



Acoplamentos de Sistemas Dinâmicos Caóticos

Destruição do caos e sincronização

Luís Mário Lopes

Tese apresentada à Universidade de Évora
para obtenção do Grau de Doutor em Matemática

Évora, Agosto de 2015



INSTITUTO DE INVESTIGAÇÃO E FORMAÇÃO AVANÇADA

Resumo

Analisamos de que forma o comportamento de um sistema dinâmico caótico se modifica quando é sujeito a um acoplamento. Prestamos particular atenção a dois aspetos: a possibilidade da destruição do comportamento caótico e a possibilidade de sincronização.

Caracterizamos e analisamos diferentes maneiras de a destruição do comportamento caótico acontecer, bem como diferentes tipos de sincronização. A obtenção de formas de reconhecer quando quer uma quer outra têm lugar, leva-nos a identificar novos acoplamentos que importa estudar.

Consideramos vários tipos de acoplamentos e várias dinâmicas livres, analisando em cada situação a evolução do comportamento em função da constante-força-de-acoplamento. Definimos e delimitamos janelas de comportamento.

A análise de alguns dos resultados obtidos é também alargada a redes de sistemas dinâmicos caóticos.

Abstract

We analyze how the behavior of a chaotic dynamical system changes when we couple it with another. We focus attention on two aspects: the possibility of chaos destruction and the possibility of synchronization.

We characterize and study several ways how to happen the destruction of chaos and several types of synchronization. We obtain results that indicate when one or the other take place. That lead us to identify new relevant couplings.

We consider several types of couplings and several free dynamics. For each of them we study the evolution of the coupling behavior with the coupling strength constant, defining windows of behavior.

Some of the results are extended to networks of chaotic dynamical systems.

Agradecimentos

Quero agradecer

à Professora Doutora Sara Fernandes e à Professora Doutora Maria Clara Grácio, pela preciosa orientação, não apenas científica, que me deram neste doutoramento

aos meus colegas Professora Doutora Teresa Silva e Professor Doutor Luís Silva, por me terem levado até elas

à Universidade de Évora, e em especial à Senhora Vice-Reitora Professora Doutora Maria Filomena Mendes e à Doutora Natália Figueira, por me ter acolhido e aceitado esta minha tese

ao Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, e em especial ao Área Departamental de Matemática, pela dispensa de serviço que me foi concedida

à minha família e amigos, por aceitarem, sem censura nem desgosto, o meu percurso caótico

à Dulce, por saber que me acompanha por todos os caminhos, mesmo quando são descaminhos

Índice Geral

Resumo	i
Abstract	iii
Agradecimentos	v
Índice Geral	vii
1 Introdução	1
2 Generalidades sobre sistemas dinâmicos caóticos	7
2.1 Sistemas dinâmicos	7
2.2 Comportamento caótico	10
2.3 Exemplos de sistemas dinâmicos caóticos	14
3 Acoplamento Linear e janelas-não-caóticas	21
3.1 Acoplamento Linear Simétrico	21
3.2 Janela-de-ponto-fixo	29
3.2.1 Janela-de-ponto-fixo de um ALS	30
3.2.2 À procura da janela-de-ponto-fixo de um ALS	37
3.2.3 Janelas-de-ponto-fixo noutros acoplamentos	42

3.3	Janela-de-período-2-sincronizada-desfasada	49
3.3.1	Janela-de-período-2-sincronizada-desfasada de um ALS	49
3.3.2	Janela-de-período-2-sincronizada-desfasada noutros acoplamentos	54
3.4	Janela-de-sincronização-completa de um ALS	65
4	Sincronização	69
4.1	Sincronização completa	69
4.1.1	Janelas-de-sincronização-completa	69
4.1.2	Exemplos de janelas-de-sincronização-completa do ALC	75
4.1.3	Exemplos de janelas-de-sincronização-completa do ASP	77
4.2	Outros tipos de sincronização	81
4.2.1	Sincronização desfasada	81
4.2.2	Sincronização generalizada	93
4.3	Redes	109
4.3.1	Sincronização completa de uma rede com interações lineares	110
4.3.2	Comando-total	114
5	Conclusões	131
	Bibliografia	137

Capítulo 1

Introdução

O Tempo existe. E o Mundo que nos rodeia apresenta-se-nos como um enigma que tentamos desde sempre desvendar: desvendar a forma, muitas vezes misteriosa, como o Tempo transforma o Mundo.

É através da Ciência que essa vontade de entendimento é mais eficazmente satisfeita, sendo a Matemática a linguagem de eleição que é utilizada para modelar o Mundo e os seus fenómenos. Ao modelarmos matematicamente uma evolução temporal surgem-nos sistemas dinâmicos. Os Sistemas Dinâmicos constituem, pois, um domínio da Matemática com inúmeras aplicações à Física, Biologia, Engenharia, Comunicações, Psicologia, e às mais variadas áreas.

A diversidade e riqueza do Mundo traduz-se numa grande variedade de sistemas dinâmicos que importa estudar e na complexidade que muitos deles apresentam. O comportamento caótico inerente a alguns corresponde precisamente a uma das situações em que é manifesta a existência de tal complexidade. É desejável, no entanto, tentar disciplinar essa complexidade, perseguindo respostas a determinadas questões relevantes que o estudo de tais sistemas coloca. Com o presente trabalho pretendemos

contribuir para isso, não só compilando e organizando algum material relativo ao comportamento caótico de sistemas dinâmicos, mas também apresentando os resultados novos a que fomos conduzidos pela abordagem que fizemos. Essa abordagem corresponde a analisarmos os comportamentos que decorrem de um sistema dinâmico ficar sujeito a acoplamentos.

Com efeito, na Natureza, nada existe isolado, seja um átomo ou uma constelação, uma pessoa ou um computador, informação ou matéria, uma célula ou um tornado. A existência de interação entre sistemas dinâmicos pode, evidentemente, alterar de forma substancial determinadas características dos seus comportamentos, pelo que o estudo do acoplamento de sistemas dinâmicos afigura-se como particularmente relevante. Ao querermos prestar atenção ao comportamento dos sistemas dinâmicos, tendo em conta a sua existência não-isolada, duas questões afiguram-se como muito importantes: a possibilidade de o comportamento caótico de um sistema dinâmico ser destruído quando o acoplamos a um outro, e a possibilidade do surgimento de sincronização entre os dois sistemas dinâmicos.

A organização seguida para a apresentação de todo o material, propõe a criação de um vocabulário que sistematiza as questões abordadas. Daí a proliferação de definições e de tipos de acoplamentos.

Um processo de destruição do caos muito estudado consiste em impor pequenas perturbações a um sistema dinâmico que apresente comportamento caótico. Sendo essas perturbações adequadamente escolhidas é possível controlar o caos, tal como acontece utilizando o método OGY, proposto em 1990 [OttGreYor90]. Este método deu origem a grande parte das técnicas de controlo do caos que desde então foram desenvolvidas [BoGreLai00], [PaPaSud02], [SchoSchu07], [ReLenThom10], [SheAmb15]. Interessou-

nos, no entanto, estudar a possibilidade de que a destruição do comportamento caótico surja de uma forma, por assim dizer, mais orgânica, i.e., que decorra simplesmente de o sistema dinâmico caótico se encontrar – como em muitos casos acontece - acoplado a um outro com comportamento também caótico. A abordagem proposta correspondeu, pois, a investigarmos a possibilidade da "emergência da ordem a partir de dois caos", identificando e analisando as mudanças de comportamento que “naturalmente” decorrem daquilo que existe, i.e., que decorrem da existência de acoplamentos. Uma vez identificadas as mudanças de comportamento que um acoplamento pode determinar, analisámos também de que forma elas podem melhor servir determinados propósitos, “moldando” para tal, por exemplo, novos tipos de acoplamentos.

No capítulo 2 preparamos a incursão que nos capítulos seguintes fazemos pelos acoplamentos e pela destruição do comportamento caótico e sincronização que podem estar-lhes associadas, expondo algumas generalidades relativas a sistemas dinâmicos caóticos relevantes a tal incursão. A propósito dessas generalidades, aproveitamos para apresentar as dinâmicas a que recorremos para exemplificar os resultados que obtemos ao longo do trabalho. Tendo em conta que pretendemos que a ênfase seja posta na clarificação das questões que a existência de um acoplamento pode determinar e que tais questões são, em grande parte, independentes de determinadas características dos sistemas dinâmicos caóticos que se utilizam, escolhemos considerar apenas sistemas dinâmicos discretos unidimensionais e autónomos. Estes sistemas não só cobrem uma grande parte daqueles que têm interesse ser estudados [Corbet88], [Nolte15], como, em geral, permitem uma exposição em que as questões relevantes a propósito da destruição do caos e da sincronização surgem de uma maneira mais clara e evidente. Os comportamentos que obtemos são, no entanto, comuns aos outros tipos de sistemas dinâmicos

[PiRoKur01], [ZhaLiuWa09], podendo a abordagem aqui seguida ser aplicada também a esses outros tipos de sistemas.

Também grande parte das questões que a existência de acoplamentos levanta pode ser tratada utilizando o tipo de acoplamento a que a literatura mais frequentemente recorre, aquele que aqui designamos por Acoplamento Linear Simétrico [DinYan97], [RanDin02], [LiCh03], [CheZhu07], [QiuLuCao11]. Destinamos assim o capítulo 3 para analisarmos a destruição do caos e a sincronização que podem decorrer de um Acoplamento Linear Simétrico. Ainda neste capítulo, e relativamente à destruição do caos, consideramos a possibilidade de acoplarmos sistema dinâmicos não idênticos, analisando a forma como a perda do comportamento caótico acontece, seja por aparecimento de situações de ponto fixo, seja pelo aparecimento de comportamentos periódicos alternados. Com efeito, o percurso que a abordagem proposta permite revela a importância de definirmos esses e outros tipos de acoplamentos.

No capítulo 4, é o estudo da sincronização que revela o interesse de se definirem outros tipos de acoplamentos. A importância da sincronização é há muito conhecida e é vasto o âmbito em que o seu estudo tem interesse [BroKo00], [PiRoKur01], [BoKurOsi02], [Chen04], [ZhaLiuMa07]. O tipo de sincronização mais estudada é a sincronização completa, e mais ainda quando estão envolvidos os sistemas dinâmicos caóticos que utilizamos (discretos unidimensionais) [PecoCar90], [CheLu02], [ZhaZhaLiu10]. Analisamo-la, caracterizando o tipo de acoplamentos em que ela pode manifestar-se e criando uma metodologia que nos levará até à sincronização generalizada, passando pela sincronização desfasada. A identificação e caracterização que é feita dos vários tipos de sincronização permite-nos construir acoplamentos que lhes dão origem.

O estudo dos acoplamentos para além de permitir identificar e clarificar algumas das

principais questões que decorrem do “não-estar-só”, abre portas para a análise de redes. Com efeito, a existência não isolada de um sistema dinâmico determina o interesse pelo estudo da interação não só entre dois mas também entre vários ou mesmo muitos sistemas dinâmicos [CheWaLi15]. Ainda que grande parte das questões relevantes fique estabelecida pela “perda da solidão”, i.e., fique estabelecida por um acoplamento, há todo o interesse em estendê-las a redes, já que encontramos redes dos mais variados tipos nos mais variados domínios [Wang02]. Deste modo, e ainda no capítulo 4, alguns dos resultados obtidos a propósito da sincronização de acoplamentos são alargados ao estudo da sincronização de redes. É, neste âmbito, que o comportamento que alguns dos acoplamentos que entretanto encontramos, nomeadamente aqueles que designamos por “comandados”, sugere o estudo do comando de uma rede. A abordagem seguida dá assim lugar a que nos confrontemos com questões afins àquelas que são colocadas pelo *pinning control*, uma matéria que emergiu recentemente no estudo das redes [WaChen02a], [WaSu14]. A aplicação da metodologia que seguimos permite, de forma simples, ganhar perceção de algumas das conclusões a que o *pinning control* tem chegado.



Capítulo 2

Generalidades sobre sistemas dinâmicos caóticos

Neste trabalho estudamos o acoplamento de sistemas dinâmicos discretos unidimensionais com comportamento caótico. No presente capítulo, começamos por rever alguns aspetos deste tipo de sistemas dinâmicos, de modo a precisarmos questões que lhes dizem respeito e que é conveniente termos presentes aquando do estabelecimento de acoplamentos. Destacamos as definições que se revelaram mais importantes para os resultados obtidos.

2.1 Sistemas dinâmicos

O facto de um **sistema dinâmico** (x, T, M) , com $x : T \times M \rightarrow M$, ser **discreto** significa que $T = \mathbb{N}$ (ou, por vezes, \mathbb{Z}), i.e., o parâmetro de evolução t é um número natural (ou, por vezes, um inteiro relativo). O facto de um sistema dinâmico ser **unidimensional** significa que o espaço de fase M é o conjunto dos números reais ou um subconjunto seu, I , o **conjunto de iteração**. Estando assentes estes pressupostos, podemos designar

os sistemas dinâmicos mais simplesmente por x . Podemos também utilizar o abuso de linguagem de designar por $x(t)$ a função $x(t, x_0)$ sempre que a omissão do **valor inicial** x_0 não seja relevante

Para além disso, iremos considerar apenas sistemas dinâmicos **autónomos**, i.e., sistemas dinâmicos cuja descrição da evolução não envolve dependência explícita do parâmetro t . Tais sistemas dinâmicos podem ser descritos por aplicações $f : I \rightarrow I$, sendo o conjunto de todas as iteradas $x(t)$, com $t \in \mathbb{N}$, correspondente ao valor inicial x_0 , dado pela solução da equação às diferenças

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Dizemos que dois sistemas dinâmicos são **idênticos** se forem descritos pela mesma aplicação. Ao estabelecermos interações entre n sistemas dinâmicos unidimensionais, x_1, x_2, \dots, x_n , i.e., ao criarmos uma rede de sistemas dinâmicos unidimensionais, damos origem a um sistema dinâmico com $M = I^n$ descrito por uma aplicação $\vec{f} : I^n \rightarrow I^n$:

$$\begin{cases} \vec{x}(t+1) = \vec{f}(\vec{x}(t)) \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Um acoplamento de sistemas dinâmicos unidimensionais corresponde ao caso particular em que $n = 2$.

O conjunto de todas as iteradas associado a um valor inicial \vec{x}_0 , i.e., uma solução particular de (2.2), define uma **trajetória** que é designada por $(\vec{x}_0, \vec{x}(1), \vec{x}(2), \dots, \vec{x}(t), \dots)$ ou, mais abreviadamente, por $(\vec{x}(t))$, ou até mesmo apenas por $\vec{x}(t)$, desde que não haja dúvida de que estamos a referir-nos à solução de (2.2) para todo t e não apenas a

uma iterada em particular.

Alguns valores iniciais \vec{x}_0 , concretamente as soluções de $\vec{x}_0 = \vec{f}^{(p)}(\vec{x}_0)$, com $\vec{f}^{(p)} = \vec{f} \circ \vec{f} \circ \dots \circ \vec{f}$ (p vezes, com $p \in \mathbb{N}$), dão origem a **trajetórias periódicas**, i.e., trajetórias para as quais $\vec{x}(t+p) = \vec{x}(t)$, $\forall t$, ficando a trajetória completamente descrita pela enumeração das p primeiras iteradas, $(\vec{x}_0, \vec{x}(1), \vec{x}(2), \dots, \vec{x}(p-1))$. O caso em que $p = 1$ corresponde à situação de **ponto fixo**, $\vec{x}(t) = \vec{x}_0$, sendo \vec{x}_0 solução de $\vec{x}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0)$.

Para valores iniciais que dão origem a trajetórias aperiódicas, pode acontecer que, quando t tende para $+\infty$, essas trajetórias se aproximem ou não de trajetórias periódicas. Se valores iniciais perto de uma determinada trajetória ($\vec{s}(t)$) derem origem a trajetórias que, para t suficientemente grande, se aproximam de ($\vec{s}(t)$) tanto quanto quisermos, então ($\vec{s}(t)$) é uma trajetória atrativa. De entre diversas maneiras que existem de definir rigorosamente essa aproximação, utilizamos a que corresponde a soluções (ou trajetórias) exponencialmente estáveis.

Definição 1. Dizemos que $\vec{s}(t)$ é uma solução (ou trajetória) exponencialmente estável de $\vec{x}(t+1) = \vec{f}(\vec{x}(t))$ se existem $a, b, \delta \in \mathbb{R}^+$ tais que, se $\|\vec{x}_0 - \vec{s}_0\| < \delta$, então $\|\vec{x}(t) - \vec{s}(t)\| \leq a \cdot \|\vec{x}_0 - \vec{s}_0\| \cdot e^{-bt}$, para todo $t > 0$. Dizemos que $\vec{s}(t)$ é uma solução (ou trajetória) instável de $\vec{x}(t+1) = \vec{f}(\vec{x}(t))$ se, qualquer que seja $\delta \in \mathbb{R}^+$, existe um \vec{x}_0 tal que $\|\vec{x}_0 - \vec{s}_0\| < \delta$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{x}(t) - \vec{s}(t)\| \neq 0$.

Para uma solução exponencialmente estável, o valor δ , ao contabilizar a proximidade que é necessário um valor inicial ter dessa solução para que a correspondente trajetória tenda para essa solução, dá conta da extensão da bacia imediata de atração de $\vec{s}(t)$, de acordo com a definição seguinte.

Definição 2. A bacia de atração de uma solução ($\vec{s}(t)$) exponencialmente estável de

$\vec{x}(t+1) = \vec{f}(\vec{x}(t))$ é o conjunto dos valores iniciais \vec{x}_0 para os quais $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{x}(t) - \vec{s}(t)\| = 0$. Designamos por *bacia imediata de atração* de $(\vec{s}(t))$, o subconjunto da *bacia de atração* de $(\vec{s}(t))$ para o qual todas as partes separadas que o compõem incluem pelo menos uma iterada $\vec{s}(t)$.

Pode acontecer que um valor inicial \vec{x}_0 não pertença à *bacia imediata de atração* de uma solução $(\vec{s}(t))$ exponencialmente estável mas que a iterada $\vec{x}(t_0)$, para um $t_0 \in \mathbb{N}$, já pertença. Nesse caso, \vec{x}_0 pertence evidentemente à *bacia de atração* de $(\vec{s}(t))$, correspondendo o conjunto das iteradas $\vec{x}(t)$ com $t < t_0$ ao **regime transitório** da trajetória $(\vec{x}(t))$, e o conjunto das iteradas $\vec{x}(t)$ com $t \geq t_0$ ao seu **regime estacionário**.

Como referimos, é possível definirmos solução atrativa de maneiras diferentes da que é estabelecida pela Definição 1. É, por exemplo, o caso da definição de solução assintoticamente estável. No entanto, muitos dos resultados que se obtêm utilizando essas outras definições são os mesmos que os que são fornecidos por aquela por que optámos [GruSonWir99], [OniSoe15].

2.2 Comportamento caótico

Tendo em conta que iremos considerar acoplamentos de sistemas dinâmicos caóticos, prestamos agora atenção à definição de comportamento caótico:

Quando uma trajetória não se aproxima de uma trajetória periódica podemos estar perante um sistema dinâmico com comportamento caótico. O estudo do caos é relativamente recente, pelo que existem ainda várias definições alternativas de comportamento caótico, nem todas equivalentes [AuKi01], [BlaLo12], [Fouc01]. Em 1989, Devaney definiu que um sistema dinâmico \vec{x} descrito pelo aplicação $\vec{f} : I^n \rightarrow I^n$ tem

comportamento caótico se existir um conjunto $K \subset I^n$ tal que \vec{f} satisfaça as condições seguintes [Devan89]

1. \vec{f} tem dependência sensível do valor inicial, i.e., existe um $\delta > 0$ tal que, para qualquer $\vec{x}_{0_1} \in K$ e uma qualquer vizinhança dele, existem um \vec{x}_{0_2} nessa vizinhança e um valor $t \in \mathbb{N}$ tais que $\|\vec{x}(t, \vec{x}_{0_1}) - \vec{x}(t, \vec{x}_{0_2})\| > \delta$
2. o conjunto das trajetórias periódicas é denso em K
3. \vec{f} é topologicamente transitivo em K , i.e., para cada par de conjuntos abertos $U, V \subset K$ existe um $t \in \mathbb{N}$ tal que $\vec{x}(t, U) \cap V \neq \emptyset$

Desde que Devaney propôs a sua definição de comportamento caótico, outras definições têm surgido, quer porque a condição 1 é consequência da 2 e 3 para conjuntos K com um número infinito de elementos [BanBroCa92], quer por várias outras razões, como seja o facto de podermos considerar que a definição de Devaney se centra na manifestação do comportamento caótico e não nas suas causas.

Com efeito, o comportamento caótico parece resultar de a função \vec{f} "esticar e dobrar" o conjunto de iteração [Smith98]. Seja como for, comum a todas as definições de comportamento caótico que se considerem, é a noção de que um tal comportamento determina uma dependência sensível do valor inicial. Essa dependência sensível pode ser quantificada pelos expoentes de Lyapunov, que contabilizam a taxa média do aumento da distância entre trajetórias vizinhas, de acordo com a definição seguinte.

Definição 3. *Os expoentes de Lyapunov de um sistema dinâmico \vec{x} são os limites*

$$\mu \left(\frac{\vec{\delta x}_0}{\|\vec{\delta x}_0\|} \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \lim_{\|\vec{\delta x}_0\| \rightarrow 0} \frac{1}{T} \frac{\|\vec{\delta x}(T, \vec{x}_0)\|}{\|\vec{\delta x}_0\|},$$

com $\vec{\delta x}(T, \vec{x}_0) = \vec{x}(T, \vec{x}_0 + \vec{\delta x}_0) - \vec{x}(T, \vec{x}_0)$.

Considerando, tal como estamos a fazer, que o conjunto de iteração está contido em \mathbb{R}^n , existem n expoentes de Lyapunov correspondentes às n direções independentes $\frac{\vec{\delta x}_0}{\|\vec{\delta x}_0\|}$ segundo as quais nos podemos afastar do valor inicial \vec{x}_0 . A existência dos expoentes de Lyapunov, i.e., a existência do limite envolvido na sua definição, bem como a sua independência q.t.p. em relação ao valor inicial \vec{x}_0 , foi garantida por Oseledec para um vasto conjunto de sistemas dinâmicos [Ose68], [GilLef11] (há, pelo menos, uma partição do conjunto de iteração onde essa independência tem lugar [CenCecVul10]). É o caso dos sistemas dinâmicos descritos por funções contínuas, como as que utilizamos neste trabalho [BenGalGi80], [Danca15]. Por isso, na definição anterior, não incluímos \vec{x}_0 como argumento de μ .

Nos capítulos seguintes consideramos, como já referimos, acoplamentos de sistemas dinâmicos unidimensionais. Sendo esses sistemas x descritos por aplicações f , seccionalmente diferenciáveis, a expressão do seu único expoente de Lyapunov reduz-se a (ver, por exemplo, [GilLef11])

$$\mu = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f'(x(t))|$$

Um sistema dinâmico com um expoente de Lyapunov positivo tem dependência sensível do valor inicial. No entanto, por si só, isso pode não corresponder ao que queremos identificar como sendo um comportamento caótico. De facto, não sendo o conjunto de iteração limitado, a dependência sensível do valor inicial que um expoente de Lyapunov positivo determina pode corresponder simplesmente a um movimento das iteradas em direção ao infinito, como acontece, por exemplo, com o seguinte sistema

dinâmico trivial em \mathbb{R} , para o caso em que $|c| > 1$,

$$x(t+1) = c \cdot x(t) \Rightarrow x(T) = c^T \cdot x_0$$

No entanto, se o conjunto de iteração for limitado, a dependência sensível do valor inicial que um expoente de Lyapunov positivo determina, impõe um comportamento que identificamos como sendo caótico. Neste trabalho utilizamos um conjunto de iteração limitado, pelo que adotamos a seguinte definição de comportamento caótico.

Definição 4. *Sendo $I^n \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado, dizemos que um sistema dinâmico \vec{x} descrito por $\vec{f} : I^n \rightarrow I^n$ tem um comportamento caótico se pelo menos um dos seus expoentes de Lyapunov for positivo. Nessas circunstâncias dizemos, também, que \vec{f} é uma aplicação caótica.*

É de notar que, tendo um sistema dinâmico um conjunto de iteração limitado, só poderá existir dependência sensível do valor inicial, i.e., só poderá existir um expoente de Lyapunov positivo, se a aplicação que define esse sistema dinâmico "esticar e dobrar" o conjunto de iteração. Uma tal característica é, pois, necessária para que o sistema dinâmico apresente um comportamento caótico.

Apesar da grande variedade de comportamentos que os sistemas dinâmicos podem apresentar é, por vezes, possível garantir que dois sistemas dinâmicos, mesmo não sendo idênticos, partilham determinado tipo de comportamento. É, por exemplo, o caso de sistemas dinâmicos descritos por aplicações topologicamente conjugadas [Devan89], cuja definição relembramos de seguida, considerando o tipo de aplicações que utilizamos.

Definição 5. *As aplicações $\vec{f} : I^n \rightarrow I^n$ e $\vec{g} : I^n \rightarrow I^n$ dizem-se topologicamente conjugadas se existir um homeomorfismo $\vec{h} : I^n \rightarrow I^n$ tal que $\vec{h} \circ \vec{f} = \vec{g} \circ \vec{h}$. O*

homeomorfismo h é, então, designado por *conjugação topológica*.

Considerando duas aplicações que sejam topologicamente conjugadas, se uma delas tiver comportamento caótico, a outra também terá, de acordo com a proposição seguinte [Goodson15].

Proposição 1. *Sendo $\vec{f} : I^n \rightarrow I^n$ e $\vec{g} : I^n \rightarrow I^n$ duas aplicações contínuas topologicamente conjugadas, então \vec{f} tem comportamento caótico se e só se \vec{g} também tiver.*

Tendo em conta esta proposição, ao consideramos sistemas dinâmicos unidimensionais com intervalos de iteração limitados descritos por aplicações contínuas, podemos optar por escolher, tal como fizemos, $I = [0,1]$, já que uma qualquer aplicação $g : [a,b] \rightarrow [a,b]$ é topologicamente conjugada de uma outra, $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$, com $f = h^{-1} \circ g \circ h$, sendo a conjugação topológica dada por $h(u) = a + (b - a) \cdot u$.

2.3 Exemplos de sistemas dinâmicos caóticos

Terminamos este capítulo apresentando as aplicações caóticas com que nos capítulos seguintes exemplificamos os resultados que vamos obtendo. Tratam-se, pois, de aplicações unidimensionais contínuas, com intervalo de iteração $I = [0,1]$ e que apresentam comportamento caótico.

Visto que o comportamento caótico resulta do referido processo de "esticar e dobrar" o intervalo de iteração, é natural pensarmos em aplicações seccionalmente lineares como as apresentadas na figura 2.1, [HasMai97], cujas expressões analíticas são do tipo

$$f(u) = \begin{cases} au, & u \in [0,c] \\ -\frac{ac}{1-c}(u-1), & u \in [c,1] \end{cases} \quad (2.3)$$

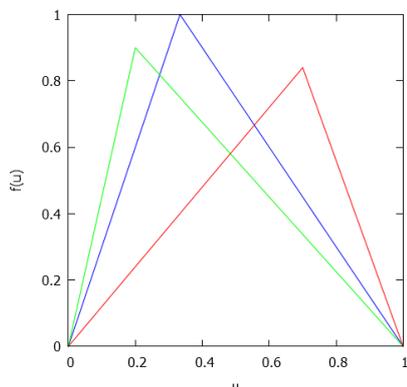


Figura 2.1: Gráficos de aplicações do tipo (2.3) para vários valores das constantes a e c .

onde $a > 1$ (para que corresponda a "esticar" o intervalo de iteração) e $ac \leq 1$ (para que $f([0,1]) \subset [0,1]$) De facto, escolhendo $\frac{ac}{1-c} > 1$, tais aplicações são caóticas já que o seu expoente de Lyapunov é garantidamente positivo, pois $\ln |f'(u)| > 0$, q.t.p. em I . Com efeito, $\ln |f'(u)|$ assume apenas os valores $\ln a$ e $\ln \frac{ac}{1-c}$ que são ambos positivos, de acordo com as escolhas feitas para a e c . Assim sendo, a aplicação tenda,

$$f_T(u) = \begin{cases} 2u, & u \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2u, & u \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

que corresponde a escolhermos $a = 2$ e $c = \frac{1}{2}$, é uma aplicação caótica em $[0,1]$, já que $a > 1$, $ac \leq 1$ e $\frac{ac}{1-c} > 1$. Como $|f'_T(u)| = 2$ para todo u (exceto para $u = \frac{1}{2}$), o cálculo do expoente de Lyapunov é trivial sendo o seu valor $\mu_T = \ln 2$, um valor evidentemente positivo.

A aplicação tenda é uma das que utilizamos nos capítulos seguintes, onde quisemos recorrer também a aplicações caóticas que apresentam comportamentos diferenciados relativamente a outros aspetos, nomeadamente relativamente a serem seccionalmente lineares ou a serem diferenciáveis em todo o I ou a serem unimodais. Por isso, a

2.3. Exemplos de sistemas dinâmicos caóticos

par da aplicação tenda, que é seccionalmente linear e não diferenciável em $u = \frac{1}{2}$, utilizamos também uma outra com o mesmo tipo de comportamento de f_T em relação ao processo de "esticar e dobrar" o intervalo de iteração I mas que, contrariamente a f_T , é diferenciável em I . Escolhemos, nesse sentido, a interpolação polinomial que se obtém utilizando como nodos os pontos extremos do gráfico de f_T , i.e., os pontos $(0,0)$, $(\frac{1}{2},1)$, $(1,0)$, obtendo

$$f_L(u) = \frac{(u - \frac{1}{2})(u - 1)}{(0 - \frac{1}{2})(0 - 1)} \cdot 0 + \frac{(u - 0)(u - 1)}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 1)} \cdot 1 + \frac{(u - 0)(u - \frac{1}{2})}{(1 - 0)(1 - \frac{1}{2})} \cdot 0$$

\Leftrightarrow

$$f_L(u) = 4u(1 - u)$$

Trata-se da aplicação logística, $f(u) = ru(1 - u)$, com $r = 4$, a que, por facilidade de linguagem, nos referiremos simplesmente por logística e cujo gráfico apresentamos na figura 2.2, em simultâneo com o gráfico da tenda.

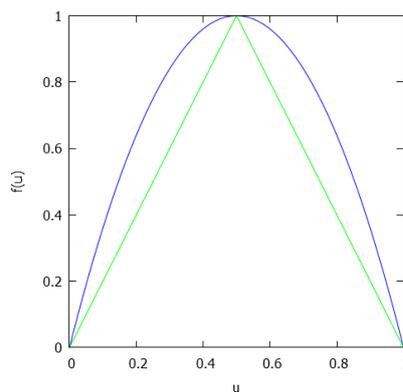


Figura 2.2: Gráficos da tenda (a verde) e da logística (a azul).

Tendo em conta que $f_L \circ h = h \circ f_T$, com $h(u) = \text{sen}^2(\frac{\pi u}{2})$, as aplicações f_T e f_L são topologicamente conjugadas, pelo que a Proposição 1 garante que f_L tem um

comportamento caótico, já que f_T também o tem. Para além disso, esta conjugação topológica determina que f_T e f_L têm o mesmo expoente de Lyapunov [Jost05], i.e., que o expoente de Lyapunov da logística é também $\ln 2$.

Apesar de f_T e f_L funcionarem da mesma maneira, não só em relação ao comportamento caótico, mas também a muitos outros aspetos da sua dinâmica, pode acontecer que ao serem sujeitas a acoplamentos tenham comportamentos diferenciados. Nesse sentido, a utilização de ambas as aplicações para exemplificarmos os resultados dos capítulos seguintes pode não ser redundante. Aliás, como veremos, não o será.

Antes de apresentarmos as restantes aplicações que utilizamos, queremos chamar ainda a atenção para uma outra relação que podemos estabelecer entre a tenda e a logística: a tenda é a interpolação seccionalmente linear da logística que utiliza dois intervalos de interpolação de igual comprimento. Na secção 3.2.1 consideramos também outras interpolações seccionalmente lineares da logística que utilizam um outro número de intervalos de interpolação de igual comprimento.

Visto que f_T e f_L são ambas aplicações unimodais, quisemos utilizar também outras que o não sejam. Escolhemos duas a que chamamos serra, f_S , e cúbica, f_C , que estão relacionados uma com a outra da mesma maneira que f_T e f_L estão, i.e., f_S é uma aplicação seccionalmente linear, contínua, tal como f_T (mas não unimodal), e f_C é a interpolação polinomial que dela se obtém utilizando como nodos os pontos extremos do gráfico de f_S . À semelhança do que acontece com f_T , escolhemos uma aplicação f_S tal que $|f'_S|$ fosse constante, exceto evidentemente nos pontos onde não é diferenciável. Sendo o valor dessa constante superior a um, fica garantido o comportamento caótico de f_S . Para além disso, escolhemos f_S tal que $f_S(1) = 1$ e de modo que $f_S(I) \subset I$.

Escolhemos, nomeadamente,

$$f_S(u) = \begin{cases} 2.4 \cdot u, & u \in [0, u_1] \\ 1.7 - 2.4 \cdot u, & u \in [u_1, u_2] \\ 2.4 \cdot u - 1.4, & u \in [u_2, 1] \end{cases} ,$$

com $u_1 = \frac{17}{48}$ e $u_2 = \frac{31}{48}$, pelo que

$$f_C(u) = \frac{u(u - u_2)(u - 1)}{u_1(u_1 - u_2)(u_1 - 1)} \cdot 0.85 + \frac{u(u - u_1)(u - 1)}{u_2(u_2 - u_1)(u_2 - 1)} \cdot 0.15 + \frac{u(u - u_1)(u - u_2)}{(1 - u_1)(1 - u_2)}$$

cujos gráficos apresentamos na figura 2.3.

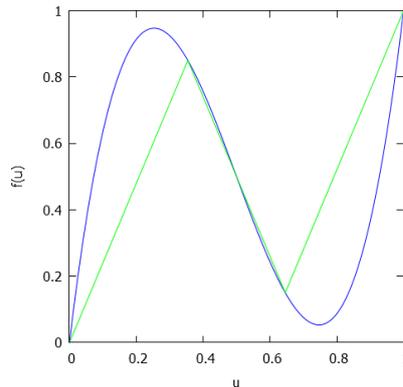


Figura 2.3: Gráficos da serra (a verde) e da cúbica (a azul).

Visto que $|f'_S(u)| = 2.4$, exceto para $u = u_1$ e $u = u_2$, o expoente de Lyapunov de f_S é $\mu_S = \ln 2.4$, um valor positivo a que corresponde o pretendido comportamento caótico de f_S . Calculando numericamente o expoente de Lyapunov de f_C , utilizando um valor inicial aleatório e 10^7 iteradas, obtemos $\mu_C \simeq 0.715$, um valor positivo a que corresponde também o pretendido comportamento caótico de f_C .

Para além das razões já avançadas, é importante recorrermos à cúbica para exemplificarmos os resultados dos capítulos seguintes, não só pela relevância que tem no âmbito

dos sistemas dinâmicos [Milnor92], [OliPaLeo13], mas também devido às vantagens que, em determinadas aplicações, apresenta em relação à logística [GaoSunYa06].

Pontualmente, utilizamos ainda uma outra aplicação, uma gaussiana

$$f_G(u) = \frac{e^{-b(2u-1)^2} + c}{2}$$

cujo gráfico apresentamos na figura 2.4 para a escolha que fizemos de $b = 6.2$ e $c = 0.5$.

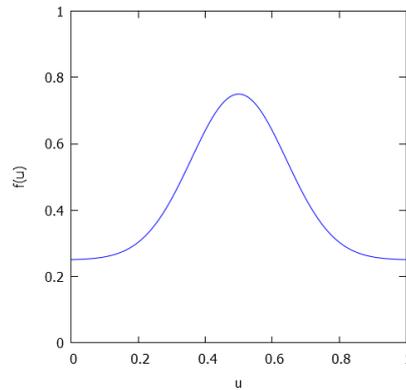


Figura 2.4: Gráfico da gaussiana.

Apesar de ser uma aplicação unimodal, tal como a logística e a tenda, o facto de, contrariamente a estas, o seu declive não ser uma função decrescente, determina que tenha um comportamento mais adequado para modelar determinadas aplicações [Hilborn00]. Utilizando um cálculo numérico semelhante ao que foi feito para o expoente de Lyapunov de f_C , a referida escolha dos parâmetros b e c fornece $\mu \simeq 0.384$, um valor igualmente positivo, a que corresponde novamente o pretendido comportamento caótico de f_G .

Capítulo 3

Acoplamento Linear e janelas-não-caóticas

Analisamos neste capítulo o acoplamento de sistemas dinâmicos discretos, unidimensionais e autónomos, com comportamento caótico (ao longo do capítulo f e g designam aplicações caóticas). Fazemo-lo no sentido de identificarmos e estudarmos novos comportamentos que surgem, quer da parte de cada um dos sistemas acoplados, quer prestando atenção ao acoplamento como um todo. Utilizamos aquilo que designamos por acoplamentos lineares (ver definição adiante) e analisamos mais detalhadamente um dos referidos comportamentos que identificamos: a destruição do caos. Reservamos para o capítulo seguinte a análise mais aturada de um outro comportamento que também tem lugar: a sincronização.

3.1 Acoplamento Linear Simétrico

Consideremos então que acoplamos o sistema dinâmico x a um outro sistema dinâmico y , não necessariamente idêntico, i.e., consideremos que a evolução de pelo menos um dos

dois sistemas dinâmicos x ou y passa a depender também do outro, e que a interação que surge é traduzida pelo aparecimento de um termo de interação no cálculo da iterada seguinte, i.e., consideremos que

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) + F(x(t), y(t), t) \\ y(t+1) = g(y(t)) + G(x(t), y(t), t) \end{cases}$$

onde $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções de interação, e os termos $F(x(t), y(t), t)$ e $G(x(t), y(t), t)$ dão conta da interação que se estabelece entre os dois sistemas dinâmicos. Cada escolha de F e G corresponde a um acoplamento diferente, determinando eventualmente comportamentos diferenciados dos sistemas dinâmicos e também comportamentos diferenciados do acoplamento entendido como um todo. Será útil analisarmos de que modo esses comportamentos variam em função da constante-força-de-acoplamento c , designando desta forma um parâmetro de que os termos de interação dependam de forma linear. Assim sendo, para cada tipo de acoplamento (i.e., para cada escolha de F e G), convirá considerar-se não apenas um acoplamento particular mas sim o seguinte

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) + c \cdot F(x(t), y(t), t) \\ y(t+1) = g(y(t)) + c \cdot G(x(t), y(t), t) \end{cases} \quad (3.1)$$

podendo considerar-se, sem perda de generalidade, que $c \in [0,1]$.

Definição 6. *Designamos por acoplamento- c_0 (dos sistemas dinâmicos descritos pelas aplicações f e g) a particularização de (3.1) correspondente à constante-força-de-acoplamento c_0*

Definição 7. *Designamos por acoplamento (dos sistemas dinâmicos descritos pelas aplicações f e g), o conjunto de todos os acoplamentos- c definidos por (3.1) que uma*

determinada escolha de F e G determina.

