UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Título: Geometrias Finitas

Nome do Mestrando: Ana Paula Zangalho Raposo

Orientação: Pedro Macias Marques

Mestrado em Matemática para o Ensino

Dissertação

Évora, 2014

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Título: Geometrias Finitas

Nome do Mestrando: Ana Paula Zangalho Raposo

Orientação: Pedro Macias Marques

Mestrado em Matemática para o Ensino

Dissertação

Évora, 2014

Índice

Esta dissertação é dedicada às minhas filhas Filipa e Inês.

Agradecimentos

Desejo expressar os meus sinceros agradecimentos ao Professor Doutor Pedro Macias Marques pelo profissionalismo, dedicação, empenho e disponibilidade reveladas, muitas vezes em fusos horários bem diferentes. Agradeço também pela paciência, ajuda e atenção dispensadas, assim como pelas críticas, correções e sugestões relevantes feitas durante a orientação, que permitiram a execução desta dissertação.

Resumo

Este trabalho incide no estudo de algumas geometrias finitas, de um ponto de vista axiomático. São apresentadas e estudadas as seguintes geometrias: a geometria dos quatro pontos, a geometria dos três pontos, a geometria dos sete pontos, a geometria dos nove pontos e doze retas, a configuração de Desargues, a configuração de Papo, planos e espaços projetivos finitos e planos afins finitos.

Palavras chave: geometrias finitas, planos e espaços projetivos, sistema axiomático.

Abstract

Finite geometries

In this work we study a few finite geometries, from an axiomatic point of view. The following geometries are presented and studied: four-point geometry, three-point geometry, seven-point geometry, nine-point-and-twelve-line geometry, Desargues configuration, Pappus configuration, finite projective planes and spaces, and finite afine planes.

Key-words: finite geometries, projective planes and spaces, axiomatic system.

Introdução

A geometria finita é uma geometria baseada num conjunto de axiomas, termos indefinidos, termos definidos e relações que limitam o conjunto de todos os pontos e o conjunto de todas as retas a um número finito. O estudo desta geometria, do qual Gino Fano (1871-1952) foi um dos pioneiros, sofreu um desenvolvimento significativo a partir do início do século XX. Atualmente está relacionada com algumas áreas da matemática, como por exemplo, teoria de códigos, criptografia, teoria de grupos e combinatória. Ao longo deste trabalho iremos introduzir vários tipos de geometrias finitas, começando pelas que pareciam mais simples, nas quais foram abordados alguns conceitos importantes. Cada uma das geometrias será abordada por via axiomática. Começamos por introduzir em cada uma delas os seus axiomas e a partir destes enunciaremos e demonstraremos vários resultados que nos ajudarão a compreendê-las. Um sistema axiomático é uma estrutura lógica organizada constituída por termos indefinidos, termos definidos, axiomas e outros resultados a que podemos chamar lemas, corolários e teoremas. Ao tentarmos definir um termo necessitamos de outras palavras, que por sua vez, necessitam de outras palavras, facilmente chegamos a um círculo vicioso, surgindo assim a necessidade de não definir todos os termos. Utilizaremos os termos ponto, reta e relação de incidência como termos indefinidos. Todos os termos que utilizaremos são definidos a partir destes. Os axiomas são afirmações que são aceites como verdadeiras sem demonstração. São essenciais nos sistemas axiomáticos porque precisamos de um conjunto de afirmações iniciais a partir do qual iremos deduzir e demonstrar outras afirmações. A estas novas afirmações chamamos lemas, corolários e teoremas. Abordaremos algumas caraterísticas de um sistema axiomático. A um sistema axiomático no qual não existam contradições entre quaisquer duas afirmações chamamos sistema consistente. Uma forma de provar a consistência de um sistema é apresentar um modelo que o satisfaça. Um modelo é um conjunto de objetos, que tomam o papel de pontos e retas, e relações entre esses objetos, que correspondem à relação de incidência. Outra caraterística que podem ter os sistemas axiomáticos é a independência: dizemos que um sistema é independente se nenhum axioma pode ser provado a partir dos outros axiomas. Os sistemas axiomáticos independentes permitem-nos conhecer melhor a geometria em questão. Outro atributo que poderemos verificar em alguns sistemas axiomáticos é que se trocarmos a palavra ponto por reta e vice-versa nos axiomas, vamos obter afirmações que ainda são verdadeiras neste sistema axiomático. Um sistema nestas condições diz-se que satisfaz o princípio da dualidade. No primeiro capítulo iremos dar quatro exemplos de geometrias finitas: a geometria dos quatro pontos, a geometria dos três pontos, a geometria dos sete pontos e a geometria dos nove pontos e doze retas. No primeiro exemplo introduziremos os conceitos de consistência, independência e dualidade, acima referidos. Apresentaremos, em cada uma das geometrias, um modelo para provar a sua consistência, daremos um exemplo para demonstrar a independência de cada axioma e iremos verificar se cada um dos sistemas axiomáticos satisfaz ou não o princípio da dualidade. Concluiremos que nestes exemplos dados somente a geometria finita dos três pontos e a geometria finita dos sete pontos são sistemas que satisfazem o princípio da dualidade. No segundo capítulo abordaremos a configuração de Desargues e a configuração de Papo. A configuração de Desargues apresenta uma relação interessante entre pontos e retas, que é a de polaridade, a qual será desenvolvida pormenorizadamente. Ambas as configurações satisfazem o princípio da dualidade. Terminaremos o estudo de cada uma das configurações com o teorema que lhe dá o nome: Teorema de Desargues e Teorema de Papo, respetivamente. No terceiro capítulo serão abordadas as axiomáticas dos planos e espaços projetivos finitos. O espaço projetivo é uma generalização do plano projetivo, que admite mais de duas dimensões. Em ambas as axiomáticas enunciaremos e provaremos alguns resultados importantes. Nos planos projetivos finitos construiremos dois modelos dos planos mais simples, um de ordem dois e outro de ordem três. Em seguida, faremos uma breve discussão sobre a existência de planos projetivos de outras ordens. Ainda neste capítulo iremos estabelecer uma conexão entre planos projetivos finitos e a teoria de códigos e entre planos projetivos finitos e quadrados latinos. Para compreendermos melhor estas conexões iremos obter dois códigos, um a partir de um plano projetivo de ordem dois e outro a partir de plano projetivo de ordem três. A existência desta relação vem contribuir para dar resposta à questão sobre a existência de planos projetivos de uma dada ordem. Posteriormente construiremos um conjunto de quadrados latinos a partir de um plano projetivo de ordem três e vice-versa. No último capítulo introduziremos a axiomática dos planos afins finitos e faremos uma breve comparação com os planos projetivos finitos. Verificamos que este sistema axiomático, ao contrário do plano projetivo finito, não satisfaz o princípio da dualidade. Daremos dois exemplos de possíveis modelos, um de ordem dois e outro de ordem três. Finalizaremos com um resultado que estabelece uma relação entre os planos projetivos de ordem n e os planos afins de ordem n.

Notações e convenções

Nos diferentes exemplos de geometrias finitas que iremos abordar neste trabalho adotámos alguns conceitos e terminologias.

Em todos os sistemas axiomáticos tomamos para termos indefinidos: ponto, reta e relação de incidência. Utilizamos como sinónimo do termo relação de incidência os termos: pertencer a, passar em, estar sobre, conter e ter. Por exemplo as expressões, a reta r incide no ponto P e o ponto P está sobre a reta r têm o mesmo significado.

Consideramos um modelo para um sistema axiomático como sendo um conjunto de objetos, que tomam o papel de pontos e retas, e relações entre esses objetos, que correspondem à relação de incidência.

Designamos os pontos por letras maiúsculas (por exemplo: ponto P), as retas por letras minúsculas (por exemplo: reta r), os planos por letras gregas (por exemplo: plano α, plano β, plano π). No capítulo 3 na secção 3.4 vamos denominar os espaços tridimensionais por letra gregas maiúsculas (por exemplo: espaço tridimensional Γ).

Além disso, se existe uma única reta incidente em dois pontos A e B dados, então designamo-la por reta AB. Por conveniência, se três ou mais pontos forem colineares, podemos designar a reta que incide nesses pontos por uma sequência de letras que os designa. Por exemplo se os pontos A, B, C e D são colineares, podemos designar a reta que neles incide por reta $ABCD$. Chamamos a atenção para o facto de esta notação ser pouco comum em livros de geometria, mas optamos pela sua utilização para facilitar a compreensão. No caso de os pontos não serem colineares poderemos denotar da mesma forma outros objetos, por exemplo podemo-nos referir ao quadrilátero $ABCD$ ou ao hexágono $ABCDEF$. Em qualquer dos casos será sempre identificado o objeto a que nos estamos a referir.

Algumas retas serão representadas de forma pouco habitual, nas figuras que acompanham o texto, isto é, são representadas por linhas curvas. Optámos por esta representação porque nalguns casos as relação de incidência não permite utilizarmos somente segmentos de reta para representarmos uma reta.

Utilizaremos as seguintes definições:

Definição 0.0.1 (retas paralelas). *Retas paralelas são retas que não têm nenhum ponto em comum.*

Definição 0.0.2 (colineariedade). *Dois ou mais pontos dizem-se colineares se inci-*

direm numa mesma reta.

Definição 0.0.3 (concorrência). *Duas ou mais retas são concorrentes se incidirem no mesmo ponto.*

Capítulo 1

Primeiros Exemplos de Geometrias Finitas

1.1 Geometria dos quatro pontos

Este sistema axiomático, de todos os que iremos apresentar, é o que nos parece menos complexo, pois partiremos somente de três axiomas e a partir destes apenas demonstraremos um resultado. Começaremos por enunciar os seus axiomas, posteriormente introduziremos alguns conceitos como o de consistência, o de independência e o de dualidade. Este sistema axiomático não satisfaz o princípio da dualidade mas o seu dual permite-nos definir um novo sistema axiomático, a geometria das quatro retas.

Axiomas:

Axioma A_1: Existem exatamente quatro pontos distintos.

Axioma A_2: Dados dois pontos distintos, existe exatamente uma reta incidente em ambos.

Axioma A_3: Cada reta tem exatamente dois pontos distintos.

A partir dos três axiomas anteriores, iremos deduzir resultados que nos permitirão conhecer a geometria definida por este sistema axiomático. Para isso é fundamental que os resultados façam sentido, não nos interessa deduzir através deste sistema nenhuma contradição. Introduziremos a este propósito o próximo conceito.

Definição 1.1.1 (Consistência). *Um sistema axiomático diz-se consistente se dele não for possível concluir nenhuma contradição.*

Uma forma de demonstrar a consistência de um sistema axiomático é encontrar um modelo que o satisfaça. Com o modelo seguinte facilmente verificamos que os axiomas não se contradizem.

Consideremos o modelo em que os pontos são as letras A, B, C e D e as retas são os segmentos de reta AB, AC, AD, BC, BD e CD, representadas na figura 1.1. Um ponto incide numa reta se for uma extremidade de um segmento de reta.

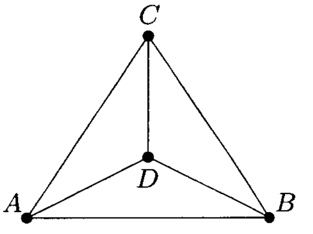


Figura 1.1: Um possível modelo da geometria dos quatro pontos

Verificamos facilmente que os três axiomas são satisfeitos e portanto o sistema axiomático é consistente.

O nosso objetivo é estudar um conjunto de axiomas que não estão relacionados uns com os outros, de modo a compreender melhor toda a estrutura do sistema. Para tal introduziremos o conceito de independência.

Definição 1.1.2 (Independência). *Num sistema axiomático consistente um axioma é independente se não pode ser provado a partir dos restantes. Se cada axioma do sistema é independente, então o sistema axiomático diz-se independente.*

Para verificar a independência deste sistema axiomático mostraremos a independência de cada um dos axiomas. Para isso recorreremos a exemplos de modelos que não verificam o axioma em causa, mas que verificam todos os outros axiomas.

Modelos que demostram a independência dos axiomas

Nos exemplos seguintes podemos ver que facilmente se cumprem todos os axiomas com exceção do axioma em questão.

Axioma A_1: Existem exatamente quatro pontos.

Exemplo: Consideremos um modelo contendo exatamente dois pontos R e S e uma reta incidente nestes pontos (fig. 1.2).

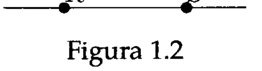


Figura 1.2

Este modelo não cumpre o axioma A_1.

Axioma A_2: Dados dois pontos distintos, existe exatamente uma reta incidente em ambos.

Exemplo: O modelo constituído pelos pontos P, Q, R e S e pelas retas PQ e RS (fig. 1.3).

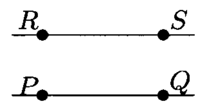


Figura 1.3

Este modelo não cumpre o axioma A_2, porque não existe uma reta incidente nos pontos P e R, por exemplo.

Axioma A_3: Cada reta tem exatamente dois pontos distintos.

Exemplo: Consideremos o modelo formado pelos pontos P, Q, R e S, uma reta incidente nos pontos R, Q, e S e as outras três retas incidentes no ponto P e em cada um dos restantes pontos (fig. 1.4).

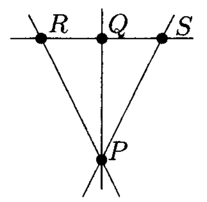


Figura 1.4

O modelo não cumpre o axioma A_3, pois existe uma reta incidente em três pontos.

Verificamos que os axiomas A_1, A_2 e A_3 são independentes, logo o sistema é independente.

Veremos a seguir, uma consequência dos axiomas que é o teorema que se segue.

Teorema 1.1.3. *Existem exatamente seis retas.*

Demonstração:

Existem exatamente quatro pontos distintos P, Q, R e S, de acordo com o axioma A_1. Aplicando o axioma A_2 construímos as seis retas PQ, PR, PS, RQ, RS e QS (fig. 1.5).

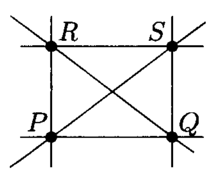


Figura 1.5

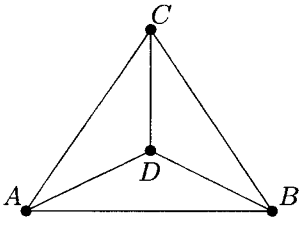
Suponhamos, com vista a um absurdo, que existem mais de seis retas, sendo r uma sétima reta distinta das anteriores. A reta r tem dois pontos, de acordo com o axioma A_3. Esses pontos só podem ser dois dos quatros definidos anteriormente (P, Q, R e S), pois não existem mais pontos. Suponhamos, sem perda de generalidade, que a reta r incide no ponto P. Nesse ponto e em cada um dos restantes pontos já incide uma reta, e de acordo com o axioma A_2 a reta r terá de ser coincidente com a reta PQ ou PR ou PS, mas é absurdo pois a reta r é distinta das anteriores. Assim existem exatamente seis retas. □

Será que existem outros modelos que satisfazem este sistema de axiomas?

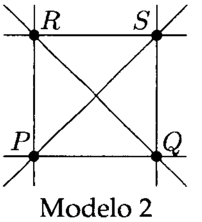
Poderão existir outros modelos que representem este sistema axiomático, mas todos eles são equivalentes no sentido da definição seguinte.

Definição 1.1.4. *Dois modelos α e β de um sistema axiomático são isomorfos se existir uma bijeção entre o conjunto de pontos de α e conjunto de pontos de β e uma bijeção entre o conjunto de retas de α e o conjunto de retas de β de tal modo que são preservadas todas as relações de incidência.*

Se nos inspirarmos na ilustração da fig. 1.5 do teorema 1.1.3 encontramos um segundo modelo para este sistema axiomático. Consideremos a seguir os dois modelos (fig. 1.6).



Modelo 1



Modelo 2

Figura 1.6

Vamos provar que estes modelos são isomorfos. Comecemos por estabelecer uma bijeção entre os pontos de ambos modelos.

$$\begin{array}{c} A \leftrightarrow P \\ B \leftrightarrow Q \\ C \leftrightarrow S \\ D \leftrightarrow R \end{array}$$

Seguidamente estabeleceremos uma bijeção entre as suas retas. A imagem da reta AB é a reta que incide nos pontos que são imagem de A e de B, ou seja a reta PQ, e o mesmo se passa com as outras retas.

$$\begin{aligned}
AB &\leftrightarrow PQ\\
AC &\leftrightarrow PS\\
AD &\leftrightarrow PR\\
BC &\leftrightarrow QS\\
BD &\leftrightarrow QR\\
CD &\leftrightarrow SR
\end{aligned}$$

Nestas bijeções são preservadas as relações de incidência, logo os modelos são isomorfos.

Apresentaremos de seguida os conceitos da dualidade.

Definição 1.1.5. *Chama-se dual de uma afirmação num sistema axiomático à afirmação que se obtém trocando os termos ponto e reta.*

Definição 1.1.6. *Dizemos que um sistema axiomático satisfaz o princípio da dualidade se o dual de cada afirmação é também uma afirmação verdadeira.*

Este sistema axiomático não verifica o princípio da dualidade porque fazendo o dual do axioma A_1 afirmamos que existem quatro retas, o que é falso, pois demostrámos no teorema 1.1.3 que existem seis retas. Mais à frente veremos alguns sistemas que satisfazem este princípio.

Iremos de seguida estudar o dual deste sistema axiomático, obtendo um sistema axiomático diferente a que vamos chamar geometria das quatro retas. Como seria de esperar todas as afirmações feitas anteriormente são válidas trocando as palavras ponto e reta, isto é, tomando as afirmações duais. O teorema 1.1.7 é dual do teorema 1.1.3 e portanto como o teorema 1.1.3 é válido na geometria dos quatro pontos, o teorema 1.1.7 é válido na geometria das quatro retas.

Geometria das quatro retas

Axiomas:

Axioma B_1: Existem exatamente quatro retas distintas.

Axioma B_2: Dadas duas retas distintas, existe exatamente um ponto em comum.

Axioma B_3: Em cada ponto incidem exatamente duas retas distintas.

Enunciaremos seguidamente o dual do teorema 1.1.3, que é válido neste sistema. Não seria necessário fazer a sua demonstração, uma vez que já sabemos que o teorema é válido. Iremos apresentá-la por uma questão de curiosidade, para vermos como poderá ficar utilizando os axiomas anteriores. Naturalmente será semelhante à do teorema 1.1.3.

Teorema 1.1.7 (Dual do teorema 1.1.3). *Existem exatamente seis pontos.*

Demonstração:

Existem exatamente quatro retas distintas r, s, t e v, de acordo com o axioma B_1. Como quaisquer duas retas têm um ponto em comum segundo o axioma B_2, podemos considerar os pontos A, B, C, D, E e F comuns às retas r e s, r e t, r e v, s e t, s e v e t e v, respetivamente. Temos assim definidos seis pontos (fig. 1.7).

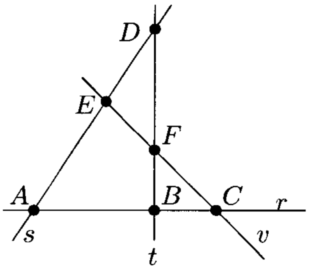


Figura 1.7

Vamos provar que não existem mais do que estes seis pontos. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe um sétimo ponto G, distinto dos anteriores. De acordo com o axioma B_3, no ponto G incidem exatamente duas retas. Logo G é o ponto comum de duas retas definidas anteriormente, pois não existem mais retas. Foram definidos os pontos comuns a cada duas retas e de acordo com o axioma B_2, o ponto G tem de ser um dos pontos A ou B ou C ou D ou E ou F. Isto é absurdo, pois G é um ponto distinto dos anteriores. Portanto existem exatamente seis pontos. □

1.2 Geometria dos três pontos

Neste sistema axiomático, à semelhança do anterior, iniciaremos por introduzir os axiomas e verificar a consistência e independência do sistema. Definiremos e demonstraremos alguns resultados importantes. Contrariamente ao sistema axiomático anterior este sistema satisfaz o princípio da dualidade.

Axiomas:

Axioma C_1: Existem exatamente três pontos distintos.

Axioma C_2: Dados dois pontos distintos, existe exatamente uma reta incidente em ambos.

Axioma C_3: Nem todos os pontos pertencem à mesma reta.

Axioma C_4: Duas retas distintas têm no mínimo um ponto em comum.

Provaremos a consistência deste sistema axiomático, tal como fizemos na secção anterior, construindo um modelo. Consideremos o modelo cujos pontos são A, B e C e as retas são os segmentos de reta AB, AC e BC (fig. 1.8).

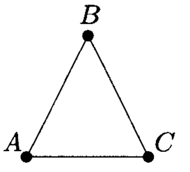


Figura 1.8: Um possível modelo da geometria dos três pontos

À semelhança do que fizemos na secção anterior vamos dar exemplos de modelos que provam a independência dos axiomas.

Modelos que demostram a independência dos axiomas

Em cada um dos casos facilmente verificamos que se cumprem todos os axiomas com exceção do axioma em questão.

Axioma C_1: Existem exatamente três pontos distintos.

Exemplo: A geometria dos quatro pontos, que vimos anteriormente, não verifica este axioma, pois nesta geometria existem exatamente quatro pontos.

Axioma C_2: Dados dois pontos distintos, existe exatamente uma reta incidente em ambos.

Exemplo: Consideremos o modelo formado pelos pontos P, Q e R e por duas retas, uma incidente nos pontos P e R e outra nos pontos Q e R (fig. 1.9).

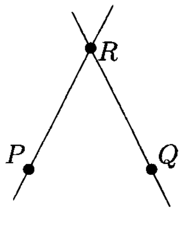


Figura 1.9

Este modelo não verifica o axioma C_2 porque os pontos P e Q são distintos, mas não incide nenhuma reta em ambos.

Axioma C_3: Nem todos os pontos pertencem à mesma reta.

Exemplo: Este axioma não é verificado por um modelo constituído por uma reta incidente em três pontos P, Q e R (fig. 1.10).

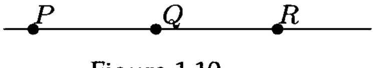


Figura 1.10

Axioma C_4: Duas retas distintas têm no mínimo um ponto em comum.

Exemplo: O modelo constituído pelos pontos P, Q e R e por quatro retas, a reta r, incidente apenas no ponto R, outra reta incidente nos pontos P e R, outra nos pontos Q e R e outra nos pontos P e Q (fig. 1.11).

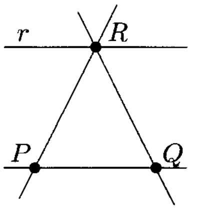


Figura 1.11

Este modelo não verifica o axioma C_4, pois as retas r e PQ são distintas e não têm nenhum ponto em comum.

Mostrámos que os axiomas C_1, C_2, C_3 e C_4 são independentes, logo o sistema é independente.

Enunciaremos e demonstraremos seguidamente algumas afirmações que são consequência dos axiomas.

Teorema 1.2.1. *Duas retas distintas têm exatamente um ponto em comum.*

Demonstração:

Sejam r e s duas retas distintas dadas. De acordo com o axioma C_4, as retas r e s têm no mínimo um ponto em comum. Suponhamos, com vista a um absurdo, que as retas têm dois pontos P e Q em comum (fig. 1.12).

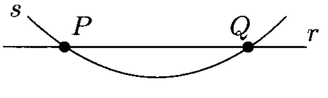


Figura 1.12

Se os pontos P e Q são comuns às retas r e s, então a reta r incide nos pontos P e Q e a reta s incide nos pontos P e Q. Assim, segundo o axioma C_2, as retas r e s são a mesma porque dois pontos distintos pertencem exatamente a uma reta, mas isto é impossível pois as retas r e s são distintas. Portanto chegamos a uma contradição, logo duas retas distintas têm exatamente um ponto em comum. □

Teorema 1.2.2. *Cada reta incide exatamente em dois pontos.*

Demonstração:

Seja r uma reta qualquer. De acordo com os axiomas C_1 e C_3 existem exatamente três pontos distintos e não estão todos sobre a mesma reta, logo a reta r não pode ter mais de dois pontos. Suponhamos, com vista a um absurdo, que a reta r tem menos de dois pontos. Isto é, ou a reta r incide em exatamente um ponto ou não tem nenhum ponto. Se a reta r incide em exatamente um ponto P, então segundo os axiomas C_1 e C_3 existem outros dois pontos Q e S, distintos do ponto P, que não pertencem à reta r. Aplicando o axioma C_2 construímos as retas PQ, PS e QS. Segundo o teorema 1.2.1 a reta r e a reta QS têm um ponto em comum, Q ou S. Assim a reta r tem dois pontos, o ponto P e o ponto de interseção da reta r com a reta QS, o que é absurdo pois supusemos que tinha exatamente um ponto. Se a reta r não tem nenhum ponto, então de acordo com o axioma C_1 existem exatamente três pontos Q, S e T distintos. Aplicando os axiomas C_2 e C_3 construímos as retas SQ, ST e QT. Segundo o teorema 1.2.1, cada uma das retas SQ, ST, QT e a reta r têm um ponto em comum. Logo a reta r tem pelo menos um ponto o que é absurdo, pois supusemos que não tinha pontos.

Assim cada reta incide em exatamente dois pontos. □

Teorema 1.2.3. *Existem exatamente três retas.*

Demonstração:

De acordo com o axioma C_1 existem exatamente três pontos P, Q e R. Os três pontos não pertencem à mesma reta, segundo o axioma C_3. Aplicando o axioma C_2 construímos as três retas PQ, PR e QR (fig. 1.13).

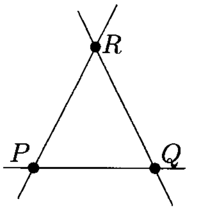


Figura 1.13

Vamos provar que não existem mais do que estas três retas. Suponhamos, com vista a absurdo, que existe uma quarta reta r. A reta r tem exatamente dois pontos de acordo com o teorema 1.2.2. Esses pontos só podem ser dois dos três definidos anteriormente (P, Q e R), pois não existem mais pontos. Suponhamos, sem perda de generalidade, que a reta r incide no ponto P. Nesse ponto e em cada um dos restantes pontos já incide uma reta, logo a reta r terá de ser coincidente com a reta PQ ou PR, mas é absurdo pois a reta r é distinta das anteriores. Assim existem exatamente três retas. □

Referimos no início, que este sistema axiomático contrariamente ao anterior satisfaz o princípio da dualidade, pois trocando os termos ponto e reta vamos obter afirmações que são verdadeiras neste sistema. Podemos verificar que o teorema 1.2.3 é o dual do axioma C_1 e o teorema 1.2.1 é o dual do axioma C_2. Iremos seguidamente escrever e demonstrar as afirmações duais dos axiomas C_3 e C_1.

Teorema 1.2.4 (Dual do axioma C_3). *Nem todas as retas incidem no mesmo ponto.*

Demonstração:

Existem exatamente três pontos P, Q e R, de acordo com o axioma C_1. Aplicando o axioma C_2, dados dois pontos distintos, existe exatamente uma reta incidente em ambos, podemos construir as retas PQ, PR e QR. Não existem mais retas de acordo com o teorema 1.2.3. As três retas PQ, PR e QR não têm nenhum ponto em comum, portanto não incidem no mesmo ponto. □

Teorema 1.2.5 (Dual do axioma C_4). *Dados dois pontos distintos, existe no mínimo uma reta incidente em ambos.*

Demonstração:

É uma consequência direta do axioma C_2. □

1.3 Geometria dos sete pontos

Esta é uma geometria com mais complexidade que as anteriores. Um facto curioso desta axiomática é que se num modelo retirar uma reta qualquer e os respetivos pontos, vamos obter outro modelo que satisfaz a axiomática da geometria dos quatro pontos. Introduziremos esta geometria com os axiomas:

Axiomas:

Axioma D_1: Se P e Q são pontos distintos, existe no mínimo uma reta contendo P e Q.

Axioma D_2: Se P e Q são pontos distintos, não existe mais que uma reta contendo P e Q.

Axioma D_3: Quaisquer duas retas têm no mínimo um ponto em comum.

Axioma D_4: Existe no mínimo uma reta.

Axioma D_5: Cada reta tem no mínimo três pontos.

Axioma D_6: Nem todos os pontos pertencem à mesma reta.

Axioma D_7: Nenhuma reta contém mais de três pontos.

À semelhança dos sistemas axiomáticos anteriores iremos dar um exemplo de um possível modelo para provar a consistência deste sistema axiomático. Consideremos o modelo a seguir em que os pontos são as letras P, Q, R, S, T, U e V, as retas são os segmentos de reta PQ, PS, PV, RQ, SQ e ST e existe uma reta que está representada por uma curva que passa pelos pontos R, T e

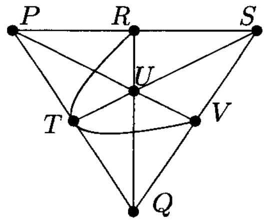


Figura 1.14: Um possível modelo da geometria dos sete pontos

V. Um ponto incide numa reta se pertence a um segmento de reta. Este modelo será construído pormenorizadamente mais à frente no teorema 1.3.7 (fig. 1.14).

Tal como nas secções anteriores iremos dar exemplos de modelos que demonstram a independência dos axiomas.

