Universidade de Évora

A utilização da calculadora gráfica na aula de Matemática: um estudo com alunos do 12º ano no âmbito das Funções

Maria João Pinto Paulo Semião

Orientadora: Prof. Doutora Ana Paula Canavarro

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Educação e na especialidade de Educação Matemática

2007

"A grandeza de um ideal não está em atingi-lo,
mas em lutar por ele".

Juan José Medina

"Se podemos sonhar, também podemos tornar
os nossos sonhos realidade".

Walt Disney

Às minhas Princesas:

Sara e Cláudia

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Paula Canavarro, pela permanente disponibilidade manifestada no acompanhamento, pelo valor das suas sugestões e opiniões e pelas palavras de incentivo e carinho que sempre pronunciou.

Ao professor de Matemática dos alunos envolvidos nesta investigação, pela disponibilidade que manifestou em colaborar.

Ao Francisco, à Lúcia e à Jacinta, pela amabilidade e disponibilidade que manifestaram ao participarem nesta investigação.

Aos meus familiares, amigos e colegas pelo incentivo que me deram.

Ao meu marido, Francisco Semião, pelo amor e carinho manifestado, pelo constante apoio e incentivo e pelo facto de, mais uma vez, estar ao meu lado no momento em que concluo mais uma etapa da minha vida.

Resumo

O uso da calculadora gráfica é considerado indispensável no currículo de Matemática do ensino secundário. É impossível atingir os objectivos e competências gerais desse currículo sem recorrer à dimensão gráfica. Nesse contexto, a utilização da calculadora gráfica na sala de aula de Matemática surge como problemática pertinente de investigação.

Assim, o objectivo principal deste estudo é compreender em que situações, porquê e como é que os alunos utilizam a calculadora gráfica na resolução de questões no âmbito do estudo de Funções no 12º ano de escolaridade.

Para tal pretendeu-se obter resposta para as seguintes questões:

- Que relação estabelecem os alunos com a calculadora gráfica?
- Que razões levam os alunos a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica na resolução de uma questão?
- Que papel reservam os alunos à calculadora gráfica na resolução de uma questão?

A natureza das questões envolvidas levou à adopção de uma metodologia de natureza qualitativa e à opção pela realização de estudos de caso, envolvendo três alunos de uma turma do 12º ano de escolaridade.

Na recolha de dados foram utilizadas três técnicas: observações directas, entrevistas e análise documental. A análise de dados foi posteriormente efectuada, analisando, para cada aluno, os diferentes elementos recolhidos.

As conclusões obtidas indicam que, de um modo geral, os alunos utilizam preferencialmente a calculadora gráfica quando existe uma indicação exterior para o fazerem (pelo professor ou pelos próprios enunciados das questões), tendendo a recorrer pouco a ela em outras situações. Reservam essencialmente à calculadora o papel de confirmação dos resultados obtidos analiticamente, embora em alguns casos resolvam directamente as questões na calculadora. Um outro papel atribuído à calculadora foi o de alternativa à dificuldade de resolver analiticamente uma questão. Os alunos revelam dificuldades em estabelecer a ligação entre a representação analítica de uma função e a sua representação gráfica. Os alunos não revelam um grande domínio técnico da calculadora. O conhecimento da calculadora é oriundo das informações dadas pelos professores ao longo dos três anos do ensino secundário e de algumas informações dadas pelos colegas. Identificam-se alguns aspectos que influenciam a utilização da calculadora gráfica, nomeadamente as preferências pessoais dos alunos, mas sobretudo o tipo de questões que lhes são propostas e a cultura da sala de aula, em particular as mensagens transmitidas pelo professor e as abordagens às resoluções de exercícios que este privilegia.

Este estudo aponta para alguma interferência entre as questões colocadas no Exame Nacional e o tipo de utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica. Uma importante questão fica em aberto: Os exames nacionais favorecem a utilização da calculadora gráfica, tal como o currículo de Matemática recomenda?

Palavras-Chave: Matemática; Funções; utilização das calculadoras gráficas pelos alunos; tipo de questões; cultura da sala de aula; exames nacionais.

Abstract

The use of graphic calculator in the mathematics classroom: A study with 12th grade students learning Functions.

The use of graphical calculators is considered indispensable in the Mathematics curriculum of the high school level. It is impossible to achieve the aims and general competences of that curriculum without making use of the graphical dimension. In that context, knowing how graphic calculator is used in mathematics classroom become an important issue.

The main aim of this study is to understand in what situations, why and how pupils use the graphic calculator when solving mathematical tasks concerning Functions at the 12th grade. The following questions were formulated:

- What relation do students establish with the graphic calculator?
- Why do students use or do not use the graphic calculator in solving a question?
- Which role do students reserve to the graphic calculator when solving a question?

The nature of the questions took us to a qualitative methodology and to the option of making case studies, involving three students of a 12th grade class.

In the data gathering, three techniques were used: direct observations, interviews and documents analysis. The data analysis was made subsequently, analysing, for each pupil, the different gathered elements.

Conclusions of the study shows that, generally, students use the graphic calculator when exist an exterior order to do it (pointed by the teacher or by the question itself). They reserve to the calculator the role of confirming the results they previously have achieved analytically, though in some cases they solve the questions directly with the calculator. Another role calculators were given was to be an alternative to the difficulty of solving a question analytically. Pupils revealed difficulties in establishing connections between the analytical representation of a function and its graphical representation. Students revealed to have not a great technical control of the calculator. The knowledge they have of the calculator comes mainly from the information given by teachers in three years of high school studies. There are some aspects that influence the using of graphic calculator, as personal preferences of students, the format of the questions and classroom culture, namely the messages of the teacher and the approaches he values in the questions solutions.

This study points to some interference between the questions placed in the National Examination of Mathematics and the use pupils give to graphic calculators when studying maths. An Important question remains: Do national exams encourage the use of graphic calculator, as Mathematics curriculum recommends?

Key-words: Mathematics; Functions; graphic calculators use by students; type of questions; classroom culture; national exams.

ÍNDICE

Índice de matérias

Índice de figuras

Índice de quadros

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este capítulo pretende introduzir alguns aspectos essenciais que caracterizam a investigação que foi realizada. Inicialmente expõem-se algumas motivações decorrentes da prática da investigadora e que estão na origem deste trabalho. Em seguida apresenta-se um conjunto de ideias que se consideram importantes para contextualizar o estudo, sendo também equacionada a sua pertinência/relevância. Finalmente, explicita-se o objectivo principal do estudo e as questões que lhe estão associadas.

Motivações pessoais para a realização do estudo

Durante os treze anos lectivos (1993/2006) em que leccionei numa Escola Secundária com Terceiro Ciclo do Ensino Básico, sempre me foram atribuídas turmas do ensino secundário (e por vezes algumas do terceiro ciclo). Em algumas situações leccionei mais de que um ano a cada turma, garantindo a continuidade pedagógica.

Ao longo destes anos comecei a aperceber-me de que os alunos revelam algumas dificuldades no tema "Funções", nomeadamente na interpretação dos gráficos das funções, na sua relação com a expressão algébrica e na determinação de pontos notáveis de um gráfico; na compreensão das transformações e simetrias do gráfico de uma função; na resolução de problemas em contexto real que envolvem funções. Sendo este um tema de grande relevância em qualquer programa de Matemática e na vida prática das pessoas, essas dificuldades preocupavam-me.

Desde cedo comecei a utilizar a calculadora gráfica na abordagem deste tema e ficava bastante satisfeita com o encanto e entusiasmo dos alunos. Porém, com o decorrer dos anos, comecei a aperceber-me que havia determinados aspectos em que diferentes alunos apresentavam sempre dificuldades, nomeadamente na alteração dos valores da janela de visualização, na introdução de expressões com parênteses, na decisão sobre qual tecla utilizar, o que procurar na calculadora, como e quando recorrer a ela, que questões resolver com esta máquina.

Outro aspecto que me chamou ainda a atenção foi o facto de os alunos nem sempre conseguirem estabelecer a ligação entre o que obtinham analiticamente e o que obtinham através da calculadora gráfica, assim como em interpretarem determinados valores, fornecidos pela mesma, em determinados contextos.

Outro conflito sempre presente tem a ver com a constante insistência dos alunos em questionarem se, em situação de Exame Nacional, podem ou não utilizar a calculadora neste ou naquele contexto e o que é necessário justificar e transcrever para a folha de prova quando recorrem à calculadora gráfica.

Todos estes aspectos levaram-me a interrogar o ensino e a aprendizagem da Matemática e, mais especificamente, o papel da calculadora gráfica nessa aprendizagem. Ficou-me daí a curiosidade em compreender, de uma forma sistemática e sustentada, como é que os alunos utilizam a calculadora gráfica, porque é que a utilizam numas situações e noutras não e também como a usam, em particular ao estabelecerem a ligação entre as diferentes formas de representação de uma função.

Após a leitura de alguns artigos científicos apercebi-me que as minhas interrogações surgem também em investigações sobre o tema, numa altura em que se dão passos largos para a inclusão da calculadora gráfica nas orientações curriculares.

Contextualização do estudo

O aparecimento das calculadoras gráficas surgiu na década de 80 e desde aí têm tido um impacto crescente no ensino da Matemática em diferentes países. Este facto é confirmado a vários níveis: nos programas escolares, nos manuais escolares e na muita e variada literatura publicada neste domínio da Educação Matemática (NCTM, 2000; Rocha, 2000; DES, 2001a; DES, 2001b; DES, 2001c; Carvalho, 2006).

A preocupação com a tecnologia na Educação Matemática já surgia em alguns documentos como, por exemplo, no "Curriculum and evaluation standards for school Mathematics", publicado em 1989 pelo NCTM e traduzido em 1991 pela Associação de Professores de Matemática (APM). Segundo este documento, a tecnologia possibilitava uma aprendizagem da Matemática mais activa e dinâmica.

Posteriormente a importância da tecnologia volta a ser reforçada, nos "Principles and standards for school Mathematics" (NCTM, 2000), quando a mesma é considerada um elemento essencial para o ensino e aprendizagem da Matemática. De acordo com este documento, "os alunos podem aprender mais matemática e de uma forma mais profunda, com uma utilização adequada da tecnologia" (p.25).

As calculadoras gráficas, pela simplicidade e rapidez com que efectuam cálculos e gráficos, permitem libertar os alunos dessas tarefas deixando-os disponíveis para actividades mais enriquecedoras, dando lugar a uma aprendizagem da Matemática em que a ênfase é colocada na compreensão dos conceitos, na familiarização com múltiplas representações e nas ligações entre estas, na modelação matemática e na resolução de problemas. As calculadoras gráficas são pois instrumentos poderosos, que proporcionam oportunidades de aprendizagem dinâmicas e interactivas (NCTM, 2000).

Na investigação sobre a calculadora gráfica, algumas questões se colocam: Como está a ser utilizada a calculadora gráfica na sala de aula? Que papel reservam os alunos às calculadoras gráficas para a resolução das questões? Como estabelecem os alunos a ligação entre as diferentes representações de uma função? Será que a calculadora gráfica está a ser sobre-usada ou sub-usada?

Burril et al. (2002) referem que existem indícios de que as calculadoras são sobre-usadas ao ponto dos alunos confiarem nelas com pouca análise crítica dos resultados, mas também existem outros indícios que sugerem que a calculadora é sub-usada, em particular quando os alunos não têm a certeza sobre o modo de utilização como ferramenta do seu trabalho ou quando não estão seguros de quanto trabalho escrito lhes é exigido.

Segundo os mesmos autores, resultados da investigação referem que os alunos usam a calculadora como ferramenta de cálculo e de visualização e para se moverem entre diferentes formas de representação. O uso principal, no entanto, é o de elaborar gráficos. Em certos casos, os investigadores verificaram que os alunos usavam a tecnologia para investigar e explorar, mas o seu uso foi mínimo em tarefas que não exigissem gráficos.

Por outro lado, a calculadora por vezes apresenta uma visão distorcida da realidade pelo que deve ser sempre confrontada com conhecimentos teóricos, assim como o trabalho teórico deve ser confrontado com os resultados obtidos através da calculadora. É importante que os alunos descrevam os raciocínios utilizados e interpretem aquilo que se lhes apresenta de modo que não se limitem a "copiar" o que vêem. Segundo Burril et al. (2002), os professores deveriam estar alerta para a necessidade de ensinar esta tecnologia com um propósito concreto e enfatizar ligações entre representações. Da mesma opinião parecem ser Gómez e Carulla (1998) quando afirmam que "o ideal é um ensino que promova a aprendizagem equilibrada das relações entre todos os sistemas de representação" (p.1).

Assim, a Matemática e a tecnologia devem trabalhar em conjunto. Integrar, e não apenas adicionar, o uso da tecnologia gráfica no contexto da Matemática em estudo, pode ajudar os alunos a desenvolver percepções essenciais sobre a natureza, o uso e os limites da ferramenta e a promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos envolvidos (Burril et al, 2002).

Em Portugal, apesar do surgimento das calculadoras gráficas na década de 80, nos programas escolares de Matemática de 1991, em consequência da Reforma Curricular, apenas surgiam como referência as calculadoras elementares e científicas. De acordo com estes, "As calculadoras, (...), devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas também como meios incentivadores do espírito de pesquisa. O seu uso é obrigatório neste programa" (DGEBS, 1991, p. 34).

As primeiras recomendações sobre a utilização das calculadoras gráficas são feitas, então, nas orientações de gestão do programa de Matemática de 1995/96. No entanto, continuaram a manifestar-se alguns receios por parte dos professores pois as mesmas não eram permitidas no Exame Nacional. No programa de Matemática do ensino secundário de 1997 as calculadoras gráficas passaram a estar referidas no programa oficial como de uso obrigatório e a sua utilização é admitida no Exame Nacional:

> É considerado indispensável o uso de calculadoras gráficas que desempenham uma parte das funções antes apenas possíveis num computador e que apresentam uma sofisticação crescente e preços cada vez mais acessíveis. Não é possível atingir os objectivos gerais sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os alunos traçam uma grande quantidade e variedade de gráficos com o apoio da tecnologia adequada (DES, 1997a, p.10).

Num estudo realizado entre Março de 1996 e Outubro de 1998, pela APM, denominado *Matemática 2001*, foi destacada, mais uma vez, a importância das novas tecnologias na Educação Matemática, ao considerar-se que a "utilização de materiais diversos, de novas tecnologias... são elementos importantes para garantir uma aprendizagem significativa por parte dos alunos" (APM, 1998, p.32). Neste mesmo documento podemos verificar que os professores indicaram, por um lado, como situações de trabalho mais frequentes na sala de aula, os exercícios (cerca de 93% dos professores usam-nos sempre ou em muitas aulas) e a exposição por parte do professor, aumentando de importância à medida que avançamos no nível de escolaridade (81% no ensino secundário) (APM, 1998, p.33). Por outro lado, e no que se refere às calculadoras, elas são mencionadas com uma frequência de utilização significativa, aumentando de ciclo para ciclo até ao ensino secundário. É ainda referido que:

> É possível dizer que nas escolas secundárias a calculadora gráfica parece estar a ganhar alguma importância, para o que terão contribuído as orientações dos novos programas. A sua utilização é

> habitual em diversos casos, mas há também referências a uma utilização apenas de carácter pontual, ou mesmo de não utilização (APM, 1998, p. 38).

Da análise deste documento poder-se-á colocar então algumas questões: Como passou então a ser utilizada a calculadora gráfica? Com que objectivos e em que situações é que ela passou a estar presente na sala de aula? Para resolver que tipo de tarefas?

Nos actuais programas de Matemática A, B e MACS, de 2001, mantém-se a mesma obrigatoriedade dos programas de 1997 acrescentando-se a recomendação da utilização de sensores. Assim, como recursos surgem, entre outros, as calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e sensores de recolha de dados para as calculadoras gráficas. Em qualquer um dos programas pode ler-se: "...recomenda-se a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores para, em algumas situações, os estudantes tentarem identificar modelos matemáticos que permitam a sua interpretação" (DES, 2001a, p.15; DES, 2001b, p.14; DES, 2001c, p.10). É considerado indispensável o uso de calculadoras gráficas para trabalho regular na sala de aula ou para demonstrações com todos os estudantes, usando uma calculadora com *viewscreen.* Para dar cumprimento a este programa, os alunos necessitam de trabalhar regularmente com as calculadoras gráficas e utilizá-las na resolução de diferentes tipos de tarefas, nomeadamente em tarefas de modelação.

Assim, o uso obrigatório de calculadoras gráficas no ensino secundário e no Exame Nacional de Matemática constitui uma alteração que poderá ter profundas implicações na forma de ensinar, aprender e avaliar a disciplina de Matemática.

No entanto, decretar a utilização por si só não é suficiente, sendo fundamental a forma como essa utilização é feita. A questão fulcral já não é se as calculadoras gráficas deverão ser integradas no currículo, mas sim quando e como é que elas deverão estar presentes nas aulas de Matemática (Ponte & Canavarro, 1997).

O professor é o elemento chave na criação do ambiente que se vive na sala de aula. A ele cabe a responsabilidade de propor e organizar as tarefas a realizar, de seleccionar os materiais a utilizar e de coordenar o desenvolvimento de toda a actividade da sala de aula de um modo adequado aos seus alunos (Canavarro, 2003), e a sua função de gestor curricular também influencia o modo como cada um usa a calculadora na sua sala de aula.

Além disso, os manuais escolares, que representam um forte instrumento de mediação do currículo para o professor, influenciando as suas práticas na sala de aula, nem sempre contemplam o uso da calculadora gráfica. Carvalho (2006) concluiu que existem diferenças nos manuais escolares no que se refere à utilização da calculadora gráfica, havendo manuais que praticamente não utilizam, outros que utilizam pouco e outros que fazem uma utilização vasta das suas potencialidades. No entanto, a grande maioria incentiva bastante pouco o uso deste instrumento.

No que se refere aos exames nacionais, há também alguns aspectos que se podem questionar relativamente à utilização da calculadora gráfica nos mesmos. Um deles refere-se aos critérios de correcção.

Actualmente no Exame Nacional aparecem várias questões onde claramente diz: "sem utilizar a calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos". São exemplos dessas questões aquelas onde é pedido para estudar a monotonia de uma função, em que o aluno precisa de determinar o zero ou zeros da função derivada. Se olharmos para os critérios de correcção aparece-nos explicitamente uma pontuação para o cálculo analítico dos zeros. Se o aluno tivesse utilizado a calculadora gráfica para os determinar e em seguida estudasse a monotonia da função, o aluno não estava igualmente a efectuar esse estudo? Não era isso que era pretendido?

Outra situação também frequente no Exame Nacional reporta-se às questões onde nada é referido sobre a utilização da calculadora e que são directamente resolúveis com a mesma. São exemplos dessas questões aquelas onde é pedida a imagem de um dado objecto, dada a expressão analítica da função. Se olharmos para os critérios de correcção é contemplada, actualmente, a resolução através da calculadora mas com a indicação de que os alunos têm que transcrever o gráfico da função para a folha de prova, respeitando o domínio da mesma (pois caso contrário serão penalizados) e indicando as coordenadas dos pontos relevantes. E se o aluno só indicar o valor da imagem? Não respondeu ao que era pedido? E não deveria estar escrito no enunciado que se recorresse à calculadora era necessário transcrever o gráfico?

Outra situação ainda diz respeito às questões onde existe indicação explícita para recorrer à calculadora. Se analisarmos os critérios de correcção dessas questões aparece lá pontuação para a explicitação do método utilizado para resolver a questão e é referido que os alunos devem fazer referência correcta à utilização de ferramentas da calculadora (tal como [*SOLVE*], [CAL] ou [ROOT]). Se o aluno indicou o valor pedido, não terá utilizado a tecla correcta? É necessário o aluno escrever a tecla que utilizou?

Relativamente aos critérios de correcção também Graham et al. (2003) referem os mesmos como uma das limitações do uso da calculadora gráfica nos exames, pois como nos critérios de correcção é atribuída pontuação para as diferentes etapas da resolução da questão, ao utilizarem a calculadora não se consegue visualizar as etapas que são percorridas nos mesmos e os alunos podem vir a ser penalizados por esse facto.

Outro aspecto tem a ver com o número de questões em que é obrigatória a utilização da calculadora gráfica: uma alínea com a cotação de 14 pontos (por exemplo, no Exame Nacional de 2006) num total de 200 pontos. Será que é com esta cotação que se valoriza a calculadora gráfica no ensino secundário? Será que assim se vai alterar a postura dos alunos, dos professores e da restante comunidade educativa face à integração plena da calculadora gráfica?

Relativamente ainda às questões em que se recomenda o recurso à calculadora, em muitas delas o uso pedido é incipiente. Em geral são situações em que o aluno apenas precisa de determinar um valor, recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora, e em seguida tem que resolver analiticamente a questão. É essa a utilização que se pretende da calculadora? Queremos mesmo que os alunos utilizem a calculadora gráfica? Quando? Como? Em que situações?

Pertinência/relevância do estudo

Actualmente a ênfase da Matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas, mas sim na aquisição do poder matemático por todos os alunos. O poder matemático inclui a capacidade para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente; para resolver problemas não rotineiros; para comunicar e para estabelecer conexões, implicando o desenvolvimento da autoconfiança e a motivação pessoal para fazê-lo (NCTM, 1991). Ser matematicamente competente envolve hoje, de forma integrada, um conjunto de atitudes, de capacidades e de conhecimentos relativos à Matemática.

Não basta aprender procedimentos; é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento. Cabe ao professor ajudar os alunos a aprender Matemática com a calculadora gráfica. Não nos podemos esquecer que para utilizar adequadamente a calculadora envolve muito mais conhecimentos matemáticos do que pode parecer e só se consegue quando se tem um domínio matemático suficiente para se compreender o que se está a fazer. Assim, uma utilização inteligente e racional da calculadora envolve muitos conhecimentos matemáticos e permite o aprofundamento de muitos outros. Desprezar a forma como a tecnologia é utilizada e não auxiliar os alunos a evoluir para utilizações mais eficientes é negar-lhes a possibilidade de desenvolver e aprofundar os seus conhecimentos matemáticos. Mas para que isso seja possível importa conhecer e compreender a forma como os alunos utilizam a calculadora, pois segundo Burril et al. (2002), são relativamente fortes os indícios de que a introdução pura e simples da tecnologia gráfica na sala de aula não é suficiente para fazer a diferença na aprendizagem dos alunos.

Uma análise da investigação que tem sido feita no âmbito da utilização da calculadora gráfica no processo de ensino/aprendizagem da Matemática aponta para a existência de alguns estudos. No entanto, estes parecem centrar-se mais em torno de duas áreas. Segundo Penglase e Arnold (1996), o foco tem sido colocado na "análise dos efeitos da utilização das calculadoras gráficas em áreas específicas do conhecimento matemático e na apreciação/avaliação da eficácia desse uso" (p.61).

Assim, uma das áreas que tem sido alvo de atenção é aquela em que se incluem as investigações que incidem sobre as potencialidades desta tecnologia, no que respeita ao desenvolvimento de conceitos e, em especial, do conceito de função. A outra das áreas em que se têm efectuado estudos é o nível do desempenho alcançado por alunos que efectuaram a sua aprendizagem com o recurso a esta tecnologia, comparativamente com outros que não o fizeram.

Já menos frequentes parecem ser, por exemplo, os estudos sobre os erros associados à utilização da calculadora gráfica, os estudos sobre a utilização de calculadoras gráficas em situações de avaliação formal e os estudos sobre as atitudes dos alunos relativamente à calculadora gráfica (Burril et al., 2002).

Parece pois existir pouca investigação sobre a forma como os alunos efectivamente usam a calculadora gráfica, como é feita a escolha entre a abordagem gráfica, com o recurso à calculadora gráfica, e a abordagem analítica e que tipo de ligação estabelecem entre ambas. Aliás, segundo Burril et al. (2002), alguns investigadores apontaram que o uso de múltiplas representações não significa que os alunos consigam estabelecer uma ligação entre estas. Acima de tudo, estes chegaram à conclusão que conciliar vários tipos de informação não é feito de forma intuitiva, é algo que tem de ser ensinado.

Ora sendo os alunos um elemento central no processo ensino/aprendizagem, parece de todo o interesse dedicar alguma atenção a esta temática. Só conhecendo e compreendendo a forma como os alunos vêem a calculadora e o tipo de utilização que fazem dela, se poderá auxiliá-los a fazer um uso efectivo das inúmeras potencialidades desta máquina.

Deste modo, esta nossa investigação irá orientar-se no sentido de procurar compreender como, porquê e em que situações é que os alunos usam a calculadora gráfica e que ligações estabelecem entre as diferentes formas de representação.

Esta documentação e análise não permitirá retirar conclusões para a generalidade dos alunos, mas poderá contribuir para acrescentar o corpo de conhecimento que tem vindo a ser produzido neste importante domínio da investigação.

Objectivo do estudo e questões de partida

O objectivo do estudo é compreender em que situações, porquê e como é que os alunos utilizam a calculadora gráfica na resolução de questões no âmbito do estudo de Funções no 12º ano de escolaridade.

Para tal pretende-se obter resposta às seguintes questões:

- Que relação estabelecem os alunos com a calculadora gráfica?
- Que razões levam os alunos a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica na resolução de uma questão?
- Que papel reservam os alunos à calculadora gráfica na resolução de uma questão?

CAPÍTULO 2

FUNÇÕES NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Este capítulo pretende definir alguns conceitos que foram utilizados ao longo da investigação, nomeadamente o conceito de função e as suas diferentes formas de representação. Inicia-se com uma breve nota histórica até chegar ao conceito, actualmente utilizado no ensino secundário, de função. Também é feita uma pequena referência aos gráficos obtidos com as calculadoras gráficas. Termina-se com uma abordagem de como o tema "Funções" é tratado no programa do ensino secundário.

Breve nota histórica

O conceito de função é um dos conceitos mais importantes da Matemática moderna. Este conceito veio a evoluir ao longo dos séculos e a introdução do método analítico na definição de função (séc. XVI, séc. XVII) veio revolucionar a matemática.

Aproveitamos a oportunidade para fazer uma pequena retrospectiva da evolução histórica do conceito de função.

Desde o tempo dos babilónios (2000 a.C.) que se usam tabelas para representar a dependência entre duas variáveis. Eles utilizavam para os seus cálculos tabelas de quadrados, de raiz quadrada, de raiz cúbica e outras tabelas.

Também Pitágoras (580-500 a.C.) relacionou elementos de dois conjuntos no estudo do Cosmos e da Música. Os Pitagóricos tentaram encontrar leis físicas relacionando o comprimento e a altura de notas emitidas por cordas da mesma espécie submetidas a tensões iguais.

Na Trigonometria usada na época alexandrina (365-323 a.C.) utilizavam-se, por exemplo, tabelas equivalentes às recentes tabelas de senos.

Arquimedes (287-212 a.C.) também resolveu problemas usando tabelas.

Foi Nicolau de Oresme (1323-1382), bispo da Normandia, quem primeiro utilizou um gráfico, para representar numa direcção o tempo e na outra a velocidade de um móvel. Oresme recorre ainda à representação gráfica para descrever as trajectórias dos astros referindo-se às duas variáveis "latitude" e "longitude". Oresme terá sido o verdadeiro precursor do estudo de leis de tipo *funcional* e muitos lhe atribuem a criação do conceito de função. É possível que Oresme não tenha ido mais longe neste método por causa do pouco desenvolvimento das técnicas algébricas e geométricas na sua época. Havia ainda que esperar por Viéte, Descartes e Fermat (DES, 1997b).

Estas ideias que remontam ao século XIV evidenciam que os matemáticos do Ocidente tinham imaginação e rigor de pensamento; faltava-lhes, no entanto, os símbolos da Álgebra, que surgiram portanto com Viéte, no final do século XVI.

No início do século XVII, as funções eram ainda representadas essencialmente na forma de tabelas.

Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) fizeram evoluir o conceito de função através da Geometria Analítica. Introduziram o método analítico de definir funções. Descartes, pela primeira vez, estabelece que qualquer equação de duas variáveis x e y é uma forma de dependência entre grandezas variáveis. A função é assim introduzida sob a forma de equação.

A utilização da simbologia algébrica veio revolucionar a Matemática da época e contribuir de uma forma decisiva para a criação do conceito de função.

Em meados do século XVII, Mengoli, Mercador, Gregory e Newton usaram, cada um à sua maneira, relações funcionais. Newton e Leibniz estabeleceram o desenvolvimento de funções por séries de potências infinitas, o que foi uma considerável proeza para a época.

Leibniz (1646-1716) terá em 1673 introduzido pela primeira vez o termo "função" e Euler (1707-1783) terá utilizado pela primeira vez a expressão "$f(x)$" para o valor da função (DES, 1997b).

A evolução do conceito de função foi paralela à evolução do conceito de curva, que é o seu correspondente geométrico: dizia-se que uma curva era "geométrica" ou "arbitrária" consoante se sabia ou não representá-la analiticamente, isto é, identificar a expressão da função a que ela corresponde. Foi a passagem ao limite que, ao alargar imenso as possibilidades de representação analítica, obrigou a modificar tal critério.

Alguns problemas práticos, como o estudo das vibrações das cordas dos instrumentos musicais, levaram matemáticos como Dirichelet (1805-1859) a definir função como uma correspondência arbitrária entre os valores de duas variáveis, tal como hoje é definida.

O desenvolvimento da matemática no século XX e a sua intervenção cada vez maior nas outras ciências levaram a generalizar o conceito de função ao caso de variáveis cujos valores pertencem a um conjunto qualquer de objectos (DES, 1997b).

O conceito de função

A definição de função, que ainda hoje utilizamos, é essencialmente a mesma que foi dada em 1837 por Dirichelet:

> Uma função $f: A \rightarrow B$ consiste em dois conjuntos, o domínio A, o conjunto de chegada B, e uma regra que associa a cada elemento x de A (objecto) um e um só elemento y de B (imagem).
> Diz-se neste caso que a função está definida em A com valores em B.
> Chama-se contradomínio de f ao subconjunto de B formado pelas imagens. Quando o contradomínio de f coincide com o conjunto de chegada, a função diz-se sobrejectiva. (DES, 1997b, p. 13).

A regra, de que falava Dirichelet, denomina-se hoje como expressão analítica da função.

A maioria da funções estudadas no ensino secundário são funções definidas em subconjuntos de $\Re$ (números reais) e com conjunto de chegada $\Re$; neste caso, ao escrever-se $y = f(x)$ pretende-se dizer que a cada número real x do domínio de f (variável independente) se associa um só número real y (variável dependente) e a função diz-se então uma função real de variável real.

Assim, uma função $f : x \rightarrow y = f(x)$ diz-se função real de variável real, se a cada número real x (variável independente) do domínio de f se associa um só número real y, do conjunto de chegada (variável dependente). Ou seja, numa função real de variável real, o domínio e o conjunto de chegada da função são subconjuntos de $\Re$.

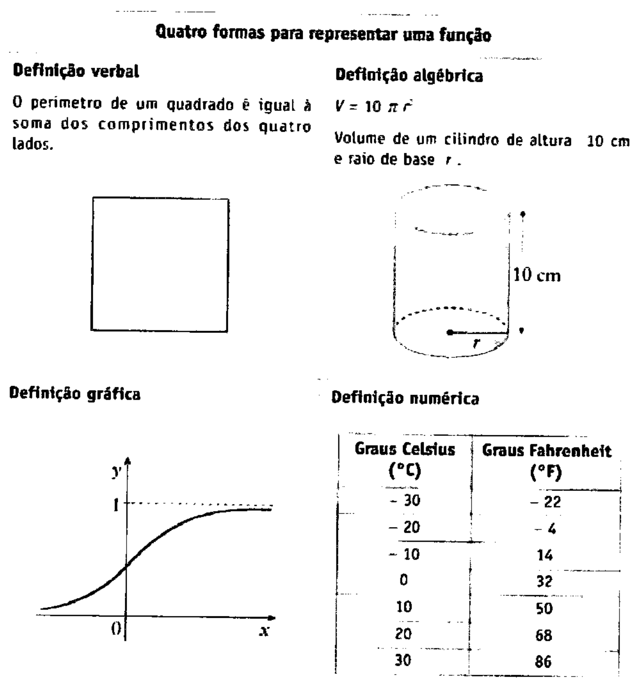
No ensino secundário os alunos também ainda estudam as funções cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Assim, relativamente às sucessões diz-se que são funções reais de variável natural.

