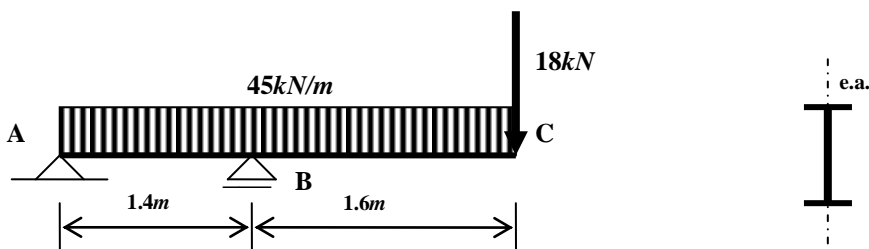
a) Trace os diagramas de esforços (T; M);

b) Para a viga foi utilizado um perfil INP 180 (tabela anexa) reforçado entre B e C. O reforço é constituído por barra rectangular de aço, soldada em cada um dos banzos. Cada barra rectangular tem espessura de 0.5cm e a largura de \underline{b} . Dimensione a largura \underline{b} do reforço, tendo em consideração apenas o momento flector e um valor de cálculo da tensão resistente do material, $\sigma_{Rd} = 235MPa$;

c) Verifique a viga à combinação das tensões normais e tangenciais (critério de Von Mises). Sugere-se que efectue esta verificação utilizando o “método simplificado por excesso”.

Solução: b) $b \geq 4.95cm$, c) $231.42MPa < 235MPa$, Verifica.

34) Considere a viga sujeita a acções cujos valores de cálculo se ilustram na figura seguinte:



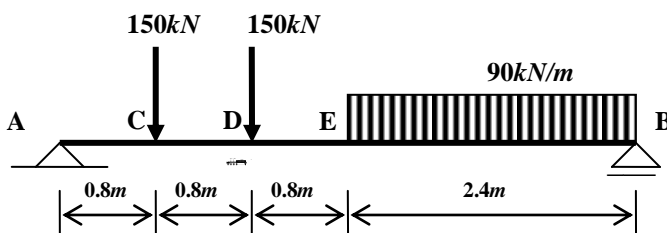
a) Trace os diagramas de esforços;

b) Exclusivamente com base nas tensões normais, dimensione a viga como um perfil INP (ver dados na tabela anexa), admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material, $\sigma_{Rd} = 235MPa$.

c) Verifique a viga à combinação das tensões normais e tangenciais (critério de Von Mises). Sugere-se que efectue esta verificação utilizando o “método simplificado por excesso”.

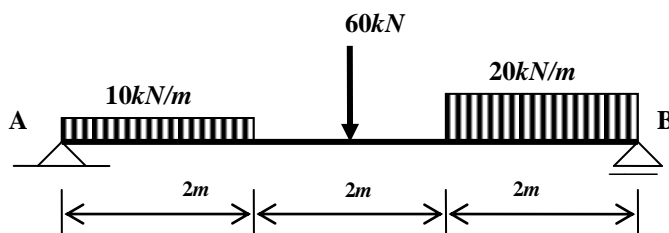
Solução: b) INP 26 c) $210.06MPa < 235MPa$, Verifica.

35) A viga simplesmente apoiada, sujeita a uma flexão simples e recta, tem aplicadas acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura:



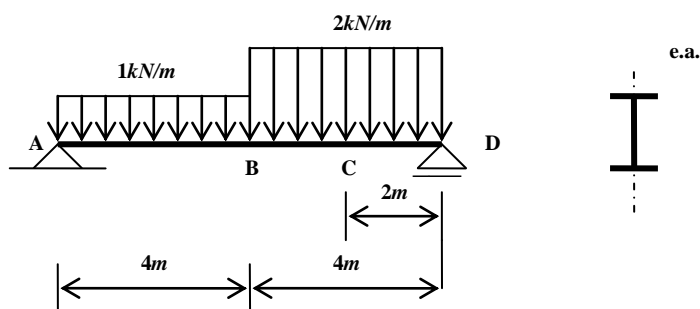
- a) Trace os diagramas de esforços;
 - b) Exclusivamente com base nas tensões normais, dimensione a viga como um perfil INP (ver dados na tabela anexa), admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material, $\sigma_{Rd} = 235MPa$;
 - c) Verifique a inserção da alma com os banzos quanto à combinação das tensões normais e tangenciais (critério de Von Mises). Sugere-se que efectue esta verificação de forma aproximada, usando valores de tensões obtidos por excesso.
- Solução: b) INP 40 c) $228.15MPa < 235MPa$ Verifica.