Modelos que demostram a independência dos axiomas

Para cada exemplo facilmente se verifica que se cumprem todos os axiomas com exceção do axioma em questão.

Axioma D_1: Se P e Q são pontos distintos, existe no mínimo uma reta contendo P e Q.

Consideremos o exemplo do modelo constituído pelos pontos P, Q, R, S, T e V e por quatro retas, que estão representadas como colunas na seguinte tabela.

P	P	Q	S
Q	T	R	R
S	V	V	T

Podemos representar este modelo (fig. 1.15).

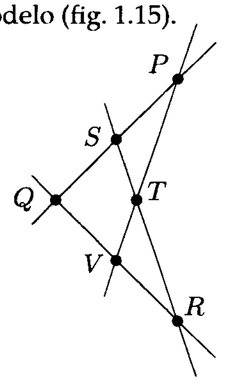


Figura 1.15

Este exemplo não verifica o axioma D_1, pois não existe nenhuma reta incidente nos pontos P e R.

Axioma D_2: Se P e Q são pontos distintos, não existe mais que uma reta contendo P e Q.

Vejamos o exemplo de um tetraedro de vértices P, Q, R e S, no qual as faces representam retas. Tal como no exemplo anterior voltamos a utilizar uma tabela em que as colunas de pontos representam retas.

$$\begin{matrix} P & P & P & Q \\ Q & Q & R & R \\ R & T & T & T \end{matrix}$$

Assim representamos o tetraedro na figura 1.16.

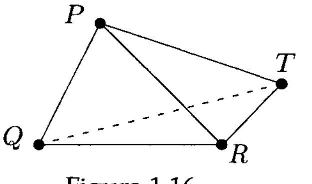


Figura 1.16

Existem duas retas (faces do tetraedro) distintas que contêm os pontos P e Q, logo não verifica o axioma D_2. Tal como foi referido na introdução os termos ponto e reta são termos não definidos, logo podem ser representados por diferentes objetos. Este é um bom exemplo disso, uma vez que as retas são representadas pelas faces do tetraedro.

Axioma D_3: Quaisquer duas retas têm no mínimo um ponto em comum.

Exemplo: Para construir o modelo seguinte consideramos nove pontos $(A_1, A_2, \ldots, A_9)$ e as retas na coluna da tabela.

$$\begin{matrix} A_1 & A_1 & A_1 & A_1 & A_2 & A_2 & A_2 & A_3 & A_3 & A_3 & A_4 & A_7 \\ A_2 & A_4 & A_5 & A_6 & A_5 & A_4 & A_6 & A_4 & A_5 & A_6 & A_5 & A_8 \\ A_3 & A_7 & A_9 & A_8 & A_8 & A_9 & A_7 & A_8 & A_7 & A_9 & A_6 & A_9 \end{matrix}$$

Podemos verificar que a reta formada pelos pontos A_1, A_2 e A_3 e a reta formada pelos pontos A_4, A_5 e A_6 não têm nenhum ponto em comum, logo o axioma D_3 não se verifica.

Axioma D_4: Existe no mínimo uma reta.

Exemplo: Um modelo com um único ponto não verifica este axioma.

Axioma D_5: Cada reta tem no mínimo três pontos.

Exemplo: Consideremos um triângulo de vértices P, Q e R em que os vértices estão no papel de pontos e os lados no papel de retas (fig. 1.17).

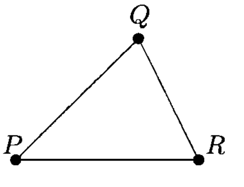


Figura 1.17

Cada reta (lado do triângulo) tem exatamente dois pontos, assim o axioma D_5 é não verificado.

Axioma D_6: Nem todos os pontos pertencem à mesma reta.

Exemplo: O modelo formado por uma única reta contendo três pontos P, Q e R não verifica este axioma pois todos os pontos pertencem à mesma reta (fig. 1.18).

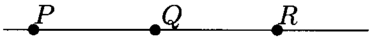


Figura 1.18

Axioma D_7: Nenhuma reta contém mais de três pontos.

O exemplo de um plano projetivo de ordem três no qual cada reta tem quatro pontos não verifica este postulado. Este exemplo será abordado no capítulo seguinte.

Mostrámos que os axiomas D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 e D_7 são independentes, logo o sistema é independente.

Na secção referente à geometria dos quatro pontos, vimos que este sistema axiomático não satisfaz o princípio da dualidade, pois ao fazermos o dual de alguns axiomas obtemos afirmações que não são verdadeiras. Vamos ver neste sistema axiomático que todas as afirmações duais dos axiomas podem ser demonstradas. Os teoremas que se seguem são os duais dos axiomas definidos anteriormente, à exceção dos axiomas D_1 e D_3 que são duais um do outro.

Teorema 1.3.1 (Dual do axioma D_2). *Duas retas distintas têm um único ponto em comum.*

Demonstração:

Duas retas quaisquer têm no mínimo um ponto de acordo com o axioma D_3. Sejam r e s duas retas distintas e P um ponto comum a ambas. Suponhamos, com vista a um absurdo que as retas r e s têm dois pontos distintos em comum, o ponto P e o ponto R (fig. 1.19).

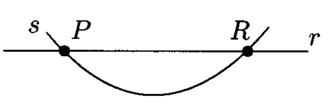


Figura 1.19

De acordo com o axioma D_2, não existe mais que uma reta contendo P e R, logo as retas r e s são a mesma, o que é absurdo pois foi suposto que as retas r e s são distintas. Assim as duas retas têm um único ponto em comum. □

Teorema 1.3.2 (Dual do axioma D_4). *Existe no mínimo um ponto.*

Demonstração:

Segundo o axioma D_4, existe no mínimo uma reta, mas cada reta contém no mínimo três pontos de acordo com o axioma D_5. Então no mínimo existe um ponto. □

Teorema 1.3.3 (Dual do axioma D_5). *Num ponto incidem no mínimo três retas.*

Demonstração:

Seja P um ponto dado. No mínimo existe uma reta r, pelo axioma D_4. Podemos considerar dois casos:

1. o ponto P pertence à reta r;

2. o ponto P não pertence à reta r.

Caso 1: Se o ponto P pertence à reta r, então segundo os axiomas D_5 e D_7, para além do ponto P existem mais dois pontos R e S na reta r. De acordo com o axioma D_6, existe um ponto Q que não pertence à reta r. Aplicando os axiomas D_1 e D_2 construímos as retas PQ, RQ e SQ (fig. 1.20).

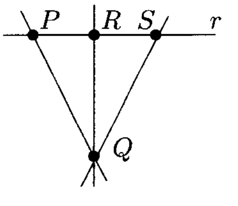


Figura 1.20

Mas cada uma das retas anteriores tem três pontos, pelos axiomas D_5 e D_7. Sejam T, U e V pontos pertencentes respetivamente às retas PQ, RQ e SQ, distintos dos pontos já mencionados. De acordo com os axiomas D_1 e D_2, pelos pontos P e U passa exatamente uma reta pois são distintos e não colineares. Logo pelo ponto P passam as retas PD, r e PU, ou seja três retas.

Caso 2: como o ponto P não pertence à reta r, então de acordo com os axiomas D_5 e D_7 a reta r tem exatamente três pontos Q, R e S. Aplicando os axiomas D_1 e D_2 podemos definir as retas PQ, PR e PS incidindo assim no ponto P três retas. □

Teorema 1.3.4 (Dual do axioma D_6). *Nem todas as retas passam pelo mesmo ponto.*

Demonstração:

Seja Q um ponto dado. De acordo com o axioma D_4 existe no mínimo uma reta r. Podemos ter dois casos:

1. o ponto Q não pertence à reta r

2. o ponto Q pertence à reta r.

Caso 1: Se o ponto Q não pertence à reta r, então segundo os axiomas D_5 e D_7, existem exatamente três pontos P, R e S na reta r. De acordo com os axiomas D_1 e D_2 definimos as retas PQ, RQ e SQ (fig. 1.21).

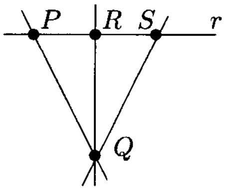


Figura 1.21

Portanto existe uma reta r que não passa pelo ponto Q.

Caso 2: como o ponto Q pertencer à reta r, segundo os axiomas D_5 e D_7, para além do ponto Q existem mais dois pontos R e S na reta r. De acordo com o axioma D_6, existe um ponto T não pertencente à reta r. Pelos axiomas D_1 e D_2 definimos as retas TQ, RT e ST (fig. 1.22).

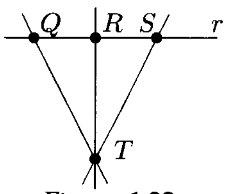


Figura 1.22

Verificamos que existe uma reta, por exemplo, RT que não passa pelo ponto Q. □

Teorema 1.3.5 (Dual do Axioma D_7). *Não passam mais de três retas pelo mesmo ponto.*

Demonstração:

Seja dado um ponto P. De acordo com o teorema 1.3.3 no ponto P incidem no mínimo três retas r, s e t distintas. Suponhamos que no ponto P incide uma quarta reta u diferente das anteriores. Pelo teorema 1.3.4, nem todas as retas passam pelo ponto P. Seja v uma reta que não passa pelo ponto P. Como as quatro retas que passam por P são distintas da reta v, então pelo teorema 1.3.1 têm um ponto em comum com a reta v. Sejam A, B, C e D os pontos em comum das retas r, s, t e u e da reta v respetivamente (fig. 1.23).

Os pontos são distintos porque as retas r, s, t e u já têm um ponto em comum e não podem ter outro como consequência do teorema 1.3.1. Assim a reta v tem quatro pontos o que contradiz o axioma D_7. Portanto não passam mais de três retas pelo mesmo ponto. □

Verificámos que todas as afirmações duais dos axiomas são demonstráveis, logo este sistema axiomático satisfaz o princípio da dualidade (definição 1.1.6).

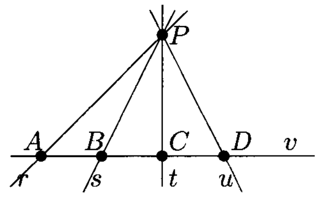


Figura 1.23

Teorema 1.3.6. *Esta geometria contém exatamente sete pontos.*

Demonstração:

De acordo com o axioma D_4, existe no mínimo uma reta r. Esta reta contém exatamente três pontos P, R e S distintos, pelos axiomas D_5 e D_7. De acordo com o axioma D_6 existe um ponto Q não pertencente à reta r. Aplicando os axiomas D_1 e D_2 construímos as retas PQ, RQ e SQ. Como cada uma das retas anteriores tem três pontos, pelos axiomas D_5 e D_7, consideremos os pontos T, U e V pertencentes, respetivamente, às retas PQ, RQ e SQ. Definimos sete pontos, vamos provar que não existem mais pontos. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe um oitavo ponto K diferente dos anteriores. Como K e Q são pontos distintos, pelos axiomas D_1 e D_2, existe exatamente uma reta KQ incidente em ambos. No ponto Q incidem quatro retas, PQ, RQ, SQ e KQ o que contradiz o teorema 1.3.5. Portanto existem exatamente sete pontos nesta geometria.

□

Teorema 1.3.7 (Dual do teorema T_6). *Esta geometria contém exatamente sete retas.*

Demonstração:

Na demonstração do teorema 1.3.6 provámos que existem exatamente sete pontos. Comecemos tendo por base a demostração do teorema 1.3.6, na qual definimos os pontos P, R, S, Q, T, U e V e as retas r, PQ, RQ, SQ com o objetivo de provar que existem exatamente sete retas.

De acordo com os teoremas 1.3.3 e 1.3.5 por cada ponto passam exatamente três retas. Pelo ponto Q passam as retas PQ, RQ e SQ. Pelo ponto P passam as retas r e PQ, falta definir uma terceira reta. Pelos pontos P e U passa exatamente uma reta e pelos pontos P e V também passa exatamente uma reta, de acordo com os axiomas D_1 e D_2. Estas retas não podem ser distintas pois pelo ponto P só passam três retas, segundo o teorema 1.3.5. Definiu-se assim a reta PUV (fig. 1.24). Por processo análogo define-se as retas SUT e RTV. Definimos as sete retas PQ, RQ, SQ, r, PUV, SUT e RTV (fig. 1.25). Provaremos seguidamente que não existem mais retas. Suponhamos, com vista a um absurdo que existe uma oitava reta, m. De acordo com os axiomas D_5 e D_7 a reta m tem exatamente três pontos, N, O e K. A reta m não pode conter nenhum dos outros pontos, pois em cada um deles já passam três retas. Definiu-se nove pontos P, R e S, Q, V, U, T, N, O e K o que não pode ser, pois contradiz o teorema 1.3.6. Assim esta geometria só tem sete retas.

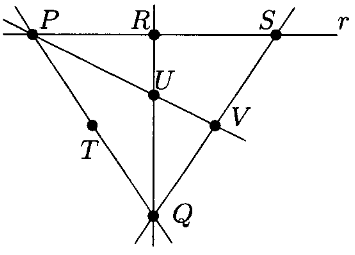


Figura 1.24

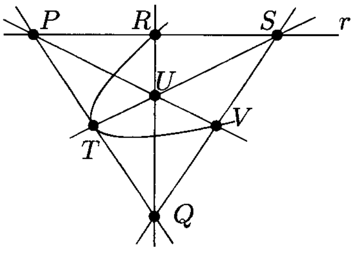


Figura 1.25

□

Um aspeto interessante desta axiomática é o facto de que ao retirar uma reta qualquer e os respetivos pontos a um modelo da geometria dos sete pontos, vamos obter outro modelo que satisfaz a axiomática da geometria dos quatro pontos, secção (1.1). Observemos na figura 1.26.

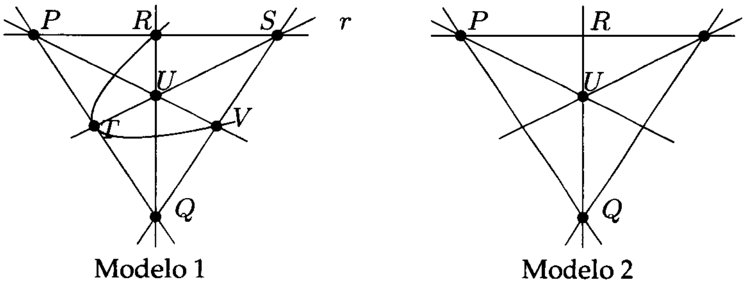


Figura 1.26

Por exemplo, se no modelo 1, retirarmos a reta RTV e os respetivos pontos vamos obter o modelo 2, modelo este que satisfaz a axiomática da geometria dos quatro pontos e como tal é isomorfo aos modelos apresentados na secção 1.1.

1.4 Geometria dos nove pontos e doze retas

Esta geometria, à semelhança das anteriores, será introduzida por axiomas e a partir destes enunciaremos e demonstraremos alguns resultados. Finalizaremos enunciando um teorema clássico atribuído a Papo de Alexandria. Para tal necessitámos de adaptar as definições de polígono e lado oposto de um hexágono que sabemos da geometria euclidiana à geometria finita.

Os axiomas para esta geometria são:

Axioma E_1: Se P e Q são pontos distintos, existe uma reta contendo os pontos P e Q.

Axioma E_2: Se P e Q são pontos distintos, não existe mais do que uma reta contendo P e Q.

Axioma E_3: Dada uma reta r que não contém um ponto P, existe uma reta contendo o ponto P e não contendo nenhum ponto da reta r.

Axioma E_4: Dada uma reta r que não contém um ponto P, não existe mais que uma reta contendo o ponto P e não contendo nenhum ponto da reta r.

Axioma E_5: Cada reta tem no mínimo três pontos.

Axioma E_6: Nem todos os pontos pertencem à mesma reta.

Axioma E_7: Existe no mínimo uma reta.

Axioma E_8: Nenhuma reta contém mais de três pontos.

À semelhança do que foi feito nos sistemas axiomáticos anteriores iremos dar um exemplo de um possível modelo para mostrar a consistência deste sistema axiomático. Este modelo será construído pormenorizadamente mais à frente na demonstração do teorema 1.4.4. Consideremos o modelo em que os pontos são as letras K, P, Q, R, S, T, V, W e Z, as retas são os segmentos de reta RQ, RT, RV, PS, TQ, QV, KZ e TV e existem retas que estão representadas por curvas que passam pelo terno de pontos (R, Z, S), (P, K, V), (P, Q, Z) e (K, T, S) representados na figura 1.27.

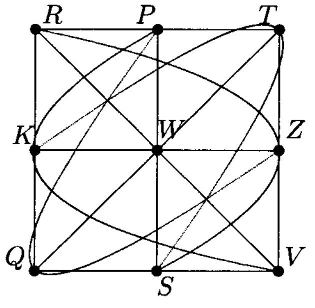


Figura 1.27

Modelos que demostram a independência dos axiomas

Tal como fizemos nos sistemas axiomáticos anteriores iremos dar um exemplo de modelo que demonstra a independência de cada axioma e facilmente se verifica que se cumprem todos os axiomas com exceção do axioma em questão.

Axioma E_1: Se P e Q são pontos distintos, existe uma reta contendo os pontos P e Q.

Exemplo: O modelo composto pelos pontos P, Q, R, S, T e V e apenas pelas duas retas PQS e RTV não verifica o axioma E_1.

Axioma E_2: Se P e Q são pontos distintos, não existe mais que uma reta contendo P e Q.

Exemplo: O modelo constituído por seis pontos P, Q, R, S, T e U e pelas vinte retas seguintes:

$PSR, PQS, PQT, PQU, PRS, PRT, PRU, PST, PSU, PTU, QRS, QRT, QRU, QRT, QSU, QTU, RST, RSU, RTU$ e STU.

Este modelo não verifica o axioma E_2, pois, por exemplo, existe mais do que uma reta contendo os pontos P e Q.

Axioma E_3: Dada uma reta r que não contém um ponto P, existe uma reta que contém o ponto P e não contendo nenhum ponto da reta r.

Exemplo: A geometria dos sete pontos não verifica este axioma, pois duas retas distintas têm um ponto em comum.

Axioma E_4: Dada uma reta r que não contém um ponto P, não existe mais que uma reta contendo o ponto P e não contendo nenhum ponto da reta r.

Exemplo: Consideremos o modelo formado pelos pontos $F, H, K, M, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y$ e Z e pelas trinta e cinco retas seguintes.

$PST, PRZ, PHK, PMQ, PWY, PFV, PUX, QTU, QSW, QKV, QXZ, QHY, QFR, RUV, RHS, RTX, RKW, RMY, SMX, SVY, SKU, SFZ, TFK, TYZ, TMV, THW, UWZ, FUY, UHM, VWX, HVZ, KXY, KMZ, FMW, FHX$.

Consideremos a reta PST e o ponto Q que não pertence a esta reta. No ponto Q incidem as retas MQR e QXF que são paralelas a PST, logo o modelo não verifica o axioma E_4.

Axioma E_5: Cada reta tem no mínimo três pontos.

Exemplo: Um quadrângulo completo não verifica este axioma, pois cada reta só tem dois pontos.
Retas do quadrângulo: (PR), (PS), (PQ), (RS), (RQ), (SQ).

Axioma E_6: Nem todos os pontos pertencem à mesma reta.

Exemplo: Um modelo composto só por três pontos e uma reta incidente em todos eles não verifica o axioma E_6, pois não existe um ponto exterior a uma reta. (fig. 1.28).

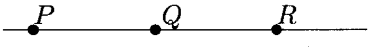


Figura 1.28

Axioma E_7: Existe no mínimo uma reta.

Exemplo: Um modelo em que só existe um único ponto não verifica este axioma pois não existem retas.

Axioma E_8: Nenhuma reta contém mais de três pontos.

Exemplo: Geometria euclidiana plana, na qual cada reta tem infinitos pontos não verifica este axioma.

Verificámos que os axiomas E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7 e E_8 são independentes, logo o sistema é independente.

Esta geometria não satisfaz o princípio da dualidade porque, por exemplo, por cada dois pontos distintos passa sempre uma reta, mas duas retas distintas podem não ter um ponto em comum.

Vamos deduzir alguns resultados a partir dos axiomas.

Teorema 1.4.1. *Existem exatamente nove pontos.*

Demonstração:

Existe no mínimo uma reta r, de acordo com o axioma E_7. A reta r tem exatamente três pontos R, P e T distintos, pelos axiomas E_5 e E_8. Segundo o axioma E_6 existe um ponto Q que não pertence à reta r. Aplicando o axioma E_3 existe uma reta s que contém o ponto Q e não contém nenhum ponto da reta r. A reta s tem exatamente três pontos, de acordo com os axiomas E_5 e E_8, o ponto Q e dois outros pontos, S e V (fig. 1.29).

Por dois pontos distintos passa uma reta, de acordo com os axiomas E_1 e E_2, em particular, podemos definir a reta RQ. A reta RQ tem três pontos, de acordo com os axiomas E_5 e E_8, ao terceiro ponto desta reta podemos chamar K. Também podemos considerar as retas PS e PV, facilmente verificamos serem distintas. No máximo uma delas incide no ponto K. Suponhamos, sem

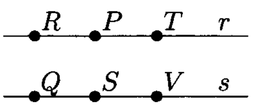


Figura 1.29

perda de generalidade, que a reta PS não incide no ponto K, portanto existe um terceiro ponto W nesta reta (fig. 1.30).

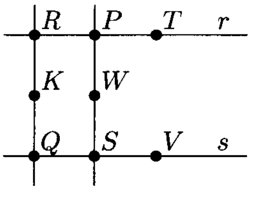


Figura 1.30

De acordo com o axioma E_3 existe uma reta j que incide no ponto T e é paralela à reta RQ. A reta j interseta a reta s, de acordo com o axioma E_4, pois já existe uma reta que passa pelo ponto T paralela à reta s. A reta j não pode incidir no ponto S, pois as retas RQ e PS são paralelas e se assim fosse existiriam duas retas paralelas a RQ (j e PS) incidentes no ponto S, contrariando o axioma E_4. Portanto a reta j interseta a reta s no ponto V, e podemos designá-la por TV. A reta TV é paralela à reta PS, pois se intersetasse a reta PS no ponto W, existiriam duas retas, PS e TV, paralelas a RQ passando no ponto W, o que contraria o axioma E_4. De acordo com os axiomas E_5 e E_8 a reta TV tem um terceiro ponto Z (fig. 1.31).

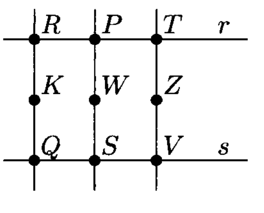


Figura 1.31

Verificámos que existem nove pontos. Vamos provar a seguir que não existem mais. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existem pelo menos dez pontos. Seja H um décimo ponto, distinto dos anteriores. De acordo com os axiomas E_1 e E_2 podemos definir a reta HQ. Esta reta só tem mais um ponto, por isso só pode intersetar no máximo uma das retas TV ou PS. Se não intersetar a reta PS incidem no ponto Q duas retas paralelas à reta PS o que contraria o axioma E_4. Se não intersetar a reta TV chegamos a igual contradição. Portanto existem exatamente nove pontos. $\square$

Teorema 1.4.2. *Cada reta admite exatamente duas retas paralelas.*

Demonstração:

Seja r uma reta dada. Pelos axiomas E_5 e E_8, a reta r contém exatamente três pontos P, R e S distintos. De acordo com o axioma E_6 existe um ponto Q que não pertence à reta r e em consequência, pelos axiomas E_3 e E_4, existe uma reta t que contém o ponto Q e não contém nenhum ponto da reta r. A reta t contém o ponto Q e mais dois, T e V, segundo os axiomas E_5 e E_8 (fig. 1.32).

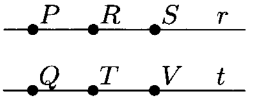


Figura 1.32

Cada dois pontos distintos pertencem exatamente a uma reta, de acordo com os axiomas E_1 e E_2, logo por exemplo podemos definir a reta PQ. Esta reta tem exatamente três pontos, Q, P e um outro ponto W. A reta r não contém o ponto W, então pelos axiomas E_3 e E_4, existe exatamente uma reta m que passa por W e é paralela a r. Esta reta é diferente da reta t, pois o ponto W não pertence à reta t (fig. 1.33).

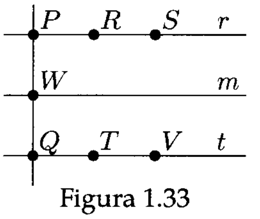


Figura 1.33

Verificámos que existem duas retas paralelas à reta r, seguidamente provaremos que não existe mais nenhuma. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existem três retas paralelas à reta r. Seja u uma terceira reta paralela à reta r. De acordo com os axiomas E_5 e E_8, a reta u tem três pontos. Esta tem, no máximo, um ponto em comum com as retas m e t, logo existe pelo menos um ponto não pertencente às retas m, r e t. Assim existe um décimo ponto, o que contraria o teorema anterior. Concluímos então que a reta r tem exatamente duas retas paralelas a si. □

Teorema 1.4.3. *Duas retas paralelas a uma terceira reta são paralelas entre si.*

Demonstração:

Sejam dadas as retas r, s e t distintas, tais que as retas r e t são ambas paralelas à reta s. Suponhamos, com vista a um absurdo, que as retas r e t têm um ponto P em comum. Pelo ponto P passam duas retas paralelas à reta s, o que contraria o axioma E_4. Assim as retas r, s e t são paralelas entre si. □

Teorema 1.4.4. *Existem exatamente doze retas.*

Demonstração:

No mínimo existe uma reta r, pelo axioma E_7. De acordo com o teorema 1.4.2, existem exatamente duas retas s e t paralelas à reta r. Segundo os axiomas E_5 e E_8, cada uma das retas anteriores tem três pontos distintos. Consideremos os pontos R, P e T pertencentes à reta r, os pontos Q, S e V pertencentes à reta s e os pontos K, W e Z pertencentes à reta t. Observemos que, de acordo com o teorema 1.4.1 não existem mais pontos para além destes(fig. 1.34).

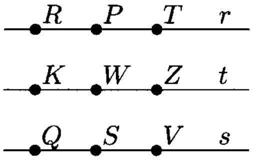


Figura 1.34

Os axiomas E_1 e E_2 permitem-nos definir a reta RQ. Nem o ponto P nem o ponto T podem incidir na reta RQ pois caso contrário pelos axiomas E_1 e E_2, as retas r e RQ seriam a mesma. Analogamente nem o ponto S nem o ponto V incidem em RQ. Como a reta RQ tem um terceiro ponto, sabemos que esta incide num dos pontos K, W ou Z. Sem perda de generalidade supomos que o ponto K incide na reta RQ. Segundo os axiomas E_3 e E_4, no ponto P incide uma reta m paralela à reta RQ. O ponto T não pode pertencer à reta m, senão as retas m e r seriam a mesma pelos axiomas E_1 e E_2, logo no ponto T tem de incidir outra reta j paralela a RQ. A reta m tem três pontos e não existem mais pontos para além dos nove já referidos, como vimos, logo a reta m tem de intersetar as retas t e s. Portanto a reta m incide no ponto W ou Z da reta t e no ponto S ou V da reta s. Sem perda de generalidade supomos que a reta m incide nos pontos W e S. As retas m e j são paralelas à reta RQ, logo pelo teorema 1.4.3 são paralelas entre si. Assim a reta j tem de incidir nos pontos Z e V. Por um processo análogo podemos construir as retas RZS, RWV, PKV, PZQ, TKS e TWQ. Temos definidas as doze retas: r, s, t, RKQ, $PWS, TZV, RWV, RZS,$ PKV, PZQ, TKS e TWQ (fig. 1.35).

Vamos provar que não existem mais retas. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existem, no mínimo, treze retas, sendo i a décima terceira. De acordo com os axiomas E_5 e E_8, a reta i tem três pontos. Como só existem nove pontos de acordo com o teorema 1.4.1, então os três pontos da reta i são três dos pontos anteriormente definidos. Suponhamos, sem perda de generalidade, que a reta i incide no ponto V. Como o ponto V é colinear com cada um dos restantes pontos já definidos R, P, T, Q, S, K, W e Z, então a reta i é uma das retas definidas anteriormente. Mas nós supusemos que a reta i é diferente das anteriores. Chegamos a uma contradição, portanto existem exatamente doze retas. □

No próximo teorema vamos trabalhar com um polígono. No entanto, nas geometrias finitas não é possível definir um segmento de reta (este é um con-

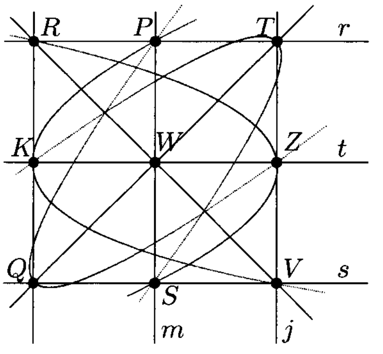


Figura 1.35

ceito da geometria euclidiana que não faz sentido neste ambiente) e portanto a definição usual de polígono não pode ser aqui utilizada. Como queremos definir polígono, vamos ter de adaptar a definição às geometrias finitas.

Definição 1.4.5. *Chama-se polígono a uma sequência de retas* A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., A_nA_1 *em que* A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_n *são n pontos distintos. Aos pontos* A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_n *vamos chamar vértices do polígono e às retas* A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,..., A_nA_1 *os lados do polígono.*

Vejamos dois exemplos de polígonos que têm por base a definição anterior (fig. 1.36).