Diferentes representações de uma função

Uma função pode ser definida de formas diferentes:

- Definição verbal
- Definição numérica
- Definição algébrica
- Definição gráfica

Pode-se visualizar, por exemplo num manual escolar do décimo ano, uma forma de apresentar aos alunos estas quatro maneiras de definir uma função:



Graus Celsius (°C)	Graus Fahrenheit (°F)
- 30	- 22
- 20	- 4
- 10	14
0	32
10	50
20	68
30	86

Figura 2.1 – Diferentes formas de representar uma função (Neves, 2003, p. 19)

Uma mesma função pode ser representada das quatro formas. Mas, para cada função particular, uma forma de representação pode ser mais adequada do que outra.

Na definição verbal utilizam-se palavras para descrever a função.

Na definição numérica usam-se tabelas ou diagramas para representar a função.

Na definição algébrica define-se a função através da expressão analítica. Chama-se expressão analítica de uma função a uma expressão que traduza a regra que associa os objectos e as respectivas imagens. O domínio de uma função, quando nada se diz em contrário é constituído pelo mais amplo conjunto de valores para os quais a expressão analítica, que traduz a regra de transformação dos objectos nas imagens, tem sentido.

Na definição gráfica utiliza-se o gráfico para representar a função. Chama-se gráfico de uma função f, ao conjunto dos pontos (x,y) obtidos da seguinte forma: para cada valor de x do domínio da função, determina-se um valor y, de modo a que $y = f(x)$ (DES, 1997b). Através do gráfico é possível observar o comportamento da função e visualizar a imagem de um dado objecto ou o(s) objecto(s) de uma dada imagem.

Nem sempre é possível representar todos os pontos do gráfico de uma função. Regra geral, chamamos gráfico à representação gráfica da função, que é o que conseguimos fazer, sempre que o domínio ou o contradomínio são conjuntos não limitados. Esta representação do gráfico pode ser feita com papel e lápis, ou com o auxílio da calculadora gráfica ou computador. As representações gráficas dependem quer dos meios físicos que as suportam, quer dos métodos e convenções usadas para as construir.

A representação do gráfico de uma função pode ser feita de uma forma rigorosa, marcando escalas horizontal e vertical e procurando localizar tão rigorosamente quanto possível os pontos, ou pode ser feita de uma forma qualitativa, sem dar grande importância aos aspectos métricos, mas tendo sobretudo cuidado com os aspectos qualitativos, como, por exemplo, a localização relativa dos zeros da função ou os intervalos de monotonia.

O traçado de um gráfico de forma rigorosa envolve normalmente a determinação de um certo número de pontos do gráfico e sua posterior união por linhas, o que por vezes faz com que não se consiga visualizar comportamentos importantes da mesma, atendendo a que, normalmente, só representamos um número finito de uma infinidade de pontos, que constituem o domínio da função.

Como, para além da limitação anterior, até há uns anos atrás o cálculo numérico tinha que ser feito à mão ou recorrendo a instrumentos não muito rápidos, a marcação de pontos no gráfico era reduzida, pelo que se privilegiava os esboços qualitativos dos gráficos, com referência a alguns pontos mais importantes, como por exemplo, máximos, mínimos, zeros, etc. Nesta situação o gráfico da função era mais uma síntese final do conhecimento adquirido sobre a função por via analítica (DES, 1997b).

Actualmente, com o uso generalizado das calculadoras gráficas e computadores, tornou-se possível iniciar o estudo de uma função através de gráficos de marcação de pontos. Até porque a utilização generalizada de gráficos para interpretar dados numéricos torna mais importante o estudo das características de uma função a partir do seu gráfico (DES, 1997b).

Gráficos obtidos com calculadoras gráficas

As calculadoras electrónicas apareceram no início dos anos 60, enquanto no início dos anos 70 surgem modelos miniaturizados, alguns em tamanho de bolso. Enquanto os modelos mais simples só permitem executar as 4 operações aritméticas fundamentais, os modelos mais sofisticados podem mesmo calcular funções matemáticas transcendentes (trigonométricas, logarítmica, exponencial, etc.).

As actuais calculadoras programáveis de bolso são verdadeiros computadores já que, para além de dispositivos de entrada (teclado) e saída (ecrã) podem armazenar dados e programas (memória) e contêm no seu interior um microprocessador (cálculo e controle).

Assim, as calculadoras gráficas actuais constroem, de forma rigorosa, representações aproximadas dos gráficos das funções. Portanto, quando fazemos o traçado do gráfico na calculadora gráfica, apesar de não se conseguir visualizar todo o gráfico da função, é possível determinar um grande número de pontos e executar a representação gráfica da função com uma grande rapidez. Hennessy et al. (2001) referem que as vantagens da calculadora gráfica na aprendizagem dos alunos, sobre gráficos, recaem em três grandes categorias:

- Visualização das funções
- Ligação automática entre representações e imediato *feedback* e resposta na mudança das equações
- Rápido e fácil traçado do gráfico

Contudo, nem sempre é fácil encontrar uma representação computacional do gráfico da função que permita analisar o comportamento global da função. Torna-se por vezes necessário recorrer a representações do gráfico em diferentes rectângulos de visualização e integrar os conhecimentos teóricos disponíveis sobre a mesma função, de modo a que se possa esboçar uma representação qualitativa satisfatória do gráfico da função (DES, 1997b).

Além disso, não nos podemos esquecer que as calculadoras gráficas por vezes transmitem informações distorcidas, pelo que são necessários mais alguns conhecimentos matemáticos do que simplesmente "olhar" para o gráfico.

Por exemplo, por vezes diferentes janelas de visualização mostram gráficos totalmente diferentes, pelo que é preciso alertar os alunos para esse facto. Por exemplo a função $f(x) = x^3 - 12x^2 + 46x - 42$ tem, no rectângulo de visualização $[-10,10] \times [-10,10]$, o aspecto que se segue:

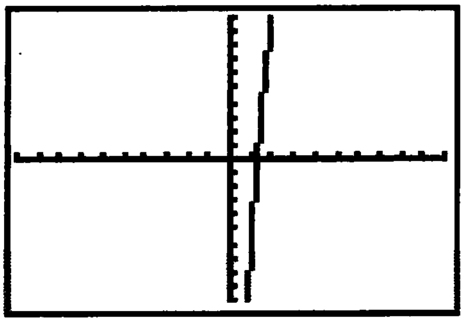


Figura 2.2 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - 12x^2 + 46x - 42$ em $[-10,10] \times [-10,10]$ (DES, 1997b, p. 31).

E no rectângulo de visualização $[-4,10] \times [-90,90]$ o seguinte aspecto:

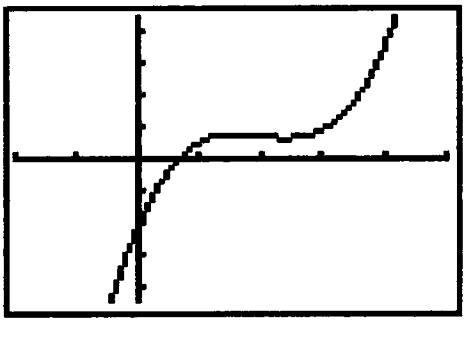


Figura 2.3 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - 12x^2 + 46x - 42$ em $[-4,10] \times [-90,90]$ (DES, 1997b, p. 32).

É necessário procurar os rectângulos de visualização adequados à análise das características da função. Os alunos devem ser incentivados a experimentar diversos rectângulos de visualização e a ter em conta as propriedades conhecidas ou que decorrem da expressão analítica das funções que estão a estudar.

Forster e Mueller (2001) apontam como áreas de maior dificuldade para os alunos a interpretação e a transcrição dos gráficos obtidos na calculadora gráfica. Os erros típicos observados por estes autores reportam-se essencialmente às assímptotas dos gráficos e aos pontos de descontinuidade. Também Boers e Jones (1994) tinham observado dificuldades similares ao nível desses dois aspectos.

Assim, uma situação a ter em conta é o facto de nem as calculadoras gráficas, nem o software para gráficos em computador, desenharem as assímptotas ou assinalarem o domínio com as convenções indicadas (nomeadamente pontos que não fazem parte do domínio). É necessário chamar a atenção dos alunos para a forma como devem registar no papel os gráficos que visualizam nos ecrãs, introduzindo as necessárias correcções.

Por exemplo, no gráfico da função $y = \frac{3}{x-2}$ é necessário explicar aos alunos que a recta vertical que aparece no visor da máquina não pretende representar assimptota vertical que existe para $x = 2$, mas os alunos ao transcreverem o gráfico devem marcar a assímptota:

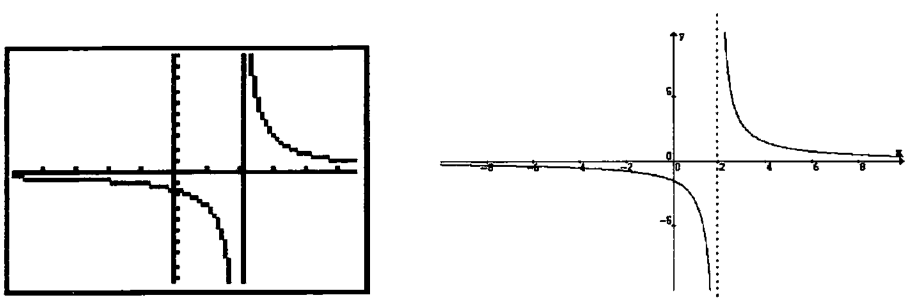


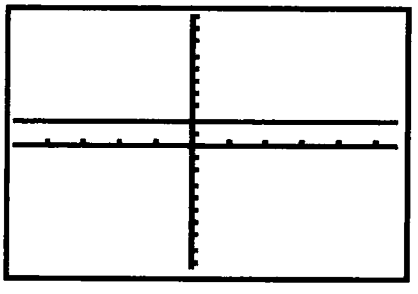
gráfico apresentado pela calculadora

gráfico que os alunos podem registar

Figura 2.4 – Gráfico da função $y = \frac{3}{x-2}$ (DES, 1997b, p. 33).

Relativamente ao domínio, o gráfico obtido através da calculadora gráfica pode levar a concluir que alguns valores pertencem ao domínio da função quando isso não se verifica.

Por exemplo, para a função $y=\frac{2x-4}{x-2}$, a calculadora gráfica apresenta um gráfico semelhante ao da função $y=2$. Os alunos deverão corrigir (a partir dos seus conhecimentos matemáticos sobre domínios) as representações fornecidas pela calculadora, introduzindo nomeadamente a bola aberta no ponto que não faz parte do domínio:



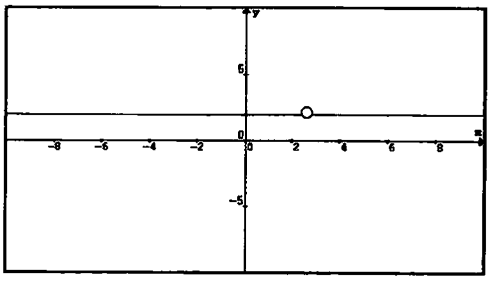


Figura 2.5 – Gráfico da função $y=\frac{2x-4}{x-2}$ (DES, 1997b, p. 31)

Os exemplos acima levam a concluir que os gráficos obtidos através de computadores e calculadoras gráficas podem ajudar à compreensão do gráfico de uma função, mas devem ser cuidadosamente interpretados e transcritos.

Assim, sempre que necessário, deve-se complementar a representação gráfica com o estudo analítico da função, determinando por este meio zeros, intervalos de monotonia, extremos relativos, pontos de inflexão, etc.

As Funções no ensino secundário

O programa de 2001 de Matemática A começa por referir que:

A Matemática é uma disciplina muito rica que, num mundo em mudança, abrange ideias tão díspares como as que são utilizadas na vida de todos os dias, na generalidade das profissões, em inúmeras áreas científicas e tecnológicas mais matematizadas e, ao mesmo tempo, é uma disciplina que tem gerado contribuições significativas para o conhecimento humano ao longo da história (DES, 2001a, p.1).

E apresenta, então, as seguintes finalidades:

- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real;
- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade;
- Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida activa;
- Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência;
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade;
- Contribuir para o desenvolvimento da existência de uma consciência crítica e interventiva em áreas como o ambiente, a saúde e a economia, de modo a formar para uma cidadania activa e participativa.

Este programa manteve as mesmas finalidades do programa de 1997, tendo acrescentado esta última.

Tanto o programa de 1997, como o de Matemática A de 2001, encontram-se divididos em quatro grandes temas que procuram contemplar as principais áreas da Matemática:

- Cálculo Diferencial
- Geometria (no plano e no espaço)
- Funções e sucessões
- Probabilidades (com Análise Combinatória) e Estatística

No corpo do programa de 1997 (DES, 1997a) assumem importância significativa tanto técnicas específicas como estratégias que, constituindo uma base de apoio que os estudantes utilizam na sua actividade matemática independentemente do tema, atravessam o programa de forma transversal. Estes temas são chamados de temas transversais e são alargadas no novo programa de 2001 de Matemática A. Assim, os temas transversais passam a ser:

- Comunicação Matemática
- Aplicações e Modelação Matemática
- História da Matemática
- Lógica e Raciocínio Matemático
- Resolução de Problemas e Actividades Investigativas
- Tecnologia e Matemática

É referido ainda que "tudo o que os temas transversais propõem deve ser abordado sistematicamente ao longo do ciclo" (DES, 2001a, p. 6).

No que se refere à metodologia, tendo como pressuposto ser o estudante agente da sua própria aprendizagem, tanto o programa de 1997, como o de 2001, propõem que:

- Os conceitos sejam construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas;
- Os conceitos sejam abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização;
- Se estabeleça maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas, ajudando a enquadrar o conhecimento numa perspectiva histórico-cultural.

No que se refere ao tema "Funções" ele aparece como uma parte fundamental do programa de 1997 e do programa de Matemática A de 2001, abrangendo, ao longo dos três anos do ensino secundário, as funções polinomiais (10º ano), as funções racionais e irracionais (11º ano), as funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas (12º ano). São ainda estudadas no 11º ano as Sucessões, como um caso particular das Funções.

Os conhecimentos sobre Funções são considerados, no programa de Matemática A de 2001, importantíssimos para a compreensão do mundo em que se vive e os quais devem ser ampliados com base no estudo analítico, numérico e gráfico. Assim, este tema tem uma ênfase muito grande na ligação entre as fórmulas e as representações geométricas e a capacidade de as relacionar é considerada uma capacidade fundamental para o mundo de hoje e do futuro.

O estudo das funções é abrangente, passando, pela noção de função, gráfico e representação gráfica, domínio, contradomínio, zeros, operações com funções, função inversa, função par e ímpar, função injectiva, transformações do gráfico de uma função, contempla ainda:

- Decomposição de um polinómio em factores e regra de Ruffini;
- Resolução analítica e gráfica de equações e inequações (polinomiais, fraccionárias, logarítmicas e exponenciais);
- Regras operatórias de exponenciais e logaritmos;
- Conceito e definição de limite, cálculo de limite de funções;
- Conceito e definição de continuidade, continuidade num ponto e num intervalo, teorema do valor intermédio;
- Taxa de variação média;
- Diferenciação: derivada de uma função num ponto, regras de derivação;
- Aplicações das derivadas: equações das rectas tangentes a uma curva, intervalos de monotonia e extremos relativos, concavidades e pontos de inflexão, problemas de optimização.

É referido tanto no programa de 1997, como no de 2001, que os alunos devem traçar diversos gráficos tanto manualmente como utilizando a calculadora gráfica, escolhendo o melhor rectângulo de visualização.

No que se refere a este último (programa de Matemática A de 2001) realça que deve ser dada ênfase à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos e que a resolução analítica do mesmo deve ser sempre acompanhada da verificação numérica ou gráfica. As calculadoras gráficas desempenham aqui um papel preponderante, não só para a resolução mas também para a recolha de dados concretos, quando acopladas a sensores adequados.

Síntese

Ao longo dos três anos do ensino secundário os alunos estudam o tema "Funções", ao qual é dado grande ênfase, no programa de Matemática A, quando este refere que os conhecimentos sobre funções são considerados importantíssimos para a compreensão do mundo em que se vive. Ainda neste programa, é realçado que, deve ser dada ênfase à resolução de problemas usando métodos numéricos, gráficos e analíticos.

Assim, relativamente às funções, os programas abordam, entre outros conceitos, as diferentes representações de uma função: a verbal, a numérica, a algébrica e a gráfica. Uma mesma função pode ser representada das quatro formas e em cada situação particular, uma forma pode ser mais indicada do que outra.

A representação gráfica de uma função pode ser obtida com mais ou menos rigor e com ou sem recurso à calculadora gráfica. No entanto, a presença da calculadora gráfica na sala de aula possibilita iniciar o estudo de uma função através do seu gráfico e depois estabelecer a ligação com a respectiva representação analítica.

Hennessy et al. (2001) referem que as vantagens da calculadora gráfica na representação gráfica recaem em três categorias: visualização das funções, ligação automática entre representações e imediato *feedback* e resposta na mudança das equações e rápido e fácil traçado do gráfico.

No entanto, existem algumas áreas de maior dificuldade para os alunos. Boers e Jones (1994) e Forster e Mueller (2001) referem a interpretação e transcrição dos gráficos obtidos na calculadora gráfica, nomeadamente ao nível das assímptotas e pontos de descontinuidade, como complexa para os alunos. Assim, os gráficos obtidos com a calculadora gráfica devem ser cuidadosamente interpretados e transcritos e, complementar sempre que necessário ou adequado, com o estudo analítico da função.

CAPÍTULO 3

AS CALCULADORAS GRÁFICAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Neste capítulo procura-se fazer uma revisão sobre estudos realizados em áreas relacionadas com o objecto do estudo da presente investigação. Começa-se por referir as calculadoras gráficas no currículo de Matemática e quais as suas potencialidades e desafios no processo de ensino/aprendizagem. Em seguida relacionam-se os alunos com as calculadoras gráficas e a presença destas na sala de aula. Seguidamente destaca-se a articulação entre as diferentes representações no estudo de uma função e termina-se com uma referência às calculadoras gráficas nos exames nacionais.

As calculadoras no currículo de Matemática

Quando a equipa chefiada por Hideshi Fukaya, da Casio Japão, em 1986, juntou às calculadoras científicas a dimensão gráfica, inventaram a calculadora gráfica. Assim, em 1986, a Casio, no Japão, introduz no mercado a primeira calculadora gráfica. Posteriormente, surgiram também calculadoras que produzem cálculo algébrico simbólico (CAS), tendo em 1996 a Texas Instruments introduzido a TI-92.

As calculadoras gráficas para além de efectuarem os cálculos numéricos dispõem de diversas funções que podem ser utilizadas na sala de aula.

Independentemente do modelo, é possível trabalhar com as calculadoras gráficas nas principais áreas da Matemática: Cálculo Diferencial; Geometria; Funções e Sucessões; Probabilidades e Estatística. Com o recurso às mesmas, novas actividades podem ser desenvolvidas dentro da sala de aula. Por exemplo, a possibilidade de aceder a representações gráficas facilita a exploração das características de classes de funções. A utilização de sensores acoplados a calculadoras gráficas permite fazer a recolha de dados. Assim, as calculadoras gráficas oferecem a possibilidade de recolher, armazenar e tratar dados, permitindo trabalhar na sala de aula as diversas fases do processo de modelação matemática.

Assim, com o surgimento da primeira calculadora gráfica foi dado início a uma transformação no ensino e aprendizagem da Matemática, nomeadamente no currículo de Matemática. Alguns autores consideram que as calculadoras gráficas, pelos novos desafios que colocam, são fonte de mudanças de tal modo significativas que podem mesmo revolucionar a Educação Matemática (Burril, 1992; Penglase & Arnold, 1996).

De acordo com Burril (1992), para que as calculadoras realmente tenham efeitos positivos, é necessário levar a cabo alterações a nível do currículo. Mesmo que não consideremos a hipótese de excluir alguns tópicos tradicionalmente leccionados, temos que pelo menos reconsiderar alguns aspectos da forma como durante anos foram abordados. Na opinião de Waits e Demana (2000), os professores devem observar caso a caso quais as tarefas aritméticas de papel e lápis e as manipulações algébricas que devem continuar a ser privilegiadas no currículo, pois certas técnicas continuam a ser valorizadas por serem as únicas técnicas possíveis no passado.

Assim, torna-se importante reflectir sobre as implicações da utilização da calculadora gráfica naquilo que se ensina e, em particular, ponderar o que se deve deixar de ensinar, que alterações se devem introduzir no que se continua a ensinar e que novos temas se podem ensinar. Não nos esqueçamos que:

> (...) estas tecnologias estão a mudar a Matemática levando à criação de novas áreas (como a teoria dos autómatos celulares) e tornando certos tópicos mais importantes (como a análise combinatória). (...) Estas tecnologias estão disponíveis a baixo custo. Tudo isto leva a

considerar cada vez mais a pertinência do seu uso no processo de ensino/aprendizagem (Ponte & Canavarro, 1997, p. 55).

As calculadoras podem contribuir para desenvolver a compreensão dos alunos através de um processo melhorado de ensino/aprendizagem. Contudo, este não é um efeito imediato. Isto é, não é apenas pela simples introdução das calculadoras gráficas na sala de aula que se obtém efeitos positivos do seu uso (Gómez, 1996).

De acordo com esta opinião parecem estar também Dunham e Dick (1994) quando referem que ninguém acredita que simplesmente levar um conjunto de calculadoras para a sala de aula, tenha efeitos mágicos nos alunos.

Ora isto significa que é necessário investigar as condições que são requeridas para que a utilização desta tecnologia beneficie o processo ensino/aprendizagem da Matemática. Somos assim levados a reflectir sobre os efeitos que a utilização das calculadoras gráficas provocam nos currículos e nas possíveis visões do ensino e aprendizagem da Matemática por parte dos alunos, dos professores, das escolas e da sociedade que vão influenciar a desenvolvimento do currículo (Gómez, 1996). O mesmo autor refere que a ampla perspectiva do currículo envolve três áreas de análise a que ele chamou de *Macro*, *Meso* e *Micro*:

- *Macro*: os factores sociais, económicos, políticos e culturais intervêm na definição das visões, valores e tradições matemáticas;
- *Meso*: o local onde a instituição educacional está situada, o seu espaço, os seus elementos, as concepções dos professores e dos alunos estabelece o conhecimento cultural e o conhecimento ensinado;
- *Micro:* a área de formação dos professores, os seus conhecimentos e as suas crenças; a forma como vêem a construção do conhecimento matemático influencia o desenvolvimento do currículo.

Logo, a contribuição das calculadoras gráficas no processo de ensino/aprendizagem depende do estádio de desenvolvimento da sociedade e das condições que se estabelecem na Educação Matemática nessa mesma sociedade (Gómez, 1996).

Portanto, de acordo com Dunham e Dick (1994), o elemento central pode não ser a presença da calculadora no currículo e na sala de aula, mas sim a combinação da tecnologia com as mudanças no currículo e na forma de instrução. Assim, as mudanças reais no currículo são necessárias. Um exemplo disso é referido por Waits e Demana (2000), quando dizem que antes das calculadoras fazerem a sua aparição no ensino, estudava-se cálculo, como as aplicações das derivadas, para aprender como obter um gráfico exacto. Actualmente usam-se os gráficos exactos produzidos por uma calculadora gráfica para ajudar no estudo dos conceitos do cálculo.

As tecnologias (calculadoras gráficas e computadores) influenciam a Matemática que é ensinada e apreendida (NCTM, 2000). Estas permitem construir imagens visuais de ideias matemáticas, facilitam a organização e análise de dados e fazem cálculos de modo eficiente e preciso. Usando as tecnologias, os alunos podem raciocinar acerca dos assuntos mais gerais, como mudança de parâmetros, e podem criar modelos e resolver problemas que outrora eram inacessíveis. Assim, os alunos podem focar-se na tomada de decisões, na reflexão, no raciocínio, na resolução de problemas e nas actividades de investigação ao nível da geometria, estatística, álgebra, cálculo,... Logo, "a Matemática e a pedagogia no currículo do secundário têm que mudar" (McMullin, 2001, p. 21).

Portanto, a "tecnologia não deve ser usada para substituir a compreensão e a intuição mas sim para a fortalecer" (NCTM, 2000, p. 25).

Também ao nível do currículo em Portugal é dado um papel importante à tecnologia em todos os programas de Matemática do ensino secundário (A, B e MACS). Nestes, a tecnologia é indicada para diversas tarefas nomeadamente para as tarefas de modelação. É aconselhado o uso de sensores de recolha de dados para que os alunos possam trabalhar na sala de aula as diversas fases do processo de modelação, identificando o modelo matemático que se adapta a uma determinada situação. É também reforçada a importância da dimensão gráfica, quando é referido que os alunos devem traçar uma grande variedade e quantidade de gráficos com o apoio da tecnologia.

Assim, a tecnologia deve ser utilizada para diversos fins. Este aspecto é destacado quando, por exemplo no programa de Matemática A, relativamente às calculadoras gráficas, é dito que: "As calculadoras gráficas (que são também calculadoras científicas completíssimas), ferramentas que cada vez mais se utilizarão correntemente, devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas também como meios incentivadores do espírito de pesquisa" (DES, 2001a, p.15).

Mas as orientações curriculares só por si não são suficientes. O professor é um protagonista curricular muito importante e decisivo na forma como o currículo é implementado e como chega aos alunos (Canavarro & Ponte, 2005). Portanto, não podemos desprezar o seu papel e como se posiciona face à tecnologia e ao ensino da Matemática. Por exemplo, se prevalecer a visão da Matemática como a manipulação de fórmulas, o conhecimento da matemática é o conhecimento de algoritmos que permitem a transformação de umas expressões noutras. Nesse caso, o bom professor será aquele que ensina isso e a avaliação insiste nesses conhecimentos; nos testes mantém-se a forma dos exemplos e dos exercícios das aulas (Gómez, 1996).

Doerr e Zangor (2000) citam o estudo de Tharp, Fitzsimmons e Ayers que apontava a existência de uma forte relação entre os conhecimentos, crenças e estratégias pedagógicas do professor com a forma como ele usa a calculadora gráfica. Os resultados do estudo realizado por Doerr e Zangor (2000) sugerem que o papel, o conhecimento e as crenças do professor influenciam a forma como encorajam os alunos a usar a calculadora gráfica.

É de realçar que "o uso efectivo da tecnologia na sala de aula depende do professor. (...) Tal como qualquer ferramenta de ensino, pode ser bem ou mal usada" (NCTM, 2000, p. 25).

Assim, há que ter em conta que ao professor cabe, como afirma Ponte (1995), o papel decisivo na organização das situações de aprendizagem. Todos os professores deveriam estar alertados para a necessidade de ensinar a usar a tecnologia com um propósito concreto e enfatizar ligações entre representações (Burril et al., 2002).

Os professores devem usar a calculadora de forma a realçar as oportunidades de aprendizagem por parte dos alunos ao seleccionar ou criar tarefas matemáticas que tirem vantagem da mesma.

Portanto, qualquer análise ou consideração que se procure fazer relativamente às potencialidades da utilização das calculadoras, obriga-nos a ter em conta como é que estão a ser utilizadas (Dunham & Dick, 1994). Até porque, como referem Penglase e Arnold (1996), uma coisa é usar a calculadora e outra, muito diferente, é usá-la de forma eficiente. Assim, não só a presença de calculadoras na sala de aula é importante, mas também a forma como é concebido e implementado o processo de ensino/aprendizagem.

Segundo Berger (1998) ao propor a integração da tecnologia no ensino e no currículo é preciso alterar significativamente os modelos tradicionais privilegiando a potencial relação entre o uso e a tecnologia.

Potencialidades e desafios das calculadoras gráficas no processo de ensino/aprendizagem

As calculadoras permitem a experimentação, a investigação e a resolução de problemas, dando origem a uma nova dinâmica na sala de aula, resultando em ambientes de aprendizagens interactivos e de exploração, em que os alunos e professores se envolvem no desenvolvimento de ideias matemáticas (Dunham & Dick, 1994). As calculadoras podem assim ter um grande impacto no tipo de trabalho que é realizado na sala de aula, alterando o papel do professor, que passará a criar situações matemáticas a partir das quais conceitos e relações importantes possam emergir. Através de um acompanhamento adequado, o professor apoiará os alunos ao longo da exploração, auxiliando-os a clarificar as ideias (Ruthven, 1992).

As calculadoras surgem assim como detentoras de um forte potencial para uma aprendizagem centrada no aluno e baseada na compreensão. Experimentar, formular e testar conjecturas, discutir e reflectir sobre as experiências vividas, tornar-se-ão aspectos fundamentais da aprendizagem (NCTM, 1991; NCTM, 2000). A mecanização de procedimentos deixará de ser um aspecto central do processo de ensino aprendizagem, passando o aluno a assumir um papel activo na construção dos seus conhecimentos, ou seja, convertendo-se em agente da sua própria aprendizagem.

A libertação que as calculadoras permitem relativamente aos cálculos, torna possível um aumento significativo no leque de questões que é possível considerar.

Passa a ser possível escolher problemas reais, com dados reais, uma vez que todas as manipulações algébricas passam a ser acessíveis (Barling, 1994, citada por Rocha, 2000). Os problemas permanecem assim próximos da realidade, o que contribui para os tornar mais significativos para os alunos (Broman, 1996).

De acordo com Demana e Waits (2000), existem duas grandes diferenças quando se aumenta o acesso às calculadoras gráficas na sala de aula. Uma delas é o envolvimento dos alunos, pois com as calculadoras gráficas vão trabalhando com o professor e participam na resolução; a sala é transformada num laboratório de Matemática. A outra é que com as calculadoras gráficas os estudantes sentem prazer em praticar matemática e, esta diferença é muito importante, pois permite melhorar a relação dos alunos com a Matemática.

Outra das vantagens das calculadoras é permitirem aos alunos a produção dos seus próprios exemplos, em vez de se limitarem passivamente a aceitar os que o professor propõe. A personalização permitida pelas calculadoras possibilita que os alunos formulem as suas próprias perguntas e prossigam, abordando os aspectos que mais lhes interessam. Os alunos expressam as suas próprias ideias, formulam as suas próprias hipóteses e testam-nas procurando enquadrar os resultados obtidos na "teoria" que estão a tentar formular (Grant & Searl, 1996).

A utilização desta tecnologia também permite ao professor lidar em simultâneo com alunos com diferentes níveis de conhecimentos, tornando possível respeitar o ritmo de aprendizagem de cada aluno. Recorrendo a apoio e orientações diversificadas, propondo a uns alunos actividades mais abertas do que a outros, o professor poderá, com relativa facilidade, lidar com a diversidade de alunos existente na turma. Assim, "a tecnologia oferece aos professores opções para adaptar instruções a necessidades específicas dos alunos" (NCTM, 2000, p. 25). As tecnologias são pois um desafio para desenvolver a aprendizagem da Matemática em alunos com dificuldades.

Hennessy et al. (2001) referem que a maior área de dificuldade dos alunos é na relação entre os dados numéricos, os dados gráficos e as expressões algébricas. As calculadoras gráficas facilitam a ligação e a integração das múltiplas representações e, como tal, potenciam uma melhor compreensão destas (Hennessy et al., 2001 e Waits & Demana, 2000).