Considerando que as interações são autónomas e decomponíveis em relação a cada um dos sistemas dinâmicos x e y , i.e., considerando interações $F(u,v,t) = F_1(u) + F_2(v)$ e $G(u,v,t) = G_1(u) + G_2(v)$, obtemos

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) + c \cdot [F_1(x(t)) + F_2(y(t))] \\ y(t+1) = g(y(t)) + c \cdot [G_1(x(t)) + G_2(y(t))] \end{cases} \quad (3.2)$$

Se, para além disso, considerarmos acoplamentos que correspondem a que uma fração da dinâmica livre de cada um dos sistemas dinâmicos acoplados é substituída pela dinâmica livre do outro, i.e., se considerarmos que a iterada seguinte de cada um dos sistemas dinâmicos acoplados resulta de se substituir uma fração da iterada seguinte que ele apresentaria estando livre pela que o outro sistema dinâmico apresentaria se também estivesse livre, e se a medida dessa fração for dada pelo valor da constante-força-de-acoplamento, c , obtemos o acoplamento seguinte

$$\begin{cases} x(t+1) = (1-c) \cdot f(x(t)) + c \cdot g(y(t)) \\ y(t+1) = c \cdot f(x(t)) + (1-c) \cdot g(y(t)) \end{cases} \quad (3.3)$$

Este acoplamento corresponde a escolhermos $G_1 = -F_1 = f$ e $F_2 = -G_2 = g$ e designamo-lo por Acoplamento Linear (AL) em virtude de os termos de interação dependerem de forma linear das aplicações que descrevem as dinâmicas livres dos sistemas dinâmicos acoplados, i.e., dependerem de forma linear de f e g . É de notar que num Acoplamento Linear fica garantido que as iteradas não saem do intervalo de iteração, pois se $x(t)$ e $y(t)$ pertencem ao intervalo de iteração, então $x(t+1)$ e $y(t+1)$ também pertencem.

Com o propósito de identificarmos alguns dos comportamentos relevantes que um acoplamento pode determinar, consideramos o Acoplamento Linear de dois sistemas dinâmicos idênticos, i.e., consideramos

$$\begin{cases} x(t+1) = (1-c) \cdot f(x(t)) + c \cdot f(y(t)) \\ y(t+1) = c \cdot f(x(t)) + (1-c) \cdot f(y(t)) \end{cases} \quad (3.4)$$

que designamos por Acoplamento Linear Simétrico (ALS), em virtude de F_2 ser igual a G_1 , i.e., as parcelas dos termos de interação que nas iteradas seguintes de cada um dos sistemas dinâmicos são da responsabilidade do outro sistema dinâmico, são determinadas pela mesma função.

Começemos por supor que a dinâmica dos sistemas dinâmicos livres é descrita pela logística, i.e., começemos por supor que f é a aplicação logística.

Para termos uma visão do comportamento do acoplamento após o regime transitório consideramos a seguinte abordagem numérica:

- utilizando valores iniciais aleatórios, calculamos as iteradas $x(t)$ e $y(t)$ para valores de t suficientemente grandes, nomeadamente entre $t = 100$ e $t = 200$ [KorTruKhra02]

- utilizamos diferentes valores iniciais aleatórios para cada um dos valores de c considerados ($c = i/1000$, com $i = 0,1,\dots,1000$)

Construímos então o gráfico tridimensional das iteradas $(x(t),y(t))$ em função de c , de que apresentamos na figura 3.1 três perspetivas diferentes.

No gráfico identificam-se três zonas em que o acoplamento estabeleceu de forma evidente uma relação entre os sistemas dinâmicos:

zona 1 - para valores de c num conjunto que inclui $c = 0.15$ e valores perto deste, o

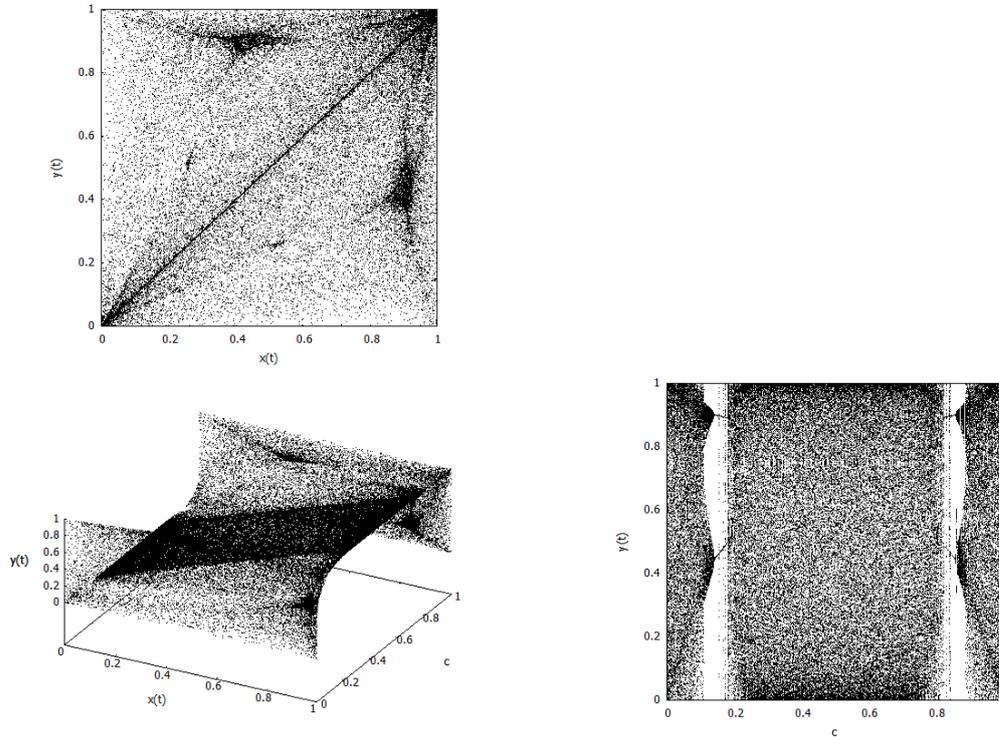


Figura 3.1: Gráfico de $(x(t), y(t))$ em função de c (em baixo à esquerda) para o ALS da logística, apresentando as perspectivas de $y(t)$ em função de $x(t)$ (em cima) e de $y(t)$ em função de c (em baixo à direita).

comportamento dos sistemas dinâmicos deixa de ser caótico

zona 2 - para valores de c num intervalo que inclui $c = 0.5$ e valores perto deste, o comportamento dos sistemas dinâmicos mantém-se caótico mas $x(t) = y(t), \forall t$, o que dá origem a que a diagonal $y = x$ se destaque na perspectiva que apresenta $y(t)$ como função de $x(t)$

zona 3 - para valores de c num intervalo que inclui $c = 0.85$ e valores perto deste, o comportamento dos sistemas dinâmicos deixa de ser caótico

Tendo em conta a Definição 8 e a Definição 9 que apresentamos de seguida, as zonas 1 e 3 correspondem a valores de c da janela-não-caótica, enquanto que a zona 2 corresponde a valores de c da janela-de-sincronização-completa.

Definição 8. Designamos por *janela-não-caótica* de (3.2) o conjunto dos valores de c para os quais existe uma solução não-caótica exponencialmente estável de (3.2).

Definição 9. Designamos por *janela-de-sincronização-completa (JSC)* de (3.2) o conjunto dos valores de c para os quais existe uma função $s(t)$ tal que $(x(t),y(t)) = (s(t),s(t))$ é uma solução exponencialmente estável de (3.2).

Apesar do aspeto semelhante das zonas 1 e 3, elas correspondem a comportamentos distintos, tal como a figura 3.2 evidencia ao mostrar os gráficos de x e y como funções de t para $c = 0.15$ (zona 1) e $c = 0.85$ (zona 3), e para valores t suficientemente elevados (nomeadamente entre $t = 175$ e $t = 200$): o subconjunto da janela-não-caótica correspondente à zona 3 está relacionado com um comportamento de ponto fixo, enquanto que o subconjunto da janela-não-caótica correspondente à zona 1 está relacionado com um comportamento de período-2-sincronizado-desfasado. Tal constatação leva-nos a definir dois subconjuntos das janelas-não-caóticas.

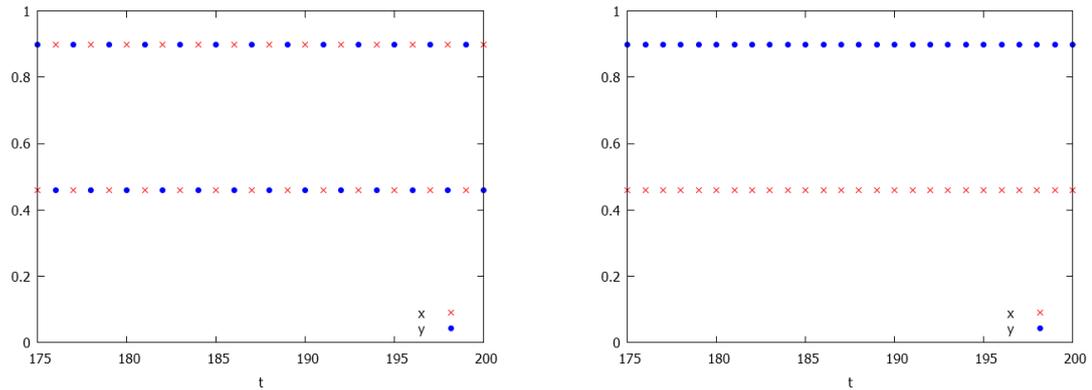


Figura 3.2: Gráfico das iteradas $x(t)$ e $y(t)$ em função de t para o ALS da logística com $c = 0.15$ (à esquerda) e $c = 0.85$ (à direita).

Definição 10. Designamos por *janela-de-ponto-fixa (JPF)* de (3.2) o conjunto dos valores de c para os quais existem x_0 e y_0 tais que $(x(t),y(t)) = (x_0,y_0)$ é uma solução

exponencialmente estável de (3.2), i.e., o conjunto de valores de c para os quais o acoplamento- c (3.2) tem um ponto fixo (x_0, y_0) exponencialmente estável.

Definição 11. *Designamos por janela-de-período-2-sincronizada-desfasada (JP2SD) de (3.2) o conjunto dos valores de c para os quais existe uma solução não constante $(x(t+1), y(t+1)) = (y(t), x(t))$ exponencialmente estável de (3.2), i.e., o conjunto de valores de c para os quais o acoplamento- c (3.2) tem uma trajetória de período-2 $((\alpha, \beta), (\beta, \alpha))$, com $\alpha \neq \beta$, exponencialmente estável.*

A razão pela qual, na figura 3.1, o comportamento que (3.4) exhibe para estas duas janelas aparenta ser semelhante decorre, como veremos na secção seguinte, de existirem, na janela-de-ponto-fixo, dois pontos fixos exponencialmente estáveis diferentes para cada valor de c (ver figura 3.4, adiante).

É de notar também, a propósito da abordagem numérica seguida, que as relações que eventualmente se estabelecem entre os sistemas dinâmicos acoplados podem surgir mascaradas ou parcialmente mascaradas, visto que utilizamos valores iniciais aleatórios que podem estar situados fora da bacia de atração em que essas relações se manifestam. Deste modo, apesar de a abordagem numérica seguida ser útil para indiciar a existência dessas relações, é importante tentar obtê-las analiticamente. Iremos, assim, analisar nas três secções seguintes cada uma das três relações que a abordagem numérica permitiu identificar para o acoplamento (3.4).

O acoplamento pode, evidentemente, criar ainda outras relações entre os sistemas dinâmicos acoplados diferentes das que identificámos. O facto de não nos apercebermos da sua existência através da abordagem numérica seguida pode dever-se não só a corresponderem a bacias de atração demasiado reduzidas, mas também a essas outras relações poderem ser menos "duradouras" do que as que identificámos no que diz

respeito à evolução da constante-força-de-acoplamento, isto é, poderá acontecer que pequenas variações dos valores de c façam com que essas relações desapareçam ou passem a ser de outro tipo, não sendo pois a sua existência tão evidente como a das três que identificámos (i.e., a medida das janelas correspondentes a essas outras relações poderá ser bastante menor do que as das três que identificámos).

Notemos ainda que, tendo em conta que para $c = \frac{1}{2}$ o acoplamento (3.4) se reduz a

$$\begin{cases} x(t+1) = \frac{1}{2} \cdot f(x(t)) + \frac{1}{2} \cdot f(y(t)) \\ y(t+1) = \frac{1}{2} \cdot f(x(t)) + \frac{1}{2} \cdot f(y(t)) \end{cases},$$

para este valor da constante-força-de-acoplamento, os sistemas dinâmicos acoplados sincronizam completamente logo após a primeira iterada. Concluímos, pois, que a janela-de-sincronização-completa do Acoplamento Linear Simétrico é sempre não-vazia, qualquer que seja a dinâmica livre dos sistemas acoplados, i.e., qualquer que seja f (a janela conterá sempre $c = \frac{1}{2}$). No entanto, o mesmo poderá não acontecer em relação à janela-não-caótica ou pelo menos em relação à janela-de-ponto-fixo ou à janela-de-período-2-sincronizada-desfasada. Com efeito, se considerarmos dinâmicas livres descritas pela aplicação tenda, os gráficos correspondentes aos da figura 3.1 são os apresentados na figura 3.3, tendo deixado de ser evidente a existência da janela-não-caótica. Nas secções 3.2.1 e 3.3.1, confirmaremos analiticamente que, para uma tal dinâmica livre, a janela-de-ponto-fixo e a janela-de-período-2-sincronizada-desfasada são, de facto, conjuntos vazios.

É de salientar, que a possibilidade de existência de uma janela-não-caótica não-vazia determina que acoplar um sistema dinâmico caótico a outro pode ser uma estratégia para destruir-lhe o comportamento caótico (sê-lo-á quando a janela-não-caótica for não-

vazia). É, pois, importante analisarmos a janela-de-ponto-fixo e a janela-de-período-2-sincronizada-desfasada que encontramos [LoFerGra14a].

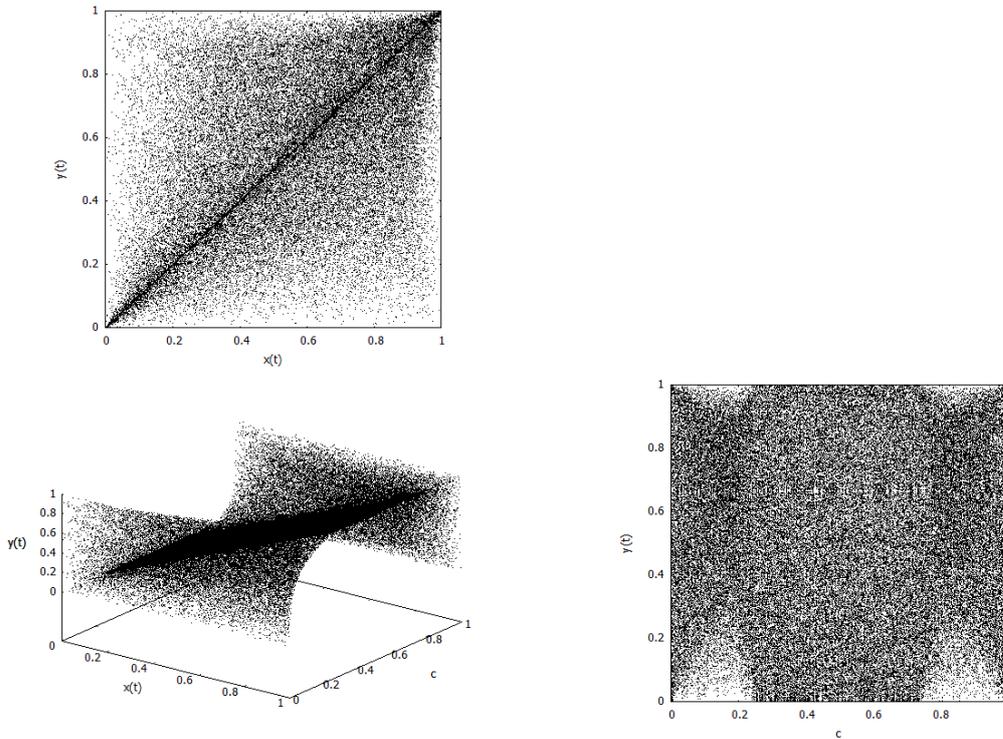


Figura 3.3: Gráfico de $(x(t),y(t))$ em função de c (em baixo à esquerda) para o ALS da tenda, apresentando as perspectivas de $y(t)$ em função de $x(t)$ (em cima) e de $y(t)$ em função de c (em baixo à direita).

3.2 Janela-de-ponto-fixo

Começamos por analisar aquela que, na figura 3.1, designámos por zona 3 e que identificámos como correspondendo à janela-de-ponto-fixo.

3.2.1 Janela-de-ponto-fixo de um ALS

Os pontos fixos (x_0, y_0) de um Acoplamento Linear Simétrico correspondem aos valores x_0 e y_0 que satisfazem

$$\begin{cases} x_0 = (1 - c) \cdot f(x_0) + c \cdot f(y_0) \\ y_0 = c \cdot f(x_0) + (1 - c) \cdot f(y_0) \end{cases} \quad (3.5)$$

Este sistema de equações descreve uma linha no plano xy , linha que designamos por linha-de-ponto-fixo do Acoplamento Linear Simétrico, de acordo com a definição seguinte.

Definição 12. *Designamos por linha-de-ponto-fixo (LPF) de (3.2), a linha do plano xy que é descrita pelos pontos $(x, y) = (x_0, y_0)$ tais que*

$$\begin{cases} x_0 = f(x_0) + c \cdot [F_1(x_0) + F_2(y_0)] \\ y_0 = g(y_0) + c \cdot [G_1(x_0) + G_2(y_0)] \end{cases}, \quad (3.6)$$

com $c \in [0, 1]$. *Designamos por linha-3D-de-ponto-fixo do acoplamento (3.2), a linha do espaço xyz descrita por estas equações.*

Tendo em conta que (3.6) pode ser reescrita como

$$(x_0 - f(x_0)) \cdot [G_1(x_0) + G_2(y_0)] = (y_0 - g(y_0)) \cdot [F_1(x_0) + F_2(y_0)], \quad (3.7)$$

a linha-de-ponto-fixo de (3.2) é um subconjunto da que esta equação representa, correspondente aos pontos associados a $c \in [0, 1]$.

Particularizando para o Acoplamento Linear Simétrico, e somando termo a termo

as duas equações de (3.5), obtemos a seguinte descrição da linha-de-ponto-fixo

$$x_0 + y_0 = f(x_0) + f(y_0), \quad (3.8)$$

estando cada ponto (x_0, y_0) desta linha associado a um valor c da constante-força-de-acoplamento

$$c = \frac{x_0 - f(x_0)}{f(y_0) - f(x_0)} = \frac{y_0 - f(y_0)}{f(x_0) - f(y_0)} \quad (3.9)$$

Um ponto (x_0, y_0) da linha-de-ponto-fixo só corresponde, no entanto, a uma situação de destruição do comportamento caótico, i.e., só corresponde a valores de c pertencentes à janela-de-ponto-fixo, se for um ponto fixo exponencialmente estável de (3.4). A proposição seguinte determina que pontos da linha-de-ponto-fixo de um Acoplamento Linear Simétrico correspondem a valores de c pertencentes à sua janela-de-ponto-fixo.

Proposição 2. *Seja (x_0, y_0) um ponto da linha-de-ponto-fixo do Acoplamento Linear Simétrico (3.4). Se os módulos de ambos os valores próprios de*

$$J(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} (1-c)f'(x_0) & cf'(y_0) \\ cf'(x_0) & (1-c)f'(y_0) \end{bmatrix},$$

com $c = \frac{x_0 - f(x_0)}{f(y_0) - f(x_0)}$, forem menores do que um, então (x_0, y_0) é um ponto fixo exponencialmente estável de (3.4) e, conseqüentemente, c pertence à janela-de-ponto-fixo de (3.4). Se pelo menos um dos valores próprios de $J(x_0, y_0)$ tiver módulo maior do que um, então (x_0, y_0) é um ponto fixo instável de (3.4) e, conseqüentemente, c não pertence à janela-de-ponto-fixo de (3.4).

Demonstração 2. *Esta proposição corresponde à particularização para o Acoplamento Linear Simétrico da Proposição 5, que apresentaremos mais adiante, pelo que esta de-*

monstração resume-se a considerarmos o resultado que essa outra proposição fornece para $F_2 = -F_1 = G_1 = -G_2 = g = f$. \square

Nota: Seria natural apresentarmos primeiro o resultado mais geral, a Proposição 5, e só depois apresentarmos a Proposição 2 como seu Corolário. No entanto, por razões heurísticas, optámos por apresentar os resultados por esta ordem, tanto nesta situação, como em situações semelhantes que adiante surgirão.

Os valores próprios a que a proposição anterior se refere são as soluções de

$$\lambda^2 - (1 - c) \cdot (f'(x_0) + f'(y_0)) \cdot \lambda + (1 - 2c) \cdot f'(x_0) \cdot f'(y_0) = 0 \quad (3.10)$$

i.e., os valores próprios são

$$\lambda = \frac{1}{2} (1 - c) \cdot (f'(x_0) + f'(y_0)) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 - c)^2 \cdot (f'(x_0) + f'(y_0))^2 - 4(1 - 2c) \cdot f'(x_0) \cdot f'(y_0)} \quad (3.11)$$

Aplicando, então, a proposição anterior ao Acoplamento Linear Simétrico das aplicações que utilizámos na secção 3.1, i.e., às aplicações logística e tenda, podemos identificar quais os pontos das linhas-de-ponto-fixo que correspondem a valores de c pertencentes à janela-de-ponto-fixo. Nas figuras 3.4 e 3.5 apresentamos então as linhas-de-ponto-fixo para os dois acoplamentos, assinalando a vermelho os pontos que correspondem a valores de c da janela-de-ponto-fixo, i.e., aqueles que correspondem a $|\lambda| < 1$.

Estes resultados confirmam aqueles que as figuras 3.1 e 3.3 indicavam relativamente à janela-de-ponto-fixo, nomeadamente que a janela-de-ponto-fixo do Acoplamento Linear Simétrico da logística é não-vazia enquanto que a do Acoplamento Linear Simétrico da tenda é vazia. Confirmam também que o Acoplamento Linear Simétrico da logística ad-

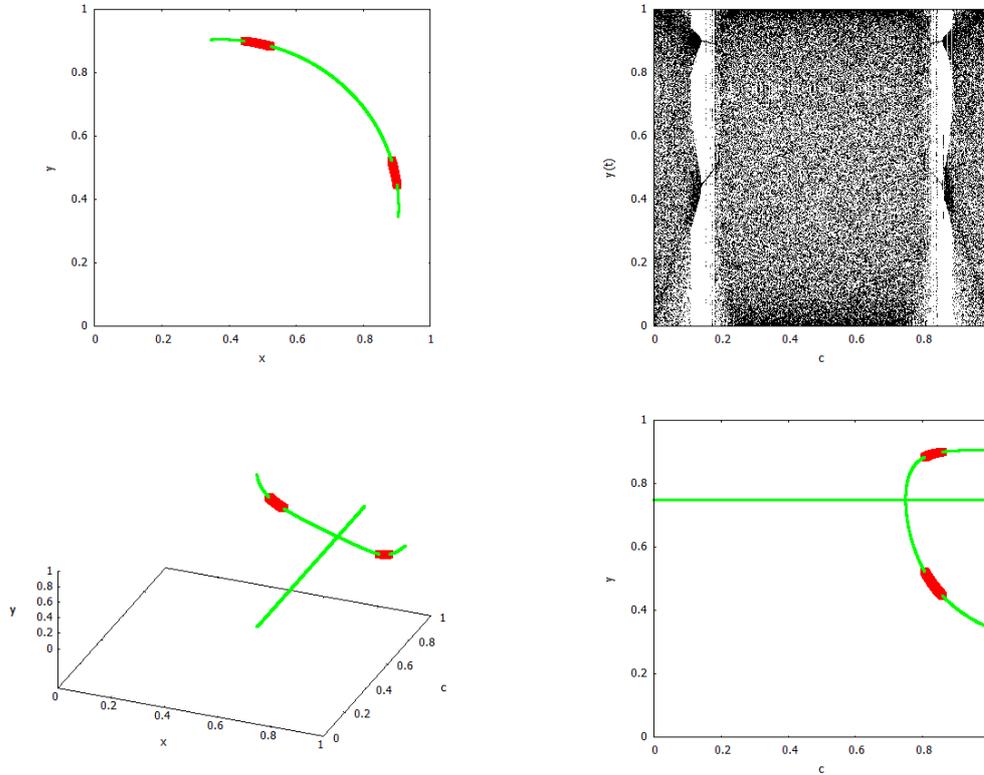


Figura 3.4: Gráfico das iteradas $y(t)$ em função de c para o ALS da logística (em cima, à direita) e correspondentes linha-de-ponto-fixo (em cima, à esquerda), linha-3D-de-ponto-fixo (em baixo, à esquerda) e sua projeção no plano yc (em baixo, à direita). Os pontos correspondentes a soluções exponencialmente estáveis estão assinalados a vermelho.

mite, para os valores de c pertencentes à janela-de-ponto-fixo, dois pontos fixos (x_0, y_0) diferentes, facto que é responsável pelo aspeto semelhante das zonas 1 e 3 dos gráficos da figura 3.1, tal como referimos na secção 3.1.

Quando a dinâmica dos sistemas livres é descrita por uma aplicação seccionalmente linear, i.e., sendo $f(u) = a_i + b_i u$, $u \in [u_{i-1}, u_i]$, é fácil obter analiticamente a janela-de-ponto-fixo. Por exemplo, para a aplicação tenda, obtemos o resultado seguinte.

Proposição 3. *A janela-de-ponto-fixo do Acoplamento Linear Simétrico da aplicação tenda é vazia.*

Demonstração 3. *Existem quatro situações a considerar:*

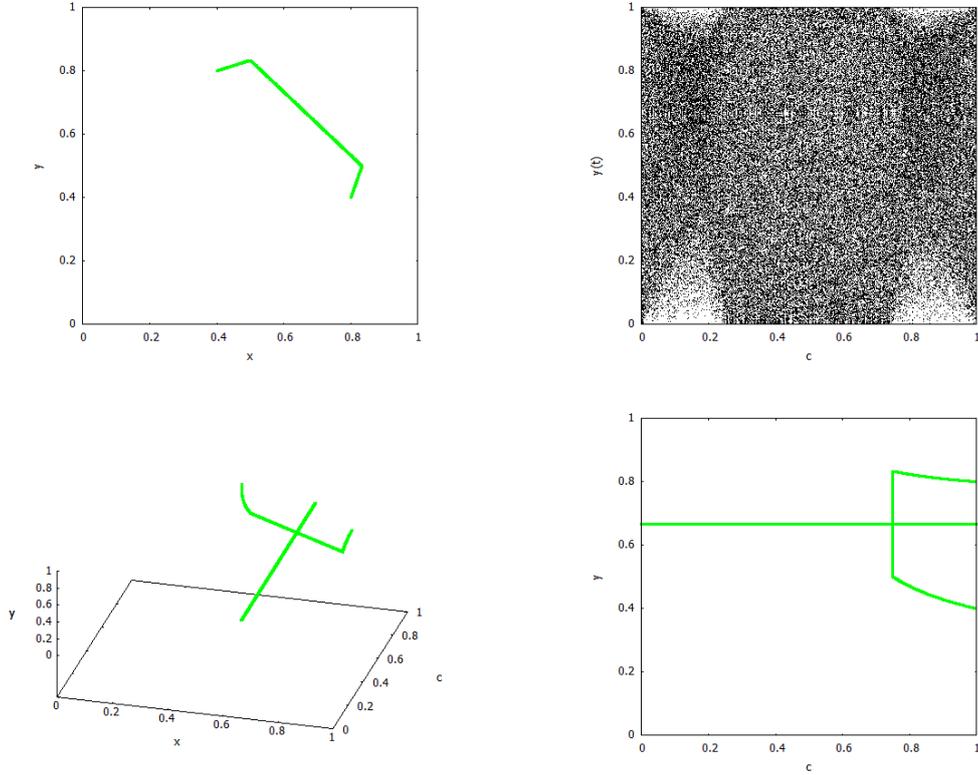


Figura 3.5: Gráfico das iteradas $y(t)$ em função de c para o ALS da tenda (em cima, à direita) e correspondentes linha-de-ponto-fixo (em cima, à esquerda), linha-3D-de-ponto-fixo (em baixo, à esquerda) e sua projeção no plano yc (em baixo, à direita).

· para $(x,y) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$, a linha (3.8) reduz-se a $x_0 + y_0 = 2x_0 + 2y_0 \Leftrightarrow y_0 = -x_0$; o único ponto pertencente a $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ que satisfaz esta condição é $(x_0, y_0) = (0, 0)$; trata-se de um ponto fixo instável pois, sendo $f'(x_0) = f'(y_0) = 2$, (3.11) determina que $\lambda = 2 \vee \lambda = 2 - 4c$

· para $(x,y) \in [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]$, a linha (3.8) reduz-se a $x_0 + y_0 = 2x_0 + 2 - 2y_0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_0$ (tal como a linha-de-ponto-fixo da figura 3.5 mostra) e usando (3.9) obtemos $c = \frac{3x_0}{8x_0 - 2}$; visto que $f'(x_0) = -f'(y_0) = 2$, então (3.11) fornece $|\lambda| < 1 \Leftrightarrow |2\sqrt{1 - 2c}| < 1 \Leftrightarrow -1 < 4\frac{x_0 - 1}{4x_0 - 1} < 1 \Leftrightarrow x_0 \in]\frac{5}{8}, +\infty[$ que não inclui nenhum valor em $[0, \frac{1}{2}]$; assim sendo, a linha-de-ponto-fixo não inclui nenhum ponto fixo (x_0, y_0) exponencialmente estável de (3.4) pertencente a $[0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]$

· para $(x,y) \in [\frac{1}{2},1] \times [\frac{1}{2},1]$, a linha (3.8) reduz-se a $x_0 + y_0 = 4 - 2x_0 - 2y_0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{4}{3} - x_0$ (tal como a linha-de-ponto-fixo da figura 3.5 mostra) e (3.11) reduz-se a $\lambda = -2 \vee \lambda = -2 + 4c$, pelo que a linha-de-ponto-fixo não inclui nenhum ponto fixo (x_0,y_0) exponencialmente estável de (3.4) pertencente a $[\frac{1}{2},1] \times [\frac{1}{2},1]$

· para $(x,y) \in [\frac{1}{2},1] \times [0,\frac{1}{2}]$, a conclusão é a mesma que para $(x,y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2},1]$ visto que quer a expressão (3.8) quer a (3.11) são simétricas em relação à troca de x por y

Concluimos, pois, que não existem pontos fixos exponencialmente estáveis para o Acoplamento Linear Simétrico da tenda, pelo que a sua janela-de-ponto-fixo é vazia. \square

Com o propósito de tentarmos perceber que fatores podem contribuir para o aparecimento de uma janela-de-ponto-fixo não-vazia, e tendo em conta que a tenda corresponde a uma interpolação seccionalmente linear da logística que utiliza dois intervalos de interpolação de igual comprimento, obtemos de seguida as linhas-de-ponto-fixo de Acoplamentos Lineares Simétricos de interpolações seccionalmente lineares da logística que utilizam um maior número de intervalos. Consideramos apenas interpolações que utilizam um número par de intervalos de interpolação de igual comprimento. A razão de não considerarmos um número ímpar de intervalos tem a ver com o facto de um tal número dar origem a aplicações correspondentes a sistemas dinâmicos que, mesmo tendo comportamento caótico, não o terão garantidamente na totalidade do intervalo $[0,1]$. Com efeito, sendo a logística uma função com gráfico simétrico em relação à reta vertical correspondente ao ponto médio do intervalo de iteração, um número ímpar de intervalos fornece uma interpolação seccionalmente linear com derivada nula no intervalo de interpolação que inclui esse ponto médio, como é visível na figura 3.6 onde mostramos os gráficos das interpolações seccionalmente lineares da logística correspon-

dentos à escolha de três e cinco intervalos de interpolação de igual comprimento, f_3 e f_5 , respectivamente. A existência de um intervalo com derivada nula determina que,

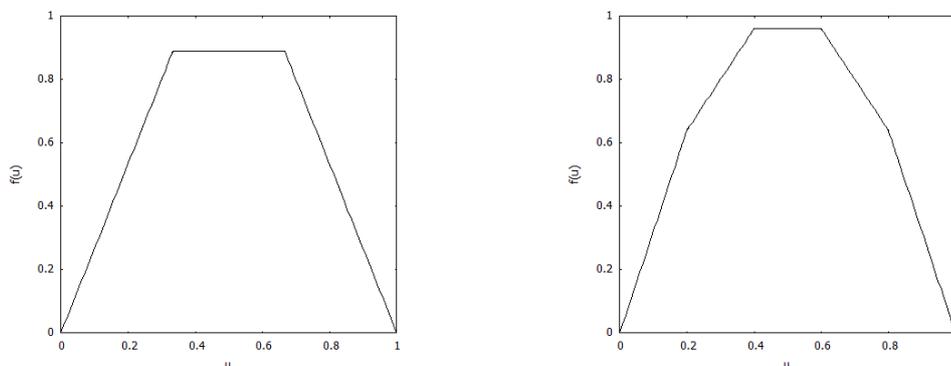


Figura 3.6: Gráficos das aplicações f_3 (à esquerda) e f_5 (à direita).

havendo uma iterada que assuma um valor nesse intervalo, todas as iteradas seguintes serão as mesmas, independentemente do valor inicial. Tais situações correspondem a um comportamento não caótico. Com efeito, as iteradas que assumem valores no intervalo em que a aplicação tem derivada nula contribuem com um termo infinitamente negativo para o expoente de Lyapunov, pelo que o valor do correspondente expoente não é positivo.

Relativamente às interpolações da logística que utilizam um número par de intervalos de interpolação de igual comprimento, verificámos que os Acoplamentos Lineares Simétricos das que utilizam quatro, seis e oito intervalos, f_4 , f_6 , f_8 , respectivamente, têm uma janela-de-ponto-fixo vazia, tal como a tenda, mas a interpolação f_{10} que utiliza dez intervalos já apresenta uma janela-de-ponto-fixo não-vazia, tal como a logística. Na figura 3.7, a par dos gráficos de f_8 e f_{10} , apresentamos as suas linhas-de-ponto-fixo que dão conta disso, repetindo para estas aplicações o procedimento que nos levou às figuras 3.4 e 3.5 e assinalando novamente a vermelho os pontos fixos exponencialmente estáveis, i.e., aqueles que correspondem a valores de c pertencentes à janela-de-ponto-fixo.

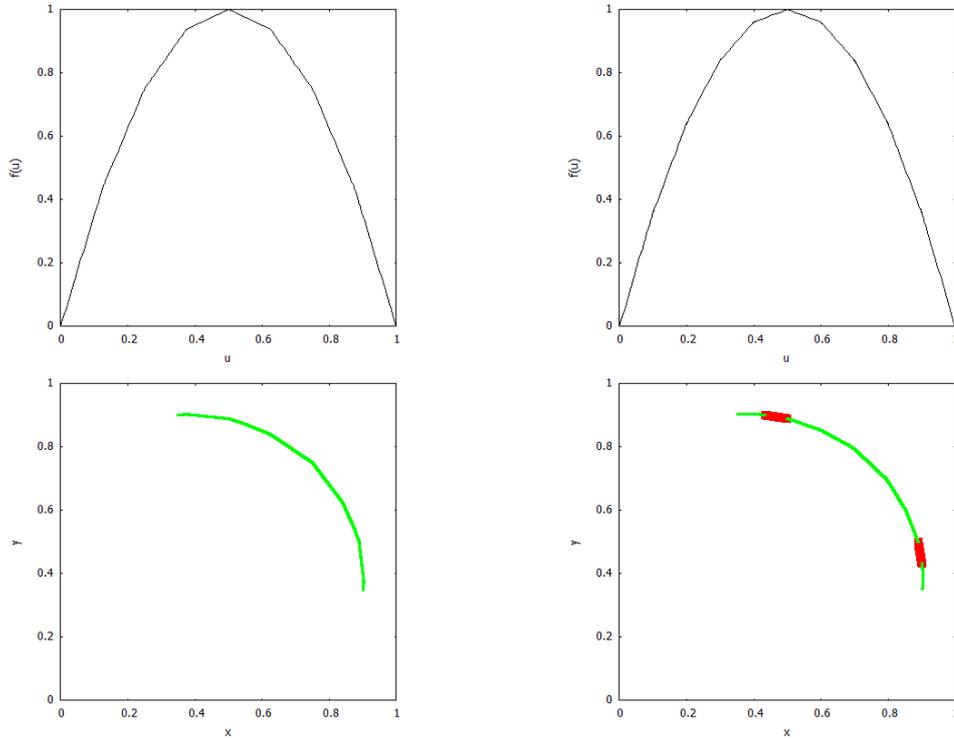


Figura 3.7: Gráficos das aplicações f_8 e f_{10} (em cima à esquerda e à direita, respetivamente) e das suas linhas-de-ponto-fixo (em baixo à esquerda e à direita, respetivamente), assinalando a vermelho os pontos fixos exponencialmente estáveis.

3.2.2 À procura da janela-de-ponto-fixo de um ALS

Pelos resultados obtidos no final da secção anterior apercebemo-nos de que as interpolações seccionalmente lineares da logística que utilizam um número par de intervalos de interpolação de igual comprimento só dão origem a Acoplamentos Lineares Simétricos com janela-de-ponto-fixo não-vazia quando o número de intervalos é suficientemente grande (dez intervalos), o que corresponde a aplicações f para as quais existem abcissas u tais que $|f'(u)|$ assume valores mais pequenos (por exemplo, $|f'_2(u)|$ assume apenas o valor 2, enquanto que $|f'_{10}(u)|$ assume os valores $\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, 2, \frac{14}{5}, \frac{18}{5}$). Para além disso, apercebemo-nos, pela figuras 3.4 e 3.7, de que os valores de x_0 ou y_0 que correspondem a valores de c pertencentes à janela-de-ponto-fixo são aqueles em que $|f'(x_0)|$ ou $|f'(y_0)|$ assumem menores valores. Estes factos sugerem que a existência de valores reduzidos

de $|f'(u)|$ poderá contribuir para uma janela-de-ponto-fixo não-vazia. Com efeito, a existência de uma janela-de-ponto-fixo não-vazia para o Acoplamento Linear Simétrico exige valores reduzidos de $|\lambda|$, com λ dado por (3.11) (nomeadamente $|\lambda| < 1$, tal como a Proposição 2 afirma), e o valor próprio $\lambda = 0$, que corresponde ao menor valor que $|\lambda|$ pode assumir, só é possível se $f'(x_0) = 0$ ou $f'(y_0) = 0$. De facto, tendo em conta a equação (3.10) confirmamos facilmente que assim é, já que esta equação só admite $\lambda = 0$ como solução se e só se $(1 - 2c) \cdot f'(x_0) \cdot f'(y_0) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} \vee f'(x_0) = 0 \vee f'(y_0) = 0$ e $c = \frac{1}{2}$ diz respeito a um ponto fixo (x_0, y_0) instável. Com efeito, para $c = \frac{1}{2}$, (3.5)

reduz-se a

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(y_0) \\ y_0 = \frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_0 = f(x_0) \end{cases},$$

o que corresponde a uma situação em que quer x_0 quer y_0 assumem o valor do ponto fixo de f , um ponto fixo que é instável, visto que supomos que a dinâmica livre dos sistemas dinâmicos acoplados é caótica.

A proposição seguinte será, então, útil para fornecer um procedimento que permita averiguar se o Acoplamento Linear Simétrico de aplicações f admite uma janela-de-ponto-fixo não-vazia.