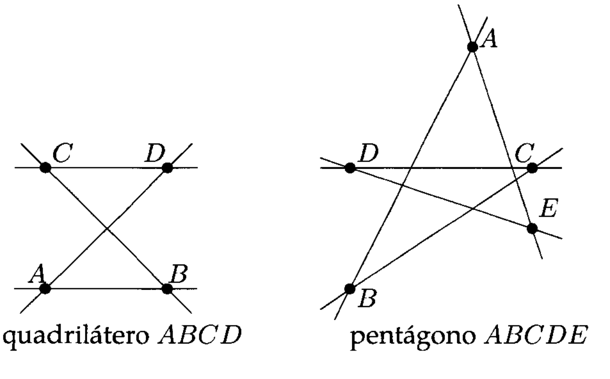


Figura 1.36

Como no próximo teorema vamos precisar do conceito de lado oposto de um hexágono e na definição anterior nada foi referido em relação a esse conceito, vamos a seguir definir lado oposto de um hexágono.

Definição 1.4.6. *Num hexágono o lado* l_1 *é oposto ao lado* l_2 *se o lado* l_1 *não for adjacente ao lado* l_2 *nem adjacente a nenhum lado que seja adjacente a este último.*

Vamos enunciar um teorema clássico atribuído a Papo de Alexandria. No capítulo 2 iremos novamente encontrar este teorema, mas numa axiomática diferente.

Teorema 1.4.7 (Teorema de Papo). *Sejam r e s duas retas paralelas e sejam R, P e T os três pontos da reta r e Q, S e V os três pontos de s. Se os lados opostos do hexágono $RSTQPV$ se intersetarem então os três pontos de interseção são colineares.*

Demonstração:

Os lados do hexágono $RSTQPV$ são as retas RS, ST, TQ, QP, PV e VR (fig. 1.37). O lado oposto ao lado RS é QP, o lado oposto ao lado RV é TQ, o lado oposto ao lado PV é TS. Suponhamos que a reta RS interseta a reta PQ no ponto K, a reta RV interseta a reta TQ no ponto W e a reta PV interseta a reta TS no ponto Z (ver fig. 1.38). Segundo o teorema 1.4.2 a reta r tem exatamente duas retas paralelas, uma é a reta s e à outra reta podemos chamar-lhe t. Esta reta t tem exatamente três pontos de acordo com os axiomas E_5 e E_8. Esses pontos só poderão ser K, W e Z, pois o nosso modelo já tem exatamente nove pontos definidos e não poderá ter mais segundo o teorema 1.4.1 e os outros seis pontos R, P, T, Q, S e V incidem ou na reta r ou na reta s. Assim a reta t incide nos pontos K, W e Z. Portanto os três pontos K, W e Z de interseção dos lados opostos são colineares (ver fig. 1.39). □

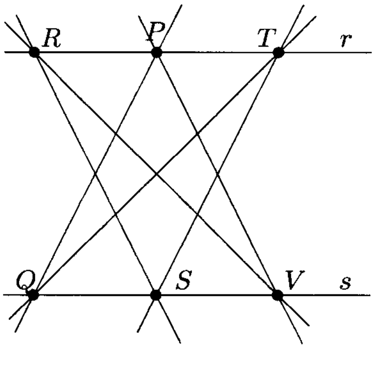


Figura 1.37

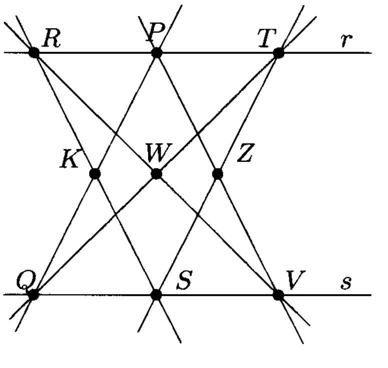


Figura 1.38

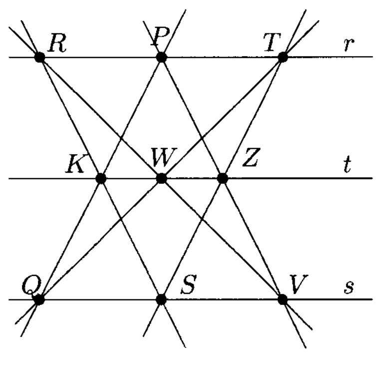


Figura 1.39

Capítulo 2

Duas Configurações da Geometria Clássica

2.1 Configuração de Desargues

Gerard Desargues, que viveu entre 21 de fevereiro de 1591 e setembro de 1661, foi um matemático e engenheiro francês. É considerado um dos fundadores da geometria projetiva.[1] A sua principal obra foi "Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan" em 1639. Um dos seus trabalhos mais conhecidos é o resultado a que hoje chamamos Teorema de Desargues.

Vamos nesta secção trabalhar a axiomática da Configuração de Desargues. Este sistema axiomático, tal como foi dito na introdução, apresenta uma relação interessante entre pontos e retas que é a de polaridade. É com a explicação desta relação que iniciaremos esta secção. Finalizaremos com o teorema que dá o nome a esta axiomática: Teorema de Desargues.

Definição 2.1.1. *Sejam m uma reta e M um ponto. Se não existe nenhuma reta à qual pertença o ponto M e que tenha pontos em comum com m, dizemos que a reta m é polar de M e o ponto M é pólo de m.*

Axiomas:

Axioma F_1: No mínimo existe um ponto.

Axioma F_2: Cada ponto tem no mínimo uma polar.

Axioma F_3: Cada reta tem no máximo um pólo.

Axioma F_4: Dois pontos distintos estão no máximo sobre uma reta.

[1]Uma bibliografia de Desargues pode ser consultada em *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Desargues.html*

Axioma F_5: Existem exatamente três pontos distintos em cada reta.

Axioma F_6: Se uma reta m não contém um ponto P, então existe um ponto comum a m e a qualquer polar de P.

Teorema 2.1.2. *Se P pertence a uma reta polar de Q, então qualquer polar de P contém Q.*

Demonstração:

Seja q uma polar de Q. Por definição Q não pertence a q. Seja P um ponto de q. Pelo axioma F_5, existem exatamente três pontos distintos em q, um deles é P e aos outros dois chamaremos R e S (fig. 2.1).

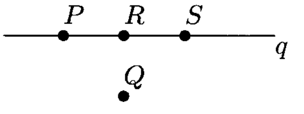


Figura 2.1

De acordo com o axioma F_2, existe no mínimo uma polar p de P. Suponhamos, com vista a um absurdo, que Q não pertence a p. Se Q não pertence a p, pelo axioma F_6, p e q têm um ponto em comum, que pode ser R, S ou P, pois estes são os pontos de q. Mas por definição P não pertence a p. Se R ou S pertencem a p então existe um ponto em comum entre uma reta que contém P e uma sua polar, o que contradiz a definição de pólo e polar. Assim Q pertence a p. □

Teorema 2.1.3. *Cada ponto tem exatamente uma polar.*

Demonstração: Um ponto P dado tem no mínimo uma polar, de acordo com axioma F_2. Suponhamos, com vista a um absurdo, que P tem duas polares p e p_1. De acordo com o axioma F_5, existem três pontos distintos em cada reta, em particular, a reta p_1 tem três pontos. Segundo o axioma F_4, no máximo um destes pontos pode pertencer a p. Consideremos um ponto T pertencente à reta p_1 e não à reta p. Existe uma reta t polar de T, segundo o axioma F_2. Como o ponto T pertence a uma polar de P, pelo teorema 2.1.2, o ponto P pertence à reta t. Como a reta p não contém o ponto T, então existe um ponto em comum às retas p e t, pelo axioma F_6 (fig. 2.2).

A reta t contém o ponto P e as retas t e p têm um ponto em comum, o que contradiz a definição de polar. Assim o ponto P não pode ter mais de uma polar. □

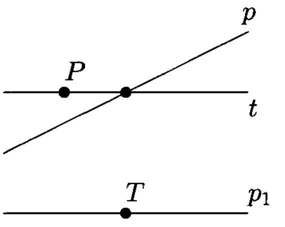


Figura 2.2

Teorema 2.1.4. *Cada reta tem exatamente um pólo.*

Demonstração:

Seja dada uma reta p. Como, pelo axioma F_3, a reta p tem no máximo um pólo, basta-nos verificar a existência de um pólo de p. De acordo com o axioma F_5, existem exatamente três pontos R, S e T distintos em p. Os pontos R e S têm exatamente uma polar, pelo teorema 2.1.3. Sejam r e s as polares dos pontos R e S, respetivamente. A reta r não contém o ponto S, porque S pertence à reta p e se S pertencesse à reta r, então as retas p e r teriam um ponto em comum o que contraria a definição de pólo e polar. Portanto, pelo axioma F_6, existe um ponto P comum às retas r e s (fig. 2.3).

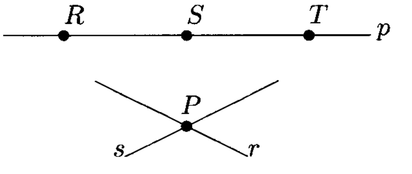


Figura 2.3

Segundo o teorema 2.1.3, o ponto P tem exatamente uma polar. Como o ponto P pertence às retas r e s, de acordo com o teorema 2.1.2, os pontos R e S pertencem à polar de P.

Assim p é a polar de P e P o pólo de p. □

Verificaremos, a seguir, que a Configuração de Desargues também é um sistema axiomático que satisfaz o princípio da dualidade.

Teorema 2.1.5 (Dual do axioma F_1). *No mínimo existe uma reta.*

Demonstração:

Pelo axioma F_1 existe um ponto P. Aplicando teorema 2.1.3, o ponto P tem exatamente uma polar, portanto existe pelo menos uma reta. □

Teorema 2.1.6 (Dual do axioma F_2). *Cada reta tem no mínimo um pólo.*

Demonstração:

Pelo teorema 2.1.4, cada reta tem exatamente um pólo, logo verifica-se a existência de pelo menos um pólo. □

Teorema 2.1.7 (Dual do axioma F_3). *Cada ponto tem no máximo uma polar.*

Demonstração:

Cada ponto tem exatamente uma polar, de acordo com o teorema 2.1.4, logo cada ponto tem no máximo uma polar. □

Teorema 2.1.8 (Dual do axioma F_4). *Duas retas distintas têm no máximo um ponto em comum.*

Demonstração:

Sejam s e r duas retas distintas. Suponhamos, com vista a um absurdo, existirem dois pontos P e Q incidentes nas retas s e r. Aplicando o axioma F_4, P e Q estão no máximo sobre uma reta, o que contraria a hipótese de incidirem nas retas s e r. Assim duas retas distintas têm no máximo um ponto em comum. □

Teorema 2.1.9 (Dual do axioma F_5). *Por cada ponto passam exatamente três retas distintas.*

Demonstração:

Dado um ponto P, de acordo com o teorema 2.1.3, P tem exatamente uma polar p. Tendo em atenção o axioma F_5, a reta p tem exatamente três pontos distintos R, S e T. Segundo o teorema 2.1.3, existem as polares r, s e t respetivamente dos pontos R, S e T. De acordo com o teorema 2.1.2 o ponto P pertence a r, s e t (fig. 2.4).

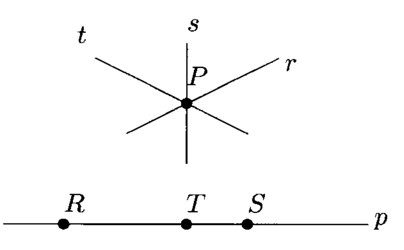


Figura 2.4

Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe uma reta q distinta das retas incidentes no ponto P. Se a reta q incide no ponto P, então pelo teorema 2.1.2, o pólo de $q(Q)$ pertence à polar de P. Os pontos R, S, T e Q são distintos porque cada pólo tem uma única polar, de cordo com o teorema 2.1.3. A polar de P contém quatro pontos R, S, T e Q o que contradiz o axioma F_5. Conclui-se assim que pelo ponto P passam exatamente três retas. □

Teorema 2.1.10 (Dual do axioma F_6). *Se o ponto P não pertence à reta m, então existe uma reta que contém P e qualquer pólo de m.*

Nota 2.1.11. Concluímos anteriormente que qualquer reta tem exatamente um pólo e portanto a expressão "qualquer pólo de m" refere-se ao único pólo de m. Como este enunciado é o dual do axioma F_6, optámos por deixar o texto inalterado fazendo apenas a troca de ponto por reta e vice-versa.

Demonstração:

Sejam dados uma reta m e um ponto P não incidente em m. A reta m tem exatamente um pólo M, pelo teorema 2.1.4. Para demonstrar o teorema queremos encontrar uma reta incidente nos pontos M e P. Podemos considerar dois casos distintos:

1. M e P são o mesmo ponto;

2. M e P são pontos distintos.

Caso 1: Se M e P são o mesmo ponto, então aplicando o teorema 2.1.9, pelo ponto P passam exatamente três retas distintas, em particular passa uma.

Caso 2: Sendo M e P pontos distintos, de acordo com o teorema 2.1.3 existe exatamente uma polar p do ponto P. Aplicando o axioma F_6, as retas p e m têm um ponto Q em comum (fig. 2.5).

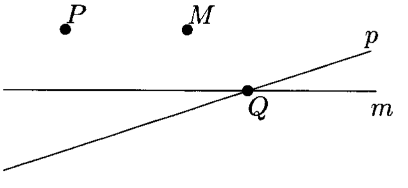


Figura 2.5

Como o ponto Q pertence à polar dos pontos M e P, então pelo teorema 2.1.2 os pontos M e P pertencem à polar de Q.

Em ambos os casos existe uma reta que contém P e qualquer pólo de m. □

Lema 2.1.12. *Dados dois pontos, existe uma reta que passa por ambos se e só se as suas polares se intersetam.*

Demonstração:

Sejam R e S dois pontos distintos dados e suponhamos que existe uma reta p incidente em ambos. Pelo teorema 2.1.3, cada um dos pontos R e S tem exatamente uma polar, r e s, respetivamente. As retas r e s são distintas, porque pelo teorema 2.1.4, cada polar tem um único pólo, e R e S são pontos distintos (fig. 2.6).

O ponto S não pertence a r porque S pertence a p e se S pertencesse a r, as retas p e r teriam um ponto em comum, o que contradiria a definição de pólo

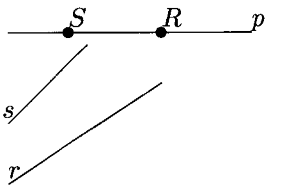


Figura 2.6

e polar. Analogamente R não pertence a s. De acordo com o axioma F_6, existe um ponto em comum entre r e s. Assim as polares r e s intersetam-se.

Para mostrar a afirmação recíproca, suponhamos que R e S são dois pontos distintos dados e de acordo com os teoremas 2.1.3 e 2.1.4 existem as retas r e s polares dos pontos R e S, respetivamente. Suponhamos, que as retas r e s se intersetam num ponto T (fig. 2.7).

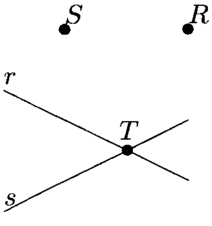


Figura 2.7

De acordo com o teorema 2.1.3, existe uma única polar de T. O ponto T pertence às polares de R e S respetivamente, portanto pelo teorema 2.1.2, S pertence à polar de T e R pertence à polar de T. Existe assim uma reta polar de T à qual pertencem os pontos R e S. □

Lema 2.1.13. *Se r e q são duas retas que não intersetam a reta m, então r e q intersetam-se no pólo de m.*

Demonstração:

Consideremos r, q e m três retas distintas e suponhamos que r e q não intersetam m. Sejam M o pólo de m, R o pólo de r e Q o pólo de q tendo em consideração o teorema 2.1.4. Suponhamos, com vista a um absurdo, que R não pertence a m. Então, pelo axioma F_6, m tem um ponto em comum com r, o que é falso, pois por hipótese r e m não têm pontos em comum. Fazendo um raciocínio análogo ao que foi feito para o ponto R concluímos que o ponto Q pertence à reta m. Assim R e Q pertencem a m. Segundo o teorema 2.1.2, o ponto M pertence às polares de R e Q, ou seja a r e q (fig. 2.8). Assim as retas r e q intersetam-se no pólo de m. □

Lema 2.1.14. *Por um ponto P passam exatamente três retas que não intersetam a polar de P.*

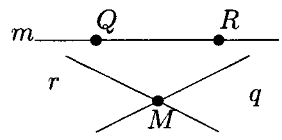


Figura 2.8

Demonstração:

Dado um ponto P, pelo teorema 2.1.9, incidem neste exatamente três retas distintas r, s e t. De acordo com o teorema 2.1.3 o ponto P tem exatamente uma polar p. Os pólos de r, s e t, respetivamente R, S e T, pertencem a p de acordo com o teorema 2.1.2 e o teorema 2.1.3 (fig. 2.9).

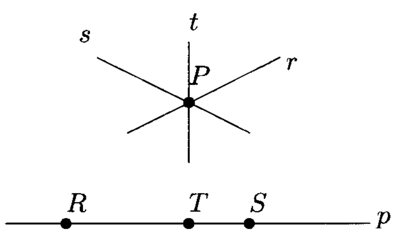


Figura 2.9

Nem o ponto S nem o ponto T pertencem à reta r, pois caso contrário as retas p e r teriam um ponto em comum, o que contradiria a definição de pólo e polar. Analogamente o ponto S não pertence à reta t, o ponto R não pertence nem à reta s nem à reta t e o ponto T não pertence à reta s . Assim pelo ponto P passam exatamente três retas que não intersetam a reta p, polar de P. □

Teorema 2.1.15. *Existem exatamente dez pontos e dez retas na configuração de Desargues.*

Demonstração:

De acordo com o axioma F_1, existe no mínimo um ponto P. Este ponto tem exatamente uma polar p, pelo teorema 2.1.3. De acordo com o axioma F_5, a reta p tem exatamente três pontos R, T e S distintos. Aplicando o teorema 2.1.3, podemos considerar as retas r, t e s polares dos pontos R, T e S, respetivamente. Segundo o teorema 2.1.2 o ponto P incide nas retas r, t e s. De acordo com o axioma F_5 cada reta tem exatamente três pontos. Sejam A, B, C, D, E e G pontos, tais que A, B e P são os três pontos da reta r; C, D e P são os três pontos da reta s; os pontos E, G e P são os três pontos da reta t (ver fig. 2.10). Definimos dez pontos. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existem pelo menos onze pontos. Seja H um décimo primeiro ponto, distinto dos anteriores. De acordo com o teorema 2.1.3 o ponto H tem exatamente uma polar h. A reta h e por exemplo a reta p têm um ponto em comum, aplicando o axioma F_6.

Sem perda de generalidade, suponhamos que o ponto R é comum às retas h e p. Como R pertence à reta h, o ponto H pertence à reta r, pelo teorema 2.1.2. Mas o facto de H ser distinto de todos os outros pontos e pertencer à reta r contraria o axioma F_5, pois a reta r tem quatro pontos em vez de ter três. Assim esta configuração tem exatamente dez pontos. Provou-se a existência de dez pontos. Por dualidade existem exatamente dez retas.

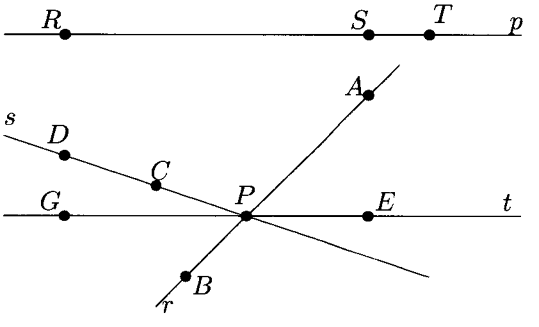


Figura 2.10

□

Definição 2.1.16. *Dizemos que os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ se encontram em perspetiva central, se as retas AA_1, BB_1 e CC_1 se intersetam num ponto P. Ao ponto P chamamos centro de perspetiva.*

Definição 2.1.17. *Consideremos dois triângulos ABC e $A_1B_1C_1$. Suponhamos que existem pontos R, S e T tais que R é o ponto de interseção das retas BC e B_1C_1, S é o ponto de interseção das retas AC e A_1C_1 e T é o ponto de interseção das retas AB e A_1B_1. Dizemos que os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ estão em perspetiva axial se os pontos R, S e T são colineares. À reta que passa pelos pontos R, S e T chamamos eixo de perspetiva.*

Teorema 2.1.18 (Teorema de Desargues). *Se dois triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ estão em perspetiva central, então estão em perspetiva axial. (Assume-se que A, B, C, A_1, B_1, C_1 e P são todos distintos e não existem três pontos A, B, C, A_1, B_1 e C_1 colineares).*

Demonstração:

Consideremos dois triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ tais que as retas AA_1, BB_1 e CC_1 se intersetem num ponto P. De acordo com o teorema 2.1.3, o ponto P tem exatamente uma polar p. Designemos por r a reta AA_1, por s a reta BB_1 e por t a reta CC_1. As retas r, s e t tem exatamente um pólo R, S e T, respetivamente, segundo o teorema 2.1.4. Se P pertence a r, s e t, pelo teorema 2.1.2, os pontos R, S e T pertencem à reta p. Sejam a, b, c, a_1, b_1 e c_1 as polares de A, B, C, A_1, B_1, C_1, respetivamente. Como C pertence a t, pelo teorema 2.1.2, T incide em c. Analogamente vemos que o ponto T pertence às retas c e c_1, o ponto S pertence às retas b e b_1 e o ponto R pertence às retas a e a_1. Para definir a polar do ponto A não podemos considerar o ponto C, pois existe uma reta que passa pelos pontos C e A. Se o ponto C pertencesse à polar de A, então esta reta e a reta que contém o ponto A tinham um ponto em comum, o que contradiria a definição de pólo e polar. Pela mesma razão, a polar de A também não pode passar pelos pontos B e A_1. A polar de A também não pode passar por S nem por T, pois pelo teorema 2.1.9 por cada ponto passam exatamente três retas, neste caso por S passam as retas b, b_1 e p e por T passam as retas c, c_1 e p. Então a polar de A passa pelos pontos C_1 e B_1. De modo análogo chegamos à conclusão que:

- à polar de A_1 (a_1) pertencem os pontos C, B e R;
- à polar de B (b) pertencem os pontos A_1, C_1 e S;
- à polar de C (c) pertencem os pontos A_1, B_1 e T;
- à polar de B_1 (b_1) pertencem os pontos A, C e S;
- à polar de C_1 (c_1) pertencem os pontos A, B e T.

Para ilustrar todo o nosso raciocínio feito na demonstração, apresentamos um possível modelo do Teorema de Desargues.

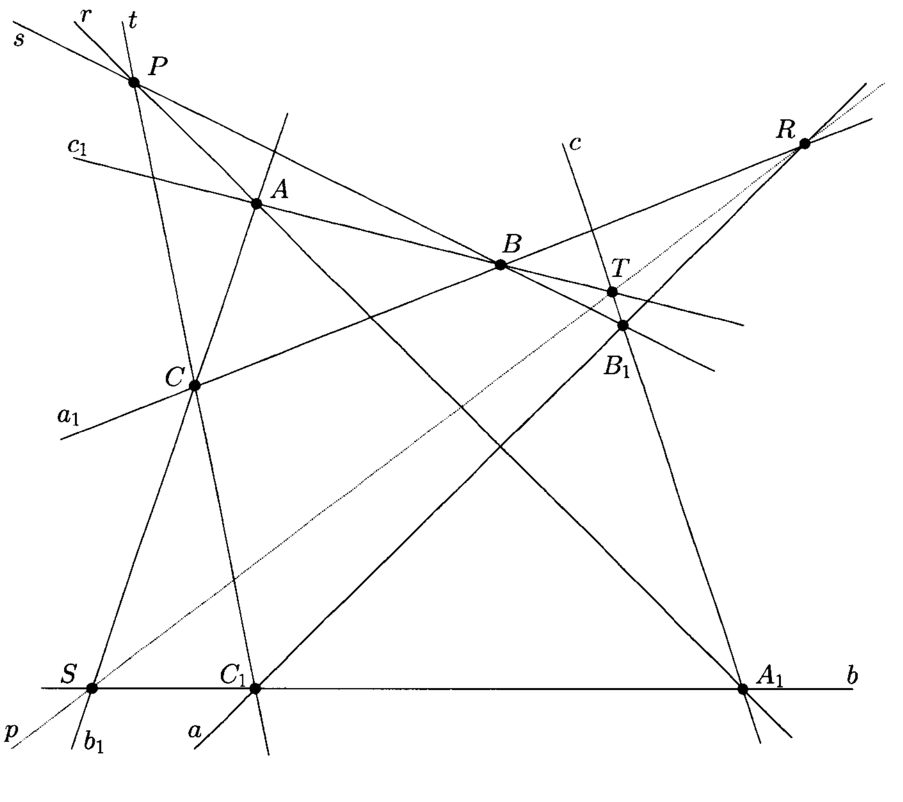


Figura 2.11: Um possível modelo da configuração de Desargues

As retas a e a_1 contêm lados correspondentes dos triângulos e intersetam-se em R. As retas b e b_1 contêm lados correspondentes dos triângulos e intersetam-se em S. As retas c e c_1 contêm lados correspondentes dos triângulos e intersetam-se em T. Os pontos T, R e S pertencem à reta p e como tal são colineares. Conclui-se assim que os triângulos estão em perspetiva a partir de uma reta.

Esta informação pode ser resumida na tabela 2.1.

	p	r	s	t	a	b	c	a_1	b_1	c_1
P		×	×	×						
R	×				×			×		
S	×					×			×	
T	×						×			×
A		×							×	×
B			×					×		×
C				×				×	×	
A_1		×				×	×			
B_1			×		×		×			
C_1				×	×	×				

Tabela 2.1: Tabela de incidência

□

O modelo ilustrado no teorema de Desargues poderá ser um exemplo representativo desta axiomática, pois facilmente se verifica que cumpre todos os axiomas. Assim este sistema axiomático é consistente.

2.2 Configuração de Papo

Papo de Alexandria viveu nos séculos III e IV d.C., numa época de estagnação da matemática grega. As suas contribuições para a matemática foram relativamente pequenas, mas os seus extensos comentários sobre as realizações dos matemáticos anteriores têm um valor inestimável. A sua obra mais importante denomina-se por "Coleção Matemática" e é composta por oito livros (dos quais estão perdidos o primeiro e parte do segundo). No livro VII é demonstrado o resultado hoje conhecido como Teorema de Papo [ESQSC89].

Nesta secção iremos introduzir a axiomática da configuração de Papo. À semelhança dos sistemas axiomáticos anteriores começaremos por introduzir os axiomas em que se baseia esta configuração. Tal como na configuração anterior terminaremos com o teorema que dá o nome a esta configuração: Teorema de Papo.

Consideremos os axiomas que se seguem para a configuração de Papo.

Axiomas:

Axioma G_1: No mínimo, existe uma reta.

Axioma G_2: Existem exatamente três pontos distintos em cada reta.

Axioma G_3: Nem todos os pontos estão sobre uma reta.

Axioma G_4: Por dois pontos distintos passa no máximo uma reta.

Axioma G_5: Se P é um ponto que não está sobre a reta m, existe exatamente uma reta que passa por P paralela a m.

Axioma G_6: Se m é uma reta que não está sobre o ponto P, então existe exatamente um ponto sobre m não colinear com P.

A Configuração de Papo é um sistema axiomático que satisfaz o princípio da dualidade. Tal como fizemos na secção anterior vamos enunciar os duais dos axiomas anteriores e verificar que correspondem a teoremas nesta geometria. Não introduziremos os duais dos axiomas G_5 e G_6, pois estes são duais um do outro.

Teorema 2.2.1 (Dual do axioma G_1). *No mínimo, existe um ponto.*

Demonstração:

De acordo com o axioma G_1, existe, no mínimo, uma reta e em cada reta existem exatamente três pontos, de acordo com o axioma G_2. Logo, existe um ponto, no mínimo. □

Teorema 2.2.2 (Dual do axioma G_2). *Existem exatamente três retas distintas sobre cada ponto.*

Demonstração:

Seja P um ponto qualquer. Aplicando o axioma G_1, existe, no mínimo, uma reta r. Podemos considerar dois casos distintos:

1. P está sobre a reta r.

2. P não está sobre a reta r.

Caso 1: Se o ponto P está sobre a reta r, então segundo o axioma G_3, existe um ponto S que não está sobre a reta r. Aplicando o axioma G_5 ao ponto S e à reta r, existe exatamente uma reta s que passa pelo ponto S paralela à reta r. De acordo com o axioma G_2, a reta s tem exatamente três pontos distintos, um deles é o ponto S, aos outros dois podemos chamar Q e R. Como a reta s não incide no ponto P, existe exatamente um ponto sobre s não colinear com o ponto P, segundo o axioma G_6. Como os pontos S, Q e R estão em igualdade de circunstâncias, sem perda de generalidade, consideremos que o ponto Q não é colinear com P. Logo, como consequência do axioma G_6 e aplicando o G_4, construímos as retas PR e PS. Assim, no ponto P incidem as retas r, PR e PS (fig. 2.12).

