UNIVERSIDADE DE ÉVORA

A EXPLORAÇÃO DE PADRÕES NUM CONTEXTO DE TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO COM ALUNOS DO 8ºANO DE ESCOLARIDADE

Elsa Maria de Figueiredo Isabelinho Domingues Barbosa

Orientador: Prof. Doutor António Manuel Borralho

Mestrado em Educação Matemática
2007

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

A EXPLORAÇÃO DE PADRÕES NUM CONTEXTO DE TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO COM ALUNOS DO 8ºANO DE ESCOLARIDADE

Dissertação Apresentada para Obtenção do Grau de Mestre em Educação e na Especialidade de Educação Matemática

Elsa Maria de Figueiredo Isabelinho Domingues Barbosa

Orientador: Prof. Doutor António Manuel Borralho

2007

Resumo

Aprender Matemática, tem hoje um significado diferente. A Matemática deve preparar os alunos para um estudo contínuo e para a resolução de uma variedade de problemas na escola, em casa e em situações profissionais. A passagem da Aritmética para a Álgebra é uma das grandes dificuldades dos alunos e os professores devem diversificar estratégias permitindo, aos seus alunos, desenvolver o pensamento algébrico. Pretende-se compreender o significado da utilização, na sala de aula, de padrões num contexto de tarefas de investigação de forma a melhorar o desenvolvimento do pensamento algébrico. Foram criadas quatro questões de investigação que abordam temas como: (1) a imagem da Matemática; (2) conexões matemáticas; (3) o entendimento da Álgebra; e (4) a comunicação matemática.

O estudo foi realizado numa turma de oitavo ano de escolaridade. Optou-se por uma abordagem de investigação qualitativa e interpretativa. Trata-se de um estudo de dois casos qualitativo e analítico. O investigador assume os papéis de investigador-instrumento e observador-participante. Foram recolhidos dados através de questionários, entrevistas, observação directa de aulas e relatórios escritos.

Os resultados mostraram que a exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação pode contribuir para o entendimento da Álgebra, permite o estabelecimento de conexões matemáticas, desenvolve a comunicação matemática através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação e melhora a imagem que os alunos têm da Matemática.

Palavras-Chave: Ensino de matemática, tarefas de investigação, padrões, raciocínio matemático, Álgebra, pensamento algébrico

Abstract

An interpretive approach of patterns in a context of investigation tasks with 8th grade students

Nowadays, learning Mathematics has a different meaning. Mathematics should prepare students for a continuous study and should provide solutions for a variety of problems at school, home or even at a professional level. The transition from Arithmetic to Algebra is one of the major obstacles for students and teachers must diversify strategies so that students may come to terms with and improve their algebraic thought.

The definable goal of this work lead to the understanding of the use of patterns in class, in a context of investigation tasks, in order to develop algebraic thought. One of the attempts of dealing with this set of problems has been done within four research prompts: 1) the image of Mathematics; 2) mathematical connections; 3) the understanding of Algebra; 4) mathematical communication.

The present study was done taking as a starting point a 8^{th} grade class, using a qualitative and interpretive methodology, based on case studies. The researcher is both instrument and participant-observer. Questionnaires, interviews, direct class observation and written reports provided the necessary data.

The final results show that the use of patterns as a base and stimulus, in a context of investigation tasks, may contribute to the ultimate understanding of Algebra, lays mathematical connections, improves mathematical communication by means of developing their ability to use non-ambiguous and adequate language, written or spoken, and sets up a revised image of Mathematics for students.

Key Words: mathematics education, investigations tasks, patterns, mathematic reasoning, Algebra, algebraic thought

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Doutor António Borralho, pela amizade, disponibilidade e incentivo que sempre demonstrou e pela natureza e qualidade dos sempre oportunos comentários e sugestões.

Aos alunos que participaram neste estudo, pelo empenho e disponibilidade que sempre revelaram.

À Sofia Delgadinho, pela amizade e inteira disponibilidade, com quem partilhei ideias e desafios...

À Susana Silvério, pela sua "pequena" mas não menos importante colaboração e pelas muitas conversas sempre encorajadoras.

Aos meus amigos, pelo interesse que manifestaram, pelo encorajamento dado e pelo carinho e paciência demonstrado...

À Daniela, pela "doçura" com que sempre soube esperar...

À minha família, muito especialmente aos meus pais, por todo o apoio que sempre me deram, em especial durante a realização deste trabalho...

Índice geral

Índice de figuras

Índice de anexos

Capítulo 1

Introdução

A velocidade com que a sociedade actual "avança", obriga-nos a uma constante actualização. As exigências de hoje são muito diferentes daquelas a que estávamos habituados, em particular as exigências ao nível do saber matemático.

Ser professor e, em especial, ser professor de Matemática, foi e será sempre um enorme desafio. São muitos os alunos, incluindo alguns com grandes capacidades, que não gostam da disciplina e a Matemática está associada ao insucesso. Certamente que não se pode dissociar as formas de comunicar e expressar a matemática das dificuldades sentidas pelos alunos.

O Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001) apresenta a *Álgebra e Funções* como um dos quatro grandes domínios temáticos. No entanto, apesar da importância que a Álgebra assume, está associada essencialmente à manipulação simbólica e à resolução de equações.

Pode-se afirmar que a maioria dos professores sente uma grande dificuldade em fazer a passagem da aritmética para a Álgebra. A introdução das variáveis é sempre confusa e na maioria dos casos descontextualizada (Vale, Palhares, Cabrita e Borralho, 2006)

Sendo o ensino-aprendizagem da Álgebra essencial à comunicação matemática, a Álgebra deve ser introduzida como uma parte útil, apetecível e atractiva que facilite os procedimentos empíricos indutivos frente ao formalismo dedutivo (Socas, Camacho, Palarea e Hernandez, 1989).

Problema e questões do estudo

Para que os alunos possam compreender os aspectos essenciais da Álgebra, é importante que durante todo o seu percurso escolar tenham contacto com experiências algébricas informais que envolvam a análise de padrões e relações numéricas e a sua representação e generalização por meio de diferentes processos. *De facto, o desafio* *lançado pela generalização de um padrão numérico e a compreensão do que traduz essa generalização constituem aspectos que muitas vezes estão envolvidos nas investigações numéricas e que apoiam o desenvolvimento do raciocínio algébrico* (Ponte, Brocado e Oliveira, 2003, p. 69).

Pressupõe-se que a procura de padrões e regularidades permite formular generalizações em situações diversas, particularmente em contextos numéricos e geométricos, o que contribuirá para o desenvolvimento do raciocínio algébrico do aluno. Será que a utilização, na sala de aula, de padrões num contexto de tarefas de investigação permite um melhor desenvolvimento do pensamento algébrico por parte dos alunos?

O trabalho desenvolvido procurará algumas respostas a esta questão. De seguida apresenta-se o problema nuclear e algumas questões orientadoras do trabalho:

Problema: Compreensão do significado da utilização, na sala de aula, dos padrões num contexto de tarefas de investigação de forma a melhorar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Questões específicas:

1. Os padrões, num contexto de tarefas de investigação, podem contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da Matemática?

2. Os padrões, num contexto de tarefas de investigação, permitem o estabelecimento de conexões matemáticas?

3. Como é que a análise de padrões e regularidades, envolvendo números e operações elementares, contribui para o entendimento da Álgebra?

4. De que modo é que os padrões, num contexto de tarefas de investigação permitem promover a aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação?

Enquadramento do estudo

A *Álgebra e Funções* são um dos quatro grandes domínios temáticos da Matemática do ensino básico. A Álgebra é um tema fundamental do currículo da Matemática escolar, na maioria dos países. Quem não conseguir entender razoavelmente a sua linguagem abstracta e não tiver a capacidade de a usar na resolução de diferentes problemas e situações fica fortemente restringido na sua competência matemática (Ponte, 2005). *A Visão mais habitual da Álgebra é que se trata simplesmente de regras de transformação de expressões (monómios, polinómios, fracções algébricas, expressões com radicais) e processos de resolução de equações* (Ponte, 2006, p. 10).

Os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) sugerem que a Álgebra atravesse todo o currículo desde o jardim de infância até ao 12° ano de escolaridade. Tal facto só se torna viável se forem propiciadas aos estudantes, desde o início dos seus percursos escolares, experiências algébricas intuitivas e motivadoras. O ensino tradicional tem de ser deixado para trás pois este, à medida que a escolaridade avança, faz-nos perder o modo natural de pensar em prol de um modo mais formal. Mais do que incitar os alunos na Álgebra simbólica formal, deve-se fomentar o pensamento algébrico. Os alunos devem ser impelidos a dar atenção *não só aos objectos mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstracto* (Ponte, 2006, p. 12).

São muitos os estudantes que aparentam ter dificuldades em trabalhar com letras em vez de números. A passagem dos números para um maior grau de abstracção parece ser uma das etapas mais complicadas da educação matemática. Assim é essencial a escolha de estratégias adequadas que permitam aos alunos desenvolver a compreensão da linguagem algébrica. Como afirma Nunes e Alves (2005), é importante os alunos terem experiências com variáveis que representam números desconhecidos mas específicos, ou seja, variáveis que realmente "variam". Para estas autoras os problemas de raciocínio algébrico podem ter múltiplas soluções, o que permite aos alunos explorar diferentes caminhos de resolução. É aqui que os professores têm um papel fundamental, é a eles que lhes cabe incentivar os alunos a explorar diferentes resoluções, ou seja ajudando-os a desenvolver o pensamento algébrico. É fundamental acreditar que a Álgebra para todos é um objectivo possível de alcançar.

Orton e Orton (1999) afirmam que os padrões são um dos caminhos possíveis quando pensamos em introduzir a Álgebra e, consequentemente, desenvolver o pensamento algébrico. Segundo Bishop (1997), de acordo com Phillips (1995), quando um aluno relaciona quantidades com padrões está a adquirir conceitos matemáticos muito importantes, como por exemplo, o conceito de função. Está a aprender a investigar e a comunicar algebricamente.

As actividades algébricas podem ser, como afirmam Brocardo, Delgado, Mendes, Rocha e Serrazina (2006) e Soares, Blanton e Kaput (2005), geradas a partir de actividades numéricas. A forma como o problema é apresentado pode transformar um simples problema aritmético num algébrico. Facilmente se transformam problemas com respostas numéricas simples em novas situações onde os alunos têm a possibilidade de conjecturar, construir padrões, generalizar e justificar factos e relações matemáticas, conduzindo-os a utilizar capacidades de pensamento de ordem superior. A resolução de tarefas de investigação que envolvam padrões, por um lado salientam a exploração, investigação, conjectura e prova e, por outro, não menos importante, são interessantes e desafiadoras para os alunos (Vale e Pimentel, 2005).

Poder-se-á afirmar que a abordagem dos padrões permite promover as competências matemáticas dos estudantes na medida em que se interliga com actividades de exploração e de investigação. No entanto, os padrões são ainda hoje muito pouco explorados nas nossas salas de aula apesar de, tal como é defendido pelo NCTM (2000), os programas educativos de todos os níveis de ensino terem a obrigação de conseguir que todos os estudantes entendam padrões, relações e funções.

Capítulo 2

Padrões

Padrões no currículo

Basta uma breve análise dos currículos para nos apercebermos que o estudo dos padrões atravessa todos os programas de Matemática escolar desde o pré-escolar, passando pelo ensino básico, até ao ensino secundário.

Ao nível do ensino básico, os padrões são um tema transversal que ajuda a criar uma base para a aprendizagem da Álgebra (Vale, Palhares, Cabrita e Borralho, 2006). Os padrões, tal como Orton e Orton (1999) afirmam:

- Contribuem para a construção de uma imagem mais positiva da Matemática;
- Atraem e motivam os alunos, porque apelam à sua criatividade;
- Permitem o estabelecimento de conexões matemáticas;
- Ajudam a desenvolver a capacidade de classificar e ordenar informação;
- Permitem a compreensão da ligação entre a Matemática e o mundo em que se vive;
- Promovem o desenvolvimento das capacidades e competências dos alunos.

Apesar da importância que assumem, os padrões são ainda hoje muito pouco explorados nas nossas salas de aula apesar de, tal como é defendido pelo NCTM (2000), os programas educativos de todos os níveis de ensino têm a obrigação de conseguir que todos os estudantes entendam padrões, relações e funções. Também devem ter contacto com experiências que utilizem padrões pois constituem as bases para a compreensão do conceito de função e permitem adquirir os "alicerces" para posteriormente se trabalhar com símbolos e expressões algébricas.

Em Portugal, no Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001), podemos constatar que as referências mais recentes, em particular as competências essenciais, já defendem um ensino da Álgebra desde o 1.º ciclo do ensino básico.

O tema Números e Cálculo é um dos domínios temáticos da Matemática do ensino básico, no qual uma das competências a desenvolver que atravessa os três níveis de ensino (1º, 2º e 3º), é *a predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em* *situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente em problemas envolvendo divisores e múltiplos de números ou implicando processos organizados de contagem* (p. 60). A Geometria é outro dos grandes domínios temáticos e, neste caso, a competência transversal a desenvolver é *a predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas* (p. 62). Por fim, no domínio temático a Álgebra e Funções, a competência matemática que todos devem desenvolver é *a predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos* (p. 66). Ainda dentro deste domínio, mas apenas ao nível específico do 3° ciclo do ensino básico, os alunos devem reconhecer o *significado de fórmulas no contexto de situações concretas e a aptidão para usá-las na resolução de problemas* (p. 67).

Se analisarmos os programas oficiais de Matemática dos diferentes anos do ensino básico (ME-DGEBS, 1990, 1991) podemos encontrar ao longo dos diferentes temas matemáticos várias oportunidades para trabalhar padrões.

No programa do 1° ciclo do ensino básico só a partir do 2° ano é que há referência explícita aos padrões, onde é referido que os alunos devem descobrir regularidades e padrões nas contagens de 5 em 5, 10 em 10, assim como usar e explorar regularidades e padrões na adição, subtracção e, no 3° ano, na multiplicação. Também é no 3° e 4° anos que é feita referência aos padrões geométricos onde é sugerido que os alunos desenhem frisos e rosáceas e elaborem uma composição a partir de um determinado padrão.

No programa do 2° ciclo do ensino básico pode-se ler, no tema Números e Cálculo do 5° ano, o seguinte: *(...) melhor conhecimento dos números e das operações, para a descoberta de relações e propriedades (...)* (p.18).

No programa do 3° ciclo do ensino básico serão referidas, a título de exemplo, algumas situações por ano de escolaridade. No tema Números e Cálculo, do 7° ano, *(...) os alunos irão trabalhar com números naturais, decompondo-os em somas ou produtos, procurando divisores, formando potências, associando-os segundo propriedades comuns (...)* (p. 19); no tema Números e Cálculo, do 8° ano, *(...) continuar sequências numéricas (...)* (p. 32); ou A *propósito de sequência de números, poderão colocar-se questões tais como: procurar o termo que vem a seguir; tentar encontrar uma lei de formação* (p. 38); na Geometria, do 9° ano, *(...) decoração de uma região plana utilizando isometrias e semelhanças (...)* (p. 47).

No programa de Matemática A para o Ensino Secundário (ME-DES, 2001; 2002) também se pode ver como objectivos gerais da disciplina no domínio das capacidades/aptidões: *formular hipóteses e prever resultados*; *descobrir relações (....)*; *formular generalizações a partir de experiências* (p. 4). É, principalmente, no estudo das sucessões reais e das funções onde ocorrem um maior número de oportunidades para explorar problemas e investigações com padrões.