36) Admita a barra indicada na figura, sujeita a uma flexão simples e recta:



- a) Trace os diagramas de esforços;
 - b) Exclusivamente com base nas tensões normais, dimensione a viga como um perfil INP (ver dados na tabela anexa), admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material, $\sigma_{Rd} = 235MPa$;
 - c) Verifique a inserção da alma com os banzos quanto à combinação das tensões normais e tangenciais (critério de Von Mises). Sugere-se que efectue esta verificação de forma aproximada, usando valores obtidos por excesso.
- Solução: b) INP 28 c) $222.65MPa < 235MPa$ Verifica.

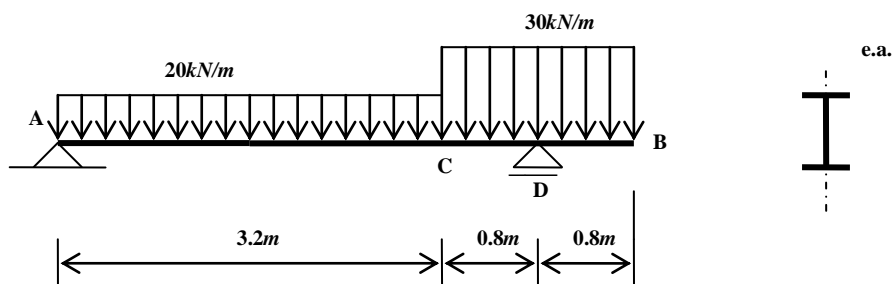
37) Considere a viga sujeita a acções cujo valor de cálculo se ilustram na figura seguinte:



- a) Trace os diagramas de esforços (T; M);
- b) Dimensione a viga à flexão, utilizando um perfil INP e considerando um valor de cálculo da tensão resistente do material, $\sigma_{Rd} = 235MPa$;
- c) **Em C**, verifique a viga à combinação das tensões normais e tangenciais (critério de Von Mises). Sugere-se que efectue esta verificação utilizando o “método simplificado por excesso”.

Solução: b) INP 12 c) $182.9MPa < 235MPa$ Verifica.

38) Uma viga constituída por um perfil INP22 está submetida a cargas cujo valor da acção se encontra na figura seguinte

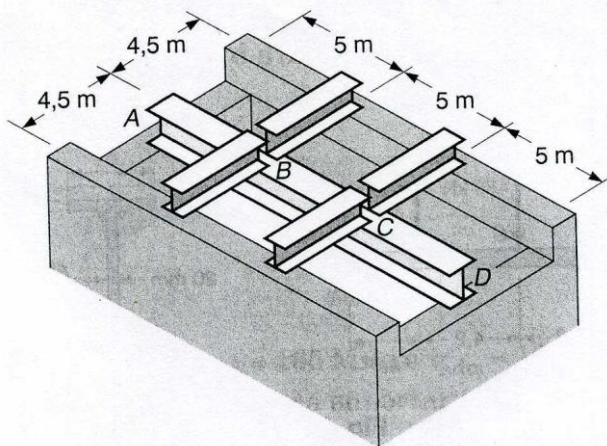


Admita um valor de cálculo da tensão resistente do material, $\sigma_{Rd}=140MPa$

- Trace os diagramas de esforço transversal e de momento flector;
- Verifique o dimensionamento unicamente à tensão normal;
- Verifique o dimensionamento unicamente à tensão tangencial;
- Na secção C faça a verificação do estado de tensão utilizando o critério de Von Mises. Sugere-se que efectue esta verificação utilizando o “método simplificado por excesso”.