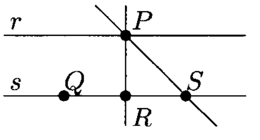


Figura 2.12

Vamos provar que não existem mais retas incidentes em P. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe uma quarta reta t, distinta das anteriores, que incide no ponto P. A reta t e a reta s têm um ponto em comum, caso contrário obteríamos uma contradição com o axioma G_5, pois já existe a reta r, que incide no ponto P e é paralela à reta s. A reta t não pode incidir no ponto Q, pois o ponto P não é colinear com o ponto Q e como a reta s só tem três pontos, a reta t vai ter de incidir ou no ponto R ou no ponto S. Assim a reta t teria de coincidir com a reta PR ou com a reta PS o que é impossível, pois supusemos que a reta t é distinta das retas anteriormente definidas.

Caso 2: se o ponto P não está sobre a reta r, aplicando o axioma G_5, existe exatamente uma reta t sobre o ponto P paralela a r. De acordo com o axioma G_2, a reta r tem exatamente três pontos T, U e M distintos. Como o ponto P não está sobre a reta r, então pelo axioma G_6 existe exatamente um ponto sobre a reta r não colinear com o ponto P. Sem perda de generalidade suponhamos que o ponto M não é colinear com o ponto P. Assim, existe uma reta que passa pelos pontos P e T e uma reta que passa pelos pontos P e U, de acordo com o axioma G_4, estas retas são únicas e vamos designá-las por PT e PU. No ponto P incidem as três retas t, PT e PU. De forma análoga ao caso anterior se prova que não existe uma quarta reta que incide no ponto P.

Concluímos que em cada ponto incidem exatamente três retas. □

Teorema 2.2.3 (Dual do axioma G_3). *Nem todas as retas estão sobre o mesmo ponto.*

Demonstração:

Aplicando o axioma G_1, existe no mínimo uma reta r. De acordo com o axioma G_3 existe um ponto P que não está sobre r. Portanto pelo axioma G_5, existe exatamente uma reta m sobre o ponto P paralela a r (fig. 2.13).

Como a reta r e a reta m não se intersetam, existem duas retas distintas que não incidem no mesmo ponto. □

Teorema 2.2.4 (Dual do axioma G_4). *Duas retas distintas estão no máximo sobre um ponto.*

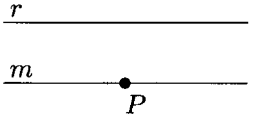


Figura 2.13

Demonstração:

Dadas duas retas distintas r e s, segundo o axioma G_3, existem exatamente três pontos distintos em cada uma delas. Suponhamos com vista a um absurdo que dois desses pontos, Q e T, são comuns às duas retas (fig. 2.14).

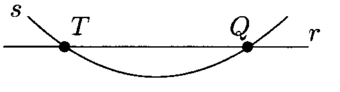


Figura 2.14

Como os pontos Q e T estão sobre as retas r e s, então aplicando o axioma G_4, as retas r e s são a mesma, o que contradiria a nossa hipótese. Portanto r e s estão no máximo sobre um ponto. □

Verificámos que este sistema satisfaz o princípio de dualidade.

Lema 2.2.5. *Cada reta admite exatamente duas retas paralelas.*

Demonstração:

Seja m uma reta dada. Segundo o axioma G_2, na reta m existem exatamente três pontos R, S e T distintos. De acordo com o axioma G_3, existe um ponto P que não está sobre a reta m. Aplicando o axioma G_5, existe exatamente uma reta n sobre P paralela a m. Como m é uma reta que não passa pelo ponto P, então existe exatamente um ponto sobre m não colinear com o ponto P, pelo axioma G_6. Sem perda de generalidade podemos supor que o ponto R não é colinear com o ponto P. Assim, existe uma reta que passa pelos pontos P e S e uma reta que passa pelos pontos P e T. De acordo com o axioma G_4, estas retas são únicas e vamos designá-las por PS e PT. De acordo com o axioma G_2, a reta PS tem exatamente três pontos, os pontos S e P e um terceiro ponto Q. O ponto Q não pertence à reta m, pois caso contrário as retas PS e m seriam a mesma. Analogamente o ponto Q não pertence à reta n. Aplicando o axioma G_5, existe exatamente uma reta l incidente no ponto Q e paralela à reta m (fig. 2.15).

Verificámos a existência de duas retas paralelas a m. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existem pelo menos três retas paralelas a m. Seja s uma terceira reta paralela a m distinta de l e n. A reta s não pode incidir em nenhum dos pontos R, S e T, por hipótese, assim a reta s é distinta das retas PS e PT. No ponto P incidem as retas n, PS e PT, logo de acordo com o teorema 2.2.2 a

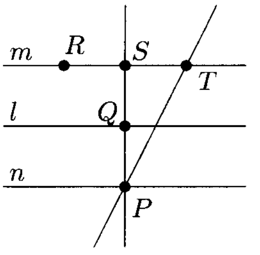


Figura 2.15

reta s não pode incidir em P. Verificamos facilmente que a reta s não incide no ponto Q, pois caso incidisse existiam duas retas, l e s paralelas à reta m, o que contraria o axioma G_5. A reta s não incide em nenhum dos outros dois pontos de cada uma das retas l e n, por raciocínio análogo ao que foi feito para o ponto Q. Consideremos, de acordo com o axioma G_2, três pontos K, W e Z na reta s (fig. 2.16).

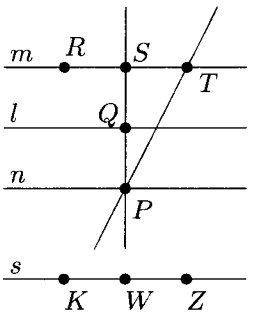


Figura 2.16

Aplicando o axioma G_6 ao ponto P e à reta s, existe exatamente um ponto na reta s não colinear com o ponto P. Sem perda de generalidade, suponhamos K o ponto não colinear com P. Assim existe uma reta incidente nos pontos P e W e outra nos pontos P e Z. De acordo com o teorema 2.2.2 sabemos que no ponto P apenas incidem as retas n, PS, PT e portanto os pontos W e Z têm de incidir nalguma destas retas. Já vimos que a reta s não interseta nem a reta n nem a reta PS, assim ambos os pontos W e Z têm de incidir na reta PT, o que é um absurdo pois cada reta só tem três pontos. Portanto só podem existir duas retas paralelas a m. □

No capítulo 1 demonstramos o teorema de Papo na geometria dos nove pontos e doze retas, vamos aqui enunciar e demonstrar este teorema no âmbito desta axiomática. Adotaremos a definição 1.4.5 de polígono e a definição 1.4.6 de lados opostos dadas.

Teorema 2.2.6 (Teorema de Papo). *Sejam m e n duas retas paralelas com pontos distintos R, S, T sobre m e U, P, Q sobre n, tais que R e U não são colineares, S e*

P não são colineares e Q e T não são colineares. Então podemos construir o hexágono $RPTUSQ$. Além disso os seus lados opostos intersetam-se e os três pontos de interseção são colineares.

Demonstração:

Tomemos duas retas paralelas m e n com pontos distintos R, S e T sobre m e Q, P e U sobre n, tais que R e U não são colineares, S e P não são colineares e T e Q não são colineares e as retas PR, QR, QS, SU, PT e TU. Estas retas são os lados do hexágono $RPTUSQ$. De acordo com a definição 1.4.6, o lado oposto ao lado PR é SU, o lado oposto ao lado PT é QS e o lado oposto ao lado TU é QR.

De acordo com o axioma G_2, existem exatamente três pontos distintos na reta PR. Seja K um ponto sobre a reta PR, distinto de R e P (fig. 2.17).

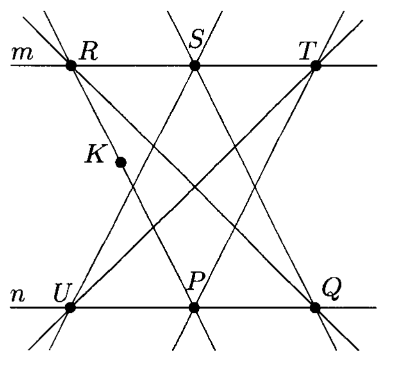


Figura 2.17

O ponto Q é colinear com o ponto R e com o ponto P, assim não pode ser colinear com o ponto K, pelo axioma G_6, aplicado ao ponto Q e à reta RP. Como K não é colinear com Q, em particular, K não está sobre a reta SQ. O ponto R não está sobre a reta SQ porque caso contrário pelo axioma G_4, a reta m e a reta SQ seriam a mesma. Analogamente, o ponto P não está sobre a reta SQ. Assim a reta SQ é paralela à reta PR. Pelo axioma G_5, existe exatamente uma reta paralela à reta PR que passa pelo ponto S. Como a reta SQ está nestas condições, as retas SU e PR têm um ponto em comum. Como nem o ponto R nem o ponto P estão sobre SU o ponto K tem de estar sobre SU.

Segundo o axioma G_2, existem exatamente três pontos distintos na reta RQ, pelo que podemos considerar um ponto W sobre a reta RQ, distinto de R e Q (fig. 2.18).

Por uma argumentação análoga à anterior podemos demonstrar que o ponto W pertence à reta TU.

Novamente de acordo com o axioma G_2, existem exatamente três pontos distintos na reta SQ, seja Z um ponto sobre a reta SQ, distinto de S e Q (fig. 2.19).

Por razões análogas às anteriores o ponto Z pertence à reta TP.

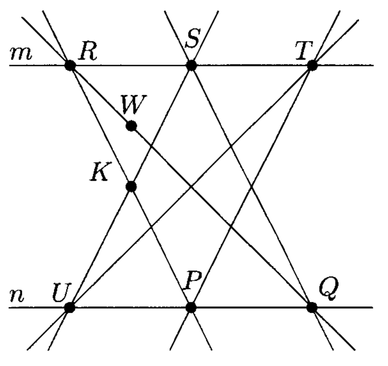


Figura 2.18

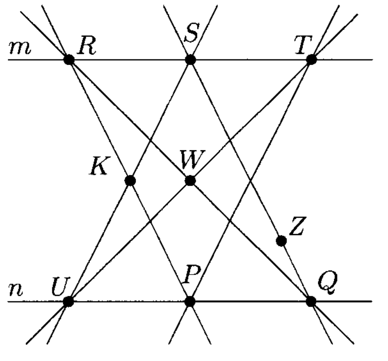


Figura 2.19

De acordo com o axioma G_5, como K é um ponto que não está sobre a reta m, existe exatamente uma reta l sobre K paralela a m. O ponto K não é colinear com o ponto Q, mas K tem de ser colinear com dois pontos de RQ que só podem ser os pontos R ou W; e colinear com dois pontos de SQ que só podem ser os pontos S ou Z. Assim o ponto K é colinear com o ponto W e com o ponto Z. De acordo com o teorema 2.2.2, pelo ponto K só passam três retas RP, SU e l. Como as retas RP e SU têm três pontos cada uma, respeitando assim o axioma G_2, os pontos W e Z não podem pertencer a estas retas e portanto incidem ambos na reta l. Logo os pontos K, W e Z são colineares (fig. 2.20).

□

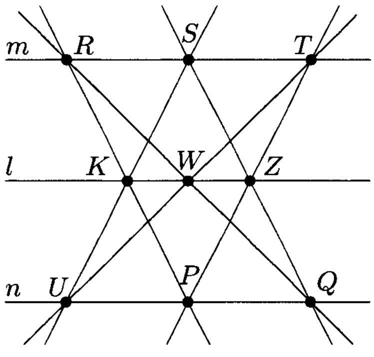


Figura 2.20

Reparemos que a demonstração do teorema é diferente da que foi feita no capítulo anterior, o que é natural uma vez que o sistema axiomático é diferente.

Teorema 2.2.7. *Existem exatamente nove pontos e nove retas na configuração de Papo.*

Demonstração:

Segundo o axioma G_1 existe, no mínimo, uma reta m. De acordo com o axioma G_2 existem exatamente três pontos R, S, T distintos na reta m. Segundo o axioma G_3, existe um ponto P que não pertence à reta m. Aplicando o axioma G_5, existe exatamente uma reta n incidente no ponto P paralela à reta m (fig. 2.21).

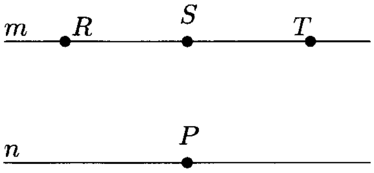


Figura 2.21

De acordo com o axioma G_2, na reta n existem exatamente três pontos, um deles é o ponto P, aos outros dois podemos-lhes chamar U, Q. Como a reta m não passa pelo ponto U, aplicando o axioma G_6 existe exatamente um ponto sobre m não colinear com o ponto U. Sem perda de generalidade, podemos escolher R como o ponto que está sobre m e que não é colinear com o ponto U. Sendo assim, existe uma reta incidente nos pontos U e T e uma reta incidente nos pontos S e U, de acordo com o axioma G_4, estas retas são únicas e vamos designá-las por SU e TU (fig. 2.22).

Como R não é colinear com o ponto U, aplicando o axioma G_4, podemos construir as retas PR e RQ. Aplicando o axioma G_6, existe um ponto em m não colinear com o ponto P, esse ponto só pode ser o ponto S ou o ponto T (pois anteriormente definiu-se a reta PR), sem perda de generalidade podemos supor que é o ponto S. Assim pelo axioma G_4 define-se a reta PT. Finalmente

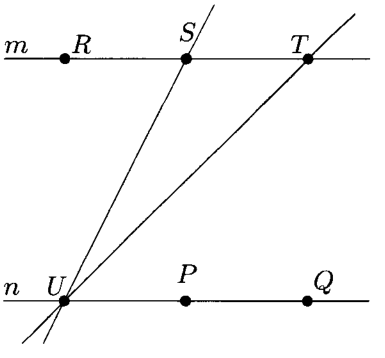


Figura 2.22

aplicando o axioma G_6 ao ponto Q e à reta m, o ponto Q tem de ser colinear com S ou com o ponto T. Não pode ser com o ponto T porque ao aplicarmos o axioma G_6 a este ponto e à reta n teríamos uma contradição, portanto o ponto Q tem de ser colinear com S. Reparemos que temos duas retas m e n e seis pontos nas condições do teorema de Papo, portanto podemos aplicar este teorema que garante a existência de um hexágono em que os lados opostos se intersetam e os três pontos de interseção estão sobre a mesma reta. Verificamos a existência de nove pontos e nove retas. Comecemos por demonstrar que não existem mais pontos. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existem pelo menos dez pontos. Seja V um décimo ponto. Aplicando o axioma G_4, pelos pontos V e R passa uma reta RV. Assim no ponto R incindem as retas RV, RQ, RP e m; o que contraria o teorema T 2.2.2. Portanto esta configuração tem exatamente nove pontos. Seguidamente demonstraremos que não existem mais retas. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existem pelo menos dez retas. Seja j uma décima reta diferente de todas as retas definidas anteriormente. De acordo com o lema 2.2.5, a reta j não pode ser paralela à reta m pois foram definidas as retas l e n como retas paralelas a m. Assim as retas j e m têm um ponto em comum, que só pode ser um dos pontos R, S ou T. Nestes pontos já incidem três retas, logo a reta j não pode incidir em nenhum deles, de acordo com o teorema T 2.2.2. Portanto esta configuração tem exatamente nove retas. □

Capítulo 3

Planos e Espaços Projetivos Finitos

3.1 Planos Projetivos Finitos

Os planos projetivos apresentam uma grande diferença em relação à geometria Euclidiana. Essa diferença deve-se ao facto de no plano projetivo finito não existirem retas paralelas, isto é, quaisquer duas retas intersetam-se num ponto. Iremos ao longo desta secção enunciar e demonstrar vários resultados que nos ajudam a compreender esta geometria. Finalizaremos com uma breve discussão sobre a existência de planos projetivos.

Este sistema axiomático é uma generalização do sistema axiomático da geometria dos sete pontos. Embora os axiomas deste sistema e do sistema axiomático da geometria dos sete pontos sejam distintos, o modelo de ordem dois encontrado é exatamente o mesmo. O plano projetivo de ordem dois também é conhecido por plano de Fano.

Seja $n > 1$ um natural. Um conjunto de pontos que satisfaça o seguinte sistema de axiomas chama-se plano projetivo de ordem n.

Axiomas:

Axioma H_1: Existem pelo menos quatro pontos não colineares três a três.

Axioma H_2: Existe pelo menos uma reta incidente com exatamente $n+1$ pontos distintos.

Axioma H_3: Dados dois pontos distintos, existe exatamente uma reta incidente em ambos.

Axioma H_4: Dadas duas retas distintas, existe pelo menos um ponto incidente com ambas.

Modelos que demostram a independência dos axiomas

Para cada axioma iremos dar um exemplo que demonstra a sua independência e facilmente se verifica que se cumprem todos os axiomas com exceção do axioma em questão. Nos exemplos, que daremos para os axiomas H_1 e H_3, o axioma H_4 é cumprido trivialmente porque não existem duas retas.

Axioma H_1: Existem pelo menos quatro pontos não colineares três a três.

Exemplo: O modelo formado por uma reta com $n + 1$ pontos contraria o axioma H_1, pois todos os pontos são colineares (fig. 3.1).

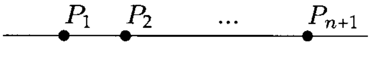


Figura 3.1

Axioma H_2: Existe pelo menos uma reta incidente com exatamente $n + 1$ pontos distintos.

Exemplo:

- Se $n = 2$, o plano projetivo de ordem três, descrito mais à frente no exemplo 3.1.13, não cumpre a axiomática deste plano projetivo, pois todas as retas têm quatro pontos e não três.
- Se $n > 2$, o plano projetivo de ordem dois, descrito mais à frente no exemplo 3.1.12, cumpre todos os axiomas menos este, uma vez que que todas as retas têm três pontos e não $n + 1$.

Axioma H_3: Dados dois pontos distintos, existe exatamente uma reta incidente em ambos.

Exemplo: Modelo constituído pelos pontos A e D e por uma reta incidente nos pontos $E_1, E_2, \ldots, E_{n+1}$ (fig. 3.2).

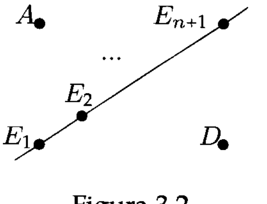


Figura 3.2

Este modelo não cumpre o axioma H_3, pois existem dois pontos distintos nos quais não incide nenhuma reta.

Axioma H_4: Dadas duas retas distintas, existe pelo menos um ponto incidente com ambas.

Exemplo: Consideremos os pontos $A, B, C_1, C_2, \cdots, C_{n+1}$. Sejam r uma reta incidente nos pontos A e B e s uma reta incidente nos pontos $C_1, C_2, \cdots, C_{n+1}$. Consideremos ainda, as retas incidentes no ponto A e em cada um dos pontos da reta s e as retas incidentes no ponto B e em cada um dos pontos da reta s, como ilustra a figura 3.3.

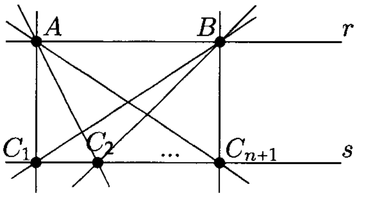


Figura 3.3

Este modelo contraria o axioma H_4, pois as retas r e s não têm um ponto em comum.

À semelhança do que foi dito no capítulo um, na definição 1.1.5 da Geometria dos 4 pontos, o dual dos axiomas deste sistema axiomático é obtido trocando os termos ponto e reta. Faremos, seguidamente, o dual de cada um dos axiomas e a sua respetiva demonstração, provando assim que este sistema axiomático satisfaz o princípio da dualidade.

Teorema 3.1.1 (Dual do axioma H_1). *Existem pelo menos quatro retas não concorrentes três a três.*

Demonstração:

Pelo axioma H_1, existem quatro pontos P, R, S e T não colineares três a três. Aplicando o axioma H_3, construímos as retas PS, RT, ST e PR (fig. 3.4).

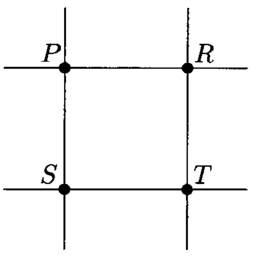


Figura 3.4

Suponhamos, com vista a um absurdo, que três destas retas são concorrentes. Sem perda de generalidade, suponhamos que PS, RT e ST incidem num ponto Q. Podemos considerar dois casos:

1. o ponto Q é distinto dos pontos já definidos;

2. o ponto Q é um dos pontos já definidos.

Caso 1: se o ponto Q é distinto dos pontos P, R, S e T, então os pontos T e Q incidem simultaneamente nas retas RT e ST (fig. 3.5).

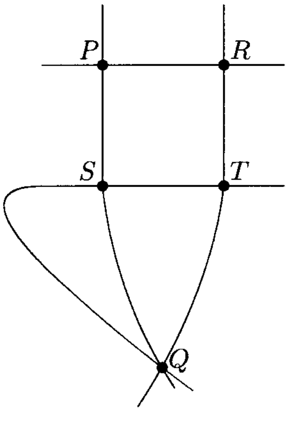


Figura 3.5

De acordo com o axioma H_3, as retas RT e ST são a mesma, logo os pontos R, S e T são colineares, o que contradiz a nossa hipótese.

Caso 2: suponhamos que os pontos Q e S são o mesmo. Nesse caso a reta RT passa pelo ponto S, logo os pontos R, S e T são colineares, o que contradiz a nossa hipótese. Analogamente podemos ver que o ponto Q não pode coincidir com os pontos P, R e T.

Portanto existem pelo menos quatro retas não concorrentes três a três. □

Teorema 3.1.2 (Dual do axioma H_2). *Existe pelo menos um ponto incidente com exatamente $n + 1$ retas distintas.*

Demonstração:

Pelo axioma H_2, existe pelo menos uma reta r com $n + 1$ pontos distintos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}$. De acordo com o axioma H_1, existe um ponto P que não incide na reta r. Aplicando o axioma H_3 construímos as retas $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ incidentes, respetivamente, nos pontos A_1 e P, A_2 e $P, \ldots, A_{n+1}$ e P (ver fig. 3.6). Verifiquemos em primeiro lugar que existem $n+1$ retas distintas. Suponhamos, com vista a um absurdo, que as retas r_j e r_i são a mesma, com $i \neq j$. Então ambos os pontos A_i e A_j são pontos distintos e são incidentes na reta r_i, logo de acordo com o axioma H_3, as retas r_i e r são a mesma. No entanto o ponto P incide na reta r_i, mas não incide na reta r e chegamos a uma contradição. Assim as retas r_j e r_i são distintas. Verifiquemos agora que não existe mais nenhuma reta incidente no ponto P. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe uma reta s, distinta das retas $r_1, \ldots, r_{n+1}$, que incide no ponto P. De acordo com o axioma H_4, as retas r e s incidem num ponto em S. Como a reta r tem exatamente $n + 1$ pontos, o ponto S tem de ser um dos pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots,$

A_{n+1}. Seja $i \in 1, \ldots, n+1$ tal que $S = A_i$. Então A_i incide na reta s, aplicando o axioma H3 aos pontos P e A_i vemos que as retas r_i e s são a mesma.

Concluímos então que P incide em exatamente $n + 1$ retas (fig. 3.6).

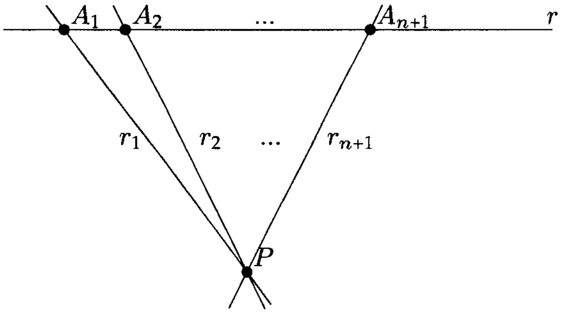


Figura 3.6

□

Teorema 3.1.3 (Dual do axioma H3). *Dadas duas retas distintas, existe exatamente um ponto incidente em ambas.*

Demonstração:

Sejam r e s duas retas distintas. De acordo com o axioma H4, existe um ponto P incidente em ambas as retas (fig. 3.7).

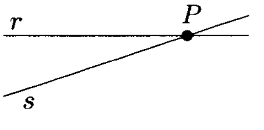


Figura 3.7

Suponhamos, com vista a um absurdo, que as retas r e s incidem em dois pontos P e Q distintos (fig. 3.8).

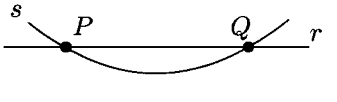


Figura 3.8

Se P e Q são pontos distintos, pelo axioma H3, as retas r e s são a mesma. Isto é absurdo porque as retas r e s são distintas, por hipótese.

Portanto duas retas distintas incidem exatamente num ponto. □

Teorema 3.1.4 (Dual do axioma H4). *Dados dois pontos distintos, existe pelo menos uma reta incidente em ambos.*

Demonstração:

Sejam P e R dois pontos distintos dados. De acordo com o axioma H_3, existe exatamente uma reta incidente em ambos os pontos P e R. Logo verifica-se o teorema. □

Teorema 3.1.5. *Dados dois pontos P e Q, existe uma reta que não incide nem com P nem com Q.*

Demonstração:

Sejam P e Q pontos distintos. Segundo o teorema 3.1.1, existem quatro retas distintas, não concorrentes três a três. Se uma das retas não incide com o ponto P nem com o ponto Q, já temos uma reta não incidente com nenhum destes pontos. Caso contrário, como não pode haver três retas incidentes com um dos pontos P ou Q, teremos duas retas r_2 e r_4 incidentes em P e outras duas retas r_1 e r_3 incidentes em Q. Aplicando o axioma H_4, existe um ponto R incidente em r_3 e r_4 e um ponto S incidente em r_1 e r_2 (fig. 3.9). Segundo o axioma H_3,

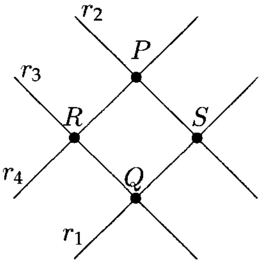


Figura 3.9

existe uma reta m incidente em R e em S. Suponhamos que o ponto P incide na reta m (fig. 3.10). Temos que os pontos R e P incidem nas retas r_4 e m, logo

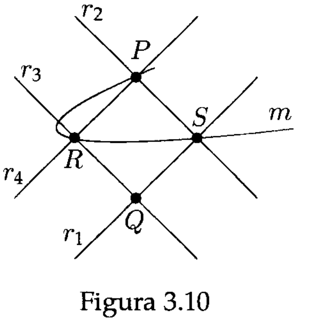


Figura 3.10

as retas r_4 e m são coincidentes; por outro lado temos que se os pontos S e P incidem nas retas r_2 e m, logo r_2 e m são coincidentes, de acordo com o axioma H_3. Assim as retas r_4 e r_2 são coincidentes. Logo P não incide na reta m. Por processo análogo se prova que Q não pertence a m.

Provamos que existe uma reta que não incide nem com P nem com Q. □

Como este sistema axiomático satisfaz o princípio da dualidade então também é válido o dual do teorema 3.1.5, que vamos enunciar seguidamente sem fazer a demonstração.

Teorema 3.1.6 (Dual do teorema 3.1.5). *Dadas duas retas r e s, existe um ponto que não incide nem em r nem em s.*

Teorema 3.1.7.

1. *Se P e Q são dois pontos distintos, então existe uma bijeção entre o conjunto das retas que passam pelo ponto P e o conjunto das retas que passam pelo ponto Q.*
2. *Se r e s são duas retas distintas, então existe uma bijeção entre os conjuntos dos pontos das retas r e s.*

Demonstração:

1: Se P e Q são dois pontos distintos, existe uma reta r não incidente nem no ponto P nem no ponto Q de acordo com o teorema 3.1.5 (fig. 3.11).

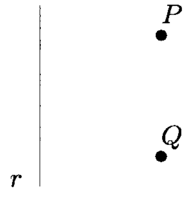


Figura 3.11

Seja t uma reta incidente no ponto P. Pelo teorema 3.1.3 existe um único ponto R comum às retas r e t. Assim sendo definimos a função f que a cada reta t incidente no ponto P faz corresponder a respetiva reta RQ (fig. 3.12).

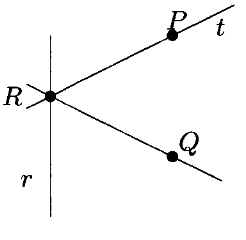


Figura 3.12

$$f : \{\text{retas incidentes no ponto } P\} \longrightarrow \{\text{retas incidentes no ponto } Q\}$$

$$t \longrightarrow RQ$$

Provemos a injetividade. Sejam t_1 e t_2 duas retas distintas que passam pelo ponto P. Então os pontos R_1 e R_2 também são distintos, caso contrário pelo axioma H3 as retas t_1 e t_2 seriam a mesma. Assim as retas R_1Q e R_2Q são distintas (fig. 3.13).