A procura e identificação de padrões levam os alunos a recorrer à exploração, investigação, conjectura e prova obrigando-os a recorrer às suas destrezas de pensamento de ordem superior. As actividades que envolvem padrões são vistas, pelos alunos, como tarefas interessantes e desafiadoras (Vale e Pimentel, 2005). Assim devem ser aproveitadas, quer como forma de motivar os alunos para a aula de Matemática, quer para aumentar a compreensão matemática.

São várias as referências curriculares que salientam a importância dos padrões deste modo os professores têm muitas oportunidades, em diferentes temas matemáticos, de explorar padrões em contexto de actividades problemáticas e investigativas.

Os professores devem proporcionar aos alunos, tal como é afirmado por Vale e Pimentel (2005) a oportunidade de:

- transferir padrões concretos, pictóricos e simbólicos de uma representação para outra;
- averiguar se uma lista de números mostra alguma regularidade;
- descobrir o padrão numa sequência;
- descrever o padrão oralmente e por escrito;
- continuar uma sequência;
- prever termos numa sequência;
- generalizar;
- construir uma sequência (p. 16).

Segundo o NCTM (1991) um dos temas centrais da Matemática é o estudo de padrões. A exploração de *padrões ajuda os alunos a desenvolver o poder da matemática e leva-os a apreciar a beleza da Matemática* (p.117).

Padrões no ensino e aprendizagem da Álgebra

As exigências da sociedade actual são muito diferentes daquelas a que estávamos habituados e, em particular, as exigências ao nível do saber matemático também evoluíram. Os currículos actuais pouco têm a ver com os anteriores e, em Portugal, a grande mudança no ensino básico, ao nível do currículo prescrito, deu-se com a entrada em vigor do *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais* (ME-DEB, 2001). Neste documento, a Matemática é designada como a ciência dos padrões quando se refere que:

> a educação matemática tem o objectivo de ajudar a desocultar a Matemática presente nas mais variadas situações, promovendo a formação de cidadãos participativos, críticos e confiantes nos modos como lidam com a matemática. Para isso é preciso destacar a especificidade da Matemática nomeadamente como ciência das regularidades e da linguagem dos números, das formas e das relações (p. 57).

Os padrões são a essência da Matemática e a linguagem na qual esta é expressa. A Matemática é a ciência que analisa e sintetiza tais padrões (Sandefur e Camp, 2004). Considerar a Matemática a ciência dos padrões não será uma má descrição, não só porque os padrões se encontram em várias formas no mundo que nos rodeia e ao longo da matemática escolar mas porque, também, podem constituir um tema unificador.

Os professores de Matemática estão conscientes do facto de que há, por um lado, menos interesse na Matemática e, por outro, um declínio no desempenho matemático dos alunos.

O Programa para a Avaliação Internacional de Alunos (PISA – *Programme for Internacional Student Assessment*) define literacia matemática como a capacidade que os alunos têm em aplicar os seus conhecimentos, analisar, raciocinar e comunicar com eficiência, aquando da resolução e interpretação de problemas numa variedade de problemas. No PISA 2003 (Ramalho, 2004), alguns dos itens referem-se a questões de natureza algébrica. São questões que envolvem relações e dependências funcionais entre variáveis, padrões e regularidades e aspectos matemáticos da mudança, e que surgem em diferentes representações, tais como simbólicas, gráficas, tabulares, geométricas e algébricas. No geral, a média portuguesa sobre a literacia matemática, está abaixo da média da OCDE e muito longe dos países de topo. No que se refere aos itens relacionados com a Álgebra, pode-se afirmar que são 31% os alunos identificados com um nível de literacia baixo versus 23% da OCDE. Pode-se ainda acrescentar que a percentagem de alunos com níveis elevados de literacia matemática é ainda inferior à média da OCDE: 8% versus 16%.

Esta perspectiva assenta no facto de muitos alunos olharem para a Matemática como uma mera colecção de procedimentos a aprender. Como Devlin (1998) refere:

> (...) ao longo dos anos a Matemática tornou-se cada vez mais e mais complicada, as pessoas concentraram-se cada vez mais nos números, fórmulas, equações e métodos e perderam de vista o que aqueles números fórmulas e equações eram realmente e porque é que se desenvolveram aqueles métodos. Não conseguem entender que a Matemática não é apenas manipulação de símbolos de acordo com regras arcaicas mas sim a compreensão de padrões — padrões da natureza, padrões da vida, padrões da beleza (p. 206).

Quando apelamos aos padrões num contexto de tarefas de investigação no ensino da Matemática é, normalmente, porque queremos ajudar os alunos a aprender matemática de forma significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem, facultando-lhes um ambiente que tenha algo a ver com a sua realidade e experiências. O estudo de padrões, num contexto de tarefas de investigação, vai ao encontro deste aspecto, apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e previsões. Segundo o Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001), *numa actividade de investigação, os alunos exploram uma situação aberta, procuram regularidades, fazem e testam conjecturas, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões* (p. 68).

O currículo de Matemática deve ser focalizado na "matemática importante" isto é, matemática que prepara os estudantes para um estudo contínuo e para a resolução de uma variedade de problemas na escola, em casa e em situações profissionais. Um currículo bem articulado desafia incrivelmente os estudantes para aprender as mais sofisticadas ideias na continuação dos seus estudos (NCTM, 2000).

A necessidade de novas profissões na actual sociedade e a importância de raciocínio algébrico nessas novas áreas serviram de propulsor para que alguns autores se debruçassem sobre esta problemática, sob o signo de *Álgebra para todos* (Nunes e Alves, 2005). No entanto, poder-se-á afirmar que são poucos os alunos que têm uma noção correcta do seu verdadeiro significado. Para muitos, *Álgebra* significa uma "amálgama" de letras, números e operações, ou a resolução de equações, sistemas de equações, ou qualquer tipo de actividade onde apareçam incógnitas e letras.

Esta perspectiva não se coaduna com as orientações curriculares expressas nos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) ao sugerirem que os alunos só compreendem os aspectos essenciais da Álgebra, se esta atravessar todo o seu currículo desde o pré-escolar até ao 12° ano de escolaridade. A Álgebra é importante não só para a vida adulta como também na preparação do pós-secundário (Silver, 1997).

Muitas pessoas ficariam surpreendidas por saber que a Álgebra pode começar, simplesmente, pelo estudo de padrões desde o Jardim de Infância e o 1.° ciclo do ensino básico. O que se passa no ensino tradicional é que este modo natural de pensar (no sentido em que é uma actividade que está na natureza humana) se perde com o avançar na escolaridade, ao privilegiar os procedimentos e as rotinas que é aquele que as pessoas mais recordam dos tempos que passaram pela escola. Mais do que impelir os alunos para a álgebra simbólica formal deve-se fomentar o pensamento algébrico levando os alunos a comunicar os seus pensamentos, recorrendo às suas próprias palavras ou à sua própria simbologia (Herbert e Brown, 1997).

A interacção dos padrões com a Álgebra é um domínio privilegiado. Em primeiro lugar porque irá permitir que a descoberta assuma um papel fundamental na sua aprendizagem. Outra razão muito importante é que é esta ligação que permite pensar no estudo da Álgebra desde o pré-escolar.

Em síntese, os padrões podem ser um óptimo veículo para uma abordagem poderosa à Álgebra, sobretudo nos primeiros anos, como suporte do pensamento pré-algébrico. Para isso, é necessário que os nossos alunos tenham contacto com experiências algébricas informais que envolvam a análise de padrões e relações numéricas e a sua representação e generalização por meio de diferentes processos.

Hoje, defende-se que o pensamento algébrico deve tornar-se numa orientação transversal do currículo, tal como já acontece com o pensamento geométrico. Para Kaput e Blanton (2005), citado em Ponte (2005), isso significa:

- Promover hábitos de pensamento e de representação em que se procure, sempre que possível, a generalização;
- Tratar os números e as operações algebricamente – prestar atenção às relações existentes (e não só aos valores numéricos em si) como objectos formais para o pensamento algébrico;
- Promover o estudo de padrões e regularidades, a partir do 1° ciclo (p. 37).

Em suma, a Álgebra pode ser definida como um sistema matemático utilizado para generalizar algumas operações matemáticas permitindo que letras ou outros símbolos substituam os números. Nesta conformidade está Tall (1992) quando refere que a Álgebra é muitas vezes vista como "a generalização da aritmética" partindo da procura de padrões numéricos.

Uma questão que será interessante colocar, na abordagem da Álgebra recorrendo aos padrões, é saber até que ponto os alunos são capazes de compreender e generalizar a diversidade de padrões numéricos que lhes são propostos e qual o desempenho que apresentam neste tipo de tarefas. Esta é uma questão importante uma vez que encontrar termos numa sequência é normalmente o primeiro passo para chegar à Álgebra. Outro aspecto importante ligado aos padrões é a resolução de problemas uma vez que a descoberta de um padrão é uma poderosa estratégia de resolução de problemas. Podemos dizer que o trabalho investigativo que recorra à resolução de problemas é um modo promissor de exploração da Álgebra, sobretudo se utilizarem problemas significativos para os alunos onde o uso da Álgebra seja relevante.

Capítulo 3

Tarefas de investigação

Tarefas de investigação no currículo

As mudanças ocorridas na sociedade exigem alterações profundas na educação em geral e também na disciplina de Matemática. Da escola é hoje esperada a garantia de que todos os alunos obtenham uma formação matemática básica, permitindo-lhes adquirir a capacidade e o gosto de pensar matematicamente. Um aluno alfabetizado em matemática é um aluno que é capaz de explorar, conjecturar, e raciocinar logicamente (NCTM, 1991). Aprender Matemática envolve, fundamentalmente, fazer Matemática. E fazer Matemática traduz-se em fazer investigações matemáticas (Poincaré, 1996).

Investigar é um termo que muitas vezes é associado a determinados tipos de actividades que pressupõem descoberta, exploração, pesquisa, autonomia, tomada de decisões e espírito crítico. Investigar está associado essencialmente ao processo, pode-se afirmar que a investigação é *um processo intencional que tem por objectivo a descoberta* (Porfírio e Oliveira, 1999, p. 113).

Segurado e Ponte (1998) defendem o trabalho investigativo na sala de aula, este encontra-se ao alcance da generalidade dos alunos dos diversos níveis de ensino. As tarefas de investigação têm a capacidade de tornar a Matemática mais apelativa e Goldenberg (1999) afirma que é mais divertido fazer matemática do que ficar sentado a escutá-la. Poder-se-á dizer que, pela sua natureza, as tarefas de investigação tornam a Matemática mais desafiadora, pois estimulam vários domínios inerentes à sua actividade como a manipulação, a observação, a argumentação, a modelação e a generalização. *O envolvimento do aluno neste tipo de actividade decorre, em boa medida, do prazer que sente ao estabelecer relações matemáticas desconhecidas para si* (Porfírio e Oliveira, 1999, p. 3).

Basta uma breve análise dos currículos para nos apercebermos que as tarefas de investigação atravessam os programas desde o ensino básico até ao secundário. O Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001) define a competência matemática que todos, os alunos, devem desenvolver ao longo da educação básica. Um aluno matematicamente competente deve saber *explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de* *maneira diferente*, deve ainda conseguir validar uma afirmação *com a consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior, discutir com outros e comunicar descobertas*, entender as *noções de conjectura*, desenvolver *processos de resolução* [de problemas] *e ensaiar estratégias alternativas* (p. 57). *Numa actividade de investigação, os alunos exploraram uma situação aberta, procuram regularidades, fazem e testam conjecturas, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões* (p. 68).

No programa de Matemática A para o Ensino Secundário (ME-DES, 2001; 2002) um dos temas transversais são a *Resolução de Problemas e as Actividades Investigativas* (p. 6), os *estudantes devem ser envolvidos em actividades de natureza investigativa* (p. 21).

O NCTM (2000) defende que se fomente a argumentação e prova para todos os anos de escolaridade. É defendido que, como objectivo escolar, as investigações matemáticas sejam consideradas experiências de aprendizagem desde o pré-escolar até ao 12º ano. A escola deve fazer com que os seus estudantes consigam reconhecer *a argumentação e a prova como aspectos fundamentais da Matemática; formular e investigar conjecturas matemáticas; desenvolver e avaliar argumentos matemáticos e provas; seleccionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de prova* (p. 56).

Tarefas de investigação no processo de ensino e aprendizagem

O que será necessário acontecer para que possamos afirmar que estamos perante uma aula de Matemática de sucesso? São vários os factores que garantem o sucesso de uma aula de Matemática. Entre outros, podemos afirmar que uma aula onde haja um bom ambiente de trabalho e onde os alunos sejam estimulados a discutir e a reflectir é, sem grande margem de dúvida, uma aula bem sucedida. Mas só isto não é com certeza suficiente, é também necessário ter tarefas matemáticas interessantes e desafiadoras. Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas (1999) afirmam que uma aula de Matemática bem sucedida baseia-se em tarefas válidas e envolventes, onde o *professor tem de ser capaz de construir um ambiente de aprendizagem estimulante e criar múltiplas oportunidades de discussão e de reflexão entre alunos* (p. 49). Além disso, Ponte *et al.* (1999) também defendem que a escolha das tarefas é um factor determinante, pois as tarefas matemáticas propostas têm de constituir *um terreno* *propício para uma exploração matemática rica* [e serem] *suficientemente desafiantes* (p. 49).

As actividades de investigação "obrigam" os alunos a formular questões, a elaborar conjecturas, testes, reflexões e demonstrações. Segundo Oliveira *et al.* (1997) citado em Ponte *et al.* (1999) as actividades de investigação:

> a) estimulam o tipo de envolvimento dos alunos necessário para uma aprendizagem significativa;
> b) fornecem vários pontos de partida para alunos com diferentes níveis de capacidade;
> c) estimulam um modo de pensar holístico, relacionando vários tópicos, o que é uma condição fundamental para um raciocínio matemático significativo;
> d) são indispensáveis para fornecer uma visão completa da Matemática, já que elas são uma parte essencial da actividade matemática (p. 34).

Poder-se-á então afirmar que as tarefas de investigação favorecem o envolvimento do aluno na sua própria aprendizagem. *O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afectivos com vista a atingir um objectivo* (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003, p. 23).

Para Chapin (1998), Martins, Maia, Menino, Rocha e Pires (2002) e Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (2002) as investigações matemáticas proporcionam a exploração de diferentes tópicos, segundo várias dimensões. Exigem que os alunos especulem, conjecturem, generalizem, justifiquem as suas afirmações. Segundo Ponte *et al.* (1999) estas actividades *fornecem um bom contexto para que os alunos compreendam a necessidade de justificar as suas afirmações, ao expressar o seu raciocínio junto do professor e dos colegas* (p. 34). Além disso, e sempre que os seus resultados são discutidos em grande grupo, obriga-os a analisar e discutir diferentes conjecturas e justificações. A turma aproxima-se de uma *pequena comunidade matemática, interagindo constantemente, onde o conhecimento matemático se desenvolve como um empreendimento comum* (p. 34).