Portanto, as calculadoras gráficas apresentam-nos uma panóplia de vantagens que Ponte (1995) enumera, para as tecnologias em geral, da seguinte forma:

- Uma relativização da importância das competências de cálculo e de simples manipulação simbólica, que podem agora ser realizadas muito mais rápida e eficientemente;
- Um reforço do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem dos mais variados problemas;
- Uma atenção redobrada às capacidades intelectuais de ordem mais elevada, que se situam para além do cálculo e da simples compreensão de conceitos e relações matemáticas;
- Um crescente interesse pela realização de projectos e actividades de modelação, investigação e exploração pelos alunos, como parte fundamental da sua experiência matemática;
- Uma demonstração prática da possibilidade de envolver os alunos em actividade matemática intensa e significativa, favorecendo o desenvolvimento de atitudes positivas em relação a esta disciplina e uma visão muito mais completa da sua verdadeira natureza (Ponte, 1995, p. 2).

Também o estudo de Drijvers e Doorman (1996) enunciou cinco vantagens para a utilização da calculadora gráfica na sala de aula:

- Contextos Reais: o uso da calculadora gráfica permite que a atenção dos alunos passe das operações algorítmicas para os problemas reais;
- Exploração: o uso da calculadora gráfica estimula a colocação de novas questões e a generalização dos problemas. Ao oferecerem um *feedback* directo, as calculadoras gráficas oferecem oportunidades para explorar actividades;
- Integração: o uso das calculadoras gráficas encoraja a integração das actividades geométricas e algébricas e estimula os alunos na criação de ligações entre vários aspectos da Matemática;
- Dinâmica: o uso da calculadora gráfica é ideal para a visualização das alterações dos parâmetros numa expressão e suas relações, encorajando a observação analítica dinâmica dos modelos;

- Flexibilidade: com a influência da calculadora há uma mudança da ênfase que se afasta das "técnicas rígidas", passando-se para a procura de soluções flexíveis.

Assim, as calculadoras oferecem-nos muitas possibilidades de abordar novos tópicos e, sobretudo, novas abordagens. É necessário rever o que actualmente ensinamos no âmbito das Funções, do Cálculo, da Estatística, da Álgebra e dos Números Complexos.

Mas não nos devemos esquecer de considerar tudo o que é necessário conhecer para compreender a calculadora (Hooper, 1993). Antes de utilizar uma calculadora, Burrill (1992) argumenta que os alunos precisam de compreender e ter alguma perícia na utilização da lógica algébrica para introduzir as expressões, regras das funções, equações e inequações. Defende ainda que uma vez que as calculadoras, como todas as máquinas, precisam que lhes sejam dadas instruções precisas, os alunos têm que compreender e ser cuidadosos na utilização dos símbolos algébricos.

Como tal, a utilização da calculadora não torna de algum modo dispensável grande parte dos conteúdos de Matemática, pelo que devemos continuar a dispensar atenção a muitos dos aspectos numéricos e algébricos se quisermos que os alunos compreendam os resultados obtidos com a calculadora (Hooper, 1993). Há que ter em atenção que os alunos muitas vezes podem ser enganados pela falta de compreensão das escalas e podem aceitar imagens visuais sem as questionar. Os erros técnicos que os alunos cometem, como por exemplo de sintaxe, podem ser causados pela reduzida compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos (Burril et al., 2002).

De acordo com isto parece estar Rocha (2000) quando refere que os grandes problemas que os alunos enfrentam ao tentarem interpretar a informação disponibilizada pela calculadora prendem-se com a dificuldade que têm em relacionar a informação obtida por processos algébricos com a informação obtida a partir da calculadora.

As dificuldades mais frequentes que se colocam aos alunos têm origem na falta de compreensão da representação simbólica e gráfica das funções, bem como na relação entre estas e a forma como a informação deve ser introduzida na calculadora ou a forma como é apresentada por esta (Boers & Jones, 1994; Hennessy et al., 2001).

Uma das grandes dificuldades que a utilização da calculadora gráfica coloca aos alunos diz respeito à escolha de uma janela de visualização do gráfico (Rocha, 2000). Há algumas situações em que é feita uma incorrecta interpretação do gráfico, devido a efeitos visuais ilusórios.

São igualmente comuns situações em que os problemas decorrem de uma incorrecta introdução da informação na calculadora. E neste campo são, em particular, bastante usuais os casos em que não é feita uma utilização adequada de parênteses na introdução de expressões (Boers & Jones, 1994). A superação destas dificuldades envolve a necessidade de aquisição de diversos conhecimentos matemáticos.

A partir da análise de exames realizados por alunos, Boers e Jones (1994) concluem que, aparentemente, o que devemos recear não é que a utilização das calculadoras gráficas diminua as capacidades dos nossos alunos. Com efeito, é um problema muito maior que os alunos não utilizem as calculadoras gráficas de forma eficiente e que tenham dificuldades em integrar os resultados obtidos por forma algébrica com os obtidos por via gráfica. A este propósito, Drijvers e Doorman (1996) referem que os alunos confundem a linguagem normal, a linguagem matemática e a linguagem da calculadora.

Será assim importante que, quando seja necessário fazer um cálculo para a resolução de um problema, se conheçam "todos" os métodos possíveis de utilização, para se optar pelo mais adequado e conveniente na circunstância. Efectivamente as calculadoras disponibilizam a informação mas não a explicação, elas não fazem o trabalho todo, é preciso pensar e não esquecer a Matemática.

Os alunos e as calculadoras gráficas

A relação que os alunos estabelecem com a calculadora gráfica é um aspecto importante, na medida em que pode interferir com a utilização que estes fazem dela. Assim sendo, a investigação não podia deixar de lhe prestar atenção.

De acordo com Hooper (1993), os resultados da investigação apontam para uma certa relutância dos alunos em confiar fortemente na tecnologia.

Ruthven (1992 e 1996) refere, com base num estudo que efectuou, que no final de um período escolar, já quase todos os alunos faziam uma utilização confiante e espontânea da calculadora gráfica. No entanto, existia um pequeno número de alunos que se mostrava relutante em fazer qualquer tipo de utilização da calculadora porque sentia que ao fazê-lo "perdia o controlo" da Matemática. Estes alunos tinham receio de não compreender todos os passos que davam e isso retardou a integração da calculadora na sua actividade matemática.

Dunham (1990, citado por Hooper, 1993), afirma que a maioria dos alunos vê a calculadora gráfica como uma ferramenta útil, isto é, como uma forma rápida e eficiente de resolver problemas. Mas ainda assim, manifestam alguma preocupação por se apoiarem nelas. Assim, de um modo geral, a grande questão levantada pelos alunos relativamente à utilização das calculadoras gráficas está associada ao receio de que esta possa levar a uma diminuição de capacidades (Ponte & Canavarro, 1993). Esta preocupação é manifestada tanto por alunos com um nível de conhecimentos matemáticos mais elevado ou mais fraco.

Os alunos tendem a utilizar as potencialidades existentes nas calculadoras gráficas ao nível do cálculo como um substituto do cálculo mental ou do cálculo de papel e lápis. No que respeita às potencialidades gráficas, estas substituem rapidamente as rotinas mentais e escritas utilizadas para representar graficamente uma função (cálculo de valores e sua marcação no referencial).

No entanto, para além das situações referidas, a calculadora gráfica não introduz qualquer alteração nas abordagens que os alunos até então estavam habituados a fazer, a menos que tal lhes seja explicitamente ensinado (Ruthven, 1992).

Estudos realizados indiciam que os alunos têm alguma dificuldade em utilizar a calculadora de forma eficiente e apontam para a necessidade de ponderar a forma como esta vem a ser utilizada na sala de aula (Burril et al., 2002).

Segundo Broman (1996), os alunos ficam geralmente tão satisfeitos por poderem utilizar calculadoras que tendem a usá-las de forma ineficaz, recorrendo a elas para executar qualquer tipo de cálculos. Ainda assim, de acordo com Boers e Jones (1994), um problema geral com as calculadoras gráficas parece ser, contrariamente aos receios comuns, que esta é sub-utilizada em vez de sobre-utilizada. Normalmente a calculadora gráfica é utilizada para verificação dos resultados obtidos analiticamente, o que significa que a vasta maioria dos alunos escolhe o método tradicional para resolver os problemas (Boers & Jones, 1994).

Segundo Burril et al. (2002), existe pouca investigação acerca do uso espontâneo (escolha individual da estratégia de resolução com ou sem o uso de tecnologia) da tecnologia gráfica.

Um outro aspecto importante é o papel da calculadora gráfica na resolução das tarefas, pois esta tende a assumir diferentes papéis por parte dos alunos na resolução de uma questão. No já referido estudo realizado por Doerr e Zangor (2000), os autores identificaram cinco padrões e modos de utilização da calculadora pelos alunos. Centrando a sua análise na determinação de como e porquê essas características foram usadas em problemas contextualizados e em situações de aprendizagem, observaram que a calculadora pode assumir diferentes papéis:

- Ferramenta computacional: quando a calculadora é utilizada para avaliar expressões numéricas, estimativas e arredondamentos;
- Ferramenta transformacional: quando a calculadora é utilizada para mudar a natureza da tarefa (passagem de uma tarefa de natureza computacional para uma tarefa de natureza interpretativa);
- Ferramenta de recolha e análise de dados: quando a calculadora é utilizada para recolher e armazenar dados, estudar os fenómenos a que estes dizem respeito e procurar modelos adequados;
- Ferramenta de visualização: quando a calculadora é utilizada no desenvolvimento de parâmetros coincidentes com estratégias que permitem encontrar equações que se ajustem a conjuntos de dados; para encontrar visualizações apropriadas de um gráfico e determinar a natureza implícita da estrutura da função; para ligar uma representação visual a um fenómeno físico; para efectuar a leitura de funções simbólicas; para representar e interpretar dados e para resolver equações;
- Ferramenta de verificação: quando a calculadora é utilizada para confirmar conjecturas e compreender formas simbólicas múltiplas.

Deste estudo resultaram ainda mais conclusões. Existem constrangimentos e limitações no uso da calculadora sob duas formas:

- Os alunos usaram a calculadora como uma caixa preta, sem olharem para as interpretações significativas das situações problemáticas;
- Cada aluno trabalhava sobre e na sua calculadora, virando-se para o próprio trabalho e não partilhando ou discutindo com o colega.

A calculadora pode levar pois a um trabalho menos partilhado, sucedendo o contrário quando o ecrã da calculadora era reproduzido por um projector de vídeo num quadro visível para toda a turma.

Um papel que usualmente é reservado à calculadora gráfica é o de confirmação dos resultados obtidos analiticamente. De acordo com essa ideia parecem estar diversos autores quando referem o facto de os alunos dizerem que a calculadora gráfica lhes proporciona um meio para confirmar os resultados obtidos algebricamente (Penglase & Arnold, 1996; Waits & Demana, 2000; Rocha, 2000).

Um outro papel que normalmente é reservado à calculadora é o de alternativa à dificuldade de resolver uma questão por processos analíticos. De acordo com esta opinião parece estar Rocha (2000) quando refere que os alunos reconhecem na calculadora a potencialidade de os poder ajudar quando não são capazes de resolver uma tarefa por processos de papel e lápis.

Rocha (2000) refere ainda que os alunos recorrem também à calculadora gráfica sempre que explicita ou implicitamente é necessária a elaboração de um gráfico, ou se pretenda resolver uma equação ou uma inequação.

Assim, no seu estudo, Rocha (2000) sistematiza o tipo de utilização da calculadora gráfica, por cada um dos alunos envolvidos, em três metáforas:

- Como um laboratório: recurso à tecnologia com intenções de natureza exploratória, no sentido de conhecer melhor uma determinada situação;
- Como uma tábua de salvação: recurso à tecnologia com o intuito de ultrapassar dificuldades na resolução de questões concretas;
- Como um avião a jacto: recurso à tecnologia pela rapidez de execução que esta lhe permite alcançar em determinadas tarefas.

Assim, poderá dizer-se que a relação que o aluno estabelece com a calculadora gráfica parece depois influenciar o tipo de utilização que dela faz assim como o papel que lhe reserva na resolução das diferentes tarefas.

Além disso, a transformação da calculadora num eficiente instrumento matemático varia de aluno para aluno, factor que deve ser tido em conta no processo de ensino. De acordo com isto parecem estar Guin e Trouche (1999) quando, após as observações dos alunos que utilizaram calculadoras gráficas, no final do ensino secundário, em particular durante as sessões práticas e examinando o trabalho escrito, definiram cinco perfis de alunos, de acordo com o método de trabalho que apresentavam:

- Método de trabalho aleatório: observado em alunos que apresentavam dificuldades semelhantes tanto a trabalhar com a calculadora como com papel e lápis. Na resolução das tarefas, aplicam estratégias copiadas de outras resoluções previamente memorizadas. Revelam pouco controle do que fazem, cingindo-se essencialmente a estratégias de tentativa e erro e sem capacidade de verificação dos resultados obtidos na máquina.
- Método de trabalho mecânico: observado em alunos que usam a calculadora para fazer algumas explorações e manipulações simples. O seu raciocínio na resolução das tarefas apoia-se na acumulação de resultados consistentes da calculadora gráfica. Revelam pouco controle do que obtém a partir da calculadora, sem recurso ao conhecimento matemático teórico.
- Método de trabalho variado: observado em alunos que exploram todas as possíveis estratégias ao dispor (calculadora, trabalho de papel e lápis, conhecimento matemático teórico). O seu raciocínio na resolução das tarefas baseia-se na comparação e confrontação de todas as informações, manifestando controlo do processo. Revelam capacidade de testar uma grande diversidade de estratégias de resolução das tarefas: por vezes, mais ancoradas no trabalho com a calculadora, noutras mais apoiadas no conhecimento matemático teórico.
- Método de trabalho racional: observado em alunos que fazem um uso reduzido da calculadora gráfica, trabalhando essencialmente com papel e lápis. Os alunos revelam um forte controlo do processo de resolução, confiando nas inferências que fazem ao raciocinar.
- Método de trabalho teórico: observado em alunos que usam o conhecimento matemático teórico como um recurso sistemático. O seu raciocínio é baseado em analogias e fazem uma interpretação excessiva

dos factos, teorizando tudo o que obtêm na calculadora. Revelam uma capacidade razoável de verificar os resultados da calculadora gráfica.

Assim, estes autores defendem que ter em consideração a forma como os alunos tipicamente usam a calculadora pode ajudar os professores a conduzir os alunos ao melhor uso e compreensão da tecnologia.

As calculadoras gráficas na sala de aula

Como se sabe, a sociedade em que vivemos é cada vez mais tecnológica e, por isso, a Escola deve, a todos os níveis, acompanhar esta evolução. Como refere Ponte (1986), nesta sociedade, "quem não for capaz de utilizar e dominar minimamente os processos informáticos correrá o risco de estar desinserido na sociedade do futuro, como um analfabeto está na sociedade de hoje" (p.5). Assim, de acordo com o mesmo autor, a escola tem de responder criticamente ao desafio tecnológico, sob pena de formar cidadãos sem capacidade de compreensão dos processos informáticos. Assim, o professor deve criar tarefas matemáticas que tirem vantagem da tecnologia (NCTM, 2000).

Existem algumas tarefas que parecem influenciar o uso espontâneo da calculadora gráfica. Uma das características principais das tarefas escolhidas pelos alunos para usar a calculadora gráfica é quando estas começam com a frase "elabora um gráfico". Além disso, a presença de uma função ou equação num problema, mesmo sem indicações para elaborar um gráfico, também interfere com o uso calculadora gráfica por parte dos alunos. O uso principal da calculadora gráfica é, precisamente, a elaboração de gráficos (Burril et al., 2002). Por outro lado, os mesmos autores referem que os alunos fazem um uso mínimo da calculadora gráfica quando as tarefas não requerem uma resposta com o gráfico.

De acordo com esta opinião parecem estar Dahland e Lingefjard (1996), quando afirmam que os alunos vêm os problemas de Matemática como de diferentes tipos. Alguns são considerados mais adequados do que outros para resolver com a calculadora gráfica. Nalguns casos, os investigadores encontraram alunos que usavam a tecnologia para investigar e explorar mas, em tarefas que não precisavam de representação gráfica, o uso da calculadora era mínimo.

Também Rocha (2000), quando estudou a utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática, concluiu que o tipo de tarefa proposta ao aluno interferia na forma como este utilizava a calculadora gráfica.

Além disso, segundo Guin e Trouche (1999), os alunos tendem a usar os métodos ilustrados e preferidos pelos professores. Nalguns casos os professores deixam que os alunos desenvolvam por si a sua capacidade de usar a calculadora gráfica; noutros casos o uso da calculadora pelo aluno é moldado pelas decisões e intervenções do professor.

A simples introdução da calculadora gráfica na sala de aula não chega para marcar a diferença na aprendizagem do aluno. Em adição à forma como a tecnologia é usada, o tempo que se gasta com ela é um aspecto importante. Aliás, alguns factores, nomeadamente como as ferramentas são usadas na sala de aula e a existência de conhecimentos matemáticos, são fundamentais para determinar que conhecimentos e capacidades são adquiridos pelos alunos que usam a calculadora gráfica e a forma como eles empregam esses conhecimentos e capacidades (Burril et al., 2002).

Guin e Trouche (1999) apresentam algumas sugestões para os professores organizarem o ensino de modo a tornar a calculadora num eficiente instrumento matemático. Uma das sugestões refere-se à organização da sala, devendo procurar-se que a manipulação da calculadora seja visível. Outra sugestão refere-se ao tempo dispendido a ensinar a trabalhar com a calculadora gráfica. Deverá ser realizado trabalho de natureza muito prática e demorando o tempo suficiente para que os alunos verifiquem as várias representações, de modo a diferenciá-las, coordená-las e perceber a linguagem de cada uma.

Assim, os professores deviam conseguir ensinar os alunos a usar as calculadoras com profundo conhecimento das suas capacidades e limites. Deveriam também saber distinguir entre os vários comportamentos dos alunos para poderem integrar as actividades certas quando se está a utilizar a calculadora gráfica. Os alunos beneficiariam também se confrontassem as limitações que a tecnologia tem, para que pudessem encontrar uma forma de melhor dar uso a esta. A tentativa de explicar essas limitações existentes pode levar a uma melhor compreensão da Matemática.

Desta forma, os alunos precisam desenvolver uma dupla competência para beneficiarem do uso desta tecnologia. Por um lado, precisam entender as capacidades da calculadora gráfica e quais os seus limites. Por outro lado, precisam de conhecimentos básicos de Matemática para uma correcta interpretação dos resultados obtidos com a calculadora gráfica. Para isso, é importante a escolha de tarefas que permitam desenvolver essa dupla competência.

Articulação entre as diferentes representações no estudo de uma função

Um aspecto importante identificado reside na dificuldade que a maioria dos alunos têm em articular determinada informação ou conceito por mais de uma forma.

Alguns problemas podem ser abordados por várias formas. De um modo geral, consideramos estar a ajudar os nossos alunos quando lhes apresentamos ou proporcionamos oportunidades de contactar com diferentes abordagens e discutimos os méritos de cada uma, com o objectivo de proporcionar uma escolha informada. Esta preocupação parece presente em Burril et al. (2002), quando referem que alguns investigadores apontaram que o uso de múltiplas representações não quer dizer que os alunos consigam estabelecer uma ligação entre estas. Acima de tudo, estes investigadores chegaram à conclusão que conciliar vários tipos de informação não é algo que surja de forma intuitiva, mas algo que tem que ser ensinado. Ou seja, os alunos têm que aprender a resolver problemas com informação gráfica e analítica, pois de acordo com Boers e Jones (1994), a maioria dos alunos tem dificuldade em integrar a informação obtida por processos algébricos com informação obtida a partir da calculadora gráfica. O ensino da Matemática tem que abordar ambos os processos para que a calculadora gráfica possa realmente corresponder ao que esperamos dela.

Também Hennessy e al. (2001) referem que a relação entre dados numéricos, gráficos e equações algébricas constitui o principal problema, pois os alunos consideram muito difícil compreender a relação entre as diferentes representações. É-lhes difícil apreender gráficos como abstracções e desenvolver uma ligação entre a forma algébrica e a gráfica. Esse estudo mostrou que a calculadora gráfica pode moldar a actividade matemática, servindo para catalizar, facilitar e reverter papéis.

Também Waits e Demana (2000) chegaram à conclusão que uma abordagem equilibrada entre as técnicas de papel e lápis e o uso das tecnologias no ensino da Matemática é essencial. Por abordagem equilibrada entendem um uso apropriado de papel e lápis, e calculadora numa base regular. Quando usadas de uma forma apropriada, podem-se complementar umas às outras. Uma estratégia que os professores usam para atingir um bom equilíbrio, é ter os alunos rotinados na aplicação de cada uma das três estratégias seguintes:

- Resolver problemas usando papel e lápis e sustentar os resultados obtidos usando a tecnologia;
- Resolver problemas usando a tecnologia e confirmar os resultados usando técnicas de papel e lápis;
- Resolver problemas para os quais escolham qual a forma mais apropriada, técnica de papel e lápis, técnicas de calculadora ou uma combinação das duas.

Estas estratégias ajudarão os alunos a perceber qual o uso apropriado da tecnologia (Waits & Demana, 2000).

Em particular, uma função pode ser representada por uma frase, por uma fórmula algébrica, por uma tabela de valores ou por um gráfico. Os alunos precisam de trabalhar com cada uma das representações, traduzir umas nas outras, utilizando papel e lápis ou tecnologia gráfica.

As tecnologias gráficas são pois *companheiras* do pensamento matemático (e não *substitutas*), com o objectivo de aumentar consideravelmente a compreensão das funções e seus gráficos. Assim, a tecnologia não deve ser usada para substituir a compreensão e a intuição mas sim para a fortalecer (NCTM, 2000). Aliás, retomando o programa de Matemática A de 2001, é referido no mesmo que "a abordagem das funções reais considerará sempre estudos dos diferentes pontos de vista – gráfico, numérico e algébrico – sobre tipos simples de funções..." (DES, 2001a, p. 2). Ainda no mesmo documento é destacado o facto do uso da calculadora gráfica ser obrigatório e referidos alguns tipos de actividade matemática em que há vantagens (tendo em conta a investigação e as experiências realizadas até hoje) que se explorem com a calculadora gráfica, nomeadamente:

- abordagem numérica de problemas;
- uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos gráficos;
- uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos algébricos;
- modelação, simulação e resolução de situações problemáticas;
- uso de cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
- uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável, com métodos algébricos;
- condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjecturas;
- estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções;
- antevisão de conceitos do cálculo diferencial;
- investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática (DES, 2001a, p. 15).

É referido ainda nesse mesmo documento, que os alunos não devem limitar-se a copiar o que aparece no visor da calculadora. Devem interpretar e ter uma atitude crítica perante o que aparece, pois a calculadora gráfica pode apresentar uma visão distorcida da realidade. Os alunos devem sempre confrontar os resultados obtidos analiticamente com os resultados obtidos através da calculadora (DES, 2001a).

À guisa de conclusão, pode afirmar-se que, *partindo* da tecnologia, *passando* pela tecnologia ou *terminando* com a tecnologia, todos os métodos poderão ser correctos, pelo que, na sua selecção, se deve optar pelo mais adequado à resolução do problema concreto que se tenha que resolver.

As calculadoras gráficas e os exames nacionais

Um aspecto importante e delicado de qualquer processo de ensino/aprendizagem é a avaliação. Avaliar os conhecimentos matemáticos dos estudantes significa reunir e analisar dados sobre o que estes sabem a respeito de conceitos e processos matemáticos (NCTM, 2000).

Assim, segundo o programa de Matemática A de 2001, pretende-se que "a avaliação em Matemática não se restrinja a avaliar o produto final mas também o processo de aprendizagem e permita que o estudante seja um elemento activo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem" (DES, 2001a, p.12). Portanto, o professor deve diversificar as suas formas de avaliação, não as reduzindo apenas aos testes escritos. Deve propor um conjunto de tarefas de extensão e estilo variáveis, individuais e em grupo, de modo que, no conjunto, reflictam as finalidades do programa. Entre elas devem constar demonstrações, composições/reflexões, projectos, relatórios, resolução de problemas, etc.

Mas os testes escritos também são importantes e têm aspectos positivos. Eles deverão aparecer em momentos de síntese e cumprir uma função diferente da dos outros instrumentos. Até porque ao nível do ensino secundário (e até mesmo do terceiro ciclo) existirá uma prova de âmbito nacional, os chamados exames nacionais. Assim, o professor deve ter em conta na sua avaliação a existência dessas provas, realizando provas de estilos diversificados, incluindo, por exemplo, algumas questões de escolha múltipla, que preparem os alunos para enfrentarem os momentos de avaliação externa (DES, 2001a).

No ano lectivo 1998/1999 passou a ser obrigatória a calculadora gráfica nos exames nacionais, seguindo a obrigatoriedade dos programas de Matemática.

Mas algumas questões se levantam: Que alterações sofreram os exames? Que questões passaram a ser resolúveis com a calculadora gráfica? Como é que a calculadora é utilizada nos exames nacionais? Quais os conteúdos matemáticos envolvidos nessas questões? Qual o peso dessas questões no total da prova? Teria todo o interesse analisar e reflectir sobre estas questões pois com certeza que as suas respostas influenciam todo o processo de ensino/aprendizagem e a utilização que é feita da calculadora gráfica na sala de aula. Neste estudo apenas se procedeu a um pequeno levantamento de questões que têm saído nos exames nacionais nos últimos anos.

No quadro abaixo apresenta-se a identificação das questões presentes nos exames nacionais desde 2001, em uma das chamadas/fases, em que se solicita o uso da calculadora gráfica, assim como os conteúdos envolvidos e a cotação da questão:

Ano	Questão	Tema programático	Cotação (num total de 200 pontos)
2001	4.2.	Funções	15 Pontos
2002	2.2.a	Funções	16 Pontos
2003	4.	Funções	16 Pontos
2004	2.2b	Funções	14 Pontos
2005	3.1.	Funções	14 Pontos
2006	7.	Funções	14 Pontos

Quadro 3.1 – Questões para uso da calculadora gráfica nos exames nacionais

Em seguida apresenta-se o enunciado das referidas questões, seguida de uma breve análise de alguns aspectos.

Questão 4.2. (Ano 2001)

Considere a função, de domínio $\Re^+$, definida por $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

A equação $f(x)=x-12$ tem exactamente duas soluções. Recorrendo à sua calculadora, resolva graficamente esta equação. Apresente as soluções com aproximação às décimas. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta.

Questão 2.2.a (Ano 2002)

Considere as funções f e g, de domínio $\Re$, definidas por:

$$f(x)=\frac{1}{3}+2e^{1-x} \text{ e } g(x)=2\sin x-\cos x$$

Recorrendo à calculadora, determine as soluções inteiras da inequação $f(x)>g(x)$, no intervalo $[0,2\pi]$. Explique como procedeu.

Questão 4. (Ano 2003)

De uma função f, de domínio $\Re$, sabe-se que a sua derivada é dada por:

$f'(x)=(x+1)e^{x}-10x$

Seja A o único ponto de inflexão do gráfico de f.

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine a abcissa do ponto A, arredondada às décimas.

Explique como procedeu. Inclua, na sua explicação, o(s) gráfico(s) que obteve na calculadora.

Questão 2.2.b (Ano 2004)

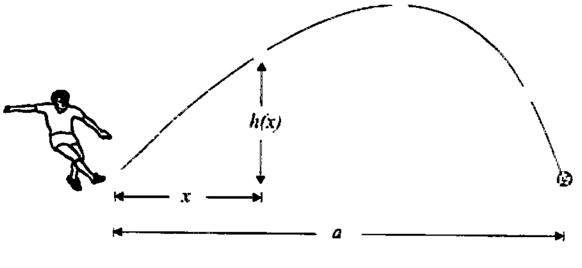
Considere a função f, de domínio $\Re\setminus\{0\}$, definida por $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{x}$.

O conjunto solução da inequação $f(x)\leq 3+\ln x$ é um intervalo fechado $[a,b]$. Recorrendo à sua calculadora, determine, graficamente, valores para a e b, arredondados às centésimas.

Nota: apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico ou gráficos obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

Questão 3.1. (Ano 2005)

Na figura está representada a trajectória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador da selecção portuguesa, durante um treino de preparação para o Euro 2004.



Designou-se por a a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu. Considere a função h definida em $[0,a]$ por $h(x)=2x+10\ln(1-0{,}1x)$.

Admita que $h(x)$ é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projecção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.

Recorrendo à calculadora, determine o valor de a, arredondado às centésimas. Explique como procedeu, apresentando todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora.

Questão 7. (Ano 2006)

Considere a função f definida no intervalo [1,2] por $f(x)=\cos(x-1)+\ln x$. Para um certo valor real positivo a e para um certo valor real b, a função g, definida no intervalo [1,2] por $g(x)=a.f(x)+b$, tem por contradomínio o intervalo [4,5]. Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, determine os valores de a e b, arredondados às centésimas. Explique como procedeu. Na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que tenha visualizado na calculadora, bem como coordenadas relevantes de algum, ou alguns, pontos. Sempre que, em valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve um mínimo de três casas decimais.

Da análise do quadro e das questões podemos concluir que o tema programático envolvido nas questões para resolver com recurso à calculadora gráfica foi sempre Funções. Quase sempre foi solicitada a resolução de equações ou de inequações ou a determinação de um determinado valor, a partir do gráfico da função. Ao longo de todos os exames apenas tem aparecido uma questão que obriga à utilização da calculadora gráfica e a sua cotação tem variado entre 14 a 16 pontos num total de 200 pontos. Ao longo do Exame, nas questões de resposta aberta, os alunos podem recorrer ainda à calculadora gráfica mas apenas para efectuar cálculos numéricos.

Assim, os alunos têm utilizado a calculadora gráfica nos exames nacionais para efectuarem cálculos numéricos (que uma calculadora não gráfica faz) e para elaborar gráficos explorando algumas potencialidades gráficas da calculadora.

Parece então que a calculadora está a ser sub-utilizada mesmo nos exames nacionais.

Num estudo conduzido por Graham et al. (2003), cujo objectivo era averiguar a forma como os alunos usam a calculadora num momento de avaliação formal, permitiu identificar três categorias na forma como a calculadora é usada:

- Quasi-científica – a calculadora é utilizada da mesma forma que uma calculadora científica. Não são utilizadas quaisquer potencialidades gráficas da calculadora, não se traduz em qualquer ganho para o aluno o facto de poder trabalhar com uma calculadora gráfica;
- Semi-proficiente – são utilizadas algumas potencialidades gráficas da calculadora e daí resulta algum benefício para o aluno, no entanto a melhor utilização ou um uso mais eficiente não é feito, o aluno está a par das potencialidades gráficas da calculadora mas simplesmente não sabe servir-se delas;
- Proficiente – é feito o uso apropriado das potencialidades da calculadora de forma a obter a mais eficiente solução para a tarefa que possui entre mãos. O aluno está a par da diversidade de opções na calculadora e está apto para seleccionar um método apropriado ou opção para chegar à solução.

As conclusões apresentadas por este estudo apontavam algumas razões descritas pelos alunos para não terem um melhor desempenho na utilização da calculadora:

- Familiaridade – o uso da calculadora por parte dos alunos é condicionada pela familiaridade, ou pela sua falta, com que trabalham com a máquina gráfica.
- Proibição – a proibição do uso de calculadoras gráficas em exames anteriores condicionou de certa forma uma maior e melhor utilização da calculadora. Os alunos devem ser encorajados a fazerem um uso mais extensivo da calculadora durante os seus estudos para que estejam mais familiarizados e mais confiantes no seu estudo;

- Manuais escritos – o uso de manuais escritos pelo ministério não encoraja, nem desencoraja, o uso da calculadora. No entanto constatou-se que em, problemas idênticos aos existentes nos livros saídos nos exames e que não requerem a calculadora, os alunos seguem a resolução sugerida pelo livro.
- Critérios de correcção – os professores revelam-se relutantes em encorajar os alunos a usarem a calculadora gráfica por causa dos alunos puderem vir a ser penalizados face aos critérios de correcção, pois ao usarem a calculadora gráfica não se consegue visualizar todos os passos explicitados nos critérios de avaliação.

