A equação de Schrödinger não linear (com campo magnético) Instabilidade de estados estacionários com simetria cilíndrica

Rui Manuel Fonseca Pinto

Orientador: Professor Doutor José Manuel Gonçalves Ribeiro

" Esta dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri "

Dissertação apresentada à Universidade de Évora para obter o grau de Mestre em *Matemática Aplicada*

Évora, Abril de 2004

Conteúdo

Aos meus pais

Fernanda e António,

e aos meus irmãos

Sónia e Bruno.

A equação de Schrödinger não linear (com campo magnético). Instabilidade de estados estacionários com simetria cilíndrica.

Resumo:

Neste trabalho, são estabelecidas propriedades de instabilidade de soluções da conhecida equação de Schrödinger para o movimento de partículas quânticas sem spin, na presença de um campo magnético uniforme.

Provamos que existe instabilidade pelo fluxo da equação de evolução sob determinadas condições.

Provamos ainda, que as trajectórias usadas para demonstrar instabilidade são globais e uniformemente limitadas.

Nonlinear Schrödinger equation (with magnetic field). Instability of stationary states with cilindrical simetry.

Abstract:

This work is concerned with instability properties of solutions of the well known Schrödinger equation in the presence of a uniform magnetic field.

We prove that exist instability by the flow of the evolution equation in some conditions.

Moreover, the trajectories used to exhibit instability are global and uniformly bounded.

Nota Introdutória

O trabalho que aqui apresento agora, é o resultado de parte dos ensinamentos que desde há 8 anos a esta parte adquiri neste "*percurso*" que fiz pelo Alentejo.

Em Setembro de 1996, quando cheguei a Évora para me matricular no 1^o ano da licenciatura, estava longe de pensar que que os caminhos a percorrer iriam passar por aqui.

Após dois anos de experiências no ensino Secundário, tive a oportunidade de entrar num outro mundo de desafios. A vontade de estudar um pouco mais, aliada à necessidade de mais saber, encaminhou-me até esta "*estação*". Sei agora que é um ponto de partida e não de chegada!

Desde a primeira hora, e ao longo de várias cadeiras da licenciatura fui aluno do Professor José Ribeiro. Assim que terminei a parte curricular do mestrado, logo o procurei para me orientar.

O trabalho que desenvolvi sob a sua orientação foi bastante enriquecedor, não só pelos conteúdos, mas também pelo contacto com o seu Saber Científico.

Por tudo isto, em primeiro lugar quero deixar aqui o meu profundo agradecimento

ao Professor José Ribeiro pelo trabalho desenvolvido, por tudo o que me deu a conhecer e pelos horizontes que me abriu.

Quero agradecer também a todos quantos directa ou indirectamente contribuíram para este trabalho, nomeadamente colegas do Mestrado, e colegas das escolas por onde passei.

A terminar, cumpe-me deixar também um agradecimento especial à minha família, à qual dedico este trabalho.

Capítulo 1

Apresentação do problema

Em $\mathbb{R}^3$, notamos as coordenadas cilindricas de um ponto por (ρ, φ, z). Um campo magnético uniforme ao logo do eixo dos zz definido por $B = be_z, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, fica definido através de um potencial vector solenoidal A

$$B = rot\ A, div\ A = 0, A = \frac{b}{2}\rho e_z.$$

Em tal campo magnético, a equação de evolução de uma partícula quântica sem spin é descrita por:

$$id_t u = -L_A u = -(-\bigtriangleup u - 2iA.\nabla u + |A|^2 u). \tag{1.1}$$

Associamos a (1.1) a equação de evolução não linear

$$id_t u = -L_A u - \alpha |u|^{p-1} u \tag{1.2}$$

e o problema não linear elíptico

$$L_A \Phi + \omega \Phi + \alpha |\Phi|^{p-1} \Phi = 0. \tag{1.3}$$

Pela estrutura do termo não linear, procurar soluções de (1.2) do tipo

$$u(t,x) = e^{-i\omega t}\Phi(x)$$

é equivalente a resolver (1.3). Às soluções deste tipo chama-se **estados estacionários** de (1.2).

Neste trabalho, trataremos de propriedades de *instabilidade*, nomeadamente da instabilidade de estados estacionários com simetria cilíndrica, $\Phi(\rho, z)$.

O problema de Cauchy relativo a (1.2) está resolvido em [2] e a existência de solução e caracterização do problema variacional associada a (1.3) (particularmente no caso de soluções simétricas), estão tratadas em [4]. Adaptando o argumento variational em [3], para $p < 1 + \frac{4}{3}$ a estabilidade de estados estacionários foi provada em [2].

Na ausência de campo magnético, a instabilidade de estados estacionários de acção mínima (ground states) foi provada, para $p \geq 1 + \frac{4}{3}$, de duas formas diferentes:

Em [1] com base num argumento de explosão em tempo finito.

Em [7], considerando a acção do *ground state* em função de ω, e discutindo a convexidade de tal função.

Ambos os métodos não são aplicáveis no caso de campo magnético.

A tentativa de aplicação do formalismo *Grillakis-Shatah-Strauss* (GSS) na resolução do presente problema, foi o ponto de partida para o estudo que aqui se encontra apresentado. O formalismo não é directamente aplicável, serão necessários alguns contornos.

É possível fazer-se uma generalização ao caso $k \neq 0$.

Capítulo 2

Introdução

– Definição do espaço.

Seja $\nabla_A v = \nabla v + iAv$ e considerem-se os seguintes espaços de Hilbert *reais*

$$L^2 = \left\{ v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \mid \int |v|^2 < \infty \right\}, \qquad (v, w) = \mathcal{R} \int v\overline{w};$$

$$H_A^1 = \left\{ v \in L^2 \mid \int |\nabla_A v|^2 \right\} \qquad , \quad (v, w)_{H_A^1} = \mathcal{R} \int (v\overline{w} + \nabla_A v . \overline{\nabla_A w}).$$

[Os integrais apresentados são sobre $\mathbb{R}^3$ (salvo indicação contrária). Utilisaremos (,) para indicar o produto escalar em L^2].

Seja H_A^{-1} o espaço dual de H_A^1. Tomando L^2 para *pivot,* temos $H_A^1 \overset{d}{\hookrightarrow} L^2 \overset{d}{\hookrightarrow} H_A^{-1}$.

Defimos em L^2 o operador $\mathcal{L}$ por:

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ v \in H_A^1 : L_A v \in L^2 \right\}, \qquad \mathcal{L}v = L_A v.$$

Seja $H_A^2 = D(\mathcal{L})$, dotado da norma do gráfico. Temos então $H_A^2 \overset{d}{\hookrightarrow} H_A^1$. E temos:

$$(L_A v, w) = \mathcal{R} \int \nabla_A v . \overline{\nabla_A w} \qquad \forall v \in H_A^2, w \in H_A^1. \tag{2.1}$$

(2.1) é facilmente demonstrável, e deste facto se deduz que $\mathcal{L}$ é um operador simétrico m-acretivo e $L_A + 1$ é uma isometria de H^1_A em H^{-1}_A. Este facto conduz-nos a definir, em H^{-1}_A o operador $\widetilde{\mathcal{L}}$ por

$$D(\widetilde{\mathcal{L}}) = H^1_A \quad , \quad \widetilde{\mathcal{L}}v = L_A v.$$

(2.1) generaliza-se a

$$\langle L_A v, w\rangle = \mathcal{R}\int \nabla_A v.\overline{\nabla_A w} \qquad \forall v, w \in H^1_A.$$

[$\langle\ ,\ \rangle$ será usado para indicar a dualidade (H^{-1}_A, H^1_A)] e deduzimos que o operador $\widetilde{\mathcal{L}}$ é simétrico e m-acretivo.

Por último, apliquemos o teorema de Hille-Yosida aos operadores $i\mathcal{L}, -i\mathcal{L}, i\widetilde{\mathcal{L}}, -i\widetilde{\mathcal{L}}$ e resolva-se o problema de Cauchy da equação (1.1) :

Dado $u(0) = u_0 \in H^1_A$, existe um único $u \in C(\mathbb{R}, H^1_A) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-1}_A)$ tal que $u(0) = u_0$ e $id_t u = -L_A u$ em $C(\mathbb{R}, H^{-1}_A)$. Tal solução u verifica as seguintes leis de conservação:

$$\int |\nabla_A u(t)|^2 = \int |\nabla_A u_0|^2 \, , \ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

$$\int |u(t)|^2 = \int |u_0|^2 \, , \ \forall t \in \mathbb{R}; \tag{2.3}$$

além disto, se $u_0 \in H^2_A$, então $u \in C(\mathbb{R}, H^2_A) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2)$.

– **$\mathbf{id_t u = -L_A u}$ é um sistema Hamiltoniano.**

Definimos em H^1_A a **Energia Cinética-Magnética** por $E(v) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int |\nabla_A v|^2$.

Trata-se de um funcional C^∞, e a sua derivada em v é $L_A v$. Escrevemos agora (1.1) como $d_t u = iE'(u)$ e o carácter Hamiltoniano é agora evidente, uma vez que a multiplicação por i é um operador anti-simétrico.

Este facto esclarece a lei de conservação (2.2): se a trajectória estivesse em $C^1(\mathbb{R}, H^1_A)-$ o que não acontece para qualquer u_0- deveríamos ter:

$$d_t\left(E(u)\right) = \langle E'(u), d_t u\rangle = \langle E'(u), iE'(u)\rangle = 0.$$

– **Lei de conservação (2.3).**

Seja L um operador anti-simétrico em H^1_A e em L^2, limitado em H^1_A. Considere-se $(T(\theta))_{\theta\in\mathbb{R}}$ o grupo de isometrias uniformemente contínuo em H^1_A gerado por L. Suponhamos E invariante por este grupo;

$$E(T(\theta)v) = E(v) \qquad \forall v \in H^1_A, \theta \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

e defina-se em H^1_A o funcional $Q(v) = \dfrac{1}{2}(-iLv, v)$ a que chamamos **Carga.** Trata-se de um funcional C^∞, e a sua derivada em v é $-iLv$. O Cálculo da derivada de 2.4 em $\theta = 0$ conduz a $\langle E'(v), Lv\rangle = 0$ para todo v, e a carga é conservada ao longo de uma trajectória $C^1(\mathbb{R}, H^1_A)$:

$$d_t Q(u) = \langle Q'(u), d_t u\rangle = \langle -iLu, iE'(u)\rangle = 0.$$

Para chegar à lei de conservação (2.3), basta identificar L com a multiplicação por i : A conservação da norma L^2 advêm da invariância por $v \rightarrow e^{i\theta}v$.

– **Equação de evolução não linear.**

Pretendemos que se mantenham a conservação da energia e da carga. Temos de manter o carácter Hamiltoniano e a invariância por $(T(\theta))_{\theta\in\mathbb{R}}$.

Definimos um funcional C^1, Energia Potencial **W**, que verifica

$$W(T(\theta)v) = W(v), \qquad \forall v \in H^1_A,\ \theta \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

e definimos em H^1_A a energia (global) ou Hamiltoniano por

$$H(v) = E(v) + W(v).$$

Desta forma, a equação de evolução não linear pode escrever-se $d_t u = iH'(u)$.

Neste trabalho as não linearidades estudadas são do tipo:

$$W(v) = \frac{\alpha}{p+1}\int |v|^{p+1},$$

onde α é um parâmetro real, e p é um expoente admissível.

Para determinar o intervalo em que deve estar p, o ponto de partida é a seguinte desigualdade; $|\nabla|\psi|| \le |\nabla_A\psi|$ *q.p.t.p*, para qualquer $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$. Assim, se $v \in H^1_A$, então $|v| \in H^1$ e $\||v|\|_{H^1} \le \|v\|_{H^1_A}$. Usando este facto e injecções de Sobolev, $H^1_A \overset{d}{\hookrightarrow} L^q$ para $q \in [2,6]$, donde $L^q \overset{d}{\hookrightarrow} H^{-1}_A$ para $q \in \left[\frac{6}{5},2\right]$. Seguidamente, aplicando técnicas da teoria da medida, prova-se que, para $p \in [1,5]$, W é um funcional C^1 (C^2, se $p > 2$), a sua derivada em v é $\alpha|v|^{p-1}v$.

Desta forma a equação não linear (1.2) transforma-se em

$$id_t u = -L_A u - \alpha|u|^{p-1}u.$$

– **Não linearidades gerais.**

Resolver o problema de Cauchy para não-linearidades gerais não é um problema trivial. A resolução baseia-se em algumas estimativas da equação linear não homogénea obtidas por técnicas de interpolação. Uma explicação mais aprofundada pode ser encontrada em [5]. Aqui indicaremos apenas o resultado adaptado a não linearidades do tipo indicado.

Teorema 1 *Suponhamos* $p \in [1,5)$. *Dado* $u_0 \in H_A^1$, *existe um único* $T^* \in (0,\infty]$ *e um único* $u \in C([0,T^*), H_A^1) \cap C^1([0,T^*), H_A^{-1})$ *tal que* $u(0) = u_0, d_t u = -L_A u - \alpha |u|^{p-1} u$ *em* $C(([0,T^*), H_A^{-1}))$ *e* $\|u(t)\|_{H_A^1} \to \infty$ *quando* $t \to T^*$, *se* $T^* < \infty$. *Para tal* u *existe conservação da energia e da carga.*

O Teorema continua, discutindo o caso $u_0 \in H_A^2$ e a dependênia de T^*, u em u_0. Para o presente trabalho, esta versão mais curta serve os objectivos.