Proposição 4. *Se $|(1 - c) \cdot f'(y_0)| < 1$, com $c = \frac{x_0 - f(x_0)}{f(y_0) - f(x_0)}$ pertencente a $[0, 1]$, x_0 e y_0 tais que $f'(x_0) = 0$ e $x_0 + y_0 = f(x_0) + f(y_0)$, então o Acoplamento Linear Simétrico de f admite uma janela-de-ponto-fixo não-vazia.*

Demonstração 4. *Se $f'(x_0) = 0$, então as soluções de (3.10) são $\lambda = 0$ e $\lambda = (1 - c) \cdot f'(y_0)$. Escolhendo y_0 tal que $x_0 + y_0 = f(x_0) + f(y_0)$, tem-se que (x_0, y_0) é um ponto fixo de (3.4), correspondendo a $c = \frac{x_0 - f(x_0)}{f(y_0) - f(x_0)}$, e a Proposição 2 garante que se $|(1 - c) \cdot f'(y_0)| < 1$, então (x_0, y_0) é um ponto fixo exponencialmente estável de (3.4),*

pelo que a correspondente janela-de-ponto-fixa é não-vazia. \square

Temos, então, a seguinte estratégia para averiguar se o Acoplamento Linear Simétrico da aplicação caótica f admite uma janela-de-ponto-fixa não-vazia (caso a estratégia determine uma janela-de-ponto-fixa não-vazia, a janela fica localizada através de um valor de c que lhe pertence):

i) Obtemos um valor de x_0 tal que $f'(x_0) = 0$.

ii) Obtemos um correspondente valor de y_0 da linha-de-ponto-fixa, i.e., obtemos um valor de y_0 tal que $x_0 + y_0 = f(x_0) + f(y_0)$.

iii) Se $|(1 - c) \cdot f'(y_0)| < 1$, com $c = \frac{x_0 - f(x_0)}{f(y_0) - f(x_0)}$ pertencente a $[0,1]$, então o acoplamento admite uma janela-de-ponto-fixa não-vazia, sendo pois possível utilizar um Acoplamento Linear Simétrico para destruir o caos dos sistemas dinâmicos acoplados.

Exemplificamos este procedimento, utilizando-o com duas outras aplicações:

- a aplicação gaussiana $f_G = \frac{1}{2}e^{-6.2(2x-1)^2} + \frac{1}{4}$, apresentada na secção 2.3:

i) $f'_G(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0.5$

ii) $x_0 + y_0 = f_G(x_0) + f_G(y_0) \Leftrightarrow y_0 = \frac{1}{4} + e^{-6.2y_0^2} \implies y_0 \simeq 0.695$

iii) $c = \frac{x_0 - f_G(x_0)}{f_G(y_0) - f_G(x_0)} \simeq 0.819 \implies |(1 - c) \cdot f'_G(y_0)| \simeq 0.340 < 1$

Concluimos, então, que o comportamento caótico de um sistema dinâmico descrito pela aplicação gaussiana é destrutível se o acoplarmos (com o apropriado valor de c) a um sistema dinâmico idêntico, utilizando um Acoplamento Linear Simétrico. A figura 3.8 resume o comportamento do Acoplamento Linear Simétrico para a gaussiana tal como as figuras 3.4 e 3.5 fizeram para a logística e para a tenda, respetivamente, e confirma a existência de uma janela-de-ponto-fixa não-vazia que inclui o valor de $c = 0.819$ fornecido pela estratégia utilizada.

- a aplicação cúbica, f_C , apresentada na secção 2.3:

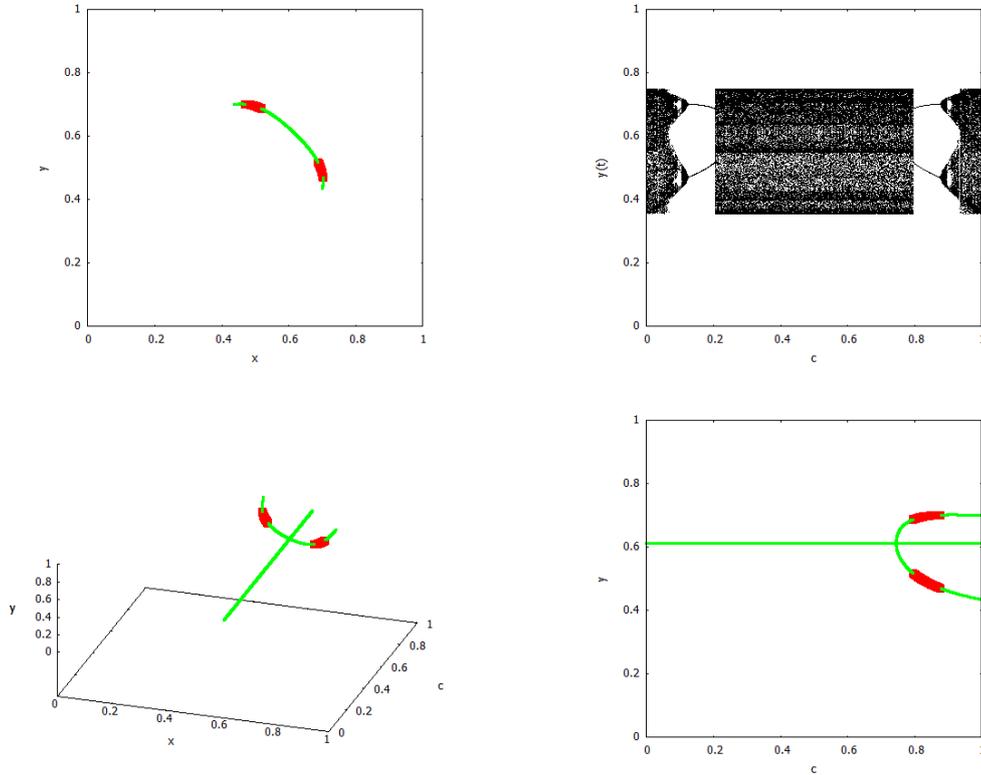


Figura 3.8: Gráfico das iteradas $y(t)$ em função de c para o ALS da gaussiana (em cima, à direita) e correspondentes linha-de-ponto-fixo (em cima, à esquerda), linha-3D-de-ponto-fixo (em baixo, à esquerda) e sua projeção no plano yc (em baixo, à direita). Os pontos fixos exponencialmente estáveis estão assinalados a vermelho.

i) $f'_C(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 \simeq 0.253 \vee x_0 \simeq 0.747$

ii) para $x_0 = 0.253$, $x_0 + y_0 = f_C(x_0) + f_C(y_0) \implies y_0 \simeq 0.747$, e para $x_0 = 0.747$, $x_0 + y_0 = f_C(x_0) + f_C(y_0) \implies y_0 \simeq 0.253$

iii) para ambos $x_0 = 0.253$ e $x_0 = 0.747$, $c = \frac{x_0 - f_C(x_0)}{f_C(y_0) - f_C(x_0)} \simeq 0.776 \implies |(1 - c) \cdot f'_C(y_0)| \simeq 0.001 < 1$

Concluimos, então, que o comportamento caótico de um sistema dinâmico descrito pela aplicação cúbica é destrutível se o acoplarmos (com o apropriado valor de c) a um sistema dinâmico idêntico, utilizando um Acoplamento Linear Simétrico. A figura 3.9 resume o comportamento do Acoplamento Linear Simétrico para a cúbica tal como as figuras 3.4 e 3.5 fizeram para a logística e para a tenda, respetivamente, e con-

firma a existência de uma janela-de-ponto-fixo não-vazia que inclui o valor de $c = 0.776$ fornecido pela estratégia utilizada.

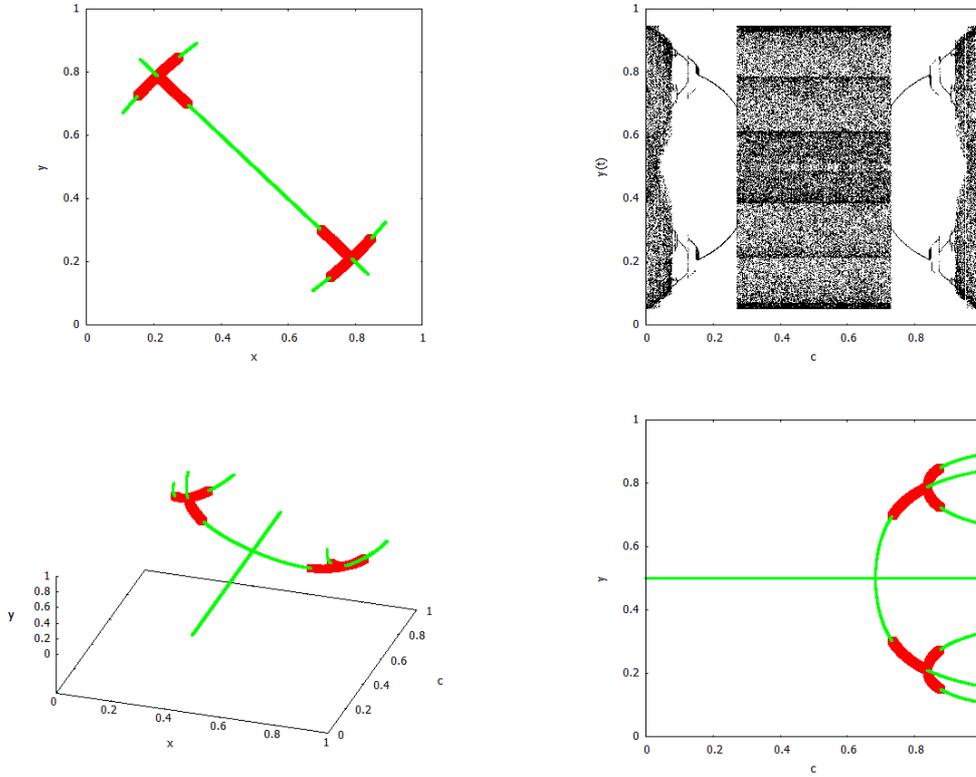


Figura 3.9: Gráfico das iteradas $y(t)$ em função de c para o ALS da cúbica (em cima, à direita) e correspondentes linha-de-ponto-fixo (em cima, à esquerda), linha-3D-de-ponto-fixo (em baixo, à esquerda) e sua projeção no plano yc (em baixo, à direita). Os pontos fixos exponencialmente estáveis estão assinalados a vermelho.

Antes de terminar esta secção, não queremos deixar de referir que os gráficos das iteradas $y(t)$ em função de c das figuras 3.8 e 3.9 foram obtidos considerando condições iniciais $(x(0), y(0))$ aleatórias mas suficientemente próximas dos pontos (x_0, y_0) que a nossa estratégia fornece, nomeadamente tais que $|(x(0), y(0)) - (x_0, y_0)| < 10^{-4}$. Procedemos deste modo visto que as bacias de atração dos pontos fixos não são suficientemente extensas para evitar que, fazendo uma escolha aleatória das condições iniciais em $[0, 1]$, a janela-de-ponto-fixo surja mascarada. Com efeito, uma tal escolha foi feita nos gráficos que mostramos na figura 3.10 e podemos ver que a janela-de-ponto-fixo é

"invadida" por trajetórias fora da bacia de atração dos pontos fixos.

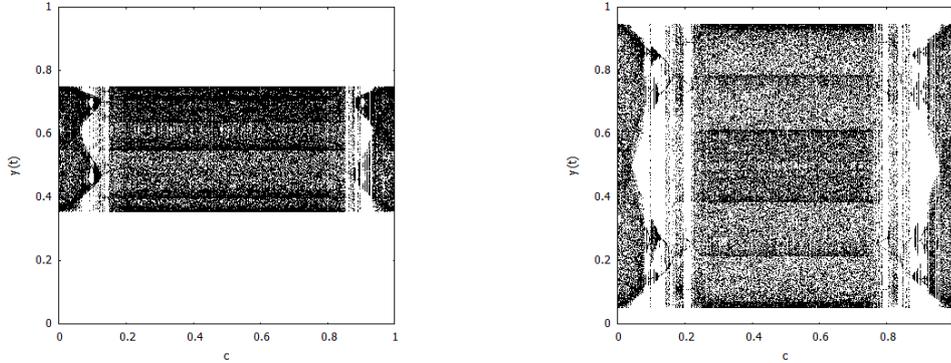


Figura 3.10: Gráficos das iteradas $y(t)$ em função de c para o ALS da gaussiana (à esquerda) e da cúbica (à direita), com condições iniciais aleatórias em $[0,1]$.

3.2.3 Janelas-de-ponto-fixo noutros acoplamentos

Iremos agora estender alguns dos resultados obtidos nas secções anteriores a outros acoplamentos mais genéricos, acoplamentos do tipo (3.2).

Considerando um acoplamento (3.2), cada ponto (x_0, y_0) da sua linha-de-ponto-fixo (3.6) corresponde a um valor da constante-força-de-acoplamento, nomeadamente a

$$c = \frac{x_0 - f(x_0)}{F_1(x_0) + F_2(y_0)} = \frac{y_0 - g(y_0)}{G_1(x_0) + G_2(y_0)}$$

Tal como para o Acoplamento Linear Simétrico, e de acordo com a proposição seguinte, só alguns pontos dessa linha-de-ponto-fixo, ou mesmo nenhuns, correspondem a valores de c pertencentes à janela-de-ponto-fixo de (3.2).

Proposição 5. *Seja (x_0, y_0) um ponto da linha-de-ponto-fixo do acoplamento (3.2). Se*

os módulos de ambos os valores próprios de

$$J(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f'(x_0) + c \cdot F'_1(x_0) & c \cdot F'_2(y_0) \\ c \cdot G'_1(x_0) & g'(y_0) + c \cdot G'_2(y_0) \end{bmatrix},$$

com $c = \frac{x_0 - f(x_0)}{F_1(x_0) + F_2(y_0)}$, forem menores do que um, então (x_0, y_0) é um ponto fixo exponencialmente estável de (3.2) e, conseqüentemente, c pertence à janela-de-ponto-fixo de (3.2). Se pelo menos um dos valores próprios de $J(x_0, y_0)$ tiver módulo maior do que um, então (x_0, y_0) é um ponto fixo instável de (3.2) e, conseqüentemente, c não pertence à janela-de-ponto-fixo de (3.2).

Demonstração 5. Considerando $(x(t), y(t)) = (x_0 + u_x(t), y_0 + u_y(t))$, obtemos a seguinte aproximação linear de (3.2) em torno do ponto fixo (x_0, y_0)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 + u_x(t+1) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot u_x(t) + \\ \quad + c \cdot [F_1(x_0) + F'_1(x_0) \cdot u_x(t) + F_2(y_0) + F'_2(y_0) \cdot u_y(t)] \\ y_0 + u_y(t+1) = g(y_0) + g'(y_0) \cdot u_y(t) + \\ \quad + c \cdot [G_1(x_0) + G'_1(x_0) \cdot u_x(t) + G_2(y_0) + G'_2(y_0) \cdot u_y(t)] \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x(t+1) = f'(x_0) \cdot u_x(t) + c \cdot [F'_1(x_0) \cdot u_x(t) + F'_2(y_0) \cdot u_y(t)] \\ u_y(t+1) = g'(y_0) \cdot u_y(t) + c \cdot [G'_1(x_0) \cdot u_x(t) + G'_2(y_0) \cdot u_y(t)] \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} u_x(t+1) \\ u_y(t+1) \end{bmatrix} = J(x_0, y_0) \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Sendo S a matriz que tem por colunas os vetores próprios generalizados de $J(x_0, y_0)$, e

$$\text{considerando } \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{bmatrix} \text{ obtemos}$$

$$\begin{bmatrix} v_x(t+1) \\ v_y(t+1) \end{bmatrix} = S^{-1} J(x_0, y_0) \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} v_x(t+1) \\ v_y(t+1) \end{bmatrix} = \tilde{J} \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix}$$

onde $\tilde{J} = S^{-1} \cdot J(x_0, y_0) \cdot S$ é a forma canónica de Jordan de $J(x_0, y_0)$.

Se a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de $J(x_0, y_0)$ é dois,

$$\text{tem-se } \tilde{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} e$$

$$\begin{bmatrix} v_x(T) \\ v_y(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^T & 0 \\ 0 & \lambda_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^T v_x(0) \\ \lambda_2^T v_y(0) \end{bmatrix}$$

Concluimos, pois, que, se ambos os valores de $|\lambda_1|$ e $|\lambda_2|$ forem inferiores a um, então (x_0, y_0) é um ponto fixo exponencialmente estável. Se algum deles for superior a um, então o ponto fixo é instável.

Se a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de $J(x_0, y_0)$ é um,

$$\text{tem-se } \tilde{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} e$$

$$\begin{bmatrix} v_x(T) \\ v_y(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^T & T\lambda_1^{T-1} \\ 0 & \lambda_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^T v_x(0) + T\lambda_1^{T-1} v_y(0) \\ \lambda_1^T v_y(0) \end{bmatrix}$$

Concluimos, pois, que se $|\lambda_1| < 1$, então (x_0, y_0) é um ponto fixo exponencialmente estável. Se $|\lambda_1| > 1$, então o ponto fixo é instável. \square

Em acoplamentos tais que $F_1 = -G_1$ e $F_2 = -G_2$ a linha-de-ponto-fixo (3.7) reduz-se a $x_0 + y_0 = f(x_0) + g(y_0)$. É, por exemplo, o caso do Acoplamento Linear, (3.3). Tratando-se do Acoplamento Linear de sistemas dinâmicos não idênticos, a expressão dos valores próprios de $J(x_0, y_0)$ da proposição anterior, em vez de ser dada por (3.11), como acontece no Acoplamento Linear Simétrico, passa a ser dada pelas soluções de

$$\lambda^2 - (1 - c) \cdot (f'(x_0) + g'(y_0)) \cdot \lambda + (1 - 2c) \cdot f'(x_0) \cdot g'(y_0) = 0$$

i.e., passa a ser dada por

$$\lambda = \frac{1}{2} (1 - c) \cdot (f'(x_0) + g'(y_0)) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 - c)^2 \cdot (f'(x_0) + g'(y_0))^2 - 4(1 - 2c) \cdot f'(x_0) \cdot g'(y_0)}$$

Tendo em conta a proposição anterior e que também agora o anulamento de $f'(x_0)$ (ou de $g'(y_0)$) determina a existência de um valor próprio nulo (i.e., determina que $|\lambda|$ assume o seu menor valor possível), sendo o outro dado por $\lambda = (1 - c) \cdot g'(y_0)$, podemos apresentar para o Acoplamento Linear de sistemas dinâmicos não idênticos uma estratégia semelhante à que na secção anterior apresentámos para averiguar se a janela-de-ponto-fixo é não-vazia e, caso seja, localizá-la:

- i) Obtemos um valor de x_0 tal que $f'(x_0) = 0$.
- ii) Obtemos um correspondente valor de y_0 da linha-de-ponto-fixo, i.e., obtemos um valor de y_0 tal que $x_0 + y_0 = f(x_0) + g(y_0)$.
- iii) Se $|(1 - c) \cdot g'(y_0)| < 1$, com $c = \frac{x_0 - f(x_0)}{g(y_0) - f(x_0)}$ pertencente a $[0, 1]$, então o aco-

plamento admite uma janela-de-ponto-fixo não-vazia, sendo pois possível utilizar um Acoplamento Linear para destruir o caos dos sistemas dinâmicos acoplados.

Utilizamos, de seguida, esta estratégia para tentar apurar se são não-vazias (e, caso sejam, para também localizá-las) as janelas-de-ponto-fixo de Acoplamentos Lineares de um sistema dinâmico descrito pela logística com outros que não lhe sejam idênticos, nomeadamente com sistemas dinâmicos descritos pela tenda, pela serra e pela cúbica:

- Acoplamento Linear da logística com a tenda, i.e., $f = f_L$ e $g = f_T$:

i) $f'_L(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0.5$

ii) $x_0 + y_0 = f_L(x_0) + f_T(y_0) \Leftrightarrow y_0 = \frac{5}{6}$

iii) $c = 0.75$, a que corresponde $|(1 - c) \cdot f'_T(y_0)| = 0.5 < 1$

Concluimos, então, que o comportamento caótico da logística é destrutível se a acoplarmos (com o apropriado valor de c) à tenda, utilizando um Acoplamento Linear. Na figura 3.11 apresentamos a linha-de-ponto-fixo deste acoplamento, assinalando a vermelho os que são exponencialmente estáveis. Podemos verificar que o ponto fixo que a estratégia proposta fornece, nomeadamente $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{5}{6})$, é um ponto fixo exponencialmente estável, correspondendo-lhe um valor de c , nomeadamente $c = 0.75$, que evidentemente pertence à janela-de-ponto-fixo. Na figura 3.11 apresentamos ainda o gráfico das iteradas $y(t)$ em função de c que se obtém seguindo a abordagem numérica proposta na secção 3.1 e onde é igualmente visível a janela-de-ponto-fixo encontrada.

- Acoplamento Linear da logística com a serra, $f = f_L$ e $g = f_S$:

i) $f'_L(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0.5$

ii) não existe nenhum y_0 tal que $x_0 + y_0 = f_L(x_0) + f_S(y_0)$

A estratégia que definimos não permite, pois, localizar a janela-de-ponto-fixo para o Acoplamento Linear da logística com a serra. Contudo, isso não quer dizer que

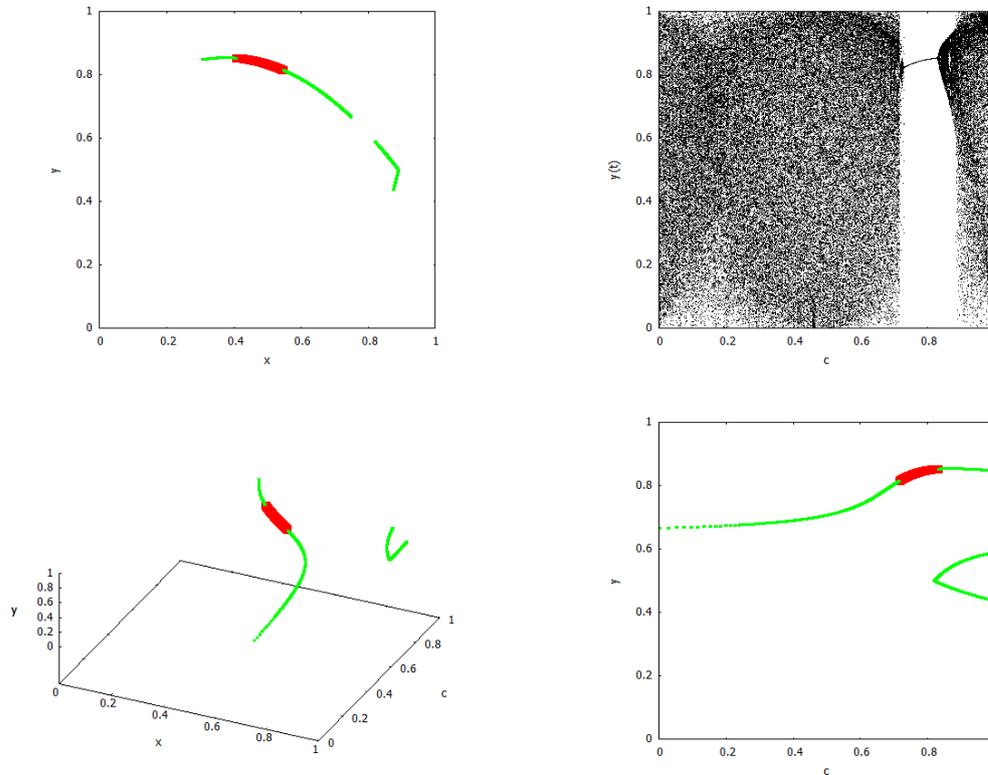


Figura 3.11: Gráfico das iteradas $y(t)$ em função de c para o AL da logística com a tenda (em cima, à direita) e correspondentes linha-de-ponto-fixo (em cima, à esquerda), linha-3D-de-ponto-fixo (em baixo, à esquerda) e sua projeção no plano yc (em baixo, à direita). Os pontos fixos exponencialmente estáveis estão assinalados a vermelho.

ela seja vazia, quer apenas dizer que não inclui nenhum valor de c correspondente ao valor $x_0 = 0.5$. Tal acontece, aliás, porque a linha-de-ponto-fixo não inclui sequer nenhum ponto com $x_0 = 0.5$. Isto pode ser confirmado pela figura 3.12 onde, tal como para o acoplamento anterior, apresentamos a linha-de-ponto-fixo deste acoplamento. A existência de pontos assinalados a vermelho, correspondentes a pontos fixos exponencialmente estáveis, significa que a janela-de-ponto-fixo é afinal não-vazia. O gráfico das iteradas $y(t)$ em função de c , que igualmente apresentamos na mesma figura, evidencia também isso. Apesar de a aplicação a este acoplamento da estratégia definida nada ter conseguido apurar sobre a existência de uma janela-de-ponto-fixo não-vazia, verificamos, no entanto, que, em consonância com os pressupostos que nos conduziram a essa

3.2. Janela-de-ponto-fixo

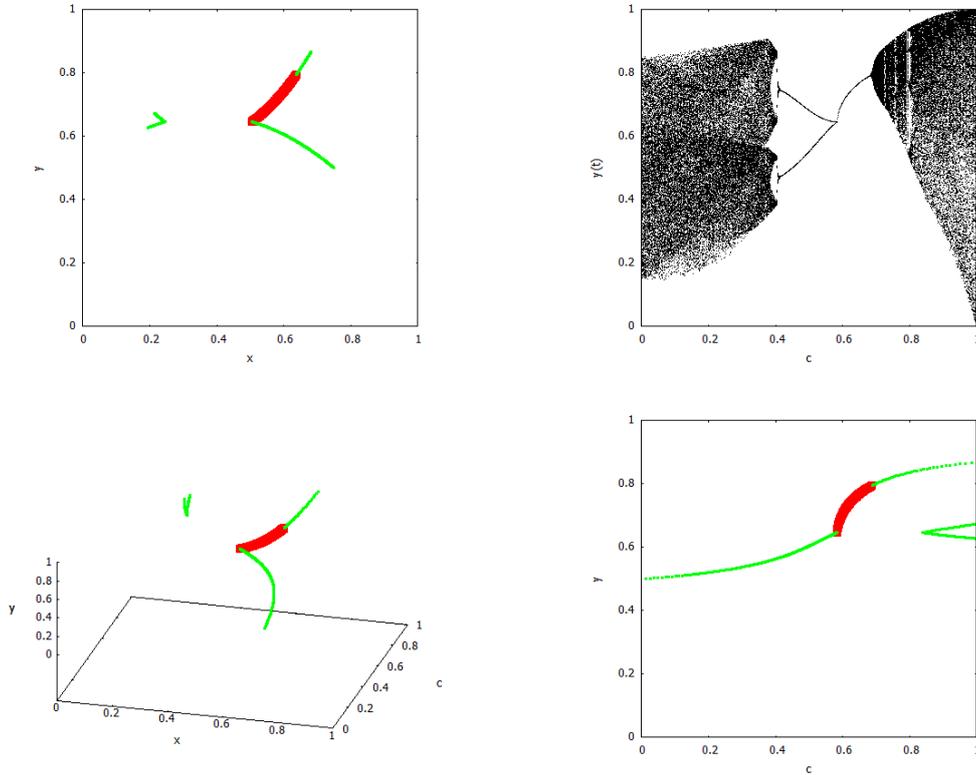


Figura 3.12: Gráfico das iteradas $y(t)$ em função de c para o AL da logística com a serra (em cima, à direita) e correspondentes linha-de-ponto-fixo (em cima, à esquerda), linha-3D-de-ponto-fixo (em baixo, à esquerda) e sua projeção no plano yc (em baixo, à direita). Os pontos fixos exponencialmente estáveis estão assinalados a vermelho.

estratégia, os valores de c pertencentes à janela-de-ponto-fixo correspondem a valores de x_0 perto de 0.5, i.e., a valores de x_0 para os quais $|f'(x_0)|$ é reduzido. Relativamente ao acoplamento considerado, concluímos, pois, que o comportamento caótico da logística é também destrutível se a acoplarmos (com o apropriado valor de c) à serra, utilizando um Acoplamento Linear.

- Acoplamento Linear da logística com a cúbica, $f = f_L$ e $g = f_C$:

i) $f'_L(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0.5$

ii) $x_0 + y_0 = f_L(x_0) + f_C(y_0) \Leftrightarrow y_0 \simeq 0.647 \vee y_0 \simeq 0.910$

iii) para $y_0 \simeq 0.647$ obtemos $c \simeq 0.586$ a que corresponde $|(1 - c) \cdot f'_C(y_0)| \simeq 0.723 < 1$, e para $y_0 \simeq 0.910$ obtemos $c \simeq 0.847$ a que corresponde $|(1 - c) \cdot f'_C(y_0)| \simeq$

$0.729 < 1$

Concluimos, então, que o comportamento caótico da logística é destrutível se a acoplarmos (com o apropriado valor de c) à cúbica, utilizando um Acoplamento Linear. Na figura 3.13 apresentamos a linha-de-ponto-fixo deste acoplamento, assinalando a vermelho os que são exponencialmente estáveis. Podemos verificar que os pontos fixos que a estratégia proposta fornece, nomeadamente $(x_0, y_0) = (0.5, 0.647)$ e $(x_0, y_0) = (0.5, 0.910)$, são pontos exponencialmente estáveis, correspondendo-lhes valores de c , nomeadamente $c \simeq 0.586$ e $c \simeq 0.847$, que pertencem, evidentemente à janela-de-ponto-fixo. Na figura 3.13 apresentamos ainda o gráfico das iteradas $y(t)$ em função de c que se obtém seguindo a abordagem numérica proposta na secção 3.1 e onde é igualmente visível a janela-de-ponto-fixo encontrada.

3.3 Janela-de-período-2-sincronizada-desfasada

Analizamos agora aquela que, na figura 3.1, designámos por zona 1 e que identificámos como correspondendo à janela-de-período-2-sincronizada-desfasada.

3.3.1 Janela-de-período-2-sincronizada-desfasada de um ALS

Na análise da janela-de-período-2-sincronizada-desfasada de um Acoplamento Linear Simétrico o que está em causa é a existência de trajetórias de período-2-sincronizadas-desfasadas $((\alpha, \beta), (\beta, \alpha))$ que sejam soluções exponencialmente estáveis de (3.4). Tendo em conta que $((\alpha, \beta), (\beta, \alpha))$ ser solução de (3.4) corresponde a verificarem-se as seguin-

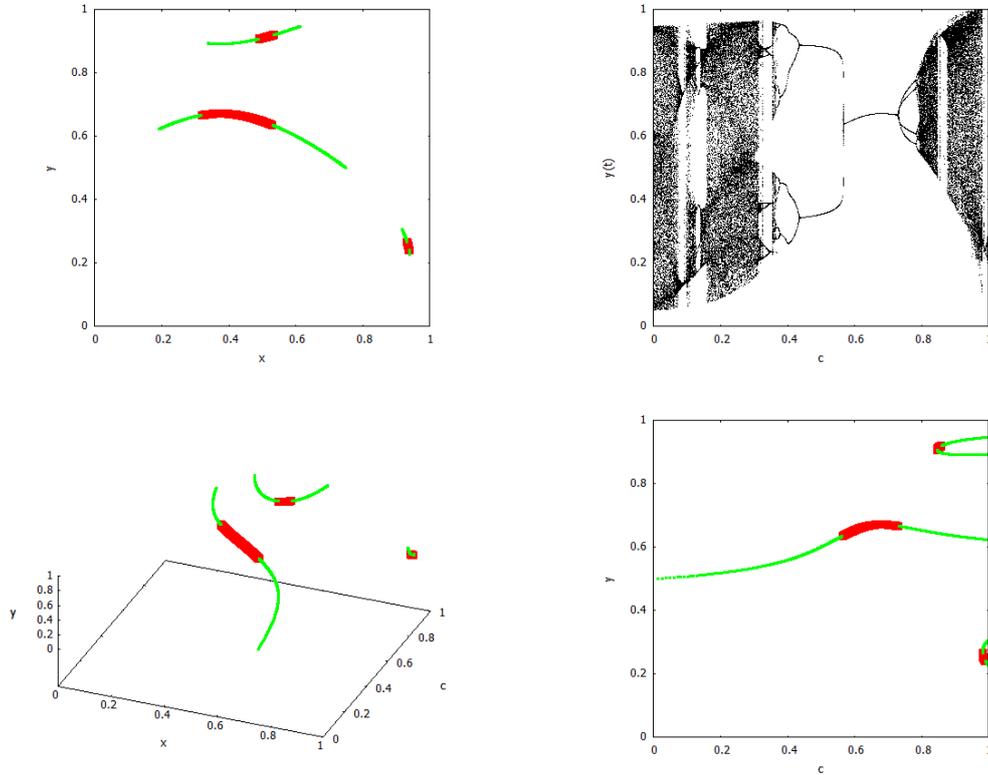


Figura 3.13: Gráfico das iteradas $y(t)$ em função de c para o AL da logística com a cúbica (em cima, à direita) e correspondentes linha-de-ponto-fixo (em cima, à esquerda), linha-3D-de-ponto-fixo (em baixo, à esquerda) e sua projeção no plano yc (em baixo, à direita). Os pontos fixos exponencialmente estáveis estão assinalados a vermelho.

tes condições

$$\begin{cases} \beta = (1 - c) \cdot f(\alpha) + c \cdot f(\beta) \\ \alpha = c \cdot f(\alpha) + (1 - c) \cdot f(\beta) \\ \alpha = (1 - c) \cdot f(\beta) + c \cdot f(\alpha) \\ \beta = c \cdot f(\beta) + (1 - c) \cdot f(\alpha) \end{cases}$$

e que as duas últimas condições são exatamente iguais às primeiras, introduzimos a seguinte definição de linha-de-período-2-sincronizada-desfasada de um Acoplamento Linear Simétrico.

Definição 13. Designamos por linha-de-período-2-sincronizada-desfasada (LP2SD) do Acoplamento Linear Simétrico (3.4), a linha do plano xy que é descrita pelos pontos

$(x,y) = (\alpha,\beta)$, com $\alpha \neq \beta$, tais que

$$\begin{cases} \beta = (1 - c) \cdot f(\alpha) + c \cdot f(\beta) \\ \alpha = c \cdot f(\alpha) + (1 - c) \cdot f(\beta) \end{cases}, \quad (3.13)$$

com $c \in [0,1]$. Designamos por *linha-3D-de-período-2-sincronizada-desfasada do Acoplamento Linear Simétrico (3.4)*, a linha do espaço xyz descrita por estas equações.

Cada ponto (α,β) da linha-de-período-2-sincronizada-desfasada do Acoplamento Linear Simétrico (3.4) está associado a um valor c da constante-força-de-acoplamento

$$c = \frac{\beta - f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} = \frac{\alpha - f(\beta)}{f(\alpha) - f(\beta)}$$

Somando termo a termo as duas equações de (3.13), obtemos

$$\alpha + \beta = f(\alpha) + f(\beta), \quad (3.14)$$

pelo que a linha-de-período-2-sincronizada-desfasada é o subconjunto da que esta equação representa, correspondente aos pontos (α,β) associados a $c \in [0,1]$.

É de notar que (3.14) e (3.8) são exatamente a mesma equação, i.e., a linha-de-período-2-sincronizada-desfasada de um Acoplamento Linear Simétrico é igual à sua linha-de-ponto-fixo (exceto pelo ponto (x_0,x_0) , com $x_0 = f(x_0)$, que pertence à linha-de-ponto-fixo mas não à linha-de-período-2-sincronizada-desfasada). No entanto, o valor da constante-força-de-acoplamento, c , associado a cada ponto da linha-de-período-2-sincronizada-desfasada é evidentemente diferente do correspondente da linha-de-ponto-fixo. Existe, aliás, uma relação simples entre esses dois valores. Com efeito, tendo em conta que se substituirmos, em (3.13), α por x_0 , β por y_0 e c por $1 - c$ obte-

mos (3.5), concluímos que se um Acoplamento Linear Simétrico admite para um valor c_0 da constante-força-de-acoplamento a solução-de-período-2-sincronizada-desfasada $((\alpha, \beta), (\beta, \alpha))$, então o mesmo Acoplamento Linear Simétrico admite a solução de ponto fixo (α, β) para um valor da constante-força-de-acoplamento de $1 - c_0$, ou seja a linha-3D-de-período-2-sincronizada-desfasada e a linha-3D-de-ponto-fixa de um Acoplamento Linear Simétrico são simétricas uma da outra em relação ao plano $c = \frac{1}{2}$ (exceto pela situação atrás excetuada).

Um ponto (α, β) da linha-de-período-2-sincronizada-desfasada só corresponde a valores de c pertencentes à janela-de-período-2-sincronizada-desfasada, se estiver associado a uma solução de (3.4) exponencialmente estável. A proposição seguinte determina quais os pontos da linha-de-período-2-sincronizada-desfasada de um Acoplamento Linear Simétrico correspondem a valores de c pertencentes à janela-de-período-2-sincronizada-desfasada.

Proposição 6. *Seja (α, β) um ponto da linha-de-período-2-sincronizada-desfasada do Acoplamento Linear Simétrico (3.4). Se os módulos de ambos os valores próprios de*

$$J_2(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} (1-c)f'(\beta) & cf'(\alpha) \\ cf'(\beta) & (1-c)f'(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1-c)f'(\alpha) & cf'(\beta) \\ cf'(\alpha) & (1-c)f'(\beta) \end{bmatrix}$$

com $c = \frac{\beta - f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}$, forem menores do que um, então $((\alpha, \beta), (\alpha, \beta))$ é uma trajetória exponencialmente estável de (3.4) e, conseqüentemente, c pertence à janela-de-período-2-sincronizada-desfasada de (3.4). Se pelo menos um dos valores próprios de $J_2(\alpha, \beta)$ tiver módulo maior do que um, então $((\alpha, \beta), (\alpha, \beta))$ é uma trajetória instável de (3.4) e, conseqüentemente, c não pertence à janela-de-período-2-sincronizada-desfasada de (3.4).

Demonstração 6. *Esta proposição corresponde à particularização para o Acoplamento Linear Simétrico da Proposição 7, que apresentaremos mais adiante, pelo que esta demonstração resume-se a considerarmos o resultado que essa outra proposição fornece para $F_2 = -F_1 = f$.*

Aplicando esta proposição ao Acoplamento Linear Simétrico das aplicações que utilizámos na secção 3.1 para apresentarmos as janelas que temos vindo a analisar, i.e., aplicando esta proposição ao Acoplamento Linear Simétrico da logística e da tenda, podemos identificar quais são os pontos das suas linhas-de-período-2-sincronizadas-desfasadas que correspondem a valores de c pertencentes à janela-de-período-2-sincronizada-desfasada. Nas figuras 3.14 e 3.15 apresentamos as linhas-de-período-2-sincronizadas-desfasadas para esses dois acoplamentos, assinalando a vermelho os pontos que correspondem a soluções $((\alpha, \beta), (\alpha, \beta))$ exponencialmente estáveis, i.e., a valores de c pertencentes à janela-de-período-2-sincronizada-desfasada.

Estes resultados confirmam aqueles que as figuras 3.1 e 3.3 indicavam relativamente à janela-de-período-2-sincronizada-desfasada, nomeadamente que a janela-de-período-2-sincronizada-desfasada do Acoplamento Linear Simétrico da logística é não-vazia enquanto que a do Acoplamento Linear Simétrico da tenda é vazia. Para além disso, as linhas-de-período-2-sincronizadas-desfasadas são iguais q.t.p. às correspondentes linhas-de-ponto-fixo, tal como notámos atrás que teria de acontecer. No entanto, enquanto que a janela-de-ponto-fixo do Acoplamento Linear Simétrico é $JPF \simeq]0.806, 0.861[$ a sua janela-de-período-2-sincronizada-desfasada é $JP2SD \simeq]0.139, 0.194[$.

