Universidade de Évora

Departamento de Pedagogia e Educação

POTENCIALIDADES DAS TAREFAS DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA COM RECURSO A CALCULADORAS GRÁFICAS E SENSORES NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA DOS ALUNOS

CLÁUDIA GABRIELA ESTEVÉNS LANÇA

Orientadora: Professora Doutora Ana Paula Canavarro

Mestrado em Educação Matemática

2007

Universidade de Évora

Departamento de Pedagogia e Educação

POTENCIALIDADES DAS TAREFAS DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA COM RECURSO A CALCULADORAS GRÁFICAS E SENSORES NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA DOS ALUNOS

CLÁUDIA GABRIELA ESTEVÉNS LANÇA

Licenciada em Ensino de Matemática

Universidade de Évora

Dissertação Apresentada para Obtenção do Grau de Mestre
em Educação e na Especialidade de Educação Matemática

Orientadora: Professora Doutora Ana Paula Canavarro

2007

RESUMO

O presente estudo tem como principal objectivo compreender as potencialidades das tarefas de modelação, com recurso à calculadora gráfica e sensores, na aprendizagem matemática dos alunos. De modo a se enquadrar os objectivos propostos para este estudo, elaboraram-se as questões de investigação seguintes:

a) Como é que os alunos encaram e se envolvem em tarefas de modelação?
b) Como é que os alunos desenvolvem a actividade de modelação?
c) Como é que a tecnologia, calculadoras gráficas e sensores, contribui para o desenvolvimento da actividade de modelação?

Tendo por base os objectivos do estudo, adoptou-se uma metodologia de natureza qualitativa, de tipo interpretativo ou analítico, visando a descrição, compreensão e análise das perspectivas e dos processos de construção do conhecimento desenvolvidos por um grupo de quatro alunos no decurso de uma sequência de actividades de modelação. Os dados empíricos foram recolhidos através de observação participante, de entrevistas semi-estruturadas e de documentos escritos pelos intervenientes. No decorrer dos 2º e do 3º períodos do ano lectivo 2005/2006, na turma A do 9º ano de escolaridade de uma escola secundária do Alentejo, tendo-se abordado, durante a investigação, a unidade didáctica *Proporcionalidade inversa. Representações gráficas*.

As principais conclusões do estudo permitem afirmar que esta intervenção didáctica **(i)** fomentou nos alunos uma atitude bastante positiva face a todo o contexto educacional e o gosto em desenvolverem actividades intelectuais deste tipo; **(ii)** tornou a aprendizagem da matemática uma actividade experimental, construtiva, interactiva e reflexiva; **(iii)** foi a fonte para os alunos compreenderem com significado e aprenderem com facilidade os conceitos que lhes foram introduzidos; e construírem, reorganizarem, e amplificarem os seus conhecimentos e desenvolverem as suas capacidades; **(iv)** proporcionou-lhes um conjunto de aprendizagens significativas; **(v)** impulsionou a produção gradual de abstracções – o raciocínio matemático tornou-se progressivamente mais formal; **(vi)** deu oportunidade aos alunos de observarem, analisarem, questionarem, procurarem respostas e descobrirem por eles próprios, em vez de se limitarem a confirmar observações, memorizar, responder, aprender com respostas dadas e a saber a informação por lhes ser transmitida; **(vii)** proporcionou que a Matemática e a Realidade estivessem conectadas e, ao mesmo tempo, que a construção de modelos fosse um processo dinâmico e contínuo de reorganização progressiva da situação e não apenas uma tradução da mesma.

Conclui-se ainda que, no que diz respeito à utilização da calculadora gráfica e sensores, estes influenciaram de forma determinante o contexto e o desenvolvimento da actividade dos alunos, tornaram a aprendizagem mais fácil e intuitiva, serviram de suporte aos alunos para conseguirem atingir propósitos mais complexos. A calculadora permitiu que os modelos fossem tratados como objectos concreto-abstractos. Os sensores proporcionaram uma estreita conexão entre o modelo matemático e o modelo real.

Palavras-chave: Modelação Matemática, Processo de Modelação, Funções, actividades com calculadoras gráficas e sensores.

Potentialities of mathematical modelling using graphic calculators and data collectors to students' mathematical learning.

ABSTRACT

The main objective of the present study is to understand the potentialities of modelling tasks, using graphic calculator and data collector, to students' mathematical learning. So, it is important to answer the following questions:

a) How do students face and evolve with modelling tasks?
b) How do students develop the modelling activity?
c) How do technology, graphic calculators and data collectors, contribute to the development of the activity modelling?

A qualitative methodology was adopted, interpretative and analytical, aiming the description, understanding and analysis of the perspectives and of the processes of construction of knowledge of a group of four students in the course of a sequence of modelling tasks. The empirical data were collected through participant observation, interviews and analysis of documents, during 2nd and 3rd periods of the lection year 2005/2006, in a 9th degree class of one secondary school of Alentejo, having approached, during the investigation, the didactic unit of *Inverse proportionality. Graphic representations.*

To what concerns the didactic intervention, the main conclusions of the study are:

(i) it fomented a quite positive attitude in students face the mathematical education context; **(ii)** it turned the learning of the mathematics a quite experimental, constructive, interactive and reflexive activity; **(iii)** it provided meaning for students to understand and to learn more easily the concepts that were introduced to them; **(iv)** it provided them with significant learning; **(v)** it enhanced the gradual production of abstractions - the mathematical reasoning was increasingly formal; **(vi)** it gave the opportunity to students to observe, to analyze, to question, to look for answers and to discover for themselves; **(vii)** it provided the connection of Mathematics and Reality and, at the same time, the construction of models became a dynamic process and a continue of progressive reorganization of the situation and not just a translation of it.

In addition, to what concerns the use of the graphic calculator and data collectors, they influenced in a decisive way the context and the development of students' activity, they allowed intuitive learning, they supported students to reach more complex purposes. The calculator allowed the models to be treated as concrete-abstract objects. Data collectors provided a narrow connection between the mathematical model and the real model.

Word-key: Mathematical Modelling, Modelling Process, Functions, activities with graphic calculators and data collectors.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Paula Canavarro, pelo seu profissionalismo, interesse e apoio na orientação deste estudo, assim como pelas sugestões e críticas pertinentes que inspiraram o meu caminho.

Ao meu colega Jacinto Salgueiro, pela sua colaboração, profissionalismo, entusiasmo e disponibilidade que foram essenciais para a realização e prosseguimento deste estudo.

Aos alunos da turma do 9º A, em especial aos intervenientes no estudo, pela participação, colaboração e disponibilidade demonstradas.

Ao meu marido pela amizade, carinho e paciência demonstradas ao longo deste trabalho.

Ao Nuno, a quem dedico este trabalho, pela alegria de o ter como filho e por me ter ensinado, durante estes seus primeiros seis meses de vida, que o corpo e a mente não têm limites.

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE FIGURAS

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo caracteriza-se a investigação realizada. Primeiro expõem-se as razões que motivaram a realização do estudo, em segundo lugar contextualiza-se a sua importância, de acordo com as novas orientações curriculares, e descreve-se os seus principais objectivos e questões, e em terceiro apresenta-se uma visão global da sua estrutura organizativa.

1.1. Motivos que conduziram ao estudo

A investigadora deste estudo tem vindo a constatar, desde o primeiro ano que leccionou, que a Escola tem pouco significado para os alunos. Eles sentem que a Escola não os prepara para a vida, manifestam este descontentamento ao interrogarem-se constantemente do porquê de estudar determinado conteúdo e de qual a sua utilidade para a suas vidas futuras. A Escola e a realidade são encaradas como dois mundos distintos. Neste sentido, os professores devem reflectir: Se uma tão grande percentagem de alunos não finaliza os estudos, em particular a escolaridade obrigatória, devemos continuar a ensinar para os exames nacionais ou para a vida? Que tipo de cidadãos queremos formar?

Em relação a estas preocupações, em particular no que diz respeito ao ensino e aprendizagem da Matemática, a investigadora tentou sempre fazer com que a Matemática fosse mais real, mostrando aos alunos – ao introduzir conceitos – a existência e a utilidade da relação da Matemática com a realidade, de forma a motivá-los, a fomentar-lhes o gosto pela disciplina e a proporcionar-lhes uma aprendizagem mais significativa. No entanto, tinha sempre a percepção de que as suas tentativas não passavam de um aperitivo, era preciso fazer algo mais e com mais consistência.

Foi no ano lectivo de 2003/2004 que teve a oportunidade de frequentar, pela primeira vez, a acção de Formação – formato Oficina – T^3 "Experimentar Matemática com tecnologia no 3º ciclo", orientada pelos formadores: Doutor Jacinto Salgueiro e Professora Doutora Ana Paula Canavarro. Como consequência desta acção os seus alunos do 9º ano de escolaridade, utilizaram pela primeira vez, as calculadoras gráficas e os sensores na realização de duas experiências – aquecimento da água e arrefecimento da água em três tipos de recipientes, com iguais formas mas de distintos materiais, e desenvolveram as respectivas actividades de modelação, numa vertente mais qualitativa e interpretativa do que quantitativa. O entusiasmo e o empenho demonstrado por todos os seus alunos e a vontade manifestada de voltarem a aprender a Matemática ligada à realidade, não deixaram à investigadora margem para dúvidas de que a Modelação Matemática poderia ser um bom caminho a seguir.

A opção de realizar este estudo baseou-se mais essencialmente em motivações pessoais. Por um lado, o gosto por trabalhar com tecnologias, a vontade de experimentar diferentes metodologias e a procura de uma abordagem da Matemática com mais significado, que faça os alunos perceber melhor como é que a Matemática tenta explicar os fenómenos reais. Por outro lado, tentativa de acompanhar e perceber os possíveis benefícios deste estudo na aprendizagem matemática dos alunos.

1.2. Pertinência do estudo

A discussão em torno da competência matemática que os alunos de hoje em dia precisam para a sua vida pessoal e profissional e para exercerem uma cidadania activa numa sociedade e/ou num mundo cada vez mais matematizado e a evoluir rapidamente, tem vindo a reunir grande consenso ao nível da comunidade de educação matemática.

A reflexão sobre as competências essenciais para todos os alunos requer conhecimento acerca do modo como eles aprendem, neste sentido são bastante importantes as investigações em torno do que é e como se processa a aprendizagem (Abrantes *et al.* 1999).

O termo *competência matemática* deve ser entendido em sentido lato, como um *saber em acção* que fomenta o desenvolvimento integrado de conhecimentos, capacidades e atitudes através de experiências de aprendizagem adequadas e significativas. Traduz o intuito de dotar os alunos de *recursos* – saberes culturais, científicos e tecnológicos – para que consigam *desocultar* a matemática presente em situações diversas, mais familiares ou menos familiares ao aluno, e para compreenderem a realidade. Salienta-se deste modo a "formação de cidadãos informados, participativos, críticos e confiantes nos modos como lidam com a matemática" (ME - DEB, 2001, p. 58). Ao longo dos três ciclos da educação básica, todos os alunos, para serem matematicamente competentes, devem poder desenvolver de forma gradual e continua os aspectos gerais que caracterizam a competência matemática (Abrantes *et al.*, 1999; ME – DEB, 2001).

Contudo, os saberes matemáticos básicos que se deseja que façam parte do património de todos os alunos, apesar de virem a ser aplicados na futura vida dos alunos, estão ainda inseridos num âmbito escolar (Matos, 2002).

A compreensão de contextos matematizados ou das aplicações matemáticas e o uso competente da matemática em contextos não se restringe ao domínio de conhecimento matemático (Keitel, 2004). A resolução de situações problemáticas reais autênticas – trabalhadas a partir de fenómenos reais – requer capacidades específicas, envolve competências e processos de raciocínio diferenciados que os problemas *puramente matemáticos* não desenvolvem (Abrantes *et al.*, 1999; Blum e Niss, 1991).

A modelação matemática é vista como uma forma privilegiada de resolução de problemas do mundo real (Abrantes, 1993; Swetz, 1992), os quais se distinguem dos problemas *puramente matemáticos*, tanto do ponto de vista dos papéis e objectivos que têm no ensino-aprendizagem da Matemática, como pelo facto de requererem processos próprios de resolução (Abrantes *et al.*, 1999; Blum e Niss, 1991).

Os resultados do PISA de 2003 também sugerem que é importante tanto a aquisição de competências básicas na resolução de exercícios simples que requeiram a utilização de algoritmos aprendidos pelos alunos, como a mobilização das suas aprendizagens em situações problemáticas mais próximas da vida real. Sublinham que é absolutamente necessário que os estudantes utilizem, com mais frequência, processos cognitivos de nível mais elevado na resolução de problemas que lhes exijam a utilização simultânea de informação diversa e de conceitos complexos, bem como a avaliação da qualidade da informação fornecida e a produção de argumentação válida.

Também a ideia de que para aprender Matemática é preciso *fazer* Matemática tem vindo a reunir grande consenso ao nível da comunidade de educação matemática. Neste sentido, é urgente que todos os alunos tenham uma formação matemática que vá além da memorização de conceitos abstractos, da prática de regras e técnicas e da resolução de tarefas rotineiras, que mostre aos alunos que *fazer* matemática é uma actividade humana e que lhes permita interpretar, analisar e intervir criticamente na sociedade. Para tal, os alunos durante a sua aprendizagem matemática devem usufruir de oportunidades para realizarem actividades matemáticas em vez de tomarem apenas contacto com *produtos* já feitos, acabados (NCTM, 1991). Hoje em dia, ainda persiste nos alunos a ideia de que a matemática já foi inventada e não há contribuição por parte deles (Gravemeijer, 2005). A atribuição de um espaço curricular à modelação será uma forma de contemplar uma componente essencial do processo de criação matemática, tal como sucede com a resolução de problemas (Blum e Niss 1991; Ormell, 1991). Para tal, devemos levar os alunos a perceber o conceito de raciocínio mais alargado, a verem a matemática como actividade – como ela se traduz na matematização – e como modo de pensar e raciocinar em termos de interagir e trocar ideias provenientes da discussão, da justificação e da argumentação.

Os documentos *Normas Profissionais para o ensino da Matemática* (1994), Renovação do Currículo de Matemática (APM, 1988) e o *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), reforçam estas perspectivas, ao darem ênfase à importância de os alunos aprenderem Matemática com compreensão. A norma relativa à *Representação* (NCTM, 2000), em relação aos alunos do ensino médio (*grades* 6-8), refere que eles devem ter oportunidades para usar os seus repertórios de representações matemáticas para resolverem, relativamente em larga escala e com motivação, problemas significantes que envolvam modelação de fenómenos físicos, sociais, ou matemáticos. Para os anos de escolaridade 9-12, o NCTM (1991, p. 163) afirma que o currículo de matemática deve incluir o aperfeiçoamento e extensão de problemas matemáticos de modo a que todos os alunos: "(...) apliquem estratégias integradas para resolver problemas, quer no interior da Matemática, quer em áreas que lhe são exteriores; reconheçam e formulem problemas a partir de situações internas e externas à matemática; apliquem o processo de modelação matemática a situações problemáticas do mundo real". Recomenda o estudo das conexões e interacções entre os vários temas matemáticos e entre estes e as suas aplicações.

Segundo Ormell (1991), é preciso ter-se uma visão global da Matemática, enquanto Ciência, como um instrumento de modelação e em particular uma visão da disciplina de Matemática, que dá realce às aplicações e, principalmente, como uma disciplina exploratória que dá relevo à modelação.

Segundo estas perspectivas a modelação matemática poderá ser vista como um tipo de experiência de aprendizagem que fornece contextos propícios a que os alunos aprendam conceitos e desenvolvam competências na realização da sua actividade matemática, e deste modo sai realçada a necessidade de a integrar gradualmente e de forma moderada, em todos os currículos e aulas de Matemática.

Contudo, hoje em dia, continua a existir um desfasamento entre as práticas lectivas diárias e os ideais educacionais/inovações do currículo, pois continua a ser bastante raro a realização de autênticas actividades de modelação nas aulas de Matemática (Blum, 2002). Por um lado, há uma *aplicação directa* de modelos matemáticos, *estandardizados*, já desenvolvidos para situações reais com conteúdos matemáticos. Por outro lado há um *despir* de problemas puramente matemáticos escritos com palavras de outra disciplina ou da vida quotidiana. Estes *problemas com palavras – word problems* – são meros contextos artificiais que disfarçam problemas *puramente matemáticos* e que dão uma imagem distorcida da realidade, são usados algumas vezes deliberadamente para servir os propósitos do ensino, em problemas escolares clássicos. Como consequência ao resolvê-los os alunos obtém respostas/soluções matemáticas desadequadas, sem correspondência com a realidade (Abrantes, 1992; Blum e Niss, 1991; Canavarro, 2005; Niss, 1992). Em suma, as tarefas de modelação devem auxiliar o processo de ensino e aprendizagem e não apenas servir para justificar o conteúdo que se está a ensinar.

Nos currículos deve constar o papel dos problemas da realidade em relação com os interesses e necessidades dos alunos, a relação entre sistemas matemáticos e situações da realidade e a integração de competências básicas, de capacidades superiores de pensamento e de conhecimentos num dado domínio e processos de raciocínio. No entanto, deve ter-se em consideração que *saber* Matemática e *saber usá-la* adequadamente são duas coisas diferentes, nomeadamente perante uma situação da realidade (Abrantes, 1994;

Abrantes *et al.*, 1997; Swetz, 1992). De facto, os programas portugueses em vigor e o currículo do ensino básico integram muitas das recomendações da comunidade de educação matemática a nível nacional e internacional, em particular sublinham a relação da Matemática com situações da realidade.

O facto de existirem escassos trabalhos de investigação que incidam sobre tarefas de modelação matemática, com recurso a sensores, em que os alunos tenham de resolver situações problemáticas reais que envolvem processos de modelação matemática, também justifica a importância deste estudo.

Acrescenta-se ainda o facto de os conceitos de proporcionalidade directa e principalmente o de proporcionalidade inversa terem sido alvo de pouquíssimas investigações em educação matemática. Tal como Ponte *et al.* (1998) afirmam, "faltam investigações mais detalhadas sobre o que se passa nesta área [Álgebra e Funções] no ensino secundário, e, em especial, sobre o desenvolvimento do conceito de função no 3º ciclo" (p.155).

Carreira (1992), Keitel (1993) e Pires (2001) recomendam para futura investigação, experiências de inovação curricular como a modelação matemática, onde as ligações entre a matemática e o mundo real possam constituir uma das linhas de força da organização curricular. Sublinham que se deve fomentar experiências de inovação curricular que impliquem actividades de aplicação e modelação, que permitam o ajuizar das suas potencialidades no processo ensino – aprendizagem da Matemática. Em particular as actividades de modelação que recorrem à recolha directa de dados com tecnologia, pois podem desempenhar um importante papel no currículo nomeadamente aumentam as possibilidades de se valorizar, na prática educativa, uma dimensão interpretativa da Matemática na sua relação com o mundo. Proporcionam descrições e explicações da realidade existente e criam una nova realidade – os modelos matemáticos transformam-se em realidade, passam a ser reais, estabelecem e institucionalizam uma nova forma de realidade (Keitel, 2004).

1.3. Formulação do problema e questões de investigação

O presente estudo, tem por principal objectivo compreender as potencialidades das tarefas de modelação na aprendizagem matemática dos alunos de uma turma do 9º ano de escolaridade, num ambiente exploratório e com recurso à calculadora gráfica e sensores. Mais concretamente, pretende descrever, interpretar e analisar os processos de resolução de situações problemáticas reais no âmbito das funções e as suas consequências na aprendizagem dos alunos. Para tal pretende-se responder às seguintes questões:

(a) Como é que os alunos encaram e se envolvem em tarefas de modelação?
(b) Como é que os alunos desenvolvem a actividade de modelação?
(c) Como é que a tecnologia, calculadoras gráficas e sensores, contribui para o desenvolvimento da actividade de modelação?

1.4. Organização do estudo

O presente estudo, divide-se em cinco capítulos.

No capítulo dois é feita uma revisão de literatura, em que são explicitadas e discutidas as principais referências teóricas sobre o tema central deste estudo: a modelação no processo ensino-aprendizagem da Matemática.

No capítulo três são apresentadas e justificadas as opções metodológicas e são descritos os procedimentos seguidos.

No capítulo quatro são descritos e analisados os dados empíricos – os resultados relativos ao grupo estudado.

No capítulo cinco são apresentadas e discutidas as principais conclusões do estudo, e são sintetizadas as recomendações didácticas e de futuras investigações que resultaram deste estudo.

Capítulo 2

A modelação no processo ensino-aprendizagem da Matemática

Este capítulo apresenta uma revisão de literatura sobre a modelação matemática tendo em conta o problema do estudo.

2.1. Explicitação e discussão de noções

Os conceitos em torno da relação Matemática-realidade, em contexto educacional, têm-se multiplicado e cruzado. A sua terminologia é por vezes extensa e ambígua, devido ao crescente confronto de ideias, originarias de algumas linhas teóricas coexistentes entre os investigadores. Por exemplo, cruzam-se múltiplos conceitos como: modelo matemático, modelo conceptual, modelo computacional, modelo real, ao lado de outros como problema de aplicação, problema da vida real, situação problemática do quotidiano, problema extra-matemático, metáfora conceptual, modelo mental, representação interna, construção e exploração de modelos matemáticos, etc. (Carreira, 1998).

2.1.1. Modelo Matemático

Na literatura é possível encontrar-se definições para o conceito de modelo matemático. Uma dessas definições, que de certa forma incorpora as outras, é a de que um modelo matemático de um objecto ou fenómeno reflecte sempre uma certa visão – parte – da realidade e constitui uma representação matemática de uma situação problemática real, concretizada através de objectos, relações e estruturas da matemática, tais como: tabelas, relações funcionais, figuras geométricas, gráficos (Matos e Carreira, 1996). Neste sentido, um modelo matemático pode ser visto como um trio (**S, M, R**), consistindo nalguma situação problemática real **S**, nalguma recolha de entidades da matemática **M** e em algumas relações **R**, em que objectos e relações de **S** estão relacionados a objectos e relações de **M** (Niss, referido em Blum e Niss, 1991).

Um modelo matemático satisfatório pode ser usado como base para previsões, decisões ou acções (Blum e Niss, 1991).

2.1.2. Problema

Pode ser visto como uma situação que contêm questões abertas e desafiantes, ao nível intelectual, para a qual não se tem à disposição suficientes métodos/procedimentos/algoritmos e não se consegue aplicar estes de forma directa e imediata a fim de se obter rapidamente a resposta. No entanto, esta noção é subjectiva, pois o que para uma pessoa pode ser um problema, para outra pode não passar de um mero exercício (Blum e Niss, 1991).

2.1.2.1 Tipos de problemas matemáticos

Uns são os problemas matemáticos *aplicados* ou situações problemáticas reais, cujas situações e questões definidas pertencem a algum segmento da realidade, e permitem que alguns conceitos matemáticos, métodos e resultados estejam envolvidos. O seu processo de resolução pressupõe a concretização de etapas inerentes ao processo de modelação.

Outros são os problemas puramente matemáticos cujas situações definidas estão totalmente inseridas em algum universo matemático.

As únicas diferenças significativas entre ambos os tipos de problemas, para além dos seus processos de resolução, dizem respeito, em particular, a propósitos considerados, objectivos, e papeis no currículo de matemática (Blum e Niss, 1991).

2.1.3. Matematização

É considerado por alguns autores como uma das etapas inerentes ao processo de modelação – actividade que procura a transferência/tradução dos aspectos reais de um dado fenómeno/situação para estruturas e conceitos matemáticos que os representam – que vai do modelo real para o modelo matemático, para a matemática (Blum e Niss, 1991).

2.1.4. Modelação Matemática e Aplicações

Este termo encarado em sentido lato denomina quaisquer relações entre a matemática e o mundo real, e é comum ser usado em vez do termo *modelação*. Assim, o termo *modelação matemática e aplicações* inclui, também, o processo de resolução de problemas aplicados (Blum e Niss, 1991).

O sentido da realidade para a Matemática é focado pelo termo *modelação* ou *matematização* – que consiste no processo de conduzir de uma situação problemática real para um modelo matemático – considerada como a parte mais importante do processo de relacionar a matemática com o mundo real. Mas é comum usar-se o termo *modelação*, também, para enfatizar todo o processo, ou seja, para além da estruturação e matematização também consiste no trabalho ao nível matemático para a obtenção de resultados e interpretação e validação do modelo (Blum 2002; Blum e Niss, 1991).

Enquanto que o termo *aplicações* foca, no sentido oposto, da Matemática para a realidade, e geralmente, também, enfatiza os objectos envolvidos – em particular, segmentos da realidade acessíveis ao tratamento matemático apoiados pela existência de modelos matemáticos que lhes correspondem, ou seja funciona como uma espécie de formatação (Blum, 2002).

Por outro lado também é prática comum usar-se o termo *aplicação da matemática* para se indicar todas as formas mencionadas de ligar a realidade com a matemática, se está em questão o próprio modelo construído ou uma interacção mais simples. Neste sentido, a modelação pode ser considerada uma aplicação da matemática assim como num sentido ligeiramente restrito as situações problemáticas reais também podem ser chamadas de aplicações. Eventualmente, modelos matemáticos ou, em geral, todas as partes da Matemática que de alguma forma estão ou estarão relacionadas com a realidade podem ser vistas como pertencendo à *Matemática Aplicada* (Blum, 2002). Contudo, apesar desta definição os autores Blum e Niss (1991) salientam a distinção entre a Matemática *pura* e a *aplicada*.

Na óptica deste trabalho, considera-se que dentro dos problemas matemáticos aplicados se a ênfase for dada ao processo de modelação o termo correcto para este tipo de problemas será *situações problemáticas reais* ou *problemas reais*, enquanto que se a ênfase for dada à aplicação e interpretação de modelos matemáticos já *estandardizados* e sua ligação com a realidade o termo correcto será *problemas de aplicação*.

Neste estudo optou-se pela concepção mais ampla do termo *modelação*, uma vez que o processo de modelação para além de dar uma simplificada mas verdadeira imagem de alguma parte da realidade preexistente, também estrutura e cria uma parte dessa realidade, dependendo do conhecimento, intenções e interesses de quem resolve o problema (Blum e Niss, 1991).

2.1.5. Processo de modelação matemática

Regra geral o processo de modelação, também denominado por *ciclo de modelação*, é descrito da seguinte forma: considera-se uma versão simplificada – uma parte/*situação/modelo real* – da realidade. Essa situação problemática real, tem de ser simplificada, idealizada, estruturada, sujeita a apropriadas condições e suposições, e feita mais de acordo com os interesses de quem resolve o problema. Obtém-se deste modo o *modelo real* da situação original, que por um lado continua a conter características essenciais da situação original, e por outro lado permite uma abordagem com significados matemáticos, por a situação ter sido tão esquematizada – se for totalmente possível. Traduz-se os elementos desse modelo real em termos matemáticos – o modelo real é matematizado – constrói-se um modelo matemático, como resultado da situação original, no qual se podem aplicar os métodos conhecidos para a obtenção de resultados. Esses resultados têm de ser confrontados com a situação real para se validar ou não o modelo. Se o modelo não for satisfatório então o mesmo terá de ser modificado ou substituído por outro – terão de ser novamente executadas todas as etapas do processo de modelação, por exemplo com a introdução de factores que foram anteriormente ignorados, as vezes que forem necessárias (Blum e Niss 1991; Kerr e Maki, 1979).

2.2. Perspectiva histórica ao nível internacional

Durante os anos 20 e 30 do século XX

O movimento utilitarista – cuja ênfase era a utilidade da matemática e da educação matemática, principalmente, para a ciência e para a sociedade – influenciou o debate sobre as aplicações e modelação no currículo da matemática em muitos países, os da parte ocidental da Europa e os Estados Unidos da América. Nesta altura o currículo de Matemática tinha um papel marginal, uma vez que o ponto de vista dominante era de que a capacidade dos alunos para aplicarem a matemática e trabalharem as aplicações resultava directamente numa educação que focasse só assuntos internos da matemática – matemática pura.

O impacto deste movimento atingiu com mais força o nível escolar equivalente aos três ciclos do ensino básico, o ensino secundário não sofreu tanta influência. As aplicações da matemática, nestes três ciclos, foram introduzidas através de situações problemáticas – com esquemas do dia-a-dia – fechadas, fortemente simplificadas e estereotipadas. Como consequências: (a) aos alunos bastava-lhes seleccionar a combinação correcta das poucas rotinas estandardizadas; (b) tinham pouca compreensão em relação à situação problemática; (c) o processo de *resolução de problemas* tornou-se muito rotineiro, como um mero exercício; e (d) surgiram preocupações ao nível da educação matemática, sobre a compreensão dos alunos relativamente a esta disciplina (Niss, 1987).

Nos anos 50/60

Devido à segunda guerra mundial a matemática escolar distanciou-se, deixando de estar em harmonia com e próxima, da matemática como ciência. Consequentemente, no período pós-guerra, deu-se o desenvolvimento da educação matemática em países industrializados. Havia a necessidade de um aumento das qualificações matemáticas, bases científicas, da força laboral e da população em geral, para o progresso tecnológico, social e económico. Através do movimento da Matemática Moderna, sensivelmente no final da década de

50, a educação matemática foi renovada, o currículo foi melhorado e modernizado em todos os níveis de ensino. A ênfase, deste movimento, era de que as componentes estruturais inerentes a qualquer situação continham elementos matemáticos por dentro ou por fora da própria matemática, ou seja, considerava a matemática como uma poderosa ferramenta, que proporcionava um conjunto de estruturas fundamentais que contribuíam para a compreensão e resolução de problemas extra-matemáticos.

Passados alguns anos este movimento, que introduziu o novo currículo, foi alvo de muitas criticas e discussões por todo o mundo. Os problemas surgiram porque de uma forma geral o novo currículo não funcionava satisfatoriamente em todos os níveis de escolaridade. A situação era problemática principalmente ao nível do primeiro ciclo, onde a matemática passou a ser uma sequência formal, essencialmente, de jogos abstractos e fechados. O que levou a uma diminuição da capacidade das crianças em utilizarem a aritmética elementar, e uma incapacidade por parte das mesmas em resolverem situações problemáticas do dia-a-dia (Niss, 1987).

Nos anos 70

Surgiu uma exigência da relevância no conteúdo e na forma da educação matemática. Devido a uma crescente preocupação por parte dos alunos de matemática, do ensino secundário e superior, pelo mundo extra-matemático. O que implicou, como solução para este problema, um incremento da atenção sobre a integração curricular do campo das aplicações e modelação Matemática, em vários países e nos vários níveis de ensino. Com uma considerável diversidade no como os aspectos aplicacionais eram interpretados e introduzidos nos diferentes currículos. Surgiu, então, uma mudança das gerais tendências em aplicações e modelação no currículo de Matemática. O quadro 2.1. apresenta de forma resumida a mudança do foco do papel das aplicações e modelação no ensino da Matemática.

Quadro 2.1. – *Mudança do foco do papel das aplicações e modelação no ensino da Matemática*

	Antes	Depois
Objectivos	▪As aplicações servem o propósito de defender a Matemática das críticas e da recusa dos alunos. ▪Os principais objectivos são a motivação e a promoção da aquisição de conceitos matemáticos, teorias e métodos.	▪O interesse das aplicações e da modelação ultrapassa a Matemática e a educação matemática. ▪O principal objectivo é o de activar a Matemática na resolução de problemas do mundo real que extravasam o contexto matemático.
Conteúdos	▪Tópicos internos e clássicos a serem aplicáveis. ▪Situações problemáticas construídas, bem definidas, e destinadas a iluminar a Matemática. ▪Trabalho no interior do modelo com ênfase nas suas propriedades matemáticas.	▪Tópicos novos a serem aplicáveis. ▪Aplicações. ▪Situações problemáticas que requeiram aplicação da Matemática. ▪Situações problemáticas abertas e reais, destinadas a iluminarem aspectos do mundo real ▪Trabalho com o modelo completo, incluindo nos seus aspectos não matemáticos
Organização	▪Cursos autónomos de aplicações e modelação. ▪Independência em relação a outros assuntos. ▪Pequenas sequências de aplicações e modelação	▪Integração no programa geral da Matemática. ▪Cooperação interdisciplinar. ▪Longas sequências de aplicações e modelação.
Métodos	▪A iniciativa está no professor, que determina o curso dos acontecimentos.	▪Os alunos trabalham de uma forma independente, frequentemente em grupos, sob a orientação do professor.

A evolução dos aspectos das aplicações e modelação ao longo do currículo de Matemática, passaram por várias fases nos diferentes países desde, sensivelmente, os anos 20 aos anos 80. Em relação ao papel das aplicações e modelação da Matemática o quadro 2.2. apresenta de forma resumida as suas três fases de evolução no 1º, 2º e 3º ciclos do ensino básico, e o quadro 2.3. as suas quatro fases de evolução no ensino secundário.

Quadro 2.2. – *As três fases de evolução do papel das aplicações e modelação da Matemática no 1º, 2º e 3º ciclos do ensino básico*

Fase 1	**Fase 2**	**Fase 3**
▪ O movimento da Matemática Moderna "ofereceu" as estruturas internas para a compreensão e conexão da matemática com as situações extra-matemáticas.	▪ Mais incidência na orientação do processo de resolução de problemas, do que no contexto dos seus conteúdos serem dentro ou fora do "mundo real". ▪ Ênfase na habilidade dos alunos para resolverem problemas. ▪ Humanização do ensino da matemática, tornando esta uma matéria mais amigável, aberta, e criativa para o desenvolvimento pessoal dos alunos e sua interacção social. ▪ A matemática começou a ser percebida como uma ferramenta para actividades, para os alunos adquirirem perspicácia matemática através da experimentação.	▪ O principal foco era descobrir a matemática envolvida no mundo real que rodeia os alunos. ▪ Novos tópicos como a estatística descritiva. ▪ Problemas com maior significância social, mas ainda longe das vidas quotidianas

Quadro 2.3. – *As quatro fases de evolução do papel das aplicações e modelação da Matemática no ensino secundário*

Fase 0	**Fase 1**	**Fase 2**	**Fase 3**
▪ Fase de transição. As aplicações foram solicitadas, mas reduziam-se a problemas disfarçados com palavras, pois não tinham qualquer tipo de realidade.	▪ Tornou-se claro que não bastava solicitar a capacidade aplicativa da matemática era preciso demonstrá-la. ▪ Aplicações ao campo da Física, tentativas de aplicação a outros campos, e para a sua inclusão nos currículos. ▪ As aplicações foram tratadas como qualquer outro tópico do programa, entrando após a exposição do professor ou como exercícios bem definidos e fechados. ▪ Apareceu o termo *modelo*.	▪ Uma das razões, dominantes, para a integração das aplicações e dos modelos, ao longo do currículo, no ensino de matemática, era a de os alunos se tornarem capazes de *matematizar* situações extra-matemáticas. ▪ Os modelos deveriam chegar aos estudantes como resultado dos seus próprios esforços e não serem-lhes apresentados como objecto de aprendizagem. ▪ O professor passou a ter um papel mais de orientador, e os alunos a trabalharem em pequenos grupos. ▪ Surgiram os cursos em aplicar a matemática e a modelação com ênfase no processo de construção do modelo. ▪ Um factor que ajudou a este desenvolvimento foi a expansão das ferramentas electrónicas, calculadoras e computadores com preços acessíveis.	▪ Reversão na ordem, em primeiro lugar o campo das aplicações e só depois a matemática era introduzida no contexto da construção do modelo. ▪ Dentro da educação matemática foram efectuadas experiências baseadas nos interesses de outras disciplinas, independenteme nte de não ser este o seu único objectivo.

Com a acelerada acessibilidade aos computadores em todos os seus tamanhos e seus pacotes de *software*, qualquer tipo de modelo matemático de uma parte da realidade podia ser examinado, virtualmente, através dos cálculos do computador, e o seu comportamento através da simulação do computador. Isto tornou possível a construção e exploração de um modelo sem ter de se ir por sofisticadas análises da matemática envolvida ou pela origem do modelo. A gama e realismo dos problemas e dos modelos que podiam ser tratados em contextos educacionais foi enormemente alargada com as ferramentas: calculadoras e computadores (Niss, 1987).

Durante os anos 90

O termo *aplicações e modelação* vinha a ser usado crescentemente para denominar todos os tipos de relações entre o mundo real e a Matemática. De facto, durante os últimos anos o número de contribuições de investigações, em particular, acerca das aplicações e modelação tem crescido. Este tema tem vindo, e contínua, a ser um tema central na educação Matemática, em todos os níveis escolares, instituições e sistema educacional. Uma das razões é que a questão geral: O que é a *Matemática*? faz parte da nossa cultura e é um fenómeno social.

Hoje em dia, no currículo e nos manuais escolares encontram-se muitas mais relações a fenómenos reais e problemas do que nos anos 80 ou 90. Os modelos matemáticos e a modelação invadem uma grande variedade de disciplinas. Isto tem sido substancialmente apoiado e acelerado pela disponibilidade de poderosas *ferramentas electrónicas*, tais como as calculadoras gráficas e os computadores com as suas enormes capacidades de comunicação (Blum, 2002). Em particular, os poderosos significados da ilustração gráfica e apresentação dos resultados do modelo são fornecidos por estas ferramentas.

2.3. Perspectiva histórica em Portugal.

Nos anos 60

Em meados da década de 60, os termos *problemas* e *resolução de problemas* não eram de uso corrente no discurso curricular relativo ao ensino de Matemática. Foi através de José Sebastião e Silva que a reforma da Matemática Moderna chegou a Portugal. Como uma tentativa de conseguir – através do método activo, sempre que possível, levar os alunos à redescoberta – um equilíbrio entre o concreto e o abstracto, a intuição e a lógica, a mecanização e a compreensão, o exercício rotineiro e o problema novo, sem esquecer a importância das relações da Matemática com as outras áreas do saber e da actividade humana (Carreira, 1998).

No entanto, quando a reforma da Matemática Moderna se generalizou em Portugal, já em muitos países circulavam críticas (Guimarães, 2005).

Nos anos 70

O apelo de José Sebastião e Silva à introdução de fenómenos reais no ensino da matemática: "O professor de Matemática deve ser, primeiro que tudo, um *professor de matematização*, isto é, deve habituar o aluno a reduzir situações concretas a modelos matemáticos e, vice-versa, aplicar os esquemas lógicos da Matemática a problemas concretos" (citado em Carreira, 1998, p. 25). Levou a que nos programas de 1975/76, nas considerações gerais para as finalidades principais do ensino da Matemática fosse mencionado o desenvolvimento de diversas capacidades, como a "de matematizar situações da vida real" (Guimarães, 2005).

Nos anos 80

Vários matemáticos portugueses alertaram para a urgência de contemplar as ligações da Matemática ao real no trabalho com os alunos. Segundo os quais a Matemática não devia continuar a ser apresentada aos alunos como uma ciência acabada e onde o papel da realidade surgia como um domínio de aplicação da matemática. Em vez disso deveria ser encarada como uma ciência aplicada – como uma ferramenta para ajudar a resolver os problemas concretos da vida diária de cada indivíduo – cujo sentido predominantemente deveria ser o partir da realidade para a Matemática e não o sentido inverso. Consideravam, ainda, que através de problemas concretos da vida real – que para serem resolvidos carecem de instrumentos matemáticos – é que deveriam ser introduzidos aos alunos os conceitos matemáticos a estudar, pois os alunos deviam desde muito cedo ser confrontados com problemas concretos da vida real e habituados a construírem modelos matemáticos para os resolverem (Carreira, 1998).

Nesta altura, o documento *Renovação do currículo de Matemática* (APM, 1988) já reflectia muitas destas preocupações e questões curriculares da época, com larga influência das que também circulavam na comunidade internacional, em particular as que constavam nos documentos do NCTM.

As orientações curriculares daquele documento (APM, 1988), destacam a resolução de problemas – termo traduzido de *problem solving* que deve ser entendido em sentido lato – como tema central que atravessa todo o currículo, e uma das suas vertentes é a resolução de problemas ligados à vida real.