Dado que H é invariante por $(T(\theta))_{\theta\in\mathbb{R}}$, procurar soluções da equação de evolução do tipo $u(t,x) = T(-\omega t)\Phi(x)$, onde $\omega \in \mathbb{R}$ e $\Phi \in H_A^1$, conduz-nos à equação estacionária:

$$L_A\Phi + \omega\Phi + \alpha |\Phi|^{p-1} \Phi = 0, \quad em\ H_A^{-1}. \tag{2.6}$$

Tais soluções são chamadas **estados estacionários.**

Para a resolução da equação (2.6) consideramos dois problemas variacionais em H_A^1 :

Primeiro: Tenta-se encontar um ponto minimizante do funcional quadrático $E(v)+\omega Q(v)$ que satisfaz a condição $\int |v|^{p+1} = \mu,\ \mu \in (0,\infty)$. Se tal ponto existe, designêmo-lo por w, verificará $L_A w + \omega w = \lambda(p+1)\,|w|^{p-1}\,w \quad em\ H_A^{-1}$, sendo λ real. Em seguida, usando as diferentes homogenidades de $E(v)+\omega Q(v)$ e $\int |v|^{p+1}$, esperamos determinar λ como função de μ e, fazendo variar μ, encontrar o valor de λ conveniente. Outros detalhes poderão encontar-se em [4], em particular como determinar os valores de ω para os quais uma sucessão minimizante é limitada, e como ultrapassar a falta de compacidade na injecção $H_A^1 \overset{d}{\hookrightarrow} L^{p+1}$, aplicando o método de concentração-compacidade. O resultado é o seguinte:

Teorema 2 *Suponhamos $p \in (1,5)$, $\omega \in (-|b|,\infty)$, $\alpha \in (-\infty,0)$. Então, para todo $\mu \in (0,\infty)$, $E(v)+\omega Q(v)$ tem um mínimo na superfície $\int |v|^{p+1} = \mu$. Mais, existe μ, digamos μ^*, tal que cada ponto de mínimo correspondente verifica $L_A w + \omega w + \alpha\,|v|^{p-1}\,w = 0$ em H_A^{-1}.*

Em segundo lugar, tenta-se encontar o mínimo de $H(v)$ sujeito à condição $\int |v|^2 = \mu,\ \mu \in (0,\infty)$. Se tal ponto existe, digamos w, verificará $L_A w + \alpha\,|w|^{p-1}\,w = \lambda 2\omega$ *em* H_A^{-1} para algum λ real. Neste caso, não podemos argumentar por homogenidade para ajustar λ, e o multiplicador de Lagrange permanece indeterminado. Novamente referimos [4] para um estudo mais pormenorizado, e apresentamos o resultado:

Teorema 3 *Suponhamos $p \in \left(1, 1+\frac{4}{3}\right)$, $\alpha \in (-\infty,0)$. Então para qualquer $\mu \in$*

$(0, \infty)$, *existe o mínimo de* $H(v)$ *na superfície* $\int |v|^2 = \mu$. *Cada ponto de mínimo* w *satisfaz* $L_A w + \omega w + \alpha |v|^{p-1} w = 0$ *em* H_A^{-1}, *para* ω *real.*

– Estados estacionários com propriedades de simetria particulares.

Para um inteiro k definimos um subespaço fechado de H_A^1 por

$$H_{A,k}^1 = \left\{ v \in H_A^1 : v(\rho, \varphi, z) e^{ik\varphi} \text{ depende exclusivamente de } (\rho, z) \right\}.$$

Notemos que o espaço agora definido é invariante por $(T(\theta))_{\theta \in \mathbb{R}}$ e é invariante pelo fluxo da equação de evolução. Consequência: procurar soluções da equação de evolução do tipo $u(t,x) = T(-\omega t)\Phi(x)$, onde $\omega \in \mathbb{R}, \Phi \in H_{A,k}^1$, conduz-nos a

$$L_A \Phi + \omega \Phi + \alpha |\Phi|^{p-1} \Phi = 0, \quad \text{em } H_{A,k}^{-1}, \tag{2.7}$$

onde $H_{A,k}^{-1}$ é o espaço dual de $H_{A,k}^1$.

Para resolver a equação (2.7) usamos os mesmos argumentos da secção anterior, substituindo H_A^1 por $H_{A,k}^1$. Novamente remetemos para [4] uma explicação mais completa e indicamos os resultados:

Teorema 4 *Seja* $k \in \mathbb{Z}$ *fixo. Defina-se* $\omega_k = Min\{-|b|, kb\}$ *e suponhamos* $p \in (1, 5)$, $\omega \in (\omega_k, \infty)$, $\alpha \in (-\infty, 0)$. *Então, para qualquer* $\mu \in (0, \infty)$, *existe mínimo de* $E(v) + \omega Q(v)$ *na superfície definida por* $\int |v|^{p+1} = \mu$ *em* $H_{A,k}^1$. *Um ponto de mínimo pode ser escolhido de tal modo que, multiplicado por* $e^{ik\varphi}$ *seja uma função não negativa. Mais ainda, existe* μ, *digamos* μ_k^*, *tal que cada ponto de mínimo correspondente* w *verifica* $L_A w + \omega w + \alpha |v|^{p-1} w = 0$ *em* $H_{A,k}^{-1}$.

Teorema 5 *Seja $k \in \mathbb{Z}$ fixo, e suponhamos $p \in \left(1, 1+\frac{4}{3}\right), \alpha \in (-\infty, 0)$. Então, para qualquer $\mu \in (0,\infty)$, existe o mínimo de $H(v)$ sobre a superfície definida por $\displaystyle\int |v|^{p+1} = \mu$ em $H^1_{A,k}$. Um ponto de mínimo pode ser escolhido de tal modo que, multiplicado por $e^{ik\varphi}$, seja uma função não negativa. Cada mínimo verifica $L_A w + \omega w + \alpha |v|^{p-1} w = 0$ em $H^{-1}_{A,k}$ para algum real ω.*

A não-negatividade e o intervalo eventualmente mais amplo para ω no *Teorema 4* são consequências dos seguintes factos:

i) $v \in H^1_{A,0}$ sse v depende apenas de (ρ,z), $v \in H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}), \rho v \in L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$;

ii) para $k \neq 0,\ v \in H^1_{A,k}$ sse $v(\rho,\varphi,z) = v^*(\rho,z)e^{-ik\varphi}, v^* \in H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$,

$$\rho v^* \in L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}),\ \rho^{-1}v^* \in L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C});$$

iii) se $v \in H^1_{A,k}$, então $v \in H^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$ e $\rho v \in L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$;

iv) sobre $H^1_{A,k}$, E decompõe-se em

Energia Cinética(K) e **Energia Magnética**(M)

$$K(v) = \frac{1}{2}\int |\nabla v|^2 \qquad M(v) = \frac{b^2}{2}\int \rho^2 |v|^2 - \frac{kb}{2}\int |v|^2 .$$

Note-se que esta decomposição da energia poderá não fazer sentido para qualquer função em H^1_A : a inclusão $H^1_A \subset H^1$ continua um problema em aberto.

Com $v \in H^1_A, \delta \in (0,\infty)$, chamamos $B(v,\delta)$ à bola em H^1_A centrada em v com raio δ. Definimos, para cada Y contido em H^1_A não vazio, e para cada $\delta \in (0,\infty)$, a $\delta-$vizinhança de Y em H^1_A por: $\mathcal{V}\ (Y,\delta) = \bigcup_{v\in Y} B(v,\delta)$.

Y é **estável pelo fluxo** da equação de evolução sse, para cada $\mathcal{V}\ (Y,\delta)$, existe $\mathcal{V}\ (Y,\varepsilon)\subset\ \mathcal{V}\ (Y,\delta)$ tal que todas as trajectórias com valor inicial em $\mathcal{V}\ (Y,\varepsilon)$ são globais e mantêm-se em $\mathcal{V}\ (Y,\delta)$ para qualquer t positivo.

Seja u solução periódica da equação de evolução e designemos $\mathcal{O}$ a sua órbita fechada: $\mathcal{O} = \{u(t) : t \in [0,\infty)\}$. Estabilidade orbital de u significa usualmente estabilidade de $\mathcal{O}$ pelo fluxo.

Fixemos agora um ponto de mínimo dado pelo *Teorema 2* (com $\mu = \mu^*$) ou pelo *Teorema 3*, seja Φ, e associemos à solução peródica $T(-\omega t)\Phi(x)$ a órbita fechada $\mathcal{O} = \{T(-\omega t)\Phi : t \in [0,\infty)\}$. Espera-se que a estabilidade orbital de Φ seja discutida em termos da estabilidade de $\mathcal{O}$ pelo fluxo. No entanto, é necessária alguma adaptação do conceito usual de estabilidade orbital, devido às propriedades de simetria de H.

Para $y \in \mathbb{R}^3$, consideremos : $U(y) : L^2 \ni v \to e^{-iA(y).\widehat{x}} v(\widehat{x} - y)$, função composta por uma translação em y e pela correspondente transformação linear de *Gauge*. $(U(y))_{y\in\mathbb{R}^3}$ é uma representação unitária e contínua do grupo de Lie $(\mathbb{R}^3, +)$ em H_A^1 e L^2, que deixa H *invarante*.

Definimos

$$\Omega = \{T(\theta)U(y)\Phi : \theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^3\},$$

$$\widetilde{\Omega} = \{v \in H_A^1 : v \text{ é a solução do problema de minimização resolvido por } \Phi\}.$$

Devido à invariância, temos $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$. Presumimos naturalmente que a estabilidade orbital de Φ tem de ser pensada em termos de estabilidade de $\widetilde{\Omega}$ pelo fluxo. De facto pode ser provado (ver [2] e as respectivas referências, particularmente [3]) que, para um ponto de mínimo Φ dado pelo *Teorema 3,* $\widetilde{\Omega}$ é estável pelo fluxo. Note-se que tal teorema naõ implica que $\mathcal{O}$ seja instável pelo fluxo; mas, em casos similares (ausência de campo magnético), podem encontra-se exemplos que mostram que a $\widetilde{\Omega}$-estabilidade não pode ser reforçada em $\mathcal{O}$-estabilidade (ver [3]).

O que acabamos de referir acerca da estabilidade para estados estacionários gerais, pode também ser dito, *mutatis mutandis,* para estados estacionários simétricos. Em $H^1_{A,k}$, as translações devem restringir-se a translações ao longo do eixo dos zz; isto faz com que não haja lugar a tansformações de *Gauge,* pois A é invariante para tais translações. Assim, definimos um grupo a um parâmetro fortemente contínuo $(V(\varsigma))_{\varsigma\in\mathbb{R}}$ de isometrias de $H^1_{A,k}$ e L^2 pondo

$$V(\varsigma) : L^2 \ni v \longrightarrow v(\widehat{x} - \varsigma e_z).$$

Para um ponto mínimo Φ fixo pelo *Teorema 4,* (com $\mu = \mu^*$) ou alternativamente pelo *Teorema 5,* definimos

$$\Sigma = \{T(\theta)V(\varsigma)\Phi : \theta \in \mathbb{R}, \varsigma \in \mathbb{R}\},$$

$$\widetilde{\Sigma} = \left\{v \in H^1_{A,k} : v \text{ é solução do problema de minimização resolvido por } \Phi\right\}.$$

Então, pode provar-se (ver [2]) que, para um ponto de mínimo dado pelo *Teorema 5,* $\widetilde{\Sigma}$ é estável pelo fluxo da equação (restrita a $H^1_{A,k}$). Notemos que esta estabilidade refere-se a perturbações em $H^1_{A,k}$: $\mathcal{V}(\widetilde{\Sigma}, \delta), \mathcal{V}(\widetilde{\Sigma}, \varepsilon)$ são entendidas como vizinhanças de $\widetilde{\Sigma}$ em $H^1_{A,k}$.

Uma questão que continua em aberto é saber se esses estados estacionários k-simétricos são estáveis para perturbações em geral.

Apresentamos agora o resultado principal deste trabalho.

Seja Y um conjunto não vazio em H_A^1, e $u_0 \in Y$. Definimos o **tempo de saída** por

$$T_* = Sup\{t \in [0, T^*) : u(\tau) \in Y, \text{ para } \tau \in [0, t]\},$$

onde T^*, u são dados pelo *Teorema 1.*

Se substituirmos na definição anterior H_A^1 por $H_{A,k}^1$, obviamente o conceito é o mesmo.

Teorema 6 *Referimo-nos ao Teorema 4, supondo* $\omega \in (0, \infty), p \in [p_{uns}, 5)$, *onde* $p_{uns} = 1 + \frac{4}{3} + \frac{4\sqrt{10} - 8}{9}$. *Com* $\mu = \mu_k^*$, *tome-se um ponto de mínimo* Φ *não negativo. Então,* Σ *é instável pelo fluxo, e para mostrar a instabilidade, podemos escolher trajectórias globais e uniformemente limitadas : existe* $\mathcal{V}(\Sigma, \delta)$ *em* $H_{A,0}^1$ *e uma sucessão* $(u_{0,j})_j$ *em* $\mathcal{V}(\Sigma, \delta)$ *tal que:*

$$u_{0,j} \longrightarrow \Phi \text{ em } H_{A,0}^1 \text{ quando } j \longrightarrow \infty;$$

$$T_*(u_{0,j}, \mathcal{V}(\Sigma, \delta)) < \infty, \forall j;$$

$$T^*(u_{0,j}) = \infty, \forall j;$$

$$\lim_j \, \underset{t \geq 0}{Sup} \, \|u_j(t)\|_{H_{A,0}^1} = \|\Phi\|_{H_{A,0}^1}$$

onde u_j *é a trajectória com valor inicial* $u_{0,j}$.

Duas notas acerca deste teorema:

Primeira, o teorema trata da instabilidade de Σ relativamente a perturbações em $H^1_{A,0}$, logo relativamente a perturbações gerais.

