

Medidas da teoria da informação aplicadas aos mercados
bolsistas: análise de incerteza e dependência não-linear

Andreia Dionísio

15 de Janeiro de 2006

Conteúdo

Introdução	1
1 Abordagens tradicionais nas finanças	11
1.1 Importância e valor da informação	11
1.2 A hipótese de eficiência dos mercados	13
1.2.1 Será a eficiência testável?	15
1.2.2 Factos estilizados e evidência empírica	20
1.3 Modelos clássicos da gestão de carteiras	27
1.3.1 Teoria da carteira, <i>CAPM</i> e <i>APT</i>	27
1.4 Síntese do capítulo	41
2 Entropia e informação mútua	42
2.1 Alguns paralelismos entre a física e as finanças	42
2.2 Conceito de entropia	45
2.3 Propriedades da entropia	48
2.3.1 Entropia e distribuições discretas	48
2.3.2 Entropia e distribuições contínuas	52
2.4 Medidas de divergência baseadas na entropia	57
2.5 Informação mútua	58
2.5.1 Teste de independência baseado na informação mútua	63
2.6 Exemplos da aplicação da entropia e da informação mútua	65
2.6.1 Entropia de Shannon como surpresa média	65
2.6.2 Princípio da entropia máxima	65
2.6.3 Entropia e testes de hipóteses	67
2.7 Estimação da informação mútua e da entropia	68
2.8 Entropia e teoria financeira	75

2.9	Síntese do capítulo	78
3	Descrição e análise estatística dos dados	79
3.1	Organização e funcionamento do mercado bolsista português	79
3.2	Recolha e tratamento dos dados	81
3.2.1	Títulos da amostra	81
3.2.2	Índices internacionais	101
3.2.3	Indicadores e variáveis macroeconómicos e financeiros	106
3.3	Síntese do capítulo	120
4	Entropia: medida de incerteza aplicada aos mercados financeiros	122
4.1	Enquadramento	123
4.2	Entropia e desvio-padrão: análise comparativa na medida da incerteza	127
4.3	Análise da relação de dependência entre cada um dos títulos e o índice PSI 20	137
4.3.1	Análise dos dados diários	141
4.3.2	Análise dos dados semanais	149
4.4	Síntese do capítulo	156
5	Dependência temporal: análise para diversos índices internacionais	158
5.1	Enquadramento	158
5.2	Algumas abordagens à dependência não-linear	160
5.3	Evidência empírica	167
5.3.1	Análise dos dados diários	167
5.3.2	Análise dos dados semanais	182
5.4	Síntese do capítulo	192
6	Relação entre factores económicos e a Bolsa portuguesa	194
6.1	Enquadramento	195
6.2	Seleção dos factores e respectivas variáveis	201
6.2.1	Excess return	203
6.2.2	Taxa de crescimento das taxas de juro sem risco a curto e a longo prazo	203
6.2.3	Taxa de crescimento da <i>dividend yield</i>	204
6.2.4	Taxa de crescimento do <i>earnings price ratio</i>	205
6.2.5	Taxa de crescimento do índice de preços no consumidor	207
6.2.6	Taxa de crescimento da produção industrial mensal e homóloga	208

6.2.7	Taxa de crescimento da taxa de desemprego	210
6.2.8	Variação do preço do petróleo	210
6.3	Avaliação das componentes de longo prazo na relação entre os indicadores	211
6.4	Avaliação das componentes de curto prazo	217
6.4.1	Modelos lineares com uma equação	218
6.4.2	Modelos lineares com várias equações	227
6.4.3	Avaliação da dependência global (linear e não-linear)	233
6.5	Síntese do capítulo	246
7	Conclusões	249
	Bibliografia	255

Lista de Tabelas

3.1	Títulos pertencentes à amostra organizados por sector.	82
3.2	Resultados do teste <i>ADF</i> para as sucessões cronológicas dos títulos em níveis.	93
3.3	Resultados do teste <i>ADF</i> para as primeiras diferenças das sucessões cronológicas dos títulos. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	94
3.4	Análise estatística dos títulos que constituem a amostra para os sectores da pasta de papel e cartão; do fabrico de produtos químicos e fabrico de outros minerais não metálicos, no período entre 28/06/1995 e 31/12/2002. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	95
3.5	Análise estatística dos títulos que constituem a amostra dos sectores da construção; das telecomunicações e correios e fabrico de veículos automóveis, no período entre 28/06/1995 e 31/12/2002. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	96
3.6	Análise estatística dos títulos que compõem a amostra do sector da intermediação financeira, no período entre 28/06/1995 e 31/12/2002. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	97
3.7	Análise estatística dos títulos que constituem a amostra para o sector dos serviços prestados a empresas, no período entre 28/06/1995 e 31/12/2002. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	98
3.8	Análise estatística dos títulos que constituem a amostra para o sector dos serviços prestados a empresas, no período entre 28/06/1995 e 31/12/2002. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	99
3.9	Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias do índice PSI 20, no período entre 28/06/1995 e 31/12/2002. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	100
3.10	Resultados do teste <i>ADF</i> para as sucessões cronológicas dos índices em níveis.	105

3.11	Resultados do teste <i>ADF</i> para as primeiras diferenças das sucessões cronológicas dos índices. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	106
3.12	Estatísticas de sumários para as taxas de rendibilidade diárias dos índices bolsistas. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	107
3.13	Resultados do teste <i>ADF</i> aos indicadores, para o período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	110
3.14	Análise estatística dos indicadores <i>PI</i> , <i>BT</i> , <i>OTL</i> , <i>DY</i> e <i>EPR</i> no período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	111
3.15	Análise estatística dos indicadores <i>IPC</i> , <i>IPI</i> , <i>TD</i> e <i>OIL</i> no período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	112
3.16	Variáveis e respectiva definição a utilizar na análise da dependência do mercado bolsista português face a factores económicos e financeiros.	113
3.17	Análise estatística das variáveis <i>RM</i> , $\Delta Lisbor3M$, $\Delta Swap10$, ΔDY e ΔEPR no período entre Novembro de 1993 e Outubro de 2003. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	115
3.18	Análise estatística das variáveis ΔIPC , ΔPIM , ΔPIA , ΔTD e ΔOIL no período entre Novembro de 1993 e Outubro de 2003. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	116
3.19	Processo de filtragem para a obtenção de inovações. O ajustamento sazonal foi realizado a partir do método de ajustamento de médias móveis.	117
3.20	Análise estatística das variáveis <i>inovLisbor</i> , <i>inovSwap</i> , <i>inovIPC</i> , <i>inovPIM</i> , <i>inovPIA</i> e <i>inovTD</i> no período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003. Os processos de filtragem foram seleccionadas de accordos com os critérios de informação <i>AIC</i> e <i>SIC</i> . **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	118
3.21	Matriz de correlações das variáveis. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	119
4.1	Entropia (<i>H</i>), desvio-padrão (σ) e entropia normal (<i>NH</i>) para cada um dos títulos e para o índice PSI 20.	131

4.2	Entropia (H), desvio-padrão (σ) e entropia normal (NH) para carteiras seleccionadas aleatoriamente, nas quais todos os títulos têm igual ponderação.	136
4.3	Medidas de associação entre cada uma das taxas de rendibilidade diárias dos títulos e do índice PSI 20. β corresponde ao parâmetro estimado por OLS no modelo de regressão linear simples, onde R é o coeficiente de correlação linear. Todas as entropias e a informação mútua estão medidas em $nats$. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	142
4.4	Medidas de associação entre cada uma das taxas de rendibilidade diárias dos títulos e do índice PSI 20. β corresponde ao parâmetro estimado por GMM no modelo de regressão linear simples, onde R é o coeficiente de correlação linear. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	147
4.5	Medidas de associação entre cada uma das taxas de rendibilidade semanais dos títulos e do índice PSI 20. β corresponde ao parâmetro estimado no modelo de regressão linear simples e R é o coeficiente de correlação linear, estimados por OLS . Todas as entropias e a informação mútua estão medidas em $nats$. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	150
4.6	Medidas de associação entre as taxas de rendibilidade semanais dos títulos e do índice PSI 20. β corresponde ao parâmetro estimado por GMM no modelo de regressão linear simples, onde R é o coeficiente de correlação linear. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	154
5.1	Teste de $Ljung-Box$ e coeficiente de autocorrelação para as observações diárias das taxas de rendibilidade dos índices. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	168
5.2	Informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação linear (R) e coeficiente de correlação global (λ) entre $r_{i,t}$ e $r_{i,t-1}$ para as observações diárias, sendo $r_{i,t}$ a taxa de rendibilidade do índice i no dia t . ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	170
5.3	Informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação linear (R) e coeficiente de correlação global (λ) entre $r_{i,t}$, $r_{i,t-1}$ e $r_{i,t-2}$ para as observações diárias, sendo $r_{i,t}$ a taxa de rendibilidade do índice i no dia t . ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	171

5.4	Informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação linear (R) e coeficiente de correlação global (λ) entre $r_{i,t}$, $r_{i,t-1}$, $r_{i,t-2}$ e $r_{i,t-3}$ para as observações diárias, sendo $r_{i,t}$ a taxa de rendibilidade do índice i no dia t . ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	172
5.5	Teste de <i>Ljung-Box</i> para as séries filtradas dos dados diários.	173
5.6	Teste de McLeod e Li aplicado às sucessões cronológicas filtradas. k representa o lag respectivo. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	174
5.7	Teste de Engle à não-linearidade no segundo momento das sucessões cronológicas filtradas das observações diárias.	174
5.8	Teste de Tsay à não-linearidade na média das sucessões cronológicas das observações diárias. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	175
5.9	Informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação linear (R) e coeficiente de correlação global (λ) entre $\varepsilon_{i,t}$ e $\varepsilon_{i,t-1}$ para as observações diárias, sendo $\varepsilon_{i,t}$ a observação filtrada do índice i no dia t . ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	176
5.10	Teste de <i>Ljung-Box</i> e coeficiente de autocorrelação para as observações semanais das taxas de rendibilidade dos índices. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	182
5.11	Informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação linear (R) e coeficiente de correlação global (λ) com desfasamento entre $r_{i,t}$ e $r_{i,t-1}$ para as observações semanais, sendo $r_{i,t}$ a taxa de rendibilidade do índice i na semana t . ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	183
5.12	Informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação linear (R) e coeficiente de correlação global (λ) com desfasamento entre $r_{i,t}$, $r_{i,t-1}$ e $r_{i,t-2}$ para as observações semanais, sendo $r_{i,t}$ a taxa de rendibilidade do índice i na semana t . ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	185
5.13	Informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação linear (R) e coeficiente de correlação global (λ) com desfasamento entre $r_{i,t}$, $r_{i,t-1}$, $r_{i,t-2}$ e $r_{i,t-3}$ para as observações semanais, sendo $r_{i,t}$ a taxa de rendibilidade do índice i na semana t . ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	186

5.14	Teste de <i>Ljung-Box</i> para as séries filtradas das observações semanais.	186
5.15	Teste de McLeod e Li aplicado às sucessões cronológicas filtradas das observações semanais, onde k representa o <i>lag</i> respectivo. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	187
5.16	Teste de Engle à não-linearidade no segundo momento das sucessões cronológicas filtradas das observações semanais.	187
5.17	Teste de Tsay à não-linearidade na média das sucessões cronológicas das observações semanais. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.	188
5.18	Informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação linear (R) e coeficiente de correlação global (λ) entre $\varepsilon_{i,t}$ e $\varepsilon_{i,t-1}$ para as observações semanais, sendo $\varepsilon_{i,t}$ a observação filtrada do índice i no dia t	188
6.1	Definição dos indicadores para a análise da sua relação com o mercado bolsista português. Nota: todos os indicadores têm periodicidade mensal. O período da análise é de Outubro de 1993 a Outubro de 2003.	202
6.2	Testes de cointegração entre PI e cada um dos restantes indicadores para o período entre Outubro de 1993 a Outubro de 2003. Em todos os casos foi considerado 1 <i>lag</i> de acordo com o critério de informação SIC . **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	213
6.3	Resultados dos modelos de regressão linear simples, em que ER_t é sempre variável dependente e a variável independente é a indicada na coluna (1) da Tabela. β é o respectivo coeficiente da variável explicativa em causa e $t(\beta)$ o valor da estatística t para esse coeficiente. Em todas as regressões foi incluído um termo constante. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	219
6.4	Resultados dos modelos de regressão linear simples, em que ER_t é sempre variável dependente e a variável independente é a indicada na coluna (1) da Tabela. β é o respectivo coeficiente da variável explicativa em causa e $t(\beta)$ o valor da estatística t para esse coeficiente. Em todas as regressões foi incluído um termo constante. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	220

6.5	Resultados das regressões lineares estimadas da variável ER_t numa primeira fase (colunas 1, 2 e 3) sobre um conjunto de variáveis seleccionadas de acordo com os resultados das Tabelas 6.3 e 6.4 e uma constante; e numa segunda fase [colunas (4), (5) e (6)] das variáveis estatisticamente significativas no modelo alargado. Foram aplicados testes de ausência de autocorrelação dos resíduos (<i>LM test</i>), homocedasticidade (<i>ARCH LM test</i>), normalidade dos resíduos (<i>Jarque-Bera test</i>) e estabilidade (<i>CUSUM e CUSUM-Q tests</i>). Apenas foi rejeitada a hipótese nula de que os resíduos são normalmente distribuídos. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	226
6.6	Resultados da aplicação dos modelos <i>VAR</i> às variáveis em estudo. Os valores entre parêntesis referem-se ao desvio-padrão do respectivo coeficiente. O número de <i>lags</i> foi seleccionado de acordo com o critério <i>AIC</i> . **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	230
6.7	Informação mútua (I), coeficiente de correlação global (λ), informação mútua normal (<i>IMN</i>) e coeficiente de correlação linear (R) entre ER_t e cada uma das variáveis (de <i>per se</i>) medida em diversos <i>lags</i> . **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	237
6.8	Informação mútua (I), coeficiente de correlação global (λ), informação mútua normal (<i>IMN</i>) e coeficiente de correlação linear (R) entre ER_t e cada uma das variáveis (de <i>per se</i>) medida em diversos <i>lags</i> . **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	238
6.9	Informação mútua (I), coeficiente de correlação global (λ), informação mútua normal (<i>IMN</i>) e coeficiente de correlação linear para (ER_t, \vec{X}) e (ER_t, \vec{Y}) . **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.	242

Lista de Figuras

1.1	Fronteira eficiente. Fonte: Sharpe (1970).	28
1.2	Risco específico e risco sistemático. Fonte: Sharpe (1970).	31
1.3	Capital Market Line. Fonte: Sharpe (1970).	32
1.4	Linha do mercado de títulos representada em termos de covariâncias. Fonte: Sharpe (1970).	33
2.1	Entropia (em bits) dos acontecimentos X e Y	51
2.2	Ilustração do Algoritmo B, num espaço Euclideano com $d = 2$ e $\alpha = 2$. (a) corresponde ao passo (1) do algoritmo; em (b) foi aplicado o passo (2), em que cada uma das células resultantes tem um nível de profundidade 1. Em (c) o passo (2) foi aplicado à célula superior do lado direito e inferior do lado esquerdo. Neste caso a regra (3) foi aplicada às duas outras células. Em (d) o passo (2) foi aplicado a 5 células que voltaram a ser alvo de partição, cuja profundidade passou a ser de 3 e o passo (3) foi aplicado às restantes 3 células, cujo nível de profundidade é 2. Fonte: Darbellay (1998b).	72
3.1	Organização dos mercados financeiros portugueses. Fonte: Pires (2005).	80
3.2	Evolução do índice PSI 20, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.	83
3.3	Evolução das cotações do títulos pertencentes ao sector da pasta de papel e cartão, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.	83
3.4	Evolução das cotações do títulos pertencentes aos sectores do fabrico de produtos químicos e fabrico de outros minerais não metálicos, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.	84
3.5	Evolução das cotações do títulos pertencentes aos sectores de correios e telecomunicações e fabrico de veículos automóveis, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.	84
3.6	Evolução das cotações do títulos pertencentes ao sector da intermediação financeira, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.	85

3.7	Evolução das cotações do títulos pertencentes ao sector dos serviços prestados a empresas, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.	86
3.8	Evolução das cotações do títulos pertencentes ao sector dos serviços prestados a empresas, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.	87
3.9	Evolução das cotações do títulos pertencentes ao sector dos serviços prestados a empresas, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.	88
3.10	Evolução diária das cotações em pontos dos índices ASE, CAC 40, DAX 30, FTSE 100, IBEX 35, PSI 20 e S&P 500 no período entre 04/01/1993 a 31/12/2002.	103
3.11	Evolução temporal dos indicadores no período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003.	108
3.12	Evolução temporal das variáveis no período entre Novembro de 1993 e Outubro de 2003.	114
3.13	Evolução temporal das variáveis filtradas (inovações) no período entre Fevereiro de 1994 e Outubro de 2003.	119
4.1	Decomposição de uma selecção em três possibilidades. Fonte: Shannon (1948).	125
4.2	Entropia <i>versus</i> $\ln(\sigma)$	132
4.3	Entropia (H) e entropia normal (NH) para cada um dos títulos e índice PSI 20.	133
4.4	Análise do comportamento da entropia (H) e da entropia normal (NH) para carteiras seleccionadas aleatoriamente.	135
4.5	Análise comparativa entre o comportamento do risco sistemático, $\beta_i^2 \sigma_m^2$, e da informação mútua, $I(X, PSI)$	143
4.6	Análise comparativa entre o comportamento do risco específico, σ_{ei}^2 , e da entropia condicionada, $H(X PSI)$	144
4.7	Coefficiente de correlação global (λ) e coeficiente de correlação linear (R) entre cada um dos títulos e o índice PSI 20.	145
4.8	Análise comparativa entre o comportamento do risco sistemático, $\beta_i^2 \sigma_m^2$, e da informação mútua, $I(X, PSI)$, para o caso em que o risco sistemático foi estimado através do método <i>GMM</i>	148
4.9	Análise comparativa entre o comportamento do risco específico, σ_{ei}^2 , e da entropia condicionada, $H(X PSI)$, para o caso em que o risco específico foi estimado através do método <i>GMM</i>	148
4.10	Análise comparativa entre o comportamento do risco sistemático ($\beta_i^2 \sigma_m^2$) e da informação mútua, $I(X, PSI)$, para as observações semanais.	149

4.11	Análise comparativa entre o comportamento do risco específico (σ_{ei}^2) e da entropia condicionada $[H(X PSI)]$ para as observações semanais.	151
4.12	Coefficiente de correlação global (λ) e coeficiente de correlação linear (R) entre cada um dos títulos e o índice PSI 20 para as observações semanais.	152
4.13	Análise comparativa entre o comportamento do risco sistemático ($\beta_i^2 \sigma_m^2$) e da informação mútua, $I(X, PSI)$, para as taxas de rendibilidade semanais. O risco sistemático foi estimado através do método <i>GMM</i>	155
4.14	Análise comparativa entre o comportamento do risco específico (σ_{ei}^2) e da entropia condicionada $[H(X PSI)]$ para as taxas de rendibilidade semanais. O risco específico foi estimado através do método <i>GMM</i>	155
5.1	Informação mútua para os índices bolsistas face aos lags $k = 1, \dots, 10$. O segmento de recta a tracejado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 1% (0,0030 <i>nats</i>) e o segmento de recta a ponteadado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 5% (0,0015 <i>nats</i>), com 2 graus de liberdade.	169
5.2	Informação mútua para as sucessões cronológicas filtradas dos índices bolsistas face aos lags $k = 1, \dots, 10$. O segmento de recta a tracejado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 1% (0,0030 <i>nats</i>) e o segmento de recta a ponteadado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 5% (0,0015 <i>nats</i>), com 2 graus de liberdade.	177
5.3	Informação mútua para as sucessões cronológicas filtradas dos efeitos <i>GARCH</i> dos índices bolsistas face aos lags $k = 1, \dots, 10$. O segmento de recta a tracejado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 1% (0,0030 <i>nats</i>) e o segmento de recta a ponteadado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 5% (0,0015 <i>nats</i>), com 2 graus de liberdade.	179
5.4	Coefficiente de correlação global para os dados semanais índices bolsistas face aos lags $k = 1, \dots, 10$. O segmento de recta a tracejado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 1% (0,0144 <i>nats</i>) e o segmento de recta a ponteadado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 5% (0,0070 <i>nats</i>), com 2 graus de liberdade.	184

5.5	Coefficiente de correlação global para as sucessões cronológicas filtradas semanais dos índices bolsistas face aos lags $k = 1, \dots, 10$. O segmento de recta a tracejado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 1% (0,0144 <i>nats</i>) e o segmento de recta a ponteadado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 5% (0,0070 <i>nats</i>), com 2 graus de liberdade.	189
5.6	Informação mútua para as sucessões cronológicas semanais filtradas dos efeitos <i>GARCH</i> dos índices bolsistas face aos lags $k = 1, \dots, 10$. O segmento de recta a tracejado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 1% (0,0144 <i>nats</i>) e o segmento de recta a ponteadado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 5% (0,0070 <i>nats</i>), com 2 graus de liberdade.	191
6.1	Evolução temporal do preço do índice (<i>PI</i>), dos dividendos, da <i>DY</i> e da ΔDY para o período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003.	223
6.2	Evolução temporal do preço do índice (<i>PI</i>), dos <i>earnings</i> , do <i>EPR</i> e da ΔEPR para o período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003.	224
6.3	Informação mútua (<i>nats</i>) entre os momentos t e $t - k$, com $k = 1, \dots, 10$, para as variáveis em estudo. O segmento de recta refere-se ao nível de significância a 5% (0,0323), tendo em conta a dimensão das amostras e respectivos graus de liberdade.	235
6.4	Coefficiente de correlação global (λ) e coeficiente de correlação linear (R) entre ER_t e cada uma das variáveis em estudo, tendo em conta vários desfasamentos. Os valores apresentados nesta figura referem-se aos resultados reportados nas Tabelas 6.7 e 6.8.	239
6.5	Teste à distribuição normal, baseado na distribuição cumulativa dos resíduos face à distribuição cumulativa da distribuição normal. Os resíduos A dizem respeito aos resíduos obtidos com a aplicação do modelo de regressão linear 6.17 e os resíduos B referem-se aos resíduos obtidos com o modelo de regressão linear patente na Tabela 6.5 nas colunas (4), (5) e (6).	243
6.6	Análise estatística e teste <i>Jarque-Bera</i> dos resíduos resultantes da estimação da equação 6.45.	245

Resumo

Este trabalho apresenta uma análise da aplicação de medidas da teoria da informação aos mercados bolsistas, sendo de evidenciar a análise de incerteza e da dependência não-linear.

De modo mais específico, é apresentada a entropia como medida de incerteza para sucessões

cronológicas financeiras e comparado o seu comportamento com o das principais medidas de risco utilizadas em finanças: o desvio-padrão e os *Betas* resultantes do modelo CAPM. Em termos financeiros, os resultados obtidos neste estudo indicam que a entropia é sensível ao efeito diversificação e apresenta um comportamento algo semelhante ao do desvio-padrão, contudo é uma medida mais geral e incorpora mais informação acerca da distribuição de probabilidade, com vantagens óbvias no caso de excesso de curtose e assimetria.

É desenvolvido um teste à independência entre variáveis baseado na informação mútua, que tem a vantagem de captar a dependência linear e não-linear sem ser necessário assumir quaisquer pressupostos quanto à distribuição de probabilidade teórica e especificação de modelos de dependência.

O teste de independência e o coeficiente de correlação global (baseados na informação mútua) são utilizados para avaliar a dependência temporal global das taxas de rendibilidade de sete índices bolsistas e comparados os resultados com outros modelos normalmente utilizados na abordagem não-linear. Para além disso, este teste é também utilizado para avaliar a relação entre determinados factores macroeconómicos e o comportamento do mercado bolsista de acções português, sendo comparados os seus resultados com os obtidos por outras abordagens lineares e não-lineares. Os resultados permitem concluir que existem não-linearidades nas sucessões cronológicas macroeconómicas e financeiras e que a tradicional abordagem linear pode não ser suficiente para avaliar a relação existente entre o mercado bolsista português e algumas variáveis macroeconómicas e financeiras.

Palavras-chave

Teoria da informação, entropia, informação mútua, dependência não-linear, incerteza, mercados bolsistas de acções, eficiência.

JEL: C14, C22, C32, G14

Abstract

This thesis analyses the application of measures of the information theory to the stock market, highlighting the analysis of uncertainty and nonlinear dependence.

More specifically, the entropy is presented as a measure of uncertainty for financial time series and we compare its behaviour with that of the main risk measures commonly used in finance: the standard deviation and the resulting *Betas* from the *CAPM*. In financial terms, the results obtained in this study indicate that the entropy is sensitive to the effect of diversification and behaves similarly to the standard deviation. However, the entropy is a more general measure and incorporates more information about the probability distribution, with evident advantages in the case of excess kurtosis and skewness.

An independence test based on the mutual information is constructed. One important advantage of this approach resides precisely in the ability to account for nonlinear dependencies with no need to specify a theoretical probability distribution or to use a mean-variance model framework.

The independence test and the global correlation coefficient (based on the mutual information) are applied to measure serial correlation of some stock market indexes and we found the presence of nonlinear dependence in all cases. Besides, the mutual information test is used as a measure of global dependence between the Portuguese stock market and a set of macroeconomic factors and we show that this measure can overcome some of the weaknesses of the traditional linear approaches commonly used in this context. Globally, our results indicate that some explanatory variables appear to have a statistically significant influence on the excess return and thus may constitute good proxies for this variable.

Keywords

Information theory, entropy, mutual information, nonlinear dependence, uncertainty, stock markets, efficiency.

JEL: C14, C22, C32, G14

Agradecimentos

No momento da conclusão não posso deixar de expressar o meu reconhecido agradecimento a todos os professores, colegas, alunos, família e amigos que contribuíram de forma directa ou indirecta para o enriquecimento de conhecimentos e experiências e concretização deste trabalho. Apesar da impossibilidade de nomear todos os que me ajudaram não posso deixar de agradecer individualmente a algumas pessoas.

Aos meus orientadores, Prof. Doutor Rui Menezes e Prof. Doutora Diana Mendes, pela amizade sempre demonstrada, pela valiosa orientação prestada, pelo apoio, pelas sugestões, comentários e todos os ensinamentos transmitidos que contribuíram para que fossem ultrapassadas inúmeras dificuldades durante a realização desta tese.

O meu reconhecido agradecimento ao Prof. Doutor António Heitor Reis por todos os ensinamentos transmitidos, pela disponibilidade e amizade, essenciais para a prossecução e desenvolvimento deste trabalho. Um agradecimento especial ao Prof. Doutor António Serrano por todo o apoio prestado ao longo do doutoramento, ao Prof. Doutor Jacinto Vidigal, ao Dr. João Assunção e ao Dr. José Correia pela amizade sempre demonstrada e disponibilidade para a discussão de vários aspectos deste trabalho. Queria também agradecer ao Dr. Paulo Alves e ao Dr. Nuno Ferreira, meus colegas do programa Doutoral, pelo apoio, interessantes discussões e disponibilização de dados.

Ao Departamento de Gestão de Empresas da Universidade de Évora, por me ter sempre apoiado neste percurso.

À Fundação Eugénio de Almeida pelo apoio e incentivos prestados à elaboração deste trabalho, que promoveram a possibilidade de realização de uma investigação mais profunda e detalhada.

Aos meus amigos, que viveram de perto as minhas angústias e alegrias, quero deixar o meu mais profundo apreço.

Por último, às pessoas mais importantes da minha vida: a minha família. Um agradecimento muito especial ao Paulo por toda a ajuda prestada, não só a nível informático e discussão do trabalho, mas essencialmente pelo amor, compreensão, carinho e incentivo demonstrados de forma permanente e incondicional. Às minhas irmãs Ana e Teresa pela paciência, pela ajuda e constante apoio principalmente em alguns momentos críticos, incentivando-me sempre a concluir o trabalho que aqui se apresenta. Aos meus pais, qualquer palavra que escreva nunca será suficiente para agradecer tudo o que são para mim e por isso lhes dedico este trabalho.

Introdução

O mercado bolsista de acções é frequentemente considerado como um sistema complexo, dada a multiplicidade de acções e interações estabelecidas entre os agentes que nele operam, a quantidade de informação que fornece, a impossibilidade de repetir experiências e o elevado grau de risco e incerteza que pode incorporar. Neste contexto, a disponibilização de informação o mais credível e fidedigna possível ao investidor reveste-se de extrema importância. Torna-se imperativo na tentativa de explicação dos fenómenos bolsistas, sua articulação com factores inerentes às próprias empresas e factores macroeconómicos, o melhor conhecimento possível da rendibilidade, do risco, do nível de incerteza, do comportamento do mercado, da forma como este interage com factores macroeconómicos e financeiros (taxas de juro, PIB, estabilidade económico-política, preço do petróleo, etc) e depende dos seus próprios valores históricos.

As abordagens tradicionais utilizadas no âmbito da economia financeira podem apresentar algumas falhas quanto à respectiva aderência à realidade. É claro que quaisquer modelos matemáticos utilizados são sempre simplificações da realidade, contudo existem pressupostos assumidos por alguns dos principais modelos usados em finanças que podem conduzir a enviesamentos dos resultados obtidos e sua interpretação. Em praças financeiras mais pequenas (como o caso da Euronext Lisboa), com níveis de liquidez reduzidos e onde a possibilidade de realizar especulação é relativamente elevada, o modelo *CAPM* (*Capital Asset Pricing Model*) e outras metodologias assentes no pressuposto da eficiência e da independência das taxas de rendibilidade, podem perder propriedades, revelando-se até insuficientes na forma como é medido o risco e a incerteza e a sensibilidade e dependência do rendimento dos activos face ao rendimento do mercado (ou outros factores que possam ser relevantes).

O pressuposto da existência de um mercado eficiente, nomeadamente o mercado de acções português, onde as taxas de rendibilidade das acções seguem uma distribuição normal e são independentes e identicamente distribuídas (*i.i.d.*), tem sido alvo de crítica por parte de muitos autores [e.g. Soares (1994), Soares (1997), Afonso *et al.* (1998), Godinho (1999), Gama (2000)]. A hipótese de eficiência do mercado baseia-se no pressuposto de que toda a informação está disponível de igual

modo para todos os investidores, onde nenhum deles tem acesso a mais informação que os restantes, estando por isso condenadas ao fracasso quaisquer estratégias que visem ganhos superiores ao normal. Para além disso, esta teoria defende também que as cotações dos títulos reflectem toda a informação pública e privada existente, não existindo assimetrias de informação.

De igual modo, a distribuição seguida pelas cotações das acções é tema de investigação e discussão desde os anos 50, quando alguns matemáticos começaram a interessar-se pela modelação dos mercados financeiros [e.g. Kendall (1953), Osborne (1964)]. A ideia de Bachelier (1900) de que as cotações seguem uma distribuição normal foi várias vezes contestada e frequentemente substituída por outras distribuições de probabilidade mais concordantes com as verdadeiras distribuições seguidas pelas taxas de rendibilidade das acções. De acordo com Kendall (1953), os preços das acções comportavam-se como se fossem gerados por um processo aleatório similar ao produzido por uma roleta. Desta forma, os rendimentos das acções comportar-se-iam de um modo totalmente independente dos seus valores históricos, obedecendo a uma frequência relativamente estável no tempo. A hipótese dos preços seguirem um passeio aleatório, implica que as respectivas taxas de rendibilidade sejam entre si independentes e identicamente distribuídas. A crítica à distribuição normal surge ao se verificar que a volatilidade das taxas de rendibilidade das acções é geralmente muito superior à que seria de esperar se estas seguissem, de facto, a curva de Gauss. Com efeito, estudos realizados àquelas taxas, mostram que as respectivas distribuições exibem “caudas” muito mais espessas (*fat tails*) do que é admitido na distribuição normal [Mandelbrot (1964), Osborne (1964), Fama (1965), Merton (1976), Hsu (1982), Kon (1984), Tucker (1992), Liesenfeld *et al.* (2000), Soares (1997), Stutzer (1998), Godinho (1999), Farmer (1999), Mantegna *et al.* (2000), Curto (2002)]. O não ajustamento da distribuição normal, dada a evidente curva leptocúrtica, leva a supor que possivelmente as taxas de rendibilidade das acções não são *i.i.d.*

A rejeição da distribuição normal para as sucessões cronológicas referentes às taxas de rendibilidade das acções, a existência de *fat tails*, de heterocedasticidade e possível autocorrelação linear e não-linear constituem factos estilizados que podem conduzir à possível falta de adequabilidade de alguns modelos utilizados na análise e avaliação de activos, carteiras e mercados. Por exemplo, na teoria financeira o risco e a incerteza são vulgarmente medidos pela variância, pelos *Betas* resultantes do modelo *CAPM* ou pelo *VaR* (*Value-at-Risk*). Tanto a variância como o *VaR* são medidas de dispersão em relação à média, constituindo verdadeiras medidas de risco no caso em que a distribuição de probabilidade é normal. Aquando da existência de assimetria e *fat tails*, a variância, o desvio-padrão e o *VaR* podem não ser perfeitamente apropriados, revelando-se insuficientes na quantificação do risco subjacente. Além disso, como medidas de incerteza, podem inclusivamente ser erróneas neste contexto [Soofi (1997)].

Uma das formas mais comuns de avaliar a possível dependência temporal nas sucessões cronológicas referentes às taxas de rentabilidade tem sido o recurso a modelos de regressão linear do tipo *ARIMA*, modelos estes que captam apenas a dependência linear ou linearizável e pressupõem que os resíduos resultantes constituem um ruído branco. Contudo, vários estudos apontam para a insuficiência de tal abordagem, dada a evidência de dependência não-linear nas taxas de rentabilidade [vide e.g. Afonso *et al.* (1998), Darbellay (1998a), Maasoumi *et al.* (2002)]. A vasta utilização de modelos lineares prende-se com a sua relativa simplicidade, contudo, quando as variáveis não são contínuas, ou não são *i.i.d.* (cujas causas podem ser a não estacionariedade, não-linearidades e/ou evidência de caos) as conclusões tiradas por estes modelos podem ser insuficientes ou até mesmo incorrectas [Granger *et al.* (2004)]. Os resíduos resultantes da aplicação de tais modelos podem incorporar não-linearidades não especificadas *a priori*. Uma das possíveis vias para análise da dependência não-linear nos resíduos tem sido a aplicação dos modelos *ARCH* e afins, de que são exemplo numerosos estudos, como por exemplo Hsieh (1989), Soares (1994), Qi (1999), Curto (2002), entre muitos outros. Ainda assim, estes modelos pressupõem a existência de um tipo de não-linearidade pré-especificada, facto que pode limitar os resultados caso existam outras fontes de não-linearidade.

No campo da análise da dependência entre variáveis, é de realçar a importância da avaliação das relações estabelecidas entre diversos factores económicos e financeiros e o comportamento de determinadas Bolsas de Valores, tanto na componente de longo prazo como na componente de curto prazo. Existem bastantes estudos que tentam explorar o desempenho de variáveis macroeconómicas tais como: índice de produção, taxas de juro, preços do petróleo e taxas de desemprego, entre outras, como determinantes dos movimentos dos preços e das taxas de rentabilidade das acções, sendo de destacar, entre outros, Basu (1983), Chen, Roll e Ross (1986), Fama e French (1993), McQueen e Roley (1993), Haugen e Baker (1996), Pesaran e Timmermann (1995), Binswanger (2000, 2001) e Maasoumi e Racine (2002). A grande quantidade de estudos sobre os determinantes dos preços das acções é justificada pelo facto de estas constituírem um importante investimento de capital utilizado pela economia para gerar produção e simultaneamente uma forma de rentabilidade proporcionada pelas empresas. Neste âmbito têm sido essencialmente utilizadas abordagens baseadas em modelos de regressão linear com uma equação ou com várias equações (modelos *VAR* - modelos autorregressivos vectoriais), testes de causalidade à Granger e técnicas de cointegração. Estas abordagens não têm tido em conta as possíveis não-linearidades existentes, o que pode conduzir à rejeição de variáveis importantes e omissão de factores determinantes.

Com o objectivo de conseguir uma explicação mais realista dos fenómenos, tem-se assistido a uma crescente aproximação entre as diversas áreas científicas. Desta aproximação é de realçar a

que se tem verificado de forma crescente entre a física e as finanças/economia, baseando-se nos “paralelismos” existentes entre os processos da natureza e o mundo económico e financeiro. De referenciar, por exemplo, Mantegna e Stanley (2000), Stanley, Amaral, Gabaix, Gopikrishnan e Pleurou (2001) e McCauley (2003) que apresentaram algumas similaridades de comportamento entre a física e a economia financeira, sendo exemplo a liquidez dos mercados de activos frequentemente transaccionados ser comparável ao “banho térmico” na termodinâmica e a entropia poder constituir medida de desordem de um mercado ou de um activo em particular.

Surge assim uma nova disciplina – a econofísica- que pretende acima de tudo explicar a razão de ser de determinados fenómenos económico-financeiros por meio de uma análise e modelação típica dos processos da física, nomeadamente através de teorias e técnicas desenvolvidas no campo da termodinâmica e física estatística, sistemas dinâmicos não-lineares e outros [Farmer *et al.* (1999a), Farmer (1998, 1999), Ausloos *et al.* (1999), Ausloos *et al.* (2001), Drozd *et al.* (2001a), Drozd *et al.* (2001b), Stanley *et al.* (2001), Mantegna *et al.* (2000), Ilinski (2001), Voit (2001), Bouchaud (2002), McCauley (2003)].

Esta abordagem pode ser justificada pelo facto de os mercados bolsistas de acções serem caracterizados pela infinidade de dados e informação que podem disponibilizar, onde a complexidade assume níveis bastante elevados, de tal forma que tem constituído um ponto de atracção para os físicos, cuja visão e capacidade de modelação podem revelar-se preciosas para a compreensão destes mercados. Uma questão que tem assumido uma grande relevância e tem sido alvo da aplicação de fractais e outros conceitos da física estatística, é a descoberta de que os mercados bolsistas não são perfeitamente eficientes [Ausloos (1998), McCauley (2003)], o que desde logo põe em causa alguns pressupostos das metodologias tradicionais da economia financeira. No presente contexto, afigura-se vantajoso o crescente interesse manifestado pelos economistas nesta área, uma vez que poderão promover um maior desenvolvimento e interligação entre as áreas em causa, através do seu conhecimento teórico de base do comportamento dos fenómenos de cariz económico-financeiros.

A interligação entre a física, a teoria da informação e as finanças tem assumido um papel primordial na análise dos mercados financeiros, de salientar a exploração de medidas da física estatística nas finanças, nomeadamente a entropia e a informação mútua [e.g. Granger *et al.* (1994), Darbellay *et al.* (2000b), Maasoumi *et al.* (2002)]. A entropia é um conceito oriundo da física, introduzido por Clausius em 1865 como caracterização da Segunda Lei da Termodinâmica: “a energia do universo é constante e a sua entropia está a aumentar continuamente”. Em 1948, Shannon introduziu a entropia como medida de incerteza e de informação num sistema, dando origem ao seu desenvolvimento na teoria da informação. A introdução desta medida e suas variantes (nomeadamente a entropia condicionada e a informação mútua) na teoria económico-financeira

prende-se com as propriedades por si apresentadas como possível medida de incerteza, teste à independência e medida da dependência global entre variáveis.

Na presente tese, na tentativa de explicação dos fenómenos da forma mais aproximada à realidade, são utilizados conceitos oriundos da física e da teoria da informação, mais concretamente a entropia, a entropia condicionada e a informação mútua, como medidas de informação sobre os mercados bolsistas de acções. Esta abordagem é baseada em diversos estudos realizados no âmbito da econofísica e da econometria [e.g. Granger *et al.* (1994), Darbellay *et al.* (2000b), Maasoumi *et al.* (2002)] e comparados os seus resultados com os obtidos através das metodologias tradicionais de análise dos mercados, das carteiras e dos títulos. Através destas medidas oriundas da física e largamente aplicadas na teoria da informação, pretende-se caracterizar de forma mais fiel a incerteza subjacente a um determinado mercado bolsista; a dependência estatística ou correlação (em sentido lato) que possa existir nas taxas de rendibilidade; e também a dependência que o mercado bolsista português apresenta face a indicadores macroeconómicos e financeiros (taxas de juro, taxas de inflação, taxas de desemprego, preço do petróleo, etc), que podem descrever o estado de desenvolvimento económico do país e influenciar a confiança dos investidores na economia portuguesa.

O problema em estudo neste trabalho de investigação é a aparente insuficiência de capacidade de descrição do fenómeno através das metodologias tradicionais de análise dos mercados financeiros, carteiras e títulos, baseadas em pressupostos que muitas vezes não são verificados empiricamente, nomeadamente a normalidade e a linearidade. Esta insuficiência parece ser mais notada no que concerne à forma como é encarado o risco e a incerteza e avaliação das relações de dependência que se possam estabelecer entre as variáveis. Neste sentido a informação revelada ao investidor pode não ser totalmente fidedigna e representativa da realidade e por isso, as decisões tomadas tendo por base essa mesma informação podem não conduzir aos objectivos desejados. A aplicação dos modelos baseados na distribuição de probabilidades normal, na linearidade e na ausência de autocorrelação (entre outros pressupostos), sem a devida verificação da sua existência, pode desvirtuar a possibilidade de realizar previsões e medir o risco e incerteza reais que assolam tal mercado. Neste sentido, abre-se um importante campo de acção na tentativa de encontrar novas medidas e abordagens que permitam conhecer e contribuir para uma explicação mais realista dos fenómenos.

Na tentativa de dar resposta ao problema em causa, é preconizada uma abordagem baseada na ausência de pressupostos relativamente à distribuição de probabilidade teórica e linearidade seguida pelos dados. São utilizadas medidas da física posteriormente adoptadas pela teoria da informação. Estas medidas apresentam propriedades matemáticas e interpretativas que podem promover uma análise mais completa do comportamento dos mercados bolsistas.

O objectivo global desta tese consiste em determinar e explorar as potencialidades de algumas medidas da teoria da informação, nomeadamente a entropia e a informação mútua, relativamente aos modelos mais utilizados na análise dos mercados bolsistas de acções, das carteiras e dos títulos, principalmente no que concerne à disponibilização da informação mais credível possível ao investidor que precisa de ferramentas concretas para basear um processo de tomada de decisão racional e realizar um bom investimento. Deste modo é possível avaliar a aplicabilidade das medidas da teoria da informação (entropia, entropia condicionada e informação mútua) ao mercado bolsista e em que medida elas contribuem para explicar melhor certos fenómenos. Como é natural as conclusões extraídas na tese são válidas no âmbito dos dados e contexto analisados.

De modo mais específico, visam-se atingir os objectivos seguidamente mencionados. Um primeiro objectivo consiste em avaliar a entropia e a informação mútua como medidas de incerteza no mercado bolsista de acções português. As abordagens tradicionais do risco assumem que as taxas de rendibilidade dos activos são normalmente distribuídas, *i.i.d.* e que o mercado é eficiente. A análise estatística da distribuição de probabilidade seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos e do índice PSI 20, os testes à estacionariedade e aos pressupostos da regressão linear (homocedasticidade, ausência de autocorrelação, distribuição normal do erro) poderão constituir uma forma de avaliar o maior ou menor afastamento da evidência empírica face à teoria. Deste modo a aplicação da entropia e informação mútua como medidas de incerteza poderá ser justificada pelo facto de as taxas de rendibilidade das acções não respeitarem os pressupostos das metodologias tradicionais. A utilização de medidas da teoria da informação poderá ser considerada um complemento, uma vez que não é necessário assumir qualquer distribuição de probabilidade teórica para que constituam medidas de incerteza globais.

O segundo objectivo é desenvolver um teste de independência global baseado na informação mútua, teste este que permita avaliar o nível de dependência entre variáveis sem necessitar de qualquer pressuposto sobre a distribuição de probabilidade teórica seguida pelas sucessões cronológicas e sem especificar o tipo de não-linearidade seguida pelos dados. Deste modo, poderá ser possível conhecer o grau de dependência entre variáveis, não sendo necessário assumir quaisquer pressupostos quanto ao tipo de dependência existente e/ou distribuição de probabilidade adjacente. O desenvolvimento deste tipo de teste constituirá um meio para a prossecução dos dois objectivos seguintes.

O terceiro objectivo é avaliar a dependência temporal em vários índices bolsistas internacionais, com vista a concluir sobre a respectiva eficiência e estabelecer comparações entre as diferentes praças internacionais em estudo. Uma das principais premissas das hipótese de eficiência do mercado baseia-se na não possibilidade de predictabilidade que proporcione ganhos anormais de forma sistemática. Esta não predictabilidade pressupõe que os preços dos activos, nomeadamente das

acções apresentem um comportamento semelhante ao de um passeio aleatório, o que implica que os retornos ou respectivas taxas de rendibilidade sejam *i.i.d.* A avaliação da dependência temporal nas sucessões cronológicas das taxas de rendibilidade das acções e índices bolsistas tem sido realizada através de uma abordagem essencialmente linear, o que pode não ser suficiente para retirar conclusões fidedignas no caso de existirem não-linearidades de diversa ordem nas variáveis em causa. Neste contexto pretende-se, através de uma análise comparativa entre a abordagem linear, algumas das mais populares abordagens não-lineares (nomeadamente o teste *ARCH LM* de Engle, o teste de McLeod e Li, o teste de Tsay, o teste *BDS* e os expoentes de Lyapunov) e um teste à independência global baseado na informação mútua, concluir acerca da (in)dependência temporal apresentada pelas taxas de rendibilidade de diversos índices bolsistas internacionais.

É comum assumir-se que o mercado bolsista funciona em certa medida como um espelho da situação a nível social, económico, político e financeiro, evidenciando também o estado da economia global. O mercado bolsista de acções português, um dos principais objectos de estudo deste trabalho de investigação, é ainda caracterizado pela sua pequena dimensão e fraca liquidez, factores que parecem facilitar a existência de especulação e mesmo alguma não eficiência [Crato *et al.* (1989), Sousa Câmara (1991), Soares *et al.* (1992), Soares (1997), Godinho (1999), Gama (2000)]. Este facto poderá provocar alguns enviesamentos aquando da análise de resultados através das metodologias tradicionais de avaliação de activos. Neste sentido, o quarto objectivo consiste em avaliar o nível de dependência global entre o mercado bolsista português e factores macroeconómicos e financeiros. A análise desta relação compreende a avaliação das componentes de curto e longo prazo, utilizando para tal modelos com uma ou várias equações e modelos de avaliação de dependência não-linear. No fundo pretende-se descobrir se a informação mútua representa melhor a dependência entre variáveis que as técnicas normalmente utilizadas, nomeadamente a regressão linear, a causalidade à Granger, os testes de cointegração e os modelos *VAR*. O objectivo não é a explicação das variações dos preços das acções ou do comportamento do índice de mercado, mas apenas uma contribuição para a questão específica da relevância da actividade económica como determinante do comportamento do índice do mercado de acções. Pretende-se verificar se a informação mútua, como medida de dependência global, pode oferecer vantagens face a algumas das metodologias tradicionais baseadas na abordagem linear, uma vez que tem a capacidade de capturar a dependência no seu todo (linear e não-linear), sem necessidade de pressupostos de qualquer distribuição de probabilidade teórica pré-definida ou especificação do modelo de dependência.

Com vista à prossecução dos objectivos, a presente tese está organizada em sete capítulos. O Capítulo 1 apresenta algumas das principais abordagens nas finanças, sendo dado especial destaque para a hipótese de eficiência dos mercados, formas de testar esta mesma hipótese e factos estilizados

encontrados na literatura quanto ao comportamento dos mercados bolsistas de acções. Seguidamente são apresentados os principais modelos de gestão e avaliação de activos, nomeadamente a Teoria da Carteira de Markowitz, o modelo *CAPM* e o modelo *APT* (*Arbitrage Pricing Theory*). São descritos os seus pressupostos e propriedades, assim como algumas críticas e lacunas identificadas na literatura.

O Capítulo 2 apresenta a entropia e as suas variantes, em particular a informação mútua, as suas propriedades e a forma de estimação utilizada neste trabalho de investigação. Com vista a contextualizar e justificar a introdução desta medida e das suas variantes no presente estudo, são inicialmente exploradas algumas similaridades entre a física e a economia financeira, que possibilitam a interacção entre as duas áreas da ciência, criando uma nova disciplina: a econofísica. Em seguida é apresentada a entropia e as suas propriedades matemáticas tanto para distribuições discretas como para distribuições contínuas. A informação mútua é também alvo de análise, assim como as suas propriedades. Neste contexto é desenvolvido um teste à independência global (linear e não-linear) baseado na informação mútua, cujas propriedades apontam para uma possível maior eficácia na captura da dependência não-linear entre variáveis. É descrito o método de estimação para a informação mútua e para a entropia utilizado neste estudo - a equiquantização marginal - que se baseia na partição equitativa do espaço. Por fim, é ainda explorada a utilização da entropia na teoria financeira, sendo também analisados alguns exemplos de aplicação da entropia em determinadas áreas.

No Capítulo 3 são descritos e analisados estatisticamente os dados utilizados na presente tese. Numa primeira fase é apresentada a organização e modo de funcionamento do mercado bolsista português, um dos principais objectos de estudo deste trabalho. Consoante os objectivos e as diferentes aplicações deste trabalho, foram seleccionadas amostras correspondentes. São assim analisados estatisticamente e quanto à evolução temporal vinte e três títulos continuamente cotados na Euronext Lisboa no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002 com vista a avaliar a *performance* das medidas da teoria da informação baseadas na entropia como medidas de incerteza; sete índices bolsistas internacionais (ASE, CAC 40, DAX 30, FTSE 100, IBEX 35, PSI 20 e S&P 500) para o período entre 4/01/1993 e 31/12/2002 com vista a avaliar a dependência temporal global (linear e não-linear) existente nas sucessões cronológicas referentes às taxas de rendibilidade respectivas; e um conjunto de variáveis macroeconómicas e financeiras com periodicidade mensal para o período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003 de modo a se poder concluir acerca da questão específica da relevância da actividade económica e como pode ser determinante do comportamento do índice do mercado de acções português. No âmbito da análise estatística foram aplicados os testes *ADF* (*Augmented Dickey-Fuller*) e *KPSS* (teste proposto por Kwiatkowski, Phillips, Schmidt e Shin em

1992) à estacionariedade, o teste de *Ljung-Box* à ausência de autocorrelação linear, teste de Engle (*ARCH LM*) à homocedasticidade e o teste de *Jarque-Bera* à distribuição normal das observações. Foram calculadas algumas das principais medidas de estatística descritiva, nomeadamente a média, a mediana, o desvio-padrão, a assimetria e a curtose.

O Capítulo 4 apresenta a entropia como medida de incerteza para sucessões cronológicas financeiras e compara o seu comportamento com o das principais medidas de risco utilizadas em finanças: o desvio-padrão e os *Betas* resultantes do modelo *CAPM*. Há que realçar que, neste estudo, a noção de incerteza está intimamente ligada à maior ou menor dificuldade em prever um determinado evento futuro, enquanto que o risco é mais utilizado no sentido de avaliar possíveis perdas ou ganhos futuros. Em termos de resultados, é de salientar que a entropia satisfaz as premissas necessárias para uma medida de incerteza, nomeadamente o facto de ser uma função contínua no âmbito das probabilidades, ser aditiva e subaditiva e atingir um máximo quando se observa igual probabilidade de ocorrência dos acontecimentos. Em termos financeiros, os resultados obtidos neste estudo indicam que a entropia é sensível ao efeito diversificação e que apresenta um comportamento semelhante ao do desvio-padrão, ainda que apresente vantagens baseadas na sua generalidade.

No Capítulo 5 é avaliada a dependência global (linear e não-linear) temporal das sucessões cronológicas referentes às taxas de rendibilidade de vários índices bolsistas internacionais, sendo estabelecida a comparação entre os resultados de diferentes abordagens. Neste contexto são utilizados modelos lineares (autocorrelação linear) e diversos testes de dependência não-linear, nomeadamente o teste de McLeod e Li, o teste *ARCH LM* de Engle, o teste *BDS*, o expoente de Lyapunov e a informação mútua. Pretende-se concluir acerca da eficiência dos mercados em estudo, sendo estabelecidas comparações entre os mesmos. Os resultados obtidos apontam para a existência de dependência temporal não-linear, tendo sido identificados efeitos caóticos e estocásticos. A informação mútua permite identificar *lags* onde existe dependência não-linear e através do coeficiente de correlação global é possível quantificar o nível dessa mesma dependência, vide por exemplo Dionísio, Menezes e Mendes (2004a, 2004b).

No Capítulo 6 pretende-se avaliar a relação entre determinados factores macroeconómicos e o comportamento do mercado bolsista de acções português recorrendo nomeadamente a abordagens lineares e não-lineares, através de modelos lineares com uma ou várias equações e testes de dependência global (linear e não-linear) através da informação mútua e do coeficiente de correlação global. O objectivo não é a explicação das variações dos preços das acções ou do comportamento do índice de mercado, mas apenas uma contribuição para a questão específica da relevância da actividade económica e de como pode ser determinante do comportamento do índice do mercado de acções. Este capítulo incide sobre o mercado bolsista português e analisa a relevância de alguns

factores macroeconómicos e financeiros como determinantes das cotações (preços) das acções. São consideradas as componentes de relação de longo e de curto prazo através de abordagens lineares e não-lineares (baseadas na informação mútua), com vista a uma análise o mais detalhada possível sobre o assunto em causa. Os resultados obtidos permitem concluir que existem não-linearidades nas sucessões cronológicas macroeconómicas e financeiras e que a tradicional abordagem linear pode não ser suficiente para avaliar a relação existente entre o mercado bolsista português e algumas variáveis macroeconómicas e financeiras, vide por exemplo Dionísio, Menezes, Mendes e Vidigal da Silva (2004c).

Por fim, o Capítulo 7 apresenta as conclusões retiradas do trabalho de investigação realizado, assim como as limitações encontradas e sugestões para trabalhos de investigação futuros.

Neste trabalho de investigação foi utilizado diverso *software* como instrumento de apoio ao cálculo e estimação. O *software Eviews 4.1* foi utilizado para a análise estatística dos dados, para a realização de testes de cointegração e estimação de modelos *VAR* e *VECM* (modelos vectoriais de correcção do erro) em contexto de cointegração, estimação de modelos *TAR* e *M-TAR* e realização de outros testes, nomeadamente o teste de *Ljung Box*, o teste *BDS* e o teste *ARCH LM*. Na estimação das entropias e da informação mútua foi utilizado o *software Matlab V.6.5*. Para a estimação dos expoentes de Lyapunov foram utilizados três programas baseados em algoritmos diferentes, mais concretamente, é utilizado um programa baseado no algoritmo de Wolf *et al.* (1985) em Matlab V.6.5, o pacote *TSTOOL* que corre em Matlab com um algoritmo melhorado de Wolf *et al.* (1985) e finalmente o programa *CSPW* baseado no algoritmo proposto por Abarbanel (1996).

A finalizar, importa realçar que os resultados obtidos neste trabalho de investigação e respectivas conclusões são válidos para o período temporal e para os dados analisados. Futuros desenvolvimentos no âmbito do *focus* da presente tese, poderão considerar a tentativa de identificação das fontes de não-linearidade nas sucessões cronológicas financeiras, através da separação clara das componentes determinística e estocástica, na tentativa de melhor compreender o comportamento dos mercados bolsistas e providenciar ao investidor informação mais concreta e realista como base para a decisão de investimento. Uma outra potencial aplicação seria a inclusão da entropia como medida de incerteza em modelos de selecção de carteiras de activos financeiros. Tal aplicação pode ser justificada com base na generalidade da entropia como medida de incerteza e desordem e na possibilidade de considerar mais informação sobre a distribuição de probabilidade das variáveis que as medidas de risco e incerteza tradicionalmente usadas.

Capítulo 1

Abordagens tradicionais nas finanças

O presente capítulo apresenta alguns estudos efectuados no sentido de avaliar o valor da informação, realçando a sua importância nos mercados financeiros. É evidenciado o seu papel na teoria das carteiras, onde a hipótese de eficiência dos mercados, descrita na segunda secção, se baseia no pressuposto de que os preços dos títulos reflectem verdadeiramente toda a informação disponível e nenhum agente tem mais ou melhor informação que outrem, impossibilitando quaisquer manipulações e ganhos extraordinários sistemáticos nos mercados financeiros.

A terceira secção identifica os principais modelos da teoria de carteiras, sendo dado especial ênfase ao modelo da média-variância de Markowitz, ao modelo *CAPM* e ao modelo *APT*. São ainda alvo de referência alguns dos desenvolvimentos mais recentes nas abordagens de análise dos mercados financeiros, nomeadamente os modelos *ARCH/GARCH*, testes de cointegração e os modelos *VAR* e *VECM*.

1.1 Importância e valor da informação

A economia clássica, preconizada, entre outros, por Adam Smith e David Ricardo, não considerava a informação como um bem económico. Neste contexto, um bem, para assim ser considerado, deveria ser composto por matéria, fisicamente existente, energia ou serviços. Uma das suas principais características era o facto de poder ser facilmente mensurável, susceptível de medida cardinal, por isso os preços aplicados aos bens eram “facilmente” compreendidos. A informação era acima de tudo, entendida como conhecimento ou inteligência, sendo um factor importante mas não essencial para o desenvolvimento dos mercados.

Actualmente verifica-se que as áreas onde a informação é encarada como elemento vital, tão ou mais importante que outros bens (normais), são cada vez mais numerosas [Chang *et al.* (1998),

Clement (1993), Laffont (1990), Keizai (2001)].

De entre as inúmeras actividades onde a informação assume um papel relevante é de salientar a sua importância nos mercados financeiros, mais concretamente nos mercados bolsistas de acções, cujos níveis de incerteza promovem uma cada vez maior necessidade de informação oportuna e fidedigna.

Segundo Clement (1993) o valor da informação pode ser medido com o auxílio de uma função de probabilidade condicionada [ver também Tavares, *et al.* (1996)]. Este argumento baseia-se na existência de uma relação de causalidade entre informação e decisão que pode ser representada por uma função probabilidade, ou seja, a informação não é condição necessária e suficiente da eficácia decisional, é apenas condição necessária [Clement (1993), Hughes (1995)]. Neste sentido, convém estabelecer a diferença entre informação perfeita e informação imperfeita. Tem-se informação perfeita quando o sistema de informação revela o verdadeiro estado da natureza com certeza e a informação imperfeita existe quando o sistema de informação providencia apenas informação estocástica acerca do estado da natureza.

Vetschera (2000) cita o trabalho de Savage e apresenta as principais similaridades que existem entre as áreas da teoria da decisão e teoria da informação e analisa a forma como a entropia pode ser extremamente útil na teoria de decisão como medida de informação. No sentido de verificar a teoria em causa, o autor [Vetschera (2000)] coloca três hipóteses baseadas na relação entre a entropia e o valor da informação H_1 : existe uma relação positiva entre a entropia e o valor da informação perfeita; H_2 : quando as alterações na entropia são causadas por mudanças na estrutura do problema de decisão, maiores valores de entropia correspondem a maiores valores de informação imperfeita; H_3 : quando as mudanças de entropia são causadas por uma alteração na confiança no sistema de informação, maiores valores de entropia correspondem a menores valores de informação imperfeita.

A procura de informação resultará assim da utilidade que proporciona, condicionada pelos respectivos custos de obtenção. Estes custos estão intimamente associados aos níveis de entropia existentes no mercado em causa, uma vez que maiores níveis de entropia (desorganização, incerteza) implicam um maior esforço e morosidade na obtenção de “boa informação”, o que implica que o seu valor tende a aumentar, significando um maior custo para o investidor. Além disso, maiores níveis de entropia fazem com que o nível de utilidade proporcionada pela informação aumente consideravelmente, levando o investidor a sentir-se menos lesado pelo elevado valor pago pela obtenção de uma determinada informação.

O valor da informação tende a aumentar se esta for do conhecimento de um grupo restrito, diminuindo gradualmente tal valor à medida que se torna pública, pois o seu poder para provocar

grandes ganhos de utilidade decresce da mesma forma. Segundo Laffont (1990) o próprio equilíbrio de mercado, constitui por si só uma fonte privilegiada de informação, que rege o comportamento dos investidores de acordo com a sua postura relativamente ao risco, uma vez que fornece uma panorâmica geral da situação económica e política da região em causa.

A avaliação da informação nos mercados financeiros tem sido alvo de numerosos estudos e teses, sendo a mais conhecida a hipótese de eficiência dos mercados, descrita na secção seguinte.

1.2 A hipótese de eficiência dos mercados

A hipótese de eficiência dos mercados tem origem no trabalho desenvolvido por Bachelier (original publicado em 1900 e reeditado por Cootner em 1964), que realizou um estudo empírico sobre as obrigações do tesouro francês, tendo concluído que o comportamento dos preços era consistente com um processo passeio aleatório. Além disso Bachelier desenvolveu muitas das propriedades matemáticas do passeio aleatório em tempo contínuo, também designada por movimento Browniano, que se pensava terem sido descobertas mais tarde na física por Albert Einstein num artigo de 1905 sobre a determinação do número Avogrado. A proposta inicial de Bachelier consistia no facto de que as taxas de rendibilidade seguiam uma distribuição normal, e os preços uma distribuição lognormal (isto é, os preços perfaziam um movimento Browniano geométrico), de acordo com o qual se considera que as diferenças dos logaritmos dos preços são normalmente distribuídas.

São vários os estudos realizados em favor da ideia do passeio aleatório, sendo de realçar o trabalho de Kendall (1953) que analisou preços de vários activos (registos semanais de preços de acções, média mensal dos preços de trigo no mercado de Chicago, preços de algodão no *New York Mercantile Exchange*) e concluiu que os valores das sucessões cronológicas analisadas se comportavam como se fossem geradas por um passeio aleatório. Outros estudos empíricos realizados por Roberts (1959), Osborne (1964), Working (1960), Moore (1964), Granger e Morgenstein (1964) e Fama (1963) contribuíram para a validação da hipótese do passeio aleatório.

Até meados da década de 60 a ideia de mercado eficiente esteve intimamente ligada à teoria do passeio aleatório, tendo sido Fama (1970) e Samuelson (1965) dos principais impulsionadores desta área.

Segundo a teoria do passeio aleatório os preços dos activos não têm memória, isto é, as variações nos preços são (ou devem ser) totalmente imprevisíveis e constituem variáveis temporalmente independentes [Fama (1965)]. Em 1970 Fama resume esta ideia num artigo clássico, cuja mensagem principal é: “*A market in which prices always ‘fully reflect’ available information is called efficient*” [Fama (1970, p. 383)].

Como a eficiência de mercado por si só não é testável, foram criados testes de eficiência do mercado [Fama (1970)], que se dividem em três categorias, consoante as variáveis incluídas no conjunto de informação Ω_t (*i*) testes de forma fraca (de que forma os rendimentos passados prevêm os rendimentos futuros?); (*ii*) testes de forma semi-forte (com que rapidez os títulos reflectem a informação publicada?); (*iii*) testes de forma forte (existe alguma informação privada na posse dos investidores que não seja reflectida nos preços de mercado?). Em 1991, Fama apresenta uma nova designação para estes testes: os testes de forma fraca passam a denominar-se de testes de predictabilidade das taxas de rendibilidade, os testes de forma semi-forte passam a designar-se por *event studies* e os testes à forma forte passam a designar-se por testes à informação privada. A razão de alteração destas nomenclaturas prende-se com o desenvolvimento da área em questão, levando a que as actuais denominações descrevessem de forma mais clara os objectivos dos testes envolvidos [Fama (1991)].

Campbell, Lo e MacKinlay (1997) referem que apesar dos desenvolvimentos demonstrados nesta área, existia alguma confusão no que respeitava à própria ideia de eficiência, pois muitas pessoas consideravam que um mercado eficiente seria um mercado “plano” e não aleatório. Com o desenvolvimento da teoria dos processos estocásticos, chegou-se à conclusão que o processo em causa não seria um passeio aleatório, mas sim um *martingale*, isto é os lucros esperados do especulador deveriam ser nulos [Samuelson (1965)]. De acordo com este autor os modelos *martingale* e *fair game* caracterizam de melhor forma os mercados, isto é, as taxas de rendibilidade das acções constituem um jogo equilibrado se e só se uma sucessão relacionada com os preços (preços mais dividendos descontados para o período corrente) são um *martingale*. A noção de *fair game* é muito menos restrictiva que a de passeio aleatório, uma vez que para que um processo seja *fair game* é necessário que a média das taxas de rendibilidade seja independente da informação disponível, enquanto que para que um processo seja um passeio aleatório é necessário que toda a distribuição das taxas de rendibilidade seja independente da informação disponível [Samuelson (1965), Fama (1970)].

Para um melhor entendimento do conceito de *martingale* pode utilizar-se a “Lei das Expectativas Iteradas” [Samuelson (1965)]. Com vista à compreensão desta teoria assume-se a existência de dois conjuntos de informação I_t e Ω_t , onde $I_t \subset \Omega_t$. Considera-se que as expectativas da variável aleatória X são condicionadas por estes conjuntos de informação, ou seja $E[X|I_t]$ e $E[X|\Omega_t]$. A lei das expectativas iteradas diz que $E[X|I_t] = E[E[X|\Omega_t]|I_t]$. Esta igualdade indica que se se tiver um conjunto de informação limitado I_t , a melhor previsão que se pode fazer para a variável X é a previsão da previsão que se faria para X se se tivesse um conjunto de informação mais alargado Ω_t . Reescrevendo a equação $E[X - E[X|\Omega_t]|I_t] = 0$, isto é, não se pode utilizar informação limitada para prever o erro que se teria se se tivesse informação superior. Samuelson (1965) baseia-se na

ideia de valor fundamental para aplicar esta teoria aos preços dos títulos. Sendo P_t o preço do título no momento t , V^* o valor fundamental do preço, E_t o valor esperado no momento t e I_t o conjunto de informação disponível, então

$$P_t = E[V^*|I_t] = E_t[V^*]. \quad (1.1)$$

A mesma equação para o período $t + 1$, indica que

$$P_{t+1} = E[V^*|I_{t+1}] = E_{t+1}[V^*] \quad (1.2)$$

logo, as expectativas da variação do preço para o período seguinte são

$$E_t[P_{t+1} - P_t] = E_t[E_{t+1}[V^*] - E_t[V^*]] = 0 \quad (1.3)$$

isto porque $I_t \subset I_{t+1}$, logo $E_t[E_{t+1}[V^*]] = E_t[V^*]$, de acordo com a lei das expectativas iteradas.

O modelo passeio aleatório é bastante mais restritivo do que o modelo *martingale*. A condição de independência envolve não só o valor esperado condicionado (comum ao modelo *martingale*) mas também os momentos condicionados de ordem superior a 1 (nomeadamente a variância). Apesar do passeio aleatório pressupor que as variáveis são *i.i.d.*, a realidade tem evidenciado *clusters* na volatilidade [Mandelbrot (1964)]. Esta situação põe em causa a aplicabilidade neste contexto do modelo passeio aleatório mas é consistente com o modelo *martingale*. Porque o *martingale* é menos exigente e restritivo que o passeio aleatório quanto à relação entre as observações geradas por um processo estocástico e tendo em conta o comportamento das taxas de rendibilidade no que toca à volatilidade, considerou-se que o modelo *martingale* era mais adequado para descrever as taxas de rendibilidade de activos financeiros [Fama (1970, 1991)].

1.2.1 Será a eficiência testável?

Segundo Fama (1970, 1991) testar a hipótese de eficiência do mercado consiste em testar se num determinado momento os preços dos títulos reflectem e incorporam toda a informação existente no mercado e se existe ou não a possibilidade de ganhos sistemáticos.

A aplicação de testes à hipótese de eficiência do mercado tem sido alvo de alguma controvérsia, especialmente porque a maioria dos testes à eficiência têm de assumir a existência de um modelo de equilíbrio que defina a taxa de rendibilidade esperada para o título ou mercado em causa (normalmente, um dos modelos mais usados para o efeito é o modelo *CAPM*). Se a hipótese de eficiência for rejeitada, será que se pode afirmar que o mercado é simplesmente não eficiente? Ou será porque o modelo de equilíbrio escolhido não é o mais adequado? Esta noção conjunta leva a que a hipótese de eficiência não possa ser rejeitada facilmente, ou pelo menos, não de forma tão directa.

Em 1991 Fama apresenta uma revisão da literatura sobre a hipótese de eficiência do mercado, assim como os principais resultados obtidos nos testes efectuados por diversos autores. Relativamente aos testes de predictabilidade das taxas de rendibilidade, Fama (1991) conclui que os coeficientes de autocorrelação para as taxas de rendibilidade diárias, semanais ou mensais são alvo de alguma controvérsia, pois apesar de serem estatisticamente significativos, a verdade é que o coeficiente de determinação ronda, na maioria dos casos, os 3%, significando que dificilmente se conseguiriam gerar estratégias de ganhos sistemáticos baseadas nesta informação. Em termos de autocorrelação de longo prazo, os resultados não são conclusivos, pois se por uma lado os coeficientes da autocorrelação são mais significativos, por outro lado a reduzida dimensão das amostras pode induzir a enviesamentos. Ainda no contexto destes testes, Fama (1991) refere que os testes de predictabilidade das taxas de rendibilidade através de outros factores (*dividend yield*, *price earnings ratio*, taxa de juro a curto e a longo prazo, consumo *per capita*, nível de investimento das empresas) poderão ser factores explicativos de uma parte da variação das taxas de rendibilidade, contudo não promovem um nível de predição suficiente que ponha em causa a hipótese de eficiência do mercado. Além disso o comportamento dos preços das acções e respectivas taxas de rendibilidade face aos factores que caracterizam as empresas e suas condições é considerado como resultado da “sagrada” racionalidade dos investidores. Neste contexto, Fama (1991) refere ainda que certas anomalias (nomeadamente o efeito Janeiro, efeito Segunda-feira, assim como outras sazonalidades) não põem em causa a hipótese de eficiência dos mercados, pois o desvio destes eventos face ao que seria considerado “normal” é geralmente inferior ao *spread bid-ask* da média das acções, além de que é necessário ter em conta a existência de custos de transacção. Relativamente aos *event studies*, Fama (1991) afirma que são estes testes que promovem a evidência mais clara sobre a eficiência do mercado, especialmente em amostras que integram taxas de rendibilidade diárias. Os resultados destes testes indicam que em média os preços das acções se ajustam rapidamente à informação pública, nomeadamente decisões de investimento das empresas, mudanças no que toca aos dividendos e mudanças na estrutura de capitais. No que toca aos testes à informação privada, Fama (1991) admite que os *corporate insiders* têm acesso a informação privilegiada, que poderá gerar ganhos anormais. Os principais testes recaem sobre a avaliação da performance dos gestores de fundos de investimento e fundos de pensões e os resultados apontam maioritariamente para uma não rejeição da hipótese de eficiência dos mercados.

Os testes à hipótese de eficiência envolvem as seguintes hipóteses conjuntas [ver Cuthbertson (2000)]:

- (1) Os agentes utilizam a informação de forma perfeitamente racional;

(2) Todos os agentes usam o mesmo modelo de equilíbrio geral para determinar o preço da acção.

Ao testar empiricamente a hipótese de eficiência do mercado as ideias básicas a ter em conta são:

- (i) Os agentes actuam de acordo com modelos de equilíbrio;
- (ii) Os agentes processam toda a informação relevante do mesmo modo, com vista a determinar os rendimentos de equilíbrio. Os resíduos, assim como as taxas de rendibilidade são consideradas imprevisíveis a partir da informação disponível no momento em que a tentativa de previsão é realizada;
- (iii) Os agentes não podem conseguir ganhos anormais de forma sistemática.

Os testes baseados no segundo ponto têm por base testes aos axiomas das expectativas racionais e estão relacionados com a eficiência da informação. Os testes baseados no terceiro ponto são um pouco diferentes, sendo necessário em primeiro lugar, definir lucro. De acordo com Cuthbertson (2000) o lucro económico deverá ser ajustado ao risco das taxas de rendibilidade relacionado com os respectivos custos.

Os testes utilizados podem ser, geralmente, de três tipos:

- (a) Testes à independência de lucros anormais face ao conjunto de informação;
- (b) Testes às *trading rules* e à forma como estas podem ou não gerar lucros anormais, ou acima da média, após ter em conta os custos de transacção e a cobertura do risco sistemático em causa. Estes testes envolvem experiências com um possível grupo de investidores (laboratório);
- (c) Testes sobre os preços de mercado são estatisticamente iguais ao seu valor fundamental. Estes tipos de testes utilizam dados históricos e tentam calcular o valor fundamental dos preços. Testa-se se a variação nos preços é consistente com a ditada pela variabilidade nos valores fundamentais (testes à volatilidade).

Os testes descritos em (a) são os chamados testes de eficiência da informação e requerem a assunção explícita de um modelo de equilíbrio utilizado pelos agentes. Os testes descritos em (b) tentam verificar se existem variáveis económicas capazes de influenciar as expectativas individuais dos agentes. Os testes descritos em (c) são testes à volatilidade e baseiam-se no trabalho apresentado por Shiller (1981) e por LeRoy e Porter (1981). Tentam verificar se os preços apresentam ou não excessiva volatilidade face à hipótese de eficiência do mercado. Existem autores discordantes

deste tipo de testes, por exemplo Cuthbertson (2000), com o argumento de que o mercado bolsista é excessivamente volátil e por isso não consegue reflectir o seu valor fundamental. O teste do rácio das variâncias só pode ser aplicado a séries estacionárias, sendo necessário proceder à diferenciação das séries caso se verifique que estas são não estacionárias. Neste contexto surge também a aplicação da metodologia *VAR* para testar a hipótese de eficiência do mercado.¹

De um modo geral, os coeficientes de autocorrelação das taxas de rendibilidade, os testes baseados em regressões (*ARMA*, por exemplo) e os testes de variâncias dos preços deveriam induzir às mesmas conclusões acerca da validade da hipótese de eficiência do mercado, contudo tal nem sempre acontece. Esta situação deve-se ao facto de que testes baseados em taxas de rendibilidade necessitam de ter na base modelos de equilíbrio, que são muito diferentes dos modelos dos preços e neste sentido as características dos testes diferem largamente. Além disso, Timmermann e Granger (2004) argumentam ainda que devem ser utilizadas técnicas e modelos que assumam a não estacionariedade das sucessões cronológicas, como via alternativa de testar a hipótese de eficiência do mercado, uma vez que o comportamento dos investidores pode provocar não estacionariedade nas taxas de rendibilidade dos activos, nomeadamente das acções, através de processos dinâmicos de aprendizagem e efeitos de *feedback*.

Em Portugal são de realçar os estudos realizados por Soares (1994), Soares (1997), Isidro (1998), Godinho (1999), Gama (2000) e Romacho (2004). Soares (1994) analisou a eficiência do mercado bolsista de acções português, concluindo que não se regista qualquer correlação desfasada significativa entre o índice da bolsa portuguesa e os dos principais mercados externos e que é possível numa análise global a partir do índice BTA construir políticas activas de transacção que superam o rendimento médio do mercado, constatando que existia nos dados históricos suficiente informação para contrariar a hipótese de eficiência do mercado, ainda que tal não significasse que o mercado era não eficiente. Soares (1997) testou a hipótese de eficiência do mercado de acções português (forma fraca) no período entre 1977-1994 tendo para tal realizado testes de estacionariedade, à distribuição de probabilidade, à hipótese de que as observações são *i.i.d.*, etc. Os resultados obtidos por Soares (1997) indicam que o mercado português, para o período em análise, não poderia ser considerado eficiente na forma fraca.

Num contexto semelhante Gama (2000) concluiu que não existe eficiência na forma fraca no mercado accionista português no período entre 1989 e 1996. A evidência empírica da não eficiência põe em causa a aplicação e eficiência de modelos tradicionais de selecção e gestão de carteiras, como é o caso do modelo da média-variância e do *CAPM*. Godinho (1999) mostrou que as taxas

¹Para um maior aprofundamento desta matéria vide Cuthbertson (2000).

de rendibilidade do índice BVL do mercado accionista português no período entre 1988 e 1998 não seguiam uma distribuição de probabilidade normal e não eram *i.i.d.*, concluindo que os resultados obtidos com os modelos tradicionais de gestão e selecção de carteiras não eram eficientes quando aplicados ao mercado em causa. Godinho (1999) afirma ainda que não se verificando a hipótese de normalidade existe a probabilidade de que as carteiras seleccionadas através do modelo da média-variância não sejam eficientes para todos os investidores.

Isidro (1998) avaliou a eficiência na forma semi-forte do mercado bolsista português, sendo o evento analisado o anúncio de resultados contabilísticos. A autora em questão concluiu que o mercado, de uma maneira geral, não apresentava uma variabilidade anormal nos dias mais próximos ao anúncio de resultados, ou seja, que o mercado não apresentava sinais de não eficiência.

Balbina e Martins (2002) testaram a presença de efeitos anómalos na Bolsa de Valores portuguesa no período entre 1988 e 2001. Estes autores encontraram evidência da presença do efeito Segunda-feira, contudo os dados analisados não suportaram a hipótese de existência do efeito Janeiro. Balbina e Martins (2002) concluíram ainda que estes efeitos sazonais tendem a desaparecer à medida que o mercado se torna mais sofisticado e eficiente.

Romacho (2004) analisou a selectividade e *timing* na avaliação do desempenho de fundos de investimento mobiliário em Portugal e concluiu que a performance destes não era significativamente superior a uma carteira aleatoriamente seleccionada, concluindo que o mercado era eficiente na forma forte.

Campbell, Lo e MacKinlay (1997), assim como Farmer e Lo (1999a) defendem a noção de eficiência relativa - a eficiência de um mercado face a outro mercado, que pode ser uma alternativa à eficiência tradicional. As vantagens deste novo conceito são facilmente analisadas por analogia. A eficiência dos sistemas físicos é muitas vezes medida face à proporção relativa de energia que convertem em calor ou trabalho.

Toda a controvérsia gerada à volta da hipótese de eficiência dos mercados foi estimulada pelo aparecimento de um conjunto de novas direcções de investigação, apoiados em modelos matematicamente elaborados que têm a capacidade de melhor representar os dados empíricos. De acordo com Farmer e Lo (1999a) e Farmer e Joshi (1999b) as finanças irão desenvolver-se através de uma perspectiva biológica, mais especificamente através de uma ferramenta evolucionária na qual os mercados, instituições e investidores interagem de forma dinâmica de acordo com a lei da selecção económica. Neste contexto, os agentes competem entre si e adaptam-se às circunstâncias, sem necessariamente atingir o óptimo. Como exemplo das similaridades e analogias existentes entre a economia financeira e a biologia é de salientar o facto de Thomas Malthus e Adam Smith terem sido ambos citados por Darwin no seu estudo da selecção natural das espécies, tendo sido perfeitamente

estabelecidas as analogias existentes entre a biologia e a economia financeira.

Numa perspectiva um pouco diferente, McCauley (2004) critica profundamente os modelos estáticos tradicionais usados na economia, modelos estes baseados essencialmente na eficiência dos mercados. McCauley (2003, 2004) realça o facto de que os mercados são dinâmicos, dotados de elevados níveis de complexidade, onde a informação não é perfeita e a “sagrada” racionalidade dos investidores pode ser posta em causa.

1.2.2 Factos estilizados e evidência empírica

A hipótese de eficiência dos mercados tem sido uma das teorias mais testadas e simultaneamente mais controversas. Este conceito constitui a base da teoria moderna de carteiras, preconizada por Markowitz e desenvolvida por Sharpe e Ross. Segundo Peters (1996) se os mercados funcionarem como sistemas dinâmicos não-lineares o uso da análise estatística *standard*, particularmente o conceito de passeio aleatório, poderá levar a resultados enviesados, que podem não corresponder à realidade.

São vários os estudos que apontam para a evidência empírica de que as sucessões cronológicas financeiras dificilmente podem ser descritas por passeios aleatórios, sendo de evidenciar a presença de diversos factos estilizados, nomeadamente: (i) *fat tails*; (ii) excesso de volatilidade; (iii) *clusters* de volatilidade; (iv) os mercados parecem ser melhor descritos por leis de potências com parâmetro de escala maior que 3 [Mantegna *et al.* (1999), Bouchaud *et al.* (2000), Bouchaud *et al.* (2001a), Cont (2001), Stanley *et al.* (2001)].

A distribuição das taxas de rendibilidade: o tratamento das *fat tails*

A distribuição seguida pelas cotações das acções e respectivas taxas de rendibilidade tem sido tema de investigação e discussão desde que os matemáticos começaram a interessar-se pela modelação dos mercados financeiros.

A proposta original de Bachelier de que as variações das cotações seguem uma distribuição normal foi várias vezes contestada e, frequentemente, substituída por outras distribuições de probabilidade de acordo com a análise e estudos efectuados às distribuições empíricas seguidas pelas taxas de rendibilidade das acções. O modelo de Bachelier não constituiu mais do que uma tentativa de aproximação à realidade, o que suscitou o estudo e a pesquisa nesta área.

A crítica à distribuição normal surge ao se verificar que a volatilidade das taxas de rendibilidade das acções pode ser superior à que seria de esperar se estas seguissem uma distribuição normal [Farmer (1999), Masoliver *et al.* (2000), Masoliver *et al.* (2002)], uma vez que estudos realizados

àquelas taxas mostram que as respectivas distribuições exibem “caudas” muito mais espessas (*fat tails*) do que seria admitido na distribuição normal. Segundo Cont (2001) e McCauley (2004) a existência deste tipo de caudas torna essencial a procura de novas medidas de dispersão e de incerteza, que não se baseiem na distribuição normal, que tenham em conta as caudas da distribuição empírica e que não sejam simplesmente a dispersão em relação à média.²

A hipótese das *fat tails* tem sido aceite, contudo o seu estudo e análise são escassos. De acordo com Peters (1996) uma das explicações mais comuns para a existência destas caudas é o facto de a informação surgir de forma aglomerada e não de modo contínuo e linear. Como a distribuição da informação é leptocúrtica, a distribuição das taxas de rendibilidade também o é.

Assim, o não ajustamento da distribuição normal, dada a evidente curva leptocúrtica e elevada moda, leva a supor que possivelmente as taxas de rendibilidade das acções não são *i.i.d.*. O facto das taxas de rendibilidade não serem independentes pode ser interpretado em termos da existência da possibilidade de gerar estratégias de investimento que produzam lucros sistematicamente superiores aos valores esperados normais, o que pode conduzir à rejeição da hipótese de eficiência do mercado. Esta é uma das causas das *fat tails* e, por isso, indicação de que a probabilidade de ocorrência de *crashes* pode ser maior do que a medida pela distribuição normal.

Fama (1965), Mandelbrot (1964) e Osborne (1964) apuraram que as taxas de rendibilidade diárias, semanais e mensais das acções apresentavam um valor de curtose superior ao indicado pela curva da normal, assim como valores de moda muito superiores aos daquela distribuição.

Em 1992 Tucker chegou a resultados idênticos após analisar a distribuição seguida pelas taxas de rendibilidade de 200 acções e 3 índices (S&P 500, *CRSP value weighted* e o *CRSP equal weighted*) no período 1976-1985, concluindo que as distribuições apresentavam o típico aspecto leptocúrtico.

A evidência de que a distribuição normal não é a mais adequada para descrever o comportamento das taxas de rendibilidade levou a enfatizar a procura de modelos alternativos. De entre os vários modelos apresentados, o mais revolucionário foi o modelo proposto por Mandelbrot (1964), segundo o qual as cotações seguem uma distribuição simétrica de Pareto. Esta distribuição caracteriza-se por ser um processo estocástico que obedece ao teorema do limite central. A forma desta distribuição é estável, assumindo que as variáveis aleatórias subjacentes são independentes e estáveis. Nesta hipótese, são encontrados alguns problemas, nomeadamente no que diz respeito ao facto de esta distribuição ter variância infinita. Naturalmente qualquer amostra das taxas de rendibilidade de acções apresenta variância finita, contudo, teoricamente, a variância tende para infinito nesta distribuição, o que inviabiliza a medida do risco através deste parâmetro sendo o seu

²A análise das medidas de incerteza tradicionais e a sua comparação com a entropia, como abordagem alternativa e/ou complementar, é realizada no Capítulo 4.

valor desprovido de significado [Fama *et al.* (1968), Mantegna *et al.* (2000), Bouchaud (2000), Masoliver *et al.* (2002)].

Soares (1997) enuncia no seu trabalho a investigação de McCulloch, que em 1978 demonstrou que os processos que seguem uma distribuição probabilidade de Pareto não são consistentes com os processos de equilíbrio em mercados competitivos, isto é, as cotações dos títulos não reflectem um valor fundamental baseado na informação disponível, mas sim um processo dinâmico contínuo de velocidade e direcção imprevisíveis.

A distribuição simétrica de Pareto foi e é severamente criticada por muitos autores, com o argumento da violação do princípio de que o expoente característico desta distribuição se mantém constante perante agregação temporal, verificando-se que aquele expoente sofre um incremento gradual relativo à forma como são agregados os dados (quando se passa de taxas diárias para taxas semanais ou mensais), o que se traduz numa clara violação da suposta estabilidade desta distribuição. Além disso, tem-se constatado que as verdadeiras “caudas” das distribuição das taxas de rendibilidade das acções são significativamente diferentes das “caudas” da distribuição simétrica de Pareto [Soares (1997)].

A família de distribuições *EPD* (*Exponential Power Distribution*) foi proposta por Hsu (1982), uma vez que é caracterizada por uma curtose e moda superiores aos da distribuição normal, salientando o bom ajustamento desta família de distribuições à distribuição empírica das taxas de rendibilidade diárias das acções.

Nesta linha de estudo, Kon (1984) propôs um modelo probabilístico *Compound Normal Model*, que resulta da mistura de várias funções de densidade normais, demonstrando que os seus resultados apresentam maior ajustamento que a distribuição normal, *t-Student* ou Pareto.

Um modelo análogo foi proposto por Merton (1976) *Mixed Diffusion Jump Model*, onde são misturadas um número infinito de funções de densidade normal, segundo um processo de Poisson, sendo este modelo considerado mais adequado do que os anteriormente apresentados quanto ao ajustamento à realidade.

Liesenfeld e Jung (2000), procederam à comparação do modelo de volatilidade estocástica baseado na distribuição normal, com os modelos de outras distribuições, mais concretamente a distribuição *t-Student* e a *GED* (*Generalized Error Distribution*), utilizando um processo de estimação da máxima verosimilhança. Os resultados obtidos com a análise das seis maiores acções existentes no mercado accionista alemão revelaram que a volatilidade estocástica não era compatível com a distribuição normal por dois motivos: (i) o típico aspecto leptocúrtico da distribuição empírica e (ii) os níveis de autocorrelação encontrados; concluindo que a distribuição *GED* era aquela que apresentava melhor ajustamento aos dados em estudo [Liesenfeld *et al.* (2000)].

De acordo com Stuzer (1998), se as taxas de rendibilidade das acções não são normalmente distribuídas, o modelo *CAPM* deixa de poder ser utilizado com rigor. Neste sentido o autor recorre ao comportamento do investidor face ao risco para explicar a sua tese, segundo a qual se um investidor avesso ao risco prefere, não apenas um maior valor esperado, mas também um menor desvio-padrão (no caso de as taxas serem normalmente distribuídas) e no caso de as taxas de rendibilidade seguirem uma distribuição não normal, o investidor terá preferência por maiores valores de assimetria positiva e menores valores de curtose.

Cont (2001) refere que a distribuição não condicionada das taxas de rendibilidade se aproxima de uma distribuição estável de Pareto. Curto (2002) também conclui que para as sucessões cronológicas analisadas (PSI 20, DAX, DJIA) a distribuição estável de Pareto era a que mais se adequava.

Uma das características mais importante das sucessões cronológicas financeiras é revelada pelas *fat tails*, que indicam que a probabilidade de ocorrência de eventos extremos, assim como de movimentos violentos, é maior que a apresentada pela distribuição normal. Estes valores extremos, longe de serem considerados meros *outliers*, e por isso ignorados dos estudos, são agora um dos principais alvos de atenção por parte de investidores e de analistas. Bouchaud (2000) acrescenta ainda que são os mercados com níveis de liquidez reduzidos que apresentam maior apetência para comportamentos “desviantes” e conseqüentemente maior probabilidade de eventos extremos. Em 1965 Fama afirmou: “(...) *normal distributions assign little likelihood to the occurrence of really extreme values. But such values occur quite often (...)*”. Em termos práticos, a consequência mais directa das *fat tails* é sobre o controlo do risco. Numa tentativa de superação desta lacuna surge o conceito de *Value-at-Risk* (*VaR*), para o qual Bouchaud e Potters (1999b) apresentaram uma alternativa de simplificação, através de um desenvolvimento em série de Taylor.

Masoliver, Montero e Porrá (2000) propõem um modelo dinâmico baseado num processo de difusão anómalo, com vista a identificar a distribuição de probabilidade que mais se adequa às séries de preços e respectivas variações de activos financeiros. Os autores tomam em consideração as *fat tails*, a necessidade de existência de momentos finitos, mas o modelo proposto exclui a possibilidade de existência de autocorrelações.

Estas observações motivaram e motivam inúmeros esforços no sentido de encontrar uma teoria que explique a natureza das sucessões cronológicas financeiras e permita encontrar a distribuição de probabilidade que mais se adequa aos dados empíricos [Cont (2001)].

Para além da evidência de *fat tails*, alguns autores [e.g. Cont (2001)] apontam para a existência de assimetria estatisticamente significativa. Contudo, estudos mais recentes [e.g. Peiró (2004)] apontam para o facto de que não existe evidência empírica suficiente para assumir como facto estilizado a assimetria (normalmente negativa) das taxas de rendibilidade dos activos financeiros.

Distribuição (in)dependente e idêntica das taxas de rendibilidade

O não ajustamento da distribuição normal e a existência de *fat tails*, pode conduzir à hipótese de que as taxas de rendibilidade das acções não são *i.i.d.* [Cont (2001)], o que poderá significar a rejeição da hipótese de eficiência do mercado. Fama (1970) chama a atenção para a necessidade de averiguar a possível dependência linear e não-linear que possa existir nas taxas de rendibilidade. Contudo considera que aquando da existência de um coeficiente de correlação significativo mas de baixo valor, tal não significa necessariamente que o mercado não seja eficiente, uma vez que esta situação pode não ser sinónimo de obtenção de lucros sistemáticos por parte do investidor. Fama (1970) alerta para o facto de que a possível dependência não-linear não implica obrigatoriamente não eficiência, pois os custos de transacção existentes poderão anular a possibilidade de gerar lucros sistemáticos.

De entre os vários testes para averiguar a hipótese de dependência das taxas de rendibilidade das acções, são de realçar: (i) o teste à eficácia das *Filter Rules* para gerar rendimentos superiores à estratégia *Buy and Hold* (política de investimento baseada em seleccionar aleatoriamente alguns títulos e mantê-los em carteira durante o mesmo período de tempo que a estratégia alternativa a testar); (ii) realização de *Run Tests*; e (iii) análise de correlação linear das taxas de rendibilidade das acções.

Em 1965, Fama testou a hipótese das taxas de rendibilidade seguirem num determinado período de tempo, um processo correlacionado, através dos *Run Tests*. Os resultados mostraram que estas correlações eram pouco significativas, considerando que o passeio aleatório era o melhor modelo a seguir. A evidência empírica gerada nas décadas de 50, 60 e 70 parece demonstrar que as taxas de rendibilidade das acções seguem, efectivamente uma distribuição de probabilidade normal, de forma *i.i.d.*.

Testes mais recentes vieram demonstrar a existência de dependência, especialmente não-linear, de curto e longo prazo nas taxas de rendibilidade das acções, de tal forma que alguns autores põem em causa que a sua distribuição seja independente e idêntica. O teste *BDS*, proposto por Brock, Dechert, Scheinkman e LeBaron (1991), com o objectivo de averiguar a existência de comportamento não-linear das taxas de rendibilidade das acções, e posteriores estudos realizados sobre a possibilidade ou não de dependência não-linear das mesmas taxas em diversos mercados accionistas mundiais, tem contribuído para confirmar a existência deste tipo de dependência. Para além deste teste, são de realçar outros testes à não-linearidade das observações, nomeadamente os testes de heterocedasticidade *ARCH LM*, inicialmente desenvolvido por Engle (1982) e o teste de McLeod e Li (1983), o teste de Tsay baseado nos modelos *TAR* (*Threshold Autoregressive Models*) [Tsay

(1986)].³

A eficiência do mercado de acções pode, deste modo, ser contestada pelo facto de a grande maioria dos investidores não assumir um comportamento considerado racional, o que pode gerar um processo típico de *feedback* provocando um comportamento não-linear nas taxas de rendibilidade das acções [Shiller (2000)]. Na tentativa de explicar este fenómeno foram apresentadas várias hipóteses, a salientar: bolhas especulativas, dependência de longo prazo e caos (comportamento aparentemente aleatório gerado por um sistema determinístico não-linear).

De acordo com Cont (2001) a ausência de autocorrelação linear nas taxas de rendibilidade das acções não é garantia de independência, pelo contrário, evidencia a necessidade de medidas de dependência não-linear nomeadamente os *clusters* de volatilidade. Darbellay (1998a, 1998b, 1998c, 1999) demonstra que medidas da teoria da informação, mais concretamente a informação mútua e entropia condicionada podem ser utilizadas para avaliar a maior ou menor dependência a nível global, que possa existir nas taxas de rendibilidade. O autor demonstra que as taxas de rendibilidade do índice Dow Jones para um período de 1901 a 1998 apresentam fortes indícios de dependência não-linear, especialmente para pequenos desfasamentos, diminuindo esta dependência à medida que o desfasamento temporal também aumenta. Já Granger e Maasoumi (2000) e Maasoumi e Racine (2003) utilizaram a entropia métrica como medida de dependência não-linear nos mercados bolsistas, verificando existirem indícios de não-linearidade nas taxas de rendibilidade.

Um outro facto observado nas sucessões cronológicas financeiras é o *leverage effect*, ou seja, a correlação negativa que existe entre taxas de rendibilidade no passado e volatilidade futura. Este efeito foi referenciado pela primeira vez por Black em 1976, que observou que a amplitude das flutuações das taxas de rendibilidade, ou seja, a volatilidade, tendia a diminuir quando as taxas de rendibilidade aumentavam. Por sua vez, num período de “baixa”, a volatilidade aumentava [Cont (2001), Bouchaud *et al.* (2001a), Bouchaud *et al.* (2001b)]. Este efeito assume particular importância nos mercados de opções [Bouchaud *et al.* (2001b)].

Evidência de caos

A teoria do caos demonstrou que as sucessões cronológicas imprevisíveis podem surgir de sistemas determinísticos não-lineares, cujos resultados provenientes da física e da biologia e aplicados à economia revelaram que a evolução temporal das cotações das acções nos mercados financeiros podem seguir aqueles modelos [Mantegna *et al.* (2000)].

³No Capítulo 5 são apresentadas e analisadas com mais detalhe estas abordagens não-lineares no sentido de avaliar a dependência temporal numa sucessão cronológica financeira.