O documento também defende a inclusão e a dignificação das aplicações da matemática no desenvolvimento curricular. Para os grandes objectivos do ensino da matemática, salienta a ideia de que "a matematização de situações é um objectivo em si mesmo que implica proporcionar aos alunos experiências com modelos bem como a apreciação crítica da forma como esses modelos respondem à situação problemática que se está a estudar" (APM, 1988, p. 36). Salienta, ainda, o papel do contexto na aprendizagem matemática e afirma que, em muitos casos, é imprescindível tratar os aspectos matemáticos e não matemáticos de uma situação para que esta possa ser entendida como objecto de um estudo global.

O projecto MINERVA projectou a nível nacional a introdução das novas tecnologias no ensino da matemática e reactivou a discussão em torno da inclusão de aplicações e modelação matemática nos currículos (Carreira, 1998).

Contudo, nos programas de Matemática em todos os níveis de escolaridade, as referências a problemas ou resolução de problemas eram praticamente inexistentes, até aos 'novos' programas de 1991 (Guimarães, 2005).

Nos anos 90

A relação Matemática-realidade adquiriu um claro estatuto de actualidade e relevância na renovação curricular e na investigação em educação matemática. Os grandes impulsionadores, do aumento do número de publicações com incidência nesta temática, foram os vários documentos do NCTM, e os encontros, seminários e congressos internacionais. Num destes encontros, Ponte refere que "[...] esta área poderá ser sem dúvida um terreno fundamental para o desenvolvimento de projectos cujo impacto poderá marcar uma nova época no ensino da Matemática em Portugal" (citado em Carreira, 1998, p. 33).

É de realçar o projecto MAT_{789} – projecto de inovação curricular no 3º ciclo desenvolvido por uma equipa de professores e investigadores entre 1988 e 1992 – cujos autores sublinham que "Desenvolver projectos que implicassem utilizar a Matemática na abordagem de situações da vida real poderia não só dar mais sentido à Matemática aos olhos dos alunos como ajudá-los a serem mais capazes de enfrentar problemas autênticos, de uma forma tão autónoma e responsável quanto possível." (Abrantes *et al.*, 1997, p. 67). A perspectiva adoptada era a de dar *corpo* a experiências concretas em que se pudessem utilizar métodos e modelos matemáticos para a compreensão e intervenção em contextos reais, e assim demarcarem-se do *reduzido* papel das situações da realidade como motivação dos alunos. Este projecto foi ainda objecto de um trabalho de investigação, constituindo a tese de doutoramento de Paulo Abrantes.

Surgiram também outros projectos e trabalhos igualmente importantes, como por exemplo a tese de mestrado e a tese de doutoramento de Carreira (1992;1998), e o projecto MEM – Modelação no Ensino da Matemática.

2.4. Orientações curriculares actuais: portuguesas e internacionais.

Niss (1996) após efectuar uma análise profunda da evolução dos objectivos dos currículos de Matemática nos mais variados países, ao longo das últimas décadas, reconhece nestes alguns aspectos essenciais comuns, tais como o aumento da: (i) preocupação em proporcionar uma educação matemática de qualidade a todos os alunos; (ii) oportunidade de desenvolver em todos os alunos uma competência matemática adequada a uma participação informada e crítica na sociedade, de modo a abranger os aspectos essenciais da numeracia e *literacia matemática* na sociedade (Niss, 1996).

A exploração da relação Matemática – realidade nas aulas de matemática constitui uma importante orientação curricular actual constante dos currículos de vários países, uma vez que potencia uma série de vantagens, tais como: (a) "proporcionar a todos os alunos experiências de aprendizagem em que a capacidade de utilizar a Matemática possa ser sentida como uma vantagem, como um contributo para interpretar, compreender e lidar da melhor forma com aquilo que nos rodeia", (b) possibilitar uma ligação entre a Escola e a vida, (c) possibilitar uma ligação entre diferentes áreas do saber, valorizar a complementaridade destas e (d) proporcionar uma ligação entre o professor de Matemática e os colegas, fomentar o trabalho colaborativo (Canavarro, 2005, p. 22).

Os novos programas portugueses, do ensino básico e secundário, numa tentativa de darem resposta às necessidades sociais e às necessidades dos alunos, consideram como uma das finalidades do ensino da Matemática a relação Matemática-realidade. Um dos seus propósitos é o de "desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real" (ME – DGEBS, 1991, p. 11; ME – DES, 1997, p. 4; ME – DES, 2001a, p. 4; ME – DES, 2001b, p. 5; ME – DES, 2001c, p. 4). Em particular, o Currículo nacional do ensino básico (ME – DEB, 2001) destaca como principais finalidades da Matemática: dar aos alunos oportunidades de terem "um contacto com as ideias e métodos fundamentais da Matemática que lhes permita apreciar o seu valor e a sua natureza; e o desenvolvimento da capacidade e confiança pessoal no uso da matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar" (p. 58).

De uma forma geral as orientações metodológicas do ensino básico colocam a ênfase da Matemática escolar na utilização da matemática para resolver problemas, apelam à utilização de situações problemáticas, referem a modelação e as aplicações da Matemática, e valorizam: a história da Matemática, a utilização de material diverso, de calculadoras e computadores, as actividades de experimentação e pesquisa, o raciocínio indutivo e os aspectos intuitivos da Matemática, a comunicação e o estabelecimento de relações entre os diversos temas programáticos (ME – DGEBS, 1991a). No sentido de uma evolução destas perspectivas, o documento Currículo nacional do ensino básico (ME – DEB, 2001), sublinha a necessidade de se proporcionar a todos os alunos experiências matemáticas ricas e significantes, que lhes permitam tornarem-se matematicamente competentes.

As grandes finalidades do ensino/aprendizagem da Matemática – são essencialmente formuladas em termos de capacidades e atitudes a adquirir e desenvolver por todos os alunos – incluem a aptidão para "dar valor à matemática, para tornar-se confiante nas suas próprias capacidades, para resolver problemas de matemática, para comunicar e para raciocinar matematicamente" (NCTM, 1991, pp. 6-7). Todos os documentos curriculares sublinham a ideia de que, a resolução de problemas é considerada como "o foco central do currículo de Matemática e deve ser encarada como um processo que atravessa todo o programa e fornece o contexto em que os conceitos devem ser aprendidos e as competências desenvolvidas" (NCTM, 1991, p. 29).

Neste sentido, a modelação matemática sendo uma forma privilegiada de resolução de problemas do mundo real, que dá ênfase ao problema como um todo e não à procura de uma única solução, dá oportunidades aos alunos de colocarem em acção uma variedade de capacidades matemáticas – incluindo aquelas que não são geralmente desenvolvidas por problemas *puramente matemáticos* – nas mais situações diversas (Abrantes, 1993; Swetz, 1992). Em particular, os alunos desenvolvem a capacidade de modelação e interpretação – representar de uma forma abstracta uma situação problemática real que envolve variáveis e construírem e interpretarem o modelo matemático em relação à situação – e a capacidade para utilizar a matemática através da resolução de situações problemáticas na interpretação e intervenção no real (Abrantes *et al.*, 1999; NCTM, 1991).

Os documentos curriculares portugueses, do ensino básico e secundário, e os documentos *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1991) e *Principles and Standards for school mathematics* (NCTM, 2000) salientam a preocupação em dar uma formação aos alunos que lhes permita por um lado, compreender a Matemática como parte da cultura humana, como modo de pensar e de aceder ao conhecimento – que fazer matemática é uma actividade humana – de forma a compreenderem melhor a realidade e por outro lado, que lhes permita utilizar a Matemática nas situações e problemas de contexto matemático e não matemático – da vida pessoal, profissional e da sociedade e nos contextos das diferentes disciplinas escolares. Nomeadamente noutras áreas da actividade humana como "as Artes, ou disciplinas como a Física e a Economia, ou ainda domínios de intervenção social, como o ambiente ou a saúde" (Canavarro, 2005, p. 5). Mas, também uma formação que promova nos alunos o desenvolvimento de atitudes positivas face à disciplina de Matemática, o desenvolvimento da confiança nas suas próprias capacidades e uma visão apropriada da Matemática e da actividade matemática. É neste sentido, que a modelação matemática – ligada à vida real, às tecnologias da informação e comunicação (TIC) e às outras áreas do saber – é vista como uma estratégia que atravessa todo o programa de forma transversal.

A partir de 2003, surgiram novos programas – dando realce ao desenvolvimento da capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real – referentes a novas e diferentes disciplinas de Matemática do ensino secundário, associadas às diferentes áreas vocacionais dos alunos, como a Matemática A, a Matemática B, a Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) e a Matemática Aplicada para os Cursos de Formação Complementar (CFC - PRODEP). A preocupação relativa à relação de reciprocidade entre a Matemática e as outras ciências tem adquirido maior convicção com a evolução dos documentos curriculares portugueses dos últimos quinze anos: no ensino básico com a consideração do conceito de competência matemática, onde se sublinha a importância da *literacia* matemática, e no ensino secundário, com a explicitação de finalidades que destacam o papel instrumental da Matemática, e o seu poder na formação de uma consciência informada e com capacidade crítica e interventiva relativamente a importantes problemas que actualmente afectam a sociedade (Canavarro, 2005).

"A modelação permite uma maior percepção do poder da Matemática" (Swetz, 1992, p.48). O propósito global dos objectivos para os alunos é o de que eles "têm necessidade de se sentir capazes de utilizar o seu poder matemático crescente na tarefa de dar sentido a novas situações problemáticas que surgem no mundo que os rodeia" (NCTM, 1991,p. 7). O poder matemático pode ser encarado como uma espécie de aptidão matemática ampla, compreendendo o sentimento de autoconfiança em capacidades matemáticas variadas. Capacidades essas que incluem: a resolução e formulação de problemas, o raciocínio lógico e a comunicação em Matemática, a capacidade de explorar situações e de identificar regularidades, a capacidade de formular e testar conjecturas, e a capacidade de valorizar a Matemática e de a relacionar com aspectos contextuais (Guimarães, 2005; ME – DEB, 2001). Uma das formas de os objectivos atrás apontados se concretizarem consiste em os alunos realizarem diversas actividades de modelação, permitindo-lhes deste modo terem oportunidades de viverem este tipo de experiência de aprendizagem adequada e significativa. Nomeadamente os alunos terão de "matematizar situações da vida real e reconhecer que fenómenos aparentemente díspares podem ser interpretados pelo mesmo modelo, auxiliando-se adequadamente com a calculadora, e sempre que possível meios informáticos tirando partido das suas potencialidades" (ME – DGEBS, 1991, p. 11).

Também é destacado no documento *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1991) que uma "outra componente importante do pensamento matemático é o processo de modelação matemática" (p. 164). Este documento recomenda para os anos de escolaridade 9-12, que todos os alunos "apliquem o processo de modelação matemática a situações problemáticas do mundo real" (p. 163). Reforça a ideia de que "Os problemas e as aplicações da matemática devem ser utilizados para introduzir novos assuntos, para ajudar os alunos a desenvolver simultaneamente a compreensão de conceitos e o desembaraço nos procedimentos e para aplicar e rever processos já aprendidos" (pp. 163-164). Recomenda, ainda, uma *retrospecção* da situação problemática e de todo o processo de resolução, uma vez que assim se pode proporcionar aos alunos métodos de resolução ainda mais eficazes ou extensões do problema, de modo a enriquecer a experiência matemática dos alunos. Podendo este cenário durar dias ou semanas, sendo conveniente que os alunos o trabalhem e cooperem em grupo com recurso à calculadora e ao computador, preferencialmente no sentido deste processo se repetir ao longo do currículo e de forma regular.

Estas ideias são reforçadas no documento *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), por exemplo no que diz respeito ao uso de modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas, nos anos equivalentes ao nosso 3º ciclo, considera que os alunos "devem usar funções lineares para modelarem uma série de fenómenos e explorarem outros não lineares" (p. 303). Acrescenta, ainda, que os alunos devem ter oportunidades de resolver numa relativa larga-escala problemas motivadores e significantes que envolvam a modelação, "Após organizarem os seus dados em gráficos, tabelas, ou esquemas, os alunos podem pensar quais são as representações mais úteis que lhes mostrem *regularidades* nesses dados" (p. 284). Já os alunos dos anos de escolaridade 9-12 "devem estudar a modelação em maior profundidade, generalizando ou usando dados e explorando que tipos de funções melhor se ajustam ou modelam esses dados" (p. 303).

São estas intenções e contributos que se considera que o presente estudo poderá dar no actual contexto da educação matemática.

2.5. Tendências e perspectivas Futuras

Hoje em dia, o currículo de matemática tem de alargar as suas metas de modo a incluir conceitos e processos chave, tais como: argumentos estatísticos, probabilidades, pensamento algébrico, modelação matemática, visualização, resolução e formulação de problemas, significado do número e lidar com a mudança tecnológica. Maximizar as oportunidades de sucesso dos alunos, neste século XXI, para que todos eles tenham acesso à natureza da matemática, deverá ser uma primeira meta de todos os programas de educação matemática (English, 2002).

Para Blum e Niss (1991) o movimento das aplicações da Matemática e da modelação tenderá a ter um alargamento: dos seus argumentos relativos à sua inclusão nos currículos; de novas áreas de aplicação; e das possibilidades de valorizar a dimensão interpretativa da relação Matemática-realidade, através do impacto crescente da tecnologia que implica a não necessidade de conhecimentos profundos sobre todos os aspectos matemáticos envolvidos na construção do modelo.

Niss (2001) considera que tem sido dada muito pouca atenção à investigação em aplicações e modelação. É necessário continuar a trabalhar-se para a inclusão de uma séria de componentes de aplicações e modelação no dia-a-dia da educação matemática. Para tal, são precisas mais demonstrações de como é uma investigação importante, excitante, intrigante e bem fundada e documentada, nomeadamente no domínio de: "Em que fase do processo de modelação os alunos se deparam com grandes obstáculos?" (p.82). "Quais são, em termos cognitivos, as relações entre a capacidade de modelação e a competência matemática? Como é que a base do conhecimento matemático de um grupo de estudantes pode ser activada pela matematização?" (p.83). "Até que ponto os estudantes podem gerir a matematização, parte do processo de modelação? Em que circunstâncias e condições eles podem aprender a fazer isto, e quais são os típicos obstáculos que eles encontram nesse empenhamento?" (p.84)

Para English (2002) muitos dos últimos desenvolvimentos da tecnologia têm que ainda ser percebidos completamente no campo da matemática, a realização do seu potencial é governada em larga escala através de contextos de aprendizagem nos quais eles possam ser usados. Nomeadamente, assuntos relacionados com a tecnologia e com contextos de aprendizagem são: "Como é que novas ferramentas tecnológicas provocam ou iniciam diferentes momentos de aprendizagem? Que modelos teóricos emergem ou necessitam de desenvolvimento em ambientes de aprendizagem com tecnologia?" (p.13)

2.6. Relação Matemática – realidade

A ênfase dada à relação da Matemática com a realidade pelas orientações curriculares tem vindo a merecer uma atenção crescente. Esse interesse está voltado para a interacção dinâmica entre o mundo real e a Matemática, para o processo de tradução de uma dada situação real para o modelo matemático e vice-versa, ou seja para a modelação matemática.

O desenvolvimento da Matemática e das suas aplicações na sociedade moderna destacam com máxima importância educativa os objectivos seguintes: (i) "o conhecimento do alcance e dos limites do processo de modelação, e (ii) a capacidade para compreender, construir e analisar criticamente modelos matemáticos simples" (Ponte, 1992, p. 19). A valorização real desta perspectiva nas aulas de Matemática, infelizmente, continua a ser um dos mais sérios desafios com que o ensino desta disciplina se depara (Ponte, 1992).

A Matemática tornou-se uma *disciplina para todos*, que deve contribuir, de um modo significativo e insubstituível, para ajudar os alunos a tornarem-se cidadãos críticos, criativos, competentes e independentes, responsáveis, treinados para o profissionalismo no trabalho, e a adquirirem apropriadas atitudes intelectuais (Abrantes *et al.*, 1999; Blum *et al.*, 1989; Niss, 1992). As conexões matemáticas com o mundo que nos rodeia, a vida e o quotidiano, e com outros assuntos e disciplinas ocorrem por meio de modelos matemáticos e da modelação. É nesta óptica associativa da matemática com estas finalidades que Niss (1992) argumenta a introdução das aplicações e modelação no currículo, tal como ele afirma: "Se a Matemática é tão importante na sociedade parece natural que no ensino da Matemática se mostre porquê e como" (p. 1). Estas necessidades têm contribuído para a crescente importância da competência matemática na preparação dos alunos – incluindo os adultos em exercício – para o exercício da cidadania, profissão, actividades, vida privada e social (Niss, 1992).

Outro argumento é que para se utilizar a Matemática de forma eficiente e flexível na construção e análise de modelos de situações reais não basta ser-se competente em Matemática *pura* – ao nível do cálculo e resolução de problemas. São precisas outras competências diferentes daquelas, requer capacidades específicas resultantes da própria natureza desse tipo de situações/problemas da *vida real* e que por norma não são desenvolvidas através de problemas puramente matemáticos, assim cabe à educação matemática desenvolve-las nos alunos (Abrantes, 1993; Abrantes *et al.*, 1999; Blum e Niss, 1991; Niss, 1992; Ponte, 1992; Swetz, 1992). Sendo também fundamental que todos os alunos aumentem a sua auto-confiança necessária para desenvolverem a sua capacidade de analisar e resolver situações problemáticas reais, raciocinar e comunicar (Abrantes *et al.,* 1999).

Niss (1992) realça, ainda, que um outro argumento, que refere como sendo muito comum, é o facto de as aplicações e modelação matemática motivarem os alunos e apoiarem-nos na aquisição e compreensão de conceitos, métodos e resultados matemáticos (Abrantes, 1993; Abrantes *et al.*, 1997; Abrantes *et al.*, 1999). Pólya (1945) acrescenta ainda que "Se experimentar prazer com a matemática, não a esquecerá facilmente e haverá, então, uma grande probabilidade de que ela se torne alguma coisa mais: uma ocupação favorita, uma ferramenta profissional, a própria profissão, ou uma grande ambição" (p. 12).

Outro argumento para a inclusão das aplicações e modelação matemática no currículo, é que por um lado os modelos matemáticos aliados à tecnologia são usados como procedimentos para resolverem problemas das outras ciências (naturais, sociais e económicas) tendo um grande impacto nestas. Mas, por outro lado, essa relação de reciprocidade entre a Matemática e as outras ciências, outras áreas da actividade humana, contribui para o aumento de conhecimento matemático – mais abundante, variada e sofisticada a informação numérica – em relação aos mais diversos assuntos, o que implica um desenvolvimento da própria Matemática (Abrantes *et al.*, 1999; Keitel, 2004). Conjuntamente com esses factores a Matemática também é a base de muitas tecnologias, e por sua vez, a tecnologia tem tido um grande impacto sobre a disciplina de Matemática, por exemplo no surgimento de novas formas de aplicação em ciências combinadas com procedimentos experimentais como a *Tecnomatemática*, Matemática industrial ou Teoria dos Algoritmos (Keitel, 2004).

A aprendizagem baseada na resolução de problemas reais, na procura de modelos matemáticos e no seu estudo, enquanto modelos, permite a conexão entre as várias ferramentas e conteúdos matemáticos e faz com que a aprendizagem tenha sentido (De Lange, 1989). A importância dessas conexões é, também, salientada no documento *Principles and Standards for school mathematics* (NCTM, 2000): "Quando os alunos podem interligar ideias matemáticas, a sua compreensão é mais profunda e mais duradoura. Eles podem ver conexões matemáticas no rico intercâmbio entre tópicos matemáticos, em contextos que relacionam matemática com outros assuntos, e nos seus próprios interesses e experiência. Mediante uma educação que realça a inter-relação de ideias matemáticas, os alunos não aprendem apenas Matemática, eles também aprendem acerca da utilidade da Matemática" (p. 64). Além disso, a *interna* realidade matemática e o mundo real da imaginação dos estudantes também promovem o desenvolvimento de conceitos (Schupp, 1989).

A Matemática como uma actividade humana é muito mais que um corpo de conhecimentos, em particular a compreensão de contextos matematizados e o uso competente da matemática em contextos vai além do conhecimento. Keitel (2004) refere a *humanização da modelação* como um novo paradigma: por um lado a tradicional matemática aplicada, orientada e limitada à representação de uma determinada realidade por estruturas matemáticas, sem qualquer intenção subjectiva; e por outro lado, as novas formas de aplicação que reflectem intenções subjectivas, pois não ocultam os interesses e as intenções sociais e políticas que orientam a construção de um modelo – como os modelos aritméticos para os métodos de eleição. Refere, ainda, que a Matemática juntamente com a tecnologia da informação e comunicação para além de proporcionar descrições e explicações acerca de uma determinada parte da realidade, também cria uma nova realidade: "os modelos matemáticos transformam-se em realidade e institucionalizam uma nova forma de realidade", por exemplo como os modelos de impostos vistos como tecnologias sociais (p. 19).

Também Hans Freudenthal via a Matemática *como uma actividade humana,* em vez de um assunto já feito que tem de ser transmitido a alunos passivos. Freudenthal considerava que a Matemática para ser de valor humano devia ser conectada à realidade, ligada aos alunos e pertinente para a sociedade. As aulas de Matemática, e a educação em geral, deveriam dar aos alunos a oportunidade *orientada* para eles *re-inventarem* a Matemática fazendo-a.

Defendia que a educação matemática deveria ter como ponto de partida a Matemática *como uma actividade* e não como um sistema já feito, fechado/acabado. Para Freudenthal o foco da actividade matemática era a matematização – organizar a partir da perspectiva matemática – vista como uma forma dos estudantes reinventarem a matemática (Doorman, 2005; Heuvel-Panhuizen, 2000; Heuvel-Panhuizen e Wijers, 2005;).

Também Pólya (1945) salienta a ideia da resolução de problemas como promotora da experiência matemática do aluno, dos processos de criação e descoberta da actividade matemática: "Sim, a matemática tem duas faces: é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também uma outra coisa. (...) a matemática em criação apresenta-se como uma ciência indutiva, experimental". (p. 13).

As tarefas de modelação são um campo próprio para a experimentação, ou seja, para a actividade matemática, na medida em que, as conexões vão assumindo um papel cada vez mais importante e efectivo no currículo e o uso da tecnologia facilita conexões mais regulares entre as representações algébricas, gráficas, geométricas e numéricas de uma situação. Devendo o papel da modelação matemática entre a situação problemática e a solução/modelo ser o mais evidente e directo possível, assumindo as ferramentas matemáticas um importante papel de apoio (Domingos referido em Pires, 2001).

Contudo, no processo de ensino-aprendizagem a relação Matemática – realidade reflectida nas tarefas de modelação deve corresponder a situações diversificadas e com elevado grau de autenticidade – que sejam dos reais interesses dos alunos de modo a que estes sejam os agentes da sua própria aprendizagem – e que abordem diferentes domínios do saber, questões de outras disciplinas curriculares, da sociedade ou do mundo em geral. De modo a apoiar o enquadramento do conhecimento numa perspectiva histórico-cultural (Canavarro, 2005; ME – DES, 2001a).

2.6.1. A modelação matemática e a interdisciplinariedade

Para os autores Blum e Niss (1991) o ensino de Matemática deve essencialmente servir dois diferentes propósitos, um é fazer com que os alunos adquiram conhecimento e capacidades matemáticas, da própria Matemática e de outras disciplinas onde a matemática tem actuais ou potencias serviços supostamente a oferecer. Outro é que o *material de trabalho – framework – organizacional* do ensino da Matemática pode tomar duas diferentes formas: a matemática pode ser ensinada como uma matéria separada, como uma unidade organizacional independente e por outro lado, a Matemática pode ser ensinada como uma parte de e integrada em outras disciplinas, no sentido da interdisciplinaridade e transversalidade com o propósito de elucidar a Matemática como um assunto.

A introdução das tarefas de modelação no ensino da Matemática pode evitar aprendizagens incorrectas nomeadamente na disciplina de Físico-Química, uma vez que a forma como a Matemática é por vezes utilizada nas aulas de Físico-Química mostra que existe a possibilidade de os alunos adquirirem noções grosseiras e incorrectas, ou seja, com tendência para a memorização de fórmulas que não são compreendidas (Griffiths e Howson referido por Matos e Carreira, 1996). Por tal, aos alunos do 9º ano deverão ser apresentados e trabalhados vários exemplos de situações problemáticas de proporcionalidade inversa, retiradas da vida real ou de outras ciências, por exemplo: "Leis da Física (...)" (ME – DGEBS, 1991a, p. 54). O Currículo Nacional do Ensino Básico (2001) refere, ainda, que: "Um aspecto importante será o tratamento e exploração matemáticos de dados empíricos recolhidos no âmbito de outras disciplinas, nomeadamente as da área das Ciências Físicas e Naturais, a Geografia e a Educação Física" (p. 70). Estas ligações entre disciplinas, para os autores Bernardes e Colaço (1997), dão significado a certos conceitos e conteúdos matemáticos que de outra forma estão condenados a serem tratados num plano abstracto. Assim, consideram indispensável o trabalho que vá no sentido de serem os alunos a criarem a sua própria imagem dos conceitos e das técnicas matemáticas antes da sua formalização. Mas, esta perspectiva não dispensa a formalização dos conceitos e o treino de certas técnicas e considera, de igual importância, que descubram a Matemática do quotidiano e a forma como ela é utilizada nas outras ciências. Na medida em que, ao reconhecerem algo que faz parte da sua experiência pessoal ou das outras disciplinas ganham confiança no trabalho que estão a desenvolver, pois têm mais facilidade em interpretar, analisar e criticar os resultados que vão obtendo.

Contudo, o futuro da modelação passará pelo desenvolvimento do saber fazer dos professores e pelo seu trabalho conjunto com os de outras áreas, no sentido de proporcionar aos alunos actividades mais contextualizadas e interdisciplinares quer nas respectivas aulas quer na área de projecto.

2.7. Modelação com recurso às tecnologias da informação e comunicação

As tecnologias da informação e comunicação (TIC) ao facilitarem os cálculos e a construção gráfica mudaram a própria natureza dos problemas e os métodos utilizados para investigar esses problemas (NCTM, 1991).

Os alunos do 3º ciclo do ensino básico devem ter o conhecimento e uso das TIC vocacionadas para o trabalho com gráficos, que devem fazer parte, pelo menos a um nível introdutório, das experiências de aprendizagem de todos os alunos do ensino básico (Abrantes *et al.*, 1999; APM, 2002; ME – DEB 2001).

As TIC devem ser implementadas em todos os níveis de ensino, de modo a que: "na aprendizagem se contacte com uma matemática mais viva, muito mais próxima do espírito investigativo que caracteriza a actividade dos matemáticos; o aluno passe a desempenhar um papel muito mais activo e autónomo, definindo e aprofundando os seus domínios de interesse, e usando com desembaraço uma variedade de ferramentas para o seu estudo; o professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e contínuo aperfeiçoamento de situações de aprendizagem" (Ponte, 1995, p. 7).

O papel das TIC é destacado pelo facto de permitrem trazer ao ensino-aprendizagem da matemática, nomeadamente: uma progressão do interesse dos alunos pela realização de projectos e actividades de modelação, como parte fundamental da sua experiência matemática; e, uma demonstração prática da possibilidade de envolver os alunos em actividade matemática intensa e significativa, favorecendo o desenvolvimento de atitudes positivas em relação a esta disciplina e uma visão muito mais completa da sua verdadeira natureza (Ponte, 1995). De facto, "[há] evidência de que a tecnologia pode constituir um suporte valioso para que os alunos se apropriem de ideias e processos fundamentais em áreas como a geometria e as funções" (Abrantes *et al.,* 1997, p. 31).

Existem diversas ferramentas tecnológicas com grandes potencialidades ao nível do ensino básico e secundário no apoio da construção de modelos em actividades de modelação matemática tais como: as folhas de cálculo, os programas para ajustamento de curvas, de gráfico de funções, de manipulação simbólica, e os específicos para a actividade de modelação de que são exemplos o *PowerSim*, o *Modellus* e o *Maple* (Matos, 1997; Wong, 2003; Sousa, 2004). O uso de computadores promove capacidades de pensamento de nível superior como *puzzling*, raciocinar e resolução de problemas, pois, o verdadeiro trabalho é exigido e executado pelos alunos, que terão de formular ideias, expressá-las, desenvolvê-las, e editá-las. Além disso, por a relação computador/aluno ser impessoal, os erros do aluno deixam de ser embaraçosos e passam a ser algo que lhe serve para novas aprendizagens (Matos, 1997). Para Boon-Liang, e Yingkang, (2004), e Lawson e Tabor (2001) as folhas de cálculo são um veículo inicial, ideal para investigar modelos discretos – numericamente, graficamente e/ou algebricamente, pois permitem uma compreensão mais profunda dos processos em lugar de ser só algébrica.

Contudo, a investigação tem mostrado que a ênfase deve estar no como a tecnologia é usada e não no seu uso, por exemplo a questão essencial quanto ao uso da calculadora está em saber como e quando é apropriado usá-la e, em seguida, ser competente a fazê-lo (Goldenderg, 2000; Matos, 1997; Wong, 2003). Deve surgir apoiada, pelo menos, em seis sensatos princípios profissionais da educação, que podem ajudar-nos enquanto professores a tomar as nossas decisões e a reflectirmos acerca do seu uso nas nossas aulas de matemática. Nomeadamente, o *princípio do género* recomenda que *olhemos* para o desígnio da aula e para as necessidades individuais de cada aluno. *O do propósito*, que *olhemos* para a natureza do pensamento dos alunos, fazendo-lhes perguntas. *O da resposta versus a análise*, que *olhemos* para o papel da tecnologia na actividade a ser desenvolvida na aula. *O do que faz o pensamento,* que mantenhamos o controlo no conteúdo matemático, para que ajudemos os alunos a desenvolverem novos e poderosos métodos de olharem para os problemas, ajudando-os nomeadamente a construírem modelos mentais, a adquirirem capacidades gerais e flexíveis. *O da cuidadosa* *mudança de conteúdo*, refere que se deve aprender para se ser usuário do poder da tecnologia. *O do uso fluente da ferramenta*, sublinha que devemos fazer com que seja a aprendizagem o principal motor destas e das mudanças que surgem inexoravelmente (Goldenderg, 2000).

2.7.1. Modelação com recurso à calculadora gráfica e sensores

Além da tecnologia influenciar no como a Matemática é ensinada e é aprendida, também afecta o que é ensinado e quando um tópico aparece no currículo. Por exemplo, os alunos do ensino médio (*grades* 6-8) podem estudar relações lineares e ideias de declive e de mudança uniforme com representações de computador, executar experiências físicas com sistemas de CBL, trabalhar com manipulações virtuais, simulações de computador de manipulação física e as "(...) utilidades gráficas facilitam a exploração de características de classes de funções" (NCTM, 2000, p. 26).

Tanto Heck e Holleman (2001), como Aspetsberger e Aspetsberger (2001) foram confrontados com o problema do como introduzir ao mesmo tempo a tecnologia e a matemática em actividades de modelação com vários grupos de alunos entre os 14 e os 18 anos de idade. O papel principal da TIC nessas actividades foi o de ajudar a visualizar, processar, e analisar dados reais através da recolha de grandes listas de dados experimentais pelo sistema TI-CBL. Regra geral, essas experiências foram um sucesso, contudo antes de trabalharem nas tarefas os alunos precisaram de mais tempo para ficarem familiarizados com a tecnologia, a mesma situação é realçada nos relatórios com crianças mais jovens. A disponibilidade e o desenvolvimento de materiais por uma gama de *software* e periféricos, como a TI *Interactive,* as calculadoras gráficas TI-73/TI-83 e o CBR, promovem modelos de boa prática (Clark-Jeavons e Hyde, 2001).

A TI-92 – ou calculadoras gráficas comparáveis – ajuda a visualizar os dados, a delinear gráficos, a executar cálculos tediosos e complicados como a determinação de curvas de regressão, e ajuda a investigar dados experimentais que podem ser visualizados de forma bastante confortável (Fevereiro e Belchior, 2001).

O CBL2^{TM} (*Calculator Based Laboratory*) – dispositivo portátil de recolha de dados do mundo real – permite recolher dados durante experiências físicas e químicas e o CBR^{TM} (*Calculator Based Ranger*) que é um sensor de movimento sónico permite juntar uma grande quantia de pontos dos dados recolhidos sobre um objecto. Estes recursos requerem e treinam, nos alunos, várias capacidades básicas em diferentes áreas: capacidades matemáticas, capacidades verbais (através de relatórios), capacidades práticas e capacidades sociais. Sendo a principal capacidade básica em matemática a de reconhecer as interdependências funcionais dos dados experimentais e achar funções de ajuste satisfatórias. Os alunos obtêm, assim, uma visão diferente do problema usando conexões mais facilmente entre as representações gráficas e as analíticas para justificarem os raciocínios (Fevereiro e Belchior, 2001). Para além disso, a tecnologia na sala de aula ao economizar tempo fundamental aos alunos, pois liberta-os de cálculos tediosos, permite-lhes que se concentrem na fase de formulação (matematização) – parte difícil do processo de modelação, desenvolve-lhes competências em representações gráficas e analíticas ao estabelecerem as relações correctas entre ambas as representações, e capacidades próprias destas actividades, nomeadamente as algébricas que são importantes na formulação de modelos (Burkhardt, 1989; Berry, 2001).

Pires (2001), na realização de tarefas de modelação de duas experiências do campo da Física utilizou os sensores CBL2^{TM} e CBR^{TM}, programas adequados e calculadoras gráficas. Refere que estes meios tecnológicos podem contribuir de forma decisiva para a criação de ambientes de aprendizagem ricos e motivadores. A autora verificou que é importante fazer-se modelação matemática com tecnologias, devido à eficácia da própria recolha de dados nas situações experimentais, da melhor compreensão do significado de variável, de dependência e independência e da compreensão das relações entre as variáveis. As potencialidades da calculadora exploradas separadamente na Estatística e nas Funções, são nas tarefas de modelação exploradas em conjunto (listas, operações com listas e funções), onde a sua utilização de forma integrada permite melhores conexões entre as representações: gráfica, numérica e algébrica de uma mesma situação. De facto, as orientações curriculares recomendam que todos os alunos, à medida que progridem na educação básica, devem aprender a utilizar não só a calculadora elementar mas também a científica e a gráfica (ME – DEB, 2001, p. 71). Os alunos devem ver a calculadora como uma ferramenta que podem usar como uma ajuda para os cálculos difíceis (Wong, 2003).

A investigação tem evidenciado que as calculadoras podem desempenhar um papel importante na aprendizagem da matemática, se forem usadas apropriadamente, estas ferramentas podem aumentar nos alunos: a *numeracia* e a resolução de problemas; as capacidades aritméticas; as capacidades de resolução de problemas; e as atitudes dos alunos para com a sua aprendizagem, embora ainda seja necessária mais investigação (Wong, 2003). Contudo, deve-se reflectir quando é que se está a ensinar tecnologia e quando é que se está a usá-la para o ensino da matemática, uma vez que estudos mostram que não se pode fazer ambas ao mesmo tempo.

2.8. A modelação matemática no âmbito das funções

Os resultados obtidos pelos nossos alunos em estudos internacionais, como o PISA e o TIMSS, sugerem que aprendizagens mais conceptuais envolvendo, nomeadamente o raciocínio proporcional e o uso de funções para modelar situações da vida real parecem merecer uma atenção reduzida no nosso ensino (Ponte et al., 1998).

Um dos conceitos-chave da Matemática é o de proporcionalidade, pois funciona como uma base impulsionadora para o estudo de funções, da geometria analítica e da modelação. É através dele que se passa do estudo de diversos tipos de números (por exemplo, número racional) para a matematização de uma relação entre duas variáveis. Sobretudo, existe a necessidade de se estudar no processo ensino-aprendizagem o conceito de proporcionalidade inversa de uma forma integrada de modo a preparar os alunos para temas mais avançados como o estudo das funções (Ponte et al., 1998).

Os alunos percebem melhor quando os conceitos matemáticos centrais do ensino básico são também bons modelos estandardizados, em particular o conceito de função. Onde se pode aplicar por exemplo: função quadrática e aceleração com movimento uniforme, função exponencial e crescimento geométrico, função trigonométrica e processos periódicos, e *funções* *escondidas* tais como as fórmulas de áreas em Geometria, o significado estatístico, a teoria da distribuição uniforme em Probabilidades (Schupp, 1989).

Muitos autores consideram o conceito de função como um dos mais importantes da matemática. Os métodos algébricos e as funções são, também, elementos essenciais para o estudo de problemas de diversas áreas científicas, muito especialmente no caso da disciplina de Físico-Química. Por exemplo, um dos aspectos interessantes da aprendizagem das equações tem a ver com as conexões que podem surgir com as funções e com a representação geométrica. Constituem igualmente aspectos importantes da competência matemática o uso de formas simbólicas para representar e analisar situações matemáticas e para modelar fenómenos diversos, assim como a compreensão de relações entre vários tipos de representação matemática. Neste sentido, o estudo das funções pode revelar-se particularmente rico em oportunidades para se estabelecerem conexões entre diversos domínios da Matemática. Na medida em que os alunos ao estabelecerem relações entre tabelas de valores, gráficos e expressões algébricas podem desenvolver diversos tipos de conexões e compreender o conceito de função. O que os leva a relacionar naturalmente, padrões numéricos, representações geométricas e métodos algébricos. Para além disso, um dos principais usos das funções é na modelação e interpretação, de situações do mundo real. Na medida em que todos os alunos devem desenvolver capacidades, tais como: *visualização espacial, organização e análise de dados, simbolização, raciocínio algébrico, compreensão das relações funcionais, representação e transferência, e Modelação e interpretação.* Onde a capacidade de modelação, para representar de uma forma abstracta uma situação problemática que envolve variáveis, é indissociável da interpretação dos modelos matemáticos em termos das respectivas situações da vida real (Abrantes et al., 1999).

As funções surgem ao longo de todo o currículo, por exemplo nas operações aritméticas (quando a um par de números corresponde um único número), nas transformações geométricas (quando se relacionam conjuntos de pontos com as respectivas imagens), em álgebra (quando se relacionam variáveis que representam números). De facto, no âmbito da área temática *Álgebra e Funções*, é recomendado que todos os alunos, em particular os do 9º ano, devem desenvolver a sensibilidade para, nomeadamente: (a) reconhecer diferentes tipos de funções, (b) entender o uso dessas funções como modelos matemáticos de situações problemáticas do mundo real, particularmente nos casos em que traduzem relações de proporcionalidade directa e inversa, (c) representar relações funcionais de diferentes modos, (d) representar e analisar funções utilizando diferentes tipos de representações, (e) passar de uns tipos de representações para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas, com recurso por exemplo da tecnologia gráfica e (f) usar o conceito de função para descrever e estudar fenómenos do dia-a-dia, da Matemática e de outras ciências (Abrantes *et al.*, 1999, p. 126; ME – DGEBS, 1991a, p.10 e p. 54; ME - DEB, 2001, p. 67). Neste sentido, os alunos do 3º ciclo da educação básica devem ter experiências de aprendizagem em que funções e gráficos surjam como modelos de situações reais diversas, devem fazer uma leitura adequada e interpretar criticamente a informação proveniente dos meios de comunicação (geralmente apresentada por meio de tabelas e gráficos) sobre diversos fenómenos de mudança em campos tão diversos como a economia ou a meteorologia (Abrantes *et al.*, 1999; APM, 2002; ME – DEB 2001).

No ensino secundário, o conceito de função, percebido inicialmente como um processo ou procedimento, será entendido como um objecto mental (Abrantes *et al.*, 1999).