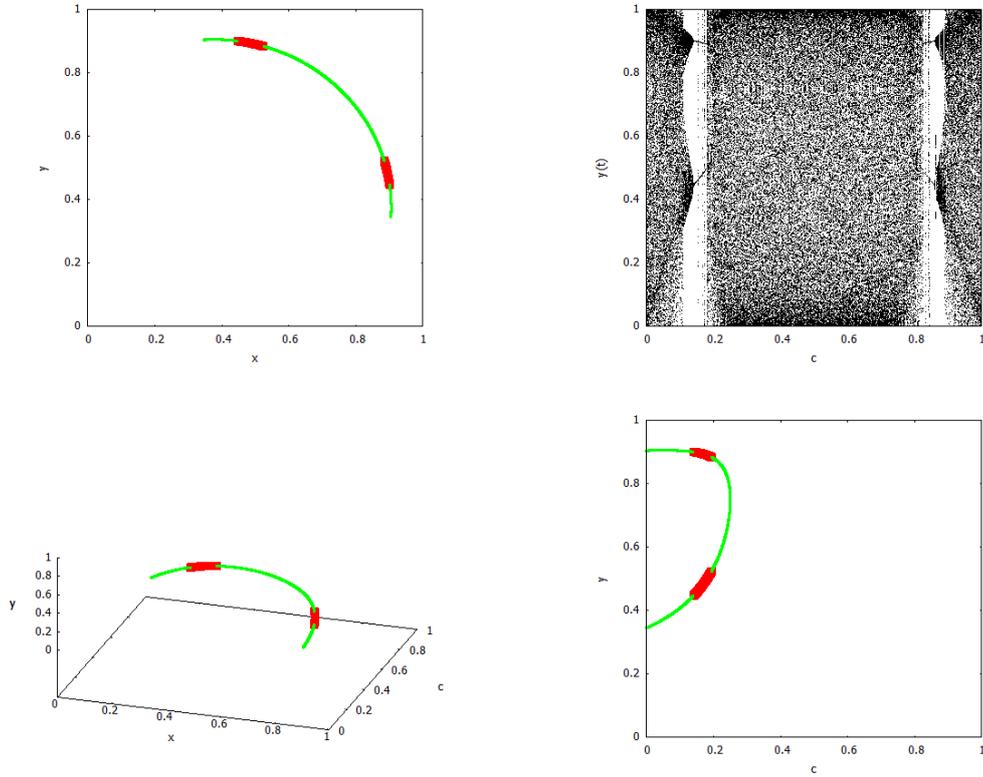


Figura 3.14: Gráfico das iteradas $y(t)$ em função de c para o ALS da logística (em cima, à direita) e correspondentes linha-de-período-2-sincronizada-desfasada (em cima, à esquerda), linha-3D-de-período-2-sincronizada-desfasada (em baixo, à esquerda) e sua projeção no plano yc (em baixo, à direita). Os pontos correspondentes a soluções exponencialmente estáveis estão assinalados a vermelho.

3.3.2 Janela-de-período-2-sincronizada-desfasada noutros acoplamentos

A generalização para um acoplamento (3.2) da definição de linha-de-período-2-sincronizada-desfasada corresponde aos pontos (α, β) que verificam

$$\begin{cases} \beta = f(\alpha) + c \cdot [F_1(\alpha) + F_2(\beta)] \\ \alpha = g(\beta) + c \cdot [G_1(\alpha) + G_2(\beta)] \\ \alpha = f(\beta) + c \cdot [F_1(\beta) + F_2(\alpha)] \\ \beta = g(\alpha) + c \cdot [G_1(\beta) + G_2(\alpha)] \end{cases} \quad (3.15)$$

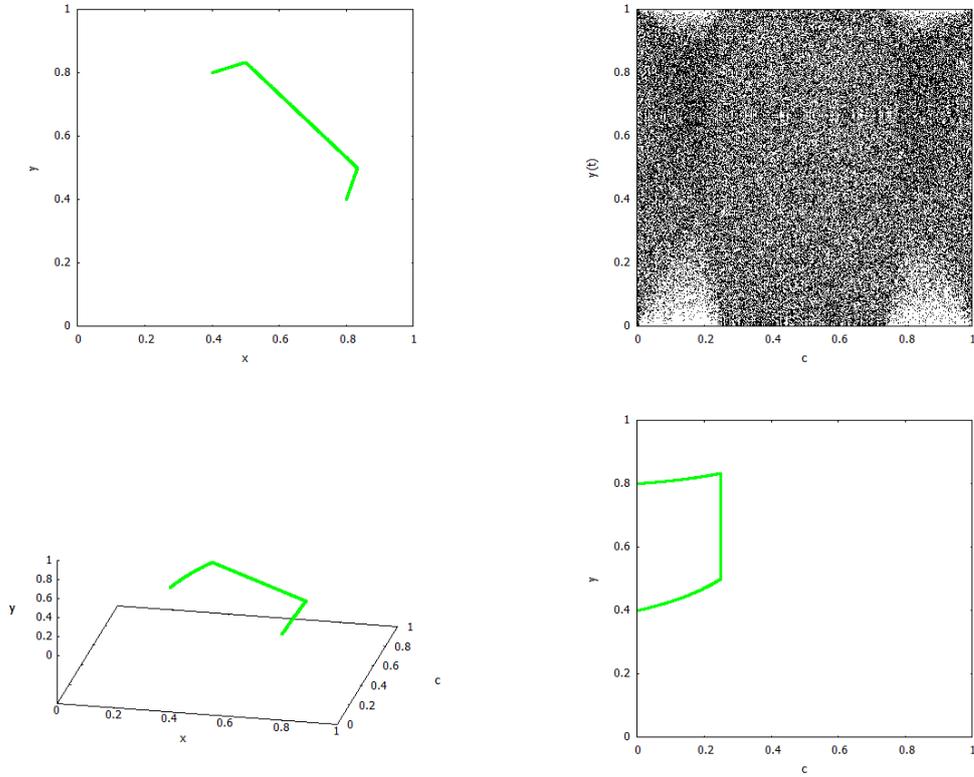


Figura 3.15: Gráfico das iteradas $y(t)$ em função de c para o ALS da tenda (em cima, à direita) e correspondentes linha-de-período-2-sincronizada-desfasada (em cima, à esquerda), linha-3D-de-período-2-sincronizada-desfasada (em baixo, à esquerda) e sua projeção no plano yc (em baixo, à direita).

Com efeito, estas são as equações que têm de ser satisfeitas para que uma trajetória de período-2-sincronizada-desfasada $((\alpha, \beta), (\beta, \alpha))$ seja solução de (3.2). Contrariamente ao que acontece para o Acoplamento Linear Simétrico, o sistema destas quatro equações pode não ter solução, i.e., a linha-de-período-2-sincronizada-desfasada pode ser o conjunto vazio. No entanto, se f, g, F_1, F_2, G_1 e G_2 obedecerem a determinadas condições podemos garantir a existência de uma linha-de-período-2-sincronizada-desfasada não-vazia. Se $f = g, F_1 = G_2$ e $F_2 = G_1$, i.e., para acoplamentos do tipo

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) + c \cdot [F_1(x(t)) + F_2(y(t))] \\ y(t+1) = f(y(t)) + c \cdot [F_2(x(t)) + F_1(y(t))] \end{cases}, \quad (3.16)$$

duas das quatro equações de (3.15) são iguais às restantes e a definição da sua linha-de-período-2-sincronizada-desfasada é então a seguinte

Definição 14. *Designamos por linha-de-período-2-sincronizada-desfasada do acoplamento (3.16), a linha do plano xy que é descrita pelos pontos $(x,y) = (\alpha,\beta)$, com $\alpha \neq \beta$, tais que*

$$\begin{cases} \beta = f(\alpha) + c \cdot [F_1(\alpha) + F_2(\beta)] \\ \alpha = f(\beta) + c \cdot [F_2(\alpha) + F_1(\beta)] \end{cases}, \quad (3.17)$$

com $c \in [0,1]$. *Designamos por linha-3D-de-período-2-sincronizada-desfasada do acoplamento (3.16), a linha do espaço xyz descrita por estas equações.*

Cada ponto (α,β) da linha-de-período-2-sincronizada-desfasada do acoplamento (3.16) está associado a um valor c da constante-força-de-acoplamento

$$c = \frac{\beta - f(\alpha)}{F_1(\alpha) + F_2(\beta)} = \frac{\alpha - f(\beta)}{F_2(\alpha) + F_1(\beta)},$$

podendo (3.17) ser reescrito como

$$(\beta - f(\alpha)) \cdot [F_2(\alpha) + F_1(\beta)] = (\alpha - f(\beta)) \cdot [F_1(\alpha) + F_2(\beta)]$$

A linha-de-período-2-sincronizada-desfasada de (3.16) é o subconjunto da que esta equação representa, correspondente aos pontos (α,β) associados a $c \in [0,1]$.

Contrariamente ao que acontece para um Acoplamento Linear Simétrico, a linha-de-período-2-sincronizada-desfasada de (3.16) não é igual à sua linha-de-ponto-fixo, mas tem-se também que só alguns, ou mesmo nenhuns, dos pontos da linha-de-período-2-sincronizada-desfasada correspondem a soluções exponencialmente estáveis, i.e., só alguns deles correspondem a valores de c pertencentes à janela-de-período-2-sincronizada-

desfasada, tal como a proposição seguinte explicita.

Proposição 7. *Seja (α, β) um ponto da linha-de-período-2-sincronizada-desfasada do acoplamento (3.16). Se os módulos de ambos os valores próprios de*

$$J_2(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} f'(\beta) + c \cdot F'_1(\beta) & c \cdot F'_2(\alpha) \\ c \cdot F'_2(\beta) & f'(\alpha) + c \cdot F'_1(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f'(\alpha) + c \cdot F'_1(\alpha) & c \cdot F'_2(\beta) \\ c \cdot F'_2(\alpha) & f'(\beta) + c \cdot F'_1(\beta) \end{bmatrix}$$

com $c = \frac{\beta - f(\alpha)}{F_1(\alpha) + F_2(\beta)}$, forem menores do que um, então $((\alpha, \beta), (\beta, \alpha))$ é uma trajetória exponencialmente estável de (3.16) e, conseqüentemente, c pertence à janela-de-período-2-sincronizada-desfasada de (3.16). Se pelo menos um dos valores próprios de $J_2(\alpha, \beta)$ tiver módulo maior do que um, então $((\alpha, \beta), (\alpha, \beta))$ é uma trajetória instável de (3.16) e, conseqüentemente, c não pertence à janela-de-período-2-sincronizada-desfasada de (3.16).

Demonstração 7. *Considerando $(x(t), y(t)) = (\gamma_x(t) + u_x(t), \gamma_y(t) + u_y(t))$, com*

$$(\gamma_x(t), \gamma_y(t)) = \begin{cases} (\alpha, \beta), & \text{se } t \text{ é ímpar} \\ (\beta, \alpha), & \text{se } t \text{ é par} \end{cases},$$

obtemos a seguinte aproximação linear de (3.16), em torno da trajetória $((\alpha, \beta), (\beta, \alpha))$,

para os valores ímpares de t (sendo t par tudo é idêntico, desde que se troque α por β)

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta + u_x(t+1) = f(\alpha) + f'(\alpha) \cdot u_x(t) + \\ \quad + c \cdot [F_1(\alpha) + F_1'(\alpha) \cdot u_x(t) + F_2(\beta) + F_2'(\beta) \cdot u_y(t)] \\ \alpha + u_y(t+1) = f(\beta) + f'(\beta) \cdot u_y(t) + \\ \quad + c \cdot [F_2(\alpha) + F_2'(\alpha) \cdot u_x(t) + F_1(\beta) + F_1'(\beta) \cdot u_y(t)] \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x(t+1) = f'(\alpha) \cdot u_x(t) + c \cdot [F_1'(\alpha) \cdot u_x(t) + F_2'(\beta) \cdot u_y(t)] \\ u_y(t+1) = f'(\beta) \cdot u_y(t) + c \cdot [F_2'(\alpha) \cdot u_x(t) + F_1'(\beta) \cdot u_y(t)] \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} u_x(t+1) \\ u_y(t+1) \end{bmatrix} = J_1(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{bmatrix}$$

com $J_1(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} f'(\alpha) + c \cdot F_1'(\alpha) & c \cdot F_2'(\beta) \\ c \cdot F_2'(\alpha) & f'(\beta) + c \cdot F_1'(\beta) \end{bmatrix}$. De igual modo, obtém-se

(já que sendo t ímpar, $t+1$ é par, e os cálculos para obter a iterada correspondente a $t+2$ são idênticos aos anteriores desde que se troque α por β)

$$\begin{bmatrix} u_x(t+2) \\ u_y(t+2) \end{bmatrix} = J_1(\beta, \alpha) \begin{bmatrix} u_x(t+1) \\ u_y(t+1) \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\begin{bmatrix} u_x(t+2) \\ u_y(t+2) \end{bmatrix} = J_1(\beta, \alpha) \cdot J_1(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{bmatrix} = J_2(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{bmatrix}$$

Se, em vez de considerarmos t ímpar, tivéssemos considerado t par, teríamos obtido

$$\begin{bmatrix} u_x(t+2) \\ u_y(t+2) \end{bmatrix} = J_2(\beta, \alpha) \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Vejamos, agora, que $J_2(\alpha, \beta)$ e $J_2(\beta, \alpha)$ têm valores próprios iguais:

Com efeito, designando os elementos de $J_2(\alpha, \beta)$ por $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, os elementos de $J_2(\beta, \alpha)$ são $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$, e se $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ é valor próprio de $J_2(\alpha, \beta)$ associado ao valor próprio λ , i.e., se

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = \lambda c_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 = \lambda c_2 \end{cases},$$

então, tendo em conta que este sistema pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix},$$

concluimos que $\begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix}$ é valor próprio de $J_2(\beta, \alpha)$ associado ao mesmo valor próprio.

Visto que $J_2(\alpha, \beta)$ e $J_2(\beta, \alpha)$ têm os mesmos valores próprios, termos considerado t é ímpar não retira a generalidade do que se segue:

O papel que $J_2(\alpha, \beta)$ desempenha em (3.18) é exactamente o mesmo que, na Proposição 5, $J(x_0, y_0)$ desempenha em (3.12). A demonstração desta proposição é, pois, a partir de (3.18) exactamente igual à da Proposição 5 a partir de (3.12), desde que substituamos $J(x_0, y_0)$ por $J_2(\alpha, \beta)$.

Concluimos, assim, que se ambos os valores próprios de $J_2(\alpha, \beta)$ (que são iguais aos

de $J_2(\beta, \alpha)$ tiverem módulo menor do que um, então $((\alpha, \beta), (\alpha, \beta))$ é uma trajetória exponencialmente estável de (3.16). Se algum deles tiver módulo maior do que um, então $((\alpha, \beta), (\alpha, \beta))$ é uma trajetória instável de (3.16). \square

De entre os Acoplamentos Lineares, só o Acoplamento Linear Simétrico é um acoplamento do tipo (3.16) (corresponde à escolha $F_2 = -F_1 = f$). Introduzamos, então, um outro que também seja do tipo (3.16), concretamente introduzamos aquele que designamos por Acoplamento Simétrico Passado (ASP) e que corresponde à escolha $F_1 = -f$ e $F_2 = id$ (sendo id a função identidade, i.e., $id(u) = u$):

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) + c \cdot [-f(x(t)) + y(t)] \\ y(t+1) = f(y(t)) + c \cdot [x(t) - f(y(t))] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(t+1) = (1-c) \cdot f(x(t)) + c \cdot y(t) \\ y(t+1) = c \cdot x(t) + (1-c) \cdot f(y(t)) \end{cases}$$

A designação Simétrico Passado tem a ver com o facto de o termo de interação que em $x(t+1)$ é ditado pelo sistema dinâmico y ser $y(t)$, em vez de ser, como no Acoplamento Linear Simétrico, $f(y(t))$, sucedendo uma situação semelhante em relação ao termo de interação que em $y(t+1)$ é ditado pelo sistema dinâmico x .

Estudamos de seguida a janela-de-período-2-sincronizada-desfasada deste acoplamento, não considerando a situação correspondente a $c = 1$, já que para tal valor da constante-força-de-acoplamento o comportamento do acoplamento reduz-se, de forma trivial, a um comportamento periódico de período-2-sincronizado-desfasado, quaisquer

que sejam os valores iniciais:

$$\begin{cases} x(t+1) = y(t) \\ y(t+1) = x(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t+2) = x(t) \\ y(t+2) = y(t) \end{cases}$$

Exemplos de janelas do ASP

A linha-de-período-2-sincronizada-desfasada de um Acoplamento Simétrico Passado é dada por

$$\begin{cases} \beta = f(\alpha) + c \cdot [-f(\alpha) + \beta] \\ \alpha = f(\beta) + c \cdot [\alpha - f(\beta)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta - f(\alpha) = 0 \\ \alpha - f(\beta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = f(f(\beta)) \\ \alpha = f(f(\alpha)) \end{cases},$$

i.e., corresponde a uma situação degenerada de pontos isolados $(x,y) = (\gamma_1,\gamma_2)$, sendo γ_1 e γ_2 os valores assumidos nas trajetórias periódicas de período-2 que os sistemas dinâmicos livres $\gamma(t+1) = f(\gamma(t))$ apresentem (i.e., γ_1 é solução de $\gamma = f(f(\gamma))$), sendo $\gamma_2 = f(\gamma_1)$.

A determinação da janela-de-período-2-sincronizada-desfasada resume-se, pois, a determinar os valores de c para os quais ambos os valores próprios de

$$\begin{aligned} J_2(\gamma_1,\gamma_2) &= \begin{bmatrix} (1-c) \cdot f'(\gamma_2) & c \\ c & (1-c) \cdot f'(\gamma_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1-c) \cdot f'(\gamma_1) & c \\ c & (1-c) \cdot f'(\gamma_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-c)^2 \cdot f'(\gamma_1) \cdot f'(\gamma_2) + c^2 & 2c(1-c) \cdot f'(\gamma_2) \\ 2c(1-c) \cdot f'(\gamma_1) & (1-c)^2 \cdot f'(\gamma_1) \cdot f'(\gamma_2) + c^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

têm valor absoluto menor do que um (é de notar que, tal como vimos na demonstração

da Proposição 7, os valores próprios de $J_2(\gamma_2, \gamma_1)$ são exatamente os mesmos que os de $J_2(\gamma_1, \gamma_2)$. Tal como fizemos relativamente às janelas-de-período-2-sincronizadas-desfasadas do Acoplamento Linear Simétrico, consideramos, os Acoplamentos Simétrico Passado da logística e da tenda:

- Acoplamento Simétrico Passado da logística:

Os valores γ_1 e γ_2 da trajetória periódica de período-2, (γ_1, γ_2) , que o sistema dinâmico livre da logística apresenta são $\gamma_1 \simeq 0.345$ e $\gamma_2 \simeq 0.904$, a que corresponde $J_2(\gamma_1, \gamma_2) \simeq \begin{bmatrix} -3c^2 + 8c - 4 & -6.472 \cdot c(1 - c) \\ 2.472 \cdot c(1 - c) & -3c^2 + 8c - 4 \end{bmatrix}$, cujos módulos dos valores próprios são menores do que um para valores da constante-força-de-acoplamento superiores a $c \simeq 0.600$, i.e., $JP2SD \simeq]0.600, 1[$.

- Acoplamento Simétrico Passado da tenda:

O sistema dinâmico livre da tenda apresenta a trajetória periódica de período-2 $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$, a que corresponde $J_2(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}) = \begin{bmatrix} -3c^2 + 8c - 4 & -4c + 4c^2 \\ 4c - 4c^2 & -3c^2 + 8c - 4 \end{bmatrix}$, cujos módulos dos valores próprios são menores do que um para valores da constante-força-de-acoplamento superiores a $c \simeq 0.600$, i.e., $JP2SD \simeq]0.600, 1[$.

Estes resultados confirmam as janelas-de-período-2-sincronizadas-desfasadas que a abordagem numérica proposta na secção 3.1 fornece. Com efeito, essa abordagem dá origem aos gráficos das iteradas $x(t)$ em função de c apresentados na figura 3.16. A existência de trajetórias que, perto de $c = 1$, "sujam" o comportamento periódico do Acoplamento Simétrico Passado denunciam que aí a bacia de atração das soluções periódicas exponencialmente estáveis é menos extensa.

Analisemos agora o comportamento do Acoplamento Simétrico Passado no que diz respeito aos seus pontos fixos. Tendo em conta, que os pontos fixos (x_0, y_0) deste

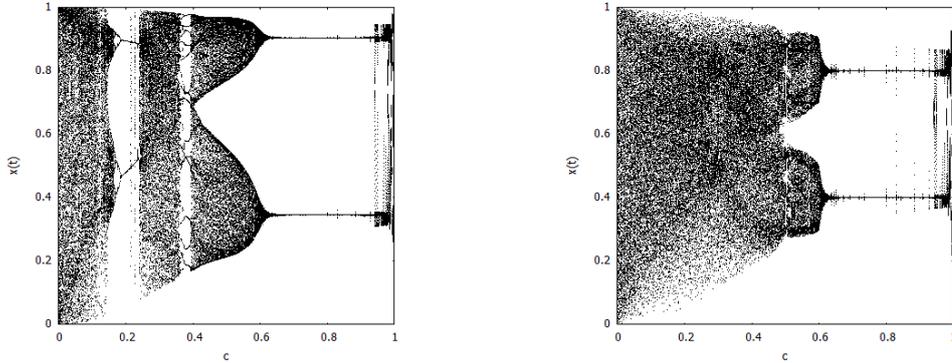


Figura 3.16: Gráficos das iteradas $x(t)$ em função de c para o ASP da logística (à esquerda) e da tenda (à direita).

acoplamento satisfazem as seguintes equações

$$\begin{cases} x_0 = (1 - c) \cdot f(x_0) + c \cdot y_0 \\ y_0 = c \cdot x_0 + (1 - c) \cdot f(y_0) \end{cases}$$

e que somando termo a termo se obtém

$$x_0 + y_0 = (1 - c) \cdot [f(x_0) + f(y_0)] + c \cdot (x_0 + y_0) \Leftrightarrow x_0 + y_0 = f(x_0) + f(y_0),$$

concluimos que a equação que define a linha-de-ponto-fixo para um Acoplamento Simétrico Passado é igual a (3.8), que define a correspondente linha para um Acoplamento Linear Simétrico, i.e., para o Acoplamento Linear Simétrico que utiliza a mesma dinâmica livre. No entanto, o valor da constante-força-de-acoplamento, c , associado a cada ponto (x_0, y_0) dessa equação para o Acoplamento Simétrico Passado é diferente do correspondente valor para o Acoplamento Linear Simétrico. Com efeito, em vez de (3.9), tem-se agora

$$c = \frac{x_0 - f(x_0)}{y_0 - f(x_0)} = \frac{y_0 - f(y_0)}{x_0 - f(y_0)}$$

Calculando estes valores de c para cada ponto (x_0, y_0) da referida equação, verificamos que, quer para a logística quer para a tenda, nenhum deles pertence a $[0,1[$, pelo que as linhas-de-ponto-fixo do Acoplamento Simétrico Passado da logística e da tenda correspondem a uma situação degenerada num ponto, o ponto $(x_0, y_0) = (\gamma_0, \gamma_0)$, com $\gamma_0 = f(\gamma_0)$, sendo pois vazias as respetivas janelas-de-ponto-fixo.

É de notar, no entanto, que os gráficos da figura 3.16 mostram claramente que a janela-não-caótica do Acoplamento Simétrico Passado da logística inclui pontos que não pertencem à janela-de-ponto-fixo (que é vazia) nem à janela-de-período-2-sincronizada-desfasada. Com efeito, perto de $c = 0.2$ e de $c = 0.37$ o acoplamento apresenta um comportamento não caótico. A figura 3.17, ao mostrar as iteradas $x(t)$ e $y(t)$ para $c = 0.2$

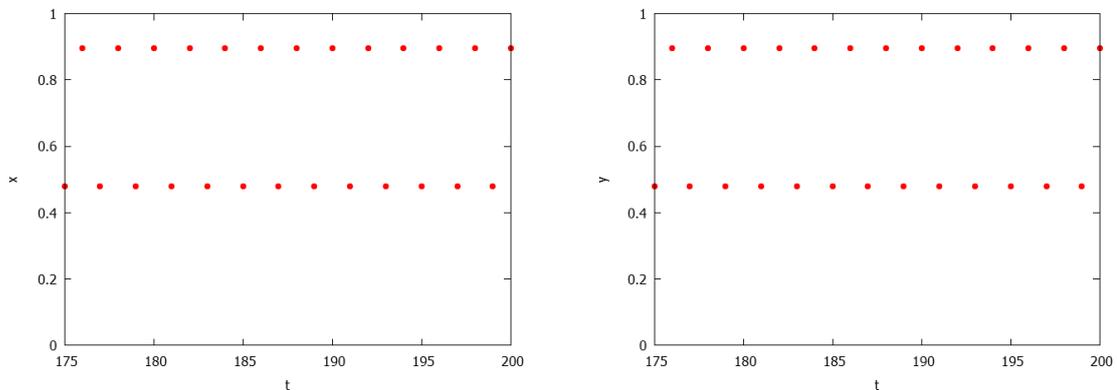


Figura 3.17: Gráficos das iteradas $x(t)$ (à esquerda) e $y(t)$ (à direita) para o ASP da logística com $c = 0.2$.

e para valores t suficientemente elevados (nomeadamente entre $t = 175$ e $t = 200$), esclarece que o acoplamento tem para esse valor da constante-força-de-acoplamento um comportamento periódico de período-2 mas que corresponde a uma sincronização completa e não a uma sincronização desfasada. Na secção 4.1.3, analisamos a sincronização completa do Acoplamento Simétrico Passado e teremos, então, oportunidade de prestar atenção a esta situação.

3.4 Janela-de-sincronização-completa de um ALS

Analisamos agora aquela que, na figura 3.1, designámos por zona 2 e que identificámos como correspondendo à janela-de-sincronização-completa. Começemos por precisar a definição de sincronização completa em conformidade com a definição de janela-de-sincronização-completa apresentada na secção 3.1.

Definição 15. *Dizemos que ocorre uma sincronização completa no acoplamento- c (3.2), se existir uma função $s(t)$ tal que $(x(t),y(t)) = (s(t),s(t))$ é uma solução exponencialmente estável de (3.2). Dizemos então que os sistemas acoplados x e y sincronizam completamente.*

Num Acoplamento Linear Simétrico, qualquer que seja a constante-força-de-acoplamento, c , o sistema de equações (3.4) admite a solução $(x(t),y(t)) = (s(t),s(t))$, sendo $s(t)$ uma função que satisfaça $s(t+1) = f(s(t))$. No entanto, um determinado valor de c só pertence à janela-de-sincronização-completa se $(x(t),y(t)) = (s(t),s(t))$ for uma solução exponencialmente estável de (3.4). No final da secção 3.1, vimos que para um Acoplamento Linear Simétrico esta janela nunca é vazia, visto que inclui sempre o valor $\frac{1}{2}$.

A visualização da janela-de-sincronização-completa que se obtém usando a abordagem numérica descrita nessa secção 3.1 torna-se mais evidente se construirmos o gráfico das iteradas $y(t) - x(t)$ em função de c : a janela-de-sincronização-completa incluirá os valores de c para os quais a imagem é nula (pois para tais valores de c tem-se que $y(t) \simeq x(t)$, para valores de t suficientemente elevados). Na figura 3.18 apresentamos tais gráficos para o Acoplamento Linear Simétrico das quatro dinâmicas livres a que temos recorrido: a da logística, a da tenda, a da cúbica e a da serra. Verificamos que a sincronização completa acontece não só para $c = \frac{1}{2}$ mas também para outros valores

num conjunto centrado em $c = \frac{1}{2}$.

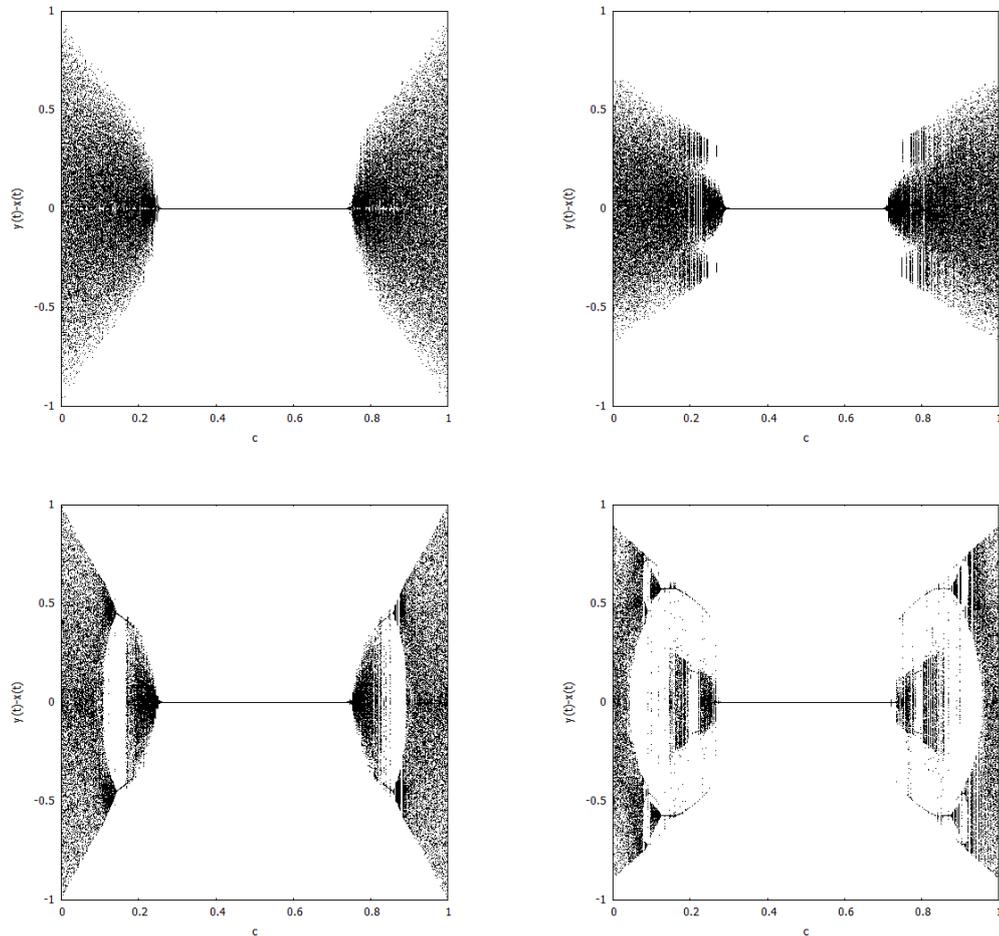


Figura 3.18: Gráficos das iteradas $y(t) - x(t)$ em função de c para o ALS de tenda (em cima, à esquerda), da logística (em baixo, à esquerda), da serra (em cima, à direita) e da cúbica (em baixo, à direita).

É possível determinar analiticamente a janela-de-sincronização-completa, obtendo-se o resultado seguinte

Proposição 8. *A janela-de-sincronização-completa de um Acoplamento Linear Simétrico (3.4) é, q.t.p.,*

$$JSC = \left] \frac{1 - e^{-\mu_0}}{2}, \frac{1 + e^{-\mu_0}}{2} \right[,$$

onde μ_0 é o expoente de Lyapunov de f .

Demonstração 8. *Esta proposição corresponde à particularização para o Acoplamento Linear Simétrico da Proposição 10, que apresentaremos mais adiante, pelo que esta demonstração resume-se a considerarmos o resultado que essa outra proposição fornece para $F_2 = -F_1 = G_1 = -G_2 = f$.*

De facto, sendo $F_2 = -F_1 = G_1 = f$, a expressão de μ_2 da Proposição 10 é dada por $\mu_2 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' - cf' - cf'|_{s(t)}$, com $s(t+1) = f(s(t))$, pelo que

$$\begin{aligned} \mu_2 < 0 &\Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' \cdot (1 - 2c)|_{s(t)} < 0 \Leftrightarrow \mu_0 + \ln |1 - 2c| < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - e^{-\mu_0}}{2} < c < \frac{1 + e^{-\mu_0}}{2} \end{aligned}$$

A Proposição 10 determina, então, que $JSC =]\frac{1-e^{-\mu_0}}{2}, \frac{1+e^{-\mu_0}}{2}[$, *q. t. p.* □

Tendo em conta os valores dos expoentes de Lyapunov da logística, tenda, cúbica e serra obtidos na secção 2.3 ($\ln 2$, $\ln 2$, $\ln 2.4$ e 0.715 , respetivamente), a proposição anterior fornece as seguintes janelas-de-sincronização-completa dos Acoplamento Linear Simétrico de tais aplicações:

- tenda e logística: $JSC =]0.25, 0.75[$
- serra: $JSC =]0.291(6), 0.708(3)[$
- cúbica: $JSC \simeq]0.2557, 0.7443[$

Estes resultados confirmam os que foram obtidos utilizando a abordagem numérica que deu origem aos gráficos da figura 3.18. Tal facto indica que as soluções completamente sincronizadas exponencialmente estáveis destes acoplamentos têm bacias de atração suficientemente extensas para que uma escolha aleatória de valores iniciais não tenha mascarado as janelas-de-sincronização-completa que obtivemos numericamente.

Capítulo 4

Sincronização

Neste capítulo iremos analisar alguns aspetos da sincronização no sentido de generalizar a abordagem feita no capítulo anterior. A generalização seguirá três direções distintas:

- considerarmos outros tipos de acoplamentos de sistemas dinâmicos caóticos que não sejam o Acoplamento Linear Simétrico
- considerarmos outros tipos de sincronização que não seja a sincronização completa
- considerarmos interações lineares entre mais do que dois sistemas dinâmicos caóticos, i.e., estender o conceito de sincronização completa a uma rede de sistemas dinâmicos caóticos

Tal como no capítulo anterior, também neste, f e g designam aplicações caóticas.

4.1 Sincronização completa

4.1.1 Janelas-de-sincronização-completa

Na secção 3.4 analisámos a sincronização completa de um Acoplamento Linear Simétrico. Vamos, agora, estender essa análise a outros tipos de acoplamentos [LoFer-Gra14b]. Começemos, então, por introduzir a seguinte definição

Definição 16. Dizemos que um acoplamento (3.2) admite sincronização completa se, para cada valor da constante força-de-acoplamento, c , existir uma função $s(t)$, tal que $(x(t), y(t)) = (s(t), s(t))$ é solução de (3.2). Se $s(t)$ corresponder, para cada valor de c , a um sistema dinâmico com comportamento caótico dizemos que a sincronização completa tem comportamento caótico.

É de notar que o Acoplamento Linear Simétrico admite sincronização completa com comportamento caótico, pois sendo $s(t)$ solução de $x(t+1) = f(x(t))$, então $(x(t), y(t)) = (s(t), s(t))$ é solução de (3.4), qualquer que seja a constante-força-de-acoplamento, c .

Para que outros acoplamentos (3.2) admitam sincronização completa será necessário que as funções f, g, F_1, F_2, G_1 e G_2 que os definem obedeçam a determinadas condições, tal como a proposição seguinte esclarece.

Proposição 9. O acoplamento (3.2) admite sincronização completa com comportamento caótico se e só se $f = g, F_1 + F_2 = G_1 + G_2$ e $\mu_1 > 0, \forall c$, com

$$\mu_1 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' + c(F_1' + F_2')|_{s(t)}$$

Se μ_1 não for positivo o acoplamento admite sincronização completa mas não necessariamente com comportamento caótico.

Demonstração 9. Se o acoplamento (3.2) admite sincronização completa então existe uma função $s(t)$ tal que $(x(t), y(t)) = (s(t), s(t))$ é solução de (3.2), i.e.,

$$\begin{cases} s(t+1) = f(s(t)) + c \cdot [F_1(s(t)) + F_2(s(t))] \\ s(t+1) = g(s(t)) + c \cdot [G_1(s(t)) + G_2(s(t))] \end{cases}$$

Subtraindo, termo a termo, uma equação da outra obtém-se

$$0 = f(s(t)) + c \cdot [F_1(s(t)) + F_2(s(t))] - g(s(t)) - c \cdot [G_1(s(t)) + G_2(s(t))]$$

\Leftrightarrow

$$f(s(t)) - g(s(t)) = c \cdot [G_1(s(t)) + G_2(s(t)) - F_1(s(t)) - F_2(s(t))]$$

Como $s(t)$ é uma qualquer solução de $s(t+1) = f(s(t)) + c \cdot [F_1(s(t)) + F_2(s(t))]$ que tem, por hipótese, comportamento caótico, então para que a igualdade anterior se verifique para todo c é necessário que $f - g = 0$ e $G_1 + G_2 - F_1 - F_2 = 0$, ou, de forma equivalente, que $f = g$ e $F_1 + F_2 = G_1 + G_2$. Para além disso, visto que o sistema dinâmico

$$s(t+1) = f(s(t)) + c \cdot [F_1(s(t)) + F_2(s(t))]$$

\Leftrightarrow

$$s(t+1) = (f + c[F_1 + F_2])(s(t))$$

tem comportamento caótico, então o seu expoente de Lyapunov, μ_1 , é positivo, i.e.,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' + c(F_1' + F_2')|_{s(t)} > 0.$$

Reciprocamente, se $f = g$ e $F_1 + F_2 = G_1 + G_2$, tem-se então, para todos os valores de c , que $(x(t), y(t)) = (s(t), s(t))$ é solução de (3.2), sendo $s(t)$ uma qualquer solução de $s(t+1) = (f + c[F_1 + F_2])(s(t))$. Para além disso, o comportamento só será caótico se o expoente de Lyapunov, μ_1 , deste sistema dinâmico for positivo, i.e se

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' + c(F_1' + F_2')|_{s(t)} > 0. \quad \square$$

Esta proposição determina, que um acoplamento que admite sincronização completa

com comportamento caótico é do seguinte tipo

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) + c \cdot [F_1(x(t)) + F_2(y(t))] \\ y(t+1) = f(y(t)) + c \cdot [G_1(x(t)) + (F_1 + F_2 - G_1)(y(t))] \end{cases} \quad (4.1)$$

O Acoplamento Linear Simétrico corresponde a $F_2 = -F_1 = G_1 = -G_2 = g = f$ e satisfaz as condições da Proposição 9, uma vez que $\mu_1 = \mu_0$, sendo μ_0 o expoente de Lyapunov dos sistemas dinâmicos livres, i.e., dos sistemas dinâmicos descritos por f . Com efeito, $\mu_0 > 0$, já que supomos que os sistemas dinâmicos livres têm um comportamento caótico. O Acoplamento Linear Simétrico admite, pois, sincronização completa com comportamento caótico, cuja manifestação tivemos já oportunidade de analisar na secção 3.4. O mesmo já não acontece se se tratar de um Acoplamento Linear de sistemas dinâmicos não idênticos, já que não se verifica sequer $f = g$.

Na secção 3.3.2 definimos um outro tipo de acoplamento, o Acoplamento Simétrico Passado ($f = g = -F_1 = -G_2$ e $F_2 = G_1 = id$). Este acoplamento verifica $f = g$ e $F_1 + F_2 = G_1 + G_2$, pelo que admite sincronização completa. No entanto, não é garantido que $\mu_1 > 0, \forall c$, pelo que a sincronização completa poderá não ter comportamento caótico. Na secção 4.1.3 iremos considerar exemplos deste acoplamento, prestando atenção à questão do comportamento caótico.