Segunda, $\lim_j \underset{t\geq 0}{Sup} \|u_j(t)\|_{H^1_{A,0}} = \|\Phi\|_{H^1_{A,0}}$ - que é mais do que limitação uniforme - implica um comportamento curioso da sucessão $(u_j)_j$: para j suficientemente grande u_j não pode abandonar $\mathcal{V}(\Sigma, \delta)$ por um ponto arbitrário da sua fronteira. De uma forma mais informal poder-se-á dizer: pontos que "*estejam afastados da origem*" estão proibidos, apenas os pontos "*próximos da origem*" são permitidos.

Em [6], a estabilidade/instabilidade de estados estacionários foi estudada num quadro abstracto. Para demostrar o resultado principal deste trabalho acima apresentado, em tal quadro abstracto seria necessária uma função C^1 de um intervalo não vazio I de $\mathbb{R}$ em $H^1_{A,k}$, $I \ni \omega \to \Phi_\omega \in H^1_{A,k}$, tal que Φ_ω seja um ponto crítico não trivial da acção (com frequência angular ω, S_ω) e $S''_\omega(\Phi_\omega)$ satisfaça certas condições espectrais, nomeadamente o seu núcleo seja gerado por $i\Phi_\omega$. Então, a $\mathcal{O}$-estabilidade pode ser discutida em termos da convexidade da função real de variável real $I \ni \omega \to S_\omega(\Phi_\omega) \in \mathbb{R}$.

No caso de não haver campo magnético, "*scaling* " e "*dilation*" conduzem-nos a Φ_ω e dão-nos $S_\omega(\Phi_\omega)$ explicitamente. Para termos Ker $S''_\omega(\Phi_\omega)$ gerado por $i\Phi_\omega$, somos forçados a excluir translações [uma vez que $\partial_1\Phi_\omega, \partial_2\Phi_\omega, \partial_3\Phi_\omega \in \text{Ker}S''_\omega(\Phi_\omega)$ quando trabalhamos em $H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})]$ e isto liga-se com uma restrição *à priori* a funções radiais.

Caso exista campo magnético, devido às diferentes homogenidades de $-\Delta$ e ρ^2 quanto a "*scaling* ", ω e b mudam simultaneamente, e "*scaling* " e "*dilation*" não dão Φ_ω. Por outro lado a restrição *à priori* a funções radiais está posta de parte, e trabalhar em $H^1_{A,k}$ conduz a $i\Phi_\omega, \partial_z\Phi_\omega \in \text{Ker } S''_\omega(\Phi_\omega)$.

Assim, para demonstrar o teorema, abandonamos a discussão da estabilidade em termos de uma função real de ω, e procuraremos directamente um Ψ, tangente à superfície de carga constante em Φ, tal que $\langle S''(\Phi)\Psi, \Psi\rangle < 0$.

Este trabalho encontra-se estruturado da seguinte forma:

No capítulo 3, a instabilidade é provada sob uma Condição Geométrica para Instabilidade (CGI), e assumindo a existência de um Sistema Dinâmico Auxiliar (SDA).

No Capítulo 4, o SDA é construído sob uma condição geométrica para a sua existência (CGSDA) e uma condição de regularidade(**CR**).

No Capítulo 5, estabelecemos a CGI e a CGSDA (com uma restrição de regularidade).

No Capítulo 6, são resolvidas as questões de regularidade.

Por último, no Capítulo 7, conclui-se a demonstração.

Capítulo 3

Instabilidade

Referimo-nos ao *Teorema 4*, com a restrição $p > 2$, fixamos $\mu = \mu_k^*$, e consideramos Φ um ponto de mínimo.

Seja $\mathcal{Q}$ a superfície de carga constante em Φ,

$$\mathcal{Q} = \left\{ v \in H^1_{A,k} : Q(v) = Q(\Phi) \right\}$$

e seja $\mathcal{W}$ a superfície de energia potencial constante em Φ,

$$\mathcal{W} = \left\{ v \in H^1_{A.k} : \int |v|^{p+1} = \mu_k^* \right\}.$$

A acção é definida (*em* H^1_A) por $S(v) = H(v) + \omega Q(v)$. De acordo com a restrição sobre p, trata-se de um funcional C^2 e a sua derivada em v é $S'(v) = L_A v + \alpha |v|^{p-1} v + \omega v$. Em consequência Φ é um ponto crítico de S : $S'(\Phi) = 0$. Além disso, Φ minimiza S em $\mathcal{W}$: $S(\Phi) = \underset{v \in \mathcal{W}}{Inf}\ S(v)$.

Suponhamos agora que as seguintes condições são verificadas:

Condição Geométrica para Instabilidade (**CGI**).

Existe $\Psi \in H^1_{A.k}$ tangente a $\mathcal{Q}$ em Φ tal que a Hessiana da acção em Φ é estritamente negativa ao longo de Ψ :

$$\langle S''(\Phi)\Psi, \Psi\rangle < 0$$

[Os parêntesis de dualidade $\left(H^1_{A.k}, H^{-1}_{A.k}\right)$ são representados por $< \, , \, >$, quando o contexto não permite confusão com $\left(H^1_A, H^{-1}_A\right)$]

Sistema Dinâmico Auxiliar (**SDA**)

Existe uma $\mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon)$ e um funcional $\mathcal{H} : \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ tal que :

$$\begin{gathered} \mathcal{H}(T(\theta)V(\varsigma)v) = \mathcal{H}(v), \forall v \in (\Sigma, \varepsilon), \forall\ \theta, \varsigma \in \mathbb{R}; \\ \mathcal{H} \text{ é diferenciável e } \mathcal{H}'(v) \in H^1_{A,k}, \forall v \in\ \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon); \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\mathcal{H}' : \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon) \to H^1_{A,k} \text{ é uma função } C^1, \text{com derivada limitada;} \tag{3.2}$$

$$i\mathcal{H}'(\Phi) = \Psi.$$

Consideremos agora o campo vectorial $i\mathcal{H}' : \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon) \to H^1_{A,k}$. Por (3.2), o problema de Cauchy correspondente é resolúvel, dando origem a um sistema dinâmico, o SDA.

Precisando: dado $u_0 \in \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon)$, existe um único $\sigma \in (0, \infty]$ e uma única função $\varphi(u_0, \widehat{s}) \in C^1((-\sigma, \sigma), \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon))$ tais que $\varphi(u_0, 0) = u_0$, $\varphi(u_0, s) = i\mathcal{H}'(\varphi(u_0, s))$ em $C((-\sigma, \sigma), \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon))$ e a distância de $\varphi(u_0, s)$ a Σ tende para ε quando s tende para σ ou para $-\sigma$, se $\sigma < \infty$.

Notamos que $i\mathcal{H}'$é um campo uniformemente Lipschitziano: existe $C \in (0,\infty)$ tal que $\|i\mathcal{H}'(v_2) - i\mathcal{H}'(v_1)\| \leq C\,\|v_2 - v_1\|$, sendo v_1 e v_2 pontos extremos de um segmento em $\mathcal{V}(\Sigma,\varepsilon)$. Consequência : se $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon)$, então $\sigma(u_0) \geq \sigma_1$ para todo $u_0 \in \mathcal{V}(\Sigma,\varepsilon_1)$ e algum $\sigma_1 \in (0,\infty)$. Fixamos, de uma vez por todas, tais ε_1 e σ_1.

Consideremos a função $\varphi : \mathcal{V}(\Sigma,\varepsilon_1) \times (-\sigma_1,\sigma_1) \to \mathcal{V}(\Sigma,\varepsilon)$ que acabamos de descrever. Devido a (3.2) usando métodos *standard,* podemos provar alguma regularidade adicional para φ : φ é C^1 como função dos dois argumentos e φ é C^2 como função do tempo. Estas propriedades serão importantes no que se irá seguir.

Duas considerações finais acerca do (SDA):

Primeira, SDA é um sistema Hamiltoniano, com Hamiltoniano $\mathcal{H}$; $\mathcal{H}$ é conservada ao longo de trajectórias C^1(de facto C^2) de SDA com valores em $H^1_{A,k}$.

Segunda, devido a (3.1), o SDA possui as mesmas simetrias relevantes que o sistema dinâmico original (1.2). Em particular a carga é conservada ao longo das trajectórias (regulares) do SDA.

Consideremos agora o seguinte

Teorema 7 *Referimo-nos ao Teorema 4, com* $p > 2$, $\mu = \mu_k^*$ *e fixamos um ponto de mínimo* Φ. *Se CGI e SDA são verificadas, então existe uma* $\mathcal{V}(\Sigma,\delta)$ *em* $H^1_{A,k}$ *e* *uma sucessão* $(u_{0,j})_j$ *tais que*

$$u_{0,j} \to \Phi \text{ em } H^1_{A,k}, \text{ quando } j \to \infty;$$

$$T_*(u_{0,j}, \mathcal{V}(\Sigma, \delta)) < \infty, \forall j;$$

$$T^*(u_{0,j}) = \infty, \forall j;$$

$$\lim_{j} \underset{t \geq 0}{Sup} \|u_j(t)\|_{H^1_{A,k}} = \|\Phi\|_{H^1_{A,k}},$$

onde u_j *é a trajectória proveniente de* $u_{0,j}$.

Vamos demonstrar este teorema por etapas:

Demonstração do Teorema - *1ª etapa - Variação da acção ao longo das trajectórias do SDA.*

Dado $u_0 \in \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon_1)$, a função $(-\sigma_1, \sigma_1) \ni s \to S(\varphi(u_0, s))$ é C^2. Após cálculos, obtemos $d_s S(\varphi(u_0, s)) = P(\varphi(u_0, s))$, $d_s^2 S(\varphi(u_0, s)) = R(\varphi(u_0, s))$, onde P , R são funcionais definidos em $\mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon)$ por

$$P(v) = \langle S'(v), i\mathcal{H}'(v)\rangle,$$

$$R(v) = \langle S''(v) i\mathcal{H}'(v), i\mathcal{H}'(v)\rangle + \langle S'(v), i\mathcal{H}''(v)\,(i\mathcal{H}'(v))\rangle.$$

Aplica-se o Teorema de Taylor: para $u_0 \in \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon_1)$ e s$\in (-\sigma_1, \sigma_1)$, existe $\xi \in [0, 1]$ tal que

$$S(\varphi(u_0, s)) = S(u_0) + P(u_0)s + \frac{1}{2} R(\varphi(u_0, \xi s))\, s^2.$$

R é um funcional contínuo e $R(\Phi) < 0$. Consequência: existem $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)\,, \sigma_2 \in$

$(0, \sigma_1)$ tais que

$$\forall u_0 \in B(\Phi, \varepsilon_2), \forall s \in (-\sigma_2, \sigma_2) : S(\varphi(u_0, s)) \leq S(u_0) + P(u_0)\, s. \tag{3.3}$$

Note-se que usámos o facto de φ ser contínua como função de dois argumentos, o que ja havia sido mencionado atás.

Demonstração do Teorema - *2ª etapa - Intersectamos as trajectórias do SDA com $\mathcal{W}$ para obter alguma uniformidade no primeiro membro de (3.3) .*

Consideremos a função

$$\mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon_1) \times (-\sigma_1, \sigma_1) \ni (u_0, s) \to \int |\varphi(u_0, s)|^{p+1}.$$

Trata-se de uma função C^1 (φ é C^1 como uma função de dois argumentos) e o seu valor em $(\Phi, 0)$ é μ_k^*. Por outro lado, a derivada parcial em ordem a s em $(\Phi, 0)$ é $(p+1)\mathcal{R} \displaystyle\int |\Phi|^{p-1} \Phi\overline{\Psi}$; se esta quantidade fosse zero, então Ψ seria tangente a $\mathcal{W}$ em Φ; neste caso, teríamos $\langle S''(\Phi)\Psi, \Psi\rangle \geq 0$ (caso contrário, Φ não minimizaria S em $\mathcal{W}$); ora, tal conclusão contradiz CGI. Conclusão: a derivada parcial em ordem a s em $(\Phi, 0)$ não é nula.

Agora, apliquemos o *Teorema da Função Implícita* : existem $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_2)\, , \sigma_3 \in (0, \sigma_2)$ tais que

$$\forall u_0 \in B(\Phi, \varepsilon_3),\ \exists^1 s \in (-\sigma_3, \sigma_3) : \int |\varphi(u_0, s)|^{p+1} = \mu_k^*;$$

$$\text{isto é : } \varphi(u_0, s) \in \mathcal{W}. \tag{3.4}$$

Dado $u_0 \in B(\Phi, \varepsilon_3)$, aplicando (3.3) ao par $(u_0, s(u_0))$ dado por (3.4) e tendo em conta que Φ minimiza S sobre $\mathcal{W}$, vem:

$$\forall u_0 \in B(\Phi, \varepsilon_3), \ \exists s \in (-\sigma_3, \sigma_3) : S(\Phi) \leq S(u_0) + P(u_0)s.$$

Daqui e da invariância por simetria vem :

$$\forall u_0 \in \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon_3), \ \exists s \in (-\sigma_3, \sigma_3) : S(\Phi) \leq S(u_0) + P(u_0)s. \tag{3.5}$$

Demonstração do Teorema - *3ª etapa - Usamos (3.5) para provar que ao longo de algumas trajectórias de (1.2) equanto não saírmos de $V(\Sigma, \varepsilon_3)$, P mantêm-se afastada de zero.*

Definimos

$$\mathcal{P}^+ = \{v \in \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon_3) : S(v) < S(\Phi), P(v) > 0\}\,;$$

$$\mathcal{P}^- = \{v \in \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon_3) : S(v) < S(\Phi), P(v) < 0\}\,;$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}^-.$$

Suponhamos $u_0 \in \mathcal{P}$ (numa próxima etapa, demonstraremos que $\mathcal{P}$ é não vazio).