Nos documentos *A Matemática na Educação Básica* (Abrantes *et al.*, 1999) e *Currículo Nacional do ensino básico* (ME – DEB 2001) são, ainda, especificados diversos aspectos da competência matemática no domínio da álgebra e das funções que todos os alunos devem desenvolver, em todos os ciclos da educação básica.

2.9. Características das tarefas de modelação

"A modelação ajuda a exteriorizar a dinâmica que é inerente a muitas situações problemáticas" (Swetz, 1992, p. 47). Nas tarefas de modelação, a tendência é de que os alunos trabalhem essas situações a partir de fenómenos reais, em grupos, de modo autónomo e sob a orientação do professor (Abrantes, 1993). Como essas situações/problemas reais são muitas vezes do tipo: descreva a situação, enquanto que os *puramente matemáticos* são do tipo: resolva a partir da questão e informação dada (Pollak, referido em Abrantes, 1992) têm características próprias que os distinguem dos problemas *puramente matemáticos*.

Alguns requisitos característicos das tarefas de modelação de situações problemáticas reais também podem ser considerados como dificuldades nomeadamente: (i) alguns desses problemas não se encontram bem definidos/ formulados, e requerem a capacidade para *formular problemas* e auto-confiança dos alunos, que devem de estar familiarizados com este tipo de problemas; (ii) outros contêm informação em excesso ou em defeito, tornando-se necessário ignorar dados irrelevantes para o processo a seguir e/ou é muito provável ser necessário recolher-se novos dados; (iii) o facto do contacto único dos alunos com problemas artificiais levar a que aqueles suspendam o seu conhecimento do mundo real; (iv) os problemas reais serem geralmente de resposta aberta ou sem *resposta correcta* – sem uma única maneira de resolver ou uma única solução (NCTM, 1991); (v) as suas respostas raramente são exactas e não podem ser classificadas em correctas ou incorrectas, devendo ser encaradas à luz da quantidade e dos tipos de informação considerados (vi) o facto da qualidade da resposta/modelo, da sua avaliação poder estar mais relacionada com as explicações sobre os processos do que com os resultados obtidos; (vii) a adequação dos modelos, métodos e resultados matemáticos pode depender de critérios e conhecimentos reais *extra-matemáticos* da vida, da sociedade e de outras disciplinas requerendo a cooperação destas; e (viii) a maioria deste tipo de problemas exige tempo e persistência, facto que os alunos não estão habituados, desempenhando as suas atitudes e crenças um papel importante na auto-confiança dos mesmos para enfrentarem este tipo de desafios; (ix) permitem a partilha de saberes e responsabilidades (Abrantes, 1992; Abrantes *et al.*, 1997; Abrantes *et al.*, 1999).

As situações problemáticas reais, diversificadas, com alto grau de autenticidade e do interesse dos alunos, podem focar três propósitos: (i) a introdução de novos conceitos e ideias matemáticas – tarefa bem estruturada que leva ao desenvolvimento de conceitos e ideias e que promove a motivação; (ii) a aplicação de conhecimentos e ideias matemáticas – tarefa bem defenida, usa-se os conhecimentos aprendidos, promove um melhor esclarecimento dos conceitos e a sensibilidade dos alunos em relação ao uso das ferramentas matemáticas nas mais diversas situações; (iii) o processo de modelação – tarefa/projecto, realizado pelo menos uma vez ao longo do ano, para o estudo global de uma situação, promove uma visão holistica da interligação dos vários domínios da Matemática, o poder e os limites destes. Estas três formas complementam-se entre si e todas são necessárias (Ponte, 1992). Nesta perspectiva as actividades de modelação podem ser classificadas de situações realistas, problemas de resposta aberta ou actividades prolongadas.

Atendendo a estas perspectivas, as tarefas de modelação do presente estudo, por pretenderem complementar a ênfase do processo de modelação com o foco na introdução de novos conceitos e ideias matemáticas, proporcionando oportunidades aos alunos, em grupo, de desempenharem um papel mais activo, independente – pensarem por si próprios – comunicarem as suas respostas, explicando o que fizeram, como fizeram e porque fizeram, de modo a desenvolverem a sua capacidade para utilizar a Matemática na compreensão e interpretação de situações reais. Neste sentido, poderão ser classificadas de situações realistas com tendência para o seu prolongamento nas aulas de Matemática.

2.10. Processo de modelação matemática

Na revisão de literatura existem várias descrições acerca do processo de modelação no âmbito da matemática escolar, que convergem na descrição que a seguir se apresenta:

Para os autores Blum e Niss (1991) e Kerr e Maki (1979) o processo de modelação – *ciclo de modelação* – deverá ser visto como um conjunto de fases evolutivas, não rígidas, que apenas idealmente se sucedem numa determinada ordem, e em que uma ou mais fases podem ser combinadas ou mesmo omitidas consoante as actividades a desenvolver. Este processo, que a seguir se descreve é baseado nas teorias daqueles autores. Inicia-se da seguinte forma:

(i) <u>Fase da compreensão do contexto da situação problemática real e formulação dos problemas</u> – começa-se com uma certa *situação* do mundo real, a qual deve ser compreensiva e vista pelo aluno como real, e deve corresponder aos seus interesses. Esta situação é simplificada, estruturada e tornada mais precisa, de acordo com o conhecimento e interesses de quem resolve o problema, com o intuito de poder-se trabalhar com uma parte/versão simplificada da realidade – um *modelo real* da situação. O *problema* é então formulado nestes moldes.

(ii) Fase da recolha e organização de dados – a seguir, recolhem-se dados disponíveis, se possível, de modo a se obter mais informação acerca da situação. Esses dados podem ser recolhidos através de consulta de documentos, pessoas, Internet ou, o mais usual, por meios experimentais através de tecnologias da informação e comunicação. Nestas últimas o computador, a calculadora gráfica e os sensores ajudam na disposição e organização da informação recolhida.

(iii) Fase da construção do modelo matemático – para que um modelo matemático seja inserido num contexto educacional é necessário adicionar-se um outro passo ao processo de construção do modelo, em que o *modelo real* tem de ser ainda mais simplificado, para ser apropriado aos alunos, por norma seleccionam-se as variáveis consideradas como fundamentais. De seguida, o modelo real é *matematizado* – ou seja, os objectos, dados, relações, condições envolvidas, palavras e conceitos são traduzidos para a matemática, substituídos por símbolos e expressões matemáticas – passando a ter a estrutura de um *modelo matemático* da situação original. Nesta etapa, formas geométricas, tabelas e gráficos são introduzidos ou criados, procura-se relacionar entre si as variáveis e escolhe-se e constrói-se uma estrutura matemática, donde resulta o *modelo de sala de aula*, ou seja o modelo matemático para os alunos. O modelo matemático também efectua combinações entre objectos matemáticos (por exemplo, números, esquemas geométricos, funções) e expressões, que relacionam esses objectos com outros (por exemplo, equações, gráficos, transformações, tabelas). Após o modelo matemático estar formado, usam-se ferramentas, métodos e técnicas matemáticas para se obter previsões, conclusões/*resultados matemáticos*, baseadas no modelo.

(iv) Fase da análise: interpretação, reflexão e validação do modelo matemático – os resultados obtidos têm de ser *re-traduzidos* (confrontados com) para a realidade, avaliados e *interpretados* em relação à situação original, ver se são apropriados e razoáveis para se *validar* ou não o modelo (Blum e Niss 1991; Kerr e Maki, 1979). Nunca se deve negligenciar de validar a informação que se obtive através do processo de modelação (Schupp, 1989). Caso o modelo não for satisfatório então o mesmo terá de ser modificado ou substituído por outro – terão de ser novamente executadas todas as etapas do processo de modelação, por exemplo com a introdução de factores que foram anteriormente ignorados, as vezes que forem necessárias (Blum e Niss 1991; Kerr e Maki, 1979).

Um passo também essencial no processo de modelação é o reflectir nas soluções em relação ao problema original, contudo muito frequentemente não recebe a devida atenção (De Lange, 1999). Neste sentido, no presente estudo o processo de modelação termina sempre com a realização de relatórios da actividade desenvolvida e discussões finais dos grupos de trabalho na sala de aula, sob orientação do professor. Dando-se assim oportunidade aos alunos de desenvolverem a comunicação matemática. Na figura 2.1. apresenta-se um esquema com as fases do processo de modelação, baseado no esquema de Ponte (1992, fig.1, p.15).

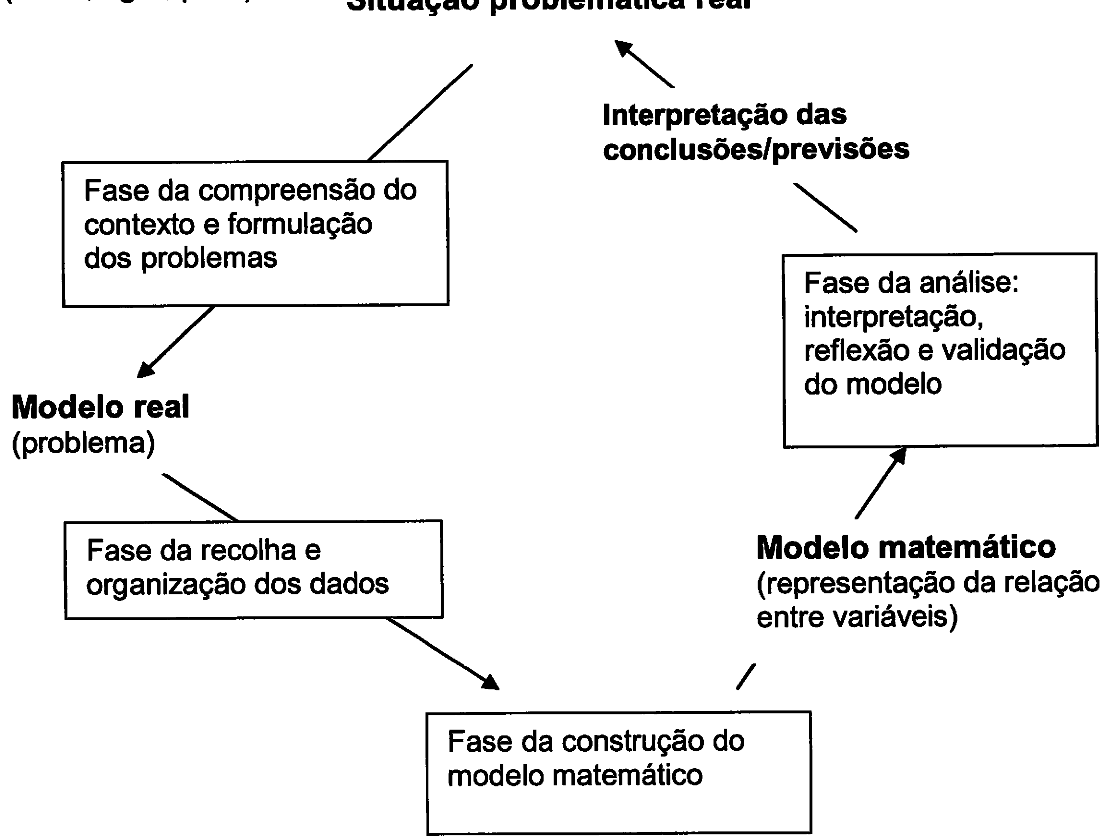


Figura 2.1. – Fases do processo de modelação matemática

O esquema idealizado por Kerr e Maki (1979) dá particular atenção ao ambiente de sala de aula, sendo bastante apropriado para a introdução das tarefas de modelação nas aulas de matemática. Na figura 2.2. apresenta-se o esquema idealizado por estes autores, a linha descontínua indica o passo que se deve seguir quando não tem de ser aplicado o modelo para a sala de aula.

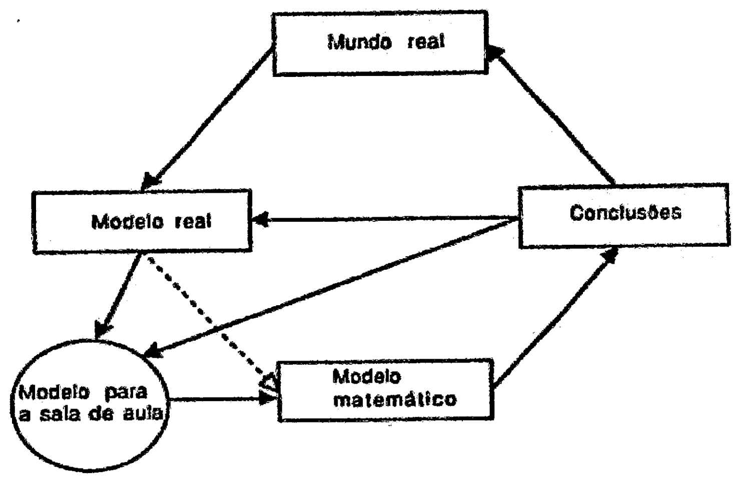


Figura. 2.2. - Ciclo de modelação em contexto educacional, de Kerr *e* Maki (1979, p.3)

2.10.1. O carácter representativo e interpretativo dos modelos matemáticos

O processo de modelação para além de dar uma simplificada mas verdadeira imagem de alguma parte da realidade preexistente, também estrutura e cria uma parte dessa realidade, dependendo do conhecimento, de determinadas operações mentais, de visões e concepções pessoais, intenções e interesses de quem resolve o problema (Blum e Niss, 1991). Neste sentido, um modelo matemático para além de representar uma parte de uma situação real, representa fundamentalmente um conjunto de opções, por parte de quem o constrói, acerca dessa situação (Carreira, 1998; Davis e Hersh, 1995).

Contrariamente a Blum e Niss (1991) e a Kerr e Maki (1979), para Carreira (1998) o processo de construção de um modelo matemático não se limita a uma tradução de uma situação real para estruturas e objectos matemáticos, pelo contrário é uma interacção entre o modelo e a sua respectiva situação modelada, pois depende sempre da maneira de como quem o constrói vê o real – o interpreta. Também De Lange (1989) não vê a matematização num sentido restrito, como uma tradução. Para o autor, durante a matematização – fase de construção do modelo matemático – quando se procede através de objectos e suas conexões com o mundo real, para os conceitos matemáticos e suas relações está-se a trabalhar com imagens mentais – representações internas – desse mesmo mundo real. Essas imagens mentais, interpretações intuitivas, representam uma parte da realidade e não o todo, pois são reduções dos originais objectos envolvidos e só dizem respeito a relevantes características dos mesmos (De Lange, 1989).

Devido à existência de opiniões divergentes, decidiu-se investigar as suas razões em maior profundidade. As investigações realizadas conduziram aos tópicos seguintes:

2.11. *Educação matemática realística – realistic mathematics education*

Desde os anos 70 que o Instituto Freudenthal, na Holanda, tem vindo a desenvolver uma abordagem teórica para o processo ensino-aprendizagem da matemática, designada por *Realistic Mathematics Education* – Educação Matemática Realística – (*RME*). A partir de 2003 o Instituto passou a designar - se por *FI-EUA,* devido à colaboração, já anteriormente existente, com o *Centro de Wisconsin* para pesquisa em Educação, e o seu director é o Professor Doutor De Jan Lange.

A razão do termo *realística* deve-se não só à conexão da *RME* com o mundo-real, mas também à ênfase dada por esta teoria às situações problemáticas que os alunos possam imaginar (a tradução holandesa de "imaginar" é "zich REALISEren"), que as suas mentes considerem reais. É esta ênfase em tornar de algo real na mente de cada indivíduo que deu à *RME* o seu nome Neste sentido, o contexto dos problemas apresentados aos alunos pode ser do mundo-real ou do mundo da fantasia ou do mundo formal da matemática, desde que seja real na mente do aluno (Heuvel-Panhuizen e Wijers, 2005).

A *RME* surgiu como uma reacção aos movimentos da Educação Matemática Mecanicista e da Matemática Moderna. A luta contra a abordagem mecanicista ainda não foi completamente conquistada, especialmente na prática de sala de aula, como qualquer reforma leva o seu tempo. A *RME* não pode ser considerada de uma teoria fixa ou acabada, pois continua em progresso, a efectuar várias investigações na educação Matemática. Uma característica significante da *RME* é que a ênfase está no crescimento do conhecimento dos alunos e do seu entendimento pela matemática. Neste sentido, esta abordagem trabalha continuamente para o progresso dos estudantes, actualmente a sua maior preocupação é a investigação e implementação de métodos pedagógicos na prática de sala de aula (Heuvel-Panhuizen e Wijers, 2005).

Os princípios que regem esta abordagem são fortemente influenciados pela visão de Hans Freudenthal da Matemática como uma actividade humana, conectada à realidade, aos alunos e pertinente para a sociedade. Para Freudenthal, as aulas de matemática, e a educação em geral, deveriam dar aos alunos oportunidades *orientadas* no sentido de eles *re-inventarem* a matemática fazendo-a. Defendia que a educação matemática deveria ter como ponto de partida a *matemática como uma actividade* e não como um sistema já feito, fechado/acabado. Cuja ênfase da actividade matemática era a matematização – organizar a partir da perspectiva matemática – vista como uma forma dos estudantes re-inventarem a matemática (Doorman, 2005; Heuvel-Panhuizen, 2000; Heuvel-Panhuizen e Wijers, 2005). A *RME* é caracterizada pelas seguintes características: uso de contextos, uso de modelos, uso das próprias produções e construções dos alunos, o carácter interactivo do processo pedagógico e a interligação de várias áreas de aprendizagem (Heuvel-Panhuizen e Wijers, 2005).

Os objectivos da "educação matemática realística para a maioria dos alunos são: tornar-se um cidadão esclarecido – alfabetizado em matemática; preparar-se para o mundo do trabalho e para estudos posteriores; e compreender a Matemática enquanto ciência" (Kooij, 1992, p. 39).

A abordagem *RME* distingue-se por ela própria de muitas outras abordagens, pois tenta transcender a dicotomia entre o conhecimento informal e o formal, projectando uma hipotética trajectória de aprendizagem ao longo da qual os estudantes podem re-inventar a matemática formal (Doorman, 2005). Estas oportunidades dadas aos alunos de *re-inventarem* ou *re-construirem* ideais e conceitos matemáticos – através de numerosas e diferentes actividades: problemas reais e situações reais ou de modelação – são uma das componentes essenciais da *educação matemática realista.* Para além disso, possibilitam aos alunos a escolha das suas próprias estratégias de resolução dos problemas e o confronto com diferentes pontos de vista, outros processos de resolução para o mesmo problema efectuado por outros alunos na aula (Kooij, 1992).

Estas perspectivas, de certa forma, são concordantes com as finalidades dos programas e currículo portugueses. Contudo, na óptica da *RME*, as situações problemáticas reais são contextos de aprendizagem, nos quais a matematização é um objectivo central que deve proporcionar experiências concretas, reflexão e discussão (Gravemeijer e Doorman, 1999). Enquanto que em Portugal são sugestões metodológicas.

A educação matemática realística usa a *reinvenção orientada* – *Guided reinvenction* – como uma estratégia didáctica que em vez de criar uma ponte entre o conhecimento informal e a matemática formal, cria oportunidades aos alunos para estes deixarem a matemática formal emergir. Freudenthal defendia a *reinvenção orientada*, pois a ênfase está mais no carácter do processo de aprendizagem do que na própria invenção, a ideia é fazer com que os alunos considerem os conhecimentos que adquiriram como sendo seus e se responsabilizem por eles (Gravemeijer e Doorman, 1999). Isto para que não surja uma abertura entre a imagem *da vida* e a imagem escolar da ciência e da matemática. A orientação consiste em entregar as actividades – tal como elas são, com contextos de situações que variam do dia-a-dia a mais científicas e em que os alunos não têm ainda procedimentos estandardizados – e motivar os alunos a construírem os seus próprios processos de resolução. De seguida, esses processos são comparados através da discussão na sala de aula sob a orientação do professor, que invoca a reflexão e impulsiona os alunos a contribuírem com argumentos interessantes, elegantes, adequados e sofisticados. As actividades e as discussões são delineadas antecipadamente numa hipotética trajectória que leva a um processo de aprendizagem de reinvenção orientada (Doorman, 2005). Em todo este processo os alunos são guiados numa *direcção* bem definida para serem conduzidos a um conceito matemático (Kooij, 1992).

2.12. A educação matemática realística como matematização progressiva

Um contexto é uma situação, fictícia ou real, que atrai os alunos e que eles possam reconhecer teoricamente, e que os force a chamar o conhecimento que ganharam com a experiência do seu quotidiano – por exemplo, na forma dos seus próprios métodos de funcionamento informais – fazendo assim da aprendizagem uma actividade significante para eles (Nelissen, 1999).

Tal como em Portugal, investigações da *RME* descobriram que os alunos não familiarizados a resolverem situações problemáticas, quando deparados com essas situações têm uma forte tendência para reagirem com descuido para com a realidade. Na maioria dos casos as respostas dadas são logicamente incompatíveis, pois os alunos focalizam-se na sintaxe do problema em lugar de no significado. Eles consideram este tipo de problemas como meros exercícios matemáticos, em que tentam identificar algoritmos supostamente escondidos, pois não percebem que se espera que eles resolvam um problema da vida real. Chegam mesmo a tentar resolver problemas insolúveis sem qualquer *reacção realística* (Nelissen, 1999).

O contexto deve desempenhar um papel principal como *veículo* de acesso à perspicácia, à compreensão e aos conceitos. Para que tal aconteça, é necessário que haja uma variedade de contextos e de papéis destes, a fim de reduzir a probabilidade de eles caracterizarem assuntos e fenómenos que não são culturalmente relevantes (De Lange, 1999).

Tal como a educação matemática portuguesa a educação realística considera que, o ponto de partida para a educação não está no aprender regras e fórmulas, mas trabalhar bastante com contextos. De facto, um contexto bem escolhido forma a base para abstracções subsequentes e para a formalização e a generalização, e pode induzir um processo de pensamento activo nos alunos (Kooij, 1992; Nelissen, 1999). Contextos, assim, têm várias funções: (a) oferecer apoio tanto à motivação como à reflexão e à compreensão dos alunos; (b) aplicar certas acções pertinentes à experiência; (c) fornecer informação que pode ser usada para achar uma solução/estratégia e/ou um modelo de pensamento (Nelissen, 1999); (d) como uma *âncora* para a compreensão dos alunos (Meyer, referido em De Lange, 1999).

Também se pode encarar o contexto como uma certa *distância* para os alunos, por exemplo, do contexto mais próximo para o menos próximo temos: a vida privada do dia-a-dia; a vida escolar, trabalho, e desportos; a comunidade local e a sociedade que fazem parte da vida diária; e os contextos científicos. Uma vez que não existem estudos suficientes acerca do como estas *distâncias* afectam a performance dos alunos nas tarefas, não se pode afirmar que os contextos mais *íntimos* são mais atraentes para os estudantes ou que servem melhor as tarefas do que os mais científicos. No entanto, a convicção comum sugere que os alunos menos brilhantes *preferem* contextos mais íntimos, próximos do seu meio ambiente, porque captam mais facilmente o contexto (De Lange, 1999).

Os problemas de contexto são definidos como situações problemáticas que são experiências reais para os alunos e que lhes possam oferecer oportunidades para uma progressiva matematização. Existe uma relação reflexiva entre o uso de problemas de contexto e o desenvolvimento da realidade experimental dos alunos. Por um lado, os problemas de contexto estão enraizados nessa realidade, por outro lado, resolver esses problemas ajuda os alunos a ampliarem a sua realidade. Este tipo de problemas desempenha um papel central devido, por um lado, ao seu presumível poder motivador e, por outro lado, à sua crescente ênfase na utilidade do que é aprendido. Para a *RME*, o ponto de partida é que os problemas de contexto devem ser utilizados para apoiarem o processo de re-invenção dos alunos, permitindo-lhes lidarem com as dificuldades da matemática formal (Gravemeijer e Doorman, 1999).

Os alunos são desafiados a resolver este tipo de problemas sem indicações de como resolvê-los (Kooij, 1992). Deste modo ao experimentarem o processo de re-inventar a matemática como uma ampliação do seu senso comum, não experimentam nenhuma dicotomia entre a sua experiência da vida quotidiana e a da matemática. Ambas farão parte da mesma realidade. De facto, pode-se notar uma relação reflexiva entre o uso de problemas de contexto e o desenvolvimento da realidade experimental dos estudantes. Por um lado, os problemas de contexto estão enraizados nesta realidade, por outro lado, resolver esses problemas de contexto ajudam os alunos a ampliarem a sua realidade. É a conexão frequente deste carácter dinâmico da realidade, que define os problemas de contexto, como pontos de partida para trajectórias educativas, unir-se-á frequentemente com a experiência do quotidiano dos alunos (Gravemeijer e Doorman, 1999).

A matematização é efectuada a assuntos da vida diária assim como aos da própria actividade matemática, ou seja, a matemática envolve organizar fenómenos que lhe são internos e/ou externos em estruturas matemáticas – por exemplo, tabelas, gráficos – estudar essas estruturas, e investigar as relações e as transformações entre as estruturas e os fenómenos (Doorman, 2005).

O processo de matematização que consiste em organizar a realidade usando ideias e conceitos matemáticos é desempenhado em duas fases diferentes. A primeira fase, *matematização horizontal*, é o processo de ir do mundo real para o mundo matemático, dos símbolos. A segunda fase, *matematização vertical*, move-se dentro do mundo dos símbolos, é o trabalhar no problema dentro do mundo matemático. O processo de *matematização horizontal* consiste na actividade organizadora que cada aluno usa para adquirir conhecimento e capacidades de modo a descobrir regularidades, relações e estruturas. Requer actividades tais como: identificar a matemática específica num contexto geral; esquematizar; formular e visualizar o problema; descobrir relações e regularidades; reconhecer semelhanças em diferentes problemas (De Lange, 1999; Heuvel-Panhuizen, 2000; Heuvel-Panhuizen e Wijers, 2005). Esta exploração inicial juntamente com uma forte componente intuitiva pode levar ao desenvolvimento de descobertas ou re-invenções de conceitos matemáticos (De Lange, 1989).

Assim que o problema for transformado mais ou menos num problema matemático, pode ser tratado com ferramentas matemáticas que podem ser aplicadas para manipularem e aperfeiçoarem o problema matemático da situação real modelada. No processo de *matematização vertical* os alunos desenvolvem ferramentas matemáticas para resolverem o problema. Este processo consiste em reorganizar dentro do próprio sistema matemático – a encontrar atalhos, a descobrir conexões entre conceitos e estratégias, e a aplicar essas descobertas – e requer actividades tais como: representar uma relação através de uma fórmula; provar regularidades; aperfeiçoar e ajustar modelos; combinar e integrar modelos; generalizar (De Lange, 1999; Heuvel-Panhuizen, 2000; Heuvel-Panhuizen e Wijers, 2005). *A* "certa altura, a abstracção, a formalização e a generalização têm lugar, mas não necessariamente para todos os alunos e não obrigatoriamente para todos os alunos ao mesmo tempo" (Kooij, 1992, p. 39). Freudenthal deu ênfase à igualdade de valor destas duas formas de matematização, por a matematização, em cada pessoa, poder ocorrer em diferentes níveis de compreensão (De Lange, 1999; Heuvel-Panhuizen, 2000; Heuvel-Panhuizen e Wijers, 2005).

Para o autor, os alunos parecem gostar da ideia de *produzir algo* (não só mentalmente) como parte do processo abstracto de matematização. O facto de aprenderem produzindo força-os a reflectirem nos seus próprios processos (De Lange, 1989).

A educação matemática realística, tal como a nossa, considera como elemento importante a interligação dos conteúdos das áreas temáticas. O currículo é conectado numa tentativa de combater o facto de no passado esses conteúdos terem sido divididos/atomizados (Nelissen, 1999). A *RME* faz uma distinção entre matematização e modelação, isto implica que não vê a matematização como uma fase inerente do processo de modelação, mas sim como todo o processo de modelação.

O processo de matematização é caracterizado pelo uso de modelos, como exemplo esquemas, tabelas, diagramas, e visualizações. Os alunos ao procurarem modelos – no início simples – e ao trabalharem com eles produzem as suas primeiras abstracções. Aprendem a aplicar estratégias e esquemas, o que os conduz a um nível mais alto de formalização. O processo pelo qual o raciocínio matemático fica crescentemente formal é denominado de processo de *matematização progressiva*. Neste processo, embora o facto de se deixar a construção ao cuidado dos alunos não garanta o desenvolvimento de prósperas estratégias, porém – como as estratégias são experimentadas, testadas e elaboradas em várias situações – garante que eles adquirem a oportunidade para praticarem o pensamento matemático e os processos de resolução de uma situação problemática real (Nelissen, 1999).

Também, as próprias acções construtivas de cada aluno e as suas reflexões nessas acções, constituem duas das características importantes do processo de matematização. Outra característica é o facto de que aprender matemática não é uma actividade individual, solitária mas sim bastante interactiva. Neste sentido, a Matematização é vista como uma actividade construtiva, interactiva e reflexiva (Nelissen, 1999).

2.13. *Modelação Emergente – Emergent modelling*

O termo *modelo* deve ser entendido num sentido holístico, pois tem a ver não só com uma série de simbolizações, com formas físicas – *inscrições* – mas também com tudo o que constitui o modelo da *RME*. O objectivo do modelo consiste em: (a) ajudar os alunos a elaborarem as suas compreensões informais e as suas estratégias de soluções informais; (b) ajudar os alunos a conseguirem desenvolver mais matemática formal; (c) preservar a conexão entre os conceitos matemáticos e aqueles que estes conceitos descrevem; e (d) levar a que a compreensão final dos alunos acerca da matemática formal fique ligada/enraizada à compreensão deles acerca das experiências reais, dos fenómenos do dia-a-dia (Gravemeijer e Doorman, 1999).

De entre as metodologias da *educação matemática realística* que têm vindo a ser desenvolvidas para estimularem re-invenções produtivas e originarem orientação, importa para o presente estudo compreender a de *modelação emergente*.

A *modelação emergente* tem a ver com aspectos fenomenológicos, com o pensar em desenvolver uma sequência, ou seja, consiste em os alunos construírem uma rede de relações numéricas e depois re-inventarem as estratégias (Gravemeijer, 2005). O seu propósito é o de tentar oferecer aos alunos uma orientação que se ajuste a uma evolução da relação dialéctica entre a intenção de modelar, a construção de significados, e o desenvolvimento de inscrições – por exemplo, interpretação de gráficos (Doorman, 2005).

O conceito de *modelação emergente* tem um forte poder heurístico. O ponto de partida está nos métodos – que serão modelados – para a solução/modelo de uma situação específica. Primeiro, os problemas de contexto são seleccionados de forma a oferecerem aos alunos a oportunidade de desenvolverem métodos e símbolos de uma situação específica, que de seguida serão modelados do ponto de vista da matemática. Neste sentido, os modelos emergem da actividade dos alunos. Outro critério a ter em conta tem a ver com o potencial dos modelos para suportarem a *matematização vertical*. A ideia é olhar para modelos que possam ser generalizados e formalizados de forma a desenvolverem entidades deles próprios, que como tal podem tornar-se modelos para mais raciocínio matemático. Os alunos devem experimentar este processo como se eles é que o tivessem inventado ou pudessem ter inventado o modelo por eles próprios (Doorman, 2005; Gravemeijer e Doorman, 1999). Esta heurística parece útil, por exemplo para apoiar os alunos no desenvolvimento de processos com várias interpretações de gráficos (Doorman, 2005).

2.13.1. Processo de *modelação emergente*

A contínua progressão no processo de modelação é enfatizada pela palavra *emergente*. A qual se refere ao facto de o modelo emergir da actividade dos alunos, juntamente com o objectivo do raciocínio matemático. Consequentemente, emergir refere-se tanto ao carácter do processo pelo qual os modelos emergem como ao processo pelo qual estes modelos apoiam o emergir do conhecimento matemático (Doorman, 2005).

Do processo dinâmico da *modelação emergente* fazem parte três processos inter-relacionados:

1º Processo – primeiro existe o modelo, em sentido lato, que emerge como o *modelo-de* uma actividade matemática informal dos alunos de uma específica situação problemática, para depois gradualmente se desenvolver num modelo para mais raciocínio matemático formal (Doorman, 2005; Gravemeijer, 2004).

2º Processo – consiste na transição *modelo-de/modelo-para*. À medida que os alunos trabalham mais situações e discutem as suas estratégias na aula, o modelo ganha gradualmente vida própria, tornando-se numa entidade em seu próprio direito, que começa a servir como um *modelo-para* mais raciocínio matemático formal e significante. Esta transição envolve a construção de alguma nova realidade matemática, que pode ser chamada de formal em relação ao ponto de partida, original, dos alunos. Em contrapartida, a construção dessa realidade torna possível o modelo mudar de carácter (Doorman, 2005; Gravemeijer, 2004). É de realçar que a troca do papel dos modelos – *modelo-de/modelo-para* – refere-se ao *modelo* num nível mais geral, onde essa transição é acompanhada de vários *modelos locais* – modelos intermédios como tabelas e gráficos que numa perspectiva global podem ser vistos como várias manifestações do mesmo modelo – que gradualmente tomam diferentes papéis (Gravemeijer, 2004). Essa troca de *modelo-de* para *modelo-para* coincide com a troca da forma como os alunos pensam acerca do modelo para pensarem acerca de relações matemáticas (Gravemeijer e Doorman, 1999).

3º Processo – consiste na elaboração concreta desta sequência educacional, não existe um só modelo, pois o modelo é moldado como uma série de simbolizações. Neste sentido, a heurística da *modelação emergente* deve considerar a escolha do *modelo*, a nova realidade matemática que os alunos têm de construir, e a série de simbolizações que o modelo irá projectar na concreta actividade do processo ensino-aprendizagem (Gravemeijer, 2002a).

Para Gravemeijer (2002a) cada professor deve reflectir acerca das questões seguintes: (a) "o que é que constitui a nova realidade matemática que se quer que os alunos construam?" (b) "quais são as relações matemáticas envolvidas?" *(c)* "Qual é o modelo, em sentido lato, e no que é que consistem as suas inscrições subjacentes?" (Gravemeijer, 2002a, p.3).

Durante este processo dinâmico da *modelação emergente* os alunos *passam* por quatro diferentes tipos ou níveis da actividade:

No nível um – *a actividade proposta na tarefa* – as interpretações e as soluções dependem da compreensão do como agir à proposta. Inicialmente os modelos estão ligados à actividade em partes específicas e envolvidos no imaginário de situações específicas (Gravemeijer, 2002; Gravemeijer, 2004).

No nível dois – a *actividade de referência* – os *modelos-de* referem-se a uma actividade numa parte específica do contexto. Os modelos crescem através da compreensão dos alunos pelo paradigma, das partes experimentalmente reais (Gravemeijer, 2002; Gravemeijer, 2004).

No *nível três* – a *actividade geral* – o significado dos *modelos-para* deriva das relações matemáticas da tarefa. Esse significado começa a emergir assim que os alunos começam a raciocinar acerca das relações matemáticas que estão envolvidas. Como consequência o modelo perde a sua dependência à situação imaginária específica, e gradualmente desenvolve-se para um modelo cujo significado deriva das relações matemáticas (por exemplo, entre variáveis) da tarefa, que estão a ser construídas no processo. A transição *modelo-de/modelo-para* não está ligada a manifestações específicas do modelo, mas depende do pensamento dos alunos. O termo *modelo-para* refere-se às relações matemáticas constantes da tarefa proposta (Gravemeijer, 2002; Gravemeijer, 2004).

No nível quatro – o *raciocínio matemático formal* – já não depende do suporte dos *modelos-para* da actividade matemática. Ou seja, a heurística da *modelação emergente* já não requer um uso restrito da terminologia *modelo-de/modelo-para* (Gravemeijer, 2002; Gravemeijer, 2004).

2.14. Relação da modelação matemática com a *emergente*

Freudenthal entre outros rejeitam a visão da Matemática como um assunto escolar exclusivamente interessado no abstracto e no conhecimento formal, em que as abstracções matemáticas são ensinadas tornando-as mais concretas (Nelissen, 1999).

Na opinião de Freudenthal descobre-se a Matemática observando os fenómenos concretos que nos rodeiam. Por tal, o ensino deverá basear-se nos fenómenos concretos de um mundo familiar aos alunos e em *ricas* estruturas matemáticas que cada aluno possa reconhecer do seu próprio ambiente. Os fenómenos concretos requerem o uso de certas técnicas de classificação, como diagramas e modelos – por exemplo, o ábaco (Gravemeijer, 2005). Deste modo a matemática torna-se significante para os alunos e também torna claro que eles não aprendem a Matemática treinando fórmulas, mas sim reflectindo nas suas próprias experiências, devendo evitar-se o afrontar dos alunos com fórmulas matemáticas formais que só servirão para os desencorajar (Nelissen, 1999).

Gravemeijer (2004) usa a concepção mais ampla do termo modelação para indicar todas as formas mencionadas de ligar a realidade com a matemática. Dentro do termo modelação distingue os seus dois aspectos: aplicações da matemática e modelação. Considera que à modelação corresponde o processo envolvido na estruturação, matematização, no trabalho matemático e na interpretação/validação, enquanto que às aplicações da matemática corresponde a aplicação dos modelos matemáticos. O autor considera que ambos os casos implicam uma explícita distinção feita entre a situação real/*modelo real* e o modelo matemático. O que contraria a óptica defendida pelo autor de que o termo *modelação* refere-se à actividade de tentar organizar e estruturar uma situação ou fenómeno problemático (Doorman, 2005).

Por um lado, para Gravemeijer e Doorman (1999), a modelação matemática é vista, tradicionalmente, como a tradução de uma situação problemática real para a matemática disponível, raciocinar acerca disto matematicamente, e traduzir os resultados, voltar, para a situação inicial, original. Contudo, esta visão requer que os alunos tenham as ferramentas matemáticas apropriadas à sua disposição para que sejam capazes de matematizar a situação e de voltar a re-traduzir para julgarem a adequação do modelo que usaram à situação original (Doorman, 2005). Neste tipo de modelação o modelo matemático e a situação a ser modelada são tratados como entidades separadas. Como resultado, o aluno pode explorar as consequências de manipular a situação modelada sem necessidade de manipular de facto a situação (Gravemeijer, 2004).

Por outro lado, a heurística da *modelação emergente* está inserida no domínio de teoria, específica, para a educação matemática realística. O objectivo desta heurística é o de tentar ajudar os alunos a modelar as suas próprias actividades matemáticas informais. A sua meta é que *o modelo* (entendido em sentido lato), que os alunos estão a modelar na sua actividade matemática informal, gradualmente se desenvolva num modelo para mais raciocínio matemático formal. Ou seja, que *o modelo* funcione como uma série consecutiva de *modelos locais* que podem ser descritos como uma *cascata* de inscrições ou como uma cadeia de significados, do contexto da situação modelada (Gravemeijer, 2004). Na *modelação emergente* o desenvolvimento de significados é concebido como um processo dinâmico (Meira, referido em Gravemeijer, 2004). Os modelos *emergentes* são vistos como originários da actividade, e do raciocínio das situações. Nesta perspectiva, o processo de construção de modelos não é uma tradução mas sim um processo de reorganização progressiva das situações. O modelo e a situação a ser modelada evoluem e são mutuamente construídos no percurso da actividade de modelação. Consequentemente, mais do que construir a modelação como um processo de relações abstractas para situações, a *modelação emergente* pode ser caracterizada como um processo de matematização que envolve reorganizar a actividade em e acerca de uma situação, tal como a situação vem a ser estruturada em termos de relações matemáticas (Gravemeijer, 2004). Perspectiva concordante com a de Carreira (1998), é neste sentido que a autora defende que um modelo matemático não é uma tradução da realidade mas antes a *face visível* de uma matriz metafórica – o mundo real e o matemático não podem ser separados e independentes – como tal existe uma interacção entre o modelo e a sua realidade modelada.