Se considerarmos $F_1 = F_2 = 0$ e $G_1 = -G_2 = g = f$, obtemos um acoplamento que admite também sincronização completa. Trata-se do acoplamento

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) \\ y(t+1) = c \cdot f(x(t)) + (1-c) \cdot f(y(t)) \end{cases}$$

que designamos por Acoplamento Linear Comandado (ALC), visto que um dos siste-

mas dinâmicos caóticos, $x(t)$, se mantém livre, pelo que, em situação de sincronização completa, comanda o outro, $y(t)$. A sincronização completa que um tal acoplamento admite tem comportamento caótico pois

$$\mu_1 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' + c(F'_1 + F'_2)|_{s(t)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f'|_{s(t)} = \mu_0$$

e o expoente de Lyapunov dos sistemas dinâmicos livres, μ_0 , é positivo, tendo em conta que estamos a considerar acoplamentos de sistemas dinâmicos caóticos. É de notar que, visto que x mantém uma dinâmica livre, e, como tal, um comportamento caótico, a janela-não-caótica deste acoplamento é obviamente vazia.

Mesmo que um acoplamento admita sincronização completa só alguns valores da constante-força-de-acoplamento admitirão soluções completamente sincronizadas que sejam exponencialmente estáveis. É, pois, importante determinar esses valores de c , i.e., é importante determinar a janela-de-sincronização-completa dos acoplamentos (4.1). Com efeito, enquanto a janela-de-sincronização-completa do Acoplamento Linear Simétrico obtida na secção 3.4 foi já tratada por muitos autores (por exemplo [FenJoQi07], [LiCh03], [RanDin02]), poucos resultados têm sido obtidos para outros acoplamentos [PiRoKur01], [Nolte15].

Proposição 10. *A janela-de-sincronização-completa do acoplamento (4.1) é, q.t.p.,*

$$JSC = \{c \in [0,1] : \mu_2 < 0\}$$

com $\mu_2 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' + c(F'_1 - G'_1)|_{s(t)}$ e $s(t+1) = [f + c(F_1 + F_2)](s(t))$.

Demonstração 10. *Considerando $u = y - x$, ou, de forma equivalente, $y = x + u$,*

tem-se, em torno da solução sincronizada completa a que corresponde $u(t) = 0$,

$$\begin{aligned}
 u(t+1) &= y(t+1) - x(t+1) = \\
 &= f(x(t) + u(t)) + c \cdot [G_1(x(t)) + (F_1 + F_2 - G_1)(x(t) + u(t))] - \\
 &\quad - f(x(t)) - c \cdot [F_1(x(t)) + F_2(x(t) + u(t))] \simeq \\
 &\simeq f(x(t)) + f'(x(t)) \cdot u(t) + \\
 &\quad + c \cdot [G_1(x(t)) + (F_1 + F_2 - G_1)(x(t)) + (F'_1 + F'_2 - G'_1)(x(t)) \cdot u(t)] - \\
 &\quad - f(x(t)) - c \cdot [F_1(x(t)) + F_2(x(t)) + F'_2(x(t)) \cdot u(t)] = \\
 &= f'(x(t)) \cdot u(t) + c \cdot (F'_1 - G'_1)(x(t)) \cdot u(t)
 \end{aligned}$$

A linearização da evolução $u(t)$ é então dada por

$$u(t+1) = [f' + c(F'_1 - G'_1)]_{x(t)} u(t)$$

Tendo em conta que quando os sistemas dinâmicos sincronizam completamente se tem $x(t) = y(t) = s(t)$ com $s(t+1) = [f + c(F_1 + F_2)](s(t))$, concluímos que se

$$\mu_2 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' + c(F'_1 - G'_1)|_{s(t)} < 0,$$

com $s(t+1) = [f + c(F_1 + F_2)](s(t))$, então $u(t) = 0$ é uma solução exponencialmente estável da equação anterior, i.e., $(x(t), y(t)) = (s(t), s(t))$ é uma solução exponencialmente estável de (4.1) e o correspondente valor de c pertence à janela-de-sincronização-completa. Se, em vez disso, $\mu_2 > 0$, então $u(t) = 0$ é uma solução instável da equação anterior, i.e., $(x(t), y(t)) = (s(t), s(t))$ é uma solução instável de (4.1) e o correspondente valor de c não pertence à janela-de-sincronização-completa. Concluímos, pois, que $JSC = \{c \in [0,1] : \mu_2 < 0\}$, q.t.p.. □

Nota: quer nesta proposição, quer nas outras em que obtemos janelas de sincronização, utilizamos o abuso de linguagem que consiste em dizer que $J = \{c \in [0,1] : \mu < 0\}$, q.t.p., quando na verdade $J = \{c \in [0,1] : \mu < 0\}$, exceto eventualmente por conter alguns elementos de $\{c \in [0,1] : \mu = 0\}$.

A aplicação da Proposição 10 ao Acoplamento Linear Simétrico deu origem à Proposição 8. Nas duas subsecções seguintes aplicamo-la aos outros dois acoplamentos que já definimos e que admitem sincronização completa, nomeadamente ao Acoplamento Linear Comandado e ao Acoplamento Simétrico Passado.

4.1.2 Exemplos de janelas-de-sincronização-completa do ALC

Consideremos o Acoplamento Linear Comandado das quatro dinâmicas livres que temos utilizado: a tenda, a logística, a serra e a cúbica. Utilizando a abordagem numérica descrita na secção 3.1, podemos visualizar as correspondentes janelas-de-sincronização-completa do Acoplamento Linear Comandado construindo os gráficos de $y(t) - x(t)$ em função de c . Apresentamo-los na figura 4.1, onde é evidente que todas as dinâmicas consideradas apresentam janelas-de-sincronização-completa não vazias.

A aplicação da Proposição 10 ao Acoplamento Linear Comandado permite calcular analiticamente as janelas-de-sincronização-completa. Visto que $F_1 = F_2 = 0$ e $G_1 = f$, obtemos

$$\mu_2 < 0 \Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' - cf'|_{s(t)} < 0,$$

com $s(t+1) = f(s(t))$, i.e.,

$$\mu_2 < 0 \Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \left[\ln |f'|_{s(t)} + \ln |1 - c| \right] < 0 \Leftrightarrow \mu_0 + \ln |1 - c| < 0 \Leftrightarrow$$

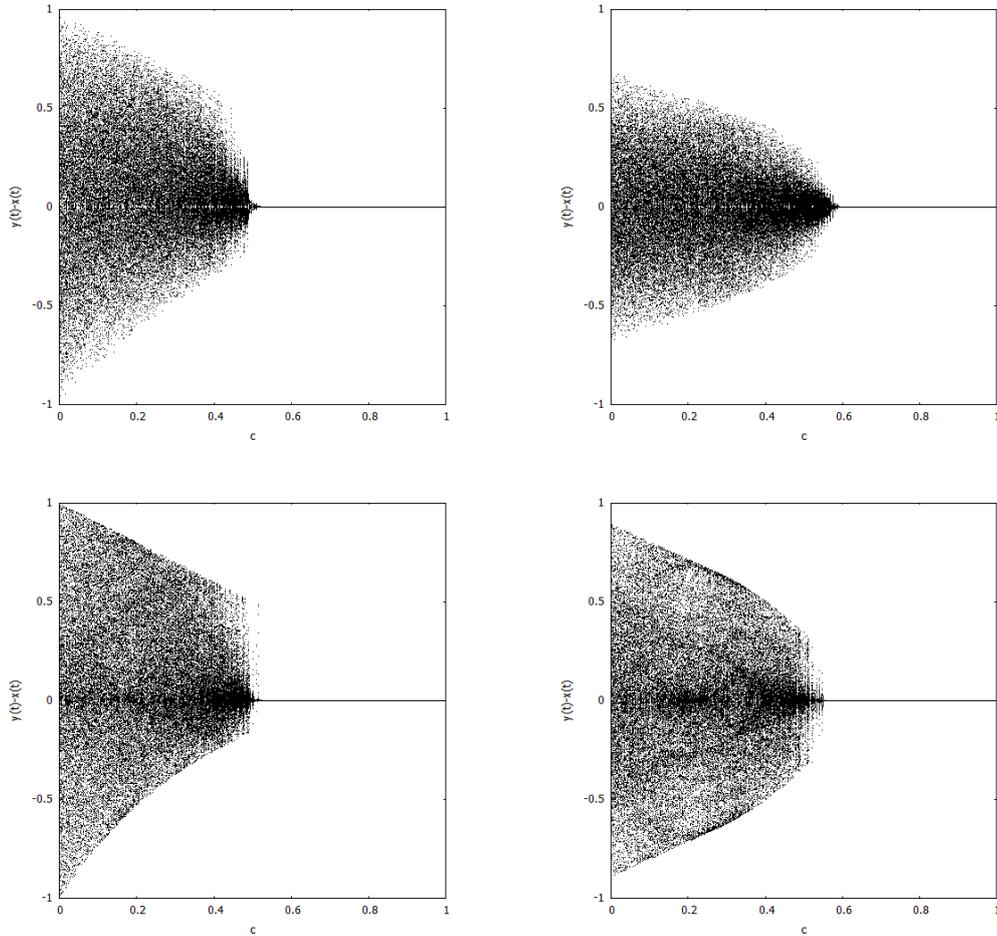


Figura 4.1: Gráficos das iteradas $y(t) - x(t)$ em função de c para o ALC da tenda (em cima, à esquerda), logística (em baixo, à esquerda), serra (em cima, à direita) e cúbica (em baixo, à direita)

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\mu_0} < c < 1 + e^{-\mu_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow JSC =]1 - e^{-\mu_0}, 1]$$

Tendo em conta os valores dos expoentes de Lyapunov da tenda, da logística, da serra e da cúbica obtidos na secção 2.3 ($\ln 2$, $\ln 2$, $\ln 2.4$ e $0,715$, respetivamente), a Proposição 10 fornece as seguintes janelas-de-sincronização-completa dos Acoplamento Linear Simétrico de tais aplicações:

- tenda e logística: $JSC =]0.5, 1]$

· serra: $JSC =]0.58(3),1]$

· cúbica: $JSC \simeq]0.511,1]$

Estes resultados confirmam os que foram obtidos utilizando a abordagem numérica que deu origem aos gráficos da figura 4.1. Tal facto indica que as soluções completamente sincronizadas exponencialmente estáveis destes acoplamentos têm bacias de atração suficientemente extensas para que uma escolha aleatória de valores iniciais não tenha mascarado as janelas-de-sincronização-completa que obtivemos numericamente.

4.1.3 Exemplos de janelas-de-sincronização-completa do ASP

Consideremos o Acoplamento Simétrico Passado das mesmas quatro dinâmicas livres da secção anterior. Utilizando a mesma abordagem numérica que aí seguimos obtemos os gráficos de $y(t) - x(t)$ em função de c que apresentamos na figura 4.2. Pela observação desses gráficos só a logística e a cúbica apresentam, de forma evidente, janelas-de-sincronização-completa não vazias. Vejamos então o resultado que a abordagem analítica determina:

A aplicação da Proposição 10 ao Acoplamento Simétrico Passado, tendo em conta que $F_1 = -f$ e $F_2 = G_1 = id$, determina que

$$\begin{aligned} \mu_2 < 0 &\Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |(f' - cf' - c)|_{s(t)} < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow JSC &= \left\{ c \in [0,1] : \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |(1-c)f' - c|_{s(t)} < 0 \right\}, \end{aligned}$$

com $s(t+1) = (1-c)f(s(t)) + cs(t)$.

Contrariamente ao que aconteceu com o Acoplamento Linear Simétrico e com o Acoplamento Linear Comandado, o estabelecimento de uma relação simples entre μ_2 e μ_0

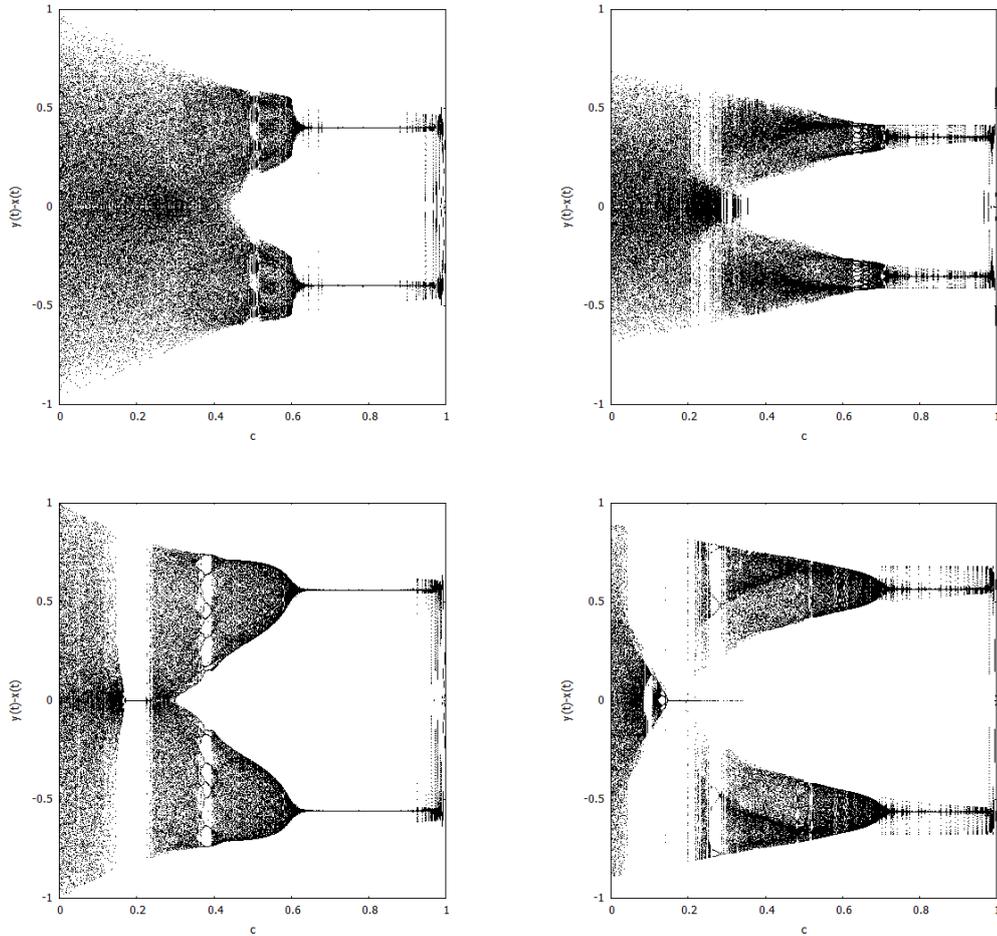


Figura 4.2: Gráficos das iteradas $y(t) - x(t)$ em função de c para o ASP da tenda (em cima, à esquerda), logística (em baixo, à esquerda), serra (em cima, à direita) e cúbica (em baixo, à direita)

não é agora possível. Podemos, no entanto, para cada uma das dinâmicas livres conside-

radas resolver numericamente $\mu_2 < 0$, i.e., podemos calcular $\mu_2 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |(1-c)f' - c|_{s(t)}$

para os mesmos valores de c que temos utilizado nas abordagens numéricas ($c = \frac{i}{1000}$,

com $i = 0, 1, \dots, 1000$), selecionando aqueles para os quais $\mu_2 < 0$. Procedendo desta

forma, obtemos as seguintes janelas-de-sincronização-completa:

- para a tenda e para a serra: $JSC = \emptyset$
- para a logística: $JSC \simeq]0.051, 0.056[\cup]0.171, 0.240[$
- para a cúbica: $JSC \simeq]0.002, 0.005[\cup]0.113, 0.120[\cup]0.145, 0.360[$

Estes resultados confirmam a conclusão que a figura 4.2 indicia a propósito das janelas-de-sincronização-completa: janelas-de-sincronização-completa vazias para a tenda e para a serra, e não-vazias para a logística e para a cúbica. Em relação a estas últimas, e com o propósito de obter numericamente com uma maior precisão as janelas-de-sincronização-completa, fazemos uma pormenorização dos correspondentes gráficos apresentados na figura 4.2. Consideramos, então, valores de c entre 0 e 0.4, nomeadamente $c = \frac{i}{1000} \cdot 0.4$, com $i = 0, 1, \dots, 1000$, e obtemos os gráficos apresentados na figura 4.3 que, de facto, permitem visualizar melhor as janelas-de-sincronização-completa. É

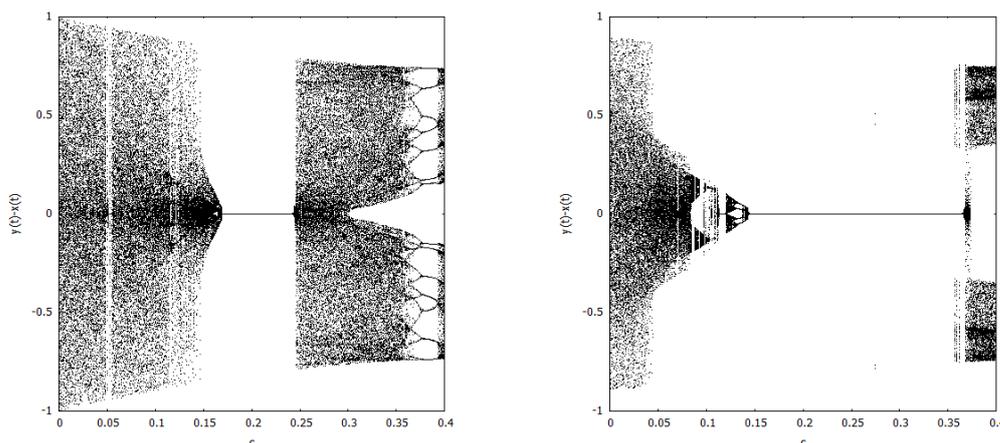


Figura 4.3: Gráficos das iteradas $y(t) - x(t)$ em função de c para o ASP da logística (à esquerda) e cúbica (à direita)

conveniente referir que obtivemos estes gráficos considerando valores iniciais aleatórios mas suficientemente próximos de uma solução completamente sincronizada, nomeadamente $|y_0 - x_0| < 10^{-5}$. Fizemo-lo visto que alguns dos valores das janelas-de-sincronização-completa que a resolução numérica de $\mu_2 < 0$ indica como pertencentes à janela-de-sincronização-completa surgiam mascarados na figura 4.2 por trajetórias correspondentes a valores iniciais fora da bacia de atração da solução completamente sincronizada. Com efeito, ao utilizarmos valores iniciais próximos da solução comple-

tamente sincronizada, tais trajetórias desaparecem e já não surgem na figura 4.3.

Analiseemos agora se a sincronização completa dos Acoplamentos Simétrico Passado da logística e da cúbica (que verificámos terem janelas-de-sincronização-completa não-vazias) tem comportamento caótico. Como já referimos na secção 4.1.1, contrariamente ao que acontece no Acoplamento Linear Simétrico e no Acoplamento Linear Comandado, em que a sincronização completa tem garantidamente comportamento caótico, no Acoplamento Simétrico Passado isso não acontece. A figura 4.4 ao mostrar os gráficos de $x(t)$ em função de c para o Acoplamento Simétrico Passado da logística e da cúbica em torno das suas janelas-de-sincronização-completa, nomeadamente para $c \in [0,0.4]$ (escolhendo, tal como nos gráficos da figura 4.3, $c = \frac{i}{1000} \cdot 0.4$, com $i = 0,1,\dots,1000$) e também, utilizando uma pormenorização maior, para $c \in [0,0.15]$ (escolhendo $c = \frac{i}{1000} \cdot 0.15$, com $i = 0,1,\dots,1000$), evidencia que estes Acoplamento Simétrico Passado não têm comportamento caótico nas janelas-de-sincronização-completa. De facto, os valores de c da janela-de-sincronização-completa a que corresponde um comportamento caótico são aqueles para os quais $\mu_1 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' + c(F'_1 + F'_2)|_{s(t)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |(1-c)f' + c|_{s(t)}$ é positivo, pois no Acoplamento Simétrico Passado a função $s(t)$ correspondente à solução completamente sincronizada $(x(t),y(t)) = (s(t),s(t))$ satisfaz $s(t+1) = (1-c) \cdot f(s(t)) + c \cdot s(t)$. Na figura 4.5 mostramos os gráficos de μ_1 e μ_2 para a logística e para a cúbica, sendo possível verificar que, para estas dinâmicas, os valores de c para os quais $\mu_2 < 0$, i.e., aqueles que pertencem à janela-de-sincronização-completa, correspondem a $\mu_1 < 0$. Tal facto determina o comportamento não caótico das janelas-de-sincronização-completa.

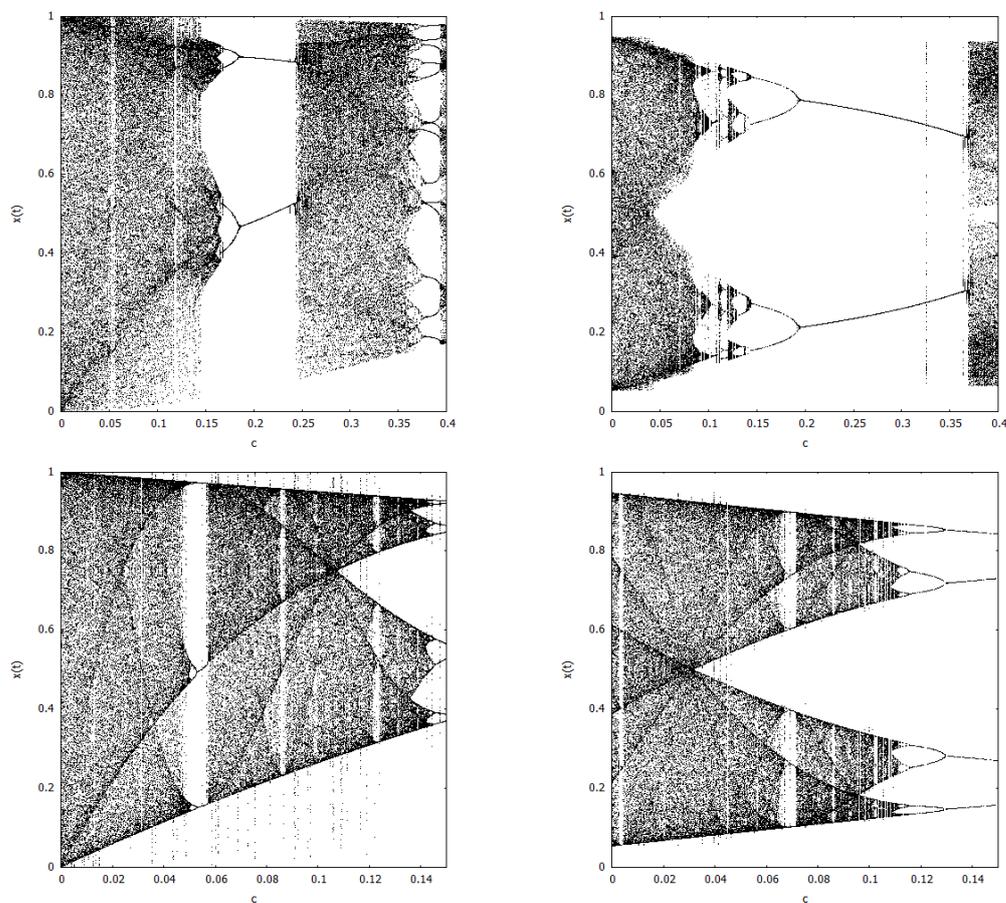


Figura 4.4: Gráficos das iteradas $x(t)$ em função de c para o ASP da logística (à esquerda) e cúbica (à direita)

4.2 Outros tipos de sincronização

Vamos agora considerar outros tipos de sincronização que não a sincronização completa. Começamos por analisar na secção 4.2.1 a sincronização desfasada, definindo de seguida, na secção 4.2.2, a sincronização generalizada que verificaremos contemplar a sincronização completa e a sincronização desfasada como casos particulares.

4.2.1 Sincronização desfasada

À semelhança do que se passa na sincronização completa, em situação de sincronização desfasada, as iteradas dos sistemas dinâmicos acoplados assumem os mesmos valores.

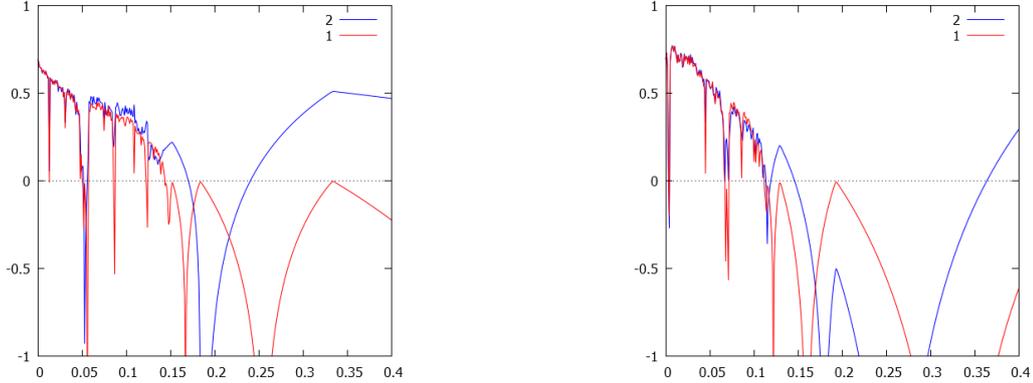


Figura 4.5: Gráficos de μ_1 e μ_2 em função de c para o ASP da logística (à esquerda) e cúbica (à direita)

Fazem-no, no entanto, contrariamente ao que acontece na sincronização completa, em instantes t diferentes, tal como estabelece a definição seguinte.

Definição 17. Dizemos que um acoplamento (3.2) admite sincronização desfasada de Δt (com $\Delta t \in \mathbb{N}$) se, para cada valor da constante força-de-acoplamento, c , existir uma função $s(t)$, tal que $(x(t), y(t)) = (s(t + \Delta t), s(t))$ é solução de (3.2). Se $s(t)$ corresponder, para cada valor de c , a um sistema dinâmico com comportamento caótico, dizemos que a sincronização desfasada tem comportamento caótico.

Se as funções f , g , F_1 , F_2 , G_1 e G_2 obedecerem a determinadas condições, é possível garantir que o acoplamento (3.2) admite sincronização desfasada, tal como a proposição seguinte dá conta.

Proposição 11. Se $f = g$, $F_1 \circ f^{(\Delta t)} + F_2 = 0$ e $G_1 \circ f^{(\Delta t)} + G_2 = 0$, com $f^{(\Delta t)} = f \circ f \circ \dots \circ f$ (Δt vezes), então o acoplamento (3.2) admite sincronização desfasada de Δt com comportamento caótico, correspondendo a solução sincronizada desfasada de Δt a $y(t + 1) = f(y(t))$

Demonstração 11. Tendo em conta a Proposição 13, que apresentaremos mais adiante, e que a sincronização desfasada de Δt corresponde à R -sincronização, que entre-

tanto definiremos, para $R = f^{(\Delta t)}$, esta demonstração corresponde à particularização da Proposição 13 para $R = f^{(\Delta t)}$. Com efeito, se $f = g$, então $f^{(\Delta t)} \circ f = f^{(\Delta t)} \circ g \Leftrightarrow f \circ f^{(\Delta t)} = f^{(\Delta t)} \circ g \Leftrightarrow f \circ R = R \circ g$, que é uma das condições da hipótese da Proposição 13, sendo as restantes condições da hipótese da atual proposição exatamente as mesmas que as restantes condições da hipótese da Proposição 13. \square

Esta proposição determina, então, que um acoplamento do tipo

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) + c \cdot [F_1(x(t)) - F_1(f^{(\Delta t)}(y(t)))] \\ y(t+1) = f(y(t)) + c \cdot [G_1(x(t)) - G_1(f^{(\Delta t)}(y(t)))] \end{cases} \quad (4.2)$$

admite sincronização desfasada de Δt com comportamento caótico. Nenhum dos acoplamentos até agora considerados são deste tipo. Consideremos, então, quatro exemplos de acoplamentos que o sejam e que admitirão, pois, sincronização desfasada de Δt com comportamento caótico:

· Acoplamento Comandado pelo Passado (ACP), correspondente a escolhermos $\Delta t = 1$, $F_1 = 0$ e $G_1 = id$:

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) \\ y(t+1) = f(y(t)) + c \cdot [x(t) - f(y(t))] \end{cases}$$

(Nota: a designação deste acoplamento decorre de se ter, na situação de sincronização desfasada, $y(t+1) = x(t)$, sendo x livre, i.e., quando x e y sincronizam, y é comandado pelo passado de x , que é livre)

· Acoplamento Comandado pelo Futuro (ACF), correspondente a escolhermos $\Delta t =$

1, $F_1 = -f$ e $G_1 = 0$:

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) + c \cdot [-f(x(t)) + f(f(y(t)))] \\ y(t+1) = f(y(t)) \end{cases}$$

(Nota: a designação deste acoplamento decorre de se ter, na situação de sincronização desfasada, $x(t) = y(t+1)$, sendo y livre, i.e., quando x e y sincronizam, x é comandado pelo futuro de y , que é livre)

· Acoplamento Comandado pelo Pós-Futuro (ACPF), correspondente a escolhermos $\Delta t = 2$, $F_1 = -f$ e $G_1 = 0$:

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) + c \cdot [-f(x(t)) + f(f(f(y(t))))] \\ y(t+1) = f(y(t)) \end{cases}$$

(Nota: a designação deste acoplamento decorre de se ter, na situação de sincronização desfasada, $x(t) = y(t+2)$, sendo y livre, i.e., quando x e y sincronizam, x é comandado pelo futuro do futuro de y , que é livre)

· Acoplamento Bidirecional Desfasado (ABD), correspondente a escolhermos $\Delta t = 1$, $F_1 = -f$ e $G_1 = id$:

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) + c \cdot [-f(x(t)) + f(f(y(t)))] \\ y(t+1) = f(y(t)) + c \cdot [x(t) - f(y(t))] \end{cases}$$

(Nota: a designação deste acoplamento decorre de se ter considerado, contrariamente aos restantes acoplamentos definidos nesta secção, que a interação estabelecida entre os sistemas dinâmicos acoplados é bidirecional, pelo que nenhum deles tem um comportamento livre)

Mesmo que um acoplamento admita sincronização desfasada pode acontecer que não exista nenhuma função $s(t)$ tal que $(x(t), y(t)) = (s(t + \Delta t), s(t))$ seja solução exponencialmente estável de alguns dos acoplamentos- c , ou mesmo de todos. Convém, então, introduzirmos as seguintes definições

Definição 18. Dizemos que ocorre sincronização desfasada de Δt no acoplamento- c (3.2) se existir uma função $s(t)$ tal que $(x(t), y(t)) = (s(t + \Delta t), s(t))$ é solução exponencialmente estável de (3.2). Dizemos então que y sincroniza com atraso de Δt em relação a x ou que x sincroniza com avanço de Δt em relação a y .

Definição 19. Para um acoplamento que admita uma sincronização desfasada de Δt , designamos por janela-de-sincronização-desfasada (JSD) o conjunto dos valores de c para os quais existe uma função $s(t)$, tal que $(x(t), y(t)) = (s(t + \Delta t), s(t))$ é solução exponencialmente estável de (3.2)

É possível obter analiticamente a janela-de-sincronização-desfasada do acoplamento (4.2), tal como a proposição seguinte dá conta.

Proposição 12. A janela-de-sincronização-desfasada do acoplamento (4.2) é, q.t.p.,

$$JSD = \{c \in [0, 1] : \mu_{sd} < 0\}$$

com

$$\mu_{sd} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln \left| f' \circ f^{(\Delta t)} + c \cdot \left[F'_1 \circ f^{(\Delta t)} - G'_1 \circ f^{(\Delta t)} \cdot \left(f^{(\Delta t)} \right)' \circ f \right] \right|_{s(t)}$$

e $s(t+1) = f(s(t))$.

Demonstração 12. Tendo em conta a Proposição 14, que apresentaremos mais adi-

ante, e que o acoplamento (4.2) e a janela-de-sincronização-desfasada correspondem, respectivamente, a (4.3) e à janela-de- R -sincronização, que entretanto definiremos, para $R = f^{(\Delta t)}$, esta demonstração resume-se ao caso particular da da Proposição 14 para $R = f^{(\Delta t)}$. \square

De seguida, aplicamos a proposição anterior aos quatro acoplamentos que definimos nesta secção (ACP, ACF, ACPF, ABD), procedendo de modo idêntico ao que fizemos na secção 3.4, i.e., considerando acoplamentos das mesmas quatro dinâmicas livres (tenda, logística, serra e cúbica), e obtendo para cada um deles os gráficos de $y(t + \Delta t) - x(t)$ em função de c que a abordagem numérica descrita na secção 3.1 fornece. As janelas-de-sincronização-desfasada que esses gráficos permitem visualizar são depois confirmadas analiticamente por utilização da Proposição 12.

Exemplos de janelas-de-sincronização-desfasada do ACP

Tendo em conta que o Acoplamento Comandado pelo Passado admite uma sincronização desfasada de 1, apresentamos na figura 4.6 os gráficos de $y(t + 1) - x(t)$ em função de c para os Acoplamentos Comandados pelo Passado das quatro dinâmicas livres consideradas (tenda, logística, serra e cúbica). É visível que todos eles apresentam janelas-de-sincronização-desfasada não vazias.

A aplicação da Proposição 12 ao Acoplamento Comandado pelo Passado permite calcular analiticamente as janelas-de-sincronização-desfasada. Visto que $\Delta t = 1$, $F_1 = 0$ e $G_1 = id$, obtemos:

$$\mu_{sd} < 0 \Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' - cf'|_{f(s(t))} < 0 \Leftrightarrow \mu_0 + \ln |1 - c| < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\mu_0} < c < 1 + e^{-\mu_0} \Rightarrow$$

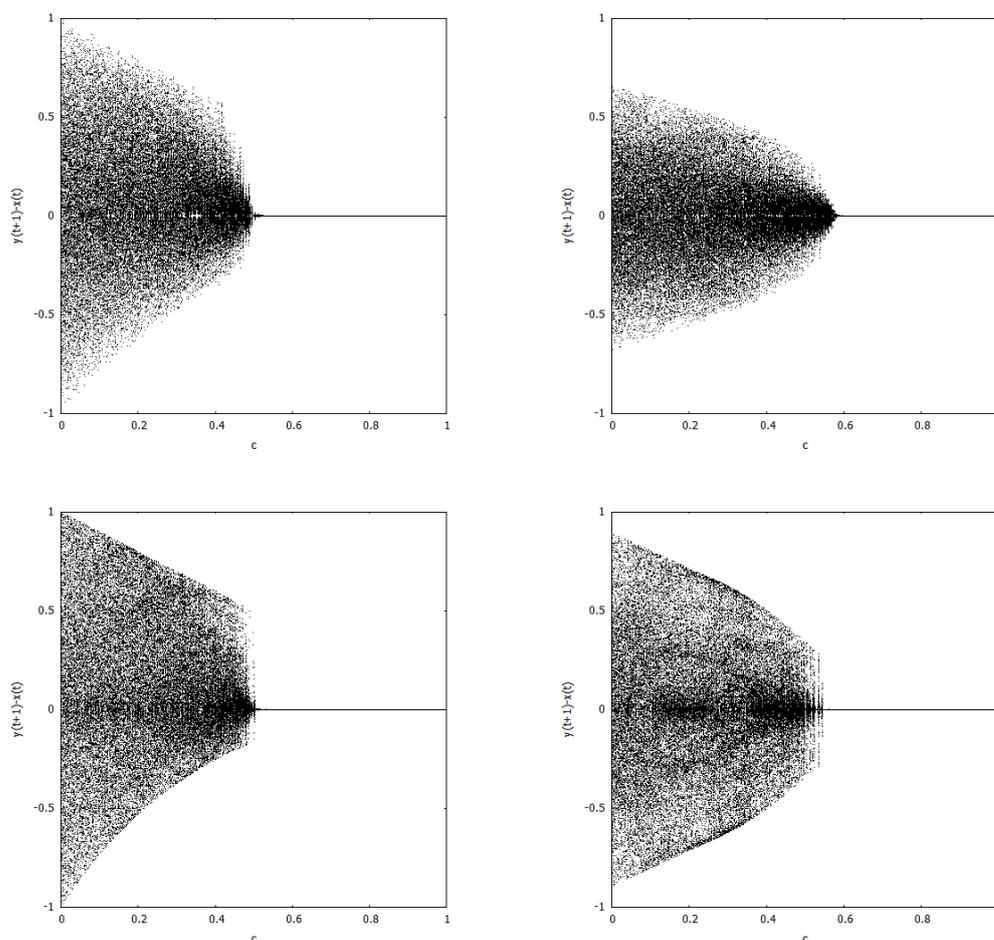


Figura 4.6: Gráficos das iteradas $y(t + 1) - x(t)$ em função de c para o ACP da tenda (em cima, à esquerda), logística (em baixo, à esquerda), serra (em cima, à direita) e cúbica (em baixo, à direita)

$$\Rightarrow JSD =]1 - e^{-\mu_0}, 1]$$

Tendo em conta os valores dos expoentes de Lyapunov das quatro dinâmicas consideradas, nomeadamente $\mu_0 = \ln 2$ para a logística e para a tenda, $\mu_0 = \ln 2.4$ para a serra e $\mu_0 \simeq 0.715$ para a cúbica (ver secção 2.3), as janelas-de-sincronização-desfasada são as seguintes:

- para a tenda e para a logística: $JSD =]0.5, 1]$
- para a serra: $JSD =]0.58(3), 1]$
- para a cúbica: $JSD \simeq]0.511, 1]$

Estes resultados confirmam os que foram obtidos utilizando a abordagem numérica que deu origem aos gráficos da figura 4.6. Tal facto indica que as soluções sincronizadas desfasadas exponencialmente estáveis destes acoplamentos têm bacias de atração suficientemente extensas para que uma escolha aleatória de valores iniciais não tenha mascarado a janela-de-sincronização-desfasada que obtivemos numericamente.

Exemplos de janelas-de-sincronização-desfasada do ACF

Tendo em conta que o Acoplamento Comandado pelo Futuro admite uma sincronização desfasada de 1, apresentamos na figura 4.7 os gráficos de $y(t + 1) - x(t)$ em função de c para os Acoplamentos Comandados pelo Futuro das quatro dinâmicas livres consideradas (tenda, logística, serra e cúbica). É visível que todos eles apresentam janelas-de-sincronização-desfasada não vazias.