Tomemos $t \in \big[0, T_*(\mu_{0,} \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon_3)\big)$ e apliquemos (3.5) ao valor em t da trajectória u de (1.2) proveniente de u_0 : existe $s \in (-\sigma_3, \sigma_3)$ tal que $S(\Phi) \leq S(u(t)) + P(u(t))s$. Uma vez que a acção é conservada ao longo da trajectória de (1.2) isto implica $S(\Phi) \leq S(u_0) + P(u(t))s$, donde

$$|P(u(t))| \geq \frac{S(\Phi) - S(u_0)}{\sigma_3}.$$

Conclusão, por continuidade :

$$\forall u_0 \in \mathcal{P},\ \exists \eta \in (0,\infty)\,, \forall t \in [0, T_*(u_0, \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon_3)))$$

$$\text{ou } P(u(t)) \geq \eta, \text{ ou } \ P(u(t)) \leq -\eta \tag{3.6}$$

Demonstração do Teorema - *4ª etapa - Calculamos a variação de $\mathcal{H}$ ao longo das trajectórias de (1.2).*

Suponha-se que as trajectórias de (1.2) são funções C^1 com valores em $H^1_{A,k}$. Então, enquanto estas trajectórias permanecerem em $\mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon)$,temos

$$d_t\mathcal{H}(u(t)) = \langle \mathcal{H}'(u(t)), d_t\,(u(t))\rangle = \langle \mathcal{H}'(u(t)), iH'(u(t)\rangle =$$

$$= -\langle H'(u(t)), i\mathcal{H}'(u(t))\rangle = -\langle S'(u(t)), i\mathcal{H}'(u(t))\rangle,$$

dado que a carga é constante ao longo das trajectórias (regulares) do SDA. Isto é:

$$d_t\mathcal{H}(u(t)) = -P\,(u(t)) \tag{3.7}$$

Assim, P mede a variação de S, H ao longo das trajectórias do SDA;$-$ P mede a variação de $\mathcal{H}$ ao longo das trajectórias de (1.2).

Precisamos agora de demonstrar (3.7). Tomemos $t \in (0,\infty)\,, w \in C^1\left([0,t]\,, \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon)\right).$ Vem:

$$d_\tau\mathcal{H}(w(\tau)) = \langle \mathcal{H}'(w(\tau)), d_t w(t)\rangle = \langle d_\tau w(\tau), \mathcal{H}'(w(\tau))\rangle,$$

$$\mathcal{H}(w(\tau)) - \mathcal{H}(w(0)) = \int_0^t \langle d_\tau w(\tau), \mathcal{H}'(w(\tau)\rangle d\tau. \tag{3.8}$$

Por densidade, (3.8) continua válido para

$$w \in C\left([0,t], \mathcal{V}(\Sigma,\varepsilon)\right) \cap C^1\left([0,t], H_{A,k}^{-1}\right).$$

Em particular, (3.8) aplica-se à trajectória vinda de $u_0 \in \mathcal{V}(\Sigma,\varepsilon)$, enquanto esta permanece em $\mathcal{V}(\Sigma,\varepsilon)$:

$$\mathcal{H}(u(t)) - \mathcal{H}(u_0) = \int_0^t \langle d_\tau u(\tau), \mathcal{H}'(u(\tau))\rangle d\tau =$$

$$\int_0^t \langle iH'u(\tau), \mathcal{H}'(u(\tau))\rangle d\tau = -\int_0^t P(u(\tau))d\tau.$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, concluímos que $\mathcal{H}(u(\widehat{t}))$ é C^1 e que se verifica (3.7).

Demonstração do Teorema - *5ª etapa - Provamos que as trajectórias de (1.2) vindas de $\mathcal{P}$ saem de $V(\Sigma,\varepsilon_3)$ em tempo finito.*

Tome-se $u_0 \in \mathcal{P}$ e suponha-se que $T_*(u_0, \mathcal{V}(\Sigma,\varepsilon_3)) = \infty$. Sabemos da etapa anterior que existe $\eta \in (0,\infty)$ tal que ou $d_t\left(\mathcal{H}(u(t))\right) \leq -\eta$ ou então $d_t\left(\mathcal{H}(u(t))\right) \geq \eta$, para $t \in [0,\infty)$. Em ambos os casos $|\mathcal{H}(u(t))| \to \infty$ quando $t \to \infty$. Mas $\mathcal{H}$ é limitado em $\mathcal{V}(\Sigma,\varepsilon_3)$. Consequência : $T_*(u_0, \mathcal{V}(\Sigma,\varepsilon_3)) < \infty$.

Demonstração do Teorema - *6ª etapa - Provamos agora que existem pontos em $\mathcal{P}$ arbitrariamente próximos de Φ.*

Siga-se a acção ao longo da trajectória do SDA que passa por Φ :

$(-\sigma_1, \sigma_1) \ni s \to S\left(\varphi(\Phi,s)\right)$. Sabemos que $d_s S\left(\varphi(\Phi,s)\right)$ em $s=0$ é igual a $P(\Phi)=0$, e $d_s^2 S(\varphi(\Phi,s))$ em $s=0$ é igual a $R(\Phi)<0$.

Podemos então tomar $\sigma_4 \in (0, \sigma_2)$ tal que

$$\begin{aligned} &i)\ S(\varphi(\Phi, s)) < S(\Phi), \forall s \in (-\sigma_4, 0) \cup (0, \sigma_4); \\ &ii)\ \varphi(\Phi, s) \in B(\Phi, \varepsilon_3), \forall s \in (-\sigma_4, \sigma_4). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por (3.9 *ii)*) podemos aplicar (3.3) com $\varphi(\Phi, s)$, onde $s \in (-\sigma_4, \sigma_4)$, em vez de u_0:

$$S(\varphi(\varphi(\Phi, s_1), s_2)) \leq S(\varphi(\Phi, s_1)) + P(\varphi(\Phi, s_1)) s_2, \forall s_1 \in (-\sigma_4, \sigma_4), s_2 \in (-\sigma_2, \sigma_2).$$

Faça-se $s_2 = -s_1$:

$$S(\Phi) \leq S(\varphi(\Phi, s_1)) - P(\varphi(\Phi, s_1)) s_1, \forall s_1 \in (-\sigma_4, \sigma_4) \tag{3.10}$$

Por (3.9 *i)*) e 3.10, podemos concluir que $P(\varphi(\Phi, s)) \neq 0$, para $s \in (-\sigma_4, 0) \cup (0, \sigma_4)$. Combinado com (3.9 *ii)*), temos $\varphi(\Phi, s) \in \mathcal{P}$, para $s \in (-\sigma_4, 0) \cup (0, \sigma_4)$.

Demonstração do Teorema - *7ª etapa - Provamos que a trajectória de (1.2) que nasce em $\varphi(\Phi, s)$, s suficientemente perto de zero, s com sinal apropriado, é global e limitada.*

Recordemos que a função $(-\sigma_1, \sigma_1) \ni s \to \int |\varphi(\Phi, s)|^{p+1}$ é C^1 (é até C^2), o seu valor em $s = 0$ é μ_k^* e a sua derivada em $s = 0$ não é nula. Então, existe $\sigma_5 \in (0, \sigma_4)$ tal que $\int |\varphi(\Phi, s)|^{p+1} < \mu_k^*$ se $\beta s \in (0, \sigma_5)$ onde $\beta = -1$ se a derivada é positiva e $\beta = 1$ caso contrário. Fixemos um s tal que $\beta s \in (0, \sigma_5)$, pomos $u_0 = \varphi(\Phi, s)$ e consideremos a trajectória u de (1.2) que nasce em u_0.

Suponhamos que $\int |u(t)|^{p+1} = \mu_k^*$, para algum $t \in (0, T^*(u_0))$; então, $u(t) \in \mathcal{W}$ e, pela conservação da acção e pelo facto de $u_0 \in \mathcal{P}$, teríamos $S(u(t)) < S(\Phi)$; isto é uma contradição com a minimização de S em $\mathcal{W}$ por Φ. Assim, por continuidade, $\int |u(t)|^{p+1} < \mu_k^*$ para qualquer $t \in [0, T^*(u_0))$.

Combinando com a conservação da Energia e da Carga, resulta

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{H^1_{A,k}} < \frac{1}{2}\|\Phi\|^2_{H^1_{A,k}} + (H(u_0) + Q(u_0)) - (H(\Phi) + Q(\Phi)), \forall t \in [0, T^*(u_0)). \tag{3.11}$$

Isto mostra que u é uma trajectória global e limitada.

Demonstração do Teorema - *8ª etapa - Conclusão.*

Tome-se $\mathcal{V}(\Sigma, \delta) = \mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon_3)$.

Dado um inteiro positivo j, escolha-se um s_j tal que $\beta s_j \in (0, \sigma_5)$ e

$$u_{0,j} \in B\left(\Phi, \frac{1}{j}\right), \tag{3.12}$$

$$(H(u_{0,j}) + Q(u_{0,j})) - (H(\Phi) + Q(\Phi)) \leq \frac{1}{2j^2} + \frac{1}{j}\|\Phi\|_{H^1_{A,k}}, \tag{3.13}$$

onde $u_{0,j} = \varphi(\Phi, s_j)$.

$(u_{0,j})_j$ converge para Φ. Para cada j, a trajectória u_j que passa por $u_{0,j}$ é global e limitada; $u_{0,j} \in \mathcal{P}$, u_j sai de $\mathcal{V}(\Sigma, \delta)$ em tempo finito.

Por último, por (3.11) / (3.13) :

$$\|\Phi\|_{H^1_{A,k}} - \frac{1}{j} \leq \underset{t \geq 0}{Sup}\, \|u_j(t)\|_{H^1_{A,k}} < \|\Phi\|_{H^1_{A,k}} + \frac{1}{j}.$$

Um resultado análogo ao anteriormente demonstrado é valido para estados estacionários em geral. Para obter a demostração, basta substituir no texto anterior $H^1_{A,k}$, μ^*_k e Σ por H^1_A, μ^*e Ω respectivamente.

Para provar que Σ é instável pelo fluxo, o método atrás descrito aplica-se também a outras situações. Por exemplo, quando Φ é um ponto crítico de S que minimiza S, localmente numa superfície Γ. CGI e SDA, não se alteram; modificações mínimas são necessárias na demonstração, para que a intersecção das trajectórias do SDA com Γ esteja numa vizinhança apropriada de Φ em Γ. Relativamente à última parte da demonstração (globalidade e limitação), esta deixa agora de ser válida - aqui é essencial que Φ minimize S globalmente em $\mathcal{W}$. Infelizmente, não se conhece nenhum teorema que garanta a existência de um ponto crítico de S que minimize S localmente em Γ.

Podemos também, em toda a demonstação trocar “$<$” por “ $>$”: o método continua a funcionar. Tal alteração indicaria que o ponto crítico Φ maximizaria S em Γ, e CGI mudaria de concavidade para convexidade. Neste caso também ignoramos um resultado de existência neste sentido.

Capítulo 4

O Sistema Dinâmico Auxiliar (ADS)

Chamamos $T'(0)$ ao gerador infinitesimal de $(T(\theta))_{\theta\in\mathbb{R}}$ e $V'(0)$ ao gerador infinitesimal de $(V(\varsigma))_{\varsigma\in\mathbb{R}}$, ambos grupos fortemente contínuos de isometrias em $H^1_{A,k}$:

$$D(T'(0)) = H^1_{A,k} \quad , \quad T'(0)v = iv;$$

$$D(V'(0)) = \left\{v \in H^1_{A,k} : \partial_z v \in H^1_{A,k}\right\}, \quad V'(0)v = -\partial_z v.$$

Uma vez que $(T(\theta))_{\theta\in\mathbb{R}}$ e $(V(\varsigma))_{\varsigma\in\mathbb{R}}$ são ambos grupos de isometrias fortemente contínuos de L^2, os geradores infinitesimais, no quadro L^2, são anti-simétricos; em particular:

$$(T'(0)v_1, v_2) = -\left(v_1, T'(0)v_2\right), \forall v_1, v_2 \in D(T'(0)); \tag{4.1}$$

$$(V'(0)v_1, v_2) = -\left(v_1, V'(0)v_2\right), \forall v_1, v_2 \in D(V'(0)). \tag{4.2}$$

(4.1) e (4.2), e o facto de os grupos comutarem em L^2, serão usados ao longo deste capítulo.

Seja $\Phi \in H^1_{A,k}, \Phi \neq 0$, e suponham-se que se verificam as seguintes condições:

Condição de regularidade (**CR**) - $\Phi \in D((V'(0))^2), \Psi \in D(V'(0))$.

Condição Geométrica para a existência do SDA (**CGSDA**) -

Em L^2, $i\Psi$ é ortogonal a $T'(0)\Phi$ e a $V'(0)\Phi$. Adicionalmente, $T'(0)\Phi$ e $V'(0)\Phi$ são linearmente independentes.

O resultado principal deste capítulo é o seguinte:

Teorema 8 *Seja $\Phi \in H^1_{A,k}$, $\Phi \neq 0$, e $\Psi \in H^1_{A,k}$. Se se verificam **CR** e **CGSDA**, então existe um **SDA** numa vizinhança $\mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon)$.*

Note-se que a caracterização variacional de Φ aqui é irrelevante. Para provar o teorema agora enunciado, é necessária uma proposição acerca da topologia de Σ.