As actividades de investigação ajudam o aluno a aprender de forma contextualizada, permitindo realizar conexões entre diferentes áreas da Matemática. Sendo assim, podemos afirmar que, os alunos aprendem melhor e de uma forma mais sentida, desenvolvendo simultaneamente o verdadeiro espírito da actividade matemática.

As investigações são um excelente "motor" para se conseguir uma aula inovadora, onde a Matemática seja trabalhada de forma contextualizada e onde os alunos têm oportunidade de trabalhar activamente matemática através da exploração de questões interessantes. Porém, elas vão obrigar a mudanças na sala de aula, não só por parte dos alunos mas também por parte dos professores. Segundo Ponte *et al.* (1999), as actividades de investigação, vão impor *novos requisitos às competências do professor* (p.34). No entanto, é também esta característica que dificulta a sua implementação. Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (2002) justificam tal facto, com a visão, ainda existente, de que a *Matemática consiste essencialmente num conjunto de conteúdos e técnicas e em que a aprendizagem deve decorrer das explicações do professor e da prática das regras que ele ensina* (p. 98).

Na verdade, conduzir aulas investigativas exige, ao professor, muitas e novas competências. Os professores devem:

- perspectivar a Matemática não como uma actividade em que se memorizam definições e obtêm as respostas correctas, mas em que as acções de questionar, pensar, corrigir, confirmar são características essenciais;
- ser competentes na realização de investigações matemáticas, sentindo-se à vontade quando confrontados com situações complexas e imprevisíveis;
- valorizar um tipo diferente de objectivos curriculares, como um vasto leque de capacidades, muito para além da destreza no cálculo e do conhecimento de factos matemáticos básicos;
- desenvolver a sua criatividade curricular a fim de conceber e adaptar tarefas adequadas para os alunos;
- assumir uma perspectiva da aprendizagem dos alunos baseada na actividade, na interacção e na reflexão;
- ser capaz de conduzir uma aula com uma dinâmica muito diferente da aula usual, sem orientar os alunos de forma excessiva ou insuficiente (Mason, 1991), proporcionando-lhes uma experiência de aprendizagem mais autónoma mas também mais interactiva (tanto no trabalho do grupo como em discussões colectivas) (Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas, 1999, p. 149).

No entanto, nenhuma destas exigências está fora do alcance dos professores, é apenas necessário que estes assumam, como objectivo a atingir, este tipo de ensino (Ponte *et al.* 1999).

Outra das opções que o professor tem de tomar é o modo como os alunos vão trabalhar, ou seja, se individualmente, em pequenos grupos, em grande grupo. Muitas vezes a opção recai sobre "formas mistas", ou seja, em pequenos grupos durante a maior parte da aula e em grande grupo sempre que surja a necessidade de "passar" uma ideia à turma. Cabe, também, ao professor decidir sobre a constituição dos grupos. Segundo

Ponte *et al.* (1999), o *papel do professor é essencial (...) na estruturação da aula, na sua condução e na negociação de significados, que é especialmente importante para a aprendizagem dos alunos* (p. 147). Autores como Segurado e Ponte (1998), Ponte *et al.* (1999) e Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (2002) defendem o trabalho em pequenos grupos enquanto se está a desenvolver a tarefa, e em grande grupo aquando da discussão final. *O trabalho em pequeno grupo incentiva uma comunicação entre alunos e promove uma melhor explicitação das conjecturas e testes a realizar. O trabalho em grande grupo impõe uma formalização maior do raciocínio e incita alunos a uma postura mais madura na discussão com o professor e os colegas* (Ponte *et al.*, 1999, p. 147). O trabalho em grande grupo faz surgir a necessidade da justificação, é perante a turma (grande grupo) que surge a necessidade de os alunos justificarem as suas "posições".

A "riqueza" das investigações matemáticas, passa por estas conseguirem estar ligadas a outras tarefas, já há muito usadas no ensino desta disciplina, como a resolução de problemas, a realização de projectos e as tarefas de modelação. O que há de comum em todas estas tarefas é o facto de elas estarem ligadas a processos matemáticos complexos que exigem muito mais do aluno do que os "tradicionais exercícios rotineiros". Porfírio e Oliveira (1999) afirmam que explorar e investigar está ligado essencialmente aos processos do pensamento matemático. *Um ensino centrado na exposição do professor e na resolução de exercícios por parte dos alunos veicula uma imagem incompleta do que é a Matemática uma vez que ela não é só caracterizada por "conteúdos", mas, também, por "processos", parece-nos requerer um nível de reflexão pouco usual em muitos alunos* (Santos, Brocardo, Pires e Rosendo, 2002, p. 101). Martins, Maia, Menino, Rocha e Pires (2002) também defendem que só é possível compreender a globalidade da natureza da Matemática se conseguir que os alunos entendam os "processos de fazer matemática".

Trabalhar conceitos matemáticos, com os alunos, exige diversidade de tarefas, que tanto podem ser "exercícios mais orientados para aspectos rotineiros", como problemas ou investigações. Cada um destes tipos de tarefas têm reflexos sobre o trabalho desenvolvido na sala de aula. Nas aulas em que sejam trabalhadas, mais frequentemente, tarefas de carácter mais aberto, os alunos desenvolvem aprendizagens mais significativas, *por exemplo, quando chegam ao mesmo resultado através de processos alternativos ou quando a mesma questão pode apresentar soluções diversificadas* *conforme as abordagens seguidas ou quando uma resposta não se reduz ao "certo ou errado"* (Martins, Maia, Menino, Rocha e Pires, 2002, p. 78).

Temos ainda de salientar que um dos "pontos forte" deste tipo de tarefas é o desenvolvimento da capacidade de comunicação. O desenvolver de uma investigação pressupõe percursos diferenciados, onde os intervenientes podem questionar, fazer sugestões, formular hipóteses, testar conclusões, verbalizar processos, entre tantas outras coisas que com certeza os vai ajudar a desenvolver o pensamento matemático.

As investigações matemáticas permitem estabelecer não só conexões matemáticas, mas também ligações com outras áreas disciplinares e até com outros saberes previamente adquiridos pelos alunos. *Um dos argumentos com que é defendida a realização de tarefas de exploração e investigação pelos alunos é que elas permitem a mobilização de diferentes tópicos de ensino e uma melhor compreensão de alguns conceitos* (Segurado e Ponte, 1998, p. 13). Assim, diferentes conceitos, apreendidos em diferentes circunstâncias, podem ser novamente tratados permitindo, ao aluno, um melhor entendimento dos mesmos. *Um dos aspectos que se destaca em muitas tarefas de investigação é a possibilidade que encerram de virem a ser exploradas com graus diversos de profundidade, tornando-se acessíveis a alunos de níveis de escolaridade distintos ou com desempenhos diferenciados* (Porfírio e Oliveira, 1999, p. 116).

Em suma, as actividades de investigação podem contribuir para que os alunos percebam que têm um papel fundamental nas suas próprias aprendizagens. Podem ainda aproximar o aluno do "verdadeiro" matemático, isto é, da actividade do matemático investigador. Além disso, distinguem-se essencialmente por duas características muito próprias. A primeira tem a ver com o seu interesse, este *reside mais nas ideias matemáticas e nas suas relações do que na sua relação com o contexto* [a segunda tem a ver com o aluno que durante a realização das mesmas,] *tem um papel determinante na definição das questões a investigar, assim como na concepção de estratégias e na sua execução, e na validação dos resultados* (Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas, 1999, p. 134).

Capítulo 4

Pensamento algébrico

No passado, o objecto de estudo fundamental da Álgebra seria as "equações" mas, apesar de para muitos alunos ainda ser esta a noção que prevalece, no centro da Álgebra de hoje estão relações matemáticas abstractas.

O Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001), de acordo com as tendências internacionais, apresenta a Álgebra como um dos grandes temas curriculares e aponta como competência matemática, a desenvolver ao longo de todos os ciclos, os seguintes aspectos:

> - A predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos;
> - A aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;
> - A aptidão para construir e interpretar tabelas de valores, gráficos, regras, verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos;
> - A aptidão para concretizar, em casos particulares, relações entre varáveis e fórmulas e para procurar soluções de equações simples;
> - A sensibilidade para entender e usar as noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas (p. 66).

A competência em Álgebra é bastante útil para o estudante na sua vida de todos os dias e para prosseguimento de estudos. *Quem não tiver uma capacidade razoável de trabalhar com números e suas operações e de entender e usar a linguagem abstracta da Álgebra fica ipso facto seriamente limitado nas suas opções escolares profissionais e no seu exercício da cidadania democrática* (Ponte, 2006, p. 5).

Deste modo, todos devem aprender Álgebra (NCTM, 2000). No entanto, o seu estudo está fortemente ligado à manipulação simbólica e à resolução de equações. Mas a Álgebra é mais do que isso: os alunos precisam de entender os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem as manipulações simbólicas e como estes símbolos podem ser utilizados para traduzir ideias matemáticas. Segundo Greenes e Findell

(1999) citado em Nunes e Alves (2005), é necessário que os estudantes saibam argumentar sobre sete ideias principais da Álgebra – raciocínio dedutivo e indutivo, representação, igualdade, variável, função e proporção:

- a *dedução* é um processo que incluí a concretização, em alguns casos de propriedades gerais;
- a *indução* incluí o exame de casos particulares, a identificação de relações entre esses casos, e a generalização dessas relações;
- a representação é o processo que mostra as relações matemáticas através de gráficos ou simbolicamente;
- o conceito de igualdade, ou equilíbrio, é relevante no entendimento das equações e inequações. Assim, é de suma importância que os nossos alunos aprendam a transformar expressões e equações noutras equivalentes e alterar as desigualdades por forma a obterem igualdades verdadeiras.
- em Álgebra, o conceito de variável é necessário desde muito cedo, as variáveis são utilizadas de diferentes modos, o conceito de variável assume um papel central na transição da Aritmética para a Álgebra. O conceito de variável é um dos mais difíceis de apreender, então torna-se "obrigatório" proporcionar aos estudantes experiências com variáveis que mudam mesmo de valor, tal como experiências que representam números desconhecidos mas específicos – tarefas que envolvam relações numéricas e análise de padrões;
- a *função* é uma relação, onde duas variáveis se unem numa determinada regra, onde o primeiro elemento fixado é unido com um único segundo elemento;
- o conceito de *proporção* é separado, visto este ser um tópico presente nos diferentes níveis de ensino da Matemática e de também ser um conceito abordado em outras áreas disciplinares.

Como Ponte (2006) afirma, a melhor forma de explicitar os objectivos do estudo da Álgebra, ao nível escolar, é dizer que se pretende desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. O NCTM (2000) define pensamento algébrico como algo que diz respeito ao estudo de estruturas (compreender padrões, relações e funções), à simbolização (representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos) e à modelação (usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas).

Ao desenvolver o pensamento algébrico, desenvolve-se não só a capacidade de trabalhar com o cálculo algébrico e as funções, como a capacidade de lidar com estruturas matemáticas, relações de ordem e de equivalência, aplicando-as a diferentes domínios, quer da Matemática (interpretando e resolvendo problemas), quer a outros Ponte (2005).

Segundo Day e Jones (1997), os alunos só dão início ao domínio do pensamento algébrico quando adquirem a capacidade de perceber e de construir relações entre variáveis.

Arcavi (2006) alerta para o facto de ser muito difícil definir pensamento algébrico, trata-se de uma grande questão, muito profunda e que *abarca demasiado*. Segundo o autor, *o pensamento algébrico inclui a conceptualização e aplicação de generalidade, variabilidade, estrutura* (p.374). Arcavi (2006) defende ainda que o principal instrumento da Álgebra é os símbolos. Apesar do pensamento algébrico e dos símbolos terem muito em comum, não significam exactamente a mesma coisa.

Pensar algébrico consiste em usar os instrumentos simbólicos para representar o problema de forma geral, aplicar procedimentos formais para obter um resultado, e poder interpretar esse resultado (...) ter "symbol sense" implica (...) questionar os símbolos em busca de significados, e abandoná-los a favor de outra representação quando eles não (p. 374) proporcionam esses mesmos significados.

Assim, pode-se afirmar que a capacidade de manipular símbolos faz parte do pensamento algébrico. Mas atenção, não pode deixar de alertar para o "perigo" de "cairmos na tentação" de dar apenas atenção ao modo como manipulamos os símbolos. Davis e Hersh (1995) afirmam que, se não entendermos o seu significado e apenas dermos atenção à forma de os manipular, corremos o risco de cair num formalismo desprovido de qualquer sentido. Não nos resta então outra alternativa, se não a de procurarmos uma forma de fazer com que os alunos entendam os símbolos, daí a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico. Este conceito *ajuda a perceber que a Álgebra não se reduz à manipulação de símbolos, mas envolve uma forma própria de pensar* (Ponte, 2006, p.378).

Segundo Arcavi (2006), são seis os aspectos fundamentais que caracterizam o sentido do símbolo (*symbol sense)*:

1- a familiarização com os símbolos, que inclui a compreensão dos símbolos e um "sentido estético" do seu poder (quando estes são usados com o objectivo de "mostrar" relações e generalizações);
2- a capacidade de manipular símbolos e de ler "através" de expressões simbólicas, a leitura de ("através de") expressões simbólicas com o objectivo de perceber significados agrega níveis de conexões e de reflexões sobre os próprios resultados;
3- a consciência de que podem representar, "exactamente", relações simbólicas que expressem informações dadas ou desejadas;
4- a capacidade de seleccionar uma determinada representação simbólica, e em certos casos, a de reconhecer a nossa própria insatisfação perante a escolha efectuada, tendo a capacidade de procurar uma melhor;
5- ter a consciência da importância de verificar o significado dos símbolos durante a aplicação de um procedimento, a resolução de um problema ou a verificação de um resultado, e comparar esses significados com os resultados, previamente, esperados.
6- a consciência de que os símbolos podem desempenhar "papéis" distintos em contextos distintos e desenvolver um sentido intuitivo dessas diferenças.

É de suma importância, e por forma a melhorarmos o entendimento da Álgebra, desenvolver o sentido do símbolo, uma condição necessária para que tal aconteça é a utilização de práticas de ensino apropriadas onde todo o trabalho seja desenvolvido através de tarefas de natureza investigativa e exploratória, onde os alunos tenham a oportunidade de explorar padrões e relações numéricas e a possibilidade de explicitar as suas ideias e onde possam discutir e reflectir sobre as mesmas. Muitas das dificuldades sentidas ao nível da Álgebra resulta da não compreensão do sentido de variável.

Sfard (2000), citado em Arcavi, alerta para o facto de que *se o significado é função do uso*, então temos de manipular os símbolos para os *sentir* e sentirmos o que podem fazer por nós mas, por outro lado, como os podemos usar sem os entendermos ou sem os sentir? É neste ciclo "vicioso" que, por um lado, residem as dificuldades dos alunos e por outro, se alimenta todo o processo de aprendizagem. Por forma a resolver este impasse temos é de nos preocupar, com as formas e os significados, tal como são *vividos e praticados* pelos alunos. Para Ponte (2005) *a solução terá de passar por uma estratégia de ir introduzindo os símbolos e o seu uso, em contextos significativos, no* *quadro de actividades que mostrem de forma natural aos alunos o poder matemático da simbolozição e da formalização* (p. 40).