A aplicação da Proposição 12 ao Acoplamento Comandado pelo Futuro permite calcular analiticamente as janelas-de-sincronização-desfasada. Visto que $\Delta t = 1$, $F_1 = -f$ e $G_1 = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mu_{sd} < 0 &\Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' - cf'|_{f(s(t))} < 0 \Leftrightarrow \mu_0 + \ln |1 - c| < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - e^{-\mu_0} < c < 1 + e^{-\mu_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow JSD =]1 - e^{-\mu_0}, 1] \end{aligned}$$

Tendo em conta os valores dos expoentes de Lyapunov das quatro dinâmicas consideradas, nomeadamente $\mu_0 = \ln 2$ para a logística e para a tenda, $\mu_0 = \ln 2.4$ para a serra e $\mu_0 \simeq 0.715$ para a cúbica (ver secção 2.3), as janelas-de-sincronização-desfasada são as seguintes:

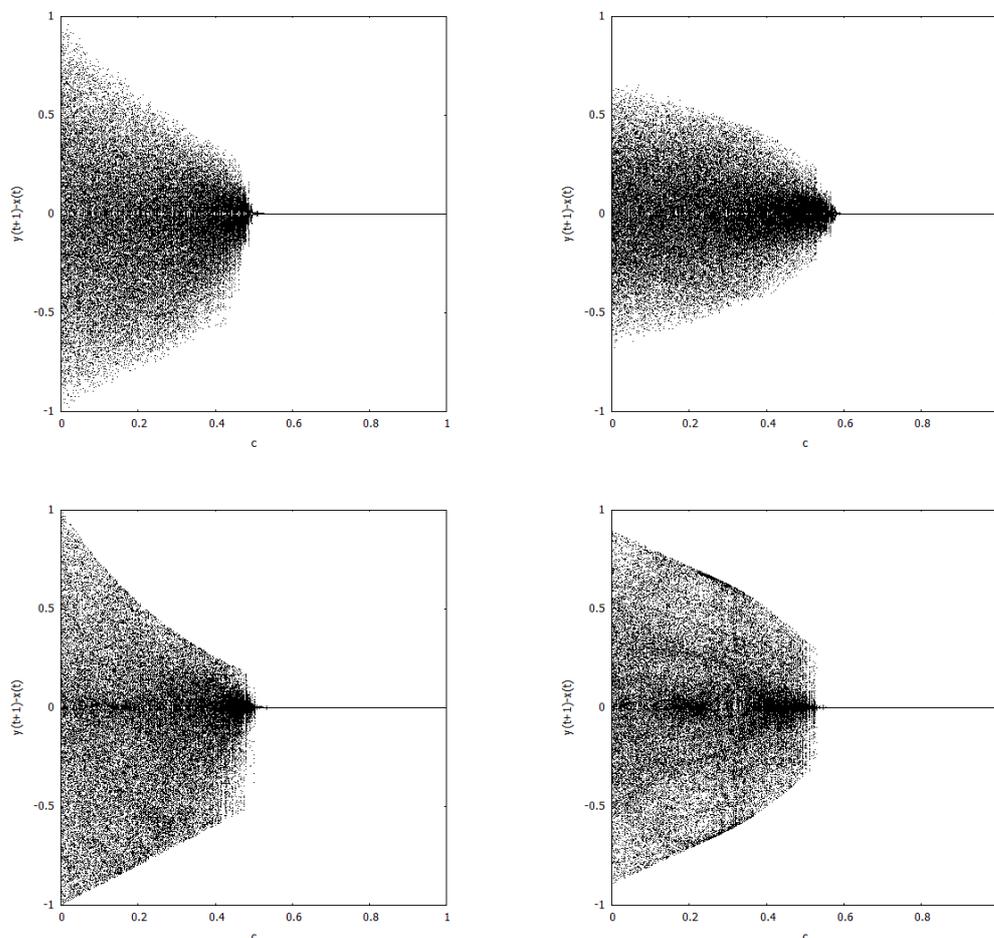


Figura 4.7: Gráficos das iteradas $y(t+1) - x(t)$ em função de c para o ACF da tenda (em cima, à esquerda), logística (em baixo, à esquerda), serra (em cima, à direita) e cúbica (em baixo, à direita)

- para a tenda e para a logística: $JSD =]0.5,1]$
- para a serra: $JSD =]0.58(3),1]$
- para a cúbica: $JSD \simeq]0.511,1]$

Estes resultados confirmam os que foram obtidos utilizando a abordagem numérica que deu origem aos gráficos da figura 4.7. Tal facto indica que as soluções sincronizadas desfasadas exponencialmente estáveis destes acoplamentos têm bacias de atração suficientemente extensas para que uma escolha aleatória de valores iniciais não tenha mascarado a janela-de-sincronização-desfasada que obtivemos numericamente.

Exemplos de janelas-de-sincronização-desfasada do ABD

Tendo em conta que o Acoplamento Bidirecional Desfasado admite uma sincronização desfasada de 1, apresentamos na figura 4.8 os gráficos de $y(t+1) - x(t)$ em função de c para os Acoplamentos Bidirecionais Desfasados das quatro dinâmicas livres consideradas (tenda, logística, serra e cúbica). É visível que todos eles apresentam janelas-de-sincronização-desfasada não vazias.

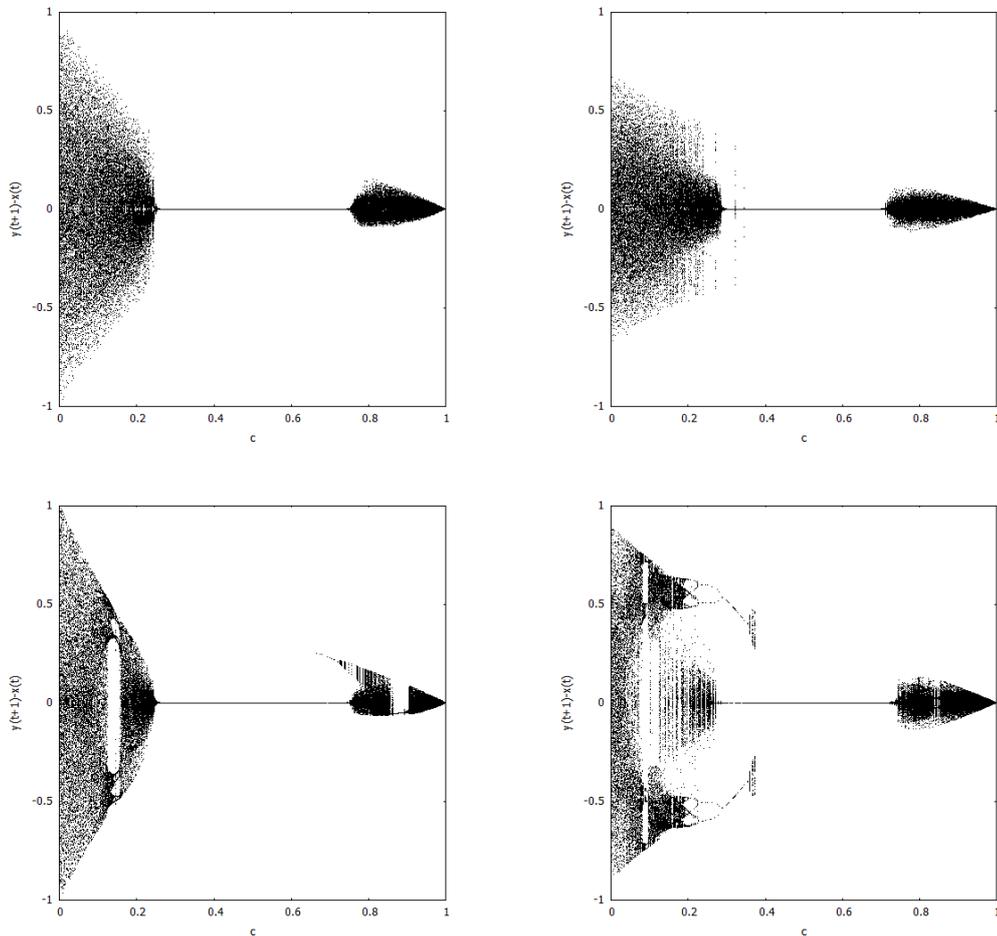


Figura 4.8: Gráficos das iteradas $y(t+1) - x(t)$ em função de c para o ABD da tenda (em cima, à esquerda), logística (em baixo, à esquerda), serra (em cima, à direita) e cúbica (em baixo, à direita)

A aplicação da Proposição 12 ao Acoplamento Bidirecional Desfasado permite calcular analiticamente as janelas-de-sincronização-desfasada. Visto que $\Delta t = 1$, $F_1 = -f$

e $G_1 = id$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mu_{sd} < 0 &\Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' - cf' - cf'|_{f(s(t))} < 0 \Leftrightarrow \mu_0 + \ln |1 - 2c| < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - e^{-\mu_0}}{2} < c < \frac{1 + e^{-\mu_0}}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow JSD = \left] \frac{1 - e^{-\mu_0}}{2}, \frac{1 + e^{-\mu_0}}{2} \right[\end{aligned}$$

Tendo em conta os valores dos expoentes de Lyapunov das quatro dinâmicas consideradas, nomeadamente $\mu_0 = \ln 2$ para a logística e para a tenda, $\mu_0 = \ln 2.4$ para a serra e $\mu_0 \simeq 0.715$ para a cúbica (ver secção 2.3), as janelas-de-sincronização-desfasada são as seguintes:

- para a tenda e para a logística: $JSD =]0.25, 0.75[$
- para a serra: $JSD =]0.291(6), 0.708(3)[$
- para a cúbica: $JSD \simeq]0.2557, 0.7443[$

Estes resultados confirmam os que foram obtidos utilizando a abordagem numérica que deu origem aos gráficos da figura 4.8. Tal facto indica que as soluções sincronizadas desfasadas exponencialmente estáveis destes acoplamentos têm bacias de atração suficientemente extensas para que uma escolha aleatória de valores iniciais não tenha mascarado significativamente a janela-de-sincronização-desfasada que obtivemos numericamente.

Exemplos de janelas-de-sincronização-desfasada do ACPF

Tendo em conta que o Acoplamento Comandado pelo Pós-Futuro admite uma sincronização desfasada de 2, apresentamos na figura 4.9 os gráficos de $y(t + 2) - x(t)$ em função de c para os Acoplamentos Comandados pelo Pós-Futuro das quatro dinâmicas

4.2. Outros tipos de sincronização

livres consideradas (tenda, logística, serra e cúbica). É visível que todos eles apresentam janelas-de-sincronização-desfasada não vazias.

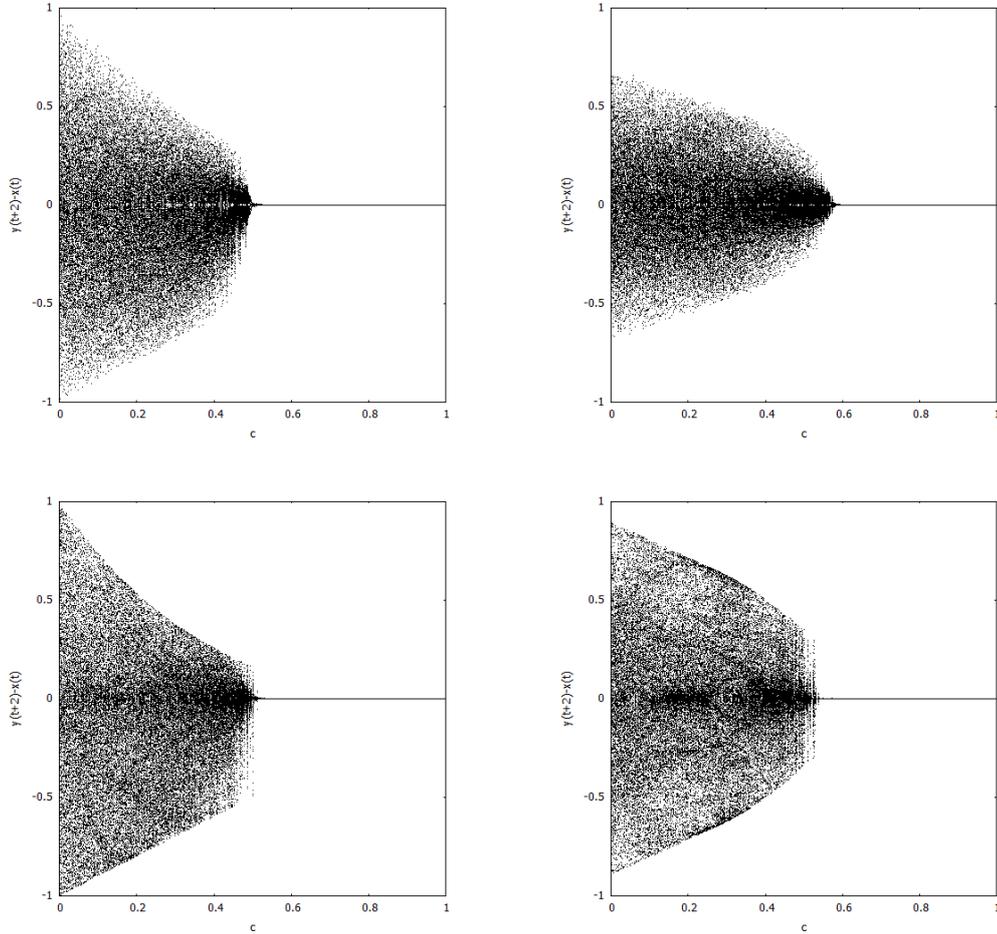


Figura 4.9: Gráficos das iteradas $y(t+2) - x(t)$ em função de c para o ACPF da tenda (em cima, à esquerda), logística (em baixo, à esquerda), serra (em cima, à direita) e cúbica (em baixo, à direita)

A aplicação da Proposição 12 ao Acoplamento Comandado pelo Pós-Futuro permite calcular analiticamente as janelas-de-sincronização-desfasada. Visto que $\Delta t = 2$, $F_1 = -f$ e $G_1 = 0$, obtemos:

$$\mu_{sd} < 0 \Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' - cf'|_{(f \circ f)(s(t))} < 0 \Leftrightarrow \mu_0 + \ln |1 - c| < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\mu_0} < c < 1 + e^{-\mu_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow JSD =]1 - e^{-\mu_0}, 1]$$

Tendo em conta os valores dos expoentes de Lyapunov das quatro dinâmicas consideradas, nomeadamente $\mu_0 = \ln 2$ para a logística e para a tenda, $\mu_0 = \ln 2.4$ para a serra e $\mu_0 \simeq 0.715$ para a cúbica (ver secção 2.3), as janelas-de-sincronização-desfasada são as seguintes:

- para a tenda e para a logística: $JSD =]0.5, 1]$
- para a serra: $JSD =]0.58(3), 1]$
- para a cúbica: $JSD \simeq]0.511, 1]$

Estes resultados confirmam os que foram obtidos utilizando a abordagem numérica que deu origem aos gráficos da figura 4.9. Tal facto indica que as soluções sincronizadas desfasadas exponencialmente estáveis destes acoplamentos têm bacias de atração suficientemente extensas para que uma escolha aleatória de valores iniciais não tenha mascarado a janela-de-sincronização-desfasada que obtivemos numericamente.

4.2.2 Sincronização generalizada

Nos casos em que ocorre sincronização completa ou sincronização desfasada, o acoplamento tende a criar a igualdade das iteradas dos sistemas dinâmicos acoplados, x e y : igualdade de $x(t)$ e $y(t)$, para o caso da sincronização completa, e igualdade de $x(t)$ e $y(t + \Delta t)$, para o caso da sincronização desfasada. Se o acoplamento tender a criar uma outra relação pré-definida entre as iteradas de x e y , dizemos que ocorre uma sincronização generalizada, de acordo com a definição seguinte

Definição 20. *Sendo I o intervalo de iteração, $R : I \rightarrow I$ uma função real de variável*

real, dizemos que um acoplamento (3.2) admite R -sincronização se, para cada valor da constante força-de-acoplamento, c , existir uma função $s(t)$, tal que $(x(t), y(t)) = (R(s(t)), s(t))$ é solução de (3.2). Se $s(t)$ corresponder, para cada valor de c , a um sistema dinâmico com comportamento caótico, dizemos que a R -sincronização tem comportamento caótico.

Definição 21. Sendo I o intervalo de iteração, dizemos que um acoplamento (3.2) admite sincronização generalizada se existir uma função real de variável real $R : I \rightarrow I$ tal que (3.2) admita uma R -sincronização com comportamento caótico.

A razão de nesta última definição exigirmos comportamento caótico resulta de que, se assim não fosse, todos os acoplamentos (3.2) admitiriam sincronização generalizada, já que bastaria escolher para R , por exemplo, a função $x = R(y)$ correspondente à linha-de-ponto-fixo de (3.2), i.e., a função $x = R(y)$ descrita por

$$\begin{cases} x = f(x) + c \cdot [F_1(x) + F_2(y)] \\ y = g(y) + c \cdot [G_1(x) + G_2(y)] \end{cases}$$

Uma tal escolha determinaria que $(x(t), y(t)) = (R(y_0), y_0)$, com $(R(y_0), y_0)$ pertencente à linha-de-ponto-fixo, fosse solução de (3.2).

A sincronização completa e a sincronização desfasada correspondem a casos particulares de sincronização generalizada. Correspondem concretamente a escolhermos $R(u) = u$ para a sincronização completa e $R(u) = f^{(\Delta t)}(u)$ para a sincronização desfasada de Δt (supondo, neste caso, que para a solução sincronizada generalizada se tem $y(t+1) = f(y(t))$, e como tal $R(y(t)) = f^{(\Delta t)}(y(t)) = y(t + \Delta t)$).

Se as funções f , g , F_1 , F_2 , G_1 e G_2 obedecerem a determinadas condições, é possível garantir que o acoplamento (3.2) admite R -sincronização, tal como a proposição

seguinte dá conta.

Proposição 13. *Se $f \circ R = R \circ g$, $F_1 \circ R + F_2 = 0$ e $G_1 \circ R + G_2 = 0$, então o acoplamento (3.2) admite R -sincronização com comportamento caótico, correspondendo a solução sincronizada generalizada a $y(t+1) = g(y(t))$*

Demonstração 13. *Sendo $s(t)$ uma qualquer solução de $s(t+1) = g(s(t))$, para as hipóteses consideradas, tem-se que $(x(t), y(t)) = (R(s(t)), s(t))$ satisfaz (3.2), qualquer que seja c . Com efeito, considerando em (3.2) $F_2 = -F_1 \circ R$ e $G_2 = -G_1 \circ R$, e fazendo $(x(t), y(t)) = (R(s(t)), s(t))$, obtém-se*

$$\begin{cases} R(s(t+1)) = f(R(s(t))) + c \cdot [F_1(R(s(t))) - (F_1 \circ R)(s(t))] \\ s(t+1) = g(s(t)) + c \cdot [G_1(R(s(t))) - (G_1 \circ R)(s(t))] \end{cases}$$

Como $f \circ R = R \circ g$, este sistema de equações reduz-se a

$$\begin{cases} R(s(t+1)) = R(g(s(t))) \\ s(t+1) = g(s(t)) \end{cases}$$

Ambas estas equações são obviamente verificadas, já que $s(t+1) = g(s(t))$. Concluimos, pois, que o acoplamento admite R -sincronização. Para além disso, trata-se de uma sincronização com comportamento caótico visto que g é uma aplicação caótica. \square

Esta proposição determina, então, que um acoplamento do tipo

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) + c \cdot [F_1(x(t)) - F_1(R(y(t)))] \\ y(t+1) = g(y(t)) + c \cdot [G_1(x(t)) - G_1(R(y(t)))] \end{cases}, \quad (4.3)$$

com $f \circ R = R \circ g$ admite R -sincronização.

É relevante notarmos que, em (4.3), f e g são aplicações topologicamente conjugadas através da conjugação topológica R . Assim sendo, concluímos que ao acoplarmos aplicações que sejam topologicamente conjugadas através de uma conjugação topológica R , utilizando um acoplamento do tipo (4.3), obtemos um acoplamento que admite R -sincronização.

À exceção do Acoplamento Simétrico Passado, todos os acoplamentos considerados a propósito da sincronização completa e da sincronização desfasada de Δt , correspondem a acoplamentos deste tipo. Com o propósito de ilustrarmos a existência de outras situações de R -sincronização que não correspondam nem à sincronização completa nem à sincronização desfasada, consideramos agora três outros acoplamentos do tipo (4.3) que não são nem do tipo (4.1) nem do tipo (4.2). Escolhemos funções R que sejam invertíveis no intervalo de iteração $I = [0,1]$, nomeadamente $R(u) = u^2$ e $R(u) = \sqrt{u}$, pelo que $g = R^{-1} \circ f \circ R$, designando por R^{-1} a função inversa da restrição de R ao intervalo de iteração. Tendo em conta a Proposição 1, ao escolhermos para f uma aplicação com comportamento caótico, g também terá um comportamento caótico.

· Acoplamento u^2 -Comandado (Au^2C), correspondente a escolhermos $R(u) = u^2$, $F_1 = -f$ e $G_1 = 0$:

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) + c \cdot [-f(x(t)) + f(y^2(t))] \\ y(t+1) = \sqrt{f(y^2(t))} \end{cases}$$

· Acoplamento u^2 -Bidirecional (Au^2B), correspondente a escolhermos $R(u) = u^2$, $F_1 = -f$ e $G_1 = R^{-1} \circ f = \sqrt{f}$:

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) + c \cdot [-f(x(t)) + f(y^2(t))] \\ y(t+1) = \sqrt{f(y^2(t))} + c \cdot [\sqrt{f(x(t))} - \sqrt{f(y^2(t))}] \end{cases}$$

(Nota: a escolha de $G_1 = R^{-1} \circ f$ corresponde a $G_2 = -R^{-1} \circ f \circ R = -g$, o que determina que as iteradas permanecem garantidamente no intervalo de iteração)

· Acoplamento \sqrt{u} -Comandado ($A\sqrt{u}C$), correspondente a escolhermos $R(u) = \sqrt{u}$, $F_1 = -f$ e $G_1 = 0$:

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) + c \cdot \left[-f(x(t)) + f(\sqrt{y(t)}) \right] \\ y(t+1) = f^2(\sqrt{y(t)}) \end{cases}$$

Mesmo que um acoplamento admita R -sincronização pode suceder que não exista nenhuma função $s(t)$ tal que $(x(t), y(t)) = (R(s(t)), s(t))$ seja uma solução exponencialmente estável de alguns dos acoplamentos- c , ou mesmo de todos. Convém, então, introduzirmos as seguintes definições

Definição 22. Dizemos que ocorre R -sincronização num acoplamento- c (3.2) se existir uma função $s(t)$, tal que $(x(t), y(t)) = (R(s(t)), s(t))$ é solução exponencialmente estável de (3.2). Dizemos, então, que x e y R -sincronizam.

Definição 23. Para um acoplamento que admita R -sincronização, designamos por janela-de- R -sincronização o conjunto dos valores de c para os quais existe uma função $s(t)$, tal que $(x(t), y(t)) = (R(s(t)), s(t))$ é solução exponencialmente estável de (3.2).

É possível obter analiticamente a janela-de- R -sincronização de (4.3), tal como a proposição seguinte dá conta.

Proposição 14. A janela-de- R -sincronização de um acoplamento (4.3) é, q.t.p.,

$$JRS = \{c \in [0,1] : \mu_{rs} < 0\}$$

com

$$\mu_{rs} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' \circ R + c \cdot [F'_1 \circ R - (G'_1 \circ R) \cdot (R' \circ g)]|_{s(t)}$$

e $s(t+1) = g(s(t))$.

Demonstração 14. Para aligeirarmos a notação das expressões envolvidas na demonstração, utilizamos x_t em vez de $x(t)$ e y_t em vez de $y(t)$.

Considerando $u_t = R(y_t) - x_t$, ou, de forma equivalente, $x_t = R(y_t) - u_t$, tem-se, em torno da solução sincronizada generalizada a que corresponde $u_t = 0$,

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= R(y_{t+1}) - x_{t+1} = \\ &= R(g(y_t) + c \cdot [G_1(R(y_t) - u_t) - G_1(R(y_t))]) - \\ &\quad - f(R(y_t) - u_t) - c \cdot [F_1(R(y_t) - u_t) - F_1(R(y_t))] \simeq \\ &\simeq R(g(y_t) + c \cdot [G_1(R(y_t)) - G'_1(R(y_t)) \cdot u_t - G_1(R(y_t))]) - \\ &\quad - f(R(y_t)) + f'(R(y_t)) \cdot u_t - c \cdot [F_1(R(y_t)) - F'_1(R(y_t)) \cdot u_t - F_1(R(y_t))] \simeq \\ &\simeq R(g(y_t)) - c \cdot R'(g(y_t)) \cdot G'_1(R(y_t)) \cdot u_t - \\ &\quad - f(R(y_t)) + f'(R(y_t)) \cdot u_t + c \cdot F'_1(R(y_t)) \cdot u_t \end{aligned}$$

Como $f \circ R = R \circ g$, obtemos então

$$u_{t+1} \simeq f'(R(y_t)) \cdot u_t + c \cdot F'_1(R(y_t)) \cdot u_t - c \cdot G'_1(R(y_t)) \cdot R'(g(y_t)) \cdot u_t,$$

pelo que a linearização da evolução u_t é dada por

$$u_{t+1} = (f'(R(y_t)) + c \cdot [F'_1(R(y_t)) - G'_1(R(y_t)) \cdot R'(g(y_t))]) \cdot u_t$$

Tendo em conta que quando os sistemas dinâmicos R -sincronizam se tem $y(t+1) =$

$g(y(t))$, concluímos que se

$$\mu_{rs} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' \circ R + c \cdot [F'_1 \circ R - (G'_1 \circ R) \cdot (R' \circ g)]|_{s(t)} < 0,$$

com $s(t+1) = g(s(t))$, então $u(t) = 0$ é uma solução exponencialmente estável da equação anterior, i.e., $(x(t), y(t)) = (R(s(t)), s(t))$ é uma solução exponencialmente estável de (4.3) e o correspondente valor de c pertence à sua janela-de- R -sincronização.

Se, em vez disso, $\mu_{rs} > 0$, então $u(t) = 0$ é uma solução instável da equação anterior, i.e., $(x(t), y(t)) = (R(s(t)), s(t))$ é uma solução instável de (4.3) e o correspondente valor de c não pertence à janela-de- R -sincronização. Concluímos, pois, que $JRS = \{c \in [0,1] : \mu_{rs} < 0\}$, q.t.p.. \square

De seguida, aplicamos a proposição anterior aos acoplamentos que definimos nesta secção, nomeadamente ao Acoplamento u^2 -Comandado, ao Acoplamento u^2 -Bidirecional e ao Acoplamento \sqrt{u} -Comandado, considerando acoplamentos em que f é a logística, a tenda, a cúbica ou a serra.

Exemplos de janelas-de-sincronização-generalizada do Au^2C

Começamos por considerar que f é a aplicação logística e calculamos as iteradas $x(t)$ e $y(t)$ que se obtêm utilizando a abordagem numérica descrita na secção 3.1. Na figura 4.10 apresentamos duas perspectivas do gráfico das iteradas $(x(t), y(t))$ em função de c , sendo notório que a janela-de- u^2 -sincronização é não-vazia.

Procedendo de forma idêntica para a situação em que f é a aplicação tenda, obtemos os gráficos da figura 4.11, onde é igualmente notório que a janela-de- u^2 -sincronização é não-vazia.

Por forma a melhor delimitar a janela-de- u^2 -sincronização, apresentamos na figura

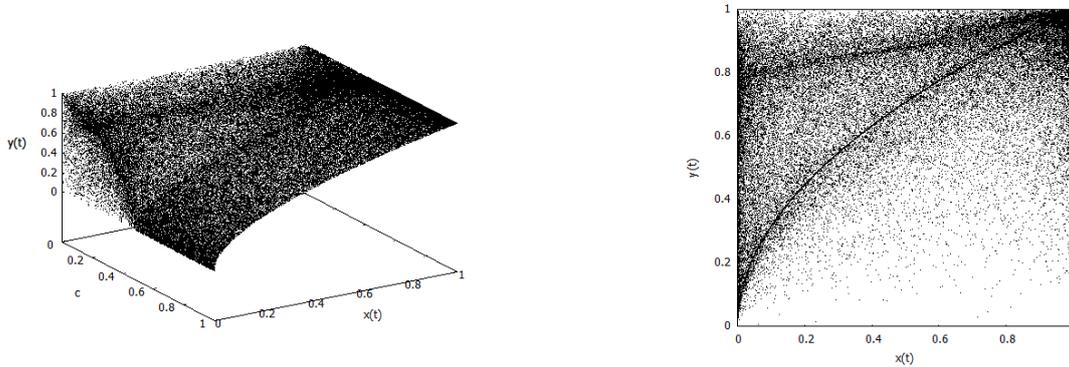


Figura 4.10: Duas perspectivas do gráfico das iteradas $(x(t), y(t))$ em função de c para o Au^2C , sendo f a aplicação logística (à direita mostramos a perspectiva perpendicular ao plano xy)

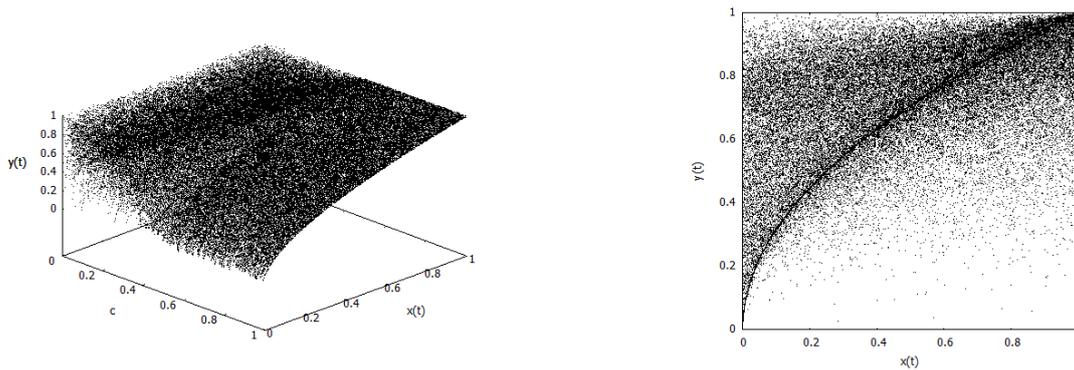


Figura 4.11: Duas perspectivas do gráfico das iteradas $(x(t), y(t))$ em função de c para o Au^2C , sendo f a aplicação tenda (à direita mostramos a perspectiva perpendicular ao plano xy)

4.12 os gráficos de $y^2(t) - x(t)$ em função de c para o Acoplamento u^2 -Comandado utilizando não só as duas anteriores escolhas de f mas também as outras a que temos recorrido: a serra e a cúbica. É visível que todos os acoplamentos apresentam janelas-de- u^2 -sincronização não-vazias.

A aplicação da Proposição 14 ao Acoplamento u^2 -Comandado permite calcular analiticamente as janelas-de- u^2 -sincronização. Com efeito, tendo em conta que $R(u) = u^2$,

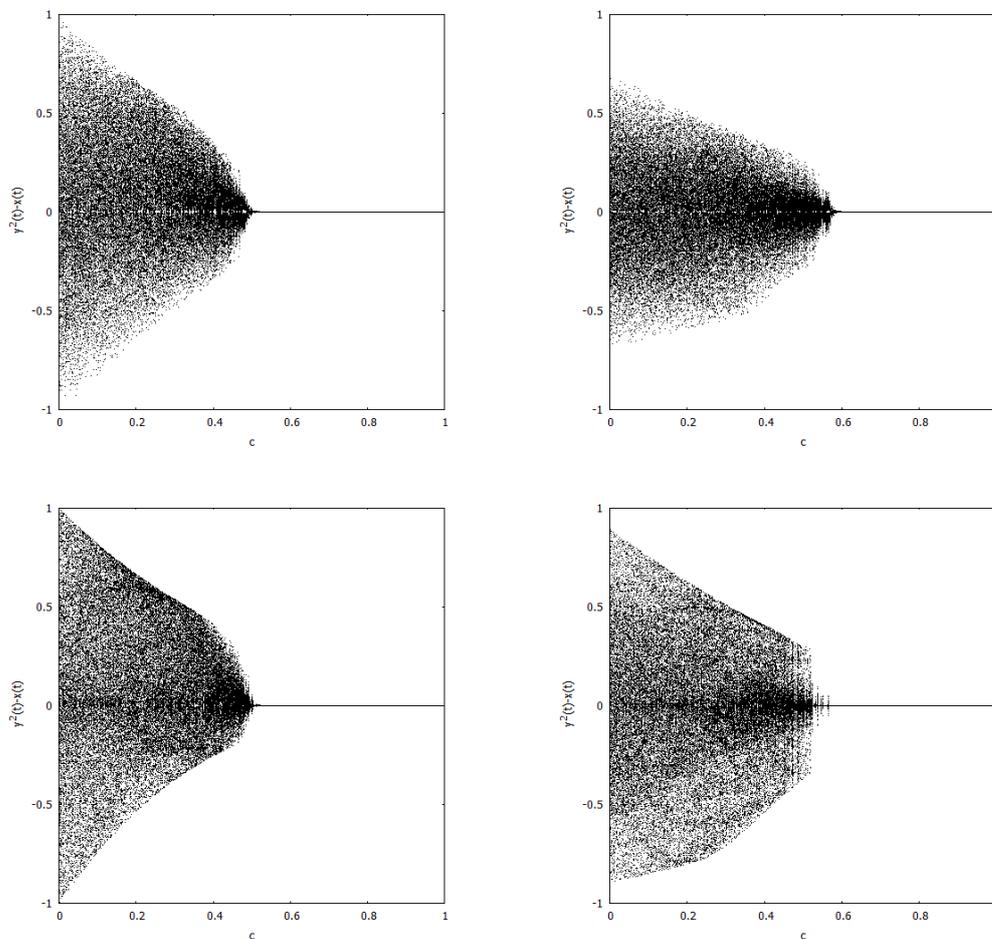


Figura 4.12: Gráficos das iteradas $y^2(t) - x(t)$ em função de c para o Au^2C da tenda (em cima, à esquerda), logística (em baixo, à esquerda), serra (em cima, à direita) e cúbica (em baixo, à direita)

$F_1 = -f$ e $G_1 = 0$, obtemos, sendo $s(t+1) = g(s(t))$:

$$\mu_{rs} < 0 \Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' \circ R - c \cdot f' \circ R|_{s(t)} < 0 \Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' - cf'|_{s^2(t)} < 0$$

Visto que $g(u) = (R^{-1} \circ f \circ R)(u) = \sqrt{f(u^2)}$, então tem-se que $s^2(t+1) = g^2(s(t)) = f(s^2(t))$, ou, de forma equivalente, designando s^2 por \tilde{s} , tem-se que $\tilde{s}(t+1) = f(\tilde{s}(t))$.

Obtemos, então,

$$\begin{aligned} \mu_{rs} < 0 &\Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' - cf'|_{\tilde{s}(t)} < 0 \Leftrightarrow \mu_0 + \ln |1 - c| < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - e^{-\mu_0} < c < 1 + e^{-\mu_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow Ju^2S =]1 - e^{-\mu_0}, 1] \end{aligned}$$

Tendo em conta os valores dos expoentes de Lyapunov das quatro dinâmicas consideradas, nomeadamente $\mu_0 = \ln 2$ para a logística e para a tenda, $\mu_0 = \ln 2.4$ para a serra e $\mu_0 \simeq 0.715$ para a cúbica (ver secção 2.3), as janelas-de- u^2 -sincronização são as seguintes:

- para a tenda e para a logística: $Ju^2S =]0.5, 1]$
- para a serra: $Ju^2S =]0.58(3), 1]$
- para a cúbica: $Ju^2S \simeq]0.511, 1]$

Estes resultados confirmam os que foram obtidos utilizando a abordagem numérica que deu origem aos gráficos da figura 4.12. Tal facto indica que as soluções u^2 -sincronizadas exponencialmente estáveis destes acoplamentos têm bacias de atração suficientemente extensas para que uma escolha aleatória de valores iniciais não tenha mascarado a janela-de- u^2 -sincronização que obtivemos numericamente.

A expressão obtida para a janela-de- u^2 -sincronização do Acoplamento u^2 -Comandado pode ser estendida a janela-de- R -sincronização de qualquer outro acoplamento do tipo (4.3) em que se escolha $F_1 = -f$ e $G_1 = 0$. Com efeito, para um tal acoplamento tem-se que, sendo $s(t+1) = g(s(t))$,

$$\mu_{rs} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' \circ R - c \cdot f' \circ R|_{s(t)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' - cf'|_{R(s(t))}$$

e, designando $R \circ s$ por \tilde{s} , a que corresponde $\tilde{s}(t+1) = R(s(t+1)) = R(g(s(t))) = f(R(s(t))) = f(\tilde{s}(t))$, obtemos, então,

$$\begin{aligned} \mu_{rs} < 0 &\Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' - cf'|_{\tilde{s}(t)} < 0 \Leftrightarrow \mu_0 + \ln |1 - c| < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - e^{-\mu_0} < c < 1 + e^{-\mu_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow JRS =]1 - e^{-\mu_0}, 1] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Exemplos de janelas-de-sincronização-generalizada do Au^2B

Começamos por considerar que f é a aplicação logística e calculamos as iteradas $x(t)$ e $y(t)$ que se obtêm utilizando a abordagem numérica descrita na secção 3.1. Na figura 4.13 apresentamos duas perspectivas do gráfico das iteradas $(x(t), y(t))$ em função de c , sendo notório que a janela-de- u^2 -sincronização é não-vazia.

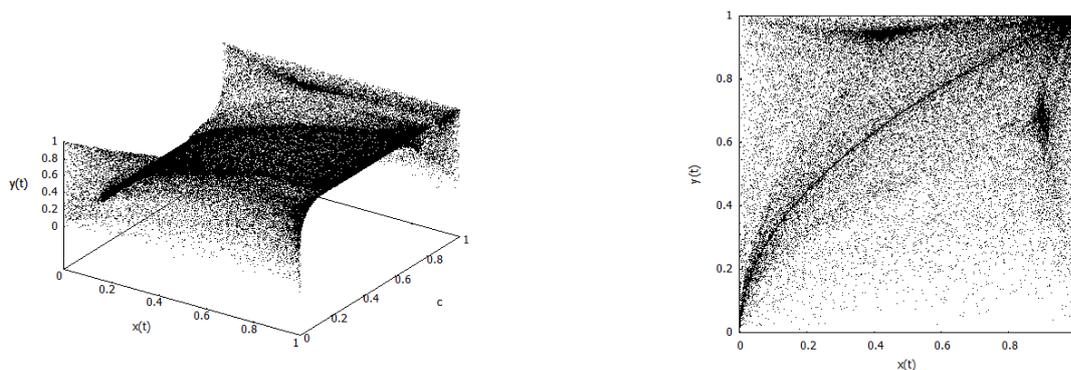


Figura 4.13: Duas perspectivas do gráfico das iteradas $(x(t), y(t))$ em função de c para o Au^2B , sendo f a aplicação logística (à direita mostramos a perspectiva perpendicular ao plano xy)

Procedendo de forma idêntica para a situação em que f é a aplicação tenda, obtemos os gráficos da figura 4.14, onde é igualmente notório que a janela-de- u^2 -sincronização é não-vazia.

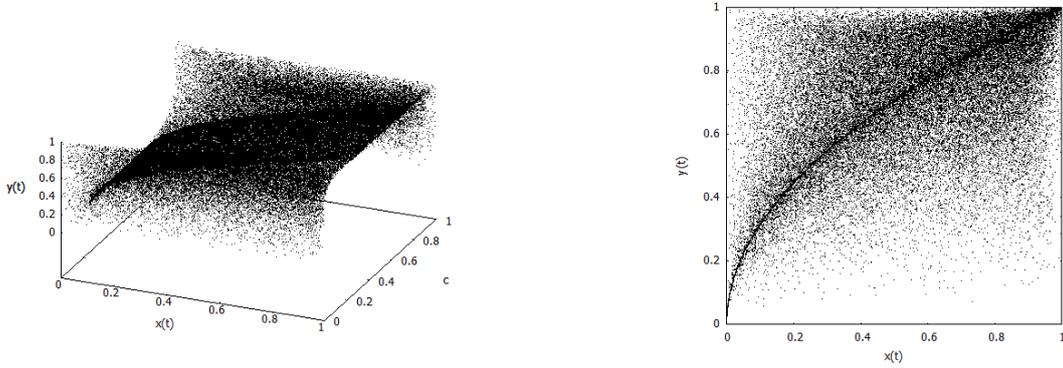


Figura 4.14: Duas perspectivas do gráfico das iteradas $(x(t), y(t))$ em função de c para o Au^2B , sendo f a aplicação tenda (à direita mostramos a perspectiva perpendicular ao plano xy)

Por forma a melhor delimitar a janela-de- u^2 -sincronização, apresentamos na figura 4.15 os gráficos de $y^2(t) - x(t)$ em função de c para o Acoplamento u^2 -Bidirecional utilizando não só as duas anteriores escolhas de f mas também as outras a que temos recorrido: a serra e a cúbica. É visível que todos os acoplamentos apresentam janelas-de- u^2 -sincronização não-vazias.