Proposição 9 *Seja $T^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, (com a topologia do quociente), defina-se χ por $\chi : T^1 \times \mathbb{R} \ni ([\theta], \varsigma) \to T(\theta)V(\varsigma)\Phi \in \Sigma$, e dotemos Σ com a topologia de L^2, ou com a de $H^1_{A,k}$. Então, χ é um homeomorfismo da superfície cilíndrica $T^1 \times \mathbb{R}$ sobre Σ.*

Demonstração. Suponhamos $T(\theta_1)V(\varsigma_1)\Phi = T(\theta_2)V(\varsigma_2)\Phi$. Como $\Phi \neq 0$, concluímos primeiramente que $\varsigma_1 = \varsigma_2$, e assim que $[\theta_1] = [\theta_2]$.

Assim, χ é injectiva. Claro que, χ é contínua. Para provar que χ^{-1} é contínua, é suficiente provar a continuidade em Φ. Dadas $(\theta_j)_j, (\varsigma_j)_j$ tais que $T(\theta_j)V(\varsigma_j)\Phi \to \Phi$ em L^2 quando $j \to \infty$, temos de provar que $([\theta_j], \varsigma_j) \to ([0], 0)$ em $T^1 \times \mathbb{R}$ quando $j \to \infty$. Pomos $S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (com a topologia usual); uma vez que $T^1 \times S^1$ é compacto, podemos ainda assumir $([\theta_j], \varsigma_j) \to ([\theta^*], \varsigma^*)$ em $T^1 \times S^1$ quando $j \to \infty$, sendo $\theta^* \in \mathbb{R}, \varsigma^* \in S^1$. Se $\varsigma^* = \infty$, então $T(\theta_j)V(\varsigma_j)\Phi \to 0$ em $\mathcal{D}'$ quando $j \to \infty$, o que contradiz $\Phi \neq 0$.

Assim, $\varsigma^* \in \mathbb{R}$ e $T(\theta_j)V(\varsigma_j)\Phi \to T(\theta^*)V(\varsigma^*)\Phi$ em L^2 quando $j \to \infty$. Combinando com a injectividade de χ, resulta $[\theta^*] = [0], \varsigma^* = 0$. ■

Note-se que a hipótese $\Phi \neq 0$ apenas é imposta porque faz falta na proposição anterior.

Demonstração do Teorema - *1ªetapa - Para v sufucientemente próximo de Φ e (θ, ς) suficientemente próximo de $(0,0)$, minimizamos a distância L^2 de $T(\theta)V(\varsigma)\Phi$ a Φ.*

Considere-se a seguinte função:

$$F : H^1_{A,k} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (v, \theta, \varsigma) \to \frac{1}{2} \|T(\theta)V(\varsigma)v - \Phi\|^2_{L^2} \in \mathbb{R}.$$

Como $\Phi \in D\left((V'(0))^2\right)$ (bastaria neste caso termos $\partial_z \Phi, \partial_z^2 \Phi \in L^2$), concluímos que F é C^2 e que

$$\partial_2 F = \left(T(-\theta)V(-\varsigma)\,T'(0)\Phi, v\right), \tag{4.3}$$

$$\partial_3 F = \left(T(-\theta)V(-\varsigma)\,V'(0)\Phi, v\right), \tag{4.4}$$

$$\partial^2_{2,2} F = \left(-T(-\theta)V(-\varsigma)\left((T'(0)\right)^2 \Phi, v\right),$$

$$\partial^2_{2,3} F = \left(-T(-\theta)V(-\varsigma)\,T'(0)V'(0)\Phi, v\right),$$

$$\partial^2_{3,3} F = \left(-T(-\theta)V(-\varsigma)\left((V'(0)\right)^2 \Phi, v\right),$$

Em particular:

$$\partial_2 F\left(\Phi,0,0\right) = 0,$$

$$\partial_3 F\left(\Phi,0,0\right) = 0,$$

$$\partial^2_{2,2} F\left(\Phi,0,0\right) = \|T'(0)\Phi\|^2_{L^2},$$

$$\partial^2_{2,3} F\left(\Phi,0,0\right) = \left(T'(0)\Phi, V'(0)\Phi\right),$$

$$\partial^2_{3,3} F\left(\Phi,0,0\right) = \|V'(0)\Phi\|^2_{L^2}.$$

Dado que $T'(0)\Phi$ e $V'(0)\Phi$ são linearmente independentes, temos

$$\left(\partial^2_{2,2}F\partial^2_{2,3}F - \partial^2_{2,3}F\partial^2_{3,2}F\right)\left(\Phi,0,0\right) > 0.$$

Aplicamos agora o *Teorema da Função Implícita* à função

$$H^1_{A,k}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ni(v,\theta,\varsigma)\to\left(\partial_2 F,\partial_3 F\right)(v,\theta,\zeta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

para concluir que existem $\varepsilon_1,\varsigma_1,\eta\in(0,\infty),\theta_1\in(0,\pi)$ tais que:

$$\begin{aligned}&\partial^2_{2,2}F(v,\theta,\varsigma)>\eta,\ \left(\partial^2_{2,2}F\partial^2_{3,3}F-\partial^2_{2,3}F\partial^2_{3,2}F\right)(v,\theta,\varsigma)>\eta,\\&\qquad\qquad\forall(v,\theta,\varsigma)\in B(\Phi,\varepsilon_1)\times(-\theta_1,\theta_1)\times(-\varsigma_1,\varsigma_1).\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}&\forall v\in B(\Phi,\varepsilon_1),\exists^1(\theta,\varsigma)\in(-\theta_1,\theta_1)\times(-\varsigma_1,\varsigma_1):\\&\qquad\qquad\left(\partial_2 F,\partial_3 F\right)(v,\theta,\varsigma)=0.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Chamemos G à função descrita em (4.6):

$$G: B(\Phi,\varepsilon_1)\ni v\to(\theta(v),\varsigma(v))\in(-\theta_1,\theta_1)\times(-\varsigma_1,\varsigma_1).$$

De acordo com o *Teorema da Função Implícita*, G é uma função C^1, e temos explicitamente (em termos de $\partial^2 F$) expressões para G'_1 e G'_2. Mais, de acordo com (4.5) e (4.6), e argumentando por convexidade:

$$\text{Dado } v \in B(\Phi, \varepsilon_1), G(v) \text{ minimiza } F\left(v, \hat{\theta}, \hat{\varsigma}\right) \text{ em } (-\theta_1, \theta_1) \times (-\varsigma_1, \varsigma_1). \tag{4.7}$$

Demonstração do Teorema - *2ªetapa - Variação de G com* $(T(\theta))_{\theta\in\mathbb{R}}$ *e* $(V(\varsigma))_{\varsigma\in\mathbb{R}}$.

Já sabemos que χ^{-1} é contínua em Φ:

$$\forall\theta_1 \in (0,\pi), \varsigma_1 \in (0,\infty), \exists\varepsilon \in (0,\infty), \forall\theta, \varsigma \in \mathbb{R}:$$

$$\|T(\theta)V(\varsigma)\Phi - \Phi\|_{L^2} < \varepsilon \Rightarrow \tag{4.8}$$

$$(\exists m \in \mathbb{Z} : |\theta - m2\pi| < \theta_1) \text{ e } |\varsigma| < \varsigma_1.$$

Aplicamos (4.8) a $\theta_{1,}\varsigma_1$ determinados na primeira etapa da demonstração, e obtemos um $\varepsilon\left(\theta_{1,}\varsigma_1\right)$. Em seguida, escolhemos $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1) \cap \left(0, \frac{\varepsilon\left(\theta_{1,}\varsigma_1\right)}{4}\right)$, onde ε_1 foi determinado na primeira etapa da demonstração.

Afirmamos que, se $v \in B(\Phi, \varepsilon_2), \theta \in \mathbb{R}, \varsigma \in \mathbb{R}, T(\theta)V(\varsigma)v \in B(\Phi, \varepsilon_2)$, então:

$$\exists m \in \mathbb{Z} : G_1\left(T(\theta)V(\varsigma)v\right) = G_1(v) - \theta - m2\pi; \tag{4.9}$$

$$G_2(T(\theta)V(\varsigma)v) = G_2(v) - \varsigma. \tag{4.10}$$

Para provar esta afirmação, começamos pela seguinte desigualdade

$$\|T(G_1(v)-\theta)\,V(G_2(v)-\varsigma)\,\Phi-\Phi\|_{L^2}\leq 2\,\|v-\Phi\|_{L^2}+$$
$$+\,\|T(\theta)V(\varsigma)v-\Phi\|_{L^2}+\Phi\,\|T(G_1(v))V(G_2(v))v-\Phi\|_{L^2}. \tag{4.11}$$

Por hipótese, a soma dos dois primeiros termos da segundo membro de (4.11) é inferior a $3\varepsilon_2$. Por outro lado, por (4.7), o último termo do segundo membro é inferior a ε_2. Assim, o primeiro membro de (4.11) é infeiror a $\varepsilon\,(\theta_{1,}\varsigma_1)$. Aplicamos agora (4.8) e concluímos que, para algum $m\in\mathbb{Z}$:

$$G_1(v)-\theta-m2\pi\in(-\theta_1,\theta_1)\,; \tag{4.12}$$

$$G_2(v)-\varsigma\in(-\varsigma_1,\varsigma_1)\,. \tag{4.13}$$

Por fim, consideremos a função

$$(-\theta_1,\theta_1)\times(-\varsigma_1,\varsigma_1)\ni(\theta',\varsigma')\to(\partial_2F,\partial_3F)\,(T(\theta)V(\varsigma)v,\theta',\varsigma')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Pela primeira etapa, sabemos que $(G_1(T(\theta)V(\varsigma)v),G_2(T(\theta)V(\varsigma)v))$ é o *único zero* de tal função em $(-\theta_1,\theta_1)\times(-\varsigma_1,\varsigma_1)$. Desta forma, usando (4.12) e (4.13) , para justificar (4.9) e (4.10) basta provar que

$$\partial_2F\,(T(\theta)V(\varsigma)v,G_1(v)-\theta-m2\pi,G_2(v)-\varsigma)=0;$$

$$\partial_3F\,(T(\theta)V(\varsigma)v,G_1(v)-\theta-m2\pi,G_2(v)-\varsigma)=0,$$

que é uma consequência imediata da expressão de ∂_2F, ∂_3F e da definição de G.

Demonstração do Teorema - *3ª etapa - Definição de $\mathcal{H}$.*

Definimos $\mathcal{H}$ em $B(\Phi, \varepsilon_2)$ por

$$\mathcal{H}(v) = (-i\Psi, T(G_1(v))V(G_2(v))v).$$

Sejam $v \in B(\Phi, \varepsilon_2), \theta \in \mathbb{R}, \varsigma \in \mathbb{R}$ tais que $T(\theta)V(\varsigma)v \in B(\Phi, \varepsilon_2)$.

Usando (4.9) e (4.10), obtemos $\mathcal{H}(T(\theta)V(\varsigma)v) = \mathcal{H}(v)$, i,e. $\mathcal{H}$ é invariante por $(T(\theta))_{\theta\in\mathbb{R}}$ e $(V(\varsigma))_{\varsigma\in\mathbb{R}}$ em $B(\Phi, \varepsilon_2)$. Consequência: é possível estender $\mathcal{H}$ a $\mathcal{V}(\Sigma, \varepsilon_2)$ por meio de$(T(\theta))_{\theta\in\mathbb{R}}, (V(\zeta))_{\zeta\in\mathbb{R}}$.

Demonstração do Teorema - *4ª etapa - Conclusão.*

Tome-se $\varepsilon = \varepsilon_2$. Em $\mathcal{V}(\Sigma, \delta), \mathcal{H}$ é, por construção, invariante por $(T(\theta))_{\theta\in\mathbb{R}}$ e $(V(\varsigma))_{\varsigma\in\mathbb{R}}$. A partir da definição de $\mathcal{H}$, das expressões para G'_1 e G'_2 (dadas pelo *Teorema da Função Implícita*) e de $\Phi, \Psi \in D(V'(0))$, (seria suficiente $\partial_z\Phi, \partial_z\Psi \in L^2$) deduzimos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}'(v) &= Y_1(v)T(-G_1(v))V(-G_2(v))T'(0)\Phi \\ &+Y_2(v)T(-G_1(v))V(-G_2(v))V'(0)\Phi \\ &+T(-G_1(v))V(-G_2(v))(-i\Psi), \forall v \in B(\Phi, \varepsilon).\end{aligned}$$

onde Y_1 e Y_2 são funcionais definidos em $B(\Phi, \varepsilon)$ por

$$\begin{aligned}Y_j(v) &= D_{j,1}(v, G_1(v), G_2(v))(iT'(0)\Psi, T(G_1(v))V(G_2(v))v) \\ &+D_{j,2}(v, G_1(v), G_2(v))(iV'(0)\Psi, T(G_1(v))V(G_2(v))v);\end{aligned}$$

$$D_{1,1} = -\left(\partial^2_{2,2}F\partial^2_{3,3}F - \partial^2_{2,3}F\partial^2_{3,2}F\right)^{-1}\partial^2_{3,3}F,$$

$$D_{1,2} = D_{2,1} = \left(\partial^2_{2,2}F\partial^2_{3,3}F - \partial^2_{2,3}F\partial^2_{3,2}F\right)^{-1}\partial^2_{2,3}F,$$

$$D_{2,2} = -\left(\partial^2_{2,2}F\partial^2_{3,3}F - \partial^2_{2,3}F\partial^2_{3,2}F\right)^{-1}\partial^2_{2,2}F.$$

Dado que $\Phi \in D(V'(0))$, concluímos que $\mathcal{H}'(v) \in H^1_{A,k}$ para $v \in B(\Phi, \varepsilon)$. A mesma conclusão se pode tirar para $v \in \mathcal{V}(\Sigma, \delta)$.

Pela ortogonalidade na **CGSDA,** $Y_1(\Phi) = Y_2(\Phi) = 0$, e daqui $i\mathcal{H}'(v) = \Psi$.