Consideram ainda existirem duas maneiras de combater esta situação: uma maior orientação das informações dos exames nomeadamente nos critérios de avaliação e uma grande familiaridade com a calculadora gráfica, para que tenham confiança em utilizar a calculadora gráfica nos exames nacionais.

A propósito dos critérios de correcção em Portugal analisamos em seguida o que se passou, por exemplo, na questão 7 do Exame Nacional de 2006. Eles são apresentados desta forma:

Determinar o máximo de f 5

Apresentar o gráfico correcto, no seu domínio [1,2]........... 1

Assinalar no gráfico o ponto de ordenada máxima............ 2

Indicar o máximo 2

Referir que o mínimo de f é 1.. 2

Determinar os valores pedidos...7

Concluir que a + b = 4 e 1,297a + b = 5 3

Resolver o sistema 2

Apresentar os valores de a e de b arredondados
às centésimas...2

Parece-nos importante destacar duas situações. A primeira prende-se com o facto de a questão colocada não ser apenas resolúvel com a calculadora gráfica. Os alunos apenas tinham que recolher alguns valores do gráfico da função para depois equacionarem o problema. A outra situação prende-se com o facto de não vir explícito nos critérios de correcção se a resolução do sistema tem se ser realizada analiticamente ou se podia ser resolvido na calculadora gráfica. Tal como está, parece indicar que o aluno tem mesmo que resolver o sistema analiticamente, pois afirma no critério: "resolver o sistema".

Síntese

Existem diversas vantagens, para a utilização da calculadora gráfica na sala de aula, apresentadas por diferentes autores, como por exemplo Ruthven (1992), Dunham e Dick (1994), Drijvers e Doorman (1996), Demana e Waits (2000) e Hennessy et al. (2001). No entanto, os alunos revelam algumas dificuldades em interpretarem a informação obtida pela calculadora e relacioná-la com a informação obtida analiticamente (Boers & Jones, 1994; Hennessy et al., 2001; Burril et al., 2002). O uso de múltiplas representações não é sinónimo de ligação entre elas, pelo que Waits e Demana (2000) consideram essencial uma aproximação equilibrada entre técnicas de papel e lápis e o uso das tecnologias no ensino da Matemática.

A calculadora gráfica tende a assumir, na resolução das tarefas, diferentes papéis por parte dos alunos. Doerr e Zangor (2000) identificaram cinco padrões e modos de utilização da calculadora pelos alunos: ferramenta computacional, ferramenta transformacional, ferramenta de recolha e análise de dados, ferramenta de visualização e ferramenta de verificação.

Rocha (2000) também refere diferentes papéis que usualmente são reservados pelos alunos à calculadora gráfica: confirmação dos resultados obtidos analiticamente (papel também referido por Penglase e Arnold, 1996 e Waits e Demana, 2000); alternativa à dificuldade de resolver por processos analíticos; resolução de questões onde seja necessário a elaboração de gráficos e resolução de equações ou inequações.

Por outro lado, a transformação da calculadora gráfica num eficiente instrumento varia de aluno para aluno e Guin e Trouche (1999) identificaram cinco perfis de alunos, de acordo com o método de trabalho: método de trabalho aleatório, método de trabalho mecânico, método de trabalho variado, método de trabalho racional e método de trabalho teórico.

O tipo de tarefas também parece influenciar o modo de utilização da calculadora gráfica (Rocha, 2000). O factor que parece exercer maior influência é quando no enunciado é pedido um gráfico ou onde precisam de uma representação gráfica para responder à tarefa (Dahland & Lingefjard, 1996; Burril et al., 2002).

Outro factor que parece influenciar a utilização da calculadora gráfica é a cultura da sala de aula (Guin & Trouche, 1999; Burril et al., 2002). Os alunos tendem a seguir os métodos ilustrados e preferidos do professor. Doerr e Zangor (2000) sugerem que o papel, o conhecimento e as crenças do professor influenciam a forma como este encoraja os alunos a usar a calculadora gráfica.

Um outro aspecto a ter em conta é a forma como a calculadora é usada nos momentos de avaliação formal. Graham et al. (2003) identificaram aqui três categorias: quasi-científica; semi-proficiente e proficiente. Nos exames nacionais em Portugal tem aparecido, nos últimos anos, uma questão para resolver explicitamente, com recurso à calculadora gráfica, variando a sua cotação entre 14 a 16 pontos num total de 200 e essa questão reporta-se ao tema Funções. Nas outras questões de resposta aberta recomenda-se aos alunos que não recorram à calculadora gráfica a não ser para efectuarem eventuais cálculos numéricos.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA

Este capítulo começa por justificar as opções metodológicas subjacentes à presente investigação. Procede-se de seguida a uma apresentação detalhada dos processos que foram desenvolvidos, explicando-se assim, a forma como foram seleccionados os alunos. Posteriormente refere-se as técnicas de recolha de dados utilizados e descreve-se a forma como estes foram analisados.

Opções metodológicas

Pretende-se com este estudo compreender em que situações, porquê e como é que os alunos utilizam a calculadora gráfica na resolução de questões no âmbito do estudo de Funções no 12º ano de escolaridade. Para tal, procura-se responder às seguintes questões: (1) Que relação estabelecem os alunos com a calculadora gráfica? (2) Que razões levam os alunos a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica na resolução de uma questão? (3) Que papel reservam os alunos à calculadora gráfica na resolução de uma questão?

Assim, este estudo centra-se na forma de utilização, por parte dos alunos, da calculadora gráfica e nas razões que poderão estar na origem desse tipo de utilização, ou seja, a ênfase é colocada nos processos utilizados e não nos produtos ou resultados obtidos.

Atendendo ao objectivo do estudo atrás referido, torna-se evidente a importância de conhecer e procurar compreender a forma como os alunos utilizam a calculadora em diferentes circunstâncias. Essa utilização não poderá ser estudada separadamente do contexto em que decorre, na medida em que não deixará de ser influenciada por este. Importa pois conhecer todas as circunstâncias que a envolvem, uma vez que todos os aspectos são importantes, pelo que será necessário o contacto directo e prolongado entre a investigadora e os alunos. Desta forma, importa nesta investigação adoptar uma metodologia que aborde os alunos no seu contexto natural de trabalho, que pretenda responder a questões de natureza explicativa, que não exerça qualquer tipo de controlo sobre a situação, que permita estudar os alunos correspondendo a critérios bem definidos e que permita obter um produto final de natureza descritiva e analítica.

Estas características apontam para a escolha de uma metodologia de natureza qualitativa, pois apresenta as cinco características que, segundo Bogdan e Biklen (1991), caracterizam um estudo dessa natureza: (a) os dados são recolhidos directamente do ambiente natural, sendo a investigadora o instrumento principal; (b) os dados recolhidos são de natureza descritiva; (c) a ênfase é colocada nos processos e não nos resultados ou produtos; (d) a análise de dados é efectuada de forma indutiva, não sendo recolhidos elementos com o intuito de confirmar hipóteses previamente formuladas e (e) é fundamental o significado atribuído pelos participantes no estudo às vivências em análise.

Tendo em conta as considerações anteriores e o facto de não se pretender fazer generalizações para outros ambientes de aprendizagem, mas antes compreender os processos e as razões que estão na base do tipo de utilização das calculadoras que caracteriza os alunos envolvidos, a opção pela realização de estudos de caso parece ser a mais adequada. Com efeito, como referem Matos e Carreira (1994) e Yin (1989), esta metodologia é particularmente adequada quando os aspectos fundamentais nas questões em estudo são o como e o porquê, quando existe um controlo reduzido da parte do investigador sobre os acontecimentos, e quando o foco do estudo é um fenómeno que se passa num contexto real e que não pode ser isolado desse contexto. Gil (1996) também refere que o estudo de caso "é caracterizado pelo estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objectos, de maneira que permita o seu amplo e detalhado conhecimento" (p. 58). Daí se ter optado por estudar três alunos.

Critérios de selecção dos intervenientes

A escolha do ano de escolaridade

Neste estudo pretende-se analisar a forma com a calculadora gráfica é utilizada e as razões que estão na origem dessa utilização, nas suas diversas potencialidades. Sendo a disciplina de Matemática no ensino secundário trianual, é no final dos três anos que é suposto os alunos "dominarem" todas as potencialidades da calculadora, assim como os conceitos fundamentais sobre o tema "Funções". Parece-nos então ser o 12º ano de escolaridade o ano ideal para a realização do estudo em causa, pois à partida proporciona um contacto com alunos mais seguros e com maior saber em relação ao uso da calculadora gráfica nas Funções. Além disso, este ano de escolaridade permite também observar até que ponto os alunos lidam com a calculadora gráfica e o Exame Nacional de Matemática.

A escolha da turma

Devido ao objectivo do estudo pareceu-nos ser conveniente a escolha de uma turma que tivesse uma média de aproveitamento minimamente razoável na disciplina de Matemática, pois um domínio muito reduzido ao nível dos conteúdos podia dificultar o envolvimento dos alunos nas diferentes tarefas matemáticas e deste modo dificultar, ou até mesmo impedir, o acesso à informação pretendida.

Foi também necessário optar por uma turma em que o horário das aulas de Matemática não fosse incompatível com o da investigadora e cujo professor não levantasse qualquer obstáculo à assistência das suas aulas.

Assim, em Setembro de 2005, após consulta das listagens das turmas, dos horários das mesmas e do horário da investigadora, procedeu-se à selecção da turma numa Escola Secundária com Terceiro Ciclo do Ensino Básico, situada numa cidade do Baixo Alentejo. A turma seleccionada era então denominada décimo segundo B e pertencia ao primeiro agrupamento do Curso Geral. Nessa altura foi contactado o docente da turma, o qual se disponibilizou de imediato para o efeito.

A escolha dos casos

Uma das principais características de um estudo de caso diz respeito à sua circunscrição a um fenómeno específico, bem delimitado. Relativamente a esse fenómeno ou situação, importa escolher um ou mais casos que correspondam a instâncias do fenómeno (Merriam, 1988). Na presente investigação, o universo dos casos a estudar correspondia ao conjunto de alunos de uma turma do décimo segundo ano. Deste universo optou-se por seleccionar três alunos que traduzissem alguma diversidade em relação às questões em estudo. A selecção dos casos é um aspecto de grande importância em qualquer estudo de caso, pois é a selecção daqueles que vão ter um papel preponderante ao longo de toda a investigação.

De modo a conhecer a opinião geral de todos os alunos da turma acerca da utilização da calculadora, de como a utilizavam e em que circunstâncias, a investigadora assistiu a algumas aulas. Este processo iniciou-se em Janeiro de 2006, após autorização do Conselho Executivo da Escola (Anexo I) e dos encarregados de educação dos alunos da turma (Anexo II).

Foi com base nestas observações que foram seleccionados os três alunos que constituíram o estudo de casos. Foram então seleccionados um rapaz, o Francisco, e duas raparigas, a Jacinta e a Lúcia, os quais nos pareceram ter posturas diferentes tanto em relação à Matemática como à forma de utilização da calculadora e em que circunstâncias a utilizavam.

Não só na selecção dos alunos, mas também no relacionamento com cada um deles ao longo de todo o trabalho que realizámos, sempre tivemos em conta algumas exigências éticas do processo de investigação, apontadas por Tuckman (2000). Uma delas é o direito à privacidade ou à não participação. A investigadora obteve o consentimento directo de todos os encarregados de educação dos alunos. Outras duas exigências são o direito a permanecer no anonimato e o direito à confidencialidade. Daí que mantenhamos neste trabalho o seu anonimato, identificando-os por pseudónimos (Francisco, Lúcia e Jacinta). Outra exigência é o direito a contar com o sentido de responsabilidade do investigador, em que este deve assegurar que os participantes não serão prejudicados por terem participado. A investigadora quando escreveu aos encarregados de educação referiu que o estudo em nada interferia com a leccionação da disciplina nem com a classificação dos alunos na mesma (Anexo II).

Recolha de dados: Organização e instrumentos

Esta secção oferece uma explicação sobre os aspectos gerais do processo de recolha de dados, bem como uma descrição detalhada relativamente às fontes de informação que sustentaram a presente investigação, referindo os respectivos instrumentos utilizados.

Segundo Yin (1989), os dados e a sua recolha assumem grande importância na investigação qualitativa, pelo que, tendo-se por ela optado para a nossa investigação, procurámos diversificá-la. De acordo com esta ideia também parece estar Tuckam (2000), quando aconselha a que nos estudos de caso qualitativos sejam utilizadas três técnicas de recolha de dados: observações directas, entrevistas e análise documental.

A recolha de dados relativa a esta investigação foi directa e inteiramente feita pela investigadora. Esta recolha foi realizada durante o ano lectivo 2005/2006.

Observações

As observações constituíram a primeira forma de recolha de dados que foi utilizada. Segundo Cohen e Manion (1990), há dois tipos de observação: observação participante e observação não participante. Neste estudo a investigadora foi um observador não participante, pois, segundo os mesmos autores, "um observador não participante permanece separado das actividades do grupo que está investigando e evita ser membro dos mesmo" (Cohen & Manion, 1990, p. 164).

O professor da turma anunciou a presença da investigadora aos alunos na aula anterior à primeira observação.

A investigadora assistiu a treze aulas de quarenta e cinco minutos, no espaço de tempo de Janeiro a Março de 2006, quando estavam a ser leccionadas as funções exponenciais e as funções logarítmicas. Nessas aulas a investigadora sempre procurou ter um papel não interveniente, sentando-se, no entanto, em diversos lugares na sala, junto dos alunos de modo a poder observar quando e como é que os alunos utilizavam a calculadora e que ligações estabeleciam entre as diferentes informações, no contexto sala de aula.

Estas observações também serviram para a investigadora conhecer o ambiente em que decorriam as aulas, quais os aspectos mais valorizados em relação à abordagem gráfica ou analítica e como, para quê e em que circunstâncias era utilizada a calculadora gráfica.

Em cada aula observada foram recolhidos diversos dados através de notas de campo registadas pela investigadora. As notas de campo pretendiam captar da forma mais exaustiva possível todo o decorrer da aula, atendendo a aspectos mais específicos, como por exemplo, como e em que situações era utilizada a calculadora gráfica e que tipo de abordagem era mais valorizada.

A seguir a cada aula foi sempre realizado, pela investigadora, um registo escrito sobre a mesma.

Análise documental

Outra técnica de recolha de dados foi a análise documental.

Dois tipos de documentos foram analisados, uns relativos às aulas observadas e outros relativos a situações de teste: resolução escrita dos exercícios no caderno diário e resolução escrita do Teste Nacional Intermédio.

No final de cada aula observada a investigadora tirou cópias do caderno diário de alguns alunos de modo a ter um registo da resolução dos exercícios efectuada ao longo das mesmas. A análise destes documentos permitiu uma compreensão mais concreta da forma de resolução dos exercícios.

O segundo tipo de documentos consistiu na cópia da resolução escrita, por parte dos alunos envolvidos no estudo de caso, do Teste Nacional Intermédio de Matemática (Anexo III) que os alunos realizaram na sala de aula, mas num ambiente tipo Exame Nacional. Este teste foi realizado no dia 17 de Março de 2006, em simultâneo por todas as escolas do país que aderiram ao mesmo. A adesão da Escola e do professor era voluntária. A Escola Secundária onde decorreu a investigação aderiu a esse projecto e o professor da turma envolvida neste estudo também. Assim os alunos estudo de caso realizaram esse Teste Intermédio.

Os conteúdos presentes no Teste Intermédio eram os do tema "Probabilidades" e alguns do tema "Funções", leccionados no décimo segundo ano até ao momento. Este teste tinha como objectivo familiarizar os alunos com um teste tipo exame e proporcionar aos mesmos um *feedback* sobre os seus conhecimentos até esse momento. A estrutura do teste era semelhante à do Exame Nacional, constituído por sete questões de escolha múltipla (quatro do tema "Funções" e três do tema "Probabilidades") e quatro questões de resposta aberta (todas do tema "Funções").

Entende-se no presente estudo por questões de resposta aberta aquelas em que os alunos tinham que apresentar o seu raciocínio, indicando todos os cálculos que efectuavam e todas as justificações necessárias até chegarem à solução única do problema. Pelo contrário, nas questões de escolha múltipla os alunos tinham que seleccionar a letra correspondente à alternativa que estava correcta.

A correcção dos testes intermédios dos alunos ficou a cargo do professor da turma.

Duas dessas questões de escolha múltipla estiveram depois presentes na proposta de trabalho apresentada na entrevista, de modo a poder observar a forma como os alunos as resolveram, uma vez que no Teste Intermédio apenas transcreveram para a folha de resposta a letra correspondente à opção correcta.

Das quatro questões de resposta aberta presentes nesse Teste Intermédio apenas numa alínea (a questão 1.2) era solicitado o recurso à calculadora gráfica, situação semelhante à que tem acontecido nos exames nacionais, que a seguir se transcreve:

> Um estudo de mercado, encomendado por uma empresa de venda de produtos alimentares, concluiu que a quantidade de azeite *Azeitona do Campo*, vendida num mês por essa empresa, depende do preço de venda ao público, de acordo com a função
> $V(x) = e^{14-x} \quad (x > 0)$
> Sendo x o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro desse azeite e $V(x)$ a quantidade vendida num mês (medida em litros).
> Utilize a calculadora gráfica para resolver graficamente o seguinte problema:
> Entre que valores deve variar o preço de venda ao público de um litro de azeite para que o lucro mensal seja superior a dezasseis mil e quinhentos euros?
> Apresente os valores em euros, arredondados aos cêntimos (de euro).
> Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

Na resolução desta questão pretendiam que os alunos recorressem ao menu dos gráficos e que escrevessem a expressão de $L(x)$ em y_1 e o valor 16500 em y_2 e que depois pedissem os pontos de intersecção dos dois gráficos. Para a folha de resposta devia ser transcrito o gráfico com as coordenadas dos pontos relevantes. Finalmente deveriam indicar entre que valores o x podia variar.

A análise destes documentos permitiu ter uma percepção mais clara de como os alunos em situação de Exame resolvem as questões que lhes são colocadas, com recurso à calculadora gráfica.

Entrevistas

Reconhecemos que há uma grande diferença entre o ambiente de sala de aula e o ambiente de uma entrevista; no entanto, quando entrevistamos um aluno, podemos dar-lhe o tempo que quiser para trabalhar uma determinada questão, e assim podemos seguir mais detalhadamente o seu raciocínio (Borba & Confrey, 1996). Estes factores não são possíveis na sala de aula, pois a quantidade de alunos é elevada e há uma grande diversidade de ritmos de trabalho entre eles. Daí se ter optado, também, por neste estudo se considerar as entrevistas que incluíam, para além de questões relacionadas com a compreensão de diversos aspectos em estudo, questões matemáticas a ser resolvidas pelos alunos.

Assim, as entrevistas constituíram outra forma de recolha de dados que foi utilizada com cada um dos alunos seleccionados. Todas as entrevistas foram directa e exclusivamente conduzidas pela investigadora. Estas entrevistas decorreram durante o mês de Maio de 2006, foram áudio-gravadas, realizadas individualmente e integralmente transcritas pela investigadora.

Pretendia-se que estas entrevistas decorressem numa altura em que já tivessem sido leccionados todos os conteúdos do tema "Funções", daí se ter optado pela sua realização quase no final do ano lectivo.

Antes de realizar as entrevistas houve o trabalho de preparação das mesmas e a selecção das tarefas matemáticas que os alunos iriam efectuar.

Pretendia-se com esta entrevista recolher informação que contribuísse para uma melhor compreensão da perspectiva em que os alunos utilizam a calculadora gráfica, a que funções da calculadora gráfica recorrem para resolver as questões, em que critérios se baseiam para decidir, ou não, pelo recurso a esta, se conseguem estabelecer a ligação entre a abordagem gráfica e abordagem analítica e que dificuldades encontram na utilização da calculadora. Esperava-se igualmente observar se o aluno manifestava uma preferência por uma resolução de carácter analítico ou gráfico e se havia factores que contribuíssem para essa preferência.

Foi agendado com cada aluno estudo de caso um dia de acordo com as suas disponibilidades e a da investigadora.

Nessas entrevistas foi entregue a cada aluno uma folha em branco para a resolução e o enunciado com as questões matemáticas (no âmbito de estudo de

Funções), com o intuito de acompanhar detalhadamente o processo de resolução adoptado por estes. Foi-lhes igualmente pedido que as resolvessem em voz alta, de modo a que ficasse registado a forma de resolução. Inicialmente encontravam-se um pouco nervosos, perguntando coisas do género se podiam resolver a lápis, se podiam utilizar a calculadora,... Mas com o decorrer do tempo passaram a estar à vontade.

A duração destas entrevistas oscilou entre uma hora a uma hora e meia, consoante o entrevistado. Foram sempre realizadas na escola, no gabinete do Departamento de Matemática.

Os alunos resolveram as questões da forma que preferiram (utilizando ou não a calculadora gráfica) e dizendo, quase sempre, as razões que os levavam a optarem por um processo. Ao longo da entrevista também foram manifestando a relação que estabelecem com a calculadora gráfica e o papel que reservam à mesma na resolução de uma questão.

As tarefas propostas aos alunos durante as entrevistas

Ao seleccionar as tarefas matemáticas para a entrevista optou-se por escolher tarefas de natureza idênticas às apresentadas na sala de aula (e inclusivamente às do Exame Nacional). Todas as tarefas apresentadas aos alunos durante as aulas observadas foram, quanto à natureza, exercícios (do tipo exclusivamente circunscrito ao domínio matemático) e alguns problemas de aplicação (que apelam a alguma relação com o contexto real), mas cujo processo de resolução já é quase normalmente conhecido pelos alunos. Assim, na entrevista constam tarefas da mesma natureza. Também se optou, no que se refere ao tipo de resposta exigido para as questões, por questões de resposta fechada (tipo escolha múltipla) e de resposta aberta, pois ao longo das aulas observadas também foram resolvidas questões destes dois tipos (e inclusivamente no Exame Nacional).

Assim, foram seleccionadas sete questões relacionadas com o tema "Funções" já leccionado à turma e claro aos alunos envolvidos no estudo, que serviram de base às entrevistas (Anexo IV).

Das sete questões, três eram de escolha múltipla e quatro de resposta aberta. Qualquer das questões eram resolúveis analiticamente e/ou através da calculadora gráfica. Foi dada liberdade de resolução aos alunos, podendo eles optarem pela via que preferissem (com ou sem recurso à calculadora gráfica), havendo no entanto uma questão que exigia uma abordagem mista (questão quatro).

Apresentam-se em seguida as questões.

Questão 1:

Considere a função $h:\Re \to \Re$ tal que $h(x) = e^{2x-1}$. O valor de $h'(1)$ é:

(A) 0
(B) 1
(C) e
(D) 2e

Esta primeira questão foi seleccionada pois era possível ser resolvida directamente na máquina (de uma forma bastante rápida) no menu dos cálculos. Para isso tinham que ter conhecimento da tecla [*d/dx*] que permite o cálculo da derivada num ponto. Ainda recorrendo à calculadora também podiam calcular a derivada no menu das tabelas, desde que antecipadamente a mesma tivesse preparada para calcular a derivada. No entanto, podia ser resolvida analiticamente pela determinação da função derivada e depois o cálculo da imagem no ponto um.

Questão 2:

Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação:

$\log_3(2-x) \leq 1$

(A) $]-\infty,-1]$
(B) $[-2,1[$
(C) $[-1,+\infty[$
(D) $[-1,2[$

No que se refere à segunda questão ela foi escolhida pois o aluno podia resolver rapidamente a inequação no menu dos gráficos. Para isso tinha que, antes de introduzir a expressão na calculadora, fazer uma mudança de base. Depois de efectuar essa transformação introduzia, por exemplo, a expressão que figura no primeiro membro em y_1 e o valor que figura no segundo membro em y_2 e pedia a intersecção dos dois gráficos e determinava o conjunto solução. No entanto, o aluno podia optar por uma resolução analítica sendo esta um pouco mais morosa, pois para além de resolver a inequação tinha que determinar o domínio para finalmente chegar ao conjunto solução. Esta era uma das questões presentes no Teste Nacional Intermédio.

Questão 3:

Indique o número real que é solução da equação $e^{x-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{4}{3}$

(C) $\frac{5}{3}$

(D) $\frac{7}{3}$

Esta terceira questão também permitia a opção por uma resolução analítica ou com recurso à calculadora. No que se refere à resolução com recurso à calculadora o aluno podia optar por duas vias no menu dos gráficos: ou desenhava dois gráficos e pedia a sua intersecção, ou desenhava o gráfico da função que aparece no primeiro membro e calculava o valor de x quando o y fosse o valor correspondente ao que figura no segundo membro. Tal como a primeira e a segunda questão, esta terceira questão era de escolha múltipla. Pretendia-se ver se esse factor influenciava, ou não, o tipo de resolução. Esta era outra das questões presentes no Teste Nacional Intermédio.

Questão 4:

Considere o polinómio:

$$P(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$$

Decomponha o polinómio em factores (pretende-se que utilize os valores exactos).

Nesta quarta questão o aluno era obrigado a resolver pela duas vias (recurso à calculadora e analiticamente) pois era necessário ir encontrar um zero do polinómio na calculadora para depois poder factorizar o polinómio, utilizando a regra de Ruffini. O zero do polinómio podia ser encontrado na calculadora no menu dos gráficos ou no das equações.

Questão 5:

Sejam f e g duas funções polinomiais definidas por:

$f(t) = t^3 - t - 21$ e $g(t) = (t-2)^4 - 2$

Determine t de modo que $f(t) > g(t)$

Questão 6:

Seja g a função real de variável real definida por:

$g(x) = 5 + \ln(x^2 - 1)$

e a função f definida por $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

6.1. Indique o domínio da função g

6.2. Determine x tal que $f(x) > g(x)$

Nas questões cinco e seis pretendia-se que os alunos utilizassem a calculadora (com recurso ao menu dos gráficos) para traçarem os gráficos das funções e respondessem com base nos mesmos. Na questão 5 era importante alterar a janela de visualização pois podia acontecer só se visualizar um ponto de intersecção. Pretendia-se compreender como é que os alunos alteram os valores da janela de visualização (se por tentativas ou se têm uma noção prévia dos valores a atribuir a x e a y). Na questão 6 tinham que recorrer à tecla [*BOX*] para encontrar os pontos de intersecção. Inicialmente apenas um ponto de intersecção aparecia visível e depois tinham que se aperceber da existência de outros dois, sendo para isso importante terem uma ideia do gráfico da função logarítmica.

Questão 7:

Admita que o número de habitantes de um certo país é dado por:

$$N(t)=\frac{100}{1+9e^{-0,18t}}$$

Com N expresso em milhões e sendo t o número de anos contados desde o início do ano 2000.

7.1. Determine o número de habitantes do referido país em 2000.

7.2. Passado quanto tempo a população duplicou?

7.3. Em que ano serão atingidos os 45 milhões de habitantes?

7.4. A longo prazo, quantos habitantes terá presumivelmente o país, se aquele modelo continuar válido?

Esta sétima questão, quanto à natureza, é o que vulgarmente aparece nos manuais escolares (e inclusivamente no Exame Nacional) intitulado por problema em contexto real, mas cujo processo de resolução os alunos normalmente conhecem. A sua resolução podia ser analítica calculando os valores dos objectos ou das imagens conforme o caso por substituição da letra ou optarem por resolver na calculadora, no menu dos gráficos ou na tabela, cuja rapidez dependia da familiarização com um processo ou com outro. Na última alínea também podia ser efectuado o cálculo do limite ou então optarem por visualizar o gráfico ou recorrer à tabela.

Análise de dados: Processo e categorias

Para cada aluno foi organizado uma pasta contendo os respectivos dados recolhidos, que incluía as transcrições das entrevistas e os materiais escritos recolhidos (resolução escrita do Teste Intermédio e registos no caderno diário da aulas observadas).

A análise de dados iniciou-se com várias leituras das transcrições das entrevistas e foi realizada aluno a aluno. Após essas leituras foram identificados e assinalados os dados que informavam sobre cada um dos seguintes tópicos: relação estabelecida com a calculadora, razões que levam os alunos a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica e papel da calculadora gráfica na resolução de uma questão. Estes tópicos correspondem às três questões que orientam esta investigação.

Iniciou-se assim um processo de classificação dos dados através da procura de conceitos presentes nos dados que se constituíram em categorias de codificação e a que se atribuíram abreviaturas (Bogdan & Biklen, 1991). A construção das categorias surgiu assim, de forma interactiva com os dados recolhidos, após a análise dos mesmos, cobrindo as respostas às questões formuladas neste estudo.

Nos dados referentes à relação estabelecida com a calculadora surgiram as seguintes categorias:

- Atitude perante a calculadora
- Domínio técnico

Nos dados referentes às razões que levam os alunos a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica surgiram as seguintes categorias:

- Indicação exterior
- Preferência pessoal
- Cultura da aula
- Tipo de questões

Nos dados referentes ao papel da calculadora gráfica na resolução de uma questão surgiram as categorias seguintes:

- Confirmação das respostas obtidas analiticamente
- Combinação de resolução de papel e lápis e calculadora
- Obtenção de resposta apenas pela calculadora
- Alternativa à dificuldade de resolver analiticamente

Uma vez estabelecidas estas categorias, foram feitas novas leituras dos dados recolhidos e os códigos atribuídos a cada categoria foram registados no espaço existente, para o efeito, nas margens das transcrições das entrevistas.

Paralelamente a este processo foram sendo assinaladas as partes mais representativas dos textos relativamente a cada uma das categorias, no sentido de, posteriormente, serem citadas para melhor clarificar algumas afirmações.

Depois de identificados os dados provenientes das entrevistas, procedeu-se à identificação dos dados obtidos nas observações, para o qual se procedeu da mesma forma como para as entrevistas.

No que se refere à resolução escrita do Teste Intermédio, analisou-se a resolução da questão 1.2 efectuada pelos alunos. Procurou-se ver como é que os alunos utilizam a calculadora gráfica em situação de Exame.

CAPÍTULO 5

O CONTEXTO DO ESTUDO

Este capítulo começa por fazer uma referência ao contexto do estudo, procurando dar a conhecer o ambiente da sala de aula onde decorreram as observações assim como as tarefas matemáticas resolvidas durante as mesmas. Embora não seja um objecto directo da investigação, poderá ajudar a melhor compreender o contexto em que os alunos trabalharam ao longo do ano lectivo e a cultura da sala de aula em relação ao uso da calculadora gráfica.

A escola e a turma

Os alunos envolvidos neste estudo frequentavam uma Escola Secundária com Terceiro Ciclo do Ensino Básico numa cidade do interior do Baixo Alentejo, no ano lectivo 2005/2006. Esta escola recebe normalmente por ano cerca de 6 turmas do terceiro ciclo e cerca de 12 turmas do ensino secundário. Os alunos que a frequentam são oriundos da própria cidade, das freguesias desse concelho e também de um outro concelho que se situa a cerca de 50 km da cidade.