Existe cada vez mais uma aceitação, no meio científico e académico, de que nos principais mercados bolsistas a nível internacional as taxas de rendibilidade das acções evidenciam dependência não-linear, banindo a crença na teoria do passeio aleatório.

Os sistemas dinâmicos caóticos são sistemas onde existe um *feedback* não-linear caracterizado pela dependência sensível às condições iniciais, pela existência de níveis críticos nos valores dos parâmetros de controle do sistema a partir dos quais o comportamento qualitativo daquele se altera e pelos atractores gerados que têm uma dimensão fractal.

Segundo Peters (1996) a existência de caos e de um attractor caótico nos mercados accionistas deve-se ao *stretching* causado pela irracionalidade dos agentes e ao uso por parte dos investidores da análise técnica, e ao *folding* derivado do mecanismo de correcção nas cotações devido à influência, em certos períodos, dos *smart money investors*, investidores racionais que valorizam as acções pelo seu valor intrínseco ou fundamental, a partir de um determinado nível das cotações.

A hipótese de existência de caos nos mercados bolsistas deriva do facto de, em princípio, existir dependência não-linear nas taxas de rendibilidade das acções, assim como dependência de longo prazo nas mesmas (dependência sensível às condições iniciais) [Mendes *et al.* (2003)]. O paradigma linear existente na teoria financeira assenta no pressuposto de que os investidores reagem de forma linear, isto é, reagem à informação recebida, não reagem de forma acumulada a um conjunto de eventos [Peters (1996)]. O paradigma linear baseia-se portanto, na perfeita racionalidade dos agentes, uma vez que é entendido (de acordo com a hipótese de eficiência dos mercados) que toda a informação já está incutida nas cotações das acções. Este paradigma, implica que as taxas de rendibilidade apresentem uma distribuição normal e deverão ser *i.i.d.*, o que também não costuma ser evidência nos dados empíricos. Peters (1996) apresenta o paradigma não-linear, que se baseia no facto de aceitar que os investidores possam reagir de forma não-linear.

A Euronext Lisboa também foi alvo de avaliação quanto à possibilidade de existência de dinâmica não-linear, tendo na maioria das vezes os estudos conduzido à suposição de existência de caos no referido mercado [Soares (1997), Mendes *et al.* (2003)].

Chatterjee e Yilmaz (1992) criticam a teoria do caos na medida em que consideram que as condições necessárias para a existência de caos não são condições suficientes, não permitindo tirar conclusões rigorosas. Além disso a pequena dimensão das amostras usadas nos estudos económicos provoca alguns problemas de aferição das propriedades dos sistemas caóticos, pois a sua averiguação exige o estudo de amostras de grandes dimensões.

Dada a elevada sensibilidade dos resultados às condições iniciais e elevada complexidade dos mercados, pode não ser possível afirmar com certeza que os mercados financeiros, mais concretamente os mercados bolsistas de acções seguem um processo caótico. Neste contexto, alguns autores

[e.g. Mantegna *et al.* (2000)] defendem a adopção de processos estocásticos, com o argumento de que a evolução temporal das cotações depende da informação disponível, informação esta que pode ser representada por equações determinísticas não-lineares.

1.3 Modelos clássicos da gestão de carteiras

Nesta secção são descritos os principais modelos da teoria de carteiras: a teoria da carteira de Markowitz ou também chamado modelo da média-variância, o modelo *CAPM* e o modelo *APT*.

1.3.1 Teoria da carteira, *CAPM* e *APT*

Dada a dificuldade em desenvolver modelos teóricos que pudessem ser utilizados para determinar o valor fundamental dos activos financeiros e que pudessem ser validados empiricamente, surgiu a necessidade de que os modelos de avaliação se baseassem na hipótese de eficiência dos mercados. Neste âmbito, admite-se que as cotações reflectem em cada momento a melhor expectativa quanto ao valor fundamental dos títulos, sendo que as decisões de investimento se deveriam orientar para a minimização do risco.

Teoria da carteira ou modelo de Markowitz

A teoria moderna da carteira teve origem no famoso trabalho de Markowitz (1952): “*Portfolio Selection*” publicado no *Journal of Finance*. O principal pressuposto deste modelo é que os investidores são perfeitamente racionais e avessos ao risco, têm uma função de utilidade quadrática, cujas medidas tidas em conta eram somente a média e a variância das taxas de rendibilidade dos títulos.

No limite a variância mede a dispersão das possíveis taxas de rendibilidade em torno da média. De acordo com o conceito de rendimento esperado de Osborne (1964), pode-se estimar a probabilidade de o actual rendimento se afastar mais ou menos do seu valor esperado. Quanto maior for a dispersão, maior é o desvio-padrão e conseqüentemente maior o risco desse activo. A utilização da variância para este tipo de análise pressupõe que as taxas de rendibilidade são simétricas e a um nível mais lato, normalmente distribuídas.

De acordo com Markowitz (1959), a diversificação é um dos principais motores para a minimização do risco (variância), contudo existe um limite para esta diversificação, dado que a partir de um certo ponto verifica-se uma diminuição gradual do valor esperado. Apesar de tudo isto, não basta diversificar para minimizar o risco, é necessário que os activos não sejam perfeita e positivamente correlacionados, pois caso contrário o desvio-padrão de uma carteira não será mais que a mera soma dos desvios-padrão individuais de cada título. Como é natural, é a incerteza relativamente

ao futuro que justifica a existência da diversificação, pois se fosse possível realizar previsões com certeza, a tendência seria investir o máximo na acção ou título que apresentasse maior taxa de rendibilidade futura [Sharpe (1970)].

O modelo da média-variância pode ser descrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \max_{x_1, \dots, x_n} E[U(x)] &= \sum_{i=1}^n E(R_i)x_i - k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}, \text{ s.a.} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} &= V \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1, \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde a função objectivo é uma função de utilidade quadrática, em que $E(R_i)$ é o rendimento esperado do título i , k é o coeficiente de aversão ao risco, σ_{ij} é a covariância entre o título i e o título j , V é o valor pré-definido para o risco, ou seja a variância e x é a proporção de cada título na carteira.

A Figura 1.1 mostra a fronteira eficiente na qual se baseia este modelo. Nesta curva apenas a parte superior é considerada eficiente, pois garante que para um dado valor da taxa de rendibilidade não existe nenhuma outra carteira com menor desvio-padrão e para um determinado valor de desvio-padrão não existe nenhuma carteira com maior rendibilidade esperada.

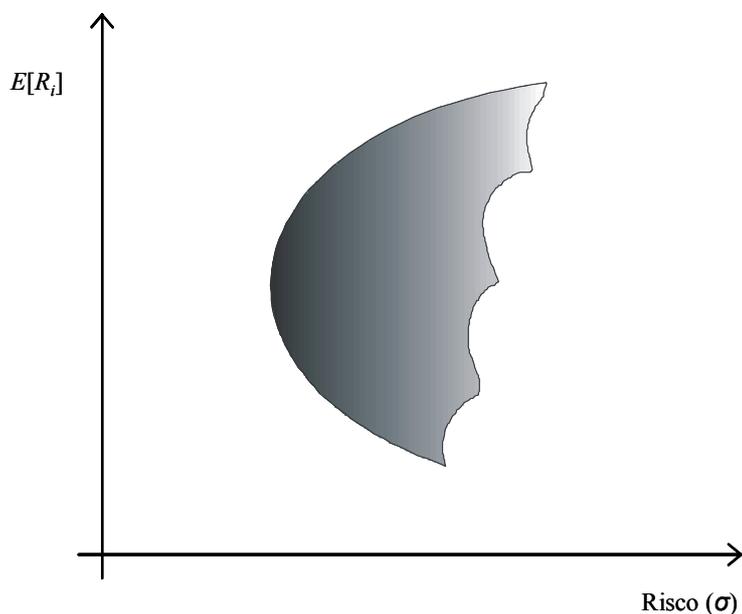


Figura 1.1: Fronteira eficiente. Fonte: Sharpe (1970).

No caso de existência do activo sem risco, o conjunto de carteiras eficientes deixa de ser a parte superior da curva de combinação de carteiras, dando lugar a uma recta. Esta recta, resulta da

combinação da taxa de rendibilidade esperada do activo sem risco com a taxa de rendibilidade de uma carteira diversificada e eficiente, também designada por carteira M ou carteira de mercado. Neste contexto o conjunto de carteiras eficientes é dado por

$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m} \sigma_p, \quad (1.5)$$

em que $E(R_p)$ é o valor esperado da carteira p , R_f é a taxa de rendibilidade do activo sem risco, $E(R_m)$ é a taxa de rendibilidade esperada da carteira M , σ_m é o desvio-padrão da taxa de rendibilidade da carteira M e σ_p é o desvio-padrão da carteira p .

É fácil verificar que de entre todas as rectas que representam combinações do activo sem risco com uma carteira na fronteira de activos com risco, a recta que passa por M é a que tem maior declive, logo uma forma de encontrar a carteira M é encontrar os valores de x_1, x_2, \dots, x_n que maximizam o declive da recta que une o activo sem risco com a dita carteira. A carteira M é a solução do problema

$$\max_{x_1, \dots, x_n} \frac{\sum_{i=1}^n E(R_i) x_i - R_f}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}} \quad (1.6)$$

sujeito à restrição

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Segundo Tobin (1958), as preferências dos investidores na constituição de carteiras poderiam ser simplesmente representadas pelo valor esperado e desvio-padrão. Tal simplificação justificava-se pelo facto da função de utilidade do investidor ser uma função quadrática ou as taxas de rendibilidade seguirem uma distribuição de probabilidade caracterizada por estes dois parâmetros (média e variância).

A utilização de uma função quadrática para representar a função de utilidade tem sido bastante criticada por muitos autores, nomeadamente Pratt (1958), Hicks (1962), Arrow (1963), Feldstein (1969). Um dos motivos para tal crítica deve-se ao facto de a função quadrática apresentar aversão absoluta ao risco crescente, quando vários estudos indicam precisamente o contrário, ou seja, a aversão absoluta ao risco decresce à medida que o investidor “enriquece”. Tal facto pode tornar o uso de uma função quadrática inadequado como forma de representação da utilidade.

Capital Asset Pricing Model (*CAPM*)

A teoria moderna de carteiras de que Markowitz foi pioneiro em 1952 através do modelo da média-variância, não foi alvo da implementação e sucesso esperado, o que se ficou a dever, de entre vários

motivos: (i) à dificuldade de estimação e cálculos necessários para “correr” o modelo, principalmente no que concerne à matriz de variâncias e covariâncias; (ii) ao tempo e aos custos muito elevados que a resolução deste tipo de modelo implicava; (iii) à dificuldade em “convencer” os gestores de carteiras a ter em conta as covariâncias, para além dos tradicionais valor esperado e desvio-padrão [Elton *et al.* (1999a), Elton *et al.* (1999b)]. Além disso, o facto de se basear no pressuposto de que a função de utilidade do investidor é uma função quadrática foi e é alvo de várias críticas [Arrow (1963), Borch (1968), Feldstein (1969)].

No sentido de superar algumas das lacunas do modelo da média-variância assistiu-se ao aparecimento dos modelos de factores, dos quais o mais famoso é o modelo *SIM* (*Single Index Model*) desenvolvido por Sharpe. Mais tarde surge o modelo *CAPM* que foi proposto por Sharpe em 1964 no artigo “*Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk*” e Lintner em 1965 no artigo “*Security prices, risk and maximal gain from diversification*”. O *CAPM* surgiu como uma combinação entre a hipótese de eficiência dos mercados e a teoria da carteira, em que o investidor tinha sempre um comportamento racional e seria por isso avesso ao risco e resulta num modelo de equilíbrio geral. Este modelo tem sido um dos modelos mais estudados, analisados e testados na literatura financeira [ver entre outros Black *et al.* (1972), Roll (1977), Black (1993), Elton *et al.* (1999d)].

Os principais pressupostos do modelo *CAPM* são:

- (a) todos os investidores têm aversão ao risco e tomam as suas decisões só com base na rendibilidade esperada e na variância;
- (b) todos os participantes no mercado estão em equilíbrio individual, ou seja, cada investidor escolhe uma carteira óptima em termos de rendibilidade esperada e risco que maximiza a sua utilidade de acordo com os pressupostos do modelo da média-variância de Markowitz;
- (c) os investidores têm expectativas homogéneas acerca dos rendimentos futuros, o que significa que os investidores estão de acordo relativamente às taxas de rendibilidade esperadas dos vários activos e às variâncias e covariâncias entre os mesmos, utilizando a mesma informação na determinação do conjunto de carteiras eficientes (logo o conjunto de carteiras eficientes com risco é o mesmo para todos os investidores);
- (d) o mercado de capitais está em equilíbrio, não há imperfeições no mercado, os investimentos são infinitamente divisíveis, a informação é gratuita;
- (e) não há impostos nem custos de transacção sobre os activos, não há alteração de taxas de juro nem inflação.

Segundo Sharpe (1970), o risco pode ser dividido em dois elementos distintos: (i) o risco sistemático (ou risco não diversificável), que é a parcela do rendimento das acções que pode ser atribuído às variações do mercado como um todo; (ii) o risco específico (ou risco diversificável), que diz respeito à parcela do risco da acção que deriva das características únicas de cada acção, sendo função da estrutura de capital da empresa emissora, da qualidade da sua administração, de características peculiares do mercado onde a empresa actua e de outros factores que não a própria performance do mercado de acções (Figura 1.2).

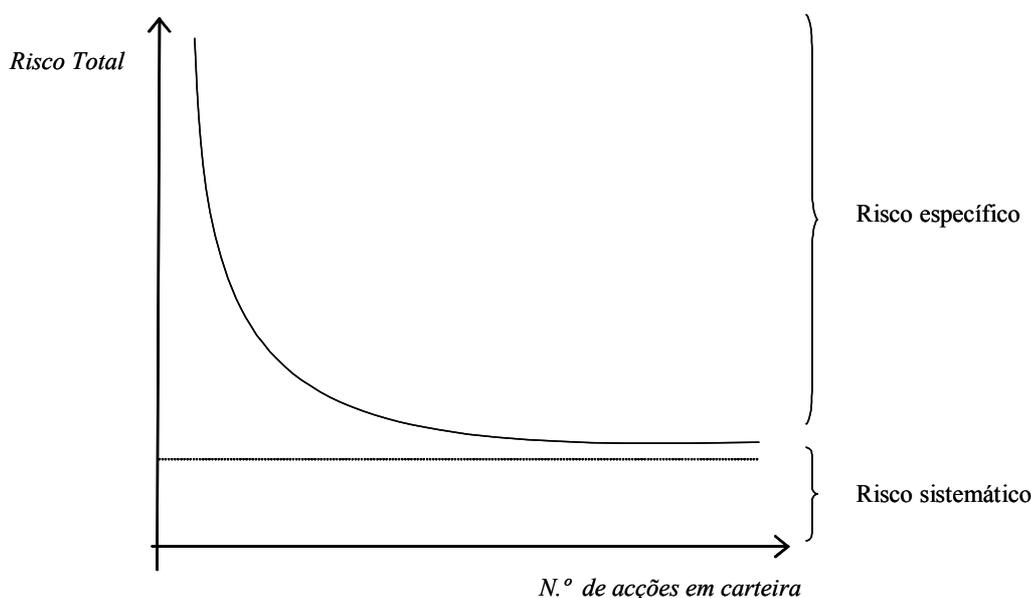


Figura 1.2: Risco específico e risco sistemático. Fonte: Sharpe (1970).

Baseado nestes pressupostos o modelo *CAPM* conclui que a carteira óptima para qualquer investidor será resultado da combinação linear entre o activo sem risco e a carteira de mercado (M), ou seja a fronteira eficiente será a tangente à curva de combinação entre carteiras, cujo ponto de tangência é respectivamente a carteira M . Esta recta, representada na Figura 1.3, é a chamada *Capital Market Line* (CML). As carteiras situadas nesta recta dominam todas as outras e todos os investidores irão querer investir apenas nestas carteiras.

De acordo com o teorema da separação de Tobin (1958) os investidores vão combinar os activos com risco exactamente nas mesmas proporções (as proporções que correspondem à carteira M) embora combinem de formas diferentes esta carteira com o activo sem risco. As preferências só influenciam a forma como o investidor combina a carteira M com o activo sem risco, não influenciam a determinação da carteira M . Se todos os indivíduos detêm a mesma carteira com risco, então

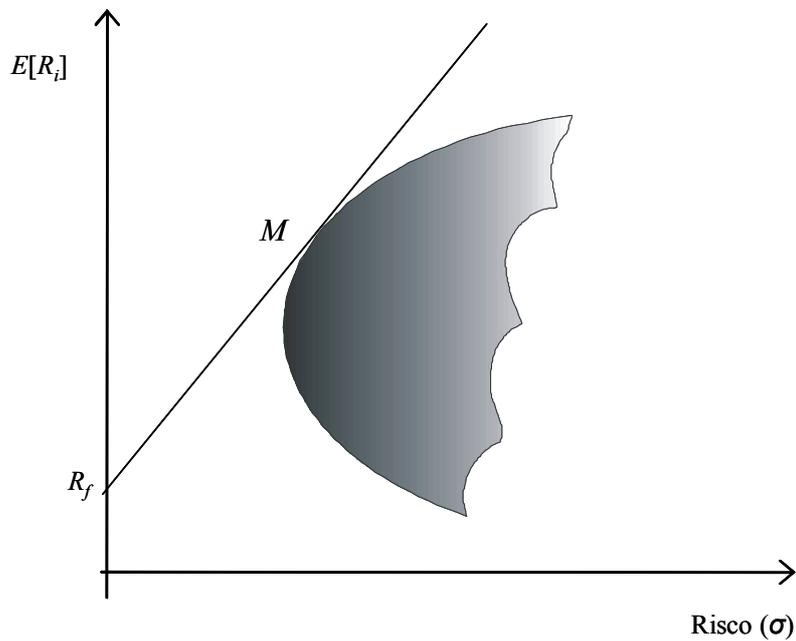


Figura 1.3: Capital Market Line. Fonte: Sharpe (1970).

essa carteira tem de combinar os activos com risco exactamente na proporção em que eles existem no mercado, ou seja, a composição da carteira M é igual à composição da carteira de mercado.

Um dos aspectos mais importantes do modelo *CAPM* é que se trata de um modelo de equilíbrio geral. Os preços dos activos com risco e sem risco são determinados em simultâneo e são eles que fazem com que a quantidade existente de cada título seja igual à quantidade que os investidores desejam deter.

O modelo *CAPM* refere ainda que no caso de o investidor optar por investir em carteiras com maior risco (maior desvio-padrão) deverá ser compensado, o que corresponde ao prémio de risco, ou seja a diferença entre a taxa de rendibilidade oferecida pela carteira M e a taxa de rendibilidade do activo sem risco.

Uma vez que, de acordo com os pressupostos do modelo *CAPM*, todos os investidores detêm um carteira que é a combinação entre a carteira M (uma carteira perfeitamente diversificada e eficiente) e o activo sem risco, então só o risco sistemático de um activo deve influenciar a sua rendibilidade esperada ou, por outras palavras, deve haver uma relação entre a taxa de rendibilidade esperada de um activo e o seu respectivo risco sistemático. O risco de um título ou carteira é então assumido como a covariância do próprio título ou carteira com a carteira M .

Conforme se vê na Figura 1.4 a linha do mercado de títulos em termos de covariâncias passa pelos

pontos $(0, R_f)$ e $(\sigma_m^2, E(R_m))$. A homogeneidade das expectativas dos investidores e a existência de condições que definem um mercado perfeito levam a que todos os títulos se situem tendencialmente em equilíbrio sobre a recta apresentada. Se para um dado nível de risco σ_{im} existir um título com um rendimento esperado superior (inferior) ao da correspondente combinação linear entre o activo sem risco e a carteira M , verificar-se-á um aumento da procura desse título, fazendo aumentar (diminuir) o preço e conseqüentemente diminuir (aumentar) a sua taxa de rendibilidade. É o caso da Figura 1.4, em que o ponto A (B) desce (sobe) até ao ponto de equilíbrio A' (B').

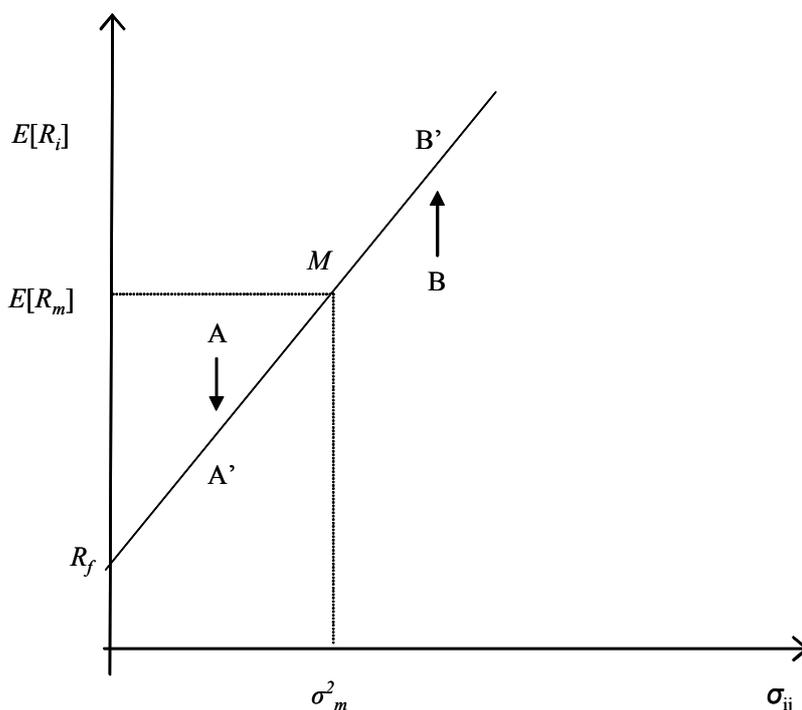


Figura 1.4: Linha do mercado de títulos representada em termos de covariâncias. Fonte: Sharpe (1970).

O que a Figura 1.4 sugere é que em equilíbrio existe uma relação positiva e linear entre a covariância de um activo com a carteira de mercado (M) e a sua rendibilidade esperada. Essa relação pode ser descrita por

$$E(R_i) = R_f + \left[\frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m^2} \right] \sigma_{im}. \quad (1.7)$$

Neste contexto surge uma medida para o risco sistemático: o *Beta*. O *Beta*, também chamado risco sistemático não é mais do que a sensibilidade da taxa de rendibilidade esperada do título ou carteira em estudo face ao prémio de risco (valor esperado da carteira M menos a taxa de rendibilidade do

activo sem risco) e é dado por

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}. \quad (1.8)$$

Usando a definição de β_i a equação (1.7) pode escrever-se da seguinte forma

$$E(R_i) = R_f + [E(R_m) - R_f] \beta_i, \quad (1.9)$$

que resulta de um modelo de regressão linear simples, cuja recta correspondente é a *Security Market Line* (*SML*), uma recta desenhada no espaço $(\beta, E(R))$. De acordo com este modelo de equilíbrio geral, a rendibilidade esperada é função linear do *Beta*, sendo a intersecção marcada pela taxa de rendibilidade do activo sem risco. Naturalmente o *Beta* do activo sem risco terá valor nulo e o *Beta* da carteira de mercado é 1 (porque $\sigma_{im} = \sigma_m^2$). Tal significa que os pontos $(0, R_f)$ e $(1, E(R_m))$ pertencem à *SML*.

A taxa de rendibilidade esperada do activo ou título i é igual à soma de duas componentes: R_f que compensa o investidor pelo facto de adiar o consumo um período e $[E(R_m) - R_f] \beta_i$ que compensa o investidor pelo risco assumido. Através da análise da *SML* pode-se concluir que em equilíbrio, se um activo apresentar um *Beta* nulo, a sua taxa de rendibilidade esperada deverá ser igual à do activo sem risco, se tiver um *Beta* unitário, então a taxa de rendibilidade esperada deverá ser igual à da carteira M . Se a taxa de rendibilidade do mercado for negativamente correlacionada com a taxa de rendibilidade do mercado, ou seja se o *Beta* for negativo, a taxa de rendibilidade esperada do activo em causa é inferior à taxa de rendibilidade do activo sem risco.

O modelo *CAPM* tem sido, desde o seu surgimento, alvo de muitas atenções, sendo que do ponto de vista teórico representa a união perfeita entre elegância e simplicidade [Grauer (2001)]. Dado o carácter muito restritivo dos seus pressupostos, este modelo tem sido alvo de muitas alterações, que levou à apresentação de várias alternativas ao modelo baseadas no relaxamento de pressupostos do modelo base [Elton *et al.* (1995a), Elton *et al.* (1999e), Elton *et al.* (1999f)]. As principais limitações tidas em conta foram: admitir a impossibilidade de realizar *short sales*, assumir que as taxas de juro activas e passivas são diferentes, inclusão de impostos, admitir a inserção de acções ou activos não cotados no mercado (e.g. capital humano), assumir expectativas heterogéneas e análise multiperíodo. Estas alterações têm sido abordadas separadamente, tendo para além disso, o *CAPM* sido alvo de vários testes.

São várias as metodologias usadas para estimar os parâmetros subjacentes ao modelo *CAPM* e seus derivados (Intertemporal *CAPM* - *ICAPM*, *Consumption CAPM* - *CCAPM*), sendo que a mais correntemente utilizada é *OLS*. Contudo têm surgido estudos que apresentam métodos de estimação alternativos, tendo em conta algumas das características apresentadas pelos dados e pelos resíduos resultantes de *OLS*. São de evidenciar os métodos de estimação *Two Stage Least*

Squares (TSLS), *Three Stage Least Squares (3SLS)* e *Generalized Method of Moments (GMM)*. Por exemplo, Hamori (1997) utiliza o método de estimação *GMM* para estimar e testar o *CAPM* para o caso japonês, tendo concluído que o *CAPM* não se adequa à realidade japonesa. Garcia e Ghysels (1998) consideram que o método *GMM* é talvez o que mais se adequa para estimar os parâmetros do modelo *CAPM*, dados os seus pressupostos menos redutores que outras abordagens, nomeadamente o *OLS*.

Os primeiros testes ao modelo *CAPM* centraram-se nas propriedades da *SML*, assumindo como existente e observável a carteira de mercado. Se a carteira de mercado fosse eficiente, então existiria uma relação linear positiva entre o *Beta* de qualquer título e a sua taxa de rendibilidade esperada [Black *et al.* (1972), Fama *et al.* (1973)].

Roll (1977) foi um dos principais críticos à metodologias usadas para testar o *CAPM*. De acordo com este autor, os modelos de equilíbrio geral como o *CAPM* não são passíveis de ser testados, ou pelo menos, os testes realizados promovem pouca evidência para aceitar ou rejeitar o modelo em causa. Roll (1977) demonstrou que se a carteira de mercado usada como *proxy* no modelo *CAPM* for eficiente, então existirá uma relação linear perfeita entre as taxas de rendibilidade esperadas dos activos e dos *Betas*, caso a carteira de mercado não seja eficiente, então essa relação será não-linear. Neste contexto, Roll (1977) considerou que os testes realizados ao modelo *CAPM* com uma carteira de mercado que não seja eficiente, não terão validade enquanto testes ao referido modelo. Além disso, o autor refere ainda que uma vez que num dado intervalo de tempo existem sempre carteiras eficientes, pode ser utilizada uma *proxy* que satisfaz os pressupostos do modelo *CAPM*, ainda que o mercado em causa não seja eficiente. Já Shanken (1987) reconheceu que a aceitação ou rejeição do modelo *CAPM* depende de como a *proxy* do mercado reflecte o verdadeiro mas não observado comportamento da carteira de mercado eficiente. Neste sentido, Shanken (1987) desenvolveu um teste conjunto que possibilita a aceitação ou rejeição da hipótese conjunta que a correlação da *proxy* com a carteira de mercado eficiente excede um determinado limite mínimo e o *CAPM* é válido, e tendo aplicado este teste ao mercado norte-americano verificou que a evidência empírica apontava para a rejeição da hipótese colocada. De acordo com Ross (1976) os *Betas* são função da carteira de mercado, logo se esta carteira realmente existir os *Betas* calculados a partir da mesma serão com certeza diferentes dos calculados a partir de outra carteira diversificada, mas que não a carteira de mercado.

Cheng e Grauer (1980) identificaram algumas ambiguidades nos testes empíricos tradicionais, testes que assumem como constantes a média e a matriz de variâncias e covariâncias, e sendo a forma de estimação por *OLS* a mais comum, assume-se que os *Betas* são constantes. Deste modo os testes empíricos ao *CAPM* são testes às hipóteses conjuntas: o *CAPM* avalia activos; e as médias,

variâncias e covariâncias são constantes no tempo. A não rejeição da hipótese conjunta leva à conclusão que os preços relativos nunca se alteram [Grauer (2001)]. Dada esta situação, os autores criaram um teste em que não se assume que os *Betas* e a taxa de rendibilidade do activo sem risco são constantes e onde também não é necessário identificar a carteira de mercado. Curiosamente, neste caso tão pouco restritivo os resultados pouco abonaram a favor do *CAPM*.

Em 1991 Fama relacionou os testes empíricos aos modelos de *asset pricing* aos testes à hipótese de eficiência dos mercados. De acordo com o autor, os testes aos modelos de avaliação de activos devem ser condicionados à eficiência. Neste contexto a hipótese conjunta pode levar a conclusões contraditórias, uma vez que não se pode afirmar que as anomalias verificadas nos modelos resultam de limitações do próprio modelo ou da possível não eficiência do mercado.

É de salientar o estudo realizado por Elton e Gruber (1999d) que evidencia o facto de em períodos de tempo relativamente grandes (11 a 50 anos) a taxa de rendibilidade de certos títulos ser inferior à taxa de rendibilidade do activo sem risco, sendo de esperar que o risco de tais títulos seja por isso diminuto, o que não se verificou. Do mesmo modo Grauer (2001) exemplifica o facto de nos últimos anos o mercado bolsista norte-americano ter crescido cerca de 30%, enquanto que os mercados bolsistas asiáticos têm registado taxas de rendibilidade negativas. Será então que neste período se assistiu à época mais arriscada nos EUA e simultaneamente mais pacífica nos mercados asiáticos?

O mercado português é alvo de avaliação e teste no que toca aos resultados obtidos pelo modelo *CAPM*. Soares (1994) conclui que os maus resultados obtidos com o modelo *CAPM* no mercado bolsista português no período entre 1988 e 1992 poderão ser explicados por duas hipóteses: uma primeira poderá ser a não eficiência da Bolsa de Valores portuguesa (também avaliada pelo autor); uma segunda hipótese poderá ser a falta de aderência do modelo em causa à realidade. O autor salienta dois aspectos de crítica: a verificação da instabilidade dos *Betas* no tempo (maior para os títulos individuais do que para carteiras diversificadas) e a constatação da dificuldade em resumir o risco sistemático a um só parâmetro.⁴

Arbitrage Pricing Model (*APT*)

Com o desenvolvimento da econometria e a cada vez maior aceitação da hipótese de eficiência dos mercados, surgiu o modelo *Arbitrage Pricing Theory (APT)* por Ross em 1976.

O modelo *APT* surge como um modelo mais geral que o modelo *CAPM*, uma vez que se baseia

⁴Convém relembrar que o modelo *CAPM* não pressupõe que o mercado (ou a carteira de mercado) é a única fonte de covariância entre as taxas de rendibilidade dos activos, uma vez que não assume que os resíduos referentes a diferentes títulos tenham covariância nula [$E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \forall i \neq j$].

essencialmente em pressupostos de equilíbrio, não arbitragem, homogeneidade das expectativas dos investidores e aposta na existência de vários factores explicativos das taxas de rendibilidade esperadas dos títulos e carteiras [Ross (1976)]. Este modelo resulta ainda da tentativa de superação de uma das principais críticas ao modelo *CAPM*, em que é considerado que o *Beta*, como medida de risco sistemático, não consegue captar adequadamente as expectativas de rendimento incorporadas no preço das acções. O modelo *APT* pressupõe ainda que as taxas de rendibilidade de qualquer título sejam linearmente relacionadas com um conjunto de índices ou factores.

Ross (1976) identificou quatro variáveis económicas que influenciavam directamente o rendimento das acções: (i) inflação; (ii) produção industrial; (iii) prémios de risco; (iv) estrutura das taxas de juro [in Sharpe (1984)]. À semelhança do *CAPM*, este modelo assume linearidade entre os factores risco e rendimento. A principal diferença reside na avaliação que é feita relativamente ao risco sistemático, que é resultado não de um factor, mas de quatro e acima de tudo o facto de se basear em pressupostos de não arbitragem (lei de um só preço), ou seja se dois títulos apresentam igual sensibilidade face aos mesmos factores (em equilíbrio), então, obrigatoriamente, terão de apresentar taxas de rendibilidade semelhantes.

Um dos principais pressupostos é que os investidores têm expectativas homogéneas quanto às taxas de rendibilidade dos activos. O pressuposto de que os investidores utilizam a média-variância para fazer as suas escolhas é substituído pelo pressuposto que o processo gerador das taxas de rendibilidade dos activos é linearmente relacionado com um conjunto de factores,⁵ que pode ser representado do seguinte modo

$$R_i = a_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + \dots + b_{ik}F_k + \varepsilon_i, \quad (1.10)$$

onde R_i é a taxa de rendibilidade aleatória do activo i , a_i é o valor da rentabilidade esperada que é independente dos k factores, F_k corresponde ao k -ésimo factor comum aos rendimentos dos activos em análise, b_{ik} é a sensibilidade da taxa de rendibilidade do activo i face ao factor k e ε_i é o termo residual.

Relativamente aos termos residuais assume-se que $E(\varepsilon_i) = 0$ e $var(\varepsilon_i) = \sigma_{\varepsilon_i}^2$. Para além disso, os resíduos não estão correlacionados com os factores (F_1, F_2, \dots), ou seja $E[\varepsilon_i(F_j - \bar{F}_j)] = 0$ e os resíduos de activos diferentes também não estão correlacionados, $E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, para todo $i \neq j$.

Uma condição que tem de ser verificada para se poder deduzir o modelo de arbitragem é que

⁵O modelo *CAPM* não faz nenhuma hipótese quanto ao processo gerador das taxas de rendibilidade, ou seja, não assume nada relativamente à estrutura da matriz de variâncias e covariâncias entre as taxas de rendibilidades dos activos. Já o modelo *APT*, tem como hipótese base que as taxas de rendibilidade são explicadas por um modelo de factores, não colocando restrições quanto às preferências dos investidores, a não ser que “mais é preferido que menos”.

existem títulos suficientes na economia para se poder construir uma carteira composta por esses activos que implique risco nulo, isto é:

- (1) $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, o que implica que o valor do investimento é nulo;
- (2) $\sum_{i=1}^n b_{ik} x_i = 0$, ou seja, a carteira não é sensível ao factor k diluindo-se também o próprio risco sistemático;
- (3) $\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \simeq 0$, o que significa que o risco residual é aproximadamente nulo.

Em equilíbrio esta carteira não tem risco e por isso, a sua taxa de rendibilidade esperada tenderá também para zero, não existindo mais oportunidades de arbitragem a explorar

$$\sum_{i=1}^n E(R_i) x_i = 0. \quad (1.11)$$

As condições enunciadas anteriormente podem ser expressas em termos vectoriais. Se se definir o vector das proporções X , o vector das sensibilidades ao factor 1, o vector das sensibilidades ao factor 2 e demais factores (\mathbf{b}_k), um vector unitário e o vector das taxas de rendibilidade esperadas, conclui-se que a carteira sem risco e de investimento nulo satisfaz

$$X^T \mathbf{1} = 0, \quad X^T \mathbf{b}_1 = 0, \dots, \quad X^T \mathbf{b}_k = 0.$$

Estas condições expressam a ortogonalidade do vector proporções x_i respectivamente aos vectores unitário, dos coeficientes *Beta* e das taxas de rendibilidade esperadas. Então este último deve-se poder representar por uma combinação linear dos dois primeiros. Neste contexto, a expressão fundamental do modelo *APT* é dada por

$$E(R_i) = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \dots + \lambda_k b_{ik}, \quad (1.12)$$

onde λ_j com $j = 1, \dots, k$ representa o prémio de risco para o factor j .⁶ De modo idêntico ao *CAPM*, λ_0 poder-se-á identificar com a taxa de rendibilidade do activo sem risco. Se se considerar apenas um só factor e este seja identificável com o prémio de risco do mercado, verifica-se que os modelos *APT* e *CAPM* são compatíveis.

A identificação dos valores de λ_j com $j = 1, \dots, k$ pode ser facilmente obtida se se conhecer a rendibilidade esperada do activo sem risco, a taxa de rendibilidade de uma carteira com risco

⁶A relação apresentada na equação (1.12) verifica-se apenas de forma aproximada, porque o argumento utilizado requer que o número de activos usados para construir carteiras de arbitragem tenda para infinito, pois só deste modo se pode argumentar que o risco residual desaparece.

unitário do factor 1 e nulo face a todos os outros factores, uma carteira com risco unitário face ao factor 2 e independente de todos os outros factores e assim sucessivamente. Obtém-se a equação do modelo *APT*

$$E(R_i) = R_f + b_{i1}(\delta_1 - R_f) + \dots + b_{ik}(\delta_k - R_f), \quad (1.13)$$

onde δ_k é a rendibilidade esperada de uma carteira com $b_{ik} = 1$ e todos os outros b_{ij} nulos.

Uma vez que o modelo *APT* não se baseia em nenhum pressuposto sobre quantos e quais são os factores de risco comuns, os testes a este modelo assentam na determinação *a posteriori* dos factores significativos. Um possível procedimento baseia-se no cálculo da matriz de variâncias e covariâncias ou da matriz de correlações entre os diversos títulos em análise. Através de análise factorial são determinados os factores comuns e os b_{ij} . Por fim, através da regressão baseada em dados seccionais entre os rendimentos esperados dos diversos títulos e os b_{ij} calculam-se os prémios de risco λ_{ij} e quais destes são significativamente diferentes de zero.

Roll e Ross (1980) encontraram cerca de 3 a 4 factores significativos com 95% de confiança para os 42 grupos de 30 títulos com que trabalharam. Estes autores concluíram que não há forma de garantir (excepto para λ_0) que os factores são os mesmos entre os diversos grupos. Neste contexto têm sido desenvolvidos estudos [e.g. Chen *et al.* (1986), Fama *et al.* (1993)] no sentido de avaliar a correlação de variáveis económico-financeiras face às taxas de rendibilidade de acções ou carteiras de acções, sendo de destacar o índice de produção industrial, a inflação não antecipada, variações no prémio de risco medidas pela diferença de rendimento das obrigações de diferentes classes de risco, variações na curva de rendibilidade expressa pelas diferenças entre obrigações do Tesouro de curto e longo prazo como os factores mais utilizados.⁷

As propriedades estatísticas da matriz de correlações tem sido objecto de estudo, não só no âmbito da econometria como também da econofísica, apesar de estarem implícitos diferentes objectivos. Na investigação econométrica, o principal objectivo é determinar o número de factores presentes nos mercados financeiros do presente modelo. Já na econofísica, a existência de valores dominantes na referida matriz tem sido interpretada como sinal de que um pequeno número de factores económicos seguem uma dinâmica estocástica das acções nos mercados financeiros [Mantegna *et al.* (2000)].

Os testes empíricos realizados ao modelo *APT* não têm permitido grandes conclusões, dado que funcionam com alguns grupos de títulos mas não com outros, o que parece indicar uma evidente

⁷No Capítulo 6 é aprofundada a análise da relação dos mercados bolsistas com factores macroeconómicos e financeiros e é apresentada a evidência empírica para o caso português. São também apresentadas abordagens que têm em consideração a componente de longo prazo nas variáveis em estudo (testes de cointegração, modelos *VAR* e *VECM*), abordagens baseadas em modelos uniequacionais e multiequacionais e abordagens não-lineares.

dificuldade na identificação dos factores explicativos, verificando-se que estes não são constantes ao longo do tempo nem para diferentes espaços geográficos.

Nos últimos anos, o surgimento de modelos teóricos tornou-se menos frequente. Na década de 80 a investigação realizada focou essencialmente desenvolvimentos dos modelos já existentes.

Um dos principais avanços em termos de modelização nos anos mais recentes prende-se com a assunção de que a variância varia no tempo, formando os chamados *clusters de volatilidade*. Uma vez que as taxas de rendibilidade não são normalmente distribuídas, não é surpreendente que estudos sobre a volatilidade indiquem que esta não é estável. Shiller (1989, 2000) estudou a volatilidade dos mercados, não na perspectiva das taxas de rendibilidade, mas sim da volatilidade esperada num mercado racional. Shiller (1989, 2000) notou que os investidores racionais avaliam as acções de acordo com os valores esperados dos respectivos dividendos. Concluiu que no mercado existem os *noise traders*, aqueles que seguem grandes movimentos e que apresentam *overreaction* e os *smart money traders*, aqueles que investem de acordo com o valor (que não têm de ser necessariamente profissionais).

Os modelos utilizados para abordar esta temática são os modelos do tipo *ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)* desenvolvidos inicialmente por Engle (1982). Desde o seu aparecimento, estes modelos têm sofrido muitos aperfeiçoamentos com vista a uma maior adequabilidade à realidade. Apesar de tudo, baseiam-se implicitamente em pressupostos de memória de curto prazo e de algum modo na eficiência dos mercados [Peters (1996)].

No âmbito da análise da dependência não-linear em finanças, têm-se verificado fortes desenvolvimentos ao nível de testes e abordagens. De acordo com Hsieh (1991, 1993) as possíveis causas para a rejeição da hipótese de que as taxas de rendibilidade são *i.i.d.* são a não estacionariedade, a existência de não-linearidades e/ou o caos determinístico. No Capítulo 5 são descritas abordagens e testes à dependência não-linear, sendo ainda comparados os resultados destes e do teste à independência baseado na informação mútua para sete índices bolsistas internacionais.

Para além da análise das componentes de curto prazo na relação entre variáveis, é de realçar o crescente desenvolvimento apresentado por modelos e abordagens que têm em consideração a avaliação das componentes de longo prazo na relação de variáveis económico-financeiras. Neste contexto são de evidenciar abordagens que se baseiam na não estacionariedade das sucessões cronológicas em estudo, nomeadamente os testes de cointegração [vide por exemplo Johansen (1988)] e os modelos *VAR* e *VECM*.

1.4 Síntese do capítulo

No presente capítulo foram apresentadas algumas das principais abordagens em finanças para a avaliação de activos financeiros e pretendeu-se ilustrar a teoria que está por detrás destas abordagens, assim como os seus principais pressupostos. Uma das principais bases da teoria financeira é a hipótese de eficiência dos mercados, de acordo com a qual um mercado é eficiente se não possibilitar a realização de estratégias que permitam ao investidor ganhos anormais de forma sistemática. No fundo, esta hipótese tem como premissa o facto de que nenhum investidor tem acesso a informação privilegiada e por isso eventuais tentativas de predição do comportamento das taxas de rendibilidade dos activos são totalmente inúteis.

Naturalmente que a hipótese de eficiência dos mercados tem sido alvo de numerosos estudos e testes, sendo encontrados alguns factos estilizados na literatura que parecem contrariar o princípio de eficiência, nomeadamente a presença de *fat tails*, de dependência não-linear temporal e evidência de caos [Cont (2001)].

Na terceira secção deste capítulo foram apresentados de forma sucinta os modelos clássicos da gestão de carteiras, nomeadamente o modelo da média-variância de Markowitz, o modelo *CAPM* e o modelo *APT*. Para além dos seus pressupostos e princípios, foram também apresentados alguns comentários e testes realizados a estes modelos. Por fim, foram ainda mencionados de forma breve alguns desenvolvimentos mais recentes em certas abordagens de análise dos mercados financeiros, seja ao nível da análise de dependência não-linear entre variáveis seja ao nível da análise das componentes de longo prazo na relação entre variáveis de cariz económico-financeiro. Estas abordagens são alvo de análise mais detalhada em capítulos posteriores.

Capítulo 2

Entropia e informação mútua

Neste capítulo são apresentados os conceitos de entropia e suas variantes, nomeadamente a informação mútua, assim como as suas propriedades e forma de estimação utilizada neste trabalho de investigação. Estes conceitos são explorados nesta tese na tentativa de superar algumas das possíveis limitações dos modelos tradicionais utilizados na análise dos mercados financeiros, nomeadamente ao nível da análise da incerteza e da dependência não-linear entre variáveis. Com vista a contextualizar e justificar a introdução desta medida e suas variantes no presente estudo, são inicialmente exploradas algumas similaridades entre a física e a economia financeira, que possibilitam a interacção entre as duas áreas da ciência, criando uma nova disciplina: a econofísica.

Em seguida é apresentada a entropia e suas propriedades matemáticas tanto para distribuições discretas como para distribuições contínuas. A informação mútua é também alvo de análise, assim como as suas propriedades. É ainda descrito o método de estimação para a informação mútua e para a entropia utilizado neste estudo - a equiquantização marginal - que se baseia numa partição equitativa do espaço. Por fim é explorada a utilização da entropia na teoria financeira, sendo também analisados alguns exemplos da aplicação da entropia em determinadas áreas.

2.1 Alguns paralelismos entre a física e as finanças

Assiste-se cada vez mais a uma aproximação entre as diversas áreas científicas com o objectivo de conseguir uma explicação mais realista e aprofundada dos fenómenos naturais e sociais. Desta aproximação é de realçar a que se tem verificado de forma crescente entre a física e a teoria financeira [Mantegna *et al.* (2000), Stanley *et al.* (2001)].

Esta cooperação visa superar algumas limitações existentes na teoria económica, devido à complexidade e dinâmica subjacentes que são incompatíveis com os modelos tradicionais que são vul-

garmente utilizados [Zhang (1998), Stanley *et al.* (2001)].

Assim surge a nova disciplina – a econofísica - que pretende acima de tudo explicar a razão de ser de determinados fenómenos económico-financeiros, por meio de uma análise e modelação típicas dos processos da física, nomeadamente através de estudos no campo da física estatística, sistemas dinâmicos não-lineares e outros [Farmer *et al.* (1999a), Farmer (1998, 1999), Ausloos *et al.* (1999), Ausloos *et al.* (2001), Stanley *et al.* (2001), Drozd *et al.* (2001a), Drozd *et al.* (2001b), Mantegna *et al.* (2000), Ilinski (2001), Voit (2001), Bouchaud (2002)].

Um assunto que tem assumido uma grande relevância e tem sido alvo da aplicação de fractais e outros modelos da física é a descoberta que os mercados bolsistas apresentam possíveis falhas de eficiência, o que é revelado, entre outros factores, pelo facto de os pressupostos da distribuição normal e da independência das taxas de rendibilidade dos títulos não se verificarem empiricamente em muitos estudos realizados neste âmbito [Ausloos (1998), Stanley *et al.* (2001)].

A aplicação de resultados matemáticos e físicos ao mundo das finanças remonta pelo menos ao ano 1900, onde Bachelier, na sua tese de doutoramento *Théorie de la Spéculation*, testa a hipótese de que os preços das acções flutuam de forma perfeitamente aleatória (passeio aleatório) [Bouchaud *et al.* (1999c)]. Este modelo, porém, assume um grau tão elevado de simplicidade que pode não conseguir descrever as principais características das flutuações dos preços, nomeadamente na presença de *crashes*. Isto porque Bachelier assumiu que estas flutuações seguiam uma distribuição normal constante ao longo do tempo, não dando atenção ao caso concreto de eventos extremos. Denota-se desde então uma procura crescente de modelos mais adequados à previsão de acontecimentos extremos e medição do risco. Na verdade, a análise e tentativa de previsão de *crashes* é um dos principais atractivos dos físicos face à teoria financeira.

Os mercados bolsistas são dotados de um elevadíssimo grau de complexidade, devido ao facto de serem sistemas abertos, onde inúmeros subsistemas actuam e interactuam de forma não-linear e dinâmica, cuja análise constitui um atractivo para os físicos que experimentaram alguns métodos diferentes dos utilizados pelos economistas.

Bonanno, Lillo e Mantegna (2001) consideram que os mercados financeiros apresentam vários níveis de complexidade que poderão ter como causa o facto de serem sistemas compostos por inúmeros agentes que interagem entre si de modo não-linear. Os autores identificam três níveis de complexidade para os mercados financeiros. O primeiro refere-se à complexidade nas sucessões cronológicas derivada da dependência temporal linear e não-linear e no facto de que as sucessões cronológicas referentes às taxas de rendibilidade só são assintoticamente estacionárias. O segundo nível de complexidade diz respeito à existência de fortes indícios de *cross-correlation* entre títulos e factores macroeconómicos, o que possibilita uma maior capacidade de predição. O terceiro nível de

complexidade apontado por Bonanno, Lillo e Mantegna (2001) refere-se aos movimentos colectivos observados durante eventos extremos nos mercados, nomeadamente *crashes*. Os autores concluem que os modelos típicos de avaliação dos activos (*CAPM*, *APT*) falham aquando da existência de eventos extremos, dado que estes apresentam características e propriedades estatísticas muito diferentes das apresentadas num dia normal de bolsa. Apesar de tudo, os autores defendem que a modificação da forma da distribuição durante um evento extremo não é totalmente arbitrária, existindo regularidades estatísticas que podem ser detectadas com o objectivo de prever este tipo de eventos no futuro.

Exemplos clássicos da analogia com a física incluem o gás líquido no ponto crítico e o ponto Curie de magnetismo (temperatura à qual os materiais magnéticos se tornam paramagnéticos). Similarmente, durante os *crashes*, uma grande proporção de investidores decidem simultaneamente vender as suas acções, agravando ainda mais a queda. Segundo muitos investigadores este período é denominado de *log-periodic corrections*. Este tipo de modelo é vulgarmente utilizado na física para descrever fracturas nos materiais, em que o seu significado se resume ao facto das oscilações num sistema ocorrerem com intervalos de tempo cada vez menores, até se acumularem num único período, chamado período crítico [Dacorogna (1999)]. A aplicação desta teoria ao mercado de acções visa a previsão e explicação de *crashes* [Ausloos *et al.* (2001), Laloux *et al.* (1999), Bouchaud *et al.* (1999c), Sornette *et al.* (1996), Sornette *et al.* (1999), Sornette (2002), Lillo *et al.* (2004), Voit (2001)].

Um outro exemplo, é a similaridade que existe entre a turbulência e os mercados bolsistas. A um nível qualitativo pode-se injectar energia na turbulência a uma grande escala, observando-se que a reacção é apresentada em transferências de energia em escalas sucessivamente menores. Nestes mercados, a informação também pode ser injectada no sistema, numa escala bastante grande, sendo a reacção a essa informação transmitida em escalas muito menores, ao nível dos investidores individuais, por exemplo [Mantegna *et al.* (1995, 2000)].

De acordo com o conceito de movimento Browniano, uma partícula de grande dimensão interactua com um número elevado de moléculas de pequena dimensão, que podem ser discriminadas em termos de equações determinísticas [Ausloos (1998), Bouchaud *et al.* (1999a), Bouchaud *et al.* (1999c)]. A influência das moléculas pode ser substituída por uma força aleatória que flutua com o tempo e com a amplitude relativa da temperatura. Da mesma forma, este princípio pode ser aplicado para modelar o comportamento individual de cada agente no mercado bolsista, sendo posta em causa a “sagrada” racionalidade exigida nos modelos económico-financeiros e que constitui a base de investigação nesta área. Por este motivo, são muitos os economistas que estão, de certa forma, relutantes em aceitar uma teoria que contraria tais princípios [Bouchaud *et al.* (1999c)].

De entre os vários pontos de interesse dos mercados financeiros, as taxas de juro e os mercados de derivados são também alvos de estudo dos físicos. Como exemplo pode referir-se o modelo de Black-Scholes de avaliação de opções, desenvolvido a partir de uma parceria entre a física e a economia, pressupondo a utilização da distribuição de probabilidades normal, o que certamente pode constituir uma limitação do modelo [Bouchaud *et al.* (1999c), James (1999)].

Existem ainda outras áreas de aplicação mútua entre a física e as finanças/economia, mais precisamente através de simulação de Monte Carlo e da teoria da matriz aleatória utilizada na física nuclear e também na optimização de carteiras de investimentos financeiros.¹

2.2 Conceito de entropia

A palavra “entropia” tem origem grega, a primeira parte advém de energia e a segunda parte “*tropos*” que significa evolução. A entropia é um conceito oriundo da física, introduzido por Clausius em 1865 como caracterização da Segunda Lei da Termodinâmica: “a energia do universo é constante e a sua entropia está a aumentar continuamente”. Clausius demonstrou que a alteração da entropia de um sistema é obtida através da injeção de pequenas quantidades de calor nesse mesmo sistema, dividido pela temperatura absoluta durante a absorção de calor [*in* Petz (2001)]:

$$\text{Entropia} = \frac{\text{energia potencial}}{\text{temperatura absoluta}}. \quad (2.1)$$

Segundo a Primeira Lei da Termodinâmica, não há destruição da energia global, há sim, de acordo com a Segunda Lei, uma diminuição do nível da sua qualidade, logo uma diminuição daquela que é disponível ou utilizável. Segundo Peixoto (1984), há uma dissipação e degradação de energia o que é equivalente a um aumento de entropia.

Apesar do conceito de entropia ter sido introduzido por Clausius, a verdade é que na altura o argumento heurístico como suporte da Segunda Lei da Termodinâmica foi considerado incompleto. Mais tarde, Boltzmann clarificou o conceito de entropia, através de um programa científico para analisar a conexão entre calor e probabilidade [Petz (2001)].

O primeiro livro compreensível sobre formalismo matemático e quântico foi publicado em 1932 por Johann von Neumann, cujo título é: “*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*”. Johann von Neumann associou a entropia com um operador estatístico no sentido de analisar determinadas propriedades da termodinâmica e desenvolveu matematicamente o conceito, chegando a uma solução que actualmente é chamada de estado de Gibbs [Petz (2001)].

¹São de realçar vários trabalhos realizados à luz da física e cujo objecto de estudo são os mercados financeiros. Para uma informação mais detalhada ver por exemplo Philippatos e Wilson (1972), Dacorogna (1999), James (1999), Farmer (1999), Fernholz (1999) e Stanley *et al.* (2001).

Após von Neumann, Shannon iniciou a análise e interpretação da quantidade $-\sum p_i \log p_i$, sendo p_i a probabilidade de ocorrência do evento i , como uma “medida de incerteza” ou “medida de informação”. Shannon criou a teoria da informação em 1948, e colocou o seguinte problema [in Petz (2001, p. 6)]:

“Suppose we have a set of possible events whose probabilities of occurrence are p_1, \dots, p_n . These probabilities are known but that is all we know concerning which event will occur. Can we find a measure of how much ‘choice’ is involved in the selection of the event or how uncertain we are of the outcome?”

Shannon (1948) listou quatro pressupostos para que a medida $H = -\sum p_i \log p_i$ fosse considerada uma medida de incerteza, nomeadamente: continuidade, simetria, recursividade e aditividade. Esta medida foi utilizada e interpretada como incerteza, informação e entropia. Algum tempo mais tarde Shannon disse [in Petz (2001, p. 6)]:

“My greatest concern was what to call it. I thought of calling it ‘information’, but the word was overly used, so I decide to call it ‘uncertainty’, When I discussed it with John von Neumann, he had a better idea. von Neumann told me, ‘You should call it entropy, for two reasons. In the first place your uncertainty function has been used in statistical mechanics under that name, so it already has a name. In the second place, and more important, nobody knows what entropy really is, so in a debate you will always have the advantage.”

A entropia pode ser encarada como medida de incerteza, de dispersão, de desordem, de surpresa e de diversificação. Uma forma de definir a entropia é em termos do número de microestados (configurações possíveis de um sistema) numa determinada situação [Georgescu-Roegen (1971)]. A desordem surge porque não se consegue saber qual o microestado em que o sistema se encontra no instante da observação, por isso, a entropia é um índice de desordem molecular [Peixoto (1984)].

Como propriedade da matéria que mede o grau de desorganização interna a nível molecular, a entropia tende a aumentar continuamente até atingir um valor máximo num sistema isolado. Seja E a energia, H a entropia de um sistema e T a temperatura, então a entropia apresentada na equação (2.1) pode ser representada da seguinte forma [Reis (2001)]

$$\Delta H = \frac{\Delta E}{T} \Leftrightarrow T = \frac{\Delta E}{\Delta H}. \quad (2.2)$$

A temperatura absoluta é expressa pela quantidade de energia que se deve fornecer a um sistema para que a sua entropia aumente uma unidade, logo, o aumento de entropia de um sistema acompanha o aumento de energia a ele fornecido. No “Zero Absoluto”, ou seja, no estado em que existe

disposição perfeita, não há incerteza quanto às posições das moléculas, logo a entropia é nula - Terceira Lei da Termodinâmica.²

Uma das propriedades da entropia é a aditividade, dado que a entropia de um sistema composto é igual à soma das entropias dos seus subsistemas [Shannon (1948), Georgescu-Roegen (1971)]. Outra propriedade importante prende-se com o facto de que numa sucessão de estados dum sistema, a entropia aumenta continuamente.

Os processos geradores de entropia são por natureza irreversíveis, dado que apenas há uma ordem natural de aumento da entropia na sucessão de estados de um sistema. Se não se verificar um aumento da entropia, mas sim uma invariância, teoricamente, pode-se considerar o processo reversível. Como exemplo deste tipo de processo pode apontar-se um processo quase estático:

(i) $\Delta H > 0$, processo irreversível;

(ii) $\Delta H = 0$, processo reversível;

(iii) $\Delta H < 0$, processo impossível.

Se se detectar uma diminuição da entropia de um estado para o outro, significa que apenas se está a considerar uma operação parcial de um determinado processo e não o processo global, nem o sistema global e sua vizinhança. Segundo Peixoto (1984), as transformações físicas ou químicas evoluem de forma natural de estados de maior organização para outros de menor organização, a não ser que se contrarie o “processo natural” com dispêndio de energia.

É o que acontece nas organizações ao actuarem como sistemas fechados, verificando-se um aumento da entropia para níveis máximos, só abrandado, ou até recuando com a injeção de recursos, sendo de salientar a informação como o principal recurso (energia vital) para combater a entropia numa qualquer organização que não seja um sistema isolado. Por este motivo se prende a cada vez maior importância dos sistemas de informação nas organizações, exigindo maiores preocupações com o sistema de informação orgânico, genético e funcional como forma de possibilitar a minimização da entropia.

As configurações de maior desordem são também as de maior probabilidade, uma vez que em qualquer sistema a entropia tem tendência a aumentar até atingir um valor máximo [Georgescu-Roegen (1971)]. Neste sentido o conceito de probabilidade é perfeitamente aceite, podendo a entropia ser definida em termos de probabilidade, pois o aumento de entropia que ocorre durante um processo irreversível pode associar-se à transição de um estado menos provável para um estado de maior probabilidade.

²Para mais detalhes vide Peixoto (1984).

Esta definição implica que quanto menos provável for uma dada distribuição de moléculas ou de átomos num sistema, menor será a entropia desse mesmo sistema. Quanto maior for a desorganização maior será a entropia. À luz da Segunda Lei da Termodinâmica, ao se considerarem os processos físicos, químicos e biológicos, verifica-se que a energia livre, dos processos naturais tende a diminuir e a entropia a aumentar. O Universo tende assim para um estado de cada vez maior desorganização.

2.3 Propriedades da entropia

A utilização de probabilidades para descrever uma determinada situação implica a existência de incerteza. Todas as distribuições de probabilidade são diferentes, denotando-se que algumas apresentam níveis de incerteza mais elevados que outras. As questões que se colocam é se é possível quantificar esta incerteza, e se sim, de que forma? E como avaliar a relação global entre variáveis?

Neste contexto são apresentadas a entropia e a informação mútua como medidas de incerteza e de dependência, cujas propriedades matemáticas possibilitam a sua aplicabilidade para o efeito.

2.3.1 Entropia e distribuições discretas

Seja $X \in \vec{X}$ uma variável aleatória com possíveis valores i , para $i = 1, \dots, n$ e probabilidade p_i , tal que $\sum_i p_i = 1$ e $0 \leq p_i \leq 1$. Shannon (1948) definiu a entropia como medida de uma distribuição de probabilidade $p = (p_1, \dots, p_n)$ da seguinte forma:

$$H(X) = -\sum_i p_i \log p_i. \quad (2.3)$$

É usada a convenção de que $0 \log(0/z) = 0$ para $z \geq 0$ e $z \log(z/0) = \infty$.³ A utilização do logaritmo é explicada por Shannon e Weaver (1964). Note-se que, desde que $p_X \leq 1$, o logaritmo de uma fracção é negativo, logo a entropia assume valor positivo. Se o sistema gerar apenas um acontecimento, não há incerteza e $H = 0$. No mesmo sentido, à medida que o número de acontecimentos igualmente possíveis aumenta, a entropia também aumenta. A entropia assume o valor máximo quando todos os acontecimentos possíveis tiverem a mesma probabilidade de ocorrência, isto é

$$p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}. \quad (2.4)$$

³Nota: A escolha da base do logaritmo é irrelevante, convém é distinguir o resultado obtido consoante a base utilizada, assim: \log_2 – entropia medida em bits; \log_{10} – entropia medida em dits; $\log_e = \ln$ – entropia medida em nats.

Por fim, a utilização do logaritmo faz com que seja dada uma maior ponderação a eventos de pequena probabilidade, sendo dada maior atenção à probabilidade de ocorrência de *crashes* ou outros eventos extremos, atingindo o máximo quando a distribuição de probabilidade é uniforme [equação (2.4)]. A utilização da entropia permite quantificar a incerteza numa distribuição de probabilidade não conhecida [Golan *et al.* (1997)].

Através do conceito de entropia máxima é seleccionada a distribuição para a qual os dados são suficientes para determinar a probabilidade em causa. Com vista à demonstração desta abordagem, suponha-se a variável aleatória X , em que se podem realizar N repetições de uma experiência, com n possíveis resultados (estados). Seja N_1, \dots, N_n o número de vezes que cada resultado ocorre na experiência, em que

$$\sum_i N_i = N, \quad N_i \geq 0 \text{ e } i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Como N é o número de repetições e n o número de possíveis resultados, existem n^N possíveis resultados em N . As frequências relativas, normalmente definidas por

$$p_i = \frac{N_i}{N} \text{ ou } N_i = Np_i, \text{ para } i = 1, \dots, n, \quad (2.6)$$

podem também ser dadas pelo número de possíveis combinações, resultando no coeficiente multinomial

$$W = \frac{N!}{\prod_i N_i!}. \quad (2.7)$$

A função monótona logarítmica de W é

$$\log W = \log N! - \sum_{i=1}^n \log N_i!. \quad (2.8)$$

Dada a aproximação de Stirling [Golan *et al.* (1997)]

$$\log x! = x \log x - x, \text{ onde } x > 0, x \rightarrow \infty, \quad (2.9)$$

o lado direito da equação (2.8) pode ser reescrito da seguinte forma (assumindo que N é um valor muito grande)

$$\log W \approx N \log N - N - \sum_{i=1}^n N_i \log N_i + \sum_{i=1}^n N_i, \quad (2.10)$$

como $\sum_{i=1}^n N_i = N$, tem-se que

$$\log W \approx N \log N - \sum_{i=1}^n N_i \log N_i. \quad (2.11)$$

O rácio N_i/N representa a frequência relativa da ocorrência de um resultado n na sequência N , $\log N_i/N \rightarrow p_i$ quando $N \rightarrow \infty$.

Da equação (2.11), obtém-se

$$\log W \approx N \log N - \sum_{i=1}^n N p_i \log N p_i, \quad (2.12)$$

ou seja

$$\log W \approx N \log N - \sum_{i=1}^n N_i \log N - N \sum_{i=1}^n p_i \log p_i. \quad (2.13)$$

Simplificando, obtém-se

$$\log W \approx -N \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (2.14)$$

e finalmente

$$\frac{1}{N} \log W \approx - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i = H(X). \quad (2.15)$$

A equação (2.15) refere-se à entropia de Shannon, como já referido, que se anula sempre que $p_i = 0$ e atinge o seu valor máximo quando $p_1 = \dots = p_n = 1/n$.

Um dos problemas vulgarmente colocados neste âmbito é sobre o tamanho ideal da amostra a ter em conta para calcular a entropia. Pöschel, Ebeling e Rosé (1995) consideram que para determinar a entropia de uma amostra pequena, o número de observações diferentes que podem ocorrer deverá ser pequeno comparado com o tamanho da amostra, dado que nesta situação a probabilidade de ocorrência de um certo evento é praticamente igual à respectiva frequência relativa $p_i \approx f_i$. Se tal acontecer, os autores demonstram que

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \approx - \sum_{i=1}^n f_i \log f_i \quad (2.16)$$

onde f_i é a frequência relativa de determinado acontecimento. Se o número de diferentes acontecimentos não for pequeno comparado com o tamanho da amostra, então a igualdade em (2.16) não se verifica e neste caso o simples conhecimento das frequências relativas não é suficiente para calcular a entropia. Pöschel, Ebeling e Rosé (1995) defendem que para calcular a entropia de uma distribuição não é necessário determinar para cada evento a respectiva probabilidade. É suficiente determinar os valores das probabilidades, não sendo necessário saber qual a probabilidade de cada evento.

Há que ter em consideração que a entropia $H(X)$ não é função de X , mas sim da distribuição de probabilidade da variável aleatória X . Ou seja, o valor de $H(X)$ não depende dos valores que X assume, mas das suas probabilidades.

A definição axiomática da entropia justifica a seguinte afirmação: $H(X)$ é a medida quantitativa do total de incerteza associada a uma distribuição de probabilidade do evento X [Fieldman (1998)].

Se existirem dois acontecimentos independentes $X \in \vec{X}$ e $Y \in \vec{Y}$ cujas probabilidades de ocorrência são respectivamente p e q , onde $p = 1 - q$, a entropia pode ser definida por $H(X, Y) = -(p \log p + q \log q)$ (Figura 2.1).

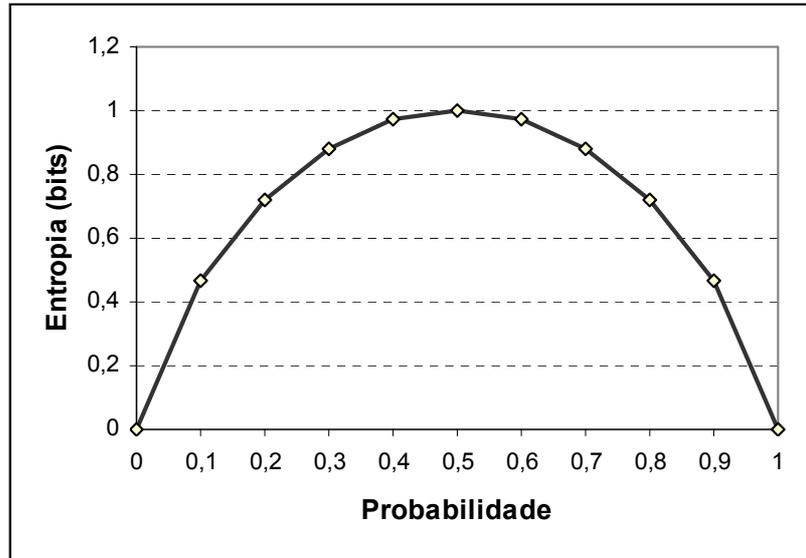


Figura 2.1: Entropia (em bits) dos acontecimentos X e Y .

Sejam dois acontecimentos X e Y , em que o primeiro apresenta M possibilidades de ocorrência e o segundo N possibilidades e seja $p_{i,j}$ a probabilidade conjunta de ocorrência do primeiro e do segundo acontecimento. A entropia do acontecimento conjunto é dada por

$$H(X, Y) = - \sum_{i,j} p_{i,j} \log p_{i,j} \quad (2.17)$$

sendo as entropias individuais definidas por

$$H(X) = - \sum_{i,j} p_{i,j} \log \sum_j p_{i,j} \quad (2.18)$$

$$H(Y) = - \sum_{i,j} p_{i,j} \log \sum_i p_{i,j}, \quad (2.19)$$

e verifica-se que [Shannon (1948)]

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y) \quad (2.20)$$

sendo a igualdade assumida apenas no caso em que os acontecimentos X e Y são independentes.

Sendo dois acontecimentos X e Y não necessariamente independentes para cada valor particular de i que X pode assumir, existe uma probabilidade condicionada, $p(i|j)$, onde Y assume valor j dada por

$$p(i|j) = \frac{p_{i,j}}{\sum_j p_{i,j}}, \quad (2.21)$$

e a entropia condicionada de Y dado X é definida por

$$H(Y|X) = - \sum_{i,j} p_{i,j} \log p(j|i). \quad (2.22)$$

Esta medida quantifica a incerteza de Y quando X é conhecido. Substituindo o valor de $p(j|i)$, obtém-se

$$H(Y|X) = - \sum_{i,j} p_{i,j} \log p_{i,j} + \sum_{i,j} p_{i,j} \log \sum_j p_{i,j} = H(X,Y) - H(X), \quad (2.23)$$

ou seja,

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X). \quad (2.24)$$

Por outras palavras, a incerteza resultante da conjunção dos acontecimentos X e Y será igual à incerteza de X mais a incerteza de Y quando X é conhecido, isto é

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y), \quad (2.25)$$

como

$$H(X) + H(Y) \geq H(X,Y), \quad (2.26)$$

então

$$H(Y) \geq H(Y|X) \quad \text{e} \quad H(X) \geq H(X|Y), \quad (2.27)$$

o que se justifica pelo facto de a entropia não aumentar pelo conhecimento de uma variável, pelo contrário, o conhecimento de X tende a diminuir a incerteza que existe relativamente a Y . No caso de X e Y serem independentes, verifica-se uma igualdade entre os valores da entropia.

Se $H(Y|X) = 0$, então a incerteza é nula, isto é, para cada resultado de X a experiência Y fica totalmente determinada. Se $H(Y|X) = H(Y)$, então o nível de incerteza é máximo, demonstrando que as estatísticas X e Y são independentes, logo qualquer informação acerca de X , não diminui a incerteza acerca de Y .

2.3.2 Entropia e distribuições contínuas

As distribuições contínuas apenas dizem respeito a variáveis quantitativas enquanto que as distribuições discretas podem referir-se a variáveis quantitativas e a atributos (não quantitativos).

Esta diferença torna-se mais importante quando se altera a unidade de medida das variáveis. Tal transformação não provoca quaisquer variações na entropia referente a distribuições discretas, contudo para distribuições contínuas, a entropia poderá sofrer variações.

Outra característica importante da entropia para distribuições discretas é a sua total independência face aos valores da variável em causa. Deste modo quaisquer alterações em X que não alterem a distribuição de probabilidade não provocarão transformações no valor da entropia, facto que não ocorre na entropia das distribuições contínuas.

De forma análoga à equação (2.3), que representa a entropia de um conjunto de probabilidades discretas, a entropia de uma variável X com distribuição de probabilidade contínua definida pela função de densidade de probabilidade $p_X(x)$ é dada por [Shannon (1948)]

$$H(X) = - \int p_X(x) \log p_X(x) dx. \quad (2.28)$$

Para n dimensões de distribuição $p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$ obtém-se

$$H(X) = - \int \dots \int p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \log p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (2.29)$$

Assumindo a existência de duas variáveis aleatórias contínuas X e Y , a entropia conjunta será definida por

$$H(X, Y) = - \int \int p_{X, Y}(x, y) \log p_{X, Y}(x, y) dx dy \quad (2.30)$$

e as entropias condicionais são calculadas da seguinte forma

$$H(Y|X) = - \int \int p_{X, Y}(x, y) \log \frac{p_{X, Y}(x, y)}{p_X(x)} dx dy, \quad (2.31)$$

$$H(X|Y) = - \int \int p_{X, Y}(x, y) \log \frac{p_{X, Y}(x, y)}{p_Y(y)} dx dy \quad (2.32)$$

onde as probabilidades marginais são definidas por

$$p_X(x) = \int p_{X, Y}(x, y) dy \quad (2.33)$$

$$p_Y(y) = \int p_{X, Y}(x, y) dx. \quad (2.34)$$

A entropia das distribuições contínuas assume quase todas as propriedades da entropia das distribuições discretas, sendo de realçar [Shannon (1948), Kraskov *et al.* (2004)]:

- (i) Se X é limitado a um certo volume v no espaço, então $H(X)$ assume o valor máximo, $\log v$, quando $p_X(x)$ é uma constante, $1/v$, em todo o volume;

- (ii) Para quaisquer duas variáveis X e Y , verifica-se que a entropia conjunta é menor ou igual que a soma das entropias individuais [ver expressão (2.20)], assumindo a igualdade apenas no caso em que as variáveis são perfeitamente independentes, ou seja, $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$;
- (iii) Outra propriedade semelhante à entropia para variáveis com distribuições discretas que também aqui se verifica é

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y) \quad (2.35)$$

ou seja $H(Y) \geq H(Y|X)$ e $H(X) \geq H(X|Y)$.

Existe uma diferença importante entre a entropia para distribuições discretas e para distribuições contínuas, uma vez que em distribuições discretas a entropia mede a aleatoriedade absoluta, enquanto que no caso contínuo esta medida é relativa face ao sistema de coordenadas. Se houver uma alteração das coordenadas a entropia sofre alterações [Shannon (1948), Kraskov *et al.* (2004)]. Se se alterarem as coordenadas de x_1, \dots, x_n para y_1, \dots, y_n , a nova entropia será dada por

$$H(Y) = \int \dots \int p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) J\left(\frac{x}{y}\right) \log p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) J\left(\frac{x}{y}\right) dy_1 \dots dy_n \quad (2.36)$$

onde $J(x/y)$ é o Jacobiano da transformação de coordenadas. Expandindo o logaritmo e alterando as variáveis para x_1, \dots, x_n

$$H(Y) = H(X) - \int \dots \int p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \log J\left(\frac{x}{y}\right) dx_1 \dots dx_n. \quad (2.37)$$

A nova entropia não é mais do que a entropia anterior menos o valor esperado do Jacobiano. Para o caso contínuo a entropia pode ser considerada como uma medida de aleatoriedade relativa face a um sistema standard [Shannon (1948)]. Deste modo, a entropia de uma distribuição contínua pode assumir valores negativos, caso a escala escolhida, por exemplo, para uma distribuição uniforme seja de entropia nula (normalmente é a mais utilizada) e qualquer distribuição que apresente um maior nível de concentração terá entropia negativa [Shannon (1948), Verdugo *et al.* (1978), Fieldman (1998), Soofi *et al.* (2002), Kraskov *et al.* (2004)].

Quaisquer alterações ao nível da unidade de medida provocarão aumentos ou diminuições da entropia referente às distribuições contínuas, cuja constante multiplicativa é incorporada na arbitrariedade do logaritmo. Além disso a entropia das distribuições contínuas é sensível a quaisquer outras alterações que possam ocorrer na variável, por isso se adequa mais para o estudo das taxas de rendibilidade do títulos e dos mercados financeiros.

Se se trabalhar com duas distribuições de probabilidade, cujos valores estão numa determinada dimensão, uma mudança em ambas as unidades de medida não provocará quaisquer alterações na diferença relativa de entropia entre elas. Tal propriedade permite a aplicação da entropia à teoria de carteiras, onde as taxas de rendibilidade dos títulos têm valores na mesma unidade de medida.

Fieldman (1998) apresentou um método para calcular a entropia de uma distribuição contínua (desconhecida) a partir da distribuição discreta calculada através dos histogramas da distribuição em causa. Seja X uma variável aleatória com distribuição de probabilidade contínua, cuja função de densidade de probabilidade é $p_X(x)$. Pode-se dividir a extensão de X em blocos com amplitude Δx_i , onde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, com $i = 1, \dots, K$. Surge então, uma nova variável U que pode ser descrita por

$$U = u_i \text{ se } x_i \leq X \leq x_{i+1}. \quad (2.38)$$

U é uma variável discreta e os valores de u_i obedecem à seguinte relação:

$$p(U = u_i) = p(x_i \leq X \leq x_{i+1}). \quad (2.39)$$

Como X é uma variável contínua, a função de probabilidade de U pode ser obtida pela simples integração da função de densidade de probabilidade de X no intervalo apropriado

$$p(U = u_i) = p_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_X(x) dx. \quad (2.40)$$

De acordo com o teorema do limite central, para cada bloco de amplitude Δx_i , existe um u_i tal que

$$p(u_i) \Delta x_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_X(x) dx. \quad (2.41)$$

Combinando as equações (2.40) e (2.41), obtém-se

$$p_i = p(u_i) \Delta x_i. \quad (2.42)$$

Utilizando a forma discreta para o cálculo da entropia, obtém-se

$$\begin{aligned} H(U) &= - \sum p(u_i) \Delta x_i \log [p(u_i) \Delta x_i] \\ &= - \sum p(u_i) \Delta x_i \log p(u_i) - \log \Delta x_i. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Com vista à simplificação do estudo, pode-se assumir que Δx_i é uma constante em X , sendo $\Delta x_i = \Delta$, com $i = 1, \dots, K$. O resultado da equação (2.43), pode reescrever-se da seguinte forma

$$H(U) = - \sum p(u_i) \Delta \log p(u_i) - \log \Delta. \quad (2.44)$$

Como Δ é uma constante, o limite da entropia de U , quando $K \rightarrow \infty$ é

$$\lim_{K \rightarrow \infty} H(U) = - \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) \log p_X(x) dx - \log \Delta, \quad (2.45)$$

e logo

$$\lim_{K \rightarrow \infty} H(U) \longrightarrow H(X) - \log \Delta. \quad (2.46)$$

Quando a entropia para variáveis contínuas é assim definida, $-\log \Delta$ diverge à medida que Δ diminui, ou tende para zero [Soofi *et al.* (2002), Kraskov *et al.* (2004)]. Verifica-se que a entropia de uma variável com distribuição contínua não é igual à entropia de uma variável com distribuição discreta. A diferença surge quando, no limite, o número de variáveis tende para infinito e a entropia também é infinita. Se a esta for subtraído o valor de $\log \Delta$ quando $\Delta \rightarrow 0$, então obtém-se a entropia de uma variável com distribuição de probabilidade contínua [Fieldman (1998)].

A entropia não se altera pela soma de uma constante à variável

$$H(X + c) = H(X) \quad (2.47)$$

contudo, a multiplicação da variável por uma constante, provoca alterações no valor da entropia [Shannon (1948), Golan *et al.*, (1997), Soofi (1997), Fieldman (1998), Darbellay *et al.* (1999), Darbellay *et al.* (2000a), Kraskov *et al.* (2004)]

$$H(bX) = H(X) - \log |b|^{-1} = H(X) + \log |b|.$$

Um caso particular da mudança de coordenadas é quando esta corresponde a uma transformação linear do tipo:

$$y_j = \sum_i a_{i,j} x_i, \quad (2.48)$$

neste caso, o Jacobiano é simplesmente dado por $|a_{i,j}|^{-1}$ e a entropia é

$$H(Y) = H(X) + \log |a_{i,j}|. \quad (2.49)$$

A distribuição de probabilidade normal é usualmente um dos principais pressupostos em vários modelos de gestão de carteiras e análise de regressão linear. Neste contexto, considerou-se pertinente apresentar a fórmula para calcular parametricamente a entropia de uma distribuição normal, definida por $NH(X)$, cujo desvio-padrão é σ . Sendo a função de densidade de probabilidade desta distribuição

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (2.50)$$

e logaritmizando ambos os lados da equação, obtém-se

$$-\log p_X(x) = \log \sqrt{2\pi}\sigma + \left(\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2} \right). \quad (2.51)$$

Como a entropia para variáveis contínuas (também chamada entropia diferencial) é dada por $H(X) = -\int p_X(x) \log p_X(x) dx$, tem-se então que

$$\begin{aligned} NH(X) &= \int p_X(x) \log \sqrt{2\pi}\sigma dx + \int p_X(x) \frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2} dx \\ &= \log(\sqrt{2\pi}e\sigma). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Face às propriedades apresentadas, verifica-se que a entropia pode ser considerada uma medida de incerteza, de desordem, de dispersão e de divergência generalista, não pressupondo qualquer distribuição de probabilidade teórica nem a linearidade dos dados. Neste contexto, considera-se que a sua análise e exploração poderão conduzir à obtenção de vantagens face a algumas abordagens tradicionais utilizadas no âmbito das finanças. No Capítulo 4 é apresentada de forma mais detalhada a generalidade deste conceito, e a evidência empírica da entropia como medida de incerteza para o mercado bolsista de acções português.

2.4 Medidas de divergência baseadas na entropia

As noções de “distância” e “divergência” entre distribuições têm sido um dos principais tópicos no desenvolvimento estatístico, sendo de referenciar os trabalhos realizados por Kullback, Akaike, Shannon, Hartley, Reny [vide e.g. Maasoumi (1993)]. No âmbito da econometria alguns dos principais contributos têm sido dados por Maasoumi, White, Granger, Robinson, Racine [vide e.g. Maasoumi (1993)].

A inferência estatística pode ser encarada como um meio para avaliar e julgar as afinidades entre distribuições. Assuma-se que $p_X(x)$ é a função de densidade de probabilidade *a priori* de X e $q_X(x)$ a função de densidade de probabilidade condicionada de X dada a ocorrência do evento E . Qual a informação ganha com o conhecimento da ocorrência de E ? Ou de outra forma, qual a distância entre $p_X(x)$ e $q_X(x)$? Kullback (1968) demonstra que a informação ganha, ou divergência entre as distribuições, também conhecida por entropia cruzada é dada por

$$I_1(q, p) = \int q_X(x) \log \frac{q_X(x)}{p_X(x)} dx. \quad (2.53)$$

Esta medida não é simétrica, é sim uma medida direccionada, por isso

$$I_1(p, q) = \int p_X(x) \log \frac{p_X(x)}{q_X(x)} dx = I'_1(q, p). \quad (2.54)$$

Ullah (2002) desenvolve a aplicação de medidas de divergência na avaliação e aproximações inferenciais. Este autor apresenta as principais propriedades da entropia cruzada:

- (1) $I_1(q, p) \geq 0$, a igualdade só ocorre quando $q_X(x) = p_X(x)$;
- (2) $I_1(q, p)$ é convexa em q e p ;
- (3) Para variáveis aleatórias mutuamente independentes,

$$I_1(p, q) = \sum_{i=1}^n I[q_X(x_i), p_X(x_i)] \quad (2.55)$$

e quanto menor for o valor de $I_1(p, q)$ mais próximas são as densidades q e p .

A medida de divergência de Kullback-Leibler-Jeyffres é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J(q, p) &= I_1(q, p) + I_1'(q, p) \\ &= \int (q_X(x) - p_X(x)) [\log q_X(x) - \log p_X(x)] dx. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Para que uma medida de divergência seja considerada uma medida de distância, ou seja, para que a medida seja métrica, deverá satisfazer a propriedade da triangularidade [Maasoumi (1993)]. As medidas de divergência apresentadas não são medidas de distância entre distribuições, não sendo por isso medidas métricas [Maasoumi (1993)].

2.5 Informação mútua

A independência é um dos conceitos mais valiosos em econometria, de tal modo que testá-la constitui um desafio. Existem vários testes à independência (teste de *Ljung-Box*, teste *BDS*, teste *ARCH LM* de Engle, expoente de Lyapunov, etc). Uma das formas mais práticas de avaliar a possível (in)dependência entre dois vectores de variáveis é através de uma medida que assuma o valor 0 quando exista total independência e 1 quando exista total dependência. Sejam A e B subconjuntos do espaço \vec{X} e \vec{Y} e seja $p_{\vec{X}, \vec{Y}}(A \times B)$ a probabilidade conjunta de dois acontecimentos. Designa-se ainda por $p_{\vec{X}}(A)$ e $p_{\vec{Y}}(B)$ as probabilidades marginais associadas. Define-se então a seguinte expressão

$$\ln \frac{p_{\vec{X}, \vec{Y}}(A \times B)}{p_{\vec{X}}(A) p_{\vec{Y}}(B)}. \quad (2.57)$$

Se os acontecimentos forem independentes, tem-se que

$$p_{\vec{X}, \vec{Y}}(A \times B) = p_{\vec{X}}(A) p_{\vec{Y}}(B),$$

o que implica que a expressão (2.57) será nula.

De acordo com Granger, Maasoumi e Racine (2004) uma medida de dependência entre variáveis deve respeitar um conjunto de propriedades ideais, como por exemplo:

- (a) Deve ser definida tanto para variáveis discretas como para variáveis contínuas;
- (b) Deve ser nula se as variáveis forem independentes e variar entre -1 e 1 para os restantes níveis de dependência;
- (c) No caso de existir uma relação não-linear perfeita entre as variáveis, o seu valor em módulo deve ser igual à unidade;
- (d) No caso de existir uma distribuição normal bivariada, então esta medida deve assumir os mesmos valores que o coeficiente de correlação linear;
- (e) A medida deve ser métrica, isto é, deve ser uma verdadeira medida de distância e não apenas de divergência;
- (f) Não deve variar devido a transformações lineares para variáveis com distribuição de probabilidade contínua.

A informação mútua é uma medida de dependência entre duas ou mais variáveis, revelando a quantidade de informação que as variáveis em estudo têm em comum. O conceito de informação mútua foi introduzido por Shannon (1948), mas uma definição mais generalizada desta medida foi dada por Gelfand, Kolmogorov e Yaglom (1956) [*in* Darbellay (1998a)] e por Perez (1957).

A informação mútua tem propriedades que a tornam uma importante medida de dependência [Perez (1957), Robinson (1991), Klan *et al.* (1997), Soofi (1997), Darbellay *et al.* (1999), Darbellay *et al.* (2000b), Darbellay (1998a, 1998b, 1998c, 1999), Bernhard *et al.* (1999), Yamano (2001), Dionísio *et al.* (2003a), Kraskov *et al.* (2004), Wang *et al.* (2005)], propriedades estas que serão apresentadas e exploradas nesta secção.

Existem basicamente duas formas para estimar a informação mútua. A primeira é a estimação directa e a segunda consiste em estimar as entropias, dado que a informação mútua é resultado da diferença de entropias. Sendo $H(X)$ e $H(Y)$ as entropias das variáveis aleatórias $X \in \vec{X}$ e $Y \in \vec{Y}$, $H(X, Y)$ a entropia conjunta e $H(Y|X)$ e $H(X|Y)$ as entropias condicionadas, a informação mútua pode ser definida da seguinte forma [Shannon (1948)]

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= H(Y) - H(Y|X) = H(X) - H(X|Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \\ &= \int \int p_{X,Y}(x, y) \log \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x) p_Y(y)} dx dy. \end{aligned}$$

Se se generalizar para vectores de variáveis, obtém-se

$$I(\vec{X}, \vec{Y}) = \int \int p_{\vec{X}, \vec{Y}}(x, y) \log \frac{p_{\vec{X}, \vec{Y}}(x, y)}{p_{\vec{X}}(x) p_{\vec{Y}}(y)} dx dy, \quad (2.58)$$

onde $p_{\vec{X}, \vec{Y}}$ é a *fdp* de (\vec{X}, \vec{Y}) e $p_{\vec{X}}, p_{\vec{Y}}$ são as funções de probabilidade marginais dos vectores de variáveis \vec{X} e \vec{Y} .

A informação mútua entre dois vectores de variáveis aleatórias \vec{X} e \vec{Y} pode ser considerada uma medida de dependência entre eles, ou melhor, pode ser considerada como a correlação estatística entre \vec{X} e \vec{Y} . Apesar disso, não se pode dizer que \vec{X} causa \vec{Y} ou *vice versa*. Uma vez que $H(\vec{Y}) \geq H(\vec{Y}|\vec{X})$, então $I(\vec{X}, \vec{Y}) \geq 0$, assumindo a igualdade se \vec{X} e \vec{Y} forem estatisticamente independentes.

A informação mútua pode variar entre 0 e $+\infty$ para distribuições contínuas. Caso a distribuição em causa seja discreta, tem-se que

$$0 \leq I(\vec{X}, \vec{Y}) \leq \min \{H(\vec{X}), H(\vec{Y})\}. \quad (2.59)$$

Pompe (1998) e Yamano (2001) apresentam e demonstram algumas propriedades da informação mútua para distribuições discretas, nomeadamente:

- (i) $I(\vec{X}, \vec{Y}) = 0$ se e só se \vec{X} e \vec{Y} são estatisticamente independentes, no sentido de que $p(A \cap B) = p(A)p(B)$;
- (ii) $I(\vec{X}, \vec{Y}) = H(\vec{X})$ se só se \vec{X} é função de \vec{Y} ;
- (iii) $I(\vec{X}, \vec{Y}) = H(\vec{Y})$ se só se \vec{Y} é função de \vec{X} .

A estatística definida na equação (2.58) satisfaz as propriedades **(a)** e após algumas transformações, também satisfaz as propriedades **(b)**, **(c)** e **(d)** [Granger *et al.* (2000), Granger *et al.* (2004)].⁴

Com vista à satisfação das propriedades **(b)** e **(d)** torna-se conveniente definir uma medida que possa ser comparável ao coeficiente de correlação linear. Na equação (2.58) verifica-se que $0 \leq I(\vec{X}, \vec{Y}) \leq +\infty$, o que poderá dificultar a comparação entre diferentes amostras. Pode-se estabelecer alguma comparação com a covariância, dado que é também uma medida de dependência, que pode assumir valores no mesmo intervalo que a informação mútua.

Qualquer que seja o tipo de distribuição, é conveniente proceder à normalização da informação mútua entre 0 e 1. Para tal é utilizada a transformação referida na equação (2.60). Neste sentido

⁴ A demonstração dos teoremas que provam que a informação mútua satisfaz estas propriedades pode ser encontrada em Kullback (1968).

Granger e Lin (1994), Darbellay (1998b) e Soofi (1997), entre outros, utilizam uma medida *standard* para a informação mútua, definida por

$$\lambda(\vec{X}, \vec{Y}) = \sqrt{1 - e^{-2I(\vec{X}, \vec{Y})}}. \quad (2.60)$$

Uma razão para a escolha desta medida prende-se com o facto de esta variar apenas entre 0 e 1. Pode também ser interpretada como sendo o coeficiente de correlação global, comparável ao coeficiente de correlação linear, baseada na interligação que existe entre medidas da teoria da informação e a análise de variância [Garner *et al.* (1956)].

A função $\lambda(\vec{X}, \vec{Y})$ captura a dependência global existente entre \vec{X} e \vec{Y} . Esta medida é baseada na distribuição de probabilidade empírica dos dados. Neste caso particular as propriedades enunciadas anteriormente assumem a seguinte forma:

- (i) $\lambda(\vec{X}, \vec{Y}) = 0$, se e só se \vec{X} não contém qualquer informação sobre \vec{Y} , o que significa que \vec{Y} não pode ser previsto com base em \vec{X} ;
- (ii) $\lambda(\vec{X}, \vec{Y}) = 1$, se existir uma relação perfeita entre os respectivos vectores. Este é o caso limite do determinismo.

Ao se modelar o par *input-output* (\vec{X}, \vec{Y}) , para qualquer modelo com *input* \vec{X} e *output* $\vec{U} = f(\vec{X})$, sendo f uma função mensurável, a previsibilidade de \vec{Y} por \vec{U} não pode exceder a de \vec{Y} por \vec{X} , isto é $\lambda(\vec{X}, \vec{Y}) \geq \lambda(\vec{U}, \vec{Y})$.

É sabido que a distribuição de Gauss maximiza a entropia sujeita aos dois primeiros momentos (média e variância). Isto implica que a entropia de Shannon depende da matriz de variâncias e covariâncias aquando do pressuposto da distribuição normal. Para a informação mútua pode ser provado um resultado similar [Kraskov *et al.* (2003)]. Assuma-se uma distribuição normal, definida num espaço Euclideano com dimensão d ; a informação mútua normal, IMN , dos vectores aleatórios (\vec{X}, \vec{Y}) é então dada por

$$I(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{1}{2} \log \frac{\det V_X \det V_Y}{\det V} \equiv IMN(\vec{X}, \vec{Y}), \quad (2.61)$$

onde a matriz V é a matriz de variâncias e covariâncias de (\vec{X}, \vec{Y}) e V_X e V_Y são as matrizes de variâncias e covariâncias de \vec{X} e \vec{Y} respectivamente. A demonstração de que o argumento do logaritmo do lado direito da equação (2.61) depende apenas dos coeficientes de correlação linear, pode ser encontrada em Darbellay (1998a). Quando $d = 2$, ou seja, para $(\vec{X}, \vec{Y}) = (X, Y)$ a equação (2.61) torna-se [Kullback (1968)]

$$IMN(X, Y) = -\frac{1}{2} \log(1 - r^2(X, Y)). \quad (2.62)$$

Caso a distribuição empírica possa ser fielmente descrita pela distribuição de Gauss, então a informação mútua pode ser calculada apenas com recurso à equação (2.62). Isto porque a distribuição de Gauss é uma distribuição “linear”, no sentido em que as dependências temporais existentes são inteiramente captadas pelo coeficiente de correlação linear. Deste modo a distribuição normal é aquela que minimiza a informação mútua [Kraskov *et al.* (2003)], o que leva a que a informação mútua de uma determinada distribuição empírica deve ser sempre igual ou superior à informação mútua obtida pela distribuição normal.

A principal razão da introdução da informação mútua é precisamente a possibilidade de existência de dependência não-linear, especialmente noutros tipos de distribuições.

Intuitivamente, esperar-se-ia que $\lambda \geq r$ sempre (sendo r o coeficiente de correlação linear) o que em situações muito particulares pode não acontecer [Darbellay (1998b)].⁵ Convém realçar que a diferença $\lambda - r$ não corresponde obrigatoriamente à parte não-linear que poderá ser alvo de previsão. No caso de a distribuição empírica ser perfeitamente descrita pela curva de Gauss, então $\lambda(\vec{X}, \vec{Y}) = |r(\vec{X}, \vec{Y})|$. A equação (2.60) em \mathbb{R}^2 toma a forma [Granger *et al.* (1994)],

$$\lambda(X, Y) = |r(X, Y)|. \quad (2.63)$$

Para que uma medida de divergência seja também uma medida de distância (métrica) deverá ser positiva, simétrica e satisfazer a desigualdade triangular. Maasoumi (1993) mostra que a propriedade (e) não é satisfeita pela informação mútua, dado que esta não verifica a condição da desigualdade triangular. Portanto a informação mútua é uma medida de divergência ou seja a informação ganha entre \vec{X} e \vec{Y} é simétrica, positiva mas não uma métrica. Neste sentido, Kraskov, Stögbauer, Andrzejak e Grassberger (2004) apresentam uma medida de distância, $D(\vec{X}, \vec{Y})$, baseada na informação mútua que é dada pela seguinte expressão

$$D(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{H(\vec{X}, \vec{Y}) - I(\vec{X}, \vec{Y})}{H(\vec{X}, \vec{Y})}, \quad (2.64)$$

ou seja

$$D(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{H(\vec{X}|\vec{Y}) + H(\vec{Y}|\vec{X})}{H(\vec{X}, \vec{Y})}. \quad (2.65)$$

⁵Uma situação que pode levar a que o coeficiente de correlação global seja menor que o coeficiente de correlação linear, é o tamanho reduzido da amostra em estudo, que pode enviesar o cálculo da informação mútua. De acordo com Darbellay (1999), um tamanho reduzido refere-se amostras com um número de observações inferior a 500 unidades.