A noção de abstracção coloca mais ênfase na construção do conhecimento matemático do que na ligação da matemática com a realidade. Neste sentido o processo de *modelação emergente* difere do da modelação matemática. Nesta concepção, o conhecimento informal, situado, é a base em que o conhecimento matemático abstracto, mais formal, é construído. Devido ao processo de abstracção, que já foi referido e que faz parte do processo de *modelação emergente*, os alunos desenvolvem o conhecimento matemático abstracto que os leva a construírem modelos matemáticos. Pode-se dizer que a *modelação emergente* pode desempenhar um papel importante na educação como uma base para a modelação matemática (Gravemeijer, 2004).

Como consequência das diferenças existentes entre estes dois tipos de modelação também existe distinção nos seus processos relativamente ao uso do termo abstracção. Na perspectiva da *modelação emergente* o termo abstracção corresponde ao processo em termos de longo prazo, a noção de *abstracção* está ligada a uma progressão do raciocínio matemático informal para o mais formal, que por sua vez está ligado à criação de nova realidade matemática – novos conceitos. Enquanto que na modelação matemática o termo abstracção corresponde à actividade de resolver um dado problema real. Contudo, os alunos já têm de ter ferramentas matemáticas – conhecimento abstracto, mais formal, à sua disposição. Ou seja, a abstracção, não é questionada pela criação do conhecimento matemático abstracto, mas sim para fazer conexões entre a situação problemática e o conhecimento disponível.

Nesta situação, a abstracção pode ser muito bem retratada como um processo de redução, ou como uma tradução do problema para termos matemáticos (Gravemeijer, 2004).

A distinção entre modelação matemática e *modelação emergente* é feita por Gravemeijer (2004) para apoiar o seu pensamento acerca da educação matemática. Considera que a distinção entre os dois tipos de modelação é importante, pois esclarece contra uma abordagem educativa em que a modelação é tratada como um processo de tradução de situações extra-matemáticas para modelos matemáticos, sem dar muito pensamento à origem da matemática que é usada para construir esses modelos. Segundo o autor estes dois tipos de modelação estão localizados em diferentes fases do processo de aprendizagem, podendo a *modelação emergente* desempenhar um significativo papel em educação matemática, pois prepara os alunos para a modelação matemática.

A heurística da *modelação emergente* faz parte de uma abordagem educativa em que se espera que os alunos façam sentido de situações pouco conhecidas através de matematizá-las. Em tal abordagem, a modelação serve não só como uma meta educativa mas também como um significativo apoio à reinvenção da matemática. Ou seja, a *modelação emergente* prepara para ambas *aplicações* e modelação (Gravemeijer, 2004).

Síntese

A modelação matemática contribui para o actual e grande desafio de fazer com que todos os alunos compreendam o seu papel e se insiram na actual sociedade da informação, cada vez mais complexa.

O papel da modelação matemática nos currículos portugueses e internacionais vem merecendo uma atenção crescente. A ideia da resolução de situações problemáticas realistas autênticas como uma componente da Matemática tem vindo a reunir grande consenso ao nível da comunidade matemática.

Segundo as orientações curriculares o ensino e a aprendizagem da Matemática não pretendem mostrar modelos estandardizados através da modelação mas sim novas, variadas, distintas e autênticas situações reais – do quotidiano, da vida social e científicas – onde a transferência entre tipos de representação de relações funcionais esteja envolvida e onde os problemas reais/situações problemáticas reais para além de suscitarem curiosidade e motivação colocam em acção o desenvolvimento de vários aspectos que lhes são específicos e ao mesmo tempo inerentes à competência matemática.

A visão interpretativa da relação Matemática-realidade é conseguida através da modelação, que é vista como uma forma privilegiada de resolução de problemas do mundo real, como uma actividade matemática humana, como uma estratégia para a valorização do *poder* matemático dos alunos. Apoiada pelas tecnologias da informação e comunicação torna-se um tipo de experiência de aprendizagem propícia, nomeadamente, à introdução de novos assuntos, conceitos e ideias matemáticas; ao desenvolvimento simultâneo da compreensão de conceitos e do desembaraço nos procedimentos; ao desenvolvimento de processos onde funções surjam como modelos de situações reais.

O modo como a relação Matemática-realidade é encarada suscita duas tomadas de posições distintas. Por um lado, autores como Blum (2002), Blum e Niss (1991), Kerr e Maki (1979) defendem a separação entre o mundo Matemático e o mundo real, pois consideram que à realidade pertence tudo o que está *fora* da Matemática – *extra-matemático*. De acordo com esta óptica, a matematização é vista como uma tradução de fenómenos reais, pertencentes a uma parte da realidade, para a matemática. Neste processo o modelo matemático e a situação real a ser modelada são vistos e tratados como entidades separadas. É de destacar que só no final do ciclo de modelação, na fase da análise é que se realizam as interpretações entre os resultados do modelo e a situação.

Por outro lado, autores como Carreira (1998), Keitel (2004) e os pertencentes à *RME* como De Lange (1999), Gravemeijer (2004) entre outros, encaram o mundo Matemático como integrado no mundo real, pois vêm a Matemática como uma actividade humana em constante evolução e reinvenção. De acordo com esta óptica o processo de matematização não se efectua através de uma tradução, mas sim através da reorganização progressiva de situações reais. Na qual tanto o modelo como a situação a ser modelada evoluem e são mutuamente constituídos no percurso da actividade de modelação, ou seja há uma interacção entre eles. Daqui sobressai a ideia de constantes interpretações entre o modelo e a situação, em todas as fases do processo de *modelação emergente*.

Ambos os tipos de modelação – matemática e *emergente* – reflectem os propósitos de orientações curriculares, que se podem considerar na generalidade análogas. As principais diferenças residem no facto de: as situações problemáticas reais para uns serem contextos de aprendizagem e para outros serem sugestões metodológicas; no facto da modelação matemática dar mais ênfase à relação da Matemática com a realidade do que à construção do conhecimento matemático, que é o foco da modelação *emergente*; e no facto da *RME* dar ênfase à matemática, aos processos de raciocínio e conhecimentos informais – resultantes da experiência do quotidiano dos alunos – como base para os mais formais, ou seja valoriza o emergir do conhecimento de *dentro* para *fora*. Enquanto que em Portugal ainda se tem "uma tradição curricular de abordagens muito rígidas e pouco tolerantes para com a utilização de processos de raciocínio informais", contudo alguns autores como Ponte, Matos e Abrantes consideram que seria interessante saber como resultaria um ensino informal por exemplo da proporcionalidade (Ponte *et al.*, 1998, p. 147).

O presente estudo inspirou-se nesta abordagem, de um outro país, em particular no que diz respeito à *modelação emergente* como percursora da construção de conhecimentos matemáticos, sendo útil para que os alunos adquiram ferramentas matemáticas.

Apesar de não ser objectivo deste estudo compreender e analisar os processos de resolução informais em situações problemáticas reais, partilha-se da perspectiva da modelação matemática como uma actividade humana, construtiva, interactiva e reflexiva; da ideia de uma interacção dinâmica entre o modelo e a situação real; da ideia de serem os próprios alunos a criarem os novos conceitos e ideias matemáticas a serem introduzidas antes da sua formalização, sob a orientação guiada do professor e a partilha de estratégias através de discussões; e da ideia de valorizar a generalização do modelo de proporcionalidade inversa. Estas perspectivas foram uma fonte de inspiração para a elaboração das tarefas de modelação matemática – cuja base são as tarefas do grupo de trabalho T[3] da APM (APM, 1999) – e do seu contexto educacional. Neste sentido adapta-se a interacção dinâmica modelo-situação real ao processo de modelação matemática.

Na figura 2.3. apresenta-se um esquema com a adaptação da interacção dinâmica modelo-situação às fases do processo de modelação matemática.

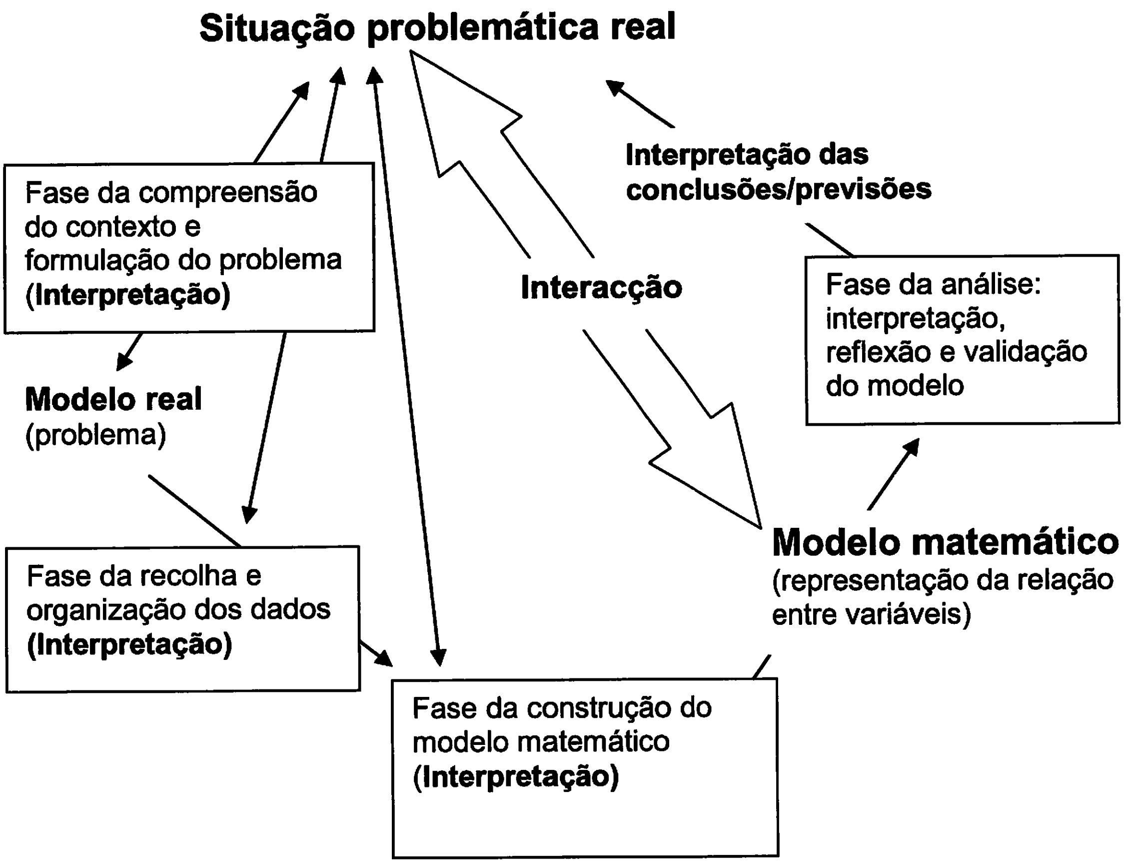


Figura 2.3. – Adaptação da interacção dinâmica modelo-situação real ao processo de modelação matemática

Capítulo 3

Metodologia

Neste capítulo descreve-se, analisa-se e justifica-se todas as opções metodológicas adoptadas para a realização desta investigação.

3.1. Opções metodológicas

Um estudo de caso é uma descrição analítica intensiva de uma entidade bem definida – neste estudo, um grupo de quatro alunos – sobre a qual o investigador não deseja interferir nem controlar os seus acontecimentos, com o intuito de a conhecer em profundidade – os seus "como" e os seus "porquê" – para poder evidenciar a sua unidade e identidade próprias. Trata-se de uma investigação com um forte cunho descritivo e interpretativo, que se realiza para descobrir o que existe de essencial, único e característico no sujeito em estudo, e que pode ter um profundo alcance analítico, que pode ajudar a construir questões para futuras investigações, desenvolver novas teorias ou o confronto com teorias já existentes (Merriam, 1988). Por o fenómeno em estudo não se poder isolar do contexto, por não se desejar exercer qualquer tipo de controlo sobre a situação e por se pretender responder a questões de natureza qualitativa, a metodologia de investigação mais adequada a esta investigação é o estudo de caso. Tendo como base um paradigma interpretativo ou analítico, pretende-se responder a questões de natureza explicativa, numa dimensão subjectiva, visando a descrição, compreensão e analise de potencialidades das actividades de modelação, com recurso a calculadoras gráficas e sensores, na aprendizagem matemática de um grupo de alunos, no seu contexto educacional real.

3.2. O cenário e os participantes

Participaram neste estudo os alunos da única turma do 9º ano de escolaridade de uma Escola Secundária do Alentejo. Inserida num meio urbano, comporta cerca de 600 alunos a frequentarem o 3º ciclo, o secundário e o recorrente. A escola tem boas instalações e possui razoáveis recursos educativos.

A escolha da escola teve por base os seguintes critérios: o professor participante nesta investigação ter experiência de trabalho com tarefas de modelação, com recurso a sensores, o horário das suas aulas de 9º ano ser compatível com o da investigadora que se encontrava, no ano lectivo do estudo, a exercer funções na escola e o facto de o professor e a investigadora trabalharem colaborativamente, desde o primeiro período desse ano lectivo, nas aulas do 9º ano e na preparação das do 10º ano de Matemática Aplicada às Ciências Sociais.

3.2.1. A turma

A turma do 9º A era constituída por 14 alunos, sendo 8 do sexo masculino e 6 do sexo feminino. Apenas um aluno era repetente e as idades dos alunos variavam entre os 13 e os 15 anos, sendo a média das idades de 14 anos.

No que diz respeito ao aproveitamento dos alunos em Matemática, era uma turma bastante heterogénea. Cerca de 3 alunos com bom aproveitamento, 6 com aproveitamento razoável e 5 com aproveitamento negativo. Na opinião do professor, apesar de os alunos serem um pouco agitados e não revelarem muito empenho na resolução das actividades propostas a turma era simpática.

3.2.1. O grupo

Em colaboração com o professor da turma – quem conhecia de forma mais aprofundada as características de cada um dos seus alunos – foi feita a selecção dos elementos que constituiria cada um dos grupos de trabalho, inclusive a dos elementos do grupo alvo do estudo. Formaram-se 4 grupos heterogéneos, 2 grupos de 3 elementos e 2 grupos de 4 elementos, com elementos de ambos os géneros, com níveis de desempenho distintos e com fortes indícios de possibilidade de ocorrência de interacções entre eles. Durante a intervenção didáctica não foi necessário efectuar qualquer tipo de alteração aos grupos formados em colaboração com o professor da turma, pois estes mantiveram-se com os mesmos elementos durante a investigação.

De forma a se identificar mais facilmente os 4 elementos, 3 do sexo masculino e 1 do sexo feminino, do grupo seleccionado para alvo de estudo, optou-se por atribuir a letra inicial dos seus pseudónimos – de modo a preservar o anonimato dos intervenientes no estudo – obtendo-se Rodrigo (R), Bernardo (B), Jaime (J) e Teresa (T). Estes alunos, foram seleccionados segundo os seguintes critérios: (a) diferentes manifestações de aptidões ao nível da disciplina de Matemática; (b) níveis de desempenho diferentes; (c) distintos métodos de trabalho em sala de aula; e (e) semelhante facilidade ao nível da expressão oral com diferenças ao nível da postura/participação nas aulas. A caracterização do grupo teve por base as informações fornecidas pelo professor e as observações directas da investigadora. Como resultado da reflexão conjunta do professor e investigadora, o perfil que traçaram dos alunos foi o seguinte:

Rodrigo: aluno de nível bom; muito trabalhador, metódico, atento e concentrado; com força de vontade e persistência no trabalho; é um dos alunos que mais participa nas aulas; tem facilidade em lidar com novas situações e em geral consegue sempre resolver as tarefas que lhe são propostas; gosta de aprofundar os conteúdos observando pormenores que considera importantes; gosta de trabalhar com o Jaime e da disciplina de Matemática, em que obteve nível 4 nos três períodos.

Jaime: aluno repetente, de nível bom, trabalhador, atento e concentrado; é um dos alunos que mais participa nas aulas; gosta de fazer coisas diferentes, principalmente desafios; gosta de ser sintético e prático; é quem assume a liderança do grupo e conduz os colegas; trabalha muito bem com o Rodrigo, mas também gosta de trabalhar com o Bernardo; gosta da disciplina de Matemática, em que obteve nível 4 nos três períodos.

Bernardo: aluno de nível médio, trabalhador, atento e interessado, com algumas dificuldades de compreensão da matéria; do grupo é o aluno que tem uma maneira de ser mais introvertida e é aquele que revela melhor destreza em tirar partido do uso da calculadora gráfica e uma boa capacidade de visualização e de interligação do abstracto com o real; nas aulas geralmente está calado, só intervém quando solicitado; gosta de trabalhar com o Jaime; da disciplina de Matemática gosta mais ou menos, tendo obtido 3 nos três períodos.

Teresa: elemento mais fraco do grupo; um pouco "preguiçosa" e insegura; nas aulas umas vezes está atenta outras não; apresenta dificuldades ao nível da compreensão da matéria; revela interesse pelas aulas e sempre que tem dúvidas questiona, participa; gosta de trabalhar com o Rodrigo; só este ano é que passou a gostar da disciplina de Matemática, em que obteve 3 nos três períodos.

3.2.3. O professor

O professor da turma do 9º A licenciou-se em Ensino de Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, no ano lectivo 1993/1994. Nesse ano em que concluiu o Estágio Pedagógico o seu orientador pedagógico foi o professor Doutor João Pedro da Ponte, o qual o incentivou a usar a tecnologia, nessa altura as calculadoras gráficas.

A sua experiência profissional tem sido vasta, já orientou estágios e já trabalhou durante um ano no Departamento de Pedagogia e Educação da Universidade de Évora, pertence ao grupo de trabalho T^3 da APM, participa nos ProfMat, e dá formação – juntamente com a professora Doutora Ana Paula Canavarro – a professores ao nível das tecnologias, incluindo cursos de modelação.

O professor, embora já tivesse trabalhado em anos anteriores com tarefas de modelação com recurso a calculadoras gráficas e sensores, tinham sido sempre episódios singulares e esporádicos com alunos do secundário ou de cursos de educação e formação daquela escola, cujo propósito geralmente era o da aplicação de algum conteúdo.

Aceitou participar nesta experiência porque gosta de trabalhar com tecnologia e de realizar actividades de modelação; interessou-se pelo projecto apresentado pela investigadora por ser um conjunto alargado de aulas a trabalhar só com a modelação toda uma unidade didáctica, o qual ia ao encontro dos seus objectivos; tinha interesse pelo trabalho em equipa e já mantinha uma boa relação de trabalho com a investigadora desde o primeiro período.

3.2.3. Caracterização do período da intervenção didáctica

Durante a implementação desta investigação foram utilizadas formas de trabalho inovadoras – utilização de calculadoras gráficas e sensores, trabalho de grupo, tarefas de modelação, elaboração de relatórios, aprendizagem de novos conceitos por descoberta dos próprios alunos – nas aulas com os alunos da turma observada.

No sentido de evitar o surgimento de alguma complexidade na implementação da investigação, as tarefas de modelação foram cuidadosamente seleccionadas, planificadas e elaboradas em trabalho colaborativo com o professor da turma. Estas tarefas não foram pensadas para uma realização esporádica, em que o foco fosse somente as ligações existentes entre a matemática e a realidade, pelo contrário foram pensadas de forma holística. Um conjunto de tarefas, consecutivas, que pudessem proporcionar aos alunos: (a) uma aprendizagem matemática significativa, na unidade didáctica *Proporcionalidade inversa, Representações gráficas*; (b) a visão da relação entre a matemática e a realidade; (c) o trabalhar o processo de modelação; (d) a introdução, desenvolvimento e interiorização de novos conceitos matemáticos – os alunos só tiveram acesso a qualquer definição destes conceitos na discussão final da última tarefa proposta; (e) a construção de conhecimento matemático formal; (f) e o desenvolvimento da competência matemática, principalmente no domínio da álgebra e das funções.

Houve também necessidade de se incluir duas aulas, de noventa minutos cada, para a exploração da calculadora gráfica TI 84 *Plus* que não foram consideradas na análise dos resultados. Na 2ª aula foi proposta a tarefa "Imitar o gráfico", elaborada com o professor, na qual os alunos para além das calculadoras gráficas tiveram contacto com o CBR™, sensor de movimento sónico que permitiu explorar as relações entre a distância e o tempo, e puderam recordar conceitos como o de função, de variável independente e dependente, equação de uma recta do tipo $y = kx + b$, e leitura e interpretação de um gráfico. Nestas duas aulas, os alunos já se encontravam familiarizados com a presença da investigadora, na sala de aula, uma vez que o seu papel, desde o final do 1º período, tinha sido desempenhado como o de uma segunda professora a quem os alunos poderiam recorrer sempre que se deparassem com dificuldades. Aproveitou-se, também, para que os alunos tivessem logo nestas aulas a presença do gravador de som e da câmara de vídeo, a fim de se minimizar possíveis constrangimentos ou agitações por parte deles, pois a sua presença seria constante ao longo da investigação. Com o decorrer das aulas os alunos adaptaram-se à presença do gravador e da câmara. Também foi privilegiado o trabalho de grupo na 2ª aula, onde os grupos foram formados pelos próprios alunos, tendo-se assim a possibilidade de testar o funcionamento, estabilidade e interacção entre os seus elementos, de modo a facilitar a identificação de alguma possível alteração.

O período de intervenção didáctica decorreu de 15 de Março a 3 de Maio, correspondendo a um total de 9 aulas, de noventa minutos, ou seja, 18 tempos lectivos com a mesma natureza.

Optou-se por realizar o estudo na unidade didáctica *Proporcionalidade inversa, Representações gráficas,* de modo a se ir ao encontro das actuais orientações curriculares do 3º ciclo do ensino básico. O programa refere que os alunos devem "matematizar situações da vida real" (ME – DGEBS, 1991, p.11) e o documento *Currículo nacional do ensino básico* embora não mencione especificamente a modelação como um tipo de experiência de aprendizagem ele infere-a, pois sublinha a necessidade de se proporcionar a todos os alunos experiências matemáticas ricas e significantes, e recomenda como um dos aspectos específicos da competência matemática, que todos os alunos do 3º ciclo devem desenvolver no domínio da álgebra e das funções, "a sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem relações de proporcionalidade directa e inversa" (DEB, 2001, p. 66).

No quadro 3.1. apresentam-se os títulos das tarefas de modelação que foram propostas aos alunos, o tipo de modelo teórico correspondente a cada uma das situações problemáticas reais constantes das tarefas e a data em que foram propostas aos alunos durante as aulas de intervenção didáctica.

Quadro 3.1. – *Quadro resumo das aulas de intervenção didáctica*

Data	**Tarefas**	**O tipo de modelo**
15-03-2006 e 17-03-2006 e 22-03-2006	**"Pilhas em série"**	$y = kx$
22-03-2006 e 30-03-2006 e 19-04-2006	**"Sob Pressão"**	$y = \frac{k}{x}$
19-04-2006 e 21-04-2006	**"Até onde vemos?"**	$y = \frac{k}{x}$
21-04-2006 e 26-04-2006	**"Descida de carrinhos pela rampa"**	$y = ax^2 + bx + c$
26-04-2006 e 28-04-2006	**"Espelhos e reflexões"**	$y = \frac{k}{x}$
28-04-2006 e 03-05-2006	**"Uma luz à distância"**	$y = \frac{k}{x^2}$

A elaboração das tarefas de modelação, em particular as experiências que são propostas, teve como base as tarefas do grupo de trabalho T^3 da APM (APM, 1999). O professor e a investigadora reflectiram acerca de hipotéticas trajectórias de aprendizagem para os alunos, no âmbito da unidade didáctica anteriormente referida. Tentaram prever que possíveis actividades mentais os alunos seguiriam durante o desenvolvimento das suas actividades de modelação. De modo a que as actividades mentais dos alunos pudessem estar relacionadas com o desenvolvimento dos aspectos da sua competência matemática, construiu-se uma sequência de tarefas, as quais foram pensadas como um todo. Iniciou-se com a das *Pilhas em série* por contextualizar uma situação real que era familiar aos alunos e porque eles iriam construir um tipo de modelo matemático já seu conhecido, o que os ajudaria a reflectir nomeadamente acerca: do uso desse modelo como forma de descrever a realidade; da utilidade da utilização da calculadora gráfica e dos sensores, do seu rigor na recolha dos dados; do gráfico da situação real só ter pontos isolados e não passar pela origem do referencial; do gráfico da função modeladora ser de proporcionalidade directa. A seguir, *Sob pressão*, que tinha um contexto científico menos próximo dos alunos, mas que interligava com conceitos da disciplina de Físico-química, e por servir como ponto de partida para a introdução de novos conceitos e ideias matemáticas, construção e aquisição de novos conhecimentos, e construção de um novo tipo de modelo, o que os ajudaria a reflectir nomeadamente acerca: da utilidade da utilização da calculadora e dos sensores, na recolha dos dados e na lista com os valores dos produtos entre as variáveis; no gráfico da função modeladora. De seguida, a tarefa *Até onde vemos?* por o contexto ser do dia-a-dia, próximo dos alunos, e por não se utilizarem os sensores na recolha de dados o que os ajudaria a reflectir nomeadamente acerca das diferenças sentidas ao longo do desenvolvimento da sua actividade com dados sujeitos a margens de erros superiores à dos sensores, e acerca de construírem um modelo do mesmo tipo do da tarefa anterior, cujo gráfico e função modeladora eram semelhantes. Segue-se a da *Descida de carrinhos pela rampa* por contextualizar uma situação bastante aliciante e familiar aos alunos e por permitir observar o como os alunos iriam reagir, reflectir e desenvolver a sua actividade perante um novo tipo de gráfico, de modo a construírem um outro tipo de modelo, como interpretariam e compreenderiam essa nova função. A seguir, a dos *Espelhos e reflexões* que por ser do mesmo género que a de Até onde vemos? iria permitir que eles se sentissem mais seguros a reflectirem e a desenvolverem a sua actividade, e que sentissem que conseguiam criar por eles próprios. Posteriormente a de *Uma luz à distância* que por ser do género da *Sob pressão* – mas com um contexto mais familiar aos alunos – com utilização dos sensores na recolha dos dados iria permitir que os alunos construíssem mais facilmente o seu modelo e iria obrigá-los a reflectirem com mais cuidado acerca da avaliação e validação do seu modelo escolhido.

Caracterização da estrutura das tarefas de modelação

Manteve-se sempre a mesma estrutura em todas as tarefas, e apenas houve necessidade de se alterar a ordem às primeiras questões, de modo a se ir ao encontro da organização da actividade matemática desenvolvida pelos alunos. A caracterização da estrutura das 6 tarefas de modelação, que a seguir se apresenta, teve como base as fases do processo pedagógico de modelação de

Kerr e Maki (1979). A estrutura das tarefas consistia numa série de questões directamente relacionadas com a situação problemática real, numa determinada ordem de modo a servirem de suporte ao desenvolvimento das seguintes fases do processo de modelação:

Fase da compreensão do contexto da situação problemática real: faz-se uma pequena introdução em que é descrita, de forma simplificada, uma situação do mundo real, com a qual facilmente os alunos se identifiquem – vista como *real* pelo aluno. De seguida, é colocada uma situação problemática real – *modelo real*, ligado a alguma parte da realidade descrita no enunciado, já simplificado em forma de modelo para a sala de aula – através de um ou mais desafios ligados à experiência concreta que os alunos terão de realizar. Nesta fase, do processo de modelação, é essencial que os alunos compreendam o contexto da situação problemática real.

Fase da recolha e organização de dados: os alunos realizam e observam a experiência que lhes foi proposta. Tendo como recursos os materiais que lhes foram fornecidos e as calculadoras gráficas e/ou sensores. Esta fase requer que os alunos saibam:

- Organizar os dados recolhidos nas seguintes formas de representação: tabela de valores, gráfico – nuvem de pontos;
- Interpretar os dados recolhidos à medida que realizam a sua experiência.
- Confrontar o gráfico – nuvem de pontos – construído no papel com o da calculadora;

Fase da construção do modelo matemático:

- Identificar as variáveis em estudo;
- Descobrir regularidades e relações;
- Identificar, distinguir e passar de uma representação, de uma relação funcional, para outra;
- Reconhecer semelhanças em diferentes situações problemáticas reais;
- Representar uma relação funcional através de uma fórmula/expressão algébrica;
- Compreender o uso de uma função como um modelo matemático da situação modelada;

A <u>fase da análise: Interpretação, reflexão e validação do modelo matemático</u> requer:

- Compreender e interpretar o modelo matemático encontrado como forma de descrever a situação modelada;
- Usar o modelo para obter resultados /previsões – uso de procedimentos algébricos no uso de fórmulas/resolução de equações;
- Confrontar os resultados / previsões obtidos pelo modelo com os da situação real modelada;
- Reflectir acerca desses resultados;
- Aperfeiçoar e ajustar modelos matemáticos através da interpretação gráfica destes com a situação modelada através da discussão grupo/turma;
- Validação de um modelo matemático, como sendo o mais adequado aquela situação modelada através da discussão grupo/turma;
- Procurar generalizações;
- Elaboração do relatório.

3.3. Técnicas de recolha de dados

A metodologia geral teve como objectivos, nomeadamente a construção do referencial teórico, a caracterização dos modelos de suporte e dos paradigmas de referência, e a construção de categorias de análise a incluir nos guiões por entrevista semi-estruturada aos participantes.

Neste estudo, pretendia-se que os dados recolhidos referissem a análise e caracterização dos processos dos alunos e a avaliação da intervenção didáctica. De modo a se assegurar a obtenção de informação válida utilizou-se como principais métodos, de uma variedade de técnicas de recolha de dados, a observação participante, a análise documental e a entrevista (Bogdan e Biklen, 1994). Durante a investigação foram recolhidas informações de diferentes origens tais como as notas de campo, diários de campo, construídos para a investigação, com análise de reflexões da investigadora, as aulas videogravadas, as actividades e relatórios produzidos pelo grupo de trabalho observado nas aulas, e os guiões por entrevista semi-estruturada, videogravada, a fim de se obter uma eficiente triangulação da informação.

3.3.1. Observação participante

Bogdan e Biklen (1994) definem *observação participante* como sendo uma estratégia representativa da investigação qualitativa que permite aceder directamente à perspectiva dos sujeitos de modo a compreender os seus comportamentos, neste estudo permite aceder à actividade desenvolvida pelos intervenientes no seu contexto educacional, e reduzir a complexidade do estudo. Neste sentido, os métodos e técnicas de recolha de dados tiveram por base a observação participante uma vez que neste estudo se procurou conhecer, compreender e analisar com bastante detalhe os processos, dinâmicas e perspectivas dos alunos durante o desenvolvimento das suas actividades, no seu contexto educacional.

3.3.2. Entrevistas

Após a intervenção didáctica cada um dos quatro alunos, do grupo observado, e o professor da turma foram entrevistados, na escola. De modo a se recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo à investigadora desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretaram aspectos relativos ao seu contexto educacional (Bogdan e Biklen, 1994). Optou-se pelo modelo de entrevista semi-estruturada, com o intuito de que cada entrevistado enunciasse, livremente, as suas ideias e opiniões acerca das questões que lhe foram colocadas e conduzidas pela investigadora, de modo a se obter determinadas informações que, de outro modo, dificilmente se conseguiria recolher. Por outro lado, possibilita também a aquisição de dados comparáveis entre os vários sujeitos (Bogdan e Biklen, 1994). Foram elaborados dois guiões, um para os alunos e outro para o professor, que orientaram a realização das entrevistas semi-estruturadas, contendo questões relacionadas com três categorias de análise: as atitudes/concepções, as fases do processo de modelação e o papel da calculadora gráfica e sensores. Todas as entrevistas tiveram uma duração de cerca de uma hora e foram videogravadas e integralmente transcritas pela investigadora.

3.3.3. Documentação

Segundo Merriam (1988) o termo *documentos* aplica-se a todos os dados que não se obtenham através da entrevista ou da observação. Neste sentido, durante a investigação, foram recolhidas informações das notas de campo, diários de campo, contendo também comentários da investigadora de natureza interpretativa acerca do desenvolvimento de cada actividade em cada aula observada, e as actividades realizadas e escritas pelos alunos, contendo em cada uma delas os relatórios produzidos pelo grupo de trabalho observado.

3.4. Análise dos dados

Segundo Bogdan e Biklen (1994) o processo de análise dos dados consiste no "trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido, e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros" (p. 205).

A análise documental dos resultados envolveu o trabalho com os dados, desde a parte mais orgânica de transcrição das aulas observadas e entrevistas, de diários e notas de campo contendo o registo de comentários da investigadora, de documentos que incluíam os relatórios das actividades elaborados pelos alunos, até à divisão em unidades da análise, procura de padrões, descoberta de aspectos importantes, para que a compreensão sobre esses dados aumenta-se. Efectuou-se a análise dos resultados obtidos nas respostas aos diferentes instrumentos e dos elementos retirados dos registos escritos, segundo a vertente qualitativa e segundo os objectivos específicos do estudo. Fez-se uma análise de conteúdo da informação recolhida, à medida que os dados iam sendo lidos destacou-se com cores diferentes palavras, frases e tipos de comportamento dos participantes que se iam repetindo. A partir dessa informação formaram-se as *categorias de codificação* (Bogdan e Biklen, 1994). As unidades de análise retiradas – palavras e frases – que obedeciam a um determinado critério ou tema com diferente cor, foram agrupadas em distintas sub-categorias, de modo a que o material contido num determinado tópico e correspondente categoria pudesse ser apartado dos outros dados. Estabeleceu-se relações entre estas sub-categorias, de forma a poder-se fazer considerações e chegar-se a conclusões relativamente à problemática em estudo.

No quadro 3.2. apresentam-se os títulos das sub-categorias de análise formadas e as suas correspondentes categorias de análise consideradas também como objectivos deste estudo.

Quadro 3.2. – *Categorias e sub-categorias de análise*

CATEGORIAS	SUB-CATEGORIAS
1. Atitudes/Concepções	**1.1. Motivação/Atenção/Concentração**
	1.2. Interesse/Empenho
	1.3. Relação Matemática – Realidade
	1.4. Aprendizagem matemática
2. Fases do processo de modelação	**2.1. Fase da compreensão do contexto da situação problemática real**
	2.2. Fase da recolha de dados
	2.3. Fase da construção do modelo matemático
	2.4. Fase da análise: Interpretação, reflexão e validação do modelo matemático
3. Papel da calculadora gráfica e sensores	**3.1. Recolha e organização de dados**
	3.2. Uso de múltiplas representações
	3.3. Experiências com modelos

As sub-categorias de análise formuladas visavam caracterizar os processos desenvolvidos pelos alunos do grupo observado durante a investigação. Os temas genéricos que formaram estas sub-categorias surgiram como resultado da análise dos dados e foram sendo aperfeiçoados ao longo desta fase.

Capítulo 4

Descrição e análise da intervenção didáctica

Este capítulo está dividido em três secções. A primeira procura descrever a actividade de modelação desenvolvida pelos alunos durante a realização das tarefas de modelação. A segunda e a terceira tratam de evidenciar atitudes/concepções dos alunos em relação às tarefas observadas e à tecnologia utilizada, através dos documentos dos alunos e suas entrevistas, sendo também evidenciado, pela terceira secção, indicadores acerca do papel da calculadora gráfica e sensores no desenvolvimento da actividade de modelação.

4.1. Descrição das actividades de modelação realizadas

Antes do início de cada aula, teve-se sempre o cuidado de deixar o material para a realização da experiência pronto a ser usado e as mesas dispostas em quatro grupos de trabalho. Posteriormente, o professor distribuía a cada aluno, de cada grupo de trabalho, a tarefa proposta para que os mesmos lessem o seu enunciado. Nestas aulas, o papel do professor era essencialmente o de orientador da actividade de modelação desenvolvida pelos grupos e não de resolvedor da mesma, limitando-se a "circular" entre os alunos encorajando-os a pensarem por si e a serem autónomos.

4.1.1. Tarefa "Pilhas em série" (Anexo nº 3)
(Aula do dia 15-03-2006 e do dia 17-03-2006)

Fase da compreensão do contexto da situação problemática real

A pedido de alguns alunos da turma, o professor esclareceu os termos *em série* e *em paralelo*. Os alunos não manifestaram dificuldades na compreensão do contexto da situação real, identificando-a facilmente como sendo do dia-a-dia e da disciplina de Físico-Química. O Jaime, do grupo alvo de estudo, fez os seguintes comentários:

J: "A passagem do pólo negativo para o positivo..." [como forma de medir a diferença de potencial de 1 pilha] ". "Parece uma aula de Física".

Antes de se iniciar a realização da experiência com as pilhas da marca *Duracel*, uma aluna fez a seguinte observação:

N: "Mas se são todas novas, todas têm o mesmo potencial!"

Os restantes alunos da turma manifestaram partilhar desta observação. Deste modo, os alunos revelaram ter uma ideia errada da realidade, por estarem habituados a trabalharem com dados fictícios e não reais.

Fase da recolha e organização de dados

O professor começou por mostrar aos alunos o *CBL 2*™ e o sensor de diferença de potencial, pois era a primeira vez que eles tinham contacto com este tipo de ferramentas tecnológicas. De seguida dois alunos, de dois grupos distintos, ofereceram-se para realizar a experiência com as pilhas da marca *Duracel* e recolheram os dados, um a um, para uma calculadora gráfica. Os outros 2 grupos efectuaram o mesmo procedimento com as pilhas da marca Philips. Os alunos ao observarem que a primeira pilha analisada tinha 1,65 v em vez de 1,5 v, constataram com espanto que havia uma diferença entre os valores dos fenómenos reais e os valores fictícios como os que aparecem nos manuais escolares.

Todos os alunos mostraram curiosidade e entusiasmo com a experiência. O seu espírito crítico aumentou quando constataram que a primeira pilha da marca *Philips* tinha uma maior diferença de potencial que a primeira da marca *Duracel*. Pois eles tinham à priori a concepção de que as pilhas da marca *Duracel* eram melhores que as da marca Philips, que duravam mais tempo como viam no reclame publicitário da televisão.

Os quatro elementos do grupo observado registaram os dados recolhidos, respeitantes às pilhas da marca *Duracel*, na tabela de valores e de seguida construíram o gráfico representativo da relação entre os valores da tabela.

Fase da construção do modelo matemático

Os alunos identificaram rapidamente as variáveis em estudo.

De seguida, para poderem responder às outras questões, os alunos procuraram descobrir regularidades e relações numéricas entre os valores das variáveis expressos na tabela. Facilmente interpretaram que quando o número de pilhas aumentava também aumentava a diferença de potencial. O facto de terem sido capazes de interpretar como a mudança numa variável se relaciona com a mudança noutra variável, implica que conseguiram associar o conceito de função às ideias de variação e de mudança. O aluno Rodrigo comunicou aos outros colegas do seu grupo que a relação encontrada, entre as variáveis, era de proporcionalidade directa.

R: "É proporcionalidade directa!"

J: "Como é que vês isso?"

R: "Não vês que...", "Se dividires este [diferença de potencial] por [número de pilhas] dá mais ou menos o mesmo, logo é proporcionalidade directa"

O Rodrigo recordava-se que tinha de provar que as variáveis aumentavam na mesma proporção e revelou ter compreendido que estava a trabalhar com valores reais e não fictícios. Mas, os outros não ficaram muito convencidos. O Jaime pensava que ao efectuar a divisão encontraria de imediato um único valor constante e não os valores que constatou próximos uns dos outros. A Teresa sentia-se confusa e insegura e o Bernardo pouco à vontade com a câmara de vídeo e o gravador de som.

Na construção do gráfico de dispersão da situação real simplificada, os alunos efectuaram de forma correcta a correspondência entre os valores de cada variável e os respectivos eixos do gráfico. Souberam identificar a variável independente e a dependente, representar a relação funcional de diferentes modos e passarem de uma representação para outra da mesma função. O Rodrigo recordou-se de conceitos apreendidos noutros anos, por exemplo que o gráfico de uma função de proporcionalidade directa é representado por uma recta que passa pela origem do referencial. Contudo, sentia-se confuso ao ver que essa estratégia não se aplicava na representação gráfica da sua actividade.