A escola é antiga, com amplos espaços envolventes, ocupados com campos desportivos e bastante vegetação. O edifício principal da Escola tem as paredes interiores das salas a necessitarem de uma pintura e a maioria das janelas estão danificadas, não vedando bem, o que facilita a entrada do frio no Inverno e do calor no Verão. A agravar esta situação está também associada a ausência de estores. Numa sala de aula normal existem as carteiras dos alunos, a secretária do professor e um quadro na parede. Algumas salas (poucas) têm um retroprojector, uma televisão e um vídeo. Assim, a maioria das salas onde decorrem as aulas de Matemática não tem qualquer material específico da disciplina, não existindo, até ao momento da investigação, um Laboratório de Matemática.

O Departamento de Matemática era constituído, no ano lectivo 2005/2006, por 5 docentes, todos professores efectivos no quadro da escola. No gabinete do Departamento existiam alguns materiais (sólidos geométricos, jogos didácticos, calculadoras gráficas e não gráficas,...) adquiridos há cerca de dez a doze anos, momento a partir do qual passou a haver alguns professores de Matemática efectivos na escola.

O Departamento reúne normalmente uma vez por mês, após a reunião do Conselho Pedagógico, para tratar de assuntos relacionados com a Escola e com o Departamento. As planificações a longo e a médio prazo são elaboradas no início do ano lectivo pelos docentes que leccionam o mesmo ano de escolaridade e poucas vezes ocorre a preparação conjunta das aulas. Cada professor define as suas estratégias de ensino, elaborando individualmente os materiais didácticos, nomeadamente as suas fichas de trabalho e de avaliação.

O cargo de Coordenador de Departamento é atribuído rotativamente pelos docentes do mesmo. No que se refere aos anos de escolaridade a leccionar, também são normalmente atribuídos aos professores de forma rotativa mantendo-se, sempre que possível, a continuidade pedagógica. Assim, o décimo segundo ano é leccionado por um ou dois professores em cada ano lectivo, de acordo com as turmas que os mesmos tinham nos anos anteriores. Há sempre uma relativa preocupação com a preparação dos alunos para o Exame Nacional, assim como uma certa apreensão face aos resultados dos alunos no mesmo. Os docentes do Departamento consultam os *rankings* das escolas relativos às prestações dos alunos nos exames, ocupando normalmente esta escola um lugar intermédio. No entanto, os docentes não lhes dão demasiada importância pois consideram que existem vários factores que condicionam os resultados, nomeadamente as condições físicas e os recursos materiais das escolas, as características da comunidade onde as escolas estão inseridas e o tipo de alunos que as frequentam, entre outros.

Nas aulas do décimo ao décimo segundo ano é utilizada, com alguma frequência, a calculadora gráfica, principalmente no tema "Funções". Já menos frequente é a utilização dos computadores, até porque não existe uma sala disponível para o efeito, estando sempre condicionada à existência ou não de aulas de Informática.

A turma escolhida para a realização deste estudo foi uma turma do primeiro agrupamento, do Curso Geral que, no ano lectivo 2005/2006, frequentava o 12º ano de escolaridade. Era uma turma pequena, constituída por 20 alunos, em que a esmagadora maioria pretendia candidatar-se ao ensino superior. Daí a grande preocupação dos alunos em relação ao Exame Nacional, nomeadamente de Matemática, visível em vários momentos das aulas observadas, assim como em alguns momentos das entrevistas.

A sala de aula e as tarefas propostas

O professor de Matemática da turma é um professor relativamente jovem com cerca de dez anos de experiência que, com agrado e simpatia, se disponibilizou para, de forma indirecta, se envolver neste estudo.

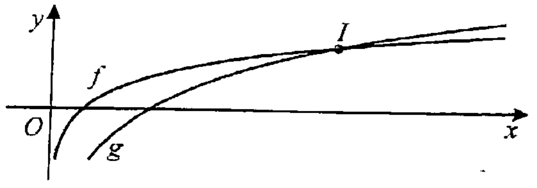
É um professor preocupado com a preparação dos alunos para o Exame Nacional, preocupação notória ao longo das aulas observadas, pois constantemente chamava a atenção dos alunos para determinados aspectos a terem em conta aquando da realização do mesmo.

As tarefas que o professor propôs aos alunos durante as aulas observadas foram, quanto à natureza, exercícios (circunscritos ao domínio matemático) e alguns problemas de aplicação (que apelam a alguma relação com o contexto real), cuja estratégia de resolução já era normalmente conhecida dos alunos.

Quanto ao tipo de questões apresentadas nas aulas observadas, existiram questões de resposta fechada (questões de escolha múltipla) e questões de resposta aberta, com recurso ou não à calculadora gráfica. Eram também este o tipo de questões presentes nas fichas de avaliação do professor, situação semelhante ao que ocorre no Teste Nacional Intermédio e no Exame Nacional.

intersecção dos gráficos, sendo dadas as expressões analíticas das funções. Exemplo disto é a situação que ocorreu na aula de dia 16/01/2006, aquando da resolução do seguinte exercício:

Na figura estão representadas graficamente duas funções, f e g, definidas em $\Re^+$ por $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = -2 + \log_3\left(x^2\right)$



O gráfico de f e de g intersectam-se no ponto I.
Qual é a abcissa do ponto I?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

Neste caso a calculadora foi utilizada para resolver a questão, no menu dos gráficos, onde foram inseridas as expressões analíticas das duas funções e pedido o ponto de intersecção dos dois gráficos, com o recurso à tecla *[ISCT]*, que permite obter directamente as coordenadas do ponto de intersecção.

As questões de resposta aberta, mesmo quando se tratava de um problema de aplicação, em contexto da vida real, e em que nada dizia sobre a utilização da calculadora, as mesmas eram resolvidas analiticamente. Exemplo desta situação ocorreu na aula de dia 13/02/2006, quando foi apresentado aos alunos o seguinte exercício:

Admita que, ao longo dos séculos XIX e XX e dos primeiros anos do século XXI, a população de Portugal Continental, em milhões de habitantes, é dada, aproximadamente, por

$$p(t) = 3{,}5 + \frac{6{,}8}{1 + 12{,}8e^{-0{,}036t}}$$

(considere que t é medido em anos e que o instante $t = 0$ corresponde ao início do ano 1864).
De acordo com este modelo, qual será a população de Portugal Continental no final do presente ano (2003)?
Apresente o resultado em milhões de habitantes, arredondado às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

As calculadoras foram ligadas neste momento, mas para efectuar o cálculo numérico relativo ao valor de t (2003-1864+1 ou 2004-1864). Como se pretendia determinar o valor de $p(140)$, os alunos substituíram o t por 140 na expressão e determinaram o valor pretendido. Nenhum aluno recorreu ao menu dos gráficos da calculadora ou às tabelas para encontrar o valor pretendido.

Aqui a calculadora foi utilizada como ferramenta computacional, para efectuar apenas cálculos numéricos, situação que se repetiu em diversas ocasiões ao longo das aulas observadas. Os alunos recorreram com alguma frequência à calculadora para efectuar cálculos numéricos, mesmo os mais simples como, por exemplo, 9×8 ou para calcularem o valor aproximado de, por exemplo, $\ln(3e)$.

Quando se tratava de uma questão de resposta aberta, em que no enunciado estava explicito o recurso à calculadora gráfica, aí a mesma era utilizada. Esta situação ocorreu, por exemplo, na aula de dia 16/01/2006, em que foi proposto aos alunos a resolução do seguinte exercício:

> Um pára-quedista salta de um helicóptero. Ao fim de algum tempo, o pára-quedas abre. Admita que a distância (em metros) a que o pára-quedista se encontra do solo, t segundos após a abertura do pára-quedas, é dada por:
>
> $d(t) = 840 - 6t + 25e^{-1,7t}$
>
> Utilize a calculadora para determinar, com aproximação ao segundo, quanto tempo, após a abertura do pára-quedas, demora o pára-quedista a atingir o solo. Explique como procedeu.

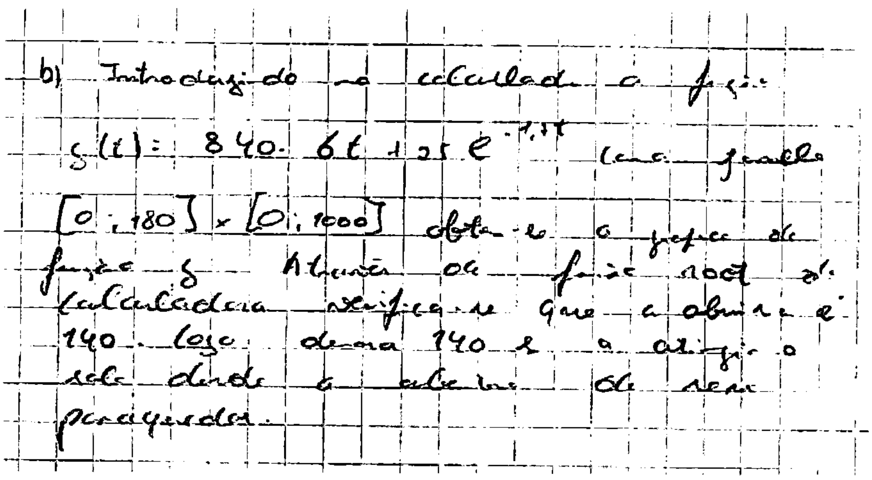
Face à própria indicação do enunciado este exercício foi resolvido com o recurso à calculadora gráfica. Foi visualizado o gráfico na calculadora (menu dos gráficos) e pedido directamente o zero da função, através da tecla [*ROOT*]. Esta tecla permite determinar, após a visualização do gráfico, o valor da abcissa quando a ordenada é zero.

Aqui a calculadora foi utilizada como ferramenta de visualização, para resolver a equação $d(t) = 0$.

A propósito deste exercício é de referir que o professor chamava constantemente à atenção dos alunos para o facto de quando resolvessem uma questão na calculadora terem que justificar todos os passos efectuados, todas as teclas utilizadas, assim como a janela de visualização utilizada:

P: Não se esqueçam que têm que escrever a justificação.
R: Como é que explicamos como fizemos?
P: Vais escrevendo aquilo que fizeste mesmo. Introduzimos a expressão na máquina, escolhemos a janela de visualização,...

No final da resolução o professor ditou a justificação, que consistiu na indicação de todos os passos e de todas as teclas que foram utilizadas através da calculadora. Esta justificação consta nos cadernos diários dos alunos, nomeadamente num dos que foi fotocopiado:

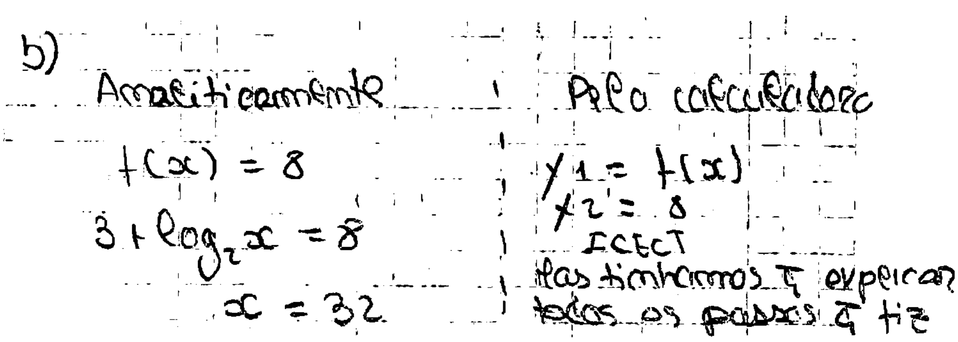

b) Introduzindo na calculadora a função $d(t) = 840 - 6t + 25e^{-1,7t}$ com a janela $[0, 180] \times [0, 1000]$ obtém-se o gráfico da função d. Através da função root da calculadora verifica-se que a abcissa é 140 logo demora 140 s a atingir o solo desde a abertura do seu paraquedas.

[Introduzindo na calculadora gráfica a função $d(t) = 840 - 6t + 25e^{-1,7t}$ com a janela de visualização $[0,180]\times[0,1000]$ obtém-se o gráfico da função d. Através da função [*ROOT*] da calculadora verifica-se que a abcissa é 140. Logo demora 140 s a atingir o solo desde a abertura do seu pára-quedas].

Outra situação semelhante ocorreu no mesmo dia quando, a propósito de um exercício em que, dada a expressão analítica da função ($f(x) = 3 + \log_2 x$), era pedido a abcissa do ponto de intersecção do gráfico dessa função com a recta $y = 8$. Mais uma vez foi evidente a preferência do professor pela resolução analítica e a preocupação em referir aos alunos que tinham que justificar todos os passos se resolvessem pela calculadora, pelo que alguns alunos acabariam por comentar que, se assim era, tornava-se mais fácil resolver analiticamente:

P: Podíamos ir pela máquina?
J: Metíamos a função na máquina e $y=8$ e determinávamos o valor.
P: Como é que se põe na máquina? João? É como há pouco...
J: $\dfrac{\ln x}{\ln 2}$
P: Esta é talvez mais fácil de resolver analiticamente
(...)
P: Não se esqueçam que se fizerem na máquina, de justificar tudo correctamente; pois caso contrário a pontuação é zero. Se colocarem só o valor...

Mais uma vez esta chamada de atenção está presente nos cadernos diários dos alunos:



[Pela calculadora $y_1 = f(x)$ e $y_2 = 8$ [*ISCT*]
Mas tínhamos que explicar todos os passos que fiz]

Em todas as aulas observadas os alunos traziam consigo a calculadora gráfica, as quais se encontravam sempre em cima das mesas. Algumas calculadoras estavam fechadas até ao momento em que o professor pedia para resolverem alguma questão na mesma ou até ao momento em que os alunos sentiam necessidade de efectuar algum cálculo numérico.

Ao longo das aulas observadas não se verificou uma grande articulação entre as diferentes formas de representar uma função, nomeadamente entre a representação analítica e a representação gráfica. Por exemplo, na aula de dia 06/03/2006, no momento da resolução do seguinte exercício:

Determine a e b de modo a que a função:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{se } x \leq 1 \\ ax+b & \text{se } x>1 \end{cases}$$

Seja derivável em $\Re$.

Os valores de a e b foram determinados analiticamente, nunca tendo sido utilizada a calculadora para explorar a situação. Assim, o exercício foi resolvido da seguinte forma:

P: Têm que arranjar duas relações (uma para a continuidade e outra para a derivada).
(...)
P: É condição necessária para que seja derivável em $\Re$ ser contínua para $x=1$. Para que seja contínua é necessário que os limites laterais sejam iguais.

$\lim_{x \to 1^+}(ax+b)=a+b$ e $\lim_{x \to 1^-} x^3=1$

Logo:
$a+b=1 \Leftrightarrow b=1-a$

Assim:

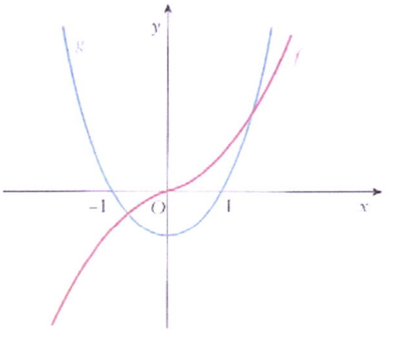
$$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{se } x \leq 1 \\ ax+1-a & \text{se } x>1 \end{cases}$$

P: Agora, o que temos que calcular?
F: As derivadas laterais.

Podia ter sido vantajoso a exploração da mudança dos valores de a e de b na expressão analítica e visualizar o que acontecia ao gráfico da função face a essas alterações. Não houve aqui, portanto, uma ligação entre a expressão analítica e o que esperar do gráfico, não tendo sido experimentado para que valores de a e b a função seria contínua e/ou derivável e como seria a representação gráfica da função nessas situações.

Outra situação semelhante ocorreu na aula de dia 06/02/2006, aquando da resolução de um exercício do manual escolar onde, dado apenas os gráficos de duas funções, era pedido o domínio da função quociente e os valores de alguns limites:

Na figura estão representadas graficamente duas funções f e g.



1. Qual o domínio da função $\frac{f}{g}$?
2. Indique:

2.1. $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{f(x)}$ 2.2. $\lim_{x\to -1}\frac{g(x)}{f(x)}$

2.3. $\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ 2.4. $\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)}{g(x)}$

Na resolução deste exercício foi feita a análise dos gráficos que eram dados para responder às questões. Os alunos podiam ter explorado mais as questões se tivessem relacionado os gráficos dados com possíveis expressões analíticas de funções compatíveis com as representações gráficas dadas, inclusivamente na calculadora. Mais uma vez não se verificou uma articulação entre a representação analítica e a representação gráfica.

As calculadoras gráficas foram, durante as aulas observadas, normalmente usadas para visualizar gráficos (e a propósito destes pedir os zeros ou pontos de intersecção) ou para efectuar cálculos numéricos. Portanto, quando os alunos utilizaram a calculadora gráfica recorreram essencialmente ao menu dos gráficos e neste, após a visualização dos mesmos, procuravam os zeros da função, através da tecla [*ROOT*] ou os pontos de intersecção de funções, através da tecla [*ISCT*].

Quando visualizamos o menu principal da calculadora pode-se observar diferentes ícones que ao serem seleccionados nos permitem entrar no modo desejado:

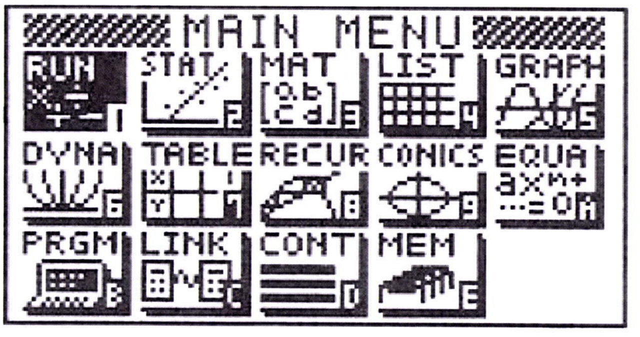


Figura 5.1 – Menu principal da calculadora

Nas aulas observadas foram utilizados dois desses ícones: o *RUN* e o *GRAPH*.

O primeiro ícone é utilizado para cálculos aritméticos e de funções.

O segundo é utilizado para introduzir expressões de funções e desenhar os respectivos gráficos. Após a visualização do gráfico é possível aceder a diversos menus relacionados com as funções. Nas aulas observadas foi essencialmente utilizado o menu *G-Solv* onde depois se tem acesso, entre outras, à tecla [*ROOT*] e à tecla [*ISCT*].

Durante as aulas observadas, os alunos nunca recorreram ao menu das tabelas. Na calculadora aparece como o ícone *TABLE*, que é utilizado para incorporar funções, gerar tabelas numéricas a partir de funções e desenhar gráficos. Em algumas situações poderia ter sido vantajoso a sua utilização. Exemplo disso foi o que se passou na aula de dia 30/01/2006:

> P: Antes de passar para o 3º caso [sobre limites de funções racionais] calculem este limite na calculadora: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3}{2x^3 - 1}$
> [Algumas máquinas só foram abertas nesta altura, encontravam-se em cima das carteiras mas fechadas].
> P: Na escolha múltipla como não temos que apresentar cálculos, podemos fazer na máquina…

Esta questão foi resolvida no menu dos gráficos. Os alunos foram determinar o valor do limite no gráfico da função, alterando os valores da janela de visualização e observando que para valores de x muito grandes o gráfico se aproximava de zero. Mas poderiam ter ido à tabela e rapidamente verificavam o que acontecia aos valores de y quando o x aumentava. É de referir que nenhum aluno, do qual foi tirada cópia dos cadernos diários, fez qualquer referência ao facto de terem ido calcular o valor do limite na calculadora. Apenas transcreveram para o caderno a resolução analítica. Além disso, mesmo no menu dos gráficos, podia ter sido utilizada a tecla [*Trace*] que também ajudava a verificar o que acontecia aos valores de y quando o x aumentava.

Assim, mais uma vez não foi explorada uma forma de representar uma função, a representação numérica, nem a articulação entre diferentes formas de representação das funções, nomeadamente, neste caso particular, entre a numérica, a gráfica e a analítica.

Síntese das aulas observadas

Na globalidade, as tarefas apresentadas aos alunos foram exercícios e alguns problemas de aplicação. Os alunos revelaram uma forte tendência para a resolução analítica das questões em detrimento da resolução através da calculadora. Os que tentavam esta via, nem sempre eram bem sucedidos, parecendo também não dominarem determinados pormenores (nomeadamente introdução correcta das expressões, janela de visualização,...).

Por vezes também pareciam não saber bem o que procurar na calculadora e aconteceu algumas vezes ficarem na dúvida se podiam ou não resolver na calculadora as questões e até mesmo se determinado exercício seria ou não resolúvel.

As funções da calculadora mais utilizadas foram as do cálculo numérico e as associadas aos gráficos. Ao nível do cálculo numérico, perante situações em que era necessário efectuarem cálculos numéricos, desde os mais simples aos mais complexos, os alunos recorriam à calculadora. Ao nível dos gráficos foram pedidos os zeros das funções e as coordenadas dos pontos de intersecção das mesmas. Poucas vezes recorreram ao menu das equações e nunca recorreram ao das tabelas.

Assim, no que se refere às diferentes formas de representação de uma função, foram exploradas a representação gráfica e analítica de uma função. No entanto, não se observou, quer por parte do professor quer por parte dos alunos, a ligação entre as múltiplas representações pois, não retiraram da observação analítica referências para a observação gráfica ou da gráfica consequências para a analítica. A representação numérica não foi explorada.

A calculadora gráfica era usada quando era referida a sua utilização no enunciado da questão de resposta aberta e nalgumas questões de escolha múltipla, sendo nestas últimas utilizada quando era pedido o ponto de intersecção de gráficos ou o valor de uma coordenada (ordenada ou abcissa) conhecida a outra, sendo dada a expressão analítica das funções. Assim, a resolução das equações foi feita quase sempre a partir da visualização do gráfico e não recorrendo ao menu das equações.

Assim, usando os termos apresentados por Doerr e Zangor (2000) quanto aos diferentes papéis que a calculadora pode assumir, parece-nos que durante as aulas observadas a calculadora gráfica foi utilizada como ferramenta computacional e como ferramenta de visualização. Como ferramenta computacional quando foi utilizada para efectuar cálculos numéricos e como ferramenta de visualização quando foi utilizada para visualizar o gráfico ou determinar coordenadas de pontos especiais.

É de referir que durante as aulas observadas nenhum aluno foi ao quadro resolver alguma questão, limitando-se a participação dos alunos apenas à participação oral (do lugar onde se encontravam sentados) após solicitação do professor.

Esteve também sempre presente uma grande preocupação, quer por parte dos alunos, quer por parte do professor, com o Exame Nacional e com o facto dos exercícios, no Exame, puderem ou não ser resolvidos com a calculadora, assim como com a justificação que teriam que apresentar aquando da resolução dos mesmos. A este propósito a mensagem que o professor sempre transmitiu aos alunos era de que era necessário justificar todos os passos inclusivamente as teclas utilizadas da calculadora, assim como a janela de visualização.

CAPÍTULO 6

OS ALUNOS DO ESTUDO

Neste capítulo tem-se como objectivo principal proceder à apresentação e análise dos três alunos envolvidos no estudo. Assim, para cada aluno inicia-se com uma breve apresentação, e de seguida procura-se responder às três questões que estruturam o estudo, seguindo as categorias que organizam as respostas a cada questão.

O Francisco

O objectivo desta parte do estudo é dar a conhecer e analisar que relação estabelece o Francisco com a calculadora gráfica, que razões levam o Francisco a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica e que papel lhe reserva na resolução de uma questão. Começa-se primeiro por uma pequena apresentação do Francisco.

Apresentação

O Francisco tinha 17 anos quando decorreu a investigação. É natural da cidade onde se encontra a Escola, onde reside. Vive com os seus pais e uma irmã, mais nova. O seu pai é comerciante e a sua mãe professora. Estuda nesta Escola desde o sétimo ano de escolaridade e sempre obteve boas classificações, nomeadamente a Matemática. Fez todo o seu percurso escolar normalmente desde o ensino primário até ao décimo segundo ano. É um aluno que revela facilidade de aprendizagem, apresentando um raciocínio rápido na resolução das questões que lhe são colocadas. Não é um aluno que goste de "perder" muitas horas a estudar, preferindo perceber as matérias do que as decorar. As suas classificações a Matemática no ensino secundário foram 16, 15 e 18 valores, respectivamente nos 10º, 11º e 12º anos.

Pretende candidatar-se ao ensino superior a um curso de engenharia, no Instituto Superior Técnico de Lisboa. Parece preocupado com os exames, nomeadamente com o Exame de Matemática, pelo que frequentemente questiona o professor se pode resolver, no Exame, determinada questão de determinada maneira. É notória essa preocupação quando o Francisco faz a seguinte intervenção:

> Professor (P): Temos que ir calcular os zeros analiticamente.
> Francisco (F): Professor, mas aqui não diz. No Exame temos mesmo que ir analiticamente? Não podemos ir pela máquina?
> P: Este é um exercício mais antigo; actualmente no Exame já diz sem recorrer à calculadora.
>
> (extracto da aula observada no dia 13/03/2006)

Nesta situação a questão nada referia sobre a utilização da calculadora pelo que o Francisco pretendeu esclarecer a situação.

Relação estabelecida com a calculadora gráfica

Durante as aulas observadas pela investigadora e durante a entrevista o Francisco foi revelando a sua relação com a calculadora gráfica, no que se refere à sua atitude perante a calculadora e o domínio técnico da mesma.

Atitude perante a calculadora

O Francisco é um aluno que gosta de utilizar a calculadora gráfica na resolução dos seus exercícios e habitualmente usa-a, tanto nas aulas como em casa e nas fichas de avaliação. Trabalha com a calculadora gráfica desde o décimo ano de escolaridade, reconhecendo-lhe potencialidades. No entanto, não considera muito vantajosa a sua utilização em determinadas questões, nomeadamente no Exame Nacional, uma vez que terá que justificar todos os passos dados com ela (situação referida pelo professor diversas vezes nas aulas observadas pela investigadora).

Domínio técnico

O Francisco revela algum conhecimento técnico da calculadora gráfica, quer ao nível dos cálculos numéricos, quer ao nível dos gráficos, assim como na introdução das expressões.

No entanto, é de referir que o Francisco desconhecia algumas funções da calculadora, possivelmente por nunca ter ouvido falar nelas. Por exemplo, na questão 1 da entrevista (Anexo IV), a qual podia ter sido resolvida imediatamente na calculadora gráfica através da tecla [*d/dx*] que permite calcular o valor da derivada num ponto, o Francisco resolveu analiticamente, pelo que parece, por desconhecimento de uma função da máquina:

> Investigadora (I): Agora vou-lhe perguntar o seguinte: Nunca pensou em fazer logo directamente essa derivada na máquina? Sabia que podia fazer ou não sabia fazer?
> F: Não sabia fazer.
> I: Não sabe como é que se faz na máquina? Não sabe que podia escrever a expressão da função e o ponto onde se pretende, e ela dá logo o valor da derivada?
> F: No gráfico?
> I: E sem ser no gráfico?
> F: Não...
> I: Modo normal, na tecla [*OPTN*], [*CALC*], [*d/dx*],... escreve-se a função, no ponto e ela dá logo o valor [Foi experimentando na calculadora].
> F: Não sabia.

Quando questionado sobre essa tecla, o Francisco revelou não a conhecer e enquanto a investigadora lhe foi indicando as teclas a utilizar ele foi experimentando.

Aquando da resolução da questão 5 da entrevista (Anexo IV) também revelou algumas dificuldades em alterar os valores da janela de visualização, referindo que modificava os valores um pouco por tentativas, não tendo muitas noções para quê e quais os valores a alterar:

> F: Neste caso é melhor meter na máquina. Ver os gráficos e ver onde é que ela é maior. Não pede analiticamente.
> [Introduziu as expressões correctamente e alterou a janela de visualização de modo a poder visualizar as duas funções]
> I: Ainda não se vê, com essa janela?
> F: Ainda não.
> I: Como é que está a alterar os valores aí na janela?
> F: Estou a alterar... a tentar
> I: Mas por tentativas?
> F: Por tentativas...
> I: Tem a noção dos valores que tem que alterar?
> F: Mais ou menos, sei que este zero é -21.
> I: Passa no ponto (0,-21), não é o zero da função.
> F: Sim, passa no ponto (0,-21). Agora peço a intersecção.
> F: Elas intersectam-se em 2,81...
> I: Será que é só aí?
> F: Tenho que alterar ainda a escala. [Alterou primeiro os valores de x]
> I: Será que é os valores de x que tem que alterar? Há pouco já via um ponto...
> F: É os valores de y.
> [levou algum tempo a alterar a janela, revelando alguma dificuldade].
> F: Agora já dá a intersecção. Ela é maior aqui entre estes dois pontos.
> I: Só que se não mudasse a janela...
> F: Pensava que era até infinito.
> I: Exacto. É preciso cuidado com essas situações.
> F: É de 2,81 a 5,39.

O Francisco aqui revelou que não estabeleceu a ligação entre a abordagem gráfica e analítica, pois após ter encontrado o valor da abcissa de um dos pontos de intersecção, não analisou a expressão algébrica para fazer uma estimativa dos valores que teria que alterar na janela de visualização para encontrar o outro ponto de intersecção.

Também na questão 6.1 da entrevista (Anexo IV), a propósito do domínio da função, revelou desconhecimento de como podia visualizar o domínio da função na calculadora (no menu dos gráficos). Quando terminou, após algumas dúvidas na resolução do exercício, a investigadora perguntou-lhe se não tinha pensado ir à calculadora ver o domínio, ao que ele respondeu que não sabia como:

I: Não pensou ir à máquina ver o domínio da função?
F: Não.
I: Porquê?
F: Porque não sabia. Como? Meter na máquina?
I: Pedir à máquina que desenhasse o gráfico e ver para que valores é que o gráfico aparece...
[Ele experimentou na máquina]
F: Está aqui... Era mais fácil.

Após ter experimentado na calculadora, acabou por referir que até era mais fácil dessa forma do que a sua resolução analítica.

Aquando da resolução da questão 6.2 da entrevista (Anexo IV) também revelou algumas dúvidas, pois inicialmente pensava só existir um ponto de intersecção, aquele que era logo directamente visível, e só depois é que determinou os outros:

[Introduziu as duas expressões na máquina]
F: Aqui já não é preciso ir ver... elas já não se intersectam mais.
[Pediu o ponto de intersecção que era visível]
F: 3,17.
I: Será que só se tocam nesse ponto aí?
F: Acho que sim. Pelo menos parece.
I: Nesse ponto tocam-se, tudo bem. Mas volte lá a pôr a escala que tinha anteriormente.
F: Para trás?
F: Ah! Posso ir ver com a [*BOX*].
I: Então veja lá os pontos de intersecção.
F: Então é de -1,006 até -1 e depois de 1 a... deve ser até 1,006.
[Enquanto esperava pelo valor da calculadora]
I: Não, por acaso não é simétrico...
[Não lhe deu o valor pois ele não voltou à outra escala inicial]
I: Então volte lá ao inicial.
F: 1,02 [Apareceu entretanto o valor na calculadora].

Portanto esta questão foi resolvida na calculadora gráfica recorrendo ao menu dos gráficos. Após a visualização dos gráficos, o Francisco pediu o ponto de intersecção recorrendo à tecla [*ISCT*]. No entanto era importante analisar a expressão algébrica da função $g(x)$ para constatar que havia mais pontos de intersecção, pelo facto de ser uma função logarítmica. A calculadora gráfica ao apresentar o gráfico de uma função logarítmica quebra o mesmo (ao nível do contradomínio) parecendo que o gráfico termina, o que não acontece. O Francisco poderia ter desconfiado se tivesse feito a análise da expressão algébrica da função. Para encontrar esses pontos, na calculadora, era útil recorrer à tecla [*BOX*], existente no menu dos gráficos, à qual o Francisco recorreu após alguma hesitação.