Por último temos de verificar se $\mathcal{H}'$ é uma função C^1 com valores em $H^1_{A,k}$, com derivada limitada. Isto é consequência de $\Phi \in D\left((V'(0))^2\right)$, de $\Psi \in D\left(V'(0)\right)$ (do que, em particular , $\partial^3_z\Phi, \partial^2_z\Psi \in L^2$) e de (4.5) no que à limitação respeita. A demonstração é simples mas assaz trabalhosa.

Capítulo 5

Duas Condições Geométricas

Para encontrar Ψ tangente a $\mathcal{Q}$ em Φ procedemos por "*scaling*" e "*dilation*": para valores reais de γ_1, γ_2 apropriados, a carga é constante ao longo da trajectória $(0, \infty) \ni \tau \longrightarrow \tau^{\gamma_1} \Phi\left(\tau^{\gamma_2} \hat{x}\right) \in H^1_{A,0}$; se tal trajectória for regular (por exemplo $\Phi \in \mathcal{S}^2$), então a derivada em $\tau = 1$, conduz ao Ψ desejado :

$$\Psi = C\left(\frac{3}{2}\Phi + x.\nabla\Phi\right), C \neq 0.$$

Admitimos que $x.\nabla\Phi \in H^1_{A,0}$, definimos Ψ por

$$\Psi = \frac{3}{2}\Phi + x.\nabla\Phi \tag{5.1}$$

e investigamos sobe que condições temos **CGI** e **CGSDA**.

O resultado principal deste capítulo é :

Teorema 10 *Suponhamos* $p \in [p_{uns}, 5)$, $\omega \in (0, \infty)$. *Seja* Φ *não negativo ponto crítico não trivial da acção em* $H^1_{A,0}$. *Suponhamos que* $\Phi \in D\left(V'(0)\right)$, *e* $x.\nabla\Phi$ $\in H^1_{A,0}$, *e definamos* Ψ *por (5.1). Então, verificam-se CGI e CGSDA.*

Note-se que a caracterização variacional do ponto crítico é irrelevante.

Para obtermos este resultado, precisamos de um *Teorema do Virial*, *i.e.*, uma relação entre as Energias Cinética, Magnética e Potencial de qualquer ponto crítico.

Em $H^1_{A,0}$ definimos o funcional N por

$$N(v) = \frac{1}{2}\int |\nabla v|^2 - \frac{b^2}{8}\int \rho^2 |v|^2 + \frac{3\alpha}{4}\left(\frac{p+1}{p-1}\right)\int |v|^{p+1}.$$

Então, temos o seguinte

Teorema 11 *Se Φ é um ponto crítico da acção em $H^1_{A,0}$, então $N(\Phi) = 0$.*

Aplicando $S'(\Phi) = 0$ a Φ obtemos

$$\frac{1}{2}\int |\nabla v|^2 + \frac{b^2}{8}\int \rho^2 |v|^2 + \frac{\omega}{2}\int |\Phi|^2 + \frac{\alpha}{2}\int |\Phi|^{p+1} = 0. \tag{5.2}$$

Trata-se de uma relação trivial entre as *Energias* e a *Carga.*

Procuramos uma relação não trivial, em que a *Carga* esteja ausente.

Demonstração do Teorema 11 - *Primeira etapa - Regularidade.*

Para demonstrar o teorema, precisamos de ter alguma regularidade local, supomos que $\Phi \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, o que será justificado, no fim desta etapa.

Dado que Φ é um ponto crítico não trivial da acção em $H^1_{A,0}$, temos

$$-\mathcal{R}\int \Phi\Delta\overline{\Psi} + \frac{b^2}{4}\mathcal{R}\int \rho^2\Phi\overline{\Psi} + \omega\mathcal{R}\int \Phi\overline{\Psi} + \alpha\mathcal{R}\int |\Phi|^{p-1}\Phi\overline{\Psi} = 0, \tag{5.3}$$

para $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ e Ψ invariante por rotações em torno do eixo dos z.

Dado $\Psi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, apliquemos (5.3) primeiro a $\Psi(\rho, z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \Psi_1(\rho, \varphi, z)\, d\varphi$, e depois a esta função multiplicada por i. Consequência:

$$-\Delta\Phi + \frac{b^2}{4}\rho^2\Phi + \omega\Phi + \alpha |\Phi|^{p-1}\Phi = 0, \text{ em } \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}\right).$$

Tomemos $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$. $\xi\Phi$ verifica a equação

$$\begin{aligned} -\Delta(\xi\Phi) + \xi\Phi = \left((-\Delta\xi) - \frac{b^2}{4}\rho^2\xi - (\omega - 1)\xi\right)\Phi + \\ -2\nabla\xi.\nabla\Phi - \alpha|\Phi|^{p-1}\xi\Phi, \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Neste trabalho, será usada a seguinte propriedade de regularidade:

Proposição 12 *Para $q \in [1, \infty)$ e m inteiro não negativo, seja f uma distribuição temperada que verifica $(-\Delta + 1) f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, então $f \in W^{m+2,p}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$.*

Em (5.4), os dois primeiros termos do segundo membro estão em L^2. Se $p \leq 3$, o mesmo se passa para o terceiro termo. Se $p > 3$, usando um *bootstrap* baseado na proposição anterior e em injecções de Sobolev, concluímos que o terceiro termo está também em L^2.

[Neste argumento ξ muda a cada passo, devido a $|\Phi|^{p-1}$ em vez de $|\xi\Phi|^{p-1}$ em (5.4)] Assim, $\xi\Phi \in H^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$.

Demonstração do Teorema 11 - *Conclusão- Aplicamos S'(Φ)=0 a* $\Delta\Psi_1\Psi_2 + 2\nabla\Psi_1.\nabla\Psi_2$,onde, $\Psi_1 \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $\Psi_2 \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ e Ψ_1 e Ψ_2 são invariantes por rotações ao longo do eixo dos z. :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\int \nabla\Phi.\nabla\left(\Delta\Psi_1\overline{\Psi_2} + 2\nabla\Psi_1.\nabla\overline{\Psi_2}\right) + \\ +\mathcal{R}\int\left(\frac{b^2}{4}\rho^2\Phi + \omega\Phi + \alpha|\Phi|^{p-1}\Phi\right)\left(\Delta\Psi_1\overline{\Psi_2} + 2\nabla\Psi_1.\nabla\overline{\Psi_2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Procuramos fazer $\Psi_2 \rightarrow \Phi$ em $H^1_{A,0}$.

O segundo termo de (5.5) é bom, uma vez que $\Phi \in L^\infty_{loc}$, mas o primeiro termo precisa de alguma preparação:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}\int \nabla\Phi.\nabla\left(\Delta\Psi_1\overline{\Psi_2} + 2\nabla\Psi_1.\nabla\overline{\Psi_2}\right) = \\
&\qquad = \mathcal{R}\int \nabla\Phi.\left(\overline{\Psi_2}\nabla\Delta\Psi_1 + \Delta\Psi_1\nabla\overline{\Psi_2} + 2D^2\Psi_1\left(\nabla\overline{\Psi_2}\right)\right) + \\
&\qquad\qquad + 2\mathcal{R}\int \nabla\Phi.D^2\overline{\Psi_2}\left(\nabla\Psi_1\right).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

em que $D^2\Psi_j.\nabla\Psi_j$ é a matriz Hessiana de Ψ_j (simétrica) multiplicada pelo gradiente de Ψ_j.

Seguidamente, trabalhemos o último termo de (5.6):

Uma vez que $\Phi \in H^2_{loc}$,vem:

$$\begin{aligned}
&2\mathcal{R}\int \nabla\Phi.D^2\overline{\Psi_2}.\nabla\Psi_1 = 2\mathcal{R}\int \left(\nabla\left(\nabla\overline{\Psi_2}.\nabla\Phi\right) - D^2\Phi.\left(\nabla\overline{\Psi_2}\right)\right).\nabla\Psi_1 = \\
&\qquad = -2\mathcal{R}\int \nabla\overline{\Psi_2}.\nabla\Phi\Delta\Psi_1 - 2\mathcal{R}\int D^2\Phi\left(\nabla\overline{\Psi_2}\right).\nabla\Psi_1.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Juntando (5.5)/(5.7) e fazendo $\Psi_2 \rightarrow \Phi$ em $H^1_{A,0}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}\int \nabla\Phi.\left(\overline{\Phi}\nabla\Delta\Psi_1 - \Delta\Psi_1\nabla\overline{\Phi} + 2D^2\Psi_1\left(\nabla\overline{\Phi}\right)\right) + 2\mathcal{R}\int D^2\Phi\left(\nabla\overline{\Phi}\right).\nabla\Psi_1 + \\
&\qquad + \mathcal{R}\int \left(\frac{b^2}{4}\rho^2\Phi + \omega\Phi + \alpha\left|\Phi\right|^{p-1}\Phi\right)\left(\Delta\Psi_1\overline{\Phi} + 2\nabla\Psi_1.\nabla\overline{\Phi}\right) = 0,
\end{aligned}$$

então

$$-\frac{1}{2}\int |\Phi|^2\,\Delta^2\Psi_1 - \int |\nabla\Phi|^2\,\Delta\Psi_1 + 2\int D^2\Psi_1\,(\nabla\Phi)\,.\nabla\overline{\Phi} + \int |\nabla\Phi|^2\,\Delta\Psi_1 +$$

$$+\int \frac{b^2}{4}\rho^2\,|\Phi|^2\,\Delta\Psi_1 + \omega\int |\Phi|^2\,\Delta\Psi_1$$

$$+\alpha\int |\Phi|^{p+1}\,\Delta\Psi_1 - \frac{b^2}{4}\int |\Phi|^2\,div\ \left(\rho^2\nabla\Psi_1\right) +$$

$$-\omega\int |\Phi|^2\,\Delta\Psi_1 - \frac{2\alpha}{p+1}\int |\Phi|^{p+1}\,\Delta\Psi_1 = 0,$$

ou seja:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\int |\Phi|^2\,\Delta^2\Psi_1 + 2\int D^2\Psi_1\,(\nabla\Phi)\,.\nabla\overline{\Phi} + \\ &\qquad -\frac{b^2}{4}\int |\Phi|^2\,\nabla\rho^2.\nabla\Psi_1 + \alpha\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\int |\Phi|^{p+1}\,\Delta\Psi_1 = 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Seja $\Psi_1(x) = \xi\left(\dfrac{|x|^2}{j^2}\right) \times \dfrac{|x|^2}{2}$, onde $\xi \in C^\infty\left((0,\infty),\mathbb{R}\right),\ \xi = 1$ sobre $(0,1)\,,\ \xi = 0$ sobre $(2,\infty)$. Façamos $j \longrightarrow \infty$; aplicando o Teorema da Convergência Dominada, (5.8) conduz a $4N(\Phi) = 0$, o que conclui a Demonstração do *Teorema 11.*

Demonstração do Teorema 10 - *Parte trivial.*

Através de um cálculo simples, provamos que Ψ é tangente a $\mathcal{Q}$ em Φ, donde, $i\Psi$ é ortogonal a $T'(0)\Phi$. $i\Psi$ e $V'(0)\Phi$ são ortogonais pelo facto de Φ tomar apenas valores reais. Para provar que $T'(0)\Phi$ e $V'(0)\Phi$ são linearmente independentes temos de provar que são ortogonais, e mais uma vez, isto resulta do facto de Φ tomar apenas valores reais.

Demonstração do Teorema 10 - *Segunda etapa - Deduzimos uma fórmula para $\langle S''(\Phi)\Psi,\Psi\rangle$ que envolva Φ e $x.\nabla\Phi$.*

A função $\mathbb{R} \ni \tau \longmapsto \Phi + \tau\Psi \in H^1_{A,0}$ é uma trajectória regular, tem velocidade Ψ e aceleração nula. Logo $d^2_\tau S(\Phi + \tau\Psi)_{|\tau=0} = \langle S''(\Phi)\Psi, \Psi\rangle$.

Temos então:

$$S(\Phi + \tau\Psi) =$$

$$\frac{1}{2}\int |\nabla_A\Phi|^2 + \mathcal{R}\int \nabla_A\Phi.\overline{\nabla_A\Psi}\tau + \frac{1}{2}\int |\nabla_A\Psi|^2\tau^2 +$$

$$+\frac{\omega}{2}\int \Phi^2 + \omega\int \Phi\Psi\tau + \frac{\omega}{2}\int \Psi^2\tau^2 + \frac{\alpha}{p+1}\int |\Phi + \tau\Psi|^{p+1}.$$

Derivando duas vezes em $\tau = 0$, e tendo em atenção (na derivação da última parcela) que Φ é não negativo, obtemos:

$$\langle S''(\Phi)\Psi, \Psi\rangle = \int |\nabla\Psi|^2 + \frac{b^2}{4}\int \rho^2\Psi^2 + \omega\int \Psi^2 + \alpha p\int \Phi^{p-1}\Psi^2.$$

Recuperando agora a definição de Ψ; $\Psi = \frac{3}{2}\Phi + x\nabla\Phi$, e substituindo na equação anterior vem:

$$\langle S''(\Phi)\Psi, \Psi\rangle = \frac{9}{4}\left(\int |\nabla\Phi|^2 + \frac{b^2}{4}\int \rho^2\Phi^2 + \omega\int \Phi^2 + \alpha p\int \Phi^{p+1}\right) +$$

$$+3\left(\int \nabla\Phi.\nabla(x.\nabla\Phi) + \frac{b^2}{4}\int \rho^2\Phi x.\nabla\Phi + \omega\int \Phi x.\nabla\Phi + \alpha p\int \Phi^p x.\nabla\Phi\right) +$$

$$+\left(\int |\nabla(x\nabla\Phi)|^2 + \frac{b^2}{4}\int \rho^2 (x\nabla\Phi)^2\right.$$

$$\left.+\omega\int (x.\nabla\Phi)^2 + \alpha p\int \Phi^{p-1}(x.\nabla\Phi)^2\right).$$

Demonstração do Teorema 10 - *Terceira etapa - Simplificação dos termos lineares em* $\overline{x\nabla\Phi}$:

Tendo em conta que Φ é ponto crítico da acção, temos:

$$\int \nabla\Phi.\nabla(x.\nabla\Phi) + \frac{b^2}{4}\int \rho^2\Phi x.\nabla\Phi + \omega\int \Phi x.\nabla\Phi + \alpha p\int \Phi^p x.\nabla\Phi =$$

$$= \alpha(p-1)\int \Phi^p x.\nabla\Phi = -3\alpha\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\int \Phi^{p+1}.$$

Demonstração do Teorema 10 - *Quarta etapa - Simplificação dos termos quadráticos em* $x.\nabla\Phi$.