R: "Não sei... isto não está a passar aqui [(0,0)] ... a recta..., não dá recta"

J: "Oh, professor não dá para fazer recta"

O professor, como já tinha detectado a mesma dificuldade nos outros grupos, alertou todos os alunos para o facto de que na realidade não existe uma pilha e meia, só em números inteiros, por tal só poderiam marcar pontos isolados e não uma recta. Esclareceu, ainda, que os valores recolhidos pelo sensor na experiência são valores de um fenómeno real, ou seja, aproximados tanto quanto possível da realidade. Por o sensor ser um aparelho também comete pequenos erros de medição, logo tenta-se é descrever o fenómeno sem grandes erros. Salientou, que por o valor certinho de 1,5 volt, que aparece no rótulo das pilhas e nos manuais de Matemática ou de Física, ser um valor fictício já tem uma grande margem de erro. Os alunos compreenderam que devido às pequenas margens de erro cometidas pelo sensor estavam a trabalhar com valores aproximados da realidade, razão pela qual não conseguiam desenhar uma recta que passasse na origem do referencial.

J: "Ah! Estes resultados pomos aproximadamente"

Os alunos não sentiram grande dificuldade em passar os dados de uma calculadora gráfica para outra através dos cabos de transmissão de dados, mostram-se entusiasmados e curiosos em quererem saber mais. Cada aluno após ter colocado os dados recolhidos, da aula anterior, na sua calculadora efectuou os procedimentos necessários para poder observar o gráfico-nuvem de pontos – de dispersão da situação real simplificada e confrontá-lo com o seu feito no papel. O aluno Bernardo foi o que revelou maior facilidade em trabalhar com os comandos da calculadora gráfica. Na questão seguinte, os alunos revelaram facilidade em construir o conceito funcional de que a diferença de potencial dependia do número de pilhas. Argumentaram "o modo" dessa dependência com base noutra resposta anterior acerca da existência de alguma relação entre as variáveis.

R: "A diferença de potencial depende do número de pilhas"

R: "Agora é o modo!"

J: "Então isso já a gente tinha visto, quando uma aumenta a outra também"

T: "Explica porque é que aqui na 1.2. disseste que era proporcionalidade directa [para o Rodrigo]

R e J: "Se dividirem a diferença de potencial pelo nº de pilhas o nº dá quase igual" [para a Teresa e Bernardo]

R: "Divides 1,65 por 1 dá 1,65, se ...

T: "Ah! Já percebi. Então e se não desse?"

J e R: " Não havia relação!"

Foi com base nestes raciocínios que os alunos perceberam que a relação funcional existente entre as variáveis poderia ser modelada matematicamente, através da representação generalizada de uma função de proporcionalidade directa. Primeiro, cada aluno reflectiu para si e passado um tempo o Jaime e o Rodrigo trocaram ideias, a Teresa e o Bernardo tentavam seguir o raciocínio dos colegas.

J: "Pode exprimir-se!"

R: "Mas como?"

J: " Temos que descobrir o valor de k." [de $y = kx$]

O Jaime e o Rodrigo lembravam-se da expressão algébrica geral que representa as funções de proporcionalidade directa, mas os restantes alunos da turma não. Como os restantes grupos ficaram num impasse o professor teve de lhes recordar a fórmula e pedir para que descobrissem o valor da constante k. Contudo, a maioria dos alunos para além de terem revelado dificuldade em recordar-se da fórmula também manifestaram dificuldade em encontrar o valor da constante, nomeadamente em usarem procedimentos algébricos simples no cálculo de valores da fórmula.

J: "Podemos fazer aqui na máquina 1,65 vezes ...". "O y é 1,65 para x=1"

J: "x é 4! Fazes logo a conta toda? 4 a dividir por 6,5?"

R: "Não! 6,5 é igual a k vezes 4"

Esta dificuldade no uso de fórmulas, particularmente na resolução da equação $6{,}5 = 4k$ no caso simples de passar o valor 4 para o primeiro membro, foi geral ao nível da turma.

Um aluno de um outro grupo descobriu o valor da constante através da regra três simples. O Rodrigo acabou por se basear no conceito de função, na correspondência objecto/imagem, na relação de proporcionalidade directa e na noção de variação e mudança. Raciocinando que se uma variável aumentava para o quádruplo a outra também, que cresceriam na mesma proporção, isto sem precisar de efectuar cálculos.

J: "Ah, fazes 1,65 vezes 4 e dá o 6,5!". "Partimos da fórmula $y = kx$"

R: "O que é que eu disse, a minha fórmula!" [dito com grande orgulho]

A Teresa e o Bernardo acabaram por perceber o raciocínio dos colegas – o Jaime foi quem lhes explicou com maior facilidade – e foram incumbidos de responderem na questão seguinte o como tinham chegado à expressão algébrica/fórmula ($y = 1{,}65x$). Notou-se que o Jaime e o Rodrigo preferiram primeiro reflectir e discutir entre eles e só depois com os outros colegas do grupo de trabalho. Com o passar do tempo eles aprenderam a partilhar, a trabalhar mais em grupo pois começaram a aperceber-se que as observações da Teresa e do Bernardo os ajudavam a reflectir melhor sobre a sua actividade, e que a destreza do Bernardo com a calculadora gráfica lhes era útil.

Fase da análise: Interpretação, reflexão e validação do modelo matemático

Os alunos ficaram a saber que ao terem construído aquela expressão algébrica criaram um modelo matemático da relação entre as variáveis, que lhes permitiu obterem respostas para a influência da quantidade de pilhas na respectiva diferença de potencial.

J: "20 vezes 1,65 vai dar 33, fazemos as contas!"

T: "Olha lá, isto não dá certo! Fiz 5 vezes 1,65 mas não dá o mesmo" [o valor que estava na tabela]

J: "Mas é aproximadamente"

A Teresa ficou espantada ao observar que os dados recolhidos de forma experimental, registados na tabela, não coincidiam com os obtidos pelo modelo encontrado. No entanto, o Jaime e o Rodrigo revelaram terem compreendido e interpretado o seu modelo como forma de descrever a situação modelada, que apesar da situação ser real eles ao modelarem-na já estavam a simplificar essa realidade, logo os valores obtidos pelo seu modelo seriam valores aproximados dos da tabela.

Prof: "Porque é que é aproximadamente e não certo?"

R: "É a diferença de potencial das pilhas" [refere-se aos valores recolhidos experimentalmente]

J: "Nem todas as pilhas têm a mesma diferença de potencial, [só têm] aproximadamente"

Para que a Teresa, o Bruno e outros alunos da turma se sentissem mais seguros em trabalharem com os valores aproximados da realidade, o professor reforçou a ideia de que estes valores são correctos, que podiam trabalhar com eles.

Os alunos continuaram a usar o seu modelo para obter resultados/previsões.

J: "Vamos fazer as contas, já que isto tem de ser um valor aproximado"

R: "Então tem de se pôr 7 pilhas"

O Rodrigo explicou o seu raciocínio aos colegas, que de imediato concordaram com ele. Explicou-lhes que teriam de ser 7 pilhas e não 6, que tinham de arredondar por excesso e não por defeito, porque só existiam pilhas em número inteiro e porque tinham de ter a certeza que aquele número de pilhas continha a quantidade de diferença de potencial pedida. Deste modo, os alunos conseguiram reflectir acerca dos resultados obtidos e serem críticos. Revelaram-se cada vez mais confiantes em trabalharem com os valores reais, em perceberem a utilidade do seu modelo matemático como forma de descrever, compreender e interpretar a realidade, de modelar uma situação problemática real simplificada.

Discussão grupo/turma

O professor projectou na parede o gráfico de dispersão da situação real de uma das marcas de pilhas para que os alunos pudessem avaliar, comparar, interpretar, aperfeiçoar e ajustar os seus modelos, com o objectivo de validarem um modelo de cada marca de pilhas como sendo o mais adequado à situação modelada.

Em relação aos dois modelos propostos para as pilhas da marca Duracel.

B: "O nosso modelo foi 1,65 x" [da marca Duracel]

O outro grupo das pilhas da marca Duracel: "1,64 x"

Prof: "Porque é que y é igual a 1,65 x?"

J: "Porque era o que equivalia a 1 pilha"

Registou no quadro os modelos e projectou os gráficos das suas funções para que a turma através do confronto dos modelos elegesse o melhor modelo matemático da situação com a marca *Duracel.* Tanto o professor como os alunos ficaram indecisos na escolha do melhor modelo por os gráficos serem extremamente parecidos e muito coincidentes com os pontos do gráfico de dispersão da situação real modelada. Ficou então a sugestão de no início da próxima aula efectuarem a experiência com 20 pilhas daquela marca, para poderem tirar alguma conclusão. Em relação à situação com a marca *Philips,* professor e turma concordaram que a função $y=1{,}64x$ pareceu ser o melhor modelo de entre os dois propostos.

Em relação à alínea b da questão 1.9., em que era pedido o número de pilhas necessárias para se obter uma diferença de potencial de 11,3 v, esperava-se que os alunos tivessem realizado cálculos simples através dos seus modelos. Contudo, a grande maioria foi por tentativas. O professor explicou-lhes como poderiam ter feito uso do modelo, indicando-lhes um cálculo simples (dividindo o valor do 2º membro pelo do 1º) no uso da fórmula ($x=\frac{11{,}3}{1{,}64}$), e esclareceu-os que podiam usar a regra três simples por se tratar de funções de proporcionalidade directa. Os alunos manifestaram o seu espanto acerca da facilidade da resolução demonstrada pelo professor. Esta dificuldade técnica encontrada nos alunos, sugere que eles em anos anteriores tenham decorado e não compreendido o significado da expressão de uma função de proporcionalidade directa, e/ou que tenham tendência para ver os conteúdos da disciplina repartidos e não como pertencentes a um todo e por isso não se apercebam que têm perante si a resolução de uma equação simples, ao nível do 7º ano de escolaridade.

Prof: "Primeiro tinham pensado que era melhor a *Philips* e agora?"
Turma: "São parecidos"

Os alunos foram unânimes em concordarem que não existiam marcas, entre aquelas suas, de pilhas melhores, uma vez que ambas as marcas apresentavam sensivelmente a mesma diferença de potencial, alguns até comentaram que a diferença estaria no preço. Conseguiram deste modo responder às questões propostas no enunciado da situação problemática real.

É de referir, que todos os alunos da turma se mostraram entusiasmados em participarem oralmente na discussão, mas ao nível da escrita o único aluno que mostrou interesse em registar as conclusões discutidas relativamente à validação do melhor modelo foi o Rodrigo.

4.1.2. Tarefa "Sob Pressão " (Anexo nº 4)

(Aula do dia 22-03-2006, do dia 30-03-2006 e do dia 19-04-2006)

Uma vez que na anterior tarefa se tinha detectado dificuldades nos alunos, nomeadamente em descobrirem o valor da constante de proporcionalidade de uma função de proporcionalidade directa, já conhecida por eles desde o 6º ano de escolaridade. Considerou-se que seria preferível nesta nova tarefa "sob pressão", a qual continha conceitos desconhecidos pelos alunos, dar-lhes uma pequena orientação ao nível da descoberta da constante. Para tal, optou-se por se acrescentar uma terceira linha na tabela de valores onde os alunos teriam de calcular o produto entre os valores das duas variáveis em questão.

Fase da compreensão do contexto da situação problemática real

Após os alunos terem efectuado a leitura da situação real exposta na ficha desta tarefa, o professor decidiu explicar a situação real aos alunos, por o contexto científico não ser familiar aos alunos. À medida que lhes ia explicando o contexto da situação a curiosidade e o entusiasmo dos alunos ia aumentando. Nesta tarefa, os alunos não manifestaram a mesma compreensão imediata, do contexto da situação real, que tinham revelado na anterior, talvez por este contexto não lhes ser tão próximo, não abordar um fenómeno real do dia-a-dia.

Fase da recolha e organização de dados

O professor alertou todos os alunos para o facto de que no programa do CBL 2™ tinham de mudar a unidade de medida dos valores da pressão para atmosferas. Relembrou aos alunos que na visita de estudo que tinham realizado no ano passado ao Oceanário, tinham ouvido falar sobre a pressão na água em atmosferas e o que acontecia à pressão à medida que a profundidade aumentava ou diminuía.

Foi notório o entusiasmo dos alunos com a realização da experiência. Como o professor era a pessoa daquela turma que tinha mais força, optou-se por ser ele a exercer pressão na seringa de modo a se cometerem o mínimo de erros na leitura dos valores do volume. À medida que o sensor ia recolhendo os dados da pressão, de forma discreta, iam sendo lidos os dados do volume na seringa e os alunos iam registando-os na sua tabela. O Jaime tentou adivinhar os valores seguintes, que o sensor iria registar, pensando que se tratava de uma função de proporcionalidade directa, como na actividade anterior.

> **J:** "Agora vai dar 1,32". "Isso está mal" [refere-se ao valor 1,34 atmosferas]
>
> **R e J:** "Não há proporcionalidade directa!"

Após a recolha dos dados, o professor projectou na parede o visor da calculadora gráfica, para que os alunos observassem o gráfico – nuvem de pontos da situação real simplificada. O aluno que o tinha ajudado na realização da experiência, ao observar o gráfico (pontos a formarem uma curva decrescente) fez o seguinte comentário em relação a um dos pontos centrais:

"Aqui foi quando o professor deixou de ter força [diz rindo]". Os alunos nas suas tentativas de interpretação dos dados recolhidos vão visualizando a situação problemática real. De seguida, os alunos apressaram-se a fazer a passagem dos dados para as suas calculadoras.

Fase da construção do modelo matemático

O grupo observado decidiu primeiro preencher a terceira linha da tabela através do cálculo do produto entre as quantidades das variáveis, para tal usaram as calculadoras gráficas como científicas não tirando partido daquelas, embora o preenchimento daquela linha só fosse pedido na questão 1.7. onde era sugerida a ajuda das listas da calculadora.

> **J:** "Professor! Então aqui dá-me 17,...[17 vírgula qualquer coisa], está a alterar."
>
> **Prof:** "Querias que desse sempre o mesmo?"
>
> **J:** "Não, queria que aumentasse ou diminuísse." "Vai sempre alterando"

O Jaime ficou espantado e confuso ao verificar que não encontrava, de imediato, uma regularidade numérica entre os resultados do produto que efectuou, pois estes não cresciam ou decresciam sempre. Os alunos souberam distinguir a variação dos resultados do produto da variação dos valores das variáveis, souberam interpretar a situação real modelada.

Os alunos preferiram primeiro construir a tabela e o gráfico e só depois responderem às questões. Aquando da construção no papel do seu gráfico da situação real simplificada, os alunos não sentiram dificuldade em identificar as variáveis em estudo, mas sentiram-se inseguros em afirmarem qual a variável independente e qual a dependente.

> **Prof:** "A pressão dependia do volume, tínhamos controle era no volume."
>
> **R:** "Esta variável [pressão] depende desta [volume]"

O professor alertou a turma para o facto de que tinham de alterar a escala dos seus gráficos, por exemplo de 2 em 2 unidades. Como tinham de deixar, também, mais espaço entre a marcação dos pontos demoraram algum tempo a construírem os seus gráficos no papel. A Teresa construiu o gráfico com rigor, o Bernardo como tinha facilidade em visualizar o gráfico foi orientando o Jaime. De seguida, o Bernardo mostrou o gráfico de dispersão na calculadora aos colegas, e os quatro observaram-no e constataram que este era parecido com os seus.

J: "Na 1.2. quando o volume baixa aumenta a pressão não é? [para o Rodrigo, que lhe abana a cabeça a dizer que sim]"

Os alunos não revelaram dificuldades em interpretarem como a mudança numa variável se relacionava com a mudança noutra variável, ou seja, que quando o volume diminuía a pressão aumentava. Nem em chegarem ao conceito funcional de que a pressão dependia do volume.

Na questão 1.7. o professor recordou à turma o procedimento a efectuarem na calculadora gráfica para criarem a lista L_3 – produto das listas L_1 e L_2. Os alunos concluíram que o processo mais rápido para obterem esses produtos era através das listas da calculadora gráfica. De seguida, reflectiram acerca de possíveis conclusões a retirar. O Jaime ditou as suas conclusões, o Bernardo escreveu-as e os outros colegas ouviram-no atentamente e no final todos concordaram. Eles concluíram que os resultados dos produtos eram valores muito próximos uns dos outros e que alternavam, não diminuíam sempre e também não aumentavam sempre. Sentiram-se confusos ao pensarem que os resultados da L_3 não confirmavam a relação que tinham estabelecido entre as variáveis.

J: "Diz que não há relação porque varia [para o Bernardo]"
Prof: "Mas varia muito ou pouco?"
J e R: "Varia pouco"

Com a orientação do professor eles perceberam que tinha de existir alguma relação entre as variáveis. O Bernardo chegou à conclusão que os resultados dos produtos iam decrescendo, mas esqueceu-se de os relacionar com os respectivos valores das variáveis.

B: "É decrescente". "$y = kx + b$"

J: "É isso?"

J: "Oh, professor!". "Se existe relação é porque a função é decrescente".

Embora confusos, os alunos demonstraram compreender o conceito de função, como correspondência entre dois conjuntos e como relação entre variáveis (relação funcional). Pois, sabiam que precisavam encontrar uma função que fosse um bom modelo da situação real.

O professor orientou todos os alunos:

Prof: "Mais 1ml menos 1ml, isto não dá bem, bem sempre o mesmo valor. Porquê?". "Porque é uma experiência feita na prática, não é dada como nas fotocópias ou nos livros, com valores sempre certinhos". "Mas, o número anda sempre à volta do 17 e tal".

J: "O resultado é aproximadamente 17".

As reflexões de que existe relação entre as variáveis e de que os resultados dos produtos entre os valores das variáveis se aproximam do número 17, foram bastante importantes para que os alunos conseguissem exprimir essa relação através de uma expressão algébrica de uma função – modelo matemático.

J: "A pressão é crescente e o volume é decrescente"

B: "O gráfico é decrescente"

J: "Então $p \times v \approx 17$". "Oh! Rodrigo não metas igual mete aproximadamente, a gente não sabe ao certo"

É curioso que todos os grupos optaram por construir este modelo, com a constante sendo o número inteiro 17 e não escolheram, por exemplo, para constante um número decimal como o 17,4 ou o 16,98. Talvez os alunos prefiram ou gostem mais de trabalhar com números inteiros, que são aqueles que aprendem primeiro na vida do dia-a-dia e na escola. Talvez, também, não tenham optado por mais modelos por ainda terem o hábito de pensar que quando resolvem questões ou problemas têm de procurar obter a resposta correcta, uma só solução e/ou ainda não perceberam que neste tipo de actividades não existe uma solução única, mas sim uma que se pense naquele momento do estudo ser a mais adequada aquela realidade. No entanto, os alunos conseguiram representar a relação funcional por uma expressão algébrica – representativa de uma função – que modelasse a situação real simplificada, e demonstraram saber lidar com diferentes tipos de representação: tabela, gráfico, regra verbal e expressão algébrica. Souberam passar da tabela para o gráfico da situação real e do gráfico para a expressão algébrica da função modeladora.

Salienta-se o facto de que nenhum aluno da turma indicou a expressão geral do modelo $p \times v = k$ ou mencionou ser do tipo $y \times x = k$, à semelhança dos outros modelos apreendidos em anos anteriores do tipo $y = kx$ ou $y = kx + b$.

A questão 1.10, levava os alunos a escreverem e a reflectirem no como tinham chegado àquele modelo, o que não lhes agradou muito. Mas, por exemplo para a Teresa e para o Bernardo, que foram tentando acompanhar e perceber o raciocínio dos colegas, esta questão foi importante. Os quatro alunos ao fazerem um ponto da situação esclareceram dúvidas, assentaram ideias, compreenderam melhor o *comportamento* da situação modelada e perceberam como haveriam de responder às restantes questões.

Fase da análise: Interpretação, reflexão e validação do modelo matemático

Os alunos tinham de usar o seu modelo para efectuarem previsões, sem estarem sempre a fazerem experiências, para obterem os resultados pedidos nas questões que se seguiam.

J: " $v \approx \frac{17}{p}$ não é?" [para os outros]

B: "Professor, é o 17 a dividir pela pressão?"

O Professor encorajou-os a continuarem e a Teresa sentiu-se mais segura na outra questão.

T: "É igual só que ao contrário" [pressão igual a 17 a dividir pelo volume]

Discussão grupo/turma

O professor iniciou a aula recordando aos alunos o contexto da situação real da tarefa "Sob Pressão". De seguida, com a ajuda do *viewscreen* projectou na parede a tabela, memorizada nas listas da calculadora, com os dados recolhidos experimentalmente. Os alunos observaram-na atentamente. Pode-se concluir que nenhum aluno da turma teve dificuldade em perceber que existia uma relação entre as variáveis em estudo.

Prof: "Existe relação entre as variáveis?"

Todos os alunos: "Sim" [dito em coro]

A seguir, o professor projectou o gráfico – nuvem de pontos da situação real e salientou o facto de este não representar uma função de proporcionalidade directa. Os alunos revelaram ter sabido interpretar graficamente a situação.

R: " [Os pontos] Tinham de estar a subir"

R: "A recta dos pontos tem de passar pela origem"

Prof: "Os pontos descrevem uma curva e não uma recta, logo não é do tipo $y = kx$ ou $y = kx + b$."

Todos os alunos mostraram ter percebido que nenhuma das fórmulas anteriormente conhecidas por eles seria representativa de uma função com uma representação gráfica daquele tipo.

Prof: "Na [questão] 1.7, aparece um 15, os resultados andam à volta do 17, uns aumentam outros diminuem, será que era para dar sempre igual?"

Aluno: "Mas, é sempre mais ou menos 17"

Os alunos sabiam que não podia dar sempre o mesmo valor, "certinho", pois tratava-se da multiplicação entre valores de um fenómeno real. Mas, não conseguiram justificar o facto daquele valor 15 estar mais afastado dos outros valores e/ou do valor 17. O professor fez então por eles a interpretação do que tinha acontecido na realidade.

Prof: "Já tinha que fazer muita força, já tinha dificuldade em manter constante, já estou a cometer erros". "Quanto maior é a pressão mais dificuldade se tem para manter os cm^3." "Só se se conseguisse ser preciso na prática".

Professor: "p=224, para aquela pressão toda tinha que exercer muita força". "v=0,075, tinha praticamente que fechar a seringa toda, nem ela aguentava...."

J: "Fazia explodir"

Esta orientação foi bastante importante para que os alunos se apercebessem da importância das suas constantes tentativas de interpretação da situação real simplificada através dos seus resultados. Assim, aprenderam a desprezar valores supérfluos, a simplificarem a situação de modo a modelarem-na mais facilmente.

De seguida, o outro ponto alto da discussão concentrou-se na construção do modelo matemático. O professor chamou a atenção dos alunos para o facto de que o modelo escolhido por todos os grupos não era o único, podiam existir outros que fossem melhores que aquele, que representassem mais fielmente a situação real.

Prof: "Na [questão] 1.9. vocês fizeram $p \times v = 17$, ou podiam calcular a média dos produtos". "O modelo $p \times v = 17{,}23$ podia ser mais correcto!"

Os alunos continuaram a demonstrar bastante atenção e concentração, quiseram ver se aquele outro modelo sempre era melhor que o deles, pois graficamente não conseguiam ver diferenças entre eles, devido às constantes 17 e 17,23 serem muito próximas, o professor explicou-lhes:

Prof: "Podiam ter feito com $v = \frac{17{,}23}{5{,}6} = 3{,}08cm^3$". "Para confirmar o melhor modelo era fazer a experiência, mas seria difícil conseguir manter 3,04 ou 3,08."

Uma vez que 7 cm^3 foi o último valor recolhido pelo professor, o qual já teve dificuldades em manter constante a seringa, seria praticamente impossível conseguir mantê-la constante num valor ainda inferior a 7 como o 3,04.

Os alunos manifestaram ter percebido que tinham estado a trabalhar com uma função que era nova para eles, estranharam foi o facto de não saberem o seu nome, a sua definição, de não ser aquela a forma habitual de aprenderem novos conceitos.

Como conclusão, ficou a ideia de que a função construída pelos alunos seria um bom modelo para estudar e descrever aquela situação problemática real modelada por eles.

4.1.3.Tarefa "Até onde vemos?" (Anexo nº 5)

(Aula do dia 19-04-2006 e do dia 21-04-2006)

O professor distribuiu pelos grupos de trabalho as novas fichas com outra tarefa proposta. Deu tempo para que os alunos lessem o contexto da situação real e exemplificou o processamento da recolha de dados que os alunos iriam executar, para a realização da experiência pedida.

Fase da compreensão do contexto da situação problemática real

A turma considerou o contexto da situação real de fácil compreensão por este fazer referência a uma situação do dia-a-dia.

Fase da recolha e organização de dados

Os grupos executaram as medições da letra T e registaram os valores obtidos na tabela. De modo a obterem resultados próximos dos reais, com erros mínimos, os alunos que efectuavam a medição tiveram o cuidado de manter o braço que segurava a régua o mais esticado possível. O Jaime, intuitivamente, observou uma relação entre as variáveis a serem estudadas:

J: "A altura da letra visualizada depende da distância".

À medida que os dados iam sendo recolhidos os alunos construíam a tabela. Para a obtenção dos valores do produto entre as quantidades das variáveis em questão, eles optaram por fazer uso das potencialidades da calculadora gráfica usando as suas listas.

Fase da construção do modelo matemático

Identificaram rapidamente quais as variáveis em estudo e a variável altura como sendo a independente. De imediato construíram, no papel, o gráfico da situação modelada só com pontos isolados, facto que reforça a ideia de que fizeram facilmente uma interpretação correcta dos dados recolhidos. O Bernardo foi o primeiro a executar na calculadora o produto das duas listas, o gráfico e a percorrer os valores deste. Os colegas observaram atentamente o gráfico obtido por ele e confrontaram-no com o que tinham construído no papel.

Os alunos identificaram facilmente a variação dos valores das variáveis.

> **R:** "À medida que a distância aumenta a altura da letra diminui".
>
> Quanto à variação dos resultados do produto entre os valores das variáveis, eles observaram que:
>
> **J:** "Uns variam outros diminuem"
>
> **R:** "Ao início estava mais ou menos constante"
>
> **J:** "Andam à volta de um número".

Tentaram encontrar uma regularidade numérica entre esses valores através do cálculo da média.

Discussão grupo/turma

O professor salientou-lhes que só conseguem ler um cartaz publicitário a partir de uma certa distância em que consigam visualizar as letras. De seguida, através do *viewscreen* mostrou à turma a tabela de valores de um dos grupos de trabalho, que se encontrava memorizada nas listas das suas calculadoras, e deu início à discussão. Os alunos ao observarem a tabela projectada aperceberam-se que cada grupo tinha registado valores distintos. Eles perceberam que cada grupo tinha modelado, simplificado, a mesma situação real de forma aproximada.

> **Prof:** "O esticar o braço, o tamanho dos pés, logo grupos diferentes, resultados diferentes."
>
> **J:** "Porque não foram os mesmos a medir as letras"
>
> **Aluno:** " [pés maiores] a distância é diferente".

Aquando da projecção do gráfico de dispersão da situação modelada os alunos ficaram admirados ao constatarem que aquele era parecido com o deles, que não existiam diferenças significativas entre os gráficos, dos vários grupos, das situações próximas da real.

Prof: "Porque é que acham que os gráficos dos vários grupos vão ser parecidos?".
R: "As grandezas são as mesmas"
Prof: "Estamos a estudar o mesmo fenómeno".

O professor esclareceu a turma de que os produtos entre os valores das variáveis não apontavam sempre para um mesmo resultado, andavam a aumentar e a diminuir à volta de mais de um valor, porque os grupos ao realizarem esta experiência sem sensores estiveram mais sujeitos a erros maiores. Os alunos compreenderam que quantos mais sofisticados os mecanismos a serem usados mais precisa seria a recolha de dados da experiência, logo menos erros cometeriam. Os alunos do grupo alvo do estudo observaram que os seus resultados dos produtos não davam sempre o mesmo valor, andavam a aumentar e a diminuir à volta de números entre o 13 e o 16, por tal resolveram fazer a média dos valores dos produtos (15,54). Nem todos os grupos se lembraram de fazer a média dos resultados dos produtos.

Prof: "Só se consegue ler a letra a uma certa distância, então temos de arranjar uma fórmula para as pessoas verem". "O produto de p por a anda sempre à volta dos números 10 e 13".
Aluno: "10" [valor aproximado dos produtos do grupo de trabalho da tabela projectada]
R: "13 ou 12". "Faz-se a média"
Prof: "Já temos três candidatos, os modelos $p \times a = 10$, $p \times a = 12$ e $p \times a = 13$."
Prof: "A média garante que é o melhor modelo?". "A média é igual a 12,4, uma outra hipótese é $p \times a = 12{,}4$, vamos experimentar os modelos".

Fase da análise: Interpretação, reflexão e validação do modelo matemático

Os alunos visualizaram o modo como a linha curva do gráfico de cada um dos modelos propostos se sobrepunha aos pontos do gráfico de dispersão – nuvem de pontos – da situação real simplificada.

R: "O $p \times a = 10$ só passa nos últimos [3] pontos". "É o do 12"

Prof: "Então, qual é o melhor modelo?". "Há-de dar uma curva mais próxima dos pontos". "Optamos por qual modelo?"

Aluno: "Ah, o do 12,4"

Prof: "Não há grande diferença do 12,4 e do 13"

R: "Eu acho que escolhia a linha que está perto dos pontos de cima e de baixo" [refere-se à do modelo com constante 12].

Aluna: "O $p \times a = 12$, porque fica no meio"

R: "O do 10 é mais vantajoso para as letras se verem ao longe, porque se sobrepõe aos últimos 3 pontos"

O Rodrigo mostrou saber interpretar que a escolha do melhor modelo depende da situação, de qual parte do fenómeno real estamos a estudar, a tentar modelar para fazermos previsões úteis. De seguida, os alunos do grupo observado reflectiram acerca de qual seria o seu melhor modelo de entre os modelos: $p \times a = 15$, $p \times a = 15{,}54$, $p \times a = 16$ e $p \times a = 16{,}5$. Validaram a função $pxa = 16$ como melhor modelo para a sua actividade, por ser aquela cujo gráfico estaria mais próximo dos pontos – recolhidos por eles – do gráfico de dispersão da situação real simplificada, que melhor modelava a situação estudada, ou seja, por ser a função que melhor descrevia a situação real. Os alunos do grupo observado não revelaram dificuldades durante esta fase.

Prof: "Então agora vamos fazer as previsões.

Prof: "Para relacionar uma variável com a outra tenho de pôr uma em função da outra, para passar para o outro membro..."

Aluno: "A altura é que depende da distância"

R: "O número que a gente escolheu a dividir pela altura" [dirige-se para o seu grupo].

O professor elucidou a turma escrevendo no quadro $pxa = 10 \Leftrightarrow a = \frac{10}{p}$.

4.1.4. Tarefa "Descida de carrinhos pela rampa" (Anexo nº 6)

(Aula do dia 21-04-2006)

Fase da compreensão do contexto da situação problemática real

Todos os alunos da turma mostraram bastante entusiasmo, alguns até eufóricos, com esta tarefa, principalmente com o facto de "brincarem" com os carrinhos.

A Tânia leu em voz alta o contexto da situação real para os seus colegas de trabalho. O qual foi facilmente compreendido por eles, pois identificaram-se de imediato com os conceitos extra-matemáticos que lhes eram familiares da disciplina de Físico-Química.

T: "Então, quanto mais inclinado, mais anda o carro"

Ao darem início à sua experiência surgiu-lhes uma dúvida: se mediam a distância percorrida pelo carrinho até à sua traseira ou até à sua parte frontal? O professor esclareceu os grupos de trabalho, fez-lhes ver que eles tinham era de ser sempre coerentes com o critério de medição optado.

Fase da recolha e organização de dados

Os alunos demonstraram grande entusiasmo e rigor na recolha dos dados. Na 1ª recolha com a rampa a 0 cm, por observarem que o carro obviamente não andava, sentiram-se inseguros em darem a leitura da medida da distância percorrida pelo carro, talvez por não terem observado o par ordenado (0,0) nas suas duas últimas actividades.

A partir de uma certa altura, mais ou menos com a rampa inclinada a 12 cm, os alunos ficaram espantados com os resultados obtidos.

J: "Agora foi menos?!"

Mas, rapidamente voltaram a demonstrar já terem alguma facilidade em interpretar esses resultados, principalmente o Bernardo.

B: "Vêem, ele agora bate no chão, perde impacto"

R: "O carro vai ter um acidente de percurso!"

B: "Ele vai capotar"

T: "E quando capotar?"

Assim que o carrinho capotou, os alunos, embora inseguros, mostraram ser coerentes com o seu critério opcional de recolha dos dados.

T: "Conta-se até à parte da frente [do carro]".

Os alunos primeiro preencheram a tabela com os dados recolhidos e calcularam os produtos entre os valores das variáveis. A seguir, preferiram construir o gráfico ao invés de responderem a duas questões relacionadas com a identificação das variáveis em estudo e a existência de alguma relação entre elas. Todos os alunos ficaram espantados com o gráfico que obtiveram, talvez por esperarem um gráfico semelhante aos obtidos nas suas duas últimas actividades e/ou por nunca terem observado um gráfico em forma de parábola.

Fase da construção do modelo matemático

Os alunos aperceberam-se da existência de uma relação entre as variáveis, mas o facto de ocorrer uma mudança no *comportamento* dessa relação deixou-os confusos e inseguros. Eles esperavam que esse *comportamento* fosse constante, para eles seria mais fácil de admitir sem receios a existência dessa relação se não pensassem no seu *comportamento* mas simplesmente em que uma variável influenciava a outra.

T: "Existe [relação] quanto mais inclinado mais velocidade".

J: "Não, à medida que inclina mais anda, mas quando chega a uma certa inclinação, perde..."

B: "Só quando chega aos 12 [cm de altura]".

J: "Então e os 13".

Prof: "Então, não há relação?". "Então se mexe na altura não influência a distância?"

R: "Influência, aumenta."

Identificaram com facilidade a relação funcional entre as variáveis.

R: "A altura modifica com a distância"

J: "A altura depende da distância"

Todos os alunos tiveram dificuldades em construir uma função que fosse um bom modelo matemático da situação real. Eles não sabiam por onde começar, não conseguiam ser autónomos. O Professor projectou o gráfico, de uma das calculadoras, de um dos grupos de trabalho. Os vários grupos verificaram que tinham obtido gráficos parecidos com o projectado.

Os alunos necessitaram das orientações do professor para poderem prosseguir nas suas reflexões a partir da observação gráfica.

Prof: "Têm de efectuar operações matemáticas com as variáveis *x* e *d* até os resultados serem parecidos. Façam operações na *x* para verem se conseguem obter valores na *d*. Se há uma relação entre estas variáveis então há-de haver uma fórmula. Façam contas com o *x* até descobrirem valores parecidos com os do *d,* e a mesma operação tem de ser válida para todos os pontos".

Os alunos efectuaram as quatro operações básicas com os valores da variável *x* de forma a obterem os valores da variável *d*. Mas, como não conseguiam descobrir uma fórmula que desse sempre valores aproximados dos da variável *d,* eles desesperaram e começaram a não reflectir no porquê de estarem a tentar com uma determinada operação.

R: "Professor, já experimentei, dá com uns valores mas depois não dá com outros". "É que não estou a ver"

R: "O resultado aumenta e depois diminui, não há uma operação certa acho eu!"

J: "Tem de ser a dividir, acho eu!"

Discussão grupo/turma

O professor alertou os alunos para pensarem noutras operações matemáticas para além das quatro operações básicas. Os alunos tentaram desesperadamente com a raiz quadrada, raiz cúbica, potências etc. Tentaram, também, não só com uma mas com várias operações num mesmo modelo e voltaram a desesperar.

> **Prof:** "O problema é que os valores têm de ser aproximados"
> **J:** "Então .... A dividir por 3 dá 20".
> **Prof:** "Se trabalhares com o 20 e dividires pelo 3 estás a trabalhar com as duas listas e é para usares a L1 para obteres a L2"

O Rodrigo experimentou trabalhar com a média dos valores da variável *x*, procurava uma constante como nas actividades anteriores. O professor voltou a pedir aos alunos para que tentassem com várias operações, que as "misturassem" num mesmo modelo, no entanto os alunos sentiam-se confusos e demonstraram grande dificuldade.

> **Prof:** "Há-de haver uma fórmula matemática que relaciona as variáveis"
> Aluno: "Se fizer 3x10,5=31,5 batia certo [refere-se aos valores da tabela do seu grupo de trabalho]
> **Prof:** "Mas, esta relação teria de resultar também para os outros valores". "No entanto, este modelo [10,5x=d] faz sempre com que a distância aumente, acham que isso era possível?"
> **R:** "Não"

O Professor resolveu desenhar no quadro os quatro tipos de gráficos que os alunos já tinham visto até à data: os estudados por eles – o de uma função de proporcionalidade directa (recta que passa pela origem do referencial) e o de uma função afim (uma recta); os que eles desconheciam as suas definições – o de uma função de proporcionalidade inversa (ramo da hipérbole) e o de uma função quadrática (uma parábola).

Prof: "Então temos de descobrir uma coisa que cresça e decresça, fazendo por exemplo potências". "Sugerimos que vai ser com potências". "Vou trabalhar com os quadrados mas também tenho de diminuir, há-de haver uma altura em que volta para trás".

Prof: "Por exemplo 3^2=9, 3^2+..., 3^2-...., $-3^2+40=31$ tudo bem, para o outro valor 6, $-6^2+40=4$ não funcionou".

Após estas orientações, os alunos começaram a ficar mais seguros, participativos e a argumentarem os seus raciocínios.

Aluno: "Mas, não dava logo porque o primeiro não dava" [por o primeiro valor da variável x ser zero ao substituí-lo naquele modelo obter-se-ia o valor 40 em vez do valor zero para a variável d].

Prof: "Bem visto". "Então... $-x^2+13x=d$, agora já funciona para o caso do zero".

Os alunos verificaram se aquele modelo servia para os outros valores da variável *x*.

O professor projectou para além do gráfico – nuvem de pontos – dos dados recolhidos da situação real o gráfico daquele modelo. Os alunos deram continuidade aos seus raciocínios.

Prof: "Faz uma curva parecida".

R: "Então é aumentar [quer subir no eixo dos *yy* a curva daquele modelo]". "Em vez de vezes 13, vezes 23"

Fase da análise: Interpretação, reflexão e validação do modelo matemático

O professor foi colocando na calculadora as várias modificações propostas pelos alunos ao modelo e mostrando os gráficos dos novos modelos. Os alunos observaram o modo como a curva desses gráficos se sobrepunham aos pontos do gráfico – nuvem de pontos – da situação real simplificada, e foram aperfeiçoando-a.

R: "O 27 foi melhor"

Aluna: "Experimente o 27,5"

Prof: "Vamos experimentar o $-2x^2+35x=d$"

J: "Mas dá mais para fora [dos pontos]". "Mais pequeno é maior [refere-se ao coeficiente 2]"

Prof: "Destes qual é o que preferem? [$-x^2+27x=d$ ou $-0{,}75x^2+22{,}5x=d$, considerados pelos alunos os dois melhores modelos que se sobreponham melhor à nuvem de pontos]"

Todos os alunos concordaram em validar o modelo $-x^2+27x=d$ como o melhor.

4.1.5. Tarefa "Espelhos e reflexões" (Anexo nº 7)

(Aula do dia 21-04-2006 e do dia 28-04-2006)

Fase da compreensão do contexto da situação problemática real

Os alunos leram a situação, compreenderam facilmente o seu contexto por lhes ser familiar e organizaram-se dando início à realização da sua experiência.