Como já foi anteriormente afirmado, é hoje defendido que o pensamento algébrico se torne, tal como já acontece com o pensamento geométrico, uma orientação transversal do currículo. Para Kaput e Blanton (2005), citado em Ponte (2005), isso só acontece se conseguirmos incutir nos alunos hábitos de pensamento que desenvolvam a capacidade de generalizar, de trabalhar os números e as operações algébricas e de realizar tarefas que envolvam o estudo de padrões e regularidades.

Para Arcavi (2006) só é possível ajudar a desenvolver o pensamento algébrico se ajudarmos a desenvolver o sentido do símbolo, e tal só acontece se tivermos a capacidade de criar actividades e práticas de sala de aula cujo objectivo seja desenvolver:

- A procura do sentido do símbolo paralelamente com a resolução de problemas (rotineiros ou não) antes de se iniciar a aplicação automática de regras;
- A paciência para a aprendizagem em geral e, mais precisamente, a capacidade de aceitar aprendizagens parciais;
- O sentido do propósito do significado dos símbolos e o poder que o seu uso e compreensão nos confere sobre uma "multidão" de situações (p. 46).

Na certeza de que não existem habilidades matemáticas inatas, cabe ao professor, através das suas práticas, contribuir para o seu desenvolvimento. Encontrar estratégias que permitam ao aluno desenvolver o pensamento algébrico, ou seja, *pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar essa regularidade através de estruturas ou expressões matemáticas, pensar analiticamente, estabelecer relações entre grandezas variáveis* (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993, citados em Ponte, 2006, p. 21), será um dos caminhos a ter em conta no desenvolvimento do currículo. Assim, pode-se afirmar que a utilização de actividades que envolvam o estudo de padrões e regularidades são um dos caminhos privilegiados para desenvolver o pensamento algébrico. Os padrões ajudam, os alunos, a perceber a "verdadeira" noção de variável, que para a maioria é apenas vista como um número desconhecido (Star, Herbel-Eisenmann e Smith III, 2000).

Segundo Fouche (1997) apenas os alunos que desenvolvem o pensamento algébrico conseguem ser bons resolvedores de problemas, ou seja, apenas estes conseguem perceber a resolução de problemas e não apenas "decorá-la". O desenvolvimento do pensamento algébrico é essencial ao domínio da Álgebra. Um aluno algebricamente competente domina o sentido da variável, domina a resolução de problemas, em suma é um "bom" aluno de matemática (Fouche, 1997). Assim, é necessário que a comunidade educativa perceba a importância da Álgebra ser leccionada de forma contextualizada e quando esta é bem apreendida ajuda o aluno em todo o seu percurso escolar.

Capítulo 5

A exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação

Os currículos actuais apontam para novas direcções, exigem novos saberes matemáticos, ou seja, exigem que os professores ensinem uma matemática que prepare os estudantes para um estudo contínuo e para a resolução de uma variedade de problemas de modo a desafiá-los permanentemente.

Um dos caminhos que pode levar a alcançar as novas exigências do currículo e a contrariar concepções incorrectas acerca da Matemática é a aprendizagem por meio do envolvimento dos alunos em verdadeira actividade matemática. No entanto, ainda hoje o ensino de Matemática é feito de uma forma "tradicional", isto é, dominada pela resolução de exercícios. Os exercícios e os problemas são caracterizados por enunciados "fechados", *que indicam claramente o que é dado e o que é pedido* (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003, p. 23) e, pelo contrário, as tarefas de investigação são mais "abertas", *cabe a quem investiga um papel fundamental na sua definição. E uma vez que os pontos de partida podem não ser exactamente os mesmos, os pontos de chegada podem ser também diferentes* (Idem, 2003, p.23).

O paradigma do exercício, como Skovsmove (2000) o denomina, tem de ser contraposto a uma abordagem de investigação que pode tomar muitas formas e percorrer os diferentes níveis de escolaridade.

Investigar pressupõe uma atitude, pressupõe que os alunos tenham vontade de perceber e capacidade para interrogar, ou seja, o aluno tem de ter disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parece certo. Em suma, investigar é procurar conhecer, compreender, encontrar soluções para os problemas e, assim, é uma capacidade essencial a cada cidadão. Desta forma, investigar põe em diálogo, permanente, a teoria e a prática.

Como afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) *o conceito de investigação matemática, como actividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da actividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa* (p.23). Segundo Cunha (1998), citado em Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (2002), as investigações no geral, e em particular a investigação matemática, motiva os alunos, ajuda-os a desenvolver o raciocínio e contribui para a percepção da Matemática como uma ciência em permanente evolução e construção.

O trabalho desenvolvido através de tarefas de natureza investigativa e exploratória, adequado às diferentes faixas etárias, são uma experiência muito próxima à que é vivida pelos matemáticos profissionais. Assim, passa-se de uma visão da Matemática como uma listagem de conteúdos para uma visão da Matemática que se "constrói". Deixa-se de ter a *visão do conhecimento matemático como um corpo de factos e procedimentos que trabalham quantidades, medidas e formas de relações entre aqueles (Schoenfeld, 1992) para um entendimento da Matemática como uma ciência de padrões que se vai construindo por sucessivas tentativas, baseadas na observação e experimentação* (Santos, Brocardo, Pires e Rosendo, 2002, p. 84).

Neste contexto, poder-se-á afirmar que é importante que as investigações matemáticas ocupem um lugar de destaque nas experiências vividas, pelos alunos, em sala de aula, pois estas proporcionam-lhes o contacto com processos característicos da Matemática, tais como formular questões, testar conjecturas, procurar generalizações e argumentos que consigam demonstrar determinadas conjecturas. Proporcionando uma aprendizagem mais significativa da Matemática, onde partindo de pontos de entrada diferentes, consegue-se levar a um maior envolvimento dos alunos em diferentes níveis de competências (Idem, 2002).

Como foi afirmado anteriormente, o NCTM (2000) sugere que a Álgebra seja trabalhada desde o pré-escolar até ao 12º ano de escolaridade. Apenas assim é possível, como Ponte (2006) afirma, revalorizar a Álgebra no currículo da matemática escolar. Para que tal aconteça é necessário que a Álgebra passe a ser vista de uma forma mais alargada e multifacetada, mas a sua introdução nem sempre tem sido feita da melhor forma. Muitas vezes é feita através de exercícios rotineiros através dos quais os alunos "decoram" regras isoladas e sem sentido.

A "passagem" da utilização estrita de números para a utilização de símbolos é um dos grandes entraves ao entendimento da Álgebra. *A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também o é o "sentido do símbolo" (symbol sense), como diz Arcavi (1994), ou seja, a capacidade de interpretar e de usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na discrição de situações e na resolução de problemas* (Ponte, 2006, p.12).

A procura de padrões e a generalização de situações numéricas podem ajudar o aluno a desenvolver o "sentido do símbolo" levando-o a perceber que uma variável não é apenas um número cujo valor ainda é desconhecido (Star, Eisenmann e Smith, 2000), mas que as variáveis representam quantidades que variam, ou seja, a procura de padrões e a generalização de situações numéricas podem permitir ao aluno entender o "verdadeiro" significado de variável. *Os alunos precisam de ter experiências com variáveis que representam números desconhecidos, mas específicos, como com variáveis que realmente variam de valor* (Nunes e Alves, 2005, p. 254).

Desenvolver investigações numéricas é conseguir *proporcionar o estabelecimento de conexões matemáticas. Muitas investigações numéricas promovem a compreensão de relações entre padrões numéricos e geométricos bem como a utilização de conceitos geométricos para simplificar a recolha de dados e facilitar a compreensão de determinadas relações numéricas* (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003, p. 65).

O aluno competente algebricamente percebe a relação existente entre objectos e consegue raciocinar sobre essas relações de uma forma geral e abstracta (Ponte, 2006). Um aluno que não consiga fazer conexões e que não entenda essas relações é forçado a "decorar" regras algébricas sem nunca as conseguir justificar (Lannin, 2004).

As opções curriculares de hoje afastam-se da simples memorização e da aplicação, pura, de técnicas de cálculo, para se centrarem na *apropriação de aspectos essenciais dos números e suas relações* (Ponte, Brocado e Oliveira, 2003, p. 64). Numa perspectiva semelhante, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), referem a importância dos alunos reconhecerem regularidades em matemática, por exemplo através de investigações de padrões em sequências numéricas e geométricas, formulando as suas generalizações.

A procura de padrões familiariza, os alunos, com as relações, desenvolve a comunicação matemática, ajuda a criar hábitos de investigação e permite aos professores personalizar, adequando cada tarefa às dificuldades de cada um dos seus alunos (Chapin, 1998).

É essencial aos alunos aprenderem Álgebra, desenvolverem o *seu* pensamento algébrico, perceberem o significado dos símbolos, uma vez que estes *são o instrumento principal da Álgebra* (Arcavi, 2006, p. 363). *Perceber o conceito de variável é crucial para o estudo da álgebra; um dos grandes problemas do esforço que os alunos fazem para compreender e trabalhar em álgebra, resulta da sua limitada interpretação do termo variável* (NCTM, 1991, p.122).

O NCTM (2000) recomenda, por forma a conseguirmos ter alunos algebricamente competentes, que todos os alunos do pré-escolar ao 12°ano de escolaridade:

- Compreendam padrões e regularidades, relações e funções;
- Usem símbolos algébricos para representar e analisar "situações e estruturas matemáticas";
- Usem modelos matemáticos;
- Analisem "alterações" em diferentes contextos.

Para que tal aconteça é necessário uma mudança de atitudes. O NCTM (1991), afirma que é difícil *aprender a reconhecer padrões e regularidades em matemática* e ainda mais complicado generalizar esses mesmos padrões, e como tal é importante que se dê tempo, aos alunos, para que possam praticar e consequentemente ganhar experiência. Vale e Pimentel (2005) defendem a realização de um trabalho prévio, onde os alunos tenham a possibilidade de realizar actividades básicas, de reconhecimento de padrões diversificados. Estas actividades facilitam, à posteriori, a resolução de problemas que envolvam a descoberta de padrões e a sua generalização e, consequentemente, o conceito de variável.

Arcavi, (2006) pergunta: *que tipo de prática de aula queremos estimular (...)* [ou] *que tipo de pergunta/resposta, diálogo/discussão na aula queremos promover para que (...)* [a] *presença de significados seja massiva* [?] (p. 364). Com certeza são muitas as possíveis respostas a estas perguntas, o que parece ser uma resposta suficientemente consensual, é que sejam aulas onde se deve motivar para a Álgebra, onde deve haver a preocupação desta aparecer como uma necessidade, nunca devendo aparecer como uma resposta a uma pergunta que não foi feita (Idem, 2006). No entanto, ainda hoje, a Álgebra aparece descontextualizada, como já foi afirmado anteriormente, apenas como um conjunto de símbolos desgarrados uns dos outros, onde os alunos não entendem a necessidade da sua utilização, bem pelo contrário, para eles a Álgebra é "uma matéria muito complicada" que só existe "para lhes dificultar ainda mais a vida".

Uma das possíveis vias para se promover o raciocínio algébrico é a realização de tarefas de investigação que envolvam padrões e regularidades. *Para compreender os aspectos essenciais da Álgebra, é importante todo um percurso em que os alunos têm contacto com um grande número de experiências algébricas informais que envolvem a análise de padrões e relações numéricas e a sua representação e generalização por meio de diferentes processos* (Ponte, Brocado e Oliveira, 2003, p. 69).

Relembrando o que afirmámos no segundo capítulo, segundo Kaput e Blanton (2005) citado em Ponte (2005), só é possível desenvolver o pensamento algébrico se conseguirmos:

- Desenvolver hábitos de pensamento e de representação onde, sempre que possível, se procure a generalização;
- Tomar atenção às relações existentes como objectos formais para o pensamento algébrico, e não ficar "preso" apenas aos valores numéricos em si, ou seja, tratar os números e as operações algebricamente;
- Desenvolver o estudo de padrões e regularidades, desde o 1° ciclo do ensino básico.

É importante conseguir envolver os alunos em actividades de carácter exploratório e investigativo, contribuindo não só para a descoberta e comunicação de generalizações, mas também para que se consiga desenvolver capacidades relacionadas com o pensamento algébrico (Abrantes *et al.*, 1999; NCTM, 2000).

Segundo Vale e Pimentel (2005), *a integração deste tipo de actividades no currículo da Matemática escolar é uma das vias para que todos os estudantes descubram conexões entre vários tópicos, desenvolvam a sua capacidade de comunicar matematicamente e aumentem o seu desempenho na resolução de problemas* (p.19).

Em suma poder-se-á afirmar que a integração de tarefas de investigação com padrões, no currículo da Matemática escolar, assume um papel de destaque na abordagem à Álgebra, e em níveis de escolaridade mais baixos, de base ao pensamento "pré-algébrico" (Vale, Palhares, Cabrita e Borralho, 2006). Segundo Herbet e Brown (1997) o processo investigativo, na exploração de padrões, deve envolver três fases:

1. Procura de padrões – fase onde deve ser extraída a informação relevante;
2. Reconhecimento do padrão, representando-o de diferentes modos – onde deve ser realizada a análise de aspectos matemáticos; e
3. Generalização do padrão, finalmente a interpretação e aplicação do que se aprendeu.

A exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação desenvolve a capacidade de os alunos, partindo de situações concretas, generalizarem regras, ou seja, ajuda os alunos a pensar algebricamente (Vale, Palhares, Cabrita e Borralho, 2006). Estas tarefas permitem um melhor entendimento da Álgebra por parte dos alunos pois ajudam os alunos a *expressar e comunicar generalizações, revelar estruturas, estabelecer conexões e formular argumentos matemáticos* (p. 362) o que, segundo Guimarães (2006) são características que atribuem à Álgebra o seu grande poder.

Capítulo 6

Proposta pedagógica

Como já foi afirmado anteriormente, o presente estudo tem como objectivo perceber se a utilização de padrões num contexto de tarefas de investigação melhora o desenvolvimento do pensamento algébrico. Por forma a atingir este objectivo foi elaborada uma proposta de trabalho, incluindo a planificação da unidade a leccionar, a distribuição dos alunos por grupos, a preparação das tarefas de investigação preliminares, a preparação das tarefas de investigação e a planificação das duas aulas realizadas, ainda dentro do estudo, após a realização de todas as tarefas. De seguida, e por forma a melhorar o seu entendimento, descreve-se a proposta relatando o modo como todo o trabalho foi preparado, incluindo a colaboração com uma professora estagiária.

Planificação do trabalho

No plano metodológico, são três as etapas que marcam o presente estudo: (i) a planificação dos conteúdos a leccionar; (ii) a exploração das tarefas de investigação; e (iii) a distribuição dos alunos por grupo. A professora estagiária esteve presente, essencialmente, nas duas últimas etapas.

Os motivos que levaram a este envolvimento, ou seja, que fizeram com que a investigadora tivesse decidido envolver a professora estagiária neste projecto são variados e muito distintos. Antes de mais, a investigadora estava a investigar a sua própria prática, facto que sempre a deixou um "pouco temerosa". Além disso, é fundamental ter alguém com quem dialogar e reflectir. Segundo Saraiva (2002), a constituição de equipas colaborativas pode criar condições de trabalho potenciadoras de reflexão, não só individual, mas também colectiva, promovendo, assim, o desenvolvimento profissional dos professores e investigadores e tornando-os, assim, mais confiantes. Em segundo lugar, a professora estagiária conhecia relativamente bem a turma, pois esta tinha sido partilhada, no âmbito da prática pedagógica supervisionada, pelas duas durante todo o segundo período escolar. Por fim, mas não menos importante, por ser possível, à investigadora, partilhar experiências com uma professora estagiária com quem tem boas relações pessoais.