Kraskov, *et al.* (2004) mostraram que $D(\vec{X}, \vec{Y})$ é uma medida de distância (métrica), onde

$$D(\vec{X}, \vec{Y}) = \begin{cases} 0 & \text{se } [H(\vec{X}, \vec{Y}) = I(\vec{X}, \vec{Y})] \\ 1 & \text{se } I(\vec{X}, \vec{Y}) = 0 \\]0, 1[& \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (2.66)$$

Esta medida de distância pode ser facilmente aplicada a variáveis com distribuição discreta, contudo a sua aplicação a variáveis com distribuição contínua requer algum cuidado especial devido à forma como é partido o espaço aquando do cálculo das entropias e da informação mútua [Kraskov *et al.* (2004)].

Outra propriedade relevante da informação mútua refere-se à aditividade, segundo a qual a informação mútua pode ser decomposta em vários níveis hierárquicos [Shannon (1948), Kraskov *et al.* (2003), Kraskov *et al.* (2004)], isto é

$$I(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = I((\vec{X}, \vec{Y}), \vec{Z}) + I(\vec{X}, \vec{Y}). \quad (2.67)$$

Esta propriedade obriga a que a informação mútua entre $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ nunca possa ser inferior à informação mútua entre (\vec{X}, \vec{Y}) . De forma análoga, o coeficiente de determinação, e consequentemente o coeficiente de correlação, nunca pode diminuir face ao acréscimo de uma variável no modelo em estudo.

Um das aplicações mais valiosas da informação mútua é como medida de dependência linear e não-linear entre sistemas, sendo de realçar para o estudo em causa a sua aplicabilidade às sucessões cronológicas financeiras.

2.5.1 Teste de independência baseado na informação mútua

De acordo com as propriedades apresentadas pela informação mútua, poder-se-á construir um teste à independência global entre variáveis (ou vectores de variáveis), baseado na seguinte hipótese

$$H_0 : p_{\vec{X}, \vec{Y}}(x, y) = p_{\vec{X}}(x) p_{\vec{Y}}(y) \text{ e } H_1 : p_{\vec{X}, \vec{Y}}(x, y) \neq p_{\vec{X}}(x) p_{\vec{Y}}(y).$$

Se H_0 se verificar então $I(\vec{X}, \vec{Y}) = 0$ e não é rejeitada a hipótese nula de independência. No caso de H_1 se verificar, a informação mútua é positiva e a hipótese de independência poderá ser rejeitada. As hipóteses em causa podem ser descritas da seguinte forma

$$H_0 : I(\vec{X}, \vec{Y}) = 0 \text{ e } H_1 : I(\vec{X}, \vec{Y}) > 0. \quad (2.68)$$

Para que a rejeição ou não rejeição da hipótese nula seja feita adequadamente, é necessário ter em conta os valores críticos para a estatística que se está a utilizar. Granger, Maasoumi e Racine (2004)

apresentam três possíveis abordagens para calcular os valores críticos: aproximações assintóticas da distribuição da hipótese nula, simulação de valores críticos para a distribuição da hipótese nula e permutação dos valores críticos para a distribuição da hipótese nula.

Nesta tese, os valores críticos encontram-se em anexo (vide Anexo A). Estes valores foram encontrados através da simulação sobre uma sucessão cronológica ruído branco, para um determinado número de amostras com diferentes tamanhos (100, 200, 500, 1000, 1500, 2000, 2500). Dado que a distribuição da informação mútua é assimétrica, pode adoptar-se uma abordagem percentil para obter os valores críticos. O Anexo A apresenta os percentis 90, 95 e 99 da distribuição empírica da informação mútua para o processo $y_t = \epsilon_t$ com $\epsilon_t \sim i.i.d. N(0, 1)$, tendo sido realizadas 5000 simulações para cada valor crítico. Esta metodologia é proposta por Hodrick (1992) e por Granger, Maasoumi e Racine (2004) e de acordo com os autores, os valores críticos obtidos podem ser utilizados como base para testar a independência entre variáveis, evitando assim o erro tipo I, especialmente para amostras de pequena dimensão. Para a realização deste teste não é necessário assumir a linearidade, a normalidade ou a estacionariedade da sucessão cronológica em estudo. Se as mesmas forem estacionárias os resultados serão mais robustos, na medida em que não há provas suficientes da robustez deste teste em condições de não-linearidade e não estacionariedade em simultâneo [Fernandes (2001)].

Segundo Pompe (1998) a informação mútua pode dar resposta a várias questões, nomeadamente na captura de sazonalidades e detecção de períodos sazonais, na detecção de combinações temporais óptimas para a predição e modelação e na detecção de não estacionariedade. Algumas destas potencialidades têm sido exploradas por outros autores, nomeadamente Granger e Lin (1994) e Darbellay e Wuertz (2000b), cujos resultados revelaram que a informação mútua referente a uma sucessão cronológica não estacionária não é constante no tempo. Dadas as propriedades da informação mútua, considera-se que a sua exploração poderá apresentar vantagens na análise da dependência não-linear face a algumas metodologias tradicionais. Estas vantagens baseiam-se essencialmente na sua generalidade e na não necessidade de pressupostos quanto à distribuição de probabilidade teórica dos dados nem na definição de um modelo de dependência pré-definido. Nos Capítulos 5 e 6 esta temática é discutida com maior ênfase, acompanhada da evidência empírica realizada.

2.6 Exemplos da aplicação da entropia e da informação mútua

2.6.1 Entropia de Shannon como surpresa média

A quantidade $-\log p_i$ é muitas vezes definida como a surpresa associada ao resultado i . Se p_i é pequeno, haverá uma maior surpresa se o resultado for realmente i . Em conformidade, $-\log p_i$ assume valores mais elevados, quanto menores forem as probabilidades. Se p_i é grande, então a surpresa associada será menor. Neste contexto, parece perfeitamente razoável chamar a $-\log p_i$ surpresa [Fieldman (1998)]. A próxima equação pode ser encarada como o valor esperado da “surpresa”, isto é

$$H(X) = \sum_x [(-\log p_i) p_i] = \langle -\log p_i \rangle. \quad (2.69)$$

A entropia fornece a média do quanto se ficaria surpreso com a ocorrência do evento X . Esta afirmação fortalece a assunção de que a entropia é uma medida de incerteza associada à distribuição de probabilidades. Quanto maior a incerteza face ao resultado, maior a surpresa (em termos médios) acerca do mesmo.

Neste sentido, é também possível verificar o quanto a entropia está conectada com a informação. Quanto maior o estado de incerteza, mais importância ganha a informação acerca do evento X , por este motivo a entropia pode, em certas circunstâncias, ser encarada como o valor ordinal da informação na perspectiva do decisor [Dionísio (2001)].

2.6.2 Princípio da entropia máxima

De acordo com o princípio da entropia máxima e informação mínima é possível encontrar a distribuição de probabilidade que mais se adequa aos dados, na qual é minimizado o uso inadvertido de qualquer tipo de informação que não a explicitamente disponível, podendo ser encarado como um ramo da inferência estatística [Maasoumi (1993), Reesor *et al.* (2002), Golan (2002), Zellner (2002)].

Rockinger e Jondeau (2002) e Golan (2002) mostraram que é possível estimar a função de densidade de probabilidade referente a um determinado conjunto de dados através da maximização da função entropia, sujeita a um conjunto de restrições respeitantes aos momentos da distribuição de probabilidade em causa.⁶ Seja $p_X(x)$ a função de densidade de probabilidade e b_i o momento i da distribuição tem-se que

⁶O princípio da entropia máxima baseia-se no facto de a entropia aumentar continuamente até ao seu valor máximo permitido, quaisquer que sejam as restrições impostas *a priori*. Neste contexto a introdução de restrições não conduz ao enviesamento dos resultados, uma vez que se as restrições não forem plenamente respeitadas pelos dados empíricos não existe solução possível [Zellner (1996)].

$$\begin{aligned}
p &\in \arg \max - \int p_X(x) \log p_X(x) dx, \quad \text{s.a.} \\
\int p_X(x) dx &= 1 \\
\int x^i p_X(x) dx &= b_i, \text{ com } i = 1, \dots, m.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

De acordo com vários autores [Stutzer (1996, 2000), Buchen *et al.* (1996), Zellner (1996), Samperi (1998, 1999), Rockinger *et al.* (2002), Golan (2002)] o princípio da entropia máxima surge como um método eficiente de geração de funções de densidade de probabilidade, uma vez que toma em consideração a distribuição de probabilidade como um todo, não omitindo nenhum momento.

Esta metodologia tem aplicação em diversas áreas, nomeadamente em finanças. São de destacar os resultados de Buchen e Kelly (1996) que aplicaram o princípio da entropia máxima e o princípio da entropia cruzada mínima para estimar a função de densidade de probabilidade de várias acções, através dos preços de opções que as têm como produto subjacente.⁷ O princípio da entropia cruzada mínima baseia-se na minimização da divergência de Kullback-Leibler, que não é mais que uma extensão do princípio da entropia máxima, sendo neste caso a função objectivo definida por

$$I_1(q, p) = \int_0^{\infty} q_X(x) \log \left[\frac{q_X(x)}{p_X(x)} \right] dx, \tag{2.71}$$

onde $p_X(x)$ é a função de densidade de probabilidade *a priori* da variável aleatória X , ou seja é a informação que se tem *a priori* de X e $q_X(x)$ é a função de densidade de probabilidade condicionada de X dado o valor de determinados momentos dessa distribuição. A entropia cruzada pode ser entendida como uma distância entrópica entre as distribuições $p_X(x)$ e $q_X(x)$. Não é uma medida métrica, mas satisfaz as condições: $I(p, p) = 0$ e $I(p, q) > 0$ sempre que $p \neq q$. Os resultados obtidos com a minimização da entropia cruzada são consistentes com os resultados obtidos com a maximização da entropia [Buchen *et al.* (1996), Reesor *et al.* (2002)].

Stutzer (1996) procede à minimização da divergência de Kullback-Leibler com o objectivo de definir a distribuição de probabilidade mais adequada na avaliação de produtos derivados. Samperi (1999) desenvolve um modelo de avaliação de opções financeiras através da minimização da entropia cruzada ou divergência de Kullback-Leibler, sujeita a restrições lineares. O autor demonstra que existe uma estreita ligação entre os resultados obtidos com a maximização da entropia e um modelo de não arbitragem. A minimização da entropia cruzada é encarada por Samperi (1999) como o dual da maximização de uma função de utilidade exponencial.

⁷A utilização do princípio da entropia máxima no estudo realizado por Buchen e Kelly (1996) prende-se com o facto de o mercado de opções não ser consistente com alguns pressupostos do modelo Black-Scholes.

2.6.3 Entropia e testes de hipóteses

Maasoumi (1993) descreve a ligação que existe entre a entropia máxima, a verosimilhança máxima e o χ^2 mínimo, concluindo que existe uma relação muito forte entre estes critérios, o que auxilia a selecção da “divergência” ou entropia cruzada como medida de ajustamento e bondade. O autor refere ainda que o número de econométristas que começa a aceitar a ideia de que dados não experimentais serão inevitavelmente analisados à luz de modelos pouco especificados, é cada vez maior. Neste contexto, não se deverá esperar encontrar o verdadeiro processo gerador dos dados. Poderá sim, ser importante testar com mais rigor determinadas hipóteses.

Teste à distribuição de probabilidade

A partir do momento que a entropia de uma distribuição empírica é conhecida, pode ser utilizada para testar se essa variável segue ou não uma distribuição de probabilidade teórica [vide Dionísio *et al.* (2003b)]. Se por exemplo se pretender testar a normalidade da distribuição empírica as hipóteses H_0 e H_1 tomam a forma

$$H_0 : p_X(x) = p_{0X}(x) \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ e } H_1 : p_X(x) \neq p_{0X}(x).$$

Para testar a hipótese em causa basta ter em conta a noção de divergência. Se $B(\cdot)$ denota a diferença entre duas distribuições, obtém-se que

$$\begin{aligned} B(p) &= H_0(p) - H(p) = - \int p_{0X}(x) \log p_{0X}(x) dx + \int p_X(x) \log p_X(x) dx \quad (2.72) \\ &= I_1[p_X(x), p_{0X}(x)], \end{aligned}$$

onde $H_0(p) = \log \sqrt{2\pi e} \sigma$. Na prática utiliza-se $\hat{H}_0(p) = \log \sqrt{2\pi e} \hat{\sigma}$, onde $H(p)$ é a avaliação não paramétrica da entropia da variável aleatória X . Com vista a estimar esta entropia poderá ser usado o método de estimação de densidades de Kernel ou a equiquantização marginal proposta por Darbellay (1998b).

Teste à simetria de uma distribuição

Racine e Maasoumi (2004) e Maasoumi e Racine (2003) apresentaram um teste à simetria de uma distribuição baseado na entropia. De acordo com os referidos autores, este tipo de teste poderá ser utilizado para testar a reversibilidade do tempo numa sucessão cronológica. Se se assumir a média (ou outra medida de tendência central, nomeadamente a moda ou a mediana), o teste à simetria ou reversibilidade do tempo pode ser formulado da seguinte forma

$$H_0 : p_X(x) = p_X(-x) \text{ e } H_1 : p_X(x) \neq p_X(-x).$$

Este teste pode ser desenvolvido de forma similar aos anteriores, através da estatística

$$\begin{aligned} B(p) &= - \int p_X(x) [\log p_X(x)] dx + \int p_X(-x) \log p_X(-x) dx \\ &= I_1[p_X(x), p_X(-x)]. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Maasoumi (1993) admite a possibilidade de desenvolvimento de um teste aos resíduos da distribuição, com vista a testar a linearidade da mesma, com base no teste RESET de Ramsey. Testes a outras hipóteses, nomeadamente autocorrelação e heterocedasticidade podem também ser desenvolvidos através do princípio da entropia máxima.

Para além da realização de testes, a entropia, mais concretamente a divergência de Kullback Leibler, ou entropia cruzada, pode ser utilizada para seleccionar modelos ou distribuições de probabilidade como critério de ajustamento ou bondade [vide e.g. Dionísio *et al.* (2003b)].

A título de exemplo, é de referenciar o trabalho de Akaike em 1973 baseado na divergência de Kullback Leibler que propôs um dos mais famosos critérios de informação como selecção de modelos e de variáveis, o critério *AIC* [*in* Maasoumi (1993)]. Esta medida tem em conta a divergência entre a estimativa e os dados empíricos, utilizando o princípio da parsimónia como indicador da complexidade em que o modelo a escolher será aquele que minimiza este critério.

2.7 Estimação da informação mútua e da entropia

A dificuldade em calcular a informação mútua e a entropia para variáveis com distribuição contínua, reside no facto de as verdadeiras funções de densidade de probabilidade não serem conhecidas, conduzindo à necessidade de pressupor uma distribuição de probabilidade teórica ou tentar inferir as probabilidades através das respectivas frequências relativas. Neste contexto, existem três abordagens possíveis para a estimação da informação mútua e da entropia: (i) estimadores baseados em histogramas; (ii) estimadores de Kernel; e (iii) métodos paramétricos.

De acordo com Moddemeijer (1989, 1999) os estimadores baseados em histogramas dividem-se em dois grandes grupos: a partição através de células equidistantes [Moddemeijer (1999), Tambakis⁸ (2000)] e a partição do espaço através de células equiprováveis (equiquantização marginal). Esta

⁸Tambakis (2000) apresentou um estimador para a informação mútua baseado numa partição equidistante das células num determinado espaço. Este autor aplicou esta medida a várias sucessões cronológicas financeiras, com o intuito de avaliar a sua eficiência nos mercados financeiros, concluindo que quanto maior fosse a informação mútua menos eficiente seria o mercado em causa.

segunda abordagem apresenta vantagens face à partição em células equidistantes, pois permite uma melhor adequação da partição à amostra em estudo, permitindo também a maximização da informação mútua e da entropia [Darbellay (1998a)]. Os estimadores de Kernel utilizam vários parâmetros, sendo que a escolha da amplitude dos intervalos não é totalmente objectiva e se não for adequada pode enviesar os resultados [Moddemeijer (1989), Granger *et al.* (2000)]. Por fim, para ser possível a aplicação de métodos paramétricos é necessário conhecer (ou pelo menos pressupor) o processo estocástico gerador dos dados, o que pode levar a enviesamentos nos resultados.

Moddemeijer (1989, 1999) alerta para o facto de a estimação da informação mútua e da entropia a partir de histogramas comportar alguns problemas, nomeadamente: *(i)* enviesamento causado pelo número finito de observações; *(ii)* enviesamento causado pela quantização, e *(iii)* enviesamento causado pelo facto de o histograma ser finito. Este autor refere ainda que quanto mais leptocúrtica for a distribuição, mais células serão necessárias para descrever a distribuição em causa e minimizar o enviesamento causado pela resolução finita [Moddemeijer (1989)]. A contribuição relativa destas causas depende da aplicação em estudo e especialmente do tamanho da amostra, da configuração das células do histograma e do maior ou menor alisamento da função de densidade de probabilidade. De acordo com este autor, as duas últimas causas são independentes do número de observações e só assumem relevância quando as variáveis em causa são contínuas. De acordo com Darbellay (1998a), Darbellay e Vajda (1999), Kraskov, Stögbauer e Grassberger (2003) a partição do espaço em células equiprováveis será aquela que promove o menor enviesamento.

Paninski (2003) defende que a principal dificuldade relativa à estimação da informação mútua e da entropia tem a ver com o facto de serem medidas não-lineares definidas sobre um espaço de probabilidade conjunta que não é conhecido *a priori*. Além disso, o autor refere ainda que quando o rácio entre o número de observações (N) e o número de intervalos (m), N/m tende para infinito, então o enviesamento resultante do processo de estimação diminui drasticamente. O modelo desenvolvido por Paninski (2003) tenta solucionar os problemas de enviesamento associados ao processo de estimação quando N/m é um valor limitado e relativamente pequeno. Neste contexto, Paninski (2003) propõe a estimação da informação mútua através de uma sequência de intervalos, cujos pontos são encontrados a partir de funções sobre as variáveis aleatórias em análise. O autor baseia o método na propriedade segundo a qual a informação mútua não se altera face a transformações lineares nas variáveis aleatórias contínuas. A escolha das funções prende-se apenas com o facto de ser necessário preservar ao máximo a informação existente entre as variáveis. Neste método, denominado pelo autor por *method of sieves*, o número de intervalos com probabilidade não nula é estimado a partir de uma função de verosimilhança máxima.

Nesta tese a informação mútua e a entropia são estimadas através da equiquantização marginal

do espaço, uma vez que, de acordo com diversos autores [e.g. Darbellay (1998a), Bernhard *et al.* (1999), Moddemeijer (1999), Kraskov *et al.* (2003)], é o método de estimação que oferece a possibilidade de menores enviesamentos nas estimativas. Dada a grande similaridade entre a forma de estimação da informação mútua e da entropia, é descrita com mais detalhe neste estudo a forma de estimação da informação mútua, uma vez que apresenta uma complexidade superior e pode ser facilmente generalizável para a entropia.

A definição da informação mútua entre dois vectores de variáveis \vec{X} e \vec{Y} é entendida como sendo a informação ou dependência global entre os mesmos e é um valor real não-negativo, sendo a sua definição baseada sobre partições do espaço em estudo. Como forma de simplificação, é assumido um espaço Euclideano com dimensão finita d , $\mathbb{R}^d \equiv \mathbb{R}^{d_X} \times \mathbb{R}^{d_Y}$, onde \mathbb{R}^{d_X} e \mathbb{R}^{d_Y} são os subespaços de X e de Y de dimensão d_X e d_Y respectivamente. Sejam $\Gamma_X = \{A_i\}_{i=1}^{n_1}$ $\Gamma_Y = \{B_j\}_{j=1}^{n_2}$ duas partições genéricas dos espaços \mathbb{R}^{d_X} e \mathbb{R}^{d_Y} . Então a informação mútua é dada por

$$I(\vec{X}, \vec{Y}) \equiv \sup_{\{A_i\}\{B_j\}} \sum_{i,j} p_{\vec{X},\vec{Y}}(A_i \times B_j) \log \frac{p_{\vec{X},\vec{Y}}(A_i \times B_j)}{p_{\vec{X}}(A_i) p_{\vec{Y}}(B_j)}. \quad (2.74)$$

O supremo é retirado de todas as partições finitas em \mathbb{R}^{d_X} e \mathbb{R}^{d_Y} . Darbellay (1998a) demonstrou que a informação mútua é finita se e só se a medida $p_{\vec{X},\vec{Y}}$ for contínua com respeito ao produto entre $p_{\vec{X}}$ e $p_{\vec{Y}}$ e neste caso o sistema $\Gamma \equiv \Gamma_X \times \Gamma_Y$ é uma partição do espaço $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_X} \times \mathbb{R}^{d_Y}$ e representa o produto marginal de duas partições de \mathbb{R}^{d_X} e \mathbb{R}^{d_Y} . Dobrushin (1959) provou que esta restrição do produto de partições não era necessária [vide Darbellay (1998a)], pois se se assumir que S é uma sequência de números que pode existir numa partição, então

$$S_\Gamma \equiv \sum_{k=1}^m S_{C_k} \equiv \sum_{k=1}^m p_{\vec{X},\vec{Y}}(C_k) \log \frac{p_{\vec{X},\vec{Y}}(C_k)}{p_{\vec{X}}(C_k) p_{\vec{Y}}(C_k)}, \quad (2.75)$$

nunca decresce à medida que a partição $\Gamma = \{C_k = A_k \times B_k, k = 1, \dots, m\}$ é cada vez mais fina.

Seja $\Gamma = \{C_k\}$ uma partição finita de \mathbb{R}^d e $\Lambda = \{C_{k,l}\}$ um refinamento de Γ , então

$$S_\Gamma \leq S_\Lambda \quad (2.76)$$

verificando-se a igualdade se e só se:

$$\frac{p_{\vec{X},\vec{Y}}(C_{k,l})}{p_{\vec{X}}(C_{k,l}) p_{\vec{Y}}(C_{k,l})} = \frac{p_{\vec{X},\vec{Y}}(C_k)}{p_{\vec{X}}(C_k) p_{\vec{Y}}(C_k)}, \forall l. \quad (2.77)$$

A desigualdade deve-se ao facto de $\ln z \leq z - 1, \forall z > 0$, verificando-se a igualdade para $z = 1$.

Portanto, quanto mais finas forem as partições de Γ , maior será a sequência de números que aumentará monotonamente enquanto for possível existirem partições finitas em Γ . Tal facto, de

acordo com Darbellay (1998a, 1999) mostra que a informação mútua é uma medida finita. Para que a igualdade ocorra, os vectores \vec{X} e \vec{Y} têm de ser condicionalmente independentes, o que significa que existe independência local e neste caso concreto, para todo e qualquer valor C_k de Γ admite-se que $I(\vec{X}, \vec{Y}) = S_\Gamma$.

Darbellay (1998a) e Bernhard e Darbellay (1999) exemplificam o procedimento para a construção de partições e subpartições, que deverá ser homogéneo. Os autores defendem que em determinadas circunstâncias é preferível trabalhar com intervalos equiprováveis em vez de intervalos equidistantes, pois tal metodologia flexibiliza o estudo e está de acordo com o princípio da aditividade da entropia e consequentemente da informação mútua, assim como a não alteração da informação mútua face a transformações lineares nas variáveis

$$I((f_1(X_1), \dots, f_{d_a}(X_{d_a})), (f_{d_a+1}(X_{d_a+1}), \dots, f_d(X_d))) = I((X_1, \dots, X_{d_a}), (X_{d_a+1}, \dots, X_d)). \quad (2.78)$$

Portanto, é possível obter uma partição por diferentes algoritmos, os quais são apresentados seguidamente. Seja t uma variável que assume valores entre 1 e β , onde β é o número de subpartições e seja α^{td} o número de sub-células. As regras estabelecidas para os dois principais algoritmos utilizados são as seguintes:

Algoritmo A

- (1) Seja \mathbb{R}^d uma partição inicial de células;
- (2) Cada célula deverá ser partida em α^{td} sub-células, através da divisão de cada margem da célula em α intervalos equidistantes;
- (3) Parar a subpartição da célula se e só se os vectores de variáveis aleatórias \vec{X} e \vec{Y} forem uniformemente distribuídos.

Algoritmo B

- (1) Seja \mathbb{R}^d uma partição inicial de células;
- (2) Cada célula deverá ser partida em α^{td} sub-células, através da divisão de cada margem da célula em α intervalos equiprováveis, através de equiquantização marginal;
- (3) A célula não é partida se for encontrada independência local, que satisfaz a igualdade (2.77).

De um modo simples, pode dizer-se que para proceder à partição de cada célula com dimensão d pelo Algoritmo B, é dividida cada uma das suas margens em α intervalos equiprováveis, ou seja, cada célula será dividida em α^d sub-células (vide Figura 2.2).⁹ Numa primeira fase é considerada uma subpartição em α^d sub-células, processo que deverá ser repetido (equiquantização marginal) em α^{2d} sub-células, em α^{3d} sub-células e assim sucessivamente. Naturalmente que é necessário parar as subpartições até um determinado nível, designado por β . Quando é detectada independência numa determinada célula esta já não é alvo de mais nenhuma partição.

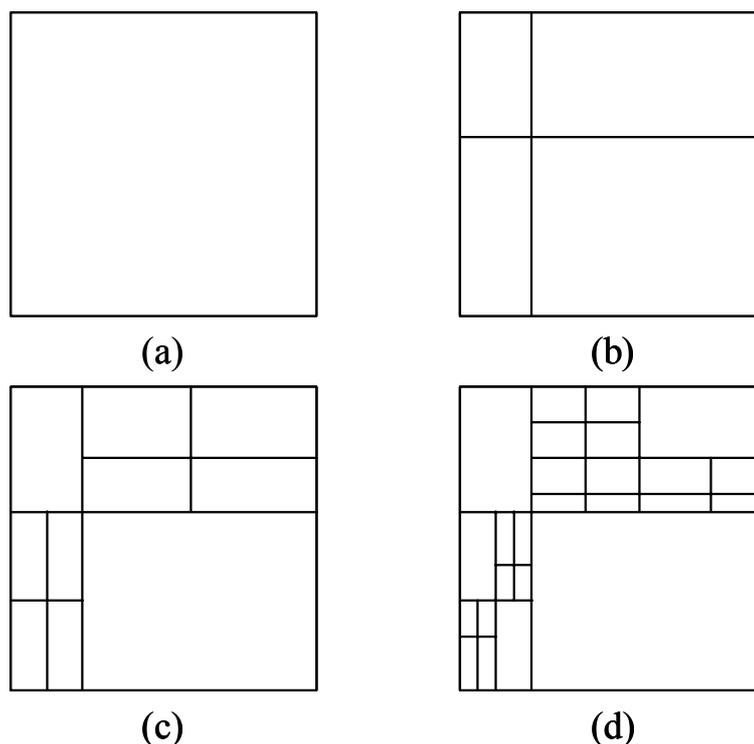


Figura 2.2: Ilustração do Algoritmo B, num espaço Euclidiano com $d = 2$ e $\alpha = 2$. (a) corresponde ao passo (1) do algoritmo; em (b) foi aplicado o passo (2), em que cada uma das células resultantes tem um nível de profundidade 1. Em (c) o passo (2) foi aplicado à célula superior do lado direito e inferior do lado esquerdo. Neste caso a regra (3) foi aplicada às duas outras células. Em (d) o passo (2) foi aplicado a 5 células que voltaram a ser alvo de partição, cuja profundidade passou a ser de 3 e o passo (3) foi aplicado às restantes 3 células, cujo nível de profundidade é 2. Fonte: Darbellay (1998b).

O número de intervalos equiprováveis (α) é arbitrário, contudo não tem muita lógica deixar α

⁹Normalmente as α^d sub-células não são equiprováveis, apenas os respectivos intervalos marginais o são.

variado num intervalo muito alargado, pois tal poderá criar algumas complicações de cálculo, por isso geralmente assume-se que $\alpha = 2$ [Darbellay (1999)]¹⁰.

Equiquantização marginal significa dividir cada margem da célula em α intervalos com aproximadamente o mesmo número de pontos. A aproximação a este tipo de divisão tem duas causas: o número de pontos na célula pode não ser exactamente divisível por α ou então X pode ter valores repetidos. Os limites inferiores, L , e os limites superiores, U , assim como $x_i^k(L)$ e $x_i^k(U)$ (os pontos finais da i -ésima margem do hiperrectângulo C_k) são encontrados através da equiquantização marginal.

Com vista a estimar a informação mútua numa amostra finita de N pontos de $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)$ em \mathbb{R}^d , assume-se que $N_{\vec{X}, \vec{Y}}(C_k)$ representa o número de pontos tal que $x_i^k(L) < x_i < x_i^k(U)$, para $i = 1, \dots, d$. Então os pontos marginais, $N_{\vec{X}}(C_k)$, representam o número de pontos \vec{x} tal que $x_i^k(L) < x_i < x_i^k(U)$, para $i = 1, \dots, d_X$ e $N_{\vec{Y}}(C_k)$ representa o número de pontos \vec{x} tal que $x_i^k(L) < x_i < x_i^k(U)$, para $i = d_X + 1, \dots, d$.

As probabilidades são estimadas a partir das frequências relativas, isto é

$$p_{\vec{X}, \vec{Y}}(C_k) \approx \frac{N_{\vec{X}, \vec{Y}}(C_k)}{N} \quad (2.79)$$

$$p_{\vec{X}}(C_k) \approx \frac{N_{\vec{X}}(C_k)}{N} \quad (2.80)$$

$$p_{\vec{Y}}(C_k) \approx \frac{N_{\vec{Y}}(C_k)}{N}. \quad (2.81)$$

Assim, a independência local surge quando

$$N_{\vec{X}, \vec{Y}}(C_{k,l}) \approx N_{\vec{X}, \vec{Y}}(C_k) \frac{N_{\vec{X}}(C_{k,l}) N_{\vec{Y}}(C_{k,l})}{N_{\vec{X}}(C_k) N_{\vec{Y}}(C_k)}, \text{ para } l = 1, \dots, \alpha^{td}, \quad (2.82)$$

ou seja, quando para uma partição mais fina, o valor $N_{\vec{X}, \vec{Y}}(C_{k,l})$ não sofre alterações significativas e se aproxima do respectivo valor observado. Para cada t , a subpartição $\{C_{k,l}\}$ de C_k é claramente mais fina e por isso diferente. As observações $N_{\vec{X}, \vec{Y}}(C_k)$ contidas em C_k são classificadas em α^{td} classes mutuamente exclusivas, as sub-células. O lado direito da equação (2.82) é o valor esperado na classe l e o lado esquerdo é o valor observado na mesma classe. Estes valores observados seguem uma distribuição multinomial cujas probabilidades são dadas pelos valores esperados, situação que é considerada típica em estatística. Neste contexto, Darbellay (1998a) aconselha englobar a análise numa única estatística χ^2 ao invés de verificar todas as condições referentes a α^{td} de forma individual.

¹⁰Nesta tese, assume-se igualmente que $\alpha = 2$ na estimação da informação mútua e das entropias.

Se se utilizar o Algoritmo A, o objectivo é testar se se está perante uma distribuição uniforme. A distribuição é testada através de um teste do χ^2 , cuja hipótese nula é precisamente a distribuição uniforme. No fundo estão-se a comparar os dados empíricos em $A \times B$ com a probabilidade $p_t(A_i \times B_j) = 1/\alpha^{td}$, em que $N(A_i \times B_j)$ é uma subpartição de $N(A \times B)$, ou seja

$$\chi^2 = \sum_{l=1}^{\alpha^{td}} \frac{(N(A_i \times B_j) - N(A \times B) p(A_i \times B_j))^2}{N(A \times B) p(A_i \times B_j)}. \quad (2.83)$$

Neste tipo de partição (células equidistantes) A é o subconjunto do espaço de observação \vec{X} e B é o subconjunto do espaço de observação \vec{Y} e $N(A \times B)$ é o número de pontos que pertencem ao hiperrectângulo $A \times B$. Se $\chi^2 < \chi_c^2$, onde χ_c^2 define o valor crítico desta estatística, então não se rejeita a hipótese nula, isto é, não se rejeita a hipótese de os vectores estarem uniformemente distribuídos. Os valores para χ_c^2 podem ser encontrados nas tabelas estatísticas usuais.

Caso se utilize o Algoritmo B (células equiprováveis), é também utilizado o teste χ^2 , como teste de independência

$$\chi^2 \equiv \chi^2(\{C_{k,l}\}) \equiv \frac{N_{\vec{X}}(C_k) N_{\vec{Y}}(C_k)}{N_{\vec{X},\vec{Y}}(C_k)} \sum_{l=1}^{\alpha^{td}} \frac{S^2(\{C_{k,l}\})}{N_{\vec{X}}(C_{k,l}) N_{\vec{Y}}(C_{k,l})}, \quad (2.84)$$

onde

$$S^2(\{C_{k,l}\}) \equiv \left[N_{\vec{X},\vec{Y}}(C_{k,l}) - N_{\vec{X},\vec{Y}}(C_k) \frac{N_{\vec{X}}(C_{k,l}) N_{\vec{Y}}(C_{k,l})}{N_{\vec{X}}(C_k) N_{\vec{Y}}(C_k)} \right]^2, \quad (2.85)$$

ou então utiliza-se o rácio da log-verosimilhança, isto é

$$L \equiv L(\{C_{k,l}\}) \equiv \sum_{l=1}^{\alpha^{td}} N_{\vec{X},\vec{Y}}(C_{k,l}) \log \left[\frac{N_{\vec{X},\vec{Y}}(C_{k,l}) N_{\vec{X}}(C_k) N_{\vec{Y}}(C_k)}{N_{\vec{X},\vec{Y}}(C_k) N_{\vec{X}}(C_{k,l}) N_{\vec{Y}}(C_{k,l})} \right]. \quad (2.86)$$

O teste estatístico é aplicado a cada uma das β subpartições em α^{td} sub-células com $t = 1, \dots, \beta$. Se o teste não rejeitar independência local, então obtém-se a partição final $\Gamma = \{C_k, k = 1, \dots, m\}$ na qual é estimada a informação mútua

$$\hat{I}(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^m N_{\vec{X},\vec{Y}}(C_k) \left(\log \frac{N_{\vec{X},\vec{Y}}(C_k)}{N_{\vec{X}}(C_k) N_{\vec{Y}}(C_k)} + \log N \right). \quad (2.87)$$

O valor de β tem um impacto directo na consistência do estimador. Um valor mais elevado de β previne uma paragem antecipada espúria na partição da célula [Darbellay (1998a)]. Esta paragem espúria pode ocorrer se os dados exibirem simetrias nas $\alpha^d, \alpha^{2d}, \dots, \alpha^{\beta d}$ sub-células, de tal modo que é encontrada a independência local das mesmas, independência esta que seria rejeitada caso se procedesse a nova partição das células em causa.

Darbellay (1998a) procede a uma simulação com $\alpha = 2$ para a equiquantização marginal. Com vista a encontrar a independência local utilizou um teste χ^2 onde $\beta = 2$. Em \mathbb{R}^2 , por exemplo, tal significa calcular χ^2 das subpartições da célula em $4 = \alpha^{1 \times 2}$ sub-células e depois em $16 = \alpha^{2 \times 2}$ células.

Neste contexto, o nível de significância é a probabilidade de proceder à partição de uma célula quando não se deveria fazê-lo. Os níveis de significância são os usualmente utilizados nos testes estatísticos (5% e 1%). De acordo com Darbellay (1998a) o nível de significância mais adequado para $\beta = 1$ deve ser ligeiramente maior que o nível de significância usado para $\beta = 2$. O mesmo autor refere ainda que se o número de pontos da amostra (observações) for elevado, então o nível de significância deverá ser 1% (ou aproximado), do mesmo modo que para amostras cuja dimensão do espaço é baixa. A escolha do valor de β depende do número de pontos da amostra e da dimensão do espaço de observação. Para uma determinada célula, com um nível de profundidade acentuado, não faz muito sentido proceder a uma nova partição, especialmente se se tratar de espaços multi-dimensionais e se o número de pontos não for muito grande.¹¹

Relativamente à estimação da entropia, o processo a utilizar será semelhante ao já descrito para a informação mútua, pois só assim faria sentido para estabelecer as devidas conexões entre estes conceitos. A estimação da entropia de uma só variável [por exemplo $H(X)$] basear-se-á na partição do espaço com dimensão $d = 1$, ou seja, sobre um histograma. Neste caso, a amplitude de cada intervalo do referido histograma obedecerá ao princípio da distribuição uniforme dos intervalos. Para o cálculo da entropia conjunta entre variáveis a abordagem é muito semelhante à preconizada para a informação mútua, em termos da partição do espaço sendo então calculada a entropia com base nas frequências relativas conjuntas estimadas.

Tanto a entropia como a informação mútua são estimadas através da equiquantização marginal, tendo para tal sido utilizado o *software* Matlab V.6.5.

2.8 Entropia e teoria financeira

A entropia é uma medida de dispersão, de incerteza, de desordem e de diversificação utilizada em processos dinâmicos da estatística e da teoria da informação, sendo a sua adopção, cada vez mais frequente por parte da teoria financeira [Finkelstein *et al.* (1967), Horowitz *et al.* (1968), Philippatos *et al.* (1972), Philippatos *et al.* (1974), Nawrocky (1976), Cowell (1980), Holm (1993),

¹¹De salientar novamente que Darbellay e Vajda (1999) realizaram várias experiências sobre o processo de estimação da informação mútua equiquantização marginal, e concluíram que poderão ocorrer eventuais subestimações da informação mútua para amostras de pequena dimensão, considerando pequena dimensão $n < 500$.

Buchen *et al.* (1996), Zellner (1996), Bouchaud *et al.* (1997), Gulko (1998), Samperi (1999), Molgedey *et al.* (2000), Stutzer (2000), London *et al.* (2001), Dionísio (2001), Dionísio *et al.* (2003b)].

Para além destes estudos existem também trabalhos direccionados para a economia, onde a entropia é parte integrante da análise realizada [Georgescu-Roegen (1971), Chen (2002)]. Segundo estes autores um processo económico é um processo entrópico, pois não cria nem consome matéria ou energia, apenas transforma baixa entropia em alta entropia. O processo físico de transformação do meio ambiente não é mais que um processo entrópico.

Philippatos e Wilson (1972, 1974) utilizaram a entropia como medida de incerteza na gestão de carteiras de acções, concluindo que apresenta diversas vantagens face à variância, nomeadamente o facto de avaliar as distribuições de probabilidade empíricas como um todo, não necessitando de pressupor nenhuma distribuição de probabilidade teórica *a priori*.

Buchen e Kelly (1996), após analisarem o mercado bolsista de derivados concluíram que a pouca informação existente neste mercado põe em causa a correcta selecção da função de distribuição de probabilidade subjacente aos dados reais. Os autores consideram que a única forma de seleccionar a função de distribuição correcta será seguir o Princípio da Entropia Máxima. Stutzer (1996) recorreu à minimização da divergência de Kullback-Leibler (ou entropia cruzada) com o objectivo de encontrar a distribuição de probabilidade para a avaliação de opções. Num contexto similar, Zellner (1996) cita no seu trabalho a investigação realizada por Good e Savage, cuja minimização da entropia cruzada é aplicada à definição da função de utilidade do investidor avesso ao risco conduzindo à maximização da utilidade do indivíduo, pois um maior grau de informação disponível possibilita um processo de tomada de decisão melhor, que com certeza maximiza o seu bem-estar, a sua utilidade.

Bouchaud, Potters e Aguilar (1997) utilizam a entropia como medida integrante no processo de optimização e selecção de carteiras de acções, baseando-se no modelo da média-variância de Markowitz. A razão de ser desta abordagem prende-se com a existência de informação imperfeita e de a maioria dos pressupostos teóricos dos modelos de selecção de carteiras não se verificarem na realidade. Os autores propõem a entropia com o objectivo de conseguir uma diversificação mínima e simultaneamente um nível de risco aceitável para o investidor.

Gulko (1998) desenvolve um trabalho similar ao desenvolvido por Nawrocky em 1976, onde o objectivo é encontrar o equilíbrio de mercado. Neste sentido, o autor constrói um modelo onde se maximiza a entropia sujeita a determinadas restrições. É defendida a *Entropy Pricing Theory* como principal característica da eficiência do mercado.

Fernholz (1999) analisa a entropia como medida de diversificação nos mercados financeiros. Se-

gundo o autor a diversificação existente na aplicação do capital é uma das principais características do mercado de acções, o que é demonstrado por Markowitz e por Sharpe na teoria das carteiras. Fernholz (1999) considera que a diversificação não é um fenómeno espontâneo nos mercados de acções, sendo necessário um mecanismo que o provoque. Deste modo é introduzida a entropia como medida de diversificação do mercado, cujos pressupostos seguem aqueles designados no modelo de equilíbrio de mercado *CAPM*. É demonstrado que sob estes pressupostos, o capital tem de ser canalizado das grandes empresas para as pequenas empresas, de modo a que exista um nível de diversificação aceitável, apesar de existirem diferentes taxas de rendibilidade para as diferentes acções que compõem o mercado. A entropia surge como uma medida da uniformidade de uma distribuição, onde a partir de um certo valor pré-fixo, um mercado é caracterizado por um determinado nível de diversificação.

Samperi (1999) desenvolve um modelo de selecção e avaliação de derivados com base na maximização da entropia, concluindo que desta forma a gestão do risco é muito mais eficiente que a realizada pelos tradicionais modelos de gestão de carteiras.

Darbellay e Wuertz (2000b) aplicam a entropia e informação mútua com vista à avaliação de dependência estatística em sucessões cronológicas financeiras, concluindo que as taxas de rendibilidade e a volatilidade não são estatisticamente independentes das respectivas observações passadas.

Molgedey e Ebeling (2000) utilizam a entropia condicionada como medida de predictabilidade em sucessões cronológicas financeiras, verificando que quanto menor for a entropia condicionada entre a estimativa e a respectiva observação para um dado momento no tempo, maior é a possibilidade de predição. Estes autores mostram que o índice Dow Jones apresenta localmente correlações temporais que possibilitam a sua predictabilidade e que a entropia condicionada pode ser uma ferramenta importante para a explorar. De modo relativamente similar, London, Evans e Turner (2001) utilizam a entropia condicionada para avaliar a predictabilidade de algumas sucessões cronológicas financeiras, concluindo que tal predictabilidade poderá pôr em causa o pressuposto de que os preços dos activos cotados em mercados financeiros seguem um passeio aleatório.

Maasoumi e Racine (2002) avaliam a predictabilidade das taxas de rendibilidade do prémio de risco do índice S&P 500 através da utilização da entropia métrica e comparam os resultados com as tradicionais medidas de correlação e ajustamento. Os autores concluem que a entropia tem a capacidade de captar dependência não-linear, colocando esta medida em vantagem face às que apenas captam a dependência linear existente.

Dionísio, Menezes e Mendes (2003b) utilizam a entropia como medida de bondade e ajustamento das distribuições empíricas de um conjunto de sucessões cronológicas financeiras e concluem que a distribuição de probabilidade mais aproximada para os dados em estudo é a distribuição de Weibull.

De um modo geral, constata-se que a entropia e a informação mútua são medidas mais generalistas que as normalmente utilizadas na análise dos mercados financeiros, uma vez que os seus pressupostos são menos redutores. Há que salientar que as abordagens tradicionais em finanças têm sido objecto de estudo e desenvolvimento, com vista à colmatação de determinadas limitações encontradas, fruto essencialmente dos seus pressupostos. A apresentação mais detalhada destes desenvolvimentos e a sua comparação em termos empíricos com os conceitos de entropia e informação mútua é realizada nos capítulos posteriores desta tese.

2.9 Síntese do capítulo

O principal objectivo deste capítulo é a apresentação dos conceitos de entropia e informação mútua e a demonstração teórica das suas possíveis aplicações e adequabilidade às finanças, mais concretamente aos mercados financeiros.

Foi apresentado o método de estimação da entropia e da informação mútua seleccionado neste trabalho de investigação - a equiquantização marginal - ou seja a partição equitativa do espaço. De acordo com os testes efectuados por vários autores, este parece ser o método que possibilita a minimização dos enviesamentos provocados pela estimação.

Por fim, foi realizada uma análise bibliográfica da aplicação da entropia e suas variantes na teoria económico-financeira, tendo-se verificado uma crescente utilização destas medidas da teoria da informação em áreas financeiras. Tal facto será motivado pelas vantagens que estas medidas podem oferecer, nomeadamente a sua generalidade e não necessidade de fortes pressupostos quanto às distribuições de probabilidade seguidas pelos dados e linearidade dos mesmos.

Capítulo 3

Descrição e análise estatística dos dados

Este capítulo está dividido em três secções. A Secção 3.1 versa sobre a organização e funcionamento do mercado bolsista português, sendo descritas de forma sumária algumas das suas características. Na segunda secção são apresentados os dados a utilizar neste trabalho de investigação.¹ É justificada a sua selecção, analisada a sua evolução temporal e realizada a análise estatística dos mesmos. A última secção apresenta as principais conclusões e síntese do presente capítulo.

3.1 Organização e funcionamento do mercado bolsista português

As Bolsas de Valores são mercados organizados, onde as transacções são efectuadas através de leilões centralizados [Pires (2005)]. Estas, por sua vez, fazem parte do mercado de capitais secundário que está inserido no mercado financeiro (vide Figura 3.1).

Os mercados podem estar organizados de diversas formas, existindo a possibilidade de negociação contínua *versus* o mercado com negociação em chamadas (*call market*) nos quais as transacções ocorrem só em determinados momentos do tempo. Existem também mercados onde a negociação é realizada verbalmente, de viva voz, e outros cujas intenções de compra e venda são realizadas através de computadores. Independentemente da forma de organização do mercado, existe um conjunto de características vitais e desejadas nos mercados, nomeadamente o fácil e rápido acesso a informação rigorosa sobre o mercado, baixos custos de transacção, a capacidade de liquidez e a eficiência informacional.

¹A análise estatística dos dados foi realizada com o apoio do *software* Eviews 4.1.

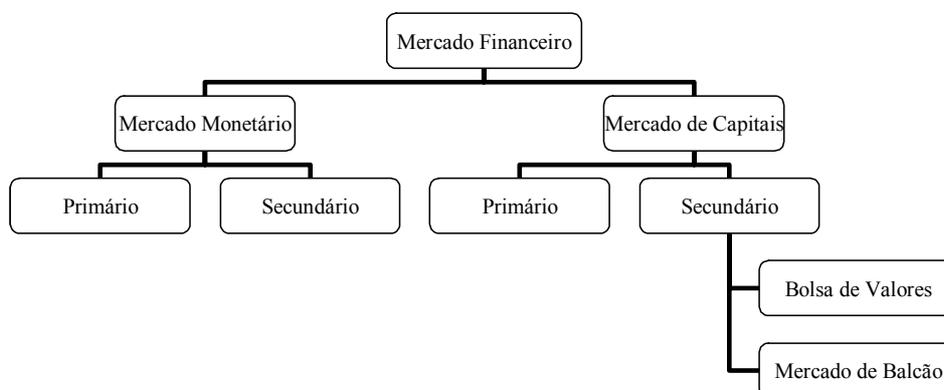


Figura 3.1: Organização dos mercados financeiros portugueses. Fonte: Pires (2005).

Em Portugal há duas Bolsas de Valores: a Euronext Lisboa onde têm lugar as operações à vista e a Bolsa de Derivados do Porto onde são transaccionados futuros e opções.

A entidade reguladora dos mercados de capitais em Portugal é a CMVM - Comissão de Mercados de Valores Mobiliários, que regula e fiscaliza os mercados primário, secundário e de derivados. A lei básica que regulamente actualmente os mercados de Bolsa é o Código dos Valores Mobiliários, aprovado em 1999. Este código estabelece uma série de regras fundamentais da estrutura dos mercados de valores mobiliários, sendo de realçar as regras sobre a informação a prestar ao público, regras das operações realizadas nos vários mercados e das condições de admissão de títulos.

A informação referente à evolução e comportamento da Bolsa de Valores, assim como as cotações dos títulos nela cotados, é normalmente publicada em jornais e revista da especialidade. São ainda de destacar informações mais detalhadas contendo os volumes transaccionados, número de subidas, número de descidas e mantidas, máximos, mínimos, assim como alguns comentários mais ou menos técnicos sobre tais comportamentos.

São ainda publicados mensalmente pela Euronext Lisboa dados estatísticos assim como indicadores bolsistas, sendo contudo normal verificar-se algum desacerto e atraso dos dados, o que pode induzir o investidor em erro. Para além da publicação deste tipo de informação, as empresas cotadas são obrigadas a publicar semestralmente o seu relatório de contas, normalmente em jornais e muitas vezes sob a forma de publicidade.

A Euronext Lisboa opera diariamente em secções normais, mas em determinadas circunstâncias, pode operar também em secções especiais, nomeadamente aquando de Ofertas Públicas de Venda (OPV) e Ofertas Públicas de Aquisição (OPA). No que toca às secções normais, existem actualmente

quatro segmentos de mercado. O mercado de cotações oficiais, o segundo mercado, o mercado sem cotações e o novo mercado. No mercado de cotações oficiais são transaccionados títulos da dívida pública e títulos das maiores empresas dos ponto de vista económico-financeiro.

O mercado bolsista de acções português é caracterizado pela sua pequena dimensão e fraca liquidez [Soares (1994), Soares (1997)], o que conduz a um tipo de comportamento que pode diferir dos grandes mercados mundiais, como por exemplo a Bolsa de Nova Iorque (N.Y.S.E.) ou de Tóquio (T.S.E.). Neste contexto, muitos modelos matemáticos desenvolvidos e aplicados aos grandes mercados bolsistas mundiais, podem não ser os mais adequados à pequena “praça” que é a Euronext Lisboa.

3.2 Recolha e tratamento dos dados

3.2.1 Títulos da amostra

No sentido de analisar as potencialidades da entropia e suas variantes, nomeadamente a entropia condicionada e a informação mútua, como medidas de incerteza no mercado bolsista de acções português, foram seleccionados títulos continuamente cotados na Euronext Lisboa num determinado período temporal, assim como o principal índice do mercado bolsista português: o PSI 20.

Os dados relativos às cotações ajustadas dos títulos foram recolhidos junto da CMVM Porto, tendo sido definido em primeiro lugar o período em análise. Naturalmente que se pretendia que este fosse o mais alargado possível, contudo, à medida que o período temporal em estudo aumenta, o número de títulos continuamente cotados decresce de forma evidente.

Neste sentido tentou encontrar-se uma “amostra de conveniência” de modo a ter-se o maior número de observações e um número razoável de títulos, sendo o período em análise para os títulos de 28/06/1995 a 30/12/2002, o que corresponde a 1858 cotações de fecho diárias.

A definição da amostra relativamente ao mercado bolsista de acções centrou-se no mercado de cotações oficiais. As razões desta escolha prendem-se com as garantias mínimas de liquidez, de dispersão de capital e de saúde económico-financeira que este mercado oferece. A escolha do índice PSI 20 como *proxy* do mercado bolsista de acções português prende-se com o facto de este ser um dos índices mais representativos do comportamento da Euronext Lisboa, pois o facto de ter em conta apenas os 20 títulos com maior volume de transacções num determinado período permite eliminar possíveis enviesamentos provocados por títulos cuja liquidez é diminuta.

Num mercado como o português, existem várias sucessões cronológicas de cotações de acções que apresentam *missing values*, correspondentes a dias sem cotação. Perante esta circunstância, pode-

se optar por ignorar tais “faltas” ou preencher essas vagas através, por exemplo, da interpolação dos valores entre dois pontos observados. De acordo com Soares (1994) nenhuma destas opções é perfeitamente válida dado que poderão resultar na criação de tendências locais espúrias e adulterar os resultados dos testes estatísticos efectuados. O mesmo autor aconselha a seleccionar apenas os títulos que contribuam ininterruptamente com a sua cotação para o cálculo do índice global do mercado em causa. Neste contexto, foram seleccionados todos os títulos que não apresentassem lapsos de cotação superiores a cinco dias no período referido. Deste modo não são excluídos títulos que possam ter testemunhado suspensões temporárias devido a alterações do capital social das referidas empresas. Estes dias sem cotação são preenchidos com a última cotação formada, metodologia esta que é aconselhada por Soares (1994) e Duque e Razina (1998).

A aplicação dos critérios enunciados conduziu à selecção dos seguintes títulos organizados por sector (Tabela 3.1):

<i>Sector</i>	<i>Títulos</i>
Sector da pasta de papel e cartão	Caima, Portucel
Sector do fabrico de produtos químicos	CIN
Sector do fabrico de outros minerais não metálicos	Barbosa & Almeida
Sector do fabrico de veículos automóveis	Salvador Caetano
Sector da construção	Mota Engil, Soares da Costa
Sector dos correios e telecomunicações	Portugal Telecom
Sector da intermediação financeira	Banif, BES, Banco Totta, BCP
Sector dos serviços prestados a empresas	Corticeira Amorim, Estoril Sol, Fisipe, Jerónimo Martins, Modelo & Contimento, Papellaria Fernandes, Sonae Indústria, Inapa, Sonae, Tertir, Somague.

Tabela 3.1: Títulos pertencentes à amostra organizados por sector.

É de realçar que o sector dos serviços prestados a empresas é o que apresenta maior peso na amostra em causa, seguido do sector de intermediação financeira. Tal situação deve-se ao facto de serem precisamente os títulos referentes àqueles sectores que apresentam maiores níveis de liquidez e simultaneamente maior longevidade na Euronext Lisboa para o período considerado na amostra.

Evolução das cotações dos títulos e enquadramento no comportamento da Bolsa portuguesa

Como anteriormente referido, os títulos que fazem parte da amostra são alvo de observação no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002, o que constitui cerca de 1856 observações diárias. Neste período a Bolsa portuguesa registou movimentos importantes, reflectidos pelos títulos nela transaccionados. Nas Figuras 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9 é apresentada a evolução das cotações de fecho diárias dos títulos em estudo.

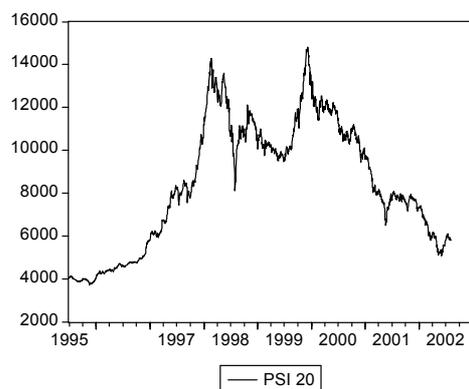


Figura 3.2: Evolução do índice PSI 20, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.

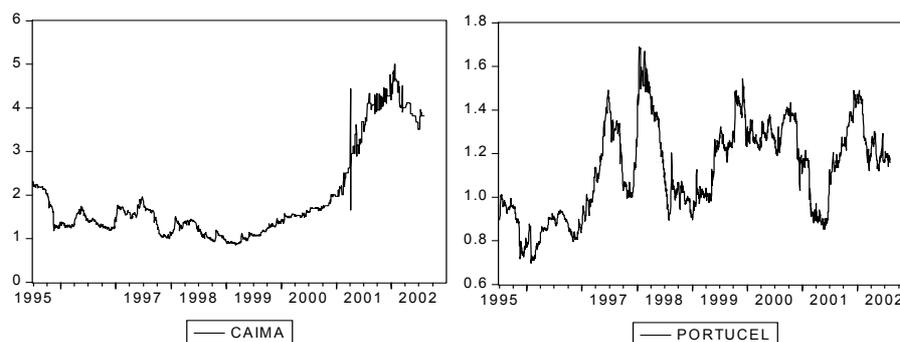


Figura 3.3: Evolução das cotações dos títulos pertencentes ao sector da pasta de papel e cartão, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.

De um modo geral, é possível rever na evolução da cotação de fecho dos títulos o comportamento do próprio mercado. Os anos de 1995 e 1996 caracterizaram-se por uma subida de cotações

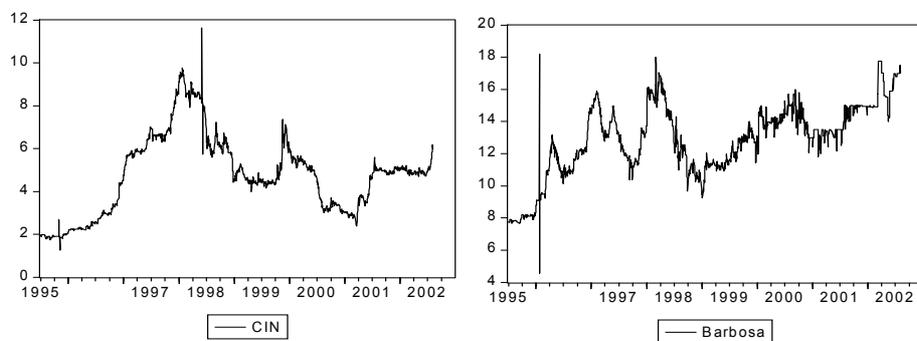


Figura 3.4: Evolução das cotações do títulos pertencentes aos sectores do fabrico de produtos químicos e fabrico de outros minerais não metálicos, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.

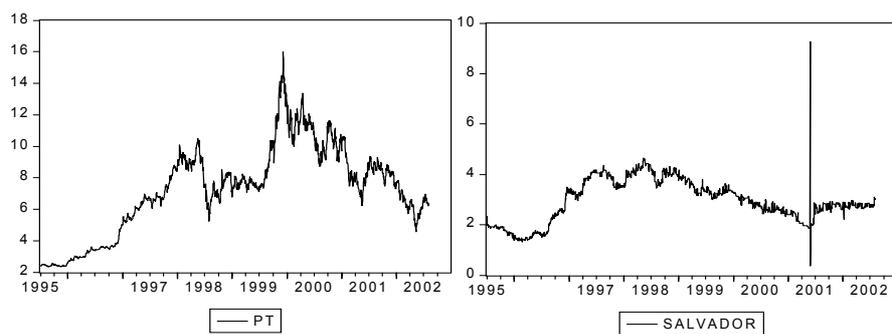


Figura 3.5: Evolução das cotações do títulos pertencentes aos sectores de correios e telecomunicações e fabrico de veículos automóveis, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.

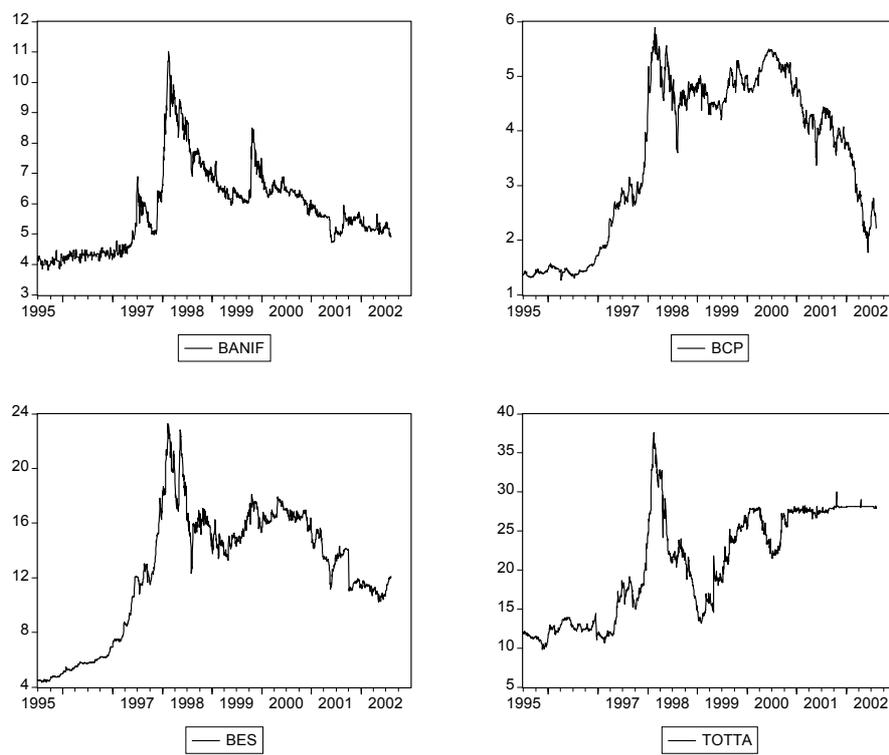


Figura 3.6: Evolução das cotações do títulos pertencentes ao sector da intermediação financeira, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.

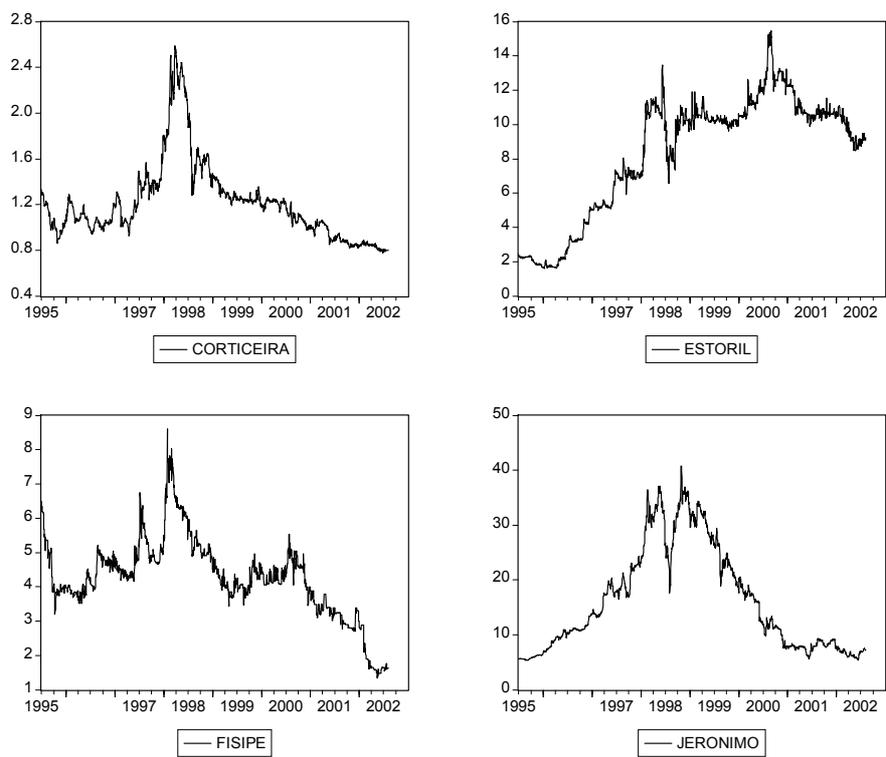


Figura 3.7: Evolução das cotações do títulos pertencentes ao sector dos serviços prestados a empresas, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.

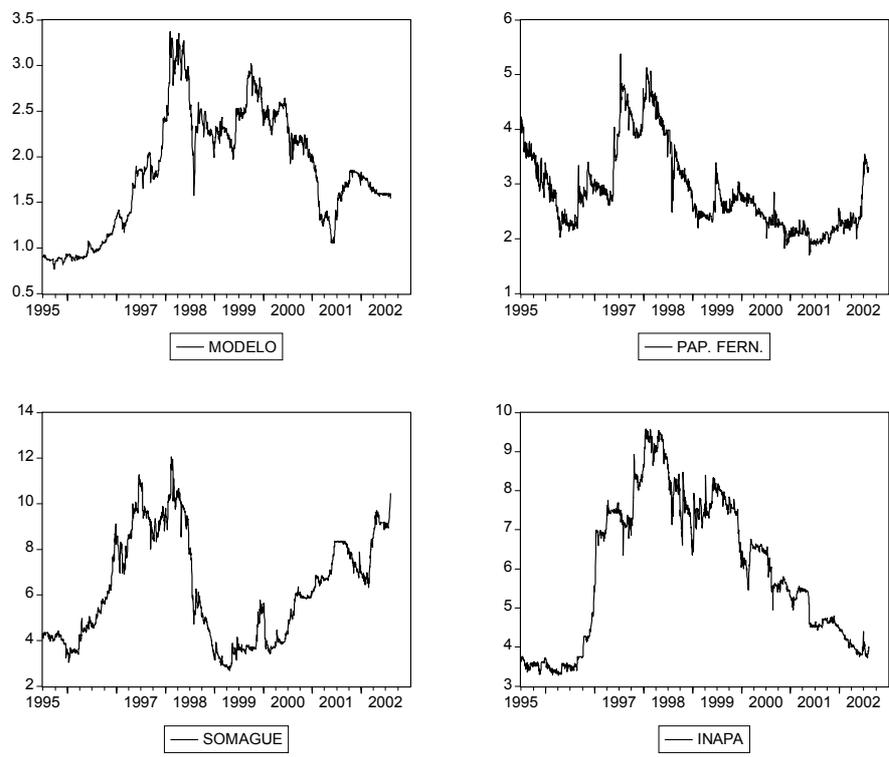


Figura 3.8: Evolução das cotações do títulos pertencentes ao sector dos serviços prestados a empresas, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.

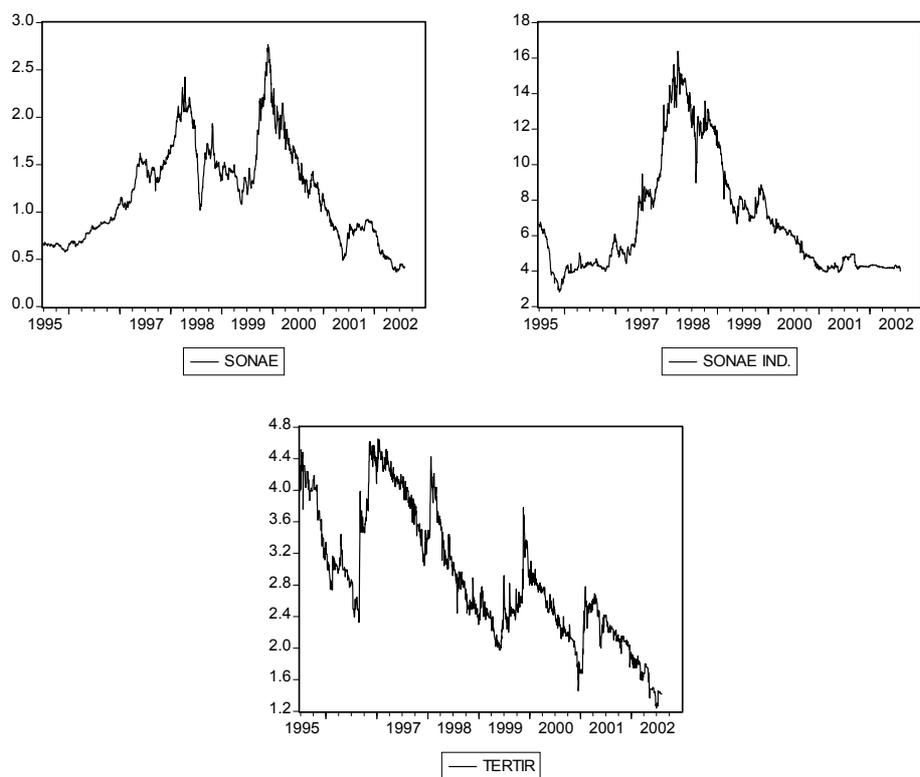


Figura 3.9: Evolução das cotações do títulos pertencentes ao sector dos serviços prestados a empresas, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.

apoiada no crescimento da economia nacional, pela influência positiva de outras praças bolsistas (nomeadamente a Bolsa de Nova Iorque, as Bolsas do sudeste asiático e outras Bolsas europeias importantes), assim como na descida das taxas de juro como forma de adesão à moeda única, o que facilitou o endividamento das empresas e dos particulares [Balbina *et al.* (2002)]. Os títulos vigentes na amostra em estudo que registaram maior variação positiva em 1996 face a 1995 foram Jerónimo Martins (67,08%), CIN (37,04%), Barbosa & Almeida (38,44%) e PT (35,16%). Por outro lado, os que registaram as maiores descidas face ao ano anterior foram Soares da Costa (-35,5%), Papelaria Fernandes (-24,25%), Caima (-26,96%) e Tertir (-19,74%).²

Em 1997 verificou-se um crescimento da economia portuguesa a um ritmo superior ao da média da União Europeia, o que conduziu a um aumento das vendas e dos lucros das empresas, assim como dos preços das cotações. As taxas de juro continuavam em baixa, assim como a inflação, o que facilitava o investimento no mercado de valores mobiliários. Um outro factor de crescimento, poderá ter sido a confiança depositada em Portugal por parte de outros países fundadores do euro, visto que o mercado português passou a ser alvo de aposta e atenção de outros países europeus. Além disso, a “promoção” anunciada em Maio de 1997 sobre a Bolsa de Valores de Lisboa caracterizando-a como “emergente” e “desenvolvida” de acordo com o critério da *Morgan Stanley*, fortaleceu a confiança dos investidores nacionais e estrangeiros. Neste período nenhum dos títulos em estudo revelou um decréscimo de preço médio anual face ao ano de 1996, sendo de evidenciar o título CIN com um acréscimo de 130,91%, Estoril-Sol com 130,30%, Somague com 89,90% e Salvador Caetano cujo acréscimo anual foi de 104,62%.

O ano de 1998 foi um dos anos mais voláteis para a Bolsa portuguesa. Na sequência do clima positivo que rodeava o mercado bolsista desde 1997 ditado por condições económicas favoráveis (crescimento económico em alta, inflação baixa, queda das taxas de juro, diminuição da taxa de desemprego e expectativa de adesão ao euro) verificou-se uma subida dos lucros das empresas. Em Abril de 1998 atingia-se o marco histórico, cerca de 64% de ganhos acumulados desde o início do ano. Logo em seguida o mercado desceu um pouco, voltando a subir em Julho. Em Agosto, o aumento da instabilidade internacional e o turbilhão que varreu as bolsas mundiais levaram à “queda livre” das cotações da Bolsa de Valores de Lisboa (agora Euronext Lisboa). Em Outubro de 1998 o mercado bolsista português “bateu no fundo” tendo sido registadas perdas abruptas e a ruína para muitos investidores. Tal situação pode ter tido origem nos movimentos de “imitação social”, onde a grande maioria dos investidores tende a assumir o mesmo comportamento, neste caso de venda desenfreada de títulos. Os títulos que registaram maiores quebras anuais foram

²A tabela com as variações anuais dos preços encontra-se no Anexo B.

Caima (-22,61%) e Tertir (-20,96%). De um modo global as quebras foram absorvidas pelos ganhos avultados registados no primeiro semestre, daí que a variação anual seja quase sempre positiva para a maioria dos títulos em análise.

A partir de 1998 verificou-se um crescimento muito lento da Bolsa portuguesa. O ano de 1999 foi marcado pela adesão ao euro, tendo a sua introdução decorrido sem problemas técnicos a registar. A nova moeda foi acolhida com entusiasmo e optimismo pelos mercados, o que proporcionou um crescimento das cotações no início do ano. A actividade da Euronext Lisboa em 1999 desenrolou-se num contexto, interno e internacional, globalmente favorável, ainda que tenha apresentado uma forte volatilidade ao longo de todo o ano. A economia portuguesa foi positivamente influenciada pelo efeito “euro” e pela adopção pelo Banco Central Europeu de uma política monetária expansionista que se concretizou numa tendência globalmente decrescente das taxas de juro e na manutenção de um euro fraco face às principais moedas dos países terceiros. De um modo global, em 1999 assistiu-se a uma quebra das transacções no segmento accionista da Euronext Lisboa, dado que os três primeiros trimestres de 1999 ficaram marcados pela fuga do investimento para outros países da zona euro. Neste ano os títulos mais transaccionados foram PT, BCP e EDP. Os títulos (vigentes na amostra em estudo) que apresentaram valorização positiva foram Estoril-Sol (10,02%) e Jerónimo Martins (2,67%), enquanto que os que registaram as maiores perdas foram Somague (-58,51%), Sonae Indústria (-31,01%), CIN (-37,9%) e Corticeira Amorin (-29,20%).

O ano de 2000 foi marcado a nível internacional por três factores: a intensa subida do preço do petróleo, a depreciação do euro face ao dólar e a inversão no comportamento das taxas de juro, até então com tendência decrescente. Em termos nacionais, é de salientar a redução da despesa pública e a diminuição na taxa de crescimento do PIB. As grandes preocupações são a subida da taxa de inflação e o descontrole das contas públicas, o que leva à diminuição da confiança por parte dos investidores. De um modo geral, o segmento bolsista da Euronext Lisboa registou uma subida em termos de capitalização bolsista no primeiro trimestre, seguida de um período de grande volatilidade e queda. As principais subidas de cotação face ao ano de 1999 relativamente aos títulos considerados neste estudo foram registadas no sector da pasta de papel e cartão, onde o título Caima apresentou um acréscimo de 46,43% e Portucel 20,31%, e nos títulos Somague (25,11%), Mota-Engil (40,93%) e PT (44,05%). Por outro lado os principais decréscimos foram apresentados por Jerónimo Martins (-44,05%), Sonae Indústria (-26,14%) e Soares da Costa (-23,87%).

Durante o ano 2001, a evolução económica a nível internacional foi particularmente marcada por uma forte desaceleração do ritmo de crescimento nos principais pólos económicos mundiais: Estados Unidos, União Europeia e Japão, em conjunto com o clima de instabilidade política e económica, que se acentuou após os atentados de 11 de Setembro nos Estados Unidos. Verificou-

se uma quebra na confiança dos investidores, com consequências negativas sobre a produção, o consumo e os mercados financeiros. Ao nível institucional, em 2001 destacaram-se a continuação e aprofundamento do processo de reorganização e integração dos mercados bolsistas à escala europeia. Relativamente à evolução da economia portuguesa, o ano 2001 excedeu as piores expectativas formuladas na altura, observando-se uma desaceleração significativa do ritmo de crescimento do PIB e uma aceleração significativa da taxa de inflação, com consequências notórias em termos de perda de competitividade das empresas nacionais. O mercado de acções da *Euronext* Lisboa caracterizou-se por um tendência clara para a queda, aos níveis de quantidades transaccionadas, capitalização bolsista e preços. Alguns títulos apresentaram subidas de cotação, nomeadamente os títulos Somague (55,43%), Celulose do Caima (75,70%), e Banco Totta (8,66%), enquanto que as empresas dedicadas às novas tecnologias foram as que mais valor perderam, nomeadamente PT Multimédia e PT Multimédia.com (títulos estes que não fazem parte da amostra em estudo), Jerónimo Martins (-49,92%), Modelo & Continente (-33,01%) e Sonae SGPS (-49,49%).

A nível macroeconómico, confirmaram-se as piores previsões que haviam sido realizadas para o ano 2002, verificando-se um abrandamento generalizado das principais economias internacionais, estando sempre patente a incerteza que afectou o consumo privado, o investimento produtivo e o investimento nos mercados financeiros. A evolução económica mundial foi muito condicionada pela conjuntura política internacional, com destaque para os efeitos colaterais dos atentados terroristas, o esforço de guerra no Afeganistão e a possibilidade de uma nova guerra no Iraque. Neste contexto, a economia portuguesa apresentou estagnação e mesmo contracção em várias componentes da procura interna que, com a não compensação de um crescimento significativo da procura externa, mergulhou numa profunda crise económica. A crise orçamental e o conjunto de medidas restritivas tomadas pelo governo de então, terão ajudado ao agravamento das condições conjunturais, com o aumento do desemprego a destacar-se. Neste contexto, a Bolsa portuguesa apresentou-se maioritariamente “em baixa”, onde os títulos apresentaram muitas vezes taxas de rendibilidade negativas. O mercado de acções da *Euronext* Lisboa caracterizou-se por um decréscimo da capitalização bolsista, dos volumes negociados, assim como do nível de preços. As acções que registaram maior variação (positiva) foram sobretudo títulos com reduzidos níveis de liquidez, por exemplo Caima (55,63%), CIN (38,10%), Barbosa & Almeida (14,64%), Salvador Caetano (15,74%), Papelaria Fernandes (15,06%) e Somague (18,01%), enquanto que alguns dos títulos mais transaccionados foram também os mais desvalorizados, nomeadamente Sonae SGPS (-31,58%), Sonae-Indústria (-3,38%), Jerónimo Martins (-12,17%), BCP (-28,36%), BES (-20,77%) e PT (-21,63%).³

³ A análise da evolução da Bolsa portuguesa realizada nesta secção baseou-se também nos Relatórios de Gestão e Contas Consolidadas da BVL, no Boletim Semanal da Poupança Acções, Edideco, Lisboa e nos Relatórios Anuais

Análise estatística dos títulos

Nesta subsecção é apresentada a análise estatística das taxas de rendibilidade diárias dos títulos e do índice PSI 20. Esta análise é realizada com o objectivo de conhecer as características gerais das sucessões cronológicas em estudo e identificar possíveis fontes de factos estilizados. A respectiva taxa de rendibilidade foi calculada através da expressão⁴

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}, \quad (3.1)$$

onde r_t é a taxa de rendibilidade no dia t , P_t e P_{t-1} são as cotações de fecho das sucessões cronológicas ajustadas para os momentos t e $t - 1$. Neste cálculo não são tidos em conta a distribuição de dividendos, aumentos de capital, *stock-splits*, entre outros eventos, pois as sucessões cronológicas obtidas junto da CMVM do Porto já tinham incorporada essa informação.

Numa primeira fase foi realizado o teste de estacionariedade às sucessões cronológicas originais dos preços. Para tal foi aplicado o teste *Augmented-Dickey-Fuller* (*ADF*), através do software *EViews* 4.1. Os resultados são apresentados nas Tabelas 3.2 e 3.3.

Os resultados dos testes *ADF* revelaram que todas as sucessões cronológicas referentes às cotações de fecho dos títulos e índice PSI 20 são integradas de primeira ordem, $I(1)$, o que quer dizer que, de acordo com este teste, não se rejeita a hipótese de que os preços seguem um passeio aleatório e as taxas de rendibilidade são estacionárias, o que está de acordo com a teoria financeira e a hipótese de eficiência do mercado.

A análise estatística das sucessões cronológicas referentes às taxas de rendibilidade dos títulos é apresentada por sector, de forma a facilitar a leitura e compreensão da mesma.

A Tabela 3.4 mostra os resultados obtidos pela análise estatística das taxas de rendibilidade dos títulos que constituem a amostra para os sectores da pasta de papel e cartão; do fabrico de produtos químicos e fabrico de outros minerais não metálicos, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.⁵

A análise estatística das taxas de rendibilidade diárias dos títulos Caima, Portucel, CIN e Barbosa & Almeida permite tirar algumas conclusões sobre a distribuição de probabilidade seguida pelos dados empíricos. São de realçar os valores muito elevados da curtose dos títulos Caima e Barbosa & Almeida, assim como a forte assimetria negativa. Tal facto poderá dever-se ao facto de estes títulos terem registados quebras muito acentuadas num curto espaço de tempo. Estas

publicados pela CMVM.

⁴Note-se que se trata de uma taxa de rendibilidade logarítmica e não linear.

⁵Note-se que *LB Q(10)* é o teste Ljung-Box; ρ_i é o coeficiente de autorregressão de ordem i ; *ARCH (p) LM* é o multiplicador de Lagrange de Engle para testar homocedasticidade com p lags.

<i>Títulos</i>	<i>Estatística ADF</i>	<i>Estatística com Tendência</i>	<i>Lags</i>
Níveis			
Barb. & Almeida	-2,296	-2,893	4
BANIF	-1,840	-1,639	3
BCP	-1,369	-0,096	2
B. Totta	-1,312	-2,033	3
BES	-1,850	-1,371	2
Caima	-0,002	-1,723	3
CIN	-1,602	-1,519	4
Corticeira Amorim	-1,605	-1,819	3
Estoril-Sol	-1,719	-1,371	3
Fisipe	-1,599	-2,087	3
Inapa	-1,186	-1,159	3
Mod. & Continente	-1,665	-1,278	3
Jer. Martins	-1,253	-1,449	2
Mota-Engil	-1,863	-1,848	2
Pap. Fernandes	-2,122	-1,830	5
Portucel	-2,334	-2,434	3
PT	-1,999	-1,618	3
Salv. Caetano	-1,703	-1,650	7
Soares Costa	-2,930	-4,281	2
Somague	-0,917	-1,026	3
Sonae	-1,349	-1,377	3
Sonae-Ind.	-1,016	-1,122	3
Tertir	-1,696	-2,778	5
PSI 20	-1,369	-0,641	1

Tabela 3.2: Resultados do teste *ADF* para as sucessões cronológicas dos títulos em níveis.

<i>Títulos</i>	<i>Estatística ADF</i>	<i>Estatística com Tendência</i>	<i>Lags</i>
Primeiras Diferenças			
Barb. & Almeida	-33,522**	-33,514**	2
BANIF	-26,135**	-26,153**	2
BCP	-29,055**	-29,165**	1
B. Totta	-24,730**	-24,724**	2
BES	-36,242**	-36,271**	1
Caima	-35,346**	-35,436**	2
CIN	-27,310**	-27,313**	3
Corticeira Amorim	-23,607**	-23,607**	2
Estoril-Sol	-28,256**	-28,282**	2
Fisipe	-29,118**	-29,112**	2
Inapa	-26,556**	-26,641**	2
Mod. & Continente	-31,047**	-31,078**	1
Jer. Martins	-27,080**	-27,133**	1
Mota-Engil	-30,366**	-30,362**	1
Pap. Fernandes	-25,729**	-25,745**	3
Portucel	-30,085**	-30,080**	1
PT	-31,963**	-31,990**	1
Salv. Caetano	-24,957**	-24,959**	6
Soares Costa	-31,976**	-32,001**	1
Somague	-31,686**	-31,685**	1
Sonae	-21,701**	-21,759**	2
Sonae-Ind.	-26,792**	-26,796**	2
Tertir	-21,933**	-21,927**	4
PSI 20	-36,948**	-37,036**	0

Tabela 3.3: Resultados do teste *ADF* para as primeiras diferenças das sucessões cronológicas dos títulos. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

<i>Estatísticas</i>	<i>Caima</i>	<i>Portucel</i>	<i>CIN</i>	<i>Barb. Alm.</i>
Média	0,000291	0,000132	0,000624	0,000446
Mediana	0,000	0,000	0,000	0,000
Máximo	0,491	0,130	0,362	0,693
Mínimo	-0,983	-0,111	-0,421	-1,384
Desvio-padrão	0,037	0,018	0,031	0,045
Assimetria	-7,685	0,365	-0,435	-11,397
Curtose	299,870	8,640	78,041	525,647
Jarque-Bera	6837477,0	2502,7	435769,1	2117591,8
Prob.	0,000	0,000	0,000	0,000
LBQ(10)	287,16**	16,887**	200,11**	599,09**
ρ_1	-0,391**	0,067**	-0,293**	-0,554**
ρ_2	0,016**	-0,005**	0,008**	0,122**
ρ_3	0,027**	-0,042**	0,082**	-0,007**
ARCH(p)LM	150,060**	51,412**	235,341**	134,48**
p n. lags	3	2	6	4
Observações	1857	1857	1857	1857

Tabela 3.4: Análise estatística dos títulos que constituem a amostra para os sectores da pasta de papel e cartão; do fabrico de produtos químicos e fabrico de outros minerais não metálicos, no período entre 28/06/1995 e 31/12/2002. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

observações extremas podem ser tratadas como simples *outliers*, contudo considerou-se que não deviam ser retiradas da amostra. De acordo com os resultados do teste de normalidade *Jarque-Bera*, para todos os títulos é rejeitada a hipótese de que as distribuições empíricas possam ser fielmente retratadas pela distribuição normal. Dado o excesso de curtose presente em todos os títulos, existe então a possibilidade de estes apresentarem *fat tails*, o que constitui um indicador de que a probabilidade de eventos extremos é superior à ditada pela distribuição normal e simultaneamente de que pode existir dependência não-linear temporal [Cont (2001)].

Nos testes à existência de autocorrelação de *Ljung-Box*, os resultados apontam claramente para a rejeição da hipótese nula. De referir ainda que os três primeiros coeficientes de autorregressão são estatisticamente significativos para todos os títulos vigentes na Tabela 3.4. Por fim, o multiplicador de Lagrange de Engle para testar a homocedasticidade refuta a hipótese nula em todos os casos em

análise.

A Tabela 3.5 mostra os resultados obtidos pela análise estatística da distribuição empírica seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos que constituem a amostra para os sectores da construção, das telecomunicações e correios e fabrico de veículos automóveis, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.

<i>Estatísticas</i>	<i>Mota-Engil</i>	<i>Soares C.</i>	<i>PT</i>	<i>Salv. Caetano</i>
Média	0,00014	-0,00079	0,000542	0,000213
Mediana	0,000	0,000	0,000	0,000
Máximo	0,323	0,186	0,081	1,710
Mínimo	-0,148	-0,201	-0,101	-1,609
Desvio-padrão	0,020	0,024	0,021	0,082
Assimetria	2,887	0,146	-0,107	0,809
Curtose	49,913	12,116	5,072	339,694
Jarque-Bera	172870,6	6437,0	335,7	8771675,0
Prob.	0,000	0,000	0,000	0,000
LBQ(10)	28,215**	12,362	45,499**	557,45**
ρ_1	-0,056*	-0,022	0,129**	-0,255**
ρ_2	0,036*	-0,042	-0,074**	-0,434**
ρ_3	0,031*	-0,014	0,004**	0,214**
ARCH(p)LM	4,182*	24,986**	35,957**	628,433**
p n. lags	1	2	4	5
Observações	1857	1857	1857	1857

Tabela 3.5: Análise estatística dos títulos que constituem a amostra dos sectores da construção; das telecomunicações e correios e fabrico de veículos automóveis, no período entre 28/06/1995 e 31/12/2002. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

Mais uma vez é de realçar a leptocurtose exibida por todos os títulos vigentes na Tabela 3.5, levando a crer que a probabilidade de ocorrência de eventos extremos é muito superior à ditada pela distribuição normal. De salientar o título Salvador Caetano, cujo valor de curtose é com certeza muito influenciado pelo facto de registar quebras muito acentuadas em curtos espaços de tempo. Em termos de autocorrelação, a hipótese nula de inexistência de autocorrelação é rejeitada, o que indica que há dependência (pelo menos) linear temporal nas respectivas sucessões cronológicas. O teste $ARCH(p)$ LM rejeita também a hipótese de homocedasticidade para todos os títulos.

A Tabela 3.6 apresenta os resultados obtidos pela análise estatística das taxas de rentabilidade dos títulos que constituem a amostra para o sector da intermediação financeira, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.

<i>Estatísticas</i>	<i>BANIF</i>	<i>BCP</i>	<i>B.Totta</i>	<i>BES</i>
Média	7,52E-05	0,000278	0,000458	0,000552
Mediana	0,000	0,000	0,000	0,000
Máximo	0,157	0,104	0,374	0,075
Mínimo	-0,120	-0,171	-0,204	-0,230
Desvio-padrão	0,019	0,016	0,020	0,015
Assimetria	0,655	-0,707	3,572	-1,883
Curtose	10,758	17,293	83,737	38,887
Jarque-Bera	4789,3	15960,0	508309,9	100744,9
Prob.	0,000	0,000	0,000	0,000
LBQ(10)	51,669**	41,176**	52,293**	50,700**
ρ_1	-0,136**	0,125**	-0,121**	0,142**
ρ_2	-0,016**	-0,048**	-0,032**	0,031**
ρ_3	-0,03**	0,002**	0,082**	0,041**
ARCH(p)LM	100,503**	50,937**	10,506**	2,060
p n. lags	1	2	2	1
Observações	1857	1857	1857	1857

Tabela 3.6: Análise estatística dos títulos que compõem a amostra do sector da intermediação financeira, no período entre 28/06/1995 e 31/12/2002. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

A análise estatística realizada aos títulos de bancos apresentou resultados que não diferem muito dos encontrados anteriormente para outros sectores. Mais uma vez a hipótese de que as taxas de rentabilidade seguem uma distribuição normal é rejeitada pelo teste *Jarque-Bera*, exibindo todos os títulos leptocurtose. É de evidenciar o título do Banco Totta que apresenta uma assimetria muito positiva, o que de algum modo, contraria os vulgares resultados empíricos de assimetria negativa ou praticamente nula. Neste contexto, todos os títulos exibem sinais de autocorrelação, sendo que todos os coeficientes de autorregressão analisados apresentaram significância estatística. A existência de homocedasticidade é rejeitada para quase todos os títulos, excepto para o título BES cujo valor para a estatística do teste *ARCH(1) LM* é de 2,060.

As Tabelas 3.7 e 3.8 apresentam os resultados obtidos pela análise estatística das taxas de rendibilidade dos títulos que constituem a amostra para o sector dos serviços prestados a empresas, no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002.

<i>Estatísticas</i>	<i>Corticeira</i>	<i>Estoril-Sol</i>	<i>Fisipe</i>	<i>Inapa</i>	<i>Jer. Martins</i>	<i>Mod. & Cont.</i>
Média	-0,00028	0,00073	-0,00071	2,44E-05	0,00011	0,00031
Mediana	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Máximo	0,136	0,183	0,265	0,138	0,100	0,110
Mínimo	-0,101	-0,210	-0,316	-0,129	-0,177	-0,129
Desvio-padrão	0,018	0,027	0,032	0,017	0,022	0,019
Assimetria	0,403	0,420	-0,203	0,471	-0,416	-0,053
Curtose	9,455	13,173	15,634	14,775	10,679	10,478
Jarque-Bera	3274,5	8062,9	12362,8	10796,3	4616,0	4327,9
Prob.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
LBQ(10)	15,926	75,643**	96,056**	66,540**	68,346**	10,451
ρ_1	0,030	-0,183**	-0,190**	-0,167**	0,172**	0,017
ρ_2	-0,012	0,039**	-0,005	0,040**	0,038**	-0,018
ρ_3	-0,011	-0,024**	-0,062**	-0,029**	0,045**	0,010
ARCH(p)LM	145,136**	242,031**	8,1035**	324,149**	62,029**	252,726**
p n. lags	1	1	1	1	1	1
Observações	1857	1857	1857	1857	1857	1857

Tabela 3.7: Análise estatística dos títulos que constituem a amostra para o sector dos serviços prestados a empresas, no período entre 28/06/1995 e 31/12/2002. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

Da análise das Tabelas 3.7 e 3.8 verifica-se que todos os títulos apresentam excesso de curtose e assimetria, levando a que a hipótese de a distribuição normal representar fielmente a distribuição empírica, seja rejeitada com um nível de significância de 1%. Os títulos Corticeira Amorim, Modelo & Continente e Somague foram os únicos que apresentaram sinais de não existência de autocorrelação linear nas suas observações. A hipótese de homocedasticidade é rejeitada para todos os títulos apresentados nas Tabelas 3.7 e 3.8 .

De um modo geral, pode concluir-se que os títulos com menores níveis de liquidez (os chamados *small caps*), nomeadamente Caima, Barbosa & Almeida e Salvador Caetano são os que apresentam maiores afastamentos da distribuição normal, sendo também aqueles que exibem maior evidência de

<i>Estatísticas</i>	<i>Pap. Fer.</i>	<i>Somague</i>	<i>Sonae</i>	<i>Sonae Ind.</i>	<i>Tertir</i>
Média	-0,00012	0,0005	-0,00028	-0,00025	-0,00056
Mediana	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Máximo	0,334	0,156	0,115	0,123	0,186
Mínimo	-0,336	-0,166	-0,101	-0,146	-0,175
Desvio-padrão	0,035	0,024	0,021	0,021	0,029
Assimetria	0,300	0,348	0,137	0,128	0,682
Curtose	17,519	11,129	5,965	9,044	9,842
Jarque-Bera	16339,6	5150,1	685,9	2832,0	3766,6
Prob.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
LBQ(10)	143,80**	5,6471	41,922**	15,865	52,237**
ρ_1	-0,270**	-0,024	0,101**	0,067**	-0,129**
ρ_2	-0,048**	0,013	0,072**	-0,007**	-0,053**
ρ_3	-0,002**	0,000	0,059**	-0,038**	-0,013**
ARCH(p)LM	209,193**	109,440**	32,855**	206,678**	43,947**
p n. lags	2	1	3	1	3
Observações	1857	1857	1857	1857	1857

Tabela 3.8: Análise estatística dos títulos que constituem a amostra para o sector dos serviços prestados a empresas, no período entre 28/06/1995 e 31/12/2002. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

leptocurtose. Para a maioria dos títulos verificou-se que existe dependência linear temporal e sinais de heterocedasticidade. Estes resultados podem enviesar e talvez pôr em causa a aplicação de vários modelos de *asset pricing*, especialmente quando os pressupostos da normalidade e propriedade *i.i.d.* das observações podem não se verificar.

Tal como realizado para os títulos, foi também realizada a análise estatística para as taxas de rendibilidade do índice PSI 20, sendo os resultados reportados na Tabela 3.9.

A análise estatística realizada às taxas de rendibilidade diárias do índice PSI 20, para o período entre 28/06/1995 e 31/12/2002 demonstra que há um excesso de curtose, sendo a possível causa da não normalidade da distribuição em estudo. Existem também indícios de autocorrelação e heterocedasticidade. A evidência empírica aqui encontrada corrobora alguns dos factos estilizados descritos por diversos autores [e.g. Peters (1996), Cont (2001), Maasouni *et al.* (2002)].

<i>Estatísticas</i>	<i>PSI 20</i>
Média	-0,00019
Mediana	0,000
Máximo	0,069
Mínimo	-0,096
Desvio-padrão	0,012
Assimetria	-0,541
Curtose	8,683
Jarque-Bera	2589,1
Prob.	0,000
LBQ(10)	69,184**
ρ_1	0,164**
ρ_2	-0,038**
ρ_3	-0,053**
ARCH(p)LM	68,522**
p n. lags	2
Observações	1857

Tabela 3.9: Análise estatística das taxas de rentabilidade diárias do índice PSI 20, no período entre 28/06/1995 e 31/12/2002. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

3.2.2 Índices internacionais

Com vista a avaliar a dependência temporal global (linear e não-linear) existente nas sucessões cronológicas das taxas de rendibilidade de diversos índices bolsistas internacionais e assim tentar concluir sobre a sua eficiência e estabelecer comparações com o comportamento do mercado português (representado pelo índice PSI 20), foram considerados 7 índices bolsistas referentes a importantes praças internacionais. Estes índices foram obtidos através da base de dados *DataStream* e são respectivamente ASE (Grécia), CAC 40 (França), DAX 30 (Alemanha), FTSE 100 (Inglaterra), PSI 20 (Portugal), IBEX 35 (Espanha) e S&P 500 (EUA).

A escolha da amostra com diversos índices internacionais tem a ver com a necessidade de proceder a comparações de comportamentos entre os índices a diversos níveis, nomeadamente a dependência face às respectivas observações desfasadas.

A escolha do índice ASE prende-se com o facto de a Grécia ser um país com um desenvolvimento económico muito semelhante ao português, sendo que os respectivos mercados de acções não diferem largamente no que toca à dimensão e níveis de liquidez.