A aplicação da Proposição 14 ao Acoplamento u^2 -Bidirecional permite calcular analiticamente as janelas-de- u^2 -sincronização. Tendo em conta que $R(u) = u^2$, $F_1 = -f$ e $G_1 = \sqrt{f}$, obtemos, sendo $s(t+1) = g(s(t))$ e tendo em conta que $g = R^{-1} \circ f \circ R = \sqrt{f} \circ R$:

$$\mu_{rs} < 0 \Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln \left| f' \circ R - c \cdot f' \circ R - c \cdot \frac{f'}{2\sqrt{f}} \circ R \cdot 2g \right|_{s(t)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln \left| f' \circ R - c \cdot f' \circ R - c \cdot \frac{f'}{\sqrt{f}} \circ R \cdot \sqrt{f} \circ R \right|_{s(t)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' - 2cf'|_{s^2(t)} < 0$$

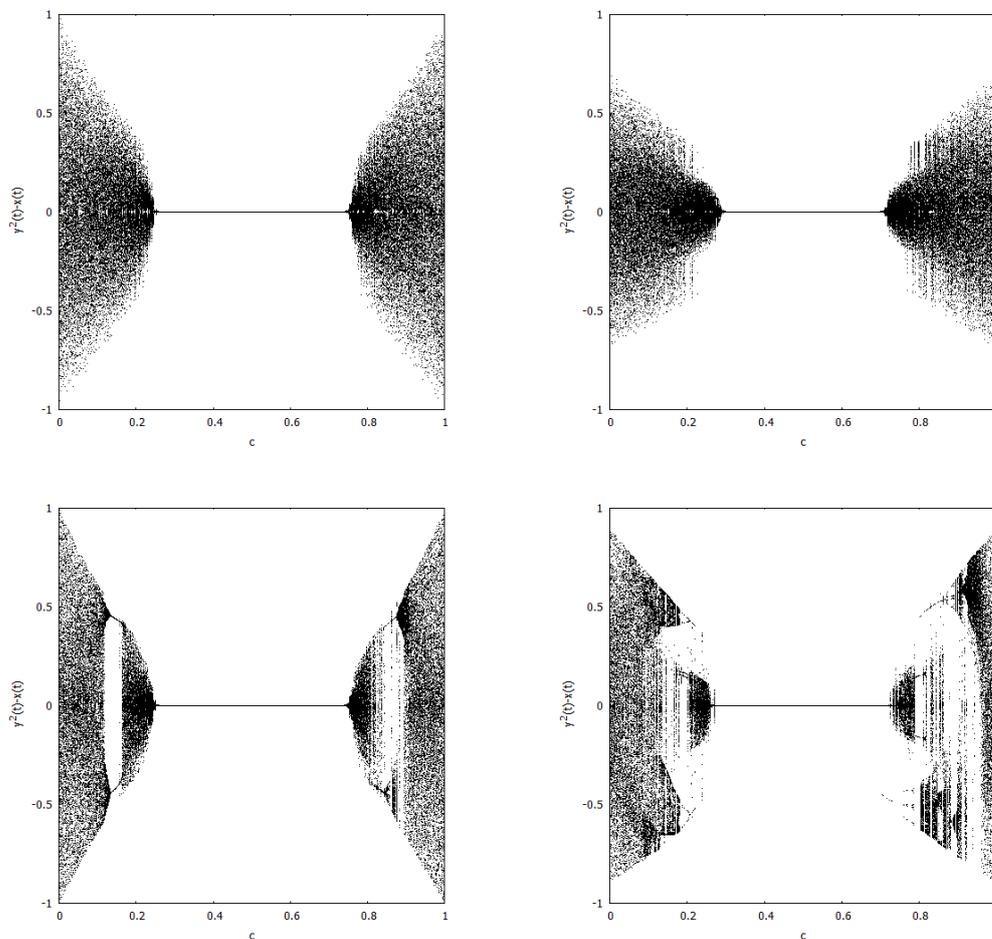


Figura 4.15: Gráficos das iteradas $y^2(t) - x(t)$ em função de c para o Au^2B da tenda (em cima, à esquerda), logística (em baixo, à esquerda), serra (em cima, à direita) e cúbica (em baixo, à direita)

Designando, tal como no exemplo do Acoplamento u^2 -Comandado, s^2 por \tilde{s} , a que corresponde $\tilde{s}(t+1) = f(\tilde{s}(t))$, obtemos, então,

$$\begin{aligned} \mu_{rs} < 0 &\Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' - 2cf'|_{\tilde{s}(t)} < 0 \Leftrightarrow \mu_0 + \ln |1 - 2c| < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - e^{-\mu_0}}{2} < c < \frac{1 + e^{-\mu_0}}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow Ju^2S = \left[\frac{1 - e^{-\mu_0}}{2}, \frac{1 + e^{-\mu_0}}{2} \right] \end{aligned}$$

Tendo em conta os valores dos expoentes de Lyapunov das quatro dinâmicas consideradas, nomeadamente $\mu_0 = \ln 2$ para a logística e para a tenda, $\mu_0 = \ln 2.4$ para a serra e $\mu_0 \simeq 0.715$ para a cúbica (ver secção 2.3), as janelas-de- u^2 -sincronização são as seguintes:

- para a tenda e para a logística: $Ju^2S =]0.25,0.75[$
- para a serra: $Ju^2S =]0.291(6),0.708(3)[$
- para a cúbica: $Ju^2S \simeq]0.2557,0.7443[$

Estes resultados confirmam os que foram obtidos utilizando a abordagem numérica que deu origem aos gráficos da figura 4.15. Tal facto indica que as soluções u^2 -sincronizadas exponencialmente estáveis destes acoplamentos têm bacias de atração suficientemente extensas para que uma escolha aleatória de valores iniciais não tenha mascarado a janela-de- u^2 -sincronização que obtivemos numericamente.

A expressão obtida para a janela-de- u^2 -sincronização do Acoplamento u^2 -Bidirecional pode ser estendida para a janela-de- R -sincronização de qualquer outro acoplamento do tipo (4.3) em que se escolha $F_1 = -f$ e $G_1 = R^{-1} \circ f$. Com efeito, para um tal acoplamento tem-se que, sendo $s(t+1) = g(s(t))$,

$$\begin{aligned} \mu_{rs} &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln \left| f' \circ R - c \cdot f' \circ R - c \cdot (R^{-1} \circ f)' \circ R \cdot (R' \circ g) \right|_{s(t)} = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln \left| f' \circ R - c \cdot f' \circ R - c \cdot \left(\frac{1}{R' \circ R^{-1} \circ f} \circ R \right) \cdot f' \circ R \cdot (R' \circ R^{-1} \circ f \circ R) \right|_{s(t)} = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln \left| f' \circ R - c \cdot f' \circ R - c \cdot f' \circ R \right|_{s(t)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln \left| f' - 2cf' \right|_{R(s(t))}, \end{aligned}$$

e, designando $R \circ s$ por \tilde{s} , a que corresponde $\tilde{s}(t+1) = R(s(t+1)) = R(g(s(t))) =$

$f(R(s(t))) = f(\tilde{s}(t))$, obtemos, então,

$$\begin{aligned} \mu_{rs} < 0 &\Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f' - 2cf'|_{\tilde{s}(t)} < 0 \Leftrightarrow \mu_0 + \ln |1 - 2c| < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - e^{-\mu_0}}{2} < c < \frac{1 + e^{-\mu_0}}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow JRS = \left] \frac{1 - e^{-\mu_0}}{2}, \frac{1 + e^{-\mu_0}}{2} \right[\end{aligned}$$

Exemplos de janelas de sincronização generalizada do $A\sqrt{u}C$

Começamos por considerar que f é a aplicação logística e calculamos as iteradas $x(t)$ e $y(t)$ que se obtêm utilizando a abordagem numérica descrita na secção 3.1. Na figura 4.16 apresentamos duas perspectivas do gráfico das iteradas $(x(t), y(t))$ em função de c , sendo notório que a janela-de- \sqrt{u} -sincronização é não-vazia.

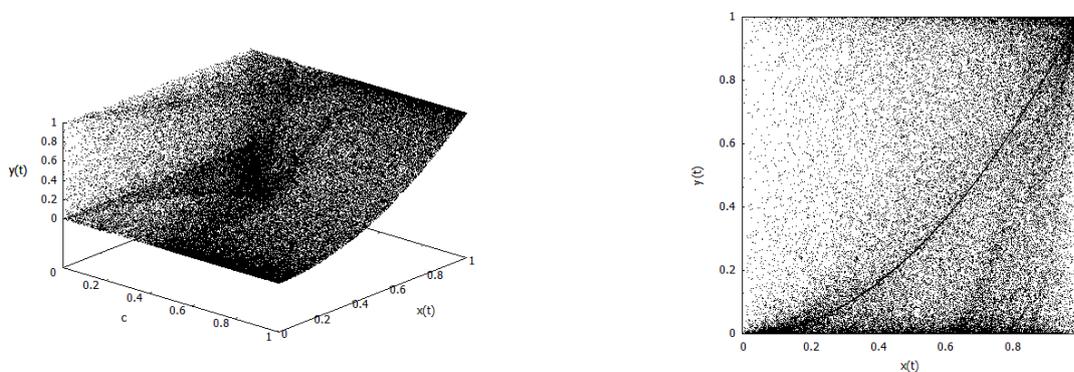


Figura 4.16: Duas perspectivas do gráfico das iteradas $(x(t), y(t))$ em função de c para o $A\sqrt{u}C$, sendo f a aplicação logística (à direita mostramos a perspectiva perpendicular ao plano xy)

Procedendo de forma idêntica para a situação em que f é a aplicação tenda, obtemos os gráficos da figura 4.17, onde é igualmente notório que a janela-de- \sqrt{u} -sincronização é não-vazia.

Por forma a melhor delimitar a janela-de- \sqrt{u} -sincronização, apresentamos na figura

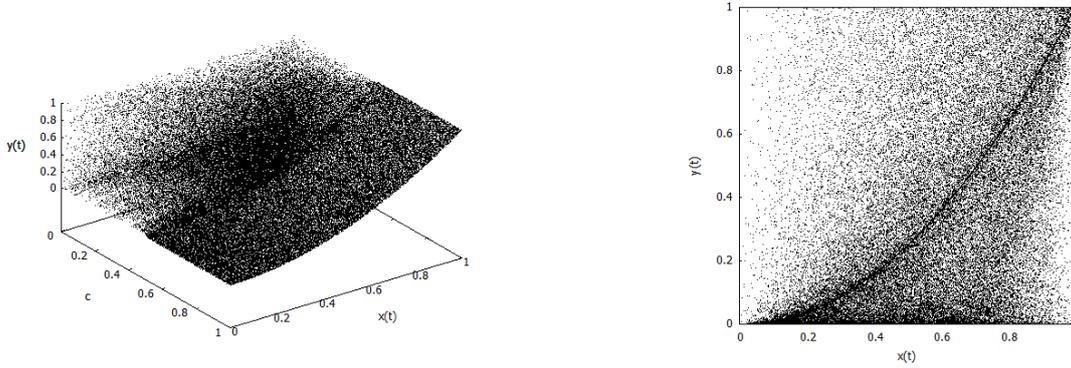


Figura 4.17: Duas perspectivas do gráfico das iteradas $(x(t), y(t))$ em função de c para o $A\sqrt{u}C$, sendo f a aplicação tenda (à direita mostramos a perspectiva perpendicular ao plano xy)

4.18 os gráficos de $y(t) - x^2(t)$ em função de c para o Acoplamento \sqrt{u} -Comandado utilizando não só as duas anteriores escolhas de f mas também as outras a que temos recorrido: a serra e a cúbica. É visível que todos os acoplamentos apresentam janelas-de- \sqrt{u} -sincronização não-vazias.

Visto que o Acoplamento \sqrt{u} -Comandado corresponde a escolher-se $F_1 = -f$ e $G_1 = 0$, estamos nas condições em que a janela-de- R -sincronização é dada por (4.4), pelo que as janelas-de- \sqrt{u} -sincronização para este acoplamento são exatamente as mesmas que as do Acoplamento u^2 -Comandado, nomeadamente:

- para a tenda e para a logística: $J\sqrt{u}S =]0.5, 1]$
- para a serra: $J\sqrt{u}S =]0.58(3), 1]$
- para a cúbica: $J\sqrt{u}S \simeq]0.511, 1]$

Estes resultados confirmam os que foram obtidos utilizando a abordagem numérica que deu origem aos gráficos da figura 4.18. Tal facto indica que as soluções \sqrt{u} -sincronizadas exponencialmente estáveis destes acoplamentos têm bacias de atração suficientemente extensas para que uma escolha aleatória de valores iniciais não tenha mascarado a janela-de- \sqrt{u} -sincronização que obtivemos numericamente.

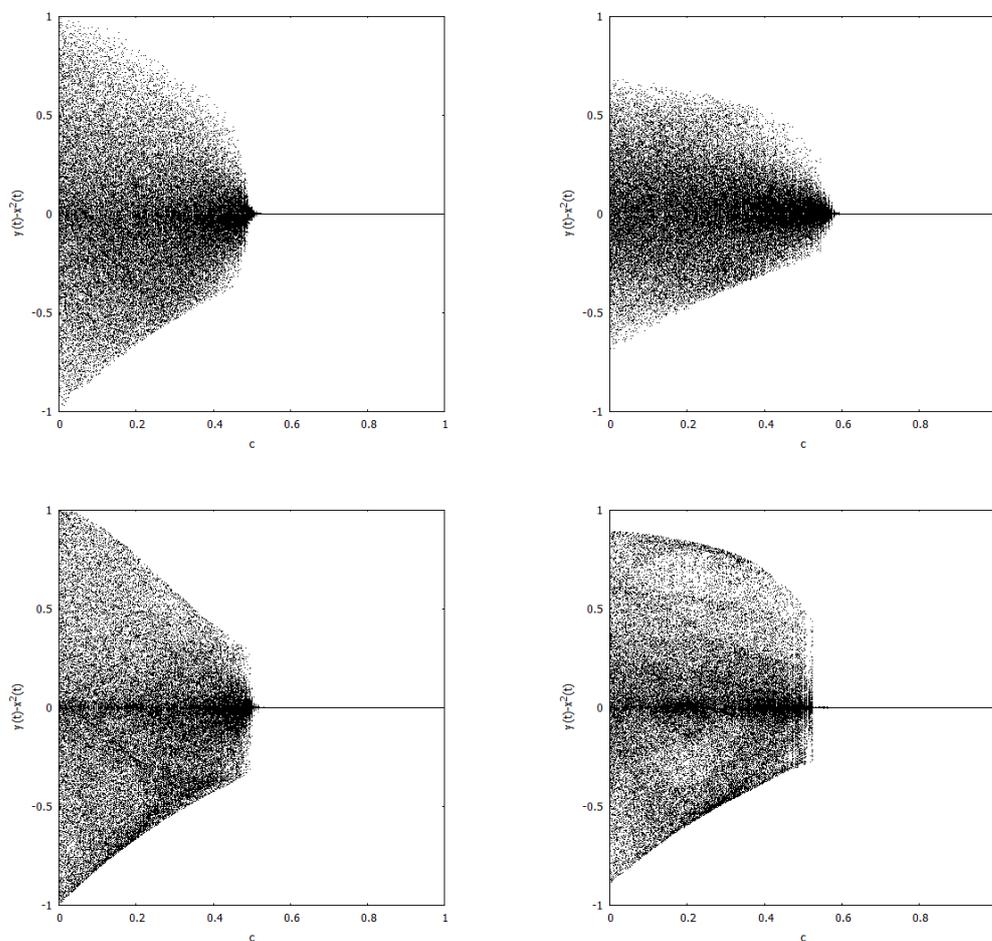


Figura 4.18: Gráficos das iteradas $y(t) - x^2(t)$ em função de c para o $A\sqrt{u}C$ da tenda (em cima, à esquerda), logística (em baixo, à esquerda), serra (em cima, à direita) e cúbica (em baixo, à direita)

4.3 Redes

Se um sistema dinâmico interagir não apenas com um outro sistema dinâmico mas sim com vários, estamos perante uma rede de sistemas dinâmicos. Alargamos, agora, a esta situação alguns dos resultados obtidos, nomeadamente os que dizem respeito à sincronização completa.

4.3.1 Sincronização completa de uma rede com interações lineares

Consideramos uma rede de n sistemas dinâmicos caóticos idênticos, x_i ($i = 1, \dots, n$), os nodos ou elementos da rede, descrita por

$$x_i(t+1) = f(x_i(t)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [F_{ij}(x_j(t)) - F_{ii}(x_i(t))], \quad (4.5)$$

com $i = 1, \dots, n$, onde $F_{ij}(x_j(t)) - F_{ii}(x_i(t))$ é o termo de interação a que o nodo x_i fica sujeito por parte do nodo x_j . A definição de sincronização completa de um acoplamento pode estender-se da maneira seguinte a uma tal rede.

Definição 24. Dizemos que a rede (4.5) admite sincronização completa se existir uma função $s(t)$ tal que $x_i(t) = s(t)$, $\forall i=1, \dots, n$, é solução de (4.5).

Vamos analisar o comportamento de uma rede em que os termos de interação dependem de forma linear da aplicação f que descreve a dinâmica livre, i.e., uma rede do tipo

$$x_i(t+1) = f(x_i(t)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot [f(x_j(t)) - f(x_i(t))]$$

ou, de forma equivalente,

$$x_i(t+1) = \left(1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}\right) \cdot f(x_i(t)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot f(x_j(t))$$

onde $a_{ij} \in [0,1]$ ($i, j = 1, \dots, n$) são as constantes-força-de-acoplamento. Se $a_{ij} \neq 0$ ou $a_{ji} \neq 0$, os nodos x_i e x_j dizem-se ligados. É de notar que as iteradas só se mantêm

garantidamente no intervalo de iteração se $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} < 1$.

Definindo $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{bmatrix}^T$,

$$\vec{f}(\vec{x}(t)) = \begin{bmatrix} f(x_1(t)) & f(x_2(t)) & \dots & f(x_n(t)) \end{bmatrix}^T,$$

$a_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}$ e $A = [a_{ij}]$, as equações anteriores podem ser escritas como

$$\vec{x}(t+1) = (I_n + A) \cdot \vec{f}(\vec{x}(t)) \quad (4.6)$$

e designamos A por matriz de acoplamento.

Comecemos por notar que $\lambda = 0$ é valor próprio de A . Com efeito, sendo $\vec{1} = [11\dots 1]^T$ e $\vec{0} = [00\dots 0]^T$, temos $A \cdot \vec{1} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{1}$. Deste modo, a rede (4.6) admite sincronização completa. De facto, se $s(t)$ for uma qualquer função que satisfaça $s(t+1) = f(s(t))$, tem-se que $\vec{x}(t) = s(t) \cdot \vec{1}$ é solução de (4.6), pois

$$\begin{aligned} (I_n + A) \cdot \vec{f}(\vec{x}(t)) &= (I_n + A) \cdot f(s(t)) \cdot \vec{1} = f(s(t)) \cdot (I_n + A) \cdot \vec{1} = \\ &= s(t+1) \cdot (\vec{1} + A \cdot \vec{1}) = s(t+1) \cdot \vec{1} = \vec{x}(t+1) \end{aligned}$$

No entanto, a solução completamente sincronizada $\vec{x}(t) = s(t) \cdot \vec{1}$ só é exponencialmente estável para algumas matrizes de acoplamento.

Definição 25. Dizemos que a rede (4.5) sincroniza completamente se existir uma função $s(t)$ tal que $\vec{x}(t) = s(t) \cdot \vec{1}$ é solução exponencialmente estável de (4.5).

A proposição seguinte, que é uma variante de outras apresentadas, por exemplo, em [FenJoQi07], [LiCh03] e [WaChen02b], fornece condições para que uma rede sincronize completamente.

Proposição 15. *Seja A a matriz de acoplamento da rede de sistemas dinâmicos (4.6). Se A for diagonalizável e todos os seus valores próprios λ_i ($i = 2, \dots, n$) associados a vetores próprios que não sejam o vetor próprio $\vec{1}$ forem tais que $|1 + \lambda_i| < e^{-\mu}$, sendo μ o expoente de Lyapunov dos sistemas dinâmicos livres, então a solução completamente sincronizada $\vec{x}(t) = s(t) \cdot \vec{1}$, com $s(t)$ satisfazendo $s(t+1) = f(s(t))$, é exponencialmente estável. Se para algum valor próprio λ_i que não esteja associado ao vetor próprio $\vec{1}$ se tiver $|1 + \lambda_i| > e^{-\mu}$, então a solução completamente sincronizada de (4.6) é instável.*

Demonstração 15. *Considerando que $\vec{x}(t) = s(t) \cdot \vec{1} + \vec{u}(t)$, a linearização de (4.6) em torno de $\vec{x}(t) = s(t) \cdot \vec{1}$ corresponde a*

$$\begin{aligned} s(t+1) \cdot \vec{1} + \vec{u}(t+1) &= \\ &= (I_n + A) \cdot \left[f(s(t)) \vec{1} + f'(s(t)) \cdot \vec{u}(t) \right] \end{aligned}$$

e, tendo em conta que $A \cdot \vec{1} = 0 \cdot \vec{1}$ e $s(t+1) = f(s(t))$, obtemos

$$\vec{u}(t+1) = (I_n + A) \cdot f'(s(t)) \cdot \vec{u}(t)$$

Visto que $\lambda_1 = 0$ é um dos valores próprios da matriz de acoplamento A e que, por hipótese, A é diagonalizável, então A é semelhante à matriz diagonal $D = \text{diag}(0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$.

Sendo $\vec{v}(t) = S^{-1} \cdot \vec{u}(t)$, com S tal que $D = S^{-1}AS$, a equação anterior é equivalente a

$$\vec{v}(t+1) = S^{-1} \cdot (I_n + A) \cdot f'(s(t)) \cdot \vec{u}(t) \Leftrightarrow$$

$$\vec{v}(t+1) = (I_n + D) \cdot f'(s(t)) \cdot \vec{v}(t) \Leftrightarrow$$

$$v_i(t+1) = (1 + \lambda_i) \cdot f'(s(t)) \cdot v_i(t), \quad i = 1, \dots, n$$

Tem-se, então,

$$\begin{aligned} |v_i(T)| &= \left| (1 + \lambda_i)^T \cdot \prod_{t=0}^{T-1} f'(s(t)) \cdot v_i(0) \right| \\ &= \left| (1 + \lambda_i)^T \right| \cdot e^{\ln \prod_{\tau=0}^{T-1} |f'(s(\tau))|} \cdot |v_i(0)| \\ &= \left[|(1 + \lambda_i)| \cdot e^{\frac{1}{T} \ln \prod_{\tau=0}^{T-1} |f'(s(\tau))|} \right]^T \cdot |v_i(0)| \end{aligned}$$

Visto que o expoente de Lyapunov, μ , de $s(t+1) = f(s(t))$ é $\mu = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \ln |f'(s(t))|$, concluímos que, se $|1 + \lambda_i| e^\mu < 1$ ou, de forma equivalente, se $|1 + \lambda_i| < e^{-\mu}$ para $i = 2, \dots, n$, então a solução nula de $w(t+1) = (1 + \lambda_i) \cdot f'(s(t)) \cdot w(t)$, para $i = 2, \dots, n$, é exponencialmente estável, o que, tendo em conta o Lema 3 de [LiCh03], determina que a solução completamente sincronizada $\vec{x}(t) = s(t) \cdot \vec{1}$ é exponencialmente estável. Se existir um $i \in \{2, \dots, n\}$ tal que $|1 + \lambda_i| e^\mu > 1$ ou, de forma equivalente, tal que $|1 + \lambda_i| > e^{-\mu}$, então a solução completamente sincronizada é instável. \square

Na secção anterior verificámos que quando acoplamos de forma unidirecional um sistema dinâmico a um outro, i.e., quando criamos um acoplamento comandado, aquele sistema que se mantém livre dita o comportamento do outro, sempre que a constante-força-de-acoplamento é tal que dá origem a uma sincronização. Este facto, sugere que analisemos a correspondente situação para uma rede. Queremos concretamente analisar de que forma ao acoplarmos unilateralmente um novo nodo a uma rede, esse nodo pode comandar a rede. O estudo desta questão, comumente referida como *pinning control*, tem cerca de uma década [WaSu14]. A abordagem que temos seguido neste trabalho, ao ser aplicada ao estudo de uma rede, permite-nos ganhar, de forma simples, perce-

ção de algumas conclusões a que o *pinning control* tem chegado. Na secção seguinte, consideramos, então, com esse propósito, a situação que designamos por comando-total.

4.3.2 Comando-total

Se à rede (4.6) acrescentarmos um nodo y , que designamos por ditador (o *pinner* do *pinning control*), acoplado-o de forma unilateral a todos os elementos da rede e utilizando uma mesma constante de acoplamento ϵ , a que chamamos constante-força-de-comando, obtemos uma nova rede descrita por

$$\begin{cases} x_i(t+1) = f(x_i(t)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot [f(x_j(t)) - f(x_i(t))] + \epsilon \cdot [f(y(t)) - f(x_i(t))] \\ y(t+1) = f(y(t)) \end{cases}$$

com $i = 1, \dots, n$ e $\epsilon \in [0, 1]$, ou, de forma equivalente,

$$\begin{cases} x_i(t+1) = (1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} - \epsilon) \cdot f(x_i(t)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot f(x_j(t)) + \epsilon \cdot f(y(t)) \\ y(t+1) = f(y(t)) \end{cases}$$

Definindo $\vec{x}_0(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) & y(t) \end{bmatrix}^T$ e $A_0 = \begin{bmatrix} A - \epsilon I_n & \epsilon \vec{1} \\ \vec{0}^T & 0 \end{bmatrix}$, es-

tas equações podem ser escritas como

$$\vec{x}_0(t+1) = (I_{n+1} + A_0) \cdot \vec{f}(\vec{x}_0(t)) \quad (4.7)$$

É de notar que as iteradas só se mantêm garantidamente no intervalo de iteração se

$\epsilon + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} < 1$, ou seja para valores da constante-força-de-comando pertencentes a $[0, \epsilon_{\max}]$, com $\epsilon_{\max} = 1 - \max |a_{ij}|$.

O novo nodo, o ditador, mantém um comportamento livre. A questão que queremos analisar é a da possibilidade de ele impor o seu comportamento a todos os outros elementos da rede, i.e., a possibilidade de a rede (4.7) sincronizar completamente. A proposição seguinte fornece condições para que tal aconteça.

Proposição 16. *Sendo (4.6) uma rede com uma matriz de acoplamento A diagonalizável, se ϵ for tal que $|\epsilon - (1 + \lambda_i)| < e^{-\mu}$ para todos os valores próprios λ_i de A , então o ditador y comanda totalmente a rede, i.e., $\vec{x}_0(t) = y(t) \cdot \vec{1}$ é uma solução exponencialmente estável de (4.7). Se ϵ for tal que $|\epsilon - (1 + \lambda_i)| > e^{-\mu}$ para algum dos valores próprios λ_i de A , então $\vec{x}_0(t) = y(t) \cdot \vec{1}$ é uma solução instável de (4.7), i.e., o ditador não comanda a rede de forma total.*

Demonstração 16. *Visto que os valores próprios de A_0 são $\lambda = 0$ e $\lambda = \lambda_i - \epsilon$, a Proposição 15 determina que se ϵ for tal que $|1 + \lambda_i - \epsilon| < e^{-\mu}$ ou, de forma equivalente, se ϵ for tal que $|\epsilon - (1 + \lambda_i)| < e^{-\mu}$, então a solução sincronizada $\vec{x}_0(t) = s(t) \cdot \vec{1}$, com $s(t)$ satisfazendo $s(t+1) = f(s(t))$, é exponencialmente estável. Visto que y é um nodo livre, i.e., visto que y é descrito por $y(t+1) = f(y(t))$, então $\vec{x}_0(t) = y(t) \cdot \vec{1}$ é uma solução exponencialmente estável de (4.7).*

A Proposição 15 garante, também, que se ϵ for tal que $|\epsilon - (1 + \lambda_i)| > e^{-\mu}$ para algum valor próprio λ_i de A , então $\vec{x}_0(t) = y(t) \cdot \vec{1}$ é uma solução instável de (4.7). \square

Introduzimos, então, a definição seguinte.

Definição 26. *Designamos por janela-de-comando-total (JCT) da rede (4.6) o conjunto de valores da constante-força-de-comando ϵ para os quais a solução completamente sincronizada $\vec{x}_0(t) = y(t) \cdot \vec{1}$ é uma solução exponencialmente estável de (4.7). Se a janela-de-comando-total for não-vazia dizemos que a rede (4.6) é comandável-de-forma-total.*

A Proposição 16 determina que a janela-de-comando-total é, q.t.p.,

$$JCT = \bigcap_{i=1}^n \{ \epsilon \in [0, \epsilon_{\max}] : |\epsilon - (1 + \lambda_i)| < e^{-\mu} \} \quad (4.8)$$

A proposição seguinte mostra que existem redes para as quais este conjunto é vazio e que, como tal, não são comandáveis-de-forma-total.

Proposição 17. *Se a distância entre dois valores próprios de uma matriz de acoplamento A diagonalizável for superior a $2e^{-\mu}$, então a rede (4.6) com uma tal matriz de acoplamento não é comandável-de-forma-total. O mesmo acontece, caso A tenha um valor próprio λ tal que $Im(\lambda) > e^{-\mu}$.*

Demonstração 17. *Sejam λ_1 e λ_2 os dois valores próprios de A , tais que $|\lambda_1 - \lambda_2| > 2e^{-\mu}$, e suponhamos, por absurdo, que a rede (4.6) com uma tal matriz de acoplamento A é comandável-de-forma-total. A Proposição 16 garante, então, que $|\epsilon - (1 + \lambda_1)| \leq e^{-\mu}$ e que $|\epsilon - (1 + \lambda_2)| \leq e^{-\mu}$. Assim sendo, $|\lambda_1 - \lambda_2| = |[\epsilon - (1 + \lambda_2)] - [\epsilon - (1 + \lambda_1)]| \leq |\epsilon - (1 + \lambda_1)| + |\epsilon - (1 + \lambda_1)| \leq e^{-\mu} + e^{-\mu} = 2e^{-\mu}$, o que contradiz a nossa hipótese. Concluimos, pois, que se $|\lambda_1 - \lambda_2| > 2e^{-\mu}$, então a rede (4.6) não é comandável-de-forma-total.*

Se existir um valor próprio λ tal que $Im(\lambda) > e^{-\mu}$, então

$$|\epsilon - (1 + \lambda)| = \sqrt{(\epsilon - 1 - Re(\lambda))^2 + (Im(\lambda))^2} > Im(\lambda) > e^{-\mu},$$

pelo que a rede (4.6) não é comandável-de-forma-total. \square

Existem redes para as quais a janela-de-comando-total pode ser descrita de uma maneira mais simples do que (4.8), tal como a proposição seguinte dá conta.

Proposição 18. *Seja (4.6) uma rede tal que A é diagonalizável com valores próprios reais. Se $\max |a_{ii}| < e^{-\mu}$ e $\lambda_n > -2e^{-\mu}$, sendo λ_n o menor dos valores próprios, então a rede é comandável-de-forma-total e a sua janela-de-comando-total é, q.t.p.,*

$$JCT =]1 - e^{-\mu}, 1 + \lambda_n + e^{-\mu}[\cap [0, \epsilon_{\max}]$$

Demonstração 18. *Visto que A é diagonalizável podemos utilizar a Proposição 16. Se todos os valores próprios de A forem reais, então $|\epsilon - (1 + \lambda_i)| < e^{-\mu}$, ou, de forma equivalente, $\epsilon \in]1 + \lambda_i - e^{-\mu}, 1 + \lambda_i + e^{-\mu}[$, pelo que*

$$JCT = [0, \epsilon_{\max}] \bigcap_{i=1}^n]1 + \lambda_i - e^{-\mu}, 1 + \lambda_i + e^{-\mu}[$$

Sendo λ_1 e λ_n o maior e o menor dos valores próprios de A , respetivamente, então $\bigcap_{i=1}^n]1 + \lambda_i - e^{-\mu}, 1 + \lambda_i + e^{-\mu}[$ será não vazia se e só se $1 + \lambda_n + e^{-\mu} > 1 + \lambda_1 - e^{-\mu}$ ou, de forma equivalente, se e só se $\lambda_n > \lambda_1 - 2e^{-\mu}$. A janela-de-comando-total reduz-se então a $JCT =]1 + \lambda_1 - e^{-\mu}, 1 + \lambda_n + e^{-\mu}[\cap [0, \epsilon_{\max}]$.

Visto que a soma dos elementos de cada linha de A é nula e que os seus elementos não diagonais são não negativos, o Lema 2 de [WuChu95] garante que $\lambda_i \leq 0$. Para além disso, A admite um valor próprio nulo associado ao vetor próprio $\vec{1}$. Então $\lambda_1 = 0$.

Concluimos, pois, que se $\lambda_n > -2e^{-\mu}$, então $\bigcap_{i=1}^n]1 + \lambda_i - e^{-\mu}, 1 + \lambda_i + e^{-\mu}[$ é não-vazio. Para além disso, se $\epsilon_{\max} > 1 + \lambda_1 - e^{-\mu}$, ou, de forma equivalente, $\max |a_{ii}| < e^{-\mu}$, então $[0, \epsilon_{\max}] \bigcap_{i=1}^n]1 + \lambda_i - e^{-\mu}, 1 + \lambda_i + e^{-\mu}[$ é não-vazio, pelo que a rede (4.6) é comandável-de-forma-total e $JCT =]1 - e^{-\mu}, 1 + \lambda_n + e^{-\mu}[\cap [0, \epsilon_{\max}]$, q.t.p.. \square

Uma rede que satisfaça as hipóteses desta proposição, não só é comandável-de-forma-total, como o menor valor da sua janela-de-comando-total, i.e., o menor valor da constante-de-comando que permite comandar a rede de forma total é $\epsilon = 1 - e^{-\mu}$. É de notar que este valor depende apenas da dinâmica dos elementos da rede, sendo independente da estrutura da rede, i.e., sendo independente da matriz de acoplamento A .

Visto que uma matriz simétrica é diagonalizável e que todos os seus valores próprios são reais, a proposição anterior é aplicável a redes (4.6) simétricas, i.e., a redes (4.6) com uma matriz de acoplamento simétrica. Consideramos de seguida dois exemplos de matrizes de acoplamento simétricas. Escolhemo-los de modo a tentarmos perceber de que forma o facto de uma rede ser mais ou menos ligada contribui para a sua vulnerabilidade ou resistência a um comando total. Consideramos, então, as situações extremas no que a isso diz respeito, nomeadamente consideramos uma rede completamente desligada e uma rede completamente ligada.

Proposição 19. *Uma rede completamente desligada, i.e., uma rede (4.6) com uma matriz de acoplamento A nula, é comandável-de-forma-total e a sua janela-de-comando-total é, q.t.p.,*

$$JCT =]1 - e^{-\mu}, 1]$$

Demonstração 19. *Os valores próprios de uma matriz nula são todos nulos, pelo que a Proposição 18 garante que a rede é comandável-de-forma-total. Com efeito, $\lambda_n = 0 > -2e^{-\mu}$ e $\max |a_{ii}| = 0 < e^{-\mu}$, sendo a janela-de-comando-total $JCT =]1 - e^{-\mu}, 1 + e^{-\mu}[\cap [0, \epsilon_{\max}] =]1 - e^{-\mu}, 1 + e^{-\mu}[\cap [0, 1] =]1 - e^{-\mu}, 1]$, q.t.p..* \square

Proposição 20. *Seja uma rede completamente ligada, i.e., uma rede (4.6) com uma matriz de acoplamento*

$$A = c \cdot \begin{bmatrix} -(n-1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -(n-1) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -(n-1) & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -(n-1) \end{bmatrix},$$

onde c é a constante-força-de-acoplamento-global. Se $(n-1)c < e^{-\mu}$, então a rede é comandável-de-forma-total e a sua janela-de-comando-total é, q.t.p.,

$$JCT =]1 - e^{-\mu}, 1 - (n-1)c]$$

Demonstração 20. *Considerando $\det(\frac{1}{c}A - \lambda I_n)$, se substituirmos a primeira linha (L_1) da matriz $\frac{1}{c}A - \lambda I_n$ pela soma de todas as linhas ($\sum_{i=1}^n L_i$), e todas as outras linhas (L_j , com $j = 2, \dots, n$) por $L_j + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n L_i$, obtemos o seguinte expressão para $\det(\frac{1}{c}A - \lambda I_n)$*

$$\det \begin{bmatrix} -(n-1) - \lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -(n-1) - \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -(n-1) - \lambda & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -(n-1) - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{bmatrix} -\lambda & -\lambda & -\lambda & \dots & -\lambda \\ 0 & -n - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -n - \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n - \lambda \end{bmatrix} = \\
&= -\lambda \cdot (-n - \lambda)^{n-1}
\end{aligned}$$

i.e., $\lambda = 0$ e $\lambda = -n$ são os valores próprios de $\frac{1}{c}A$ com multiplicidades algébricas 1 e $n - 1$, respetivamente. Então, os valores próprios de A são $\lambda = 0$ e $\lambda = -nc$, pelo que $]1 - e^{-\mu}, 1 + \lambda_n + e^{-\mu}[=]1 - e^{-\mu}, 1 - nc + e^{-\mu}[$, que é um conjunto não-vazio, se $nc < 2e^{-\mu}$, ou, de forma equivalente, se $\frac{nc}{2} < e^{-\mu}$.

Temos, também, $\max |a_{ii}| = (n - 1)c$, pelo que $\max |a_{ii}| < e^{-\mu} \Leftrightarrow (n - 1)c < e^{-\mu}$. Como, para $n \geq 2$, se tem que $\frac{n}{2} \leq n - 1$, então $\frac{nc}{2} < e^{-\mu} \wedge (n - 1)c < e^{-\mu} \Leftrightarrow (n - 1)c < e^{-\mu}$, e a Proposição 18 garante que, se $(n - 1)c < e^{-\mu}$, então a rede completamente ligada é comandável-de-forma-total. Sendo $(n - 1)c < e^{-\mu}$, ou, de forma equivalente, $c < \frac{e^{-\mu}}{n - 1}$, temos que $1 - nc + e^{-\mu} > 1 - nc + c$, ou, de forma equivalente, $1 - nc + e^{-\mu} > 1 - (n - 1)c$, pelo que a janela-de-comando-total é $JCT =]1 - e^{-\mu}, 1 - nc + e^{-\mu}[\cap]0, 1 - (n - 1)c[=]1 - e^{-\mu}, 1 - (n - 1)c[$, *q.t.p.*. \square

Verificamos, pois, que enquanto uma rede completamente desligada é sempre comandável-de-forma-total, uma rede completamente ligada é tanto mais resistente ao comando-total quanto maior for a rede (quanto maior for n) e quanto mais fortes forem as ligações entre os elementos da rede (quanto maior for c). Estas conclusões indiciam alguns dos resultados importantes a que o estudo do *pinning control* tem chegado, como seja o facto de que quando controlamos apenas alguns nodos de uma rede, o controlo

total da rede é mais facilmente conseguido controlando os nodos mais ligados do que controlando nodos escolhidos aleatoriamente [WaChen02a], [WaSu14].