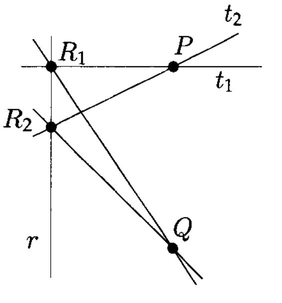


Figura 3.13

Provemos a sobrejetividade. Seja q uma reta arbitrária que incide no ponto Q. Esta reta interseta a reta r num ponto R, de acordo com o teorema 3.1.3. De acordo com o axioma H3, nos pontos R e P incide exatamente uma reta RP. Assim a reta q é a imagem da reta RP pela função f. A função é sobrejetiva.

Concluímos que existe uma bijeção entre as retas que passam pelos pontos P e Q.

2: Se r e s são duas retas distintas, então existe uma bijeção entre os pontos das retas r e s. Se dados P e Q dois pontos distintos, então existe uma bijeção entre as retas que passam pelos pontos P e Q, como este sistema axiomático é dual, logo dadas r e s duas retas distintas, então existe uma bijeção entre os pontos de ambas as retas. □

Teorema 3.1.8. *Dada uma reta r e um ponto P, existe uma bijeção entre os pontos da reta r e as retas que incidem no ponto P.*

Demonstração:

Sejam dados uma reta r e um ponto P. Podemos considerar dois casos:

1. o ponto P não incide na reta r;
2. o ponto P incide na reta r.

Caso 1: definamos a função g, que a cada ponto Q da reta r faz corresponder a reta PQ.

$$g : \{\text{pontos da reta } r\} \longrightarrow \{\text{retas que incidem no ponto } P\}$$

$$Q \longrightarrow PQ$$

Provemos a injetividade. Se Q_1 e Q_2 são dois pontos distintos dados, então as retas PQ_1 e PQ_2 são distintas pelo axioma H_3.

Provemos a sobrejetividade: seja s uma reta arbitrária que incide no ponto P. Esta reta interseta a reta r num ponto T, de acordo com o teorema 3.1.3, logo a imagem do ponto T pela função g é a reta s. Portanto a função é sobrejetiva.

Caso 2: o ponto P incide na reta r. Pelo teorema 3.1.1 existe uma reta s que não incide no ponto P. Pelo ponto dois do teorema 3.1.7 existe uma bijeção h entre os pontos da reta r e os pontos da reta s. Seja j a função que a cada ponto Q da reta r faz corresponder a reta $h(Q)P$ (fig. 3.14).

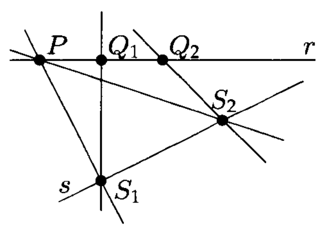


Figura 3.14

$$j : \{\text{pontos da reta } r\} \longrightarrow \{\text{retas que incidem no ponto } P\}$$

$$Q \longrightarrow h(Q)P$$

Provemos a injetividade da função j. Dados os pontos Q_1 e Q_2 distintos então os pontos $h(Q_1)$ e $h(Q_2)$ também são distintos porque a função h é uma bijeção. Portanto as retas $h(Q_1)P$ e $h(Q_2)P$ são distintas pelo axioma H_3.

Provemos a sobrejetividade da função j. Seja t uma reta arbitrária que incide no ponto P. A reta t interseta a reta s num ponto S, de acordo com o teorema 3.1.3. Como h é uma bijeção existe um ponto Q na reta r tal que $h(Q)$ é o ponto S. Assim a imagem do ponto Q é a reta t. Logo a função é sobrejetiva.

Concluímos assim que existe uma bijeção entre os pontos da reta r e as retas que incidem no ponto P. □

Teorema 3.1.9. *Num plano projetivo de ordem n, cada reta incide em exatamente $n+1$ pontos.*

Demonstração:

Seja r uma reta dada. Pelo axioma H_2, existe pelo menos uma reta s incidente em exatamente $n+1$ pontos. Podemos ter dois casos:

1. as retas r e s são a mesma;

2. as retas r e s são distintas.

Caso 1: se as retas r e s são a mesma, então a reta r incide em exatamente $n+1$ pontos.

Caso 2: se as retas r e s são distintas, então aplicando o ponto dois do teorema 3.1.7, existe uma bijeção entre os pontos das retas r e s. Assim a reta r também tem exatamente $n+1$ pontos. □

Teorema 3.1.10. *Num plano projetivo de ordem n, cada ponto é incidente em $n+1$ retas.*

Demonstração:

Como este sistema axiomático é dual, se cada reta é incidente com $n+1$ pontos, então cada ponto incide também em exatamente $n+1$ retas. □

Teorema 3.1.11. *Um plano projetivo de ordem n, tem exatamente n^2+n+1 pontos e n^2+n+1 retas.*

Demonstração:

De acordo com o axioma H_2, existe pelo menos uma reta r com exatamente $n+1$ pontos, P_1, P_2, ..., P_{n+1}. Segundo o axioma H_1, sabemos que existe um ponto P do plano não incidente na reta r. Aplicando teorema 3.1.10, o ponto P incide em exatamente $n+1$ retas, r_1, r_2, ..., r_{n+1}. Tendo em atenção o teorema 3.1.9, cada uma destas retas incide em exatamente $n+1$ pontos (o ponto P e n outros pontos). Concluímos que, no mínimo, o número de pontos é:

$$(n+1)n+1 = n^2+n+1.$$

Vejamos que não existem mais pontos. De acordo com o axioma H_3, qualquer ponto distinto de P tem de ser incidente numa das retas $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ e assim é um dos pontos considerados acima.

Como este sistema axiomático satisfaz o princípio da dualidade, então existem n^2+n+1 retas. □

Vamos apresentar a seguir dois modelos para esta axiomática, um do plano projetivo de ordem dois, outro de ordem três. Em ambos os exemplos, fazemos uma pequena descrição da sua construção, a partir dos axiomas.

Exemplo 3.1.12. Um possível modelo para o plano projetivo de ordem dois.

Existem quatro pontos A, B, C e D não colineares três a três, de acordo com o axioma H_1. Aplicando o axioma H_3, construímos as retas AB, AC, AD, BC, BD e CD. Sendo um plano de ordem dois, pelo teorema 3.1.9, cada reta tem exatamente três pontos e de acordo com o teorema 3.1.11, existem exatamente sete pontos e sete retas. Como existem sete pontos falta-nos definir três pontos, sejam E, F e G esses pontos. As retas definidas anteriormente só têm dois pontos, então, sem perda de generalidade, suponhamos que o ponto E incide na reta AC, o ponto F na reta CD e o ponto G na reta AD. Temos assim definidas as retas ADG, ABF e ACE com três pontos. As retas AB, BC e BD ainda só têm dois pontos e o terceiro ponto terá de ser um dos pontos já definidos. Aplicando o axioma H_3, a reta BC incide no ponto G, pois é o único ponto dos definidos que não é colinear nem com o ponto B nem com o ponto C, caso contrário contradizíamos o axioma H_3. A reta BD incide no ponto E e a reta AB incide no ponto F por razão análoga à anterior. Falta-nos definir uma reta, aplicando o axioma H_3 construímos a reta EF, o outro ponto desta reta só pode ser o ponto G, pois é o único ponto dos definidos que não é colinear nem com o ponto E nem com o ponto F. As sete retas são: ABF, ACE, ADG, BCG, BDE, CDF e EFG (fig. 3.15).

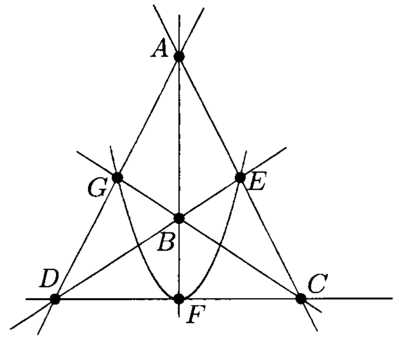


Figura 3.15: Um possível modelo para o plano projetivo de ordem dois

A construção deste modelo verifica todos os axiomas.

Observemos que, se no modelo anterior, que construímos para o plano projetivo de ordem dois, retirarmos uma reta e os seus pontos, vamos obter um modelo que satisfaz o sistema axiomático da geometria dos quatro pontos. No próximo capítulo, planos afins finitos, estudaremos mais detalhadamente este fenómeno.

Salientamos ainda o facto deste modelo ser equivalente ao modelo apresentado na geometria finita dos sete pontos. Isto não é mera casualidade. Todos os axiomas do plano projetivo de ordem dois podem ser deduzidos como teoremas a partir dos resultados da geometria dos sete pontos. Da mesma forma todos os axiomas da geometria finita dos sete pontos podem ser obtidos como teoremas a partir dos resultados do plano projetivo de ordem dois. Para melhor compreendermos o que acabamos de afirmar, vamos a título de exemplo, escolher um axioma de cada uma das geometrias e deduzi-lo a partir dos resultados da outra geometria. Comecemos por exemplificar como deduzir o axioma H_1 a partir dos resultados da geometria finita dos sete pontos.

Axioma H_1: Existem pelo menos quatro pontos não colineares três a três.
Dedução:

De acordo com o teorema 1.3.7, existem sete retas, sejam r e s duas delas. Estas retas têm um único ponto P em comum, segundo o teorema 1.3.1. As retas r e s têm três pontos cada uma, segundo os axiomas D_5 e D_7, um é o ponto P, aos outros dois pontos da reta r chamamos R e T e aos outros dois pontos da reta s chamamos Q e S. Para que três dos pontos Q, R, S e T fossem colineares, seria necessário que o ponto R ou T incidisse na reta s ou o ponto Q ou S incidisse na reta r, o que não acontece.

Verificamos a existência de quatro pontos não colineares três a três. □

Finalizaremos por exemplificar como deduzir o axioma D_6 a partir dos resultados do plano projetivo.

Axioma D_6: Nem todos os pontos pertencem à mesma reta.

Dedução:

De acordo com o teorema 3.1.5, dados dois pontos P e Q, existe uma reta que não incide nem com P nem com Q. Portanto nem todos os pontos pertencem à mesma reta.

□

Exemplo 3.1.13. Um possível modelo para o plano projetivo de ordem três.

Existem quatro pontos A, C, E e L não colineares três a três, pelo axioma H_1. Aplicando o axioma H_3, construímos as retas AC, AE, AL, CE, CL e EL. Como o plano é de ordem três, pelo teorema 3.1.9, cada reta tem exatamente quatro pontos. As retas AC, AE e AL têm o ponto A em comum, logo não podem ter mais nenhum ponto em comum, pois isso contraria o teorema 3.1.3. Então podemos considerar os pontos B e F incidentes na reta AE, os pontos G e H incidentes na reta AC e os pontos K e M incidentes na reta AL. De acordo com o teorema 3.1.3, as retas CE e AL têm um ponto em comum, sem perda de generalidade, podemos supor que é o ponto M, as retas CL e AE têm um ponto em comum, sem perda de generalidade, podemos supor que é o ponto F; e as retas EL e AC têm um ponto em comum, sem perda de generalidade, podemos supor que é o ponto G. Como estas retas também têm quatro pontos podemos considerar que os pontos D, J e I pertencem, respetivamente, às retas CE, CL e EL. De acordo com o teorema 3.1.11, não podem haver mais pontos neste modelo, pois já definimos os treze pontos. Como, de acordo com o teorema 3.1.10, cada reta tem exatamente quatro pontos e pelo axioma H_2, em dois pontos distintos incide exatamente numa reta, então definimos assim, com argumentos semelhantes àqueles que acabamos de usar, as restantes retas, que são treze de acordo com o teorema 3.1.11, $ADIJ$, $BGJM$, $BDHL$, $BCIK$, $DFGK$, $EHKJ$ e $FHIM$. Construímos assim o modelo ilustrado na figura 3.16

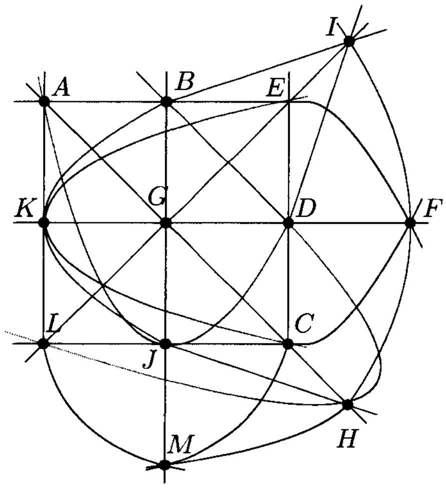


Figura 3.16: Um possível modelo de um plano projetivo de ordem três

Esta informação pode ser resumida na tabela 3.1.

	$ABEF$	$ACGH$	$ADIJ$	$AKLM$	$BCIK$	$BDHL$	$BGJM$	$CDEM$	$CFJL$	$DFGK$	$EGIL$	$EHJK$	$FHIM$
A	×	×	×	×									
B	×				×	×	×						
C		×			×			×	×				
D			×			×		×		×			
E	×							×			×	×	
F	×								×	×			×
G		×					×			×	×		
H		×				×						×	×
I			×		×						×		×
J			×				×		×			×	
K				×	×					×		×	
L				×		×			×		×		
M				×			×	×					×

Tabela 3.1: Tabela de incidência

A construção do modelo desta forma verifica todos os axiomas.

Observemos um fenómeno semelhante ao que aconteceu no modelo apresentado para o plano projetivo de ordem dois. Se no modelo anterior, que construímos para o plano projetivo de ordem três, retirarmos uma reta e os seus pontos, vamos obter um modelo que satisfaz o sistema axiomático da geometria dos nove pontos e doze retas. Por exemplo, e sem perda de generalidade, se retiramos a reta $IFMN$ e consequentemente os pontos I, F, M e N. Vamos obter um outro modelo formado pelos pontos A, B, C, D, E, G, J, L e K e pelas retas ABE, AKL, AGC, AJD, BGJ, BDL, CBK, CDE, CJL, DGK, EKJ e EGL (fig. 3.17).

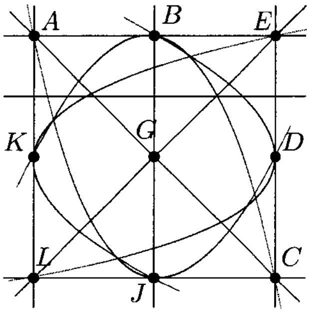


Figura 3.17

Será que existem planos projetivos de todas as ordens?

Podemos ver através das construções anteriores que existem os planos projetivos de ordem dois e três. Para nos ajudar a obter resposta à questão anterior teremos de recorrer aos teoremas seguintes. Estes teoremas não serão demonstrados, pois a sua demonstração não faz parte do âmbito deste trabalho. O primeiro é consequência da existência de corpos finitos de ordem q, onde $q = p^k$, para algum primo p. Uma descrição da construção destes planos projetivos pode ser encontrada no capítulo II do livro [HP73].

Teorema 3.1.14. *Existe um plano projetivo de ordem q para cada potência de primo q.*

O teorema seguinte, em sentido contrário, dá-nos valores de n para os quais não existe um plano projetivo de ordem n [HP73, capítulo III, teorema 3.6].

Teorema 3.1.15 (Teorema de Bruck-Ryser). *Seja n um número inteiro positivo. Se $n \equiv 1$ ou $2\,(mod 4)$, e não é a soma de dois quadrados, então não existe plano projetivo de ordem n.*

Consideremos os planos projetivos de ordem menor ou igual a 25. Aplicando o teorema 3.1.14, verificamos que existem os planos projetivos de ordem 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 23 e 25. Em relação às restantes possíveis ordens vamos ver se satisfazem o teorema 3.1.15 e chegamos à conclusão de que não existem os planos projetivos de ordem 6, 14, 21 e 22. Sobre os planos projetivos de ordem 10, 12, 15, 18, 20 e 24 estes dois teoremas nada nos dizem.

3.2 Quadrados latinos

Na presente secção iremos mostrar uma conexão entre planos projetivos finitos e quadrados latinos. Veremos a existência de uma equivalência entre planos projetivos de uma dada ordem e a existência de um determinado conjunto de quadrados latinos da mesma ordem, a que chamamos conjunto completo de quadrados latinos ortogonais dois a dois. Para ilustrar esta equivalência faremos detalhadamente a construção de um conjunto de quadrados latinos a partir de um plano projetivo e vice-versa. Para compreendermos melhor esta construção, vamos começar por definir quadrados latinos e quadrados latinos ortogonais dois a dois, dando um exemplo após cada definição.

Definição 3.2.1. *Um quadrado latino de ordem n é uma matriz $n \times n$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

- *todas as entradas são números inteiros entre 1 e n;*
- *em cada uma das linhas e das colunas não existem números repetidos.*

Exemplo 3.2.2. Quadrado latino de ordem cinco.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

Definição 3.2.3. *Sejam $S = [s_{ij}]$ e $T = [t_{ij}]$ dois quadrados latinos de ordem n. Dizemos que S e T são ortogonais se os pares ordenados (s_{ij}, t_{ij}) para $1 \leq i, j \leq n$, forem todos distintos.*

Exemplo 3.2.4. Quadrados latinos ortogonais dois a dois de ordem cinco.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

2	4	1	3	5
3	5	2	4	1
4	1	3	5	2
5	2	4	1	3
1	3	5	2	4

Uma forma simples de visualizar a definição é colocar o segundo quadrado ligeiramente sobreposto por cima do primeiro quadrado como podemos ver a seguir.

12	24	31	43	55
23	35	42	54	11
34	41	53	15	22
45	52	14	21	33
51	13	25	32	44

De seguida, enunciaremos um resultado que nos indica um majorante para o número de quadrados latinos ortogonais dois a dois de ordem $n \geq 3$.

Teorema 3.2.5. *Seja $t \geq 1$ um número natural e suponhamos que existe um conjunto de t quadrados latinos ortogonais dois a dois de ordem $n \geq 3$. Então $t \leq n - 1$.*

Demonstração:

Seja $\{s_1, s_2, \ldots, s_t\}$ um conjunto de quadrados latinos ortogonais dois a dois, dado. Suponhamos, sem perda de generalidade, que na primeira linha de cada quadrado latino os elementos estão ordenados de 1 a n. Consideremos ainda, as t entradas que se encontram na posição $(2, 1)$. Estas t entradas são distintas, caso contrário contradiz a definição 3.2.3. Nenhuma destas entradas pode ser igual a 1, de acordo com a definição 3.2.1, pois 1 é o elemento da posição $(1, 1)$. Então para as t entradas que se encontram na posição $(2, 1)$ só existem no máximo $n-1$ possibilidades. Assim $t \leq n - 1$. □

Se no teorema 3.2.5 $t = n - 1$, então o conjunto $\{s_1, s_2, \ldots, s_t\}$ diz-se um conjunto completo de quadrados latinos ortogonais dois a dois.

Exemplo 3.2.6. Conjunto completo de quadrados latinos ortogonais dois a dois de ordem cinco.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

2	4	1	3	5
3	5	2	4	1
4	1	3	5	2
5	2	4	1	3
1	3	5	2	4

3	1	4	2	5
4	2	5	3	1
5	3	1	4	2
1	4	2	5	3
2	5	3	1	4

4	3	2	1	5
5	4	3	2	1
1	5	4	3	2
2	1	5	4	3
3	2	1	5	4

Apresentaremos seguidamente um resultado que estabelece uma relação entre planos projetivos e quadrados latinos da mesma ordem.

Teorema 3.2.7. *Seja $n \geq 3$. Existe um plano projetivo de ordem n se e só se existir um conjunto completo de $n - 1$ quadrados latinos ortogonais dois a dois de ordem n.*

Não vamos apresentar aqui a demonstração do teorema, porque sai do âmbito deste trabalho. A sua demonstração encontra-se no livro [Rys63] de Herbert John Ryser (capítulo 7, teorema 4.1 – ver também o teorema 1.3). Mas para melhor compreender o teorema vamos apresentar a construção dum conjunto completo de dois quadrados latinos ortogonais de ordem três a partir do plano projetivo de ordem três, que construímos na secção 3.1 deste capítulo. Posteriormente faremos o inverso: partiremos de um conjunto completo de quadrados latinos ortogonais de ordem três (diferente do anterior) e construímos um plano projetivo de ordem três. Para fazer estas construções baseamo-nos na demonstração do teorema anterior e na demostração do teorema 1.3 que se encontra na mesma secção e capítulo do livro do teorema anterior.

O plano projetivo de ordem três, do exemplo 3.1.13 secção 3.1 deste capítulo, é constituído pelos pontos: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L e M e pelas retas: $ABEF, ACGH, ADIJ, AKLM, BCIK, BDHL, BGJM, CDEM, CFJL,$ $DFGK$, $EGIL$, $EHJK$, $FHIM$. Das retas anteriores escolhemos uma qualquer, por exemplo a reta $ABEF$, a que chamaremos r. Sabemos que por cada um dos pontos da reta r passam quatro retas distintas, a própria reta e outras três. Numeremos cada uma dessas três retas de 1 a 3, de forma arbitrária. Por exemplo, todas as retas que incidem no ponto A e distintas da reta r poderão ser numeradas da seguinte forma: $ACGH$ terá o número 1, $ADIJ$, o número 2 e $AKLM$, o número 3. Procederemos de forma análoga para todos os outros pontos da reta r. Nos quadros seguintes podemos ver uma forma de numerar as três retas distintas de r que incidem em cada um dos pontos A, B, E e F.

$ACGH$	1
$ADIJ$	2
$AKLM$	3

$BCIK$	1
$BDHL$	2
$BGJM$	3

$CDEM$	1
$EGIL$	2
$EHJK$	3

$CFJL$	1
$DFGK$	2
$FHIM$	3

Seguidamente construímos uma tabela de dupla entrada na qual colocaremos no cabeçalho os pontos da reta r e numa coluna auxiliar todos os pontos que não pertencem à reta r, em ambos os casos optámos por colocar os pontos por ordem alfabética. Tendo em consideração a numeração anteriormente atribuída a cada reta, preenchemos cada entrada da tabela colocando o número da reta, que incide nos pontos que se encontram em linha e em coluna. Por exemplo na entrada $(1,1)$ iremos escrever o número da reta que incide nos pontos A e C, ou seja 1, na entrada $(1,2)$ escreveremos o número da reta que incide nos pontos B e C, que é também 1. Faremos um raciocínio análogo para o preenchimento das restantes entradas da tabela.

	A	B	E	F
C	1	1	1	1
D	2	2	1	2
G	1	3	2	2
H	1	2	3	3
I	2	1	2	3
J	2	3	3	1
K	3	1	3	2
L	3	2	2	1
M	3	3	1	3

A partir desta tabela construímos uma matriz N, da qual constam somente os números da tabela.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Na matriz anterior vamos fazer permutações de linhas de modo a que as entradas das duas primeiras colunas sejam os pares ordenados $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$, por esta ordem. Com este objetivo vamos começar por permutar a segunda com a quarta linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente permutamos a quarta linha com a quinta linha. À matriz que obtivemos fazendo as permutações vamos chamar W.

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Com a terceira e quarta colunas da matriz W vamos construir duas matrizes 3×3, S e Q. Para construir a matriz S consideramos a coluna três. A primeira linha desta matriz é formada pelas primeiras três entradas da coluna três, a segunda linha pelas três entradas seguintes e a terceira linha pelas três últimas entradas, como podemos ver:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Para construir a matriz Q, seguimos um raciocínio análogo ao anterior, mas utilizaremos a quarta coluna da matriz W.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Observemos que as matrizes S e Q são quadrados latinos de ordem três.

1	3	2
2	1	3
3	2	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

Podemos facilmente verificar que estes dois quadrados latinos são ortogonais. É de salientar que se utilizássemos as colunas um e dois da matriz W e fizéssemos o mesmo processo que fizemos para as colunas três e quatro não iríamos obter quadrados latinos. No caso de utilizarmos a coluna um teríamos os números repetidos em linha e no caso de utilizarmos a coluna dois teríamos os números repetidos em coluna, não satisfazendo assim a definição de quadrado latino.

Vejamos o porquê de obter a partir de um plano projetivo de ordem $n = 3$ um conjunto de quadrados latinos ortogonais também de ordem $n = 3$. Sabemos que num plano projetivo de ordem $n = 3$, segundo o teorema 3.1.10, em cada ponto incidem exatamente quatro retas. Para construir a tabela escolheu-se, de forma arbitrária, uma das treze retas (foi escolhida a reta $ABEF$, mas poderia ter sido outra qualquer). Como em cada ponto dessa reta incidem outras três retas, numerámos estas últimas, também de forma arbitrária, com os números 1, 2 e 3. Esta forma de construção obriga a que nas entradas da tabela só apareçam os números 1, 2 e 3. Sabemos também, que num plano projetivo de ordem $n = 3$, em cada reta incidem exatamente quatro pontos, de acordo com teorema 3.1.9, o que pode ser observado na tabela. Vemos que, em cada coluna existem três entradas com o número 1, três com o número 2 e três com o número 3. Em cada coluna, as três entradas com o número 1 correspondem a três pontos de uma mesma reta que passa também pelo ponto do cabeçalho dessa coluna. O mesmo acontece para as entradas com os números 2 e 3. Reparemos ainda que, ao escolher duas quaisquer colunas da tabela, obtemos uma matriz com nove linhas e duas colunas; os pares ordenados que podemos ver em cada uma das nove linhas são todos distintos. Isto fica a dever-se ao facto de duas retas terem exatamente um ponto em comum, de acordo com teorema 3.1.3. De acordo com o método de construção fizeram-se permutações na matriz N de modo a obter uma matriz W em que nas duas primeiras colunas se obtiveram os pares ordenados $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, ..., $(3,3)$. A disposição das entradas da primeira coluna da matriz W implica que as matrizes S e Q não tenham duas entradas iguais em linha, pois os pares ordenados não se repetem em quaisquer duas colunas da matriz W. Pela mesma razão, a disposição das entradas da segunda coluna da matriz W implica que as matrizes S e Q não tenham duas entradas iguais em coluna. Assim a matriz S e Q são quadrados latinos. Estes quadrados latinos são ortogonais porque quando sobrepostos obtemos pares ordenados distintos.

Como dissemos anteriormente, vamos fazer o processo inverso. Partiremos de dois quadrados latinos ortogonais de ordem $n = 3$, diferentes dos anteriores, e chegaremos a um plano projetivo de ordem $n = 3$. Consideremos os seguintes quadrados latinos ortogonais:

1	2	3
3	1	2
2	3	1

2	1	3
1	3	2
3	2	1

A partir destes podemos considerar as seguintes matrizes:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Consideremos ainda as matrizes:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Com as matrizes R, T, V e Z vamos construir uma matriz U. Para construir a primeira coluna da matriz U vamos considerar a matriz R, nas primeiras três entradas colocamos os números que constam da primeira linha da matriz R, nas três entradas seguintes colocamos os números que constam da segunda linha da matriz e nas três últimas entradas os números que constam da terceira linha da matriz R. Para construir a segunda, terceira e quarta colunas da matriz U fazemos o processo análogo ao anterior, mas considerando as matrizes T, U e Z, respetivamente.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota 3.2.8. Notemos que se na matriz anterior escolhermos duas quaisquer colunas obtemos todos os pares ordenados que é possível fazer com os números 1, 2 e 3, sem repetição. Para justificar a afirmação anterior consideremos três possibilidades:

1. escolher a primeira coluna e outra coluna qualquer;
2. escolher a segunda e a terceira ou quarta colunas;
3. escolher as duas últimas colunas.

1. se escolhemos a primeira coluna, que é construída a partir da matriz R, em que cada linha tem o mesmo número (a primeira linha tem o número 1, a segunda linha tem o número 2 e terceira linha tem o número 3) e a segunda coluna que é construída a partir da matriz T, na qual os números 1, 2 e 3 não se repetem nas linhas, mas nas colunas, portanto os pares ordenados obtidos por entradas destas duas colunas vão ser sempre distintos. Escolhendo a primeira coluna e a terceira ou a primeira e a quarta colunas também vamos obter sempre pares ordenados distintos, pois a terceira e a quarta colunas são construídas a partir das matrizes V e Z, respetivamente, que são quadrados latinos formados com os números 1, 2 e 3.

2. se escolhemos a segunda e a terceira ou quarta colunas, aparecem todos os pares ordenados, pois como foi dito anteriormente, a segunda coluna é construída a partir da matriz T que tem o mesmo número em cada coluna e a terceira ou quarta colunas são construídas a partir das matrizes V e Z, respetivamente, que são quadrados latinos.

3. se escolhermos as duas últimas colunas aparecem todos os pares ordenados, pois estas são construídas a partir de quadrados latinos ortogonais.

Com base na matriz U vamos construir uma tabela na qual colocaremos no cabeçalho de cada coluna os pontos A, B, C e D, e numa coluna auxiliar os pontos E, F, G, H, I, J, L, M e N, a escolha dos pontos foi arbitrária e em ambos os casos optámos por colocar os pontos por ordem alfabética.