A selecção dos índices CAC 40, FTSE 100 e DAX 30 prende-se com o facto de pertencerem aos mercados dos países economicamente mais desenvolvidos na Europa, sendo possível que a sua pressão face a mercados mais pequenos possa ser determinante. Num contexto mundial estes mercados são considerados de média dimensão, por isso teve-se também em conta um índice respeitante a um dos maiores e mais importantes mercados bolsistas a nível mundial, o mercado norte-americano. Foi seleccionado o índice S&P 500 como índice representativo deste mercado.

Por fim, a selecção do índice IBEX 35 prende-se com a relação privilegiada com o país vizinho, sendo que a economia espanhola e o seu respectivo mercado bolsista são muitas vezes alvo de comparação com o mercado português. Além disso o mercado bolsista espanhol é um mercado de média dimensão em termos europeus. Neste contexto a amostra em causa conta com índices de pequena dimensão (PSI 20 e ASE), média dimensão a nível europeu (IBEX 35), grande dimensão a nível europeu mas média a nível mundial (CAC 40, DAX 30 e FTSE 100) e grande dimensão a nível mundial (S&P 500).

De salientar ainda que foram consideradas as cotações de fecho diárias dos índices, no período entre 4/01/1993 a 31/12/2002 o que corresponde a cerca de 2595 observações.

Procedeu-se ao ajustamento dos valores dos índices, de forma a permitir uma harmonização de pequenas diferenças ao nível dos dias de funcionamento das bolsas dos vários países em estudo. Considerou-se com o objectivo de evitar a perda de observações que se um índice não é cotado num dia, a sua cotação mantém-se inalterada face à do dia imediatamente anterior. Importa acrescentar

que os índices bolsistas não usam todos a mesma metodologia de cálculo, em particular no que concerne ao pagamento de dividendos. Alguns índices ajustam o seu divisor quando são pagos dividendos (DAX 30, PSI 20) de modo a que o mesmo reflecta esse fenómeno no mercado. Outros índices, por exemplo o IBEX 35, o CAC 40, o FTSE 100 e a grande maioria dos restantes índices, não tomam este aspecto em consideração e como tal, não procedem a quaisquer ajustamentos.

Evolução das cotações dos índices bolsistas internacionais

Na Figura 3.10 é apresentada a evolução da cotação de fecho diária (em pontos) dos índices bolsistas internacionais em estudo. De um modo geral é de realçar que os índices parecem apresentar um comportamento semelhante para o período em análise, revelando-se uma subida lenta, mas constante de 1993 até cerca de 1997/1998, verificando-se uma descida a partir dessa data. Até 1998 a variação da média anual dos preços é sempre positiva para todos os índices. Na realidade, neste período observou-se um crescimento generalizado da economia mundial, evidenciando-se os EUA e o Reino Unido com taxas de crescimento muito elevadas, estando perto do pleno emprego dos recursos. Na Europa o crescimento económico também foi considerável, apesar da fraca dinâmica da procura doméstica nalgumas das maiores economias europeias, nomeadamente na Alemanha, na França e em Itália.

O ano de 1998 foi aquele que registou as variações mais intensas.⁶ Após o forte crescimento da actividade económica mundial verificada nos últimos anos, em especial 1996 e 1997, verificou-se em 1998 um abrandamento significativo derivado sobretudo às crises financeiras dos países asiáticos, das economias de leste e da América Latina. Apesar de tudo, os EUA apresentaram robustez económica e financeira, não só a nível do PIB, mas também da taxa de desemprego e consumo privado. Na união europeia registou-se algum abrandamento da actividade económica, o que *a priori* poderá dever-se à conjuntura externa. O índice de confiança do investidor começou a exibir alguma diminuição, especialmente a partir do segundo semestre do ano. Apesar de tudo, todos os índices bolsistas em estudo exibiram um crescimento em termos de variação da cotação média anual face a 1997. Alguns índices, nomeadamente CAC 40, DAX 30 e S&P 500 atingem o valor máximo no ano 2000, registando perdas significativas a partir desse ano.

O ano de 1999 caracterizou-se por ser mais um ano de crescimento económico nos EUA, tendo como principais pilares dessa expansão uma forte procura externa e o aumento da produtividade. Na Europa, 1999 foi o ano do surgimento da moeda única e da criação da zona euro. Durante este ano o euro sofreu fortes depreciações face ao dólar e ao iene, verificou-se um abrandamento

⁶A análise das variações da média anual dos preços encontra-se no Anexo C.

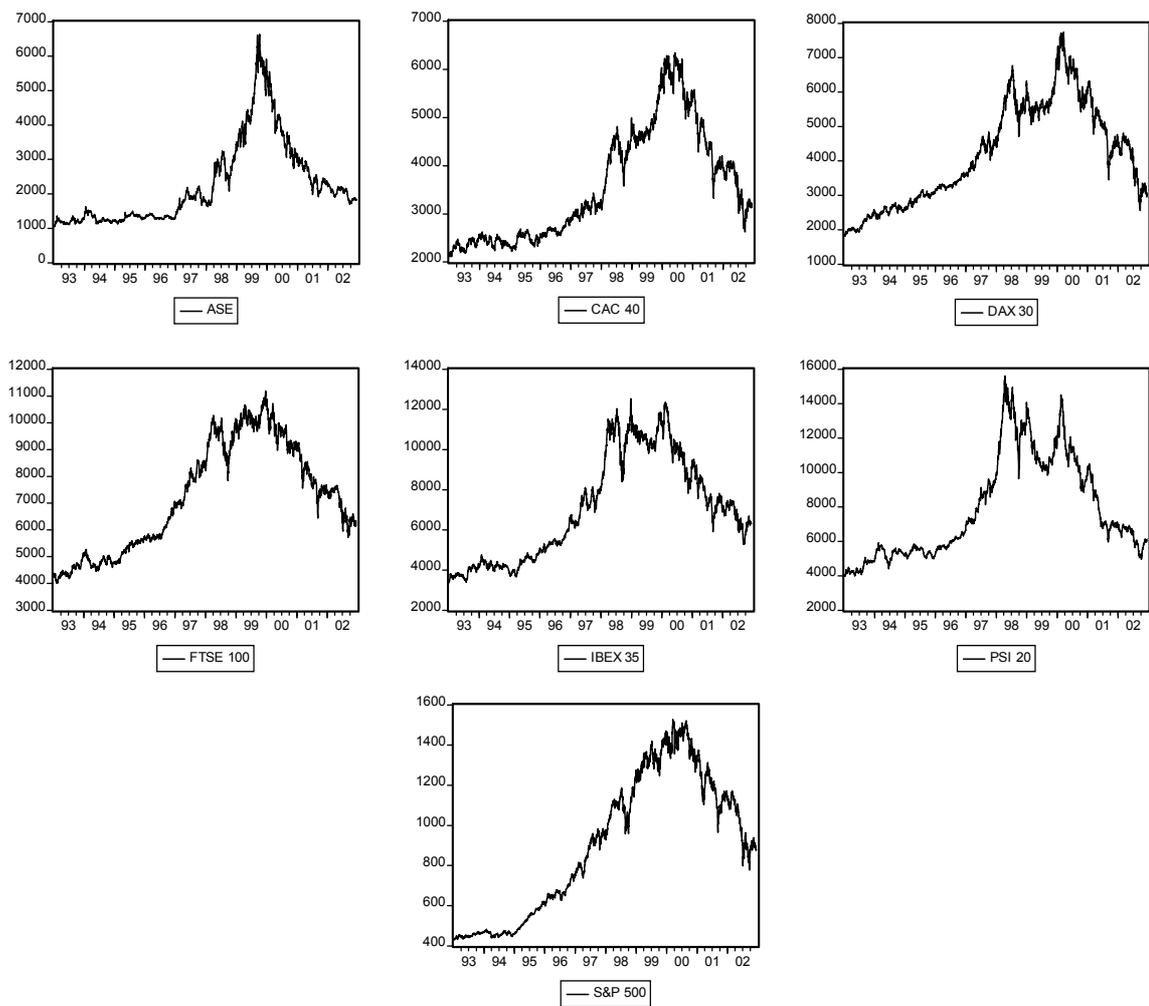


Figura 3.10: Evolução diária das cotações em pontos dos índices ASE, CAC 40, DAX 30, FTSE 100, IBEX 35, PSI 20 e S&P 500 no período entre 04/01/1993 a 31/12/2002.

do crescimento do PIB nos países que integravam a zona euro e as taxas de juro mantiveram uma tendência decrescente. De registar a desaceleração do crescimento da economia inglesa no início do ano, mas que recuperou de forma evidente a partir do segundo trimestre. Neste mesmo ano, e como já foi abordado, a Bolsa portuguesa, mais concretamente o segmento accionista caracterizou-se por uma perda de capitalização face a outros mercados internacionais, revelando alguma estagnação e queda no valor das transacções.

Em 2000, a subida do preço do petróleo, a forte depreciação do euro face ao dólar e a subida das taxas de juro na zona euro elevaram aos “picos” o mercado bolsista norte-americano, mas o mesmo já não se passou na Europa, especialmente na Euronext Lisboa, cujo contexto nacional aliado à envolvente internacional, levaram a quebras de capitalização, volume de transacções e preços.

O ano 2001 foi um ano marcado pela instabilidade política e económica internacional, reflectindo-se na queda generalizada de cotações, numa tendência mais acentuada no segundo semestre do ano, em que um dos principais factores foi o atentado de 11 de Setembro de 2001. As quebras anuais médias dos índices representativos dos mercados accionistas situaram-se em torno dos 20% face ao ano anterior, sendo de salientar o índice ASE (-36,42%) e o índice PSI 20 (-29,42%). O mercado accionista português registou uma quebra avultada em termos de capitalização bolsista, volumes transaccionados e preços, o que foi também influenciado pela envolvente económica nacional muito desfavorável (como já foi focado na subsecção anterior).

Em 2002, a situação teve tendência para piorar face ao ano anterior. O forte abrandamento que atingiu alguns dos mais relevantes países em termos económicos (Alemanha, França, EUA) e uma conjuntura nacional muito difícil, conduziram a maioria dos índices bolsistas a cenários muito negativos em termos de rendibilidade (a variação da média anual dos preços foi negativa para todos os índices, de realçar os índices CAC 40 com um decréscimo de 21% e DAX 30 cuja variação relativamente ao ano anterior foi de -22,32%). A situação mais dramática ocorreu no segundo semestre do ano, por força da crescente instabilidade internacional, devido à guerra iminente no Médio Oriente com forte impacto sobre os preços do petróleo e sérias divergências no contexto das Nações Unidas e consequente redução da confiança dos investidores um pouco por todo o mundo.⁷

⁷A análise da evolução dos índices internacionais realizada nesta secção baseou-se também nos Relatórios de Gestão e Contas Consolidadas da BVLP e nos Relatórios Anuais publicados pela CMVM.

Análise estatística dos índices

Nesta subsecção é apresentada a análise estatística das taxas de rendibilidade dos índices em estudo. A respectiva taxa de rendibilidade foi calculada através da expressão

$$R_t = \ln(P_t + D_t) - \ln P_{t-1}, \quad (3.2)$$

onde R_t é a taxa de rendibilidade no dia t , P_t e P_{t-1} são as cotações de fecho das sucessões cronológicas ajustadas para os momentos t e $t - 1$ e D_t são os dividendos distribuídos no momento t .

Foi realizado o teste *ADF* para as sucessões cronológicas em níveis e primeiras diferenças (Tabelas 3.10 e 3.11).

<i>Índices</i>	<i>Estatística ADF</i>	<i>Estatística com Tendencia</i>	<i>Lags</i>
Níveis			
ASE	-1,469	-1,161	1
CAC 40	-1,466	-0,986	1
DAX 30	-1,552	-0,396	2
FTSE 100	-1,445	-0,357	3
IBEX 35	-1,555	-0,901	0
PSI 20	-1,432	-0,825	1
S&P 500	-1,384	-0,373	0

Tabela 3.10: Resultados do teste *ADF* para as sucessões cronológicas dos índices em níveis.

As estatísticas do teste *ADF* em níveis referentes às cotações dos índices bolsistas em estudo revelam que a hipótese de existência de uma raiz unitária não é rejeitada em nenhum dos casos. Este facto poderá ser um indicador de que os preços dos índices seguem um passeio aleatório, o que está de acordo com a teoria financeira baseada na hipótese de eficiência do mercado.

De acordo com os resultados apresentados na Tabela 3.11, as estatísticas dos teste *ADF* para as primeiras diferenças dos preços dos índices revelam que a hipótese nula de que existe uma raiz unitária deve ser rejeitada, indicando que as sucessões cronológicas em estudo são todas integradas de primeira ordem $I(1)$.

A Tabela 3.12 apresenta a análise estatística realizada às taxas de rendibilidade diárias dos índices bolsistas em estudo e revela que para o período em análise todos os índices apresentaram uma taxa de rendibilidade média positiva.

<i>Índices</i>	<i>Estatística ADF</i>	<i>Estatística com Tendencia</i>	<i>Lags</i>
Primeiras Diferenças			
ASE	-44.015**	-44.023**	0
CAC 40	-49.879**	-49.892**	0
DAX 30	-37.397**	-37.457**	1
FTSE 100	-32.978**	-33.036**	2
IBEX 35	-48.728**	-48.749**	0
PSI 20	-44.414**	-44.447**	0
S&P 500	-50.905**	-50.935**	0

Tabela 3.11: Resultados do teste *ADF* para as primeiras diferenças das sucessões cronológicas dos índices. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

Relativamente à distribuição de probabilidade seguida pelas observações empíricas, a estatística do teste *Jarque-Bera* rejeita a possibilidade de esta ser normal para todos os índices, o que também é evidenciado pelos valores de assimetria e curtose que assumem valores diferentes dos padronizados para a distribuição normal. De realçar também que os índices DAX 30, IBEX 35 e S&P 500 não apresentam sinais de autorregressão estatisticamente significativa, de acordo com o teste de *Ljung-Box*. O índice bolsista português PSI 20 é simultaneamente o que apresenta sinais mais fortes da presença de autocorrelação e afastamento face à distribuição normal, factos que poderão estar interligados. Os índices PSI 20 e S&P 500 são os que apresentam maiores níveis de leptocurtose, o que pode ser sinal, de acordo com vários autores [e.g. Cont (2001)], de dependência temporal não-linear e maior probabilidade de ocorrência de eventos extremos. Por fim, há que evidenciar que para todos os índices é rejeitada a hipótese de homocedasticidade. Este facto poderá estar relacionado com o chamado *leverage effect*, ou seja a correlação negativa entre as taxas de rendibilidade e a volatilidade. De acordo com o *leverage effect* em períodos de “alta” nas taxas de rendibilidade a volatilidade tende a ser menor que em períodos em que as taxas de rendibilidade estão em queda.

3.2.3 Indicadores e variáveis macroeconómicos e financeiros

Para a análise da relação entre o comportamento do mercado bolsista de acções português e factores macroeconómicos e financeiros, foram seleccionados alguns indicadores com base na literatura, estando a explicação da selecção e forma de cálculo da variáveis detalhadamente explicada no Capítulo 6. Com vista a uniformizar a terminologia utilizada considerar-se-ão indicadores as sucessões cronológicas originais retiradas do mercado e as variáveis serão consideradas sucessões cronológicas

<i>Estatísticas</i>	<i>ASE</i>	<i>CAC 40</i>	<i>DAX 30</i>	<i>FTSE 100</i>	<i>IBEX 35</i>	<i>PSI 20.</i>	<i>S&P 500</i>
Média	0,00022	0,00015	0,0002	0,00015	0,00024	0,00016	0,00027
Mediana	0,000	0,000	0,0003	0,000	0,000	0,000	0,0001
Máximo	0,098	0,0668	0,0691	0,0502	0,0747	0,0674	0,0557
Mínimo	-0,0956	-0,0599	-0,0719	-0,0532	-0,0643	-0,0852	-0,0711
Desvio-padrão	0,0182	0,0137	0,0149	0,0109	0,0143	0,0118	0,0109
Assimetria	-0,0543	-0,0109	-0,1567	-0,1355	-0,0555	-0,2342	-0,1275
Curtose	6,0869	5,0300	5,3581	5,0939	4,9430	6,9747	6,9887
Jarque-Bera	1031,17**	445,46**	611,62**	481,83**	409,39**	1731,24**	1726,60**
Prob.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
LBQ(10)	37,197**	24,208*	17,430	45,716**	14,757	54,410**	16,782
ρ_1	0,108**	0,013	-0,025	0,022	0,032	0,129**	0,001
ρ_2	-0,006**	-0,028	-0,031	-0,058**	-0,035	0,039**	-0,025
ρ_3	-0,023**	-0,071**	-0,021	-0,084**	-0,047**	0,005**	-0,046
ARCH(p)LM	106,963**	90,626**	114,809**	107,373**	48,638**	48,835**	75,464**
p n. lags	2	2	3	4	2	3	3
Observações	2594	2594	2594	2594	2594	2594	2594

Tabela 3.12: Estatísticas de sumários para as taxas de rendibilidade diárias dos índices bolsistas.

**Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

fruto de algumas transformações nos factores anteriormente referidos.

Indicadores macroeconómicos e financeiros

Os indicadores considerados no presente estudo são o índice *DataStream* do mercado bolsista português (*PI*), a taxa de juro Lisbor a 3 meses (*Lisbor3M*), a taxa de rendibilidade de uma *swap* a 10 anos (*Swap10*), a *dividend yield* do índice bolsista em causa (*DY*) e o respectivo *earnings price ratio* (*EPR*), o índice de preços ao consumidor (*IPC*), o índice de produção industrial (*IPI*), a taxa de desemprego (*TD*) e o preço *spot* do petróleo no mercado americano (*OIL*) para o período entre Outubro de 1993 a Outubro de 2003, o que corresponde a 120 observações por indicador.⁸ Todos estes indicadores têm periodicidade mensal, tendo sido utilizada a observação referente ao último dia de cada mês. A escolha de tal período prende-se com algumas condicionantes do mercado

⁸A descrição das fontes dos dados enunciados e sua explicação mais detalhada encontra-se na Tabela 3.11 do Capítulo 6.

português, não permitindo a obtenção de amostras com maior número de observações.

Na Figura 3.11 é apresentada a evolução temporal dos indicadores em análise.

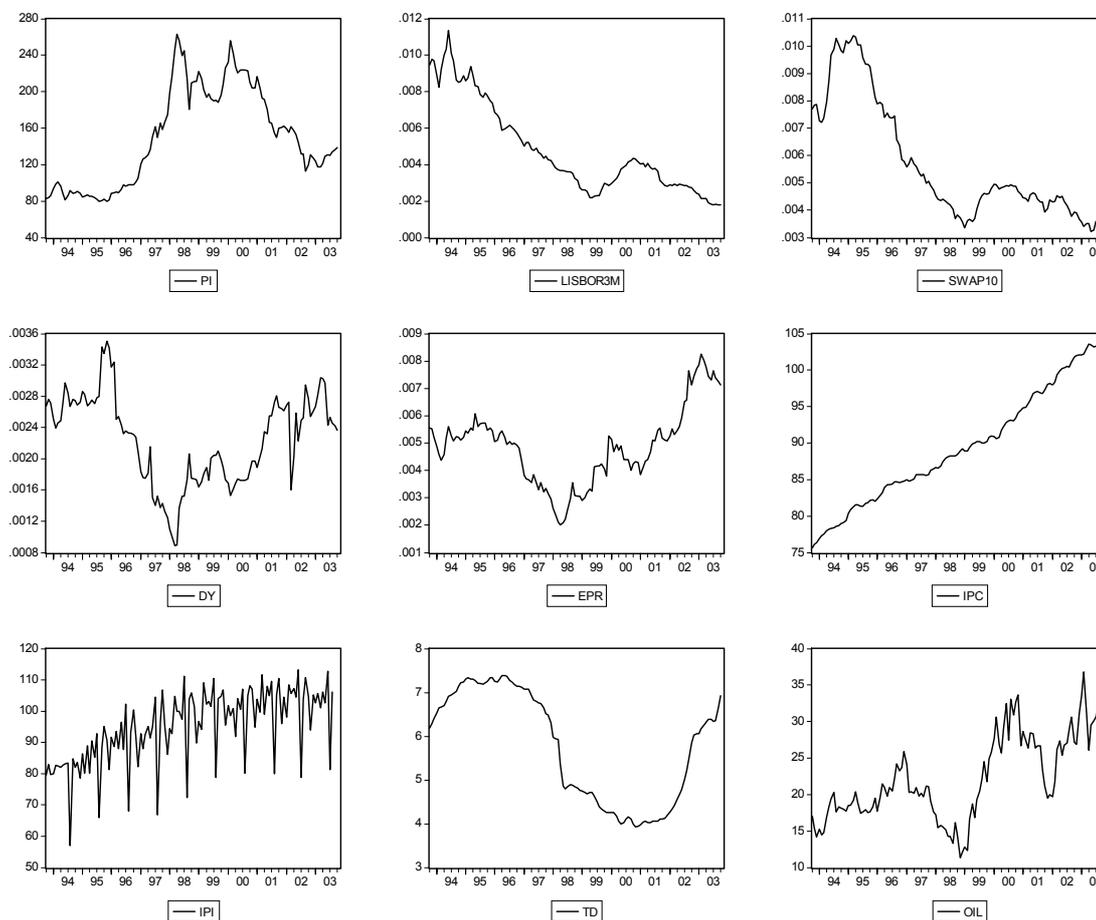


Figura 3.11: Evolução temporal dos indicadores no período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003.

Pela análise da Figura 3.11 é de salientar o comportamento do índice (PI), que registou um forte crescimento até Outubro de 1998, registando a partir de então uma forte quebra seguida de um período de decréscimo quase contínuo. As taxas de juro sem risco apresentam comportamentos algo semelhantes entre si, sendo de registar uma quebra nestas mesmas taxas a partir de meados de 1995. Estas taxas de juro encontraram os seus pontos mínimos nos finais de 1998, data a partir da qual passaram a ser reguladas pelo Banco Central Europeu e deixaram de poder ser controladas pelos respectivos países.

A *dividend yield* e o *earnings price ratio* apresentam fortes quebras nos primeiros meses de 1998,

o que se ficou a dever essencialmente à forte subida das cotações neste período e não propriamente à queda dos resultados distribuídos e apresentados pelas empresas. De realçar que a distribuição de dividendos tem sofrido fortes quedas a partir dos finais de 1998, especialmente nos inícios de 2002, ano em que se registou um desaceleramento económico generalizado, que levou à perda de poder de compra por parte dos investidores e dificuldades financeiras nas empresas. Tal desaceleramento é também visível na evolução da taxa de desemprego (TD) que sofreu um forte incremento em 2002, consequência do fecho de algumas empresas e da política de despedimentos de outras como via de diminuição dos custos.

O índice de preços no consumidor apresenta um comportamento crescente ao longo de todo o período em análise, não registando variações abruptas. Já o índice de produção industrial apresenta fortes sinais de sazonalidade, com quebras acentuadas no mês de Agosto de cada ano, mês em que encerram muitas empresas para férias dos seus trabalhadores, mas de um modo geral apresenta uma tendência de crescimento no período em análise.

O preço do petróleo é incluído como indicador referente à envolvente económica internacional. Verifica-se que no período em análise o preço do petróleo apresenta o seu valor mínimo em meados de 1998, seguido de um forte incremento até finais de 2001. A subida do preço do petróleo teve como principais causas a instabilidade política e económica a nível internacional.

De um modo geral, as sucessões cronológicas relativas aos indicadores parecem seguir um passeio aleatório com a existência de uma tendência para algumas, nomeadamente as sucessões *Lisbor3M*, *Swap10* e *IPC*. A inferência convencional só é válida quando as sucessões cronológicas são estacionárias, se tal não se verificar poderão existir regressões espúrias, caracterizadas por um coeficiente de determinação muito elevado, valores dos parâmetros significativos, levando a crer que existe uma forte relação entre as variáveis, quando tal pode não ser totalmente verdade. De modo a verificar se as sucessões em causa são estacionárias foi utilizado o teste *ADF*, tendo a evidência empírica mostrado que nenhuma das sucessões originais pode ser considerada estacionária. Os resultados constam da Tabela 3.13.

A Tabela 3.13 demonstra que os indicadores tidos em conta, são sucessões integradas de ordem 1, isto é são sucessões cronológicas não estacionárias, cujas primeiras diferenças já revelam sinais de estacionariedade, ou seja não se rejeita a hipótese de que as sucessões cronológicas seguem um passeio aleatório e as respectivas taxas de rendibilidade são estacionárias, o que está de acordo com a teoria financeira e a hipótese de eficiência dos mercados. Neste sentido, os indicadores em causa poderão ser alvo de testes de cointegração, com vista a avaliar a possibilidade de relações de longo prazo entre cada uma das variáveis e o preços do índice (P_t).

A análise estatística efectuada aos indicadores em estudo consta nas Tabelas 3.14 e 3.15. De um

	<i>Estatística ADF</i>	<i>Estatística com Tendência</i>	<i>Lags</i>
Níveis			
<i>PI</i>	-1,5595	-1,2064	1
<i>Lisbor3M</i>	-2,7114	-1,8444	6
<i>Swap10</i>	-0,8463	-2,0183	3
<i>DY</i>	-1,9683	-1,9084	1
<i>EPR</i>	-0,7117	-1,2658	0
<i>IPC</i>	0,8039	-0,8942	3
<i>IPI</i>	-2,1363	-4,2019**	3
<i>TD</i>	-1,4063	-0,1481	3
<i>OIL</i>	-1,8941	-2,8616	0
Primeiras Diferenças			
<i>PI</i>	-8,5838**	-8,6458**	0
<i>Lisbor3M</i>	-5,2900**	-5,6729**	5
<i>Swap10</i>	-5,0300**	-5,0111**	2
<i>DY</i>	-12,1172**	-12,0924**	0
<i>EPR</i>	-11,2159**	-11,3666**	0
<i>IPC</i>	-8,2746**	-8,3192**	2
<i>IPI</i>	-15,8550**	-15,8222**	2
<i>TD</i>	-2,8066*	-3,1123	2
<i>OIL</i>	-12,1732**	-12,1224**	0

Tabela 3.13: Resultados do teste *ADF* aos indicadores, para o período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

modo geral é de realçar o facto de todos os indicadores apresentarem fortes sinais de autocorrelação e heterocedasticidade, assim como ser rejeitada a hipótese de que as distribuições empíricas podem ser representadas pela distribuição normal, excepto para os indicadores *DY* e *EPR*.

<i>Estatísticas</i>	<i>PI</i>	<i>Lisbor3M</i>	<i>Swap10</i>	<i>DY</i>	<i>EPR</i>
Média	150,1002	0,0048	0,0057	0,00224	0,00481
Mediana	149,8350	0,0039	0,0048	0,0023	0,0050
Máximo	262,7200	0,0113	0,0103	0,0035	0,0083
Mínimo	79,8700	0,0017	0,0032	0,0009	0,0020
Desvio-padrão	53,9818	0,0024	0,0021	0,0006	0,0014
Assimetria	0,2769	0,8576	0,9378	-0,147	0,3276
Curtose	1,7782	2,4901	2,4896	2,3809	3,0731
Jarque-Bera	8,997*	16,011**	18,895**	2,3274	2,1533
Prob.	0,011	0,000	0,000	0,312	0,340
LBQ(10)	921,12**	914,69**	1004,30**	644,31**	747,56**
ρ_1	0,977**	0,972**	0,986**	0,924**	0,959**
ρ_2	0,947**	0,939**	0,966**	0,865**	0,920**
ρ_3	0,915**	0,905**	0,943**	0,820**	0,870**
ARCH(<i>p</i>)LM	476,071**	899,612**	1313,427**	262,72**	985,30**
<i>p</i> n. lags	2	2	2	1	1
Observações	120	120	120	120	120

Tabela 3.14: Análise estatística dos indicadores *PI*, *BT*, *OTL*, *DY* e *EPR* no período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

A presença de uma forte autocorrelação persistente é indício também da não estacionariedade das sucessões cronológicas em estudo. Excepto o indicador *IPI*, todos os outros indicadores apresentam evidência estatística de ausência de homocedasticidade.

Análise das variáveis económicas

As variáveis económicas e sua respectiva forma de cálculo são apresentadas na Tabela 3.16. Estas variáveis são resultado dos indicadores previamente analisados e constituem na sua maioria, as variáveis correntemente utilizadas por outros autores em estudos de natureza semelhante.

Todas as variáveis enunciadas foram analisadas quanto à não estacionariedade através do teste

<i>Estatísticas</i>	<i>IPC</i>	<i>IPI</i>	<i>TD</i>	<i>OIL</i>
Média	89,2557	95,0041	5,7486	22,01983
Mediana	88,3629	96,2005	6,0500	20,4650
Máximo	103,6000	113,2531	7,3900	36,7600
Mínimo	75,6007	56,9686	3,9200	11,3700
Desvio-padrão	7,7482	11,4969	1,2707	5,6725
Assimetria	0,2369	-0,6629	-0,1339	0,3894
Curtose	2,028	3,0112	1,3518	2,3011
Jarque-Bera	5,837	8,789*	14,0578**	5,4752
Prob.	0,054	0,012	0,000	0,064
LBQ(10)	918,90**	208,39**	1064,8*****	609,45**
ρ_1	0,972**	0,278**	0,992**	0,921**
ρ_2	0,943**	0,395**	0,979**	0,857**
ρ_3	0,915**	0,354**	0,966**	0,808**
ARCH(p)LM	9505,625**	0,0833	1725,031**	50,230**
p n. lags	2	2	3	2
Observações	120	120	120	120

Tabela 3.15: Análise estatística dos indicadores *IPC*, *IPI*, *TD* e *OIL* no período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

Variável	Definição	
ER_t	Excess return mensal	$\frac{PI_t - PI_{t-1} + D_t}{PI_{t-1}} - Lisbor3M_{t-1}$
$\Delta Lisbor3M_t$	Taxa de cresc. da taxa de juro s/ risco a curto prazo	$\ln(Lisbor3M_t) - \ln(Lisbor3M_{t-1})$
$\Delta Swap10_t$	Taxa de cresc. da taxa de juro s/ risco a longo prazo	$\ln(Swap10_t) - \ln(Swap10_{t-1})$
ΔDY_t	Taxa de cresc. da dividend yield	$\ln(DY_t) - \ln(DY_{t-1})$
ΔEPR_t	Taxa de cresc. do earnings price ratio	$\ln(EPR_t) - \ln(EPR_{t-1})$
ΔIPC_t	Taxa de cresc. do IPC	$\ln(IPC_t) - \ln(IPC_{t-1})$
ΔPIM_t	Taxa de cresc. da produção industrial	$\ln(IPI_t) - \ln(IPI_{t-1})$
ΔPIA_t	Taxa de cresc. da produção industrial homóloga	$\ln(IPI_t) - \ln(IPI_{t-12})$
ΔTD_t	Taxa de cresc. da taxa de desemprego	$\ln(TD_t) - \ln(TD_{t-1})$
ΔOIL_t	Variação do preço do petróleo	$\ln(OIL_t) - \ln(OIL_{t-1})$

Tabela 3.16: Variáveis e respectiva definição a utilizar na análise da dependência do mercado bolsista português face a factores económicos e financeiros.

de raízes unitárias *ADF*, tendo os resultados sido muito semelhantes aos apresentados para as primeiras diferenças dos indicadores, como seria de esperar (Tabela 3.13).⁹

A Figura 3.12 apresenta a evolução temporal das variáveis em estudo e pela análise da mesma verifica-se que as variáveis $\Delta Lisbor3M$, $\Delta Swap10$, ΔIPC , ΔPIM , ΔPIA e ΔTD parecem indicar a presença de forte autocorrelação, sendo de realçar que as variáveis ΔIPC_t e ΔPIM_t apresentam também sinais de sazonalidade.

Para comprovar tais suspeitas foi realizada a análise estatística destas variáveis e efectuados os testes *Ljung-Box* e *ARCH LM* (vide Tabelas 3.17 e 3.18).

A análise estatística realizada revelou que efectivamente $\Delta Lisbor3M$, $\Delta Swap10$, ΔIPC , ΔPIM , ΔPIA e ΔTD apresentam fortes sinais de autocorrelação, sendo por isso necessário proceder à sua filtragem. É de destacar que a maioria das variáveis são normalmente distribuídas, uma vez que não é rejeitada a hipótese nula do teste *Jarque-Bera* de que se está perante uma distribuição normal para as variáveis ER , $\Delta Lisbor3M$, $\Delta Swap10$, ΔIPC , ΔPI e ΔOIL . Relativamente ao teste de homocedasticidade, o teste *ARCH(p) LM* revelou que apenas as sucessões ER , ΔPIM e ΔTD apresentam sinais de heterocedasticidade.

Dada a presença de autocorrelação significativa em algumas variáveis, procedeu-se à filtragem das mesmas com vista a obter novas variáveis (aqui chamadas de inovações) que apresentassem

⁹Foi também utilizado o teste *Kwiatkowski, Phillips, Schmidt e Shin (KPSS)*, cujos resultados não diferiram dos resultados do teste *ADF*.

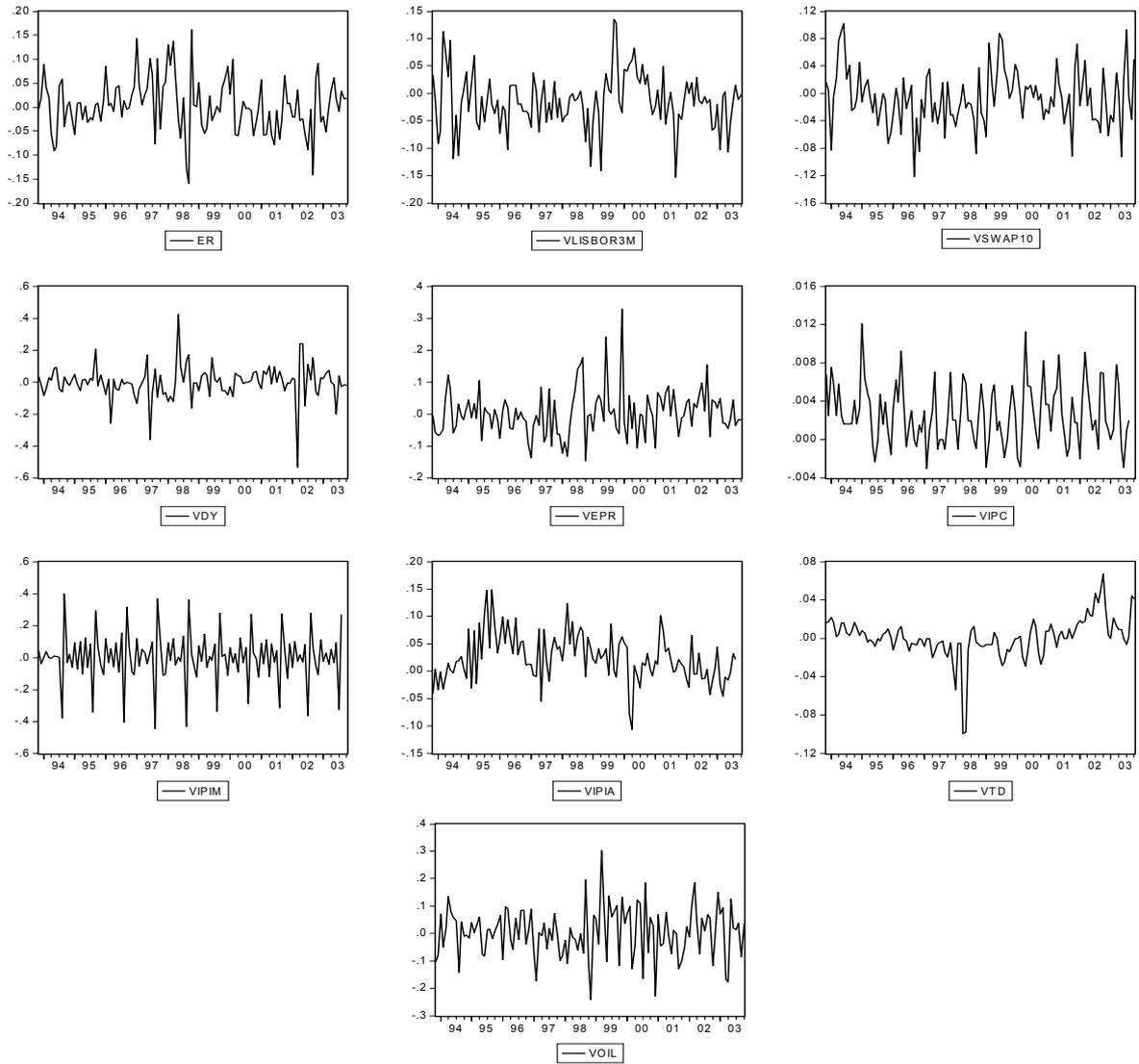


Figura 3.12: Evolução temporal das variáveis no período entre Novembro de 1993 e Outubro de 2003.

<i>Estatísticas</i>	<i>ER</i>	$\Delta Lisbor3M$	$\Delta Swap10$	ΔDY	ΔEPR
Média	0,0007	-0,0139	-0,0006	-0,0007	0,0024
Mediana	-0,0014	-0,149	-0,0069	0,0000	-0,0022
Máximo	0,1590	0,1353	0,1020	0,4238	0,3265
Mínimo	-0,1618	-0,1536	-0,1218	-0,5325	-0,1468
Desvio-padrão	0,0565	0,0511	0,0413	0,1062	0,0730
Assimetria	0,1436	0,0858	0,1793	-0,7306	1,0384
Curtose	3,5651	3,9304	3,4363	10,1635	6,0405
Jarque-Bera	1,976	4,401	1,568	26,270**	66,660**
Prob.	0,372	0,111	0,457	0,000	0,000
LBQ(10)	14,378	16,963	14,039	9,732	7,684
ρ_1	0,219*	0,268**	0,225*	-0,070	0,057
ρ_2	0,060*	0,075**	0,064*	-0,121	0,057
ρ_3	0,105*	0,135**	0,129*	0,127	0,094
ARCH(p)LM	14,259**	2,862	2,177	1,564	0,188
p n. lags	1	1	1	1	1
Observações	118	118	118	118	118

Tabela 3.17: Análise estatística das variáveis RM , $\Delta Lisbor3M$, $\Delta Swap10$, ΔDY e ΔEPR no período entre Novembro de 1993 e Outubro de 2003. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

<i>Estatísticas</i>	ΔIPC	ΔPIM	ΔPIA	ΔTD	ΔOIL
Média	0,0026	0,0025	0,0248	0,0002	0,0055
Mediana	0,0020	0,0060	0,0210	0,0000	0,0130
Máximo	0,0120	0,3971	0,1490	0,0673	0,3026
Mínimo	-0,0030	-0,4475	-0,1063	-0,0994	-0,2418
Desvio-padrão	0,0031	0,1568	0,0436	0,0207	0,0911
Assimetria	0,4953	-0,4456	0,2455	-1,4562	-0,0760
Curtose	2,9877	4,3916	3,4933	11,0577	3,4741
Jarque-Bera	4,825	13,426**	2,381	372,767**	1,219
Prob.	0,090	0,001	0,304	0,000	0,544
LBQ(10)	61,859**	105,34**	75,591**	154,00**	22,271*
ρ_1	0,326**	-0,570**	0,299**	0,663**	-0,065
ρ_2	-0,169**	0,075**	0,382**	0,286**	-0,167
ρ_3	-0,295**	-0,150**	0,351**	0,296**	0,161
ARCH(p)LM	1,502	12,580**	2,960	22,440**	0,753
p n. lags	1	4	1	4	1
Observações	118	118	118	118	118

Tabela 3.18: Análise estatística das variáveis ΔIPC , ΔPIM , ΔPIA , ΔTD e ΔOIL no período entre Novembro de 1993 e Outubro de 2003. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

somente as alterações não esperadas pelo investidor.¹⁰ Neste contexto, as inovações foram obtidas conforme consta na Tabela 3.19.

<i>Nova variável</i>	<i>Processo</i>
<i>inovLisbor</i>	<i>ARMA(1, 0) de $\Delta Lisbor3M$</i>
<i>inovSwap</i>	<i>ARMA(1, 0) de $\Delta Swap10$</i>
<i>inovIPC</i>	<i>ARMA(3, 1) de $\Delta IPCSA$</i> <i>$\Delta IPCSA$ é o ajustamento sazonal de ΔIPC</i>
<i>inovPIM</i>	<i>ARMA(2, 0) de $\Delta PIMSA$</i> <i>$\Delta PIMSA$ é o ajustamento sazonal de ΔPIM</i>
<i>inovPIA</i>	<i>ARMA(1, 1) de ΔPIA</i>
<i>inovTD</i>	<i>ARMA(1, 1) de ΔTD</i>

Tabela 3.19: Processo de filtragem para a obtenção de inovações. O ajustamento sazonal foi realizado a partir do método de ajustamento de médias móveis.

As análises estatísticas das novas variáveis filtradas constam na Tabela 3.20, onde se pode verificar que as novas variáveis já não apresentam sinais de autocorrelação significativa, tendo sido também removidos os indícios de heterocedasticidade para a maioria das variáveis em estudo.

A Figura 3.13 onde é apresentada a evolução temporal para o período entre Fevereiro de 1994 a Outubro de 2003 para as variáveis filtradas mostra que o comportamento destas é muito parecido com um processo ruído branco. São de excluir deste tipo de comportamento as variáveis *inovPIM* e *inovPIA* que apresentam sinais de heterocedasticidade, verificando-se que as variações da primeira são mais acentuadas a partir de meados de 2002 e a segunda parece apresentar *clusters* de volatilidade. Os testes à normalidade realizados indicaram que apenas as variáveis *inovSwap* e *inovPIA* podem ser representadas pela curva de Gauss. As restantes variáveis apresentam sinais de leptocurtose, revelando a existência de *fat tails*.

A Tabela 3.21 apresenta a matriz de correlações, mais concretamente o coeficiente de correlação de Pearson, entre as variáveis para o período em análise.

As correlações com maior significância estatística encontram-se entre os seguintes pares de variáveis: *ER* e ΔDY , *ER* e ΔEPR , *ER* e *inovTD*, *ER* e ΔOIL , *inovLisbor* e *inovSwap*, ΔDY e ΔEPR , *inovPIM* e *inovPIA*. Os resultados obtidos não são surpreendentes, uma vez que é normal aceitar a ideia de que as taxas de rendibilidade do mercado bolsista de acções estão fortemente

¹⁰De acordo com alguns autores [e.g. Chen *et al.* (1986); McQueen *et al.* (1993)] apenas deverão ser tidas em conta as inovações, ou mudanças não antecipadas pelo investidor, neste tipo de estudo.

<i>Estatísticas</i>	<i>inovLisbor</i>	<i>inovSwap</i>	<i>inovIPC</i>	<i>inovPIM</i>	<i>inovPIA</i>	<i>inovTD</i>
Média	-0,0091	-0,0044	-0,0001	0,0124	0,0049	-0,0001
Mediana	-0,0034	-0,0090	-0,0002	0,0146	0,0030	-0,0002
Máximo	0,1354	0,0895	0,0089	0,1900	0,1040	0,0367
Mínimo	-0,1496	-0,1249	-0,0052	-0,2939	-0,1134	-0,0766
Desvio-padrão	0,0493	0,0399	0,0024	0,0616	0,0391	0,0134
Assimetria	-0,1869	0,0566	0,7115	-1,5743	0,0358	-1,3826
Curtose	4,096	3,280	4,273	10,245	3,783	11,445
Jarque-Bera	6,428*	0,437	17,465**	299,041**	2,966	378,390**
Prob.	0,040	0,804	0,000	0,000	0,227	0,000
LBQ(10)	7,485	5,967	16,575	19,137*	15,483	13,828
ρ_1	-0,054	-0,023	-0,065	-0,067	-0,109	-0,007
ρ_2	-0,033	-0,014	0,081	-0,127	0,064	-0,054
ρ_3	0,115	0,096	-0,127	-0,046	0,079	0,083
ARCH(p)LM	0,143	0,299	0,443	4,003*	9,550**	0,941
p n. lags	1	1	1	2	1	1
Observações	115	115	115	115	115	115

Tabela 3.20: Análise estatística das variáveis *inovLisbor*, *inovSwap*, *inovIPC*, *inovPIM*, *inovPIA* e *inovTD* no período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003. Os processos de filtragem foram seleccionadas de accordos com os critérios de informação *AIC* e *SIC*. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

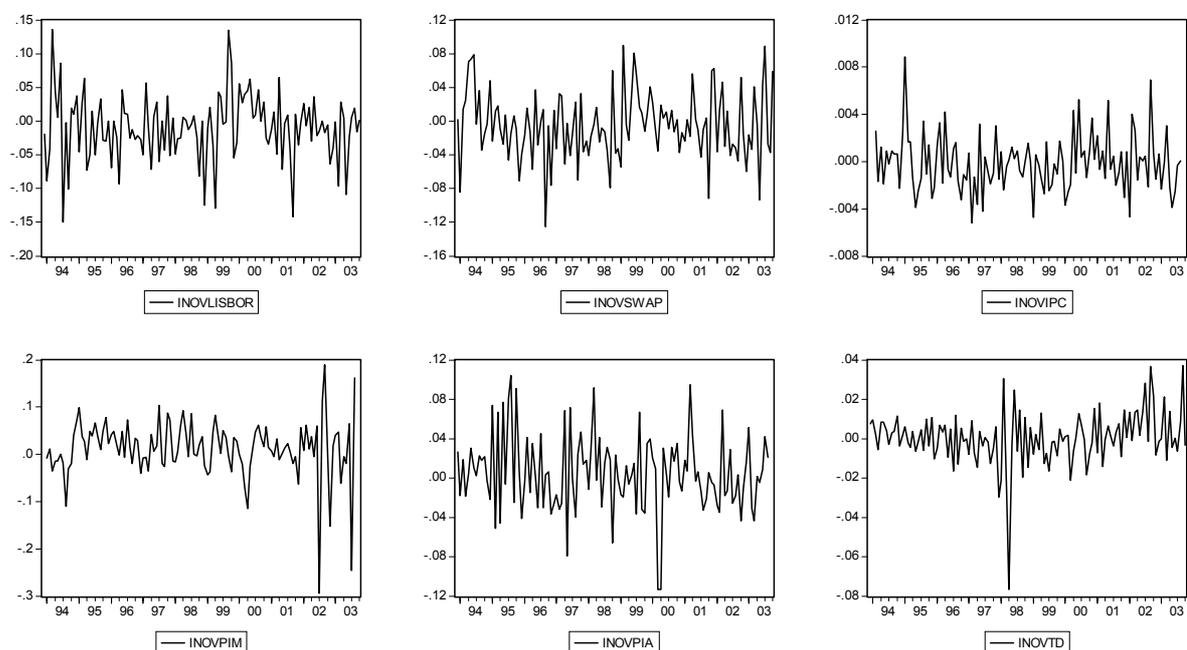


Figura 3.13: Evolução temporal das variáveis filtradas (inovações) no período entre Fevereiro de 1994 e Outubro de 2003.

	ER	$inov$ $Lisbor$	$inov$ $Swap$	ΔDY	ΔEPR	$inov$ IPC	$inov$ PIM	$inov$ PIA	$inov$ TD
$inovLisbor$	-0,104								
$inovSwap$	-0,016	0,366**							
ΔDY	-0,592**	0,086	-0,027						
ΔEPR	-0,666**	0,054	0,101	0,461**					
$inovIPC$	-0,181	-0,057	0,097	0,124	0,112				
$inovPIM$	-0,025	-0,065	-0,155	-0,021	0,011	0,153			
$inovPIA$	0,011	-0,078	-0,069	-0,139	0,077	0,057	0,257**		
$inovTD$	-0,247**	-0,121	0,031	0,066	0,163	0,120	-0,036	-0,099	
ΔOIL	-0,198**	-0,036	-0,025	0,010	0,221*	0,074	0,129	0,180	-0,018

Tabela 3.21: Matriz de correlações das variáveis. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

relacionadas com algumas variáveis macroeconómicas e financeiras, nomeadamente a DY , o EPR , a taxa de desemprego e a variação do preço do petróleo. Por outro lado, é também natural que as taxas de juro de curto e de longo prazo exibam uma forte relação entre si, mais concretamente uma relação positiva. Dado que a DY e o EPR são calculados com base no mesmo denominador, estando os seus numeradores (dividendos distribuídos e resultados por acção, respectivamente) muito relacionados, é perfeitamente natural que as variáveis ΔDY e ΔEPR exibam uma correlação positiva e estatisticamente significativa. Por fim, a existência de correlação significativa entre as variáveis $inovPIM$ e $inovPIA$ também é compreensível uma vez que ambas são originárias de uma sucessão cronológica comum, o IPI (índice de produção industrial). A presença de correlação significativa entre variáveis explicativas pode originar problemas de multicolinearidade, sendo por isso necessário tomar as precauções usuais aquando do uso de modelos com inclusão simultânea de variáveis explicativas correlacionadas.

3.3 Síntese do capítulo

Neste capítulo foram descritos e analisados estatisticamente os dados a utilizar na presente tese. Numa primeira fase foi apresentada a organização e modo de funcionamento do mercado bolsista português que é um dos principais objecto de estudo desta tese.

Consoante as diferentes aplicações e objectivos deste trabalho, foram seleccionadas amostras correspondentes. Foram analisados estatisticamente e quanto à evolução temporal vinte e três títulos continuamente cotados na Euronext Lisboa no período entre 28/06/1995 a 31/12/2002, sete índices bolsistas internacionais (ASE, CAC 40, DAX 30, FTSE 100, IBEX 35, PSI 20 e S&P 500) para o período entre 4/01/1993 e 31/12/2002 e um conjunto de variáveis macroeconómicas e financeiras portuguesas com periodicidade mensal para o período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003. Foi também explicada a finalidade de cada grupo de dados para o trabalho de investigação vigente.

No âmbito da análise estatística foram aplicados os testes de raízes unitárias ADF e $KPSS$, o teste de $Ljung-Box$ à ausência de autocorrelação linear, o teste de Engle ($ARCH LM$) à homocedasticidade, o teste $Jarque-Bera$ à distribuição normal das observações. Foram calculadas algumas das principais medidas de estatística descritiva, nomeadamente a média, a mediana, o desvio-padrão, a assimetria e a curtose com o objectivo de melhor caracterizar as sucessões cronológicas em estudo e identificar possíveis factos estilizados.

Os resultados indicaram que a maioria dos dados analisados não segue a distribuição normal, evidenciando indícios de leptocurtose e assimetria. De referir que as hipóteses de ausência

de autocorrelação e de homocedasticidade foram rejeitadas para a maioria dos testes efectuados. Verifica-se que os pressupostos base de alguns modelos tradicionais utilizados em finanças, não são devidamente respeitados empiricamente.

Capítulo 4

Entropia: medida de incerteza aplicada aos mercados financeiros

A assunção do risco e da incerteza em contexto de investimento em mercados financeiros é de vital importância, ainda que seja relativamente recente a sua história na economia. A distinção entre estes dois conceitos e a sua introdução clara em economia foi feita por Knight em 1921 e a incorporação formal destes conceitos na teoria económica foi efectuada em 1944 por John von Neumann e Oskar Morgenstein.

O investidor não se interessa apenas pela rentabilidade esperada, preocupando-se também com o risco assumido no investimento e a incerteza que tem acerca do mesmo. Uma das medidas mais usadas para medir o risco e a incerteza é a variância e/ou desvio-padrão. Neste sentido, interessa perguntar: será o desvio-padrão uma boa medida para o risco e para a incerteza? Quais as potencialidades da entropia neste contexto? Será que a entropia pode apresentar vantagens como medida de incerteza e simultaneamente dar resposta a algumas das principais premissas inerentes ao investimento em acções, nomeadamente o efeito de diversificação?

Neste capítulo pretende-se apresentar a entropia como medida de incerteza para sucessões cronológicas financeiras e comparar o seu comportamento com o desvio-padrão. Há que realçar que, neste estudo a noção de incerteza está intimamente ligada à maior ou menor dificuldade em prever um determinado evento futuro, enquanto que o risco é mais utilizado no sentido de avaliar possíveis perdas ou ganhos futuros.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na Secção 4.1 é apresentado o enquadramento teórico do tema subjacente. A Secção 4.2 apresenta uma análise comparativa entre o comportamento da entropia e do desvio-padrão como medidas de incerteza no mercado bolsista de acções. A Secção 4.3 consiste na análise da relação e nível de dependência global entre cada um dos títulos e

o índice PSI 20, sendo comparados os resultados obtidos com a entropia e suas variantes (entropia conjunta, entropia condicionada e informação mútua) e os resultados obtidos com o modelo *CAPM*. Por fim a Secção 4.4 apresenta as principais conclusões e a síntese deste capítulo.

4.1 Enquadramento

O modo como são encarados o risco e a incerteza no processo de tomada de decisão reveste-se da maior importância, dada a sua capacidade de influenciar o investidor a enveredar ou não por um determinado negócio/investimento.

Muitas vezes existe uma tendência natural para considerar o risco e a incerteza sinónimos, o que não sendo verdade, é conveniente estabelecer as diferenças que existem entre ambos. A ideia do risco e da incerteza em contexto económico e a distinção entre estes dois conceitos foi preconizada por Knight (1921), conforme anteriormente referido. De acordo com este autor, tanto o risco como a incerteza estão associados a um conhecimento imperfeito, existindo uma diferença conceptual entre eles. Quando se está perante uma situação de risco, não se sabe com certeza qual o resultado de uma qualquer decisão tomada, contudo é conhecida a distribuição de probabilidade do problema, ou seja, sabe-se qual a probabilidade de ocorrência de cada um dos possíveis eventos resultantes dessa decisão. Além disso a noção de risco está associada à quantificação de perdas e ganhos, atendendo-se por isso ao valor concreto das variáveis em causa. Numa situação de incerteza, não se tem qualquer conhecimento objectivo da distribuição de probabilidades associadas relativamente aos possíveis resultados futuros.¹ Como exemplo deste tipo de situação poderá evidenciar-se o investimento em acções, uma vez que o investidor está perante uma situação onde as experiências não podem ser repetidas com as mesmas condições, impossibilitando assim a determinação exacta da distribuição de probabilidades que este segue [Knight (1921)]. Esta ideia foi reforçada por Keynes (1937), que escreveu o seguinte:

¹Apesar de tudo, alguns economistas não concordaram com a distinção de Knight (1921), considerando que o risco e a incerteza eram uma e a mesma coisa. Um dos principais argumentos é de que o investidor (ou agente) **não determina** as probabilidades e não o facto de que esse agente **não consegue determiná-las**. A incerteza é por esta via, considerada um problema epistemológico e não ontológico, é um problema do conhecimento das probabilidades relevantes e não da sua existência. Noutro sentido, existe também a vertente que considera que não existem probabilidades a serem conhecidas, uma vez que probabilidades não passam de crenças e meras expressões subjectivas de conhecimento e podem não ter relacionamento directo com a verdadeira aleatoriedade de um determinado sistema.

Por outro lado, a grande maioria dos economistas pós-Keynesianos (por exemplo Davidson em 1982 e 1991, consideram que os argumentos de Knight (1921) são cruciais, especialmente a sua definição de incerteza. Já a definição de risco de Knight (1921) é um pouco mais problemática, dado que só pode ser usada em situações muito especiais, onde seja possível realizar e repetir experiências.

“By ‘uncertain’ knowledge, let me explain, I do not mean merely to distinguish what is known for certain from what is only probable. The game of roulette is not subject, in this sense, to uncertainty...The sense in which I am using the term is that in which the prospect of a European war is uncertain, or the price of copper and the rate of interest twenty years hence... About these matters there is no scientific basis on which to form any calculable probability whatever. We simply do not know.” [Keynes (1937)]

Neste trabalho de investigação, o conceito de incerteza está intimamente ligado à maior ou menor dificuldade em prever um determinado resultado futuro, considerando-se que um evento é mais incerto que outro se a possibilidade de prever a sua situação no futuro for menor.

Convém explicitar que risco financeiro é diferente de “simples” risco, uma vez que o primeiro diz respeito ao investimento financeiro (que se realiza para obter um rendimento financeiro) e o segundo está subjacente ao jogo. Sharpe (1984) faz a distinção entre os dois conceitos através do pressuposto de que uma pessoa pode ser considerada jogador se assumir um risco mais do que proporcional à rendibilidade esperada, onde a rendibilidade média esperada é negativa. Por seu turno, no mercado de capitais também se assume risco, mas neste caso a rendibilidade média dos investidores é positiva. Desta forma, existe para cada investidor uma combinação de activos financeiros com diferentes graus de rendibilidade e risco. Os primeiros investigadores que tentaram formular e representar matematicamente o comportamento do investidor face ao risco, assumiram que o principal objectivo deste seria a maximização do rendimento esperado, de tal forma que era comum afirmar-se que “ (...) face a diversas alternativas de investimento, com diferentes graus de rendimento e risco, o investidor escolherá sempre aquela que lhe proporcione maior rendimento esperado”.

Esta teoria revelou bastantes fraquezas, dado que desprezava totalmente o factor risco e a forma como o investidor o encarava. A utilidade esperada foi proposta como substituição do critério do valor esperado, em 1944 por John von Neumann e Oskar Morgenstein [vide Tosta de Sá (1987)], segundo o qual cada indivíduo tinha como principal objectivo a maximização da utilidade, onde era possível encontrar a taxa de substituição entre rendimento e risco para cada um destes indivíduos. A utilidade esperada assume grande importância na análise e selecção de carteiras, uma vez que considera que o indivíduo age com base num critério de maximização da sua utilidade, escolhendo uma carteira situada na fronteira de eficiência, que é fruto da combinação entre o valor esperado e a variância (ou desvio-padrão). Alguns autores discordam da validade da utilidade esperada, com base no argumento de que esta não reflecte a essência do comportamento racional, mostrando que em determinadas situações a acção humana difere do objectivo ditado pela maximização da

utilidade [Bouchaud *et al.* (1999c)].

De um modo geral, é vulgar identificar a variância (ou o desvio-padrão) e *VaR* (*Value-at-Risk*) como as principais medidas de risco e incerteza. Contudo, alguns autores [e.g. Soofi (1997)] alertam para o facto de que estes conceitos podem não ser boas medidas de incerteza, dado que são medidas centrais, que pressupõem a simetria das distribuições e no caso da existência de *fat tails*, tendem a não dar a devida “atenção” aos possíveis eventos extremos (por exemplo *crashes*).

Considere-se um conjunto de acontecimentos possíveis cujas probabilidades de ocorrência são dadas por p_1, \dots, p_n e seja μ uma medida de incerteza. De acordo com Shannon, uma medida de incerteza $\mu = \mu(p_1, \dots, p_n)$ deve assumir as seguintes propriedades [Shannon (1948), Shannon *et al.* (1964)]:

- (1) μ deve ser contínua em p_i , para $i = 1, \dots, n$;
- (2) Se $p_i = 1/n$, então μ deve ser uma função monótona crescente em n , pois quanto maior for o número de acontecimentos possíveis, maior é a incerteza e a possibilidade de escolha;
- (3) μ deve ser maximizada numa distribuição uniforme (total incerteza);
- (4) μ deve ser aditiva;
- (5) μ deve ser função da distribuição em si e não depender da forma como são agrupados os eventos, isto é, H deverá ser uma função de estado, conforme ilustrado na Figura 4.1:

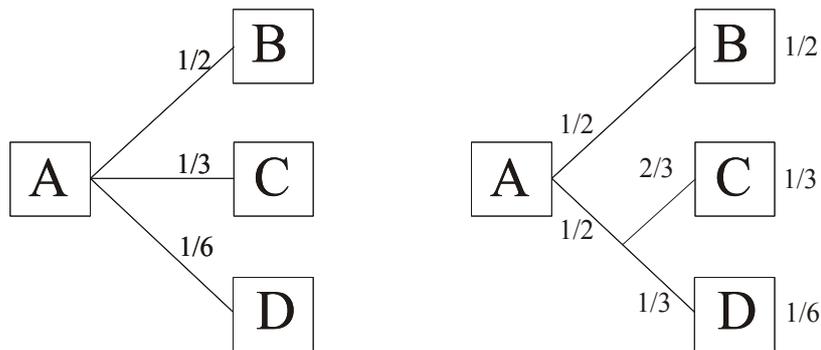


Figura 4.1: Decomposição de uma selecção em três possibilidades. Fonte: Shannon (1948).

Se se procurar caracterizar o estado final através de uma medida ou função de estado $\mu(p_1, \dots, p_n)$, essa função deverá ser independente do caminho percorrido para atingir esse estado. No caso concreto representado na Figura 4.1

$$\mu\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) = \mu\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right). \quad (4.1)$$

Shannon (1948) alega que uma medida que satisfaz todas estas propriedades é a entropia, cuja definição e propriedades foram descritas no Capítulo 2.²

Para além das propriedades enunciadas, Arafat, Skubic e Keegan (2003) consideram ainda que uma medida de incerteza deve atender às seguintes características: simetria, ou seja $\mu(X) = \mu(-X)$ e valorização, isto é $\mu(X \cup Y) + \mu(X \cap Y) = \mu(X) + \mu(Y)$. Estes autores concluíram que a entropia apresenta capacidade para ser uma boa medida de incerteza, tendo desenvolvido um modelo de incerteza com a combinação de modelos *fuzzy* com modelos probabilísticos.

A introdução da entropia como medida de incerteza em investimentos financeiros, surgiu com Philippatos e Wilson (1972, 1974), que apresentaram uma análise comparativa entre a entropia e a variância na gestão e selecção de carteiras de acções. De acordo com estes autores, a entropia apresenta diversas vantagens como medida de incerteza (relativamente à variância). Das principais vantagens são de enumerar o facto de

- (i) a entropia ser independente da distribuição de probabilidade seguida pelos dados empíricos, evitando-se erros decorrentes da tentativa de adequação da distribuição empírica a uma determinada distribuição de probabilidade teórica;
- (ii) a entropia poder ser calculada para dados qualitativos e quantitativos;
- (iii) o total de informação transmitida ser aproximadamente igual ao logaritmo do número de classes discriminadas e poder ser utilizado como medida da aptidão do investidor fazer distinção entre as várias acções e carteiras a constituir, além disso, a entropia depende do número de estados potenciais numa distribuição, enquanto que a variância depende da ponderação específica de cada estado;
- (iv) o valor da informação estar relacionado com a distribuição de probabilidade a que diz respeito.

As principais desvantagens apontadas à utilização da entropia como medida de incerteza foram [Philippatos *et al.* 1972] o facto de ainda não estar suficientemente integrada no estudo das disciplinas de economia, o que constitui um entrave à exploração das suas potencialidades e a existência de um certo grau de enviesamento estatístico nas medidas da informação, o que tem a ver com os graus de liberdade implícitos na amostra.

²Numa óptica um pouco diferente, Reesor e McLeish (2002) consideram que uma medida de risco (φ) é coerente se satisfizer as seguintes propriedades: (i) Homogeneidade positiva, $\forall \lambda \geq 0$, $\varphi(\lambda X) = \lambda \varphi(X)$; (ii) Invariância, $\forall \alpha \geq R$, $\varphi(\alpha + X) = \varphi(X) + \alpha$; (iii) Subaditividade, $\varphi(X + Y) \leq \varphi(X) + \varphi(Y)$.

Lawrence (1999) refere que as duas principais medidas de incerteza são a variância e a entropia e realça o facto de a entropia ser uma função côncava em qualquer distribuição de probabilidade como sendo uma particularidade que a torna elegível como função de incerteza.³

Dionísio (2001) conclui que a entropia apresenta vantagens como medida de incerteza nos mercados financeiros, alegando como principal desvantagem desta medida o facto de não ter em conta os respectivos valores das variáveis em estudo, inviabilizando assim, a sua introdução numa função de utilidade.

4.2 Entropia e desvio-padrão: análise comparativa na medida da incerteza

A variância é uma medida de dispersão, cuja popularidade se deve à respectiva simplicidade de cálculo e interpretação. Em termos de desenvolvimento histórico, a variância tem assumido um papel primordial na medida da dispersão, da incerteza, do risco e da avaliação do ajustamento de determinado modelo. Existem outras medidas de dispersão, nomeadamente a entropia que também podem ser utilizadas para o mesmo efeito [Maasoumi (1993)]. Apesar de tudo a variância é quase sempre a medida eleita pelos cientistas de várias áreas.⁴

A entropia para distribuições contínuas é uma medida de dispersão da função de densidade de probabilidade $p_X(x)$ face a uma função de densidade de probabilidade padrão, geralmente a uniforme. Ebrahimi, Maasoumi e Soofi (1999) encaram a entropia como a medida de incerteza em termos da “utilidade” de conhecer $p_X(x)$ face à fdp uniforme. A variância mede a distância das observações relativamente à média da respectiva distribuição de probabilidade. Ambos os conceitos podem ser considerados como medidas de incerteza, dado que ambos reflectem o nível de concentração de uma distribuição, apesar de metricamente serem muito diferentes.

³A existência de uma função de incerteza convexa é condição suficiente para garantir a possibilidade de relacionar a diminuição da incerteza com o aumento da informação. Note-se que se φ é convexa, então $-\varphi$ será côncava. Lawrence (1999) cita DeGroot (1962) que ao comparar funções côncavas, às quais chamou de funções de incerteza, verificou que o resultado inicial se mantinha mas com o sinal da desigualdade invertido. Tal resultado deveria ser interpretado da seguinte forma: uma estrutura de informação I é mais informativa se e só se reduzir mais incerteza esperada que I' . Neste contexto, Lawrence (1999) considera que a entropia poderá não ser uma medida apropriada para medir o valor da informação, uma vez que se I é mais informativa que I' , então a entropia esperada de I deverá ser menor que a entropia esperada de I' , mas já o contrário pode não ser verdade. Um menor valor de entropia esperada não implica um menor valor informativo da estrutura de informação em causa.

⁴Para além da variância como medida de risco, existem autores que consideram que os erros de previsão (ou os resíduos) constituem uma boa medida de risco assim como a volatilidade condicionada, medida a partir de modelos *GARCH* [vide Driver *et al.* (2004)].

Em determinadas situações a variância e a entropia podem não ser medidas concordantes, sendo por isso essencial proceder à sua comparação para as principais distribuições de probabilidade teóricas. Ebrahimi, Maasoumi e Soofi (1999) procederam a uma análise ordinal entre as medidas para várias famílias de distribuições, considerando que tal abordagem pode ser benéfica ao possibilitar a não utilização da cardinalização como critério de avaliação. Tradicionalmente a variância é utilizada para medir o risco e a incerteza, apesar de tudo a interpretação da variância como medida de incerteza acerca da predictabilidade de um determinado resultado requer alguma precaução [Soofi (1997)]. Soofi (1997) apresenta o seguinte exemplo: considerem-se duas variáveis aleatórias X e Y com distribuições de probabilidade F_X e F_Y , onde F_X é uma distribuição mais plana que F_Y (por exemplo $F_X = Beta(1, 5; 1, 5)$ e $F_Y = Beta(0, 5; 0, 5)$) então, *a priori*, $var(X) < var(Y)$, onde $var(\cdot)$ é a variância. O resultado de Y é mais volátil que o de X , no entanto é provável que se obtenha $H(X) > H(Y)$. Isto porque, de acordo com Soofi (1997), apesar de Y ser mais volátil é menos difícil de prever que X , logo a incerteza de Y é menor que a incerteza de X . Apesar de tudo, Ebrahimi, Maasoumi e Soofi (1999) concluem que a variância e a entropia têm semelhante ordenação para as famílias de distribuições de probabilidade mais conhecidas.

Grande parte das famílias de distribuições são caracterizadas por terem uma solução única para a maximização da respectiva entropia. Estes resultados são alvo de comparação com a variância para algumas distribuições de probabilidade no trabalho realizado por Ebrahimi, Maasoumi e Soofi (1999). Numa primeira fase é importante identificar quais os momentos de uma distribuição que influenciam estas medidas, ou de que forma. A aproximação da função de densidade de probabilidade através da expansão em série de Legendre promove um conhecimento mais profundo sobre a entropia e a sua relação com a variância e outros momentos de ordem superior. Uma *fdp* contínua pode ser aproximada por [Ebrahimi *et al.* (1999)]

$$p_X(x) \approx a_0 G_0(x) + a_1 G_1(x) + \dots + a_n G_n(x) \quad (4.2)$$

onde $G_i(x)$ são os polinómios de Legendre: $G_0(x) = 1$; $G_1(x) = x$ e $G_2(x) = 0,5(3x^2 - 1)$ Ebrahimi, Maasoumi e Soofi (1999) demonstram que

$$\int_{-1}^1 G_i(x) G_j(x) dx = \frac{2\delta_{ij}}{2i+1}, \quad (4.3)$$

sendo δ_{ij} o delta de Kronecker e $x \in [-1, 1]$. Então pode-se obter a_0 , a_1 e a_2 para satisfazer as restrições de normalização e média nula. Sabendo que

$$x^2 = \frac{1}{3} [2G_2(x) + G_0(x)], \quad (4.4)$$

a variância será dada por

$$\text{var}(x) = \int x^2 p_X(x) dx \approx \frac{1}{3} \left[\frac{4}{5} a_2 + 2a_0 \right]. \quad (4.5)$$

Esta aproximação revela que a variância aumenta se a_2 também aumentar. Para outros a_i , $i \geq 3$, a variância não sofre alterações. Se se aplicar a expansão em série de Legendre à entropia e em seguida se derivar em ordem a a_2 , obtém-se

$$\frac{\partial H}{\partial a_2} \approx - \int G_2(x) \log [a_0 G_0(x) + a_1 G_1(x) + \dots + a_n G_n(x)] dx. \quad (4.6)$$

A entropia aumenta com a variância se a expressão for positiva no seu todo, ou seja a variação da entropia depende de mais parâmetros para além de a_2 .

A expansão em série de Legendre revela que a entropia pode estar relacionada com momentos de ordem superior, ao contrário da variância [Ebrahimi *et al.* (1999)]. Por este facto a entropia pode oferecer uma melhor caracterização da *fdp*. No geral, se uma *fdp* for totalmente caracterizada pelos primeiros dois parâmetros, ou quando uma aproximação quadrática é plenamente satisfatória, então a ordenação da dispersão das distribuições pode ser feita apenas com o auxílio da variância, pois com a entropia iriam obter-se os mesmos resultados. Apesar de não existir uma relação universal entre entropia e variância (em termos ordinais), podem identificar-se condições nas quais as medidas estão de acordo, contudo os mesmos autores afirmam ainda que a entropia é uma medida de dispersão mais geral, pois utiliza muito mais informação acerca da distribuição de probabilidade em causa que a variância. Além disso os autores adiantam que a classe de distribuições que pode ser caracterizada por um só momento (por exemplo a variância) é muito grande e de acordo com Maasoumi e Racine (2002), este tipo de funções de densidade de probabilidade não são as mais adequadas para representar processos estocásticos financeiros. Outro facto apontado por Ebrahimi, Maasoumi e Soofi (1999) é que as transformações não-lineares das variáveis tendem a aumentar a incerteza, definida por exemplo pela entropia. Para a maioria das funções de densidade de probabilidade, que são descritas apenas por um momento de dispersão, este aumento de imprevisibilidade não é detectado pela variância.

Maasoumi e Racine (2002) argumentam que nos casos em que a distribuição de probabilidade empírica não é perfeitamente conhecida, a entropia constitui uma medida alternativa para a incerteza, predictabilidade e ajustamento. Tal afirmação é justificada pelo facto de a entropia ser função de muitos momentos da distribuição, de tal modo que nos casos em que determinados momentos de ordem superior a dois forem muito relevantes para a caracterização da distribuição, muitas das técnicas tradicionais deixam de ser adequadas. Neste contexto, McCauley (2003) defende ainda que se devidamente construída e estimada, a entropia representa a desordem e incerteza

de uma mercado ou activo financeiro. Isto porque a entropia tem a capacidade de captar a complexidade de um sistema sem a necessidade de pressupostos rígidos que possam desvirtuar os resultados obtidos.

Nesta secção é realizada uma análise comparativa entre o comportamento do desvio-padrão e da entropia como medidas de incerteza para 23 títulos cotados na Euronext Lisboa e o índice PSI 20 no período entre 28/06/1995 e 30/12/2002, correspondendo a 1858 observações diárias. A descrição, estudo da evolução temporal e análise estatística destes títulos e índice PSI 20 foi apresentada no Capítulo 3.

Numa primeira fase foi realizada uma análise comparativa entre a entropia e o desvio-padrão para cada um dos títulos e índice individualmente. Neste contexto foram alvo de estudo as sucessões cronológicas referentes às taxas de rendibilidade calculadas através da equação (3.1). Uma vez que os dados em estudo se incluem nas famílias de distribuições contínuas, a entropia (medida em *nats*) foi calculada através da equação (2.28), tendo sido utilizados os logaritmos neperianos. O método de estimação da entropia seleccionado foi a equiquantização marginal, descrito no Capítulo 2.

Uma vez que a entropia referente às distribuições contínuas é uma medida relativa, assumindo-se normalmente a distribuição uniforme como a distribuição de entropia nula, é natural que os resultados obtidos sejam negativos. Neste sentido e para facilitar a análise em causa, optou-se por reduzir a unidade de todas as sucessões cronológicas para percentagem, multiplicando o valor de cada observação por 100. Esta conversão não altera as conclusões obtidas e permite que os resultados da entropia sejam positivos, baseando-se na seguinte propriedade

$$H(100X) = H(X) - \log |100|^{-1} = H(X) + \log |100|.$$

Na Tabela 4.1 são apresentados os valores obtidos para a entropia empírica (H), entropia normal (NH) e para o desvio-padrão (σ). O título Salvador Caetano é aquele que apresenta maior valor de entropia (2,6430 *nats*) e simultaneamente o maior desvio-padrão. Por outro lado, o índice PSI 20 é a variável que apresenta menores sinais de incerteza e de risco. Uma vez que o índice PSI 20 pode ser considerado como uma carteira diversificada dos títulos com maior representatividade no mercado, é natural que, de acordo com o princípio da diversificação, apresente valores de incerteza e de risco inferiores aos apresentados para carteiras menos diversificadas e/ou títulos individuais. É de realçar a aparente correlação positiva entre a entropia e o desvio-padrão, revelando que possivelmente as duas medidas assumem um comportamento semelhante. Numa tentativa de melhor explorar a relação entre estas duas medidas, foi calculado o logaritmo neperiano do desvio-padrão, $\ln(\sigma)$, e analisada a sua relação com a entropia. Quanto mais a distribuição de probabilidade empírica se

<i>Títulos</i>	H (nats)	σ (%)	NH (nats)
Barb. & Almeida	2,2530	4,5397	2,9318
BANIF	1,8217	1,9327	2,0779
BCP	1,7240	1,6257	1,9049
B. Totta	1,7792	1,9756	2,0998
BES	1,5883	1,4894	1,8173
Caima	2,2077	3,7044	2,7285
CIN	2,0697	3,1189	2,5564
Corticeira Amorim	1,8458	1,8449	2,0314
Estoril-Sol	2,0356	2,6695	2,4008
Fisipe	2,0733	3,1787	2,5754
Inapa	1,6769	1,6787	1,9370
Mod. & Continente	1,8880	1,8904	2,0557
Jer. Martins	2,0514	2,1816	2,1990
Mota-Engil	1,7870	1,9649	2,0944
Pap. Fernandes	2,4249	3,4922	2,6695
Portucel	1,9199	1,8392	2,0283
PT	2,1190	2,1473	2,1831
Salv. Caetano	2,6430	8,2134	3,5247
Soares Costa	2,1051	2,4329	2,3080
Somague	2,0646	2,3727	2,2830
Sonae	2,0540	2,0782	2,1504
Sonae-Ind.	1,9585	2,0813	2,1519
Tertir	2,2261	2,9266	2,4928
PSI 20	1,5059	1,1942	1,5964

Tabela 4.1: Entropia (H), desvio-padrão (σ) e entropia normal (NH) para cada um dos títulos e para o índice PSI 20.

aproxime da distribuição normal maior será a correlação linear entre a entropia e o $\ln(\sigma)$.⁵ A Figura 4.2 apresenta a relação existente entre estas duas medidas.

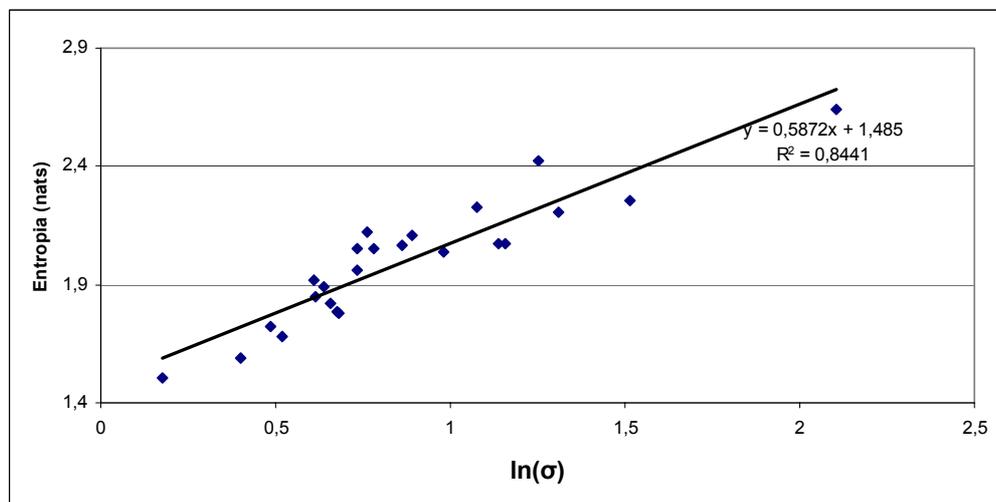


Figura 4.2: Entropia *versus* $\ln(\sigma)$.

Como se pode verificar, a relação entre a entropia e o $\ln(\sigma)$ de cada um dos títulos é muito forte e positiva, ainda que existam desvios relativamente significativos. Convém lembrar que a hipótese nula de normalidade da distribuição de probabilidade empírica foi rejeitada para todos os títulos, assim como para o índice PSI 20, de acordo com o teste *Jarque-Bera* (ver Tabelas 3.4 a 3.8). Na análise estatística efectuada no Capítulo 3, verifica-se que todos os títulos exibiram sinais de leptocurtose e assimetria, sendo de destacar os títulos Salvador Caetano, Barbosa & Almeida, Banco Totta e Cin como os títulos que apresentaram maior afastamento face à distribuição normal. Os títulos Portucel, PT e Sonae foram aqueles que exibiram os menores valores de curtose e de assimetria, sendo deste modo aqueles cuja aproximação à distribuição normal é maior.

De modo a verificar se a entropia tem capacidade para captar as características da distribuição de probabilidade empírica como um todo e não apenas os dois primeiros momentos (média e variância) foi realizada uma análise comparativa entre os valores da entropia empírica (H) e os valores da entropia normal calculada parametricamente (NH) (Figura 4.3).

Numa primeira fase é de evidenciar o facto de a entropia normal assumir valores superiores aos da entropia empírica para todos os títulos e para o índice PSI 20. Tal resultado indica que a incerteza patente nestes títulos e índice é inferior ao que deveriam apresentar caso fossem normalmente distribuídos. Neste contexto, e tendo em conta que a distribuição normal das taxas de rendibilidade

⁵Isto porque $NH(X) = \ln \sqrt{2\pi e} + \ln \sigma$.

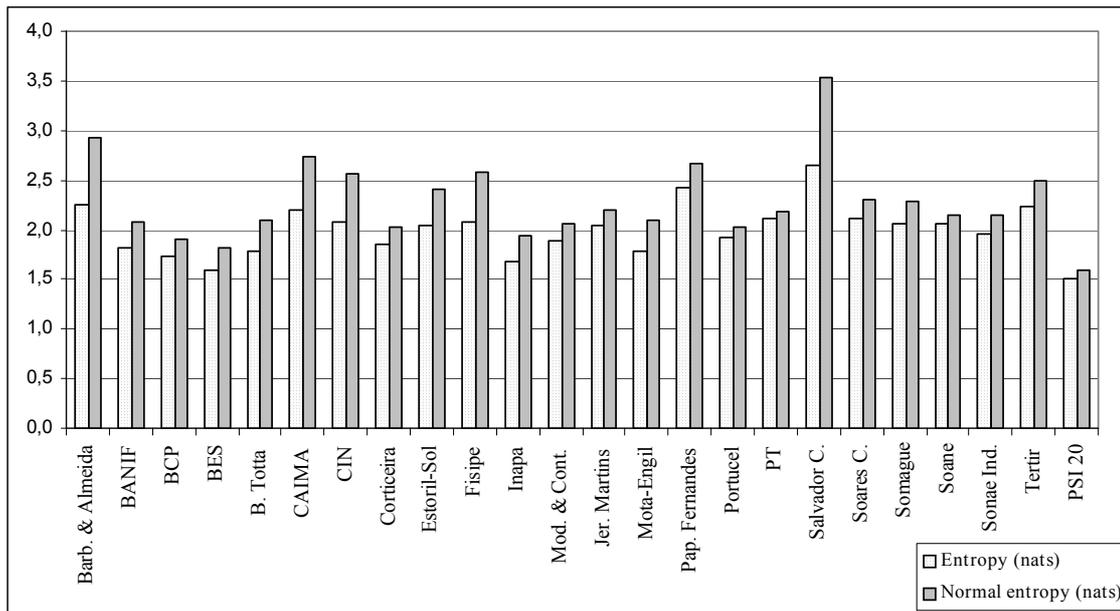


Figura 4.3: Entropia (H) e entropia normal (NH) para cada um dos títulos e índice PSI 20.

é um dos principais pressupostos para a não existência de predictabilidade,⁶ é plausível admitir que o nível de predictabilidade existente é superior ao ditado pela teoria financeira.

As principais diferenças entre a entropia normal (NH) e a entropia empírica (H) são encontradas nos títulos Barbosa & Almeida, Caima, Cin e Salvador Caetano que são precisamente os títulos que exibem maiores valores de leptocurtose, assimetria, autocorrelação e heterocedasticidade (ver Tabelas 3.4 a 3.8). Por outro lado, as menores diferenças são exibidas pelos títulos Portucel, PT e Soane e pelo índice PSI 20, cuja análise estatística revelou serem as variáveis que apresentavam menor afastamento face à distribuição normal. Presume-se que a entropia é sensível a momentos de ordem superior (nomeadamente assimetria e curtose) e tem em conta algumas das principais características das distribuições de probabilidade empíricas, contribuindo para um estudo mais aprofundado da incerteza. Estes resultados vão ao encontro de algumas conclusões de diversos autores, nomeadamente Soofi (1997) e Ebrahimi, Maasoumi e Soofi (1999).

Para além do estudo comparativo entre o comportamento do desvio-padrão e da entropia para cada um dos títulos isoladamente, é importante realizar tal comparação no contexto de carteiras mais ou menos diversificadas, uma vez que na gestão de carteiras não faz muito sentido estudar

⁶ A distribuição normal é o resultado da maximização da entropia quando são tidos em consideração apenas os dois primeiros momentos (média e variância). Neste contexto, é natural que o nível de predictabilidade seja mínimo e o nível de incerteza seja máximo.

os títulos de *per se*, mas sim o seu contributo numa carteira de activos financeiros. Pretende-se verificar se a entropia é sensível ao efeito de diversificação, um dos principais motes da teoria da carteira e para tal é realizada uma análise similar à apresentada por Elton e Gruber (1995a).⁷

Neste contexto convém relembrar algumas características formais da variância e da entropia como medidas de risco e incerteza. A variância é uma função quadrática convexa, o que de acordo com a desigualdade de Jensen indica que a combinação linear do desvio-padrão de vários títulos (variáveis) será sempre maior ou igual que o desvio-padrão da combinação linear dos mesmos títulos, ou seja

$$\theta\sigma(X) + (1 - \theta)\sigma(Y) \geq \sigma[\theta X + (1 - \theta)Y], \text{ com } 0 \leq \theta \leq 1, \quad (4.7)$$

existindo igualdade apenas no caso em que o coeficiente de correlação linear entre X e Y é 1. Esta propriedade permite que a variância e o desvio-padrão possam ser encarados como medidas de risco uma vez que têm em conta o efeito diversificação. De acordo com esta explicação, é natural que se admita que a entropia não observará tal pressuposto, dado ser uma função côncava e ter um máximo para a maioria das distribuições de probabilidade. Contudo há que ter em atenção que a entropia não é função dos valores da variável (ou variáveis) em causa, mas sim das respectivas probabilidades de ocorrência. Além disso, é de recordar que uma das propriedades da entropia é a aditividade e note-se que a diferenciação entre risco e incerteza é mais vincada quando esta é evocada, pois o risco (medido pela variância ou pelo desvio-padrão) atinge o seu máximo quando a correlação entre as variáveis é perfeita (ou seja $R = 1$) e tende a diminuir para as restantes situações, enquanto que a incerteza entre variáveis (medida pela entropia) é mínima quando existe correlação perfeita entre as mesmas e tende a aumentar à medida que tal correlação se desvanece. Do ponto de vista da incerteza, a maior correlação entre as variáveis (seja positiva ou negativa) conduz a uma maior possibilidade de predictabilidade; por outro lado, do ponto de vista do risco, a correlação positiva perfeita entre variáveis não promove a minimização do risco.

No presente trabalho de investigação são tidos em conta os procedimentos indicados por Elton e Gruber (1995a), sendo também calculada a entropia (H) e a entropia normal (NH), com vista a avaliar a sensibilidade destas para com o efeito de diversificação. A Tabela 4.2 apresenta os resultados desta experiência. Os resultados obtidos apontam para a diminuição da entropia e do desvio-padrão à medida que o número de títulos em carteira aumenta. Este facto leva a concluir que possivelmente a entropia é também sensível ao efeito diversificação. Tal situação poderá ser explicada pelo simples facto de o número de estados possíveis da carteira diminuir progressivamente

⁷Estes autores demonstraram que a diversificação é um factor de minimização do risco específico (neste contexto medido pelo desvio-padrão). O estudo compreende a selecção aleatória de títulos para construir carteiras, tendo como única premissa o facto de que a proporção de cada título na carteira é idêntica para todos os títulos.

à medida que o número de títulos incluídos aumenta, logo a incerteza que o investidor tem acerca da carteira tende a diminuir. É de referir que em nenhuma das carteiras se verificou a existência de correlação linear positiva perfeita ou total independência entre os títulos. É importante salientar que a diminuição da incerteza não se deve somente à introdução do título, mas essencialmente ao facto de este contribuir para a redução do número de estados possíveis. Além disso verifica-se que a entropia respeita a condição da subaditividade indicada por Reesor e McLeish (2002), ou seja

$$H[\theta X] + H[(1 - \theta)Y] \geq H[\theta X + (1 - \theta)Y], \quad (4.8)$$

sendo θ a ponderação de cada título nas carteiras calculadas.

São ainda observados alguns movimentos estatísticos considerados irregulares, como por exemplo o aumento da entropia e do desvio-padrão quando o número de títulos em carteira aumenta uma unidade. Estes acontecimentos poderão ser considerados irrelevantes, pois tal situação poderá dever-se à pequena dimensão da amostra e devido ao facto de a selecção dos títulos para cada carteira ser perfeitamente aleatória.

De modo a facilitar a leitura dos resultados, é apresentada uma análise comparativa do comportamento da entropia e da entropia normal para as carteiras construídas e avaliadas na Tabela 4.2 (ver Figura 4.4).

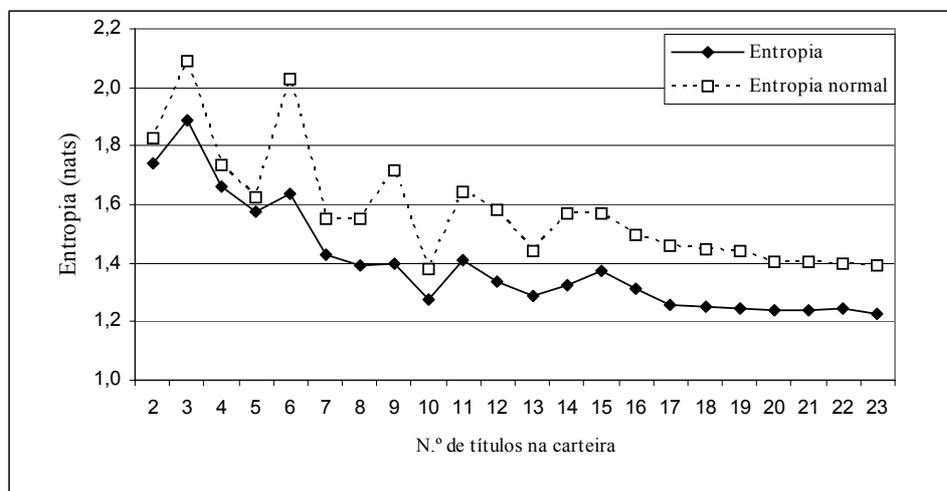


Figura 4.4: Análise do comportamento da entropia (H) e da entropia normal (NH) para carteiras seleccionadas aleatoriamente.

Como se pode verificar na Figura 4.4, tanto a entropia empírica como a entropia normal são sensíveis ao efeito de diversificação, mostrando tendência para diminuírem à medida que aumenta

<i>N. Títulos</i>	<i>Carteira</i>	<i>H (nats)</i>	<i>σ (%)</i>	<i>NH (nats)</i>
2	<i>A</i>	1,7427	1,5023	1,8260
3	<i>B</i>	1,8868	1,9551	2,0894
4	<i>C</i>	1,6587	1,3675	1,7319
5	<i>D</i>	1,5753	1,2256	1,6223
6	<i>E</i>	1,6362	1,8447	2,0312
7	<i>F</i>	1,4268	1,1424	1,5520
8	<i>G</i>	1,3940	1,1397	1,5497
9	<i>H</i>	1,4010	1,3502	1,7192
10	<i>I</i>	1,2761	0,9627	1,3809
11	<i>J</i>	1,4099	1,2504	1,6424
12	<i>K</i>	1,3387	1,1735	1,5789
13	<i>L</i>	1,2854	1,0209	1,4397
14	<i>M</i>	1,3239	1,1597	1,5671
15	<i>N</i>	1,3739	1,1623	1,5694
16	<i>O</i>	1,3150	1,0808	1,4967
17	<i>P</i>	1,2570	1,0413	1,4594
18	<i>Q</i>	1,2525	1,0268	1,4454
19	<i>R</i>	1,2469	1,0198	1,4385
20	<i>S</i>	1,2389	0,9874	1,4062
21	<i>T</i>	1,2362	0,9844	1,4033
22	<i>U</i>	1,2459	0,9801	1,3989
23	<i>V</i>	1,2292	0,9762	1,3949

Tabela 4.2: Entropia (H), desvio-padrão (σ) e entropia normal (NH) para carteiras seleccionadas aleatoriamente, nas quais todos os títulos têm igual ponderação.

o número de títulos em carteira. É de realçar o facto de que a entropia normal assume sistematicamente valores superiores aos da entropia empírica, revelando que o nível de predictabilidade em cada carteira é superior ao ditado pela distribuição normal.

Da análise realizada verifica-se que a entropia satisfaz algumas das principais premissas como medida de incerteza para activos financeiros, nomeadamente o facto de ser sensível ao efeito de diversificação e de ter em conta muito mais informação sobre a distribuição de probabilidade empírica que a variância ou o desvio-padrão. Apesar das vantagens apontadas à entropia como medida de incerteza, há que ter em consideração que como medida de risco perde capacidades face ao desvio-padrão, uma vez que não reconhecendo os valores das variáveis em causa, compromete a sua utilização numa função de utilidade e conseqüentemente na selecção de carteiras para o investidor. Ainda assim convém referir que há autores que consideram a variância e/ou desvio-padrão insuficientes como medidas de risco e de incerteza [ver e.g. Laffont (1990)]⁸. Laffont (1990) considera que uma variável aleatória X tem mais risco que uma outra variável aleatória Y se e só se

(i) As distribuições de X e de Y , respectivamente $F(X)$ e $F(Y)$ tiverem a mesma média;⁹

(ii) A distribuição $F(Y)$ for obtida a partir de um conjunto de transformações em $F(X)$;

(iii) $\int_0^1 [F(Y) - F(X)]dx \geq 0$, se $F(Y)$ for uma distribuição de probabilidade menos concentrada que $F(X)$.

Considera-se que a entropia apresenta vantagens face ao desvio-padrão no contexto da gestão de carteiras como medida de incerteza, ou seja como medida da maior ou menor capacidade de predictabilidade que os dados possam exhibir. A entropia é uma medida mais geral porque tem em conta características das distribuições de probabilidade empíricas, que normalmente são ignoradas pela variância e/ou desvio-padrão, nomeadamente os momentos de ordem superior.

4.3 Análise da relação de dependência entre cada um dos títulos e o índice PSI 20

No âmbito da gestão de carteiras faz mais sentido avaliar carteiras diversificadas que títulos individuais. Por este motivo, é normal desvalorizar o risco específico dos títulos uma vez que este é

⁸Laffont (1990) apresenta uma experiência para demonstrar a não eficácia da variância como medida de risco, onde assume que a função de utilidade é logarítmica.

⁹Como o pressuposto de igual valor esperado (ou média) para as variáveis aleatórias em estudo pode ser muito limitativo, Laffont (1990) considera que a dominância estocástica poderá ser uma alternativa como medida do risco.

passível de minimização (e em teoria até anulação) mediante uma eficaz diversificação das carteiras. O risco sistemático, ou seja, o risco inerente ao próprio mercado que não se minimiza mediante a diversificação das carteiras é um dos principais alvos da atenção de analistas financeiros.

Tal como é descrito no Capítulo 1, o risco sistemático é, na maioria das vezes, encarado e medido pelo *Beta* do modelo *CAPM* desenvolvido por Sharpe em 1964 [ver equação (1.9)]. Neste contexto, é assumido que a taxa de rendibilidade esperada de uma carteira (ou título) é igual à soma de duas componentes: a taxa de rendibilidade sem risco que compensa o investidor pelo facto de adiar o consumo por um determinado período (R_f) e a taxa que compensa o investidor pelo risco assumido $\{[E(R_m) - (R_f)] \beta_i\}$. Nesta segunda componente o coeficiente *Beta* (β) assume especial importância, pois ao medir a sensibilidade da taxa de rendibilidade do título ou carteira face ao prémio de risco mede simultaneamente o risco sistemático desse título ou carteira em análise. Para melhor exemplificar o facto de o *Beta* ser encarado como medida do risco sistemático, é de relembrar que a variância de um título (σ_i^2) (ou carteira) pode ser decomposta em duas componentes: a soma de quadrados da regressão e a soma de quadrados dos resíduos, isto é

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{ei}^2, \quad (4.9)$$

onde σ_m^2 é a variância da variável independente, neste caso considerado como a variância da carteira de mercado e σ_{ei}^2 é a parte residual da variância que poderá ser minimizada mediante uma eficaz diversificação da carteira.