Quando questionado sobre o modo como adquiriu o conhecimento que possui sobre a calculadora gráfica, referiu que não a costuma explorar em casa sozinho e que esse conhecimento foi adquirido através daquilo que aprendeu com os professores ao longo dos três anos e através dos colegas. Não fez referência a qualquer conhecimento obtido através do manual adoptado ou do que acompanha a calculadora gráfica:

> I: Quer dizer que se limita basicamente aquilo que o professor ou professores ao longo dos anos lhe foram ensinando?
> F: Sim.
> I: Ou seja, não vai explorar as potencialidades que a máquina tem?
> F: Sim.
> I: Todas as coisas que utiliza foram todas aprendidas na aula ou houve outras situações, de colegas...?
> F: De colegas sim, a máquina pode fazer isto ou o outro...
> I: A nível da calculadora costuma explorar em casa sozinho coisas novas na calculadora?
> F: Não.

Razões que levam o Francisco a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica

Ao longo da entrevista o Francisco referiu as razões que o levam a optar por utilizar a calculadora gráfica ou não, nomeadamente a indicação exterior, a preferência pessoal, a cultura da aula e o tipo de questões.

Indicação exterior

O Francisco referiu resolver pela calculadora gráfica as questões em que o enunciado pede gráficos ou em que pede explicitamente para usar a máquina:

> I: Actualmente, nos exames (na segunda parte) escrevem lá claramente se é para utilizar a máquina ou não. Mas mesmo nesses casos, experimenta, não experimenta, como é que é?
> F: Sim. Nos casos que pede na calculadora não vou fazer analiticamente, pois normalmente é para fazer intersecção de gráficos e para explicar como é que se fez. Aí desenho o gráfico e vejo.

Portanto, sempre que haja uma indicação exterior para utilizar a calculadora o Francisco usa-a.

Preferência pessoal

O Francisco em algumas questões opta pela resolução analítica por considerar que é mais rápido fazer assim do que na calculadora gráfica, sabendo, no entanto, que pode fazer de uma forma ou de outra.

Por exemplo, aquando da resolução da questão 7.1 da entrevista (Anexo IV), ele resolveu analiticamente, substituindo o t por zero e obteve o valor pretendido, por considerar que era mais rápido dessa forma:

> F: Aqui é fazer $N(0)$. Dá para ir pela máquina. Fazer o gráfico...
> I: Então como é que fazia?
> F: À mão.
> I: Se fosse fazer numa situação de teste...
> F: Fazia à mão...
> I: Fazia à mão, porquê?
> F: Porque acho que era mais rápido.

Mesmo em situação de teste, o Francisco refere que resolvia analiticamente por considerar que era mais rápido, apesar de revelar que havia a possibilidade de a questão ser resolúvel pela calculadora.

No entanto, existem outras situações que, se lhe é dada liberdade de escolha, o Francisco prefere resolver logo directamente na calculadora. Foi o que aconteceu nas questões 7.2, 7.3 e 7.4 da entrevista (Anexo IV), que eram questões relacionadas com um problema de aplicação em contexto real e em que se pretendia determinar ou o número de anos ou o número de habitantes que verificavam determinada condição.

Por exemplo, na questão 7.2 disse logo que a resolvia através da calculadora, utilizando o menu dos gráficos e a tecla *[ISCT]*, determinando assim o ponto de intersecção dos dois gráficos:

> F: Aqui já ia fazer na máquina.
> I: Então o que vai fazer?
> F: Vou meter a expressão na máquina e ver quando é que dá 20, neste caso. Então na y_1 escrevo a expressão e na y_2 escrevo 20 e peço a intersecção dos dois gráficos.
> I: Está a alterar os valores como? [na janela de visualização].
> F: Estou a alterar os valores para 25.
> I: No x?
> F: E no y.
> I: E o mínimo?
> F: Zero.
> I: Porquê?
> F: Porque o tempo e o número de habitantes nunca podem ser negativos.
> (...)
> F: Vou pedir a intersecção.

Nesta questão o Francisco alterou os valores da janela de visualização, tendo em atenção o contexto do problema.

Cultura da aula

Numa das aulas observadas (dia 16/01/2006) o Francisco questionou o professor sobre uma resolução de uma determinada questão em que o professor perguntou se "podiam ir pela máquina". Após algumas respostas de alguns colegas a justificarem como poderiam fazer na calculadora o Francisco pergunta:

> F: Se fosse analiticamente, não tínhamos que justificar tudo pois não?
> P: Tinham que apresentar a resolução...
> F: Então é mais fácil analiticamente.

Portanto, o Francisco considera mais cómodo resolver analiticamente do que na calculadora gráfica pois evita, em situação de Exame, ter de justificar como fez, que teclas utilizou e qual o raciocínio seguido.

No entanto, em diversas vezes, nas aulas observadas pela investigadora, o Francisco perguntou ao professor se podia recorrer à calculadora para resolver a questão. Em algumas situações recorreu à mesma, noutras situações não recorreu, pois revelou-se sempre ao longo das aulas uma preferência, por parte do professor, pela resolução analítica. Por exemplo na aula de dia 06/02/2006, no momento da resolução de um exercício do manual escolar em que era pedido o domínio da função $f(x)=\ln\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$, o Francisco pretendia ir pela calculadora.

No entanto surge outra sugestão de outro colega que o professor aproveitou e a questão foi resolvida analiticamente com o recurso a um quadro de sinais:

P: Como é que resolvemos isto?
F: Não posso ir à máquina?
Outro aluno: Quadro de sinais
P: Muito Bem, ...

O Francisco rapidamente podia ter determinado o domínio da função com o auxílio da calculadora visualizando, por exemplo, o gráfico da função, mas acabou por resolver analiticamente.

Na aula de dia 13/02/2006, o professor propôs a seguinte questão de escolha múltipla:

Considere a função f, definida em $\Re$ por $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2-4 & \text{se } x>0 \end{cases}$

Indique o conjunto dos zeros de f.

(A) $\{-2,2\}$ **(B)** $\{-2,-1,2\}$
(C) $\{2\}$ **(D)** $\{-1,2\}$

Passados uns minutos, o professor perguntou quem tinha feito na calculadora, e o Francisco foi um dos alunos que respondeu afirmativamente:

P: Quem fez pela máquina?
F: Eu...
P: Fazendo o gráfico... Ainda se lembram como é que se introduz a expressão quando a função está definida por ramos?
Alunos: Sim.

É de referir que o professor aqui sugere a resolução da questão utilizando o menu dos gráficos, no entanto os alunos também poderiam ter recorrido ao menu das equações e determinado os valores de x que anulavam a expressão. O Francisco deve ter recorrido ao gráfico, pois não se manifestou aquando da sugestão do professor.

Durante a entrevista, em que lhe foi dada liberdade de utilização da calculadora e não tinha que justificar todos os passos, recorreu à calculadora gráfica para resolver muitas questões, nomeadamente a questão 5 da entrevista (Anexo IV) quando referiu: "Neste caso é melhor meter na máquina. Ver os gráficos e ver onde é que ela é maior. Não pede analiticamente".

Mais uma vez o Francisco resolveu a questão recorrendo ao menu dos gráficos e após a visualização dos mesmos, determinou os pontos de intersecção, através da tecla [*ISCT*]. Comparou os dois gráficos, verificando onde é que um gráfico estava acima do outro e respondeu à questão.

Tipo de questões

Um dos factores que também influencia o facto de o Francisco optar pela resolução gráfica ou pela resolução analítica é do tipo de questão. Se na questão estiver implícito um gráfico ou gráficos, o Francisco visualiza-os primeiramente na calculadora. Quando questionado sobre o assunto responde da seguinte maneira: "Normalmente faço sempre analiticamente. Nos casos de intersecção de gráficos ou assim, faço normalmente pela máquina".

No caso de ser uma questão de escolha múltipla, opta pela calculadora gráfica quando consegue aperceber-se que aquela pode resolver pela calculadora:

I: E no caso das questões de escolha múltipla?
F: Ah... Depende. Se vir que é mesmo para usar a máquina uso a máquina, noutras situações resolvo...

Durante a entrevista, na questão de escolha múltipla que envolvia a solução de uma equação – questão 3 da entrevista (Anexo IV) –, o Francisco resolveu-a directamente na calculadora no menu dos gráficos, visualizando o gráfico da função correspondente ao primeiro membro e da função correspondente ao segundo membro e pedindo o ponto de intersecção dos dois gráficos, através da tecla *[ISCT]*.

Nas questões de resposta aberta presentes na entrevista aquando da resolução daquelas que chamamos de exercícios (circunscritos ao domínio matemático), o Francisco só resolveu na calculadora aquelas em que era comparação de funções, através do menu dos gráficos. No problema de aplicação em contexto real recorreu, com excepção da primeira alínea, à calculadora gráfica para resolver a questão, mais uma vez no menu dos gráficos.

Papel da calculadora gráfica na resolução de uma questão

No que se refere ao papel que a calculadora gráfica desempenha para o Francisco, na resolução de uma questão sobre funções, ela assume o papel de confirmação das respostas obtidas analiticamente, obtenção de resposta imediata da questão e combinação de resolução de papel e lápis e calculadora. Durante a entrevista a calculadora gráfica também foi referida como uma alternativa à dificuldade de resolver analiticamente.

Confirmação das respostas obtidas analiticamente

Durante a entrevista o Francisco afirmou que confirma com a calculadora os resultados obtidos analiticamente:

> I: Actualmente nos exames (na segunda parte) escrevem lá claramente se é para utilizar a máquina ou não. Mas mesmo nesses casos, experimenta não experimenta [com a calculadora], como é que é?
> F: Nos casos que pede analiticamente, normalmente vou sempre confirmar na calculadora.
> I: Vai confirmar?
> F: Sim.

Normalmente esta confirmação é realizada no menu dos gráficos e consiste na visualização do gráfico. Por vezes também determina as coordenadas de algum ponto relevante para o exercício.

Combinação de resolução de papel e lápis e calculadora

Na resolução da questão 4 da entrevista (Anexo IV), o Francisco fez a combinação de resolução de papel e lápis e calculadora:

> [Foi à máquina ver os zeros, no menu das equações]
> F: Isto agora não dá valores certos.
> I: Mas há um que dá.
> F: Agora escrevo x, e menos não é? Se ali está menos escrevo +1. E agora tenho que ir fazer com a regra de Ruffini. [Fez a regra de Ruffini, no início ainda se atrapalhou um pouco].
> I: E agora, como é que fica a expressão?
> F: Fica $(x+1)(x^2-3)$. [Tinha-se esquecido do segundo parênteses, corrigiu depois de eu ter dito que faltava um parênteses].
> I: Esse é um caso em que sabia perfeitamente que tinha que ir buscar aquele valor à máquina ou não?
> F: Sabia que tinha que ir buscar...
> I: Tem facilidade em relacionar os valores que obtém através da máquina com os valores que depois precisa para trabalhar analiticamente? Ou seja dos valores que a máquina lhe dá consegue ver o que é que lhe faz falta e tirar de lá?
> F: Consigo.

Nesta situação em particular em que era necessário encontrar, na calculadora, o zero do polinómio para prosseguir com o exercício, o Francisco conseguiu relacionar os dados obtidos com a calculadora e a resolução analítica.

Também na questão 2 da entrevista (Anexo IV) revelou facilidade em relacionar os conhecimentos matemáticos com a calculadora. Após ter resolvido analiticamente a questão, a investigadora perguntou-lhe se não tinha pensado recorrer à calculadora, ao que ele respondeu que não, mas sabia como se fazia e que era necessário operar uma mudança de base:

> I: Não pensou ir fazer isso na máquina? [Francisco abanou a cabeça, para dizer que não]. E no Teste Intermédio lembra-se?

F: No Teste Intermédio acho que fui fazer à máquina. Escrevi a expressão, depois fiz a recta $y=1$. Fui ver onde é que era. Mas agora aqui não.
I: Porque é que não foi fazer? [Não respondeu]. E então como é que fez? Tem aí um logaritmo de base 3.
F: Fazia logaritmo disto a dividir por logaritmo de 3... [Sabia claramente que tinha que fazer a mudança de base]. Depois a $y_2=1$... Pedia a intersecção...

Também na aula de dia 06/03/2006 se passou uma situação em que o Francisco recorreu em primeiro lugar à calculadora gráfica para resolver o exercício, fazendo depois a combinação com a resolução de lápis e papel:

Era dada a função $f(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & \text{se } x\leq 2 \\ 3x & \text{se } x>2 \end{cases}$ e pretendia-se determinar a função derivada.

O Francisco foi fazer primeiro o gráfico na máquina para ver a função e verificar se havia algum ponto onde não houvesse derivada, através da visualização do gráfico e averiguando a existência ou não de pontos angulosos.

Em seguida foi escrita a função derivada no quadro:

$$f'(x)=\begin{cases} 6x & \text{se } x<2 \\ 3 & \text{se } x>2 \end{cases}$$

O Francisco calculou rapidamente $f'(2^+)$ e $f'(2^-)$ e quando o professor questionou qual o domínio da função derivada o Filipe respondeu:

P: Qual é o domínio da função derivada?
F: $\Re/\{2\}$.

O Francisco conseguiu rapidamente reconhecer que existia derivada em todos os pontos excepto para $x=2$.

Obtenção de resposta apenas pela calculadora

Por outro lado, durante a resolução das questões que orientaram a entrevista o Francisco recorreu à calculadora gráfica para a obtenção da resposta à questão, utilizando a calculadora como ferramenta de visualização. Por exemplo na questão 3 da entrevista (Anexo IV):

> [Francisco estava a resolver sem dizer em voz alta o que estava a fazer]
> I: Vá, então diga lá o que está a fazer.
> F: Meti na máquina as duas expressões... Na primeira escrevi e^{x-1} e na segunda $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ e agora vou meter uma escala para ficar a ver os dois gráficos... [alterou a janela]. Dá 0,666666... Logo é a opção A.

Outro exemplo foi a resolução da questão 7.3 da entrevista (Anexo IV):

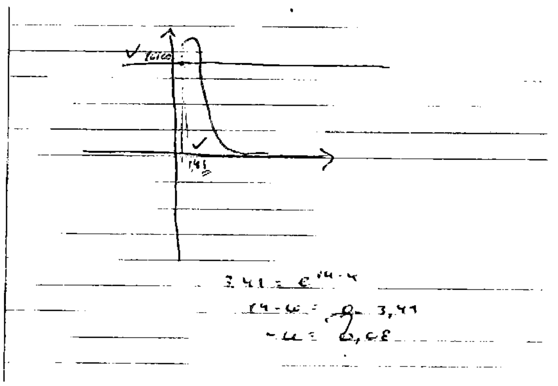
> F: Vou alterar a escala, porque tenho uma escala muito curta.
> I: Curta aonde?
> F: Curta no y. E vou fazer $y_2 = 45$ e pedir a intersecção. Dá 11,1.
> I: Então como é que era a resposta?
> F: São atingidos passados 11 anos.
> I: Mas não é isso que pede.
> F: Ah! Agora fazer 2000 mais 11 anos. Dá 2011.

Ainda como outro exemplo temos a resolução da questão 7.4 da entrevista (Anexo IV):

> F: Agora é fazer o limite quando x tende para mais infinito.
> I: E como é que vai fazer?
> F: Alargar a escala...
> I: Vai alterar o valor aonde?
> F: No x... É para 100.

É importante destacar que na resolução destas três questões o Francisco recorreu à calculadora gráfica mas sempre ao menu dos gráficos. Na questão 3 e na questão 7.3, visualizou o gráfico das duas funções e pediu o ponto de intersecção, através da tecla [*ISCT*]. Na questão 7.4 alterou os valores da janela de visualização para poder visualizar o comportamento do gráfico para valores de x grandes. Nunca recorreu ao menu das tabelas.

Na resolução da questão 1.2 do Teste Nacional Intermédio (Anexo III), cuja obtenção da resposta se pretendia que fosse através da calculadora, o Francisco transcreveu para a sua folha de resposta um gráfico não muito rigoroso e indicou o valor da abcissa de um dos pontos de intersecção. Faltou-lhe determinar a abcissa do outro ponto de intersecção e acabou depois por não conseguir concluir a sua resposta:



Utilizando os termos de Graham et al. (2003), podemos dizer que o Francisco em situação tipo Exame parece ter utilizado a calculadora gráfica de forma semi-proficiente uma vez que são utilizadas algumas potencialidades da calculadora, no entanto a melhor utilização ou um uso mais eficiente não é feito.

Alternativa à dificuldade de resolver analiticamente

O Francisco também referiu que por vezes recorre à calculadora como alternativa à dificuldade de resolver analiticamente: "Normalmente faço sempre analiticamente. Só quando vejo que não consigo é que tento ver se pela máquina consigo fazer alguma coisa".

O Francisco destacou que as questões de resposta aberta normalmente resolve analiticamente, mas quando sente dificuldades na resolução recorre à calculadora.

Síntese

Ao longo das aulas observadas, o Francisco esteve sempre preocupado com o Exame Nacional, pelo que tentou sempre resolver as questões analiticamente. No entanto, durante a entrevista, em que lhe foi dada liberdade de escolha e não tinha que justificar por escrito a resolução, resolveu algumas questões pela calculadora. Segundo a opinião do Francisco, "se no Exame se tem que justificar tudo (quando se resolve na calculadora), então é mais fácil resolver analiticamente".

O tipo de questões (escolha múltipla ou de resposta aberta, enunciados que pedem explicitamente para usar ou não a calculadora, ou enunciados onde são pedidos gráficos) parece influenciar a decisão do Francisco. Quando são respostas abertas, com a natureza de problemas de aplicação em contexto real, ele parece ter mais tendência para resolver com a calculadora. Se o enunciado requer gráficos também utiliza a calculadora gráfica. Se a questão for de escolha múltipla, resolve pela calculadora gráfica quando se consegue aperceber que aquela é resolúvel pela mesma.

A calculadora gráfica desempenhou como papel principal o de confirmação das respostas obtidas analiticamente ou de obtenção directa de resposta da questão. Relacionando com os termos utilizados por Doerr e Zangor (2000), o Francisco utilizou quase sempre a calculadora como ferramenta computacional, para efectuar cálculos numéricos, ou como ferramenta de visualização, para visualizar os gráficos e resolver equações, recorrendo frequentemente à tecla [*ISCT*] que permite determinar o ponto de intersecção dos dois gráficos. Nunca recorreu ao menu das tabelas, o qual também nunca foi explorado ao longo das aulas observadas.

Referiu também, ao longo da entrevista, que quando não consegue resolver analiticamente uma determinada questão recorre à calculadora como alternativa.

O Francisco revelou algumas dificuldades como, por exemplo, na alteração da janela de visualização, o que pode ser reflexo de alguma dificuldade em relacionar os conteúdos matemáticos com o que pode obter através da calculadora, ou o que procurar ou o que visualizar. Ou seja, o Francisco revelou dificuldades em estabelecer uma ligação entre a expressão analítica e o que é de esperar do gráfico. Em algumas situações não retirou da observação analítica referências para a observação gráfica, nomeadamente nos pontos de intersecção. O Francisco é um aluno que parece revelar um pouco do perfil apresentado por Guin e Trouche (1999) como o do "método de trabalho mecânico", pois o Francisco usa a calculadora para fazer algumas explorações e manipulações simples, revelando pouco controle do que obtém a partir da calculadora, e sem relacionar com o conhecimento matemático teórico.

O Francisco também revelou algumas dúvidas e alguma insegurança aquando da utilização da calculadora gráfica; no entanto, parece ser um aluno que se lhe fosse proporcionada uma maior resolução de exercícios através da calculadora gráfica, optaria preferencialmente por esse processo.

Manifestou algum domínio técnico da calculadora, referindo que todo o conhecimento que tem da sua calculadora gráfica foi aprendido nas aulas ao longo dos três ano do ensino secundário (ou seja, informação obtida através dos professores) e de algumas informações obtidas por intermédio dos colegas.

No Teste Intermédio de Matemática, o Francisco obteve a nota de 10,6 valores e na questão que solicitava o uso da calculadora parece tê-la utilizado de forma semi-proficiente, termo referido por Graham et al. (2003), pois utilizou algumas potencialidades da calculadora, mas o seu uso não foi o mais eficiente.

No Exame Nacional de Matemática, realizado em Junho de 2006, o Francisco obteve a classificação de 15,3 valores e entrou no curso pretendido do Instituto Superior Técnico de Lisboa.

A Lúcia

O objectivo desta parte do estudo é dar a conhecer e analisar que relação estabelece a Lúcia com a calculadora gráfica, que razões levam a Lúcia a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica e que papel lhe reserva na resolução de uma questão. Começa-se primeiro por uma pequena apresentação da Lúcia.

Apresentação

A Lúcia tinha 17 anos quando decorreu a investigação. É natural da cidade onde se localiza a Escola e reside nesse mesmo local com os seus pais. Tem um irmão mais velho, licenciado em gestão de empresas mas que reside fora da cidade. A mãe é doméstica e o pai é, no momento da investigação, trabalhador numa barragem perto do local onde reside, na armação de ferragem. Frequentou o segundo e o terceiro ciclo numa Escola Básica 2,3. Estuda então nesta Escola desde o décimo ano de escolaridade e sempre obteve muito boas classificações, nomeadamente a Matemática. As suas classificações na disciplina de Matemática foram 17, 19 e 18 valores respectivamente nos 10º, 11º e 12º anos.

É uma aluna que revela facilidade de aprendizagem, é empenhada, trabalhadora, atenta às aulas e que "gosta muito de resolver exercícios de Matemática". Leva horas a resolver exercícios e gosta de ocupar, na sala de aula, o lugar na carteira da frente.

Pretende candidatar-se ao ensino superior. A sua primeira opção será Medicina e, caso não tenha média para entrar nesse curso, colocará como segunda opção Enfermagem.

Relação estabelecida com a calculadora gráfica

Durante as aulas observadas pela investigadora e durante a entrevista, a Lúcia foi revelando a sua relação com a calculadora gráfica, nomeadamente na sua atitude perante a calculadora e o domínio técnico da mesma.

Atitude perante a calculadora

A Lúcia usa a calculadora gráfica desde o décimo ano de escolaridade, no entanto não gosta muito de a usar, ou melhor, usa-a quando necessário, preferindo resolver os exercícios e os problemas analiticamente. Não parece reconhecer-lhe muitas potencialidades pois considera a sua resolução analítica mais eficaz. Na maioria das aulas observadas a sua calculadora encontrava-se fechada em cima da carteira até ao momento em que o professor solicitava a sua utilização para a resolução de uma questão ou para efectuar algum cálculo numérico.

Domínio técnico

A Lúcia não parece ter muitas dificuldades na introdução das expressões assim como na alteração dos valores da janela de visualização.

No momento da resolução da questão 6.2 da entrevista (Anexo IV) refere não ter dúvidas sobre a introdução das expressões:

> Lúcia (L): Aqui ia pela máquina. Pois são duas funções de famílias diferentes.
> I: Sim
> [Introduziu as expressões na máquina].
> I: Na introdução das expressões não tem dificuldades?
> L: Não.
> I: Sabe onde tem que colocar os parênteses, etc?
> L: Sei.

A propósito da janela de visualização também parece não ter muitas dúvidas. Aquando da resolução do exercício 7.2 da entrevista (Anexo IV), respondeu que tem mais ou menos noção dos valores a alterar, revelando assim, nesta situação alguma facilidade em estabelecer a ligação entre a expressão analítica e o que esperar do gráfico:

> I: Aí, quando altera os valores na janela de visualização, altera ao acaso ou tem noção dos valores que tem que alterar?
> L: Mais ou menos tenho noção.

Nesta situação a Lúcia alterou os valores da janela de visualização de modo a obter o valor pretendido.

No entanto há algumas funções que ela desconhece, nomeadamente calcular o valor da derivada de uma função num ponto logo directamente na calculadora, através da tecla [*d/dx*]. A questão 1 da entrevista (Anexo IV) foi resolvida correctamente sem qualquer recurso à calculadora e quando questionada sobre se sabia como determinar o valor directamente, a resposta foi negativa:

L: É a derivada no ponto 1, não é? Então começo por derivar a expressão $h(x)$, que é $u'e^u$. [Em seguida calculou a derivada correctamente]. E agora calcula-se no ponto 1. Substitui-se o x por 1... vai dar $2e$.
I: Agora vou-lhe só perguntar uma coisa: sabia fazer isso na máquina?
L: Na máquina... A derivada na máquina... Depois de já ter calculado a derivada?
I: Não, não era ir substituir... Logo directamente. Sabia ou não?
L: Não, não estou a ver...
I: Não sabia da existência da tecla [*d/dx*] e que dá para escrever a função vírgula o ponto e calcular a derivada?
L: Não, não sabia.

Após a indicação, por parte da investigadora, da tecla que permitia resolver directamente a questão pela calculadora, a Lúcia evidenciou não conhecê-la.

Também nas aulas observadas as poucas vezes que recorreu espontaneamente à calculadora teve algumas dificuldades, nomeadamente na interpretação do gráfico, o que a levou a optar pela resolução analítica. Foi o que se passou, por exemplo, na aula de dia 06/02/2006 em que o professor propôs o seguinte exercício:

O valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\ln x}$ é:

(A) 1 **(B)** $+\infty$ **(C)** $-\infty$ **(D)** 0

A Lúcia recorreu primeiro à calculadora para visualizar o gráfico, utilizando portanto o menu dos gráficos, para ver qual é o limite, mas não concluiu nada. Ficou na dúvida de qual era o valor do limite, pelo que optou por determiná-lo analiticamente. Podia ter sido mais fácil se recorresse ao menu das tabelas e analisasse o que se passava com os valores de y quando x se aproximava de zero, por valores à direita de zero. Assim, nesta situação, a Lúcia revelou dificuldade em estabelecer a ponte entre a abordagem gráfica e a abordagem analítica.

Sobre o conhecimento que tem da calculadora refere que foi adquirido essencialmente nas aulas, embora inicialmente a tenha explorado um pouco em casa em conjunto com o manual adoptado:

I: Ao nível do conhecimento que tem da máquina, acha que é apenas resultado do que tem sido aprendido nas aulas ou em casa sozinha já explorou a máquina?
L: No início explorava muito a máquina em casa com exercícios, através do livro, para me ir adaptando a ela. Agora nas aulas os professores vão dizendo para fazer assim ou assim... vai ficando.
I: Explorar sozinha não?
L: Não.
I: Quer dizer que as potencialidades da máquina que utiliza são aquelas em que já houve uma indicação na aula para fazer assim?
L: Sim.

Portanto, a Lúcia utiliza somente as teclas e as funções da calculadora que foram exploradas nas aulas.

Razões que levam a Lúcia a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica

Ao longo da entrevista a Lúcia referiu as razões que a levam a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica, referindo a indicação exterior, a sua preferência pessoal e a cultura da sala de aula. O tipo de questões parece não ser uma razão para essa opção.

Indicação exterior

A Lúcia refere que recorre à calculadora essencialmente quando é explicitado no enunciado a sua utilização. No momento em que estava a resolver, analiticamente, a questão 3 da entrevista (Anexo IV), referiu esse facto:

I: Então vai à máquina quando?
L: Quando pede no exercício.

Assim, quando no enunciado está indicado a utilização da calculadora, a Lúcia recorre à mesma para resolver a questão.

Preferência pessoal

Ao longo da resolução das diversas questões apresentadas durante a entrevista, a Lúcia revelou uma preferência pessoal pela resolução analítica, recorrendo pouco à calculadora gráfica.

Esta preferência pessoal deve-se ao facto de considerar que a sua resolução analítica é mais rápida, mais fácil e mais segura do que a resolução através da calculadora. No momento da resolução da questão 1 da entrevista (Anexo IV) referiu:

> I: Nunca pensou sequer ir à máquina?
> L: Não, fazia logo analiticamente.
> I: E porquê?
> L: Acho que é mais fácil.

Aquando da resolução da questão 3 da entrevista (Anexo IV) referiu que preferia resolver analiticamente, porque lhe dava mais confiança, apesar de mostrar que sabia fazer na calculadora gráfica:

> I: Não pensou ir à máquina?
> L: Não.
> I: Nem agora?
> L: Não, mas também dava para ir. Punha-se esta e esta e depois via-se onde é que elas eram iguais.
> I: Como é que acha que é mais fácil?
> L: Eu gosto mais de fazer analiticamente, acho que tenho mais confiança do que na máquina.
> I: E porquê?
> L: Porque confio mais naquilo que faço. Mesmo no último teste que fizemos errei por causa da máquina, pôr os valores, ver as intersecções, é mais fiável ir pelos cálculos analíticos.

A Lúcia explicou como faria se resolvesse a questão na calculadora no entanto, optou por resolvê-la analiticamente, por considerar esta resolução mais fiável.

No momento da resolução da questão 7.1 da entrevista (Anexo IV) manifestou o mesmo sentimento referido acima:

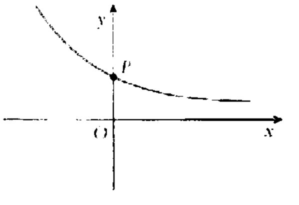
> L: Então agora aqui é o $N(0)$.
> I: E como é que vai fazer?

L: À mão. Mas também dava para ir pela máquina. Mandava desenhar e calcular através do [*Y-CAL*] quando o x é zero.

No final da entrevista destacou ainda: "Acho que analiticamente é... como é que hei-de explicar... sinto mais confiança analiticamente. Acho que perco mais tempo resolvendo pela máquina do que resolvendo analiticamente...".

Nas aulas observadas pela investigadora a Lúcia também manifestou sempre a preferência pela resolução analítica. Na aula de dia 06/02/2006, aquando da apresentação do seguinte exercício do manual:

Para um certo valor de a e para um certo valor de b, o gráfico da função, de domínio $\Re$, definida por $f(x) = a + e^{bx}$, está parcialmente representada na figura abaixo:



Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- O gráfico intersecta o eixo Oy em P (0,3)

Quais são os valores de a e b?

(A) $a = 2$ e $b = -\ln 2$ **(B)** $a = -2$ e $b = -1$
(C) $a = -1$ e $b = \ln 2$ **(D)** $a = -1$ e $b = 1$

houve sugestões por parte de alguns alunos da turma para a resolução através da calculadora gráfica (no menu dos gráficos, substituindo o a e o b pelos respectivos valores presentes nas opções e depois visualizando o gráfico, para ver qual o que correspondia ao dado) e de outros alunos para a resolução analítica. A Lúcia manifestou logo a sua preferência pela resolução analítica:

Alguns alunos: Substituíamos o a por 2 e o b por $-\ln 2$ e fazíamos o gráfico [na calculadora] e vimos se o gráfico coincide.
Outros alunos: Podíamos substituir o x por zero e igualar a 3 [processo analítico].

L: É mais fácil este processo [referia-se a este último].

Após a sugestão de outros colegas para a resolução analítica da questão, a Lúcia destacou logo o facto de considerar esta resolução mais fácil.

Cultura da aula

Outra razão que contribui para optar por resolver analiticamente é o facto de assim o professor poder valorizar a sua resolução: "Se não disser nada no enunciado... assim [por escrito] o professor sempre pode ver como é que nós raciocinamos...".

Assim, a Lúcia considera importante apresentar todos os seus cálculos para que o professor possa valorizar o seu raciocínio e considerar o que está correcto na sua resposta.

A Lúcia, ao longo das aulas, quando sugeria alguma resolução era a analítica, o que normalmente estava sempre em consonância com a resolução que era feita pelo professor.

Todas as questões apresentadas durante as aulas observadas foram resolvidas no quadro pelo professor com a "ajuda oral" dos alunos. A Lúcia era um desses alunos que participava. As sugestões eram sempre no sentido da resolução analítica e não do recurso à calculadora gráfica, notando-se que ficava satisfeita com o facto de a resolução apresentada ser a que por ela fora sugerida (e também por outros colegas).