	A	B	C	D
E	1	1	1	2
F	1	2	2	1
G	1	3	3	3
H	2	1	3	1
I	2	2	1	3
J	2	3	2	2
L	3	1	2	3
M	3	2	3	2
N	3	3	1	1

Os pontos do plano projetivo de ordem três são aqueles que aparecem na tabela: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L, M e N. Vamos construir as retas do mesmo plano. Começamos por construir uma reta incidente nos pontos que se encontram no cabeçalho da tabela, que denominamos por $ABCD$. Para construir as restantes retas procederemos da seguinte forma: consideremos a primeira coluna. Construímos uma reta incidente no ponto A e em todos os pontos a que corresponde uma entrada 1, como estes são E, F e G denominamos a reta por $AEFG$. No ponto A e em todos os pontos a que corresponde uma entrada 2 construímos a reta que denominamos por $AHIJ$. Finalmente construímos a reta que incide no ponto A e em todos os pontos a que corresponde uma entrada 3, que denominamos por $ALMN$. Consideremos cada uma das outras colunas e por processo análogo ao anterior construímos as restantes retas. As retas que são obtidas com base nesta tabela são: $ABCD$, $AEFG$, $AHIJ$, $ALMN$, $BEHL$, $BFIM$, $BGJN$, $CEIN$, $CFJL$, $CGHM$, $DFHN$, $DEJM$ e $DGIL$. O plano projetivo de ordem $n = 3$ é formado pelos treze pontos e pelas treze retas atrás indicados.

Vamos seguidamente verificar que este plano que acabamos de construir é um plano projetivo e satisfaz os axiomas H_1, H_2, H_3 e H_4.

Axioma H_1: Existem pelo menos quatro pontos não colineares três a três.

Para verificar o axioma escolhemos quaisquer duas colunas, por exemplo a segunda e terceira colunas, a que correspondem respetivamente os pontos B e C. Seguidamente escolhemos duas linhas em que as respetivas entradas correspondam a pares ordenados em que a primeira e a segunda coordenada sejam diferentes, de modo a conseguir obter sempre quatro pontos não colineares três a três. Por exemplo, escolhendo as linhas que correspondem aos pontos E e F, obtemos os pares ordenados $(1, 1)$ e $(2, 2)$. Os pontos B, C e F não incidem na mesma reta e os pontos C, E e F também não incidem na mesma reta, devido ao processo de construção das retas. A única reta que incide nos pontos B e C é a reta $ABCD$, portanto nenhum dos pontos E ou F é colinear com B e C.

Axioma H_2: Existe pelo menos uma reta incidente com exatamente $n + 1$ pontos distintos.

Como $n = 3$ podemos reescrever o axioma do seguinte modo: existe pelo menos uma reta incidente com exatamente quatro pontos distintos.

A reta $ABCD$ que incide nos pontos que estão no cabeçalho tem quatro pontos, logo o axioma é verificado.

Axioma H_3: Dados dois pontos distintos, existe exatamente uma reta incidente em ambos.

Para verificar o axioma vamos tomar dois pontos distintos, quaisquer e temos três casos a considerar:

1. os dois pontos estão no cabeçalho;
2. um dos pontos está no cabeçalho e o outro ponto está na coluna auxiliar;
3. os dois pontos estão na coluna auxiliar.

Caso1: se os dois pontos estão no cabeçalho incide neles a reta $ABCD$ e não incide mais nenhuma de acordo com o método de construção.

Caso2: se um dos pontos está no cabeçalho e o outro ponto está na coluna auxiliar, o método de construção garante que só passa uma reta pelo ponto que está no cabeçalho e pelos três pontos da respetiva coluna que tenham a mesma entrada, logo o axioma é verificado.

Caso 3: suponhamos finalmente que os dois pontos estão na coluna auxiliar, e observemos o seguinte:

Nota 3.2.9. Reparemos que:

• cada linha da matriz U é constituída pelas entradas de uma determinada posição das matrizes R, T, V e Z. De facto,

$$U = \begin{bmatrix} r_{11} & t_{11} & v_{11} & z_{11} \\ r_{12} & t_{12} & v_{12} & z_{12} \\ r_{13} & t_{13} & v_{13} & z_{13} \\ r_{21} & t_{21} & v_{21} & z_{21} \\ r_{22} & t_{22} & v_{22} & z_{22} \\ r_{23} & t_{23} & v_{23} & z_{23} \\ r_{31} & t_{31} & v_{31} & z_{31} \\ r_{32} & t_{32} & v_{32} & z_{32} \\ r_{33} & t_{33} & v_{33} & z_{33} \end{bmatrix}$$

Por exemplo, a linha da tabela correspondente ao ponto J tem as entradas na posição $(2,3)$ destas matrizes, $r_{2,3} = 2$, $t_{2,3} = 3$, $v_{2,3} = 2$ e $z_{2,3} = 2$.

• Dois pontos da coluna auxiliar incidem numa única reta se e só se existir uma única coluna na tabela em que as entradas sejam iguais. Por exemplo, os pontos J e M incidem numa única reta porque na última coluna da tabela têm entrada 2, correspondente à reta $DEJM$.

Separemos ainda nos dois casos seguintes:

a. os dois pontos têm a entrada da primeira coluna igual;

b. os dois pontos têm a entrada da primeira coluna diferente.

Caso **a**: se os dois pontos têm a entrada da primeira coluna igual, existe uma única reta incidente no ponto A e nesses dois pontos. Este facto deve-se ao método utilizado na construção das retas. Dada a distribuição das entradas da matriz R, sabemos que os pontos correspondem em todas as matrizes a entradas da mesma linha. Como nas matrizes T, V e Z não há repetição de entradas na mesma linha sabemos que a reta é única.

Caso **b**: se os dois pontos têm a entrada da primeira coluna diferente, então temos novamente dois casos a considerar.

b1. os dois pontos têm a entrada da segunda coluna igual;

b2. os dois pontos têm a entrada da segunda coluna diferente.

Caso **b1**: como os dois pontos têm a entrada da segunda coluna igual, podemos concluir que existe uma reta que passa pelo ponto B e por esses dois pontos e que as entradas, da tabela, destes dois pontos se encontram na mesma coluna das matrizes R, T, V e Z. Não existem mais retas, pois por hipótese os pontos têm na tabela a entrada da primeira coluna diferente e a terceira e quarta coluna da tabela corresponde às matrizes V e Z que são quadrados latinos ortogonais e as entradas destes dois pontos encontra-se na mesma coluna destas matrizes, logo a terceira e quarta coluna da tabela têm de ser diferentes.

Caso **b2**: se os dois pontos têm a entrada da segunda coluna diferente temos também de considerar dois casos.

b2.1. os dois pontos têm a entrada da terceira coluna igual;

b2.2. os dois pontos têm as entradas da terceira coluna diferentes.

Caso **b2.1**: se os dois pontos têm a entrada da terceira coluna igual, então existe uma reta incidente no ponto C e nesses dois pontos. Por hipótese em cada uma das duas primeiras colunas as entradas são diferentes. As entradas da terceira e da quarta coluna também são diferentes, pois são obtidas a partir de quadrados latinos ortogonais, logo se fossem iguais, ao sobrepormos as matrizes iríamos ter pares ordenados iguais, o que contradiria a definição de quadrados latinos ortogonais. Portanto a reta incidente nos dois pontos é única.

Caso **b2.2**: se os dois pontos têm as entradas da terceira coluna diferentes, então a entrada da quarta coluna tem de ser igual. Vejamos porquê. Consideremos dois pontos, um de entrada (i,j) e outro de entrada (i',j'). Sabemos que as entradas dos dois pontos da primeira coluna da tabela são diferentes, o que quer dizer que na matriz R essas entradas estão em linhas diferentes (isto é, se $r_{ij} \neq r_{i'j'}$ então $i \neq i'$). Também sabemos que as entradas dos dois pontos da segunda coluna da tabela são diferentes, logo essas entradas na matriz T estão em colunas diferentes (isto é, se $t_{ij} \neq t_{i'j'}$ então $j \neq j'$). Como as entradas da terceira coluna dos pontos também são diferentes, as entradas v_{ij} e $v_{i'j'}$ são distintas. A matriz V é um quadrado latino e portanto a entrada v_{ij} tem de ser diferente das entradas $v_{ij'}$ e $v_{i'j}$. Analogamente a entrada $v_{i'j'}$ tem de ser diferente das entradas $v_{ij'}$ e $v_{i'j}$. Como as entradas são compostas apenas pelos números 1, 2 ou 3 a única forma de isto acontecer é termos uma igualdade nas entradas $v_{ij'}$ e $v_{i'j}$. As matrizes V e Z são quadrados latinos ortogonais, assim os pares ordenados $(v_{ij'}, z_{ij'})$ e $(v_{i'j}, z_{i'j})$ são distintos. Como os pares ordenados anteriores são distintos e as entradas $v_{ij'}$ e $v_{i'j}$ são iguais, então as entradas $z_{i'j}$ e $z_{ij'}$ também são distintas. Mas sendo a matriz Z um quadrado latino vemos analogamente que as entradas z_{ij} e $z_{i'j'}$ são iguais. Portanto as entradas dos pontos da quarta coluna da tabela são iguais. Podemos concluir que existe uma única reta incidente nesses dois pontos.

Axioma H_4: Dadas duas retas distintas, existe pelo menos um ponto incidente com ambas.

Para verificar este axioma tomemos quaisquer duas retas e consideremos dois casos:

1. uma das retas é a reta $ABCD$ e uma outra reta distinta desta;
2. as duas retas são distintas da reta $ABCD$.

Caso 1: a reta $ABCD$ é a reta incidente nos pontos A, B, C e D, do cabeçalho da tabela. Qualquer uma das outras retas, de acordo com o método de construção, incide num ponto do cabeçalho e nos três pontos dessa coluna que tenham uma mesma entrada. Assim a reta $ABCD$ e qualquer outra reta têm um ponto em comum, que é o ponto que está no cabeçalho. Por exemplo, se considerarmos a segunda coluna e todos os pontos que tenham entrada 3 obtemos a reta $BGJN$. Esta reta e a reta $ABCD$ têm o ponto B em comum.

Caso 2: se considerarmos duas retas distintas da reta $ABCD$, vamos ter dois casos:

a. as duas retas foram construídas a partir da mesma coluna;

b. as duas retas foram construídas a partir de diferentes colunas.

Caso **a**: se as retas foram construídas a partir da mesma coluna incidem ambas no ponto que está no cabeçalho dessa coluna, de acordo com o método de construção. Por exemplo, se considerarmos a terceira coluna e uma reta de entrada 1 e uma reta de entrada 2, temos as retas $CEIN$ e $CFJL$, que se intersetam no ponto C.

Caso **b**: se as duas retas foram construídas a partir de diferentes colunas, uma das retas corresponde a uma entrada x numa coluna e a outra reta a uma entrada y na outra coluna. Portanto o ponto de interseção é o ponto da coluna auxiliar ao qual corresponde, nas duas colunas, o par ordenado (x, y) (de acordo com a nota 3.2.8 este par ordenado aparece sempre e é único). Por exemplo, se considerarmos uma reta da primeira coluna com entrada 1 e uma reta da quarta coluna com entrada 3, o ponto de intersecção destas retas é o ponto ao qual corresponde o par ordenado $(1, 3)$, ou seja o ponto G.

3.3 Planos Projetivos Finitos e Códigos

A teoria dos códigos dedica-se a detetar e a corrigir erros que são introduzidos quando são transmitidas as mensagens. Tornou-se numa importante área de pesquisa utilizando resultados da geometria projetiva, teoria dos grupos, teoria dos corpos finitos, entre outras.

Nesta secção iremos partir dum plano projetivo e obter um código. Iremos trabalhar com códigos binários, ou seja, conjuntos de sequências de zeros e uns com um dado comprimento. Alguns códigos têm estrutura de espaço vetorial, como é o caso dos que vamos trabalhar, e podem ser definidos como vetores. A cada sequência chamamos palavra de código.

Os códigos binários são os códigos com mais aplicações e consequentemente os mais utilizados.

Vamos introduzir algumas definições da teoria dos códigos que servirão de base à construção de um código a partir de um plano projetivo.

Definição 3.3.1. *Um corpo é um conjunto F munido de duas operações binárias, a adição e a multiplicação, para o qual se verificam os seguintes axiomas.*

Sejam $a, b, c \in F$ quaisquer. Então:

- $a + b \in F$ *e* $a \times b \in F$ *(F é fechado para a adição e para a multiplicação);*
- $a + b = b + a$ *e* $a \times b = b \times a$ *(propriedade comutativa);*
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ *e* $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ *(propriedade associativa);*
- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ *(propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição)*
- *existem elementos distintos 0 e $1 \in F$ tais que, para qualquer $a \in F$, $0 + a = a$ (elemento neutro da adição), $1a = a$ (elemento neutro para a multiplicação);*
- *existe um elemento $-a \in F$ tal que $a + (-a) = 0$ (simétrico);*
- *se $a \neq 0$, então existe um elemento $a^{-1} \in F$ tal que $a \times a^{-1} = 1$ (inverso).*

Alguns exemplos de corpos que são muito conhecidos e trabalhados em matemática são o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$, conjunto dos reais $\mathbb{R}$ e o conjunto dos complexos $\mathbb{C}$.

Por exemplo o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ não é um corpo porque nem todos os números têm simétrico, como é o caso do número 2. O conjunto $\mathbb{Z}$ também não é um corpo, pois nem todos os números têm inverso, como exemplo o número 3.

Definição 3.3.2. *Designamos por F_2 o conjunto $\{0, 1\}$ munido pelas operações de adição e multiplicação definidas pelas tabelas seguintes.*

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Podemos verificar que o conjunto F_2 satisfaz todas as condições da definição 3.3.1, portanto é um corpo. Este corpo é menos conhecido, mas é extremamente útil na teoria dos códigos.

Definição 3.3.3. *Seja F um corpo. Um espaço vetorial (ou espaço linear) sobre F é um conjunto V (não vazio) munido de duas operações, uma a que chamamos adição de vetores e outra multiplicação por escalares (elementos de F), satisfazendo as seguintes condições:*

Sejam $u, v, w \in V$ e $\lambda, \mu \in F$, quaisquer. Então:

- *$u + v \in V$;*
- *$(u + v) + w = u + (v + w)$;*
- *$u + v = v + u$;*
- *existe um elemento $0 \in V$ com a propriedade $0 + v = v$, para qualquer $v \in V$;*
- *existe um elemento de V chamado $-u$ tal que $u + (-u) = 0$;*
- *$\lambda v \in V$;*
- *$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v, (\lambda + \mu) u = \lambda u + \mu u$;*
- *$(\lambda\mu) u = \lambda(\mu u)$;*
- *se 1 é o elemento neutro para a multiplicação em F, então $1u = u$.*

Um espaço vetorial conhecido é $\mathbb{R}^2$, munido das operações usuais. Em geral $\mathbb{R}^n$ também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ pois satisfaz todas as condições acima definidas. Isto é válido para qualquer corpo F ou seja, F^n é um espaço vetorial sobre F. No contexto da teoria dos códigos, que nos interessa, vamos considerar o espaço vetorial ${F_2}^n$.

Definição 3.3.4. *Um subconjunto C (não vazio) de um espaço vetorial V sobre F é um subespaço vetorial de V se e só se satisfaz a condição:*

$$\text{se } u, v \in C \text{ e } \lambda, \mu \in F \text{ então } \lambda u + \mu v \in C.$$

Exemplo 3.3.5. Consideremos o espaço vetorial ${F_2}^3$. Podemos verificar que, como conjunto,

$${F_2}^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,1)\}.$$

Consideremos o seguinte subconjunto do espaço vetorial ${F_2}^3$:

$$C = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1)\}.$$

Facilmente verificamos que o conjunto C satisfaz a definição 3.3.4 e portanto é um subespaço vetorial de ${F_2}^3$.

Definição 3.3.6. *Seja V um espaço vetorial sobre F e sejam $v_1, \ldots, v_r$ vetores de V. Dizemos que um vetor $v \in V$ é combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_r$ se existem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in F$ tais que*

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r.$$

Definição 3.3.7. *Seja V um espaço vetorial sobre F. Um conjunto de vetores $\{v_1, \ldots, v_r\}$ em V é linearmente independente se para quaisquer $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in F$,*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0.$$

Exemplo 3.3.8. O conjunto de vetores $\{(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}$ não é linearmente independente, pois o terceiro vetor é obtido a partir da soma dos dois primeiros. Portanto podemos escrever

$$1 \times (0,0,1) + 1 \times (0,1,0) + 1 \times (0,1,1) = (0,0,0).$$

Por outro lado, podemos ver que o conjunto de vetores $\{(0,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é linearmente independente.

Definição 3.3.9. *Seja V um espaço vetorial sobre F e seja $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ um subconjunto de V não vazio. O espaço vetorial gerado por S é definido por:*

$$\langle S \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F\}.$$

Definição 3.3.10. *Seja V um espaço vetorial sobre F. Um subconjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ de V é designado uma base de V se $V = \langle B \rangle$ e B é linearmente independente.*

Exemplo 3.3.11. Consideremos o subconjunto $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de ${F_2}^3$. Este conjunto de vetores gera o espaço vetorial ${F_2}^3$ e, como já foi referido atrás, é linearmente independente, logo é uma base deste espaço vetorial.

Definição 3.3.12. *A dimensão de um espaço vetorial V é o número de elementos de uma base.*

Definição 3.3.13. *Um código linear binário, de comprimento n, é um subespaço vetorial de ${F_2}^n$.*

Definição 3.3.14. *Uma matriz geradora G para um código linear C é uma matriz cujas linhas formam uma base para C.*

Definição 3.3.15. *Seja π um plano projetivo finito. Um código binário C associado a π é um espaço vetorial sobre F_2 gerado pelas linhas de uma matriz de incidência de π.*

Iremos exemplificar como a partir de um plano projetivo finito podemos obter um código. Comecemos por introduzir a definição de matriz de incidência.

Definição 3.3.16. *Seja π um plano projetivo finito de ordem n. Uma matriz de incidência $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ de π é uma matriz $(n^2+n+1) \times (n^2+n+1)$, onde as retas são representadas pelas colunas e os pontos são representados linhas, de tal forma que $a_{ij} = 1$ se o ponto correspondente à linha i pertence à reta correspondente à coluna j; caso contrário $a_{ij} = 0$.*

Consideremos a tabela de incidência construída no plano projetivo de ordem $n = 2$, dada no exemplo 3.1.12 da secção 3.1 deste capítulo. As retas estão representadas no cabeçalho e os pontos estão representados na coluna auxiliar. Nesta, o número 1 significa que o ponto pertence à reta e o número 0 significa que o ponto não pertence à reta.

	ABF	ACE	ADG	BCG	BDE	CDF	EFG
A	1	1	1	0	0	0	0
B	1	0	0	1	1	0	0
C	0	1	0	1	0	1	0
D	0	0	1	0	1	1	0
E	0	1	0	0	1	0	1
F	1	0	0	0	0	1	1
G	0	0	1	1	0	0	1

A cada linha da tabela podemos fazer corresponder um vetor. Assim, por exemplo, o ponto A pode ser representado pelo vetor $(1,1,1,0,0,0,0)$. Cada vetor é formado por 7 componentes, cada uma das quais é 0 ou 1. Cada vetor dado, por cada um dos sete pontos, tem exatamente três componentes de valor 1, isto acontece porque cada reta do plano projetivo de ordem dois tem exatamente três pontos.

A partir da tabela e de acordo com a definição 3.3.16 obtemos a seguinte matriz de incidência.

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Procuramos, de acordo com a definição 3.3.15, o código C_2, associado ao plano projetivo de ordem dois, gerado pelas linhas da matriz M_2. Podemos observar que as linhas da matriz M_2 não são linearmente independentes, por exemplo, a linha 1 é igual à soma das linhas 2, 3 e 4. Por uma questão de simplicidade procuramos uma matriz G_2 geradora do código C_2, cujas linhas formam uma base de C_2. Para obter a matriz G_2 realizaremos operações elementares entre as linhas da matriz M_2. Por exemplo a operação $L_2 + L_6 \longrightarrow L_2$ significa que adicionamos as linhas 2 e 6 da matriz M_2 e vamos colocar o resultado na linha 2 da matriz seguinte. Como estamos a trabalhar em F_2 utilizamos as operações da definição 3.3.2, assim (1001100) + (1000011) = (0001111).

Vamos explicar mais detalhadamente como obter a matriz G_2 a partir da matriz M_2. Começamos por realizar sucessivamente as operações na matriz M_2:

$L_6 \leftrightarrow L_1$

$L_5 \leftrightarrow L_2$

$L_4 \leftrightarrow L_3$

e obtemos a matriz seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora nesta matriz vamos realizar as operações:

$L_4 \leftrightarrow L_5$
$L_7 \leftrightarrow L_6$

e obtemos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir desta última matriz vamos sucessivamente realizar as operações seguintes:
$L_4 + L_1 \longrightarrow L_4$
$L_7 + L_1 \longrightarrow L_7$
e obtemos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seguidamente vamos realizar a operação:
$L_7 + L_2 \longrightarrow L_7$
obtendo a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nesta última matriz realizamos a operação:
$L_7 + L_3 \longrightarrow L_7$

e obtemos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente realizamos sucessivamente as operações:

$L_2 + L_5 \longrightarrow L_5$
$L_3 + L_5 \longrightarrow L_5$
$L_6 + L_5 \longrightarrow L_5$
$L_3 + L_6 \longrightarrow L_6$
$L_4 + L_6 \longrightarrow L_6$

e obtemos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obtivemos uma matriz em que as três últimas linhas são nulas. As linhas não nulas desta matriz formam a matriz G_2.

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota 3.3.17. As operações elementares que realizámos para obter a matriz G_2, em álgebra linear designam-se por método de Gauss.

Como as linhas da matriz G_2 formam uma base do código, sabemos que o código C_2 gerado tem dimensão 4, de acordo com a definição 3.3.12. Por esta razão o código tem $2^4 = 16$ palavras. As 16 palavras do código são todas as combinações lineares das linhas da matriz G_2, não esquecendo que todas as operações são realizadas em F_2.

As 16 palavras do código são:

0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

O código C_2 que obtivemos é um código binário de acordo com a definição 3.3.13.

Definição 3.3.18. *1. Se dois vetores $(v_1, \dots, v_n)$ e $(w_1, \dots, w_n)$, satisfazem a condição $v_1w_1 + \cdots + v_nw_n = 0$ dizemos que os vetores são ortogonais.*

2. O dual de um código C é um código $C^{\perp}$ definido por:

$$C^{\perp} = \{(v_1, \dots, v_n) \in F_2^n : \forall (w_1, \dots, w_n) \in C, v_1w_1 + \cdots + v_nw_n = 0\}.$$

Definição 3.3.19. *Uma matriz de paridade H para um código linear C é uma matriz geradora para o dual do código $C^{\perp}$.*

Definição 3.3.20. *Seja $r \geq 2$. Um código binário de comprimento $n = 2^r - 1$, com matriz de paridade H cujas colunas são compostas por todos os vetores não nulos de ${F_2}^r$ é chamado um código binário de Hamming de comprimento $2^r - 1$.*

A matriz seguinte é um exemplo de uma matriz paridade para o código definido anteriormente:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Facilmente verificamos que as linhas desta matriz H são ortogonais a todas as palavras deste código e de acordo com a definição 3.3.19, esta é uma matriz geradora do código dual.

Como as colunas de H são todos os elementos não nulos de ${F_2}^3$, por definição este é um código de Hamming. Este código é conhecido como um código de Hamming (7,4), em que 7 significa o comprimento de cada palavra e 4 a dimensão do código.

Os códigos de Hamming são uma família importante de códigos porque são particularmente eficientes quando queremos detetar e corrigir erros. São códigos lineares que podem ser definidos sobre um corpo finito, o exemplo que apresentamos foi um código definido sobre F_2.

A partir de um plano projetivo de ordem três também se pode obter um código, que designaremos por C_3. O modo como se obtém o código é semelhante ao anterior mas existe uma diferença que veremos mais à frente.

Consideremos a tabela de incidência obtida a partir do exemplo 3.1.13 da secção 3.1 deste capítulo.

	$ABEF$	$ACGH$	$ADIJ$	$AKLM$	$BCIK$	$BDHL$	$BGJM$	$CDEM$	$CFJL$	$DFGK$	$EGIL$	$EHJK$	$FHIM$
A	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
C	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
D	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
E	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
F	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
G	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
H	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
I	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
J	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
K	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
L	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
M	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1

A partir da tabela obtemos a matriz de incidência.

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando operações elementares entre as linhas da matrizM_3 iremos obter uma matriz geradora G_3 de um código. Um exemplo de uma matriz geradora pode ser a seguinte matriz:

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz G_3 tem 12 linhas linearmente independentes, logo o código gerado tem dimensão 12. Gera um código de $2^{12} = 4096$ palavras. As 4096 palavras do código são todas as possibilidades de adições entre as linhas da matriz G_3, não esquecendo que estas adições são realizadas em F_2.

Este código de 4096 palavras que se obtém não é um código de Hamming, como aconteceu no primeiro exemplo. De acordo com a definição 3.3.20 um código de Hamming tem comprimento $n = 2^r - 1$ e este código de comprimento 13 não pode ser obtido dessa forma.

Como foi dito na secção 3.1, não se sabe se existem planos projetivos finitos de ordem n, para alguns valores de n. Recorrendo à teoria dos códigos, e devido à relação entre os planos projetivos finitos e os códigos binários foi possível mostrar que não existe nenhum plano projetivo de ordem 10, questão que estava em aberto há muito tempo. Isto resultou de um extenso trabalho com a contribuição de muitos matemáticos e culminou em 1989 no artigo [LTS89] de Lam, Thiel e Swiercz. Estes matemáticos recorreram a uma pesquisa exaustiva de diferentes casos com o auxílio de computadores.

3.4 Espaços projetivos finitos

Vamos agora ver uma generalização dos planos projetivos finitos. Embora este sistema axiomático não limite o número de dimensões, os exemplos que aqui estudamos incidem principalmente no espaço tridimensional. Nesta geometria, para além dos termos indefinidos que temos utilizado até agora, vamos utilizar um termo definido a partir destes, que é o termo plano. Como nos axiomas nos vamos referir a este termo, comecemos por introduzir a sua definição.

Definição 3.4.1. *Dados um ponto R e uma reta s não incidente no ponto R, ao conjunto de todos os pontos pertencentes às retas que passam pelo ponto R e intersetam a reta s é chamado plano definido pelo ponto R e pela reta s.*

Consideremos agora os axiomas.

Axiomas:

Axioma I_1: Se A e B são pontos distintos, existe, no mínimo uma reta incidente em ambos os pontos A e B.

Axioma I_2: Se A e B são pontos distintos, não existe mais do que uma reta incidente em ambos os pontos.

Axioma I_3: Se E, C, B e D são quatro pontos não colineares três a três e existe um ponto A tal que os pontos A, E e C são colineares e os pontos A, B e D são colineares, então existe um ponto F tal que os pontos E, B e F são colineares e os pontos C, D e F são colineares (fig. 3.18).

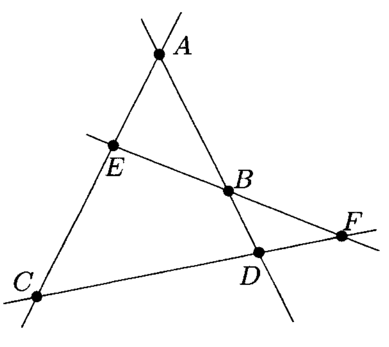


Figura 3.18

Axioma I_4: Existe, no mínimo uma reta.

Axioma I_5: Nem todos os pontos estão na mesma reta.

Axioma I_6: Existem, no mínimo três pontos em cada reta.

Axioma I_7: Nem todos os pontos estão no mesmo plano.

Axioma I_8: Existe uma reta com $n + 1$ pontos.

Com base nestes axiomas demostraremos as próximas afirmações.

Teorema 3.4.2. *Dois pontos distintos incidem exatamente numa reta.*

Demonstração:

Sejam P e Q dois pontos distintos dados. De acordo com os axiomas I_1 e I_2 existe exatamente uma reta incidente em ambos. □

Teorema 3.4.3. *Se os pontos R e S pertencem à reta PQ, então os pontos P e Q pertencem à reta RS.*

Demonstração:

Sejam R e S dois pontos distintos pertencentes à reta PQ. De acordo com o teorema 3.4.2 existe exatamente uma reta incidente nos pontos R e S, a reta RS. As retas RS e PQ representam a mesma reta, pois caso contrário obteríamos uma contradição com o axioma I_2. Assim os pontos P e Q pertencem à reta RS. □

Teorema 3.4.4. *Duas retas distintas não têm mais do que um ponto em comum.*

Demonstração:

Sejam r e s duas retas distintas. Suponhamos, com vista a um absurdo, que as retas r e s incidem em dois pontos P e Q distintos (fig. 3.19).

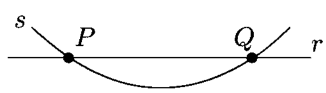


Figura 3.19

Se P e Q são pontos distintos, pelo teorema 3.4.2, existe exatamente uma reta incidente em ambos os pontos, logo as retas r e s são coincidentes. Isto é absurdo, porque as retas dadas são distintas. Portanto duas retas distintas não têm mais do que um ponto em comum. □

Teorema 3.4.5. *Se P e Q são dois pontos que estão num plano π, então todos os pontos da reta PQ estão no plano π.*

Demonstração:

Seja π um plano e seja R um ponto e s uma reta tais que π é definido pelo ponto R e pela reta s. Dados dois pontos P e Q do plano π, podemos ter cinco casos, qualquer outro será análogo a estes.