Com o propósito de exemplificarmos numericamente alguns dos resultados obtidos, utilizamos redes de quatro elementos, supondo que a dinâmica livre dos nodos é descrita pela logística, e analisamos a possibilidade do seu comando-total. Consideramos redes dos dois tipos que acabámos de analisar, nomeadamente uma rede completamente desligada e duas redes completamente ligadas com diferentes constantes-força-de-acoplamento-global, $c = 0.1$ e $c = 0.2$. Representando cada elemento da rede por um vértice e ligando com uma aresta os vértices correspondentes aos sistemas dinâmicos entre os quais há interação, estas redes podem ser esquematizadas pelos grafos das figuras 4.19 e 4.20. Nestas figuras, apresentamos também, à direita de cada grafo, o gráfico

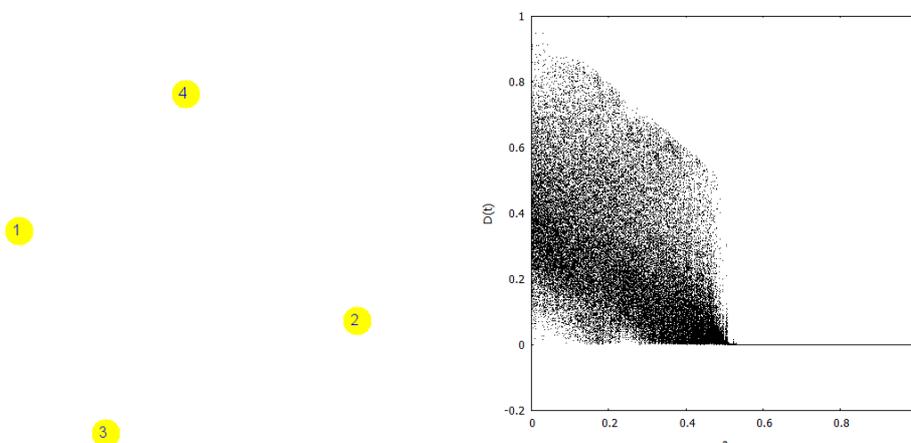


Figura 4.19: Grafo de uma rede completamente desligada (à esquerda) e correspondentes iteradas $D(t)$ em função de ϵ (à direita).

das iteradas $D(t) = \frac{1}{4} \cdot (|x_1(t) - y(t)| + |x_2(t) - y(t)| + |x_3(t) - y(t)| + |x_4(t) - y(t)|)$ que se obtêm utilizando o procedimento numérico que temos seguido. Uma rede ser comandada-de-forma-total pelo ditador corresponde a $D(t) \simeq 0$, para valores de t suficientemente elevados, pelo que tais gráficos permitem visualizar as janelas-de-comando-

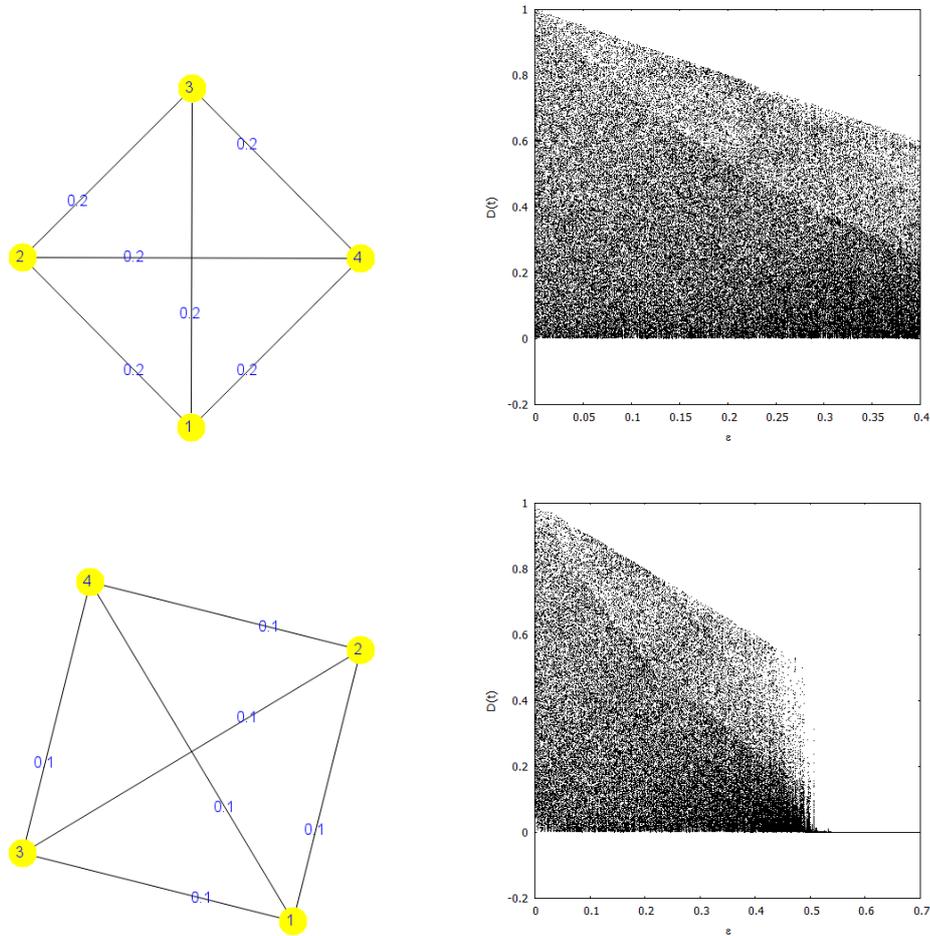


Figura 4.20: Grafos de duas redes completamente ligadas (à esquerda) e correspondentes iteradas $D(t)$ em função de ϵ (à direita).

total que se obtêm numericamente. Os gráficos mostram, pois, que, dos três casos considerados, a rede completamente ligada com constante-força-de-acoplamento global $c = 0.2$ é a única que não é comandável-de-forma-total. Este resultado é confirmado pelas proposições 19 e 20, visto que $\mu = \ln 2$ e $n = 4$, pelo que para $c = 0.2$ temos $(n-1)c = 0.6 > 0.5 = e^{-\mu}$, enquanto que para $c = 0.1$ temos $(n-1)c = 0.3 < 0.5 = e^{-\mu}$. Essas proposições confirmam também as janelas-de-comando-total obtidas numericamente já que o menor valor das que são não-vazias é $1 - e^{-\mu} = 0.5$.

Consideramos, agora, duas outras redes de quatro elementos, correspondentes a uma situação intermédia entre uma rede completamente ligada e uma rede completamente

desligada, no que diz respeito às ligações estabelecidas entre nodos. Consideramos duas redes com três ligações cada, mas dispostas de maneiras diferentes, nomeadamente, uma rede em linha, correspondente à matriz de acoplamento

$$A_1 = 0.2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e uma rede em estrela, como a que é utilizada em [LiCh03], correspondente à matriz de acoplamento

$$A_2 = 0.2 \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Na figura 4.21, à esquerda, apresentamos os grafos que lhes estão associados, apresentando à direita os correspondentes gráficos das iteradas $D(t)$.

A Proposição 18 confirma os resultados que os gráficos mostram em relação às janelas-de-comando-total. Com efeito, os valores próprios de A_1 são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = (-2 + \sqrt{2}) \cdot 0.2 \simeq -0.117$, $\lambda_3 = -2 \cdot 0.2 = -0.4$, $\lambda_4 = (-2 - \sqrt{2}) \cdot 0.2 \simeq -0.683$, pelo que a correspondente rede (4.6) é comandável-de-forma-total, já que $\lambda_4 = -0.683 > -1 = -2e^{-\mu}$ e $\max |a_{ii}| = 0.4 < 0.5 = e^{-\mu}$. Já a rede (4.6) com matriz de acoplamento A_2 não é controlável-de-forma-total, visto que, apesar de $\lambda_4 = -0.8 > -1 = -2e^{-\mu}$ (os valores próprios de A_2 são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1 \cdot 0.2 = -0.2$, $\lambda_4 = -4 \cdot 0.2 = -0.8$), temos $\max |a_{ii}| = 0.6 > 0.5 = e^{-\mu}$.

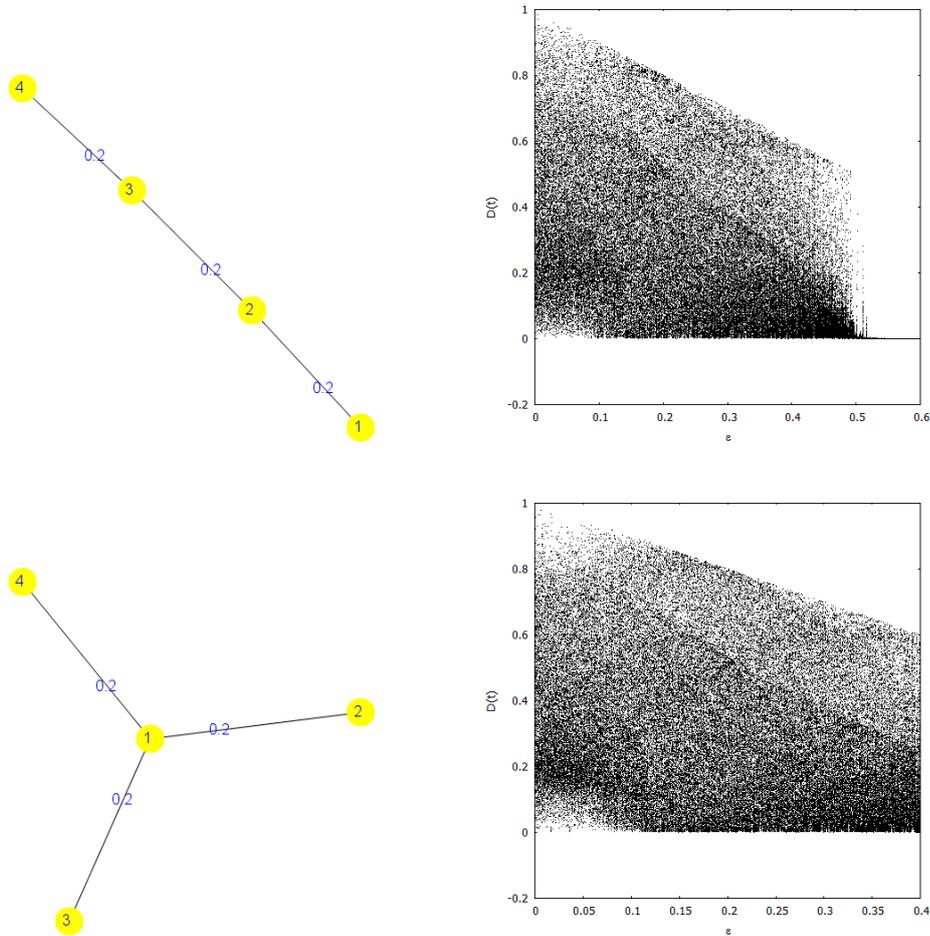


Figura 4.21: Grafos das redes com matrizes de acoplamento A_1 e A_2 (à esquerda, em cima e em baixo, respetivamente) e correspondentes iteradas $D(t)$ em função de ϵ (à direita).

Estes dois exemplos mostram como uma rede com um certo número de nodos e de ligações pode deixar de ser comandável-de-forma-total, se dispusermos as ligações de uma outra maneira, neste caso concentrando-as em torno de um dos nodos.

Em todos os exemplos considerados verificamos que, para a delimitação das janelas obtidas, as limitações decorrentes de ϵ_{\max} acabam por sobrepor-se às limitações que os valores próprios da matriz de acoplamento determinam. Antes de concluirmos, será, pois, interessante analisarmos uma variante do tipo de rede considerada, em que fiquem arredadas as limitações decorrentes de ϵ_{\max} , para que as que decorrem dos valores

próprios da matriz de acoplamento possam manifestar-se. Consideramos, então, redes comandadas descritas igualmente por (4.7) mas em que não impomos limitações nem a ϵ nem aos a_{ij} (com $i \neq j$), i.e., permitimos que a constante-força-de-comando bem como os elementos não diagonais da matriz de acoplamento assumam quaisquer valores em $[0,1]$. Assim sendo, algumas das iteradas podem sair do intervalo de iteração, pelo que a descrição da rede só está completa definindo de que modo essas iteradas são repostas no intervalo de iteração. No entanto, a forma como isso acontece é indiferente para a delimitação da janela-de-comando-total já que numa situação de sincronização completa os termos de interação anulam-se e quer ϵ quer os a_{ij} deixam de interferir na evolução do comportamento da rede. É, pois, indiferente o prolongamento de f a \mathbb{R} que consideramos. Optámos por proceder do seguinte modo: de cada vez que uma iterada $x_i(t)$ assume um valor que não pertence ao intervalo de iteração $[0,1]$, substituímo-lo por um valor escolhido aleatoriamente neste intervalo. Atuando desta forma, e repetindo o procedimento numérico que nos levou aos gráficos das iteradas $D(t)$ das figuras 4.20 e 4.21, obtivemos os gráficos que apresentamos na figura 4.22. Não fizemos o mesmo para a rede correspondente à figura 4.19 pois para uma rede completamente desligada não existem limitações decorrentes de ϵ_{\max} e as iteradas nunca saem do intervalo de iteração.

As janelas-de-comando-total que a figura 4.22 permite identificar são confirmadas pelo cálculo analítico que a adaptação da Proposição 18 ao novo tipo de rede fornece e que enunciamos de seguida.

Proposição 21. *Seja (4.6) uma rede tal que A é diagonalizável com valores próprios reais, e em que é feita reposição aleatória no intervalo de iteração $[0,1]$ das iteradas que dele saem. Se $\lambda_n > -2e^{-\mu}$, sendo λ_n o menor dos valores próprios, então a rede é*

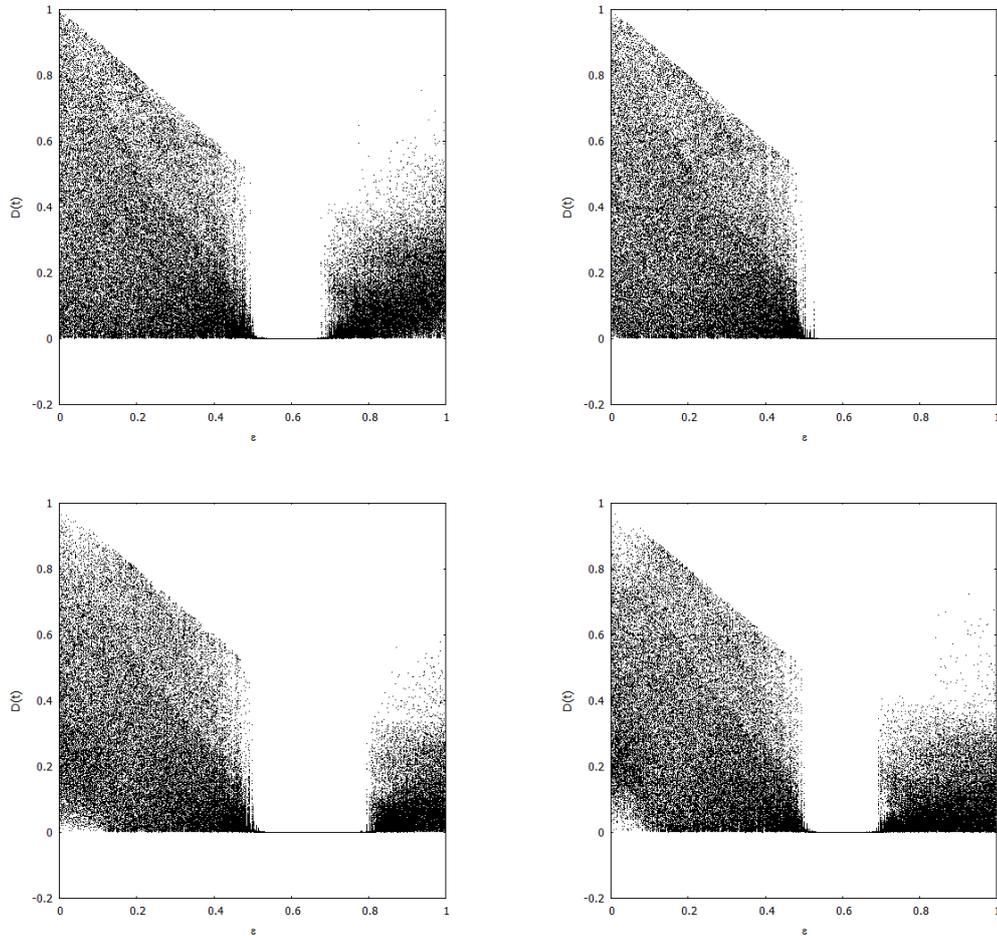


Figura 4.22: Gráficos das iteradas $D(t)$ em função de ϵ para redes de quatro elementos completamente ligadas com $c = 0.2$ (em cima, à esquerda) e $c = 0.1$ (em cima, à direita), e em linha com $c = 0.2$ (em baixo, à esquerda) e em estrela com $c = 0.2$ (em baixo, à direita)

comandável-de-forma-total e a sua janela-de-comando-total é, q.t.p.,

$$JCT =]1 - e^{-\mu}, 1 + \lambda_n + e^{-\mu} [\cap [0, 1]$$

Demonstração 21. *Pelas razões já expostas, esta demonstração resume-se à da Proposição 18, omitindo a parte final que diz respeito às limitações que decorrem de ϵ_{\max} .*

O resultado que aí obtivemos é, então, agora válido, desde que substituamos ϵ_{\max} por

1. □

Para redes completamente ligadas, obtemos então a proposição seguinte.

Proposição 22. *Seja uma rede completamente ligada com constante-força-de-acoplamento-global c e em que é feita reposição aleatória no intervalo de iteração $[0,1]$ das iteradas que dele saem. Se $nc < 2e^{-\mu}$, então a rede é comandável-de-forma-total e a sua janela-de-comando-total é, q.t.p.,*

$$JCT =]1 - e^{-\mu}, 1 - nc + e^{-\mu}[\cap [0,1]$$

Demonstração 22. *Visto que $\lambda_n = -nc$, tal como obtivemos na demonstração da Proposição 20, então a Proposição 21 fornece o presente resultado.* □

Verificamos que continua a ser válida a conclusão de que uma rede completamente ligada é tanto mais resistente ao comando-total quanto maior for a rede (quanto maior for n) e quanto mais fortes forem as ligações entre os elementos da rede (quanto maior for c).

A aplicação da Proposição 22 às redes correspondentes aos grafos da figura 4.20, garante que ambas são comandáveis-de-forma-total, visto que, sendo $n = 4$, uma rede completamente ligada de sistemas dinâmicos com dinâmicas livres descritas pela logística (a que corresponde $\mu = \ln 2$) é comandável-de-forma-total para $c < \frac{2e^{-\ln 2}}{4} = 0.25$. A figura 4.22, ao exibir janelas-de-comando-total não-vazias para estas redes, ilustra que assim é. Para além disso, a Proposição 22 confirma essas janelas, já que, para $c = 0.2$, fornece $JCT =]1 - 0.5, 1 - 4 \cdot 0.2 + 0.5[\cap [0,1] =]0.5, 0.7[$ e, para $c = 0.1$, $JCT =]1 - 0.5, 1 - 4 \cdot 0.1 + 0.5[\cap [0,1] =]0.5, 1[$.

Para a rede em linha, correspondente ao grafo da figura 4.21, em cima, visto que $\lambda_4 = (-2 - \sqrt{2}) \cdot 0.2 \simeq -0.683$, a Proposição 21 garante que a rede é comandável-de-forma-total, pois $\lambda_4 \simeq -0.683 > -2e^{-\ln 2} = -1$, correspondendo-lhe uma janela-de-comando-total $JCT =]1 - 0.5, 1 - 0.683 + 0.5[\cap [0, 1] =]0.5, 0.817[$, o que confirma o resultado obtido numericamente no correspondente gráfico da figura 4.22.

Para a rede em estrela, correspondente ao grafo da figura 4.21, em baixo, visto que $\lambda_4 = -4 \cdot 0.2 = -0.8$, a Proposição 21 garante que a rede é comandável-de-forma-total, pois $\lambda_4 = -0.8 > -2e^{-\ln 2} = -1$, correspondendo-lhe uma janela-de-comando-total $JCT =]1 - 0.5, 1 - 0.8 + 0.5[\cap [0, 1] =]0.5, 0.7[$, o que confirma o resultado obtido numericamente no correspondente gráfico da figura 4.22.

Se aumentarmos, em ambas estas duas últimas redes, a constante-força-de-acoplamento-global para $c = 0.25$, a rede em linha mantém-se comandável-de-forma-total, pois $\lambda_4 = (-2 - \sqrt{2}) \cdot 0.25 \simeq -0.854 > -2e^{-\ln 2} = -1$, correspondendo-lhe uma janela-de-comando-total $JCT =]1 - 0.5, 1 - 0.854 + 0.5[\cap [0, 1] =]0.5, 0.646[$, mas a rede em estrela deixa de o ser pois passa a ser falso que $\lambda_4 = -4 \cdot 0.25 = -1 > -2e^{-\ln 2} = -1$. Estes resultados confirmam aqueles que se obtêm numericamente utilizando a aborda-

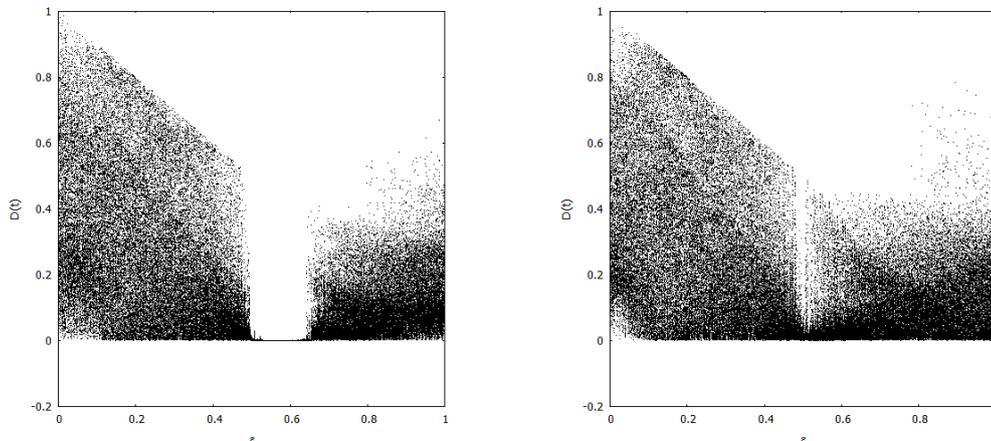


Figura 4.23: Gráficos das iteradas $D(t)$ em função de ϵ para redes de quatro elementos com $c = 0.25$ em linha (à esquerda) e em estrela (à direita)

gem que temos seguido e que fornece os gráficos da figura 4.23, onde é visível que apesar da janela-de-comando-total da rede em linha estreitar, a rede mantém-se comandável-de-forma total, o que não acontece com a rede em estrela, em que a janela-de-comando-total passa a ser vazia. Ilustramos, assim, também para este tipo de rede em que não existem as anteriores limitações impostas a ϵ e a a_{ij} , que uma rede com um certo número de nodos e de ligações pode deixar de ser comandável-de-forma-total, se dispusermos as ligações de uma outra maneira, neste caso concentrando-as em torno de um dos nodos.

Capítulo 5

Conclusões

Tudo o que é sujeito a uma interação ressent-se disso. Tal teria de acontecer também, obviamente, com os sistemas dinâmicos caóticos. Confirmámos que assim é, analisando a forma como um sistema dinâmico caótico reage quando o acoplamos a outro (ou outros). Prestámos especial atenção a dois aspetos: a possibilidade de o seu comportamento caótico ser destruído e a possibilidade de surgimento de sincronização. Relativamente a ambos estes aspetos, pudemos concluir que, tão ou mais importante do que a dinâmica do sistema livre, é o tipo de acoplamento a que fica sujeito. Pudemos constatar que assim é, analisando vários tipos de acoplamentos e várias dinâmicas livres. Para todos os casos foi feita a análise do acoplamento em função da constante-força-de-acoplamento, dando origem a que definíssemos janelas de comportamento correspondentes àqueles valores da constante-força-de-acoplamento para os quais se manifesta o correspondente comportamento.

Relativamente à destruição do comportamento caótico, analisámos como ela pode resultar de uma situação de ponto fixo ou de uma situação periódica de período-2, sincronizada desfasada. Ambas estas situações podem ocorrer num Acoplamento Li-

near Simétrico, deixando a segunda de ser possível quando consideramos Acoplamentos Lineares de sistemas não idênticos. Vimos, aliás, que a existência de uma janela-de-período-2-sincronizada-desfasada não vazia é bastante mais restritiva do que a de uma janela-de-ponto-fixo. Caracterizámos, então, um tipo de acoplamentos que pode dar origem a janelas-de-período-2-sincronizadas-desfasadas, nomeadamente acoplamentos simétricos entre sistemas idênticos. Concretizámo-lo através da criação do Acoplamento Simétrico Passado e pudemos confirmar o aparecimento de tais janelas.

O interesse em localizar janelas-de-ponto-fixo levou-nos a reconhecer a importância que um valor reduzido do módulo da derivada da aplicação que descreve a dinâmica livre tem na criação de pontos fixos exponencialmente estáveis. Com efeito, verificámos que se o comportamento caótico de um acoplamento "sossega" em ponto fixo, um dos sistemas dinâmicos assume um valor λ que corresponde um módulo reduzido da derivada da aplicação que descreve a sua dinâmica livre. Na sequência disso, obtivemos uma estratégia para tentar localizar janelas-de-ponto-fixo não vazias. Aplicámo-la com sucesso a vários Acoplamentos Lineares, quer entre sistemas dinâmicos idênticos, quer entre sistemas dinâmicos não idênticos.

Pudemos, pois, verificar que a interação de dois sistemas dinâmicos com comportamento caótico pode "sossegá-los", i.e., pode destruir o comportamento caótico de ambos, e obtivemos formas de identificar como atuar para que tal aconteça, através da criação de determinado tipo de acoplamento, com determinado valor da constante-força-de-acoplamento.

Relativamente à sincronização, definimos R -sincronização, a propósito da sincronização generalizada, e reconhecemos como a sincronização completa e a sincronização desfasada são casos particulares de R -sincronização. Obtivemos condições que

garantem que um qualquer destes tipos de sincronizações possa ocorrer, o que nos levou a definir vários outros tipos de acoplamento: Acoplamento Comandado pelo Passado, Acoplamento Comandado pelo Futuro, Acoplamento Comandado pelo Pós-Futuro, Acoplamento Bidirecional Desfasado, Acoplamento u^2 -Comandado, Acoplamento u^2 -Bidirecional, Acoplamento \sqrt{u} -Comandado. Criámos assim acoplamentos que reproduzem comportamentos desejados, nomeadamente que são capazes de sincronizar de uma determinada maneira que escolhamos. Obtivemos também as janelas-de-sincronização correspondentes, tendo-as exemplificado numericamente através da concretização dos vários acoplamentos para várias dinâmicas livres.

Ao estendermos o estudo da sincronização completa a uma rede de sistemas dinâmicos com interações lineares, os resultados dos acoplamentos comandados sugeriram-nos que analisássemos a possibilidade de que um ditador - assim designámos um novo nodo com interação unidirecional - comandasse a rede de forma total. Concluímos, então, que algumas redes são comandáveis-de-forma-total por um ditador, estando a possibilidade de comando-total dependente da estrutura da rede, nomeadamente dos valores próprios da matriz de acoplamento, e da dinâmica dos seus nodos, nomeadamente do seu expoente de Lyapunov. Ganhámos, também, de forma simples, percepção de algumas conclusões a que o estudo do *pinning control* tem chegado, reconhecendo, entre outros resultados, que uma rede completamente ligada resiste melhor a um comando total quanto mais extensa e mais ligada for, e que numa rede simétrica, comandável-de-forma-total o "esforço mínimo" para que o comando total se estabeleça (i.e., o menor valor da constante-força-de-comando) é independente da estrutura da rede, dependendo apenas da dinâmica livre de cada um dos sistemas dinâmicos que formam a rede.

O estudo feito não só deixa em aberto vários caminhos a seguir (criação de outros

tipos de acoplamentos que satisfaçam as condições obtidas para o surgimento de determinado tipo de comportamento, criação de outros tipos acoplamentos ou dinâmicas que resistam a esses comportamentos, criação de outros tipos de comando de rede, adaptação dos resultados a outros tipos de sistemas dinâmicos, etc.) como fornece resultados que permitem aplicações úteis aos mais diversos domínios em que a existência de sistemas dinâmicos se manifesta.

Não queremos, aliás, terminar sem salientar que a abordagem que seguimos permite-nos obter um resultado no mínimo curioso (ou talvez não): a mudança de comportamento que vai acontecendo num Acoplamento Linear Simétrico quando a constante-força-de-acoplamento aumenta parece reproduzir a mudança de comportamento afetivo e/ou social que muitas vezes se estabelece entre duas pessoas à medida que a ligação entre elas se fortalece: uma ligação fraca (i.e., valores da constante-força-de-acoplamento reduzidos) pode dar origem a uma alternância de papéis ("ora-agora-dominas-tu-ora-agora-domino-eu", correspondente à janela-de-período-2-sincronizada-desfasada), uma ligação mediana (i.e., valores da constante-força-de-acoplamento perto de $c = 0.5$) cria uma sincronia de comportamento ("imitação comportamental", correspondente à janela-de-sincronização), uma ligação forte (i.e., valores da constante-força-de-acoplamento elevados) pode redundar numa pacificação de papéis ("dominador-dominado", correspondente à janela-de-ponto-fixado). Também relativamente ao comportamento de uma rede e sua possibilidade de comando total os resultados obtidos parecem reproduzir padrões reconhecíveis do comportamento humano. É, pois, grande a motivação para que este nosso estudo seja aplicado à psicologia, no âmbito da análise comportamental de relacionamentos a dois ou de grupo. A sua aplicação a outros domínios afigura-se como sendo igualmente útil, pois, apesar de o surgimento dos "pa-

drões comportamentais" poder ser menos notório noutros domínios, a aplicação que a eles podemos fazer do nosso estudo permitirá com certeza evidenciar esses "padrões comportamentais".

Fica, pois, no ar a perturbadora pergunta: será que tudo é, afinal, só Matemática?



Bibliografia

[AuKi01] B. Aulbach, B. Kieninger, On Three Definitions of Chaos, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 1, 1, 23-37, (2001)

[BanBroCa92] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, On Devaney's Definition of Chaos, *American Mathematical Monthly*, 99, 332-334, (1992)

[BenGalGi80] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J. M. Strelcyn,. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: a method for computing all of them, *Meccanica*, 15, 1, 9-20, (1980).

[BlaLo12] A. B. Bloya, V. J. López, On the relations between positive Lyapunov exponents, positive entropy, and sensitivity for interval maps, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 32, 2, 433-466, (2012)

[BoGreLai00] S. Boccaletti, C. Grebogi, Y.-C. Lai, H. Mancini, D. Maza, The control of chaos: theory and applications, *Phys. Rep.*, 329, 103-197, (2000)

[BoKurOsi02] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, C. S. Zhou, The synchronization of chaotic systems, *Phys Rep* , 366, 1-101, (2002)

[BroKo00] R. Brown, L. Kocarev, A unifying definition of synchronization for dynamical systems, *Chaos*, 10, 344-349, (2000)

[CenCecVul10] M. Cencini, F. Cecconi, A. Vulpiani, Chaos: From Simple Models to Complex Systems, *World Scientific Publishing*, (2010).

[Chen04] L.-Q. Chen, A general formalism for synchronization in finite dimensional dynamical systems, *Chaos, Solitons and Fractals*, 19, 1239-1242, (2004)

[CheLu02] S. Chen, J. Lu, Parameters identification and synchronization of chaotic systems based upon adaptive control, *Phys. Lett. A*, 299, 353-358, (2002)

[CheWaLi15] G. Chen, X. Wang, X. Li, Fundamentals of Complex Networks: Models, Structures and Dynamics, *Wiley*, (2015)

[CheZhu07] T. Chen, Z. Zhu, Exponential synchronization of nonlinear coupled dynamical networks, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17, 3, 999-1005, (2007)

[Corbet88] A. B. Corbet, Suppression of chaos in 1-D maps, *Phys. Lett. A*, 130, 267-270, (1988)

[Danca15] M.-F. Danca, Lyapunov exponents of a class of piecewise continuous systems of fractional order, *Nonlinear Dyn.*, DOI 10.1007/s11071-015-1984-6, (2015)

[Devan89] R. L. Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, *Addison-Wesley Publishing Company*, (1989)

[DinYan97] M. Ding, W. Yang, Stability of synchronous chaos and on-off intermittency in coupled map lattices, *Phys. Rev. E*, 56, 4, 4009-4016, (1997)

[FenJoQi07] J. Feng, J. Jost, M. Qian, Networks: From Biology to Theory, (2007)

[Fouc01] S. Foucart, On definitions of discrete topological chaos and their relations on intervals, *Cambridge Tripos Part III Essay*, (2001)

[GaoSunYa06] J. Gao, B. Sun and J. Yang, The Construction of the Cubic Logistic Chaotic Function Family, *Proc. of Sixth World Congress on Intelligent Control and Automation*, (2006)

[GilLef11] R. Gilmore, M. Lefranc, The topology of chaos, Alice in the stretch and

squeezeland, *Wiley-VCH*, (2011)

[Goodson15] G. R. Goodson, *Chaotic Dynamics: Fractals, Tiling and Substitutions*, *Cambridge University Press, New York*, (2015)

[GruSonWir99] L. Grune, E. D. Sontag, F. R. Wirth, Asymptotic stability equals exponential stability, and ISS equals finite energy gain - if you twist your eyes, *Systems & Control Letters* *38*, 127-134, (1999)

[HasMai97] M. Hasler, Y. L. Maistrenko Y. L., An Introduction to the Synchronization of Chaotic Systems: Coupled Skew Tent Maps, *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, *44*, 10, 856-866, (1997)

[Hilborn00] R. C. Hilborn, *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*, *Oxford University Press*, (2000)

[Jost05] J. Jost, *Dynamical Systems: Examples of Complex Behaviour*, *Springer*, (2005)

[KorTruKhra02] A. A. Koronovskii, D. I. Trubetskov, A. E. Khramov, A. E. Khramova, Universal Scaling Laws of Transients, *Doklady Akademii Nauk*, *383*, 3, 322-325 (2002)

[LiCh03] X. Li, G. Chen, Synchronization and Desynchronization of Complex Dynamical Networks: An Engineering Viewpoint, *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, *50*, 11, 1381-1390, (2003)

[LoFerGra14a] L. Lopes, S. Fernandes, C. Grácio, "Windows of Synchronization" and "Non-chaotic Windows", *ESAIM: Proceedings and Surveys*, *46*, 161-174, (2014)

[LoFerGra14b] L. Lopes, S. Fernandes, C. Grácio, Complete synchronization and delayed synchronization in couplings, *Nonlinear Dynamics*, *76*, 3, DOI 10.1007/s11071-014-1764-8, (2014)

[Milnor92] J. Milnor, Remarks on iterated cubic maps, *Experimental Mathematics*, 1, 1, 5-24, (1992)

[Nolte15] D. D. Nolte, Introduction to Modern Dynamics: Chaos, Networks, Space and Time, *Oxford University Press*, (2015)

[OliPaLeo13] J. A. Oliveira, E. R. Papesso, E. D. Leonel, Relaxation to Fixed Points in the Logistic and Cubic Maps: Analytical and Numerical Investigation, *Entropy*, 15, 4310-4318, (2013)

[OniSoe15] M. Onitsuka, T. Soeda, Uniform asymptotic stability implies exponential stability for nonautonomous half-linear differential systems, *Advances in Difference Equations*, DOI 10.1186/s13662-015-0494-7, (2015)

[Ose168] V. I. Oseledets, A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 19, 197-231, (1968)

[OttGreYor90] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke, Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 64, 11, 1196-1199 (1990).

[PaPaSud02] V. Patidar, N. K. Pareek, K. K. Sud, Suppression of Chaos Using Mutual Coupling, *Phys. Lett. A*, 304, 121-129, (2002)

[PecoCar90] L.M. Pecora, T.L. Carroll, Synchronization in Chaotic Systems, *Phys. Rev. Lett.*, 64, 8, 821-825, (1990)

[PiRoKur01] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, Synchronization, A Universal Concept in Nonlinear Sciences, *Cambridge University Press, Cambridge*, (2001)

[QiuLuCao11] J. Qiu, J. Lu, J. Cao, H. He, Tracking analysis for general linearly coupled dynamical systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 16, 2072-2085, (2011)

[RanDin02] G. Rangarajan, M. Ding, Stability of Synchronized Chaos in Coupled

Dynamical Systems, *Phys. Lett. A*, 296, 204-209, (2002)

[ReLenThom10] G. Rega, S. Lenci, J. M. T. Thompson, Controlling Chaos: The OGY Method, Its Use in Mechanics, and an Alternative Unified Framework for Control of Non-regular Dynamics, *Nonlinear Dynamics and Chaos: Advances and Perspectives*, Springer-Verlag, Berlin, 211-269, (2010).

[SchoSchu07] E. Scholl, H. G. Schuster, Handbook of Chaos Control, *Wiley-VCH*, (2007)

[SheAmb15] S. M. Shekatkar, G. Ambika, Novel coupling scheme to control dynamics of coupled discrete systems, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 25, 50-65, (2015)

[Smith98] P. Smith, Explaining Chaos, *Cambridge University Press*, (1998)

[Wang02] X. F. Wang, Complex Networks: Topology, Dynamics and Synchronization, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12, 5, 885-916, (2002)

[WaChen02a] X. F. Wang, G. Chen, Pinning control of scale-free dynamical networks, *Physica A*, 310, 521-531, (2002)

[WaChen02b] X. F. Wang, G. Chen, Synchronization in scale-free dynamical networks: Robustness and fragility, *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 49, 54-62, (2002)

[WaSu14] X. F. Wang, H. Su, Pinning control of complex networked systems: A decade after and beyond, *Annual Reviews in Control*, 38, 1, 103-111, (2014)

[WuChu95] C. W. Wu, L. O. Chua, Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems, *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 42, 430-447, (1995)

[ZhaLiuMa07] G. Zhang, Z. R. Liu, Z. J. Ma, Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems, *Chaos, Solitons and Fractals*, 32, 2, 773-779, (2007)

[ZhaLiuWa09] H. G. Zhang, D. R. Liu, Z. L. Wang, Controlling Chaos: Suppression,

Synchronization and Chaotification, *Springer, Germany*, (2009)

[ZhaZhaLiu10] G. Zhang, W. Zhang, Z.-R. Liu, Synchronization of Coupled Non-identical Dynamical Systems, *Chin. Phys. Lett.*, *27*, 3, 030504, (2010)



UNIVERSIDADE DE ÉVORA
INSTITUTO DE INVESTIGAÇÃO
E FORMAÇÃO AVANÇADA

Contactos:

Universidade de Évora
Instituto de Investigação e Formação Avançada — IIFA
Palácio do Vimioso | Largo Marquês de Marialva, Apart. 94
7002 - 554 Évora | Portugal
Tel: (+351) 266 706 581
Fax: (+351) 266 744 677
email: iifa@uevora.pt