Solução: b) $132.59MPa < 140MPa$ Verifica; c) $32.42MPa < 140/\sqrt{3}MPa$ Verifica; d) $79.16MPa < 140MPa$ Verifica.

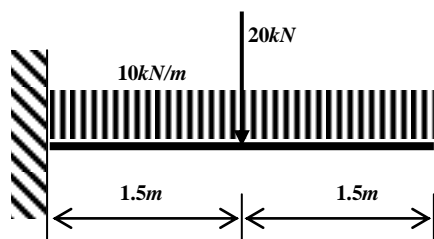
39) Em cada uma das quatro vigas de 4.5m está aplicada uma carga cujo valor de cálculo é 36kN/m. Estas vigas estão suportadas pela viga AD e em paredes de betão.



- Exclusivamente com base nas tensões normais, dimensione **todas** as vigas como perfis INP (ver dados na tabela anexa), admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material, $\sigma_{Rd}= 235MPa$;
- Na viga AD verifique a inserção da alma com os banzos quanto à combinação das tensões normais e tangenciais (critério de Von Mises). Sugere-se que efectue esta verificação de forma aproximada, usando valores de tensões obtidos por excesso.
- Verifique as vigas de 4.5m quanto à tensão tangencial máxima.

Solução: a) Viga AD: INP55; restantes vigas: INP26; b) $226.59MPa < 235MPa$, Verifica; c) $38.6MPa < 135.68MPa$, Verifica.

40) Considere a viga sujeita às acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura seguinte:



a) Exclusivamente com base nas tensões normais, dimensione a viga como perfis INP (ver dados na tabela anexa), admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material, $\sigma_{Rd} = 235MPa$;

b) Verifique a inserção da alma com os banzos quanto à combinação das tensões normais e tangenciais (critério de Von Mises). Sugere-se que efectue esta verificação de forma aproximada, usando valores de tensões obtidos por excesso.

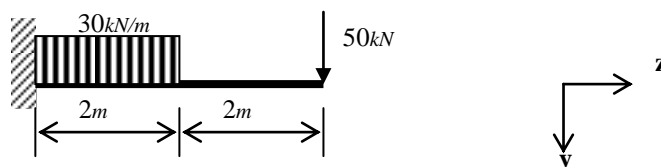
Solução: a) INP 24 b) $217.29MPa < 235MPa$ Verifica.

41) A viga da figura seguinte tem aplicada acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura:

a) Trace os diagramas de esforços;

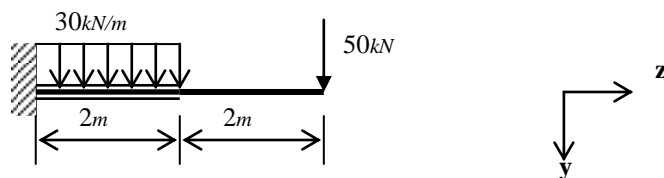
b) Exclusivamente com base nas tensões normais, dimensione a viga como um perfil INP (ver dados na tabela anexa), admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material, $\sigma_{Rd} = 235MPa$;

c) Verifique a inserção da alma com os banzos quanto à combinação das tensões normais e tangenciais (critério de Von Mises). Sugere-se que efectue esta verificação de forma aproximada, usando valores de tensões obtidos por excesso