Torna-se assim necessário explicitar em que moldes funcionou o trabalho de colaboração ao longo do desenvolvimento do projecto. O trabalho desenvolvido com a professora estagiária esteve ligado, essencialmente, à exploração das tarefas de investigação e à construção dos grupos de trabalho. Após a elaboração das tarefas, a investigadora reuniu-se com a professora estagiária, com o objectivo de, conjuntamente, realizarem a exploração das mesmas, recorrendo a estratégias de resolução o mais diversificadas possível. Segundo Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (2002) *esta é uma tarefa complexa que envolve a ponderação de diferentes aspectos* (p. 89) e como tal, torna-se mais fácil e "rica" quando realizada e reflectida colaborativamente.

Não menos importante, e simultaneamente exigente, é a criação dos grupos de trabalho pois destes depende em grande parte o sucesso da realização das tarefas. Também aqui a professora estagiária teve um papel importante, dado que a criação dos grupos de trabalho foi pensada e discutida por ambas. Esta colaboração *ajudou a ultrapassar a "cultura escolar" de isolamento e de individualismo profissional que constituem obstáculos ao desenvolvimento profissional* (Nunes, 2004, p. 44).

É possível afirmar que todo o trabalho realizado em colaboração com a professora estagiária, permitiu desenvolver uma auto-aprendizagem e, essencialmente, dar resposta aos problemas que surgiram aquando da exploração das tarefas. É ainda de referir que a professora estagiária foi companheira nas "alegrias" e nas "tristezas".

Proposta de trabalho

Segundo Silver (1997), a Álgebra deve ser introduzida entre o sexto e o oitavo ano pois só assim é possível tornar os alunos competentes algebricamente. O grande desafio do ensino da Álgebra é o desenvolvimento do "sentido do símbolo". Ganhar este desafio "obriga" a que os símbolos sejam introduzidos de forma contextualizada, num *quadro de actividades que mostrem de forma natural aos alunos o poder matemático da simbolozição e da formalização* (Ponte, 2005, p. 40).

Assim, a unidade escolhida para desenvolver o trabalho foi a unidade temática "Números e Cálculo" (DGEBS, 1991). Quanto ao Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001), os domínios trabalhados foram *Números e Cálculo* e *Álgebra e Funções* e o tema escolhido equações. As competências matemáticas que se pretenderam desenvolver foram:

- a predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente em problemas envolvendo divisores e múltiplos de números ou implicando processos organizados de contagem (p. 60);
- a predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos;
- a aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;
- a aptidão para construir e interpretar tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos (p. 66);
- o significado de fórmulas no contexto de situações concretas e a aptidão para usá-las na resolução de problemas (p. 67).

Deste modo, foram preparadas nove tarefas de investigação, quatro delas preliminares, e duas aulas de exploração de conteúdos. Todas as tarefas foram resolvidas em pequenos grupos, no final de cada tarefa era obrigatório a realização de um relatório (Anexo 10). Não houve limite de tempo para a realização das tarefas, cada grupo trabalhava ao seu ritmo. Todas as tarefas foram realizadas em sala de aula, a investigadora recolhia os enunciados, mesmo que os grupos ainda não tivessem realizado o trabalho na íntegra, no final de cada aula. Os relatórios realizados pelos alunos eram todos corrigidos e comentados.

As aulas de exploração de conteúdos tiveram como objectivo permitir fazer "a ponte" entre as tarefas de investigação realizadas e os conteúdos abordados. Acima de tudo, tentou-se sempre manter um bom ambiente de trabalho, descontraído e construtivo, onde os alunos se sentissem à-vontade para colocar qualquer tipo de dúvida ou questão.

É ainda de referir que esta proposta de trabalho foi desenvolvida tendo em conta que sempre que se justificasse deveria ser adaptada e reformulada.

Trabalho de grupo

Quando se pensa realizar tarefas de investigação em sala de aula, uma das grandes decisões que se tem de tomar é o modo como os alunos vão trabalhar, ou seja, se individualmente, em pequenos grupos, em grande grupo. No presente trabalho decidiu-se realizar todas as tarefas em pequenos grupos, quatro grupos de quatro alunos e um de três (Anexo 11). Segundo Ponte *et al.* (1999), a realização de tarefas em pequenos grupos ajuda a desenvolver a comunicação entre alunos e permiti-lhes melhorar a capacidade de explicar as suas próprias conjecturas e os seus testes.

Uma das tarefas mais exigentes do presente trabalho foi a distribuição dos alunos por grupo. Como já foi referido anteriormente, a criação dos grupos de trabalho é uma tarefa muito exigente e de grande importância, pois destes depende, em grande parte, o sucesso da realização das tarefas.

Os primeiros grupos de trabalho criados foram experimentados durante a realização das tarefas de investigação preliminares. Nem tudo correu bem, depressa se percebeu que havia um grupo que não conseguia trabalhar colaborativamente, ou seja, cada um dos seus elementos trabalhava isoladamente, sem trocar qualquer ideia entre eles, facto que prejudicava o seu desempenho no global e o de cada um dos seus elementos em particular. Noutro grupo havia um elemento que, por se considerar muito bom e por não confiar no trabalho dos outros, dificultava o trabalho colaborativo.

Durante a realização das tarefas preliminares a investigadora foi fazendo pequenas alterações na constituição dos grupos. Apesar de tudo foram conseguidos grupos bastante homogéneos que desenvolveram um bom trabalho colaborativo. No entanto, tal como já foi referido, um dos alunos da turma considera-se bastante melhor que todos os outros, o que veio a dificultar o funcionamento do grupo no qual estava inserido, facto que prejudicou o seu desempenho e o do seu grupo.

Tarefas de investigação preliminares

A realização das tarefas de investigação preliminares teve dois objectivos principais: (i) familiarizar os alunos com a "descoberta" de padrões num contexto de tarefas de investigação; (ii) e a construção e/ou experimentação dos grupos de trabalho.

Previamente a investigadora apenas tinha previsto fazer duas tarefas preliminares, ocupando duas aulas de 90 minutos, mas perante a heterogeneidade do trabalho desenvolvido, pelos grupos, sentiu a necessidade de acrescentar mais duas tarefas. No entanto, não houve necessidade de aumentar o número de aulas e as quatro tarefas foram resolvidas em duas aulas de noventa minutos. A primeira tarefa *Padrões!* (Anexo 6), foi pensada para dar a conhecer a "ideia" de padrão e a possibilidade de este poder ser generalizado. A primeira questão tinha como objectivo descobrir o padrão numa sequência e continuá-la. A segunda questão e as tarefas *Os quadrados...* (Anexo 7), *A festa do João* (Anexo 8) e as *Cancelas* (Anexo 9) foram pensadas com o propósito dos alunos conseguirem: (i) transferir padrões pictóricos e simbólicos, de uma representação para outra; (ii) descobrir o padrão numa sequência; (iii) continuar uma sequência; e (iv) prever termos de uma sequência; (v) generalizar. Em todas as tarefas de investigação foram realizados relatórios escritos, sendo estes realizados em grupo.

Durante a realização das tarefas, sempre que necessário, a professora interveio junto dos grupos de trabalho, ajudando-os a pensar. Sempre que os alunos a procuravam com uma questão a professora respondia com uma outra tentando que estes, em conjunto, conseguissem conjecturar e explicar as suas próprias teses.

Tarefas de investigação

Na fase inicial da planificação das tarefas apenas foram planificadas quatro tarefas. Todas as tarefas foram pensadas com o objectivo de analisar padrões e regularidades, de desenvolver o raciocínio e a comunicação matemática e de ajudar a adquirir o significado de variável.

Especificamente a primeira tarefa, *As escadas* (Anexo 1), foi pensada com o objectivo de permitir aos alunos: (i) transferir padrões pictóricos e simbólicos de uma representação para outra; (ii) continuar uma sequência; (iii) prever termos de uma sequência; e (iv) generalizar. A segunda tarefa *Os números...* (Anexo 2), inicialmente a única sem imagem pictórica, suscitou muitas dificuldades. Os alunos conseguiram, facilmente, continuar a sequência mas sentiram dificuldades em encontrar o enésimo termo, ou seja, em conseguir generalizar, facto que levou a investigadora a planificar outra tarefa, passando a cinco as tarefas implementadas. A terceira tarefa *Ainda os números...* (Anexo 3), foi planificada com os mesmos objectivos. Ambas foram planificadas para dar oportunidade aos alunos de: (i) averiguar se há qualquer tipo de regularidade numa lista de números; (ii) descobrir o padrão numa sequência; (iii) prever termos de uma sequência; e (iv) generalizar. Com a quarta tarefa *O super-chocolate* (Anexo 4), pretendeu-se dar a oportunidade de: (i) transferir padrões pictóricos e simbólicos, de uma representação para outra; (ii) descobrir o padrão numa sequência; (iii) prever termos de uma sequência; (iv) generalizar; e (v) estabelecer conexões. A quinta e última tarefa *A Moldura* (Anexo 5), teve como objectivo permitir aos alunos: (i) transferir padrões, pictóricos e simbólicos, de uma representação para outra; (ii) descobrir o padrão numa sequência; (iii) prever termos de uma sequência; (iv) generalizar; (v) gerar expressões equivalentes; (vi) estabelecer conexões; e (vii) desenvolver a capacidade de comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral.

Após a realização de cada tarefa, tal como nas tarefas preliminares, realizaram-se relatórios escritos realizados em grupo. Além dos relatórios escritos, no final da quinta tarefa e apenas relacionado com esta, cada grupo teve de fazer uma pequena exposição à turma, recorrendo à utilização de transparências. Cada transparência devia de conter a análise do problema, as conjecturas efectuadas, o modo como chegaram à generalização e a respectiva expressão com variáveis.

O ritmo de trabalho, de cada um dos grupos, foi sempre respeitado. A realização das cinco tarefas, e de todo o trabalho associado, demorou três aulas de noventa minutos. Assim como nas tarefas preliminares, e sempre que se justificasse, a professora intervinha junto dos grupos de trabalho com o objectivo de os ajudar a "construir" o raciocínio. Quando os alunos a solicitavam com uma questão, esta respondia com uma outra "obrigando-os", em conjunto, a conjecturar e explicar as suas próprias teses. Durante a realização das tarefas, a professora, tentou sempre promover, intra-grupos, a capacidade de discutir com o outro e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem escrita e oral.

As aulas de Álgebra

Como já foi referido anteriormente, as aulas de Álgebra pretenderam ser de exploração de conteúdos e tiveram como objectivo principal fazer "a ponte" entre as tarefas de investigação realizadas e os conteúdos abordados. Foram planificadas com base, essencialmente, nas tarefas de investigação realizadas e nos relatórios escritos. Nestas aulas os temas abordados foram monómios e polinómios (coeficiente, parte literal e grau), operações com polinómios (adição algébrica e multiplicação), simplificação de expressões algébricas e expressões equivalentes. Pretendeu-se atingir os seguintes objectivos:

- desenvolver o sentido do símbolo;
- operar com polinómios;
- decompor um polinómio em factores;
- simplificar expressões algébricas;
- desenvolver o conceito de expressões equivalentes;
- estabelecer conexões entre diferentes conteúdos;
- desenvolver a comunicação matemática, escrita e oral.

As aulas foram iniciadas com a apresentação das transparências realizadas pelos alunos referentes à quinta tarefa, *A Moldura* (Anexo 5). Cada grupo apresentou a sua análise do problema, as suas conjecturas e o modo como chegaram à generalização e respectiva expressão. Com esta apresentação pretendeu-se fomentar a discussão em grande grupo. Segundo Ponte *et al.* (1999), e tal como já anteriormente foi afirmado, o trabalho em grande grupo obriga a uma maior formalização do raciocínio e incentiva os alunos a participarem de forma mais madura na discussão, quer com o professor quer com os colegas. Em particular, o facto de serem "levados" a exporem o seu trabalho obrigou-os a justificarem as suas "posições". Todos os grupos apresentaram diferentes modos de ver a situação, o que fez surgir diferentes expressões, todas equivalentes entre si. As apresentações, das transparências, geraram uma discussão à volta do significado das expressões e das variáveis utilizadas por cada um dos grupos. A discussão foi muito interessante pois a generalidade dos alunos mostrou ter percebido o significado das diferentes expressões. Quando confrontados com esta diferença, foram muitos os alunos a concluir que tal facto era normal pois, *todas significavam a mesma coisa* (GOAA1)[1]. É importante referir que o suporte geométrico facilitou muito o entendimento das expressões e para conseguirem explicar o seu significado, os grupos, recorriam sistematicamente à representação geométrica.

As expressões apresentadas pelos alunos também foram utilizadas, pela professora, para abordar a simplificação de expressões algébricas e as operações com polinómios (adição algébrica e multiplicação).

Em relação às expressões equivalentes, pode afirmar-se que estas foram abordadas transversalmente, ou seja, em cada tarefa, os grupos, encontravam diferentes expressões, equivalentes entre si, que eram sempre aproveitadas pela professora para abordar o referido tema.

Os resultados da primeira e da segunda tarefa, respectivamente *As escadas* (Anexo 1) e *Os números...* (Anexo 2), foram utilizados para "trabalhar" as definições de monómio e polinómio (coeficiente, parte literal e grau).

Todas as tarefas permitiram abordar temas como monómios e polinómios (coeficiente, parte literal e grau), operações com polinómios (adição algébrica e multiplicação), simplificação de expressões algébricas e expressões equivalentes, de uma forma contextualizada e com sentido para os alunos. A professora utilizou duas aulas de noventa minutos para abordar os temas acima referidos. No decorrer destas aulas a turma mostrou-se atenta, interessada e muito participativa. Perceberam, com facilidade, as operações com polinómios e a simplificação de expressões. As questões postas pela professora foram, na generalidade, respondidas com sucesso.

[1] (GOAA1) significa que os dados foram retirados do guião de observação de aula da primeira aula de Álgebra.

Capítulo 7

Metodologia

Opções metodológicas

Tendo como referência o problema de investigação formulado e as questões deste estudo, optou-se por uma abordagem de investigação qualitativa e interpretativa onde a turma, e mais especificamente dois alunos, serão a unidade de análise no que diz respeito à exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação. Tuckman (2000), de acordo com Bogdan e Biklen (1992), afirma que a investigação qualitativa apresenta as cinco características principais que se seguem:

1) A situação natural constitui a fonte dos dados, sendo o investigador o instrumento-chave da recolha de dados.
2) A sua primeira preocupação é descrever e só secundariamente analisar os dados.
3) A questão fundamental é todo o processo, ou seja, o que aconteceu, bem como o produto e o resultado final.
4) Os dados são analisados indutivamente, como se reunissem, em conjunto, todas as partes de um puzzle.
5) Diz respeito essencialmente ao significado das coisas, ou seja, ao "porquê" e ao "o quê" (p. 508).

As características atrás referidas mostram-se de acordo com as questões do presente estudo. De facto, a fonte directa dos dados foi uma turma da própria professora, em contexto escolar, e o problema do estudo focou-se na compreensão do significado, em sala de aula, numa turma do 3° ciclo do ensino básico dos padrões num contexto de tarefas de investigação de forma a melhorar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Atendendo a que se pretende responder a questões de natureza explicativa, que não se deseja exercer qualquer tipo de controlo sobre a situação, que se pretende estudar uma turma de 8° ano de escolaridade e dois alunos da mesma, correspondendo a critérios definidos e que se visa obter um produto final de natureza descritiva e analítica, a opção metodológica desta investigação recai na realização de um estudo de caso qualitativo e analítico.