Tipo de questões

Para a Lúcia, o tipo de questões não influencia a sua resolução com recurso à calculadora ou não, pois tanto nas questões de escolha múltipla como nas questões de resposta aberta, quer sejam exercícios ou problemas de aplicação, ela prefere resolver analiticamente:

I: Já agora, faz-lhe diferença para si ir à máquina ou não se for escolha múltipla ou se for questão de desenvolvimento? Ou seja,

aquilo que eu estou a perguntar é se for escolha múltipla tem mais tendência para ir à máquina ver ou não?
L: Não.
I: É igual? Resolve da mesma maneira?
L: Sim.

Assim, a Lúcia resolve todas as questões analiticamente.

Papel da calculadora gráfica na resolução de uma questão

No que se refere ao papel que a calculadora gráfica desempenha para a Lúcia, na resolução de uma questão sobre funções, ela assume o de confirmação das respostas obtidas analiticamente, combinação de resolução de papel e lápis e calculadora e obtenção de resposta imediata da questão. A calculadora nunca assumiu o papel de alternativa à dificuldade de resolver analiticamente.

Confirmação das respostas obtidas analiticamente

A Lúcia referiu que por vezes recorre à calculadora para confirmar os resultados, normalmente no menu dos gráficos, obtidos analiticamente:

I: Então vai à máquina quando?
L: Às vezes quando tenho tempo, para ir confirmar os resultados.

Após a visualização do gráfico, a Lúcia determina as coordenadas de alguns pontos relevantes para confirmar os dados obtidos analiticamente.

No momento da questão 7.2 da entrevista (Anexo IV) em que preferiu resolver analiticamente, apenas utilizou a calculadora para efectuar cálculos numéricos $\left(\ln\left(\frac{4}{9}\right) \div (-0{,}18)\right)$:

L: Então agora igualo a expressão a 20. Ou então ir pela máquina...
I: Pense lá. Se não tivesse aqui, como é que fazia?
Lúcia: Analiticamente.
[Resolveu a equação analiticamente e deu-lhe o valor correcto]
I: E ia depois confirmar ou não?
L: Confirmava.

I: Mas primeiro fazia analiticamente e depois é que confirmava?
L: Sim. Depois se não desse igual ir rever outra vez.
I: Mas ia rever outra vez o quê? Os seus cálculos ou a expressão na máquina?
L: Ambas as coisas.

A Lúcia referiu que depois confirmava na calculadora os valores obtidos analiticamente. Recorria ao menu dos gráficos, introduzia a expressão de $N(t)$ em y_1 e 20 em y_2 e, após a visualização dos mesmos, determinava, através da tecla [*ISCT*], o ponto de intersecção.

Nesta questão a calculadora gráfica foi utilizada como ferramenta computacional, uma vez que foi utilizada para efectuar cálculos numéricos.

Combinação de resolução de papel e lápis e calculadora

Aquando da resolução da questão 4 da entrevista (Anexo IV) a Lúcia estabeleceu, nesta situação, a ligação entre os valores obtidos na calculadora com os cálculos analíticos no momento em que foi determinar os zeros do polinómio na calculadora. Utilizou o menu dos gráficos, visualizou o gráfico e depois pediu os zeros através da tecla [*ROOT*]. Podia ter determinado logo directamente os zeros do polinómio no menu das equações:

I: E porque é que agora pensou que tinha que ir à máquina?
L: Porque para aplicar a regra de Ruffini preciso de um zero... Não estou a ver de outra maneira...
I: Foi pelo gráfico mas podia ter ido por outro sítio?
L: Ah, pois é. Podia ir pelas equações.
I: E dava logo todos os zeros.
[Aplicou a regra de Ruffini e escreveu o polinómio factorizado]
I: Aí sabia bem que tinha que fazer a ligação entre um dado obtido na máquina e depois a parte analítica?
L: Sim, sim.
I: Aí não tem dúvidas que tem que ir à máquina...
L: Tenho que ir, sim.

Portanto, nesta situação em particular, a Lúcia soube que precisava de ir determinar o zero do polinómio pela calculadora para depois poder factorizar o polinómio através da regra de Ruffini.

No entanto, em algumas situações da sala de aula transpareceu ter dificuldade em relacionar os conteúdos matemáticos em questão com o respectivo gráfico que obteve com a calculadora, ou seja revelou dificuldade em estabelecer a ligação entre a expressão analítica e o que seria esperado do gráfico.

Obtenção de resposta apenas pela calculadora

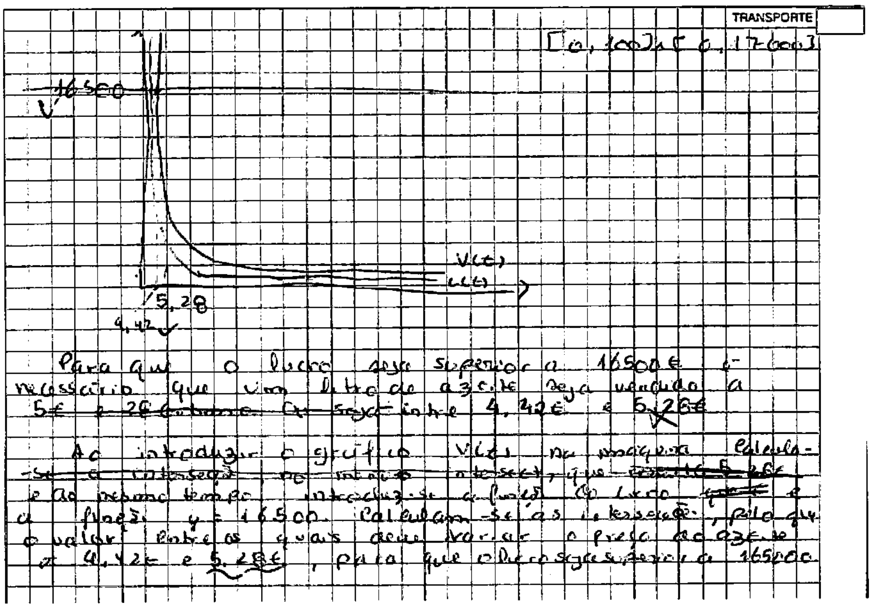
Apesar da Lúcia preferir resolver os exercícios analiticamente também houve algumas questões em que obteve a resposta apenas pela calculadora. Exemplo disso foi a questão 5 da entrevista (Anexo IV) em que ela resolveu directamente através da calculadora, recorreu ao menu dos gráficos, introduziu as expressões analíticas das duas funções e depois pediu os pontos de intersecção através da tecla [*ISCT*]:

> L: Esta podia-se ir à máquina e ver. Colocava-se uma e depois outra e depois via-se onde é que era maior. Também podia fazer analiticamente.
> I: Como é que fazia analiticamente?
> L: Igualava esta a esta... Não dava porque esta é do 4º grau...
> I: Poder podia, mas o que é que tinha que fazer aí? Lembra-se?
> L: O desenvolvimento do Binómio de Newton... Nesta situação é mais fácil ir á máquina.
> [E introduziu as expressões correctamente na calculadora]
> L: Agora é pedir onde é que se intersectam.
> [Em seguida alterou a janela de visualização]
> I: O que é que vai alterar?
> L: Vou alterar o eixo do y para cima e o do x não era preciso...
> [Em seguida determinou correctamente os pontos de intersecção].
> L: Então é de] 2,81; 5,39[.

Aquando da resolução desta questão, a Lúcia ainda ponderou a hipótese de resolver a questão analiticamente, mas depois como a expressão analítica de uma das funções era do 4º grau, admitiu que nesta situação era mais fácil resolver através da calculadora.

Nesta questão a calculadora gráfica foi utilizada como ferramenta de visualização, pois foi utilizada para visualizar os gráficos das funções e resolver a inequação $f(t) > g(t)$.

Na resolução da questão 1.2 do Teste Nacional Intermédio (Anexo III), cuja resposta era obtida através da calculadora, no menu dos gráficos e utilizando por exemplo a tecla [*ISCT*], a aluna Lúcia transcreveu para a folha de resposta um gráfico pouco perceptível, havendo, no entanto, uma boa interpretação gráfica. Determinou o valor correcto da abcissa de um dos pontos de intersecção e errou o valor da abcissa do outro ponto de intersecção e, portanto, a resposta não estava completamente correcta:



[Para que o lucro seja superior a 16500 € é necessário que um litro de azeite seja vendido entre 4,42 € e 5,28 €
Ao introduzir o gráfico $V(t)$ na máquina calcula e ao mesmo tempo introduz-se a função do lucro e a função $y = 16500$. Calculam-se as intersecções, pelo que o valor entre os quais deve variar o preço do azeite é 4,42 € e 5,28 €, para que o lucro seja superior a 16500].

É notória a preocupação em indicar a janela de visualização que utilizou na calculadora gráfica, aspecto sempre referenciado pelo professor.

Utilizando o termo referido por Grahm et al. (2003), a Lúcia parece ter utilizado a calculadora em situação tipo Exame de forma semi-proficiente uma vez que são utilizadas algumas potencialidades gráficas da calculadora, no entanto a melhor utilização ou um uso mais eficiente não é feito. Podia ter obtido uma melhor visualização do gráfico, alterando os valores da janela de visualização.

Alternativa à dificuldade de resolver analiticamente

A Lúcia nunca recorreu à calculadora como alternativa à dificuldade de resolver uma questão por resolução analítica.

Síntese

A Lúcia é uma aluna empenhada e trabalhadora, que resolve todos os exercícios que o professor recomenda e ainda todos os outros que constam do seu livro de texto ou de exercícios.

É uma aluna rápida na resolução de exercícios que envolvam cálculos numéricos ou algébricos e nas simplificações de expressões, daí ela achar que é mais rápida, mais fácil e mais segura a sua resolução analítica do que a da calculadora. Prefere portanto, sem qualquer dúvida e independentemente do tipo de questões, a resolução analítica. Não gosta muito de utilizar a calculadora, usa-a apenas quando necessário. A Lúcia é assim uma aluna que revela um pouco do perfil apresentado por Guin e Trouche (1999) como o do "método de trabalho racional", pois é uma aluna que faz um uso reduzido da calculadora gráfica, trabalhando essencialmente com papel e lápis.

Utiliza a calculadora gráfica desde o décimo ano e revela algum conhecimento técnico da calculadora, desconhecendo, no entanto, algumas potencialidades da mesma. Refere que este conhecimento foi adquirido essencialmente nas aulas.

Nas aulas observadas pela investigadora, a calculadora gráfica permanecia fechada até ao momento em que o professor ou o exercício em questão requeria a sua utilização. Portanto, só utiliza a calculadora quando o exercício pede explicitamente ou o professor indica ou ainda para confirmar os resultados obtidos analiticamente, se tiver dúvidas. Assim, o papel principal que reserva à calculadora é o de confirmação de respostas obtidas analiticamente, embora, numa situação pontual de uma questão da entrevista, onde foi necessário a combinação de papel e lápis e calculadora, a Lúcia o tivesse feito. No entanto, noutras situações, revelou alguma dificuldade em relacionar a expressão analítica e o que era esperado do gráfico.

Na resolução das questões em que recorreu à calculadora gráfica, utilizou frequentemente o menu dos gráficos e dentro deste quase sempre a tecla [*ISCT*] que permite determinar as coordenadas dos pontos de intersecção dos dois gráficos. Também utilizou a calculadora para efectuar alguns cálculos numéricos. Assim, a calculadora desempenhou o papel de ferramenta computacional ou de ferramenta de visualização, referindo os termos dos autores Doerr e Zangor (2000). Nunca recorreu ao menu das tabelas, o qual também nunca foi explorado ao longo das aulas observadas.

No Teste Intermédio de Matemática (Anexo III), a Lúcia obteve a classificação de 10 valores e na questão que solicitava o uso da calculadora parece tê-la utilizado de forma semi-proficiente, termo referido por Graham et al. (2003), pois utilizou algumas potencialidades gráficas da calculadora, mas o seu uso mais eficiente não foi feito.

No Exame Nacional de Matemática, realizado em Junho de 2006, obteve a classificação de 12,3 valores e acabou por entrar na sua segunda opção, ou seja no curso de Enfermagem, na Escola Superior de Enfermagem de Beja.

A Jacinta

O objectivo desta parte do estudo é dar a conhecer e analisar que relação estabelece a Jacinta com a calculadora gráfica, que razões levam a Jacinta a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica e que papel lhe reserva na resolução de uma questão. Começa-se primeiro por uma pequena apresentação da Jacinta.

Apresentação

A Jacinta tinha 18 anos quando decorreu a investigação. É natural da capital do distrito onde se situa a Escola e reside numa freguesia do seu concelho, situada a quinze quilómetros da Escola. A Jacinta vive com os seus pais, embora tenha uma irmã mais velha esta já não mora com eles. A mãe, no momento da investigação estava desempregada e o pai é trabalhador rural.

A Jacinta estudou na Suiça durante os anos correspondentes ao primeiro e ao segundo ciclo do ensino básico. Ingressou no ensino português no sétimo ano numa Escola Básica 2,3, na qual esteve até terminar o nono ano. Na globalidade as suas notas foram sempre boas durante esses anos, nomeadamente a Matemática. Estuda então na actual Escola desde o décimo ano de escolaridade e durante estes três últimos anos obteve classificações suficientes ou boas. A Matemática o seu aproveitamento desceu um pouco de nível, situação que ela atribui à falta de estudo e ao facto de começar a participar em outras actividades, como, por exemplo, no Teatro. A Jacinta não gosta de fazer muitos exercícios de Matemática. As suas classificações a Matemática foram 12, 13 e 14 valores respectivamente nos 10º,11º e 12º anos.

É uma aluna um pouco instável que quando está aborrecida com alguma coisa faz transparecer logo na sala de aula pois "desliga" um pouco daquilo que se passa ao seu redor. O mesmo acontece quando há algum conteúdo que não percebe logo, normalmente tem tendência a alhear-se do que está a ser explicado.

Pretende candidatar-se ao ensino superior, sendo a sua primeira opção Enfermagem.

Relação estabelecida com a calculadora gráfica

Durante as aulas observadas pela investigadora e durante a entrevista a Jacinta foi revelando a sua relação com a calculadora gráfica, nomeadamente no que se refere à sua atitude perante a calculadora e o domínio técnico da mesma.

Atitude perante a calculadora

A Jacinta utiliza a calculadora gráfica nas aulas desde o décimo ano e em várias ocasiões, nomeadamente nas aulas observadas, revelou gostar de utilizar a máquina. Usa habitualmente a calculadora em situações distintas, reconhecendo-lhe potencialidades. Para si a calculadora é um instrumento de trabalho imprescindível.

Por exemplo na aula de dia 16/01/2006, quando o professor interrogou em diferentes questões (essencialmente de escolha múltipla) como tinham feito, a Jacinta remeteu sempre para a calculadora gráfica:

P: Como é que resolvemos?
Jacinta (J): Ir à máquina...

Domínio técnico

Tem algum domínio técnico da calculadora, nomeadamente no que se refere à exploração dos gráficos e na alteração dos valores da janela de visualização.

No momento da resolução da questão 5 da entrevista (Anexo IV), na qual os gráficos se intersectavam mas o ponto de intersecção não era logo visível, a Jacinta alterou correctamente os valores da janela de visualização e tinha noção que poderia haver outros pontos onde os gráficos se poderiam intersectar. Assim, recorreu ao menu dos gráficos, introduziu a expressão das duas funções e depois de visualizar os gráficos pediu a intersecção, através da tecla [*ISCT*]. Apenas apareceu um ponto de intersecção, mas rapidamente alterou a janela de visualização para encontrar o outro ponto de intersecção:

J: Agora é pedir a intersecção.
[Apenas apareceu um valor no visor]
I: E será que o gráfico só se intersecta aí?
J: Pode-se intersectar mais acima.
[Então alterou os valores da janela de visualização]
J: Aumentar a escala.
I: Que valores?
J: Os do y, para cima...
I: Na alteração da janela não tem dificuldade? Sabe o que é que tem que alterar?
J: Sim.
I. E aqui chamou-lhe logo a atenção que poderia haver outro valor lá em cima?
J: Sim, porque não se via se o gráfico acabava ou se ia mais para um lado ou para outro.
I: Ia sempre experimentar?
J: Sim, se tivesse tempo sim.

A Jacinta revelou, nesta questão, não ter dificuldade em alterar os valores da janela de visualização, revelando que tem noção dos valores a alterar. Além disso, apercebeu-se logo que poderiam existir mais pontos de intersecção, revelando que consegue estabelecer a ligação entre a expressão analítica e o gráfico esperado.

Ainda a propósito da janela de visualização, quando questionada se tinha ou dificuldades em alterá-la, a Jacinta refere que nunca deixou de fazer um exercício por não conseguir alterar os valores da mesma:

> I: E com a janela de visualização, consegue alterá-la facilmente ou às vezes tem dificuldade em saber quais são os valores que coloca?
> J: Quando são valores muito altos tenho dificuldades em chegar lá, mas assim como estes não...
> I: Mas nunca deixou de fazer um exercício por não conseguir alterar a janela?
> J: Não.
> I: Vai experimentando os valores ou tem noção dos valores que tem que colocar?
> J: Como está aqui, por exemplo, os anos e as pessoas nunca podem ser negativos...

A propósito da questão 3 da entrevista (Anexo IV), em que após a visualização dos gráficos era necessário determinar o ponto de intersecção dos dois gráficos, a Jacinta manifestou conhecer perfeitamente em que tecla tinha que carregar para obter o valor pretendido:

> J: Esta agora é que... Se calhar tem mesmo que se fazer o gráfico.
> I: E nesse caso agora o que é que quer?
> J: Se calhar a intersecção.
> I: Exacto. Então tem que ir aonde?
> J: [*SHIFT*], [*G-Solv*] e intersectar.

Outro aspecto que a Jacinta parece não ter dúvidas é na introdução das expressões na calculadora gráfica, sabendo onde tem que colocar os parênteses. Refere que por vezes introduz parênteses em excesso com receio de falhar:

> I: Já agora que está a introduzir a expressão: costuma ter dificuldades na introdução das expressões? Ou seja, sabe onde é que tem que colocar os parênteses,...
> J: Sim, meto até parênteses a mais para não me enganar...

> I: Normalmente nunca falha o exercício por isso, por ter introduzido mal a expressão?
> J: Só às vezes, se me enganar num número ou assim, mas de me esquecer de parênteses é raro...

No entanto, desconhece algumas funções da calculadora gráfica. Exemplo disso é a situação que ocorreu com a questão 1 da entrevista (Anexo IV) em que poderia ter determinado directamente o valor da derivada na calculadora, através da tecla [*d/dx*], mas disse desconhecer essa função:

> I: Agora vou-lhe perguntar uma coisa: Nunca pensou ir à máquina fazer isso?
> J: Não.
> I: Ou seja, sabia que a máquina faz a derivada da função logo no ponto que se quer?
> J: Não.
> I: Não sabia da existência da tecla [*d/dx*] e que dá para escrever a função vírgula o ponto e calcular a derivada?
> J: Não.
> I: Nem sequer pensou na hipótese de ir fazer a derivada à máquina?
> J: Não. Foi logo assim...

Portanto, a Jacinta não recorreu à tecla [*d/dx*] porque a desconhecia. Daí ter resolvido a questão analiticamente.

Importa também destacar que nunca recorreu ao menu das tabelas, utilizando normalmente o dos gráficos e nomeadamente a tecla [*ISCT*] que permite determinar o ponto de intersecção dos gráficos. Também utiliza com muita frequência a calculadora para efectuar cálculos numéricos, como por exemplo $2e^1$, $\left(\ln\left(\frac{4}{9}\right)\div(-0{,}18)\right)$, $\frac{80}{180}$. Assim, a calculadora é utilizada como ferramenta computacional e como ferramenta de visualização.

Quando questionada sobre o conhecimento que tem da calculadora gráfica, a Jacinta refere não conhecer todas as suas funções e que o seu conhecimento foi essencialmente adquirido nas aulas, sendo as funções trabalhadas nas aulas as que ela conhece, apesar de numa fase inicial se ter dedicado à sua exploração:

I: Esse conhecimento deve-se apenas aquilo que foi ouvindo ao longo dos anos pelos professores nas aulas ou foi exploração sua em casa?
J: Foi um pouco das duas coisas. Logo quando comprei a máquina ainda tentei explorar e isso. Mas agora como já começa a ser muita coisa é melhor manter só o que é preciso nas aulas, para não confundir.
I: Conhece as funções todas da máquina?
J: Não.
I: Conhece aquelas que normalmente são trabalhadas nas aulas?
J: Sim.

A Jacinta destaca que como a informação sobre a calculadora começa a ser volumosa é preferível utilizar só as teclas e as funções exploradas nas aulas.

Razões que levam a Jacinta a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica

Ao longo da entrevista a Jacinta referiu as razões que a levam a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica, as quais são a sua preferência pessoal, a cultura da sala de aula e o tipo de questões. Nunca fez referência à indicação exterior.

Indicação exterior

Durante a entrevista nada referiu sobre a utilização da calculadora gráfica face a uma indicação exterior, mas a Jacinta utiliza a calculadora haja ou não essa indicação.

Preferência pessoal

A Jacinta revelou preferir resolver algumas questões pela calculadora pois a mesma dá-lhe confiança. Aquando da resolução da questão 3 da entrevista (Anexo IV), a qual foi resolvida com o recurso à calculadora, no menu dos gráficos e utilizando a tecla *[ISCT]*, a Jacinta refere ser mais seguro ir pela calculadora. Com receio de se enganar nos cálculos, a Jacinta prefere resolver as questões pela calculadora:

> I: Enquanto se espera pelo resultado, diga lá porque é que nesta também optou por fazer na máquina?
> J: Porque a resolver engano-me sempre nos cálculos e esta é mais seguro ir pela máquina.

Outro aspecto que leva a Jacinta a preferir resolver algumas questões pela calculadora gráfica é a sua rapidez, nomeadamente nas questões de escolha múltipla, deixando assim mais tempo para resolver as outras questões: " [Também] Por ser mais rápido, para depois ter mais tempo para as outras".

Tipo de questões

Outro factor que leva a Jacinta a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica para resolver uma questão é o tipo de questão.

Quando está perante questões de escolha múltipla, independentemente de serem exercícios circunscritos ao domínio matemático ou problemas de aplicação, a Jacinta resolve primeiro na calculadora e só resolve analiticamente se não tiver muita certeza da resposta:

> I: Quando são questões de escolha múltipla influenciam o facto de ir ver na máquina ou não?
> J: Sim.
> I: Tem mais tendência para ir ver na máquina?
> J: Sim.
> I: Do que fazer analiticamente?
> J: Sim. Depois só quando acabo o teste é que vou tentar, alguma que não tenha tanta certeza pela máquina, fazer analiticamente.
> I: Nas outras, que tiver a certeza, nem sequer experimenta?
> J: Não. Se não tiver tempo nem sequer lhe mexo mais.
> (...)
> J: Na escolha múltipla costumo ir pela máquina e só depois se tiver tempo é que vou fazer analiticamente.
> I: Portanto, na escolha múltipla começa sempre por fazer primeiro na máquina e só depois é que vai confirmar?
> J: Sim.

Assim, o facto de ser uma questão de escolha múltipla influencia a opção da Jacinta. As questões de escolha múltipla são resolvidas pela calculadora e só no caso de haver dúvidas e ainda lhe restar tempo é que vai resolver analiticamente.

Em contrapartida, se for uma questão de resposta aberta, quer seja exercício ou problema de aplicação, resolve primeiro analiticamente e só depois é que confirma na calculadora, normalmente no menu dos gráficos ou no das equações:

> J: Se fosse de outra maneira [questão de resposta aberta] teria que tentar.
> I: Mas ia ver primeiro na máquina, ia ver depois, como é que fazia?
> J: Tentava fazer primeiro analiticamente e depois ia ver na máquina se dava parecido pelo menos.
> (...)
> I: Na segunda parte normalmente resolve analiticamente?
> J: Sim.

Assim, a confirmação é feita através da visualização dos gráficos e na determinação das coordenadas de alguns pontos relevantes. Por vezes, a Jacinta também recorre ao menu das equações para determinar as soluções de uma equação.

Cultura da aula

Um dos motivos apontados para decisão de optar por utilizar a calculadora ou não é o facto de a resolução poder ser valorizada pelo professor:

> J: Estes exercícios gosto de fazer assim à mão que é para se me enganar nalguma coisa, sempre há alguma coisa que valoriza na mesma... Depois noutros quando não consigo muito bem fazer os cálculos vou mais pela máquina, mas se tiver tempo, tento fazer os cálculos para se não tiver bem o valor, pelo menos contarem alguma coisa.
> I: Na segunda parte normalmente resolve?
> J: Sim.
> I: No sentido de o professor depois valorizar os cálculos no caso de algum engano?
> J: Sim.

A Jacinta destaca a importância de, nas questões de resposta aberta, apresentar a resolução para o caso de não chegar à solução correcta devido a algum erro ocasional, o professor poder valorizar o raciocínio e atribuir alguma cotação ao que fica registado no papel.

Durante as aulas observadas a Jacinta foi uma das alunas que, quando o professor perguntava como tinham feito, quase sempre respondia que tinha recorrido à calculadora.

Papel da calculadora gráfica na resolução de uma questão

No que se refere ao papel que a calculadora gráfica desempenha para a Jacinta na resolução de uma questão sobre funções, este pode ser diversificado: assume o papel de confirmação das respostas obtidas analiticamente, obtenção de resposta imediata da questão, combinação de resolução de papel e lápis e calculadora e como alternativa à dificuldade de resolver analiticamente.

Confirmação das respostas obtidas analiticamente

A Jacinta referiu que por vezes utiliza a calculadora para confirmar, recorrendo essencialmente ao menu dos gráficos, os valores obtidos analiticamente:

> I: Mas ia ver primeiro na máquina, ia ver depois, como é que fazia?
> J: Tentava fazer primeiro analiticamente e depois ia ver na máquina se dava parecido pelo menos.

Quando a Jacinta pronunciou estas palavras referia-se às questões de resposta aberta. Nessas situações, é que ela resolve primeiro analiticamente e depois vai confirmar os resultados através da calculadora. Esta confirmação normalmente é feita pela visualização dos gráficos e na determinação das coordenadas de alguns pontos relevantes.

Combinação de resolução de papel e lápis e calculadora

A Jacinta, aquando da resolução da questão 4 da entrevista (Anexo IV), fez correctamente a combinação de resolução de papel e lápis e calculadora. No momento da factorização do polinómio foi determinar os zeros na calculadora, no menu das equações, e sendo apenas um deles exacto aplicou em seguida a regra de Ruffini para concluir a factorização:

I: Então nesse caso aí?
J: Ia ver os zeros à máquina.
(...)
J: Só dá um número certo.
I: Só dá um valor exacto. E agora como é que descobre o resto?
J: Agora acho que é pela regra de Ruffini...
I: Então como é que fica?
J: Fica $(x+1)(x^2-3)$.
I: E está factorizado.
J: Sim.
E: Nesse tipo de exercício teve que ir buscar um valor à máquina. Sabia perfeitamente que tinha que ir buscar esse valor à máquina?
J: Sabia.
I: E conseguiu fazer a ligação desse valor com o que tinha que fazer analiticamente?
J: Sim.
I: Quando tem que ir buscar um valor à máquina sabe porque é que precisa daquele valor para continuar?
J: Sim.

Portanto, na resolução desta questão, a Jacinta estabelece perfeitamente a ligação entre o valor obtido através da calculadora e a consequente resolução analítica.

Também na questão 2 da entrevista (Anexo IV) era importante relacionar o gráfico que visualizava na calculadora com o domínio e as assímptotas da função logarítmica, pois caso contrário indicaria como conjunto solução um intervalo infinito. Depois de ajudada um pouco pela investigadora, a Jacinta conseguiu chegar à solução correcta, recorrendo ao menu dos gráficos. Introduziu em y_1 a expressão $\log_3(2-x)$ e em y_2 o valor 1 e após a visualização dos gráficos determinou o ponto de intersecção, através da tecla [*ISCT*]:

J: Agora aqui se calhar é melhor fazer o gráfico...
I: Sim... E porquê? Porque é que nesse caso estava a pensar fazer o gráfico?
J: É para ver mais ou menos como é que é o gráfico.
I: E então onde é que ela é menor ou igual que a outra?
J: Então é de -1 a mais infinito.
I: É? É de -1 a mais infinito?
J: É. É quando ela é menor...
I: O gráfico do logaritmo continua?
J: Não, ele vai para baixo.
I: Pois. O que é que o gráfico do logaritmo tem aqui?
J: Uma assímptota.
I: Então não passa daí...
J: Não. Então é de -1 a 2.
[Finalmente escreveu a opção correcta]

Mais uma vez, a Jacinta estabeleceu a ligação entre os conhecimentos matemáticos e a calculadora gráfica, pois para poder resolver esta questão teve que operar uma mudança de base, uma vez que não é possível introduzir directamente na calculadora um logaritmo de base 3.

Obtenção de resposta apenas pela calculadora

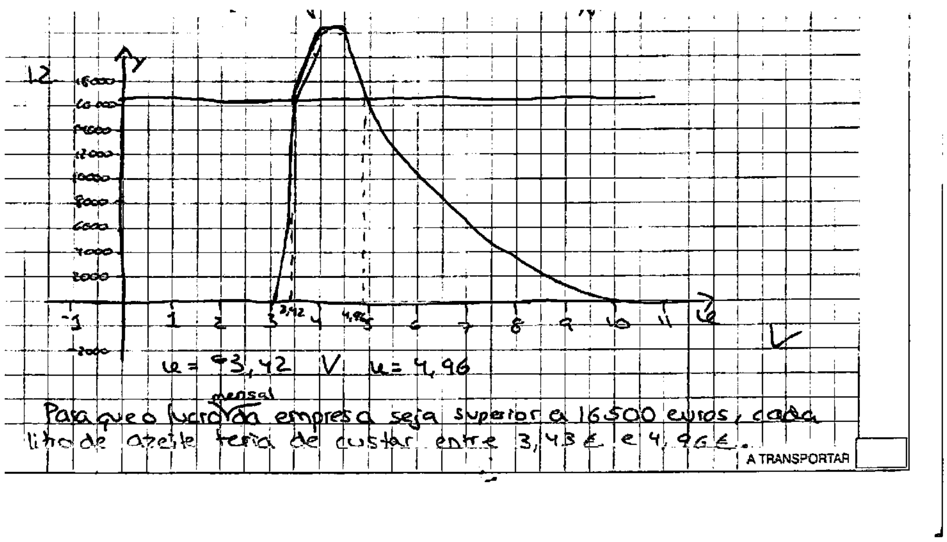
A Jacinta também resolveu algumas questões apenas pela calculadora. Foi o que se passou com a questão 3 da entrevista (Anexo IV), em que recorreu ao menu dos gráficos, introduziu na calculadora as expressões presentes no primeiro membro e no segundo membro em y_1 e em y_2 respectivamente e pediu o ponto de intersecção (através da tecla [*ISCT*]) e respondeu directamente à questão: "Esta agora é que... Se calhar tem mesmo que se fazer o gráfico. [Introduziu a expressão na máquina]. É $\frac{2}{3}$.

É de notar que a Jacinta, apesar de visualizar 0,66666... reconheceu este valor com sendo $\frac{2}{3}$, revelando um espírito crítico relativamente a valores exactos e valores aproximados.

Também durante as aulas observadas a Jacinta resolveu algumas questões directamente através da calculadora. Por exemplo, na aula de dia 06/03/2006, quando foi apresentado o seguinte exercício: "Caracteriza a função derivada da seguinte função $f(x)=e^{3x^2+2x}$" e em seguida foi escrita a função derivada $f'(x)=(6x+2)\,e^{3x^2+2x}$, o professor perguntou qual era o domínio da função derivada. A Jacinta respondeu que tinha visto o domínio na calculadora:

> P: Qual é o domínio?
> J: Fiz o gráfico na máquina para ver qual o domínio.