1. Os pontos P e Q pertencem à reta s.

2. Um dos pontos P ou Q coincide com o ponto R.

3. A reta PQ incide no ponto R.

4. Os pontos P, Q e R são não colineares e o ponto P pertence à reta s e o ponto Q não pertence à reta s.

5. Os pontos P, Q e R são não colineares e os pontos P e Q não pertencem à reta s.

Nos casos 1, 2 e 3 pela definição de plano, todos os pontos da reta PQ estão no plano π.

Caso 4: Como o ponto Q pertence ao plano, a reta RQ interseta a reta s num ponto M, por definição. Seja T um ponto qualquer da reta PQ (fig. 3.20). Aplicando o axioma I_3 aos pontos Q, M, R, P e T, existe um ponto J tal que

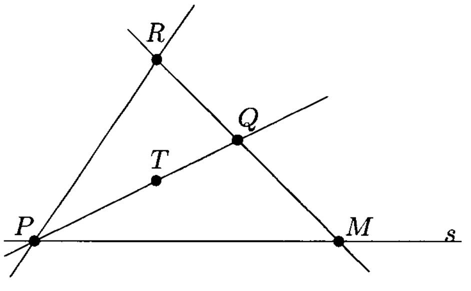


Figura 3.20

os pontos M, P e J são colineares e os pontos R, T e J são colineares, isto é, as retas RT e MP têm o ponto J em comum. Como as retas MP e s são a mesma, o ponto T pertence ao plano por definição (fig. 3.21).

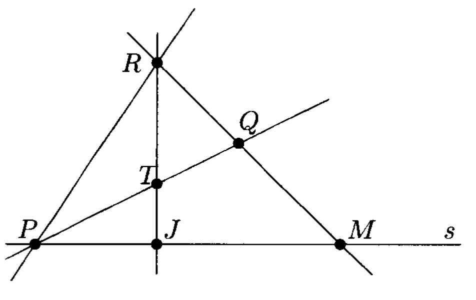


Figura 3.21

Caso 5: As retas PR e QR intersetam a reta s nos pontos M e N, respetivamente, por definição de plano. Aplicando o axioma I_3 aos pontos R, P, M, Q e N existe um ponto S comum às retas PQ e MN (fig. 3.22).

Estamos nas condições do caso anterior pois a reta PQ tem um ponto na reta s, então todos os seus pontos pertencem ao plano. □

Lema 3.4.6. *Seja π o plano definido por um ponto R e uma reta s. Se P e Q são pontos do plano π, então a reta PQ interseta a reta s.*

Demonstração:

As retas RQ e PR intersetam a reta s em dois pontos N e M, respetivamente, por definição de plano. Aplicando o axioma I_3 aos pontos R, Q, N, P e M existe

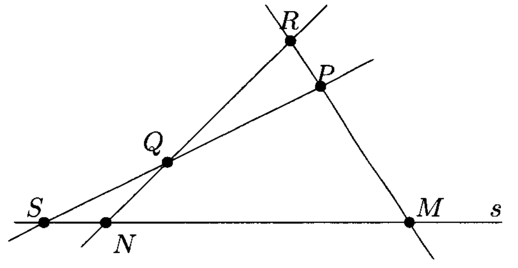


Figura 3.22

um ponto S tal que os pontos Q, P e S são colineares e os pontos N, M e S são colineares, isto é, as retas QP e NM (ou seja a reta s) têm um ponto S em comum. Portanto a reta PQ interseta a reta s. □

Teorema 3.4.7. *Quaisquer duas retas no mesmo plano têm um único ponto em comum.*

Demonstração:

Seja π o plano definido pela reta s e pelo ponto R. Sejam dadas duas retas r e t do plano π. Podemos ter dois casos:

1. uma das retas coincide com a reta s;

2. as retas r e t são distintas da reta s.

Caso 1: suponhamos que a reta r coincide com a reta s. A reta t tem no mínimo três pontos pelo axioma I_6. Sejam Q e P dois desses pontos. As retas RQ e RP intersetam a reta s nos pontos N e M respetivamente, por definição de plano. Aplicando o axioma I_3 aos pontos R, Q, N, P e M existe um ponto J tal que os pontos Q, P e J são colineares e os pontos N e M e J são colineares, isto é as retas t e s têm um ponto J em comum (fig. 3.23).

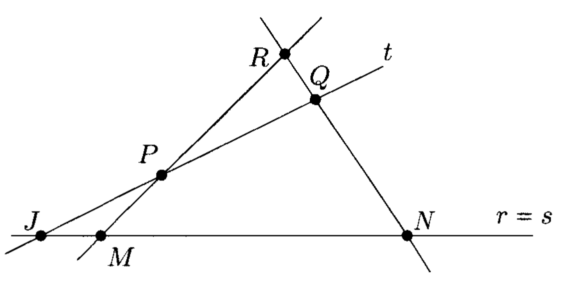


Figura 3.23

Caso 2: As retas r e t incidem em pelo menos três pontos cada. Sejam A e B dois pontos da reta r e C e D dois pontos da reta t. As retas r, AC e BD intersetam a reta s em pontos S, N e M, respetivamente, pelo lema 3.4.6. Aplicando o axioma I_3 aos pontos S, A, B, N e M, existe um ponto F talque os pontos A, N e F são colineares e os pontos B, M e F são colineares (fig. 3.24).

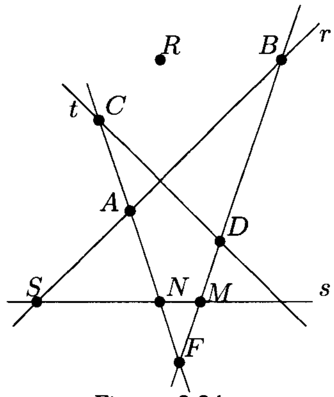


Figura 3.24

Aplicando novamente o axioma I_3 aos pontos F, A, C, B e D, existe um ponto J tal que os pontos A, B e J são colineares e os pontos C, D e J são colineares, isto é as retas r e t têm um ponto em comum (fig. 3.25).

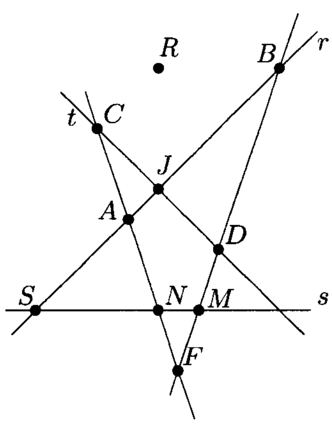


Figura 3.25

□

Definição 3.4.8. *Dados um plano π e um ponto P não incidente no plano π, ao conjunto de todos os pontos que incidem nas retas que passam pelo ponto P e que intersetam o plano π é chamado espaço tridimensional Γ definido pelo ponto P e pelo plano π.*

Teorema 3.4.9. *Seja α um plano qualquer e seja β um plano definido por uma reta s e por um ponto Q. Se o ponto Q e a reta s estiverem sobre o plano α então os planos α e β são coincidentes.*

Demonstração:

Suponhamos que o ponto Q e a reta s estão sobre o plano α. Seja A um ponto qualquer do plano α. Como o ponto Q está sobre o plano α, todos os pontos da reta AQ, de acordo com o teorema 3.4.5, estão sobre o plano α. As retas s e AQ intersetam-se num ponto, segundo o teorema 3.4.7. O ponto A está sobre uma reta que incide no ponto Q e interseta a reta s, por definição de plano β, o ponto A está sobre o plano β.

Seja C um ponto qualquer do plano β. Por definição de plano, a reta CQ interseta a reta s num ponto D. A reta s está sobre o plano α, portanto o ponto D é um ponto do plano α. Segundo o teorema 3.4.5, como o ponto D incide no plano α, todos os pontos da reta QD estão sobre α. Logo em particular o ponto C incide em α.

Concluímos assim que os planos α e β são coincidentes.

□

Teorema 3.4.10. *Se dois planos distintos α e β têm dois pontos A e B distintos em comum, então os pontos comuns aos planos α e β são exatamente os pontos da reta AB.*

Demonstração:

Sejam α e β dois planos distintos e A e B dois pontos distintos sobre ambos os planos. De acordo com o teorema 3.4.5, todos os pontos da reta AB estão sobre ambos os planos α e β. Logo os planos α e β têm em comum a reta AB. Suponhamos que existe um ponto C comum aos planos α e β, mas não incidente na reta AB. Aplicando o teorema 3.4.9, o plano α e o plano β são coincidentes, o que é impossível pois os planos α e β são distintos. Portanto os planos α e β só têm em comum a reta AB.

□

Teorema 3.4.11. *Se A e B são dois pontos distintos de um espaço tridimensional Γ, então todos os pontos sobre a reta AB estão no espaço Γ.*

Demonstração:

Consideremos um espaço tridimensional Γ definido por um plano π e por um ponto P. Sejam A e B dois pontos do espaço tridimensional Γ. Podemos ter cinco casos, qualquer outro será análogo a estes:

1. os pontos A e B pertencem no plano π;
2. um dos pontos coincide com o ponto P;
3. a reta incidente nos pontos A e B contém o ponto P.
4. os pontos A, B e P são não colineares, e o ponto A pertence ao plano π e o ponto B não está sobre o plano π.
5. os pontos A, B e P são não colineares e não estão sobre o plano π.

No caso 1 os pontos A e B pertencem ao plano π, então pelo teorema 3.4.5 todos os pontos da reta AB pertencem ao plano π, logo pertencem ao espaço tridimensional Γ.

Nos casos 2 e 3, como consequência da definição de espaço tridimensional Γ, todos os pontos da reta AB estão no espaço tridimensional Γ.

No caso 4, a reta PB interseta o plano π num ponto N, por definição. Seja T um ponto qualquer da reta AB. Pretendemos provar que o ponto T pertence ao espaço tridimensional Γ. Aplicando o axioma I_3 aos pontos B, N, P, A e T existe um ponto J tal que os pontos N, A e J são colineares e os pontos P, T e J são colineares (fig. 3.26). O ponto J da reta NA pertence ao plano pelo

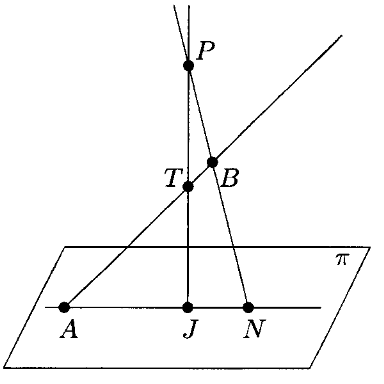


Figura 3.26

teorema 3.4.5. O ponto T como é colinear com os pontos P e J pertence ao espaço tridimensional Γ por definição. Assim todos os pontos sobre a reta AB estão no espaço Γ.

No caso 5, as retas PA e PB intersetam o plano π em dois pontos N e M, por definição de espaço tridimensional Γ. Todos os pontos da reta MN pertencem ao plano π segundo o teorema 3.4.5. Aplicando o axioma I_3 aos pontos P, A, N, B e M existe um ponto S comum às retas AB e MN (fig. 3.27).

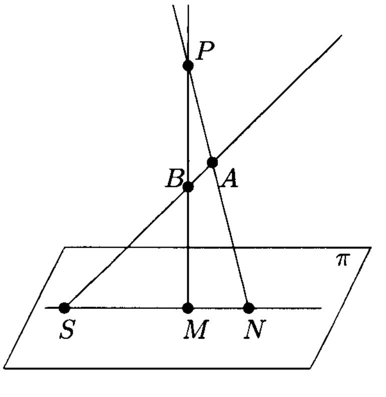


Figura 3.27

Estamos nas condições do caso anterior pois a reta AB tem um ponto na reta MN, logo no plano π, então todos os pontos da reta AB estão no espaço tridimensional Γ. □

Corolário 3.4.12. *Se um espaço tridimensional Γ é definido por um ponto P e por um plano π, então o plano π e qualquer reta do espaço tridimensional Γ, não contida no plano π, têm exatamente um ponto em comum.*

Demonstração:

Seja r uma reta do espaço tridimensional Γ que não está contida no plano π. Sejam A e B dois pontos da reta r. Podemos ter três casos:

1. se um dos pontos A ou B estiver sobre o plano π, então o plano π e a reta r intersetam-se.
2. se a reta r incide no ponto P, por definição de espaço tridimensional Γ, a reta r interseta o plano π.
3. se nem o ponto A nem o ponto B estão sobre o plano π e a reta r não incide no ponto P estamos no caso 5 da demonstração anterior. Analisando-a podemos ver que o plano π e a reta r intersetam-se no ponto S aí referido.

Suponhamos, com vista a um absurdo, que a reta r e o plano π têm dois pontos S e Q em comum. De acordo com o teorema 3.4.5 todos os pontos da reta SQ estão contidos no plano π. Mas a reta r e SQ são a mesma pelo teorema 3.4.2, logo a reta r está contida no plano π, o que é absurdo pois supusemos que a reta r não está sobre o plano π. Portanto o plano π e qualquer reta do espaço tridimensional Γ, não contida no plano π, têm exatamente um ponto em comum. □

Corolário 3.4.13. *Se um espaço tridimensional Γ é definido por um ponto P e por um plano π, então o plano π e qualquer outro plano do espaço tridimensional Γ têm exatamente uma reta em comum.*

Demonstração:

Seja π o plano definido por um ponto Q e por uma reta t. Seja α um plano contido no espaço tridimensional Γ distinto de π. Existe uma reta s e um ponto R, tais que o plano α é o conjunto dos pontos definidos pelas retas que incidem no ponto R e intersetam a reta s. A reta s incide, no mínimo, em três pontos de acordo com o axioma I_6. Consideremos dois desses pontos, M e S. Construímos as retas MR e RS. Assim existem no plano α pelo menos três retas que não são concorrentes num mesmo ponto. De acordo com o corolário 3.4.12, cada uma destas retas tem exatamente um ponto em comum com o plano π. Como as três retas não concorrem num mesmo ponto, garantimos a existência de pelo menos dois pontos A e B do plano α incidentes no plano π. Como os pontos A e B pertencem aos planos α e π, aplicando o teorema 3.4.10, estes os planos têm exatamente a reta AB em comum. □

Teorema 3.4.14. *Se um plano α e uma reta s, não contida no plano α, estão no mesmo espaço tridimensional Γ, então o plano α e a reta s têm exatamente um ponto em comum.*

Demonstração:

Consideremos um espaço tridimensional Γ, determinado por um plano π e por um ponto P. Sejam α um plano e s uma reta deste espaço tridimensional Γ, tal que a reta s não está contida no plano α. Podemos ter dois casos:

1. α é um plano coincidente com o plano π;
2. α é um plano distinto do plano π.

Caso 1: se α é um plano coincidente com o plano π, pelo corolário 3.4.12, o plano α e a reta s têm exatamente um ponto em comum.

Caso 2: se α é um plano distinto do plano π, de acordo com o corolário 3.4.13, o plano α e o plano π têm uma reta r em comum (fig. 3.28).

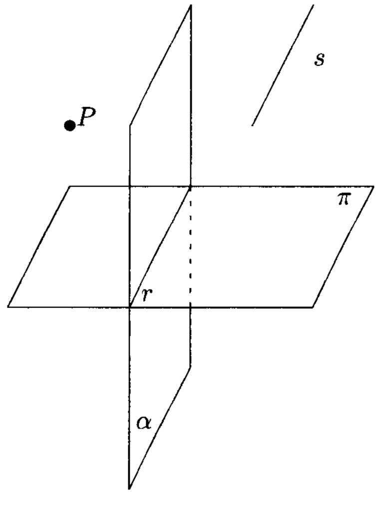


Figura 3.28

Seja A um ponto qualquer do plano α que não pertence à reta r. Temos dois casos:

a. o ponto A pertence à reta s;

b. o ponto A não pertence à reta s.

Caso **a**: se o ponto A pertence à reta s, então o plano α e a reta s têm um ponto em comum, como queríamos provar.

Caso **b**: consideremos o plano β definido pela reta s e pelo ponto A. O plano β interseta o plano π numa reta t, de acordo com o corolário 3.4.13. As retas r e t são distintas. Ambas pertencem ao plano π tendo um ponto B em comum, segundo o teorema 3.4.7. A reta AB está contida no plano α, de acordo com o teorema 3.4.5. A reta t incide no ponto B e está contida no plano β, logo o ponto

B é um ponto do plano β. Assim a reta AB está contida no plano β, logo as retas s e AB, de acordo com o teorema 3.4.7 têm um ponto em comum. Portanto a reta s interseta o plano α. Não existem mais pontos em comum entre a reta s e o plano α, pois se existissem a reta estaria contida no plano, pelo teorema 3.4.5, o que contradizia o enunciado. □

Teorema 3.4.15. *Num espaço projetivo de ordem n todas as retas têm exatamente $n+1$ pontos.*

Demonstração:

Seja r uma reta qualquer do espaço projetivo. De acordo com o axioma I_8, existe uma reta s com $n+1$ pontos. Se as retas r e s são coincidentes, então a reta r tem $n+1$ pontos. Mas se as retas r e s são distintas, então temos de considerar dois casos:

1. as retas r e s estão no mesmo plano;

2. as retas r e s são não complanares.

Caso 1: como as retas r e s estão num mesmo plano, segundo o teorema 3.4.7, intersetam-se num ponto P. Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_n$ os restantes pontos da reta s. De acordo com o axioma I_6, sabemos que existe um ponto R_1, distinto do ponto P, na reta r. Também de acordo com o axioma I_6, sabemos que existe um ponto T na reta R_1S_1, distinto dos pontos R_1 e S_1. Seja i um inteiro tal que $2 \leq i \leq n$. Aplicando o axioma I_3 aos pontos S_1, R_1, T, P e S_i, existe um ponto R_i comum às retas PR_1 e TS_i (fig. 3.29).

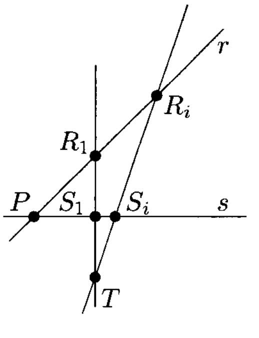


Figura 3.29

Conseguimos assim garantir a existência de pontos $R_1, \ldots, R_n$ distintos do ponto P. Vejamos que estes pontos são distintos entre si. Consideremos pontos R_i e R_j, com $i \neq j$ (fig. 3.30). Suponhamos, com vista a absurdo, que os pontos R_i e R_j são o mesmo. Então as retas TR_i e TR_j são coincidentes. Os pontos S_i e S_j incidem nas retas TR_i e s, logo, de acordo com os axiomas I_1 e I_2, as retas s e TR_i são a mesma. O que é absurdo, pois o ponto T não incide na reta s. Portanto, podemos concluir que a reta r tem $n+1$ pontos (fig. 3.31).

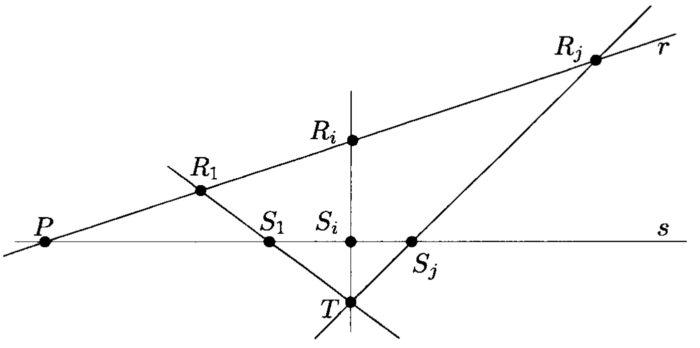


Figura 3.30

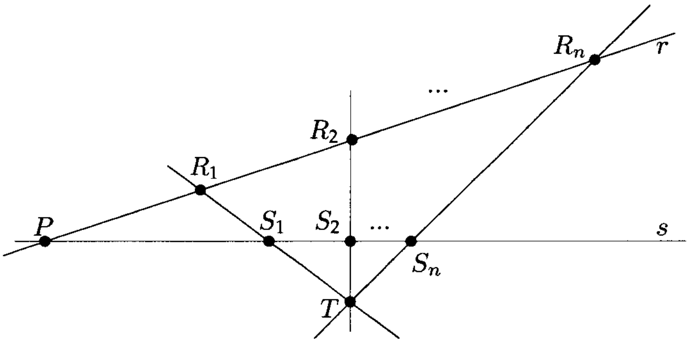


Figura 3.31

Caso 2: Seja A um ponto incidente na reta r. Consideremos o plano α definido pela reta s e pelo ponto A. Seja P um dos $n+1$ pontos da reta s. Como os pontos A e P pertencem ao plano α, o lema 3.4.6 garante-nos que a reta AP está contida no plano α. As retas AP e s são complanares e portanto estão na situação do caso 1, logo a reta AP tem $n+1$ pontos. Seja β um plano definido pelo ponto P e pela reta r. Os pontos A e P pertencem ao plano β, logo a reta AP está contida no plano β, de acordo com o lema 3.4.6. As retas AP e r estão na situação do caso 1, portanto a reta r tem $n+1$ pontos.

Como a reta r foi tomada de forma arbitrária no espaço projetivo de ordem n, concluímos que todas as retas têm exatamente $n+1$ pontos.

□

Espaços projetivos de ordem dois

Os resultados que iremos apresentar dão-nos a conhecer o número exato de pontos e de retas num espaço projetivo de ordem dois.

Teorema 3.4.16. *Num espaço projetivo de ordem $n = 2$ todos os planos têm exatamente sete pontos.*

Demonstração:

Seja π um plano definido por um ponto A e por uma reta r. A reta r incide em três pontos, sejam dois deles B e C. Podemos construir as retas AB e AC. A reta AB tem um terceiro ponto D e a reta AC tem um terceiro ponto E. Aplicando o axioma I_3 aos pontos A, D, B, E e C existe um ponto F tal que D, E e F são colineares e B, C e F são colineares, ou seja, o ponto F é comum às retas DE e BC. Construímos seguidamente a reta AF. De acordo com o teorema 3.4.15, existe um ponto G pertencente à reta AF. Mostramos que existem sete pontos A, B, C, D, E, F e G no plano (fig. 3.32).

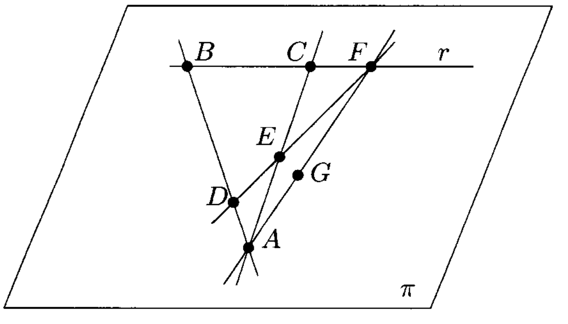


Figura 3.32

Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe um oitavo ponto K diferente dos anteriores. Como os pontos K e A são distintos construímos a reta AK incidente em ambos. De acordo com o teorema 3.4.7 a reta AK interseta a reta r num ponto, esse ponto não pode ser B, C ou F, pois, se assim fosse, obteríamos uma contradição com o teorema 3.4.2. Logo tem de existir um quarto ponto na reta r comum à reta AK, o que é impossível pois cada reta só tem três pontos. Portanto no plano existem exatamente sete pontos. □

Reparemos que o plano π descrito na demonstração anterior é um plano projetivo de ordem dois.

Teorema 3.4.17. *Num espaço projetivo de ordem dois, existem exatamente sete retas em cada plano.*

Demonstração:

No teorema 3.4.15 provamos que existem sete pontos num plano do espaço projetivo de ordem $n = 2$. Tendo por base a sua demonstração provaremos que existem sete retas num plano. Foram definidas as retas ABD, ACE, AFG, BCF e DEF. Nos pontos B e E incide a reta BE. O terceiro ponto desta reta só pode ser o ponto G, pois o ponto A e o ponto B são colineares com os restantes pontos. Raciocínio análogo para a reta DCG (fig. 3.33).

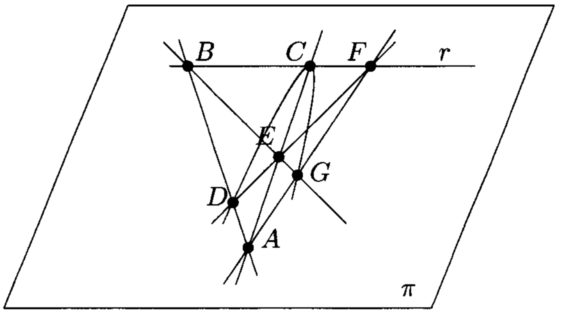


Figura 3.33

Provaremos seguidamente que não existem mais retas. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe uma oitava reta s no plano. Esta reta tem três pontos e como o plano tem os sete pontos já definidos, então os três pontos da reta s só podem ser três dos sete pontos do plano. Suponhamos, sem perda de generalidade, que a reta s incide no ponto A. De acordo com o teorema 3.4.7 a reta s e a reta BCF têm um ponto em comum. Este ponto não pode ser nem B, nem C e nem F pois isto levaria a uma contradição com o teorema 3.4.2. Logo tem de existir um quarto ponto na reta r, comum à reta s, o que é impossível pois cada reta só tem três pontos. Portanto no plano existem exatamente sete retas. □

Teorema 3.4.18. *Num espaço projetivo de ordem dois, o número de pontos num espaço tridimensional Γ é exatamente quinze.*

Demonstração:

Por definição, o espaço tridimensional Γ é definido por um plano π e por um ponto P. No teorema3.4.15 provámos que um plano tem exatamente sete pontos. Tendo por base a sua demonstração consideremos no plano π os pontos A, B, C, D, E, F e G. Em cada um destes pontos e no ponto P incide uma reta. Cada uma destas retas tem três pontos. Sejam H, K, J, L, M, N e O os pontos incidentes respetivamente nas retas PB, PA, PC, PD, PE, PF e PG distintos dos já referidos. Estes pontos pertencem ao espaço Γ pelo teorema 3.4.11. Assim existem 15 pontos. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existem mais de quinze pontos, sendo o ponto Q um ponto distinto dos já mencionados. No ponto P e no ponto Q incide a reta PQ, que interseta o plano π num ponto, segundo o teorema 3.4.14. Este ponto tem de ser um dos pontos já definidos pois o plano π não tem mais pontos. No ponto P e nos pontos do plano π já incide uma reta, logo a reta PQ tem de ser uma das retas definidas anteriormente, caso contrário chegamos a uma contradição com o teorema 3.4.2. Assim o ponto Q tem de ser um dos pontos anteriores, o que é absurdo, pois o ponto Q é um ponto distinto. Portanto existem exatamente quinze pontos. □

Teorema 3.4.19. *Num espaço projetivo de ordem $n = 2$, o número de retas incidentes num espaço tridimensional Γ é exatamente trinta e cinco.*

Demonstração:

No teorema anterior demonstrámos que num espaço tridimensional Γ existem 15 pontos. Para provarmos que existem trinta e cinco retas utilizaremos as mesmas notações da demonstração anterior. No ponto A e em cada um dos restantes catorze pontos incide uma reta. Construímos anteriormente as seguintes retas incidentes no ponto A: ABD, ACE, AFG e AKP (fig. 3.34).

No ponto A e no ponto H incide uma reta, que tem três pontos. Iremos seguidamente encontrar o terceiro ponto da reta AH. Seja α o plano definido pelo ponto P e pela reta AB. Os pontos D, H, K e L são pontos do plano α, porque o ponto D é um ponto da reta AB e os pontos H, K e L são pontos, respetivamente, das retas BP, AP e DP. Como os pontos A e H são pontos do plano α, então a reta AH está contida no plano α, de acordo com o teorema 3.4.5. Segundo o teorema 3.4.7, a reta AH tem um ponto em comum com qualquer reta do plano α, em particular com a reta PD. Esse ponto não pode ser o ponto P, pois a reta AH interseta a reta AP no ponto A. Também não pode ser o ponto D porque a reta AH interseta a reta AD no ponto A. Logo a reta AH só pode intersetar a reta PD no ponto L. Assim construímos a reta AHL. Seja β o plano definido pelo ponto P e pela reta AC. Analogamente ao que vimos para o plano α verificamos que os pontos A, C, E, J, M e P são pontos do plano β e que a reta AJ interseta a reta PE no ponto M. Seja δ o plano definido pelo ponto P e pela reta AF. Analogamente ao que vimos para o plano α verificamos que os pontos A, F, G, N, O e P são pontos do plano δ e que a reta AN

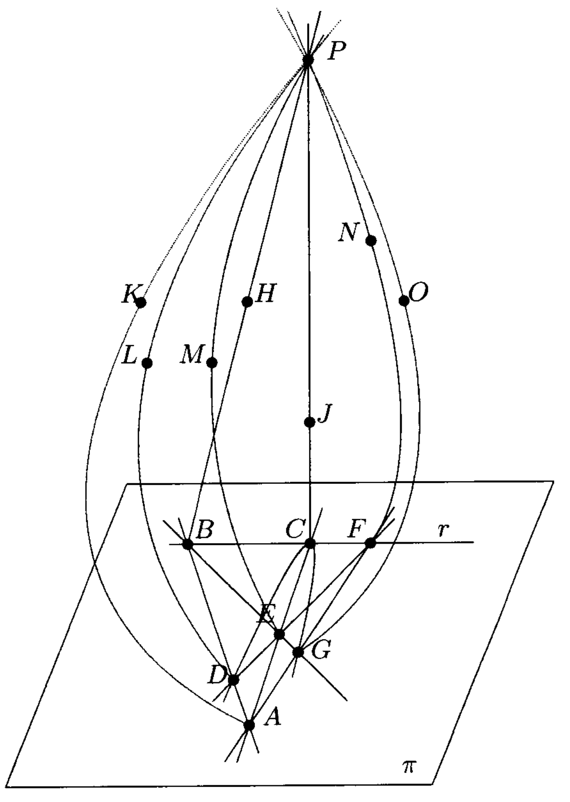


Figura 3.34

interseta a reta GP no ponto O. Temos, então a reta ANO. Construímos todas as retas incidentes no ponto A. Por raciocínios análogos ao que fizemos para encontrar as retas incidentes no ponto A, encontramos as retas incidentes nos pontos: $B, C, D, E, F, G, H, K, J, L, M, N$ e O. Assim as trinta e cinco retas são: ABD, ACE,AFG, AHL, AKP, AJM, ANO, BCF, BEG, BHP, BKL, BJN, BMO, CDG, CHN, CKM, CJP, CLO, DEF, DHK, DJO, DLP, DMN, EHO, EKJ, ELN, EMP, FHJ, FKO, FLM, FNP, GHM, GKN, GJL e GPO. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existem mais de 35 retas. Seja s uma reta distinta das anteriores. A reta s tem três pontos, que só podem ser três dos quinze pontos já definidos, caso contrário chegamos a uma contradição com o teorema 3.4.17. Suponhamos, sem perda de generalidade, que a reta s incide no ponto A. No ponto A e em cada um dos outros pontos do espaço tridimensional Γ incide já uma reta, logo a reta s tem de ser uma das retas consideradas anteriormente, caso contrário chegamos a uma contradição com o teorema 3.4.2. Mas isto é impossível, pois a reta s é distinta das anteriores. Provamos que existem exatamente trinta e cinco retas. □

Capítulo 4

Planos Afins Finitos

Seja $n > 1$ um natural.