Segundo Matos e Carreira (1994), a metodologia de estudo de caso obriga a que o investigador assuma vários papéis ao longo da investigação. Na presente investigação, o investigador assume os papéis de investigador-instrumento e observador-participante, visto que se pretende compreender a situação do ponto de vista de quem a vive e dela faz parte e a recolha e análise dos dados é, toda, feita por si.

Segundo Ponte (2002) a investigação sobre a prática, tendo a comunidade profissional como principal referência, tem por objectivo ajudar a resolver problemas profissionais e permitir um maior conhecimento desses problemas.

O ano de escolaridade escolhido é o 8º pelo facto de ser neste ano que a Álgebra começa a ser verdadeiramente introduzida no currículo dos alunos. Silver (1997) afirma que a Álgebra deve ser introduzida entre o sexto e o oitavo ano pois só assim é possível tornar os alunos competentes algebricamente.

A turma, enquanto objecto de investigação, trabalhou em pequenos grupos. De entre os alunos da turma foram escolhidos dois alunos, um aluno com pior desempenho e outro com melhor, pertencendo, cada um deles, a grupos distintos. O objectivo desta escolha prende-se com o facto de se pretender confrontar as posições de alunos com desempenhos distintos.

A recolha dos dados foi feita através de um questionário, duas entrevistas semi-estruturadas, observação directa de aulas e análise de documentos.

Procurou-se, tendo em conta a natureza e as questões do estudo, chegar a um produto final que correspondesse a uma profunda descrição do objecto em estudo. Por questões de ética, os propósitos e as actividades do estudo foram do total conhecimento dos participantes da investigação. Além disso, e no sentido de proteger os participantes de eventuais riscos decorrentes da investigação, usaram-se nomes fictícios e omitiu-se o nome da respectiva escola.

A escola

A escola secundária onde se desenvolveu o estudo está situada numa cidade do interior alentejano, portanto inserida em meio urbano, onde uma grande parte da população está envelhecida e a trabalhar no sector primário. Cerca de 50% dos alunos são oriundos de aldeias circundantes e têm horários limitados pelos transportes rodoviários públicos, sendo os restantes da própria cidade. A população estudantil é heterogénea e, muitos destes alunos estão desmotivados para a escola no geral e em particular para a Matemática.

Dos 32 anos que a escola tem, apenas há 19 se encontra no actual edifício, este foi inaugurado em 31 de Outubro de 1987, tendo as aulas começado a funcionar regularmente no ano lectivo de 1987/88. A escola foi criada para um número de cerca de 750 alunos tendo, presentemente, um número de cerca de 550. Para tal contribuíram essencialmente dois factores: a abertura da nova Escola Básica 2,3 no ano lectivo 1998/99 e o despovoamento do Alentejo. Em 2001, a escola reabriu o 3° ciclo do ensino público, com duas turmas de 7° ano, posteriormente alargado aos 8° e 9° anos. Actualmente o 3° ciclo do ensino público tem cerca de 130 alunos, perto de 24% do total de alunos da escola.

A turma

O estudo foi realizado na turma de 8° ano, onde a investigadora leccionou no ano lectivo de 2005/06. A investigadora já conhecia a turma do ano lectivo anterior, pois esta era uma das turmas onde leccionou um dos seus orientandos de estágio pedagógico, facto que lhe permitiu conhecer, previamente, as suas características como turma e a forma como tinham trabalhado até aqui. A escolha da turma assentou nos seguintes critérios: (i) haver, por parte da turma, hábitos de trabalho de grupo e uma grande "curiosidade natural"; (ii) haver, por parte da turma, receptividade a novos instrumentos de trabalho; (iii) ser uma turma pela qual a investigadora tinha uma grande simpatia; e (iv) ser uma turma sem graves problemas de indisciplina. Pretendeu-se, assim, assegurar que a turma iria reagir de modo favorável à proposta pedagógica.

A turma escolhida tinha 19 alunos, sendo 10 raparigas e 9 rapazes. No início do ano lectivo todos os alunos tinham 13 anos à excepção de dois, uma aluna com 12 e um aluno com 17 anos.

A grande maioria dos alunos são colegas desde o jardim de infância. Quanto ao passado escolar, como se pode perceber pelas idades dos alunos, só um aluno é que é repetente de 8° ano havendo, no entanto, uma aluna com uma reprovação no 7° ano.

A turma era considerada a melhor turma de 8º ano da escola sendo bastante heterogénea, tinha um grupo de alunos muito empenhados e interessados, com grandes facilidades na generalidade das disciplinas e, em particular, na Matemática, mas tinha também um grupo de alunos que não acreditava nos "benefícios" de estudar e por consequência da escola, sendo os restantes alunos "medianos". No entanto, há uma característica comum na generalidade dos alunos que é, mesmo aos mais cépticos em relação à escola, todos gostarem de ser desafiados, ou seja, perante um desafio trabalham com grande empenho.

De acordo com o Conselho Executivo e a Directora de Turma, os Encarregados de Educação foram, todos, informados da realização deste projecto por carta (ver Anexo 16). Não houve qualquer objecção ao projecto, em particular os Encarregados de Educação que foram contactados por forma a autorizarem os seus educandos a serem entrevistados fora das aulas (ver Anexo 12), autorizaram-no prontamente.

Escolha dos alunos participantes

A turma, tal como foi referido anteriormente, enquanto objecto de investigação trabalhou em pequenos grupos.

Com o objectivo de se poder confrontar posições de alunos com desempenhos distintos, havia a necessidade de seleccionar dois alunos, um com pior desempenho e outro com melhor, pertencendo cada um deles, a grupos distintos.

Por forma a facilitar a escolha dos dois alunos foi realizado um questionário (ver Anexo 15). Com a aplicação do questionário a investigadora conseguiu perceber o que significava a Escola e a Matemática para cada um dos alunos.

Os dois alunos escolhidos, um do sexo feminino, a Sofia, e outro do sexo masculino, o José, têm uma ideia de escola muito semelhante mas uma visão da Matemática muito distinta. Para o José a Matemática é uma actividade individual, onde os problemas têm só uma resposta. Segundo ele, a Matemática aprende-se melhor quando é descoberta por si próprio. Contrariamente, a Sofia gosta de trabalhar em grupo e para ela os problemas podem ter várias respostas e não tem opinião quanto à melhor forma de aprender Matemática. Ambos concordam com a importância da Matemática no dia-a-dia e partilham da ideia de que a Matemática ajuda a desenvolver o raciocínio. Para eles a Matemática memoriza-se e compreende-se simultaneamente.

Instrumentos de recolha de dados

Nesta secção será feita uma explicação de todo o processo de recolha de dados, assim como uma descrição detalhada das fontes de informação que sustentaram o estudo, fazendo referência aos respectivos instrumentos utilizados.

O estudo de caso qualitativo é uma metodologia de natureza empírica, onde o trabalho de campo tem uma grande representação. É ao investigador que cabe o importante papel da recolha de dados, devendo esta ser variada e numerosa.

> Yin (1989) considera mesmo que a principal força do estudo de caso lhe advém da capacidade de lida com uma grande variedade de evidência. Merriam (1998) aconselha a que nos estudos de caso qualitativos sejam utilizados as três técnicas de recolha de dados indicadas por Patton (1987) para a investigação qualitativa: entrevistas, observações directas e análise documental (Canavarro, 1993, p. 65).

No presente estudo as técnicas utilizadas foram: questionários, entrevistas, observação directa de aulas e relatórios escritos.

Questionário

Com o objectivo de recolher informação, não directamente observável, um dos instrumentos utilizados são os questionários. Quando surge a necessidade de ultrapassar condicionantes associadas, essencialmente, à falta de tempo, o questionário é uma metodologia indicada para a recolha de dados.

Ao pensarmos em elaborar um questionário devemos ter em conta um conjunto de questões: Que informação queremos obter? Onde? Quando? Como? Para quê? Porquê? E, principalmente, de quem?

Segundo Nunes (2004) as *questões que dão corpo ao questionário podem ser abertas ou fechadas. As respostas a questões abertas são mais difíceis no tratamento, uma vez que são de cunho mais pessoal. Por outro lado, as questões fechadas permitem reduzidas opções de resposta, permitindo uma análise mais fácil das respostas dadas, sendo muitas vezes possível levar a um tratamento quantitativo, situação que na perspectiva de diversos autores é perfeitamente compatível com uma metodologia de estudo qualitativo e interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994)* (p. 64).

No presente estudo, o questionário (Anexo 15) foi realizado com o propósito de conhecer mais profundamente a ideia de Escola no geral e da Matemática em particular, de cada um dos alunos. Foi constituído por um conjunto de perguntas fechadas e dividido em duas partes. Na primeira parte as questões estão relacionadas com algumas concepções que cada aluno tem da Escola. Na segunda parte as questões estão relacionadas com algumas concepções que cada aluno tem da Matemática em geral. O questionário foi aplicado, no início de uma aula normal de Matemática, durante aproximadamente 15 minutos.

Entrevista

Segundo Tuckman (2000), a entrevista é um dos processos que permite obter informação de forma directa ajudando, assim, a observar determinados aspectos não directamente observáveis de uma dada situação. A entrevista foi uma das formas de recolha de dados utilizada com os dois alunos previamente escolhidos. Todas as entrevistas foram directa e exclusivamente conduzidas pela investigadora.

Garantir a qualidade da entrevista obriga a que a mesma seja preparada e estruturada previamente. A estrutura da entrevista depende do problema formulado e do objectivo da mesma. Para a sua realização fez-se um levantamento das questões que pretendíamos abordar, tais como concepções sobre a Matemática em geral, sobre a aula de Matemática e sobre a Álgebra. De seguida, e partindo deste vasto conjunto de questões, elaboraram-se dois guiões que orientaram a realização das duas entrevistas semi-estruturadas.

Assim, foram realizadas duas entrevistas, aos dois alunos, com o objectivo de obter informação sobre as concepções dos alunos, uma na fase inicial do estudo e a outra no fim do mesmo. As entrevistas foram feitas individualmente, registadas em áudio e, posteriormente, transcritas de forma integral.

A primeira entrevista (guião no Anexo 13) está estruturada em quatro partes – identificação do aluno, Matemática, a Aula de Matemática e a Álgebra. Esta entrevista permitiu recolher informação sobre: (i) o percurso escolar dos alunos; (ii) as concepções dos alunos sobre a Matemática; (iii) as concepções dos alunos sobre a aula de Matemática; e (iv) as concepções dos alunos sobre a Álgebra. A segunda entrevista (guião no Anexo 14) está, também, estruturada em quatro partes. A primeira parte está organizada de modo a promover uma reflexão final acerca: (i) das opiniões sobre a aula de Matemática, incluindo as dinâmicas do trabalho de grupo; e (ii) do contributo que a exploração de padrões, num contexto de tarefas de investigação, teve para a evolução das concepções dos alunos em relação à Álgebra. A segunda e a terceira partes estão associadas à última tarefa de investigação realizada em sala de aula e têm como objectivo ajudar a compreender o contributo que a exploração de padrões, num contexto de tarefas de investigação, teve na compreensão de alguns conceitos ligados à Álgebra. Mais especificamente, estas partes foram organizadas de forma a promover uma reflexão final acerca do contributo que a exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação teve: (i) no entendimento da Álgebra; (ii) no estabelecimento de conexões matemáticas; e (iii) no desenvolvimento da comunicação matemática, quer seja oral ou escrita. A quarta parte teve como ponto único a resolução de um problema e está organizada de modo a promover uma reflexão final acerca do contributo que a exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação teve: (i) no entendimento da Álgebra; e (ii) no desenvolvimento da comunicação matemática.

Observação directa de aulas

Segundo Matos e Carreira (1994) as observações, tal como as entrevistas, são técnicas essenciais de recolha de dados em estudos de caso. O facto de a investigadora ter o duplo papel de observadora e participante, permitiu *compreender a situação do ponto de vista de quem a vive e dela faz parte* (p. 35).

Em cada aula observada foram recolhidos diversos dados através de notas de campo registadas pela investigadora. As notas pretendiam captar, o mais aprofundado possível, todo o desenvolvimento da aula.

Após cada observação foi sempre realizado um registo escrito, o mais completo possível, sobre a aula. Na realização dos registos utilizou-se um guião de observação de aulas elaborado pela investigadora (Anexo 11). O guião divide-se em três partes, uma relacionada com o funcionamento dos grupos onde eram evidenciados os valores e as atitudes dentro do grupo, outra analítica que evidenciava comentários sobre tópicos de particular interesse para a presente investigação e finalmente uma parte exploratória que fazia, no geral, o levantamento de aspectos a ter em especial atenção e, em particular, relacionados com os dois alunos, a Sofia e o José, seleccionados para uma observação/análise mais aprofundada.

O relatório dos alunos

A análise do relatório (ver Anexo 10) dos alunos foi, sobretudo, utilizada como uma técnica complementar de recolha de dados. Yin (1989) *refere a importância de recolher informação a partir da análise de documentos que possam estar disponíveis* (p. 64).

Independentemente do estudo realizado, existem ou produzem-se documentos que constituem uma excelente fonte de dados que nos permite validar e confirmar evidências que surgem noutro tipo de fontes de dados. Neste trabalho foram analisados os relatórios escritos dos alunos, entregues no final da realização de cada tarefa de investigação proposta, e produzidos em grupo.

A análise destes documentos permitiu uma compreensão mais concreta de algumas ideias manifestadas pelos alunos.

Recolha dos dados

A recolha de dados necessária a esta investigação foi directa e inteiramente feita pela investigadora.

A recolha de dados foi realizada durante o ano lectivo de 2005/2006. No início do segundo período a investigadora, tal como já foi afirmado anteriormente, informou os encarregados de educação sobre a realização do projecto. Em Fevereiro de 2006 foi pedida a autorização, aos encarregados de educação da Sofia e do José, para a realização das entrevistas aos seus educandos.

A primeira calendarização previa que toda a recolha de dados fosse efectuada durante o segundo período. No entanto, por motivos imprevistos relacionados, em primeiro lugar, com a investigadora e, posteriormente, com o cumprimento da planificação anual elaborada pelo grupo de Matemática, este calendário foi alterado e a recolha de dados mais intensiva realizou-se durante o terceiro período.

A primeira entrevista ainda se realizou no final do segundo período e ocorreu antes da realização das tarefas de investigação. Posteriormente, em Abril e já no terceiro período, iniciou-se o trabalho de sala de aula. Realizaram-se quatro tarefas de investigação preliminares (ver Anexos 6, 7, 8 e 9) e estas tiveram como objectivo, em primeiro lugar, familiarizar os alunos com a "procura" e a generalização de padrões e, em segundo lugar, permitir testar os grupos de trabalho criados pela investigadora. A realização destas tarefas, durante duas aulas de noventa minutos, foi crucial para o sucesso do presente estudo. Durante a sua realização foi possível fazer pequenos ajustamentos nos grupos de trabalho, tornado-os eficazes, no sentido de se incrementar dinâmicas colaborativas.