Uma das questões que se coloca é: qual será a melhor forma de estimar o *Beta*? Tendo por base o modelo *CAPM*, pode simplificar-se o modelo da seguinte forma [Neves (2002)]

$$R_{i,t} - R_{f,t} = [R_{m,t} - R_{f,t}] \beta_i + \varepsilon_{i,t}. \quad (4.10)$$

A equação (4.10) representa um modelo de regressão linear simples, que pode ser estimado por *OLS*. Apesar de tudo, pode existir alguma dificuldade em obter a taxa de rendibilidade sem risco apropriada. Neste sentido, muito autores [ver e.g. Neves (2002)] aconselham a usar o chamado Modelo de Mercado¹⁰ para estimar o *Beta*, descrito por

$$R_{i,t} = a + \beta_i R_{m,t} + \varepsilon_{i,t}, \quad (4.11)$$

através de um modelo de regressão linear simples entre a taxa de rendibilidade das acções ($R_{i,t}$) como variável dependente e a taxa de rendibilidade do mercado ($R_{m,t}$) como variável independente.

¹⁰É importante salientar que o Modelo de Mercado se distingue do modelo *SIM* (*Single Index Model*) por não pressupor, à semelhança do modelo *CAPM*, que $E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \forall i \neq j$.

Para além do método de estimação do modelo em causa, existem ainda outros factores de preocupação por parte de vários autores aquando da estimação deste modelo [e.g. Neves (2002)]:

- (i) Escolha da *proxy* - a teoria financeira aconselha a que a carteira de mercado inclua o maior número possível de investimentos, devendo estar ajustada a dividendos e resultar da média ponderada dos valores dos títulos cotados no mercado em causa. Além disso deve conter os títulos mais cotados com vista a evitar o enviesamento resultante da não transacção de títulos menos líquidos. Neste contexto, considerou-se que o índice PSI 20 observava os requisitos enunciados;
- (ii) Periodicidade das observações - neste âmbito é aconselhada a utilização de uma taxa de juro sem risco mensal para taxas de rendibilidade mensais e a utilização do Modelo de Mercado no caso de taxas de rendibilidade diárias e/ou semanais [Neves (2002)]. Além disso, é também considerado que as taxas de rendibilidade diárias podem levar a alguns enviesamentos (por conterem mais ruído pela falta de liquidez e de transacção diária de alguns títulos), por isso alguns autores aconselham o uso de taxas de rendibilidade semanais ou mensais [e.g. Elton *et al.* (1995a), Elton *et al.* (1999c), Neves (2002)].

Neste trabalho de investigação foi utilizado o índice PSI 20 como representante da carteira de mercado e, de modo a procederem-se a comparações para diferentes periodicidades, serão analisadas as taxas de rendibilidade diárias (1858 observações) e as taxas de rendibilidade semanais dos títulos e índice PSI 20 (377 observações).¹¹ A escolha do índice PSI 20 como *proxy* para o mercado de acções português, prende-se com o facto de este ser um índice que tem em conta os movimentos das 20 empresas mais transaccionadas no mercado da Euronext Lisboa, sendo que é a principal referência em termos financeiros para esse mesmo mercado.¹² Foi utilizado o método *OLS* para estimar o Modelo de Mercado. A escolha deste método prendeu-se com o facto de este ser uma metodologia muito comum na teoria financeira, ainda que se verifique que os resíduos não sejam ruído branco.

Bartholdy e Peare (2004) evidenciam o facto de apesar de existirem inúmeros estudos sobre o *CAPM* e a sua forma de estimação, a verdade é que não existe consenso quanto à forma de estimação do *Beta*, nomeadamente, não há consensualidade quanto ao índice a escolher como *proxy*

¹¹Com vista a obter as sucessões cronológicas com periodicidade semanal, foi seleccionada a cotação de fecho de todas as quartas-feiras do período entre 28/06/1995 e 30/12/2002.

¹²Neste contexto, poder-se-ia utilizar também o índice PSI Geral que tem em conta os movimentos nas cotações de todos os títulos cotados na Euronext Lisboa. Contudo, alguns autores [e.g. Neves (2002)] alertam para o facto de este índice poder incluir alguns enviesamentos, fruto de títulos com fraca liquidez.

[vide e.g. Chen (2003)], ao período temporal a ter em conta e à periodicidade do dados. Quanto ao processo de estimação em si, a maioria dos estudos não evidencia o facto, mas utiliza geralmente *OLS*. Neste sentido, para além do método *OLS* para estimar o Modelo de Mercado são utilizados outros métodos econométricos, na tentativa de obter uma maior robustez das estimativas, admitindo pressupostos diferentes do *OLS*, nomeadamente a não exogeneidade da taxa de rendibilidade do índice de mercado.

São vários os autores que consideram que a utilização de modelos estruturais pode ser aconselhável para a estimação do modelo *CAPM* [por exemplo Hamori (1997), Garcia *et al.* (1998)], uma vez que de acordo com estes modelos o pressuposto de exogeneidade de uma determinada variável não é assumido inicialmente. Neste contexto, será correcto admitir que a taxa de rendibilidade do índice do mercado bolsista é uma variável puramente exógena? Não será mais correcto, do ponto de vista económico, admitir que esta variável pode também sofrer influências dos títulos que são transaccionados no respectivo mercado? Na tentativa de considerar o índice de mercado uma variável possivelmente não exógena, são utilizados os métodos de estimação *TSLS*, *3SLS* e *GMM*.¹³

O objectivo desta secção é avaliar o grau de dependência existente entre cada um dos títulos e o índice de mercado. Para tal é utilizado o modelo *CAPM*, cujo *Beta* é entendido como uma medida do risco sistemático, a entropia conjunta, condicionada e a informação mútua como medidas do grau de (in)dependência entre cada um dos títulos e o índice PSI 20. Se os resíduos forem ruído branco e não desrespeitarem os pressupostos do método de estimação usado para estimar o modelo de regressão linear, é natural que o coeficiente de correlação global (λ) calculado com base na informação mútua e o coeficiente de correlação linear (R) sejam idênticos e deste modo o *Beta* possa ser considerado uma boa medida do risco sistemático. No caso de existência de não-linearidades nos dados e irregularidades no comportamento dos resíduos resultantes do processo de estimação do Modelo de Mercado é possível que este simples modelo linear não seja suficiente para captar a relação global existente entre os títulos e o índice PSI 20. Neste caso, a informação mútua e o coeficiente de correlação global poderão ser fontes de informação potenciais para o investidor.¹⁴

Do ponto de vista do investidor, um título com um elevado *Beta* pode ser significado de maior

¹³Destes três métodos de estimação, o *GMM* origina ortogonalidade sem impôr restrições em termos da distribuição de probabilidade dos resíduos, sendo por isso um método muito utilizado neste tipo de aplicações. É ainda um método aconselhado por Hamori (1997) e por Garcia e Ghysels (1998) para estimar o modelo *CAPM*.

¹⁴São vários os estudos que apontam para o facto de que o *Beta* não é suficiente para medir o risco sistemático [e.g Fama *et al.* (1993); Fama *et al.* (1996)]. De acordo com Fama e French (1996) o *Beta* calculado no âmbito do modelo *CAPM* não tem capacidade para explicar o comportamento das taxas de rendibilidade das acções, indicando estes autores a possibilidade de incluir outros factores (nomeadamente o factor *book-to-market*) com vista a uma melhor explicação das variações das taxas de rendibilidade.

risco, uma vez que é entendido que esse título reage de forma acentuada a variações na carteira de mercado ou índice. Por outro lado, se essa correlação (linear e não-linear) for realmente forte, é natural que a incerteza referente ao comportamento do título diminua, pois o conhecimento do comportamento do índice possibilitará uma maior predictabilidade do comportamento do título. Neste contexto, poderá existir alguma rivalidade entre os conceitos de risco e de incerteza, uma vez que a menor incerteza resultante da forte correlação (linear ou não-linear) entre um determinado título e o índice de mercado é entendida como um maior risco sistemático assumido por parte do investidor.

Além disso, através das medidas da teoria da informação utilizadas neste estudo, é possível também diferenciar a incerteza global da incerteza “residual”, uma vez que de acordo com as propriedades da entropia enunciadas no Capítulo 2, a entropia de um título (ou qualquer outra variável) pode ser decomposta da seguinte forma

$$H(X) = I(X, Y) + H(X|Y).$$

Se se considerar que X é um determinado título e Y é o índice PSI 20, então obtém-se

$$H(X) = I(X, PSI) + H(X|PSI). \quad (4.12)$$

A equação (4.12) poderá ser comparável, em termos de comportamento, à equação (4.9), sendo o primeiro termo referente ao nível de dependência que existe entre o título (ou carteira) e o índice PSI 20 e o segundo termo referente à variação do título (ou carteira) que é independente do comportamento apresentado pelo mercado.

4.3.1 Análise dos dados diários

A Tabela 4.3 apresenta os valores estimados para o *Beta* (β) de cada um dos títulos e o coeficiente de correlação linear (R) relativos ao modelo de regressão linear simples vigente na equação (4.10) e as duas componentes de risco: o risco sistemático, $\beta_i^2 \sigma_m^2$, e o risco específico, $\sigma_{\epsilon_i}^2$, de cada título, obtidos por *OLS*. De modo a poderem-se estabelecer comparações entre as medidas em estudo, são ainda apresentados os valores estimados para a informação mútua entre cada um dos títulos e o índice PSI 20, $[I(X, PSI)]$, a entropia condicionada de cada um dos títulos dado o conhecimento do índice PSI 20, $[H(X|PSI)]$, o coeficiente de correlação global, λ , calculado de acordo com a equação (2.60) e a informação mútua assumindo a distribuição normal, $IMN(X, PSI)$, calculada através da equação (2.62).

Conforme se pode verificar pelos valores apresentados na Tabela 4.3 existe um aparente relacionamento positivo entre o risco sistemático e a informação mútua e entre o risco específico e a

<i>Títulos</i>	$\beta_i^2 \sigma_m^2$	σ_{ei}^2	β	R	$I(X, PSI)$	$H(X PSI)$	λ	$IMN(X, PSI)$
Barb. & Almeida	0,1904	20,4182	0,3654**	0,0961**	0,0252**	2,2278	0,2217	0,0046*
BANIF	0,2555	3,4801	0,4232**	0,2615**	0,0665**	1,7552	0,3529	0,0354**
BCP	1,0627	1,5797	0,8632**	0,6341**	0,2953**	1,4287	0,6678	0,2572**
B. Totta	0,2866	3,6164	0,4483**	0,2710**	0,0647**	1,7145	0,3484	0,0381**
BES	0,8070	1,4114	0,7522**	0,6031**	0,2449**	1,3434	0,6223	0,2261**
Caima	0,2753	13,4472	0,4393**	0,1416**	0,0188**	2,1889	0,1921	0,0101**
CIN	0,2312	9,4964	0,4026**	0,1542**	0,0487**	2,0210	0,3046	0,0120**
Corticeira Amorim	0,4475	2,9564	0,5602**	0,3626**	0,0696**	1,7762	0,3605	0,0705**
Estoril-Sol	0,0910	7,0350	0,2526**	0,1130**	0,0148**	2,0208	0,1708	0,0064*
Fisipe	0,0927	10,0113	0,2549**	0,0958**	0,0158**	2,0575	0,1764	0,0046*
Inapa	0,0716	2,7462	0,2240**	0,1594**	0,0173**	1,6596	0,1844	0,0129**
Mod. & Continente	0,9868	2,5867	0,8318**	0,5255**	0,1506**	1,7374	0,5100	0,1616**
Jer. Martins	1,3449	3,4145	0,9711**	0,5316**	0,1692**	1,8822	0,5358	0,1660**
Mota-Engil	0,1923	3,6686	0,3672**	0,2232**	0,0297**	1,7573	0,2401	0,0256**
Pap. Fernandes	0,5015	11,6940	0,5929**	0,2028**	0,0158**	2,4091	0,1764	0,0209**
Portucel	0,6096	2,7730	0,6538**	0,4245**	0,1232**	1,7967	0,4673	0,0994**
PT	2,7404	1,8705	1,3862**	0,7709**	0,4728**	1,6462	0,7820	0,4511**
Salv. Caetano	0,1769	67,2829	0,3522*	0,0512*	0,0340**	2,6090	0,2564	0,0013
Soares Costa	0,2486	5,6703	0,4175**	0,2049**	0,0393**	2,0658	0,2749	0,0215**
Somague	0,5464	5,0832	0,6189**	0,3115**	0,0547**	2,0099	0,3219	0,0511**
Sonae	1,7886	2,5303	1,1199**	0,6435**	0,3104**	1,7436	0,6801	0,2673**
Sonae-Ind.	0,9386	3,3932	0,8112**	0,4655**	0,1033**	1,8552	0,4320	0,1221**
Tertir	0,1569	8,4083	0,3317**	0,1354**	0,0256**	2,2005	0,2234	0,0093**

Tabela 4.3: Medidas de associação entre cada uma das taxas de rentabilidade diárias dos títulos e do índice PSI 20. β corresponde ao parâmetro estimado por *OLS* no modelo de regressão linear simples, onde R é o coeficiente de correlação linear. Todas as entropias e a informação mútua estão medidas em *nats*. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

entropia condicionada, ainda que se possam encontrar movimentos estatísticos irregulares. Com vista a avaliar melhor as relações estabelecidas entre as medidas enunciadas são apresentadas as Figuras 4.5 e 4.6.

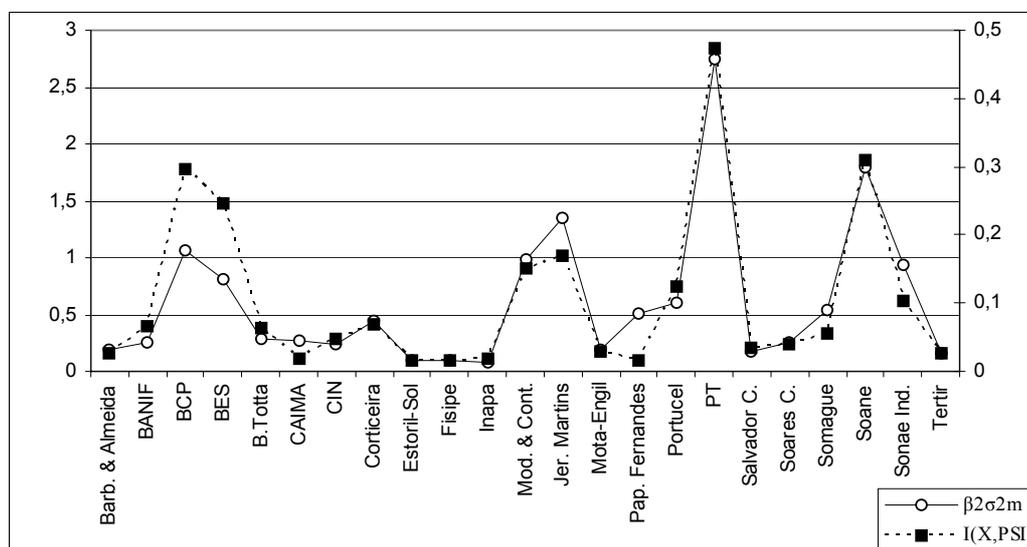


Figura 4.5: Análise comparativa entre o comportamento do risco sistemático, $\beta_i^2 \sigma_m^2$, e da informação mútua, $I(X, PSI)$.

A Figura 4.5 apresenta uma associação relativamente forte entre as medidas em causa, sendo revelador que os títulos que apresentam maior nível de associação para com o índice PSI 20 (BCP, BES, Modelo & Continente, Jerónimo Martins, PT e Sonae) apresentam os valores mais elevados de risco sistemático e simultaneamente de informação mútua. Já os títulos Barbosa & Almeida, Caima, Estoril-Sol, Fisipe, Salvador Caetano e Tertir são aqueles que menos relação ou associação apresentam para com o funcionamento do índice de mercado, sendo concordantes as duas medidas em estudo.

A Figura 4.6 revela também a existência de uma relação positiva entre o risco específico e a entropia condicionada entre cada um dos títulos e o índice PSI 20. É de notar que os títulos que se realçam pelos elevados valores destas medidas são Barbosa & Almeida, Caima, Estoril-Sol, Fisipe, Papelaria Fernandes, Salvador Caetano e Tertir. Estes resultados não são surpreendentes, uma vez que são precisamente estes os títulos que no período em análise apresentaram menores níveis de liquidez, cuja ponderação no índice PSI 20 é extremamente reduzida e portanto menor associação com o dito índice.

Apesar da aparente relação positiva e forte entre as medidas da análise da variância e as medidas

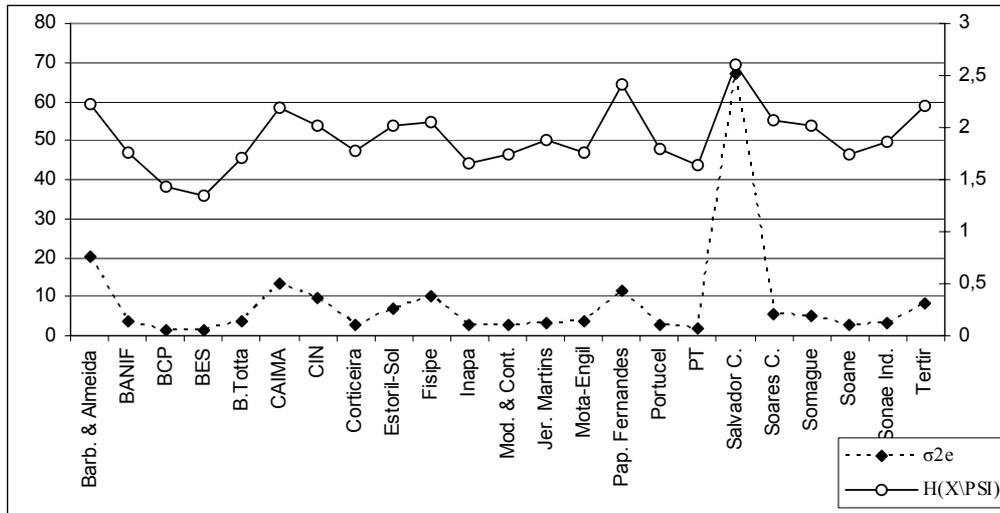


Figura 4.6: Análise comparativa entre o comportamento do risco específico, σ_{ei}^2 , e da entropia condicionada, $H(X|PSI)$.

da teoria da informação é conveniente proceder à comparação entre medidas cujos valores possam ser directamente comparáveis. Neste contexto, procedeu-se à análise comparativa entre o coeficiente de correlação global (λ) e o coeficiente de correlação linear (R) (Figura 4.7). Caso a relação entre as variáveis em causa possa ser fielmente representada por um modelo linear e os resíduos resultantes da estimação do modelo linear não apresentem evidência estatística de autocorrelação, heterocedasticidade, não-normalidade e não-estabilidade, então λ e R deverão apresentar valores semelhantes.

Como se pode verificar pela análise da Figura 4.7 existem alguns títulos cuja relação com o índice PSI 20 apresenta fortes discrepâncias quando analisada de uma perspectiva global face a uma perspectiva puramente linear. Neste contexto são de evidenciar os títulos Barbosa & Almeida, Banif, Caima, CIN e Salvador Caetano que apresentam as diferenças mais significativas entre λ e R . Com vista a tentar avaliar as causas de tais diferenças foram realizados diversos testes aos resíduos provenientes da estimação do modelo de regressão linear entre cada um dos títulos e o índice PSI 20 (Modelo de Mercado), nomeadamente o teste de *Ljung-Box* à autocorrelação, o teste *Jarque-Bera* à normalidade, o teste de Engle à homocedasticidade e os testes *CUSUM* e *CUSUM-Q* à estabilidade dos resíduos.¹⁵ Os resultados dos testes enunciados indicam que são precisamente os resíduos resultantes da aplicação do Modelo de Mercado entre os títulos Barbosa & Almeida, Banif, Caima, CIN e Salvador Caetano e o índice PSI 20, que mais problemas apresentam em

¹⁵Os resultados destes testes encontram-se em anexo (Anexo D).

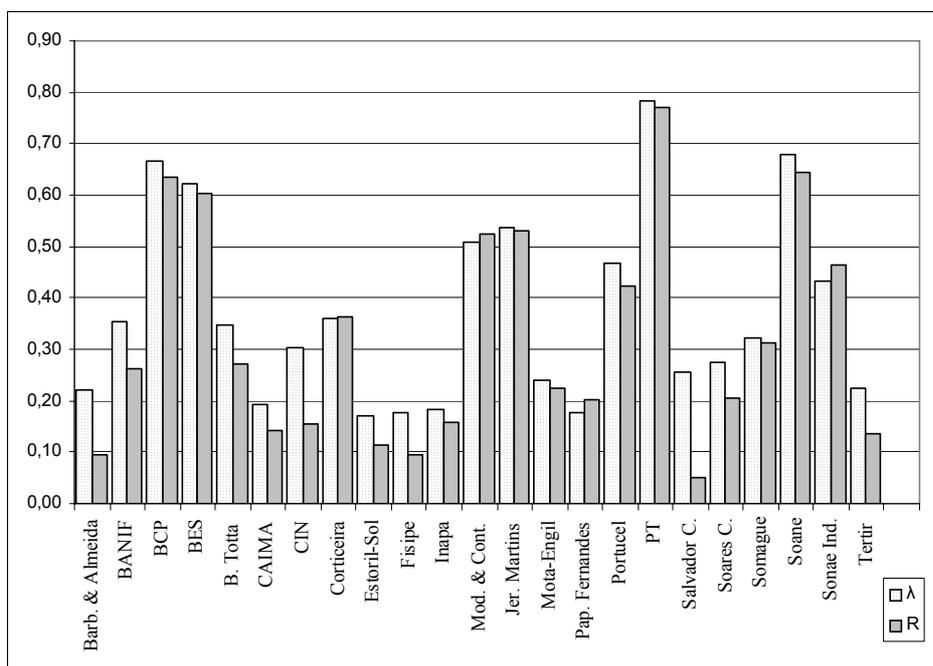


Figura 4.7: Coeficiente de correlação global (λ) e coeficiente de correlação linear (R) entre cada um dos títulos e o índice PSI 20.

termos de comportamento. Mais concretamente, estes são os títulos cujos resíduos apresentam maior evidência de autocorrelação linear, elevados valores de assimetria e curtose, sendo também rejeitada de forma significativa a hipótese de homocedasticidade. Além disso, são ainda os resíduos referentes a estes títulos que apresentam quebras estruturais mais acentuadas, medidas pelos testes *CUSUM* e *CUSUM-Q*, indicando assim que a simples aplicação de um modelo de regressão linear para analisar a relação estabelecida entre estes títulos e o índice PSI 20 pode não ser suficiente. Por outro lado, os resíduos dos títulos BCP, BES, Corticeira Amorim, Modelo & Continente, Jerónimo Martins, PT, Somague e Sonae são aqueles cujos valores de λ e R mais se aproximam e apresentam as menores diferenças. Se se analisar o comportamento dos resíduos resultantes da aplicação do Modelo de Mercado a estes títulos verifica-se que são precisamente aqueles que apresentam menores valores de autocorrelação linear, assim como os valores da assimetria e curtose mais aproximados da distribuição normal e fraca ou nenhuma evidência de quebras estruturais. Tais resultados podem estar relacionados com o facto de que estes títulos são aqueles que apresentam maiores níveis de liquidez e por conseguinte, é maior a possibilidade de que os seus níveis de eficiência sejam superiores aos de títulos cuja liquidez e volume de transacções são relativamente fracos.

Dada a evidência de autocorrelação, heterocedasticidade, não-normalidade e não estabilidade

dos resíduos obtidos com o método de estimação *OLS*, foram utilizados outros métodos de estimação alternativos com vista a estimar os *Betas*, o risco sistemático e o risco específico de forma mais eficaz. Neste contexto foram utilizados os métodos *TSLS*, *3SLS* e *GMM*. Dado que os resultados obtidos com os dois primeiros métodos enunciados, não diferem grandemente dos resultados obtidos por *OLS*, serão apenas apresentados os resultados obtidos com o método *GMM* (Tabela 4.4).

Verifica-se que os *Betas* estimados por *OLS* são maioritariamente superiores aos *Betas* estimados por *GMM*, sendo maior a diferença para os títulos BES, Modelo & Continente, PT e Sonae Indústria. Para a grande maioria dos casos, o risco sistemático é superior quando estimado por *OLS*, sendo o risco específico inferior. Tais resultados indicam que não pressupondo que os resíduos são normalmente distribuídos e originando ortogonalidade entre os resíduos e a variável explicativa, são encontrados níveis de associação inferiores entre cada um dos títulos e a *proxy* utilizada. Naturalmente que os resultados são influenciados pelas variáveis instrumentais seleccionadas, que no presente caso são todos os títulos em estudo excepto o que está a ser alvo de análise no momento da estimação.¹⁶ Da análise comparativa entre o risco sistemático ($\beta_i^2 \sigma_m^2$) obtido por *GMM* e a informação mútua e o risco específico (σ_{ei}^2) e a entropia condicionada verifica-se que os comportamentos apresentados não diferem significativamente dos apresentados aquando da estimação dos riscos sistemático e específico por *OLS* (Figuras 4.8 e 4.9).

De um modo geral, os resultados apresentados indicam que, para muitos dos títulos analisados, a utilização de um modelo linear para avaliar a relação entre o título e o índice PSI 20 pode não ser suficiente, uma vez que podem existir não-linearidades ao nível do comportamento das variáveis e dos resíduos resultantes de tal relação que podem pôr em causa os resultados obtidos por tal via. As medidas da teoria da informação utilizadas e exploradas nesta secção, nomeadamente a entropia, a entropia conjunta, a entropia condicionada e a informação mútua, podem ser relacionadas com a análise de variância resultante da aplicação de um modelo linear e têm a capacidade de captar comportamentos ao nível das variáveis e dos resíduos que um modelo linear praticamente omite. Verifica-se que a entropia e as suas variantes têm a capacidade de captar (individual ou globalmente) a existência de assimetria, leptocurtose, evidência de autocorrelação, heterocedasticidade e a existência de quebras estruturais, permitindo que os seus resultados possam aproximar-se um pouco mais da realidade. De igual modo pode encarar-se a informação mútua como medida do nível de associação (ordinal) entre os títulos e o índice de mercado. Naturalmente que o sinal de tal associação não é conhecido uma vez que, admitindo a presença de não-linearidades, não faria

¹⁶Foram realizadas experiências com outras variáveis instrumentais, nomeadamente variáveis desfasadas do índice PSI 20 e dos títulos em estudo, contudo os resultados obtidos não se mostraram superiores aos apresentados. Na selecção das variáveis instrumentais foi utilizado o coeficiente de correlação linear, *R*.

<i>Títulos</i>	$\beta_i^2 \sigma_m^2$	σ_{ei}^2	β	R
Barb. & Almeida	0,1952	20,4185	0,3511**	0,0973**
BANIF	0,2260	3,5113	0,2757**	0,2459**
BCP	1,0345	1,6098	0,7255**	0,6255**
B. Totta	0,2349	3,6702	0,2539**	0,2453**
BES	0,7205	1,4991	0,5055**	0,5697**
Caima	0,2707	13,4593	0,3480**	0,1404**
CIN	0,2332	9,4995	0,3700**	0,1548**
Corticeira Amorim	0,3885	3,0170	0,3538**	0,3378**
Estoril-Sol	0,0949	7,0352	0,2496**	0,1153**
Fisipe	0,0977	10,0119	0,2337**	0,0983**
Inapa	0,0703	2,7493	0,1791**	0,1578**
Mod. & Continente	0,8612	2,7143	0,5329**	0,4908**
Jer. Martins	1,3358	3,4262	0,8807**	0,5296**
Mota-Engil	0,1714	3,6915	0,2419**	0,2106**
Pap. Fernandes	0,4876	11,7144	0,4732**	0,1999**
Portucel	0,5984	2,7861	0,5612**	0,4205**
PT	2,6528	1,9606	1,1350**	0,7583**
Salv. Caetano	0,2099	67,2864	0,3055*	0,0558*
Soares Costa	0,2150	5,7072	0,2576**	0,1905**
Somague	0,5282	5,1045	0,5012**	0,3062**
Sonae	1,7834	2,5378	1,0471**	0,6424**
Sonae-Ind.	0,8352	3,4990	0,5389**	0,4390**
Tertir	0,1458	8,4238	0,2353**	0,1304**

Tabela 4.4: Medidas de associação entre cada uma das taxas de rentabilidade diárias dos títulos e do índice PSI 20. β corresponde ao parâmetro estimado por *GMM* no modelo de regressão linear simples, onde R é o coeficiente de correlação linear. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

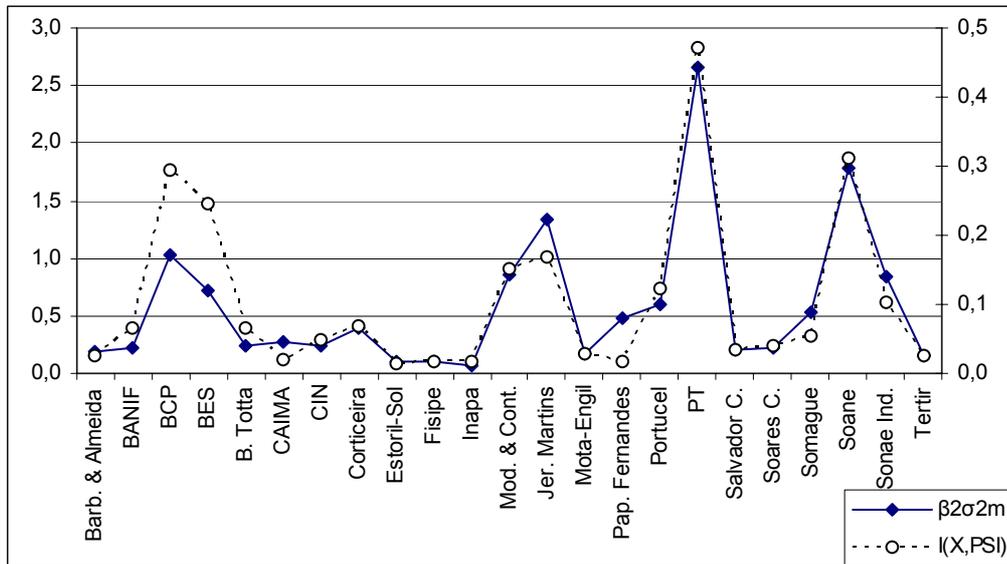


Figura 4.8: Análise comparativa entre o comportamento do risco sistemático, $\beta_i^2 \sigma_m^2$, e da informação mútua, $I(X, PSI)$, para o caso em que o risco sistemático foi estimado através do método *GMM*.

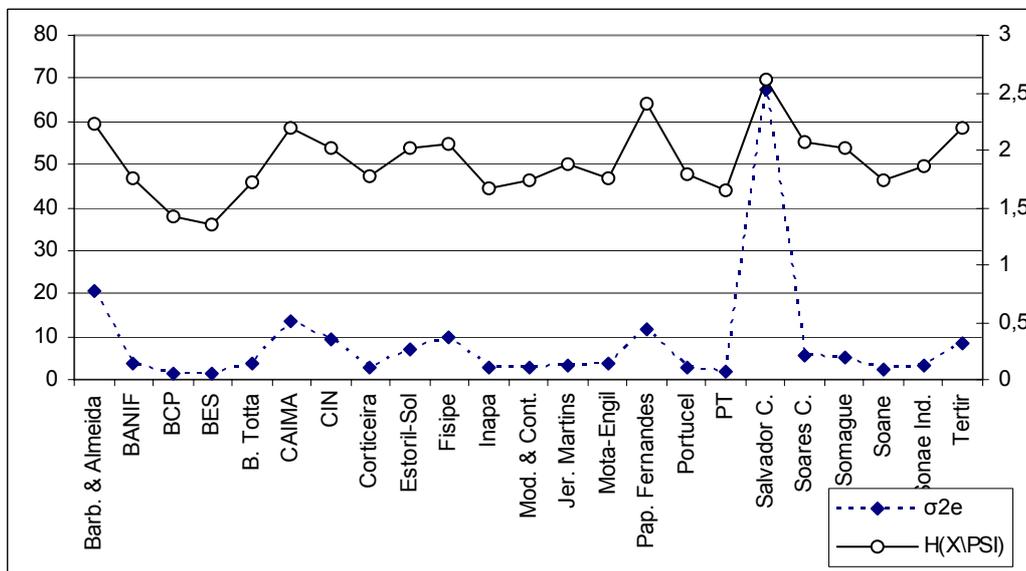


Figura 4.9: Análise comparativa entre o comportamento do risco específico, σ_{ei}^2 , e da entropia condicionada, $H(X|PSI)$, para o caso em que o risco específico foi estimado através do método *GMM*.

sentido procurar um sinal para tal relacionamento. Ainda assim é possível medir a magnitude de tal relação através do coeficiente de correlação global (λ) o que pode constituir uma fonte de informação complementar para o investidor.

4.3.2 Análise dos dados semanais

De forma análoga à análise realizada para os dados diários, foi elaborado o estudo para as observações semanais dos títulos e do índice PSI 20. Tal como já foi referido, para a obtenção das observações semanais foi tida em conta a cotação de fecho de cada Quarta-feira no período entre 28/06/1995 e 30/12/2002 obtendo-se 377 taxas de rendibilidade semanais.

Na Tabela 4.5 são apresentados os valores para as medidas de associação entre cada um dos títulos e o índice PSI 20. Conforme se pode notar, existe um comportamento similar entre a medida de risco sistemático, $\beta_i^2 \sigma_m^2$, e a informação mútua, $I(X, PSI)$, revelando alguma concordância entre a abordagem linear e a abordagem global quanto à associação entre os títulos e o índice de mercado (vide Figura .4.10).

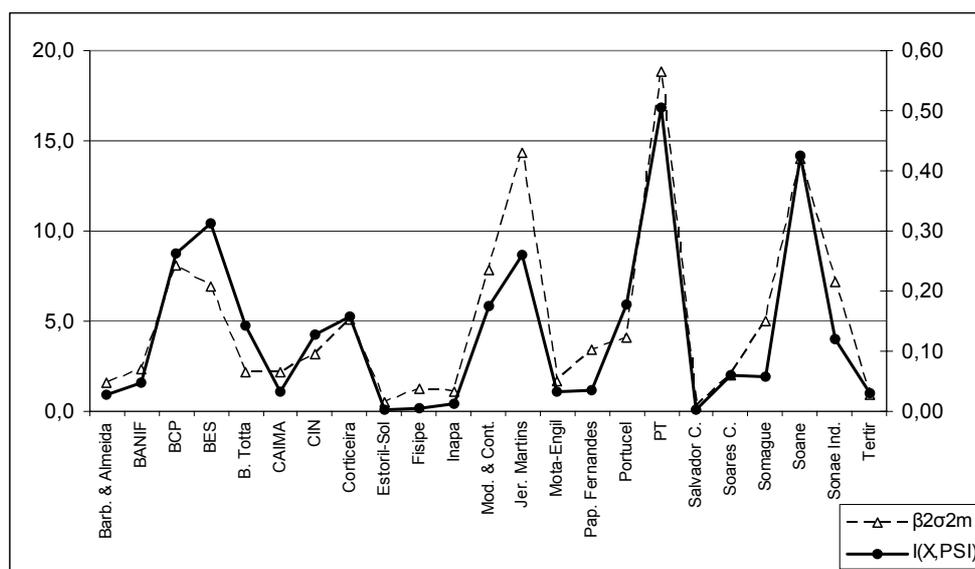


Figura 4.10: Análise comparativa entre o comportamento do risco sistemático ($\beta_i^2 \sigma_m^2$) e da informação mútua, $I(X, PSI)$, para as observações semanais.

Do mesmo modo se verifica que a medida do risco específico (σ_{ei}^2) e a entropia condicionada $[H(X|PSI)]$ também apresentam um comportamento relativamente similar, ainda que eventuais variações em (σ_{ei}^2) sejam muito mais acentuadas que as registadas pela entropia condicionada (vide Figura 4.11).

<i>Títulos</i>	$\beta_i^2 \sigma_m^2$	σ_{ei}^2	β	R	$I(X,PSI)$	$H(X PSI)$	λ	$IMN(X,PSI)$
Barb. & Almeida	1,6233	38,9055	0,3968**	0,2001**	0,0266*	2,9452	0,2276	0,0204
BANIF	2,3524	11,8443	0,4777**	0,4071**	0,0480**	2,9961	0,3025	0,0906**
BCP	8,1073	8,3823	0,8869**	0,7012**	0,2632**	2,4475	0,6397	0,3383**
B. Totta	2,1407	13,8755	0,4557**	0,3656**	0,1418**	2,4425	0,4969	0,0717**
BES	6,8996	8,0121	0,8182**	0,6802**	0,3129**	2,2511	0,6820	0,3106**
Caima	2,1733	23,1575	0,4592**	0,2929**	0,0332*	2,8724	0,2535	0,0449**
CIN	3,1864	17,5162	0,5560**	0,3923**	0,1279**	2,7000	0,4751	0,0836**
Corticeira Amorim	5,0871	13,9169	0,7025**	0,5174**	0,1566**	2,6210	0,5186	0,1558**
Estoril-Sol	0,4761	25,5998	0,2149**	0,1351**	0,0014	2,8856	0,0529	0,0092
Fisipe	1,2097	28,0698	0,3426**	0,2033**	0,0046	2,9435	0,0957	0,0211**
Inapa	1,0627	11,6125	0,3211**	0,2896**	0,0128	2,4554	0,1590	0,0438**
Mod. & Continente	7,8374	12,1117	0,8720**	0,6268**	0,1762**	2,6005	0,5450	0,2495**
Jer. Martins	14,3345	19,8169	1,1793**	0,6479**	0,2606**	2,8198	0,6373	0,2721**
Mota-Engil	1,6470	19,9739	0,3998**	0,2760**	0,0330*	2,7537	0,2527	0,0396**
Pap. Fernandes	3,4413	31,3706	0,5778**	0,3144**	0,0351*	2,9660	0,2604	0,0520**
Portucel	4,0956	13,0170	0,6304**	0,7940**	0,1784**	2,5923	0,5478	0,4976**
PT	18,8339	9,3835	1,3518**	0,8170**	0,5045**	2,5293	0,7971	0,5505**
Salv. Caetano	0,2246	22,6363	0,1476	0,0991	0,0014	2,8943	0,0529	0,0049
Soares Costa	2,0188	24,7810	0,4426**	0,2745**	0,0595**	2,8720	0,3350	0,0392**
Somague	5,0255	25,4640	0,6983**	0,4060**	0,0572**	2,9211	0,3288	0,0901**
Sonae	13,9885	13,3282	1,1650**	0,7156**	0,4241**	2,6205	0,7562	0,3588**
Sonae-Ind.	7,1372	18,2399	0,8322**	0,5303**	0,1212**	2,8104	0,4640	0,1651**
Tertir	0,9529	31,6122	0,3041**	0,1711**	0,0297**	2,9603	0,2401	0,0148

Tabela 4.5: Medidas de associação entre cada uma das taxas de rentabilidade semanais dos títulos e do índice PSI 20. β corresponde ao parâmetro estimado no modelo de regressão linear simples e R é o coeficiente de correlação linear, estimados por *OLS*. Todas as entropias e a informação mútua estão medidas em *nats*. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

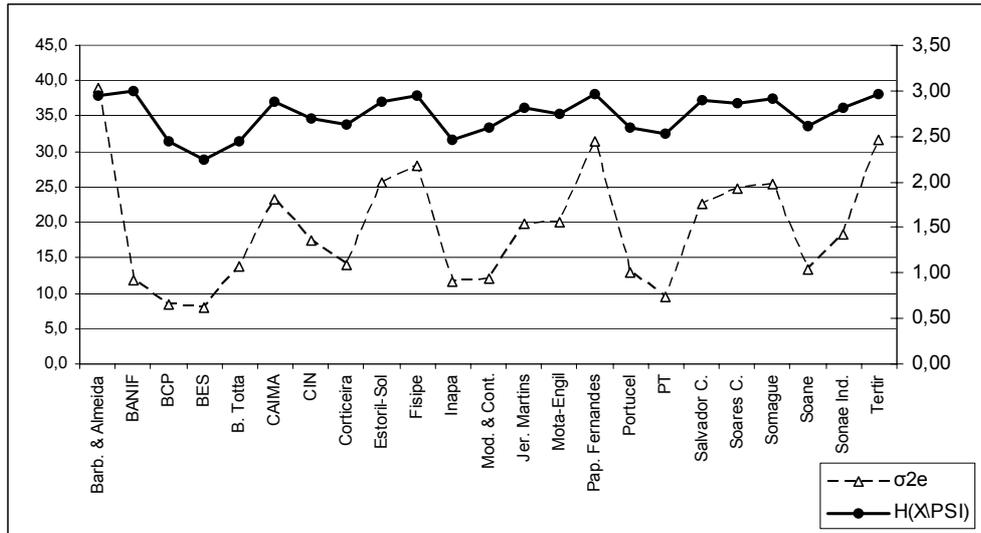


Figura 4.11: Análise comparativa entre o comportamento do risco específico (σ^2_{ei}) e da entropia condicionada $[H(X|PSI)]$ para as observações semanais.

A aparente semelhança em termos de comportamento entre o risco sistemático ($\beta_i^2 \sigma_m^2$) e a informação mútua e entre o risco específico (σ^2_{ei}) e a entropia condicionada, poderão indiciar que a relação entre as variáveis em causa é captada de igual modo tanto pela abordagem linear como pela abordagem global. Tal conclusão é precipitada, uma vez que a mera comparação de comportamentos não é em geral suficiente para avaliar tal hipótese. Neste sentido, procedeu-se à comparação entre o coeficiente de correlação linear (R) e o coeficiente de correlação global (λ) uma vez que os seus valores são directamente comparáveis.

Uma das primeiras ideias a retirar da análise da Figura 4.12 é o facto de o coeficiente de correlação global (λ) apresentar valores inferiores aos apresentados pelo coeficiente de correlação linear (R) em muitas das situações analisadas. Tal facto é indiciador da possível subestimação da informação mútua e das entropias, o que pode ser causado pelo pequeno número de observações das amostras em estudo. Com efeito, a estimação não-paramétrica da informação mútua e da entropia implica que as frequências relativas sejam encaradas como probabilidades, facto que pode conduzir a fortes enviesamentos quando as amostras são de pequena dimensão. Além disso, Darbellay e Vajda (1999) consideram que o método de estimação da informação mútua e da entropia pela equiquantização marginal é aquele que permite a minimização dos enviesamentos, ainda que necessite de pelo menos 500 observações para que as estimativas se aproximem o mais possível da realidade.

De acordo com os resultados apresentados na Figura 4.12 os títulos que registam as maiores

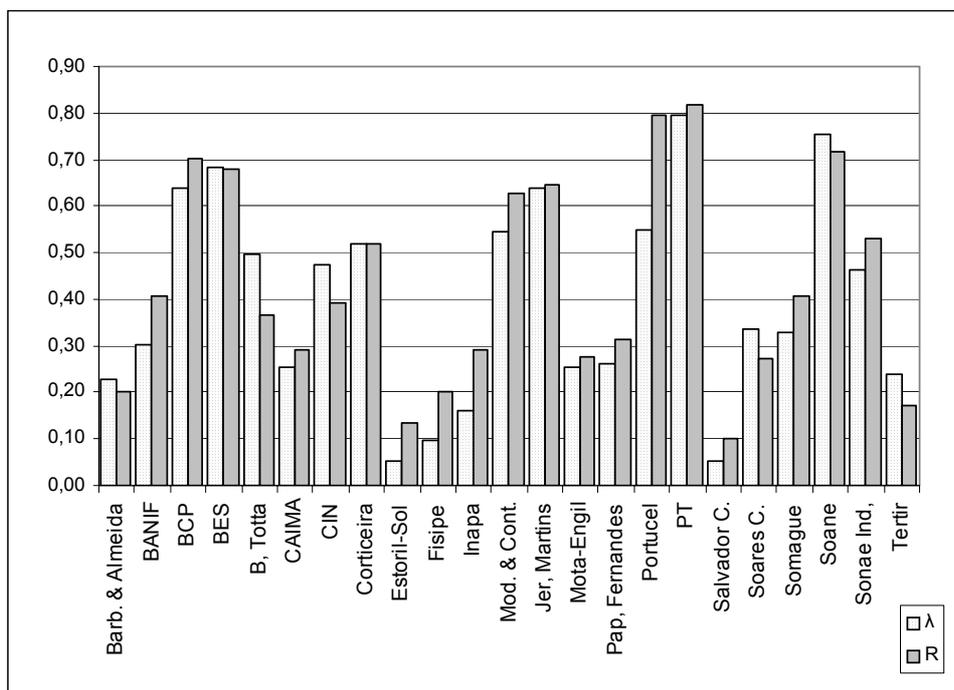


Figura 4.12: Coeficiente de correlação global (λ) e coeficiente de correlação linear (R) entre cada um dos títulos e o índice PSI 20 para as observações semanais.

diferenças positivas entre λ e R são respectivamente Barbosa & Almeida, Banco Totta, CIN, Soares da Costa e Tertir. Por outro lado, os títulos cujos valores de λ e R mais se aproximaram foram BES, Corticeira Amorim, Jerónimo Martins e PT. A relação das maiores ou menores diferenças entre os coeficientes de correlação global e linear e o maior ou menor afastamento do comportamento dos resíduos face aos pressupostos de ausência de autocorrelação, normalidade, homocedasticidade e estabilidade não é tão evidente como a preconizada para as observações diárias.¹⁷

Mais uma vez, dado o enviesamento apresentado pelos resíduos, foram estimados os coeficientes referentes ao modelo de regressão linear correspondente ao Modelo de Mercado, através de formas de estimação alternativas, nomeadamente *TSLS*, *3SLS* e *GMM*. Tal como ocorrido na análise das sucessões cronológicas diárias, os *Betas*, o risco sistemático e o risco específico estimados através dos métodos *TSLS* e *3SLS* não apresentaram resultados significativamente diferentes dos obtidos com *OLS*. Neste contexto, são apresentados apenas os resultados obtidos com o *GMM* (Tabela 4.6).

Denota-se pela comparação entre os resultados apresentados nas Tabelas 4.5 e 4.6, que os *Betas* estimados por *OLS* apresentam valores superiores aos estimados por *GMM*, sendo por isso também maior o risco sistemático e menor o risco específico quando estimados por *OLS*. Tal como obtido para as taxas de rendibilidade diárias, os resultados indicam que não pressupondo que os resíduos são normalmente distribuídos e originando ortogonalidade entre os resíduos e a variável explicativa, são encontrados níveis de associação inferiores entre cada um dos títulos e o PSI 20. Estes resultados podem ser influenciados pelas variáveis instrumentais seleccionadas, que no presente caso são todos os títulos em estudo excepto o que está a ser alvo de análise no momento da estimação.¹⁸ A análise comparativa entre o risco sistemático ($\beta_i^2 \sigma_m^2$) obtido por *GMM* e a informação mútua e o risco específico (σ_{ei}^2) e a entropia condicionada verifica-se que os comportamentos apresentados por estas medidas não diferem significativamente dos apresentados aquando da estimação dos riscos sistemático e específico por *OLS* (Figuras 4.13 e 4.14).

Denota-se uma tendência geral para um menor afastamento dos resíduos em relação a alguns pressupostos (estimados tanto por *OLS* e *GMM*), especialmente no que toca à homocedasticidade, ausência de autocorrelação e estabilidade. Ainda assim não é clara a relação entre estes desvios e as diferenças entre os coeficientes de correlação global e linear. Tal facto poderá dever-se à subestimação observada na informação mútua e nas entropias devido ao pequeno número de observações nas amostras em estudo. Neste contexto, parece existir alguma falta de robustez das medidas da

¹⁷Os resultados destes testes encontram-se em anexo (Anexo D).

¹⁸Foram realizadas experiências com outras variáveis instrumentais, nomeadamente variáveis desfasadas do índice PSI 20 e dos títulos em estudo, contudo os resultados obtidos não se mostraram superiores aos apresentados. Na selecção das variáveis instrumentais foi utilizado o coeficiente de correlação linear (R).

<i>Títulos</i>	$\beta_i^2 \sigma_m^2$	σ_{ei}^2	β	R
Barb. & Almeida	1,4178	39,1110	0,2592**	0,1870**
BANIF	2,0269	12,1697	0,3169**	0,3779**
BCP	7,9438	8,5458	0,7664**	0,6941**
B. Totta	1,6891	14,3272	0,2562**	0,3247**
BES	6,6240	8,2877	0,6548**	0,6665**
Caima	2,1120	23,2188	0,3839**	0,2888**
CIN	3,1162	17,5865	0,4737**	0,3880**
Corticeira Amorim	4,1127	14,8913	0,3999**	0,4652**
Estoril-Sol	0,2707	25,8052	0,1137**	0,1019**
Fisipe	1,1435	28,1360	0,2650**	0,1976**
Inapa	1,0339	11,6413	0,2751**	0,2856**
Mod. & Continente	6,9294	13,0197	0,5758**	0,5894**
Jer. Martins	14,3151	19,8363	1,1364**	0,6474**
Mota-Engil	1,3437	20,2771	0,2294**	0,2493**
Pap. Fernandes	2,7775	32,0344	0,3496**	0,2825**
Portucel	4,0658	13,0467	0,5920**	0,4874**
PT	18,6268	9,5906	1,4876**	0,8125**
Salv. Caetano	0,2034	22,6575	0,1783	0,0943
Soares Costa	1,9022	24,8976	0,3504**	0,2664**
Somague	4,3750	26,1145	0,4517**	0,3788**
Sonae	13,8267	13,4901	1,0482**	0,7114**
Sonae-Ind.	6,7946	18,5825	0,6587**	0,5174**
Tertir	0,7429	31,8222	0,2793**	0,1510**

Tabela 4.6: Medidas de associação entre as taxas de rendibilidade semanais dos títulos e do índice PSI 20. β corresponde ao parâmetro estimado por *GMM* no modelo de regressão linear simples, onde R é o coeficiente de correlação linear. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

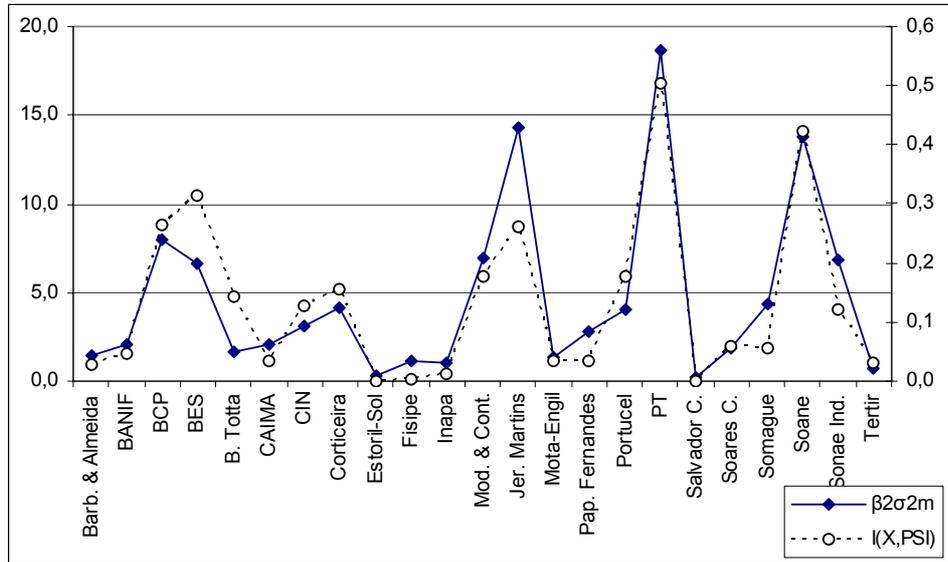


Figura 4.13: Análise comparativa entre o comportamento do risco sistemático ($\beta_i^2 \sigma_m^2$) e da informação mútua, $I(X, PSI)$, para as taxas de rendibilidade semanais. O risco sistemático foi estimado através do método *GMM*.

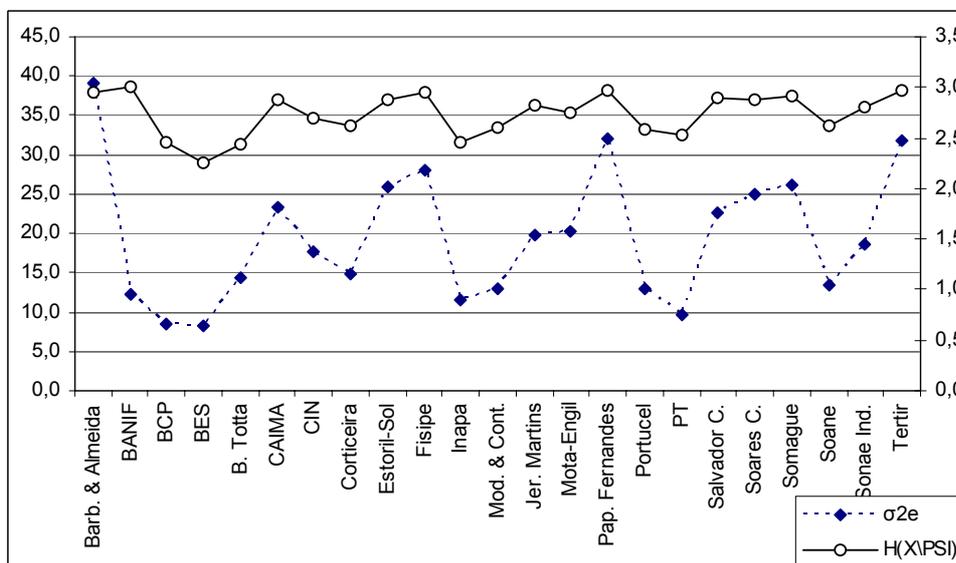


Figura 4.14: Análise comparativa entre o comportamento do risco específico (σ_{ei}^2) e da entropia condicionada [$H(X|PSI)$] para as taxas de rendibilidade semanais. O risco específico foi estimado através do método *GMM*.

teoria da informação analisadas, uma vez que os seus resultados apenas são plenamente satisfatórios aquando da existência de amostras de grande dimensão, o que na realidade económica pode constituir um entrave à sua utilização. Apesar de tudo, há que ter em conta que a entropia e suas variantes são medidas muito mais gerais e “livres” que as medidas obtidas através de modelos lineares, uma vez que têm a capacidade de captar as relações lineares e não-lineares entre cada um dos títulos e o índice de mercado sem a necessidade de pressupostos restritivos quanto ao comportamento das variáveis e dos resíduos.

De um modo global verificou-se que a entropia condicionada e a informação mútua apresentam um comportamento similar ao preconizado pelo risco específico e risco sistemático estimados através do Modelo de Mercado, demonstrando que as medidas da teoria da informação são sensíveis ao comportamento real dos dados, captando os efeitos da não satisfação de alguns pressupostos dos métodos de estimação de um modelo de regressão linear por *OLS*, *TSL*S, *3SLS* e *GMM*.

4.4 Síntese do capítulo

No presente capítulo foi realizada uma análise da entropia e suas variantes como medidas de incerteza e associação entre variáveis. Numa primeira fase procedeu-se à comparação do comportamento da entropia e do desvio-padrão para os títulos em estudo e carteiras compostas pelos referidos títulos. Verificou-se que, em termos globais, a entropia satisfaz as premissas necessárias para uma medida de incerteza, nomeadamente o facto de ser uma função contínua em p_i , ser aditiva e subaditiva e atingir um máximo quando se observa igual probabilidade de ocorrência dos acontecimentos. Em termos financeiros, os resultados obtidos neste estudo indicam que a entropia é sensível ao efeito diversificação e que apresenta um comportamento algo semelhante ao do desvio-padrão. Há que acrescentar que a entropia é uma medida mais geral, no sentido de que não necessita de pressupostos quanto à distribuição de probabilidade dos dados e tem a capacidade de captar características da distribuição de probabilidade empírica, nomeadamente a assimetria e a curtose. Deste modo a entropia como medida de incerteza surge como um complemento às tradicionais medidas de risco usadas no âmbito das finanças. Uma das suas principais limitações tem a ver com o facto de não ter em conta o valor das variáveis em estudo e apenas as suas probabilidades, o que pode dificultar e pôr em causa sua utilização numa função de utilidade e consequentemente em modelos de selecção de carteiras. Apesar de tudo, considera-se que as vantagens que apresenta como medida global da incerteza podem promover ao investidor um nível de informação superior acerca do mercado e seu comportamento.

Na segunda secção foi explorada a relação entre medidas da teoria da informação relacionadas

com a entropia, nomeadamente a informação mútua e a entropia condicionada e as medidas da análise de variância que no âmbito do modelo *CAPM* são encaradas como risco sistemático e risco específico. Neste contexto verificou-se existir uma forte similaridade de comportamento entre a medida de risco sistemático, $\beta_i^2 \sigma_m^2$, e a informação mútua e a medida do risco específico, σ_{ei}^2 , e a entropia condicionada, tanto para as observações diárias como para as observações semanais. Da análise comparativa entre os coeficientes de correlação global, λ , e linear, R , é de realçar que as diferenças mais significativas entre as medidas foram apresentadas pelos títulos cujos resíduos resultantes da aplicação do Modelo de Mercado estimado por *OLS* e *GMM* mais se afastavam dos pressupostos de ausência de autocorrelação, normalidade, homocedasticidade e estabilidade. Tal facto evidencia a potencialidade da entropia e suas variantes na captação das distribuições empíricas no seu todo tendo em conta as suas especificidades e características.

Os resultados para as observações semanais não permitiram as mesmas conclusões, revelando a subestimação da informação mútua e da entropia como a possível causa para tal. Este facto retira alguma robustez às medidas da teoria da informação apresentadas, uma vez que a sua forte exigência quanto à dimensão das amostras poderá inviabilizar a sua aplicação em diversas áreas.

O principal contributo deste estudo é mostrar que a entropia e a informação mútua como medidas de incerteza e de associação nos mercados bolsistas apresentam potencialidades que poderão conduzir à sua utilização e exploração como medidas complementares na gestão e análise de carteiras.

Capítulo 5

Dependência temporal: análise para diversos índices internacionais

Uma das principais premissas da hipótese de eficiência do mercado baseia-se na não possibilidade de predictabilidade que proporcione ganhos anormais de forma sistemática, conforme descrito no Capítulo 1. Esta não predictabilidade pressupõe que os preços dos activos, nomeadamente das acções apresentem um comportamento semelhante ao de um passeio aleatório, o que implica que os retornos ou respectivas taxas de rendibilidade sejam *i.i.d.*.

A avaliação da dependência temporal nas sucessões cronológicas das taxas de rendibilidade das acções e índices bolsistas tem sido realizada através de uma abordagem essencialmente linear, o que pode não ser suficiente para retirar conclusões fidedignas no caso de existirem não-linearidades nas variáveis em causa.

Neste capítulo é avaliada a dependência global (linear e não-linear) temporal de vários índices bolsistas internacionais, sendo estabelecida a comparação entre os resultados de diferentes abordagens. Neste contexto são utilizados modelos lineares (autocorrelação linear), e diversos testes à não-linearidade, nomeadamente o teste McLeod e Li, o teste de Engle, o teste *BDS*, o expoente de Lyapunov e a informação mútua.

5.1 Enquadramento

Encontram-se com bastante frequência na literatura financeira, teorias e modelos baseados na hipótese de eficiência do mercado, argumento que implica a não possibilidade de realizar predições com base nas observações das taxas históricas de rendibilidade ou outros factores, ou seja, não existe possibilidade de gerar lucros de forma sistemática, isto é, um mercado está tanto mais perto

da eficiência, quanto menos memória existir na sucessão cronológica das taxas de rendibilidade. A evidência empírica em torno desta problemática é ambígua, existindo estudos que apontam para a não eficiência dos mercados, baseando-se muitas vezes na dependência temporal que possa existir ao nível das taxas de rendibilidade [Lo *et al.* (1988), Poterba *et al.* (1988), Pesaran *et al.* (1995)]. Neste contexto, Hsieh (1995) afirma que a existência de autocorrelação estatisticamente significativa leva a supor que as respectivas taxas de rendibilidade não são aleatórias e por isso possa existir predictabilidade.

Uma das principais abordagens no estudo da dependência temporal baseia-se na utilização de modelos lineares. São muitos os autores que consideram que este tipo de análise é em geral inconclusiva, argumentado que a não evidência de dependência linear não é sinónimo de independência, sendo por isso essencial avaliar a dependência não-linear que possa existir [Ashley *et al.* (1986), Hsieh (1995), Darbellay (1998a), Maasoumi *et al.* (2002)]. A vasta utilização de modelos lineares prende-se com a sua relativa simplicidade, contudo, quando as variáveis não são contínuas, ou apresentam algum tipo de dependência não-linear ou quando o processo não é Gaussiano, as conclusões tiradas por estes modelos podem ser insuficientes ou até mesmo incorrectas [Granger *et al.* (2004)]. Os resíduos resultantes da aplicação de tais modelos podem incorporar não-linearidades não especificadas *a priori*. Uma das possíveis vias para análise da dependência não-linear nos resíduos tem sido a aplicação dos modelos *ARCH* e afins, de que são exemplo numerosos estudos, nomeadamente Hsieh (1989), Soares (1994), Qi (1999), Curto (2002), entre muitos outros.

A aplicação de um modelo linear, ou modelo não-linear específico, pode não conduzir a resultados satisfatórios, uma vez que se está a testar a hipótese conjunta de dependência e simultaneamente a especificação do modelo ser adequada ao problema em causa. Com vista à superação de tal problema, alguns autores [e.g. Stengos (1995)] consideraram modelos não-lineares e regressões não paramétricas para avaliar a dependência não-linear nas sucessões cronológicas das taxas de rendibilidade dos activos financeiros. Por exemplo, Díaz, Grau-Carles e Mangas (2002) consideraram que a possível dependência não-linear existente nas sucessões cronológicas financeiras poderia ser explicada por um comportamento determinístico que parecia ser aleatório (processo caótico, por exemplo). Uma segunda explicação adiantada por estes autores assenta na possibilidade das taxas de rendibilidade serem funções estocásticas não-lineares das suas observações passadas. De acordo com a segunda explicação, alguns modelos utilizados na avaliação de activos e respectiva volatilidade assumem que existe heterocedasticidade, sendo de evidenciar a utilização e desenvolvimento dos modelos *ARCH* neste contexto.

De acordo com vários autores [vide por exemplo Granger *et al.* (1994), Bernhard *et al.* (1999)], uma das medidas mais conhecidas e utilizadas para avaliar a dependência estatística é o coeficiente

de correlação linear, ainda que a sua aplicação apenas faça verdadeiramente sentido em relações lineares ou linearizáveis. Caso se trate de um sistema não-linear, os resultados ficarão restringidos à capacidade de ajustamento do modelo pré-definido à realidade, sendo essencial recolher mais informação sobre o sistema em estudo. Determinados momentos de ordem superior (nomeadamente a assimetria e a curtose) ganham relevância quando o sistema em causa é não-linear, mas ter em conta apenas estes momentos pode ser muito limitativo.

Existe a necessidade de avaliar a dependência de um modo global, seja linear ou não-linear e de forma independente de um modelo pré-definido. É neste contexto que é introduzida a informação mútua e exploradas as suas propriedades como medida de dependência temporal numa sucessão cronológica financeira.

Urbach (2000) defende a tese de que existe uma certa relação entre entropia, dependência e predictabilidade. Esta relação tem sido alvo de vários estudos, concluindo os autores que as medidas da teoria da informação, mais concretamente a informação mútua e a entropia métrica são medidas de dependência muito eficazes [Robinson (1991), Granger *et al.* (1994), Maasoumi *et al.* (2002), Darbellay *et al.* (2000b), Racine *et al.* (2004), Wang *et al.* (2005)]. A possível vantagem apresentada pela informação mútua advém do facto de esta medida ter em conta toda a estrutura da relação em causa, ou seja, tem em conta tanto a dependência linear como a não-linear.

5.2 Algumas abordagens à dependência não-linear

A análise da possível dependência não-linear que se possa estabelecer entre variáveis tem tido um desenvolvimento muito forte no campo da econometria, tendo sido aplicada a sucessões cronológicas financeiras com o intuito de verificar se a hipótese de eficiência do mercado (forma fraca) é consistente com a realidade. Este tipo de análise surgiu ao se verificar que os usuais testes de autocorrelação linear não eram suficientes, pois só captavam a dependência linear.

Brock, Hsieh e LeBaron (1991) descreveram alguns testes à não-linearidade, com o intuito de verificar se determinado mercado pode ou não ser considerado eficiente. Afonso e Teixeira (1998) aplicaram o teste de Engle, o teste de Tsay, o expoente de Lyapunov e o teste *BDS* aos índices BVL, PSI 20 e BVL 30, concluindo em todos os testes que existe dependência não-linear.

Os testes de McLeod e Li, de Engle, de Tsay, *BDS* e expoentes de Lyapunov são descritos seguidamente de forma sumária e posteriormente comparados os seus resultados com os obtidos com o teste da informação mútua.

As propriedades e a forma de estimação da informação mútua foram descritas no Capítulo 2, de acordo com as quais resulta que, teoricamente, a informação mútua poderá constituir uma impor-

tante ferramenta como teste de independência e medida de dependência, dado que não especifica qualquer tipo de estrutura ou modelo para essa mesma dependência, nem pressupõe nenhuma distribuição de probabilidade teórica *a priori*, facto que permite que os enviesamentos provenientes da assunção de modelos e distribuições de probabilidade pouco adequados, seja minimizado.

O teste de McLeod e Li

McLeod e Li (1983) conceberam um teste à não-linearidade de sucessões cronológicas baseado na análise da correlação dos quadrados dos desvios, sendo análogo às conhecidas estatísticas de *Box-Pierce* e de *Ljung-Box*. De acordo com os referidos autores, este teste deve ser aplicado a sucessões cronológicas filtradas de autocorrelação linear e no fundo testa a presença de heterocedasticidade condicionada nas observações em causa, que de acordo com a hipótese nula não deveria ser estatisticamente significativa [Altug *et al.* (1999)].

De modo a testar se uma determinada sucessão cronológica X_t é ruído branco, onde $k = 1, \dots, m$ é a ordem dos lags e T é o número de observações da amostra. McLeod e Li (1983) propuseram a seguinte abordagem para determinar o coeficiente não-linear entre as observações

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^T (X_t^2 - \hat{\sigma}_T^2) (X_{t-k}^2 - \hat{\sigma}_T^2)}{\sum_{t=1}^T (X_t^2 - \hat{\sigma}_T^2)^2}, \quad (5.1)$$

com

$$\hat{\sigma}_T^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t^2.$$

A estatística do teste é calculada então pela seguinte expressão

$$Q_{ML}(m) = T(T+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}(k)}{T-K}. \quad (5.2)$$

Esta estatística segue uma distribuição $\chi^2(m)$ e a hipótese nula baseia-se na ausência de autocorrelação, ou seja

$$\rho(k) = \frac{\text{cov}(X_t^2 - X_{t-k}^2)}{\text{var}(X_t^2)} = 0, \forall k = 1, \dots, m, \quad (5.3)$$

isto é, a hipótese nula e a hipótese alternativa podem ser descritas por

$$H_0 : \rho(1) = \dots = \rho(m) = 0$$

$$H_1 : \exists k : \rho(k) \neq 0.$$

Este teste pode ser usado para detectar não-linearidades do tipo bi-linear, ainda que quando se obtém um resultado estatisticamente significativo não se pode distinguir claramente se se trata de não-linearidade ou má especificação do modelo. De acordo com alguns estudos comparativos realizados por Petrucci e Davies (1986) este teste é válido para testar a hipótese de linearidade face a alternativas não-lineares tipo *ARCH*, ainda que a sua potência seja inferior à de outros testes, nomeadamente o teste de Engle.

O teste de Engle

Os conhecidos modelos *ARCH* foram desenvolvidos por Engle em 1982, que propôs também um teste à não-linearidade no segundo momento. Na sua forma mais simples um processo *ARCH* (p) pode ser descrito da seguinte forma

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2,t} + \dots + \varepsilon_t, \quad (5.4)$$

onde

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t)$$

e

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2. \quad (5.5)$$

A hipótese nula do teste baseia-se na ausência de autocorrelação no termo residual, ou seja,

$$H_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0.$$

O procedimento para testar esta hipótese é o seguinte [ver por exemplo Afonso *et al.* (1998)]:

- (1) Estimar a regressão linear de Y_t em X_t (se X_t se refere a observações passadas de Y_t então procede-se simplesmente a um *AR*(p)) e guardar os resíduos;
- (2) Estimar a regressão dos quadrados dos resíduos estimados ε_t^2 numa constante e p desfasamentos dos valores ε_t^2 , ou seja

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \hat{\eta}_t \quad (5.6)$$

e guardar os resíduos $\hat{\eta}_t$;

- (3) Calcular o R^2 da segunda regressão efectuada e testar a hipótese nula usando a estatística nR^2 , que segue uma distribuição $\chi^2(p)$, segundo a hipótese nula de ausência de dependência tipo *ARCH*.

O teste de Tsay

Enquanto que o teste de Engle examina a não-linearidade na variância, o teste de Tsay analisa a possível não-linearidade na média, mais concretamente a possibilidade de ajustamento de um modelo *SETAR* (*Self-Exciting Threshold Autoregressive Model*). O modelo *SETAR* é um caso geral dos modelos *TAR* cuja particularidade reside no facto de que quer o regime de transição, quer o número de defasamentos são detectados estatisticamente através de testes adequados, em vez de serem escolhidos arbitrariamente pelo investigador como nos modelos *TAR* e *M-TAR*.

O teste foi desenvolvido e apresentado por Tsay (1986) (*F-Test*) e pode ser implementado da seguinte maneira:

- (1) Obter os resíduos $\hat{\varepsilon}_t$ da regressão de Y_t em X_t (ou estimar um modelo autorregressivo em relação a Y_t);
- (2) Para cada observação de Y_t , construir um vector Z_t com os produtos cruzados das observações passadas, nomeadamente $Y_{t-i}Y_{t-j}$ para $i, j = 1, \dots, p$, onde $i \geq j$;
- (3) Estimar um modelo de regressão entre o vector Z_t e as variáveis explicativas, retirando-se para futura análise os resíduos estimados $\hat{\eta}_t$;
- (4) Estimar um modelo de regressão entre resíduos $\hat{\varepsilon}_t$ e $\hat{\eta}_t$ da seguinte forma

$$\hat{\varepsilon}_t = \delta_0 + \delta_1 \hat{\eta}_{t-1} + \dots + \delta_p \hat{\eta}_{t-p} + \hat{\xi}_t; \quad (5.7)$$

- (5) Assumindo que $m = p(p+1)/2$, é possível calcular a estatística Tsay através da expressão

$$\hat{F} = \frac{\frac{(\hat{\varepsilon}^T \hat{\eta})^T (\hat{\eta}^T \hat{\eta})^{-1} (\hat{\eta}^T \hat{\varepsilon})}{m}}{\frac{(\hat{\xi}^T \hat{\xi})}{n - p - m - 1}}; \quad (5.8)$$

- (6) A hipótese nula deste teste consiste em

$$H_0 : \delta_1 = \dots = \delta_p = 0.$$

A estatística em questão [expressão (5.8)] tem uma distribuição $F(m, n - p - m - 1)$ segundo a hipótese nula e é sensível a desvios de linearidade em relação à média.

A aplicação deste teste tem como inconveniente o facto de apenas captar efeitos *TAR*, de tal modo que se a fonte de não-linearidade nas observações não for do tipo *TAR*, os resultados deste teste podem ser inconclusivos.

Os expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov são um dos invariantes métricos mais importantes utilizados em dinâmica não-linear para distinguir comportamentos caóticos de comportamentos aleatórios, medindo a rapidez com que órbitas vizinhas divergem no espaço de fase [Abarbanel, (1996), Peters (1996)] e dando o expoente de Lyapunov dominante uma indicação do intervalo de tempo onde é possível fazer previsões credíveis acerca do futuro comportamento do sistema.

Para sucessões cronológicas geradas por sistemas dinâmicos determinísticos, a presença de um expoente de Lyapunov positivo indica a presença de caos [Rosenstein *et al.* (1993), Abarbanel (1996), Peters (1996)], pois tal significa que as órbitas divergem entre si rapidamente, já um expoente de Lyapunov negativo mede a contracção entre as órbitas¹ [Peters (1996)]. Para um sistema dinâmico caótico, a sensibilidade às condições iniciais é quantificada pelos expoentes de Lyapunov. Considere-se por exemplo, duas trajectórias com condições iniciais muito próximas, se a dinâmica for caótica, as trajectórias divergem, em média, a uma taxa exponencial caracterizada pelo maior expoente de Lyapunov. A soma de todos os expoentes dá a taxa de contracção do volume de fase. Assim se existir um atractor (o sistema é dissipativo) e se pelo menos um dos expoentes de Lyapunov é positivo está-se na presença de um atractor estranho.

A forma de estimação dos expoentes de Lyapunov não é pacífica, dada a sua elevada sensibilidade ao método de estimação utilizado. Refere-se o trabalho pioneiro de Wolf, Swift, Swinney e Vastano em 1985 que estimaram o maior expoente de Lyapunov através de uma média das taxas de divergência das órbitas observadas. Rosenstein, Collins e De Luca (1993) consideram que muitos dos métodos vulgarmente utilizados para estimar o expoente de Lyapunov dominante podem apresentar pelo menos uma das seguintes lacunas: (i) fraca viabilidade para amostras de pequena dimensão; (ii) computacionalmente intensivos; (iii) difícil implementação.

Considerem-se dois pontos, x_0 e $x_0 + \varepsilon$, afastados um do outro por uma diferença infinitesimal ε e iteram-se n vezes. A diferença nos resultados será dada por

$$d_n = e^{n\lambda(x_0)}\varepsilon, \quad (5.9)$$

em que após se encontrar a convergência (ou divergência) a taxa λ corresponde ao expoente de Lyapunov

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{d_n}{\varepsilon} \right|. \quad (5.10)$$

¹Peters (1996) dá como exemplo de um sistema com expoente de Lyapunov negativo um pêndulo que volta à posição inicial após ter sido perturbado.

Uma das principais dificuldades no estudo das séries temporais económicas (e outras séries experimentais provenientes de observações empíricas) consiste no facto de que a informação disponível é representada por sequências numéricas discretas, sem qualquer referência às equações (determinísticas ou estocásticas) originais e podem conter ruído. Neste contexto, é essencial proceder à reconstrução do espaço de fase e pode não ser trivial a escolha da dimensão de mergulho, assim como o desfazamento temporal (ou atraso de tempo). Tal é possível devido ao contributo de Takens (1981), Grassberger e Proccacia (1983) e Kennel, Brown e Abarbanel (1992), entre outros, para a reconstrução do espaço de fase a partir das observações escalares disponíveis.

Para a estimação dos expoentes de Lyapunov são utilizados três programas baseados em algoritmos diferentes, mais concretamente, é utilizado um programa baseado no algoritmo de Wolf *et al.* (1985) em Matlab V.6.5, o pacote TSTOOL que corre em Matlab com um algoritmo melhorado de Wolf *et al.* (1985) e finalmente o programa CSPW baseado no algoritmo proposto por Abarbanel (1996).

O teste BDS

O teste *BDS* foi desenvolvido por Brock, Dechert e Scheinkman em 1991. Este teste pode ser utilizado apenas para produzir evidência indirecta sobre as não-linearidades existentes no sistema, uma vez que a sua distribuição estatística não é conhecida [Brock *et al.* (1991)]. Hsieh (1993) refere que o teste *BDS* tem a capacidade de detectar três tipos possíveis de observações não *i.i.d.*, nomeadamente a não estacionariedade, a não-linearidade e o caos determinístico. O conceito de independência estatística é normalmente definido em termos da distribuição conjunta das variáveis em estudo. Por razões de simplicidade vários testes tendem a medir diferentes implicações da independência. O teste *BDS* pode ser interpretado como uma medida não usual de divergência entre os momentos da distribuição conjunta e das distribuições marginais.

De modo a ser possível captar apenas a dependência não-linear, é conveniente que este teste seja aplicado a sucessões cronológicas filtradas da dependência linear que comportem, que serão à partida linearmente independentes [Díaz *et al.* (2002)].

As suas hipóteses baseiam-se em:

H_0 : as observações são perfeitamente independentes (geradas por um processo estocástico *i.i.d.*)

H_1 : existe dependência não-linear.

Seja a correlação integral como uma medida de fracção entre pares de pontos (x_t^m, x_s^m) na série com distância entre eles ε , definida por

$$C_m^m(\varepsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{t=1}^{N-1} \sum_{s=i+1}^N I(x_t^m, x_s^m), \quad (5.11)$$

onde

$$I(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{se } \|a - b\| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{noutros casos} \end{cases}, \quad (5.12)$$

e onde $\|\cdot\|$ é a norma supremo : $L_\infty = \max\{|a|\}$, $N = n - m + 1$ com n o número de observações e m a dimensão de mergulho. Se as observações forem geradas por um processo puramente estocástico estacionário, então a equação (5.11) pode ser reescrita da seguinte forma [Brock *et al.* (1991)]

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} C_m^n(\varepsilon) = \int_{r^m} \int_{r^m} I(a, b) dF_m(a) dF_m(b), \quad (5.13)$$

concluindo estes autores que no caso de as variáveis (ou observações) serem *i.i.d.* então: $C_m(\varepsilon) = C_1(\varepsilon)^m$. A estatística *BDS* é dada por

$$W_m^n(\varepsilon) = \frac{\sqrt{N} (C_m^n(\varepsilon) - (C_1^n(\varepsilon))^m)}{\sigma_m(\varepsilon)}, \quad (5.14)$$

onde $W_m^n(\varepsilon)$ converge para uma distribuição normal $N(0, 1)$, à medida que n tende para infinito. De acordo com Brock, Dechert e Scheinkman (1991) e Hsieh (1993) a distribuição normal pode ser uma boa aproximação para a estatística *BDS* para amostras com mais de 500 observações.

Este teste tem sido alvo de algumas críticas, especialmente por o mesmo requerer a definição da dimensão de mergulho (m) e da dimensão da distância (ε), cujas escolhas podem alterar de forma substancial os resultados obtidos. É usual que a dimensão da distância seja medida em termos do desvio-padrão (normalmente assumindo valores entre $0, 5\sigma$ e 2σ), enquanto que na dimensão de mergulho são tidos em conta $m = 2, \dots, 6$.² Hsieh (1991) afirma ainda que a não rejeição da hipótese nula, não implica forçosamente que as observações sejam *i.i.d.*

Granger, Maasoumi e Racine (2004) concluem que os testes de independência baseados na entropia e informação mútua poderão apresentar maior poder para rejeitar a hipótese nula (total independência) para amostras pequenas, que o teste *BDS* que pode incorporar contradições em si consoante a dimensão de mergulho (m) e a dimensão da distância (ε) seleccionadas. Estes autores argumentam que as medidas baseadas na entropia são medidas mais generalistas e que apresentam vantagens, nomeadamente o facto de terem em conta apenas a distribuição de probabilidade empírica e serem medidas sem dimensão. Ao contrário do teste *BDS* a entropia não se limita a testar a existência ou não de dependência não-linear, mas sim informar do grau de dependência em causa. A detecção de dependência não-linear por parte dos modelos de entropia demonstra ser tão boa quanto o teste *BDS* e melhor que a tradicional correlação ou análise de outros momentos [Maasoumi (1993), Maasoumi *et al.* (2002)] especialmente no caso de existência de não-linearidade.

²Neste estudo para o cálculo da estatística *BDS* usaram-se as dimensões de mergulho $m = 2, \dots, 5$ e as dimensões de distância $\varepsilon = 0, 5\sigma; 1\sigma; 1, 5\sigma$ e 2σ . Estes parâmetros são indicados em vários estudos, nomeadamente Hsieh (1993).

Racine e Maasoumi (2004) acrescentam ainda que o teste *BDS* pode apresentar fortes distorções, nomeadamente o facto de rejeitar a 100% a hipótese nula de independência, quando esta se verifica na realidade.

5.3 Evidência empírica

Com o objectivo de analisar as vantagens da informação mútua e o coeficiente de correlação global como medidas de dependência global temporal e possíveis vantagens face à abordagem linear (coeficiente de correlação linear) e alguns testes à não-linearidade focados na secção anterior, são apresentados os resultados obtidos. A informação mútua foi estimada através do método da equi-quantização marginal do espaço (descrito no Capítulo 2) e o coeficiente de correlação global foi calculado através da forma apresentada na equação (2.60). Para a realização do teste baseado na informação mútua [vide teste descrito em (2.68)] foram utilizadas as tabelas de valores críticos calculadas para o efeito e que se encontram em anexo (Anexo A).

Os índices considerados, retirados da base de dados *DataStream*, são respectivamente ASE (Grécia), CAC 40 (França), DAX 30 (Alemanha), FTSE 100 (Inglaterra), PSI 20 (Portugal), IBEX 35 (Espanha) e S&P 500 (EUA), cuja análise estatística é apresentada no Capítulo 3. De salientar ainda que foram utilizadas as cotações de fecho diárias dos índices, no período entre 4/01/1993 a 31/12/2002 o que corresponde a cerca de 2596 observações para a análise dos dados diários, com vista ao cálculo das taxas de rendibilidade. As taxas de rendibilidade foram calculadas através da equação (3.2). Na análise dos dados semanais, foram tidas em consideração as cotações de fecho de todas as Quartas-feiras, correspondendo a uma amostra de 517 taxas de rendibilidade.³

Procedeu-se ao ajustamento dos valores dos índices, de forma a permitir uma harmonização de pequenas diferenças, ao nível dos dias de funcionamento das bolsas dos vários países em estudo. Considerou-se, com o objectivo de evitar a perda de observações, que se um índice não é cotado num dia, a sua cotação mantém-se inalterada face à do dia imediatamente anterior.

5.3.1 Análise dos dados diários

Na tentativa de avaliar as possíveis dependências temporais nas sucessões cronológicas financeiras em estudo, foram feitos testes à possível dependência linear, com o intuito de verificar a presença de autocorrelação. Para tal foi aplicado o teste de *Ljung-Box*, cujos resultados são apresentados na

³Foram também calculadas as taxas de rendibilidade mensais, mas dada a pequena dimensão das amostras (119 observações) os resultados foram inconclusivos.

Tabela 5.1. É de evidenciar o facto de a dependência face a observações desfasadas ser significativa para alguns dos índices, excepto para os índices DAX 30, IBEX 35 e S&P 500.⁴

	ASE	CAC 40	DAX 30	FTSE 100	IBEX 35	PSI 20	S&P 500
LBQ(10)	37,197**	24,208**	17,43	45,716**	14,757	54,410**	16,782
ρ_1	0,108**	0,013	-0,025	0,022	0,032	0,129**	0,001
ρ_2	-0,006**	-0,028	-0,031	-0,058**	-0,035	0,039**	-0,025
ρ_3	-0,023**	-0,071**	-0,021	-0,084**	-0,047**	0,005**	-0,046

Tabela 5.1: Teste de *Ljung-Box* e coeficiente de autocorrelação para as observações diárias das taxas de rendibilidade dos índices. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

Numa primeira fase, foi calculada a informação mútua⁵ dos índices bolsistas em estudo face aos 10 primeiros *lags* (de *per se*). A Figura 5.1 realça a existência de fortes diferenças entre os índices no que concerne à dependência face a observações temporalmente desfasadas.

De um modo relativamente grosseiro podem-se agrupar os índices em três grupos: o grupo que apresenta dependência temporal muito fraca, constituído pelo índice CAC 40; um segundo grupo cujo nível de dependência temporal pode ser considerado médio, constituído pelos índices FTSE 100, IBEX 35 e PSI 20 e por fim, o grupo que apresenta fortes sinais de dependência temporal: ASE, DAX 30 e S&P 500. Dada a heterogeneidade existente entre os mercados de cada grupo constituído, não é muito plausível avançar com as características do mercados referentes aos índices como causa da maior ou menor dependência global, pois não há unanimidade de critérios, como é normalmente realizado [vide por exemplo Curto (2002)].

De realçar que o valor da informação mútua é mais forte para o índice S&P 500, cujos valores relativos à autocorrelação linear se revelaram não significativos, podendo indicar que existe uma forte dependência não-linear neste índice. Deve-se também referir o peso importante e significância estatística de *lags* mais afastados nos índices IBEX 35, DAX 30 e S&P 500, conduzindo à ideia de que a memória poderá não ser tão curta quanto aquilo que é normalmente aceite (cerca de 1 ou 2 dias). De acordo com Bonanno, Lillo e Mantegna (2001) e Mantegna, Palágyi e Stanley (1999) a função de autocorrelação é, normalmente, uma função monótona decrescente com o tempo, sendo realmente significativa para periodicidades reduzidas, o que de algum modo é contrariado pelos

⁴Foi também realizado o teste à correlação *LM*, cujos resultados não se revelaram significativamente diferentes dos resultados obtidos com os teste *Ljung-Box*.

⁵A informação mútua está medida em *nats*, uma vez que foi utilizado para o seu cálculo o logaritmo neperiano.

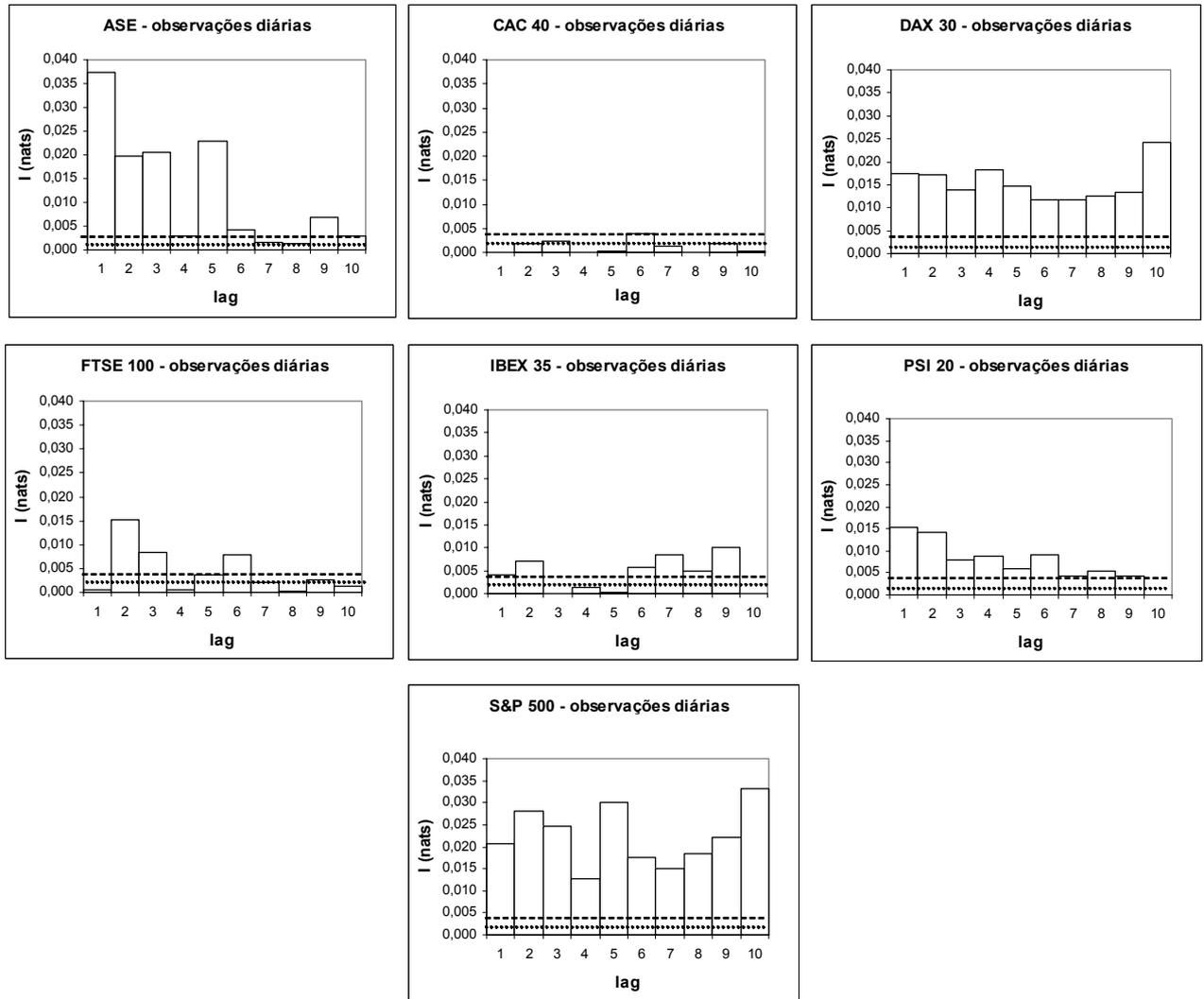


Figura 5.1: Informação mútua para os índices bolsistas face aos lags $k = 1, \dots, 10$. O segmento de recta a tracejado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 1% (0,0030 *nats*) e o segmento de recta a ponteadado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 5% (0,0015 *nats*), com 2 graus de liberdade.

valores encontrados. Esta propriedade está intimamente ligada à hipótese de eficiência do mercado, dado que anula quaisquer possibilidades de arbitragem e concretização de ganhos anormais. Contudo, a não existência de autocorrelação não é sinônimo de independência, podendo existir dependência não-linear que pode estar presente numa escala temporal superior ao que é considerado normal. Alguns autores afirmam ainda que a presença de dependência não-linear pode estender-se por cerca de 20 dias, de forma significativa [Bonanno *et al.* (2001), Mantegna *et al.* (1999)].

Foi calculada a informação mútua e o coeficiente de correlação global (λ) para as sucessões cronológicas em estudo para diferentes *lags* analisados de forma individual e acumulada e foram comparados estes valores com a informação mútua normal [equações (2.61) e (2.62)] e com o coeficiente de correlação linear (vide Tabelas 5.2, 5.3 e 5.4).

	I (nats)	IMN (nats)	λ	R
<i>lag: 1</i>				
<i>ASE</i>	0,03750**	0,00583**	0,2681	0,10760
<i>CAC 40</i>	0,00008	0,00009	0,01233	0,01319
<i>DAX 30</i>	0,01740**	0,00031	0,18494	0,02470
<i>FTSE 100</i>	0,00054	0,00023	0,03161	0,02153
<i>IBEX 35</i>	0,00400**	0,00051	0,08926	0,03203
<i>PSI 20</i>	0,01540**	0,00841**	0,17416	0,12914
<i>S&P 500</i>	0,02080**	0,00000	0,20186	0,00118

Tabela 5.2: Informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação linear (R) e coeficiente de correlação global (λ) entre $r_{i,t}$ e $r_{i,t-1}$ para as observações diárias, sendo $r_{i,t}$ a taxa de rentabilidade do índice i no dia t . ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

De acordo com a Tabela 5.2, verifica-se que os coeficientes de correlação linear e global não estão ordenados de igual modo:

$$R_{S\&P500} < R_{CAC40} < R_{FTSE100} < R_{DAX30} < R_{IBEX35} < R_{ASE} < R_{PSI20},$$

$$\lambda_{CAC40} < \lambda_{FTSE100} < \lambda_{IBEX35} < \lambda_{PSI20} < \lambda_{DAX30} < \lambda_{S\&P500} < \lambda_{ASE}.$$

Evidencia-se o índice S&P 500 que é aquele que apresenta menor correlação linear face à observação $t - 1$ e contudo é um dos que apresenta maior correlação global, indicando a possível existência de uma forte dependência temporal não-linear. Da Tabela 5.3, verifica-se novamente que os coeficientes

	I (nats)	IMN (nats)	λ	R
<i>lag: 1 e 2</i>				
<i>ASE</i>	0,08550**	0,01191*	0,39646	0,10901
<i>CAC 40</i>	0,01640**	0,00087	0,17963	0,0379
<i>DAX 30</i>	0,03930**	0,00105	0,27494	0,04018
<i>FTSE 100</i>	0,01211*	0,00174	0,15463	0,06247
<i>IBEX 35</i>	0,00712*	0,00082	0,11874	0,04855
<i>PSI 20</i>	0,03880**	0,01706**	0,27325	0,12992
<i>S&P 500</i>	0,08141**	0,00032	0,38761	0,02476

Tabela 5.3: Informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação linear (R) e coeficiente de correlação global (λ) entre $r_{i,t}$, $r_{i,t-1}$ e $r_{i,t-2}$ para as observações diárias, sendo $r_{i,t}$ a taxa de rentabilidade do índice i no dia t . ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

de correlação linear e global não estão ordenados de igual modo, isto é:

$$R_{S\&P500} < R_{CAC40} < R_{DAX30} < R_{IBEX35} < R_{FTSE100} < R_{ASE} < R_{PSI20},$$

$$\lambda_{IBEX35} < \lambda_{FTSE100} < \lambda_{CAC40} < \lambda_{PSI20} < \lambda_{DAX30} < \lambda_{S\&P500} < \lambda_{ASE}.$$

Mais uma vez, o índice S&P 500 é aquele que apresenta menor correlação linear face às observações $t - 1$ e $t - 2$, contudo é um dos que apresenta maior correlação global, demonstrando a possível existência de uma forte dependência não-linear temporal. Relativamente ao índice ASE, tais conclusões não podem ser tiradas pois é simultaneamente um dos que apresenta maiores sinais de dependência linear e global. O índice PSI 20 é aquele que apresenta um maior valor para o coeficiente de correlação linear (R), mas o seu valor para o coeficiente de correlação global (λ) é menor que os apresentados pelos índices DAX 30, ASE e S&P 500, ainda que seja estatisticamente significativo o respectivo valor da informação mútua. De realçar que na Tabela 5.3 todos os valores da informação mútua estimados são estatisticamente significativos, o que não ocorre para a informação mútua normal, facto que poderá indiciar uma vez mais a presença de dependência temporal não-linear em determinados índices. Se se incluírem os três primeiros lags ($t - 1$, $t - 2$, $t - 3$), os resultados para a informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação global (λ) e coeficiente de correlação linear (R) revelam fortes diferenças entre a abordagem linear e a abordagem global preconizada pelas medidas da teoria da informação.