Seja $\Psi_1 \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, Ψ_1 invariante por rotações em torno do eixo do z. Temos então:

$$\int \nabla(x.\nabla\Phi).\nabla\Psi_1 + \frac{b^2}{4}\int \rho^2 x.\nabla\Phi\Psi_1 +$$

$$+\omega\int x.\nabla\Phi\Psi_1 + \alpha p\int \Phi^{p-1}x.\nabla\Phi\Psi_1 =$$

$$= \int \nabla(x.\nabla\Phi).\nabla\Psi_1 - \frac{5b^2}{4}\int \rho^2\Phi\Psi_1 - \frac{b^2}{4}\int \rho^2\Phi x.\nabla\Psi_1$$

$$-3\omega\int \Phi\Psi_1 - \omega\int \Phi x.\nabla\Psi_1 - 3\alpha\int \Phi^p x.\nabla\Psi_1$$

$$= \int \nabla\left(x.\nabla\Psi_1\right).\nabla\Psi_1 + \int \nabla\Phi.\nabla\left(x.\Psi_1\right) - \frac{5b^2}{4}\int \rho^2\Phi\Psi_1 - 3\omega\int \Phi\Psi_1 - 3\alpha\int \Phi^p\Psi_1, \tag{5.9}$$

dado que Φ é um ponto crítico da acção.

Seja $\Psi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. Usando integração por partes obtemos:

$$\int \nabla\left(x.\nabla\Psi_2\right).\nabla\Psi_1 + \int \nabla\Psi_2.\nabla\left(x.\nabla\Psi_1\right) = -\int \nabla\Psi_2.\nabla\Psi_1. \tag{5.10}$$

Em (5.10), façamos $\Psi_2 \to \Phi$ em $H^1_{A,0}$; aplicando a expressão resultante a (5.9) e, tendo em conta uma vez mais, que Φ é ponto crítico da acção em obtemos:

$$\int \nabla(x.\nabla\Phi).\nabla\Psi_1 + \frac{b^2}{4}\int \rho^2 x.\nabla\Phi\Psi_1$$

$$+\omega\int x.\nabla\Phi\Psi_1 + \alpha p\int \Phi^{p-1}x.\nabla\Phi\Psi_1 = \tag{5.11}$$

$$= -b^2\int \rho^2\Phi\Psi_1 - 2\omega\int \Phi\Psi_1 - 2\alpha\int \Phi^p\Psi_1.$$

Em (5.11) façamos$\Psi_1 \to x.\nabla\Phi$ em $H^1_{A,0}$; no segundo membro da expressão obtida, apenas temos termos lineares em $x.\nabla\Phi$; simplificando esses termos tal como na terceira etapa, obtemos:

$$\int |\nabla(x.\nabla\Phi)|^2 + \frac{b^2}{4}\int \rho^2 (x.\nabla\Phi)^2 + \omega\int (x.\nabla\Phi)^2 + \alpha p\int \Phi^{p-1}(x.\nabla\Phi)^2 =$$

$$= \frac{10b^2}{4}\int \rho^2\Phi^2 + 3\omega\int \Phi^2 + \frac{6\alpha}{p+1}\int \Phi^{p+1}. \tag{5.12}$$

Assim todos os termos quadráticos em $x.\nabla\Phi$ foram substituídos por termos lineares.

Demonstração do Teorema 10 - *Quinta etapa - Conclusão.*

Entando em $\langle S''(\Phi)\Psi, \Psi\rangle$ com a expressão obtida para a simplificação dos termos lineares, e também com a que se obteve com a simplificação dos termos quadráticos vem:

$$\langle S''(\Phi)\Psi, \Psi\rangle =$$

$$\frac{9}{4}\int |\nabla\Phi|^2 + \left(\frac{9}{4}+10\right)\frac{b^2}{4}\int \rho^2\Phi^2 + (3+\frac{9}{4})\omega\int \Phi^2 +$$

$$\alpha\left(\frac{9p}{4} - \frac{9(p-1)}{p+1} + \frac{6}{p+1}\right)\int \Phi^{p+1}.$$

Obtivemos assim uma expressão para $\langle S''(\Phi)\Psi, \Psi\rangle$ em termos de Energia e Carga.

Usando (5.2) eliminamos a carga. Para eliminar a Energia potêncial, procedemos de forma análoga usando o Teorema do Virial.

O resultado final é o seguinte:

$$\langle S''(\Phi)\Psi, \Psi\rangle = -4\left(\frac{1-a}{1+2a}\right) \times \left(\int |\nabla\Phi|^2 - \left(\frac{2+a}{1-a}\right)\frac{b^2}{4}\int \rho^2\Phi^2\right), \tag{5.13}$$

sendo $a = \dfrac{5-p}{2p-2}$.

Por fim, precisamos de uma relação entre as energias Cinética e Magnética do tipo $K(\Phi) > C(a)M(\Phi)$. Voltemos ao teorema do Virial e a (5.2); a eliminação da Energia Potencial e $\omega > 0$ conduz-nos a:

$$\int |\nabla\Phi|^2 > \left(1+\frac{3}{a}\right)\frac{b^2}{4}\int \rho^2\Phi^2. \tag{5.14}$$

Por (5.13), (5.14), obteremos $\langle S''(\Phi)\Psi, \Psi\rangle < 0$ desde que $\left(1+\dfrac{3}{a}\right) \geq \dfrac{2+a}{1-a}$, *i,e.* $p \geq p_{uns}$. O que conclui a demonstração.

Os argumentos anteriormente apresentados podem generalizar-se a $H^1_{A,k}$, $k \neq 0$.

Capítulo 6

Regularidade

O resultado principal deste capítulo é o seguinte:

Teorema 13 *Suponhamos* $p \in [2,5)$, $\omega \in (0,\infty)$ *e* Φ *ponto crítico não negativo da acção em* $H^1_{A,0}$. *Então,* $\partial_z \Phi$, $\partial_z^2 \Phi$, $x.\nabla\Phi$, $\partial_z(x.\nabla\Phi) \in H^1_{A,0}$.

Para a demonstração do teorema, precisamos de um resultado relativamente a uma desigualdade diferencial, que enunciamos e demonstramos:

Proposição 14 *Para* $\beta \in (0,\infty)$, *seja* $u \in C^2([0,\infty),\mathbb{R})$, *com* $u \geq 0$ *verificando* $u''(t) \geq \beta u(t), \forall t \in [0,\infty)$. *Então verificam-se uma das seguintes desigualdades:*

$$u(t) \leq Ce^{-\sqrt{\beta}t}, \forall t \in [0,\infty)\,, \text{ para valores de } C \text{ positivos; ou} \tag{6.1}$$

$$u(t) \geq Ce^{\sqrt{\beta}t}, \forall t \in [t_1,\infty)\,, \text{ para valores positivos de } C \text{ e de } t_1. \tag{6.2}$$

Demonstramos em seguida a proposição e logo após, faremos a demonstração do teorema em várias etapas.

Demonstração da Proposição.

Defina-se

$$v(t) = e^{\sqrt{\beta}t}\left(u'(t) + \sqrt{\beta}u(t)\right).$$

v verifica a seguinte desigualdade diferencial:

$$v'(t) \geq 2\sqrt{\beta}v(t), \forall t \in [0, \infty).$$

Assim, ou $v(t) \leq 0, \forall t \in [0, \infty)$, ou $v(t_0) > 0$, para $t_0 \in [0, \infty)$.

No primeiro caso,

$$u'(t) + \sqrt{\beta}u(t) \leq 0, \forall t \in [0, \infty),$$

o que implica (6.1).

No segundo caso,

$$v(t) \geq v(t_0)e^{2\sqrt{\beta}(t-t_0)}, \ \forall t \in [t_0, \infty).$$

Portanto, $e^{\sqrt{\beta}t}u(t) + \left(\frac{v(t_0)e^{-2\sqrt{\beta}t_0}}{2\sqrt{\beta}}\right)e^{2\sqrt{\beta}t}$ é não decrescente em $[t_0, \infty)$, o que implica 6.2.

Demonstração do Teorema *-1ª etapa - Regularidade local:* Φ é C.

Voltamos a (5.4) que escrevemos da seguinte forma;

$$-\Delta(\xi\Phi) + \xi\Phi = \left(-\Delta\xi - \frac{b^2}{4}\rho^2\xi - (\omega - 1)\xi\right)\Phi + \\ -2\nabla\xi.\nabla\Phi - \alpha\xi\Phi^p, \text{ em } \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}\right), \tag{6.3}$$

lembrando-nos que $\Phi \in H^2_{loc}$. Então, o segundo membro está em L^6. Aplicando a *Proposição12*: $\Phi \in W^{2,6}$. Então, o segundo membro de (6.3) está em L^∞. Apliquemos novamente a *Proposição12*: $\Phi \in W^{2,q}_{loc}$, q arbitrariamnente grande; então, Φ é C^1. Agora, o segundo membro está em $W^{1,q}, q$ arbitrariamente grande. Uma vez mais, usando a *Proposição12* obtemos $\Phi \in W^{3,q}_{loc}$, q arbitrariamente grande; então Φ é C^2.

Particularmente:

$$-\Delta\Phi + \frac{b^2}{4}\rho^2\Phi + \omega\Phi + \alpha\Phi^p = 0, \text{ no sentido clássico.} \tag{6.4}$$

Demonstração do Teorema *-2ªetapa - Comportamento no infinito:* $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Sabe-se (ver [5]) que $H^2_A \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$. Suponhamos agora que $\Phi \in H^2_A$, e tome-se uma sucessão em $\mathcal{D}$ convergente para Φ em H^2_A; a sucessão também converge para Φ em L^∞; assim, Φ está no fecho de $\mathcal{D}$ tomado em L^∞ - o espaço das funções que tendem para zero no infinito, $C_0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Assim, é suficiente provar que $\Phi \in H^2_A$. Por definição, isto significa $-\Delta\Phi + \frac{b^2}{4}\rho^2\Phi \in L^2$.

Equivalentemente, $\Phi \in L^{2p}$. Para demonstrar este facto, primeiro consideramos o complementar de uma vizinhança cilíndrica do eixo dos z e usamos a simetria de Φ.

Definimos Ω_1, conjunto aberto do plano por:

$$\Omega_1 = \{(\rho, z) : \rho > 1, z \in \mathbb{R}\},$$

temos então:

$$\int_{\Omega_1} \Phi^2(\rho,z)\,d\rho dz \le \frac{1}{2\pi}\int \Phi^2;$$

$$\int_{\Omega_1} \left((\partial_\rho\Phi)^2 + (\partial_z\Phi)^2\right)(\rho,z)\,d\rho dz \le \frac{1}{2\pi}\int |\nabla\Phi|^2 .$$

Assim, tomando Φ como função de *duas* variáveis, temos $\Phi \in H^1(\Omega_1,\mathbb{R})$.

Consequência:

$$\int_{\Omega_1} \Phi^q(\rho,z)\,d\rho dz \le \infty,\ \forall q \in [2,\infty)\,. \tag{6.5}$$

Utilisando a desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_1} \Phi^{2p}(\rho,z)\,\rho d\rho dz \\ &\le \left(\int_{\Omega_1} \Phi^{3p-1}(\rho,z)\,d\rho dz\right)^{2/3} \times \left(\int_{\Omega_1} \Phi^2(\rho,z)\,\rho^3 d\rho dz\right)^{1/3}.\end{aligned} \tag{6.6}$$

Por (6.5),(6.6) e $\rho\Phi \in L^2$, obtemos finalmente

$$\int_{\Omega_1} \Phi^{2p}(\rho,z)\,\rho d\rho dz < \infty.$$

Tomemos agora $\xi \in C^\infty((0,\infty),\mathbb{R})$, $\xi \ge 0$, tal que $\xi(\rho) = 1$ se $0 < \rho < 1$, e $\xi(\rho) = 0$ se $\rho > 2$. Basta portanto provar que $\xi\Phi \in L^{2p}$.

$\xi\Phi$ verifica a equação

$$\begin{aligned}-\Delta(\xi\Phi) + \xi\Phi = (&-\Delta\xi\Phi - 2\nabla\xi.\nabla\Phi - \frac{b^2}{4}\rho^2\xi\Phi \\ &-(\omega-1)\,\xi\Phi - \alpha(\xi-\xi^p)\,\Phi^p) - \alpha(\xi\Phi)^p,\quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})\end{aligned} \tag{6.7}$$

Note-se que, desde que $\rho^2\xi$, $\xi - \xi^p$ sejam limitadas e $\xi(\rho) - \xi^p(\rho) = 0$, para $0 < \rho < 1$, o primeiro termo do segundo membro está em L^2.