Fase da recolha e organização de dados

Os alunos preencheram a tabela com os dados recolhidos e construíram o gráfico. Rapidamente, reconheceram características comuns a outras actividades desenvolvidas por eles, como os valores de uma variável irem aumentando enquanto que os da outra iam diminuindo e a curva do gráfico observado ser parecida com as outras. Após observarem o gráfico, os alunos decidiram efectuar logo na tabela os produtos entre os valores das variáveis.

Fase da construção do modelo matemático

Observou-se que não revelaram dificuldades em interpretarem como a mudança numa variável se relacionava com a mudança noutra variável, ou seja, que quando aumentava a distância do lápis ao solo diminuía a distância do observador ao centro do quadrado, desenhado no espelho. Nem em chegarem ao conceito funcional de que a distância do observador dependia da distância do lápis ao solo.

J: "À medida que a distância do lápis aumenta a do observador diminui"

J: "Então, a distância do observador depende da distância do lápis. Então, a independente é a do lápis".

Os alunos para poderem estudar a influência da distância do lápis ao solo na distância do observador ao centro do quadrado precisaram de encontrar uma expressão algébrica de uma função modeladora da relação entre as variáveis. Para tal eles decidiram, principalmente o Rodrigo e o Jaime, calcular a média dos produtos entre os valores das variáveis ($\overline{xy}$). De seguida, verificaram e concluíram graficamente que a função do tipo $y = \frac{\overline{xy}}{x}$ era um bom modelo, pois o seu gráfico ajustava -se "bem" aos pontos do gráfico da situação real.

R: "Ao princípio parece ser a dividir por 2"

J: "Parece!"

T: "Porque é que fizeste $x \times y$?"

R: "Os valores não são certos, calculei a média". "$x \times y$ dá quase sempre este valor, que é o valor que está perto do real". "Dá uma linha curva"

B: "Decresce"

Mas, nem todos os grupos acharam a média dos seus produtos.

Fase da análise: Interpretação, reflexão e validação do modelo matemático

Na alínea a.1. da questão 1.9. os alunos tiveram de efectuar de novo a experiência para o valor 70 cm da variável *x*. Ficaram espantados por experimentalmente o resultado dar 17,5 cm e não 26,38 cm como tinham obtido através do seu modelo, eles pensavam que o seu modelo daria resultados muito mais próximos dos valores reais recolhidos.

R: "Diferença de 9 valores"

Um outro grupo obteve apenas uma diferença de 5 valores entre o valor real e o aproximado.

Discussão grupo/turma

Um aluno, representante de cada grupo, explicou o procedimento que tinham utilizado para a obtenção do seu modelo, escreveu-o na calculadora e projectou-o. A turma observou como aqueles gráficos se ajustavam ao gráfico de dispersão da situação real.

Aluno: "L3 é a multiplicação [das outras duas listas]"

R: "Não é mau" [só não se aproxima dos 2 primeiros pontos do gráfico real]

Aluno: "$1500/x$". "Porque 1500 está mais ou menos no meio [mediana]"

Alunos: "Tá bom".

O grupo do Rodrigo continuava satisfeito com o seu modelo. Os alunos revelaram ter adquirido mais conhecimento matemático em relação à nova função modeladora da situação.

Prof: "Porque é que foram fazer os produtos?"

R: "Porque não é de proporcionalidade directa"

Todos os alunos souberam validar os seus modelos, eles alteravam o modelo para que o seu gráfico se ajustasse o melhor possível aos pontos da curva do gráfico da situação real. Elegeram $y = \dfrac{1500}{x}$ para melhor modelo por só não se sobrepor aos dois primeiros pontos do gráfico da situação real projectada.

Pode-se concluir que os alunos souberam interpretar os dados recolhidos e fazer conexões da sua actividade modeladora com aquela situação real simplificada e com as outras actividades de modelação desenvolvidas por eles.

Prof: "Se o espelho era do mesmo tamanho, as medidas para a distância do lápis ao solo as mesmas, porque é que foi dar valores, constantes diferentes?"

R: "A altura da pessoa"

Como conclusão:

Prof: Quando as curvas são deste tipo as constantes são próximas dos produtos"

4.1.6. Tarefa "Uma luz à distância" (Anexo nº 8)

(Aula do dia 28-04-2006 e do dia 03-05-2006)

O professor e os alunos dirigiram-se para o gabinete de Matemática, que por ser uma sala mais escura que a da aula apresentava condições de trabalho mais favoráveis à experiência a ser realizada.

Fase da compreensão do contexto da situação problemática real

O professor leu o contexto da situação aos alunos, os quais se identificaram facilmente com o fenómeno real em causa, e apresentou-lhes o material de trabalho. Uma aluna participou na realização da experiência e os outros alunos foram lendo o procedimento para a recolha dos dados.

Fase da recolha e organização de dados

Através da projecção na parede os alunos foram vendo os valores das duas variáveis a serem lidas e registadas pelos sensores. Verificaram que quando os sensores efectuavam uma recolha, o valor da distância da fonte luminosa aos sensores permanecia fixo enquanto que o da intensidade da luz não. Alguns alunos foram logo passando os dados, um a um, para a tabela da ficha enquanto que outros preferiram esperar para passarem os dados da calculadora utilizada na experiência para as suas através dos cabos de transmissão de dados.

Os alunos dirigiram-se para a sala de aula, preencheram de imediato a tabela, calcularam logo os produtos das quantidades das variáveis, construíram o respectivo gráfico da situação real e confrontaram-no com o efectuado na calculadora. Um dos grupos de trabalho comentou que achava o seu gráfico "esquisito" por este estar mais afastado do eixo dos *yy* que os outros já anteriormente vistos nas outras fichas.

Fase da construção do modelo matemático

Os alunos identificaram as variáveis em estudo, a dependente e a independente, e uma relação de dependência entre as variáveis: "à medida que a distância aumenta a intensidade diminui".

R: "O *d* é o do eixo dos *xx* "

Os alunos do grupo observado assim como a maioria dos alunos da turma mostraram-se bastante autónomos, eles sentiam-se confiantes por o gráfico obtido ser parecido com outros já estudados por eles nas anteriores fichas. Por esta razão eles efectuaram de imediato a média dos produtos entre os valores das variáveis e apressaram-se em criar o seu modelo.

Do grupo observado, a Teresa reclamava com os colegas por estes não esperarem por ela, mas eles queriam obrigá-la a reflectir o que fez com que a Teresa, embora um pouco insegura, fosse respondendo às questões. Os alunos ficaram admirados por o seu modelo, cuja expressão algébrica continha como constante a média dos produtos, não se sobrepor como esperavam à maioria dos pontos do gráfico de dispersão do fenómeno real observado.

B: "Este modelo fica *boé* esquisito".

O Jaime e o Rodrigo foram ditando outros possíveis valores aproximados da constante e outros valores próximos do da média e do da mediana, e o Bernardo foi-lhes mostrando os respectivos gráficos desses modelos propostos, para no final validarem o melhor modelo. Por os alunos terem sentido dificuldade em encontrarem um bom modelo, que realmente se ajustasse à maioria dos pontos do gráfico da situação real, comentaram que esta experiência tinha qualquer coisa de diferente. O que mostra que eles foram sempre interpretando a situação modelada e construindo novos conhecimentos matemáticos. Eles procuraram sempre criar, aperfeiçoar e ajustar uma função como modeladora da situação real através da sua interpretação gráfica. Fizeram associações com os conhecimentos adquiridos nas outras fichas e não se restringiram ao uso da média para descobrirem a constante.

Fase da análise: Interpretação, reflexão e validação do modelo matemático

O professor projectou no quadro a tabela e o respectivo gráfico – nuvem de pontos da experiência realizada. A seguir deu início à discussão.

Discussão grupo/turma

O professor colocou aos alunos da turma questões que os levassem a reflectir acerca do que tinham aprendido durante as actividades realizadas por eles, ao longo desta sequência de tarefas de modelação.

> **Prof:** "Porque é que fizeram o produto das listas?"
>
> **R:** "Porque não é uma situação de proporcionalidade directa".
>
> **Prof:** "Sempre que não for de proporcionalidade directa multiplicamos as listas?"
>
> **R:** "Acho que sim"
>
> **Prof:** "Mas a da rampa não. Vimos que o produto das listas não dava constante. Há uma razão mais forte do porquê de se multiplicar as listas para além de não ser de proporcionalidade directa."
>
> **Prof:** "Na da pressão, viram que os valores estavam sempre à volta do 17, que ao observarem o seu gráfico, e os outros parecidos, os valores à volta do 17 alternavam, subiam e desciam. Não estavam a descer sempre nem a subir sempre."
>
> **Prof:** "Este gráfico [do modelo da tarefa "uma luz à distância"] era daqueles em que se observava a multiplicação das listas".
>
> **Prof:** "Acharam o valor médio [dos produtos]?"
>
> **R:** "0,41"

O professor solicitou aos grupos os seus modelos.

> **Prof:** "Quais foram os melhores modelos encontrados?"
>
> **R:** "$i = \frac{0{,}41}{d}$". "Não dá assim muito perfeito, já tivemos a ver, não é o melhor"
>
> **Aluno:** "$i = \frac{0{,}48}{d}$"

Num outro grupo como não chegaram a um acordo, por os gráficos dos modelos que iam optando só se aproximarem dos primeiros pontos do gráfico do fenómeno real, decidiram não optar pelo melhor modelo.

Prof: "Vamos comparar estes dois modelos [o $i = \frac{0,41}{d}$ e o $i = \frac{0,48}{d}$]"

Os alunos observaram como os dois gráficos projectados se sobreponham ao gráfico – nuvem de pontos do fenómeno real.

Aluna: "O melhor é o deles [o do grupo observado, o $i = \frac{0,41}{d}$] porque passa por dois pontos."
Aluna: "Mas a média não está constante nem com um nem com outro".
Prof: "O que eles viram é que quando se aproximam dos pontos de cima afastam-se dos pontos de baixo".
Aluna: "Era preciso um [modelo] no meio"
Prof: "Uma maneira de vermos qual destes era o melhor modelo. Uma maneira de os testarmos é vermos com medidas, distâncias reais."

De acordo com a alínea a.1. da questão 1.9., na experiência realizada para 0,74 m o sensor que mediu a intensidade da luz registou 0,664 $w.sr^{-1}$. O modelo do grupo observado para 0,74 m deu aproximadamente 0,554 $w.sr^{-1}$ enquanto que o do outro grupo deu aproximadamente 0,649 $w.sr^{-1}$. Os alunos verificaram que para o valor 0,74 m o último modelo estava mais próximo do valor real. É de realçar que os elementos do grupo que criaram este último modelo nas aulas "normais" revelavam pouca motivação e empenho, no entanto durante as aulas das tarefas de modelação eram bastante participativos.

Prof: "Porque é que o modelo 2, o do 0,48, deu melhor resultado?"
R: "Porque era uma grande distância"

O professor explicou aos alunos que em particular em relação à distância 0,74m o último modelo era o melhor por estar mais próximo do valor real 0,664

$w.sr^{-1}$, porque essa zona específica do gráfico do modelo se encontrava mais próxima dos pontos do gráfico da situação real, recolhidos pelo sensor. Os alunos compreenderam também que em relação à situação real não poderiam eleger o melhor modelo com base num único teste. No que diz respeito ao caso de eles terem achado os gráficos dos seus modelos "esquisitos" e que se aproximavam de forma não muito satisfatória dos pontos do gráfico da situação real, eles perceberam que se devia ao facto dos valores dos produtos das listas irem sempre a diminuir em vez de andarem a alternar, a descer e a subir, à volta de um valor.

O professor informou-os da expressão algébrica geral do tipo de modelo que estavam a estudar.

> **Prof:** "Se fossemos físicos não ficávamos satisfeitos, então eles descobriram uma lei que descreve melhor este fenómeno. Em vez de fazermos $i = \frac{k}{d}$ fazemos $i = \frac{k}{d^2}$".

De seguida, os alunos verificaram através da L_3, da calculadora, que o produto dos valores da variável i pelos da variável d^2 já andavam a aumentar e a diminuir à volta de um valor, à semelhança do que acontecia noutras suas actividades.

> **Prof:** "Vamos experimentar o $i = \frac{0{,}41}{d^2}$. Quase que acertei"

O professor experimentou o $i = \frac{0{,}48}{d^2}$ e outros como o $i = \frac{0{,}35}{d^2}$.

> **Aluno:** "Experimente lá o $i = \frac{0{,}45}{d^2}$"
>
> **R:** "Quase o mesmo!"

Prof: "Parece que o $i=\frac{0{,}41}{d^2}$ é o melhor. Então usando o $i=\frac{0{,}41}{d^2}$, vamos ver se está mais próximo que o $i=\frac{0{,}48}{d^2}$. o $i=\frac{0{,}41}{0{,}74^2}\approx 0{,}749$". "Ficou mais longe que o $i=\frac{0{,}48}{d^2}$".

Prof: "[rindo] conclusão: "Apesar de se ver que $i=\frac{0{,}41}{d^2}$ era melhor o $i=\frac{0{,}48}{d^2}$ teve sorte de passar lá perto".

O professor fez na calculadora a multiplicação das listas da variável i pela da variável d^2. Como os valores desses produtos alternavam à volta do valor 0,41, o professor e os alunos elegeram como o modelo $i=\frac{0{,}41}{d^2}$ como sendo o melhor.

4.1.7. Discussão dos novos conhecimentos matemáticos adquiridos pelos alunos

O professor comunicou aos alunos que a lei da física diz que a intensidade da luz é inversamente proporcional ao quadrado da distância. Deu-lhes definições, até então desconhecidas por eles, como a de que as funções cuja multiplicação das quantidades das variáveis dá uma constante se chamam funções de proporcionalidade inversa, e fez-lhes um apanhado dos conhecimentos matemáticos da unidade didáctica que tinham estado a trabalhar.

Prof: "Há situações em que se pode unir os pontos do gráfico e outras não, como é que a gente sabe?". "Nesta experiência dá para unir os pontos?"

R: "Não, não dá"

Prof: "O gráfico começou por ser pontos mas eu posso representa-lo por uma linha". "Se fossemos sempre continuamente a afastar a cadeira aparecia uma linha contínua". "Podemos unir os pontos porque as variáveis são contínuas". "E na experiência das pilhas?"

R: "Não"

Prof: "Passo de uma [pilha] para duas e não para uma pilha e meia. Não posso porque a variável independente não ser contínua". "Só posso unir os pontos se a variável independente for contínua, não posso se ela for discreta."

O professor desenhou no quadro um gráfico de uma função de proporcionalidade directa, um de uma função quadrática, e um de uma função de proporcionalidade inversa. Neste último o professor explicou aos alunos que uma variável aumenta e a outra diminui e que o produto das variáveis é constante.

Prof: "Existem funções de muitos tipos, muitos modelos, os fenómenos da Natureza são diversos, só depois de pegarmos numa situação é que sabemos o modelo".

Os alunos escreveram a definição de função de proporcionalidade inversa

Prof: "Experiências em que as variáveis eram inversamente proporcionais?"

R: "A dos espelhos"

Prof: "Outra em que o produto das variáveis fosse constante"

R: "Acho que a das pilhas não era. A das pilhas não era, era de proporcionalidade directa"

R: "A pressão era"

R: "A da letra".

Prof: "Nestas experiências de proporcionalidade inversa acontece sempre uma coisa, quando uma das variáveis aumenta a outra diminui". "Mas, na de $i = \frac{k}{d^2}$ as variáveis não são inversamente proporcionais, não é só o produto ser constante.

Prof: "A dos espelhos, a da pressão e a da letra, estas funções chamamos funções de proporcionalidade inversa.". "Depois viram que o gráfico daquelas experiências comportava-se sempre como curvas". "A essas curvas chamamos hipérbole"

Prof: "Por exemplo y=2/x". [Projecta o gráfico desta função] "chamamos hipérbole".

Prof: "O modelo para o espelho..."

R: "$x \times y = 1846{,}43$"

Pediu também os outros modelos das outras experiências.

R: "$p \times v = 17$"

Aluno: "$d \times a = 12{,}4$"

O professor escreveu cada um destes modelos e as suas respectivas equações equivalentes resolvidas em ordem à variável dependente, por exemplo p em função de v : $p = \frac{17}{v}$.

Prof: "A expressão será sempre o produto das variáveis igual à constante ou a variável dependente igual à constante a dividir pela variável independente".

Desenhou no quadro duas hipérboles, uma em que a constante era negativa e outra em que a constante era positiva, seguidamente projectou várias hipérboles na calculadora para os alunos verem a diferença.

Prof: "Naquelas experiências a curva que a gente via era sempre esta [aponta para o primeiro quadrante do referencial], pois só tinham valores positivos". No gráfico de proporcionalidade inversa, quando x=1 o y é igual a k, constante. Os gráficos de proporcionalidade inversa contêm o ponto de coordenadas (1,k). No gráfico e na tabela".

4.2. Análise das potencialidades da intervenção didáctica

Da análise das entrevistas feitas aos quatro alunos do grupo observado e dos relatórios que elaboravam no final de cada tarefa, identificaram-se diversos aspectos que importa referir neste estudo, quer sobre as atitudes/concepções dos alunos em relação às tarefas de modelação e sua realização, quer em relação à tecnologia utilizada, com indicadores específicos relativos ao papel da calculadora gráfica e sensores.

4.2.1. Atitudes/concepções dos alunos

Em relação à motivação/atenção/concentração:

Os alunos manifestaram que pelo facto de trabalharem com este tipo de tarefas, as suas atitudes mudaram em relação às aulas de Matemática, pois sentiram-se muito mais motivados e esse acréscimo de motivação fez com que eles participassem mais e estivessem mais atentos e concentrados nessas aulas.

B: *Nas aulas de modelação sempre nos vamos distraindo a fazer as actividades é diferente tem outro tipo de motivação, (...) a gente vinha com as aulas quase todas sempre iguais, a gente fez as actividades mudou um bocado* [a nível de atitudes], *a gente também mudou, gostávamos mais. Fiquei um bocadinho mais participativo, (...) com mais um bocadinho de atenção (...)*

T: *(...) acho que foi com mais motivação por causa das experiências.*

R: *Estas* [tarefas de modelação cativaram-no mais] *porque, estas aqui das tarefas de modelação tínhamos de realizar a experiência, tínhamos de registar os dados, tínhamos de encontrar as fórmulas.*

J: *Também pela própria estrutura da tarefa, também puxa um bocado pela gente, tem mais motivação também. (...) quanto a mim e ao meu grupo tivemos muito mais atitude em concentrarmo-nos (...)*

Uma das razões que explica também o acréscimo de motivação dos alunos foi a sua preferência em trabalharem com dados reais que recolheram para a realização das suas tarefas.

J: *o que motiva mais para trabalhar era os dados reais. (...) com os reais tem muito mais motivação, por isso prefiro trabalhar nos reais.*

B: *Os reais, porque tem mais lógica estudarmos os dados reais do que os dados fictícios. Acho que nas actividades em que se usou os dados reais houve muito mais interesse, saber mesmo que resultado é que ia dar na realidade do que se for nos fictícios. Pronto, acho que na realidade é muito mais interessante de se fazer. (...) Porque são situações assim com mais certeza, são situações que há mais no dia-a-dia. (...) Aqui relacionei mais a matemática com a realidade, discutimos coisas reais para trabalhar, é importante, prefiro aulas assim.*

Em relação ao interesse/empenho:

Os alunos manifestaram que se sentiram mais empenhados na realização deste trabalho, o que se terá em parte devido ao tipo de tarefas, mas também ao facto de terem sido realizadas em grupo, que aumentava o interesse na comparação e confronto de resultados:

J: *[As tarefas] Meteu mais raciocínio, (...) e mais empenho. (...) principalmente por ser em grupo cada um dá as suas ideias, pronto se tivermos algumas dificuldades em certos sítios perguntamos ao colega e ele talvez consiga-nos ajudar e a gente chega mais facilmente onde queremos. (...) até porque em grupo, (...), trabalha-se muito melhor (...). Não é só do grupo, porque no nosso grupo se calhar até havia certas pessoas que tinham as mesmas ideias que a gente, mas sim dos outros grupos também porque deram opiniões diferentes.*

B: *Recolher os dados, ver logo as diferenças entre uns e outros grupos, acho que é mais interessante. (...) dedicamo-nos mais ao que estamos a* *fazer, do que em aulas sempre iguais, já sabemos o que é que vai acontecer, (...).*

Relativamente à relação Matemática-Realidade:

Os alunos valorizaram a possibilidade de relacionar a Matemática com a realidade, quer para compreenderem melhor o mundo que os rodeia quer para desenvolverem capacidades ao nível da aplicação dos conhecimentos matemáticos.

> **R:** *[A Matemática é] (...) uma Ciência, que se estudava para compreender situações do dia-a-dia (...). [É importante estudar as relações entre a Matemática e a realidade] (...) porque a matemática não é logo real (...). Temos de saber as situações [reais] como é que se dão. (...) depois é as situações do dia-a-dia em que nem sempre há proporcionalidade directa, há muita proporcionalidade inversa.*

> **J:** *(...) aqui a* $p \times v$ *vai dar sempre mais ou menos os 17, sempre aproximadamente na realidade, pode vir a dar mas é quase sempre impossível dar certo, enquanto matematicamente pode dar, que a gente escolhe os resultados, enquanto que na prática não. (...) É muito importante, a gente não sabe o que é que acontece no dia-a-dia, é importante saber certas coisas de matemática. (...) por exemplo em Físico-Química o da rampa, diz-se que quanto mais inclinado mais velocidade tem e na realidade viu-se que não se prova isso, temos outro ponto de vista na realidade, depois em matemática. Acho importante [essa relação] para a gente desenvolver matematicamente, porque estar sempre a fazer exercícios, sempre a fazer exercícios se calhar vai se tornar repetitivo daquela matéria, e se for com a realidade desenvolve.*

> **B:** *Sim [é importante estudar as relações entre a Matemática e a realidade], porque acho que a matemática tem a ver com a realidade… tudo na realidade tem tudo a ver com a matemática, contas, preços.*

Também manifestaram num dos seus relatórios: "Também achei muito interessante o facto das pilhas terem a diferença de potencial quase igual e não maior ou menor como dizem na publicidade". *(...)* "Aprendi que as pilhas não se distinguem pela marca mas sim pelo seu potencial".

Em relação à aprendizagem matemática:

Os alunos, após terem trabalhado as três primeiras tarefas que lhes foram propostas, ficaram surpreendidos pela positiva por conseguirem, praticamente sem a ajuda do professor e de um modo um pouco informal, construir conhecimentos acerca do conceito de proporcionalidade inversa e ideias matemáticas inerentes a este, e por as terem percebido com facilidade e por não as esquecerem.

> **J***: [Na proporcionalidade inversa] enquanto uma variável aumenta a outra diminui, sempre. (...) Viu-se que os modelos não eram todos iguais, cada um tinha um modelo diferente. Por exemplo aqui no gráfico não é uma linha recta, é sempre uma linha curva, o que mostra que há, pode haver variações de subida ou descida, enquanto que na directa é constante, é mais ou menos isso.*

> **T:** *Ajudou-me a perceber como é que trabalhava a proporcionalidade inversa. (...) Ficamos com a ideia como é que chegamos lá [como se constroem os modelos matemáticos], não só sendo o professor sempre a dizer. (...) Estamos a aprender uma coisa nova. É melhor assim vendo porque aprendemos mais coisas.*

> **R***: (...) assim fazemos actividades [experiências] e com as actividades compreendia-se melhor a matéria [do que dar logo a fórmula]. (...) há mais facilidade em aprender. (...) tem mais facilidade em compreender (...) assim [através de um modelo que relacione as variáveis das situações, as] situações do nosso dia-a-dia já ficam melhor compreendidas. (...) fiquei com mais conhecimentos na proporcionalidade inversa, que nunca tinha ouvido falar e penso que há muito mais razões de proporcionalidade inversa do que directa (...).*

B: *(...) é uma fonte de aprendizagem que acho que é mais fácil de a gente compreender, (...). A gente a fazer as actividades vamos aprendendo. Acho que a gente não fixa tão bem [nas aulas normais] como nestas aulas assim [nas aulas de modelação]. (...) era mais fácil de compreender e assim acho que fixávamos melhor as coisas, um dizia uma coisa outro dizia outra e depois juntava-se tudo, acho que era mais fácil assim. (...) é importante a gente saber como é que o há-de descobrir [o modelo], por exemplo dão-nos assim os modelos calhamos a um dia não nos lembrarmos ficamos logo sem saber o que é que se há-de fazer. E assim (...), se souber como é que se constrói não se atrapalha.*

Acrescentaram ainda no seu relatório da actividade *Sob pressão:* "Aprendemos que os valores da pressão vezes o volume nem sempre aumenta e nem sempre diminui, também aprendemos a construir gráficos. O que achamos mais interessante foi ver que os resultados nem sempre diminuíam e nem sempre aumentavam, variavam". Também no da actividade *Até onde* vemos acrescentaram que: "(...) aprendi que em muitas situações deste tipo temos de calcular a média para encontrar o valor da expressão matemática. Também aprendi que existem vários e vários tipos de gráficos".
Expressaram também que o facto de terem trabalhado com várias tarefas os ajudou a desenvolverem de forma progressiva as suas capacidades, e ainda manifestaram que as suas dificuldades na fase de construção do modelo foram gradualmente diminuindo.

J: *[Notou diferenças nas suas capacidades da 1ª para a última tarefa de modelação] A gente na primeira ficha demorámos muito mais tempo do que demorámos nas últimas, na primeira demoramos uma, duas aulas e na outra uma aula, por exemplo. Desenvolveu muito mais a gente a resolver, só houve uma ou outra que tinha um modelo mais difícil de resolver, como o da rampa [que era diferente dos outros]. (...) melhorou a minha capacidade de raciocínio em cada situação, por exemplo se houver situações parecidas, se calhar, chego mais facilmente ao outro modelo, não quer dizer que seja igual mas ao modelo mais facilmente, (...).*

B: *Aprendi várias coisas que não sabia, e acho que desenvolvi algumas capacidades. Por exemplo quando a gente começou a dar estas actividades, na primeira tivemos dificuldades mas depois começamos a desenvolver e para o final já fazíamos bem as actividades. Por exemplo na primeira ficha demoramos muito tempo a resolver e na última já foi mais rápido, fizemos a ficha mais rápido [considera que houve uma progressão].*

R *(...) desenvolveu [capacidades] porque fiquei acostumado a fazer depois já era mais fácil [desenvolveu a forma como raciocinava para chegar ao modelo].*

Reforçaram estas ideias ao escreverem nos seus relatórios da actividade *Espelhos e reflexões* e da actividade *Uma luz à distância*, respectivamente: "Nesta actividade não tive quase nenhumas dificuldades" e "Nesta actividade tive poucas dificuldades".

4.2.2. Papel da calculadora gráfica e sensores

Em relação à recolha e organização de dados:

Os alunos destacaram o quanto estas ferramentas lhes foram úteis, e a diversos níveis. Um deles foi ao nível da possibilidade de recolherem dados variados de uma situação real e os organizarem e visualizarem em listas e se aperceberem das suas variações, outro foi ao nível da poupança de tempo em cálculos sobre esses dados recolhidos.

J: *[Os dados trabalhados] Foram reais, porque lidámos mesmo com objectos [sensores e material de trabalho] mesmo das situações reais, em cada situação. (...) A calculadora gráfica servia-nos para introduzir os dados (...) para que chegássemos mais facilmente ao modelo, para não estar a fazer tantas contas sempre. Metíamos em cada lista, tornava mais fácil descobrir, ver se aumentava se diminuía, dava para ver depois mais facilmente o modelo.*

B: *(...) a gente fez mesmo as actividades, vimos que eram... que resultavam bem, as actividades, não era só ler experimentamos mesmo* [com sensores ou material de trabalho], *e...acho que são reais, se não fossem reais a gente não as conseguia fazer. (...) A calculadora gráfica serve para pormos os dados na calculadora, fazermos o gráfico (...). O CBR, (...) para medir a distância? O CBL (...) para medir a intensidade.*

Em relação ao uso de múltiplas representações:.

Os alunos salientaram o apoio dado pela calculadora gráfica na análise dos dados, na visualização gráfica, e na facilidade em passarem de umas representações para outras de uma mesma relação funcional.

T: *A calculadora gráfica serve para fazer gráficos (...)*

R: *(...) [A calculadora serve para] vermos mais ou menos o gráfico e outras relações existentes.*

J: *(...) [A calculadora serve] para saber ver o gráfico, como ia ficar, tornava mais fácil a gente fazer o gráfico, ver se estava certo.*

B: *(...) dá para ver o gráfico, se era de proporcionalidade inversa ou não. Por exemplo, bastava pôr os resultados que ela [a calculadora] fazia logo o gráfico e depois pelo gráfico dava para tirar conclusões mais facilmente. Os resultados [nas listas] podiam-se ver na calculadora, podiam-se logo fazer as contas do modelo, dava para ver.*

Também escreveram no seu relatório respeitante à sua actividade *Pilhas em série*: "(...) achei muito interessante o facto de nós utilizarmos as calculadoras gráficas e assim podemos ficar com uma pequena noção da sua importância." (...) "Achei interessante o facto de usarmos a máquina para fazer gráficos".

Em relação à exploração e definição de modelos:

Os alunos expressaram que a calculadora gráfica lhes permitiu uma manipulação directa do modelo através da sua visualização, e que isso os ajudou a escolherem de entre os modelos propostos no seu grupo de trabalho aquele cujo gráfico melhor se ajustava ao da situação real.

R: *(...) e depois é fazer experiências com o modelo matemático.*

J: *(...) com os meus colegas depois foi mais fácil, fomos testando, conduzir até lá chegar. [Para ver o modelo mais adequado de entre os propostos pelos elementos do grupo], (...) fazíamos o gráfico também na máquina, víamos quais é que passava pelos pontos [gráfico nuvem de pontos] assentava nos pontinhos e cada um fez um modelo, e chegamos lá por aí, para ver qual é que ficava melhor.*

T: *Tivemos de fazer com vários modelos [para ver qual era o melhor]. (...) depois tiramos conclusões.*

Capítulo 5

Conclusões e recomendações

Este capítulo está dividido em três secções. Na primeira apresenta-se uma síntese do estudo, na segunda procura-se responder às questões, da primeira secção, colocadas no início da investigação e na terceira são propostas algumas recomendações decorrentes dos resultados da investigação.

5.1. Síntese do estudo

O presente estudo tinha como principal objectivo compreender as potencialidades das tarefas de modelação na aprendizagem matemática dos alunos. De modo a se enquadrar os objectivos propostos para este estudo, elaboraram-se as questões de investigação seguintes:

(a) Como é que os alunos encaram e se envolvem em tarefas de modelação?

(b) Como é que os alunos desenvolvem a actividade de modelação?

(c) Como é que a tecnologia, calculadoras gráficas e sensores, contribui para o desenvolvimento da actividade de modelação?

Para o problema em estudo adoptou-se uma metodologia de natureza qualitativa, de tipo interpretativo, e optou-se pelo estudo de caso. Implementou-se a intervenção didáctica na turma do 9º ano de escolaridade de uma Escola Secundária do Alentejo, no ano lectivo 2005/2006, tendo-se abordado, na investigação, a unidade didáctica *Proporcionalidade inversa, Representações gráficas,* através de uma sequência de tarefas de modelação, com recurso à calculadora gráfica e sensores.

Na recolha de dados utilizaram-se as técnicas de entrevista, observação e análise documental.

5.2. Conclusões do estudo

5.2.1. Visão e envolvimento dos alunos em tarefas de modelação

Um dos argumentos referidos para sustentar a introdução das tarefas de modelação na aula de Matemática é o da motivação juntamente com o apoio na aquisição e compreensão de conceitos, métodos e resultados (Abrantes, 1993; Abrantes *et al.*, 1997; Niss, 1992).

A experiência de trabalho vivida pelos alunos confirma este argumento.

Todos os alunos independentemente do nível de desempenho demonstrado expressaram uma opinião positiva em relação às tarefas de modelação. Consideraram as actividades realizadas como autênticos desafios, interessantes, motivantes e estimuladores de maior concentração, empenho e participação nas aulas de matemática. Para os alunos a realização das experiências das situações reais e o uso da calculadora gráfica constituíram as principais fontes de motivação proporcionadas pelas tarefas.

O facto dos alunos terem considerado as tarefas como motivadoras e não rotineiras e ao mesmo tempo estas serem situações problemáticas reais, criaram no aluno o sentimento de desafio a ultrapassar mesmo ao longo de tarefas com o mesmo tipo de modelo genérico de proporcionalidade inversa. A alegria, motivação, com que participaram no trabalho, mesmo os alunos mais fracos poderá estar relacionada talvez com todo o contexto por permitir que os alunos fossem os agentes da sua própria aprendizagem.

Os alunos manifestaram que o facto de terem trabalho em grupo os ajudou a conseguirem resolver as tarefas. Eles passaram, progressivamente, a se relacionar de forma positiva, mais colaborativa, para conseguirem ultrapassar as dificuldades com que se deparavam. O confronto de opiniões foram episódios constantes e levou os alunos a explicarem e a ouvir diferentes pontos de vista, o que facilitou o desenvolvimento de explicações e argumentações. O facto de os alunos poderem experimentar, em conjunto, vários modelos sem medo de estarem mal ou não servirem, pois iam sempre alterando o modelo até obterem um que fosse melhor, e o facto de competirem entre grupos contribuiu para que os elementos do grupo de trabalho revelassem mais confiança, autonomia, interesse, concentração e empenho durante as aulas de modelação. Eles envolveram-se nestas aulas de uma forma muito mais activa e participativa e interactiva do que nas outras aulas normais ao longo do ano lectivo.

Os alunos foram unânimes em preferirem trabalhar com os dados reais – valores aproximados tanto quanto possível do real – em vez dos fictícios, pois eles sentiram que existia realidade, veracidade, nas experiências que realizaram. Eles perceberam que as situações reais com que trabalharam eram uma simplificação da realidade, de forma a poderem interpretar e compreender essa realidade através de modelos matemáticos, sem grande margem de erros. Expressaram, ainda, o quanto foi importante para eles trabalharem com *coisas reais*, poderem *ver* e relacionar a matemática com a realidade a fim de conseguirem compreender e discutir as situações reais do dia-a-dia. Por terem trabalhado mais situações reais cujo função modelo era de proporcionalidade inversa, os alunos criaram a concepção de que existiam muitas situações de proporcionalidade inversa, no mundo que os rodeia, e em maior quantidade que as de proporcionalidade directa.

Ao nível da aprendizagem matemática, em relação às primeiras tarefas de modelação, apesar de os alunos gostarem muito de realizar as experiências e de trabalharem com dados reais, eles não percebiam para que é que aquelas tarefas serviam, o que é que estavam a aprender com elas, pois achavam que não estavam a aprender nada, porque não estavam habituados a trabalhar daquela maneira. Após a realização das três primeiras tarefas, os alunos começaram a aperceber-se que conseguiam, nomeadamente: interpretar o gráfico da situação real, relacionar o gráfico da função modeladora com o da situação real, relacionar os gráficos das funções com as suas expressões algébricas, relacionar os gráficos com a relação entre as variáveis em estudo, diferenciar o gráfico de uma função de proporcionalidade directa com o da nova função estudada, de proporcionalidade inversa, perceber o significado da constante de proporcionalidade. O facto de todas as tarefas terem a mesma estrutura e o facto de os alunos terem sentido que eles praticamente sozinhos, quase só com o seu esforço, tinham conseguido construir "uma parte da Matemática", alguns conhecimentos matemáticos, levou-os a ganharem cada vez mais confiança no desenvolvimento da sua actividade. Os alunos expressaram que progressivamente foram desenvolvendo de forma mais rápida a sua actividade de modelação e que esta por sua vez lhes foi desenvolvendo cada vez mais o seu raciocínio.

No final da intervenção didáctica o professor entregou aos alunos a ficha formativa número 8, com questões fechadas, contendo actividades acerca da unidade observada e que foram retiradas das provas de aferição e do exame nacional de 2005. Aquando da realização desta ficha os alunos ficaram bastante surpreendidos pela positiva ao se aperceberem que sabiam resolver as questões facilmente, sem terem necessitado que o professor lhes tivesse ensinado, pelo método expositivo, especificamente como é que teriam de resolver determinada questão, como estavam anteriormente habituados. Após a realização desta ficha, os alunos aperceberam-se que o professor lhes tinha leccionado toda uma unidade e que a tinham compreendido, foi neste momento que eles se aperceberam das vantagens, manifestadas pelos mesmos, que as tarefas lhes tinham proporcionado na sua aprendizagem. Segundo eles, as tarefas de modelação são uma forma mais fácil de aprenderem as matérias, pois assim compreendem-nas melhor. Uma vez que os alunos estavam habituados a resolver as tarefas, já tinham realizado muitas e como as actividades de modelação tinham situações problemáticas abertas em que não lhes era fornecido à priori os dados como nas actividades da ficha número 8, eles sentiram que estavam preparados para resolver qualquer situação, inclusive as perguntas de exame, consideradas por eles como fáceis.

Através das actividades de modelação os alunos passaram a ver e a sentir a sua aprendizagem matemática como sendo-lhes útil, eles ficaram a perceber melhor para que é que serve a Matemática, como é que a Matemática se relaciona com os fenómenos reais que os rodeiam e como é que os tenta explicar. Todos os alunos criaram a concepção de que através das tarefas de modelação lhes foi mais fácil compreender e aprender os conceitos matemáticos da unidade didáctica *Proporcionalidade inversa, Representações gráficas*. Segundo eles ao desenvolverem a sua actividade de modelação conseguiam interiorizar/reter esses novos conceitos em vez de os decorar, evitando assim que os conceitos caíssem no esquecimento. Esta concepção poderá dever-se ao facto de os alunos terem sentido que estavam a aprender um determinado assunto de forma descontraída, sem ser de forma forçada, ao aprende-lo sem querer aprenderam o que poderiam não ter aprendido de outro modo, por exemplo através do método expositivo. As opiniões e comportamentos dos alunos apontam para que todos sentiram a modelação como uma experiência de aprendizagem positiva que influenciou a forma como aprenderam o conceito de proporcionalidade inversa e os *desenvolveu matematicamente*, queriam que todas as aulas fossem assim.

5.2.2. A actividade de modelação dos alunos

Um outro argumento que é também referido para justificar a introdução das tarefas de modelação matemática na aula de Matemática é o do desenvolvimento de competências e capacidades incluindo as específicas do processo de modelação (Abrantes, 1993; Abrantes *et al., 1999*; Blum e Niss, 1991; Niss, 1992; Ponte, 1992; Swetz, 1992), e isto também se verificou neste estudo.

Em todas as tarefas, os alunos, em grupo, começaram por se inteirar sobre qual tinha sido a situação do mundo real observada e de seguida tentaram perceber em que consistia a situação problemática proposta – situação real simplificada/modelo real. Nesta fase da compreensão do contexto da situação problemática real, os alunos manifestaram ter entendido mais facilmente o contexto das situações que lhes eram familiares, que faziam parte do seu mundo/quotidiano. Por tal, o único contexto em que revelaram não terem tido uma compreensão imediata foi o de teor científico da situação exposta na tarefa *sob pressão*. Nas situações que eram próximas aos alunos, eles iniciaram a sua actividade de modelação com as suas imagens mentais, as suas concepções. Algumas dessas suas perspectivas da realidade encontravam-se erradas, tais como "se as pilhas eram novas deveriam ter o mesmo potencial" e "quanto mais inclinado mais anda o carro". Neste sentido, eles começaram por modelar qualitativamente a situação real.

Os alunos iniciaram a matematização da situação real na fase da recolha e organização de dados. Durante a realização das suas experiências recolheram os dados/informações de fenómenos reais, de forma discreta, registaram-nos, organizaram-nos em tabelas, representaram-nos através de gráficos, interpretaram-nos e analisaram-nos. Deste modo, segundo Abrantes *et al.*

(1999), os alunos puderam fazer uma interligação entre o conhecimento científico e o uso de aspectos da competência matemática.