Na resolução da questão 1.2 do Teste Nacional Intermédio (Anexo III), cuja resposta era obtida através da calculadora por indicação do enunciado, a aluna Jacinta fez a transcrição correcta do gráfico, indicou os valores das abcissas dos pontos de intersecção e respondeu correctamente ao problema:



[Para que o lucro mensal da empresa seja superior a 16500 €, cada litro de azeite teria de custar entre 3,43 € e 4,96 €]

É notória na resposta da aluna Jacinta a preocupação em escrever todos os passos que efectuou na calculadora para chegar à resposta, assim como a janela de visualização utilizada e as teclas que utilizou, situação sempre muito referenciada pelo professor durante as aulas:

TRANSPORTE

Para tal, introduzi na máquina calculadora a função $L(x)=(x-3)e^{14-x}$ e $y=16500$, numa janela de visualização de $[0;20000]$ e à $[0,15]$, e obtive assim parte do gráfico. De seguida com a função de ISCT da máquina calculadora, obtive ~~as coordenadas~~ os pontos de intersecção $x=3,42$ e $x=4,96$, que são as soluções para o problema.

[Para tal, introduzi na máquina calculadora a função $L(x)=(x-3)e^{14-x}$ e $y=16500$, numa janela de visualização de [0;20000] e [0,15], e obtive assim parte do gráfico. De seguida com a função de [*ISCT*] da máquina calculadora, obtive os pontos de intersecção $x=3{,}42$ e $x=4{,}96$, que são as soluções para o problema].

Utilizando os termos de Graham et al. (2003), podemos dizer que a Jacinta em situação tipo Exame, utilizou a calculadora, na questão que solicitava o seu uso, de forma proficiente uma vez que foi feito o uso apropriado das potencialidades da calculadora de forma a obter a mais eficiente solução para a tarefa que possuía entre mãos.

Alternativa à dificuldade de resolver analiticamente

A Jacinta costuma recorrer também muito à calculadora como alternativa à dificuldade de resolução analítica, ou seja, quando não consegue resolver analiticamente vai experimentar na máquina:

[Na resolução da questão 6.2]
J: Agora vou fazer $f(x)>g(x)$ e resolver até que me dê valores para x.
I: Vai fazer como?
J: É como se fosse igualar uma à outra só que é com o sinal de maior.
I: Assim, analiticamente?
J: Sim, vou tentar. Senão depois experimento na máquina.
[Começou a resolver analiticamente, ainda fez alguns passos, mas depois não conseguiu]
J: É melhor ir tentar na máquina, isto não me está a dar nada.

I: Se fosse a nível de teste ou a nível de Exame lhe fosse dada liberdade de resolução, como está neste exercício, como é que fazia?
J: Como fiz assim primeiro e não deu...
I: Mas experimentava primeiro analiticamente...
J: Sim e depois é que ia à máquina.

Portanto, nesta questão a Jacinta ainda iniciou a resolução analítica e depois, como não conseguiu concretizar a resolução, optou por recorrer à calculadora.

Na questão 2 da entrevista (Anexo IV) quando questionada porque tinha optado por fazer o gráfico, a calculadora também surge como alternativa à dificuldade de resolver analiticamente:

I: Então porque é que nesta optou fazer o gráfico e na outra por exemplo nem sequer pensou em ir à máquina?
J: Pois. Porque estas eu não consigo resolver assim muito bem analiticamente.
I: E então vai ver no gráfico?
J: Sim. Pode ser que dê alguma...

Mais uma vez a calculadora surge como alternativa à resolução analítica.

Síntese

A Jacinta foi uma aluna que ao longo do terceiro ciclo obteve boas classificações a Matemática, no entanto, quando entrou no décimo ano as suas prestações baixaram de nível. Ela própria atribui como causa disso a falta de estudo e a participação em outras actividades que lhe "roubam" algum tempo do estudo. Presentemente revela algumas dificuldades na disciplina de Matemática e a calculadora funciona como um "apoio" para a resolução dos exercícios, sendo mesmo um elemento indispensável na aula de Matemática.

A Jacinta usa habitualmente a calculadora e parece gostar de a usar. Domina algumas funções da calculadora, apesar de haver uma ou outra que desconhece. Não revelou dificuldades, por exemplo, na alteração dos valores da janela de visualização ou na introdução de expressões com parênteses. Em diversas situações relevou conseguir estabelecer a ligação entre a expressão analítica e o que esperar do gráfico.

A Jacinta revela um pouco do perfil apresentado por Guin e Trouche (1999) como o do "método de trabalho variado", pois é uma aluna que explora diferentes estratégias ao dispor (calculadora, trabalho de papel e lápis, conhecimento matemático teórico), revelando, no entanto preferência na resolução com a calculadora.

Recorreu várias vezes à calculadora gráfica para resolver as questões tanto nas aulas observadas como durante a entrevista, mas os menus utilizados foram somente o dos gráficos (principalmente a tecla para determinar a intersecção de gráficos) e o dos cálculos numéricos. Assim a calculadora surge, utilizando os termos dos autores Doerr e Zangor (2000), como ferramenta computacional ou como ferramenta de visualização. Nunca recorreu, por exemplo, ao menu das tabelas.

As razões que a levam a optar por resolver uma questão pela calculadora é o tipo de questões e a sua preferência pessoal, pois considera que a calculadora lhe dá alguma segurança e lhe oferece uma maior rapidez na resolução das questões, nomeadamente nas de escolha múltipla. A natureza das questões (exercícios ou problemas de aplicação) não parece influenciar a sua opção. Em contrapartida, o tipo de questões (escolha múltipla ou de resposta aberta) já parece influenciar. Nas questões de resposta aberta prefere resolver analiticamente para que o professor possa valorizar a sua resposta no caso de haver algum engano na sua resolução. Nas questões de escolha múltipla resolve primeiro na calculadora.

O papel que a Jacinta reserva à calculadora gráfica na resolução de uma questão é variado. Ela utiliza a calculadora para confirmar as respostas obtidas analiticamente, normalmente no menu dos gráficos. Também lhe reserva o papel de combinação de resolução de papel e lápis e calculadora assim como alternativa à dificuldade de resolver analiticamente. No entanto, o papel principal é o de obtenção de resposta imediata.

No Teste Nacional Intermédio (Anexo III), a Jacinta obteve a classificação de 10 valores e na questão que solicitava o uso da calculadora parece tê-la utilizado de forma proficiente, termo referido por Graham et al. (2003), pois fez o uso apropriado das potencialidades da calculadora de modo a obter a mais eficiente solução para a tarefa que possuía entre mãos.

No Exame Nacional de Matemática, que realizou em Junho de 2006, obteve a classificação de 6,7 valores. Acabou por não ingressar no ensino superior nesse ano e no ano seguinte matriculou-se novamente no 12º ano, nas disciplinas de Biologia e Matemática, para fazer melhoria de notas.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E REFLEXÃO FINAL

Este capítulo começa por fazer uma breve síntese dos principais aspectos desta investigação, recordando o seu objectivo principal, as questões associadas e a metodologia utilizada. Apresenta de seguida as conclusões suscitadas pelos casos dos três alunos estudados em relação à utilização da calculadora gráfica na sala de aula, no âmbito de Funções no 12º ano de escolaridade. Finalmente expõe algumas questões que servem de base a uma reflexão final.

Síntese do estudo

O principal objectivo deste estudo é compreender em que situações, porquê e como é que os alunos utilizam a calculadora gráfica na resolução de questões no âmbito do estudo de Funções no 12º ano de escolaridade. Para tal, pretende-se obter resposta às seguintes questões:

- Que relação estabelecem os alunos com a calculadora gráfica?
- Que razões levam os alunos a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica na resolução de uma questão?
- Que papel reservam os alunos à calculadora gráfica na resolução de uma questão?

A natureza das questões envolvidas levou à adopção de uma metodologia de natureza qualitativa e à opção pela realização de estudos de caso, envolvendo três alunos de uma turma do 12º ano de escolaridade.

A recolha de dados foi concretizada no ano lectivo 2005/2006, recorrendo a diversos instrumentos. Procurou-se, assim, complementar as informações provenientes das entrevistas com os elementos obtidos através da observação das aulas e da análise de documentos. As entrevistas foram áudio-gravadas e integralmente transcritas pela investigadora. Foram observadas treze aulas e fotocopiados, nesses dias, os cadernos diários de alguns alunos da turma à qual pertenciam os alunos envolvidos no estudo de caso. Foram também fotocopiadas as resoluções escritas do Teste Nacional Intermédio de Matemática, realizadas pelos três alunos envolvidos no estudo. A análise foi posteriormente efectuada, ponderando, para cada aluno, os diferentes elementos recolhidos.

Conclusões

As conclusões que a seguir se apresentam procuram dar resposta a cada uma das questões formuladas para o desenvolvimento do estudo, salientando tanto os aspectos de semelhança encontrados, como os aspectos de diferença que se julgam relevantes. Sempre que possível, são indicadas referências de conclusões convergentes apontadas pela investigação relativa ao domínio da utilização da calculadora gráfica.

Relação estabelecida com a calculadora gráfica

No que se refere à relação estabelecida com a calculadora identificaram-se algumas diferenças entre os alunos, apesar de também se verificarem alguns aspectos comuns.

Relativamente à atitude perante a calculadora gráfica, os alunos Francisco e Jacinta recorrem à calculadora gráfica para resolver as questões, enquanto que a aluna Lúcia prefere resolver as questões analiticamente. Assim, o Francisco e a Jacinta revelam confiança na calculadora enquanto que a Lúcia parece não revelar muita, não tanto por rejeitar a calculadora gráfica mas por considerar a sua resolução analítica mais eficaz.

A aluna Jacinta revelou um pouco do perfil apresentado por Guin e Trouche (1999) como o do "método de trabalho variado", observado em alunos que exploram todas as possíveis estratégias ao dispor (calculadora, trabalho de papel e lápis, conhecimento matemático teórico). A Jacinta revelou capacidade de testar uma diversidade de estratégias de resolução das tarefas revelando, no entanto, uma preferência pelo recurso à calculadora para resolvê-las.

A aluna Lúcia revelou um pouco do perfil apresentado por Guin e Trouche (1999) como o do "método de trabalho racional", observado em alunos que fazem um uso reduzido da calculadora gráfica. A Lúcia revelou um forte controlo do processo de resolução, confiando nas inferências que faz ao raciocinar, revelando uma preferência pelo trabalho com papel e lápis.

O aluno Francisco revelou um pouco do perfil apresentado por Guin e Trouche (1999) como o do "método de trabalho mecânico", observado em alunos que usam a calculadora para fazer algumas explorações e manipulações simples. O Francisco revelou pouco controle do que obtém a partir da calculadora, sem estabelecer relações com o conhecimento matemático teórico.

No que diz respeito ao domínio técnico, os três alunos revelaram ter algum, situação que seria de esperar pois encontravam-se a frequentar o décimo segundo ano e desde o décimo ano que têm disponível a calculadora gráfica. No entanto, aquando da resolução das questões, normalmente recorreram ao menu do cálculo numérico e ao dos gráficos e, neste, quase sempre para determinar os pontos de intersecção dos gráficos. Os alunos nunca recorreram ao menu das tabelas, desprezando-se assim uma das formas de representação das funções: a representação numérica. Assim, desvalorizou-se uma das vantagens da calculadora gráfica, apresentada por diversos autores (Waits & Demana, 2000; Hennessy et al., 2001), que é facilidade na ligação entre as diferentes representações.

A calculadora gráfica foi utilizada pelos três alunos como ferramenta computacional (quando é utilizada para efectuar cálculos numéricos) e como ferramenta de visualização (quando é utilizada para visualizar gráficos e resolver equações), apenas dois dos cinco padrões definidos por Doerr e Zangor (2000).

Existiam determinadas funções da calculadora que os alunos desconheciam, ou porque nunca lhes foram ensinadas ou porque se esqueceram por falta de uso. Quando questionados sobre como adquiriram o conhecimento que possuem da calculadora, referem que se resume basicamente aquilo que foi ensinado, pelos professores, ao longo dos três anos. Além dos professores, também referem os colegas como fonte de algum conhecimento. No que se refere à exploração individual da calculadora, esta foi muito reduzida e apenas no início do contacto com a mesma, ou seja, no décimo ano. Rocha (2000) também chegou a esta conclusão quando refere que:

> os conhecimentos adquiridos pelos alunos sobre o funcionamento da máquina, tendem a limitar-se aos que foram ensinados pela professora e que a prática veio a revelar de utilidade. As tentativas de descobrir novas potencialidades são muito pouco frequentes e parecem ainda tender a diminuir com o decorrer do tempo e o aumento de confiança na utilização de um determinado conjunto de comandos (Rocha, 2000, p. 195).

Os alunos desenvolveram assim pouca autonomia no uso da calculadora, possivelmente devido à pouca necessidade de explorarem mais a máquina.

Razões que levam os alunos a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica

No que se refere às razões que levam os alunos a optar por utilizar ou não a calculadora gráfica, também se registaram alguns aspectos comuns e outros diferentes.

Um aspecto comum é o facto de os alunos utilizarem a calculadora gráfica quando há uma indicação exterior para o fazer. Sempre que os enunciados peçam explicitamente para utilizar a calculadora gráfica, os alunos utilizam-na. Mas também a utilizam mesmo que o enunciado não diga explicitamente para recorrer à calculadora gráfica, desde que sejam pedidos gráficos. Assim, nos casos em que é requerida a elaboração de um gráfico, a utilização da calculadora é considerada conveniente, pelo que a actuação dos alunos envolvidos no estudo está em consonância com as conclusões alcançadas por Ruthven (1992) e Rocha (2000).

Outro aspecto comum aos três alunos (apesar de o Francisco nunca ter referido explicitamente este aspecto) é o facto de, por vezes, optarem por resolver o exercício analiticamente com o objectivo da resolução poder ser mais valorizada, pelo professor, nomeadamente aquando da ocorrência de algum engano. É de salientar que a cultura da sala de aula foi quase sempre de valorização da resolução analítica, apesar de haver momentos em que também era feita uma abordagem gráfica, com recurso à calculadora, da questão. É que, de acordo com Gómez (1996), o professor não é de modo algum um elemento neutro neste processo. Ao longo das aulas o professor foi dando sempre mensagens, explícita ou implicitamente, sobre as vantagens da resolução analítica, nomeadamente na determinação dos zeros de uma função. Por outro lado, a maioria das questões foram abordadas pelo professor, numa perspectiva preferencialmente analítica. Assim, os alunos acabaram por adquirir uma maior confiança na resolução analítica pois foi essa a que foi ensinada, trabalhada e treinada na sala de aula, daí optarem por resolver analiticamente por considerarem que desta forma é mais fácil ou mais rápido. Pode assim dizer-se que a actuação dos alunos envolvidos no estudo parece ir ao encontro da opinião de Ruthven (1992) quando parece sugerir que os alunos podem adoptar uma determinada abordagem apenas pelo facto de esta lhes ter sido ensinada.

No que se refere ao tipo de questões, já revelam diferenças tal como Rocha (2000) também concluiu que o tipo de tarefa proposta ao aluno interferia na forma como este utilizava a calculadora gráfica. Os alunos Francisco e Jacinta optam por resolver na calculadora gráfica, sempre que possível, as questões de escolha múltipla. Consideram que é mais rápido desta forma, restando depois mais tempo para as questões de resposta aberta. Estas últimas já resolvem analiticamente, a não ser que o enunciado exija uma resolução com recurso à calculadora gráfica. Esta postura parece estar de acordo com as conclusões apontadas por Forster e Mueller (2001), quando concluíram que os alunos fazem um uso mínimo da calculadora gráfica para tarefas que não requerem uma resposta com gráficos.

No que se refere à natureza das questões, para a aluna Jacinta este factor parece não influenciar. Independentemente de se tratar de um exercício (circunscrito

DES (2001b). *Matemática B – Programas 10º, 11º e 12º anos.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

DES (2001c). *MACS – Programas 10º, 11º e 12º anos.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

DGEBS (1991). *Organização curricular e programas, ensino secundário.* Lisboa: Ministério da Educação.

Doerr, H. & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 143-163.

Drijvers, P. & Doorman, M. (1996). The graphics calculator in mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 425-440.

Dunham, P. & Dick, T. (1994). Research on graphing calculators. *Mathematics Teacher, 87(6)*, 440-445.

Forster, P. & Mueller, U. (2001). Outcomes and implications of students' use of graphics calculators in the public examination of calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32 (1)*, 37-52.

Gil, A. (1996). *Como elaborar projectos de pesquisa.* S. Paulo: Atlas.

Gómez, P. (1996). Graphing calculators and mathematics education in developing Coutries. In P. Gómez & B. Wiats (Eds.), *Roles of calculators in the Classroom* (pp. 59-70). Disponível em: http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/tg18/ArchivosPDF/Gomez.pdf

Gómez, P. & Carulla, C. (1998). De lo simbólico a lo gráfico. Efectos de la tecnologia en la educácion matemática. *Paper aceptado para el IV Congreso Colombiano de Informática Educativa.* Bagotá: Universidad de los Andes. Disponível em: http://ued.uniandes.edu.co/servider/em/recint/docnopub.html

Graham, T., Headlam, C., Honey, S., Sharp, J. & Smith, A. (2003). The use of graphics calculators by students in an examination: What do they really do? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34 (3)*, 319-334.

Grant, F. & Searl, J. (1996). Mathematical modelling with a graphics calculator. In P. Gómez & B. Waits (Eds), *Roles of calculators in the classroom* (pp. 71-86). Disponível em: http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/tg18/ArchivosPDF/Grant.pdf

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into Mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3 (3), 195-227.*

Hennessy, S., Fung, P. & Scanlon, E. (2001). The role of the graphic calculator in mediating graphing activity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32,* 267-290.

Hooper, J. (1993). Issues of mathematics classroom use of graphing calculators. *The Mathematics Educator*, *4(2)*, 45-50.

Matos, J. & Carreira, S. (1994). Estudos de caso em Educação Matemática – Problemas actuais. *Quadrante, 3(1),* 19-52.

McMullin, L. (2001). Algemética. *Educação e Matemática, 62*, 21-22.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach.* San Francisco: Jossey-Bass.

NCTM (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s* .Reston: NCTM.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: NCTM.

Neves, M. A. (2003). *Matemática A - 10º ano – Funções I.* Porto: Porto Editora.

Penglase, M. & Arnold, S. (1996). The graphics calculator in mathematics Education: A critical review of recent research. *Mathematics Education Research Journal, 8(1),* 58-90.

Ponte, J. P. (1986). *O computador: Um instrumento de Educação.* Lisboa: Texto Editora.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática, 34*, 2-7.

Ponte, J. P. & Canavarro, A. P. (1993). Graphic calculators in the classroom: students' viewpoints. In *Proceedings* PME 17, Japão, vol. 2, pp. 33-40.

Ponte, J. P. & Canavarro, A. P. (1997). *Matemática e novas tecnologias.* Lisboa: Universidade Aberta.

Rocha, H. (2000). *A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário.* Tese de Mestrado. Lisboa: APM.

Ruthven, K. (1992). Personal technology and classroom change: A British perspective. In J. Fey & C. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education* (pp. 91-100). Reston: NCTM.

Ruthven, K. (1996). Calculators in the mathematics curriculum: The scope of personal computational technology. In A. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 435-468). Dordrecht: Kluwer.

Tuckman, B. (2000). *Métodos de Investigação em Educação.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Yin, R. (1989). *Case study research: Design and methods.* Newbury Park: Sage.

Waits, B. & Demana, F. (2000). Calculators in mathematics teaching and learning: Past, present and future. In M. J. Burke (Ed.), *Learning Mathematics for New Century* (pp. 1-16). Reston: NCTM.

ANEXOS

Anexo I – Pedido de autorização ao Conselho Executivo

Ex.ª Senhora
Presidente do Conselho Executivo
da Escola ...

Venho, por este meio, solicitar a Vossa Excelência autorização para proceder a um estudo com alguns alunos de uma turma desta Escola (décimo segundo B), na disciplina de Matemática, no âmbito da investigação relativa à dissertação de Mestrado que, como é do conhecimento de V. Exa., estou a realizar na Universidade de Évora, sob orientação da Professora Doutora Ana Paula Canavarro.

Para levar a efeito este estudo necessito de assistir a algumas aulas dessa turma e entrevistar alguns alunos da mesma, durante um período relativamente curto, no ano lectivo 2005/2006.

Pedindo deferimento a esta minha solicitação e agradecendo desde já a atenção que se digne dispensar a este assunto, subscrevo-me,

Atenciosamente

Maria João Pinto Paulo Semião
13 de Janeiro de 2006

Anexo II – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exm° (a) Senhor(a)
Encarregado(a) de Educação

Pretendo proceder a um estudo com alguns alunos de uma turma desta Escola (décimo segundo B), na disciplina de Matemática, no âmbito da investigação relativa à dissertação de Mestrado que estou a realizar na Universidade de Évora, sob orientação da Professora Doutora Ana Paula Canavarro.

Para levar a efeito este estudo necessito de assistir a algumas aulas dessa turma e entrevistar alguns alunos da mesma, durante um período relativamente curto, no ano lectivo 2005/2006. Este estudo em nada interfere com a leccionação da disciplina nem com a classificação dos alunos na mesma.

Venho assim, por este meio, solicitar a sua autorização para entrevistar o seu educando, caso seja ele um dos alunos escolhidos.

Agradeço desde já a sua atenção, subscrevo-me,

Atenciosamente

____
/Profª Maria João Semião/

Eu, ____, encarregado de Educação do aluno ____, n° ____, venho por este meio autorizar o meu educando a realizar a entrevista acima referida.

Assinatura do Enc. de Educação

____

Anexo III – Teste Nacional Intermédio de Matemática

gave
gabinete de avaliação educacional

ME
Educação

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA

12º Ano de Escolaridade
(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
(Dec.-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto, para os alunos que se matricularam no 10.º Ano em 2003-2004)

Duração da Prova: **90 minutos**

17/Março/2006

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

O Grupo II inclui quatro itens de resposta aberta, alguns subdivididos em alíneas, num total de seis.

GRUPO I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma esta correcta.
- Escreva na sua folha de respostas apenas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja (x_n) a sucessão de termo geral $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Seja (y_n) a sucessão de termo geral $y_n = 1 + \ln(x_n)$ (ln designa logaritmo de base e)

Qual é o valor de $\lim y_n$?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** $1+e$ **(D)** $2+e$

2. Indique o número real que é solução da equação $e^{x-2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{5}{2}$ **(D)** $\frac{7}{2}$

3. Indique o conjunto dos números reais que são solução da inequação

$$\log_3(1-x) \leq 1$$

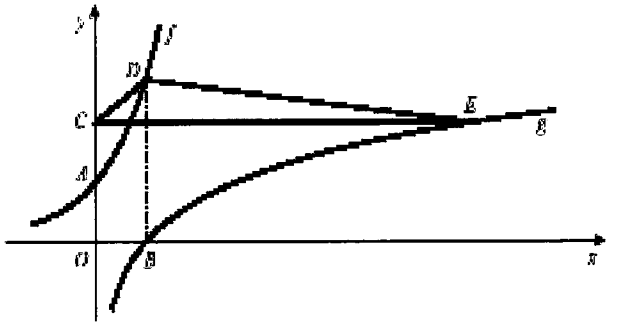
(A) $[-2,1[$ **(B)** $[-1,2[$

(C) $]-\infty,-2]$ **(D)** $[-2,+\infty[$

4. Na figura estão representadas, em referencial o.n. $x0y$:

- parte do gráfico da função f, de domínio $\Re$, definida por $f(x) = e^x$
- parte do gráfico da função g, de domínio $\Re^+$, definida por $g(x) = \ln x$
  (ln designa logaritmo de base e)

O ponto A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Oy e o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico de g com eixo Ox.



Na figura está também representado um triângulo $[CDE]$.
O ponto C pertence ao eixo Oy, o ponto D pertence ao gráfico de f e o ponto E pertence ao gráfico de g.
Sabe-se ainda que:

- a recta BD é paralela ao eixo Oy e a recta CE é paralela ao eixo Ox
- $\overline{AC} = \overline{OA}$

Qual é a área do triângulo $[CDE]$?

(A) $\dfrac{(e-1)\ln 2}{2}$ **(B)** $\dfrac{(e^2-1)\ln 2}{2}$

(C) $\dfrac{e(e-2)}{2}$ **(D)** $\dfrac{e^2(e-2)}{2}$

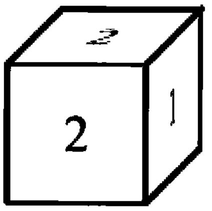
5. Todos os alunos de uma turma de uma escola secundária praticam pelo menos um dos dois desportos seguintes: andebol e basquetebol.
Sabe-se que:

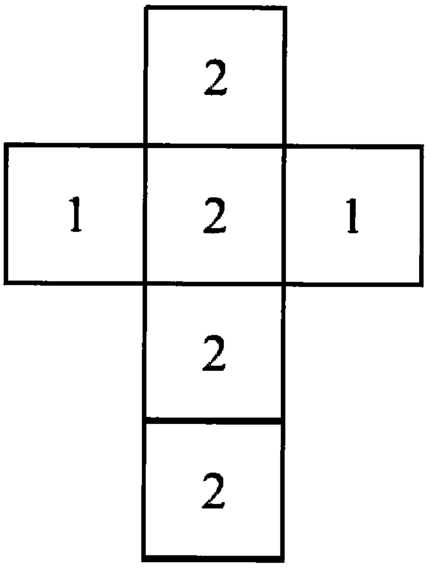
- metade dos alunos da turma pratica andebol
- 70% dos alunos da turma pratica basquetebol

Escolhe-se ao acaso um aluno dessa turma e constata-se que é praticante de andebol.
Qual é a probabilidade de ele praticar basquetebol?

(A) 0,1 **(B)** 0,2 **(C)** 0,3 **(D)** 0,4

6. Na figura está representado um dado equilibrado, bem como a respectiva planificação.





Lança-se este dado duas vezes.
Seja X a variável aleatória: *soma dos números saídos nos dois lançamentos*.
Indique o valor de k tal que $P(X = k) = \frac{1}{9}$

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro regular em que cada um dos seus vértices pertence a um dos eixos coordenados (dois vértices em cada eixo).
Escolhendo, ao acaso, três vértices desse octaedro, qual é a probabilidade de eles definirem um plano perpendicular ao eixo Oy?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{1}{5}$ **(D)** $\frac{2}{5}$

GRUPO II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**

1. Um estudo de mercado, encomendado por uma empresa de venda de produtos alimentares, concluiu que a quantidade de azeite *Azeitona do Campo*, vendida num mês por essa empresa, depende do preço de venda ao público, de acordo com a função

$$V(x) = e^{14-x} \quad (x > 0)$$

sendo x o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro desse azeite e $V(x)$ a quantidade vendida num mês (medida em litros).

1.1. A empresa tem um conjunto de despesas (compra ao produtor, empacotamento, publicidade, transportes, etc.) com a compra e a venda do azeite.
Sabendo que cada litro de azeite vendido acarreta à empresa uma despesa total de 3 euros, **justifique** que o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda do azeite, é dado por

$$L(x) = (x-3)e^{14-x}$$

1.2. Utilize a calculadora para resolver **graficamente** o seguinte problema:
Entre que valores deve variar o preço de venda ao público de um litro de azeite para que o lucro mensal seja superior a dezasseis mil e quintos euros?
Apresente os valores em euros, arredondados aos cêntimos (de euro).
Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

2. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x}$
(ln designa logaritmo de base e).
Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

2.1. Mostre que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln(4e^2)$

2.2. Estude a função f quanto à existência de assímptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

3. Com o objectivo de estudar as leis do aquecimento e do arrefecimento, realizou-se, num laboratório de Física, a seguinte experiência: aqueceu-se ao lume uma certa quantidade de água, durante cinco minutos; passado este tempo apagou-se o lume e deixou-se a água a arrefecer. A temperatura da água foi sempre medida, ao longo do decorrer da experiência.

Admita que:

- neste laboratório, a temperatura ambiente é constante;
- a temperatura da água, no instante em que começou a ser aquecida, era igual à temperatura ambiente;
- depois de se ter apagado o lume, a temperatura da água tende, com o passar do tempo, a igualar a temperatura ambiente.

Em resultado da experiência, concluiu-se que a relação entre a temperatura da água e o tempo t, contado em minutos, a partir do instante em que se colocou a água ao lume, é modelada por uma, e uma só, das quatro funções, a, b, c e d, definidas a seguir:

$$a(t)=\begin{cases} 24-2t & \text{se } 0\leq t\leq 5 \\ 24-10e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t>5 \end{cases}$$

$$b(t)=\begin{cases} 12(t+2) & \text{se } 0\leq t\leq 5 \\ 24+70e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t>5 \end{cases}$$

$$c(t)=\begin{cases} 14(t+1) & \text{se } 0\leq t\leq 5 \\ 24+60e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t>5 \end{cases}$$

$$d(t)=\begin{cases} 12(t+2) & \text{se } 0\leq t\leq 5 \\ 24+60e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t>5 \end{cases}$$

Qual das quatro funções é correcta?

Numa pequena composição, explique porque não pode ser nenhuma das outras três, indicando, para cada uma delas, uma razão pela qual a rejeita, explicando a sua inadequação, relativamente à situação descrita.

4. De uma função g, de domínio $]0,+\infty[$, sabe-se que:

- não tem zeros;
- a recta de equação $y=x+2$ é assímptota do seu gráfico.

Seja h a função, de domínio $]0,+\infty[$, definida por $h(x)=\dfrac{x^2}{g(x)}$

Prove que a recta de equação $y=x-2$ é assímptota do gráfico de h.

FIM

Anexo IV – Questões para as entrevistas

Tarefas para a Entrevista

Qualquer dos exercícios indicados são resolúveis analiticamente e/ou através da sua calculadora gráfica.

1. Considere a função $h:\Re \to \Re$ tal que $h(x)=e^{2x-1}$. O valor de $h'(1)$ é:

(A) 0
(B) 1
(C) e
(D) $2e$

2. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação:

$\log_3(2-x)\leq 1$

(A) $]-\infty,-1]$
(B) $[-2,1[$
(C) $[-1,+\infty[$
(D) $[-1,2[$

3. Indique o número real que é solução da equação $e^{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

(A) $\dfrac{2}{3}$
(B) $\dfrac{4}{3}$
(C) $\dfrac{5}{3}$
(D) $\dfrac{7}{3}$

4. Considere o polinómio:

$P(x)=x^3+x^2-3x-3$

Decomponha o polinómio em factores (pretende-se que utilize os valores exactos).

5. Sejam f e g duas funções polinomiais definidas por:

$$f(t) = t^3 - t - 21 \quad \text{e} \quad g(t) = (t-2)^4 - 2$$

Determine t de modo que $f(t) > g(t)$

6. Seja g a função real de variável real definida por:

$$g(x) = 5 + \ln(x^2 - 1)$$

e a função f definida por $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

6.1. Indique o domínio da função g

6.2. Determine x tal que $f(x) > g(x)$

7. Admita que o número de habitantes de um certo país é dado por:

$$N(t) = \frac{100}{1 + 9e^{-0,18t}}$$

Com N expresso em milhões e sendo t o número de anos contados desde o início do ano 2000.

7.1. Determine o número de habitantes do referido país em 2000.

7.2. Passado quanto tempo a população duplicou?

7.3. Em que ano serão atingidos os 45 milhões de habitantes?

7.4. A longo prazo, quantos habitantes terá presumivelmente o país, se aquele modelo continuar válido?

Obrigado pela colaboração!