No final de Abril realizaram-se as cinco tarefas de investigação (ver Anexos 1, 2, 3, 4 e 5). Estas foram aplicadas em três aulas de noventa minutos e não foi dado, aos alunos, qualquer limitação de tempo para a sua resolução.

Por fim também foram objecto de observação as duas aulas, de noventa minutos cada, realizadas depois da aplicação das tarefas de investigação. A observação destas aulas teve por objectivo a recolha de informação sobre o contributo da exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação: (i) no entendimento da Álgebra; (ii) no estabelecimento de conexões matemáticas; e (iii) no desenvolvimento da comunicação matemática.

Por fim, no final do terceiro período, realizou-se a segunda entrevista.

Análise dos dados

Antes do início do tratamento de dados e por forma a garantir o anonimato das informações recolhidas, atribuiu-se um nome fictício a cada um dos alunos, respeitando o respectivo sexo.

Numa fase anterior ao início da análise dos dados propriamente dita, foi elaborada uma estrutura geral para a abordagem de cada caso, onde foram identificados os aspectos mais relevantes. Nesta estrutura incluiu-se a apresentação dos alunos e quatro domínios de carácter essencialmente descritivo (imagem da Matemática, conexões matemáticas, contribuição dos padrões e regularidades no entendimento da Álgebra e comunicação matemática).

A análise de dados foi realizada em duas fases. Na primeira fase, decorrida ao longo da recolha de dados, foi feita uma análise prévia com o objectivo de facilitar a organização e interpretação dos elementos recolhidos. A segunda fase da análise ocorreu após a realização do trabalho de campo e teve um carácter mais profundo e definitivo. Esta fase teve como finalidade responder ao problema inicial e às questões em estudo.

A análise dos dados baseou-se em informações do tipo qualitativo e foi realizada com um carácter essencialmente descritivo e interpretativo. Foi realizada aluno a aluno e, para cada um, foi levado a cabo um trabalho exaustivo que culminou na primeira versão escrita do caso. O procedimento utilizado nos dois casos foi o mesmo, tendo sido seguida a mesma sequência e realizadas as mesmas tarefas.

A análise relativa a cada aluno iniciou-se com duas leituras integrais das transcrições das entrevistas. Com a primeira leitura pretendeu-se "construir" o retrato do aluno. Na segunda leitura foram identificados e assinalados os dados que informavam directamente sobre cada um dos domínios acima referidos. Na identificação dos dados foram usados marcadores coloridos, tendo sido sempre utilizada a mesma cor para cada domínio.

Os dados recolhidos através da observação directa de aulas, e dos relatórios foram tratados seguindo a mesma metodologia.

A abordagem de cada caso foi feita pela ordem que aparece na respectiva estrutura e para cada um realizaram-se novas leituras das partes das transcrições e registos assinalados com a cor correspondente, tendo sido destacados os extractos a utilizar no texto escrito para ilustrar ideias dos alunos.

Todas as respostas dadas pelos alunos, quer às entrevistas, quer aos relatórios das tarefas de investigação transcritas neste trabalho, são apresentadas tal como foram escritas, incluindo erros ortográficos.

Capítulo 8

Os alunos perante a exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação

Este capítulo dá a conhecer o ponto de vista de dois alunos sobre o processo de ensino e aprendizagem nas aulas de Matemática e a exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação. Em cada caso, começa com uma breve apresentação do aluno, onde se descreve o seu percurso académico e a sua relação com a Matemática, debruçando-se de seguida, mais profundamente, sobre a imagem da Matemática, conexões matemáticas, a contribuição dos padrões e regularidades no entendimento da Álgebra. Este último aspecto incidiu, sobretudo, na formulação de generalizações em situações diversas, no sentido das fórmulas, sobre a aptidão para discutir com outros (comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação).

Os alunos foram escolhidos tendo em conta dois critérios principais, definidos desde o início do estudo. Deveriam: (i) ter aproveitamento escolar diferente; e (ii) pertencer a grupos distintos. Para além destes critérios, considerou-se importante assegurar que fossem de sexos diferentes.

Sofia

Apresentação

A Sofia tem 13 anos, é morena e têm olhos castanhos. Vive na cidade onde se situa a escola, com os pais e um irmão. É um pouco tímida e reservada. Distrai-se facilmente e tem pouca confiança no seu trabalho. Define-se sem grande convicção como uma aluna média. Segundo ela, está pouco "enturmada", ou seja, relaciona-se pouco com os colegas. Tem por hábito estudar sozinha e as disciplinas onde sente mais dificuldade são a Língua

Portuguesa e a Matemática. Foi nesta disciplina que, em todo o seu percurso escolar, obteve nível de classificação inferior a três.

Segundo ela, o insucesso na disciplina de Matemática deve-se à falta de atenção e ao pouco estudo dos alunos:

> *Se calhar precisavam de estudar mais, não sei! De se empenhar mais e ouvir melhor as aulas.* (E1S)[2]

Na aula é pouco participativa pois, como ela própria afirma a sua participação depende do tipo de conteúdos, se *é uma matéria que aprendi com facilidade até levanto o dedo, mas se estou um bocado indecisa, não levanto* (E1S). Normalmente recorre à professora para esclarecer as suas dúvidas. No entanto, já têm recorrido à colega do lado para as esclarecer:

> *Ás vezes tenho dúvidas e pergunto à minha colega do lado, mas ás vezes a professora a seguir responde à questão e já não me ponho a discutir a matéria* [com ela]. (E1S)

Tem algum receio de iniciar novos conteúdos, pois tem *um bocado de medo, de não* [os] *perceber* (E1S).

Não gosta das aulas de Matemática quando são muito expositivas. O tipo de tarefas que mais gosta são as de investigação pois, desenvolvem-se em grupo, o que segundo a Sofia facilita a aprendizagem da Matemática:

> *Acho que tenho mais facilidade em trabalhar em grupo, porque até nos entre-ajudamos uns aos outros* [facto que nos ajuda] *a perceber* [os conteúdos leccionados]. (E1S)

Ela considera que este tipo de actividades são um desafio constante que obrigam os alunos a raciocinar, o que promove uma maior aprendizagem. A Sofia afirma que *faz bem puxar pelo raciocínio* (E2S)[3].

---

[2] (E1S) significa que os dados foram retirados da 1ª entrevista da Sofia.

[3] (E2S) significa que os dados foram retirados da 2ª entrevista da Sofia.

A imagem da Matemática

Para a Sofia é importante estudar Matemática pois, segundo ela, a Matemática vai *fazer muita falta para o* [...] *futuro,* [inclusive] [...] *para arranjar profissão* (E1S). Para ela é uma actividade essencialmente de grupo. De acordo com as respostas que deu ao questionário, realizado no início do segundo período, a Matemática exige compreensão e, como tal, ajuda a desenvolver o raciocínio, no entanto aprender Matemática, em seu entender, também está associado à memorização. Ela defende que a Matemática se aprende "rotinando" exercícios:

> Invest: *Como é que aprendes Matemática? Como é que tu achas que aprendes Matemática?*
> Sofia: [...] *A fazer exercícios, acho que o praticar é o melhor segredo para estudar.*
> Invest: *Como é que tu costumas estudar Matemática?*
> Sofia: *Faço muitos exercícios do livro, vou andando para a frente e depois leio assim as páginas por alto, mas no geral faço os exercícios.* (E1S)

No entanto, considera ter aprendido mais nas aulas onde se trabalharam tarefas de investigação, facto que leva a afirmar que houve uma alteração na forma como a Sofia vê a Matemática:

> Invest: *Consideras ter aprendido mais com estas aulas, ou com as aulas "tradicionais"? Mais com as aulas de tarefas de investigação sobre padrões ou com as "outras aulas"?*
> Sofia: *Nas tarefas.*
> [...]
> Invest: *Portanto consideras que aprendes mais* [nas aulas onde realizas tarefas de investigação]*?*
> Sofia: *Sim.*
> Invest: *Nestas últimas aulas, de tarefas, o que é que mais gostaste? E o que é que menos gostaste? Houve alguma coisa que gostasses de destacar, nestas aulas?*
> Sofia: *Não, eu gostei de tudo em geral.*
> [...]
> Invest: *Relativamente às tarefas de investigação, a este tipo de trabalho que tu realizaste, gostaste?*
> Sofia: *Gosto, gostei.*
> Invest: *Gostaste de investigar por ti? De tentar chegar lá por ti? Gostaste da inter-ajuda? Gostaste de "errar", "acertar"? Gostaste?*
> Sofia: *Sim.* (E2S)

Segundo ela, as aulas onde foram explorados padrões num contexto de tarefas de investigação, obrigaram os alunos a analisar problemas e a encontrar soluções:

> Invest: *E então o que é que vocês faziam? O que é que tu contavas?*
> Sofia: *Analisamos problemas. E segundo o que a professora pergunta arranjamos soluções.* (E2S)

Considera ter realizado *tarefas engraçadas* (E1S), muito diversificadas que terminaram sempre com a realização de sínteses, facto que a ajudou a apreender os conceitos trabalhados.

Conexões matemáticas

A Sofia é uma aluna pouco habituada a estabelecer conexões matemáticas e, segundo ela, os conteúdos são esquecidos imediatamente a seguir a serem avaliados:

> *A gente depois esquecemos aquilo. Depois já não tocamos mais no assunto.* (E1S)

Durante a realização das primeiras tarefas a aluna demonstrou grande dificuldade em colaborar com os restantes elementos do grupo, não só não conseguia contribuir para o desenvolvimento do trabalho como também não entendia as conclusões a que os seus colegas chegavam. Mostrou-se pouco autónoma, sem confiança nos seus raciocínios e, consequentemente, pouco persistente.

A evolução da Sofia foi surpreendente durante a realização das tarefas foi-se mostrando cada vez mais empenhada, colaborante e, inclusive, pode-se afirmar que se tornou num dos "elementos chave" do grupo. Aprendeu a confiar nos seus raciocínios e passou a ser muito persistente na exploração de padrões e relações. Esta evolução deveu-se, em parte, ao facto de o grupo, no qual a Sofia está inserida, desenvolver um excelente trabalho colaborativo:

> Invest: *Quando ao teu grupo era dado uma tarefa, quem é que a começava a resolver?*
> Sofia: *Normalmente éramos todos em conjunto.*

> [...]
> Invest: *Tentavam todos chegar a um resultado?*
> Sofia: *Sim, a tentar achar à solução.*
> Invest: *Quando pegavam nas tarefas começavam imediatamente a resolver?* [...]
> Sofia: *Normalmente puxávamos por uma folha de rascunho e escrevíamos as ideias que íamos tendo e depois discutíamos.*
> [...]
> Invest: *Durante a resolução das tarefas trabalhavam todos uns com os outros?*
> [...]
> Sofia: *Todos em grupo.* (E2S)

As tarefas *Os números...* (Anexo 2) e *Ainda os Números...* (Anexo 3) levou ao recurso da sistematização dos dados através da utilização de uma tabela e, só assim, os alunos perceberam a lei de formação dos padrões e, consequentemente, a generalizar. No relatório da tarefa *Ainda os Números...* (Anexo 3) é um bom exemplo do que se acabou de referir.

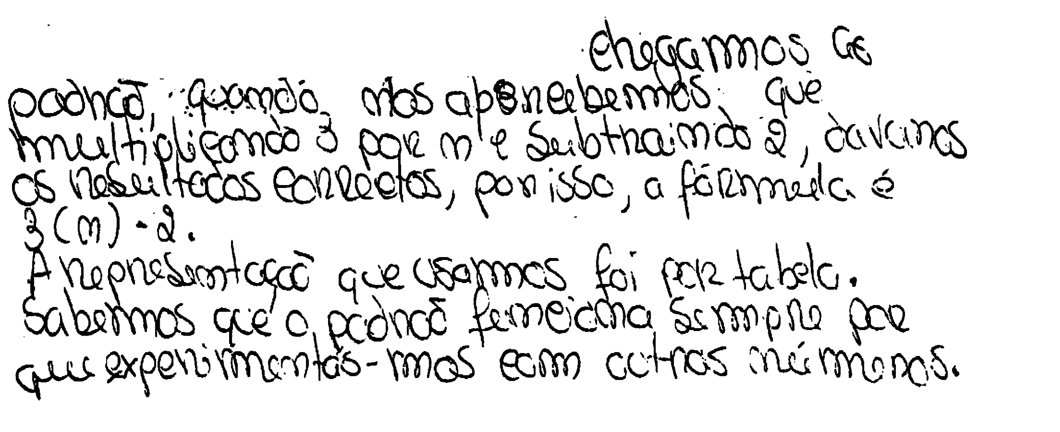

chegamos ao
padrão, quando nós apercebemos que
multiplicando 3 por n e subtraindo 2, davamos
os resultados correctos, por isso, a fórmula é
3(n) - 2.
A representação que usamos foi por tabela.
Sabemos que o padrão funciona sempre por
que experimentamos-mos com outros números.

Figura 1 – Extracto do relatório da tarefa *Ainda os Números...* (Anexo 3).

Estas tarefas suscitaram muita dificuldade a todos os grupos, em particular ao grupo da Sofia:

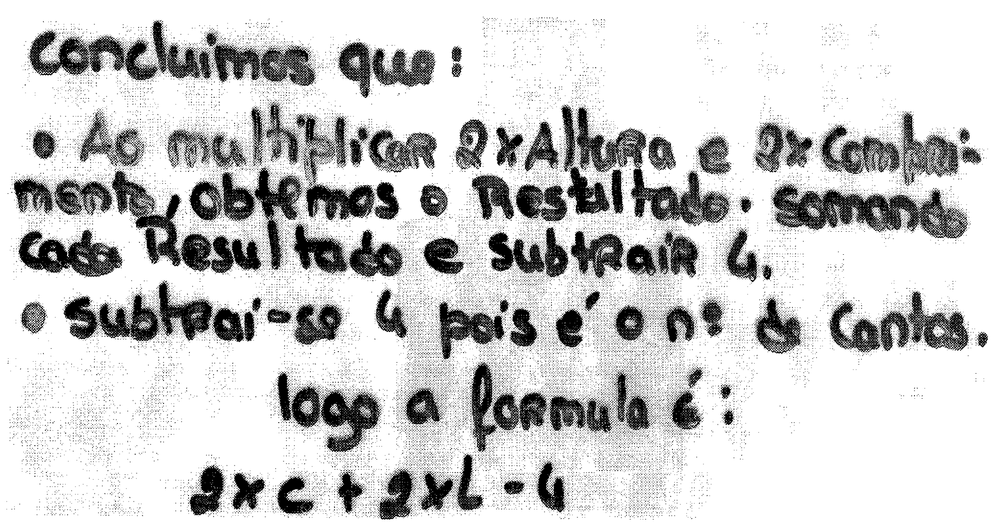
> Invest: *Das tarefas que resolveram, qual ou quais foram as mais fáceis de realizar? Só com números? Números e figuras? Ou só figuras?*
> Sofia: *Com números e figuras.*
> Invest: *Porquê?*
> Sofia: *Porque as figuras ajudam.* (E2S)

Os alunos conseguiram, facilmente, continuar a sequência mas sentiram grande dificuldade em encontrar o enésimo termo. Tal facto é consequência da dificuldade que sentiram em organizar os dados e, essencialmente, da falta de um suporte visual, ou seja, de uma imagem pictórica.