Pela análise da Tabela 5.4, verifica-se que os coeficientes de correlação linear e global não estão

ordenados de igual modo, isto é:

	I (nats)	IMN (nats)	λ	R
<i>lag: 1, 2 e 3</i>				
<i>ASE</i>	0,13670**	0,01745*	0,48909	0,11092
<i>CAC 40</i>	0,01400	0,00359	0,16617	0,07683
<i>DAX 30</i>	0,08550**	0,00341	0,39646	0,04821
<i>FTSE 100</i>	0,06060**	0,00808	0,33785	0,10231
<i>IBEX 35</i>	0,00073	0,00223	0,03826	0,06566
<i>PSI 20</i>	0,11662**	0,02500*	0,45608	0,12990
<i>S&P 500</i>	0,19270**	0,00152	0,56553	0,05229

Tabela 5.4: Informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação linear (R) e coeficiente de correlação global (λ) entre $r_{i,t}$, $r_{i,t-1}$, $r_{i,t-2}$ e $r_{i,t-3}$ para as observações diárias, sendo $r_{i,t}$ a taxa de rendibilidade do índice i no dia t . ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

$$R_{DAX30} < R_{S\&P500} < R_{IBEX35} < R_{CAC40} < R_{FTSE100} < R_{ASE} < R_{PSI20},$$

$$\lambda_{IBEX35} < \lambda_{CAC40} < \lambda_{FTSE100} < \lambda_{DAX30} < \lambda_{PSI20} < \lambda_{ASE} < \lambda_{S\&P500}.$$

O coeficiente de correlação global (λ) é superior ao coeficiente de correlação linear (R) e a informação mútua estimada (I) assume significância estatística para a maioria dos índices bolsistas, ao contrário da informação mútua normal (IMN) que apenas revela significância estatística para os índices ASE e PSI 20, denotando a existência de possível dependência não-linear temporal. De realçar também que o índice S&P 500 apresenta uma dependência não-linear muito forte (já comprovada pelos valores evidenciados na Figura 5.1), face ao coeficiente de correlação linear praticamente nulo. De acordo com o teste de *Ljung-Box* este índice não apresenta sinais de existência de autocorrelação linear significativa, mas tal conclusão não é semelhante para a autocorrelação global (neste caso não-linear) cujo (λ) assume valores acima de 0,15 nas situações analisadas.

Relativamente à análise da dependência temporal face aos dois primeiros *lags* ($t - 1$, $t - 2$) e aos três primeiros *lags* ($t - 1$, $t - 2$, $t - 3$) é possível verificar que a dependência não-linear tende a crescer à medida que são incluídos *lags* na análise, enquanto que o coeficiente de correlação linear (R) e a informação mútua normal (IMN) tendem a assumir valores sensivelmente constantes ao longo da análise. Os resultados permitem verificar a propriedade da aditividade da informação mútua para a maioria das situações analisadas, uma vez que à medida que são incluídos *lags* na

análise, a informação mútua tende a aumentar, por vezes de forma significativa. É de relembrar que a diferença $\lambda - R$ não corresponde exactamente à parte não-linear da dependência.

Os resultados obtidos apontam para a existência de uma dependência global superior à captada pelo coeficiente de correlação linear, apesar de não ser possível concluir sobre a relação entre o nível e grau dessa dependência e as características dos respectivos mercados. Torna-se, por isso, interessante proceder à análise das sucessões cronológicas filtradas, com vista a avaliar a dependência temporal exclusivamente não-linear. As sucessões cronológicas filtradas, às quais se deu o nome de $inovX$, foram obtidas através de processos $ARMA(p, q)$ seleccionados de acordo com o critério de informação AIC ,⁶ às quais foi aplicado o teste de *Ljung-Box* (Tabela 5.5). Naturalmente não foram calculadas as sucessões cronológicas filtradas para os índices DAX 30 e S&P 500 dado que não apresentaram, para nenhum dos *lags*, um coeficiente de autocorrelação linear significativo.

	$inovASE$	$inovCAC\ 40$	$inovFTSE\ 100$	$inovIBEX\ 35$	$inovPSI20$
LBQ(10)	7,484	11,702	37,572	9,012	9,4532
ρ_1	0,002	0,011	0,018	0,031	-0,002
ρ_2	-0,015	-0,03	-0,001	-0,034	0,013
ρ_3	-0,02	-0,002	-0,085	-0,001	-0,002

Tabela 5.5: Teste de *Ljung-Box* para as séries filtradas dos dados diários.

É de referir que a dependência linear face a observações passadas é inexistente nas séries filtradas. Neste contexto, para verificar se as observações são *i.i.d.*, foi aplicado o teste *BDS* [Hsieh (1989)] cujos resultados apontam claramente para a rejeição da hipótese nula, ou seja, é rejeitada a hipótese de que as observações das sucessões cronológicas em estudo sejam *i.i.d.* (vide Anexo E). A confirmação de que as sucessões cronológicas em estudo não são *i.i.d.* não é significado directo de que os mercados em causa não sejam eficientes, assim como não é sinónimo da existência de caos ou determinismo. A rejeição da hipótese de que as sucessões cronológicas em causa são *i.i.d.* é consistente com a possibilidade de existência de não estacionariedades nas mesmas, existência de dependência não-linear na média, existência de dependência não-linear na variância e/ou existência de caos ou determinismo [Hsieh (1991, 1993)]. Tendo os teste de *Dickey-Fuller* e *KPSS* (vide Capítulo 3) apontado para a estacionariedade das sucessões cronológicas em estudo, são apresentados os resultados de testes às restantes possibilidades.

⁶Os processos utilizados para os índices ASE, CAC 40, FTSE 100, IBEX 35 e PSI 20 foram respectivamente: $ARMA(1, 0)$; $ARMA(3, 1)$; $ARMA(3, 1)$; $ARMA(3, 0)$ e $ARMA(1, 0)$.

O resultado do teste de McLeod e Li é revelador da presença de heterocedasticidade condicionada, conforme se pode verificar pela análise da Tabela 5.6.

k	<i>inov</i> ASE	<i>inov</i> CAC 40	DAX 30	<i>inov</i> FTSE 100	<i>inov</i> IBEX 35	<i>inov</i> PSI20	S&P 500
1	0,204**	0,162**	0,226**	0,172**	0,147**	0,175**	0,209**
2	0,231**	0,214**	0,251**	0,253**	0,132**	0,086**	0,190**
3	0,145**	0,191**	0,240**	0,253**	0,152**	0,150**	0,182**
4	0,143**	0,181**	0,262**	0,227**	0,179**	0,108**	0,121**

Tabela 5.6: Teste de McLeod e Li aplicado às sucessões cronológicas filtradas. k representa o lag respectivo. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

Foi também aplicado às sucessões cronológicas filtradas o teste de Engle,⁷ que testa a não-linearidade no segundo momento. Os resultados são apresentados na Tabela 5.7. Os resultados

<i>ARCH</i>			
	<i>Estatística</i>	<i>p-value</i>	<i>d.f.</i>
<i>inov</i> ASE	79,1216	0,000	3
<i>inov</i> CAC 40	65,5355	0,000	4
DAX 30	134,8090	0,000	3
<i>inov</i> FTSE 100	87,1952	0,000	5
<i>inov</i> IBEX 35	45,8716	0,000	4
<i>inov</i> PSI 20	36,7415	0,000	4
S&P 500	75,4640	0,000	3

Tabela 5.7: Teste de Engle à não-linearidade no segundo momento das sucessões cronológicas filtradas das observações diárias.

dos testes de McLeod e Li e de Engle aplicados sobre as sucessões cronológicas filtradas dos índices internacionais em estudo, indicam que a hipótese nula de ausência de não-linearidade na variância é rejeitada com um nível de confiança de 99% para todos os índices em estudo, levando a crer que poderá existir dependência não-linear temporal nos referidos índices. De acordo com Scalas (2005) a existência de *clusters* de volatilidade e de autocorrelação podem pôr em causa a hipótese de que as taxas de rendibilidade sejam *i.i.d.*

A estatística do F-Test de Tsay revela uma certa heterogeneidade no comportamento dos índices.

⁷Os cálculos referentes aos testes de McLeod e Li, de Engle e *BDS* foram efectuados com o programa EViews 4.1.

De acordo com os resultados obtidos com este teste (vide Tabela 5.8) verifica-se que a hipótese nula de linearidade em relação à média é rejeitada apenas para as sucessões cronológicas dos índices CAC 40, FTSE 100, PSI 20 e S&P 500. Tais resultados não podem ser entendidos como ausência de dependência não-linear para as sucessões cronológicas dos índices ASE, DAX 30 e IBEX 35, uma vez que este teste capta apenas um tipo específico de não-linearidade na média. Neste contexto pode apenas dizer-se que para estes índices a fonte de possíveis dependências não-lineares não é a usualmente captada pelo teste de Tsay. Hsieh (1995) argumenta que os modelos aditivos não-lineares, nomeadamente os modelos *TAR*, *M-TAR* e *SETAR*, não apresentam melhores resultados que modelos multiplicativos não-lineares, referindo que os modelos baseados na heterocedasticidade (*GARCH*, *AV - Autoregressive Volatility*) poderão melhor representar o comportamento das taxas de rentabilidade.

	<i>Estatística F</i>	<i>d.f.</i>
<i>ASE</i>	0,5900	(1, 2590)
<i>CAC 40</i>	4,4882	** (6, 2583)
<i>DAX 30</i>	1,1845	(1, 2590)
<i>FTSE 100</i>	2,8827	* (6, 2583)
<i>IBEX 35</i>	0,9468	(6, 2583)
<i>PSI 20</i>	9,3801	** (1, 2590)
<i>S&P 500</i>	14,488	** (1, 2590)

Tabela 5.8: Teste de Tsay à não-linearidade na média das sucessões cronológicas das observações diárias. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

As medidas da teoria da informação foram também aplicadas às sucessões cronológicas filtradas, com vista a confirmar os resultados do teste *BDS* e também para conhecer a intensidade das relações entre ϵ_t e ϵ_{t-k} . A Tabela 5.9 mostra que $\lambda \geq R$ para todos os casos, sendo de evidenciar os índices ASE, CAC 40, IBEX 35 e PSI 20, que apresentam valores para a informação mútua estatisticamente significativos. Tal facto poderá ser indicador do maior nível de dependência não-linear para os índices em causa.

Os níveis de correlação global encontrados são relativamente elevados, especialmente se se tiver em conta que a expressão linear não é significativa. Apesar disso a análise da correlação global para as sucessões cronológicas filtradas tendo em conta apenas um desfasamento de $t - 1$ pode não ser conclusiva e comparável a outras abordagens que têm em conta mais informação. Neste sentido foi estimada a informação mútua entre a observação medida nos momentos t e $t - k$ de *per se* (com

	I (nats)	IMN (nats)	λ	R
<i>lag: 1</i>				
<i>inovASE</i>	0,01110**	0,00000	0,14817	0,00190
<i>inovCAC 40</i>	0,00181*	0,00006	0,05995	0,01130
<i>inovFTSE 100</i>	0,00019	0,00014	0,01929	0,01673
<i>inovIBEX 35</i>	0,00450**	0,00047	0,09460	0,03074
<i>inovPSI 20</i>	0,00535**	0,00000	0,10321	0,00166

Tabela 5.9: Informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação linear (R) e coeficiente de correlação global (λ) entre $\varepsilon_{i,t}$ e $\varepsilon_{i,t-1}$ para as observações diárias, sendo $\varepsilon_{i,t}$ a observação filtrada do índice i no dia t . ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

$k = 1, \dots, 10$) com vista a clarificar alguns resultados (Figura 5.2).

Os resultados obtidos são similares aos obtidos por outros autores em estudos semelhantes, nomeadamente Darbellay e Wuertz (2000b) e Maasoumi e Racine (2002). De acordo com o teste *BDS*, o teste de McLeod e Li, o teste de Engle e a informação mútua, a hipótese nula de independência é rejeitada para todos os índices,⁸ o que poderá induzir a que a informação mútua nada mais “informa” que os demais testes à dependência não-linear usados. Contudo, tal conclusão não seria acertada uma vez que para além de testar a independência de modo global, a informação mútua, através do coeficiente de correlação global, promove uma medida concreta do grau de dependência não-linear existente, sendo esta comparável ao coeficiente de correlação linear.

Numa tentativa de isolar as possíveis fontes de dependência não-linear encontradas, procedeu-se à filtragem através de modelos *GARCH*(p, q)⁹ das sucessões cronológicas que exibiram sinais de heterocedasticidade. Após o processo de filtragem, todas as sucessões cronológicas foram testadas através do teste de McLeod e Li e do teste de Engle, não tendo sido rejeitada a hipótese nula de homocedasticidade em nenhum dos casos. Com vista a verificar a existência de possíveis remanescências de não-linearidade, foi realizado o teste *BDS* (vide Anexo E) cujos resultados apon-

⁸É de salientar o valor da informação mútua para o índice *inovCAC* entre as observações t e $t - 6$, cujo valor é superior ao encontrado para a sucessões cronológica original. Tal facto poderá ter como principal causa a possível inclusão de ruído na sucessão cronológica aquando do processo de filtragem seleccionado. De acordo com Petrucelli e Davies (1986) o processo de filtragem da autocorrelação linear e da heterocedasticidade pode afectar a não-linearidade da sucessão cronológica em causa.

⁹Para todas as sucessões cronológicas que apresentaram sinais de heterocedasticidade (Tabela 5.7) foram utilizados processos *GARCH*(1,1) ou *Component ARCH*, na tentativa de retirar a heterocedasticidade das mesmas.

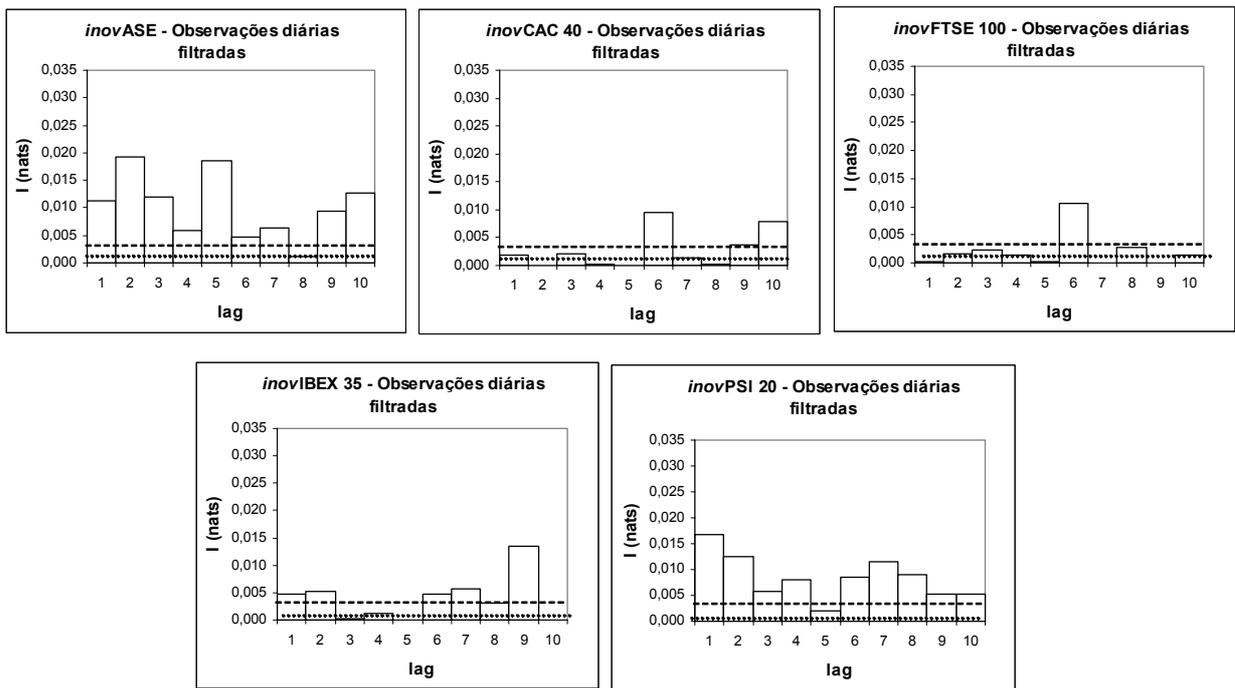


Figura 5.2: Informação mútua para as sucessões cronológicas filtradas dos índices bolsistas face aos lags $k = 1, \dots, 10$. O segmento de recta a tracejado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 1% (0,0030 *nats*) e o segmento de recta a ponteadado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 5% (0,0015 *nats*), com 2 graus de liberdade.

taram para a não rejeição da hipótese nula de independência em nenhum caso, resultado este que corrobora os resultados obtidos por Hsieh (1991).

Foi calculada a informação mútua para estas novas sucessões cronológicas filtradas de efeitos *GARCH*. A Figura 5.3 apresenta os resultados obtidos.

De um modo geral observa-se uma queda nos valores da informação mútua, especialmente quando comparados com os obtidos pelas sucessões cronológicas filtradas com processos *ARMA*(p, q). Ainda assim, é de evidenciar a presença de valores de informação mútua estatisticamente significativos para alguns *lags* em todos os índices, verificando-se a presença de dependência não-linear para esses desfasamentos.

Os resultados obtidos com a informação mútua permitem identificar possíveis *lags* relativamente aos quais é necessário proceder a uma análise mais profunda, na tentativa de identificar o tipo de não-linearidade presente. Depreende-se daqui, que as fontes de não-linearidade captadas não serão apenas a existência de não-linearidade na média e heterocedasticidade. A informação mútua não indica o tipo de não-linearidade presente, mas identifica os *lags* mais “problemáticos” e o grau de dependência não-linear existente através do cálculo do coeficiente de correlação global (λ). Ainda assim, Racine e Maasoumi (2004) consideram que os testes de independência baseados na entropia e na informação mútua têm a capacidade para indicar a direcção na qual se deve reforçar o estudo da dependência não-linear, uma vez que dão informação concreta sobre quais os *lags* relevantes e irrelevantes (assim como conjuntos de variáveis). Além disso, estas medidas podem ser usadas em testes de bondade e ajustamento [demonstrado por Granger e Lin (1994), Maasoumi e Racine (2002) e Granger, Maasoumi e Racine (2004)], sendo por isso úteis na selecção de modelos [Dionísio *et al.* (2003b)].

Estes resultados apontam para a evidência de possível dependência não-linear, captada pelo teste da informação mútua, nas sucessões cronológicas filtradas da heterocedasticidade e autocorrelação linear. Neste sentido, pode revelar-se importante proceder à análise de uma possível fonte de não-linearidade específica, nomeadamente o caos determinístico. Para o efeito, foram calculados os expoentes de Lyapunov para as sucessões cronológicas filtradas dos índices em estudo sendo os resultados apresentados em anexo (vide Anexo F). Tal como já foi referido anteriormente, foram utilizados três diferentes algoritmos para estimar os expoentes de Lyapunov, em que em todos foi necessário proceder à reconstrução do espaço de fase através da definição do desfasamento temporal, da dimensão de mergulho e da distância máxima e mínima permitida entre os pontos. A reconstrução do espaço de fase foi elaborada tendo por base o Teorema de Takens (1981). Os resultados obtidos pelos três diferentes métodos utilizados são similares e apontam para conclusões

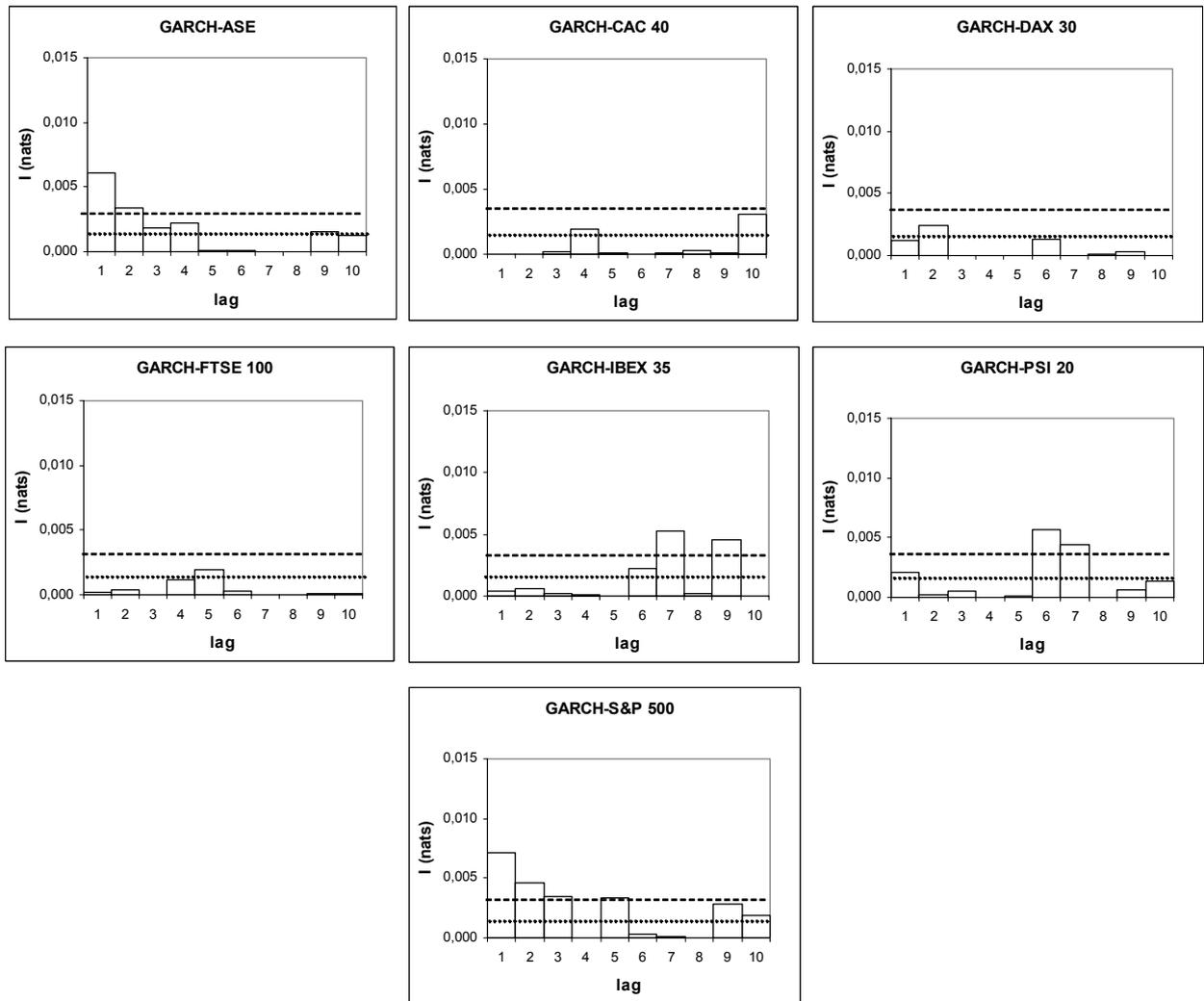


Figura 5.3: Informação mútua para as sucessões cronológicas filtradas dos efeitos *GARCH* dos índices bolsistas face aos lags $k = 1, \dots, 10$. O segmento de recta a tracejado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 1% (0,0030 *nats*) e o segmento de recta a ponteadado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 5% (0,0015 *nats*), com 2 graus de liberdade.

semelhantes,¹⁰ ou seja, para todos os índices verifica-se que o expoente de Lyapunov dominante é positivo, sendo a soma de todos os expoentes de Lyapunov positiva também, o que evidencia a presença de caos determinístico nas sucessões cronológicas analisadas.

De um modo global, pode referir-se que a maioria dos índices bolsistas em estudo apresentam dependência temporal não-linear estatisticamente significativa e até uma possível componente determinística. Os resultados obtidos apontam para a existência de efeitos conjuntos determinísticos e estocásticos. Existem indícios de predictabilidade, com maior incidência nos índices ASE, DAX 30, PSI 20 e S&P 500. Apesar de tal evidência, não se pode afirmar que estes mercados não são eficientes, uma vez que para que a dependência temporal signifique não eficiência terá de proporcionar ao investidor a possibilidade de gerar lucros sistemáticos [Fama (1970, 1991)]. Além disso, ainda que se conseguisse encontrar uma estratégia que gerasse lucros, há que ter em conta a possibilidade de que os custos de transacção os poderiam, simplesmente, anular.

Estudos dedicados a alguns dos índices bolsistas aqui analisados, corroboram os resultados obtidos nesta tese. Por exemplo, de Lima (1997) concluiu que após o *crash* de 1987, as taxas de rendibilidade das acções e índices do mercado bolsista norte-americano exibiam fortes sinais de dependência não-linear. Omran (1997), por outro lado, concluiu existir dependência não-linear nos índices do mercado bolsista do Reino Unido. Niarchos e Alexakis (1998) utilizaram testes de causalidade à Granger e testes de cointegração para avaliar a eficiência do índice ASE e respectivo mercado, concluindo que existem indícios de predictabilidade nas taxas de rendibilidade das acções. Estes autores argumentaram que a causa de tal não eficiência poderia ser a pequena dimensão do mercado em análise, que conduzia à existência de bolhas especulativas e à apreciação nem sempre racional das acções por parte dos investidores. Hsieh (1995) aponta como possíveis causas para a existência de dependência não-linear temporal as mudanças estruturais nas economias dos referidos países a que dizem respeito os índices bolsistas, o que pode provocar problemas ao nível da estacionariedade das sucessões cronológicas em estudo, e realça a possibilidade de ser a dinâmica intrínseca nos preços a principal causa do respectivo comportamento não-aleatório.

Abhyankar, Copeland e Wong (1995) referiram que a estrutura não-linear pode ser consistente com a falta de eficiência se houver neutralidade ao risco por parte dos investidores e os custos de transacção forem negligenciáveis, factos que podem não ser verificados nos mercados em estudo, onde o investidor é tradicionalmente considerado avesso ao risco e os custos de transacção de títulos poderão ser consideráveis para o pequeno investidor.

A eficiência do mercado português tem sido alvo de diversos estudos, existindo por vezes con-

¹⁰Em anexo são apresentados os resultados obtidos com o algoritmo e *software* propostos por Abarbanel (1996).

tradições entre os resultados obtidos, facto que pode derivar da heterogeneidade que caracteriza o comportamento deste mercado, levando a que diferentes períodos apresentem diferentes características e conduzam a diferentes conclusões. Por exemplo, Crato e Assis Lopes (1989), Sousa Câmara (1991) e Soares, Assis Lopes e Monteiro (1992) concluíram que o mercado bolsista de acções português não era eficiente, dado que apresentava alguma evidência de predictabilidade.

Já Soares (1994) concluiu que a hipótese de eficiência do mercado português não poderia ser rejeitada, ainda que tenha constatado existir evidência de alguma predictabilidade nas taxas de rendibilidade do índice BTA. Gonçalves (1997) e Soares (1997) rejeitaram globalmente a hipótese de passeio aleatório das taxas de rendibilidade diárias das acções do mercado bolsista português. Godinho (1999) concluiu que as taxas de rendibilidade do índice bolsista português não eram normalmente distribuídas e apresentavam evidência de não serem *i.i.d.*.

Afonso e Teixeira (1998) concluíram existir dependência não-linear nas taxas de rendibilidade diárias dos índices BVL Geral, BVL 30 e PSI 20 para os períodos de 1990/01/10 a 1998/01/06; de 1993/01/04 a 1998/01/06 e de 1993/01/05 a 1998/01/06, respectivamente. Simão (1998) verificou existir evidência de que uma regra de transacção baseada nas médias móveis se revelou eficaz para um título cotado na bolsa de acções portuguesa no período entre 1988/01 e 1996/12, concluindo que tal facto poderia pôr em causa a eficiência do mercado bolsista de acções português.

Fonseca (2000) e Curto (2002) não encontraram evidência empírica que suportasse a rejeição da hipótese de eficiência do mercado bolsista português, ainda que este último autor tenha concluído que de uma análise comparativa entre os índices PSI 20, DAX e DJIA, o índice português era aquele que revelava menor eficiência. Gama (2000) utilizou testes baseados em rácios de variâncias e concluiu existirem sinais de que as taxas de rendibilidade do índice PSI 20 não eram *i.i.d.*, facto que poderia pôr em causa a eficiência de tal mercado. Carvalho e Crato (2003) analisaram a estrutura das taxas de rendibilidade e respectivas volatilidades de sucessões cronológicas do índice BTA (1977-1988) e BVL 30 (1988-2003) e S&P 500 (1977-2003), constatando uma evolução no mercado português no sentido da eficiência, revelada pela progressiva redução da memória das taxas de rendibilidade, sendo esta memória muito mais acentuada que a evidenciada pelo mercado norte-americano.

Mendes e Isfan (2003) testaram a presença de dinâmica não-linear na sucessão cronológica BVL 30 para período entre 04/01/1993 a 02/02/2001 concluindo que os resultados obtidos apontam para a existência de caos determinístico no índice agregado de cotações da Euronext Lisboa para o período em questão, rejeitando assim a possibilidade de essas mesmas cotações seguirem um passeio aleatório.

Os resultados obtidos no presente trabalho de investigação permitem verificar que existe de-

pendência não-linear temporal, tendo sido obtida evidência de efeitos conjuntos determinísticos e estocásticos na referida não-linearidade. Ainda assim, a conclusão de que os mercados não são eficientes é prematura pois tal descoberta não permite a obtenção de ganhos anormais de forma sistemática. Para tal, seria necessário identificar concretamente as fontes de não-linearidade de modo a ser possível modelizá-las, com vista a tentar realizar previsões robustas acerca do comportamento dos mercados.

5.3.2 Análise dos dados semanais

Para a análise dos dados semanais foram consideradas as observações referentes às cotações de fecho da Quarta-feira de cada semana, obtendo-se cerca de 517 observações. O teste de *Ljung-Box* aplicado às sucessões cronológicas semanais dos índices bolsistas revelou a existência de dependência linear significativa para os índices CAC 40, DAX 30, FTSE 100 e S&P 500 (vide Tabela 5.10). Estes resultados pouco semelhantes com os obtidos com as observações diárias levam a pressupor que a periodicidade dos dados poderá influenciar os resultados obtidos e conseqüentemente as conclusões daí retiradas.¹¹

	ASE	CAC 40	DAX 30	FTSE 100	IBEX 35	PSI20	S&P 500
LBQ(10)	11,787	15,606	13,025	22,134*	16,128	10,813	46,644**
ρ_1	-0,061	-0,146**	-0,130**	-0,175**	-0,077	0,046	-0,180**
ρ_2	0,047	-0,003**	0,018*	-0,015**	0,0142	0,044	-0,008**
ρ_3	0,002	0,023*	-0,008*	0,003**	-0,013	0,007	0,140**

Tabela 5.10: Teste de *Ljung-Box* e coeficiente de autocorrelação para as observações semanais das taxas de rendibilidade dos índices. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

A Figura 5.4 apresenta os valores da informação mútua entre a observação medida nos momentos t e $t - k$ [$I(r_{i,t}, r_{i,t-k})$] para cada índice, revelando níveis de correlação global superiores para o índice CAC 40 e relativamente semelhantes para os restantes índices, face aos apresentados para as observações diárias. O índice CAC 40 é aquele que apresenta o maior valor de informação mútua para o primeiro desfasamento, mas as restantes correlações tendem a decair rapidamente e não apresentam significância estatística, ao contrário dos índices S&P 500 e DAX 30, cujas

¹¹A sensibilidade dos resultados de diversas análises a sucessões cronológicas financeiras face à periodicidade das observações tem sido alvo de debate, não existindo consenso sobre qual a periodicidade que conduz a resultados mais próximos da realidade.

correlações face a observações desfasadas não tendem a diminuir com o aumento do respectivo *lag*. De salientar ainda que os índices ASE, FTSE 100 e IBEX 35 apresentam um comportamento muito semelhante em termos de autocorrelação global. O índice PSI 20 apresenta um comportamento um pouco diferente, pois apesar de exibir significância estatística para a maioria dos *lags* analisados, os valores da informação mútua correspondentes não são muito elevados.

Com vista a avaliar a possível dependência não-linear temporal que possa existir nas séries em estudo, foi estimada a informação mútua (I) e o respectivo coeficiente de correlação global (λ), a informação mútua normal (IMN) e o coeficiente de correlação linear (R) para *lags* tomados em consideração conjuntamente. Da Tabela 5.11 é de realçar o facto de a informação mútua assumir significância estatística para a maioria dos índices bolsistas, o que já não é tão relevante para a informação mútua normal.

	I (nats)	IMN (nats)	λ	R
<i>lag: 1</i>				
<i>ASE</i>	0,00690*	0,00186	0,11707	0,0610
<i>CAC 40</i>	0,05300**	0,01077*	0,31714	0,1460
<i>DAX 30</i>	0,03260**	0,00852*	0,25124	0,1300
<i>FTSE 100</i>	0,01330*	0,01555**	0,16202	0,1750
<i>IBEX 35</i>	0,00110	0,00297	0,04688	0,0771
<i>PSI 20</i>	0,00027	0,00106	0,02323	0,0462
<i>S&P 500</i>	0,04090**	0,01665**	0,28026	0,1801

Tabela 5.11: Informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação linear (R) e coeficiente de correlação global (λ) com desfasamento entre $r_{i,t}$ e $r_{i,t-1}$ para as observações semanais, sendo $r_{i,t}$ a taxa de rendibilidade do índice i na semana t . ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

De acordo com os resultados vigentes na Tabela 5.11 verifica-se que:

$$R_{PSI20} < R_{ASE} < R_{IBEX35} < R_{DAX30} < R_{CAC40} < R_{FTSE100} < R_{S\&P500}.$$

Esta ordenação não é semelhante se se tomar em conta o coeficiente de correlação global, isto é:

$$\lambda_{PSI20} < \lambda_{IBEX35} < \lambda_{ASE} < \lambda_{FTSE100} < \lambda_{DAX30} < \lambda_{S\&P500} < \lambda_{CAC40}.$$

Os resultados obtidos com as observações semanais apresentam fortes diferenças face aos resultados apresentados na Tabela 5.2 referente às observações diárias. O índice português PSI 20 é aquele

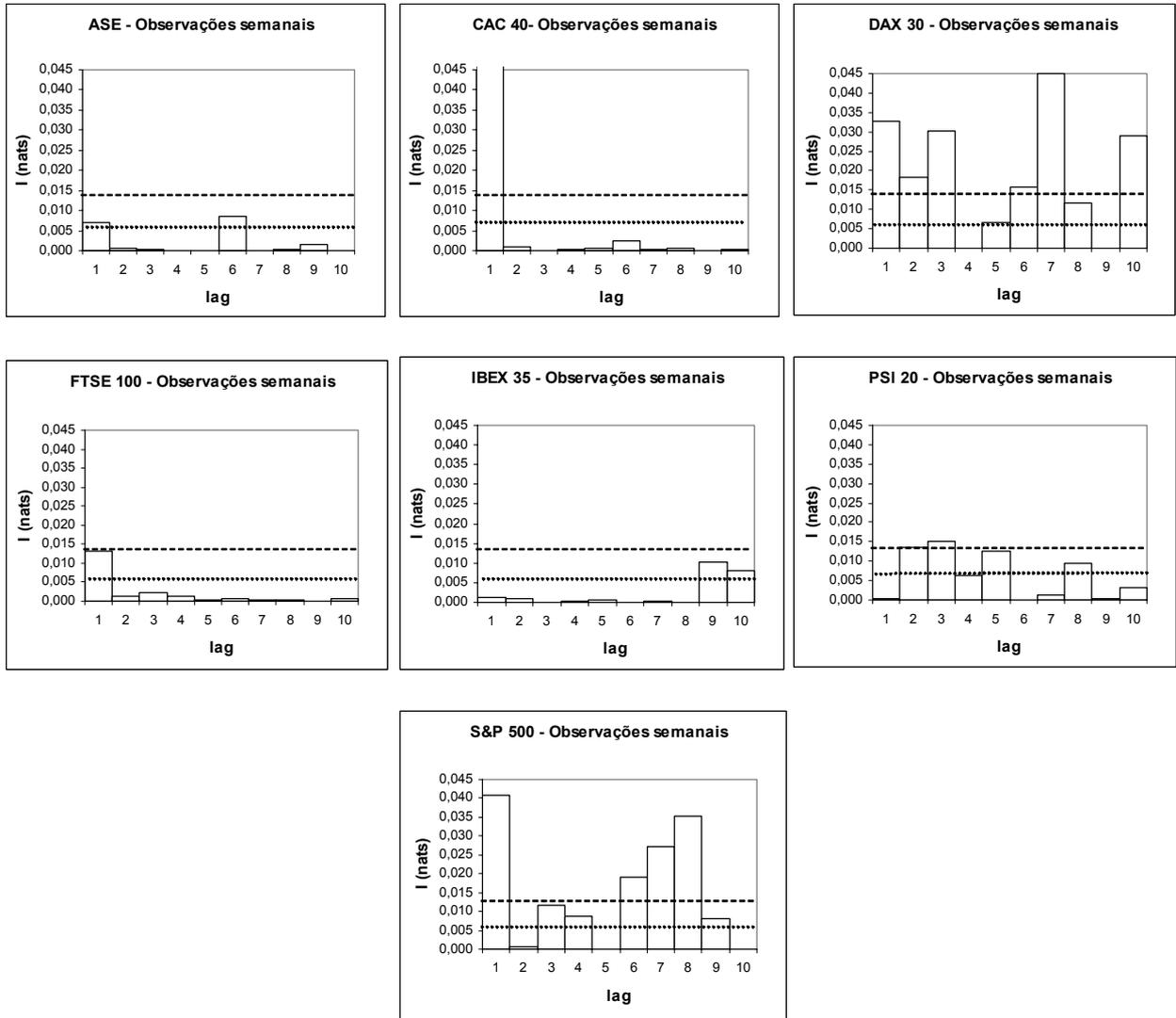


Figura 5.4: Coeficiente de correlação global para os dados semanais índices bolsistas face aos lags $k = 1, \dots, 10$. O segmento de recta a tracejado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 1% ($0,0144 \text{ nats}$) e o segmento de recta a ponteadado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 5% ($0,0070 \text{ nats}$), com 2 graus de liberdade.

que apresenta menores níveis de correlação (linear e não-linear) e os índices S&P 500, CAC 40 e DAX 30 são aqueles que evidenciam maior dependência face ao primeiro desfasamento.

Nas Tabelas 5.12 e 5.13 são calculadas as medidas de correlação global e linear tendo em conta os dois primeiros e três primeiros desfasamentos.

	I (nats)	IMN (nats)	λ	R
<i>lag: 1 e 2</i>				
<i>ASE</i>	0,01560	0,00473	0,17527	0,0760
<i>CAC 40</i>	0,06910**	0,02144	0,35927	0,14565
<i>DAX 30</i>	0,07890**	0,01682	0,38207	0,12839
<i>FTSE 100</i>	0,02770	0,03259	0,23215	0,18210
<i>IBEX 35</i>	0,02610	0,00662	0,22552	0,08571
<i>PSI 20</i>	0,04320*	0,00306	0,28770	0,06283
<i>S&P 500</i>	0,13760**	0,00340	0,49049	0,18519

Tabela 5.12: Informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação linear (R) e coeficiente de correlação global (λ) com desfasamento entre $r_{i,t}$, $r_{i,t-1}$ e $r_{i,t-2}$ para as observações semanais, sendo $r_{i,t}$ a taxa de rendibilidade do índice i na semana t . **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

Na Tabela 5.12 é de notar que o índice S&P 500 continua a liderar a dependência temporal a nível linear e não-linear, enquanto que o índice PSI 20 apresenta o coeficiente de correlação linear mais baixo, mas em termos globais aponta para uma forte dependência temporal. Em termos de ordenação das medidas obtém-se:

$$R_{PSI20} < R_{ASE} < R_{IBEX35} < R_{DAX30} < R_{CAC40} < R_{FTSE100} < R_{S\&P500},$$

$$\lambda_{ASE} < \lambda_{IBEX35} < \lambda_{FTSE100} < \lambda_{PSI20} < \lambda_{CAC40} < \lambda_{DAX30} < \lambda_{S\&P500}.$$

Na Tabela 5.13 verifica-se que o coeficiente de correlação global assume valores relativamente elevados para a maioria dos índices, ainda que apenas os índices CAC 40, DAX 30 e S&P 500 apresentem valores de informação mútua estatisticamente significativos.

Em termos de ordenação dos coeficientes de correlação, é de referir que os valores do coeficiente de correlação linear se mantiveram quase constantes face aos calculados na Tabela 5.12, enquanto que relativamente ao coeficiente de correlação global verificou-se uma ascensão do índice CAC 40.

$$R_{PSI20} < R_{ASE} < R_{IBEX35} < R_{DAX30} < R_{CAC40} < R_{FTSE100} < R_{S\&P500},$$

$$\lambda_{ASE} < \lambda_{IBEX35} < \lambda_{FTSE100} < \lambda_{PSI20} < \lambda_{DAX30} < \lambda_{CAC40} < \lambda_{S\&P500}.$$

	I (nats)	IMN (nats)	λ	R
<i>lag: 1, 2 e 3</i>				
<i>ASE</i>	0,02610	0,00766	0,22552	0,07751
<i>CAC 40</i>	0,1223**	0,03213	0,46581	0,14615
<i>DAX 30</i>	0,09830*	0,02515	0,42247	0,12904
<i>FTSE 100</i>	0,04550	0,04928	0,29943	0,18200
<i>IBEX 35</i>	0,03520	0,01034	0,26073	0,08559
<i>PSI 20</i>	0,04910	0,00498	0,30583	0,06170
<i>S&P 500</i>	0,19870**	0,06082	0,57266	0,22782

Tabela 5.13: Informação mútua (I), informação mútua normal (IMN), coeficiente de correlação linear (R) e coeficiente de correlação global (λ) com desfasamento entre $r_{i,t}$, $r_{i,t-1}$, $r_{i,t-2}$ e $r_{i,t-3}$ para as observações semanais, sendo $r_{i,t}$ a taxa de rendibilidade do índice i na semana t . ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

De modo semelhante na análise dos dados diários, para as observações semanais procedeu-se à análise das sucessões cronológicas filtradas, com vista a capturar a dependência exclusivamente não-linear. Estas foram obtidas através de processos $ARMA(p, q)$ seleccionados de acordo com o critério AIC .¹² Foi aplicado o teste *Ljung-Box* para avaliar a possível correlação linear existente (vide Tabela 5.14).

	<i>inovCAC 40</i>	<i>inovDAX 30</i>	<i>inovFTSE 100</i>	<i>inovS&P 500</i>
LBQ(10)	5,144	4,456	8,208	12,398
ρ_1	-0,002	0,001	-0,010	0,005
ρ_2	-0,022	0,001	-0,046	-0,009
ρ_3	0,014	-0,015	-0,010	-0,027

Tabela 5.14: Teste de *Ljung-Box* para as séries filtradas das observações semanais.

Verifica-se que os coeficientes de autocorrelação não são significativamente diferentes de zero, considerando-se por isso que não existe dependência linear dos índices face às observações passadas. Foi também realizado o teste *BDS* (vide Anexo E) que aponta para a rejeição da hipótese nula de que as observações são *i.i.d.* para todos os índices, para a maioria das dimensões de mergulho e para as várias distâncias entre os pontos medidas em desvios-padrão. O índice IBEX 35 apresenta

¹²Os processos utilizados para os índices CAC 40, DAX 30, FTSE 100 e S&P 500 foram respectivamente: $ARMA(1,0)$; $ARMA(1,0)$; $ARMA(1,0)$ e $ARMA(3,0)$.

conclusões contraditórias neste teste, uma vez que as conclusões podem ser totalmente diferentes consoante a distância tida em conta.

Com vista a avaliar a possibilidade de existência de heterocedasticidade condicionada foi aplicado o teste de McLeod e Li, cujos resultados são apresentados na Tabela 5.15.

k	ASE	<i>inovCAC</i> 40	<i>inovDAX</i> 30	<i>inovFTSE</i> 100	IBEX 35	PSI20	<i>inovS&P</i> 500
1	0,133**	0,304**	0,382**	0,297**	0,087*	0,148**	0,240**
2	0,068**	0,149**	0,257**	0,182**	0,034	0,148**	0,090**
3	0,051**	0,332**	0,314**	0,207**	0,043	0,101**	0,132**
4	0,008*	0,060**	0,141**	0,052**	0,050	0,053**	0,158**

Tabela 5.15: Teste de McLeod e Li aplicado às sucessões cronológicas filtradas das observações semanais, onde k representa o *lag* respectivo. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

Foi também aplicado o teste de Engle às sucessões cronológicas que não apresentavam evidência empírica de autocorrelação linear, verificando-se que a hipótese nula de ausência de dependência não-linear na variância só não é rejeitada para o índice IBEX 35 (Tabela 5.16).

<i>ARCH</i>			
	<i>Estatística</i>	<i>p-value</i>	<i>d.f.</i>
<i>ASE</i>	9,2507	0,002	1
<i>inovCAC</i> 40	52,1396	0,000	1
<i>inovDAX</i> 30	42,1545	0,000	3
<i>inovFTSE</i> 100	22,3026	0,000	3
<i>IBEX</i> 35	2,3570	0,095	2
<i>PSI</i> 20	10,1437	0,000	2
<i>inovS&P</i> 500	35,1823	0,000	1

Tabela 5.16: Teste de Engle à não-linearidade no segundo momento das sucessões cronológicas filtradas das observações semanais.

Os resultados do teste de Tsay apresentados na Tabela 5.17 indicam que apenas os índices semanais PSI 20 e S&P 500 revelam a presença de não-linearidades na média, não sendo rejeitada a hipótese nula para os restantes índices. Tal facto não é sinal de não existência de dependência não-linear temporal nos demais índices, simplesmente não foram captados aqueles efeitos.

	<i>Estatística F</i>	<i>d.f.</i>
<i>ASE</i>	0,5681	(1, 513)
<i>CAC 40</i>	0,3717	(1, 513)
<i>DAX 30</i>	0,6866	(1, 513)
<i>FTSE 100</i>	3,5643	(1,513)
<i>IBEX 35</i>	1,0016	(3, 510)
<i>PSI 20</i>	6,3546	** (1, 513)
<i>S&P 500</i>	6,7037	** (6, 506)

Tabela 5.17: Teste de Tsay à não-linearidade na média das sucessões cronológicas das observações semanais. ** Denota um nível de significância a 1% e * denota um nível de significância a 5%.

Os testes à dependência não-linear temporal efectuados apontam para a possibilidade de apenas as taxas de rendibilidade semanais do índice IBEX 35 serem efectivamente *i.i.d.*. Contudo, a Figura 5.4 mostra que existe dependência não-linear estatisticamente significativa face aos nono e décimo desfasamentos.

No sentido de clarificar a possível existência de dependência não-linear para as séries filtradas, foi calculada a informação mútua ($I(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})$), o respectivo coeficiente de correlação global (λ), a informação mútua normal (*IMN*) e o coeficiente de correlação linear (*R*) (Tabela 5.18).

	<i>I</i> (nats)	<i>IMN</i> (nats)	λ	<i>R</i>
<i>lag: 1</i>				
<i>CAC 40</i>	0,00032	0,00000	0,02524	0,0020
<i>DAX 30</i>	0,0012	0,00000	0,04896	0,0010
<i>FTSE 100</i>	0,0016	0,00005	0,05652	0,0100
<i>S&P 500</i>	0,0010	0,00001	0,04470	0,0050

Tabela 5.18: Informação mútua (*I*), informação mútua normal (*IMN*), coeficiente de correlação linear (*R*) e coeficiente de correlação global (λ) entre $\varepsilon_{i,t}$ e $\varepsilon_{i,t-1}$ para as observações semanais, sendo $\varepsilon_{i,t}$ a observação filtrada do índice *i* no dia *t*.

Na Tabela 5.18 o coeficiente de correlação linear apresenta valores praticamente nulos, assim como a informação mútua baseada na distribuição normal (*IMN*), verificando-se também uma forte diminuição dos coeficientes de correlação global face às tabelas anteriores. Apesar de tudo, os valores do coeficiente de correlação global são muito superiores aos apresentados pelo coeficiente de

correlação linear, indicando a possível presença de dependência não-linear nas sucessões cronológicas analisadas. Neste contexto, torna-se imperativo avaliar a informação mútua para as referidas sucessões cronológicas para vários desfasamentos (Figura 5.5).

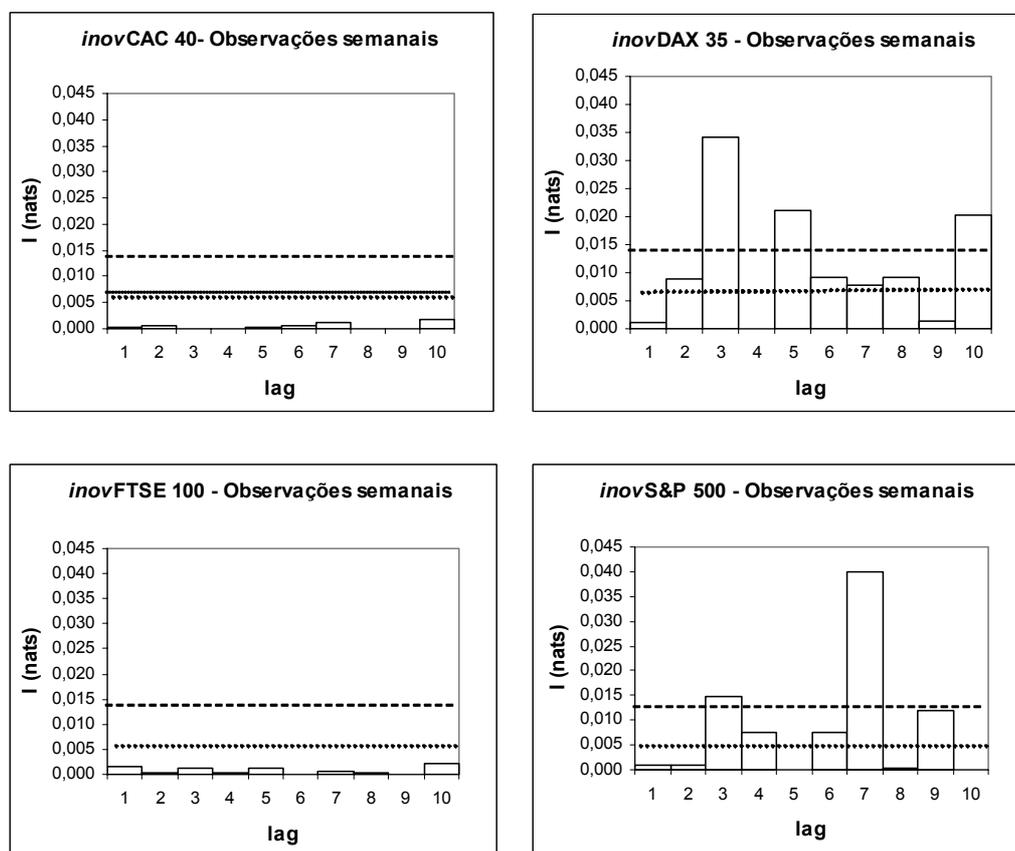


Figura 5.5: Coeficiente de correlação global para as sucessões cronológicas filtradas semanais dos índices bolsistas face aos lags $k = 1, \dots, 10$. O segmento de recta a tracejado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 1% ($0,0144 \text{ nats}$) e o segmento de recta a ponteadado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 5% ($0,0070 \text{ nats}$), com 2 graus de liberdade.

Os resultados vigentes na Figura 5.5 permitem verificar que existe dependência temporal não-linear estatisticamente significativa para os índices DAX 35 e S&P 500, levando a pressupor que as respectivas taxas de rendibilidade não são *i.i.d.*. Da análise geral verifica-se que tal conclusão pode ser retirada também para os índices bolsistas ASE, IBEX 35 e PSI 20. Os resultados quanto à dependência temporal não-linear dos índices CAC 40 e FTSE 100 são ambíguos, uma vez que de acordo com os testes de McLeod e Li, teste de Engle e *BDS* estes índices apresentam evidência

estatisticamente significativa de dependência temporal não-linear e o teste baseado na informação mútua não detecta tal dependência. Este resultado poderá ser consequência do facto de as amostras em estudo terem uma dimensão relativamente pequena para os métodos de estimação da informação mútua utilizados, o que pode conduzir a possíveis subestimações da medida em causa [Darbellay *et al.* (1999)].

Tal como realizado na secção anterior, procedeu-se também à filtragem das sucessões cronológicas que exibiram sinais de heterocedasticidade, na tentativa de avaliar a possibilidade de existência de dependência não-linear para além da captada pelos modelos *GARCH*. Neste sentido, as sucessões cronológicas testadas na Tabela 5.16 que apresentaram evidência estatisticamente significativa de heterocedasticidade, foram filtradas com modelos *GARCH*(p, q).¹³ Foi calculada a informação mútua entre os momentos t e $t - k$ ($k = 1, \dots, 10$) para estas novas sucessões cronológicas, sendo os resultados apresentados na Figura 5.6.

Conforme se pode verificar pelos resultados apresentados na Figura 5.6, existem ainda *lags* que exibem significância estatística quanto à possível dependência não-linear existente. São de realçar os índices ASE, DAX 30 e FTSE100 que apresentam em determinados casos, níveis de significância de 1%. Ainda que este teste não identifique o tipo de dependência não-linear existente, indica quais os *lags* que deverão ser alvo de uma atenção mais pormenorizada e o grau de dependência não-linear existente, à semelhança dos resultados obtidos com as observações diárias. Além disso, se se compararem estes resultados com os obtidos com o teste *BDS* (vide Anexo E), verifica-se que a informação mútua tem maior capacidade para capturar não-linearidades, uma vez que de acordo com os resultados do teste *BDS* apenas o índice PSI 20 poderia apresentar alguns sinais de não-linearidade.

¹³Para todas as sucessões cronológicas semanais que apresentaram sinais de heterocedasticidade foram utilizados processos *GARCH*(1,1) ou *Component ARCH*, na tentativa de retirar a heterocedasticidade das mesmas.

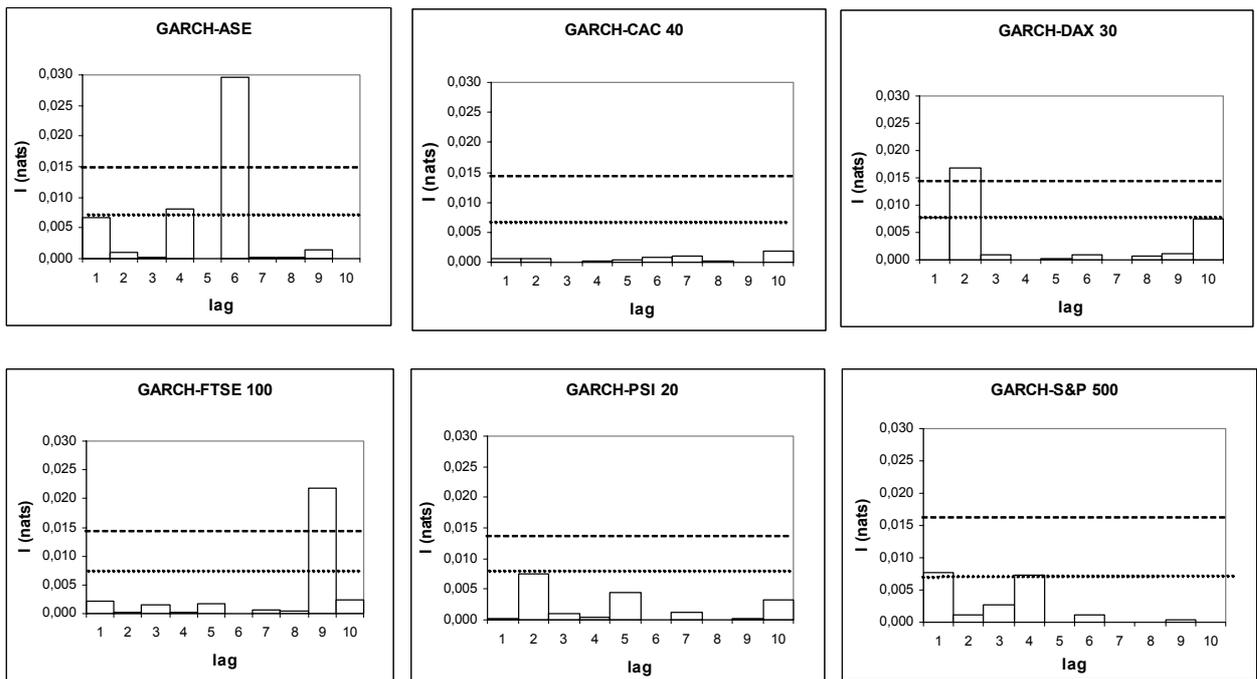


Figura 5.6: Informação mútua para as sucessões cronológicas semanais filtradas dos efeitos *GARCH* dos índices bolsistas face aos lags $k = 1, \dots, 10$. O segmento de recta a tracejado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 1% (0,0144 *nats*) e o segmento de recta a ponteadado refere-se ao valor crítico da informação mútua para um nível de significância de 5% (0,0070 *nats*), com 2 graus de liberdade.

5.4 Síntese do capítulo

No presente capítulo foi avaliada a dependência temporal linear e não-linear para sete índices bolsistas internacionais, tendo sido alvo de análise as respectivas taxas de rendibilidade diárias e semanais.

A abordagem linear demonstrou uma forte sensibilidade à periodicidade das observações, uma vez que os índices que apresentaram maiores níveis de autocorrelação linear para as observações diárias (ASE e PSI 20) foram precisamente aqueles que na análise das taxas de rendibilidade semanais registaram total ausência de autocorrelação linear. Do mesmo modo, os índices S&P 500 e DAX 30 cujas taxas de rendibilidade diárias não exibiram evidência de dependência linear temporal, foram os índices que, em termos semanais, registaram maiores níveis de autocorrelação linear.

A abordagem não-linear preconizada nesta tese pelos testes de McLeod e Li, de Engle, de Tsay, BDS e informação mútua demonstrou uma menor sensibilidade dos resultados à periodicidade dos dados, pelo menos em termos de significância estatística. Os expoentes de Lyapunov foram aplicados apenas aos dados diários, uma vez que o número de observações semanais é insuficiente para estimar com alguma robustez estas medidas.

Os resultados dos testes à não-linearidade efectuados permitem rejeitar a hipótese nula de que as taxas de rendibilidade diárias de todos os índices e as taxas de rendibilidade semanais da maioria dos mesmos, são *i.i.d.*, verificando-se que existe evidência para aceitar a presença de caos determinístico. Estes resultados conduzem à assunção de que existe provavelmente dependência não-linear nas referidas sucessões cronológicas, facto que contradiz o pressuposto do passeio aleatório.

A não estacionariedade, a não-linearidade e o caos determinístico podem ser causas para o resultado de que as taxas de rendibilidade analisadas não são *i.i.d.*. Neste contexto, há que evidenciar que os testes de Dickey-Fuller e KPSS realizados (vide Capítulo 3) apontam para a estacionariedade das sucessões cronológicas analisadas e após a filtragem com modelos $GARCH(p, q)$ a informação mútua continuou a revelar sinais de dependência não-linear estatisticamente significativos para praticamente todos os casos analisados, indicando que a heterocedasticidade não é a única fonte de não-linearidade observada. Por fim, os expoentes de Lyapunov calculados revelaram a existência de caos nas taxas de rendibilidade dos índices bolsistas objecto de estudo. Neste sentido, parece existir evidência de efeitos determinísticos e estocásticos conjuntos nas sucessões cronológicas analisadas.

Em síntese, é importante lembrar que os indícios de predictabilidade encontrados não são suficientes para pôr em causa a hipótese de eficiência dos mercados, uma vez que tal predictabilidade teria de assegurar o ganho de lucros anormais e sistemáticos.

De acordo com os resultados apresentados, é de concluir que o principal contributo desta análise aponta para o facto que as taxas de rendibilidade dos índices bolsistas evidenciam não-linearidades, existindo evidência de que as fontes destas não-linearidades são estocásticas e determinísticas. Além disso, verifica-se que as medidas da teoria da informação, mais concretamente a informação mútua e o coeficiente de correlação global, são medidas eficazes no teste e avaliação de dependência não-linear, permitindo deste modo estudar de forma mais detalhada sistemas não-lineares, especialmente pelo facto de não requererem nenhuma distribuição de probabilidade teórica pré-definida ou modelo de dependência específico. A informação mútua é uma medida generalista, que consegue capturar a dependência linear e não-linear, mas não fornece pistas sobre a função ou modelo que está na origem dessa mesma dependência.

Naturalmente que uma das possíveis vias de investigação futuras será a de tentar encontrar qual o processo (ou processos) não-linear que está na origem de tais dependências temporais e simultaneamente avaliar uma estratégia com base nesse(s) mesmo(s) processo(s), pois dessa forma o investidor poderá tirar pleno partido da abordagem introduzida.

Capítulo 6

Relação entre factores económicos e a Bolsa portuguesa

Os mercados financeiros são a possível consequência e também a possível causa de um conjunto de factores económicos [Stanley *et al.* (2001)]. De acordo com a hipótese de eficiência dos mercados pode considerar-se que *a priori* todas as variáveis são endógenas, uma vez que os mercados financeiros e os factores macroeconómicos interagem de forma permanente, exercendo assim influência mútua [Chen *et al.* (1986), Fama (1990), Chen (1991)]. Por exemplo, é plausível admitir que as cotações das acções do mercado bolsista sejam influenciadas pela respectiva *dividend yield* e vice-versa. Neste contexto, apenas as forças da natureza, tais como tempestades, sismos, etc, poderiam ser realmente consideradas como variáveis perfeitamente exógenas no âmbito da economia. Importa por isso avaliar o nível de dependência global (linear e não-linear) entre mercados bolsistas de acções e determinados factores económicos, independentemente do modelo em causa.

Neste capítulo pretende-se avaliar a relação entre determinados factores económicos e o comportamento do mercado bolsista de acções português recorrendo a abordagens lineares e não-lineares, através de modelos lineares com uma e/ou várias equações e testes de dependência global (linear e não-linear) através da informação mútua e do coeficiente de correlação global. O objectivo não é a explicação das variações dos preços das acções ou do comportamento do índice de mercado, mas apenas fornecer uma contribuição para a questão específica da relevância da actividade económica como determinante do comportamento do índice do mercado de acções. Este estudo vem na sequência do enquadramento apresentado no Capítulo 1, mais propriamente dos modelos de factores e modelo *APT*.

O capítulo está dividido em 5 secções. A primeira secção apresenta o enquadramento teórico na área financeira sobre a avaliação das relações entre o comportamento dos mercados bolsistas e

variados factores macroeconómicos e financeiros. A segunda secção enumera os indicadores e as variáveis económicas seleccionadas de acordo com a literatura. Na terceira secção são apresentados os resultados referentes à avaliação das componentes de longo prazo na relação entre o mercado bolsista e determinados indicadores macroeconómicos e financeiros. A quarta secção refere-se à avaliação das componentes de curto prazo na relação entre mercado bolsista e determinadas variáveis, sendo abordados e utilizados modelos lineares com uma e/ou várias equações e modelos não-lineares baseados na informação mútua. A quinta secção consiste numa síntese do capítulo.

6.1 Enquadramento

Do ponto de vista macroeconómico as acções representam direitos sobre a capacidade produtiva das empresas e da economia. Nestas condições, é aceite a ideia de que os preços das acções estão intrinsecamente relacionados com factores macroeconómicos fundamentais. No que concerne aos dados diários, a evidência empírica parece suportar a hipótese de que os preços dos activos são influenciados por um conjunto mais ou menos alargado de eventos não antecipáveis e que alguns destes exercem uma influência mais vincada que outros. A teoria da carteira, cuja base assenta no facto de que o efeito diversificação pode anular o risco específico, concentrou-se na análise do risco sistemático e suas respectivas fontes.¹ A teoria económica, como é normal nestes casos, mantém-se silenciosa quanto à definição de quais os eventos com capacidade para influenciar os preços dos activos.

A identificação e selecção dos factores a ter em consideração num modelo multifactor, nomeadamente nos modelos *APT*, pode ser realizada de acordo com duas abordagens diferentes: a abordagem estatística e a abordagem teórica [e.g. Campbell *et al.* (1997), Elton *et al.* (1995a)]:

- (i) A abordagem estatística envolve a construção de factores através de um conjunto de taxas de rendibilidade e pode ser feita através da análise factorial ou análise dos componentes principais. Por exemplo, Brown (1989) aplicou análise factorial e análise dos valores próprios com o intuito de identificar os factores que explicam a variação das taxas de rendibilidade dos activos financeiros, especialmente das acções, concluindo que o factor com maior relevância é o índice do mercado bolsista em causa. Apesar de tudo, o mesmo autor admite algumas limitações neste tipo de abordagem, especialmente no que se refere ao comportamento dos resíduos que apresentam sinais de autocorrelação e também, no facto de este tipo de análise

¹De acordo com a teoria da carteira, o risco específico é o risco que pode ser anulado por via da diversificação da carteira. O risco sistemático é o risco que está subjacente ao mercado e à envolvente económico-financeira, não sendo por isso minimizado via diversificação [ver por exemplo Sharpe (1964)].

encerrar alguma indeterminação associada à falta de identificação dos factores em si, o que pode dificultar a interpretação económica dos resultados;

- (ii) A abordagem teórica envolve a especificação dos factores baseada em argumentos de que certas variáveis capturam ou contribuem para explicar a variação nas taxas de rendibilidade das acções. Vários autores consideram esta abordagem mais vantajosa uma vez que são consideradas as influências de factores fundamentais nas taxas de rendibilidade dos activos, ao invés da influência de taxas de rendibilidade de outros activos que por si só, também sofrem influências económicas [e.g. Elton *et al.* (1995a), Elton *et al.* (1995b)].

Segundo o princípio da diversificação, as variáveis económicas globais têm o poder de influenciar a avaliação dos activos cotados nos mercados bolsistas. Quaisquer variáveis com capacidade para influenciar os dividendos ou a avaliação dos activos influenciarão também as respectivas taxas de rendibilidade desses activos, nomeadamente a taxa de juro sem risco. Adicionalmente, quaisquer variáveis necessárias para captar a descrição do estado da natureza farão parte também da descrição dos factores de risco sistemático [Chen *et al.* (1986), Brown (1989)]. Um exemplo deste tipo de variável é aquele que não tem influência directa nos *cash-flows* presentes, mas pode alterar o conjunto de oportunidades do investimento no futuro.

De acordo com vários modelos de avaliação de acções, nomeadamente o modelo de *Gordon-Shapiro*, os preços das acções podem ser descritos pelo valor actualizado dos dividendos, que no caso concreto crescem a uma taxa constante. Sendo P o preço da acção, D os dividendos e $(1+i)$ o factor de desconto, então

$$P_t = \frac{\sum_{j=t+1}^{+\infty} E(D_j)}{(1+i)^{j-t}}, \quad (6.1)$$

isto implica que as taxas de rendibilidade em qualquer período são dadas por [Chen *et al.* (1986)]

$$\frac{dP_{t+1}}{P_t} + \frac{D_{t+1}}{P_t} = \frac{d \sum_{j=t+1}^{+\infty} E(D_j)}{\sum_{j=t+1}^{+\infty} E(D_j)} - \frac{d \left[(1+i)^{j-t} \right]}{(1+i)^{j-t}} + \frac{D_{t+1}}{P_t}, \quad (6.2)$$

ou seja, as forças sistemáticas que influenciam as taxas de rendibilidade são aquelas que influenciam os factores de desconto e o valor esperado dos *cash-flows* (ou dividendos). Como a taxa de desconto é a taxa que os investidores exigem para um determinado nível de risco e que depende também da taxa de juro sem risco, então mudanças não antecipadas nas taxas de juro influenciam a avaliação

dos activos, os *cash-flows* futuros e conseqüentemente, as taxas de rendibilidade respectivas [Chen *et al.* (1986)].

Chen, Roll e Ross (1986) analisaram a influência de determinadas variáveis económicas no mercado bolsista de acções. Para tal utilizaram os movimentos não antecipados das variáveis económicas seleccionadas: a inflação, as taxas de rendibilidade dos bilhetes do Tesouro a curto prazo, as taxas de rendibilidade de obrigações sem risco a longo prazo, a produção industrial, a taxa de rendibilidade de obrigações de empresas com *rating* inferior a *Baa*, índices de mercado *equally-weighted equities* e *value-weighted equities*, índice de preços no consumidor e preço do petróleo, concluindo que as variáveis estatisticamente significativas (para a maioria dos períodos analisados) foram a taxa de crescimento mensal da produção industrial, a taxa de inflação não antecipada e o prémio *default* das obrigações.

Fama (1990) e Fama e French (1993) consideraram que o prémio *default* e o prémio do tempo eram factores determinantes nas taxas de rendibilidade das acções, sugerindo que o prémio do tempo está relacionado com os ciclos económicos, enquanto que o prémio *default* está relacionado com as condições económicas para períodos de longa duração.

Fama e French (1993) aplicaram regressões lineares múltiplas sobre sucessões cronológicas e concluíram que existem cinco factores que influenciam as taxas de rendibilidade das acções e das obrigações. Os factores referentes ao mercado de acções são essencialmente a dimensão da empresa, o *earnings price ratio*, *EPR*, e o rácio entre o valor contabilístico e o valor de mercado do título, enquanto que os factores que influenciam as obrigações são a maturidade e o prémio *default*. Os autores concluíram ainda que as variações observadas nas taxas de rendibilidade das acções devem-se à influência dos factores comuns referentes ao mercado das acções e também às variações das taxas de rendibilidade das obrigações, que por sua vez também são influenciadas por um conjunto de factores. Segundo os mesmos autores, os resultados obtidos poderiam conduzir à rejeição do modelo *CAPM*, uma vez que a existência de mais de um factor para explicar o risco sistemático não é consistente com aquele modelo. Ainda assim, a rejeição da adequabilidade do modelo *CAPM* infere apenas na possível aceitação de modelos multifactores e não na queda da hipótese de eficiência dos mercados [Fama *et al.* (1993)].

Existem abordagens que consideram existir relações bidireccionais, revelando por vezes que é o mercado de acções e as respectivas taxas de rendibilidade quem conduz as variáveis económicas de um determinado país, mais concretamente as variáveis que reflectam a actividade económica real, nomeadamente o PIB ou o índice de produção industrial. McQueen e Roley (1993) analisaram o efeito da revelação da informação do comportamento de alguns factores macroeconómicos fundamentais sobre o comportamento dos preços das acções do S&P 500, tendo em conta a existência

de diferentes ciclos económicos. Estes autores concluíram que as informações reveladas e não antecipadas pelos investidores sobre factores da actividade económica real tinham pouco efeito sobre as taxas de rendibilidade das acções e verificaram que quando a economia está em alta o mercado de acções reage negativamente face a notícias sobre o crescimento da actividade económica real.² De acordo com McQueen e Roley (1993) esta relação negativa é explicada pelo forte aumento das taxas de desconto face aos *cash-flows* esperados das acções.

Haugen e Baker (1996) demonstraram que os factores determinantes dos modelos seccionais das taxas de rendibilidade das acções são estáveis quanto à identidade e nível de influência ao longo do tempo e para diferentes países, nomeadamente Estados Unidos da América, Alemanha, França e Reino Unido. Os autores detectaram também que as acções com taxas de rendibilidade mais elevadas apresentavam níveis de risco mais baixos que os apresentados por acções cujas taxas de rendibilidade eram claramente inferiores, o que poderia ser um indicador de que o mercado não era eficiente.³

Pesaran e Timmermann (1995) utilizaram variáveis económicas para analisar a influência destas sobre as taxas de rendibilidade das acções do índice S&P 500 e também variáveis de cariz financeiro intrínsecas ao próprio mercado. As principais variáveis estatisticamente significativas indicadas por este estudo são as taxas de juro sem risco (curto e longo prazo), taxa de crescimento da massa monetária, mudanças não antecipadas na produção industrial, taxa de inflação, rácio *EPR* e a *dividend yield*. Neste contexto, consideraram que ainda que o investidor conheça as variáveis que influenciam as taxas de rendibilidade das acções, não conhece o modelo que descreve tal influência. Deste modo, os autores seleccionaram vários modelos lineares, cuja diferença residia apenas nas

²Num contexto semelhante são de realçar os estudos realizados por Fama (1981, 1990), Choi *et al.* (1999), Binswanger (2000, 2001). No fundo, estas abordagens defendem a ideia de que o mercado bolsista de acções reage às notícias dos eventos, antecipando a sua ocorrência.

³Neste contexto convém relembrar que existe muita evidência empírica que indicia que as taxas de rendibilidade das acções dependem de vários factores e que, de algum modo, tal possibilita a predição destas taxas [e.g. Chen *et al.* (1986), Fama *et al.* (1993), Haugen *et al.* (1996)]. Na avaliação e análise de factores que exerçam influência sobre as taxas de rendibilidade das acções, existem dois grandes grupos de opinião: (1) um primeiro grupo que acredita que a existência de significância estatística de determinados factores e a sua explicação do risco sistemático pode conduzir à rejeição do modelo *CAPM*, mas mantém intacta a hipótese da eficiência dos mercados [e.g. Fama *et al.* (1993)]; (2) um segundo grupo que acredita que as diferenças nas taxas de rendibilidade resultam de sobre/sub reacções do mercado face a determinados eventos, o que leva a possíveis distorções dos pressupostos requeridos, podendo ocultar a verdadeira relação entre taxa de rendibilidade e risco. Campbell, Lo e Mackinlay (1997) e Mackinlay (1995) alertam para o problema de que quando se opera com amostras finitas, é sempre possível encontrar um factor adicional que provoque a diminuição dos desvios. Contudo o procedimento de adicionar mais um factor ao modelo assume implicitamente que a fonte dos desvios é a falta de pelo menos mais uma variável explicativa e não considera outras possíveis fontes de tal problema.

variáveis explicativas incluídas. A escolha do melhor modelo foi feita através de vários critérios de informação: coeficiente de determinação, critério de informação *Akaike*, critério de informação de *Schwarz* e critério de informação *SIGN*. De acordo com estes autores, a predictabilidade evidenciada pelos prémios de risco das variáveis tidas em consideração não implica que o mercado em causa (*NYSE*) seja não eficiente, podendo sim ser interpretada como um modelo de equilíbrio intertemporal. Neste contexto Fama (1991) afirma que a predictabilidade dos prémios de risco depende do modelo utilizado e por conseguinte é inconclusiva. Uma alternativa para avaliar a significância económica da predictabilidade é analisar se a evidência pode ser explorada com sucesso em estratégias de investimento. Apesar de tudo, esta abordagem não é suficiente, pois não são especificados os factores responsáveis pela predição das taxas de rendibilidade, nem se garante que a informação utilizada pelos agentes decisores seja pública.

A maioria dos estudos publicados tem como objecto o mercado bolsista norte-americano. Os principais resultados apontam para uma relação positiva entre o comportamento dos preços das acções com a actividade económica real e com a massa monetária e uma relação negativa deste mercado para com a taxa de desemprego, inflação, taxa de juro, importações, entre outros. Numa tentativa de complementar as análises realizadas, Aspren (1989) estudou as relações entre o comportamento dos preços das acções de dez índices bolsistas europeus e um conjunto de variáveis macroeconómicas para o período entre 1969 e 1984 e verificou a existência de fortes relações para a França, Alemanha, Holanda, Suíça e Reino Unido, existindo um forte grau de similaridade de resultados para os três primeiros países enunciados. De um modo geral, Aspren (1989) considerou existirem indícios suficientes para a construção de modelos de predictabilidade das taxas de rendibilidade dos índices, com base no comportamento das variáveis macroeconómicas.

A metodologia de estimação usada em muitos dos modelos relativos à avaliação da influência de factores macroeconómicos e financeiros nas taxas de rendibilidade dos activos financeiros, baseava-se essencialmente na estimação de modelos de regressão linear simples ou multivariados pelo método dos mínimos quadrados, tanto para regressões sobre sucessões cronológicas, como para modelos sobre dados seccionais. Nestes casos, a componente de longo prazo era praticamente omitida, assim como as possíveis relações de reciprocidade. Para além disso, o comportamento dos resíduos nem sempre respeitava os pressupostos base, nomeadamente de constituir um ruído branco [Chen *et al.* (1986), Fama *et al.* (1993), Pesaran *et al.* (1995), Haugen *et al.* (1996)].

Em 1992, Hodrick examinou as propriedades estatísticas de três métodos alternativos para a inferência e previsão a longo prazo das taxas de rendibilidade das acções através da variável *dividend yield*, dada a contradição evidenciada por alguns estudos sobre a influência desta variável nas taxas de rendibilidade das acções. Por exemplo, Campbell (1991) e Cochrane (1992) atribuíram uma

forte fracção da variação das taxas de rendibilidade esperadas à variação do rácio *dividendos/preços*. Por outro lado, Jegadeesh (1990), Kim, Nelson e Startz (1989), entre outros, argumentaram que a predictabilidade das taxas de rendibilidade das acções era fraca quando se procedia à correcção do enviesamento nos testes estatísticos, nos casos em que as amostras eram de pequena dimensão. Neste contexto, o primeiro método abordado por Hodrick (1992) foi o método dos mínimos quadrados, o segundo baseava-se numa metodologia proposta inicialmente por Jegadeesh (1990) que consistia na reformulação da regressão estimada pelo método dos mínimos quadrados, com vista a obter significância estatística nas previsões.⁴ A terceira metodologia tinha em conta a relação bidireccional que pudesse existir entre as variáveis e baseava-se nos modelos *VAR*, tendo sido também utilizada por Campbell (1991), Campbell e Shiller (1988, 1989), entre outros, para avaliar a relação entre as taxas de rendibilidade das acções e a *dividend yield*. Hodrick (1992) concluiu que, de um modo geral, os três modelos indicaram que a *dividend yield* é uma variável preditiva das taxas de rendibilidade das acções, para a maioria dos períodos por si analisados. Para além disso, o mesmo autor, concluiu ainda que a inclusão de variáveis macroeconómicas nos modelos [as variáveis incluídas basearam-se no artigo de Chen, Roll e Ross (1986)], não incrementaram o seu poder explicativo, referindo que estas só têm poder explicativo quando as características das empresas são omitidas dos modelos.

Stutzer (1995) apresentou um trabalho inovador, ao aplicar a teoria da informação na selecção de factores que influenciam as taxas de rendibilidade dos activos. Este autor procedeu à minimização da distância de Kullback-Leibler entre as medidas baseadas na neutralidade ao risco e as medidas da probabilidade do estado da natureza, concluindo que existe um limite de informação cujos modelos de avaliação de activos deverão ultrapassar com vista à correcta avaliação dos mesmos.

Em 1999 Qi utilizou a mesma base de dados já explorada por Pesaran e Timmermann (1995) e comparou a performance e o poder de predição das taxas de rendibilidade do índice S&P 500 a partir de diversas variáveis económicas, entre modelos lineares e modelos neuronais. Uma das suas principais conclusões foi que os modelos neuronais, melhorados através de uma regularização Bayesiana, superavam em larga medida os modelos baseados em regressão linear. Num comentário ao artigo de Qi (1999), Racine (2001) tentou replicar a análise efectuada por Qi, aparentemente sem o sucesso do primeiro, salientando que a não disponibilização do código que Qi usou poderia estar possivelmente na base de tais discrepâncias. Racine (2001) colocou ainda algumas dúvidas sobre a validade dos resultados apresentados por Qi (1999), concluindo que os modelos neuronais não apresentaram uma performance superior aos modelos de regressão linear na tentativa de predição

⁴A reformulação introduzida referia-se à introdução de uma componente de longo prazo, onde a variável explicativa é a soma das observações t a $t - k + 1$.

das taxas de rendibilidade do índice bolsista S&P 500.

Em 2002, Maasoumi e Racine avaliaram também a predictabilidade das taxas de rendibilidade do índice S&P 500, utilizando a mesma base de dados que Pesaran e Timmermann (1995) mas com recurso à entropia. Os autores exploraram as propriedades da entropia métrica de Matusita-Bhattacharya-Hellinger como medida de dependência global, uma vez que esta medida tem a capacidade de capturar a dependência não-linear que possa existir entre variáveis, captando também a afinidade não-linear entre as taxas de rendibilidade e as respectivas predições. Os autores concluíram que a maioria dos modelos lineares detectam apenas uma parte da dependência, enquanto que a entropia captura a dependência mesmo em presença de não-linearidade e não estacionariedade, casos em que as tradicionais abordagens podem apresentar lacunas.

Em suma, a análise da literatura permite concluir que, apesar de alguma contradição nos resultados entre os diversos estudos abordados, existe uma componente de predictabilidade nos movimentos dos preços das acções, visto que muitos trabalhos apresentaram evidência empírica de relações estatisticamente significativas. Neste contexto, Fama (1991) considera que tal evidência não põe em causa a hipótese de eficiência dos mercados, pois a existência de correlação entre as cotações nos mercados financeiros e a actividade económica é reveladora da racionalidade dos investidores e dificilmente proporciona ganhos sistemáticos anormais.

De um modo geral, é de concluir que existe um conjunto de factores macroeconómicos e financeiros que influenciam e podem ser influenciados pelos mercados bolsistas de acções. As várias abordagens apresentadas em diversos trabalhos de investigação indicaram a possibilidade de existência de predictabilidade, ainda que tal não possa ser considerado como sinal de não eficiência do mercado para a maioria dos autores referenciados.

6.2 Selecção dos factores e respectivas variáveis

Com vista a proceder à análise da relação entre o comportamento dos preços das acções no mercado bolsista português e factores macroeconómicos e financeiros, foram seleccionados alguns indicadores com impacte neste contexto. Foram seleccionados indicadores macroeconómicos (nomeadamente: a taxa Lisboa a 3 meses, o índice de preços no consumidor, índice de produção industrial, taxa de desemprego, etc) e de cariz financeiros ou intrínsecos ao próprio mercado (*dividend yield* e rácio

EPR) e as variáveis resultantes do tratamento estatístico⁵ destes indicadores.⁶ A selecção destes indicadores foi baseada em argumentos teóricos encontrados na literatura [ver por exemplo Chen *et al.* (1986), Fama *et al.* (1993), Pesaran *et al.* (1995), Maasoumi *et al.* (2002)] (vide Tabela 6.1).

Indicador	Símbolo	Definição e fonte
Índice do mercado bolsista português	PI_t	Índice DataStream do mercado bolsista português Fonte: Base de dados DataStream (mensal)
Taxa de juro sem risco a curto prazo	$Lisbor3M_t$	Taxa de rendibilidade mensal da Lisbor a 3 meses Fonte: Base de dados Dhatis
Taxa de juro sem risco a longo prazo	$Swap10_t$	Taxa de rendibilidade mensal de swaps a 10 anos Fonte: Base de dados Dhatis
Dividend yield	DY_t	Rácio mensal entre o valor dos dividendos por acção e o preço por acção. Fonte: DataStream
Earnings price ratio	EPR_t	Rácio mensal entre o res. líquido por acção e o preço da acção Fonte: Base de dados DataStream
Índice de preços no consumidor	IPC_t	Fonte: Base de dados DataStream
Índice de produção industrial	IPI_t	Fonte: INE
Taxa de desemprego	TD_t	Fonte: Base de dados DataStream
Preço do petróleo	OIL_t	Preço do petróleo no mercado americano Fonte: http://www.eia.doe.gov/oil_gas/petroleum/info_glance/prices.html

Tabela 6.1: Definição dos indicadores para a análise da sua relação com o mercado bolsista português. Nota: todos os indicadores têm periodicidade mensal. O período da análise é de Outubro de 1993 a Outubro de 2003.

⁵De acordo com vários autores [e.g. Chen *et al.* (1986), Fama (1990)] apenas deverão ser tidas em consideração as mudanças não antecipadas das variáveis explicativas. Assim, nalguns casos foi necessário proceder à filtragem das sucessões cronológicas que apresentem sinais de autocorrelação estatisticamente significativos.

⁶Com vista a uniformizar a terminologia, considerar-se-ão indicadores as sucessões cronológicas originais retiradas do mercado e as variáveis serão consideradas sucessões cronológicas fruto de algumas transformações nos indicadores anteriormente referidos.

6.2.1 Excess return

Alguns autores, como por exemplo Chen, Roll e Ross (1986), Fama e French (1993) e Elton, Gruber e Blake (1995b), utilizaram modelos de regressão em que os índices de mercado constituíam variáveis independentes ou explicativas onde na maioria dos casos, a variável dependente era uma medida do valor de carteiras de acções diversificadas. Fama (1981) e Pesaran e Timmermann (1995) consideraram que o índice de mercado constitui a melhor réplica possível de uma carteira diversificada referente ao mercado em estudo e por isso deveria constituir a variável dependente.

À semelhança de Fama (1981), Asprem (1989) e Pesaran e Timmermann (1995), entre outros, o índice do mercado bolsista será também utilizado neste trabalho de investigação como variável dependente de um conjunto de factores económicos e financeiros, sendo o índice *DataStream* o índice do mercado bolsista português. A taxa de rendibilidade excedente (ou *excess return*) mensal do índice é calculada da seguinte forma

$$ER_t = \frac{PI_t - PI_{t-1} + D_t}{PI_{t-1}} - Lisbor3M_{t-1}, \quad (6.3)$$

onde ER_t é o *excess return*, PI_t é a cotação no último dia do mês t , D_t são os dividendos pagos no momento t , PI_{t-1} é a cotação no fim do mês $t - 1$ e $Lisbor3M_{t-1}$ é a taxa Lisbor a 3 meses.⁷

6.2.2 Taxa de crescimento das taxas de juro sem risco a curto e a longo prazo

Fama e French (1989) e Fama (1990) consideraram significativa a influência do prémio do tempo (diferença entre taxa de juro sem risco de longo prazo e taxa de juro sem risco de curto prazo) sobre o comportamento das taxas de rendibilidade das acções.

Asprem (1989) verificou a existência de uma correlação negativa, ainda que nem sempre significativa, entre as taxas de juro sem risco e as taxas de rendibilidade dos índices bolsistas de dez países europeus, especialmente para a Alemanha, Holanda, Suíça e Reino Unido.

Pesaran e Timmermann (1995) consideraram que a avaliação da influência da taxa de juro nos mercados de acções deveria ser realizada através da inclusão directa destas mesmas taxas no modelo a estudar. Os autores verificaram que os coeficientes destas duas variáveis não apresentavam significância estatística em grande parte dos modelos analisados e que nos períodos em que apresentavam significância estatística os coeficientes indicavam que estas influenciavam negativamente o mercado bolsista.

⁷Nesta tese serão utilizadas as taxas de rendibilidade nominais ao invés das taxas de rendibilidade reais. Por exemplo Jones e Kaul (1996) argumentam que a utilização de um ou outro tipo de variáveis não altera qualitativamente os resultados.

No presente estudo, foi seleccionada a taxa de juro mensal Lisbor a 3 meses para captar o efeito da taxa de juro sem risco a curto prazo e a taxa de rendibilidade mensal de uma *swap* a 10 anos para representar a taxa de juro sem risco a longo prazo. Estas taxas foram obtidas na base de dados *Dhatis*, tendo sido posteriormente transformadas em termos logarítmicos. Uma vez que os testes de estacionariedade realizados sobre estas sucessões cronológicas indicaram que as mesmas eram não estacionárias, foram consideradas as diferenças dos logaritmos das mesmas, ou seja

$$\Delta Lisbor3M_t = \ln(Lisbor3M_t) - \ln(Lisbor3M_{t-1}), \quad (6.4)$$

$$\Delta Swap10_t = \ln(Swap10_t) - \ln(Swap10_{t-1}), \quad (6.5)$$

onde $\Delta Lisbor3M_t$ é a taxa de crescimento mensal da Lisbor a 3 meses e $\Delta Swap10_t$ é a taxa de crescimento mensal das taxas de rendibilidade da *swap* a 10 anos. Tendo-se verificado a existência de autocorrelação estatisticamente significativa nas sucessões cronológicas $\Delta Lisbor3M_t$ e $\Delta Swap10_t$ foi necessário proceder à sua filtragem (ver Tabela 3.19) tendo sido obtidas as sucessões cronológicas $inovLisbor_t$ e $inovSwap_t$.

6.2.3 Taxa de crescimento da *dividend yield*

A *dividend yield*, DY , corresponde aos dividendos esperados de uma acção (ou índice) como proporção dos preços das acções (ou índice) e pode ser interpretada como a taxa à qual os dividendos futuros são descontados face aos preços actuais [Campbell *et al.* (1989)]. A *dividend yield* pode ser calculada através da seguinte expressão⁸

$$DY_t = \frac{D_t}{P_t}, \quad (6.6)$$

onde D_t é o valor dos dividendos e P_t é o preço da acção (ou do índice) no momento t . Uma vez que se encontrou evidência de não estacionariedade para a sucessão cronológica DY , foi construída a sucessão referente às diferenças dos logaritmos de DY , através da seguinte expressão

$$\Delta DY_t = \ln(DY_t) - \ln(DY_{t-1}). \quad (6.7)$$

A sucessão cronológica ΔDY não apresentou sinais de autocorrelação estatisticamente significativos, não tendo sido necessário recorrer a processos de filtragem.

A inclusão da *dividend yield* na análise do comportamento das taxas de rendibilidade das acções é explorada por vários autores, nomeadamente Campbell (1987), Fama e French (1988, 1989), Campbell e Shiller (1988, 1989), Hodrick (1992) e Raj e Thurston (1995). De um modo

⁸No presente estudo este indicador foi retirado directamente da base de dados *DataStream*.

geral, as conclusões tiradas pelos autores enunciados apontam para uma forte dependência das variações das taxas de rendibilidade das acções face às variações da *dividend yield*, caracterizada por uma correlação normalmente positiva. De acordo com Sharpe, Alexander e Bailey (1999) esta correlação positiva é sinal de que os investidores estão a expressar as suas expectativas optimistas acerca do comportamento das empresas. Por outro lado, Fama (1990) argumenta que sendo a *DY* um rácio cujo denominador é o preço da acção num determinado momento do tempo, então choques contemporâneos em *DY* e nas taxas de rendibilidade das acções deveriam estar negativamente correlacionados, mantendo-se D_t aproximadamente constante.

Pesaran e Timmermann (1995) utilizaram também a *dividend yield* desfasada um *lag* na análise efectuada à influência de factores macroeconómicos e financeiros sobre as taxas de rendibilidade das acções. Os resultados destes autores indicaram que a *dividend yield* é uma variável com um poder de predição elevado, especialmente a partir da década de 70, sendo por isso considerada nos modelos de avaliação da predictabilidade das taxas de rendibilidade do índice S&P 500.

6.2.4 Taxa de crescimento do *earnings price ratio*

O rácio *EPR* com periodicidade mensal foi obtido a partir da base de dados *DataStream* e representa a relação entre os resultados por acção e a cotação das acções num dado momento, sendo calculado da seguinte forma

$$EPR_t = \frac{\text{Resultado líquido por acção}_t}{\text{Preço por acção}_t}, \quad (6.8)$$

onde

$$\text{Resultado líquido por acção} = \frac{\text{Resultados líquidos}}{N.º \text{ total de acções}}. \quad (6.9)$$

Dado que a sucessão cronológica referente ao *EPR* não é estacionária, procedeu-se ao cálculo da taxa de crescimento do rácio em estudo, através da seguinte expressão

$$\Delta EPR_t = \ln(EPR_t) - \ln(EPR_{t-1}). \quad (6.10)$$

A sucessão cronológica ΔEPR não apresentou sinais de autocorrelação estatisticamente significativa, não tendo, por isso, sido alvo de um processo de filtragem.

O valor de uma empresa num determinado momento do tempo é função das suas potencialidades em criar riqueza no futuro. Neste sentido, o investidor está disposto a pagar no máximo por uma acção o valor actualizado dos fluxos financeiros que o título lhe proporcione no futuro. Por isso, o mesmo título pode ter diferentes valores para diferentes investidores pois tudo depende das expectativas que se tenham face ao desenvolvimento da empresa. Na prática, o *EPR* reflecte o potencial de crescimento apercebido pelo mercado bolsista, o nível de risco envolvido no negócio e

a política de dividendos [Brealey *et al.* (1998)] e representa a taxa de actualização que poderia ser aplicada no caso de não haver reinvestimento e de a expectativa de crescimento ser nula, admitindo que no preço de cotação já está descontado o risco [Neves (2002)].

O *EPR* de uma determinada empresa sofre também a influência de factores externos à empresa, tais como a indústria onde esta opera e o nível do mercado de capitais. Quando as expectativas são de crescimento e se entra num ciclo de expansão da economia, o *PER* (inverso do *EPR*) tende a crescer mais depressa que os resultados das empresas [Amaro *et al.* (1998)], logo o *EPR* tenderá a decrescer.

De acordo com Campbell e Shiller (1988) é importante ter em conta os resultados líquidos por acção (*earnings per share*) na análise do comportamento das taxas de rendibilidade das acções, pois esta informação pode auxiliar e influenciar o investidor no processo de avaliação da *performance* de uma determinada empresa. Neste contexto, estes autores consideram que o rácio *EPR* poderá constituir um elemento importante na explicação e previsão das taxas de rendibilidade das acções, especialmente se for medido através de médias móveis de vários anos. Fama e French (1992) citam o trabalho de Basu (1983) e concluem, à semelhança de Basu (1983), que o *EPR* poderá constituir uma *proxy* para as taxas de rendibilidade das acções, existindo uma relação positiva entre tais variáveis. Já Clare, Priestley e Thomas (1998) argumentam que o *EPR* tem tendência a demonstrar uma relação positiva com as taxas de rendibilidade quando não são incluídas quaisquer outras variáveis na análise, verificando-se que a inclusão de outros regressores pode conduzir à mudança de sinal e inclusivamente à perda de significância estatística por parte do *EPR*.

Pesaran e Timmermann (1995) consideraram o *EPR* do índice S&P 500 na análise da dependência deste mesmo índice face a diversos factores. Os autores concluíram que a importância deste factor era relativamente fraca, especialmente a partir de 1970 (ao contrário da *DY*), onde a significância estatística foi praticamente nula. A escolha deste factor prende-se com a importância que tem junto dos investidores no momento da decisão de investimento, porque reflecte a impressão que o mercado tem do título, quer ao nível operacional, quer ao nível financeiro.

Raj e Thurston (1995) avaliaram o poder explicativo da *DY* e do *EPR* sobre as taxas de rendibilidade das acções e concluíram que ambas as variáveis são estatisticamente significativas, sendo as taxas de rendibilidade positivamente correlacionadas com a *DY* e negativamente correlacionadas com o *EPR*.

6.2.5 Taxa de crescimento do índice de preços no consumidor

A taxa de crescimento do índice de preços no consumidor para cada momento (mês) é calculada através da diferença dos logaritmos do índice de preços no consumidor (IPC). Este índice foi obtido na base de dados *DataStream*, sendo a respectiva taxa de crescimento mensal encontrada através da seguinte expressão

$$\Delta IPC_t = \ln IPC_t - \ln IPC_{t-1}. \quad (6.11)$$

A taxa de crescimento do índice de preços no consumidor, comparável com a taxa de inflação, constitui uma medida da variação do custo de vida do consumidor, sendo por isso importante avaliar a sua influência no mercado de acções. Além disso, esta variável pode constituir uma medida aproximada do estado da economia de um determinado país que, conjuntamente com outras medidas, pode representar a actuação do investidor no mercado bolsista de acções. Como a sucessão cronológica ΔIPC_t apresentou sinais de autocorrelação estatisticamente significativos, foi obtida a sucessão $inovIPC_t$ através do processo de filtragem apresentado na Tabela 3.19. Esta nova sucessão refere-se às mudanças não antecipadas na inflação.