Um conjunto de pontos que satisfaça o seguinte sistema de axiomas chama-se plano afim de ordem n.

Axiomas:

Axioma J_1: Existem pelo menos quatro pontos não colineares três a três.

Axioma J_2: Existe pelo menos uma reta incidente com exatamente n pontos.

Axioma J_3: Dados dois pontos distintos, existe exatamente uma reta incidente em ambos.

Axioma J_4: Dados uma reta r e um ponto P não incidente em r, existe exatamente uma reta incidente no ponto P paralela à reta r.

Comparando o sistema axiomático do plano afim de ordem n com o do plano projetivo de ordem n verificamos que existem dois axiomas que diferem, o segundo e o quarto. No plano afim de ordem n existe pelo menos uma reta incidente em exatamente n pontos, enquanto que no plano projetivo de ordem n existe pelo menos uma reta incidente em exatamente $n + 1$ pontos. No plano afim de ordem n, dados uma reta r e um ponto P não incidente em r, existe exatamente uma reta incidente no ponto P paralela à reta r e no plano projetivo de ordem n, dadas duas retas distintas existe pelo menos um ponto incidente com ambas.

O plano afim de ordem n e o plano projetivo de ordem n também diferem relativamente ao princípio da dualidade, uma vez que o primeiro não o satisfaz e o segundo sim, como foi demonstrado anteriormente.

Apresentamos seguidamente duas razões que justificam o facto de o plano afim de ordem n não verificar o princípio da dualidade.

Primeira razão: se considerássemos o dual do axioma J_2 existiria pelo menos um ponto incidente em exatamente n retas. Isto contradiria o teorema 4.0.21, demonstrado mais à frente, que afirma que cada ponto incide em exatamente $n + 1$ retas.

Segunda razão: observemos que se o dual do axioma J_3 fosse verdadeiro, dadas duas retas distintas existiria exatamente um ponto incidente em ambas. De acordo com o axioma J_2, existe pelo menos uma reta r com n pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Aplicando o axioma J_1, existe um ponto Q não incidente na reta r (fig. 4.1).

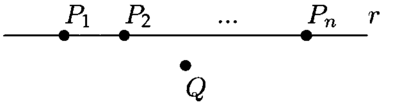


Figura 4.1

Segundo o axioma J_4, existe exatamente uma reta s incidente no ponto Q e que não interseta r. Assim as retas r e s não têm nenhum ponto em comum, o que contradiz o dual do axioma J_3.

Lema 4.0.20. *Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.*

Demonstração:

Sejam r e s duas retas paralelas. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe uma reta t que interseta a reta s, num ponto T e não interseta a reta r (fig. 4.2).

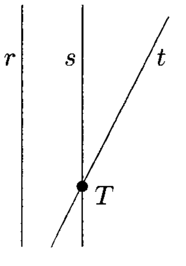


Figura 4.2

Assim pelo ponto T passam duas retas paralelas à reta r o que contradiz o axioma J_4.

Portanto as três retas são paralelas entre si. □

Teorema 4.0.21. *Num plano afim de ordem n, cada ponto incide em exatamente $n + 1$ retas.*

Demonstração:

Seja P um ponto do plano. De acordo com o axioma J_2, existe pelo menos uma reta r incidente com exatamente n pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Poderemos considerar dois casos distintos:

1. o ponto P não incide na reta r;

2. o ponto P incide na reta r.

Caso 1: se o ponto P não incide na reta r, segundo o axioma J_4 existe exatamente uma reta s incidente no ponto P e paralela à reta r. No ponto P e em cada um dos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ incidem as retas $r_1, r_2, \ldots, r_n$ respetivamente, de acordo com o axioma J_3. Estas retas são distintas, pois os pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são distintos (fig. 4.3).

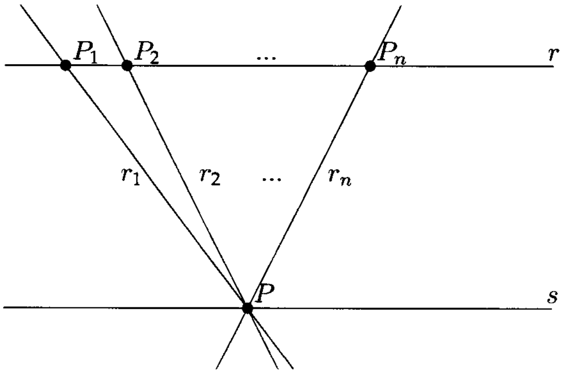


Figura 4.3

Assim P incide em $n + 1$ retas. Suponhamos, com vista a um absurdo, que no ponto P incidem pelo menos $n + 2$ retas. Seja t uma reta incidente no ponto P diferente das já consideradas. Como as retas r e s são paralelas, de acordo com o axioma J_4, a reta t tem de intersetar a reta r. Assim a reta r e a reta t têm um ponto em comum, e este ponto é diferente de todos os outros pontos da reta r porque as retas são todas diferentes. Assim a reta r tem $n + 1$ pontos, o que não pode acontecer por definição da reta r. Portanto no ponto P incidem exatamente $n + 1$ retas.

Caso 2: se o ponto P incide em r, vamos assumir que os pontos P e P_1 são coincidentes. De acordo com o axioma J_1 garantimos a existência de um ponto Q não incidente na reta r. No ponto Q incide uma reta s paralela à reta r, aplicando o axioma J_4. Segundo o axioma J_3, existe exatamente uma reta r_1 incidente nos pontos P e Q. Aplicando o axioma J_4 à reta r_1 e ao ponto P_2 existe uma reta r_2 incidente no ponto P_2 e paralela à reta r_1. A reta r_2 interseta a reta s, pois caso contrário existiriam duas retas paralelas à reta r_2 (r_1 e s), o que contradizia o axioma J_4. A reta r_2 não incide no ponto Q, pois é um ponto da reta r_1. O ponto de interseção da reta r_2 com a reta s é um ponto Q_2 (fig. 4.4).

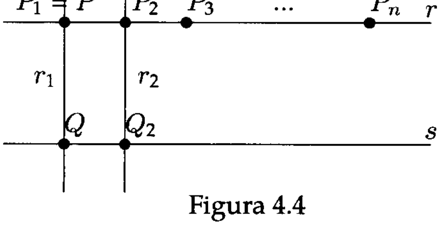


Figura 4.4

Consideremos o ponto P_3 e a reta r_1. De acordo com o axioma J_4 existe exatamente uma reta r_3 incidente no ponto P_3 e paralela à reta r_1. Como a reta r_2 é paralela à reta r_1, pelo lema 4.0.20 a reta r_3 também é paralela à reta r_2. As retas r_3 e s intersetam-se num ponto, Q_3 (pela razão que indicamos anteriormente). De modo análogo construímos os restantes n pontos sobre a reta s. Segundo o axioma J_3, no ponto P, no ponto Q e em cada ponto Q_i com $i = 2, \ldots, n$ incide exatamente uma reta. Assim no ponto P incidem $n + 1$ retas. Vamos provar que existem exatamente $n+1$ retas. Suponhamos, com vista a um absurdo, que no ponto P incide uma reta t diferente de r, PQ, PQ_2, ..., PQ_n. As retas t e s intersetam-se no ponto T (a reta t não pode ser paralela á reta s, pois pelo axioma J_4, existe exatamente uma reta paralela à reta s que é a reta r) (fig. 4.5).

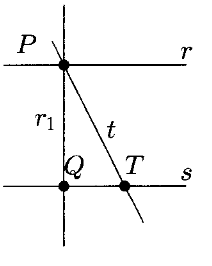


Figura 4.5

O ponto T é diferente dos pontos Q, Q_2, ..., Q_n, porque se não o fosse, a reta t coincidiria com uma das retas PQ, PQ_2, ..., PQ_n. Como o ponto T não incide em r_1, então, pelo axioma J_4, existe uma reta v que incide no ponto T e é paralela a r_1. Pelo lema 4.0.20 a reta v é paralela a $r_1, \ldots, r_n$. A reta v tem de intersetar a reta r, pois já existe uma reta paralela r que passa pelo ponto T (reta s); pelo axioma J_4, não podem existir mais retas. Mas isso significa que a reta r tem mais um ponto, uma vez que a reta v é paralela a todas as outras retas. A reta r não pode ter mais pontos, pois tem exatamente n pontos, logo chegamos a uma contradição. Assim no ponto P incidem $n + 1$ retas. □

Teorema 4.0.22. *Num plano afim de ordem n, cada reta contém exatamente n pontos.*

Demonstração:

Seja r uma reta dada. De acordo com o axioma J_1 garantimos a existência de um ponto Q não incidente em r. Segundo o teorema 4.0.21, o ponto Q incide em exatamente $n + 1$ retas distintas r_1, r_2, ..., r_{n+1}. Como o ponto Q não incide na reta r, pelo axioma J_4, existe exatamente uma reta que incide em Q e não interseta a reta r, portanto esta reta terá de ser uma das retas anteriormente mencionadas. Sem perda de generalidade suponhamos que r_{n+1} é paralela à reta r. Assim as retas $r_1, r_2, \ldots, r_n$ intersetam a reta r nos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$, respetivamente. Provaremos seguidamente que os pontos são todos distintos. Suponhamos, com vista a um absurdo, que os pontos P_i e P_j são o mesmo, com $i \neq j$. De acordo com o axioma J_3 existe exatamente uma reta incidente simultaneamente em P_i, P_j e Q, assim as retas r_i e r_j são a mesma, o que é absurdo. Logo os pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são distintos (fig. 4.6).

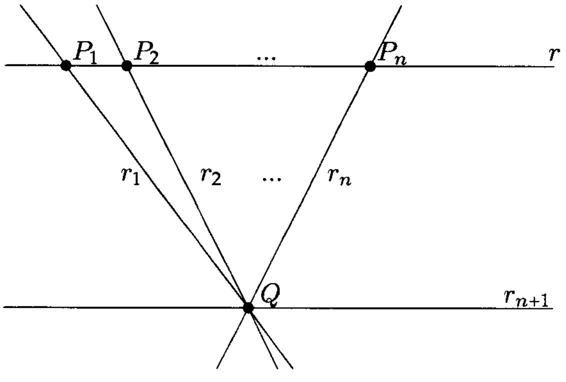


Figura 4.6

Provaremos agora que existem exatamente n pontos na reta r. Suponhamos, com vista a um absurdo, que na reta r incidem $n+1$ pontos, P_1, P_2, ..., P_{n+1}. No ponto Q e em P_1, P_2, ..., P_n incidem as retas r_1, r_2, ..., r_n. Pelo axioma J_3, no ponto Q e no ponto P_{n+1} incide exatamente uma reta, r_{n+2}. Assim no ponto Q incidem $n+2$ retas, o que contradiz o teorema 4.0.21.

Concluímos assim que cada reta contém exatamente n pontos. □

Teorema 4.0.23. *Num plano afim de ordem n, cada reta admite exatamente $n-1$ retas paralelas.*

Demonstração:

Seja r uma reta dada. De acordo com o teorema 4.0.21 na reta r incidem n pontos distintos. Segundo o teorema 4.0.22 no ponto P incidem exatamente $n+1$ retas. Seja t uma reta incidente em P, distinta da reta r. Na reta t existem $n-1$ pontos distintos de P, pelo teorema 4.0.22 (fig. 4.7).

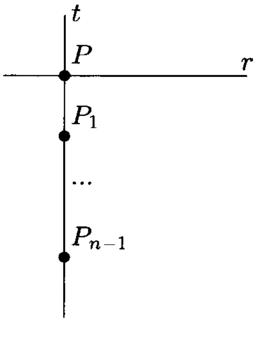


Figura 4.7

De acordo com o axioma J_4, se um ponto não incide na reta r então existe exatamente uma reta que incide nesse ponto e é paralela à reta r. Como a reta

t tem $n-1$ pontos não incidentes em r (caso contrário, as retas t e r seriam a mesma pelo axioma J_3) existem $n-1$ retas incidentes nesses $n-1$ pontos, $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, e que não intersetam r. Provemos que existem exatamente $n-1$ retas paralelas à reta r. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe outra reta s diferente das anteriores e paralela à reta r. A reta s tem de intersetar a reta t, caso contrário a reta s é paralela a duas retas que passam pelo ponto P (as retas r e t) o que contradiz o axioma J_4. Como a reta s interseta a reta t num ponto, a reta t tem outro ponto distinto dos anteriores, caso contrário nos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ incidiriam duas retas paralelas à reta r, o que contradiz o axioma J_4. Mas a reta t não pode ter mais pontos, pelo teorema 4.0.22. Portanto existem exatamente $n-1$ retas paralelas à reta r. □

Teorema 4.0.24. *Num plano afim de ordem n, existem exatamente n^2 pontos e n^2+n retas.*

Demonstração:

Comecemos por mostrar que existem exatamente n^2 pontos. Seja P um ponto dado. De acordo com o teorema 4.0.21, no ponto P incidem $n+1$ retas, $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$. Mas em cada reta incidem n pontos, de acordo com o teorema 4.0.22, assim em todas as retas r_i com $i = 1, \ldots, n+1$ incidem $n-1$ pontos diferentes do ponto P. Vejamos que não existem mais pontos para além destes. Por qualquer ponto do plano diferente do ponto P e pelo ponto P tem de incidir uma reta, pelo axioma J_3, logo esse ponto tem de pertencer a pelo menos uma das $n+1$ retas que incidem no ponto P, de acordo com o teorema 4.0.21. Logo o número total de pontos é

$$(n+1)(n-1)+1 = n^2.$$

Mostremos que existem exatamente n^2+n retas. Seja r uma reta dada. De acordo com o teorema 4.0.22, na reta r incidem n pontos, $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Em cada um destes pontos incidem n retas diferentes da reta r pelo teorema 4.0.21. Existem exatamente $n-1$ retas paralelas à reta r, aplicando o teorema 4.0.23. Assim o número total de retas é

$$n \times n + 1 + (n-1) = n^2 + n.$$

□

Exemplo 4.0.25. Um possível modelo para o plano afim de ordem dois.

De acordo com o axioma J_1, existem quatro pontos P, Q, R e S não colineares três a três. Aplicando o axioma J_3 construímos as retas PQ, QS, SR, RP, PS e RQ. Como o plano é de ordem dois, pelo teorema 4.0.22, cada reta tem exatamente dois pontos e de acordo com o teorema 4.0.24 existem exatamente quatro pontos e seis retas. Estes pontos e estas retas foram definidas anteriormente.

Um modelo ilustrativo do que acabamos de dizer poderá ser o da figura 4.8.

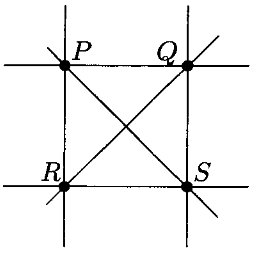


Figura 4.8: modelo 1

Podemos obter um plano afim de ordem dois a partir de um plano projetivo de ordem dois se neste for apagada uma reta e os seus pontos. Vejamos o modelo do plano projetivo de ordem dois apresentado na secção 3.1 do capítulo 3 (fig. 4.9).

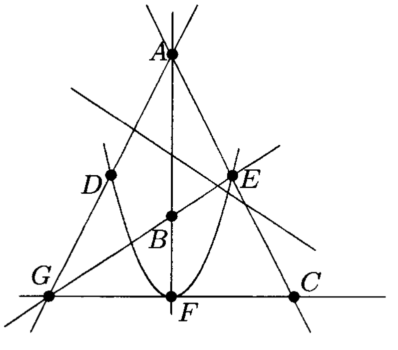


Figura 4.9: modelo 2

Se neste modelo apagarmos, sem perda de generalidade, a reta DEF vamos obter outro exemplo de um modelo de um plano afim de ordem dois como podemos ver na figura 4.10.

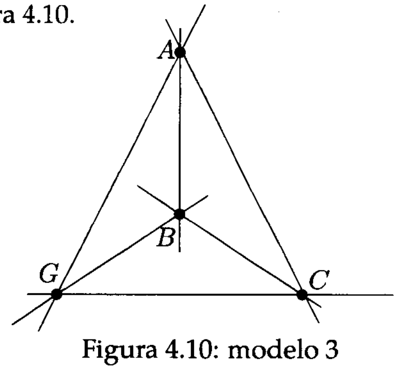


Figura 4.10: modelo 3

Observemos que tanto o modelo 1 como o modelo 3, que são exemplos de planos afins de ordem dois, aparecem também como exemplos de modelos que satisfazem a axiomática da geometria dos quatro ponto pontos, que foi tratada na secção 1.1 do capítulo 1. Provámos também nessa secção que estes modelos são isomorfos.

Exemplo 4.0.26. Um possível modelo para o plano afim de ordem três.

Existe uma reta a incidente em três pontos P, Q e T, de acordo com o axioma J_2. A reta a tem exatamente duas retas paralelas b e c, segundo o teorema 4.0.23. Aplicando o teorema 4.0.22, a reta b tem exatamente três pontos R, S e U e a reta c também tem três pontos X, V e Z. De acordo com o axioma J_2 construímos a reta PR. Esta reta não pode ser paralela à reta c, de acordo com o teorema 4.0.23, pois já existem duas retas paralelas à reta c (a e b). Logo a reta PR e a reta c intersetam-se num dos pontos X ou V ou Z. Como estes pontos estão em igualdade de circunstâncias podemos escolher, sem perda de generalidade, o ponto X. Construímos a reta PRX. Analogamente construímos a reta PS que também interseta a reta c. Esta interseção não pode ser o ponto X, pois as retas PS e PRX seriam a mesma. Assim as retas intersetam-se ou no ponto V ou no ponto Z, sem perda de generalidade escolhemos o ponto Z. Construímos a reta PSZ. Por razões análogas à anterior definimos a reta PUV. Pelo ponto P já não podem passar mais retas, segundo o teorema 4.0.21. Por argumentos análogos aos anteriores construímos as retas incidentes no ponto Q, QRZ, QSV e QUX e as retas incidentes no ponto T, TRV, TSX e TUZ. Temos definidos os nove pontos e as doze retas $PQT, PRX, PSZ, PVU, RSU, RTV, QRZ, QSV, QUX, TSX, TUZ, VXZ$ referidos no teorema 4.0.24. Um modelo ilustrativo do que acabamos de dizer poderá ser o da figura 4.11:

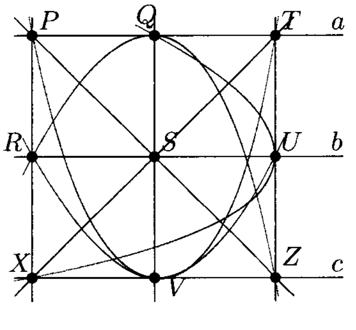


Figura 4.11

Reparemos que este modelo proposto já nos apareceu no capítulo 1 noutra axiomática, a geometria dos nove pontos e doze retas. Também o encontrámos no plano projetivo de ordem três, quando a este último retiramos uma reta e seus pontos.

Isto não acontece por acaso, vamos terminar o capítulo mostrando uma relação entre um plano afim e um plano projetivo. Consideremos a configuração de um plano projetivo de ordem n. Nesta configuração existem n^2+n+1 pontos e n^2+n+1 retas de acordo com o teorema 3.1.11. Se nesta configuração retirarmos uma reta e os respetivos pontos vamos ficar com n^2+n retas e n^2 pontos, pois cada reta tem $n+1$ pontos segundo o teorema 3.1.9. Este é o número de retas e pontos de um plano afim. Vamos ver porque isto acontece no teorema seguinte.

Teorema 4.0.27. *Seja t uma reta de um plano projetivo π de ordem n. Seja α a configuração que se obtém retirando a reta t e todos os seus pontos. Então α é um plano afim de ordem n.*

Para demonstrar o teorema vamos verificar que ao retirar a reta t e os respetivos pontos, os quatro axiomas dos planos afins são satisfeitos. Para fazer esta verificação utilizaremos todos os axiomas e resultados da secção 3.1 do capítulo 3 .

Demonstração:

Axioma J_1: Existem pelo menos quatro pontos não colineares três a três.

Num plano projetivo π de ordem n, segundo o axioma H_1, podemos tomar quatro pontos não colineares três a três. Podemos ter três casos distintos:

1. nenhum dos quatro pontos pertence à reta t;
2. um dos pontos pertence à reta t;
3. dois dos pontos pertencem à reta t.

Caso 1: se nenhum dos quatro pontos pertencer à reta t e esta for retirada assim como os seus pontos, então os quatro pontos não colineares três a três pertencem à configuração α e o axioma é verificado.

Caso 2: existem três pontos não colineares A, B e C não incidentes na reta t e precisamos de encontrar um quarto ponto D também não incidente na reta t e que não esteja sobre nenhuma das retas AB, AC e BC. Segundo o axioma H_2 podemos considerar dois pontos E e F distintos incidentes na reta t. De acordo com o axioma H_3, construímos as retas BE e CF, que são distintas, caso contrário os pontos B e C pertenceriam à reta t, o que é falso por hipótese. Estas retas intersetam-se num ponto D, segundo o teorema 3.1.3.

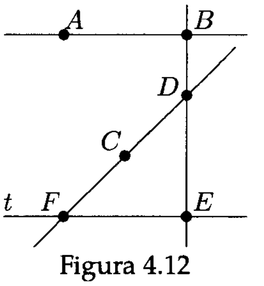


Figura 4.12

O ponto D não pertence à reta t, pois caso contrário as retas BE, CF e t seriam a mesma, o que, como vimos, não pode acontecer. O ponto D também não pertence à reta BC, pois caso contrário as retas BC, CF e BE seriam a mesma. Por razão análoga o ponto D não pertence às retas AB e AC. Provamos assim que existem os pontos A, B, C e D de modo que o axioma J_1 seja verificado.

Caso 3: existem dois pontos distintos A e B não incidentes na reta t. Temos de encontrar outros dois pontos C e D distintos, não pertencentes à reta t de modo que os quatro pontos A, B, C e D sejam não colineares três a três. Como a reta t tem $n + 1$ pontos e $n > 1$ podemos considerar em t os pontos E, F e G distintos. De acordo com o axioma H_3 construímos as retas AF, AG, BE e BF, que facilmente verificamos serem distintas. As retas AF e BE têm um ponto C em comum e as retas AG e BF têm um ponto D em comum de acordo com o teorema 3.1.3 (fig. 4.13).

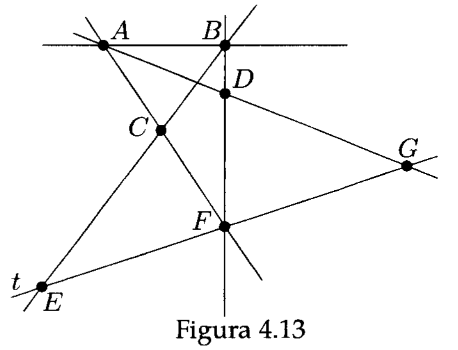


Figura 4.13

O ponto C não pode pertencer à reta AB, pois caso contrário as retas AB, AF e BE seriam a mesma. O ponto C também não pode pertencer à reta t, pois caso contrário as retas AF, BE e t seriam a mesma. Analogamente vemos que o ponto C não pertence nem à reta AG nem à reta BF. Por seu lado o ponto D não pode pertencer às retas AB, t, AF e BE por razões análogas às indicadas anteriormente. Portanto A, B, C e D são quatro pontos não colineares três a três e o axioma J_1 é verificado.

Axioma J_2: Existe pelo menos uma reta incidente com exatamente n pontos.

Seja s uma reta distinta de t. De acordo com o teorema 3.1.9 a reta s incide em exatamente $n + 1$ pontos. As retas s e t intersetam-se num ponto R de acordo com o teorema 3.1.3. Se retirarmos a reta t e os seus pontos, o ponto R, que pertence a ambas as retas, também é retirado. Assim a reta s fica com n pontos. Verificamos que existe uma reta com exatamente n pontos, sendo assim o axioma J_2 é satisfeito.

Axioma J_3: Dados dois pontos distintos, existe exatamente uma reta incidente em ambos.

Sejam A e B dois pontos distintos não incidentes na reta t, de acordo com o teorema 3.1.5. A reta AB não foi retirada ao plano π, logo a reta ainda pertence ao plano α. O axioma J_3 é satisfeito.

Axioma J_4: Dados uma reta r e um ponto P não incidente em r, existe exatamente uma reta incidente no ponto P paralela à reta r.

Sejam r uma reta distinta da reta t e P um ponto não incidente nem na reta r nem na reta t. A reta t e a reta r intersetam-se num ponto Q, de acordo com o teorema 3.1.3. Aplicando o axioma H_3, construímos a reta s incidente nos pontos P e Q. A reta s tem em comum com as retas anteriores o ponto Q (fig. 4.14).

Se retirarmos a reta t e os respetivos pontos estamos a retirar o ponto Q, mas

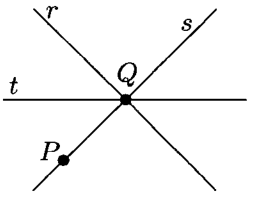


Figura 4.14

este é o único ponto em comum das retas r e s, portanto as retas r e s não se intersetam na configuração α, isto é, são paralelas. Assim dados um ponto P e uma reta r não incidente no ponto P, existe uma reta s incidente no ponto P paralela à reta r. Vamos provar que esta reta é única. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe uma reta u diferente da reta s também paralela à reta r e incidente no ponto P. No plano projetivo π de onde partimos, a reta u, de acordo com o teorema 3.1.3, interseta a reta r num ponto. Podemos ter dois casos distintos:

1. a reta u interseta as retas t e r no ponto Q;
2. a reta u interseta a reta t num ponto M e a reta r num ponto N, ambos distintos do ponto Q.

Caso 1: se a reta u interseta as retas t e r no ponto Q, então de acordo com o axioma H_3 as retas s e u são a mesma, o que é absurdo pois supusemos que as retas são distintas.

Caso 2: se a reta u interseta a reta t num ponto M e a reta r num ponto N, distintos do ponto Q, então se retirarmos a reta t e os respetivos pontos a reta u continua a intersetar a reta r no ponto N, logo as retas u e r não são paralelas, o que é absurdo.

Portanto dados uma reta r e um ponto P não incidente em r, existe exatamente uma reta incidente no ponto P paralela à reta r. O axioma J_4 é verificado.
□

Bibliografia

[Ced89] Judith N. Cederberg *A course in modern geometries*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (1989).

[ESQSC89] Maria Fernanda Estrada, Carlos Correia de Sá, João Filipe Queiró, Maria do Céu Silva, Maria José Costa, *História da Matemática*, Universidade Aberta (2000).

[HP73] Daniel R. Hughes, Fred C. Piper *Projetive Planes*, Graduate Texts in Mathematics **6**, Springer-Verlag, New York-Berlin (1973).

[LTS89] Clement Wing Hong Lam, Larry Henry Thiel e S. Swiercz *The nonexistence of finite projective planes of order* 10, Canadian Journal of Mathematics. Journal Canadien de Mathématiques, **41** (2006) n.º6, 1117–1123.

[LX04] San Ling, Chaoping Xing *Coding Theory, A First Course*, Cambridge University Press (2004).

[Nei42] H. F. Mac Neich *Four Finite Geometries*, The American Mathematical Monthly, **49** (1942) n.º1, 15–23.

[Rys63] Herbert John Ryser *Combinatorial mathematics*, The Carus Mathematical Monographs **14**, The Mathematical Association of America (1963).

[VY65] Oswald Veblen, Jonh Wesley Young *Projective geometry. Vol. 1*, Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co. New York-Toronto-London (1965)