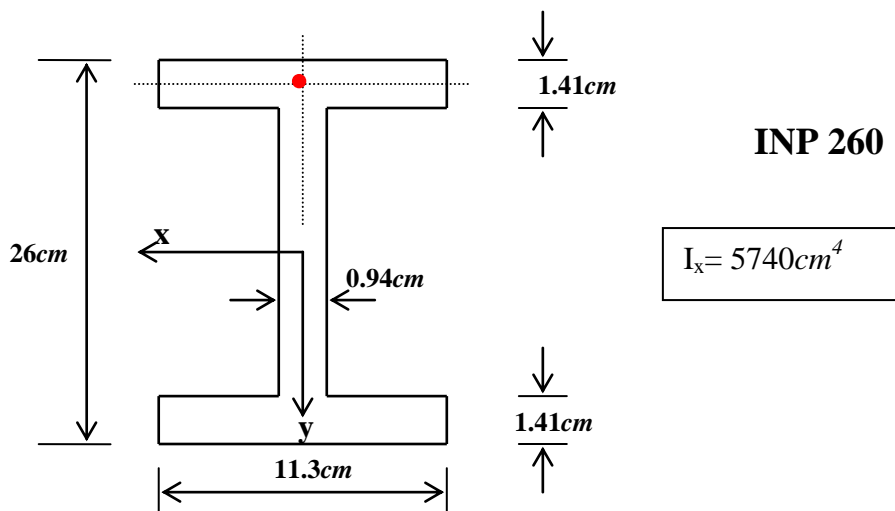
Solução: b) INP 38 c) $210.78MPa < 235MPa$ Verifica.

42) A viga em consola tem aplicada acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura. É um perfil INP 260 reforçado ao longo de 2m, a partir do encastramento, com chapa de aço, soldada em cada um dos banzos. Cada chapa tem espessura de 1cm e a largura de 28cm.



a) Atendendo exclusivamente à solicitação devida a momento flector, verifique se o dimensionamento satisfaz a segurança ao longo de toda a barra. Admita um valor de cálculo da tensão resistente do material, $\sigma_{Rd} = 235 MPa$.

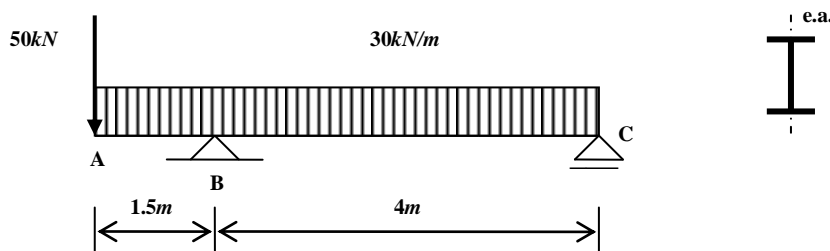
b) Admitindo a simplificação geométrica para a secção INP 260 indicada na figura seguinte, verifique a segurança no ponto (indicado) de inserção da alma nos banzo do perfil, utilizando o critério de Von Mises.



c) Repita a verificação usando o método aproximado por excesso.

Solução: a) Troço c/ reforço $228.2 MPa < 235 MPa$, verifica; troço s/ reforço $226.5 MPa < 235 MPa$, verifica.
 b) Troço c/ reforço $212.6 MPa < 235 MPa$, verifica; troço s/ reforço $216.1 MPa < 235 MPa$, verifica.
 c) Troço c/ reforço $216.1 MPa < 235 MPa$, verifica; troço s/ reforço $218.1 MPa < 235 MPa$, verifica.

43) A viga de aço tem aplicada acções cujos valores de cálculo estão indicados na figura. a) Utilizando um perfil INP, dimensione a viga exclusivamente à flexão, admitindo um valor de cálculo da tensão resistente do material $\sigma_{Rd} = 235 MPa$;
 b) Verifique a viga de acordo com o critério de Von Mises.



Solução: a) INP 280; b) $211.9 MPa < 235 MPa$, verifica

Referências

Dias da Silva, V. – *Mecânica e Resistência dos Materiais*, capítulo VIII – Esforço Transverso. 2ª Edição. Edição: ZUARI – Edição de Livros Técnicos, Lda. 1999. ISBN: 972-98155-0-X.

William Nash – *Resistência de Materiais*. Edição: McGraw-Hill . 2001. ISBN: 972-773-090-6.