Esta variável tem sido alvo de análise em várias perspectivas, nomeadamente a influência que tem sobre as taxas de rendibilidade das acções e respectivos mercados. Muitos autores encontraram uma relação negativa entre as taxas de rendibilidade das acções e a taxa de inflação esperada e não antecipada [Schwert (1981), Fama (1981), Geske *et al.* (1983), James *et al.* (1985), Chen *et al.* (1986), Lee (1992)], resultados que são contrários à teoria de Fisher, segundo a qual as taxas de rendibilidade das acções deveriam estar positivamente correlacionadas com a inflação esperada e não antecipada, uma vez que o investimento em títulos bolsistas constituiria uma cobertura contra a inflação. De acordo com Fama (1981) esta relação negativa não é causal, mas constitui sim uma *proxy* para a relação positiva entre as taxas de rendibilidade das acções e a actividade económica real que é induzida pela relação negativa entre a actividade económica real e a inflação. Os resultados de Chen, Roll e Ross (1986) apontam para a existência de prémios de risco negativos para a inflação não antecipada, o que poderá ser resultado dos activos transaccionados no mercado de acções sofrerem com o aumento generalizado de preços de outros activos. Já Geske e Roll (1983) consideraram que a correlação negativa entre as taxas de rendibilidade das acções e a inflação resulta do facto de variações na actividade económica real provocarem variações na taxa de crescimento da oferta de moeda, que por sua vez influencia a inflação esperada.

James, Koreisha e Partch (1985) aplicaram um modelo *VARMA* (modelo *VAR* com médias móveis) a quatro variáveis: taxas de rendibilidade das acções, actividade económica real (taxa de crescimento do índice de produção industrial), inflação e taxa de crescimento da oferta de moeda.

Estes autores encontraram relações de causalidade entre as variáveis em estudo e evidência empírica de que as taxas de rendibilidade das acções conduzem as variações na actividade económica real e também as variações da taxa de crescimento da oferta de moeda, sugerindo a existência de uma relação entre a oferta de moeda e a actividade económica real.

Asprem (1989) encontrou também uma relação negativa entre as taxas de rendibilidade dos índices bolsistas de vários países europeus e a inflação esperada e não esperada, realçando a Dinamarca, Finlândia, Alemanha, Holanda e Noruega como os países que apresentaram resultados mais significativos.

Em 1992 Lee utilizou um modelo *VAR* para avaliar as relações de causalidade e interações dinâmicas entre as taxas de rendibilidade das acções, a inflação e a actividade económica real, sendo as conclusões retiradas deste estudo semelhantes às conclusões de Fama (1981). Pesaran e Timmermann (1995) concluíram que a inflação não apresentava significância estatística para a maioria dos períodos analisados e de acordo com os critérios de informação utilizados, este factor raramente seria escolhido para integrar num modelo para predição.

Hess e Lee (1999) mostraram que a relação entre taxas de rendibilidade de acções e inflação não antecipada pode ser positiva ou negativa, dependendo da fonte de inflação na economia. Se a inflação tiver como causa a oferta (*output* real) então a relação com as taxas de rendibilidade das acções é negativa; caso a causa da inflação seja a procura (causa monetária), então a relação é positiva. Chopin e Zhong (2001) aplicaram o modelo *VECM* às variáveis: índice S&P 500, índice de preços no consumidor, índice de produção industrial, taxa de juro sem risco, massa monetária e défice do banco federal, tendo tirado conclusões semelhantes às de Fama (1981).

6.2.6 Taxa de crescimento da produção industrial mensal e homóloga

A sucessão cronológica do índice de produção industrial mensal foi obtida no Instituto Nacional de Estatística (INE). Esta sucessão foi alvo de tratamento, com vista a obter-se a taxa de crescimento da produção industrial. A taxa de crescimento da produção industrial mensal (ΔPIM), obtém-se através da seguinte expressão

$$\Delta PIM_t = \ln IPI_t - \ln IPI_{t-1}, \quad (6.12)$$

e a taxa de crescimento anual da produção industrial é dada por

$$\Delta PIA_t = \ln IPI_t - \ln IPI_{t-12}. \quad (6.13)$$

A sucessão cronológica mensal da taxa de crescimento anual (ΔPIA_t) é tomada em conta, pois de acordo com vários autores [e.g. Pesaran *et al.* (1995)] o mercado de acções é bastante influenciado

por ciclos económicos, existindo uma ligação forte à actividade industrial, especialmente a médio prazo. Uma vez que ambas as sucessões cronológicas (ΔPIM_t e ΔPIA_t) apresentaram sinais de autocorrelação estatisticamente significativa, foram obtidas as sucessões $inovPIM_t$ e $inovPIA_t$ através dos processos de filtragem indicados na Tabela 3.19, que representam as mudanças não antecipadas nos índices de produção industrial mensal e anual (homóloga) respectivamente.

Chen Roll e Ross (1986) obtiveram prémios de risco positivos para a taxa de crescimento da produção industrial mensal, ainda que esta variável não apresentasse significância estatística na maioria dos períodos analisados.

Já McQueen e Roley (1993) concluíram que as informações não antecipadas referentes à actividade económica real tinham pouco impacto nos preços das acções e respectivas taxas de rendibilidade e que o sinal da correlação dependia do ciclo económico vigente.

Outros autores [e.g. Fama (1981, 1990), Asprem (1989), Choi *et al.* (1999), Binswanger (2000, 2001)] consideraram que são as taxas de rendibilidade que lideram o comportamento da actividade económica real, medida pelas taxas de crescimento futuras do PIB ou do índice de produção industrial. Um dos principais argumentos para a relação entre taxas de rendibilidade de acções e taxas de crescimento futuras da actividade económica real de um determinado país, assenta nos modelos tradicionais de avaliação de activos, segundo os quais o preço de uma acção é igual ao valor esperado dos dividendos futuros actualizados (tal como referido anteriormente), suportado pela ideia que as expectativas dos investidores reflectem o comportamento dos factores fundamentais da actividade económica real medida pelo PIB ou pelo índice de produção industrial (Shapiro, 1988). Asprem (1989) afirma ainda que quando se assume que os mercados são eficientes, então são as expectativas dos investidores acerca dos valores futuros destas variáveis representativas da actividade económica real que deverão influenciar o comportamento dos preços das acções.⁹

Deste modo os preços das acções deverão constituir um informador ou indicador sobre a actividade económica real futura [Binswanger (2000)]. Vários estudos [e.g Fama (1981), Geske *et al.* (1983), James *et al.* (1985), Asprem (1989), Fama (1990), Schwert (1990), Choi *et al.* (1999), Binswanger (2000, 2001)] concluíram que uma parte substancial da variação das taxas de rendibilidade das acções poderia ser explicada pelos valores esperados de algumas variáveis económicas. Por outro lado, Domian e Louton (1997) encontraram evidência empírica de predictabilidade assimétrica das taxas de crescimento do índice de produção industrial através das taxas de rendibilidade das acções.

⁹De acordo com Asprem (1989) a utilização de observações desfasadas para as variáveis representativas da actividade económica real ganham importância quando os investidores não têm capacidade para prever futuras tendências, se há desacordo na forma como as taxas de rendibilidade são afectadas ou no caso de a informação ser disseminada muito lentamente ou de forma pouco eficiente.

De acordo com os resultados obtidos por Domian e Louton (1997), taxas de rendibilidade de acções negativas eram seguidas de fortes quedas nas taxas de crescimento do índice de produção industrial. Além disso, apenas ligeiros aumentos nas taxas de crescimento do índice de produção industrial eram seguidas de taxas de rendibilidade das acções positivas, existindo efeitos de *feedback* de forma assimétrica.

6.2.7 Taxa de crescimento da taxa de desemprego

A inclusão da taxa de desemprego mensal deve-se ao facto de esta ser um indicador do estado da economia de um determinado país, assim como do nível de confiança dos investidores nos mercados financeiros. Uma vez que apenas são calculadas pelo Instituto Nacional de Estatística (INE) as taxas de desemprego trimestrais e dado o estudo em causa assentar numa periodicidade mensal, foi obtida a sucessão cronológica com periodicidade mensal na base de dados *DataStream*.

Seja TD_t a taxa de desemprego para o mês t , e tendo sido verificado que esta sucessão cronológica apresentava sinais de não estacionariedade, foram calculadas as diferenças dos logaritmos, com vista a calcular a sucessão referente às primeiras diferenças

$$\Delta TD_t = \ln(TD_t) - \ln(TD_{t-1}). \quad (6.14)$$

A sucessão cronológica ΔTD_t apresentou evidência estatística de autocorrelação, tendo sido alvo de filtragem, conforme a Tabela 3.19, obtendo-se a sucessão *inovTD_t*.

Geske e Roll (1983) analisaram a relação entre as taxas de rendibilidade das acções e a taxa de crescimento da taxa de desemprego, sendo esta variável representativa da actividade económica real, concluindo que as taxas de rendibilidade das acções conduzem o comportamento da variação das taxas de desemprego, apresentando uma correlação negativa e estatisticamente significativa. Aspren (1989) analisou a relação entre o comportamento dos índices bolsistas de alguns países europeus e o emprego e verificou a existência de uma relação negativa entre estas variáveis. Uma das razões apontadas por este autor para tal resultado é o facto de o investidor esperar que o emprego aumente apenas nos últimos momentos de um período de alta quando são esperados declínios dos ganhos para a maioria das empresas.

6.2.8 Variação do preço do petróleo

De acordo com vários autores, nomeadamente Chen, Roll e Ross (1986) e Jones e Kaul (1996) a inclusão dos preços do petróleo na análise da influência de factores macroeconómicos e financeiros nas taxas de rendibilidade das acções, justifica-se na medida em que este factor constitui em si um

barómetro da economia internacional. Os preços diários no produtor (OPEC) foram obtidos no *site* http://www.eia.doe.gov/oil_gas/petroleum/info_glance/prices.html, com os quais se construiu a sucessão cronológica a utilizar neste estudo, onde OIL_t é o preço do petróleo no mercado americano (*OK WTI SPOT*) verificado no último dia do mês t e OIL_{t-1} é o preço do petróleo no mercado americano (*OK WTI SPOT*) verificado no último dia do mês $t - 1$

$$\Delta OIL_t = \ln OIL_t - \ln OIL_{t-1}. \quad (6.15)$$

Esta sucessão cronológica não apresentou sinais evidentes de autocorrelação, não tendo sido necessário proceder à sua filtragem.

Chen, Roll e Ross (1986) concluíram que esta variável não apresentava significância estatística em quase nenhum dos períodos analisados e que por isso não deveria ser incluída no estudo realizado pelos autores. Jones e Kaul (1996) analisaram os efeitos da variação do preço do petróleo nas taxas de rendibilidade das acções em quatro países: EUA, Canadá, Japão e Reino Unido. Estes autores encontraram evidência empírica de que as taxas de rendibilidade das acções estão negativamente correlacionadas com a variação do preço do petróleo e os coeficientes são estatisticamente significativos para as observações contemporâneas e desfasadas da variável explicativa. Verificaram também que os efeitos da variação do preço do petróleo sobre as taxas de rendibilidade das acções para os EUA e Canadá são anulados quando se introduzem outras variáveis económicas e financeiras nos modelos, levando a crer que para estes países a variação do preço do petróleo não é uma boa *proxy* por acção do efeito de multicolinearidade.

6.3 Avaliação das componentes de longo prazo na relação entre os indicadores

Os testes de raízes unitárias das sucessões cronológicas apresentadas na Tabela 3.13 indicam que todos os indicadores em causa são integrados de primeira ordem, ou seja, são não estacionários em níveis e estacionários em primeiras diferenças. Neste contexto, importa proceder à realização de testes de cointegração das sucessões logaritmicamente transformadas, com vista a despistar a eventualidade de regressões espúrias entre os indicadores analisados. No caso dos indicadores estarem cointegrados, então existe evidência estatística de relação de longo prazo entre o índice do mercado bolsista português (*PI*) e os restantes indicadores económicos considerados. Os testes de cointegração foram realizados com base no método de Johansen [Johansen (1988), Johansen *et al.* (1990)] que se baseia na especificação de um modelo vectorial de correcção do erro, incluindo um determinado número de *lags* (p).

Seja y_t um vector de variáveis $I(1)$ e Δy_t um vector de indicadores $I(0)$. A matriz Π pode ser factorizada como $\Pi = \alpha\beta'$, onde α representa a velocidade de ajustamento ao desequilíbrio e β é a matriz de coeficientes de longo prazo, ou seja, os vectores cointegrantes, Γ e μ são vectores de coeficientes, em que μ é um vector de constantes e ε_t é um processo ruído branco. O sistema utilizado pode ser representado pela seguinte forma de correcção do erro (*VECM*)

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma \Delta y_{t-i} + \mu + \varepsilon_t. \quad (6.16)$$

Para o estudo em causa foram consideradas combinações de dois indicadores, mais precisamente a combinação de *PI* com cada um dos restantes indicadores. Para além da possível relação de cointegração, foi também testada a exogeneidade fraca entre os indicadores com o propósito de avaliar os efeitos de *feedback* entre os mesmos.

As duas primeiras colunas da Tabela 6.2 identificam os pares de indicadores utilizados em cada teste. A terceira coluna refere-se à hipótese nula de cada teste de cointegração, onde $r = 0$ corresponde à hipótese nula de que não existem vectores cointegrantes e $r \leq 1$ corresponde à hipótese nula de que existe no máximo um vector cointegrante, ou seja, que a característica da matriz $\pi = \alpha\beta'$ é menor ou igual a 1. As colunas (5) e (6) reportam os valores próprios das estatísticas do traço e do valor próprio máximo (teste de Johansen).

Os resultados obtidos apontam para a ausência de cointegração em alguns dos pares analisados, nomeadamente *PI* e *Lisbor3M*, *PI* e *Swap10*, *PI* e *EPR* e *PI* e *OIL*. Conforme se pode ver pelos resultados do teste do traço e do valor próprio máximo, os pares *PI* e *DY*, *PI* e *IPC*, *PI* e *IPI* e *PI* e *TD* estão cointegrados. Nestes pares, a hipótese de $r = 0$ foi rejeitada a 1% em quase todos os casos, mas não se rejeitou a hipótese nula de $r \leq 1$ (na relação *PI* – *TD* o nível de significância é de 5%). Neste contexto, pode dizer-se que existe uma relação de longo prazo entre estes indicadores.¹⁰

Uma vez que a matriz α contém informação sobre o ajustamento dinâmico da relação de longo prazo estabelecida entre os indicadores cointegrados, então poder-se-á testar se um determinado factor pode “conduzir” o comportamento do outro factor. A hipótese nula tida em conta é $\alpha_{i1} = 0$, com $i = 1, 2$. Caso a hipótese nula de exogeneidade fraca não seja rejeitada, então esse factor é considerado exógeno. Este teste segue uma distribuição χ^2 com um grau de liberdade e os resultados são apresentados nas colunas (7), (8), (9) e (10) da Tabela 6.2. Foi também aplicado o teste de causalidade à Granger de modo a poder-se concluir acerca da exogeneidade forte para alguns dos

¹⁰Foram também realizados testes à transmissão assimétrica dos preços, tendo sido aplicados modelos *TAR* e *M-TAR* [ver Enders, *et al.* (2001)]. De um modo geral os resultados da aplicação destes modelos foram inconclusivos (vide Anexo G).

						Exogeneidade			
						Indic. 1		Indic. 2	
Indic. 1	Indic. 2	Rank	V.p.	Traço	V.p. máx.	Est.	p-value	Est.	p-value
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
<i>PI</i>	<i>Lisbor3M</i>	$r = 0$	0,028	3,579	3,523				
		$r \leq 1$	0,001	0,057	0,057				
<i>PI</i>	<i>Swap10</i>	$r = 0$	0,022	3,446	2,663				
		$r \leq 1$	0,007	0,782	0,782				
<i>PI</i>	<i>DY</i>	$r = 0$	0,133	20,298	** 17,043	* 2,321	0,128	3,000	0,083
		$r \leq 1$	0,027	3,249	3,249				
<i>PI</i>	<i>EPR</i>	$r = 0$	0,026	5,707	3,087				
		$r \leq 1$	0,022	2,621	2,621				
<i>PI</i>	<i>IPC</i>	$r = 0$	0,181	25,991	** 23,368	** 0,006	0,939	20,614	0,000
		$r \leq 1$	0,022	2,623	2,623				
<i>PI</i>	<i>IPI</i>	$r = 0$	0,285	41,579	** 39,275	** 0,028	0,865	36,678	0,000
		$r \leq 1$	0,019	2,304	2,304				
<i>PI</i>	<i>TD</i>	$r = 0$	0,125	19,497	* 15,924	0,030	0,862	12,282	0,000
		$r \leq 1$	0,029	3,573	3,573				
<i>PI</i>	<i>OIL</i>	$r = 0$	0,027	5,142	3,163				
		$r \leq 1$	0,017	1,979	1,979				

Tabela 6.2: Testes de cointegração entre *PI* e cada um dos restantes indicadores para o período entre Outubro de 1993 a Outubro de 2003. Em todos os casos foi considerado 1 *lag* de acordo com o critério de informação *SIC*. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

indicadores¹¹ (os resultados deste teste encontram-se no Anexo H). O teste de causalidade à Granger baseia-se na premissa de que o futuro não pode causar o presente ou o passado. Apesar de tudo, o termo “causalidade” pode nem sempre ser o mais apropriado, pois poderá existir uma precedência, mais concretamente precedência linear, ao invés de verdadeira causalidade entre indicadores ou variáveis.

Estes resultados são de algum modo surpreendentes, dado que para os pares cointegrados nunca é rejeitada a hipótese nula de exogeneidade fraca para PI , verificando-se, de acordo com os resultados do teste de causalidade à Granger, que este indicador é também fortemente exógeno, uma vez que não é rejeitada a hipótese de que nenhum dos outros indicadores causa à Granger PI . Os resultados parecem levar ainda à conclusão de que é o índice do mercado bolsista português que conduz o comportamento da *dividend yield*, do índice de preços no consumidor, do índice de produção industrial e da taxa de desemprego. Tais resultados estão de acordo com os resultados obtidos por Choi, Hauser e Kopecky (1999), Domian e Louton (1997) e Binswanger (2001), nos quais é reportada evidência de que o mercado de acções conduz algumas variáveis económicas do respectivo país, nomeadamente o índice de produção industrial.

De salientar também o estudo efectuado por Karamustafa e Kucukkale (2003) aplicado ao mercado bolsista turco. Estes autores avaliaram as relações de longo prazo entre os preços mensais do índice do mercado bolsista de Istambul e algumas variáveis macroeconómicas, nomeadamente: a massa monetária, a taxa de câmbio lira turca/dólar (EUA), o saldo da balança comercial e o índice de produção industrial. Para tal foram efectuados testes de cointegração de Engle-Granger e de Johansen e o teste de causalidade à Granger. Karamustafa e Kucukkale (2003) concluíram que o índice do mercado bolsista de Istambul está cointegrado com a maioria das variáveis macroeconómicas utilizadas, o que indica existir uma relação de equilíbrio de longo prazo entre os indicadores analisados. Contudo, e à semelhança dos resultados encontrados no presente trabalho de investigação, é o índice do mercado bolsista que parece conduzir (ou pelo menos antecipar) o comportamento de algumas variáveis macroeconómicas.

Os resultados apresentados na Tabela 6.2 indicam que PI é um indicador exógeno face a todos os indicadores com os quais está cointegrado, o que não quer dizer que PI influencie directamente estes indicadores, podendo simplesmente antecipar o comportamento dos mesmos. Por outro lado, PI não apresenta sinais de cointegração com alguns indicadores muito relevantes em termos da literatura analisada, nomeadamente a taxa de juro sem risco a curto e a longo prazo. Estes resultados parecem não se enquadrar de forma perfeita nos resultados normalmente obtidos para

¹¹A exogeneidade forte resulta da conjunção da exogeneidade fraca com a não causalidade à Granger, assegurando deste modo, uma previsão condicional válida [Marques (1998)].

o caso norte-americano, que apontam para o facto de os mercados bolsistas serem influenciados significativamente por alguns indicadores macroeconómicos (nomeadamente as taxas de juro sem risco), facto que não é tão evidente em alguns estudos dirigidos para a realidade europeia. Por exemplo Poon e Taylor (1991) analisaram o mercado do Reino Unido, Martínez e Rubio (1989) analisaram o mercado espanhol, Gjerde e Saettem (1999) analisaram o mercado norueguês e todos concluíram que os índices dos mercados bolsistas não eram influenciados de forma estatisticamente significativa pelos indicadores macroeconómicos nacionais tidos em consideração. Uma possível explicação poderá residir no facto de que a maioria dos mercados dos países europeus são mercados caracterizados por uma forte abertura ao exterior, o que leva a que o mercado de acções e determinados indicadores económicos nacionais nem sempre apresentem uma relação de longo prazo (e também de curto prazo) significativa.

Chopin e Zhong (2001) utilizaram o modelo *VECM* para examinar a relação entre as taxas de rendibilidade das acções e a inflação para o mercado norte-americano no período pós-2.^a Guerra Mundial, de forma a testar se [de acordo com Fama (1981)] a correlação negativa entre estas variáveis constituía uma *proxy* para a relação positiva entre as taxas de rendibilidade das acções e a actividade económica real. Estes autores aplicaram o modelo *VECM* aos indicadores: índice bolsista S&P 500, índice de preços no consumidor, índice de produção industrial, taxa de juro sem risco a 3 meses, massa monetária e défice federal, concluindo de acordo com os resultados obtidos por Fama em 1981.

Numa perspectiva um pouco diferente, Ferreira, Menezes e Mendes (2003) empregaram técnicas de cointegração para avaliar o comportamento do índice bolsista PSI 20 face a determinados índices europeus (CAC 40, FTSE 100 e DAX 30) e ao índice norte-americano S&P 500. Os autores concluíram que em todos os pares de índices analisados (sendo sempre incluído o índice PSI 20) existiam sinais de cointegração, sendo que a partir da introdução do Euro em 1999, a cointegração com os demais índices bolsistas europeus se tenha intensificado e com o índice S&P 500 tenha diminuído de intensidade. Os testes de exogeneidade fraca realizados pelos mesmos autores indicaram que o índice PSI 20 é sempre “conduzido” pelos restantes índices em estudo.¹²

Os testes de cointegração acima descritos baseiam-se, como anteriormente referido, numa reformulação do *VAR* conhecida como modelo *VECM*. Os modelos *VECM* têm a vantagem de permitir distinguir os efeitos de curto e de longo prazo inerentes a uma especificação *VAR*. Neste contexto, se as variáveis estiverem cointegradas, consegue-se sempre identificar uma relação de longo prazo significativa. No presente estudo foi aplicado e estimado o modelo *VECM* para cada par de indi-

¹²A interpretação dos resultados de alguns trabalhos aqui enunciados pode não ser directamente comparável em virtude de diferentes definições de variáveis, diferentes períodos temporais e diferentes ciclos económicos.

cadadores que apresentaram evidência de cointegração (Tabela 6.2), tendo sido obtidos os sistemas de equações (1), (2), (3) e (4) do Anexo I.

Os resultados obtidos para os indicadores PI e DY apontam para uma relação de longo prazo negativa, conforme pode ser visto pelos coeficientes de longo prazo do sistema de equações (1) do Anexo I. No que respeita às variações de curto prazo, os resultados apontam para um efeito negativo das variações de PI em DY , contudo não há um efeito significativo das variações de curto prazo de DY em PI , o que parece indicar que é o indicador PI que conduz DY e não o contrário, resultado que pode ser confirmado pelos testes de exogeneidade fraca apresentados na Tabela 6.2. Relativamente ao par de indicadores PI e IPC [sistema de equações (2) do Anexo I], verifica-se que o sistema apenas captou a autocorrelação existente nas respectivas sucessões cronológicas. No que concerne aos indicadores PI e IPI ; PI e TD [sistemas de equações (3) e (4) do Anexo I], as conclusões são semelhantes, deixando antever a existência de uma relação de longo prazo positiva entre PI e IPI e negativa entre PI e TD . Os resultados apurados parecem indicar que é PI quem conduz os indicadores IPI e TD . Verifica-se, de um modo geral, que é o indicador referente ao mercado bolsista de acções português que conduz o comportamento de alguns indicadores económico-financeiros, sendo de registar que PI não é influenciado pelos restantes indicadores em nenhuma das situações analisadas. Esta situação pode ser fruto da pequena dimensão do mercado português e da sua forte abertura ao exterior, criando condições favoráveis à existência de especulação.

Com vista ao alargamento do estudo, procedeu-se à análise da cointegração entre todos os indicadores que apresentaram evidência de cointegração para com o índice bolsista português (PI). Neste contexto, foi utilizado o método de Johansen para apurar o número de vectores cointegrantes entre os indicadores: PI , DY , IPC , IPI e TD . Os resultados deste teste de cointegração revelaram a existência de 4 vectores cointegrantes, cujo $VAR(1)$ respectivo está descrito em anexo (vide Anexo I).

O sistema de equações (5) do Anexo I indicia que PI será um indicador exógeno, uma vez que não é influenciado de forma estatisticamente significativa por nenhum dos restantes indicadores, facto que é comprovado pelos testes de exogeneidade fraca realizados. O indicador PI parece conduzir o comportamento dos indicadores DY , IPC e TD com os quais apresenta correlação negativa. É de destacar a correlação positiva entre IPC e IPI , facto que não corrobora alguns resultados obtidos por outros autores, nomeadamente Fama (1981) e Chopin e Zhong (2001). Este resultado parece indicar que no mercado português a actividade económica global é positivamente estimulada pelo aumento geral do índice de preços no consumidor, tal como o índice de preços é positivamente influenciado pelo índice de produção industrial. De acordo com Hess e Lee (1999)

a relação entre taxas de rendibilidade de acções e a inflação não antecipada pode ser negativa ou positiva, dependendo da fonte de inflação na economia, caso esta mesma inflação seja provocada, respectivamente pela oferta (*output* real) ou pela procura (causa monetária). De referir também que o indicador *TD* é positivamente correlacionado com *IPC*, indicando que o aumento generalizado dos preços pode conduzir ao aumento da taxa de desemprego.

Foi também realizado o teste de causalidade à Granger (vide Anexo H), verificando-se que as relações de causalidade existentes são: $\Delta(\ln PI) \rightarrow \Delta(\ln DY)$; $\Delta(\ln TD) \rightarrow \Delta(\ln DY)$; $\Delta(\ln TD) \rightarrow \Delta(\ln IPI)$ e $\Delta(\ln IPI) \rightarrow \Delta(\ln TD)$, resultados estes que estão relativamente de acordo com os resultados do modelo *VAR* estimado. Neste contexto, os indicadores *PI* e *IPC* não são “causados” por nenhum dos outros indicadores. Denota-se que o factor *DY* é influenciado pelo comportamento do índice e da taxa de desemprego.

A análise efectuada corrobora a hipótese de que o índice do mercado bolsista português é, perante a maioria dos indicadores considerados, um indicador fortemente exógeno, conduzindo (ou pelo menos antecipando) o comportamento de outros indicadores, nomeadamente *DY*, *IPI*, *IPC* e *TD*. Estes resultados estão de acordo com os resultados obtidos por outros autores, nomeadamente Domian e Louton (1997), Choi, Hauser e Kopecky (1999), Binswanger (2001) e Karamustafa e Kucukkale (2003), segundo os quais é o comportamento do mercado bolsista quem conduz o comportamento de determinados indicadores económicos, mais especificamente na componente de longo prazo. Na análise da cointegração e estimação do respectivo *VAR* destes cinco indicadores englobados, verificou-se que *PI* influencia de forma estatisticamente significativa a maioria dos restantes indicadores, à excepção de *IPI*. Não se pode, assim, concluir à semelhança de Fama (1981) e de Chopin e Zhong (2001) que o índice de preços no consumidor constitui apenas uma *proxy* para a relação positiva entre *PI* e *IPI*, uma vez que não foi encontrada evidência de uma relação negativa e estatisticamente significativa entre *IPI* e *IPC*, tanto a curto como a longo prazo.

Por fim, é de salientar que os modelos *VECM* estimados apontam para a existência de relações de longo prazo e para a necessidade de melhor compreensão das variações de curto prazo captadas. Neste sentido, torna-se imperativo proceder à análise detalhada das componentes de curto prazo através de diversas abordagens.

6.4 Avaliação das componentes de curto prazo

Para a análise da relação de curto prazo entre as variáveis que descrevem o mercado bolsista de acções e a envolvente económica são utilizadas as variáveis já descritas e estatisticamente analisadas no Capítulo 3, nomeadamente: *ER*, *inovLisbor*, *inovSwap*, ΔDY , ΔEPR , *inovIPC*, *inovPIM*,

inovPIA, *inovTD* e ΔOIL . As variáveis em causa resultam essencialmente da diferenciação dos indicadores, sendo por isso estacionárias. De acordo com Chen, Roll e Ross (1986), Fama (1990) e McQueen e Roley (1993) devem ser tidas em conta apenas as variações não antecipadas, donde resulta a utilização de sucessões cronológicas filtradas. Numa primeira fase são utilizados modelos de regressão linear com uma equação, onde o *excess return* surge sempre como variável dependente. Em seguida são analisadas as relações bidireccionais entre as variáveis, através de modelos *VAR*. Por fim, com vista a capturar a possível dependência não-linear existente entre as variáveis e o *excess return*, são utilizadas medidas da teoria da informação, nomeadamente a informação mútua.

6.4.1 Modelos lineares com uma equação

Na análise da relação entre o *excess return* e as variáveis económicas, em que no caso concreto se assumirá o *excess return* como variável endógena, a teoria económico-financeira não é clara no que respeita à identificação dos desfasamentos que se devem considerar para as variáveis explicativas. Por exemplo, Chen, Roll e Ross (1986) não utilizam quaisquer desfasamentos nas variáveis explicativas nos modelos de regressão linear aplicados. Jones e Kaul (1996) argumentam que se os mercados forem eficientes, então só as variáveis contemporâneas deverão ser estatisticamente significativas, diminuindo o seu poder explicativo à medida que o *lag* aumenta. Pesaran e Timmermann (1995) consideram que as variáveis a incluir num determinado modelo com vista a avaliar a dependência das taxas de rendibilidade das acções (e/ou respectivos índices de mercado) face a variáveis económicas, não deverão estar medidas no mesmo momento, pois deste modo não se teriam em conta os ciclos económicos. Os mesmos autores aconselham ainda a utilizar um desfasamento de um ou dois meses no caso de utilização de dados mensais. Para o caso concreto das variáveis referentes à actividade económica real (no presente estudo são: *inovPIM* e *inovPIA*) Fama (1981, 1990) considera que é o mercado de acções e respectivas taxas de rendibilidade (ou *excess return*) quem as “conduz” e deste modo aconselha a utilizar *leads* e *lags*. Dada a multiplicidade de abordagens possíveis e com vista a seleccionar os momentos em que as variáveis explicativas apresentem coeficientes significativos, foram analisadas preliminarmente as significâncias estatísticas dos coeficientes das variáveis explicativas consideradas, incluindo vários desfasamentos (Tabelas 6.3 e 6.4).¹³

¹³Foram realizados testes estatísticos aos resíduos resultantes das regressões estimadas, tendo-se verificado a existência de autocorrelação nos resíduos de acordo com os testes de *Durbin-Watson* e *Ljung-Box* para a maioria das regressões estimadas. Não foi rejeitada a hipótese nula de estabilidade dos resíduos em nenhum caso com base nos testes *CUSUM* e *CUSUM-Q*. De acordo com o teste de *Jarque-Bera*, apenas os resíduos resultantes da estimação da regressão $ER_t = \alpha + \beta \Delta EPR_t + \varepsilon_t$ apresentaram sinais de não serem normalmente distribuídos. De acordo com os testes *ARCH LM*, verificou-se que a grande maioria dos resíduos resultantes da estimação das regressões apresentava evidência de heterocedasticidade.

Variável	β	$t(\beta)$	R^2	SIC	AIC
$inovLisbor_t$	-0,1475	-1,4018	0,0165	-2,8635	-2,9103
$inovLisbor_{t-1}$	-0,1826	-1,7357	0,0253	-2,8643	-2,9113
$inovLisbor_{t-2}$	-0,1241	-1,1783	0,0119	-2,8616	-2,9088
$inovLisbor_{t-3}$	0,0527	0,4963	0,0021	-2,8469	-2,8944
$inovSwap_t$	-0,0587	-0,4567	0,0017	-2,8487	-2,8954
$inovSwap_{t-1}$	-0,1092	-0,8389	0,0060	-2,8447	-2,8917
$inovSwap_{t-2}$	-0,2553*	-1,9951	0,0335	-2,8836	-2,9308
$inovSwap_{t-3}$	0,0584	0,4474	0,0017	-2,8465	-2,8940
ΔDY_t	-0,3161**	-8,0355	0,3536	-3,2921	-3,3386
ΔDY_{t-1}	-0,0600	-1,2370	0,0129	-2,8599	-2,9066
ΔDY_{t-2}	-0,0191	-0,3881	0,0012	-2,8399	-2,8869
ΔDY_{t-3}	-0,0796	-1,6411	0,0228	-2,8727	-2,9199
ΔEPR_t	-0,5175**	-9,7903	0,4482	-3,4503	-3,4968
ΔEPR_{t-1}	-0,1504*	-2,1455	0,0378	-2,8855	-2,9322
ΔEPR_{t-2}	0,0086	0,1208	0,0001	-2,8387	-2,8857
ΔEPR_{t-3}	-0,0918	-1,2802	0,0141	-2,8637	-2,9109
$inovIPC_t$	-4,2565	-1,9477	0,0324	-2,8655	-2,9133
$inovIPC_{t-1}$	-0,3103	-0,1402	0,0002	-2,8364	-2,8842
$inovIPC_{t-2}$	1,0024	0,4535	0,0018	-2,8382	-2,8860
$inovIPC_{t-3}$	-4,6170*	-2,1288	0,0388	-2,8756	-2,9236

Tabela 6.3: Resultados dos modelos de regressão linear simples, em que ER_t é sempre variável dependente e a variável independente é a indicada na coluna (1) da Tabela. β é o respectivo coeficiente da variável explicativa em causa e $t(\beta)$ o valor da estatística t para esse coeficiente. Em todas as regressões foi incluído um termo constante. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

Variável	β	$t(\beta)$	R^2	SIC	AIC
$inovPIM_{t+3}$	0,0292	0,3350	0,0009	-2,8159	-2,8637
$inovPIM_{t+2}$	-0,0199	-0,2293	0,0004	-2,8240	-2,8715
$inovPIM_{t+1}$	-0,0017	-0,0197	0,0000	-2,8232	-2,8707
$inovPIM_t$	-0,0271	-0,3128	0,0008	-2,8224	-2,8699
$inovPIM_{t-1}$	-0,0647	-0,7536	0,0049	-2,8461	-2,8935
$inovPIM_{t-2}$	0,1782*	2,1145	0,0377	-2,8832	-2,9307
$inovPIM_{t-3}$	0,0028	0,0324	0,0000	-2,8364	-2,8842
$inovPIA_{t+3}$	0,0519	0,3786	0,0012	-2,8162	-2,8639
$inovPIA_{t+2}$	0,0384	0,2813	0,0006	-2,8242	-2,8718
$inovPIA_{t+1}$	0,1234	0,9116	0,0071	-2,8395	-2,8867
$inovPIA_t$	0,0064	0,0475	0,0000	-2,8300	-2,8772
$inovPIA_{t-1}$	-0,0989	-0,7290	0,0046	-2,8347	-2,8820
$inovPIA_{t-2}$	0,0174	0,1292	0,0001	-2,8497	-2,8970
$inovPIA_{t-3}$	-0,0241	-0,1786	0,0003	-2,8451	-2,8926
$inovTD_t$	-0,9515*	-2,5625	0,0531	-2,9015	-2,9482
$inovTD_{t-1}$	0,0729	0,1902	0,0003	-2,8389	-2,8859
$inovTD_{t-2}$	0,0437	0,1110	0,0002	-2,8497	-2,8969
$inovTD_{t-3}$	-0,8839*	-2,2875	0,0438	-2,8896	-2,9371
ΔOIL_t	-0,1145*	-2,0512	0,0344	-2,8907	-2,9372
ΔOIL_{t-1}	-0,0576	-1,0146	0,0087	-2,8556	-2,9024
ΔOIL_{t-2}	-0,0463	-0,8069	0,0055	-2,8442	-2,8912
ΔOIL_{t-3}	0,0083	0,1457	0,0002	-2,8498	-2,8970

Tabela 6.4: Resultados dos modelos de regressão linear simples, em que ER_t é sempre variável dependente e a variável independente é a indicada na coluna (1) da Tabela. β é o respectivo coeficiente da variável explicativa em causa e $t(\beta)$ o valor da estatística t para esse coeficiente. Em todas as regressões foi incluído um termo constante. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

Os resultados obtidos permitem identificar as seguintes variáveis explicativas de ER_t com significância estatística: $inovSwap_{t-2}$, ΔDY_t , ΔEPR_t , ΔEPR_{t-1} , $inovIPC_{t-3}$, $inovPIM_{t-2}$, $inovTD_t$, $inovTD_{t-3}$ e ΔOIL_t . Estes resultados indicam que o mercado bolsista de acções português não reage a mudanças não antecipadas da taxa de juro sem risco Lisboa a 3 meses e ao contrário do mercado americano, não antecipa possíveis variações na actividade económica, aqui representada pelas variáveis $inovPIM$ e $inovPIA$.¹⁴ Binswanger (2000) analisou a relação entre taxas de rendibilidade de acções do índice S&P 500 e variáveis representativas da actividade económica do país (taxa de crescimento do índice de produção industrial e taxa de crescimento do PIB), concluindo que para períodos de tempo relativamente recentes (1984-1997) as taxas de rendibilidade das acções pareciam não antecipar nem conter informação sobre a actividade económica futura. Binswanger (2000) argumenta que tal facto pode ser fruto da existência de bolhas especulativas e refere que isso é mais evidente em mercados de pequena dimensão (mais concretamente pequenos mercados europeus), dado que estão mais abertos a influências exteriores e são mais susceptíveis à actuação de especuladores.

Os coeficientes estatisticamente significativos revelam também a forma como o mercado bolsista, mais concretamente o *excess return* do índice do mercado bolsista português, reage face a choques nas variáveis em estudo. De um modo geral, a maioria das variáveis com significância estatística apresenta um tipo de correlação com o *excess return* consistente com os resultados obtidos por outros autores [e.g. Fama (1981), Geske *et al.* (1983), Chen *et al.* (1986), Lee (1992), Pesaran *et al.* (1995), Jones *et al.* (1996), Binswanger (2000)]. São de realçar neste contexto as variáveis $inovSwap$, $inovIPC$, $inovTD$ e ΔOIL , com as quais o *excess return* está negativamente correlacionado e $inovPIM$ que está correlacionado positivamente com a variável dependente. De realçar também que o *excess return* não antecipa variações de nenhuma das variáveis representativas da actividade económica ($inovPIM$ e $inovPIA$) uma vez que apenas as mudanças não antecipadas da taxa de crescimento da produção industrial mensal ($inovPIM$) desfasadas 2 meses apresentam significância estatística.

A variável ΔDY apresenta significância estatística contemporaneamente, revelando que o *excess return* varia negativamente face a choques contemporâneos nesta variável. Os resultados obtidos neste estudo, ainda que não sejam directamente comparáveis, não corroboram alguns dos resultados apresentados por outros autores [e.g. Fama *et al.* (1988), Hodrick (1992), Campbell *et al.* (1989), Lee (1995), Pesaran *et al.* (1995), Raj *et al.* (1995)], de acordo com os quais a DY é uma variável importante na explicação da variação do *excess return* (ou taxa de rendibilidade das acções), mas

¹⁴Foram aplicadas também regressões lineares às variáveis não filtradas $\Delta IPIM$ e $\Delta IPIM$, mas os resultados revelaram não existir significância estatística para quaisquer *leads*.

apresenta uma correlação positiva com este. A explicação para este resultado poderá estar na própria construção da variável ΔDY e/ou no comportamento dos investidores do mercado bolsista português. No que diz respeito à construção da variável, é importante ter em conta que no presente trabalho não é utilizada a variável DY , mas sim a sua taxa de crescimento ou variação (ΔDY), dada a não estacionariedade de DY cuja utilização directa poderia conduzir a regressões espúrias. No mesmo contexto, Fama (1990) argumenta que sendo os choques (variações não antecipadas) em DY essencialmente conduzidos pelo preço das acções (ou índice) que constitui o denominador do rácio DY , então choques contemporâneos em DY e nas taxas de rendibilidade das acções são, quase necessariamente, negativamente correlacionados. Neste sentido foram realizados testes de cointegração entre os pares de indicadores: (PI e DY) e (Dividendos e DY) verificando-se que existe evidência de cointegração em ambos os casos, revelando os testes de exogeneidade fraca que é o factor PI quem conduz DY e que é DY quem conduz o comportamento dos dividendos.¹⁵ Como se pode verificar na Figura 6.1, os dividendos apresentam um comportamento pouco homogéneo, registando um aumento muito acentuado em 1998 e uma queda abrupta no primeiro trimestre de 2002, queda esta também acompanhada pela descida das cotações do índice. Verifica-se ainda que o comportamento de DY é conduzido de forma mais marcante pelos preços do que pelos dividendos, uma vez que o seu comportamento é muito semelhante ao comportamento invertido dos preços do índice, facto que pode levar a que as variações contemporâneas na taxa de crescimento de DY (ΔDY) sejam negativamente correlacionadas com o *excess return* [Fama (1990)].

Do ponto de vista do comportamento dos investidores no mercado bolsista, existem três correntes alternativas sobre a forma como os dividendos e a *dividend yield* podem influenciar o valor da empresa e conseqüentemente as respectivas taxas de rendibilidade, não sendo referidas influências da taxa de crescimento da *dividend yield*. Neste contexto, uma corrente acredita que um aumento dos dividendos aumenta o valor da empresa, uma segunda corrente argumenta que um aumento no valor dos dividendos distribuídos leva à diminuição do valor da empresa e uma última que defende que a política de dividendos não tem qualquer relevância neste contexto [*in* Brealey *et al.* (1998)].¹⁶

¹⁵Os resultados dos testes encontram-se no Anexo K.

¹⁶De acordo com Pacheco (1999), uma correlação negativa entre DY e as taxas de rendibilidade das acções, do índice (ou do *excess return*) significa que os investidores exigem menores taxas de rendibilidade face à existência de dividendos, o que poderá ser consequência do facto que, para os investidores em questão, os dividendos são mais valiosos do que igual montante de ganhos de capital, *ceteris paribus*. Para além disso, a tributação fiscal que recai sobre os dividendos pode também exercer alguma influência, sendo que neste sentido uma empresa pode ter dois tipos de clientelas por dividendos [*in* Pacheco (1999)]: (i) accionistas com preferência por dividendos, tendencialmente accionistas com baixos escalões de impostos ou mesmo isentos, nomeadamente os fundos de pensões que tendem a procurar acções com elevados DY ; (ii) accionistas com preferência por ganhos de capital, tendencialmente accionistas

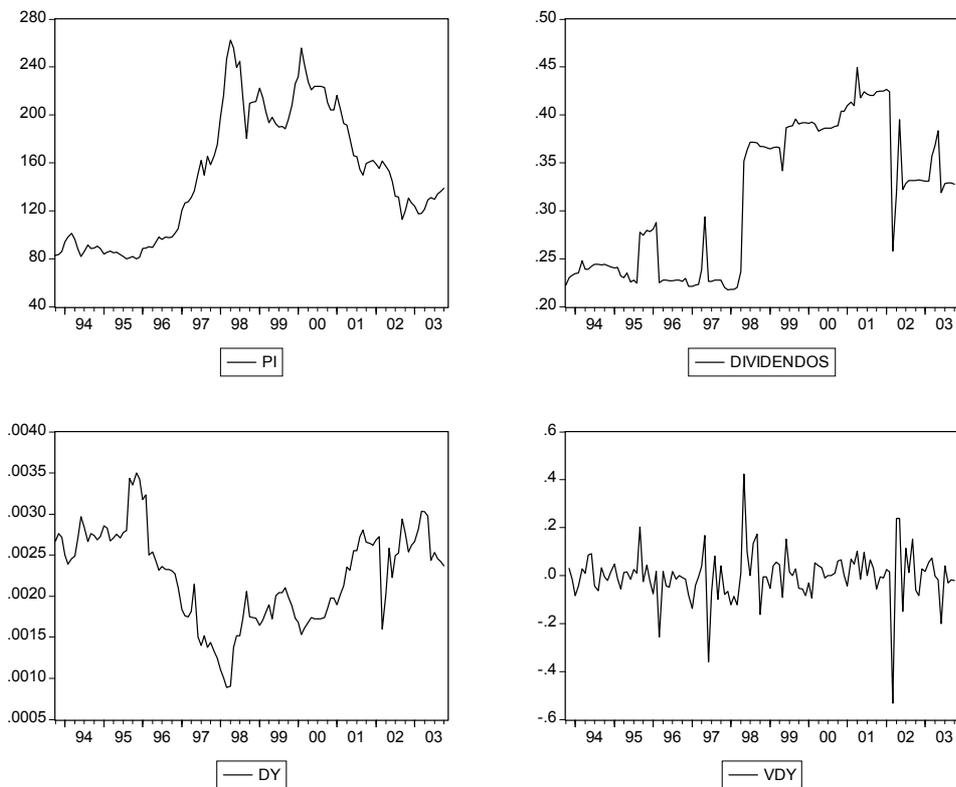


Figura 6.1: Evolução temporal do preço do índice (PI), dos dividendos, da DY e da ΔDY para o período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003.

Uma vez que a variável em análise é a taxa de crescimento da *dividend yield*, e não a *dividend yield* propriamente dita, eventuais comparações poderiam levar a conclusões enviesadas.

A variação do *excess return* face a variações em ΔEPR apresenta significância estatística para os momentos t e $t-1$, revelando a existência de uma relação negativa entre estas variáveis. Convém realçar que no presente estudo é avaliada a relação entre o *excess return* e a taxa de crescimento do *EPR*, dada a não estacionariedade da sucessão cronológica referente ao *EPR*. De modo semelhante ao anteriormente analisado, denota-se uma correlação negativa entre as variáveis em causa, o que, ainda que não sendo directamente comparável, contraria alguns resultados obtidos por alguns autores [e.g. Pesaran *et al.* (1995)] mas está de acordo com os resultados de Raj e Thurston (1995) que estudaram a relação entre o *excess return*, a *dividend yield* e o *earnings price ratio* para o mercado bolsista neozelandês. Fama e French (1992) referem que a relação do *EPR* com as taxas de rentabilidade das acções pode ser não-linear, concluindo que empresas que apresentaram resultados com elevados escalões de impostos que tendem a procurar acções com reduzidos DY .

líquidos negativos tendem a apresentar maiores taxas de rentabilidade médias por acção, enquanto que as empresas que apresentaram resultados líquidos positivos evidenciam uma relação positiva entre as taxas de rentabilidade médias por acção e o *EPR*. No mesmo contexto da *DY*, também variações na taxa de crescimento do *EPR* parecem ser conduzidas essencialmente pelo índice de mercado, ao invés de o serem pelos *earnings* (ou resultados líquidos por acção), sendo natural aceitar que variações na taxa de crescimento do *EPR* possam estar negativamente correlacionados com o *excess return*. Como se pode ver na Figura 6.2, o *EPR* apresenta um comportamento muito semelhante (mas simétrico) ao comportamento do *PI*, não reflectindo os *earnings*, ou resultados líquidos por acção, de forma tão acentuada.¹⁷

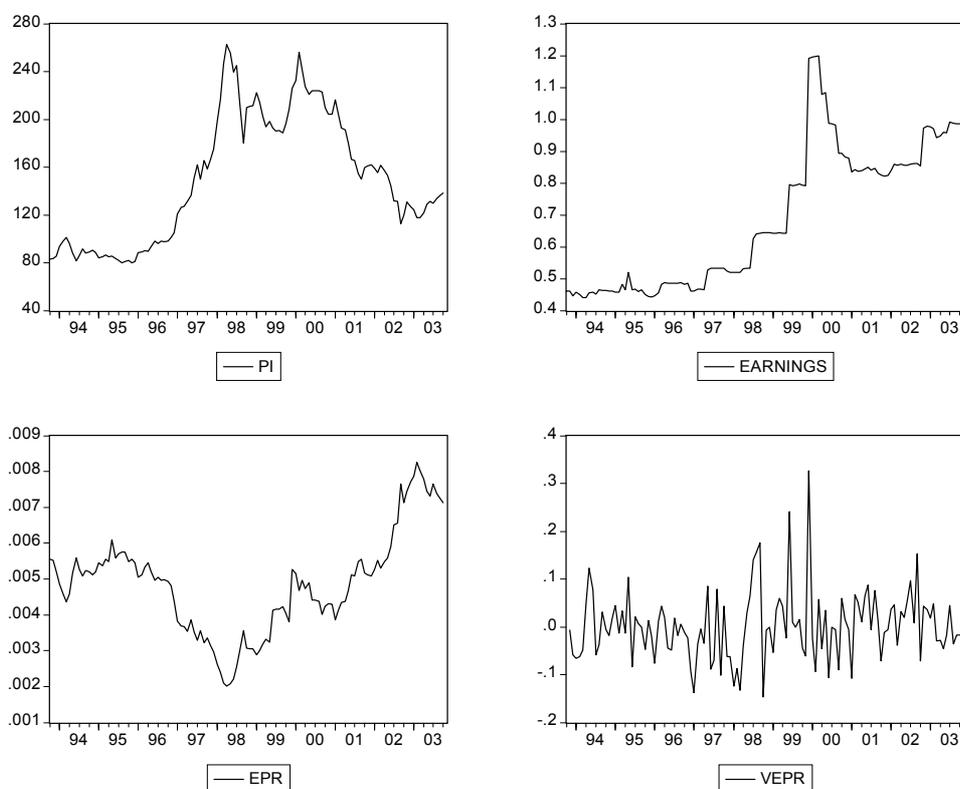


Figura 6.2: Evolução temporal do preço do índice (*PI*), dos *earnings*, do *EPR* e da ΔEPR para o período entre Outubro de 1993 e Outubro de 2003.

Tendo sido analisada a relação individual entre as variáveis previamente seleccionadas com o

¹⁷A visualização das Figuras 6.1 e 6.2 dá a ideia da aparente constância dos dividendos, enquanto que os *earnings* apresentam uma resposta um pouco mais imediata. Este facto poderá indiciar a presença de uma política de dividendos estável por parte das empresas que integram o índice português *DataStream*.

excess return, interessa agora avaliar essa relação de forma conjunta de modo a verificar se todas as variáveis que apresentaram significância estatística individualmente, continuam a ser significativas quando agrupadas (facto que pode conduzir a problemas de multicolinearidade). Foi estimado um modelo de regressão linear multivariado pelo método dos mínimos quadrados, cujos resultados se apresentam na Tabela 6.5.

$$ER_t = \alpha + \beta_1 inovSwap_{t-2} + \beta_2 \Delta DY_t + \beta_3 \Delta EPR_t + \beta_4 \Delta EPR_{t-1} + \beta_5 inovIPC_{t-3} + \beta_6 inovPIM_{t-2} + \beta_7 inovTD_t + \beta_8 inovTD_{t-3} + \beta_9 \Delta OIL_t + \varepsilon_t. \quad (6.17)$$

Os resultados apresentados na Tabela 6.5 demonstram que apenas as variáveis ΔDY_t , ΔEPR_t , ΔEPR_{t-1} e $inovIPC_{t-3}$ apresentam significância estatística. Deste modo poder-se-à dizer que, do conjunto de variáveis analisadas, apenas estas quatro variáveis são *proxies* do *excess return* do mercado bolsista português, tendo em conta o período de tempo em análise, o conjunto total de variáveis analisadas e o facto de existir evidência de alguma multicolinearidade (ainda que tal não tenha causado problemas de estimação, neste caso) entre determinadas variáveis explicativas (ver Tabela 3.21). De realçar que são precisamente as variáveis de carácter financeiro (ΔDY_t , ΔEPR_t e ΔEPR_{t-1}) aquelas que parecem exercer maior influência sobre o *excess return*. Das variáveis económicas, apenas a $inovIPC_{t-3}$ apresenta algum poder explicativo, indicando que possíveis aumentos nas mudanças não antecipadas da inflação conduzem a diminuições do *excess return* do mercado bolsista português. Este resultado indica que as mudanças não antecipadas da inflação poderão constituir uma *proxy* para ER_t do mercado bolsista de acções português para o período temporal tido em consideração. No global, o modelo estimado indica que cerca de 62,9% da variação do *excess return* é explicada pela variação das variáveis explicativas tidas em conta e que este modelo (de acordo com a estatística F de *Snedcor*) é significativo. Quando são tomadas em consideração apenas as variáveis que apresentam significância estatística o coeficiente de determinação desce, ainda que ligeiramente, para cerca de 59,54%, assim como o critério SIC e o critério AIC .

Variável	β_i	$t(\beta_i)$	Variável	β_i	$t(\beta_i)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
α	0,0028	0,7461	α	0,0039	1,1317
ΔDY_t	-0,1905**	-5,1265	ΔDY_t	-0,1971**	-5,4604
ΔEPR_t	-0,3308**	-6,0349	ΔEPR_t	-0,3608**	-6,7699
ΔEPR_{t-1}	-0,1109*	-2,3093	ΔEPR_{t-1}	-0,1267**	-2,7004
$inovIPC_{t-3}$	-3,7033*	-2,5872	$inovIPC_{t-3}$	-3,6381*	-2,5367
$inovSwap_{t-2}$	-0,0309	-0,3482	-	-	-
$inovPIM_{t-2}$	0,0819	1,3797	-	-	-
$inovTD_t$	-0,4029	-1,5009	-	-	-
$inovTD_{t-3}$	-0,2699	-1,0158	-	-	-
ΔOIL_t	-0,0413	-1,0361	-	-	-
R^2	0,6296		R^2	0,5954	
R^2 ajust,	0,5975		R^2 ajust,	0,5805	
SIC	-3,4967		SIC	-3,6161	
AIC	-3,7367		AIC	-3,7368	
F-statistic	19,6388**		F-statistic	40,09562**	

Tabela 6.5: Resultados das regressões lineares estimadas da variável ER_t numa primeira fase (colunas 1, 2 e 3) sobre um conjunto de variáveis seleccionadas de acordo com os resultados das Tabelas 6.3 e 6.4 e uma constante; e numa segunda fase [colunas (4), (5) e (6)] das variáveis estatisticamente significativas no modelo alargado. Foram aplicados testes de ausência de autocorrelação dos resíduos (*LM test*), homocedasticidade (*ARCH LM test*), normalidade dos resíduos (*Jarque-Bera test*) e estabilidade (*CUSUM e CUSUM-Q tests*). Apenas foi rejeitada a hipótese nula de que os resíduos são normalmente distribuídos. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

6.4.2 Modelos lineares com várias equações

Na subsecção anterior analisou-se um modelo uniequacional, assumindo como variável dependente o *excess return* e como variáveis explicativas um conjunto de variáveis macroeconómicas e financeiras. Na verdade, porém, é bastante natural que, dada a complexidade dos mercados financeiros e da envolvente macroeconómico-financeira, as relações sejam multidireccionais, podendo ser mais realista uma abordagem que tenha em conta os eventuais efeitos de *feedback*. Chen, Roll e Ross (1986), Fama (1990) e Chen (1991), entre outros, consideram que deve ser tida em conta e analisada a influência que os mercados financeiros, ou mais concretamente os mercados bolsistas podem exercer no estado da economia nacional e respectivos indicadores. Esta análise pode ser efectuada recorrendo a modelos *VAR*.

Sendo X_t um vector de variáveis estacionárias e A uma matriz de coeficientes, então um processo auto-regressivo vectorial (*VAR*) pode ser descrito do seguinte modo

$$X_t = A_1 X_{t-1} + \dots + A_p X_{t-p} + \varepsilon_t. \quad (6.18)$$

Para a escolha da ordem p , ou número de defasamentos, de um modelo *VAR* existem diversas estatísticas disponíveis, sendo as mais usuais o critério de informação de Akaike (*AIC*) e o critério de informação de Schwarz (*SIC*) [Marques (1998)]. Segundo Marques (1998), são vários os indicadores que contribuem para a popularidade dos modelos *VAR*, nomeadamente a facilidade de estimação e a diferença de filosofia entre estes e os modelos econométricos de equações simultâneas tradicionais, nos quais a teoria económica assume um papel fundamental na especificação do modelo, enquanto que nos modelos *VAR* a teoria económica é apenas utilizada para sugerir eventuais variáveis relevantes, mas a especificação final do modelo (ordem p) é totalmente determinada pelos dados.

Para além de avaliar as relações entre as variáveis, tendo em conta os efeitos de *feedback*, é ainda importante analisar a causalidade que existe entre as variáveis. Neste contexto foi utilizado o teste de causalidade à Granger, cuja ideia base é a de que a causa não pode ocorrer depois do efeito, isto é o futuro não pode causar o presente, logo se uma variável x afecta uma variável y , então x ajuda a melhorar as previsões de y .¹⁸

A utilização de modelos *VAR* poderá constituir uma abordagem possível para analisar as relações de reciprocidade com variáveis estacionárias. A utilização destes modelos e a percepção das suas vantagens têm sido muito exploradas na investigação económico-financeira. Por exemplo, James, Koreisha e Partch (1985) aplicaram um modelo *VARMA* a 4 variáveis: taxa de rendibilidade do índice S&P 500, taxa de crescimento da actividade económica real, taxa de inflação e taxa

¹⁸Para uma explicação detalhada deste conceito e respectivo teste ver, por exemplo, Marques (1998).

de variação da oferta de moeda, concluindo existirem relações de causalidade importantes entre algumas variáveis. Campbell e Shiller (1989) e Hodrick (1992) aplicaram o modelo *VAR* para analisar a relação entre as taxas de rendibilidade e a *dividend yield* do índice bolsista norte americano *value-weighted*. Lee (1992) utilizou o modelo *VAR* para estudar as relações de causalidade e as interações dinâmicas entre as taxas de rendibilidade *value-weighted* da NYSE, a taxa de crescimento da actividade económica real e a inflação, concluindo que as taxas de rendibilidade do índice bolsista podem causar à Granger e explicar o comportamento da actividade real (medida pela taxa de crescimento do PIB). Lee (1995) utilizou algumas técnicas de cointegração e o modelo *VAR* para analisar a relação entre os preços do índice *value-weighted* da NYSE e respectivos dividendos. Hess e Lee (1999) explicaram que a relação entre taxas de rendibilidade e inflação pode variar de sinal, consoante os choques na economia se devessem à oferta de *output* real ou à procura de moeda, tendo para tal utilizado um modelo *VAR*.

No presente trabalho de investigação são analisadas as relações de causalidade entre as variáveis económicas tidas em conta e o *excess return*, com vista a verificar se este último tem ou não capacidade de influenciar as restantes variáveis e qual a relação de causalidade existente. Numa primeira fase foi realizado o teste de causalidade à Granger a cada par de variáveis,¹⁹ onde uma das variáveis é sempre o *excess return* (*ER*), tendo-se verificado que a hipótese nula de não causalidade é rejeitada em poucas situações. São rejeitadas as hipóteses nulas de que a variável *inovPIM* não causa à Granger *ER*, de que *ER* não causa à Granger *inovTD* e que *ER* não causa à Granger ΔOIL . Os resultados obtidos com o teste de causalidade à Granger apontam para o facto de que *ER* causa à Granger *inovTD*, o que vai ao encontro dos resultados obtidos por diversos autores [e.g. Lee (1992), Binswanger (2000)], revelando que o mercado de acções pode antecipar e afectar a actividade económica nacional. Já o resultado de que *ER* causa à Granger ΔOIL não parece fazer muito sentido, uma vez que não é muito plausível que o mercado de acções português tenha capacidade para afectar os preços internacionais do petróleo, quando muito poder-se-á aceitar o facto de que o *excess return* do mercado bolsista português antecipa as variações do preço do petróleo, reagindo provavelmente à publicação da informação sobre tais variações e não propriamente aos eventos.

A aplicação dos modelos *VAR* a cada par de variáveis (sendo sempre incluído *ER*) apresentou resultados que, de algum modo, corroboram alguns dos resultados obtidos na análise da relação entre o *excess return* e variáveis económicas através de modelos com uma equação. Não foi encontrado nenhum coeficiente estatisticamente significativo para os pares *ER* e *inovLisbor*; *ER* e *inovSwap*; *ER* e ΔDY ; *ER* e ΔEPR ; *ER* e *inovPIA*; *ER* e ΔOIL . Na Tabela 6.6 são apresentados os

¹⁹Os resultados do teste de causalidade à Granger às variáveis encontram-se no Anexo J.

resultados que evidenciaram significância estatística.

A análise dos resultados apresentados na Tabela 6.6 permite concluir que existe uma relação de causalidade mútua entre ER e $inovIPC$, ambos com um desfasamento de 3 *lags*, sendo negativos os coeficientes com significância estatística. Tal resultado implica que o mercado de acções português é negativamente influenciado pelas mudanças não antecipadas na inflação e que, por sua vez, esses choques na inflação sofrem também influências do mercado accionista, mais concretamente do *excess return*. Fama (1981) encontrou uma correlação negativa entre as taxas de rendibilidade e a inflação, concluindo que essa relação constitui uma *proxy* para a correlação positiva entre as taxas de rendibilidade das acções e a actividade económica real, por outro lado, Lee (1992) não encontrou evidência significativa de que as taxas de rendibilidade do índice *value-weighted* da NYSE influenciasses a taxa de inflação. De referir também a relação de causalidade existente entre ER e $inovPIM$, onde o segundo desfasamento da variável referente às mudanças não antecipadas no índice de produção industrial mensal afecta ER de forma significativa, corroborando os resultados obtidos na subsecção anterior. Por fim, verifica-se que a variável $inovTD$ afecta também (no terceiro desfasamento) ER , indo ao encontro dos resultados obtidos na avaliação dessas relações através de modelos uniequacionais.

Com o objectivo de analisar as influências das variáveis em estudo num contexto mais global, foi estimado um modelo $VAR(3)$. No sistema de equações (6.19) são enunciadas apenas as variáveis cujos coeficientes apresentam significância estatística no referido modelo.

	<i>ER</i>	<i>inovIPC</i>		<i>ER</i>	<i>inovPIM</i>		<i>ER</i>	<i>inovTD</i>
<i>ER</i> _{<i>t</i>-1}	0,223*	-0,006	<i>ER</i> _{<i>t</i>-1}	0,215*	-0,007	<i>ER</i> _{<i>t</i>-1}	0,219*	-0,041
	(0,096)	(0,004)		(0,093)	(0,106)		(0,096)	(0,023)
<i>ER</i> _{<i>t</i>-2}	0,012	-0,001	<i>ER</i> _{<i>t</i>-2}	0,024	-0,030	<i>ER</i> _{<i>t</i>-2}	0,016	-0,037
	(0,099)	(0,004)		(0,092)	(0,105)		(0,098)	(0,024)
<i>ER</i> _{<i>t</i>-3}	0,081	-0,011**	<i>inovPIM</i> _{<i>t</i>-1}	-0,070	-0,067	<i>ER</i> _{<i>t</i>-3}	0,051	-0,040
	(0,097)	(0,004)		(0,085)	(0,097)		(0,098)	(0,024)
<i>inovIPC</i> _{<i>t</i>-1}	1,149	-0,098	<i>inovPIM</i> _{<i>t</i>-2}	0,246**	-0,160	<i>inovTD</i> _{<i>t</i>-1}	0,251	-0,106
	(2,261)	(0,095)		(0,094)	(0,106)		(0,395)	(0,096)
<i>inovIPC</i> _{<i>t</i>-2}	1,442	0,013	<i>C</i>	-0,001	0,015	<i>inovTD</i> _{<i>t</i>-2}	0,071	-0,129
	(2,256)	(0,095)		(0,005)	(0,006)		(0,404)	(0,099)
<i>inovIPC</i> _{<i>t</i>-3}	-4,499**	-0,159				<i>inovTD</i> _{<i>t</i>-3}	-0,823*	0,041
	(2,235)	(0,094)					(0,401)	(0,098)
<i>C</i>	0,0016	-0,001				<i>C</i>	0,001	0,001
	(0,005)	(0,002)					(0,005)	(0,001)
<i>R</i> ²	0,097	0,113	<i>R</i> ²	0,105	0,025	<i>R</i> ²	0,094	0,097
<i>R</i> ² ajust.	0,045	0,062	<i>R</i> ² ajust.	0,072	-0,010	<i>R</i> ² ajust.	0,044	0,048
AIC	-2,879	-9,219	AIC	-2,934	-2,676	AIC	-2,905	-5,725
SIC	-2,709	-9,050	SIC	-2,814	-2,556	SIC	-2,738	-5,559
<i>E</i> ($\varepsilon_i, \varepsilon_j$)	1,64E-08		<i>E</i> ($\varepsilon_i, \varepsilon_j$)	1,15E-05		<i>E</i> ($\varepsilon_i, \varepsilon_j$)	5,25E-07	
AIC	-12,002		AIC	-5,520		AIC	-8,543	
SIC	-11,662		SIC	-5,280		SIC	-8,211	

Tabela 6.6: Resultados da aplicação dos modelos *VAR* às variáveis em estudo. Os valores entre parêntesis referem-se ao desvio-padrão do respectivo coeficiente. O número de *lags* foi selecionado de acordo com o critério *AIC*. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

$$\left\{ \begin{array}{l}
ER_t = -0,3805 \text{inovSwap}_{t-2} - 0,1492 \Delta DY_{t-3} - 5,961 \text{inovIPC}_{t-3} \\
\quad (0,161) \qquad \qquad \qquad (0,070) \qquad \qquad \qquad (2,475) \\
\quad + 0,2884 \text{inovPIM}_{t-2} - 1,2243 \text{inovTD}_{t-3} + \varepsilon_{1t} \\
\quad \quad (0,107) \qquad \qquad \qquad (0,459) \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad R^2 = 0,352 \\
\\
\text{inovLisbor}_t = 0,3226 ER_{t-3} + 0,1454 \Delta OIL_{t-2} - 0,0109 + \varepsilon_{2t} \\
\quad \quad (0,149) \qquad \quad (0,066) \qquad \quad (0,005) \qquad \qquad \qquad R^2 = 0,219 \\
\\
\text{inovSwap}_t = 0,6951 \text{inovTD}_{t-3} + \varepsilon_{3t} \\
\quad \quad (0,349) \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad R^2 = 0,227 \\
\\
\Delta DY_t = -0,8217 ER_{t-1} + 0,6363 \text{inovSwap}_{t-2} - 0,7509 \text{inovSwap}_{t-3} \\
\quad \quad (0,275) \qquad \quad (0,290) \qquad \quad (0,289) \\
\quad + 0,2636 \Delta DY_{t-3} + 0,6077 \text{inovPIA}_{t-1} - 1,8776 \text{inovTD}_{t-1} \\
\quad \quad (0,127) \qquad \quad (0,270) \qquad \quad (0,854) \\
\quad + 2,0703 \text{inovTD}_{t-3} + 0,2627 \Delta OIL_{t-2} + \varepsilon_{4t} \\
\quad \quad (0,830) \qquad \quad (0,131) \qquad \qquad \qquad R^2 = 0,418 \quad (6.19) \\
\\
\Delta EPR_t = 0,2443 \Delta DY_{t-2} + 0,2058 \Delta DY_{t-3} + \varepsilon_{5t} \\
\quad \quad (0,110) \qquad \quad (0,101) \qquad \qquad \qquad R^2 = 0,203 \\
\\
\text{inovPIA}_t = 0,2445 \text{inovSwap}_{t-1} - 0,1782 \Delta EPR_{t-3} + \varepsilon_{7t} \\
\quad \quad (0,118) \qquad \quad (0,078) \qquad \qquad \qquad R^2 = 0,218 \\
\\
\text{inovPIM}_t = 0,3503 \text{inovPIA}_{t-1} + 0,0171 + \varepsilon_{8t} \\
\quad \quad (0,177) \qquad \quad (0,007) \qquad \qquad \qquad R^2 = 0,237 \\
\\
\text{inovTD}_t = -0,0746 \text{inovPIM}_{t-2} + \varepsilon_{9t} \\
\quad \quad (0,03) \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad R^2 = 0,303
\end{array} \right.$$

No sistema de equações (6.19) referente ao modelo VAR(3) as variáveis *inovIPC* e ΔOIL surgem como variáveis exógenas, uma vez que não são afectadas de forma estatisticamente significativa por nenhuma das restantes variáveis. De salientar que a equação referente a *ER* não difere em grande medida da equação (6.17) explorada na subsecção anterior, uma vez que as variáveis coincidentes apresentam coeficientes com sinais idênticos [apesar de na equação (6.17) estarem também incluídas algumas variáveis medidas no momento t , sem quaisquer desfasamentos]. A variável *inovLisbor* sofre influências de forma mais demarcada do *ER* e simultaneamente da taxa de variação do preço do petróleo, o que pode ser explicado pelo facto de a taxa de juro ser definida

pelo Banco Central Europeu e por isso poder ser alvo de pressão internacional, nomeadamente a variação do preço do petróleo. Além disso é natural que face à subida do preço do petróleo, os Governos tentem combater a tendência inflacionista daí resultante com a subida das taxas de juro. Relativamente a ER , os resultados obtidos parecem fornecer pistas que ER antecipa os choques na taxa de juro sem risco a curto prazo, facto que está de acordo com a hipótese de eficiência dos mercados, segundo a qual os mercados bolsistas de acções reagem muitas vezes, aos anúncios dos eventos e não aos eventos propriamente ditos, antecipando por isso esses mesmos acontecimentos. É ainda de realçar que a variável ΔDY é afectada de modo estatisticamente significativo por um grande número de variáveis, nomeadamente ER , $inovSwap$, $inovPIA$, $inovTD$ e ΔOIL , apresentando sinais contraditórios para a mesma variável com diferentes defasamentos.

Foram também estimados os modelos $VAR(2)$ e $VAR(1)$ (ver sistemas de equações no Anexo L), cujos resultados apontam para a não alteração significativa das variáveis estatisticamente significativas, assim como respectivos sinais e magnitudes.²⁰

Tendo em conta os resultados obtidos com os três modelos VAR estimados, verifica-se que a variável ER_t não é apenas uma variável endógena, uma vez que esta exerce também influência sobre outras variáveis, nomeadamente ΔDY e $inovIPC$. Os resultados obtidos não permitem concluir que o mercado bolsista de acções, mais concretamente o *excess return*, antecipa e influencia as variáveis respeitantes à actividade económica real ($inovPIM$ e $inovPIA$) no curto prazo, ainda que no longo prazo tal relação seja encontrada (Tabela 6.2). Convém reter que ao se considerar o $VAR(3)$, os resultados para as variáveis explicativas estatisticamente significativas na equação de ER_t corroboram, de certa forma, os resultados obtidos na análise com modelos lineares uniequacionais. Os resultados obtidos apontam ainda para a complexidade do sistema económico, denotando-se que o mercado bolsista de acções é a consequência mas também a causa de um conjunto de variáveis, existindo um forte interligação entre as variáveis estudadas para o período de tempo tido em conta.

²⁰No modelo $VAR(2)$ [sistema de equações (6) do Anexo L] as variáveis exógenas são $inovSwap$, ΔEPR e ΔOIL . A variável $inovSwap$ surge agora como exógena uma vez que no modelo anterior era afectada de forma estatisticamente significativa, apenas pela variável $inovTD_{t-3}$. Neste modelo, ER_t é afectado apenas pela variável $inovPIM$, com dois defasamentos, sendo o coeficiente similar ao encontrado para a mesma relação no $VAR(3)$. De realçar que as equações para as variáveis $inovPIA$, $inovPIM$ e $inovTD$ mantêm, praticamente, os mesmos coeficientes estatisticamente significativos, revelando a consistência dos resultados. O modelo $VAR(1)$, em parte, apresentado no sistema de equações (7) do Anexo L apresenta como variáveis exógenas: ER , $inovLisbor$, $inovSwap$ e $inovTD$. Apesar de este ser o modelo que apresenta os menores valores para os critérios de informação AIC e SIC , é também o que apresenta menores valores para os coeficientes de determinação e maior número de variáveis exógenas. Neste modelo ER não é uma variável endógena, tendo capacidade para afectar negativamente o comportamento das variáveis ΔDY e $inovIPC$.

Neste contexto, afigura-se importante realçar a complexidade subjacente às relações entre as variáveis. Por exemplo, o modelo $VAR(3)$ estimado em (6.19) indica que ER_t é negativamente influenciado por $inovSwap$ e $inovTD$ de forma estatisticamente significativa. Por outro lado, a variável $inovSwap_t$ é positivamente influenciada (ou pelo menos antecipada) pelas variações não antecipadas na taxa de desemprego ($inovTD$), o que leva a antever o cruzamento de relações entre as variáveis mencionadas e destas em ER_t . Esta complexidade de relações poderá ser sinal da existência de não-linearidades nas variáveis em estudo. A questão que se levanta neste contexto é: existirão relações não-lineares entre as variáveis não capturadas pelo sistema VAR que permitam explicar de modo mais rigoroso as relações entre estas variáveis? A esta questão pretende-se dar resposta na secção seguinte, onde é utilizada a informação mútua como medida do grau de dependência global (linear e não-linear) entre as variáveis e teste à independência entre as mesmas.

6.4.3 Avaliação da dependência global (linear e não-linear)

Nas subsecções anteriores foi analisada a relação linear uniequacional e multiequacional entre o *excess return* do índice *DataStream* do mercado bolsista português e algumas variáveis macro-económicas e financeiras, seleccionadas de acordo com a literatura. Os resultados apontaram para a existência de influências significativas entre algumas variáveis em estudo. Contudo, apenas foi tida em conta a relação linear entre as mesmas, não sendo capturada a eventual relação não-linear entre as variáveis. A análise da dependência não-linear é justificada na medida em que as sucessões cronológicas financeiras podem exhibir componentes não-lineares fortes, que podem ser transmitidas de mercado para mercado [ver e.g. Hsieh (1991)]. Além disso, quando se consideram apenas as relações ou dependências lineares, está-se a pressupor simultaneamente que o tipo de relação é invariante com o tempo, facto que muitas vezes não se verifica empiricamente. A dependência não-linear entre as taxas de rendibilidade das acções e determinadas variáveis económicas tem sido alvo de estudo por diversos autores recorrendo a diferentes abordagens. Por exemplo, como já referenciado, Stuzer (1995) aplicou a teoria da informação na selecção de factores que influenciam as taxas de rendibilidade das acções, através da minimização da distância de Kullback-Leibler. Qi (1999) comparou a *performance* e o poder de predição das taxas de rendibilidade do índice S&P 500 a partir de um conjunto de variáveis económicas, entre modelos lineares e modelos neuronais, concluindo que os modelos neuronais, melhorados através de uma regularização Bayesiana, superam em larga medida os modelos baseados na regressão linear. Em 2002, Maasoumi e Racine avaliaram também a predictabilidade das taxas de rendibilidade do índice S&P 500, utilizando a mesma base de dados que Pesaran e Timmermann (1995) mas com recurso à entropia métrica. Os autores exploram as

propriedades da entropia métrica de Matusita-Bhattacharya-Hellinger como medida de dependência global, uma vez que esta medida tem a capacidade de captar a dependência não-linear que possa existir entre variáveis, captando também a afinidade não-linear entre as taxas de rendibilidade e as respectivas previsões. Os autores concluíram ainda que a maioria dos modelos lineares detectam apenas uma parte da dependência, enquanto que a entropia captura a dependência, mesmo em caso de não-linearidade e não estacionariedade, casos em que as tradicionais abordagens podem apresentar lacunas.²¹

Neste trabalho de investigação é utilizada a informação mútua e o respectivo coeficiente de correlação global, como medida de dependência global, sendo que este último pode ser directamente comparado com o usual coeficiente de correlação linear. Tal como foi referido no Capítulo 2, a informação mútua tem propriedades que a tornam uma importante medida de dependência largamente explorada por diversos autores [e.g. Perez (1957), Granger *et al.* (1994), Klan *et al.* (1997), Soofi (1997), Darbellay *et al.* (1999, 2000b), Darbellay (1998a, 1998b, 1998c, 1999), Bernhard *et al.* (1999), Yamano (2001), Dionísio *et al.* (2003b)], sendo de realçar a não necessidade de pressupostos quanto à distribuição de probabilidade teórica *a priori* e à especificação de um determinado modelo de dependência. É utilizado o teste de independência baseado na informação mútua apresentado no Capítulo 2 [equação (2.68)].

As variáveis *inovLisbor*, *inovSwap*, ΔDY , ΔEPR , *inovIPC*, *inovPIM*, *inovPIA*, *inovTD_t* e ΔOIL_t não apresentam evidência de autocorrelação linear estatisticamente significativa (ver Tabelas 3.17, 3.18 e 3.20). Importa, então, avaliar se existe evidência de autocorrelação não-linear significativa. Deste modo foi calculada a informação mútua²² para cada uma das variáveis em estudo, entre o momento t e o momento $t - k$, com $k = 1, \dots, 10$ (Figura 6.3).

Como se pode verificar pela análise da Figura 6.3 a maioria das situações analisadas não apresenta sinais de existência de autocorrelação não-linear estatisticamente significativa. São excepção as variáveis *ER*, *inovLisbor*, *inovSwap*, *inovIPC*, *inovPIM* e *inovTD*, que apresentam evidência de autocorrelação não-linear estatisticamente significativa para alguns dos *lags* analisados, facto que poderá exercer alguma influência no modo de relacionamento entre as variáveis.

Numa primeira fase foi calculada a informação mútua (I), a informação mútua normal (IMN)

²¹Num contexto um pouco diferente, Climent, Miguel e Olmeda (2003) analisaram a dinâmica linear e não-linear entre as taxas de câmbio e as taxas de rendibilidade das acções em vários países europeus e asiáticos através de testes de cointegração não-linear, modelos *TAR* e *M-TAR* e uma extensão do teste *BDS* para o caso multivariado. Estes autores concluíram que as relações de curto prazo assumiam maior relevância que as relações de longo prazo e que a presença de dependência linear era também mais relevante que a causalidade não-linear nos mercados asiáticos.

²²A informação mútua e a informação mútua normal são medidas em *nats*, isto é, é utilizado o logaritmo neperiano no cálculo destas medidas.

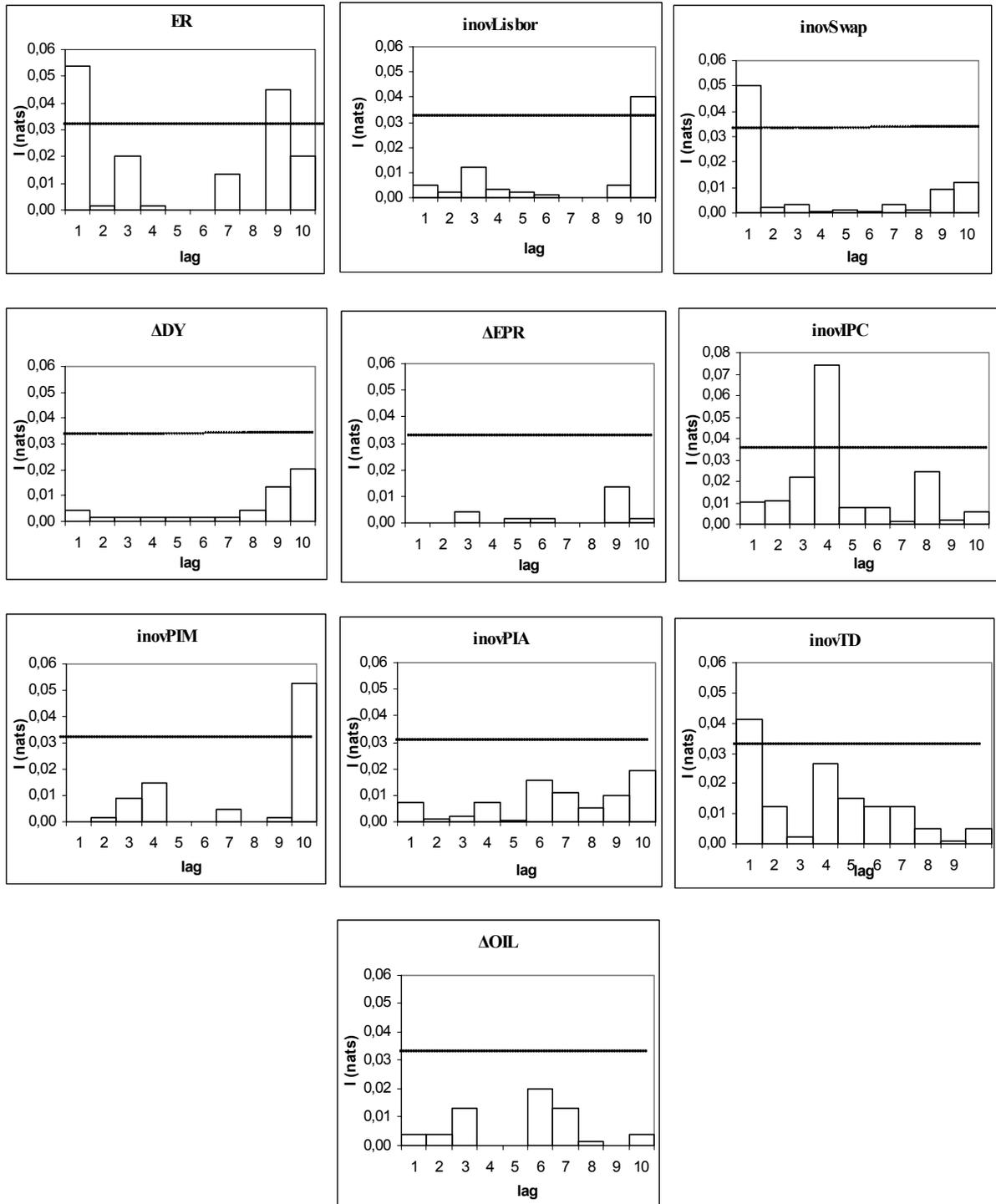


Figura 6.3: Informação mútua (*nats*) entre os momentos t e $t-k$, com $k = 1, \dots, 10$, para as variáveis em estudo. O segmento de recta refere-se ao nível de significância a 5% (0,0323), tendo em conta a dimensão das amostras e respectivos graus de liberdade.

o coeficiente de correlação global (λ) e o coeficiente de correlação linear (R) entre o *excess return* (ER_t) no momento t e cada uma das restantes variáveis com vários desfasamentos, um pouco à semelhança da análise realizada na subsecção 7.4.1 (ver Tabelas 6.7 e 6.8). Convém realçar que a informação mútua não estabelece quaisquer relações de causalidade entre as variáveis em estudo, mede porém, a dependência global que existe entre as mesmas como um todo. Deste modo, a informação mútua tem em conta as relações bidireccionais que se estabelecem entre as variáveis.

De acordo com os resultados apresentados nas Tabelas 6.7 e 6.8 verifica-se que a informação mútua empírica (I) é maioritariamente superior à informação mútua normal (IMN), assim como o coeficiente de correlação global (λ) apresenta valores superiores aos do coeficiente de correlação linear (R) (ver Figura 6.4), revelando a existência de possível dependência não-linear para a maioria dos pares de variáveis estudados. Apenas é estatisticamente significativa²³ a dependência global entre ER_t e $inovLisbor_t$; ER_t e ΔDY_t ; ER_t e ΔEPR_t ; ER_t e ΔEPR_{t-1} ; ER_t e $inovPIM_{t+2}$; ER_t e $inovPIM_{t-3}$; ER_t e ΔOIL_t ; ER_t e ΔOIL_{t-3} ; o que pode parecer um pouco limitativo, mas tal poderá dever-se ao facto de as amostras em estudo serem de pequena dimensão (cerca de 118 observações), o que pode levar à subestimação da informação mútua. Este facto poderá levar à perda de alguma robustez da informação mútua como medida de dependência entre variáveis para amostras de pequena dimensão.

São de realçar os elevados valores da informação mútua (I) e coeficiente de correlação global (λ) para os pares de variáveis ER_t e ΔDY_t ; ER_t e ΔEPR_t e ER_t e ΔEPR_{t-1} , indicando a possível presença de dependência não-linear. As diferenças significativas entre λ e R (e entre I e IMN) para alguns pares analisados, nomeadamente ER_t e $inovPIM_{t-3}$; ER_t e $inovPIM_{t+2}$; ER_t e ΔOIL_{t-3} ; ER_t e ΔDY_t ; ER_t e ΔEPR_t poderão ter como causa o facto de as referidas variáveis não serem normalmente distribuídas (ver Tabelas 3.17, 3.18 e 3.20), assim como os resíduos das respectivas regressões lineares estimadas nas Tabelas 6.3 e 6.4 apresentarem sinais de autocorrelação e heterocedasticidade. Deste modo a simples análise da correlação linear pode não ser suficiente para avaliar o nível de dependência entre as variáveis em estudo.

De acordo com o teste de independência baseado na informação mútua, algumas das variáveis que revelaram significância estatística em termos de relação de dependência para com ER_t também tinham demonstrado significância estatística aquando da análise linear uniequacional, nomeadamente ΔDY_t , ΔEPR_t , ΔEPR_{t-1} e ΔOIL_t , ao contrário das variáveis $inovLisbor_t$, $inovPIM_{t+2}$, $inovPIM_{t-3}$ e ΔOIL_{t-3} que na análise uniequacional linear não revelaram significância estatística na influência sobre ER_t . Se se tomarem todas estas variáveis em consideração, pode calcular-se a

²³As tabelas de valores críticos encontram-se no Anexo A, tendo sido descrito no Capítulo 2 a sua forma de cálculo e obtenção.

Variável	I (<i>nats</i>)	λ	IMN (<i>nats</i>)	R
$inovLisbor_t$	0,0413*	0,2816	0,0083	0,1285
$inovLisbor_{t-1}$	0,0175	0,1855	0,0128	0,1591
$inovLisbor_{t-2}$	0,0083	0,1283	0,0060	0,1091
$inovLisbor_{t-3}$	0,0024	0,0692	0,0011	0,0464
$inovSwap_t$	0,0043	0,0925	0,0009	0,0412
$inovSwap_{t-1}$	0,0036	0,0847	0,0030	0,0775
$inovSwap_{t-2}$	0,0195	0,1956	0,0170	0,1830
$inovSwap_{t-3}$	0,0095	0,1372	0,0009	0,0412
ΔDY_t	0,7740**	0,8873	0,2182**	0,5946
ΔDY_{t-1}	0,0103	0,1428	0,0065	0,1136
ΔDY_{t-2}	0,0001	0,0167	0,0006	0,0346
ΔDY_{t-3}	0,0018	0,0599	0,0115	0,1510
ΔEPR_t	0,7108**	0,8710	0,2937**	0,6695
ΔEPR_{t-1}	0,0599*	0,3360	0,0193	0,1944
ΔEPR_{t-2}	0,0001	0,0141	0,0001	0,0100
ΔEPR_{t-3}	0,0083	0,1283	0,0071	0,1187
$inovIPC_t$	0,0010	0,0436	0,0165	0,1800
$inovIPC_{t-1}$	0,0009	0,0424	0,0001	0,0141
$inovIPC_{t-2}$	0,0009	0,0424	0,0009	0,0424
$inovIPC_{t-3}$	0,0262	0,2259	0,0198	0,1970

Tabela 6.7: Informação mútua (I), coeficiente de correlação global (λ), informação mútua normal (IMN) e coeficiente de correlação linear (R) entre ER_t e cada uma das variáveis (de *per se*) medida em diversos *lags*. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

Variável	I (nats)	λ	IMN (nats)	R
$inovPIM_{t+3}$	0,0010	0,0440	0,0005	0,0300
$inovPIM_{t+2}$	0,0342*	0,2571	0,0002	0,0200
$inovPIM_{t+1}$	0,0064	0,1128	0,0000	0,0000
$inovPIM_t$	0,0000	0,0000	0,0004	0,0283
$inovPIM_{t-1}$	0,0095	0,1372	0,0025	0,0700
$inovPIM_{t-2}$	0,0006	0,0346	0,0192	0,1942
$inovPIM_{t-3}$	0,0952**	0,4164	0,0000	0,0000
$inovPIA_{t+3}$	0,0014	0,0529	0,0006	0,0346
$inovPIA_{t+2}$	0,0046	0,0957	0,0003	0,0245
$inovPIA_{t+1}$	0,0000	0,0000	0,0036	0,0843
$inovPIA_t$	0,0003	0,0245	0,0000	0,0000
$inovPIA_{t-1}$	0,0018	0,0599	0,0023	0,0678
$inovPIA_{t-2}$	0,0030	0,0773	0,0001	0,0100
$inovPIA_{t-3}$	0,0095	0,1372	0,0002	0,0173
$inovTD_t$	0,0029	0,0760	0,0273	0,2304
$inovTD_{t-1}$	0,0013	0,0510	0,0002	0,0173
$inovTD_{t-2}$	0,0001	0,0141	0,0001	0,0141
$inovTD_{t-3}$	0,0095	0,1372	0,0224	0,2093
ΔOIL_t	0,0361*	0,2639	0,0175	0,1855
ΔOIL_{t-1}	0,0060	0,1092	0,0044	0,0933
ΔOIL_{t-2}	0,0013	0,0510	0,0028	0,0055
ΔOIL_{t-3}	0,0414*	0,2819	0,0001	0,0002

Tabela 6.8: Informação mútua (I), coeficiente de correlação global (λ), informação mútua normal (IMN) e coeficiente de correlação linear (R) entre ER_t e cada uma das variáveis (de *per se*) medida em diversos *lags*. **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%..

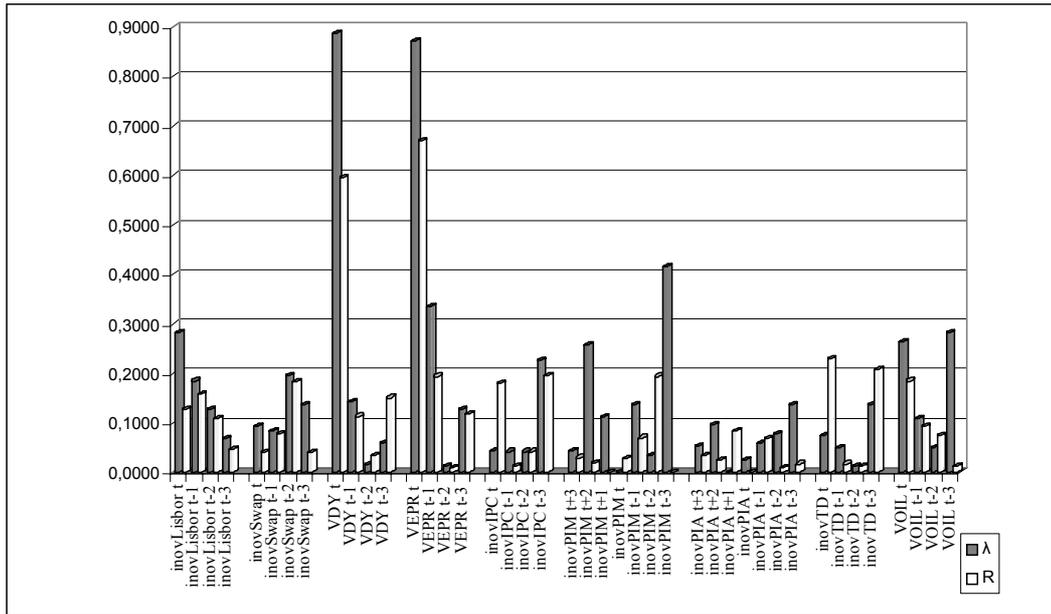


Figura 6.4: Coeficiente de correlação global (λ) e coeficiente de correlação linear (R) entre ER_t e cada uma das variáveis em estudo, tendo em conta vários desfasamentos. Os valores apresentados nesta figura referem-se aos resultados reportados nas Tabelas 6.7 e 6.8.

informação mútua existente entre todas estas variáveis, através da equação (6.20), verificando-se que

$$I \left(\begin{matrix} ER_t, inovLisbor_t, \Delta DY_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, \\ inovPIM_{t+2}, inovPIM_{t-3}, \Delta OIL_t, \Delta OIL_{t-3} \end{matrix} \right) = 1,8517, \quad (6.20)$$

ou seja, $\lambda = 0,9876$. O valor da informação mútua calculado na equação (6.20) não apresenta significância estatística. Este facto poderá ser indício de que devem ser retiradas algumas variáveis que façam diminuir os graus de liberdade, mas que não causem uma diminuição muito forte no valor da informação mútua. A título de experiência foi retirada uma a uma, cada uma das variáveis (excepto ER_t), com vista a avaliar a informação mútua remanescente. Neste contexto foram calculados os seguintes modelos, onde **denota um nível de significância a 1% e *denota um

nível de significância a 5%.

$$I \left(\begin{array}{l} ER_t, inovLisbor_t, \Delta DY_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, \\ inovPIM_{t+2}, inovPIM_{t-3}, \Delta OIL_t \end{array} \right) = 1,4154^* \quad (6.21)$$

$$(6.22)$$

$$I \left(\begin{array}{l} ER_t, inovLisbor_t, \Delta DY_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, \\ inovPIM_{t+2}, inovPIM_{t-3}, \Delta OIL_{t-3} \end{array} \right) = 1,5455^{**} \quad (6.23)$$

$$(6.24)$$

$$I \left(\begin{array}{l} ER_t, inovLisbor_t, \Delta DY_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, \\ inovPIM_{t+2}, \Delta OIL_t, \Delta OIL_{t-3} \end{array} \right) = 1,3926 \quad (6.25)$$

$$(6.26)$$

$$I \left(\begin{array}{l} ER_t, inovLisbor_t, \Delta DY_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, \\ inovPIM_{t-3}, \Delta OIL_t, \Delta OIL_{t-3} \end{array} \right) = 1,5134^{**} \quad (6.27)$$

$$(6.28)$$

$$I \left(\begin{array}{l} ER_t, inovLisbor_t, \Delta DY_t, \Delta EPR_t, \\ inovPIM_{t+2}, inovPIM_{t-3}, \Delta OIL_t, \Delta OIL_{t-3} \end{array} \right) = 1,4350^* \quad (6.29)$$

$$(6.30)$$

$$I \left(\begin{array}{l} ER_t, inovLisbor_t, \Delta DY_t, \Delta EPR_{t-1}, \\ inovPIM_{t+2}, inovPIM_{t-3}, \Delta OIL_t, \Delta OIL_{t-3} \end{array} \right) = 1,2305 \quad (6.31)$$

$$(6.32)$$

$$I \left(\begin{array}{l} ER_t, inovLisbor_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, \\ inovPIM_{t+2}, inovPIM_{t-3}, \Delta OIL_t, \Delta OIL_{t-3} \end{array} \right) = 1,3664 \quad (6.33)$$

$$(6.34)$$

$$I \left(\begin{array}{l} ER_t, \Delta DY_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, \\ inovPIM_{t+2}, inovPIM_{t-3}, \Delta OIL_t, \Delta OIL_{t-3} \end{array} \right) = 1,4117^* \quad (6.35)$$

Como se pode verificar pelos valores da informação mútua vigentes nas equações (6.21) a (6.35), quando se retiram (individualmente) as variáveis ΔOIL_{t-3} , ΔOIL_t , $inovPIM_{t+2}$, ΔEPR_{t-1} ou $inovLisbor_t$, a informação mútua ganha significância estatística, o que poderá ser indício de que a contribuição informativa destas variáveis não é muito forte quando analisada conjuntamente com outras variáveis. De salientar que na análise individual da dependência entre ER_t e as variáveis económicas tidas em consideração para diferentes desfasamentos (Tabelas 6.7 e 6.8), ΔOIL_{t-3} , ΔOIL_t , $inovPIM_{t+2}$, ΔEPR_{t-1} e $inovLisbor_t$ são exactamente aquelas variáveis que apresentaram um nível de significância de 5%, ao passo que ΔDY_t , ΔEPR_t e $inovPIM_{t-3}$ apresentaram um nível de significância de 1%. Se se tomarem em conta apenas estas variáveis

$(ER_t, \Delta DY_t, \Delta EPR_t$ e $inovPIM_{t-3})$, o valor da informação mútua será

$$I(ER_t, \Delta DY_t, \Delta EPR_t, inovPIM_{t-3}) = 1,3021^{**}, \quad (6.36)$$

valor que é estatisticamente significativo e atesta a existência de dependência linear e possivelmente não-linear entre as variáveis em causa (**denota um nível de significância a 1%). O teste de independência baseado na informação mútua parece indicar que a eliminação de algumas variáveis poderá melhorar (em termos de significância estatística) o nível de dependência global entre as variáveis.