Um dos propósitos deste estudo consistia em proporcionar aos alunos a introdução de conceitos matemáticos, da unidade didáctica *Proporcionalidade inversa, Representações gráficas*, através da realização de uma sequência de tarefas de modelação. Neste sentido, procede-se à síntese das principais conclusões da actividade dos alunos em relação à fase da construção e exploração de modelos matemáticos de proporcionalidade inversa.

Na fase da construção do modelo matemático, os alunos apoiaram-se na tabela de valores para descobrirem a existência de relações numéricas entre os valores das duas variáveis de cada situação real simplificada. Facilmente, interpretaram como a mudança numa variável se relacionava com a mudança noutra variável e constataram que à medida que os valores de uma variável aumentavam os da outra diminuíam. Os alunos apoiaram-se na tabela e no gráfico para identificarem, interpretarem, compreenderem e comunicarem os seus pensamentos acerca da relação entre as variáveis. Para além disso, eles desenvolveram o seu sentido crítico face à informação contida naquelas representações da situação real, nomeadamente em interpretar criticamente que dados não pertenciam ao contexto daquela parte da realidade, por serem fruto de erros de medição cometidos aquando da sua recolha.

O grupo observado identificou a variável independente e a dependente e chegou ao conceito funcional de que uma variável dependia da outra. Os alunos ao observarem que o gráfico de dispersão – nuvem de pontos – da situação real tinha a forma de uma curva decrescente eles compreenderam que essa situação não poderia ser modelada por uma função de proporcionalidade directa. Sob orientação do professor, os alunos passaram da representação gráfica para a tabela e procederam ao cálculo do produto entre as quantidades das variáveis. Observaram a variação dos resultados desse produto e concluíram que os valores eram muito próximos uns dos outros e que alternavam, aumentavam e diminuíam, à volta de um valor. De seguida, principalmente, nas actividades em que os dados não eram recolhidos pelos sensores, em que os resultados desses produtos se distanciavam entre si por unidades e não apenas por casas decimais, os alunos sentiram necessidade de calcularem a média desses resultados com o objectivo de obterem de forma mais precisa uma constante de proporcionalidade para o modelo que iriam construir.

Para a construção de um determinado modelo eles apoiaram-se no parâmetro escolhido como constante, na relação funcional entre as variáveis e no facto desse parâmetro ser obtido através da multiplicação dos valores das variáveis. Inicialmente, os alunos sentiram algumas dificuldades em usarem procedimentos algébricos simples no uso de fórmulas, em passarem a representar a relação funcional, entre as variáveis, por uma expressão algébrica do tipo $y=\frac{k}{x}$, em que a variável dependente estivesse escrita em função da independente, em vez da sua equivalente $y\times x=k$. As ferramentas intelectuais como o raciocínio algébrico e o uso de representações ajudaram os alunos a combater a dificuldade que tinham em escrever expressões equivalentes. Ultrapassada essa dificuldade técnica, eles compreenderam melhor o porquê do respectivo gráfico dessa representação algébrica ter a forma de uma curva decrescente.

Á medida que os alunos ao longo das suas actividades foram reconhecendo semelhanças entre elas, como o facto de obterem semelhantes relações entre as variáveis, o mesmo tipo de variação dos resultados do produto entre as variáveis, parecidas representações gráficas e semelhantes construções de expressões algébricas de distintas situações reais, eles foram desenvolvendo, de forma progressiva, a capacidade para representar de uma forma abstracta – através de uma expressão algébrica/modelo matemático – a relação entre as variáveis de uma determinada situação problemática real. As representações, tabela e gráfico, que surgiram da actividade matemática informal dos alunos funcionaram como uma cadeia de significados, do contexto da situação real modelada, que gradualmente se desenvolveu em mais raciocínio matemático abstracto, formal, e que deu significado ao modelo da relação entre as variáveis, desenvolvendo nos alunos uma compreensão do papel do modelo e do seu significado com o contexto da situação real. Os alunos através da visualização e manipulação das diferentes representações, que trabalharam, aprenderam a aplicar as estratégias que desenvolveram de informais/intuitivas para mais formais, o que os levou a criarem e a desenvolverem as suas abstracções a um nível mais alto de formalização, ou seja o seu raciocínio matemático ficou crescentemente formal – processo de matematização progressiva.

Na fase da interpretação, reflexão e validação do modelo matemático, os alunos visualizaram o gráfico da primeira função modeladora que construíram e confrontaram-no com o gráfico da situação real de modo a interpretarem o quanto essa função descrevia aquela situação real. De seguida, eles manipulavam o parâmetro constante, alteravam o seu valor para o da média dos resultados do produto das variáveis e/ou por outros valores próximos da primeira opção escolhidos por tentativas, e visualizavam os efeitos produzidos. Que eram novos modelos a serem explorados, confrontados com o gráfico da situação real, e avaliados juntamente com o primeiro modelo. Os alunos comparavam as suas avaliações feitas aos modelos até validarem o melhor, aquele cuja representação gráfica se encontrava mais próxima dos pontos do gráfico da situação real, ou seja, aquele que descrevia a situação real com mais exactidão. Os alunos foram-se apercebendo da generalização do modelo, chegaram mesmo a generalizar que nas situações em que os dados não eram recolhidos pelos sensores, em que eram cometidos mais erros de medição, o modelo do tipo $y=\frac{\overline{xy}}{x}$ descrevia melhor a situação real que o modelo teórico $y=\frac{k}{x}$. Contudo não foram capazes de escrever a expressão geral destes modelos de proporcionalidade inversa.

Os alunos aperceberam-se que na resolução de situações problemáticas reais obtinham uma multiplicidade de soluções/modelos – e não uma única solução como estavam anteriormente habituados – e que escolhiam uma dessas soluções que naquele momento e que em relação aquela parte da realidade que queriam estudar lhes parecia mais adequada.

Posteriormente, os alunos usaram o modelo escolhido para obterem previsões/resultados acerca da situação real. Constataram, com surpresa, na resolução da primeira tarefa que os resultados obtidos pelo seu considerado melhor modelo não eram iguais mas sim próximos dos valores recolhidos experimentalmente. Chegaram mesmo a expressar que a "matemática não é logo real". Com o desenvolvimento da sua actividade de modelação os alunos foram compreendendo e interpretando, de forma cada vez mais eficiente, a interacção constante que efectuavam entre o modelo e a sua situação modelada. Ao mesmo tempo foram construindo conhecimentos, nomeadamente que fenómenos reais diferentes geram gráficos e fórmulas diferentes, saber o significado dessas diferenças; distinguir uma função de proporcionalidade directa de uma inversa, saber seus significados e o significado das suas constantes.

No final de cada uma das suas actividades, os alunos do grupo observado discutiam com os outros grupos, sob orientação do professor, as estratégias utilizadas ao longo da sua actividade e qual o gráfico de cada função modeladora – construída sobre os mesmos dados – que era mais adequado a cada situação e escreviam o relatório da sua actividade. Nessas discussões finais os alunos partilhavam os seus conhecimentos e procedimentos. A discussão da última tarefa permitiu aos alunos por um lado, aperceberem-se melhor acerca do que é que se tinha pretendido com aquelas tarefas de modelação e por outro lado, forneceu-lhes um esclarecimento e uma sintetização dos conceitos e dos conhecimentos matemáticos por eles construídos e adquiridos ao longo do desenvolvimento das suas actividades de modelação.

Alguns aspectos a salientar: os alunos ao longo dos seus processos de resolução e em todas as fases do processo de modelação sentiram necessidade de efectuarem constantes interpretações, por exemplo da tabela, gráfico, relação entre variáveis, modelo e previsões em relação à situação problemática real, neste sentido o modelo e a situação modelada evoluíram mutuamente; reconheceram que fenómenos reais diferentes poderiam ser interpretados pelo mesmo tipo de modelo – de proporcionalidade inversa; melhoraram a sua compreensão em relação aos vários fenómenos; a proximidade do gráfico da função modeladora aos pontos do gráfico de dispersão da situação real foi o principal factor de crítica e decisão na validação do modelo; em relação às previsões pedidas em algumas questões os alunos souberam adaptar os valores numéricos desses resultados à respectiva situação real; reconheceram que fenómenos diferentes geram gráficos diferentes; os alunos compreenderam que para cada uma das situações poderiam existir melhores modelos que os validados e isso dependendo dos interesses em causa; os alunos não revelaram procedimentos informais, mas sim conhecimentos e imagens informais acerca das situações, principalmente daquelas relacionadas com o quotidiano nas duas primeiras fases dos seus processos de modelação; os alunos sentiram que construíram conhecimentos de uma forma progressiva quase sem a ajuda do professor; os alunos criaram o seu conceito informal de função de proporcionalidade inversa, insistiam no uso da média para a construção deste modelo e só no final da exploração de todas as actividades é que o confrontaram com o conceito formal; na medida em que revelaram ter uma noção generalizada do modelo do tipo de proporcionalidade inversa, embora de forma informal, pode-se concluir que os seus níveis de abstracção evoluíram.

Também é de destacar que os alunos desenvolveram a capacidade de explorar situações e de identificar regularidades, a capacidade de valorizar a Matemática e relacionaram-na com aspectos contextuais da disciplina de Físico-Química; a capacidade de utilizar a matemática na interpretação do real, a capacidade de compreensão das relações funcionais; a capacidade de representação e transferência e a capacidade de modelação, ao representarem as relações entre variáveis por meio de expressões algébricas, e a de interpretação dos modelos em relação às respectivas situações reais.

5.2.3. A tecnologia como promotora do desenvolvimento da actividade de modelação

Um aspecto importante a considerar nas tarefas de modelação matemática, é o recurso à calculadora gráfica e sensores, que foi também alvo de estudo nesta investigação (Abrantes *et al.*, 1997; Abrantes *et al.*, 1999; Berry, 2001; Burkhardt, 1989; Fevereiro e Belchior, 2001; Keitel, 2004; ME-DEB, 2001; Ponte, 1995).

A actividade de modelação foi indissociável da tecnologia. As ferramentas, calculadora gráfica e sensores, ajudaram a desenvolver atitudes positivas nos alunos face à disciplina de Matemática, e permitiram que eles trabalhassem as funções numa perspectiva diferente da dos manuais.

A calculadora gráfica foi utilizada pelos alunos não só como instrumento auxiliar do cálculo, mas principalmente como instrumento de análise estatística de dados, nomeadamente para: (i) introduzir dados recolhidos de forma discreta pelos alunos; (ii) organizar dados recolhidos, com e sem sensores, em duas listas; (iii) analisar os dados das listas; (iv) obter uma terceira lista com os resultados dos produtos entre os valores das duas listas; (v) calcular a média dos valores da terceira lista; (vi) interligar diferentes tipos de representações (tabela, gráfico e expressão algébrica); (vii) visualizar o gráfico de dispersão – nuvem de pontos da situação real simplificada, e (viii) confrontar o gráfico da função modeladora com o da situação real. Além disso, ajudou a dar um contexto a cada gráfico de cada função modeladora. Em vez de os gráficos serem encarados, pelos alunos, como uma "linha" passaram a estar interligados a fenómenos reais que rodeiam o quotidiano do aluno.

A calculadora gráfica permitiu aos alunos verem, identificarem e explorarem, em grupo, as relações numéricas existentes entre os valores de uma variável e/ou de duas variáveis, as distintas representações de uma relação funcional entre duas variáveis, os vários tipos de gráficos gerados por diferentes realidades, e construírem, interpretarem, explorarem, aperfeiçoarem e ajustarem os modelos matemáticos propostos, através da manipulação e interpretação gráfica destes com a situação real modelada, a fim de validarem o melhor. Principalmente, teve um papel fundamental na construção de várias e distintas representações matemáticas de uma mesma realidade e de uma mesma função modeladora dessa realidade, e desenvolveu a capacidade de os alunos passarem de umas representações para outras. Eles efectuaram bastantes transferências entre a tabela e o gráfico da situação real e entre o gráfico e a expressão algébrica da função modeladora.

Na perspectiva dos alunos, com o apoio da calculadora obtiveram uma resposta visual rápida, em relação à exploração dos gráficos das situações reais, simplificadas, que contribuiu principalmente para a construção de um modelo matemático e para a escolha do melhor modelo de cada situação.

Neste estudo, a calculadora gráfica serviu de suporte para que os alunos conseguissem, de uma forma mais simples, "visualizar" o comportamento do fenómeno real, formular conjecturas sobre os dados recolhidos, validar raciocínios e resultados, argumentar as constantes interacções entre os modelos e as suas respectivas situações reais modeladas, e experimentar os modelos matemáticos ao nível concreto, ou seja, permitir que aqueles objectos abstractos – por serem representações de relações entre variáveis – possam ser manipulados directamente.

Neste sentido, a calculadora gráfica foi utilizada pelos alunos como um suporte ao desenvolvimento da sua actividade de modelação, apoiou os diferentes passos de construção e exploração de modelos matemáticos, inerentes ao processo de modelação, permitindo-lhes construir o seu conhecimento matemático.

Neste estudo, os sensores – sofisticados dispositivos portáteis de recolha de dados do mundo real – foram usados para medirem, de forma discreta, as grandezas em estudo, recolheram de forma organizada os dados da situação real e introduziram-nos nas listas da calculadora gráfica. Os sensores conseguem efectuar a recolha de dados com grande precisão, uma vez que os erros que cometem ao efectuarem as medições são ínfimos.

A utilização dos sensores, como instrumentos de modelação, ao ter permitido que os dados recolhidos de cada situação real se aproximassem bastante dos valores do *mundo real,* contribuiu de forma decisiva para que os alunos fizessem uma interpretação mais correcta, fácil e rápida, da situação real simplificada. Salienta-se, também, que a utilização dos dados recolhidos pelos sensores proporcionou aos alunos uma exploração visual mais fácil e rápida das relações matemáticas existentes entre as variáveis. Os alunos ao aperceberem-se mais facilmente dessas relações sentiram-se mais seguros a construir um modelo matemático, a desenvolverem a sua actividade de modelação.

Por outro lado, uma vez que os dados recolhidos pelos sensores se aproximavam muito da realidade, eles foram uma ajuda preciosa para que os alunos pudessem ver rapidamente a constante de proporcionalidade de cada situação real. Por exemplo, na situação de proporcionalidade directa, na tarefa das *pilhas em série*, os resultados da divisão dos valores da variável dependente pelos valores da variável independente eram idênticos ao valor 1,6, na unidade e casa decimal, só se diferenciavam a partir da casa decimal. Nas situações de proporcionalidade inversa, nas tarefas "Sob pressão" e "Uma luz à distância", os resultados dos produtos entre os valores das variáveis andavam a alternar, a aumentar e a diminuir, de forma muito próxima à volta de um determinado valor, respectivamente de 17 e de 0,41, ou seja no primeiro caso só se diferenciavam pelas casas decimais e no segundo pelas milésimas

A análise empírica dos dados obtidos neste estudo parece reforçar a ideia de que os sensores influenciaram o desenvolvimento da actividade de modelação dos alunos, uma vez que ao filtrarem com grande precisão as informações da realidade, permitem uma conexão mais estreita entre o modelo real, simplificado para sala de aula, e o modelo matemático idealizado pelos alunos para a representação da situação real.

Estas ferramentas tecnológicas permitiram uma conexão entre os domínios da Estatística e das Funções; melhoraram a compreensão do significado de parâmetros: variável e constante; potenciaram atitudes positivas nos alunos para com a sua aprendizagem, apoiaram os alunos nos seus processos de resolução de variadas e distintas situações problemáticas reais, na aquisição de ideias e do conceito de proporcionalidade inversa; tornaram a Matemática mais *viva* e dinâmica; ajudaram os alunos a visualizar, processar e a analisar os dados reais; ajudaram a reconhecer as interdependências funcionais dos dados reais e a descobrirem funções modeladoras que se ajustassem de forma satisfatória ao gráfico da situação real.

Poder-se-á concluir que a utilização dos sensores influenciou de forma determinante o contexto e o desenvolvimento da actividade de modelação dos alunos, e que a calculadora gráfica representou uma ferramenta técnica utilizada como facilitadora do desenvolvimento da actividade de modelação dos alunos.

5.2.4. Síntese das principais conclusões

O principal objectivo deste estudo consistiu em averiguar as potencialidades das tarefas de modelação na aprendizagem matemática dos alunos. Neste sentido, procede-se à síntese das principais conclusões que combinam a reflexão sobre os princípios teóricos que fundamentam este estudo e os resultados a que foi possível chegar-se.

a) A sequência de situações problemáticas reais:

(i) fomentou nos alunos uma atitude bastante positiva face a todo o contexto educacional e o gosto em desenvolverem actividades intelectuais deste tipo;

(ii) tornou a aprendizagem da matemática uma actividade experimental, construtiva, interactiva e reflexiva;

(iii) foi a fonte para os alunos compreenderem com significado e aprenderem com facilidade os conceitos que lhes foram introduzidos; e construírem, reorganizarem, e amplificarem os seus conhecimentos e desenvolverem as suas capacidades;

(iv) proporcionou-lhes um conjunto de aprendizagens significativas;

(v) impulsionou a produção gradual de abstracções – o raciocínio matemático tornou-se progressivamente mais formal;

(vi) deu oportunidade aos alunos de observar, analisar, questionar, procurar respostas e descobrir por eles em vez de se limitarem a confirmar observações, memorizar, responder, aprender com respostas dadas e a saber a informação por lhes ser transmitida;

(vii) proporcionou que a Matemática e a Realidade estivessem conectadas e ao, mesmo tempo que a construção de modelos fosse um processo dinâmico e continuo de reorganização progressiva da situação e não apenas uma tradução da mesma.

b) A utilização da calculadora gráfica e sensores influenciou de forma determinante o contexto e o desenvolvimento da actividade dos alunos, tornou a aprendizagem mais fácil e intuitiva, serviu de suporte aos alunos para conseguirem atingir propósitos mais complexos. A calculadora permitiu que os modelos fossem tratados como objectos concreto-abstractos. Os sensores proporcionaram uma estreita conexão entre o modelo matemático e o modelo real.

Potencialidades das tarefas de modelação

É possível concluir que a sequência de tarefas de modelação e a experiência que ela proporcionou na aula tem várias potencialidades ao nível do processo ensino-aprendizagem da Matemática, nomeadamente: motiva os alunos, apoia na aquisição e compreensão de conceitos, métodos e resultados;

ajuda a desenvolver diversos aspectos da competência matemática, desenvolve capacidades, facilita a compreensão de ideias e conceitos matemáticos, e ajuda na construção do conhecimento formal.

5.3. Recomendações

Do trabalho realizado surgem dois tipos de recomendações, um relacionado com o processo de ensino-aprendizagem e o outro com questões para futura investigação.

5.3.1. Recomendações didácticas

Atendendo às conclusões do estudo, os alunos do ensino básico precisam da orientação externa do professor para darem o passo a um nível mais alto de abstracção, principalmente quando um dos objectivos da inclusão de situações problemáticas reais é a introdução e desenvolvimento de conceitos matemáticos. Neste sentido, é importante que o professor antes de construir as suas tarefas reflicta acerca de possíveis hipotéticas trajectórias de aprendizagem para os seus alunos. Há que pensar que actividades mentais os seus alunos poderão desenvolver quando realizam este tipo de actividades intelectuais educacionais, e como é que essas actividades mentais poderão estar relacionadas com os objectivos que pretende do processo educativo. Estas reflexões ajudá-lo-ão a ganhar uma maior segurança e confiança durante as aulas de modelação.

Como os alunos do 3º ciclo têm poucas ferramentas matemáticas é aconselhável o professor propor aos seus alunos um número suficiente de tarefas de modelação, bem estruturadas, para familiarizar os alunos com o tipo de estratégias e procedimentos inerentes à construção e exploração de modelos matemáticos.

Dos resultados da investigação, parece ser importante continuar a reforçar-se o aspecto do uso de uma boa dinâmica de trabalho ao nível de pequenos grupos e da turma, os relatórios por promoverem o desenvolvimento da comunicação escrita e as discussões no final de cada actividade por promoverem a comunicação oral dos raciocínios dos alunos, e proporcionar um contexto educacional adequado ao desenvolvimento da competência matemática.

5.3.2. Recomendações para futura investigação

É inequívoca a importância assumida actualmente, no currículo de Matemática, pela modelação como um tipo de experiência de aprendizagem. No entanto, este tipo de experiência tem sido pouco implementada e desenvolvida nas aulas de Matemática. Por tal, é importante que se promova este tipo de experiência de aprendizagem que pode desenvolver nos alunos, desde tenra idade, a sua competência matemática.

De modo a que a relação entre a Matemática e a realidade possam constituir uma das linhas de força da organização curricular, parece ser fundamental a existência de estudos de caso acerca de experiências de inovação curricular que impliquem actividades desta natureza e que permitam avaliar as suas potencialidades no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Dos resultados apresentados neste trabalho, sai reforçada a ideia de que o processo de modelação matemática parece constituir um caminho promissor para a investigação dos processos de aprendizagem matemática dos alunos. Analisar o papel das actividades de modelação no desenvolvimento dos aspectos da competência matemática nos conteúdos das quatro áreas temáticas.

Recomenda-se futuras investigações em que os professores das disciplinas de Físico-química e Matemática, efectuem uma maior integração entre as actividades de modelação e os conceitos destas disciplinas, com tarefas de modelação bem estruturadas e recurso à tecnologia, em aulas experimentais destas disciplinas – realçando o quotidiano destas disciplinas – de modo a tornarem os contextos científicos familiares aos alunos, proporcionando-lhes uma educação científica. Poder-se-á investigar como é que os alunos podem desenvolver conhecimentos e hábitos mentais científicos – ponderar apenas sobre os factos relevantes, desprezar os supérfluos, conhecer o modo como os matemáticos e cientistas trabalham e pensam – para que se possam tornar intelectualmente independentes e capazes de pensarem por si próprios? Como é que os alunos desenvolvem as suas interpretações, estratégias, abstracções e processos de resolução neste tipo de actividades?

Neste estudo, apesar de se ter concluído que os alunos efectuaram interacções entre os modelos e as suas situações reais em vez de traduções dessas situações como é mencionado na modelação matemática, foi detectada uma possibilidade de ligação entre a teoria da modelação matemática e a teoria da modelação *emergente*. As quatro fases do processo de modelação podem corresponder aos quatro níveis de actividade dos alunos mencionados no processo de *modelação emergente*. As actividades de modelação desenvolvidas pelos alunos tiveram como foco a construção de conhecimento matemático, o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e a aquisição e compreensão de ferramentas matemáticas, que são também objectivos da *modelação* emergente. É um campo pouco explorado e cujo conhecimento poderá trazer implicações importantes para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Neste sentido, é importante que sejam desenvolvidas mais investigações nesta área, nomeadamente investigações acerca do: Como se processa a aprendizagem de conceitos através da matematização progressiva? Como é que os alunos desenvolvem os processos de resolução da *modelação emergente*? Como é que o conhecimento informal dos alunos se pode desenvolver para o mais formal sem que haja uma dicotomia entre eles?

Referências Bibliográficas

Abrantes, P. (1992). Pode-se aprender na escola a usar a Matemática em problemas da vida real? *Educação e Matemática, 23,* 25-29.

Abrantes, P. (1993). Actividades de aprendizagem que envolvem a Matemática em situações da vida real. Em T. Breiteig, I. Huntley e G. Kaiser-Messmer (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context* (pp. 103-114). Chichester: Ellis Horwood.

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática.* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Abrantes, P., Leal, L., Teixeira, P., e Veloso, E. (1997). *MAT 789: Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Abrantes, P., Serrazina, L., e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica:* Lisboa: DEB - ME.

APM (1988). *Renovação do Currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

APM – Grupo de trabalho T^3 (1999). *Modelação no Ensino da Matemática, Calculadora, CBL e CBR*. Lisboa: APM.

APM – Grupo de trabalho T^3 (2002). *Funções no 3º ciclo com tecnologia*. Lisboa: APM.

Aspetsberger, B. e Aspetsberger, K. (2001). Cross curriculum teaching and experimenting in math & science courses using New Technology. Em Manfred Borovcnik e Hermann Kautschitsch (Eds.), *Fifth International*

Conference on Technology in Mathematics Teaching. Austria: University of Klagenfurt.

Bernardes, A. e Colaço, T. (1997). Sismos, exponenciais e logaritmos: Uma proposta de modelação matemática. *Educação e Matemática, 43,* 13-16.

Bogdan, R. e Biklen, S. K (1982). *Qualitative research for education: Na introduction to theory and methods.* Boston: Allyn and Bacon.

Blum, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51(1-2),* 149-171.

Blum, W., Berry, R., Biehler, I., Huntley, D., Kaiser-Messmer, G., Profke, L. (1989). *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics (Vol.1).* Chichester: Ellis Horwood Limited.

Blum, W. e Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educacional Studies in Mathematics, 22(1)*, 37-68.

Boon-Liang, C. e Yingkang, W. (2004). The Power of Excel: One problem and three perspectives. *Micromath*, *Autumn*, 30-34.

Canavarro, A. P. (2005). Matemática na Escola: Muro ou ponte?. Em *Actas do V CIBEM 2005* (pp. 1-25). Porto: APM.

Carreira, S. (1992). *A Aprendizagem da trigonometria num contexto de Aplicações e Modelação com Recurso à Folha de Cálculo.* (tese de mestrado, Faculdade de Ciências de Lisboa). Lisboa: APM.

Carreira, S. (1998). *Significado e aprendizagem da matemática: dos problemas de aplicação à produção de metáforas conceptuais.* (tese de doutoramento, Faculdade de Ciências de Lisboa). Lisboa: APM.

Clark-Jjeavons, A. e Hyde, R. (2001). Developing a technologically rich scheme of work for 11-12 year olds in mathematics for electronic delivery. Em Manfred Borovcnik e Hermann Kautschitsch (Eds.), *Fifth International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. Austria: University of Klagenfurt.

Davis, P. e Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

De Lange, J. (1989). The teaching, learning and testing of mathematics for the life and social sciences. Em W. Blum, R. Berry, I. Biehler, D. Huntley, G. Kaiser-Messmer, L. Profke (Eds.), *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics (Vol.1).* Chichester: Ellis Horwood Limited.

De Lange, J. (1999). Framework for classroom assessment in mathematics. Freudenthal Institute & National Center for Improving Student Learning and Achievment in Mathematics and Science.

Doorman, L. M. (2005). *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change.* Dissertation, Utrecht University, the Netherlands.

English, L. D. (2002). Priority Themes and Issues in International Research in Mathematics Education. Em Lyn D. English (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (1ª ed.). New Jersey/London: IEA.

Fevereiro, I. e Belchior, M. (2001). Changing the classroom pratices – The use of technology in mathematics teaching. Em Manfred Borovcnik-Hermann Kautschitsch (Eds.), *Fifth International Conference on Technology in Mathematics Teaching.* Austria: University of Klagenfurt.

Goldenberg, E. P. (2000). Thinking (and talking) about technology in Math Classrooms. *In Issues in Mathematics Education*: Education Development Center, Inc.

Guimarães, H. (2005). A resolução de problemas no ensino da Matemática. Alguns passos do seu percurso no discurso curricular em Portugal. Em L. Santos, A. P. Canavarro, e J. Brocardo (Eds), *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas*. Lisboa: APM.

Gravemeijer, K.P.E. (2002). Emergent modelling as the basics for an instructional sequence on data analysis. In Philips, B. (Eds.), ICOTS-6. Proceedings, Cape Town.

Gravemeijer, K. (2002a). Preamble: From Models to Modelling. Em K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Van Oers e L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 7-22). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Gravemeijer, K. (2004). Emergent Modelling as a Precursor to Mathematical Modelling, In: H-W. Henn & W. Blum (Eds.), *ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education, Pre-Conference Volume*, (pp. 97-102). Dortmund: Universität Dortmund.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? Em L. Santos, A. P. Canavarro, J. Brocardo (Eds), *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas*. Lisboa: APM.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *39 (1-3)*, 111-129.

Heck, A. e Holleman, A. (2001). Modelling human growth. *In.* Manfred Borovcnik-Hermann Kautschitsch (Eds.), *Fifth International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. Austria: University of Klagenfurt.

Heuvel-Panhuizen, M. Van den (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute CD-rom for ICME9*. Utrecht: Utrecht University.

Heuvel-Panhuizen, M. van den e Wijers, M.M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. Zentrallblatt fÃ¼r Didaktik der Mathematik, *37(4)*, 287-307

Keitel, C. (1993). Implicit Mathematical Models in Social Practice and Explicit Mathematics Teaching by Applications. Em *Innovation in Maths Education by modelling and applications*. Ellis Horwood.

Keitel, C. (2004). Para qué necesitam nuestros estudiantes las matemáticas? Em J. Giménez., L. Santos, J. P. Ponte (Eds), *La actividad matemática en el aula: Homenaje a Paulo Abrantes*. Madrid: GRAÓ

Kerr, D. R. e Maki, D. (1979). Mathematical Models to Provide Applications in the Classroom. Em S. Sharron (Ed.), *Applications in School Mathematics. Yearbook*. Reston: NCTM.

Kooij, H. (1992). Matemática realista na Holanda. *Educação e Matemática, (23)*, 38-44.

Lawson, D. e Tabor, J. (2001). Introducing models and modelling trough spreadsheets. Em Manfred Borovcnik-Hermann Kautschitsch (Eds.), *Fifth International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. Austria: University of Klagenfurt.

Matos, J. (1997). Modelação matemática: O papel das tecnologias de informação. *Educação e Matemática, 45,*, 41-43.

Matos, J. M. (2002). Saber matemático básico: Uma comparação com outros tempos. *Educação e Matemática, 69,* 2-8.

Matos, J. e Carreira, S. (1996). *Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática: Situações e Problemas.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

ME – DGEBS (1991). *Programa de Matemática – Ensino Básico, 3º ciclo: plano de organização do ensino-aprendizagem* (Vol. II). Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário.

ME – DES (1997). *Matemática – Programas 10º, 11º e 12º anos.* Lisboa: Ministério da Educação.

ME – DEB (2001). *Currículo Nacional do ensino básico: competências essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME – DES (2001a). *Matemática A.* Lisboa: Ministério da Educação.

ME – DES (2001b). *Matemática B.* Lisboa: Ministério da Educação.

ME – DES (2001c). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais.* Lisboa: Ministério da Educação.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach.* São Francisco: Jossey-Bass.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar.* Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original em Inglês, publicado em 1989).

NCTM (1994). *Normas Profissionais para o ensino da Matemática.* Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original em Inglês, publicado em 1991).

NCTM (2000). *Principles and Standards for school mathematics.* Reston: NCTM.

Nelissen, J.M.C. (1999). Thinking Skills in Realistic Mathematics. Em J.H.M. Hamers, J.E.H. van Luit & B. CsapÃ³ (Eds.), Teaching and Learning Thinking Skills (pp. 189-214). Lisse: Swets and Zeitlinger.

Niss, M. (1987). Applications and modelling in the mathematics curriculum - State and trends. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, 18* (4), 487-505.

Niss, M. (1992). O papel das aplicações e da modelação na Matemática escolar. *Educação e Matemática, 23,* 1-2.

Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. Em A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 11-47). Dordrechts: Kluwer.

Niss, M. (2001). Issues and problems of research on the teaching and learning of applications and modelling. Em J. F., W. Blum, S. K. Houston & S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and mathematics education. ICTMA9: Applications in Science and Technology* (1ª ed.). West Sussex: Horwood.

Ormell, C.P. (1991). A Modelling View of Mathematics. Em M. Niss, W. Blum, e I. Huntley (Eds), *Teaching of Mathematical Modelling and Applications (Vol.1).* Chichester: Ellis Horwood.

Pires, M. (2001). *A diversificação de tarefas em Matemática no Ensino Secundário: Um projecto de investigação-acção.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
Disponível: Internet Directório: http://ia.fc.ul.pt/textos

Pólya, G. (1945). *Como resolver problemas: Um aspecto novo do método matemático.* Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P. (1992). A modelação no processo de aprendizagem. *Educação e Matemática, 23,* 15-19.

Ponte, J. P. (1995). Novas Tecnologias na aula de Matemática. *Educação Matemática, 34,* 2-7.

Ponte, J., Matos, J. M., e Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional (IIE).

Schupp, H. (1989). Applied mathematics instruction in the lower secondary level-between traditional and new Approaches. Em W. Blum, R. Berry, I. Biehler, D. Huntley, G. Kaiser-Messmer, L. Profke. *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics (Vol.1).* Chichester: Ellis Horwood.

Sousa, A. (2004). MAPLETS – Modelos Interactivos no Ensino da Matemática. Em *Actas do ProfMat 2004* (pp. 106-107). Covilhã: APM. [Suporte CdRom].

Swetz, F. (1992). Quando e como podemos usar modelação? *Educação Matemática, 23,* 45-48.

Wong, N. (2003). The Influence of Technology on the Mathematics Curriculum. Em A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education. Part One,* vol. 10, 271-321. Kluwer Academic Publishers.

ANEXOS

ANEXO 1

Autorização para o desenvolvimento do trabalho de dissertação

ESCOLA SECUNDÁRIA DE XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

2006-01-16

Exmo. Sr. Presidente do Conselho Executivo
Da Escola Secundária de XXXXXXXXXXXXXXX

Assunto: Pedido de autorização para o desenvolvimento de um trabalho de dissertação.

No estudo de investigação sobre a aprendizagem matemática dos alunos do 9º ano de escolaridade que me encontro a desenvolver, mais concretamente serão propostas tarefas de modelação matemática, com recurso a calculadoras gráficas e sensores (quando possível com recurso ao computador), para os alunos as resolverem em pequenos grupos, de 2 ou 3, na sala de aula. Estas tarefas serão articuladas e integradas ao currículo escolar e terão contextos, sempre ligados à realidade, por exemplo a aspectos da vida do dia-a-dia que para os alunos sejam significativos, e terão como propósito o desenvolvimento da aprendizagem matemática dos alunos. A realização da parte empírica do trabalho de pesquisa – que, está inserido no âmbito da tese de mestrado em Educação Matemática, sob orientação da Profª Doutora Ana Paula Canavarro, do Departamento de Pedagogia e Educação da Universidade de Évora – realizar-se-á no segundo período lectivo, e corresponderá à área temática *Funções*, com conexões a outras áreas da matemática. Estas aulas serão leccionadas pelo professor da turma, Jacinto Salgueiro, decorrerão durante o horário normal das aulas de Matemática, e serão registadas em videogravação.

Como o objectivo deste estudo visa uma descrição detalhada de um processo inserido num determinado contexto educativo, será imprescindível uma análise aprofundada que só será conseguida se os dados recolhidos forem em quantidade suficientes. Desta forma é necessário para a realização da parte empírica do trabalho de pesquisa que:

- Observe as aulas com videogravação das actividades realizadas pelos alunos da turma.
- Realize entrevistas a cada grupo de trabalho onde serão promovidas discussões que envolverão directamente a opinião dos alunos, e onde terão a oportunidade de resolver actividades com o propósito de desenvolverem a sua competência matemática. Todas as entrevistas feitas aos alunos, que serão seleccionados e que as aceitarão juntamente com os seus respectivos Encarregados de Educação, serão videogravadas e posteriormente transcritas e analisadas;
- Analise as produções escritas dos alunos no final de cada tarefa, pois será pedido aos alunos que elaborem um relatório, em grupo, que visa a comunicação do raciocínio utilizado na resolução das tarefas propostas.

Por ser professora do Quadro de Zona Pedagógica, do 1º grupo, a exercer funções nesta Escola que V. Exª dirige e estar ligada à Escola e ao Departamento de Matemática tanto ao nível profissional como ao nível afectivo e, sendo este trabalho de natureza qualitativa – com um número reduzido de participantes – tenho todo o interesse em efectuar o estudo com a turma A do 9º ano. O professor Jacinto Salgueiro que lecciona a disciplina de Matemática na turma, já referida, mostrou disponibilidade para colaborar neste estudo, pelo que solicito a V. Exª autorização para o desenvolvimento deste trabalho na Escola. Comprometo-me a tomar as medidas necessárias, sempre que haja alguma interferência na rotina usual dos participantes, tais como: pedir autorização aos Encarregados de Educação dos alunos, da turma mencionada, em relação à videogravação durante a observação das aulas; em relação às entrevistas que serão dadas pelos alunos seleccionados à priori; e em manter o anonimato dos intervenientes sempre que esse interesse seja manifestado.

Sem outro assunto de momento, subscrevo-me com os melhores cumprimentos:

____

Cláudia Gabriela Estevéns Lança

ANEXO 2

Autorização para a participação dos alunos na investigação

ESCOLA SECUNDÁRIA DE XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

2006-01-16

Exmo. Sr. Encarregado de Educação do aluno

____

Venho por este meio solicitar que autorize o seu educando a participar num projecto de investigação que servirá de base à realização da dissertação de Mestrado em Educação Matemática, que frequento, na Universidade de Évora. No estudo em causa serão propostas tarefas de modelação matemática, com recurso a calculadoras gráficas e sensores (se possível recurso ao computador), para os alunos as resolverem em pequenos grupos, de 2 ou 3, na sala de aula. Estas tarefas serão articuladas e integradas ao currículo escolar e terão contextos, desafios, sempre ligados à realidade, por exemplo à vida do dia-a-dia que para os alunos seja significativa, terão como propósito o desenvolvimento da aprendizagem matemática dos alunos. A investigação realizar-se-á no segundo período lectivo, e corresponderá à área temática *Funções*, com conexões a outras áreas da matemática. Estas aulas serão leccionadas pelo professor da turma, Jacinto Salgueiro, decorrerão durante o horário normal das aulas de Matemática, e serão registadas em videogravação.

Como o objectivo deste trabalho visa uma descrição detalhada de um processo inserido num determinado contexto educativo, será imprescindível uma análise aprofundada que só será conseguida se os dados recolhidos forem em quantidade suficientes.

Desta forma é necessário:

- A realização de entrevistas a cada grupo de trabalho onde serão promovidas discussões que envolverão directamente a opinião dos alunos e onde terão a oportunidade de resolver actividades com o propósito de desenvolverem a sua competência matemática. Todas as entrevistas serão videogravadas e posteriormente transcritas e analisadas;
- No final de cada tarefa, será pedido aos alunos que elaborem um relatório, em grupo, que visa a comunicação do raciocínio utilizado na resolução do trabalho proposto. Pretendo que incluam as conclusões tiradas da resolução da actividade, os procedimentos utilizados e uma apreciação crítica onde serão identificadas as dificuldades sentidas na sua resolução. Estas produções escritas serão recolhidas e analisadas.

Agradecendo a colaboração de V. Ex.ª, solicito que assine a declaração que permite a participação do seu educando neste trabalho de investigação.

Sem outro assunto de momento, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

____

Cláudia Gabriela Estevéns Lança

Declaro que autorizo o meu educando____ a participar da investigação conduzida pela professora Cláudia Lança, no âmbito da elaboração da sua dissertação de Mestrado.

______/______/______

Assinatura:____

ANEXO 3

Tarefa “Pilhas em série”

Disciplina: **Matemática**

Ano: 9º

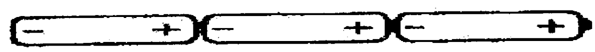
Ano Lectivo: 2005-2006

Unidade 5: Funções

Ficha formativa nº 2

Professor: Jacinto Salgueiro

"Pilhas em série"



Situação:

As pilhas servem para alimentar diferentes objectos como por exemplo calculadoras, despertadores, MP3, etc. Têm também dois pólos diferentes, o positivo e o negativo e podem ser colocadas em série ou em paralelo. A sua diferença de potencial é dada em volt (V), por exemplo a calculadora gráfica TI 84 PLUS utiliza pilhas de 1,5 V.
Se forem colocadas em série pilhas da mesma marca, o que acontece à diferença de potencial? E se usarmos outra marca diferente?