Separemos (6.7) num sistema de duas equações, *i.e.* consideremos f_1 e f_2 univocamente determinadas por

$$f_1, f_2 \in H^1\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right);$$

$$(-\Delta+1)\, f_1 = -\Delta\xi\Phi - 2\nabla\xi.\nabla\Phi - \frac{b^2}{4}\rho^2\xi\Phi +$$

$$-(\omega-1)\,\xi\Phi - \alpha\left(\xi-\xi^p\right)\Phi^p, \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3,\mathbb{R});$$

$$(-\Delta+1)\, f_2 = -\alpha\,(\xi\Phi)^p\,, \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}).$$

Obviamente, $\xi\Phi = f_1 + f_2$ e $f_1 \in H^2$, e portanto $f_1 \in L^q$, $\forall q \in [2,\infty]$.

Argumentando agora por *bootstrap* com base na *Proposição 12* e em injecções de Sobolev, obtemos $f_2 \in L^q, \forall q \in [2,\infty]$.Particularmente, $\xi\Phi \in L^{2p}$.

Demonstração do Teorema - *3ªetapa - Comportamento do infinito: decréscimo exponencial da média esférica.*

Designamos por $S(r)$ a superfície esférica de raio r , $r \in (0,\infty)$.

Seja $f \in C(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, \mathbb{R})$, e $\langle f\rangle_r$ o valor médio de f sobre S_r :

$$\langle f\rangle_r = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{S(r)} f.$$

Ao Integrar (6.4) sobre $S(r)$ somos conduzidos a uma equação diferencial de segunda ordem em $\langle\Phi\rangle_r$:

$$\frac{d^2}{dr^2}\langle\Phi\rangle_r + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\langle\Phi\rangle_r =$$

$$\frac{b^2}{4}r^2\langle sen^2\theta\Phi\rangle_r + \omega\langle\Phi\rangle_r + \alpha\langle\Phi^p\rangle_r,$$

onde θ é colatitude.

Assim temos

$$\frac{d^2}{dr^2}\langle\Phi\rangle_r + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\langle\Phi\rangle_r \geq \left(\omega - |\alpha|\,\|\Phi\|^{p-1}_{L^\infty(s(r),\mathbb{R})}\right)\langle\Phi\rangle_r.$$

Uma vez que $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, dado $\omega_1 \in (0,\omega)$, existe $r_1 \in (0,\infty)$ tal que $\omega - |\alpha|\,\|\Phi\|^{p-1}_{L^\infty(s(r),\mathbb{R})} \geq \omega_1$, para $r \geq r_1$. Assim:

$$\frac{d^2}{dr^2}\langle\Phi\rangle_r + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\langle\Phi\rangle_r \geq \omega_1\langle\Phi\rangle_r,\ \forall r \in [r_1,\infty)\,. \tag{6.8}$$

Seja $u(r) = (r\langle\Phi\rangle_r)^2$, para $r > 0$. Então:

$$u''(r) = 2\left(d_r\left(r\langle\Phi\rangle_r\right)\right)^2 + 2r\langle\Phi\rangle_r\frac{d^2}{dr^2}\left(r\langle\Phi\rangle_r\right),$$

$$u''(r) \geq 2r\langle\Phi\rangle_r r\left(\frac{d^2}{dr^2}\langle\Phi\rangle_r + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\langle\Phi\rangle_r\right),$$

tendo em conta (6.8):

$$u''(r) \geq 2\omega_1 u(r),\ \forall r \in [r_1,\infty)\,.$$

Aplicamos agora a *Proposição 14*: ou $u(.+r_1)$ decresce exponencialmente para zero, ou cresce exponencialmente para o infinito.

A segunda alternativa não pode acontecer, uma vez que

$$\int_0^\infty u(r)dr \leq \frac{1}{4\pi}\int \Phi^2 < \infty.$$

Assim,

$$u(r) \leq Ce^{-\sqrt{2\omega_1}(r-r_1)}, \forall r \in [r_1,\infty)\,,\ \text{para valores de } C \text{ positivos;}$$

$$\langle \Phi \rangle_r \leq Ce^{\sqrt{-2\omega_1}/2r}, \forall r \in [0,\infty), \text{para valores de } C \text{ positivos.} \tag{6.9}$$

Demonstração do Teorema - *4ª etapa– Para* $\gamma \in [0,\infty), r^\gamma x.\nabla\Phi \in L^2$.

O ponto de partida é a seguinte equação:

$$-\Delta\Phi^2 = 2\Phi(-\Delta\Phi) - 2|\nabla\Phi|^2 =$$

$$= -\frac{b^2}{2}\rho^2\Phi^2 - 2\omega\Phi^2 - 2\alpha\Phi^{p+1} - 2|\nabla\Phi|^2,$$

$$|\nabla\Phi|^2 = -\frac{b^2}{4}\rho^2\Phi^2 - \omega\Phi^2 - \alpha\Phi^{p+1} + \frac{1}{2}\Delta\Phi^2.$$

Assim:

$$|\nabla\Phi|^2 \leq |\alpha| . \|\Phi\|_{L^\infty}^p \Phi + \frac{1}{2}\Delta\Phi^2,$$

e a integração sobre $S(r)$ conduz a :

$$\langle|\nabla\Phi|^2\rangle_r \leq |\alpha| . \|\Phi\|_{L^\infty}^p \langle\Phi\rangle_r + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2}\langle\Phi^2\rangle_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\langle\Phi^2\rangle_r.$$

Vamos agora multiplicar por $4\pi r^{4+2\gamma}$ e integrar em r de r_1 até r_2 $(0 < r_1 < r_2 < \infty)$; integrando por partes os dois últimos termos vem:

$$\int_{r_1<r<r_2} r^{2+2\gamma}|\nabla\Phi|^2 \leq 4\pi|\alpha| . \|\Phi\|_{L^\infty}^p \int_{r_1}^{r_2} r^{4+2\gamma}\langle\Phi\rangle_r dr$$

$$+2\pi(2+2\gamma)(3+2\gamma)\int_{r_1}^{r_2} r^{2+2\gamma}\langle\Phi^2\rangle_r dr$$

$$+2\pi(4+2\gamma)\, r_1^{3+2\gamma}\langle\Phi^2\rangle_{r_1} - r_1^{2+2\gamma}\int_{S(r_1)}\Phi\partial_r\Phi$$

$$-2\pi(4+2\gamma)\, r_2^{3+2\gamma}\langle\Phi^2\rangle_{r_2} + r_2^{2+2\gamma}\int_{S(r_2)}\Phi\partial_r\Phi.$$

Assim:

$$\int\limits_{r_1<r<r_2} (r^\gamma |x.\nabla\Phi|)^2 \le C \int_{r_1}^{r_2} (r^{4+2\gamma} + r^{2+2\gamma}) \langle\Phi\rangle_r dr$$

$$+2\pi (4+2\gamma) r_1^{3+2\gamma} \langle\Phi^2\rangle_{r_1} - r_1^{2+2\gamma} \int\limits_{S(r_1)} \Phi\partial_r\Phi$$

$$+2\pi \|\Phi\|_{L^\infty}^{1/2} r_2^{3+2\gamma} (\langle\Phi\rangle_{r_2})^{1/2} \left(\int\limits_{S(r_2)} |\nabla\Phi|^2 \right)^{1/2},$$

onde $C = C(\alpha, p, \|\Phi\|_{L^\infty}, \gamma)$. Façamos $r_1 \to 0$ e apliquemos (6.9). Conclusão: existem C_1, $C_2 \in (0, \infty)$ tal que, para qualquer $r_2 \in (0, \infty)$:

$$\int\limits_{r<r_2} (r^\gamma |x.\nabla\Phi|)^2 \le C_1 + C_2 r_2^{3+2\gamma} e^{-\sqrt{2\omega_1}/4r_2} \left(\int\limits_{S(r_2)} |\nabla\Phi|^2 \right)^{1/2}.$$

Assim, isto é suficiente para provar a existência de uma sucessão $(r_{2,j})_j$ decrescente e ilimitada tal que:

$$r_{2,j}^{3+2\gamma} e^{-\sqrt{2\omega_1}/4r_{2,j}} \left(\int\limits_{S(r_{2,j})} |\nabla\Phi|^2 \right)^{1/2} \le 1, \ \forall j.$$

Se tal sucessão não existir, teremos, para r_2 em alguma vizinhança de ∞ :

$$\int\limits_{S(r_2)} |\nabla\Phi|^2 > r_2^{-6-4\gamma} e^{-\sqrt{2\omega_1}/2r_2}.$$

O que é contraditório com

$$\int_0^\infty dr_2 \int\limits_{S(r_2)} |\nabla\Phi|^2 = \int |\nabla\Phi|^2 < \infty.$$

Consequência: tal sucessão existe e $r^\gamma x.\nabla\Phi \in L^2$.

Demonstração do Teorema - *5ª etapa– Conclusão.*

Sabe-se (ver [2]) que $v \in H_A^2$ *sse* :

$$i)\ v \in L^2;$$

$$ii)\ (\partial_l + iA_l)\, v \in L^2,\ \forall l \in \{1,2,3\}\,;$$

$$iii)\ (\partial_m + iA_m)\,(\partial_l + iA_l)\, v \in L^2,\ \forall\ m,l \in \{1,2,3\}\,.$$

Portanto, $\partial_z v \in H_A^1$ se $v \in H_A^2$. Assim, é suficiente provar que Φ, $\partial_z\Phi$, $x.\nabla\Phi \in H_A^2$.

Na segunda etapa já provamos que $\Phi \in H_A^2$, assim $\partial_z\Phi \in H_A^1$. Basta portanto provar que:

$$L_A\partial_z\Phi \in L^2; \tag{6.10}$$

$$x.\nabla\Phi \in H_A^1; \tag{6.11}$$

$$L_A\,(x.\nabla\Phi) \in L^2. \tag{6.12}$$

Provemos que (6.11) é consequência de (6.12). Sabemos do passo anterior que $x.\nabla\Phi,\ iA(x.\nabla\Phi) \in L^2$. Assim, para termos (6.11), é suficiente que $\nabla\,(x.\nabla\Phi) \in L^2$. Por outro lado, do passo anterior e de (6.12), $\Delta\,(x.\nabla\Phi) \in L^2$. Então, $x.\nabla\Phi \in H^2$. Particularmente, $\nabla\,(x.\nabla\Phi) \in L^2$ e verifica-se (6.11).

Pelo que acabamos de ver, os problemas de regularidade reduzem-se a demonstrar (6.10) e (6.12).

Para calcular $L_A\partial_z\Phi, L_A\,(x.\nabla\Phi)$ derivando classicamente, é preciso que $\Phi \in C^3$. Voltemos a (6.3) e lembremo-nos que $\Phi \in W_{loc}^{3,q}$, q arbitrariamente grande (usemos

$p \geq 2$); $\Phi \in W^{4,q}_{loc}$, q arbitrariamente grande; Φ *é* C^3. Agora:

$$\left(-\Delta + \frac{b^2}{4}\rho^2\right)\partial_z\Phi = -\omega\partial_z\Phi - \alpha p\Phi^{p-1}\partial_z\Phi,$$

$$\left(-\Delta + \frac{b^2}{4}\rho^2\right)(x.\nabla\Phi) =$$

$$= -2\omega\Phi - b^2\rho^2\Phi - 2\alpha\Phi^p - \omega x.\nabla\Phi - \alpha p\Phi^{p-1}x.\nabla\Phi,$$

e todas as funções do segundo membro estão em L^2.

O que anteriormente foi feito pode também generalizar-se a $H^1_{A,k}$, $k \neq 0$.

Capítulo 7

Conclusão

Demonstração do Teorema 6:

Aplicando o *Teorema 16*:

$$\Phi \in D\left(\left(V'(0)\right)^2\right), \ x.\nabla\Phi \in D\left(V'(0)\right).$$

Pelo *Teorema 10*, Φ e $\Psi = \frac{3}{2}\Phi + x.\nabla\Phi$ verificam **CGI**, **CGSDA**.

Pelo *Teorema 8,* existe um **SDA**.

Por último, apliquemos o *Teorema 7.*

Bibliografia

[1] H.BERESTYCKI and T. CAZENAVE, Instabilité des états stationnaires dans les equations de Schrödinger et de Klein-Gordon nonlineaires, C.R. *Acad. Sci. Paris*, T.**293**, 1981, pp.489-492.

[2] T. CAZENAVE and M ESTEBAN, On the Stability of Stationary states for Nonlinear Schrödinger equations with an External Magnetic Field, *Mat. Apl. Comp.*, Vol.**7**, 1988,pp155-168.

[3] T. CAZENAVE and P.L.LIONS, Orbital stability of Standing Waves for some Nonlinear Schrödinger Equations, *Comm. Math. Phys.*, Vol. **85**, 1982, pp. 549-561.

[4] M ESTEBAN and P.L.LIONS, Stationnary Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations with an external Magnetic Field. In *Partial Differential Equations and the Calculus of Variations,* F. COLOMBI *et al.* Eds., Birkhäuser, Boston, 1989, pp.401-409.

[5] Finite Time Blow-up for Some Nonlinear Schrödinger Equations with an external Magnetic Field.

[6] M.GRILLAKIS, J. SHATAH and W.A.STRAUSS, Stability Theory os Solitary Waves in the presence of simetry. I, J.*Funct. Anal.*, Vol **74**, 1987, pp. 160-197.

[7] J. SHATAH and W.A.STRAUSS, Instability of Nonlinear Bound States, *Comm. Math. Phys.*, Vol. **100**, 1985, pp. 173-190.

[8] GONÇALVES RIBEIRO, Instability of symetric stationary states for some nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. **54**, n^{o}4, 1991, pp.403-433.