De modo a poderem-se estabelecer comparações entre as abordagens consideradas no presente estudo, foi calculada a informação mútua entre as variáveis que revelaram significância estatística na abordagem linear uniequacional referida na equação (6.17). Tendo em conta que esta equação avalia a influência de um conjunto de variáveis sobre ER_t , assumindo que ER_t é uma variável puramente endógena, será necessário recorrer à propriedade da aditividade da informação mútua, segundo a qual [Shannon (1948), Kraskov *et al.* (2003)]

$$I(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = I((\vec{X}, \vec{Y}), \vec{Z}) + I(\vec{X}, \vec{Y}).$$

Esta propriedade obriga a que a informação mútua entre $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ não possa ser inferior à informação mútua entre (\vec{X}, \vec{Y}) . De forma análoga, o coeficiente de determinação e consequentemente o coeficiente de correlação linear, nunca podem diminuir face ao acréscimo de uma variável no modelo em estudo. Procedeu-se ao cálculo da informação mútua, sendo os respectivos resultados apresentados nas seguintes equações

$$I\left(\begin{array}{l} ER_t, inovSwap_{t-2}, \Delta DY_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, inovIPC_{t-3}, \\ inovPIM_{t-2}, inovTD_t, inovTD_{t-3}, \Delta OIL_t \end{array}\right) = 2,3990, \quad (6.37)$$

$$I\left(\begin{array}{l} inovSwap_{t-2}, \Delta DY_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, inovIPC_{t-3}, \\ inovPIM_{t-2}, inovTD_t, inovTD_{t-3}, \Delta OIL_t \end{array}\right) = 1,7302, \quad (6.38)$$

logo, para obter a informação mútua entre ER_t e as restantes variáveis como um todo, basta subtrair ao valor da equação (6.37) o valor da equação (6.38), obtendo-se

$$I\left[ER_t, \left(\begin{array}{l} inovSwap_{t-2}, \Delta DY_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, inovIPC_{t-3}, \\ inovPIM_{t-2}, inovTD_t, inovTD_{t-3}, \Delta OIL_t \end{array}\right)\right] = 0,6688. \quad (6.39)$$

De modo semelhante, se se considerarem apenas as variáveis que resultaram em *proxies* finais de ER_t de acordo com a análise linear uniequacional (ver Tabela 6.5), obtém-se

$$I(ER_t, \Delta DY_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, inovIPC_{t-3}) = 1,4948^{**}, \quad (6.40)$$

$$I(\Delta DY_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, inovIPC_{t-3}) = 0,4968^{**}, \quad (6.41)$$

$$I[ER_t, (\Delta DY_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, inovIPC_{t-3})] = 0,9980^{**}. \quad (6.42)$$

onde ** denota um nível de significância a 1%. Se se admitir que \vec{X} é o vector das variáveis explicativas consideradas na equação (6.38), e \vec{Y} o vector constituído pelas variáveis $[\Delta DY_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, inovIPC_{t-3}]$ ²⁴ consideradas na equação (6.41), os resultados referentes à dependência global entre ER_t e \vec{X} e ER_t e \vec{Y} são apresentados na Tabela 6.9.

	I (nits)	λ	IMN (nits)	R
\vec{X}	0,6688	0,8588	0,4965	0,7935
\vec{Y}	0,9980**	0,9296	0,4523	0,7716

Tabela 6.9: Informação mútua (I), coeficiente de correlação global (λ), informação mútua normal (IMN) e coeficiente de correlação linear para (ER_t, \vec{X}) e (ER_t, \vec{Y}) . **Denota um nível de significância a 1% e *denota um nível de significância a 5%.

Verifica-se que $\lambda \geq R$, assim como $I \geq IMN$ para os casos em estudo, levando a crer na hipótese de existência de dependência não-linear nos pares (ER_t, \vec{X}) e (ER_t, \vec{Y}) . A causa de tal não-linearidade poderá residir no facto de os resíduos das regressões lineares em estudo não serem normalmente distribuídos, conduzindo à possibilidade de uma relação de dependência global superior à dependência linear. Como se pode constatar na Figura 6.5, os resíduos resultantes da aplicação dos modelos de regressão linear vigentes na Tabela 6.5, não são normalmente distribuídos, exibindo sinais de leptocurtose e assimetria.

Convém ainda salientar que $I(ER_t, \vec{X}) < I(ER_t, \vec{Y})$, o que quer dizer que o nível de dependência entre ER_t e as variáveis $inovSwap_{t-2}, \Delta DY_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, inovIPC_{t-3}, inovPIM_{t-2}, inovTD_t, inovTD_{t-3}, \Delta OIL_t$ é inferior ao nível de dependência estabelecido entre ER_t e $\Delta DY_t, \Delta EPR_t, \Delta EPR_{t-1}, inovIPC_{t-3}$. Tal resultado vai ao encontro dos resultados dos critérios de informação SIC e AIC calculados aquando da regressão linear (Tabela 6.5), revelando que a informação mútua poderá ser sensível à selecção de variáveis em modelos de análise e previsão. É de relembrar o trabalho de Akaike em 1973 que, baseado na divergência de Kullback-Leibler, propôs o critério de informação AIC como selecção de modelos e de variáveis [in Maasoumi (1993)]. Esta medida tem em conta a divergência entre a estimativa e os dados empíricos, utilizando o princípio da parsimónia como indicador de complexidade em que o modelo a escolher será aquele

²⁴Na análise linear uniequacional, estas quatro variáveis foram aquelas que demonstraram ser as *proxies* para ER_t , para o período de tempo e amostra considerados, resultando em menores valores para os critérios de informação SIC e AIC (vide Tabela 6.5).

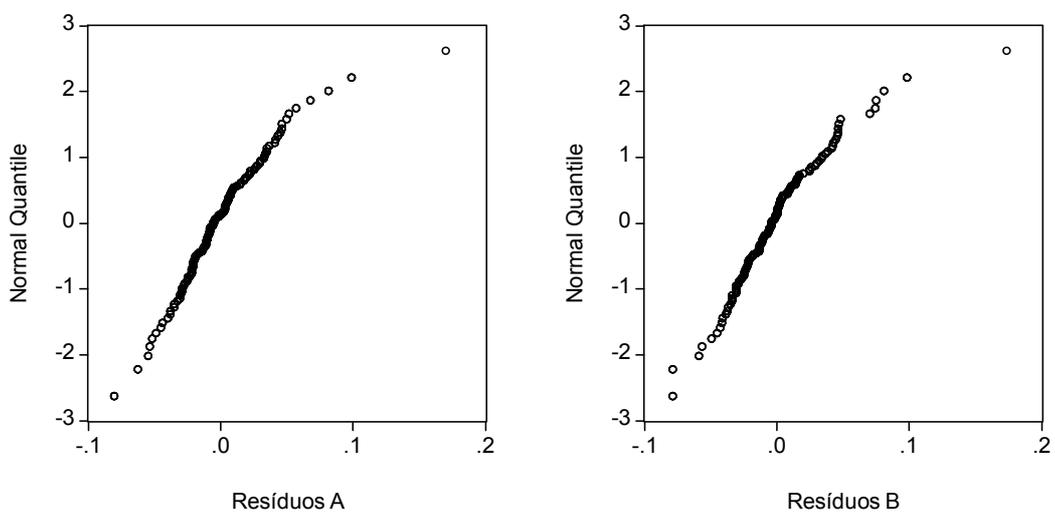


Figura 6.5: Teste à distribuição normal, baseado na distribuição cumulativa dos resíduos face à distribuição cumulativa da distribuição normal. Os resíduos A dizem respeito aos resíduos obtidos com a aplicação do modelo de regressão linear 6.17 e os resíduos B referem-se aos resíduos obtidos com o modelo de regressão linear patente na Tabela 6.5 nas colunas (4), (5) e (6).

que minimiza este critério. Assim sendo, é natural que a informação mútua (uma variante da divergência de Kullback-Leibler) e o critério de informação AIC possam conduzir a conclusões similares. Há que realçar que os presentes resultados verificam a propriedade de aditividade da informação mútua, dado que o valor da informação mútua apresentado na equação (6.37) é superior ao valor da informação mútua na equação (6.40), assim como o resultado da informação mútua apresentado na equação (6.38) é maior que o valor da informação mútua calculado através da equação (6.41). O que acontece é que a diferença entre as equações referidas em (6.37 e 6.38) é inferior à diferença entre (6.40) e (6.41), revelando que a dependência global entre ER_t e \vec{Y} é superior à dependência global entre ER_t e \vec{X} .

Da presente análise verifica-se que o conjunto de variáveis que apresentaram maiores níveis de dependência global com ER_t não difere demasiado do conjunto de variáveis seleccionado pela abordagem linear uniequacional. Pode realçar-se o caso da variável $inovIPC_{t-3}$ ter sido seleccionada na abordagem linear (em termos de significância estatística) e não o ser na análise da dependência global. Apesar de tudo, convém lembrar que para a maioria das variáveis (incluindo $inovIPC_{t-3}$) o coeficiente de correlação global (λ) apresentou valores superiores aos apresentados pelo coeficiente de correlação linear (R), o que parece ser indício da presença de não-linearidades ao nível da dependência entre as variáveis em estudo, ainda que não estatisticamente significativa neste caso.

Aplicando a mesma metodologia às variáveis utilizadas na equação (6.36), que foram as variáveis que apresentaram significância estatística de 1% na análise da dependência global entre cada uma destas e ER_t (Tabelas 6.7 e 6.8) verifica-se que

$$I(\Delta DY_t, \Delta EPR_t, inovPIM_{t-3}) = 0,4311^{**}, \quad (6.43)$$

logo

$$I[ER_t, (\Delta DY_t, \Delta EPR_t, inovPIM_{t-3})] = 0,8710^{**} \quad (6.44)$$

onde $**$ denota um nível de significância a 1%. Ou seja, a dependência global entre ER_t e um vector constituído pelas variáveis $\Delta DY_t, \Delta EPR_t$, e $inovPIM_{t-3}$ assume o valor de 0,8710 nats, o que corresponde a um coeficiente de correlação global de 0,9082. Se se estimasse um modelo de regressão linear com estas variáveis, do tipo

$$ER_t = \alpha + \beta_1 \Delta DY_t + \beta_2 \Delta EPR_t + \beta_3 inovPIM_{t-3} + \varepsilon_t, \quad (6.45)$$

obter-se-ia um coeficiente de correlação linear de $R = 0,7420$, inferior ao coeficiente de correlação global obtido para as mesmas variáveis. Tal diferença pode, mais uma vez, ter como causa a

elevada leptocurtose exibida pelos resíduos resultantes da estimação da equação (6.45), conforme é demonstrado na Figura 6.6.

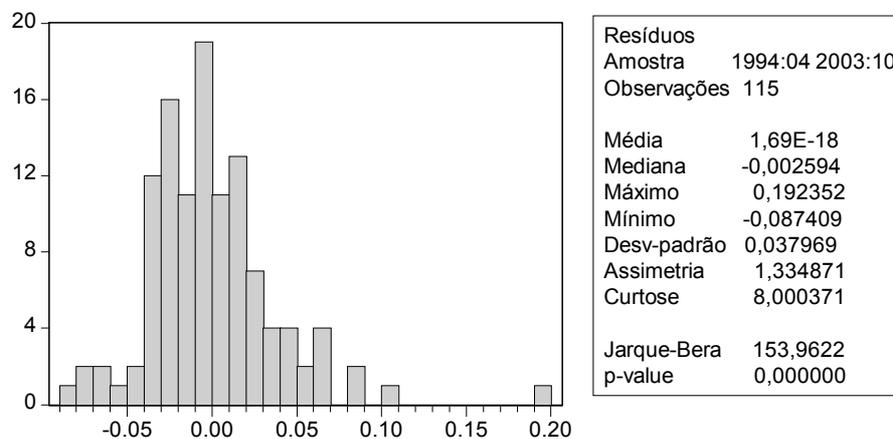


Figura 6.6: Análise estatística e teste *Jarque-Bera* dos resíduos resultantes da estimação da equação 6.45.

A presença de um elevado valor da curtose (8,0003 neste caso) pode indiciar a existência de *fat tails*, facto que, de acordo com alguns autores [e.g. Peters (1996), Cont (2001)] poderá resultar da existência de dependência não-linear ao nível das variáveis utilizadas nos modelos em estudo.

Para melhor comparar o poder explicativo das variáveis seleccionadas através da informação mútua [equação (6.38)] face ao poder explicativo das variáveis seleccionadas pela abordagem linear uniequacional, foi excluída a variável ΔEPR_{t-1} nas equações (6.40), (6.41) e (6.42) com vista a ter-se o mesmo número de variáveis em estudo nas duas abordagens, diferindo apenas uma variável para os dois casos: a abordagem linear seleccionou ΔDY_t , ΔEPR_t e $inovIPC_{t-3}$, enquanto que a informação mútua seleccionou ΔDY_t , ΔEPR_t e $inovPIM_{t-3}$. Neste caso, a informação mútua para as variáveis ER_t , ΔDY_t , ΔEPR_t e $inovIPC_{t-3}$ assume o valor de

$$I(ER_t, \Delta DY_t, \Delta EPR_t, inovIPC_{t-3}) = 0,7611^{**}, \quad (6.46)$$

sendo

$$I(\Delta DY_t, \Delta EPR_t, inovIPC_{t-3}) = 0,1713^{**}, \quad (6.47)$$

ou seja

$$I[ER_t, (\Delta DY_t, \Delta EPR_t, inovIPC_{t-3})] = 0,5898^{**}, \quad (6.48)$$

em que ** denota um nível de significância a 1%. Considerando o mesmo número de variáveis, verifica-se que a informação mútua entre ER_t e o vector de variáveis seleccionadas pela informação mútua [equação (6.44)] é francamente superior ao valor da informação mútua entre ER_t e um vector constituído por igual número de variáveis [equação (6.48)], onde as únicas variáveis diferentes são $inovIPC_{t-3}$ para o caso linear e $inovPIM_{t-3}$ para a abordagem global. O coeficiente de correlação global (λ) para o presente caso seria $\lambda = 0,8322$, enquanto que o coeficiente de correlação linear (R) resultante da estimação do modelo de regressão

$$ER_t = \alpha + \beta_1 \Delta DY_t + \beta_2 \Delta EPR_t + \beta_3 inovIPC_{t-3} + \varepsilon_t,$$

seria $R = 0,7539$.

Globalmente verifica-se que a informação mútua e o coeficiente de correlação global parecem apresentar algumas vantagens face às abordagens lineares, uma vez que têm a capacidade de captar a dependência no seu todo, seja linear e não-linear, possibilitando assim a não eliminação de variáveis que podem ser importantes na análise da relação ou dependência entre variáveis. Para além disso, têm ainda a capacidade de indicar quais as variáveis que deverão ser alvo de estudo mais detalhado, com vista à obtenção de modelos mais fidedignos para a explicação da variações dos preços e/ou das taxas de rendibilidade das acções. Naturalmente que tal resultado só pode ser explorado na sua plenitude quando é possível especificar um modelo não-linear, ou o tipo de não-linearidade que está por trás de tal dependência. Ainda assim, é importante ter em conta que tais não-linearidades existem, que a abordagem linear pode não ser suficiente em todas as circunstâncias.

6.5 Síntese do capítulo

No presente capítulo foi analisada a relação entre o mercado bolsista de acções português e um conjunto de indicadores macroeconómicos e financeiros, seleccionados de acordo com a literatura financeira na área em estudo. Esta relação foi estudada através de diferentes abordagens, sendo que numa primeira fase foram utilizados modelos *VAR/VECM* em contexto de cointegração para identificar as componentes de longo prazo. Nesta parte verificou-se que o índice do mercado bolsista de acções português, *PI*, está cointegrado com alguns dos indicadores tidos em consideração, não sendo rejeitada a hipótese nula de ser fracamente exógeno. Os testes de causalidade à Granger e os modelos *VAR* e *VECM* estimados permitiram verificar que *PI* conduz o comportamento de outros indicadores macroeconómicos e financeiros e é fortemente exógeno.

A componente de curto prazo foi estudada segundo três perspectivas diferentes: a perspectiva linear uniequacional, a perspectiva linear multiequacional e a perspectiva global, preconizada por

uma análise linear e não-linear. De um modo geral pode dizer-se que os resultados apontaram para a existência de variáveis que influenciam de forma estatisticamente significativa o *excess return* e que por isso poderiam constituir *proxies* para esta variável. São de evidenciar as variáveis ΔDY_t e ΔEPR_t , o que revela que, para o período de tempo analisado e face às variáveis tidas em conta, as variáveis de cariz financeiro mostraram melhor performance que as variáveis macroeconómicas. Estes resultados estão de acordo com alguns resultados obtidos por Fama e French (1993), segundo os quais as variáveis referentes às empresas constituíam *proxies* mais fortes que as variáveis macroeconómicas para o *excess return* das acções. A utilização de modelos com várias equações lineares permitiu verificar que o *excess return* não é uma variável que se deva considerar exclusivamente endógena, dado que esta também exerce influência sobre outras variáveis explicativas, nomeadamente ΔDY e *inovIPC*.

Por fim, na abordagem global, a informação mútua (I) e o coeficiente de correlação global (λ) assumiram maioritariamente valores superiores aos da informação mútua normal (IMN) e coeficiente de correlação linear (R) respectivamente, deixando antever a possibilidade de existência de dependência não-linear entre ER_t e as demais variáveis. A informação mútua não avalia a causalidade entre as variáveis mas sim a dependência entre elas como um todo, facto que pode ser uma vantagem uma vez que não é estabelecida nenhuma estrutura de dependência *a priori*, mas por outro lado pode constituir uma limitação dado que a informação sobre a causalidade não é obtida. As principais vantagens da informação mútua neste contexto são a sua globalidade, isto é, a informação mútua como teste de independência não estabelece *a priori* nenhum tipo de distribuição de probabilidade teórica que poderia introduzir enviesamentos nas conclusões e avalia a dependência global (linear e não-linear) independentemente do modelo ou estrutura que estejam na base de tal dependência. As principais diferenças encontradas entre os valores do coeficiente de correlação global e o respectivo coeficiente de correlação linear podem ter como causa a não normalidade das variáveis e o facto dos resíduos resultantes da estimação de algumas regressões não serem ruído branco, exibindo evidência de autocorrelação, heterocedasticidade e não-normalidade.

O principal contributo desta análise é o facto de se mostrar que o índice bolsista português pode ser considerado uma variável exógena, que apresenta não-linearidades e relações não-lineares com outras variáveis macroeconómicas e financeiras, sendo por isso importante realizar a avaliação da dependência global que se possa estabelecer entre este tipo de variáveis. Ainda assim, não se pode afirmar que a hipótese de eficiência dos mercados pode ser rejeitada, uma vez que para tal teriam de ser encontrados níveis de predictabilidade que permitissem a obtenção de ganhos anormais e sistemáticos, mesmo tendo em conta os custos de transacção.

Convém realçar que as amostras utilizadas são de pequena dimensão (cerca de 118 observações),

o que pode levar à subestimação da informação mútua, facto que poderá retirar alguma robustez aos resultados apresentados. Considerando as vantagens e as limitações da informação mútua como medida de dependência e teste de independência, considera-se que tal abordagem poderá ser um complemento importante às medidas actualmente utilizadas no âmbito das abordagens lineares com uma e/ou várias equações, promovendo assim uma análise mais completa do fenómeno em estudo.

Capítulo 7

Conclusões

Os mercados financeiros são sistemas caracterizados por elevados níveis de complexidade, devido ao número de agentes que neles interagem e às relações que estes mercados estabelecem com inúmeros factores. Naturalmente que tais níveis de complexidade podem não se coadunar com um tipo de análise rígida, cujos pressupostos possam desvirtuar resultados e conclusões.

O problema estudado nesta tese refere-se à aparente insuficiência de capacidade de descrição do fenómeno através das metodologias tradicionais de análise do mercado, carteiras e títulos, baseadas em pressupostos que muitas vezes não se verificam empiricamente, nomeadamente a normalidade e a linearidade. Tais insuficiências podem ter efeitos mais fortes na forma como é medida a incerteza e na avaliação da dependência global entre variáveis. Assim sendo, considera-se pertinente a busca de novas abordagens e ferramentas que potenciem uma disponibilização de informação mais credível ao investidor para a tomada de decisão.

Na tentativa de dar resposta ao problema em causa, foi preconizada uma abordagem onde não são necessários pressupostos quanto à distribuição de probabilidade das observações, nem quanto à linearidade das mesmas. Neste contexto foram utilizadas medidas da teoria da informação, mais concretamente a entropia, a informação mútua e as suas variantes, e avaliadas as suas potencialidades como medidas de informação em mercados bolsistas de acções.

Um primeiro objectivo desta tese consistiu em avaliar a *performance* da entropia e da informação mútua como medidas de incerteza no mercado bolsista de acções português e comparar o seu comportamento com as medidas tradicionais de risco, nomeadamente o desvio-padrão e os *Betas* resultantes do modelo *CAPM*. O segundo objectivo proposto foi o desenvolvimento de um teste de independência global baseado na informação mútua, que permitisse avaliar o nível de dependência linear e não-linear entre as variáveis sem ser necessário especificar qualquer tipo de modelo de dependência nem distribuição de probabilidade teórica. O terceiro objectivo consistiu na avaliação da

dependência temporal linear e não-linear das taxas de rendibilidade de vários índices internacionais e deste modo concluir acerca da sua eficiência. Para tal foram utilizadas abordagens lineares e não-lineares, sendo de destacar o teste de independência baseado na informação mútua. Por fim, o quarto objectivo proposto nesta tese foi a avaliação do nível de dependência global entre o mercado bolsista português e um conjunto de factores macroeconómicos e financeiros seleccionados de acordo com a literatura na área. Neste âmbito, foram preconizadas análises às componentes de longo prazo e de curto prazo, envolvendo abordagens lineares e não-lineares.

Com o intuito de verificar se determinados factos estilizados se verificavam nas sucessões cronológicas em análise, foi realizada uma análise estatística, sendo de referenciar que de um modo global os resultados apontaram para a existência de *fat tails*, assimetria, heterocedasticidade e autocorrelação. Neste contexto, afiguram-se reunidas condições para a exploração de novas abordagens mais generalistas, que promovam uma possível melhor explicação dos fenómenos e disponibilização de informação mais fidedigna ao investidor.

A utilização da entropia como medida de incerteza é avalizada pelas suas propriedades matemáticas e interpretativas, nomeadamente o facto de ser uma medida contínua no âmbito das probabilidades, ser aditiva e atingir o máximo quando se observa igual probabilidade de ocorrência dos acontecimentos. Verificou-se uma certa similaridade entre o comportamento da entropia e do desvio-padrão para os títulos em análise e carteiras compostas pelos referidos títulos, contudo a entropia é uma medida mais geral, pois não pressupõe qualquer distribuição de probabilidade teórica e incorpora mais informação acerca da distribuição de probabilidade, com vantagens notórias aquando da evidência de excesso de curtose e assimetria. Verificou-se também que a entropia é sensível ao efeito diversificação, permitindo assim a sua utilização como medida de incerteza em contexto financeiro e como complemento às medidas tradicionalmente usadas no âmbito financeiro.

Foi também explorada a relação entre medidas da teoria da informação variantes da entropia e da informação mútua e as medidas referentes ao risco específico e sistemático que derivam do modelo *CAPM*. Verificou-se que existe uma forte similaridade de comportamento entre a medida de risco sistemático, $\beta_i^2 \sigma_m^2$, e a informação mútua e a medida do risco específico, σ_{ei}^2 , e a entropia condicionada, tanto para as observações diárias como para as observações semanais. Da análise comparativa entre os coeficientes de correlação global, λ , e linear, R , é de realçar que as diferenças mais significativas entre as medidas foram apresentadas pelos títulos cujos resíduos resultantes da aplicação do Modelo de Mercado mais se afastavam dos pressupostos de ausência de autocorrelação, normalidade, homocedasticidade e estabilidade. Tal facto evidencia a potencialidade da entropia e suas variantes na captação das distribuições empíricas no seu todo tendo em conta as suas especificidades e características, nomeadamente a existência de não-linearidades. Ainda assim foram

identificadas algumas limitações da entropia, da informação mútua e das suas variantes como medidas de incerteza, especialmente no que se refere ao facto de estas medidas não terem em conta o valor das variáveis em estudo, mas apenas as suas probabilidades, o que pode dificultar a sua utilização numa função de utilidade e conseqüentemente em modelos de selecção de carteiras. Apesar de tudo, considera-se que as vantagens que apresentam como medidas globais de incerteza podem promover ao investidor um nível de informação superior acerca do mercado e seu comportamento.

Dada a possibilidade de existência de não-linearidades nas observações em estudo e existindo a necessidade de testar a independência a nível global entre variáveis, sem ter necessariamente de assumir um modelo de dependência *a priori*, foi desenvolvido um teste de independência baseado na informação mútua. Este teste foi construído tendo em consideração as propriedades matemáticas da informação mútua e os valores críticos foram encontrados através de um processo de simulação sobre uma sucessão cronológica ruído branco, para um determinado número de amostras com diferentes tamanhos. Dado que a distribuição da informação mútua é assimétrica, pode adoptar-se a abordagem do percentil para obter os valores críticos. Esta metodologia foi proposta por Hodrick (1992) e por Granger, Maasoumi e Racine (2004) e de acordo com estes autores, os valores críticos obtidos podem ser utilizados como base para testar a independência entre variáveis. Para a realização deste teste não é necessário assumir pressupostos de linearidade, normalidade e estacionariedade. Contudo, se as sucessões cronológicas forem estacionárias os resultados serão mais robustos, na medida em que não há provas suficientes da robustez deste teste em condições de não-linearidade e não estacionariedade em simultâneo. A construção do teste de independência baseado na informação mútua constituiu um meio para a prossecução dos dois últimos objectivos.

A dependência temporal nas taxas de rendibilidade de sete índices bolsistas internacionais foi alvo de estudo, tendo sido preconizadas abordagens lineares e não-lineares para o efeito. A abordagem linear mostrou uma forte sensibilidade à periodicidade das observações, verificando-se que alguns dos índices que apresentaram maiores níveis de autocorrelação linear para as observações diárias (ASE e PSI 20) nas observações semanais revelaram ausência de autocorrelação. A abordagem não-linear não mostrou ser tão sensível à periodicidade, tendo os testes de McLeod e Li, de Engle, de Tsay, *BDS* e informação mútua revelado a presença de não-linearidades. Quando se conclui que as observações não são *i.i.d.*, as possíveis causas para tal resultado poderão ser a não estacionariedade, a não-linearidade e o caos determinístico. Tendo os testes à estacionariedade de *Dickey-Fuller* e *KPSS* apontado para a estacionariedade das sucessões cronológicas em estudo, conclui-se que *a priori* apenas a não-linearidade e o caos determinístico poderão estar na origem da dependência temporal captada pelos testes realizados. Neste contexto, foram calculados os expoentes de Lyapunov (apenas para as observações diárias), cujos resultados revelaram a presença de

caos nas taxas de rendibilidade dos índices bolsistas. De acordo com os resultados obtidos, parece existir evidência de efeitos determinísticos e estocásticos nas sucessões cronológicas em estudo.

Da análise realizada, verifica-se que as medidas da teoria da informação, mais concretamente a informação mútua e o coeficiente de correlação global, são medidas mais generalistas, que conseguem captar a dependência linear e não-linear e indicar quais os *lags* que deverão ser alvo de estudo mais aprofundado, mas não fornecendo pistas sobre a função ou modelo que determina essa mesma dependência, o que poderá constituir uma desvantagem. De acordo com vários autores, nomeadamente Maasoumi e Racine (2002) e Granger e Lin (1994) a informação mútua pode ser utilizada como medida de predictabilidade, através do coeficiente de correlação global e Racine e Maasoumi (2004) consideram que os testes de independência baseados na entropia e na informação mútua têm a capacidade para indicar a direcção na qual se deve reforçar o estudo da dependência não-linear.

De um modo geral os resultados obtidos apontaram para a existência de indícios de predictabilidade nas taxas de rendibilidade dos índices bolsistas, tendo sido identificadas componentes determinística e estocástica. Apesar de tudo, é prematuro concluir que os mercados em causa não são eficientes, uma vez que tal predictabilidade teria de assegurar o ganho de lucros anormais e sistemáticos.

Na tentativa de alcançar o último objectivo proposto nesta tese, foi analisada a relação entre o mercado bolsista de acções português e um conjunto de indicadores macroeconómicos e financeiros, seleccionados de acordo com a literatura financeira na área em estudo. Esta relação foi estudada através de diferentes abordagens. Numa primeira fase foram analisadas as componentes de longo prazo em contexto de cointegração, verificando-se que o índice do mercado bolsista de acções português está cointegrado com alguns dos indicadores considerados, não sendo rejeitada a hipótese nula de este ser fracamente exógeno. Os testes de causalidade à Granger e os modelos *VAR* e *VECM* estimados, permitiram verificar que o índice bolsista português conduz o comportamento de outros indicadores macroeconómicos e financeiros e é fortemente exógeno.

A componente de curto prazo foi estudada através de modelos lineares uniequacionais, de modelos lineares multiequacionais e de uma abordagem global não-linear. Os resultados apontaram para a existência de variáveis que influenciam de forma estatisticamente significativa o *excess return* e assim poderão constituir *proxies* para esta variável. São de evidenciar as variáveis de cariz financeiro que mostraram melhor performance neste contexto que as variáveis macroeconómicas. A utilização de modelos com várias equações lineares permitiu ainda verificar que o *excess return* não é uma variável que se possa considerar exclusivamente endógena, dado que esta também exerce influência sobre outras variáveis explicativas.

Na abordagem não-linear, a informação mútua e o coeficiente de correlação global assumiram maioritariamente valores superiores aos da informação mútua normal e aos do coeficiente de correlação linear respectivamente, deixando antever a possibilidade de existência de dependência não-linear entre o *excess return* e as demais variáveis. A informação mútua não avalia a causalidade entre as variáveis, mas sim a dependência entre elas como um todo, facto que pode ser uma vantagem uma vez que não é estabelecida nenhuma estrutura de dependência *a priori*, mas por outro lado pode constituir uma limitação dado que a informação sobre a causalidade não é obtida. Da análise realizada, conclui-se que de acordo com a abordagem não-linear preconizada pela informação mútua e pelo coeficiente de correlação global, que existem variáveis macroeconómicas que exibem uma forte relação com o *excess return*, relação esta que foi praticamente desprezada na abordagem linear. Apesar de tudo, os resultados não são totalmente esclarecedores e optimistas, o que pode dever-se ao facto de as amostras serem de relativamente pequena dimensão (118 observações) e tal conduzir a uma possível subestimação da informação mútua. Eventuais conclusões acerca da eficiência do mercado em estudo são prematuras, uma vez que teria de se provar que os níveis de predictabilidade possibilitariam o ganho de rendimentos anormais de forma sistemática, mesmo tendo em conta a existência de custos de transacção.

De um modo geral pode concluir-se que as medidas da teoria da informação aplicadas aos mercados bolsistas apresentaram potencialidades que poderão ser exploradas com vista ao desenvolvimento e complemento de determinadas abordagens cujos pressupostos não se adequam à realidade empírica dos mercados. Considera-se que foi encontrada uma possível solução para o problema colocado nesta tese, uma vez que a entropia e a informação mútua apresentam vantagens óbvias quando utilizadas para avaliar a incerteza e a dependência global entre variáveis, resultado da sua globalidade e não necessidade de pressupostos demasiado redutores e podem constituir possíveis complementos às abordagens tradicionais no foro da economia financeira. Para além da análise empírica que potencia o alcance da maioria dos objectivos desta tese, há que salientar o contributo a nível teórico com o desenvolvimento de um teste à independência baseado na informação mútua cujos pressupostos generalistas permitem a avaliação da dependência global entre variáveis.

Os objectivos propostos foram globalmente concretizados, ainda que tenham sido identificadas algumas limitações ao nível das medidas da teoria da informação e do próprio trabalho em si mesmo. Estas medidas exibem limitações que, na maioria, são fruto da sua generalidade. Por exemplo, a entropia como medida de incerteza dificilmente poderá ser utilizada no âmbito da selecção de carteiras uma vez que não tem em consideração o valor das variáveis e deste modo a sua inclusão numa função de utilidade poderá encerrar alguns problemas de conceptualização. Por outro lado, verificou-se que o facto da informação mútua e do coeficiente de correlação global não

indicarem possíveis fontes de não-linearidade é em si uma limitação, uma vez que apenas se obtém a informação da existência ou não de dependência linear e não-linear e do nível dessa mesma dependência, seja ela temporal ou entre diversas variáveis. Nesta tese foram identificadas situações concretas de evidência de dependência não-linear, seja temporal, na análise realizada no Capítulo 5, ou entre o *excess return* do mercado bolsista português e um conjunto de variáveis macroeconómicas e financeiras (vide Capítulo 6). Contudo, em nenhum dos casos foram identificadas as fontes ou modelos dessa dependência não-linear. Por exemplo, na análise da dependência temporal das taxas de rendibilidade dos índices bolsistas internacionais, verificou-se a existência de uma componente determinística e de uma componente estocástica, existindo indícios de não-linearidades na média e na variância. Depois de filtrada a dependência linear e a heterocedasticidade, o teste de independência baseado na informação mútua continuou a apontar para a existência de não-linearidades, contudo as respectivas fontes não puderam ser identificadas.

Além disso, estas medidas não são métricas, não medindo por isso a distância, mas sim a divergência entre variáveis e/ou distribuições. Outra forte limitação das medidas da teoria da informação utilizadas prende-se com a sua forte exigência em termos do tamanho das amostras, notando-se uma possível subestimação das mesmas aquando da existência de amostras com menos de 500 observações.

É ainda importante realçar algumas limitações ao longo da realização desta tese. A primeira limitação diz respeito ao tipo e à quantidade de informação recolhida, sendo que as conclusões retiradas no contexto da análise empírica não são generalizáveis a outros mercados e a diferentes períodos temporais.

Outra limitação prende-se com o processo de estimação da informação mútua e da entropia - a equiquantização marginal. De acordo com alguns autores, por exemplo Darbellay (1998a), Moddemeijer (1999) e Tambakis (2000), os estimadores baseados em histogramas permitem uma minimização do enviesamento na estimação destas medidas, tendo referido Darbellay (1998a, 1988b, 1998c, 1999) que a partição equitativa do espaço se revela mais eficiente que a partição equidistante, especialmente nos casos em que as distribuições apresentam sinais de leptocurtose e assimetria. Apesar de tudo, este método de estimação também apresenta algumas lacunas, sendo de evidenciar a subestimação da entropia e da informação mútua quando as amostras não são suficientemente grandes e/ou quando o número de variáveis (dimensões) é relativamente elevado.

Tradicionalmente as abordagens utilizadas em finanças têm sido baseadas em modelos de regressão de características essencialmente lineares. Dada a natureza das variáveis em estudo, este tipo de abordagem tem revelado inúmeros problemas ao nível da estimação, especialmente ao nível da aderência aos pressupostos do modelo clássico de regressão linear. A aceitação da não

estacionariedade, como potenciador de enviesamentos nos resultados de estimação, veio colmatar algumas dessas dificuldades; para além disso metodologias mais recentes baseadas em modelos de assimetria contribuíram para a aceitação da não-linearidade intrínseca neste tipo de dados. Estas metodologias têm sido aplicadas em estudos mais recentes e constituem um campo promissor de investigação nesta área. No entanto, os tipos de não-linearidade capturados por estes modelos são específicos e não permitem captar efeitos não-lineares de origens diferentes ou não especificados. Daí a necessidade de utilizar medidas gerais que permitam capturar a não-linearidade global existente nos dados em estudo, independentemente da sua forma. É neste contexto que surge a importância da utilização das medidas oriundas da teoria da informação, nomeadamente a entropia e a informação mútua, medidas estas que foram exploradas nesta tese.

Neste sentido, possíveis desenvolvimentos no âmbito do *focus* da presente tese, poderão considerar a tentativa de identificação das fontes de não-linearidade nas sucessões cronológicas financeiras, através da separação das componentes determinística e estocástica, na tentativa de melhor compreender o comportamento dos mercados bolsistas e providenciar ao investidor informação mais concreta e detalhada como base para a decisão de investimento.

O desenvolvimento de um processo de estimação da informação mútua e da entropia que apresente robustez em presença de amostras de pequena dimensão pode revelar-se importante, na medida em que nem sempre é possível conseguir amostras de grande dimensão na economia financeira. Uma outra possibilidade de trabalho futuro consiste em promover as transformações necessárias nas medidas da teoria da informação utilizadas nesta tese, com o intuito de as tornar métricas. Neste contexto, conseguir-se-ia uma melhor adequabilidade destas medidas em contexto económico-financeiro e as conclusões retiradas poderiam ser certamente muito mais robustas do ponto de vista estatístico.

Além disso, considera-se que o desenvolvimento de testes estatísticos baseados no coeficiente de correlação global poderá possibilitar comparações mais adequadas com os modelos de regressão linear, mais concretamente comparações com o coeficiente de correlação linear.

Uma outra potencial aplicação seria a inclusão da entropia como medida de incerteza em modelos de selecção de carteiras de activos financeiros. Tal aplicação pode ser justificada com base na generalidade da entropia como medida de incerteza e desordem e na possibilidade de considerar mais informação sobre a distribuição de probabilidade das variáveis que as medidas de risco e incerteza tradicionalmente usadas.

Em jeito de conclusão, importa realçar que as medidas da teoria da informação analisadas nesta tese podem constituir importantes ferramentas de análise nos mercados financeiros.

Bibliografia

- [1] Abarbanel, H., 1996. *Analysis of Observed Chaotic Data*, (Springer-Verlag, New York).
- [2] Abhyankar, A., L. Copeland e W. Wong, 1995. Nonlinear Dynamics in Real-Time Equity Market Indices: Evidence From the United Kingdom, *Economic Journal*, 105, 431, 864-880.
- [3] Afonso, P. e J. Teixeira, 1998. Non-Linear Tests of Weakly Efficient Markets: Evidence From Portugal, *Working Paper n.º 6/98*, ISEG, Departamento de Economia.
- [4] Altug, S., R. Ashley e D. Patterson, 1999. Are Technology Shocks Nonlinear?, *Macroeconomic Dynamics*, 3, 506-533.
- [5] Amaro, M., R. Carvalho e L. Saias, 1998. *Instrumentos Fundamentais de Gestão Financeira* (Universidade Católica Editora, 3.^a edição, Lisboa).
- [6] Arafat, S, M. Skubic e K. Keegan, 2003. Combined Uncertainty Model for Best Wavelet Selection, Proceedings da *IEEE 2003 International Conference on Fuzzy Systems*, May 2003, St. Louis, MO.
- [7] Arrow, K., 1963. Comment on J. Duesenberry : The Portfolio Approach to the Demand for Money and Other Assets, *Review of Economics and Statistics*, 34.
- [8] Ashley, R., D. Patterson e M. Hinich, 1986. A Diagnostic Test for Nonlinear Serial Dependence in Time Series Fitting Errors, *Journal of Time Series Analysis*, 7, 3, 165-178.
- [9] Asprem, M., 1989. Stock Prices, Asset Portfolios and Macroeconomic Variables in Ten European Countries, *Journal of Banking and Finance*, 13, 589-612.
- [10] Ausloos, M., 1998. The Money Games Physicists Play, *Europhysics News*, March/April.
- [11] Auloos, M., N. Vandewalle, P. Boveroux, e K. Ivanova, 1999. Application of Statistical Physics to Economic and Financial Topics, *Physica A*, 274, 229-240.
- [12] Auloos, M., K. Ivanova e N. Vandewalle, 2001. Crashes: Symptoms, Diagnoses and Remedies, Proceedings *Empirical Science of Financial Fluctuations*, Tokyo, Japan.
- [13] Bachelier, L., 1964. Theory of Speculation, em P. Cootner ed.: *The Random Character of Stock Prices* (Cambridge, MIT Press, originalmente publicado em 1900).
- [14] Balbina, M. e N. Martins, 2002. The Analysis of Seasonal Return Anomalies in the Portuguese Stock Market, *Banco de Portugal-Economic Research, Working Paper 11-02*.

- [15] Bartholdy, J. e P. Peare, 2004. Estimation of Expected Return: CAPM vs Fama and French, *Working Paper Series N.º 176*, Centre for Analytical Finance, University of Aarhus - Aarhus School of Business.
- [16] Basu, S. 1983. The Relationship Between Earnings Yield, Market Value and Return for NYSE Common Stocks: Further Evidence, *Journal of Financial Economics*, 12, 129-156.
- [17] Bernhard, H. e G. Darbellay, 1999. Performance Analysis of the Mutual Information Function for Nonlinear and Linear Processing, *Actas: IEEE International Conference on Acoustics, Speeche and Signal Processing (USA)*, 3, 1297-1300.
- [18] Binswanger, M., 2000. Stock Market Booms and Real Activity: Is This Time Different?, *International Review of Economics and Finance*, 9, 387-415.
- [19] Binswanger, M., 2001. Does the Stock Market Still Lead Real Activity? - An Investigation for the -7 Countries, *Series A: Discussion Paper 2001-04*, Solothurn University of Applied Sciences Northwestern, Switzerland.
- [20] Black, F., M. Jensen e M. Scholes 1972. The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests, em M. Jensen, Frederick A. Praeger ed.: *Studies in the Theory of Capital Markets* (Inc. New York).
- [21] Black, F., 1993. Beta and Return, *Journal of Portfolio Management*, 20, 8-18, October.
- [22] Bonanno, G., F. Lillo e R. Mantegna, 2001. Levels of Complexity in Financial Markets, *Physica A*, 299, 16-27.
- [23] Borch, K., 1968. A Note of Uncertainty and Indifference Curves, *Review of Economic Studies*.
- [24] Bouchaud, J.P., 2000. Elements for a Theory of Financial Risks, *Physica A*, 285, 18-28.
- [25] Bouchaud, J.P., 2002. An Introduction to Statistical Finance, *Physica A*, 313, 238-251.
- [26] Bouchaud, J.P., M. Potters e J.P. Aguilar, 1997. Missing Information and Asset Allocation, preprint in <http://xxx.lanl.gov/cond-mat/9707042>
- [27] Bouchaud, J.P. e M. Potters, 1999a. *Theory of Financial Risk: From Statistical Physics to Risk Management* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK).
- [28] Bouchaud, J.P. e M. Potters, 1999b. Worst Fluctuation Method for Fat Value-at-Risk, preprint in <http://xxx.lanl.gov/cond-mat/9909245>
- [29] Bouchaud, J.P., P. Cizeau, L. Laloux e M. Potters, 1999c. Mutual Attractions: Physics and Finance, *Physics World*, Jan.
- [30] Bouchaud, J.P., M. Potters e M. Meyer, 2000. Apparent Multifractality in Financial Time Series, *European Physical Journal B*, 13, 595-599.
- [31] Bouchaud, J.P. e M. Potters, 2001a. More Stylized Facts of Financial Markets: Leverage Effect and Downside Correlations, *Physica A*, 299, 60-70.

- [32] Bouchaud, J.P., A. Matacz e M. Potters, 2001b. Leverage Effect in Financial Markets: the Retarded Volatility Model, *Physical Review Letters*, 87, 22, 228701.
- [33] Brealey, R. e S. Myers, 1998. *Princípios de Finanças Empresariais* (McGraw-Hill, 5.^a edição, Lisboa).
- [34] Brock, W., W. Dechert, J. Scheinkman e B. LeBaron, 1991. A Test for Independence Based on the Correlation Dimension, Department of Economics, University of Wisconsin at Madison, University of Houston and University of Chicago (artigo não publicado).
- [35] Brown, S., 1989. The Number of Factors in Security Returns, *Journal of Finance*, 44, 5, December, 1247-1262.
- [36] Buchen, P.W. e M. Kelly, 1996. The Maximum Entropy Distribution of an Asset Inferred from Option Prices, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31, 1, 143-159.
- [37] Campbell, J., 1987. Stock Returns and the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, 18, 373-399.
- [38] Campbell, J., 1991. A Variance Decomposition for Stock Returns, *Economic Journal*, 101, 157-179.
- [39] Campbell, J. e R. Shiller, 1988. Stock Prices, Earnings, and Expected Dividends, *Journal of Finance*, 43, 3, 661-676.
- [40] Campbell, J. e R. Shiller, 1989. The Dividend-Price Ratio and Expectations of Futures Dividends and Discount factors, *Review of Financial Studies*, 1, 3, 195-228.
- [41] Campbell, J., A. Lo e A. Craig MacKinlay, 1997. *The Econometrics of Financial Markets* (Princeton University Press, Princeton NJ).
- [42] Carvalho, A. e N. Crato, 2003. Memória nos Retornos e Volatilidades de Séries Financeiras Portuguesas, *Actas do XI Congresso Anual da SPE*.
- [43] Chang, M., T. Wu e J. Heh, 1998. The Estimation of Entropy Variation in Decision Tree, em Xu, L., Chan, L.W. e Fu, A. ed.: *Intelligent Data Engineering and Learning – Perspectives on Financial Engineering and Data Mining* (Hong-Kong).
- [44] Chatterjee, S. e M. Yilmaz, 1992. Chaos, Fractals and Statistic, *Statistical Science*, 7, 49-121.
- [45] Chen, N-F., 1991. Financial Investment Opportunities and the Macroeconomy, *Journal of Finance*, 46, 6, 529-554.
- [46] Chen, N-F., R. Roll, e S. Ross, 1986. Economic Forces and the Stock Market, *Journal of Business*, 59, 3, July, 383-403.
- [47] Chen, J., 2002. An Entropy Theory of Value, *Working Paper*, <http://www.unifr.ch/econophysics/>
- [48] Chen, M., 2003. Risk and Return: CAPM and CCAPM, *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 43, 369-393.

- [49] Cheng, P. e R. Grauer, 1980. An Alternative Test of the Capital Asset Pricing Model, *American Economic Review*, 70, 660-671.
- [50] Choi, J., S. Hauser e K. Kopecky, 1999. Does the Stock market Predict Real Activity? Time Series Evidence from G-7 Countries, *Journal of Banking and Finance*, 23, 1771-1792.
- [51] Chopin, M. e M. Zhong, 2001. Stock Returns, Inflation and the Macroeconomy: The Long and Short-Run Dynamics, *Advances in Investment Analysis and Portfolio Management*, 8.
- [52] Clare, A., R. Priestley e S. Thomas, 1998. Reports of Beta's Death are Premature: Evidence from the UK, *Journal of Banking & Finance*, 22, 1207-1229.
- [53] Clement, R., 1993. *Making Hard Decisions – An Introduction to Decision Analysis* (Duxbury Press, London).
- [54] Climent, F., M. Miguel, e I. Olmeda, 2003. Linear and Non-Linear Dynamics Between Exchange Rates and Stock Markets Returns: An Application to the Financial Crises of Europe and Asia in the Nineties, *Review of Financial Markets*, 2, 19-48.
- [55] Cochrane, J., 1992. Explaining the Variance of Price-Dividend Ratios, *Review of Financial Studies*, 5, 243-280.
- [56] Cont, R., 2001. Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues, *Quantitative Finance*, 1, 223-236.
- [57] Cootner, P., 1964. *The Random Character of Stock Prices* (MIT Press, Cambridge).
- [58] Cowell, F., 1980. Generalized Entropy and the Measurement of Distributional Change, *European Economic Review*, 13.
- [59] Crato, N. e J. Assis Lopes, 1989. Forecasting Price Trends at the Lisbon Stock Exchange, em Taylor, S. et al. ed.: *A Reappraisal of the Efficiency of Financial Markets* (Springer-Verlag).
- [60] Cuthbertson, K., 2000. *Quantitative Financial Economics - Stocks, Bonds and Foreign Exchange* (John Wiley & Sons eds., New York).
- [61] Curto, J.D., 2002. *Modelização das Taxas de Rendibilidade: Estudo Comparativo dos Mercados de Capitais Portugêses, Alemão e Norte-Americano*, Tese de Doutoramento, ISCTE.
- [62] Dacorogna, M., 1999. Econophysics Find a Forum, *Physics World*, Sep.
- [63] Darbellay, G., 1998a. Predictability: an Information-Theoretic Perspective, *Signal Analysis and Prediction*, A. Procházka, J. Uhlír, P.J.W. Rayner e N.G. Kingsbury, Birkhauser eds., Boston, 249-262.
- [64] Darbellay, G., 1998b. An Adaptative Histogram Estimator for the Mutual Information, *UTIA Research Report, n.º 1889*, Acad. Sc., Prague.
- [65] Darbellay, G., 1998c. Statistical Dependences in \mathbb{R}^d : an Informatio-Theoretic Approach. Actas 3rd *IEEE European Workshop on Computer-intensive Methods in Control and data Processing*, Prague, 83-88.

- [66] Darbellay, G., 1999. An Estimator of the Mutual Information Based on a Criterion for Independence. *Computational Statistics and Data Analysis*, 32, 1-17.
- [67] Darbellay, G. e I. Vajda, 1999. Estimation of the Information by an Adaptive Partitioning of the Observation Space. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45, May, 1315-1321.
- [68] Darbellay, G. e I. Vajda, 2000a. Entropy Expressions for Multivariate Continuous Distributions, *IEEE Transactions on Information Theory*, IT 46, 709-712.
- [69] Darbellay, G. e D. Wuertz, 2000b. The Entropy as a Tool for Analysing Statistical Dependence's in Financial Time Series, *Physica A*, 287, 429-439.
- [70] Darbellay, G. e J. Franek: software: <http://siprint.utia.cas.cz/timeseries/>
- [71] de Lima, P., 1997. Nonlinearities and Nonstationarities, *Journal of Business and Economic Statistics*, April, 16, 2.
- [72] Díaz, A., P. Grau-Carles e L. Mangas, 2002. Nonlinearities in the Exchange Rate Returns and Volatility, *Physica A*, 316, 469-482.
- [73] Dionísio, A., 2001. *Análise da entropia como medida de incerteza e valor ordinal da informação no mercado bolsista de ações português*, Tese de Mestrado não publicada, Universidade de Évora.
- [74] Dionísio, A., R. Menezes e D. A. Mendes, 2003a. Teoria da Informação: Ferramenta de Análise da Dependência Estatística em Sucessões Cronológicas Financeiras, em J.M. Barreiro, J. A. Díez de Castro, B. Barreiro, R. Ruzo e F. Losada ed.: *Gestión Científica Empresarial: Temas de Investigación Actuales* (Edições NetBiblo, Espanha).
- [75] Dionísio, A., R. Menezes e D.A. Mendes, 2003b. Entropic Measures of Information and Goodness-of-Fit in Financial Data, *Review of Financial Markets*, 2, 5-18.
- [76] Dionísio, A., R. Menezes e D.A. Mendes, 2004a. Entropy-Based Independence Test, *Proceedings do 12th International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, Universidade de Évora.
- [77] Dionísio, A., R. Menezes e D.A. Mendes, 2004b. Mutual Information: a Measure of Dependency for Nonlinear Time Series, *Physica A*, 344, 326-329.
- [78] Dionísio, A., R. Menezes, D.A. Mendes e J. Vidigal da Silva, 2004c. Linear and Nonlinear Models for the Analysis of the Relationship Between Stock Market Prices and Macroeconomic and Financial Factors, *Working Paper 0411018 EconWPA*.
- [79] Dobrushin, R., 1959. General Formulation of Shannon's Main Theorem in Information Theory, *Uspekhi Mat. Nauk*, 14, 3-104.
- [80] Domian, D. e D. Louton, 1997. A Threshold Autoregressive Analysis of Stock Returns and Real Economics Activity, *International Review of Economics and Finance*, 6, 167-179.
- [81] Driver, C., L. Trapani e G. Urga, 2004. Cross-Section vs Time Series Measures of Uncertainty, *Working Paper*, <http://www.swan.ac.uk/economics/res2004/program/papers/DriverTrapaniUrga.pdf>

- [82] Drozd, S., J. Kwapién, F. Grümmer, F. Ruf e J. Speth, 2001a. Quantifying Dynamics of the Financial Correlations, *Working Paper 0102402 cond-mat*, <http://xxx.lanl.gov/cond-mat/0102402>
- [83] Drozd, S., F. Grümmer, F. Ruf, e J. Speth, 2001b. Dynamics of Correlations in the Stock Market, *Proceedings of the Empirical Science of Financial Fluctuations*, Tokyo (Springer Verlag).
- [84] Duque, J. e F. Razina, 1998. A Interdependência entre os Mercados Financeiros Internacionais, *Cadernos do Mercado de Valores Mobiliários*, 3, 13-42.
- [85] Ebrahimi, N., E. Maasoumi e E. Soofi, 1999. Ordering Univariate Distributions by Entropy and Variance, *Journal of Econometrics*, 90, 2, 317-336.
- [86] Elton, E.J. e M.J. Gruber, 1995a. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis* (Jonh Wiley & Sons, 2^a Ed, New York).
- [87] Elton, E.J., M.J. Gruber e C. Blake, 1995b. Fundamental Economic Variables, Expected Returns, and Bond Performance, *Journal of Finance*, 50, 4, September, 1229-1256.
- [88] Elton, E.J. e M.J. Gruber, 1999a. Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection in Investments, em Elton, E. e Gruber, M. ed.: *Portfolio Theory and Asset Pricing* (MIT Press, London).
- [89] Elton, E.J. e M.J. Gruber, 1999b. Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection: Tracing Out the Efficient Frontier, em Elton, E. e Gruber, M. ed.: *Portfolio Theory and Asset Pricing* (MIT Press, London).
- [90] Elton, E.J. e M.J. Gruber, 1999c. Estimating the Dependence Structure of Shares Prices – Implications for Portfolio Selection, em Elton, E. e Gruber, M. ed.: *Portfolio Theory and Asset Pricing* (MIT Press, London).
- [91] Elton, E.J. e M.J. Gruber, 1999d. Are Betas Best? in Investments, em Elton, E. e Gruber, M. ed.: *Portfolio Theory and Asset Pricing* (MIT Press, London).
- [92] Elton, E.J. e M.J. Gruber, 1999e. Portfolio Theory When Investments Relatives Are Log-Normally Distributed in Investments, em Elton, E. e Gruber, M. ed.: *Portfolio Theory and Asset Pricing* (MIT Press, London).
- [93] Elton, E.J. e M.J. Gruber, 1999f. Portfolio Analysis With a Non-Normal Multi-Index Return-Generating Process in Investments, em Elton, E. e Gruber, M. ed.: *Portfolio Theory and Asset Pricing* (MIT Press, London).
- [94] Enders, W. e P. Sicklos, 2001. Cointegration and Threshold Adjustment, *Journal of Business Economic Statistics*, 19, 2, 166-176
- [95] Engle, R., 1982. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U. K. Inflation, *Econometrica*, 50, 4, 987-1007.
- [96] Fama, E., 1963. Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis, *Jornal of Business*, 36, 4, 420-429.

- [97] Fama, E., 1965. The Behavior of Stock Market Prices, *Journal of Business*, 38, 34-105.
- [98] Fama, E., 1970. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, *Journal of Finance*, 25, 5, May, 383-417.
- [99] Fama, E., 1981. Stock Returns, Real Activity, Inflation and Money, *American Economic Review*, 71, 545-565.
- [100] Fama, E., 1990. Stock Returns, Expected Returns and Real Activity, *Journal of Finance*, 45, 1089-1108.
- [101] Fama, E., 1991. Efficient Capital Markets: II, *Journal of Finance*, 46, 5, December, 1575-1617.
- [102] Fama, E. e R. Roll, 1968. Some Properties of Symmetric Stable Distributions, *Journal of the American Statistical Association*, 817-846.
- [103] Fama, E. e J. MacBeth, 1973. Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests, *Journal of Political Economy*, 81, 607-636, May.
- [104] Fama, E. e K. French, 1988. Dividend Yields and the Expected Stock Returns, *Journal of Financial Economics*, 22, 3-25.
- [105] Fama, E. e K. French, 1989. Business Conditions and Expected Returns on Stocks and Bonds, *Journal of Financial Economics*, 25, 23-49.
- [106] Fama, E. e K. French, 1992. The Cross-Section of Expected Stock Returns, *Journal of Finance*, 47, 427-465.
- [107] Fama, E. e K. French, 1993. Common Risk Factors in the Returns on Bonds and Stocks, *Journal of Financial Economics*, 33, 3-56.
- [108] Fama, E. e K. French, 1996. The CAPM is Wanted, Dead or Alive, *Journal of Finance*, 51, 5, 1947-1958.
- [109] Farmer, J., 1998. Market Force, Ecology and Evolution, *Santa Fe Inst. Working Paper 98-12-117*, SFI, Santa Fe Intitute.
- [110] Farmer, J., 1999. Physicists Attempt to Scale the Ivory Towers of Finance, *Computational Finance*, Nov-Dec.
- [111] Farmer, J. e A. Lo 1999a. Frontiers of Finance: Evolution and Efficient Markets, *Proceedings of the National Academy of Science*, 96, NAS, Washington, D.C., 9991-9992.
- [112] Farmer, J. e S. Joshi, 1999b. Evolution and Efficiency in a Simple Technical Trading Model, *SFI Working Paper 99-10-071*, Santa Fe Intitute.
- [113] Feldstein, M., 1969. Mean Variance Analysis in the Theory of Liquidity Preference and Portfolio Selection, *Review of Economic Studies*, 5-12.
- [114] Fernandes, M., 2001. Nonparametric Entropy-Based of Independence Between Stochastic Processes, *Working Paper*, <http://www2.fgv.br/professor/mfernad>

- [115] Fernholz, R., 1999. On the Diversity of Equity Markets, *Journal of Mathematical Economics*, 31, 3, 393-417.
- [116] Ferreira, N., R. Menezes e D. A. Mendes, 2003. Testing for Cointegration of the Portuguese Stock Market in the Context of Europe and US, *Proceedings of the 21st International Conference Mathematical Methods in Economics (MME 2003)*, Czech University of Agriculture, Prague, 67-74.
- [117] Fieldman, D., 1998. *A Brief Introduction to: Information Theory, Excess Entropy and Computational Mechanics* (University of California).
- [118] Finkelstein, M. e R. Frieberg, 1967. The Application of an Entropy Theory of Concentration to the Clayton Act, *The Yale Law Journal*, 677-717.
- [119] Fonseca, R., 2000. *Anomalias de Calendário da Bolsa de Valores de Lisboa e Porto*. Tese de Mestrado, ISCTE.
- [120] Gama, P., 2000. A Eficiência Fraca do Mercado Accionista em Portugal: Evidência do Teste de Rácios de Variância e da Investigação da Regularidade de Calendário – 1989 a 1996, *Estudos de Gestão de Empresas*, Vol. II, Vida Económica.
- [121] Garcia, R. e E. Ghysels, 1998. Structural Change and Asset Pricing in Emerging Markets, *Journal of International Money and Finance*, 17, 455-473.
- [122] Garner, W. e W. McGill, 1956. The Relation Between Information and Variance Analysis, *Psychometrica*, 219-228.
- [123] Georgescu-Roegen, N. 1971. *Entropy Law and the Economic Process* (Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts).
- [124] Geske, R. e R. Roll, 1983. The Fiscal and Monetary Linkage Between Stock Returns and Inflation, *Journal of Finance*, 38, 1, 1-33.
- [125] Gjerde, O. e F. Saettem, 1999. Casual Relationships among Stock Returns and Macroeconomic Variables in a Small, Open Economy, *Journal of International Financial Markets*, 9, 61-74.
- [126] Godinho, P., 1999. *A Distribuição e a Dependência Temporal de Taxas de Rentabilidade* (Associação da Bolsa de Derivados do Porto).
- [127] Golan, A., G. Judge e D. Miller, 1997. The Maximum Entropy Approach to Estimation and Inference: an Overview, em Thomas B. Fomby e R. Carter Hill ed.: *Advances in Econometrics: Applying Maximum Entropy to Econometric Problems*, Vol. 12 (Jai Press Inc., London).
- [128] Golan, A., 2002. Information and Entropy Econometrics - Editor's View, *Journal of Econometrics*, 107, 1-15.
- [129] Gonçalves, P., 1997. *A Eficiência do Mercado Accionista em Portugal: um Teste à Eficiência Fraca na Bolsa de Valores de Lisboa*, Tese de Mestrado, ISEGI, Universidade de Lisboa.

- [130] Granger, C. e J. Lin, 1994. Using the Mutual Information Coefficient to Identify Lags in Nonlinear Models, *Journal of Time Series Analysis*, 15, 4, 371-384.
- [131] Granger, C. e E. Maasoumi, 2000. A Dependence Metric for Nonlinear Time Series, *Proceedings of the Econometric Society World Congress*, Seattle.
- [132] Granger, C. e O. Morgenstein, 1964. Spectral Analysis of New York Stock Market Prices, em P. Cootner ed.: *The Random Character of Stock Prices* (MIT Press, Cambridge, originalmente publicado em 1963).
- [133] Granger, C., E. Maasoumi e J. Racine, 2004. A Dependence Metric for Possibly Nonlinear Processes, *Journal of Time Series Analysis*, 25, 5, 649-669.
- [134] Grassberger, P. e Proccacia, I. 1983. Characterization of Strange Attractors, *Physics Rev. Lett.* 50, 346-349.
- [135] Grauer, R., 2001. Asset Pricing Theory and Tests, *Working Paper*, http://www.bus.sfu.ca/homes/Rob_G.html
- [136] Gulko, B. 1998. *The Entropy Pricing Theory – Market Beliefs, Valuation, Incomplete Markets, Asset Pricing*, PhD dissertation, UMI – Dissertations Services.
- [137] Hamori, S., 1997. Risk Premiums and Conditional Covariances in Testys of Asset Pricing Models: Some evidence from Japan, *Japan and the World Economy*, 9, 413-430.
- [138] Haugen, R. e N. Baker, 1996. Commonality in the Determinants of Expected Stock Returns, *Journal of Financial Economics*, 41, 401-439.
- [139] Hess, P. e B. Lee, 1999. Stock Returns and Inflation with Supply and Demand Distrurbances, *Review of Financial Studies*, 12, 5, 1203-1218.
- [140] Hicks, J., 1962. Liquidity, *The Economic Journal*, 787.
- [141] Hodrick, R., 1992. Dividend Yields and Expected Stock Returns: Alternative Procedures for Inference and Measurement, *Review of Financial Studies*, 5, 3, 357-386.
- [142] Holm, J., 1993. Maximum Entropy in Lorenz Curves, *Journal of Econometrics*, 59, 377-389.
- [143] Horowitz, A. e H. Horowitz, 1968. Entropy, Markov Processes and Competition in the Brewing Industry, *Journal of Industrial Economics*, 196-211.
- [144] Hsieh, D., 1989. Testing for Nonlinear Dependence in Foreign Exchange Rates: 1974-1983, *Journal of Business*, 62, 339-368.
- [145] Hsieh, D., 1991. Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to the Financial Markets, *Journal of Finance*, 46, 1839-1877.
- [146] Hsieh, D., 1993. Implications of Nonlinear Dynamics for Financial Risk Management, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, 41-64.
- [147] Hsieh, D., 1995. Nonlinear Dynamics in Financial Markets: Evidence and Implications, *Financial Analyst Journal*, 51, 55-62.

- [148] Hsu, D., 1982. A Bayesian Robust Detection of Shift in the Risk Structure of Stock Market Returns, *Journal of The American Statistical Association*, 29-39.
- [149] Hughes, W., 1995. Valuing Information in Decision Making under Uncertainty, *Australian Journal of Management*, 20, 105.
- [150] Ilinski, K., 2001. *Physics of Finance* (John Wiley & Sons, New York).
- [151] Isidro, H., 1998. O Preço dos Títulos Cotados na BVL e o Anúncio dos Resultados Contabilísticos, *Revista de Mercados e Activos Financeiros*, 1, 2, 69-85.
- [152] James, C., S.Koreisha e M. Partch, 1985. A VARMA Analysis of the Casual Relations Among Stock Returns, Real Output, and Nominal Interest Rates, *Journal of Finance*, 40, 5, 1375-1384.
- [153] James, J., 1999. Modelling the Money Markets, *Physics World*, Sep.
- [154] Jegadeesh, N., 1990. Seasonality in Stock Price Mean Reversion: Evidence From the U.S. and the U.K., *Working Paper*, University of California at Los Angeles.
- [155] Johansen, S., 1988. Statistical Analysis of Cointegration Vectors, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, June/September, 231-254.
- [156] Johansen, S. e K. Juselius, 1990. Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration-with Applications to the Demand for Money, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52, May, 169-210.
- [157] Jones, C. e G. Kaul, 1996. Oil and Stock Markets, *Journal of Finance*, 51, 463-491.
- [158] Karamustafa, O. e Y. Kucukkale, 2003. Long Run Relationships Between Stock Market Returns and macroeconomics performance: Evidence from Turkey, *Working Paper 000221 Econ-WPA*, <http://lists.repec.org/pipermail/nep-cfn/2003-September/000221.html>
- [159] Keizai, J., 2001. Information Processing in Economy, *Working Paper*, <http://turnbull.sk.tsukuba.ac.jp/Kyouiku/johoKeizai/InfoEcon-2.html>
- [160] Kendall, M., 1953. The Analysis of Economic Time-Series, *Journal of The Royal Statistical Society*, 116, 11-25.
- [161] Keynes, J., 1937. Alternative Theories of the Rate of Interest, *Economic Journal*.
- [162] Kim, M., C. Nelson e R. Startz, 1989. Mean Reversion in Stock Prices? A Reappraisal of the Empirical Evidence, *Working Paper*, University of Washington.
- [163] Klan, P. e G. Darbellay, 1997. An Information-Theoretic Adaptive Method for Time Series Forecasting, *Neural Network*, 2, 227-238.
- [164] Knight, F., 1921. *Risk, Uncertainty, and Profit*, em Hart Schaffner e Marx, Boston ed.: *Houghton Mifflin Company* (The Riverside Press, Cambridge).
- [165] Kon, S., 1984. Model of Stock Returns: a Comparison, *The Journal of Finance*, 39, 147-165.

- [166] Kraskov, A., H. Stögbauer e P. Grassberger, 2003. Estimating Mutual Information, preprint <http://www.arxiv:cond-mat/0305641>.
- [167] Kraskov, A., H. Stögbauer, R. Andrzejak e P. Grassberger, 2004. Hierarchical Clustering Based on Mutual Information, preprint <http://www.arxiv:q-bio.QM/0311039>.
- [168] Kullback, S., 1968. *Information Theory and Statistics* (Dover, New York).
- [169] Laffont, J., 1990. *The Economics of Uncertainty and Information* (MIT Press Cambridge, Massachusetts).
- [170] Laloux, L., M. Potters, R. Cont, J. Aguillar e J.P. Bouchaud, 1999. Are Financial Crashes Predictable?, *Europhysics Letters*, 45, 1, 1-5.
- [171] Lawrence, D., 1999. *The Economic Value of Information* (Springer, New York).
- [172] Lee, B-S., 1992. Casual Relations Among Stock Returns, Interest Rates, Real Activity, and Inflation, *Journal of Finance*, 47, 4, 1591-1603.
- [173] Lee, B-S., 1995. The Response of the Stock Prices to Permanent and Temporary Shocks to Dividends, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30, 1, 1-21.
- [174] LeRoy, S. e R. Porter, 1981. The Present-Value Relation: Tests Based on Implied Variance Bounds, *Econometrica*, 49, 555-574.
- [175] Liesenfeld, R. e R. Jung, 2000. Stochastic Volatility Models: Conditional Normality *versus* Heavy-Tailed Distributions, *Journal of Applied Econometrics*, 15, 2, 137-160.
- [176] Lillo, F. e R. Mantegna, 2004. Dynamics of Financial Market Index after a Crash, *Physica A* (a publicar).
- [177] Lintner, J. 1965. Security Prices, Risk and Maximal Gain From Diversification, *Journal of Finance*, 587 – 615.
- [178] Lo, A. e C. MacKinlay, 1988. Stock Market Prices do Not Follow Random Walks: Evidence From a Simple Specification Test, *Review of Financial Studies*, 1, 41-66.
- [179] London, M.D., A. K. Evans e M.J. Turner, 2001. Conditional Entropy and Randomness in Financial Time Series, *Quantitative Finance*, 1, 414-426.
- [180] Maasoumi, E., 1993. A Compendium to Information Theory in Economics and Econometrics, *Econometric Reviews*, 12, 2, 137-181.
- [181] Maasoumi, E. e J. Racine, 2002. Entropy and Predictability of Stock Market Returns, *Journal of Econometrics*, 107, 291-312.
- [182] Maasoumi, E. e J. Racine, 2003 A Robust Entropy-Based Test for Asymmetry, *Working Paper SMU*, http://faculty.smu.edu/maasoumi/pdf%20Files/ent_sym.pdf
- [183] MacKinlay, A., 1995. Multifactor Models do not Explain Deviations from the CAPM, *Journal of Financial Economics*, 38, 3-28.

- [184] Mandelbrot, B., 1964. The Variation of Certain Speculative Prices, em P. Cootner ed.: *The Random Character of Stock Prices* (Cambridge, MIT Press, originalmente publicado em 1963).
- [185] Mantegna, R. e E. Stanley, 1995. Scaling Behavior in the Dynamics of Economic Index, *Nature*, 376, 46-49.
- [186] Mantegna, R., Z. Palágyi e E. Stanley, 1999. Applications of Statistical Mechanics to Finance, *Physica A*, 274, 216-221.
- [187] Mantegna, R. e E. Stanley, 2000. *Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK).
- [188] Markowitz, H., 1952. Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 77-91.
- [189] Markowitz, H., 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments* (John Wiley & Sons, New York).
- [190] Marques, C., 1998. *Modelos Dinâmicos, Raízes Unitárias e Cointegração* (Edições da Universidade Nova de Lisboa, Edinova, Lisboa).
- [191] Martinez, M. e G. Rubio, 1989. Arbitrage Pricing with Macroeconomic Variables: An Empirical Investigation using Spanish Data, *Working Paper*, Universidad del País Vasco.
- [192] Masoliver, J., M. Montero e J. Porrá, 2000. A Dynamical Model Describing Stock Markets Price Distributions, *Physica A*, 283, 559-567.
- [193] Masoliver, J., M. Montero, e J. Perelló, 2002. Return or Stock Price Differences, *Physica A*, 316, 539-560.
- [194] McCauley, J., 2003. Thermodynamic Analogies in Economics and Finance: Instability of Markets, *Physica A*, 329, 199-212.
- [195] McCauley, J., 2004. *Dynamics of Markets: Econophysics and Finance* (Cambridge Univ. Press, Cambridge).
- [196] McLeod, A. e W. Li, 1983. Diagnostic Checking ARMA Time Series Models using Squared-Residual Autocorrelations, *Journal of Time Series Analysis*, 4, 269-273.
- [197] McQueen, G. e V. Roley, 1993. Stock Prices, News and Business Conditions, *Review of Financial Studies*, 6, 3, 683-707.
- [198] Mendes, D. A. e T. M. Isfan, 2003. Caos e Ruído na Bolsa de Valores de Lisboa, em Elizabeth Reis e Manuela Magalhães Hill ed.: *Temas em Métodos Quantitativos* (Edições Sílabo, Lisboa).
- [199] Merton, R., 1976. Option Price When Underlying Stock Returns are Discontinuous, *Journal of Financial Economics*, 3, 125-144.
- [200] Moddemeijer, R., 1989. On Estimation of Entropy and Mutual Information of Continuous Distributions, *Signal Processing*, 16, 233-248.

- [201] Moddemeijer, R., 1999. A Statistic to Estimate the Variance of the Histogram-Based Mutual Information Estimator on Dependent Pairs of Observations, *Signal Processing*, 75, 51-63.
- [202] Molgedey, L. e W. Ebeling, 2000. Local Order, Entropy and Predictability of Financial Time Series, *European Physics Journal B*, 15, 733-737.
- [203] Moore, A. 1964. Some Characteristics of Changes in Common Stock Prices, em P. Cootner ed.: *The Random Character of Stock Prices* (MIT Press, Cambridge).
- [204] Nawrocky, D., 1976. *Stock Market Equilibrium, Conditional Entropy and Adaptive Trading Rules*, PhD Dissertation, UMI – Dissertations Services.
- [205] Neves, J. C., 2002. *Avaliação de Empresas e Negócios - Fundamentos, Técnicas e Aplicações* (McGraw Hill, Lisboa).
- [206] Niarchos, N. e C. Alexakis, 1998. Stock Market Prices, “Causality” and Efficiency: Evidence from the Athens Stock Exchange, *Applied Financial Economics*, 8, 167-174.
- [207] Omran, M., 1997. Nonlinear Dependence and Conditional Heterocedasticity in Stock Returns: UK Evidence, *Applied Economic Letters*, 4, 10, 647-650.
- [208] Osborne, M., 1964. Brownian Motion in the Stock Prices, em P. Cootner ed.: *The Random Character of Stock Prices* (MIT Press, Cambridge, originalmente publicado em 1959).
- [209] Pacheco, L., 1999. *O Estado da Arte em Política de Dividendos* (Associação da Bolsa de Derivados do Porto, Porto).
- [210] Paninski, L., 2003. Estimation of Entropy and Mutual Information, *Neural Computation*, 15, 1191-1253.
- [211] Peiró, A., 2004. Asymmetries and Tails in Stock Index Returns: Are Their Distributions Really Asymmetric?, *Quantitative Finance*, 4, 37-44.
- [212] Peixoto, J. P., 1984. *Entropia e ainda Entropia* (Universidade do Algarve).
- [213] Perez, A., 1957. Notion Généralisées d’Incertitude, d’Entropie et d’Information du Point de Vue de la Théorie des Martingales, *Transactions of the 1st Prague Conference in Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes*, 183-208.
- [214] Pesaran, M. e A. Timmermann, 1995. Predictability of Stock Returns: Robustness and Economic Significance, *Journal of Finance*, 50, 4, 1201-1228.
- [215] Peters, E., 1996. *Chaos and Order in the Capital Markets* (Wiley Finance, 2.^a edição, New York).
- [216] Petrucci, J. e N. Davies, 1986. A Portmanteau Test for Self- Exciting Threshold Autoregressive-Type Nonlinearity in Time Series, *Biometrika*, 73, 687-694
- [217] Petz, D., 2001. Entropy, von Neumann and the von Neumann Entropy, em M. Rédei and M. Stöltzner ed.: *John von Neumann and the Foundations of Quantum Physics* (Kluwer).

- [218] Philippatos, G. e C. Wilson, 1972. Entropy, Market Risk and the Selection of Efficient Portfolios, *Applied Economics*, 4, 209-220.
- [219] Philippatos, G. e C. Wilson, 1974. Entropy, Market Risk, and the Selection of Efficient Portfolios: Reply, *Applied Economics*, 6, 77-81.
- [220] Pires, C., 2005. *Mercados e Produtos Financeiros*, a publicar (Escolar Editora, Lisboa).
- [221] Pompe, B. 1998. Ranking Entropy Estimation in NonLinear Time Series Ananlysis, em Kantz, H., Kurths, J. e Mayer-Kress, G. ed.: *NonLinear Analysis of Physiological Data* (Springer, Berlin).
- [222] Poon, S. e S. Taylor, 1991. Macroeconomic Factors and the U.K. Stock Market, *Journal of Business, Finance and Accounting*, 19, 619-636.
- [223] Pöschel, T., W. Ebeling e H. Rosé, 1995. Guessing Probability Distributions from Smal Samples, *Journal of Statistic Physics*, 80, 1443-1452.
- [224] Poterba, J. e L. Summers, 1988. Mean Reversion in Stock Prices: Evidence and Implications, *Journal of Financial Economics*, 22, 27-59.
- [225] *Poupança Acções*, Boletim semanal, n.º1 a n.º139, (Edideco, Lisboa).
- [226] Pratt, J., 1958. Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica*, 122.
- [227] Qi, M., 1999. Nonlinear predictability of Stock Returns using Financial and Economic Variables, *Journal of Business and Economic Statistics*, 17, 4, 419-429.
- [228] Racine, J., 2001. On the Nonlinear Predictability of Stock Returns Using Financial and Economic Variables, *Journal of Business and Economic Statistics*, Jul, 19, 3, 380-382.
- [229] Racine, J. e E. Maasoumi, 2004. A Versatile and Robust Metric Entropy Test of Time Reversibility and Dependence, *Journal of Econometrics* (a publicar).
- [230] Raj, M. e D. Thurston, 1995. Predictive Ability of Earnings and Dividend Yields: An Empirical Evaluation of New Zealand Stocks, *Applied Financial Economics*, 5, 109-111.
- [231] Reesor, R. e D. McLeish, 2002. Risk, Entropy and the Transformations of Distributions, preprint in *Working Paper 2002-11*, Bank of Canada.
- [232] Reis, A H., 2001. *Textos de Física Estatística* (Universidade de Évora, documento não publicado).
- [233] *Relatório Anual 1996*, CMVM, 1996,
http://www.cmvm.pt/legislacao_e_publicacoes/publicacoes/relatorios/index.asp.
- [234] *Relatório Anual 1997*, CMVM, 1997,
http://www.cmvm.pt/legislacao_e_publicacoes/publicacoes/relatorios/index.asp.
- [235] *Relatório Anual 1998*, CMVM, 1998,
http://www.cmvm.pt/legislacao_e_publicacoes/publicacoes/relatorios/index.asp..

- [236] *Relatório Anual 1999*, CMVM, 1999,
http://www.cmvm.pt/legislacao_e_publicacoes/publicacoes/relatorios/index.asp.
- [237] *Relatório Anual 2000*, CMVM, 2000,
http://www.cmvm.pt/legislacao_e_publicacoes/publicacoes/relatorios/index.asp.
- [238] *Relatório Anual 2001*, CMVM, 2001,
http://www.cmvm.pt/legislacao_e_publicacoes/publicacoes/relatorios/index.asp.
- [239] *Relatório Anual 2002*, CMVM, 2002,
http://www.cmvm.pt/legislacao_e_publicacoes/publicacoes/relatorios/index.asp.
- [240] *Relatório de Gestão e Contas Consolidadas da BVLP*, 1999, BVLP, Lisboa.
- [241] *Relatório de Gestão e Contas Consolidadas da BVLP*, 2000, BVLP, Lisboa.
- [242] *Relatório de Gestão e Contas Consolidadas da BVLP*, 2001, BVLP, Lisboa.
- [243] *Relatório de Gestão e Contas Consolidadas da BVLP*, 2002, BVLP, Lisboa.
- [244] Roberts, H., 1959. Stock-Market “Patterns” and Financial Analysis: Methodological Suggestions, *Journal of Finance*, 14, 1, 1-10.
- [245] Rockinger, M e E. Jondeau, 2002. Entropy densities with an application to an autoregressive conditional skewness and kurtosis, *Journal of Econometrics*, 106, 1, 119-142.
- [246] Roll, R., 1977. A Critique of the Asset Pricing Theory’s Tests, *Journal of Financial Economics*, 4, 2, 129-176.
- [247] Roll, R. e S. Ross, 1980. An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory, *Journal of Finance*, 35, 5, 1073-1103.
- [248] Romacho, J., 2004. *Selectividade e Timing na Avaliação do Desempenho de Fundos de Investimento Mobiliário em Portugal*, Editora Almedina.
- [249] Rosenstein, M., J. Collins e C. De Luca, 1993. A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets, *Physica D*, 65, 117-134.
- [250] Ross, S., 1976. The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, *Journal of Economic Theory*, 13, 3, December, 341-360.
- [251] Samperi, D. 1998. *Inverse Problems, Model selection and Entropy in Derivative Security Pricing*, PhD Dissertation, UMI – Dissertations Services.
- [252] Samperi, D., 1999. Entropy and Statistical Model Selection for Asset Pricing and Risk Management, *Working Paper SSRN*, <http://papers.ssrn.com>
- [253] Samuelson, P., 1965. Rational Theory of Warrant Pricing, *Industrial Management Review*, 6, 2, 13-39.

- [254] Scalas, E., 2005. Five Years of Continuous-Time Random Walks in Econophysics, *Working Paper 051261 cond-mat*, <http://xxx.lanl.gov/cond-mat/0501261>
- [255] Schwert, G. W., 1981. The Adjustment of Stock Prices to Information about Inflation, *Journal of Finance*, 36, 15-29.
- [256] Schwert, G. W., 1990. Stock Returns and Real Activity: a Century of Evidence, *Journal of Finance*, 45, 1237-1257.
- [257] Shanken, J., 1987. Multivariate Proxies and Asset Pricing Relations, *Journal of Financial Economics*, 18, 91-110.
- [258] Shannon, C. E., 1948. A Mathematical Theory of Communication, *Bell Systems Tech.*, 27: 379-423, 623-656.
- [259] Shannon, C. E. e W. Weaver, 1964. *The Mathematical Theory of Communication* (The University of Illinois Press, Urbana).
- [260] Shapiro, M., 1988. The Stabilization of the U.S. Economy: Evidence from the Stock Market, *American Economic Review*, 78, 1067-1079.
- [261] Sharpe, W., 1964. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, *Journal of Finance*, 19, 425-442.
- [262] Sharpe, W., 1970. *Portfolio Theory and Capital Markets* (McGraw-Hill).
- [263] Sharpe, W., 1984. Factor Models, CAPM's and the APT, *Journal of Portfolio Management*, 11, 1, 21-25.
- [264] Sharpe, W., G. Alexander e J. Bailey, 1999. *Investments*, 6.^a edição (Prentice Hall International, UK).
- [265] Shiller, R., 1981. Do Stock Prices Move too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends?, *American Economic Review*, 71, 421-436.
- [266] Shiller, R., 1989. Market Volatility, Santa Fe Inst. *Working Paper 98-12-117*, SFI, Santa Fe, N. M., MIT Press, Cambridge, Mass.
- [267] Shiller, R., 2000. *Irrational Exuberance* (Princeton University Press, New Jersey).
- [268] Simão, J., 1998. *Um Teste à Eficácia de Regras de Transacção Aplicadas a Títulos da B.V.L.*, Tese de Mestrado, ISEGI, Universidade de Lisboa.
- [269] Soares, J., J. Assis Lopes e C. Monteiro, 1992. Estudo da Eficiência na Bolsa de Valores de Lisboa: Ciclicidade e Regras de Compra, *Investigação Operacional*, 12, 2, 119-128.
- [270] Soares, J., 1994. *Preços de Acções na Bolsa de Lisboa: Análise, Previsão e Regras de Compra e Venda*, Tese de Doutoramento, IST, Lisboa.
- [271] Soares, V., 1997. *A (IN) Eficiência dos Mercados Bolsistas de Acções – O estudo do caso português* (Vida Económica, Porto).

- [272] Soofi, E., 1997. Information Theoretic Regression Methods, Fomby, T. e R. Carter Hill ed: *Advances in Econometrics - Applying Maximum Entropy to Econometric Problems*, vol. 12 (Jai Press Inc., Londres).
- [273] Soofi, E. e J. Retzer, 2002. Information Indices: Unification and Applications, *Journal of Econometrics*, 107, 17-40.
- [274] Sornette, D., 2002. Predictability of Catastrophic Events: Material Rupture, Earthquakes, Turbulence, Financial Crashes and Human Birth, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, USA, 19, 2522-2529.
- [275] Sornette, D., A. Johansen e J.P. Bouchaud, 1996. Stock Market Crashes, Precursors and Replicas, preprint in <http://www.cond-mat/9510036>
- [276] Sornette, D., P. Simonetti e J.V. Andersen, 1999. Field Theory for Portfolio Optimization: "Fat Tails" and Nonlinear Correlations, preprint in <http://xxx.lanl.gov/cond-mat/9903203>
- [277] Sousa Câmara, A., 1991. A Ineficiência do Mercado-Carteira de Acções na Prática, *O Investidor Económico*, 21, 4-10.
- [278] Stanley, E., L. Amaral, X. Gabaix, P. Gopikrishnan e V. Pleurou, 2001. Similarities and Differences Between Physics and Economics, *Physica A*, 299, 1-15.
- [279] Stengos, T., 1995. Nonparametric Forecasts of Gold rate of Return, Barnett, A. e M. Salmon ed: *Nonlinear Dynamics in Economics* (Cambridge University Press).
- [280] Stutzer, M., 1995. A Bayesian Approach to Diagnosis of Asset Pricing Models, *Journal of Econometrics*, 68, 367-397.
- [281] Stutzer, M., 1996. A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation, *Journal of Finance*, 51, 5, 1633-1652.
- [282] Stutzer, M., 1998. A Portfolio Index and its Implications, *Working Paper SSRN*, <http://papers.ssrn.com>,
- [283] Stutzer, M., 2000. A Simple Entropic Derivation of a Generalized Black-Sholes Option Pricing Model, *Entropy*, 2, 70-77.
- [284] Takens, F., 1981. Detecting Strange Attractors in Turbulence, Rand, D. e L. Young ed: *Dynamical Systems and Turbulence* (Springer-Verlag).
- [285] Tambakis, D., 2000. On the Informational Content of Asset Prices, *Working Paper Society for Computational Economics*, <http://ideas.repec.org/p/sce/scecf0/101.html>
- [286] Tavares, L., R. Oliveira, I. Themido e F. Correia, 1996. *Investigação Operacional* (McGraw-Hill, Lisboa).
- [287] Timmermann, A. e C. Granger, 2004. Efficient Market Hypothesis and Forecasting, *International Journal of Forecasting*, 20, 15-27.
- [288] Tobin, J., 1958. Liquidity Preferences as Behavior Towards Risk, *Review of Economics Studies*, 65-86.

- [289] Tosta de Sá, G., 1987. *Mercado de Ações e Bolsas de Valores* (Edições Correio da Manhã, Lisboa).
- [290] Tsay, R. 1986. Nonlinearity Tests for Time Series, *Biometrika*, 73, 461-466.
- [291] Tucker, A., 1992. A Re-examination of Finite and Infinite Variance Distributions as Model of Daily Stock Returns, *Journal of Business e Economic Statistics*, 10, 73-81.
- [292] Ullah, A., 2002. Uses of Entropy and Divergence Measures for Evaluating Econometric Approximations and Inference, *Journal of Econometrics*, 107, 313-326.
- [293] Urbach, R. 2000. *Footprints of Chaos in the Markets - Analysing non-linear time series in financial markets and other real systems* (Prentice Hall, London).
- [294] Verdugo Lazo, A e P. Rathie, 1978. On the Entropy of Continuous Probability Distributions, *IEEE Transactions on Information Theory*, 120-122.
- [295] Vetschera, R., 2000. Entropy and the Value of Information, *Central European Journal of Operations Research*, 8, 195-208.
- [296] Voit, J. ,2001. *The Statistical Mechanics of Financial Markets* (Springer, New York).
- [297] Wang, Q., Y. Shen e J. Q. Zhang 2005. A Nonlinear Correlation Measure for Multivariate Data Set, *Physica D*, 200, 287-295.
- [298] Wolf A., J.B. Swift, H.L. Swinney e L.A. Vastano 1985. Determining Lyapunov Exponents from a Time Series, *Physica D*, 16, 285-317.
- [299] Working, H., 1960. Note on the Correlation of First Differences of Averages in a Random Chain, *Econometrica*, 28, 4, 916-918.
- [300] Yamano, T., 2001. A Possible Extension of Shannon's Information Theory, *Entropy 2001*, 3, 280-292.
- [301] Zellner, A., 1996. Models, Prior Information and Bayesian Analysis, *Journal of Econometrics*, 75, 51-68.
- [302] Zellner, A., 2002. Information Processing and Bayesian Analysis, *Journal of Econometrics*, 107, 41-50.
- [303] Zhang, Y., 1998. Evolving Models of Financial Markets, *Europhysics News*, March/April.

Bibliografia não citada

- [304] Alligood, K., T. Sauer e J. Yorke, 1996. *Chaos - An introduction to Dynamical Systems*, (Springer-Verlag, New York).

- [305] Banerjee, A., J. Dolado e D. Hendry, 1993. *Co-integration, Error Estimation and the Econometric Analysis of Non-Stationary Data* (Oxford University Press, Oxford).
- [306] Barata, J., 1993. *Moeda e Mercados Financeiros* (Instituto Superior de Economia e Gestão).
- [307] Beghi, A., 1996. On the entropy of discrete-time Markov processes with given end-point densities, *IEEE Transactions on Information Theory*, 42, 5, 1529.
- [308] Black, F. e M. Scholes, 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, May/June.
- [309] Chan, L., J. Karceski e J. Lakonishok, 1998. The Risk and Return From Factors, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, 2.
- [310] Clarkson, P., J. Guedes e R. Thompson, 1996. On the Diversification, Observability and Measurement of Estimation Risk, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31, 1.
- [311] Coles, J., U. Loewenstein e J. Suay, 1995. On Equilibrium Pricing under Parameter Uncertainty, *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 30, 3.
- [312] Davis, J., E. Fama e K. French, 2000. Characteristics, Covariances and Average Returns: 1929 to 1997, *Journal of Finance*, 55, 389-406.
- [313] Ding, Z., C. Granger e R. Engle, 1993. A Long Memory Property of Stock Returns and a New Model, *J. Empirical Finance*, 1, 83.
- [314] Ederington, L. e H. Lee, 1996. The Creation and Resolution of Market Uncertainty: The Impact of Information Releases on Implied-Volatility, *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 31, 4.
- [315] Eeckhoudt, L. e C. Gollier, 1995. *Risk - Evaluation, Management and Sharing* (Harvester Wheat Sheaf).
- [316] Engle, R. e C. Granger, 1987. Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing, *Econometrics*, 55, 251-276.
- [317] Fabian, Z., 1997. Information and Entropy of Continuous Random Variables, *IEEE Transactions on Information Theory*, 43, 3, 1080.
- [318] Garcia, M., 1992. *Eficiência do Mercado de Capitais*, Tese de Mestrado, Lisboa, ISEG.
- [319] Granger, C. e T. Teräsvirta, 1993. *Modelling Nonlinear Economic Relationships* (Oxford University Press, Oxford).
- [320] Gray, R., 1990. *Entropy and Information Theory* (Springer, New York).
- [321] Greene, W., 2000. *Econometric Analysis* 4th Edition (Prentice Hall International, New York).
- [322] Guerrero-Cusumano, J., 1996. A Measure of Variability for the Multivariate t Distribution with Applications to Finance, *Information Sciences*, 1-4, 47.

- [323] Guerrero-Cusumano, J., 1995. The entropy of the multivariate poisson: An approximation, *Information Sciences*, 86, 1-3, 1-17.
- [324] Haugen, R. 1995. *The New Finance: The Case Against Efficient Markets* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey).
- [325] Janzura, M. e T. Koski, 1996. Minimum Entropy of Error Estimation for Discrete Random Variables, *IEEE Transactions on Information Theory*, 42, 1193.
- [326] Johnston, J. e J. Dinardo, 2001. *Métodos Económicos 4.^a Edição* (McGraw-Hill, Lisboa).
- [327] Lintner, J., 1975. Inflation and Security Returns, *Journal of Finance*, 30, 259-280.
- [328] Markowitz, H.M., 1989. *Mean-Variance Analysis in Portfolio and Capital Markets* (Basil Black Well, Oxford).
- [329] Marques, M. e M. Freire, 1998. A Informação no Mercado de Capitais, *Cadernos do Mercado de Valores Mobiliários*, n.º 3, Lisboa.
- [330] Matos, F., 1993. *Ganhar em Bolsa: o Mercado de Acções* (Elcla Editora, Porto).
- [331] McGill, W.J., 1954. Multivariate Information Transmission, *Psychometrica*, 97-116.
- [332] Menezes, R., 1995. *Patterns of Post-Displacement Adjustment in the Labour Market : Evidence from a Longitudinal Redundancy Study*. Unpublished Ph.D Thesis. University of Keele: Department of Economics.
- [333] Merton, R., 1972. An Analytic Derivation of Derivation of the Efficient Portfolio Frontier, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7, 1851-1872.
- [334] Merton, R., 1973. An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, *Econometrica*, 41, 5, September, 867-888.
- [335] Mills, T., 1999. *The Econometric Modelling of Financial Time Series* 2nd edition (Cambridge University Press, UK).
- [336] Montrucchio, L. e G. Sorger, 1996. Topological Entropy of Policy Functions in Concave Dynamic Optimization Models, *Journal Economic Behavior and Organization*, 33, 421-434.
- [337] Mota, A e J. Tomé, 1996. *Mercado de Títulos – Uma Abordagem Integrada* (Texto Editora, Lisboa).
- [338] Pearce, D. e V. Roley, 1985. Stock Prices and Economic News, *Journal of Business*, 58, 49-67.
- [339] Peters, M. A e P. Iglesias, 1999. The Relationship Between Minimum Entropy and Control and Risk-Sensitive Control for Time Varying, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44, 5, 1065.
- [340] Peters, T., 1988. *Thriving on Chaos: Handbook of a Management Revolution* (McMillan, London).

- [341] Scheinkman, J. e B. LeBaron, 1989. Nonlinear Dynamics and Stock Returns, *Journal Business*, 62, 311-338.
- [342] Sharpe, W., 1963. A Simplified Model for Portfolio Analysis, *Management Science*, 277-293.
- [343] Sharpe, W., 1999. *Investments* 6th Edition (Prentice-Hall International Editions, New Jersey).
- [344] Silverman, B., 1986. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis* (Chapman and Hall).
- [345] Theil, H., 1967. *Economics and Information Theory* (Rand McNally, Chicago).
- [346] Theiler, J., 1992. Testing for Nonlinearity in Time Series: The Method of Surrogate Data, *Physica D*, 58, 77-94.
- [347] Varian, H., 1990. *Intermediate Microeconomics – A Modern Approach* 2nd Edition (Norton International Student Edition, London).
- [348] White, D., 1969. *Decision Theory* (Aldine Publishing Company, Chicago).
- [349] White, D., 1972. Entropy, Market Risk, and the Selection of Efficient Portfolios: Comment, *Applied Economics*, 6, 73-75.
- [350] Zhang, Z. e R. Yeung, 1998. On Characterization of Entropy Function via Information, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44, 4, 1440.