Material:

- 5 pilhas de 1,5 V (volt) e da mesma marca
- Um **CBL 2™** (*Calculator BasedLaboratory*)
- **Sensor** de diferença de potencial
- Uma Calculadora gráfica **(TI 84 PLUS)**
- ***Viewscreen***

Experiência:

- Ligar o **CBL 2™** à calculadora
- Ligar o sensor no CH1 do **CBL 2™**
- Executa a aplicação **DataMate** na calculadora

- Configurar o **CBL 2™** para efectuar uma medição no modo ***EVENTS WITH ENTRY***
- Pressionar **2 START**
- Colocar os terminais do sensor a uma das pilhas nos pólos respectivos: vermelho para o positivo (+) e preto para o negativo (-)
- Pressionar **ENTER** na calculadora e indicar o número de pilhas (começa em 1)
- Colocar outra pilha encostada à primeira e repetir o procedimento anterior
- Colocar sucessivamente as restantes pilhas para recolher os novos valores da diferença de potencial

Tarefa 1

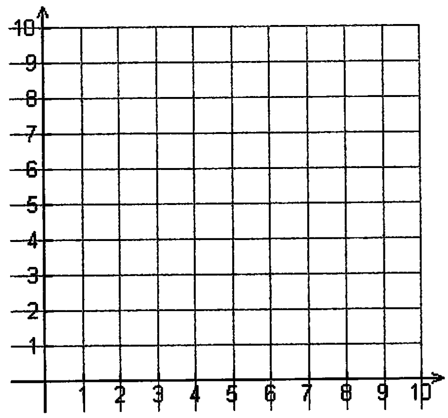
1.1 Nesta experiência que variáveis esperas encontrar? Em que unidades?

1.2 Existe alguma relação entre essas variáveis? Porquê?

1.3 Regista na tabela os dados recolhidos na experiência.

Nº DE PILHAS					
Diferença de potencial (V)					

1.4 Constrói o gráfico que representa a relação entre os valores da tabela.



1.5 Confronta o teu gráfico com o da calculadora. O que concluis?

Procedimento: Transfere para a tua calculadora os dados da experiência.

Procede do seguinte modo:

Liga as calculadoras através do cabo de conexão;

Calculadora a receber: ` `LINK RECEIVE e`

Calculadora a enviar: ` `LINK SEND List L1 L2 Transmit`

1.6 Como se poderá descrever o tipo de dependência entre as variáveis? (Qual é a que depende da outra e de que modo?)

1.7 A relação entre as variáveis pode exprimir-se matematicamente? Como?

1.8 Explica como fizeste (de onde partiste? o que te levou a pensar nessa relação? quais foram as tuas decisões?)

1.9 Aquilo que fizeste foi criar um modelo matemático da relação entre as variáveis, que te permite obter respostas para a quantidade de pilhas e a diferença de potencial respectivo.

a) Se colocares, por exemplo, 20 pilhas em série qual será a diferença de potencial?

b) Para teres 11,3 V de diferença de potencial quantas pilhas necessitas ter? Porquê?

c) Compara os teus resultados (do teu grupo de trabalho) com os resultados dos outros grupos.

d) Elabora um relatório sobre a experiência realizada.
O que aprendeste com esta experiência? O que achaste de interessante sobre a actividade que realizaste? Que dificuldades encontraste?

ANEXO 4

Tarefa “Sob Pressão?”

Disciplina: **Matemática**

Unidade 5: Funções

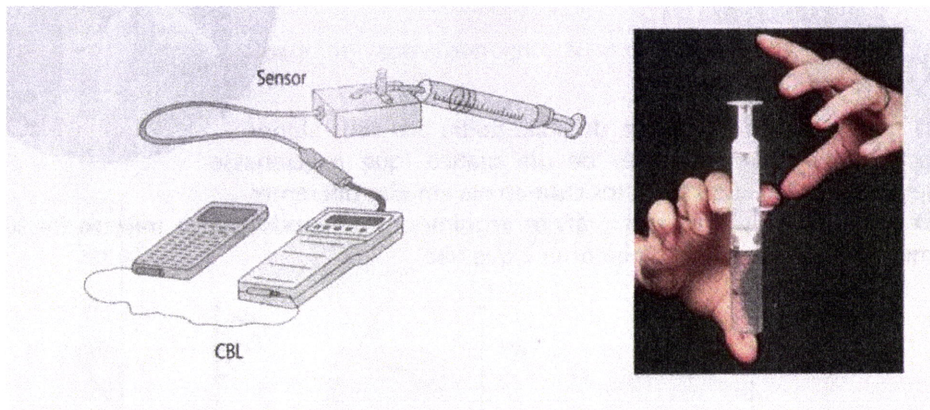
Ficha formativa nº 3

Ano: **9º**

Ano Lectivo: 2005-2006

Professor: Jacinto Salgueiro

"Sob Pressão"



Situação:

Quando um gás contido num recipiente é comprimido o volume e a pressão variam. Se exerceres pressão sobre o êmbolo de uma seringa tapando o orifício com o dedo de modo a não deixar sair o ar, aumentas a pressão (em atmosferas - *atm*). Então e o volume (em cm^3) contido na seringa dependerá dessa pressão exercida? O que acontece ao volume à medida que a pressão aumenta?

Material:

- Um **CBL 2™** (*Calculator BasedLaboratory*)
- Um **Sensor** de pressão
- Uma Calculadora gráfica **(TI 84 PLUS)**
- Uma seringa com peça adaptada para ligar ao sensor
- ***Viewscreen***

Experiência:

- Liga o **CBL 2™** à calculadora
- Liga o sensor de pressão no CH1 do **CBL 2™**
- Liga a seringa ao sensor

- Executa a aplicação **DataMate** na calculadora
- Pressiona **1 SETUP** e **ENTER**; selecciona sucessivamente as opções correspondentes ao sensor de pressão que está a ser utilizado
- Configura o **CBL 2™** para efectuar uma medição no modo ***EVENTS WITH ENTRY***
- Pressiona **2 START** para começares a recolher os dados um a um
- Utiliza a escala da seringa, para fazeres recolhas espaçadas de 1 cm^3, desde 18 cm^3 até 7 cm^3
- Deves introduzir o valor do volume de ar da seringa em cada recolha (começa em 18)
- Caso pretendas aceder ao ecrã principal do **DataMate** pressiona **ENTER**
- Se o resultado não for satisfatório repete a experiência

Tarefa 1

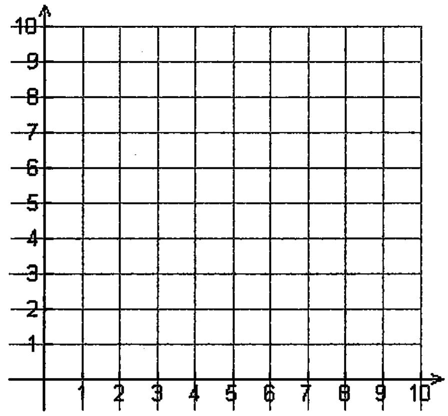
1.4 Nesta experiência, que variáveis estão presentes? E em que unidades se exprimem?

1.5 Existe alguma relação entre essas variáveis? Porquê?

1.6 Regista na tabela os dados recolhidos na experiência.

Volume v (em cm^3)												
Pressão p (em *atm*)												
$p \times v$												

1.4 Constrói o gráfico que representa a relação entre os valores da tabela.



1.5 Introduz os dados na calculadora e confronta o teu gráfico com o que a máquina te oferece. O que observas? São iguais?

<u>Procedimento</u>: Transfere para a tua calculadora os dados da experiência.

Procede do seguinte modo:

Liga as calculadoras através do cabo de conexão;
Calculadora a receber: ` `LINK RECEIVE e`
Calculadora a enviar: ` `LINK SEND List L1 L2 Transmit`

1.6 Como se poderá descrever a dependência entre as variáveis? (Qual é a que depende da outra e de que modo?)

1.7 Em L3 efectua a multiplicação entre as duas listas anteriores (L1 e L2). Passa para a tua tabela (3ª linha) os resultados dos produtos $p \times v$. Que conclusões podes tirar?

1.8 Os resultados obtidos no ponto anterior sugerem alguma relação entre as variáveis p e v?

1.9 A relação entre as variáveis pode exprimir-se matematicamente? Como?

1.10 Explica como fizeste (de onde partiste? o que te levou a pensar nessa relação? quais foram as tuas decisões?)

1.11 Aquilo que fizeste foi criar um modelo matemático da relação entre as variáveis, que te permite obter respostas para a influência da quantidade de volume na pressão exercida.

a) Se exerceres, por exemplo, uma pressão de 5,6 *atm* qual será o volume do ar correspondente? E se exerceres uma pressão de 224 *atm*?

b) Para teres um volume de gás de 2,5 cm^3 qual deverá ser o valor da pressão correspondente? E se tiveres um volume de gás de 520 cm^3?

c) Compara os teus resultados (do teu grupo de trabalho) com os resultados dos outros grupos. O que observas? Existe algum modelo melhor que o do vosso grupo?

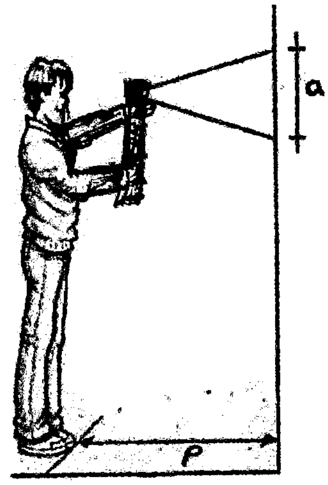
d) Elabora um relatório sobre a experiência realizada.
O que aprendeste com esta experiência? O que achaste de interessante sobre a actividade que realizaste? Que dificuldades encontraste?

ANEXO 5

Tarefa "Até onde vemos?"

Disciplina: **Matemática** Ano: 9º Ano Lectivo: 2005-2006	**Unidade 5: Funções** **Ficha formativa nº 4** Professor: Jacinto Salgueiro

"Até onde vemos?"



Situação:

Já deves ter reparado que, quanto mais te afastas de um determinado objecto, mais pequeno este te parece. Por exemplo, quando te encontras na Ponte 25 de Abril e olhas para baixo, os barcos, as casas, os carros, parecem-te pequenos brinquedos. Ou à medida que te afastas de um placar publicitário, com palavras escritas, as letras deste parecem-te cada vez mais pequenas.

Então, que relação existirá entre o tamanho de um objecto, que se consegue observar, e a distância a que nos encontramos dele?

Material:

- Uma régua
- Uma letra em tamanho de placar
- Fita-cola ou bostik
- Uma Calculadora gráfica **(TI 84 PLUS)**

Procedimento:

- Escolher o elemento do grupo que vai fazer as medições

- Fixar a letra na parede
- Colocar o "medidor" a dois pés da parede e, com o braço que segura a régua **esticado**, observar e medir a altura da letra.
- Registar a medida visualizada às diversas distâncias da parede referidas na tabela.

Tarefa 1

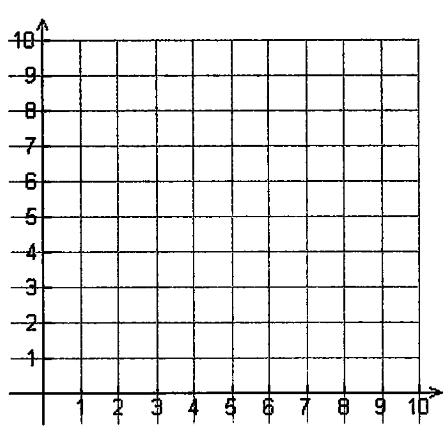
1.7 Nesta experiência, que variáveis estão presentes? E em que unidades se exprimem?

1.8 Existe alguma relação entre essas variáveis? Porquê?

1.9 Regista na tabela os dados recolhidos na experiência.

Distância à parede p (pés)	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altura da letra visualizada a (cm)									
$p \times a$									

1.4 Constrói o gráfico que representa a relação entre os valores da tabela.



1.5 Introduz os dados em listas da calculadora e confronta o teu gráfico com o que a máquina te oferece. O que observas? São iguais?

1.6 Como se poderá descrever a dependência entre as variáveis? (Qual é a que depende da outra e de que modo?)

1.7 Em L3 efectua a multiplicação entre as duas listas anteriores (L1 e L2). Passa para a tua tabela (3ª linha) os resultados dos produtos $p \times a$. Que conclusões podes tirar?

1.8 Os resultados obtidos no ponto anterior sugerem alguma relação entre as variáveis p e a?

1.9 A relação entre as variáveis pode exprimir-se matematicamente? Como?

1.10 Explica como fizeste (de onde partiste? o que te levou a pensar nessa relação? quais foram as tuas decisões?)

1.11 Aquilo que fizeste foi criar um modelo matemático da relação entre as variáveis, que te permite obter respostas para a influência da distância à parede na altura da letra observada.

a) Se estiveres, por exemplo, a 20 pés da parede qual será a altura da letra observada?

b) Para observares a letra com uma altura de 0,5 cm a que distância da parede te deves colocar?

c) Compara os teus resultados (do teu grupo de trabalho) com os resultados dos outros grupos. O que observas? Existe algum modelo melhor que o do vosso grupo?

d) Elabora um relatório sobre a experiência realizada.

O que aprendeste com esta experiência? O que achaste de interessante sobre a actividade que realizaste? Que dificuldades encontraste?

ANEXO 6

Tarefa “Descida de carrinhos pela rampa”

Disciplina: **Matemática**

Ano: 9º

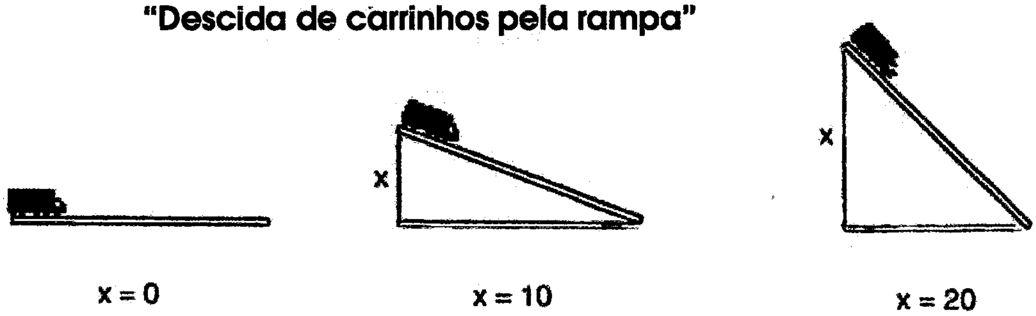
Ano Lectivo: 2005-2006

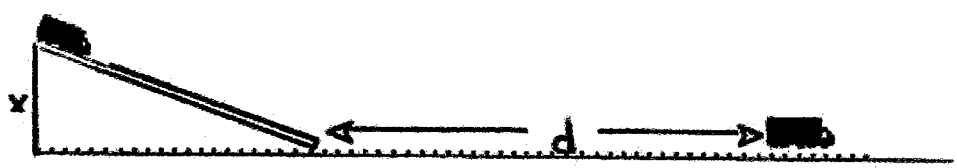
Unidade 5: Funções

Ficha formativa nº 5

Professor: Jacinto Salgueiro

"Descida de carrinhos pela rampa"





Situação:

Já deves ter observado o teu pai a guiar o seu carro. Talvez até já tenhas reparado que às vezes, quando possível, em descidas relativamente inclinadas, o teu pai, para poupar o combustível, coloca o carro em ponto morto e deixa-o ir embalado ao sabor do " balanço do plano inclinado". Também, quando eras pequeno – ou ainda hoje, com irmãos mais novos, sobrinhos, primos – chegaste a brincar com carrinhos, a fazer corridas, rally, descidas em rampas para ver qual dos carros chega mais longe...

Hoje vais recordar esses velhos tempos e ver: que relação existirá entre a inclinação do plano (rampa) e a distância percorrida pelo carro na parte horizontal?

Material:

- Uma fita métrica

- Um carrinho de brincar
- Uma rampa – tábua com 30 cm de comprimento
- Uma Calculadora gráfica **(TI 84 PLUS)**

Procedimento:

- Escolher o elemento do grupo que vai fazer as medições
- Coloca uma extremidade da rampa pousada no chão. A outra extremidade coloca a **x** cm do chão
- Larga o carrinho do ponto mais alto da rampa e mede a distância **d** a que ele vai ficar da extremidade da rampa
- Faz a experiência para vários valores de **x** e regista a distância observada na tabela. Começa nos **0 cm**, e vai continuando, por exemplo, de **3 em 3 cm**.

Tarefa 1

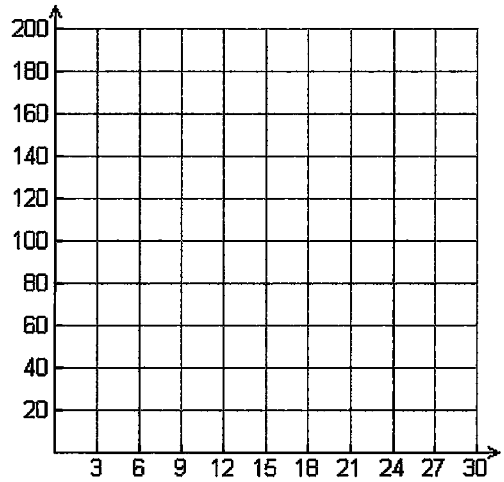
1.10 Regista na tabela os dados recolhidos na experiência.

Altura **x** (cm)	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Distância **d** (cm)											

1.11 Nesta experiência, que variáveis estão presentes? E em que unidades se exprimem?

1.12 Existe alguma relação entre essas variáveis? Porquê?

1.4 Constrói o gráfico que representa a relação entre os valores da tabela.



1.5 Introduz os dados em listas da calculadora e confronta o teu gráfico com o que a máquina te oferece. O que observas? São iguais?

1.6 Como se poderá descrever a dependência entre as variáveis? (Qual é a que depende da outra e de que modo?)

1.7 Efectua operações matemáticas com os valores da variável **x** de modo a obteres valores próximos dos da variável **d**.

1.8 Os resultados obtidos no ponto anterior sugerem alguma relação entre as variáveis **x** e **d**?

1.9 A relação entre as variáveis pode exprimir-se matematicamente? Como?

1.10 Explica como fizeste (de onde partiste? o que te levou a pensar nessa relação? quais foram as tuas decisões?)

1.11 Aquilo que fizeste foi criar um modelo matemático da relação entre as variáveis, que te permite obter respostas para a influência da inclinação da rampa na distância percorrida pelo carrinho, na horizontal, ou seja, **d em função de x**.

a) A partir do teu modelo, faz previsões para as distâncias a que pára o carrinho quando é lançado de alturas diferentes das experimentadas. Por exemplo, se a rampa estiver a uma altura de 17 cm do chão qual será a distância, na horizontal, percorrida pelo carrinho?

a.1) Confirma experimentalmente se o valor dado pelo teu modelo está próximo do valor real. Que conclusões podes tirar?

b) Para observares o carrinho a percorrer, na horizontal, uma distância de aproximadamente 33 cm a que altura do chão deves colocar uma das extremidades da rampa?

c) Compara os teus resultados (do teu grupo de trabalho) com os resultados dos outros grupos. O que observas? Existe algum modelo melhor que o do vosso grupo?

d) Elabora um relatório sobre a experiência realizada.

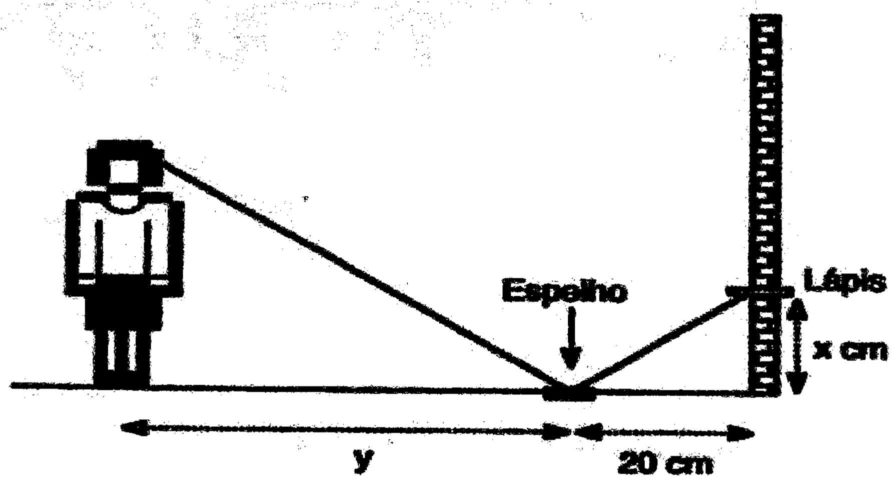
O que aprendeste com esta experiência? O que achaste de interessante sobre a actividade que realizaste? Que dificuldades encontraste?

ANEXO 7

Tarefa "Espelhos e reflexões"

Disciplina: **Matemática** Ano: 9º Ano Lectivo: 2005-2006	**Unidade 5: Funções** **Ficha formativa nº 6** Professor: Jacinto Salgueiro

"Espelhos e reflexões"



Situação:

Sempre que compras uns sapatos e os vais experimentar, para verificares se te ficam bem, aproximas-te a uma determinada distância de um espelho colocado ao nível dos teus pés. Ou quando o teu pai vai a conduzir e se aproxima de um cruzamento, no sítio onde tem de parar, é normal estar um espelho estrategicamente colocado para que ele tenha no reflexo do espelho a visão da rua toda.

Hoje vais colocar um objecto, por exemplo um lápis, numa parede a uma certa altura (distância) do solo, para observares a uma certa distância o reflexo deste num espelho, estrategicamente colocado no chão. O que acontecerá à distância a que te deves colocar do espelho à medida que varias a altura (distância) a que colocas o objecto do solo?

Material:

- Uma fita métrica
- Um espelho
- Um lápis
- Uma caneta de acetato
- Um esquadro
- Uma Calculadora gráfica **(TI 84 PLUS)**

Procedimento:

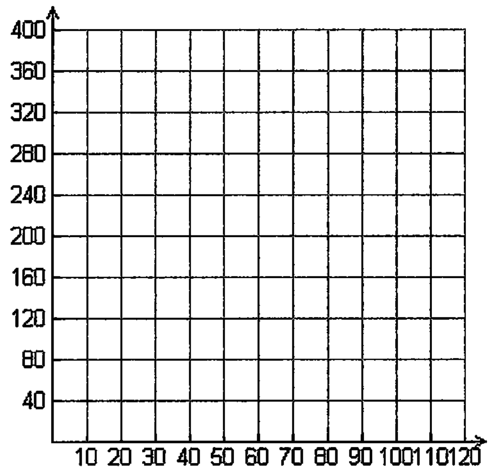
- Com a caneta de acetato, desenha na zona central do espelho um quadrado com cerca de 3cm de lado.
- Coloca o espelho no solo de modo a que o centro do quadrado fique a 20 cm da parede.
- Um dos elementos do grupo coloca o lápis na parede, a 10 cm do solo.
- Outro elemento do grupo, o observador, caminha na direcção da parede até ver a ponta do lápis no centro do quadrado que foi desenhado no espelho.
- Os restantes elementos do grupo vão medindo as distâncias do centro do quadrado, desenhado no espelho, até ao observador, registando os resultados alcançados na tabela para vários valores de **x**.

Tarefa 1

1.13 Regista na tabela os dados recolhidos na experiência.

Distância do lápis ao solo **x** (cm)	10	20	40	60	80	100	120
Distância do observador ao centro do quadrado, desenhado no espelho **y** (cm)							

1.14 Constrói o gráfico que representa a relação entre os valores da tabela.



1.15 Introduz os dados em listas da calculadora e confronta o teu gráfico com o que a máquina te oferece. O que observas? São iguais?

1.4 Nesta experiência, que variáveis estão presentes? E em que unidades se exprimem?

1.5 Existe alguma relação entre essas variáveis? Porquê?

1.6 Como se poderá descrever a dependência entre as variáveis? (Qual é a que depende da outra e de que modo?)

1.7 Cria um modelo matemático da relação entre as variáveis, que te permite obter respostas para a influência da distância do lápis ao solo na distância do observador ao centro do quadrado, desenhado no espelho, ou seja, **y em função de x**.

1.8 Explica como fizeste (de onde partiste? o que te levou a pensar nessa relação? quais foram as tuas decisões?)

1.9. A partir do teu modelo, faz previsões para as distâncias do observador, do reflexo do lápis, ao centro do quadrado desenhado no espelho, quando o lápis é colado na parede a certas distâncias (alturas) do solo.

b) Por exemplo, se o lápis for colado na parede a 70 cm do solo qual será a distância a que o observador deve estar do centro do quadrado?

a.1) Confirma experimentalmente se o valor dado pelo teu modelo está próximo do valor real. Que conclusões podes tirar?

b) Para observares o reflexo do lápis no centro do quadrado, desenhado no espelho, a uma distância de aproximadamente 26 cm a que distância (altura) do solo deves colar o lápis na parede?

c) Compara os teus resultados (do teu grupo de trabalho) com os resultados dos outros grupos. O que observas? Existe algum modelo melhor que o do vosso grupo?

d) Elabora um relatório sobre a experiência realizada.

O que aprendeste com esta experiência? O que achaste de interessante sobre a actividade que realizaste? Que dificuldades encontraste?

ANEXO 8

Tarefa "Uma luz à distância"

Disciplina: **Matemática** Ano: **9º** Ano Lectivo: 2005-2006	**Unidade 5: Funções** **Ficha formativa nº 7** Professor: Jacinto Salgueiro

"Uma luz à distância"

Situação:

Provavelmente já reparaste que a intensidade da luz de uma fonte luminosa (faróis de um carro, lanterna, lâmpada, etc.), diminui à medida que te afastas dela. Por exemplo, à noite na estrada, quando viajas no automóvel dos teus pais, já deves ter observado que após ultrapassares um outro carro, que ia a uma velocidade média menor, à medida que te afastas dele os seus faróis diminuem de intensidade.

Hoje vais realizar uma experiência que te permite estudar este fenómeno. O que acontecerá à intensidade da luz de uma fonte luminosa (lâmpada de um candeeiro) que incide numa superfície ou objecto (por exemplo os sensores) à medida que varias a distância dessa lâmpada aos sensores?

Material:

- Um **CBL 2™** (*Calculator BasedLaboratory*)
- Um **CBR™** (*Calculator Based Ranger*)
- Um **Sensor TI *light* (de luz)**
- Um *Viewscreen*
- Uma fonte luminosa (lâmpada de um candeeiro)
- Uma Calculadora gráfica (**TI 84 PLUS**)

Procedimento (numa sala relativamente escurecida):

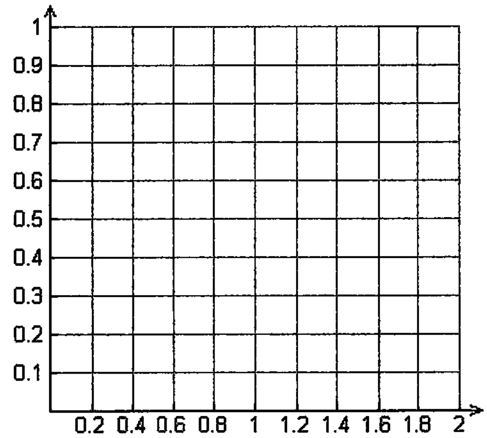
- Liga o **CBL 2™** à calculadora.
- Liga o sensor de **TI *light*** num canal CH e o **CBR™** no canal DIG e coloca-os em posição adequada à realização da recolha.
- Executa a aplicação **DataMate** na calculadora.
- Acede ao ecrã de configuração através de **SETUP**.
- Configura o **CBL 2™** de modo a que a recolha de dados seja feita no modo **EVENTS WITH ENTRY** e pressiona **OK** para voltar ao ecrã de configuração e em seguida novamente **OK** para voltar ao ecrã principal.
- Coloca a fonte luminosa a **0,5 m** dos sensores e realiza a primeira recolha pressionando **START**, e nas seguintes pressiona sempre **ENTER**. A partir deste momento podes realizar uma série de recolhas a diferentes distâncias da fonte luminosa.
- Para terminares as recolhas faz **STO**.
- Sai do DATAMATE, fazendo **ENTER** e **QUIT**.

Tarefa 1

1.16 Regista na tabela os dados recolhidos na experiência.

Distância da fonte luminosa aos sensores **d** (m)	0,5						
Intensidade da luz **i** ($w.sr^{-1}$)							

1.17 Constrói o gráfico que representa a relação entre os valores da tabela.



1.3 Introduz os dados na calculadora e confronta o teu gráfico com o que a máquina te oferece. O que observas? São iguais?

Procedimento: Transfere para a tua calculadora os dados da experiência.

Procede do seguinte modo:

Liga as calculadoras através do cabo de conexão;

Calculadora a receber: ` `LINK RECEIVE e`

Calculadora a enviar: ` `LINK SEND List L1 L2 Transmit`

1.4 Nesta experiência, que variáveis estão presentes? E em que unidades se exprimem?

1.5 Existe alguma relação entre essas variáveis? Porquê?

1.6 Como se poderá descrever a dependência entre as variáveis? (Qual é a que depende da outra e de que modo?)

1.7 Cria um modelo matemático da relação entre as variáveis, que te permite obter respostas para a influência da distância, da fonte luminosa aos sensores, na intensidade da luz, ou seja, **i em função de d**.

1.8 Explica como fizeste (de onde partiste? o que te levou a pensar nessa relação? quais foram as tuas decisões?)

1.9 A partir do teu modelo, faz previsões para os valores da intensidade da luz quando aumentas as distâncias da fonte luminosa aos sensores.

a) Por exemplo, se a fonte luminosa se encontrar a 0,74 m dos sensores qual será a intensidade da luz?

a.1) Confirma experimentalmente se o valor dado pelo teu modelo está próximo do valor real. Que conclusões podes tirar?

b) Para teres uma intensidade de luz de 0,1 $w.sr^{-1}$ a que distância dos sensores deves colocar a fonte luminosa?

c) Compara os teus resultados (do teu grupo de trabalho) com os resultados dos outros grupos. O que observas? Existe algum modelo melhor que o do vosso grupo?

d) Elabora um relatório sobre a experiência realizada.

O que aprendeste com esta experiência? O que achaste de interessante sobre a actividade que realizaste? Que dificuldades encontraste?

ANEXO 9

Guião da entrevista aos alunos

Guião da entrevista aos alunos

1. Perspectivas e relação com as tarefas de modelação

- Este ano realizaste tarefas de modelação nas aulas de Matemática, na unidade de Proporcionalidade Inversa. És capaz de me dar exemplos dessas tarefas trabalhadas?
- Já alguma vez antes tinhas realizado tarefas de modelação noutra disciplina ou noutros anos? Se sim, eram parecidas a estas ou diferentes?
- De todas as tarefas de modelação realizadas, de qual gostaste mais? Porquê?
- Achas que as tarefas de modelação são parecidas ou diferentes dos exercícios normais das aulas de Matemática? Porquê?
- As tarefas de modelação são uma espécie de aplicação das matérias que já se aprenderam antes. Achas que esta frase é verdadeira ou falsa? Porquê?
- Nas tarefas de modelação partimos sempre da análise de uma situação. Achas que as situações trabalhadas nas aulas foram reais mesmo?
- Nas tarefas de modelação partimos sempre da análise de uma situação. Achas que o facto de termos encontrado um modelo matemático para relacionar as variáveis das situações te fez compreender melhor a situação e aprender coisas novas sobre a realidade ou nem por isso?
- Como explicarias a um colega teu o que é um modelo matemático? Para que serve?
- Nas tarefas de modelação partimos sempre da análise de uma situação. Achas que o facto de termos encontrado um modelo matemático para relacionar as variáveis das situações te fez compreender melhor a matemática desta matéria ou nem por isso?
- O que é para ti a relação de proporcionalidade inversa?

- Como explicarias a um colega teu de outra turma as principais diferenças entre as aulas de Matemática com tarefas de modelação e as outras?
- Na realização de tarefas de modelação, existem fases diferentes... És capaz de as identificar?
- Nas tarefas de modelação, o que te parece mais interessante fazer? Perceber a situação? Recolher os dados? Descobrir o modelo? Tirar conclusões?
- Nas tarefas de modelação, o que te é mais difícil de fazer?
- Na realização das tarefas de modelação, usaste a calculadora gráfica, ou o CBR™, o CBL™ e seus sensores. És capaz de explicar para que serve cada um destes instrumentos?
- Qual foi a principal utilidade que a calculadora teve na realização das tarefas de modelação?
- Em algumas tarefas, usaste dados reais e noutras usaste dados fictícios. Quais preferes estudar, os dados reais ou os fictícios? Porquê?
- Compreendeste com facilidade o contexto de cada uma das situações propostas nas tarefas de modelação?
- Efectuaste tabelas e gráficos para organizares os dados recolhidos nas várias experiências. Para identificares e compreenderes relações entre as variáveis, no que é que te ajudou a tabela? E o gráfico? Para a tua aprendizagem é mais importante a tabela, o gráfico ou ambos?
- Sentiste dificuldade ou facilidade em veres e compreenderes as relações que existiam entre as variáveis, nomeadamente como é que uma variável dependia da outra?
- De uma maneira geral, no que é te baseaste para conseguires construir modelos adequados para cada uma das situações experimentais? Sentiste

muitas dificuldades em construíres um modelo adequado para cada situação? Quais?

- Achas que é importante saberes como se constroem os modelos matemáticos?
- Para que é que serviram os modelos matemáticos que construíste?
- Já alguma vez tinhas feito relatórios e discussões no final das actividades que desenvolves nas aulas? Achas importante fazê-los? Porquê? Achas que te ajudam a melhorar a tua aprendizagem? Se sim, como?
- Consideras que estas tarefas te proporcionaram vantagens ou desvantagens à tua aprendizagem matemática, no que diz respeito à unidade de proporcionalidade inversa estudada? Quais?
- Será que a resolução de situações problemáticas reais contribuiu para que tivesses um melhor desempenho em Matemática, na unidade de Proporcionalidade Inversa? Justifica.
- A resolução de situações problemáticas reais em Matemática poderá ser relacionada com outras disciplinas? Quais?
- Observa as tarefas de modelação que realizaste, compara-as com outras tarefas de outras unidades? Encontras diferenças? Quais? Qual ou quais os tipos de tarefas que te ajudam a melhorar a tua aprendizagem matemática?
- Compara estas tarefas de modelação com as actividades da ficha nº 8. Qual ou quais te cativam mais? Porquê? Que tipo de enunciados, situações, contexto, compreendeste com maior facilidade, os enunciados dos problemas da ficha ou os das tarefas de modelação? Que contributos pensas que cada uma delas dá para a tua aprendizagem matemática?
- Tiveste facilidade em resolver as actividades da ficha nº 8? Se sim, que factores contribuíram?
- Achas que este tipo de tarefas de modelação te ajudou a desenvolver algumas atitudes, conhecimentos e capacidades à disciplina de

Matemática, mais precisamente no âmbito da unidade Proporcionalidade Inversa? Se sim, dá exemplos.

- Achas importante estudar as relações entre a Matemática e a realidade? Porquê?

2. Caracterização do percurso escolar do aluno a Matemática

- À disciplina de Matemática que nível obtiveste desde o 7º ano?
- E no final do 1º período deste teu 9º ano lectivo, e no final do 2º período?
- Achas que as tuas notas correspondem ao teu esforço e ao que sabes?
- Gostas de Matemática? Achas importante estudar Matemática? Justifica.
- Quais são as tuas facilidades e dificuldades na disciplina de Matemática?
- Como costumas estudar para a disciplina de Matemática? Que recursos utilizas?
- Porque achas que há alunos bons a Matemática e outros que têm mais dificuldades?
- Se tivesses de explicar a alguém o que é a Matemática, o que lhe dirias?

ANEXO 10

Guião da entrevista ao professor

Guião da entrevista ao professor

1. caracterização do professor

- Qual é a tua idade?
- Que formação académica tens?
- Quantos anos de serviço tens?
- Pertences a alguma associação profissional?
- Que experiências significativas tens tido como profissional?
- Qual o teu percurso relativamente à utilização das tecnologias da informação e comunicação no ensino da Matemática?

2. Relação com a modelação

- Quando começaste a fazer modelação com os alunos? Caracteriza o tipo de coisas que tens feito até este ano lectivo.
- O que te motivou a começar a fazer modelação com os alunos?
- Porque tens feito modelação com os alunos? Por gosto pessoal ou por contribuir para as finalidades do ensino da matemática?
- Como preparavas essas aulas de modelação, menciona ingredientes principais?
- Utilizavas as tarefas de modelação para iniciar uma matéria ou para aplicação da matéria já leccionada?
- Usaste sempre tecnologia nessas aulas? Que tipo de tecnologia?
- Que dificuldades encontraste para fazer modelação nessas aulas?
- Indica vantagens da modelação nas aulas.
- Essas tarefas de modelação que realizavas nas aulas com os teus alunos eram como as deste ano lectivo ou diferentes? Se diferentes, quais as principais diferenças?

- Nas tarefas de modelação que realizamos no presente ano lectivo, partimos sempre da análise de uma situação problemática real contendo contextos reais e familiares aos alunos. Achas que as situações trabalhadas nas aulas foram de facto reais para os alunos? Achas que o contexto de cada uma das situações propostas ajudou os alunos na resolução das tarefas de modelação?
- Achas que os alunos tiveram dificuldade ou facilidade em identificarem e compreenderem as relações funcionais existentes entre as variáveis, nomeadamente como é que uma variável dependia da outra? Porquê?
- Achas que foi difícil ou fácil para os alunos construírem modelos adequados para cada uma das situações experimentais? Porquê? O que é que achas que os ajudou na construção dos modelos? E na compreensão e uso desses modelos?
- Consideras que foi importante os alunos reorganizarem progressivamente a sua própria actividade em e acerca de uma situação, a ser estruturada em termos de relações matemáticas, de modo a eles saberem como se constroem/evoluem os modelos matemáticos? Justifica.
- Há autores que defendem que o processo de modelação não se efectua através de uma tradução/redução do problema em termos matemáticos, mas sim através da reorganização progressiva de situações. Em que o foco é a construção do conhecimento matemático e não somente as ligações com a realidade. Concordas com estas ideias? Justifica.
- Achas que os alunos conseguiram descobrir por eles próprios alguns conhecimentos matemáticos? Quais? Como?
- Consideras que estas tarefas de modelação ajudaram a que os alunos resolvessem com maior facilidade as actividades da ficha nº 8? Achas que eles tiveram mais facilidade em compreenderem o contexto das situações experimentais do que os enunciados dos problemas da ficha nº 8?

- Consideras que a resolução destas situações problemáticas reais contribuiu para que os alunos tivessem um melhor desempenho em Matemática? Justifica.
- Durante a experiência que realizamos com as tarefas de modelação, houve alguma situação em que os alunos te surpreendessem?
- Que potencialidades as tarefas de modelação deste ano lectivo proporcionaram na aprendizagem matemática dos alunos, em particular no que diz respeito à unidade de proporcionalidade inversa estudada? Porquê?
- Em termos de competência matemática, que capacidades, conhecimentos e atitudes estas tarefas de modelação desenvolveram nos alunos?
- Estas tarefas de modelação mudaram de alguma forma a concepção que tinhas de modelação?

3. Relação com a experiência

- O que te levou a participar nesta experiência?
- A experiência acrescentou algo ao que já fazias antes? Porquê?
- O que significou para ti o facto de participares na elaboração e reflexão deste tipo de tarefas de modelação?
- Achas que valeu a pena esta experiência? Porquê? Faz um pequeno comentário.
- Esta experiência com as tarefas de modelação alterou a tua opinião sobre a Matemática? E sobre alguma coisa relacionada com o ensino/aprendizagem da Matemática? Qual? Porquê?
- E sobre a aprendizagem matemática dos alunos?
- O que significou para ti o facto de teres uma pessoa a assistir às tuas aulas?
- Em que moldes continuarias este tipo de trabalho colaborativo? O que modificarias?