No relatório realizado no final da tarefa *O super – chocolate* (Anexo 4) os alunos utilizaram o conceito de área do rectângulo para conseguirem descobrir a expressão que permite saber o número de bombons que se encontra numa caixa de qualquer dimensão:

> *Chegamos à generalização do padrão através da representação de figuras. Na fórmula (n × m) o n é o número de bombons na fila vertical e o m o número de bombons na fila horizontal.* (R4)[4]

Finalmente, quando se analisou o relatório, de grupo, realizado no final da tarefa *A Moldura* (Anexo 5) percebeu-se que também houve a necessidade de recorrer a conceitos geométricos, mais especificamente ao de "perímetro". Segundo eles, a expressão que define a generalização pedida é $2 \times C + 2 \times L - 4$, porque:



Concluimos que:
• Ao multiplicar 2xAltura e 2xComprimento, obtemos o Resultado. somando cada Resultado e subtrair 4.
• subtrai-se 4 pois é o nº de Cantos.
logo a formula é:
2xC+2xL-4

Figura 2 – transparência realizada pelo grupo da Sofia referente à tarefa, *A Moldura* (Anexo 5).

Em ambas as situações é fácil visualizar a utilização de conceitos geométricos anteriormente apreendidos. No entanto, quando se perguntou à Sofia se, para encontrar a fórmula que permite saber o número de azulejos necessários à construção de qualquer espelho, tinham utilizado algum conceito matemático previamente adquirido, e apesar de afirmar que percebeu a fórmula e inclusive de a ter conseguido explicar, ela afirma peremptoriamente que, no seu entender, não:

[4] (R4) significa que os dados foram retirados do relatório realizado no final da tarefa *O super-chocolate.*

Invest: *O que é que significa esta expressão: 2c + 2l - 4?*
Sofia: *Duas vezes o comprimento mais duas vezes a largura menos os quatro cantos.*
Invest: *Muito bem. Tiveste dificuldade em perceber esta fórmula?*
Sofia: *Não.*
Invest: *Recorreram a algum conceito matemático para descobrir esta fórmula?*
Sofia: *Não.* (E2S)

Tal facto prende-se com a forma como até aqui tem aprendido matemática. Para ela a Matemática sempre se aprendeu por "caixinhas", ou seja, cada conceito era isolado do anterior. Assim, neste contexto, ainda não lhe faz sentido utilizar conceitos geométricos. Ela habituou-se a que estes só estejam presentes em conteúdos relacionados com o tema Geometria.

A contribuição dos padrões e regularidades no entendimento da Álgebra

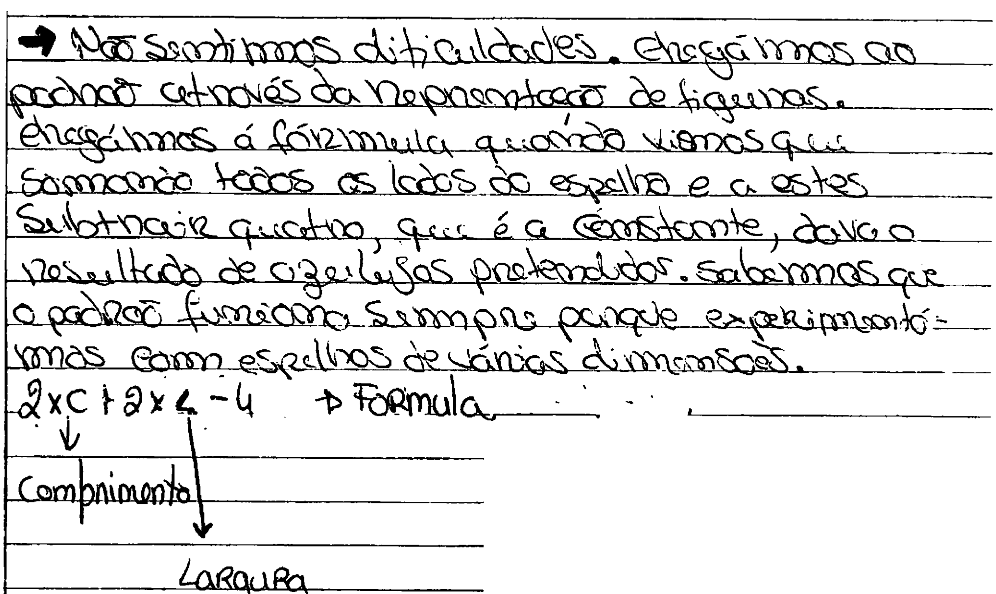
A Sofia assume-se uma aluna com um desempenho médio-baixo na disciplina de Matemática. Mostra grande dificuldade no entendimento da Álgebra e, em particular, pouco familiarizada com os símbolos e a respectiva manipulação.

Aquando da realização da primeira entrevista apresentou um total desconhecimento da maioria dos conceitos abordados em anos lectivos anteriores. Identifica alguns conteúdos como já leccionados mas não tem a noção do seu significado:

Invest: *Tens dificuldades quando trabalhas com fórmulas matemáticas?*
Sofia: *Tenho.*
Invest: *Tens dificuldade em entender o significado das fórmulas?*
Sofia: *Sim.*
Invest: *[...] Já trabalhaste com expressões numéricas?*
Sofia: *Já.*
Invest: *Dá-me um exemplo de uma expressão numérica.*
[...]
Sofia: *Não me estou a lembrar.*
[...]
Invest: *O que significa para ti uma variável? Ou uma incógnita?*
Sofia: *Uma incógnita?*
Invest: *Sim. Ou uma variável?*
Sofia: *Parece que não demos isso este ano, ainda. Não foi o ano passado?*
Invest: *Foi o ano passado, que falaste em incógnita ou variável. O que é para ti uma variável?*
[...]

Sofia: *Não sei.* (E1S)

Durante a realização das primeiras tarefas, a Sofia, foi uma aluna desinteressada e pouco confiante nos seus raciocínios e, inclusive demonstrou dificuldade em perceber a lei de formação dos diferentes padrões. No entanto, os restantes elementos do grupo nunca desistiram dela, exigindo que ela apresentasse sugestões, discutisse ideias, esclarecesse as suas dúvidas, ou seja, que tivesse um papel activo dentro do grupo. Ao longo da realização das tarefas a sua evolução foi evidente. O seu desempenho melhorou muito e com o tempo tornou-se persistente e confiante sendo, em algumas tarefas, mesmo considerada um dos elementos aglutinadores do grupo. Durante a realização das últimas tarefas, já era ela que avançava com as fórmulas solicitadas nas questões propostas e, facilmente, explicava os seus raciocínios. A realização da tarefa *A Moldura* (Anexo 5) foi um desses exemplos, a Sofia esteve sempre a "puxar" pelo grupo, experimentou diversas estratégias, apresentou algumas conjecturas, procurou a generalização correcta e explicitou os seus raciocínios aos colegas de grupo e à professora. O relatório escrito no final da realização da tarefa mostra a forma como todo o trabalho se desenvolveu:


→ Não sentimos dificuldades. Chegámos ao padrão através da representação de figuras. Chegámos á fórmula quando vimos que somando todos os lados do espelho e a estes subtrair quatro, que é a constante, dava o resultado de azulejos pretendidos. Sabemos que o padrão funciona sempre porque experimentámos com espelhos de várias dimensões.

2xC + 2xL − 4 → Fórmula

Comprimento

Largura

Figura 3 – Extracto do relatório da tarefa *A Moldura* (Anexo 5).

Assim, é possível afirmar que, o grupo em geral e a Sofia em particular, conseguiram: (i) identificar e generalizar relações; (ii) representá-las simbolicamente; (iii) "tomar consciência" que as relações simbólicas representam informações dadas ou desejadas; e (iv) "tomar consciência" da importância da verificação dos resultados.

Como já foi afirmado anteriormente a Sofia é muito tímida e distraída, motivo que durante as aulas de Álgebra a prejudicou. Na primeira aula revelou alguma dificuldade na simplificação de expressões e em explicar a noção de variável. Na segunda aula já se mostrou mais atenta e participativa, facto que foi evidente no seu desempenho. Revelou facilidade na aquisição de conteúdos como monómios e polinómios (coeficiente, parte literal e grau) e operações com polinómios (adição algébrica e multiplicação). Contudo, ainda mostrou alguma dificuldade na simplificação de expressões algébricas.

Em suma, a sua evolução foi evidente e no fim do estudo a Sofia conseguia: (i) simplificar fórmulas; (ii) distinguir monómio de polinómio; (iii) identificar expressões equivalentes; e (iv) ter algum sentido do símbolo:

Invest: *Como é que sabemos que esta igualdade é verdadeira* $2\times C + 2\times L - 4 = (C+C+L+L) - 4$*? Posso dizer que esta igualdade é verdadeira ou não?*
Sofia: *Sim.*
Invest: *Porquê?*
Sofia: *Porque juntamos na mesma duas vezes o comprimento e duas vezes a largura. São só duas maneiras diferentes de representar a mesma fórmula.*
Invest: *Na fórmula a que chegaram, ou seja, na vossa generalização, consegues dar exemplos de monómios e de polinómios?*
[...]
Sofia: *O 2C.*
[...]
Invest: [...] *Então e um exemplo de um polinómio?*
Sofia: *[silêncio]*
Invest: *Retirado dessa expressão.*
Sofia: $2C + 2L$.
Invest: *Muito bem. Podemos adicionar variáveis com significados diferentes?*
Sofia: *Não.*
Invest: Porquê? Podíamos adicionar o 2C com o 2L?
[...]
Sofia: *Porque significam coisas diferentes.*
Invest: *Simplifica esta expressão:* $(2\times n) + (n - 2)$*. Enquanto simplificas fala comigo.*
[...]
Sofia: $3n - 2$. (E2S)

No entanto, quando foi confrontada com um problema, durante a resolução da segunda entrevista, mostrou-se pouco à-vontade e só o conseguiu formalizar com a ajuda da investigadora. Ultrapassada esta etapa, e depois de se concentrar, conseguiu simplificar a expressão:

Invest: *A expressão é: n+ n+1+n+2+n+3+n+4+n+5?*
Sofia: *Pois.*
Invest: *Igual a quê?*
[...]
Sofia: *6n + 15.*
Invest: *Têm que ser igual a quantos?*
Sofia: *513.* (E2S)

A comunicação matemática

Nas primeiras tarefas de investigação os relatórios do grupo, onde a Sofia está inserida, apresentavam uma linguagem pouco cuidada e descontextualizada. A justificação apresentada no relatório da tarefa *As escadas* (Anexo 1) é um exemplo da dificuldade que tinham em expressar o seu raciocínio:

> *Chegamos ao padrão quando percebemos que o nº de degraus era a multiplicar por 4. Utilizamos a representação numérica, pois foi através, de várias contas que conseguimos chegar ao resultado correcto.* (R1)[5]

Além disso, apesar de sentirem necessidade de comunicar entre si, tinham muita dificuldade em explicitar os seus raciocínios. Apenas no relatório da última tarefa a evolução foi notória, no qual o grupo da Sofia conseguiu exprimir o seu raciocínio de forma clara e contextualizada:

> *(...) Chegamos à fórmula quando vimos que somando todos os lados do espelho e a estes subtrair quatro, que é a constante, dava o resultado de azulejos pretendidos. Sabemos que o padrão funciona sempre porque experimentámos com espelhos de várias dimensões.* (R5)[6]

É importante referir que foi esta uma das tarefas em que o grupo, e a Sofia em particular, melhor desempenho teve, o que não está desligado da qualidade da justificação. Só é possível dar uma justificação explícita quando se entende o que se está a fazer.

A Sofia, no início do estudo, não conseguia justificar as suas ideias, pois quando lhe era pedida uma justificação, as respostas eram sempre do género *não sei, não me lembro* (E1S). Quando teve que expor os seus raciocínios, em grande grupo, é verdade que ainda

[5] (R1) significa que os dados foram retirados do relatório realizado no final da tarefa *As escadas.*
[6] (R5) significa que os dados foram retirados do relatório realizado no final da tarefa *A Moldura.*

se mostrou pouco à-vontade e teve alguma dificuldade em explicar a sua opinião, mas já conseguiu justificar algumas das suas "posições".

Apesar de não se poder afirmar que a Sofia apresenta grande facilidade em expor o seu raciocínio, não se pode ignorar a sua evolução. Durante a realização da segunda entrevista, quando questionada sobre: (i) O que são padrões?; (ii) O que significa o enésimo termo?; e (iii) O que significa para ti uma variável?, conseguiu responder de forma clara e contextualizada mas de um modo muito pouco formal. Por exemplo:

> Invest: *O que são padrões?*
> Sofia: *Uma sequência de números ou de figuras que se seguem.*
> [...]
> Invest: *O que significa para ti o enésimo termo? O que é o enésimo termo? Para que serve?*
> Sofia: *Eu acho que é a fórmula que define o padrão.*

Conclusão

Para a Sofia a Matemática caracterizava-se por um conjunto de conhecimentos e técnicas que se aprendem resolvendo exercícios rotineiramente. Hoje, vê a Matemática como uma disciplina divertida que se "constrói" por sucessivas tentativas.

Gosta de trabalhar em grupo, pois desta forma o seu ritmo de aprendizagem é respeitado e, além disso, permite-lhe partilhar pontos de vista, ajudas e decisões. Daí o gosto que ela desenvolveu pela realização de tarefas de investigação. Para a Sofia as tarefas de investigação foram um desafio que ela conseguiu vencer. No início era uma aluna pouco empenhada e, no seu entender, não tinha "jeito" para a Matemática, motivo pelo qual se desinteressou um pouco pela disciplina. Actualmente é uma aluna interessada, que gosta de "brincar" com a Matemática. Consegue simplificar expressões algébricas, operar com polinómios, identificar expressões (com variáveis) equivalentes, ter "algum" sentido dos símbolos utilizados e expressar o seu raciocínio, com relativa facilidade, junto dos colegas e da professora. Assim é possível afirmar que a comunicação matemática da Sofia melhorou e, hoje ela é uma aluna que compreende a necessidade de justificar as suas afirmações matemáticas. No entanto, ainda tem alguma dificuldade quando é exigida uma maior formalização dos seus raciocínios.

Habituada a ver a Matemática como um conjunto de conhecimentos e técnicas isolados uns dos outros, ainda sente dificuldade em realizar conexões entre conteúdos e, mesmo quando as realiza, é de forma inconsciente, ou seja, não lhe faz sentido utilizar deliberadamente conteúdos aprendidos anteriormente para resolver problemas.

Em suma, a Sofia desenvolveu, com alguma expressão, a capacidade de entender e usar a linguagem abstracta da Álgebra.

José

Apresentação

O José tem 13 anos, é moreno e tem uns olhos castanhos muito vivos. Vive, na cidade onde se situa a escola, com os pais. É um aluno curioso e um pouco inseguro, mas quase sempre atento nas aulas. Confia no seu trabalho e define-se como um aluno médio pois, segundo ele, só os alunos que obtêm nível cinco de classificação é que são bons. Tem um bom relacionamento com os colegas da turma e pode-se afirmar que está bem inserido na mesma. Normalmente estuda sozinho mas quando lhe surge alguma dúvida costuma recorrer à mãe. Gosta de todas as disciplinas e considera que há muito insucesso a Matemática por esta ser uma disciplina que "obriga" os alunos a *perceber*:

> *É uma disciplina que tem que se perceber, e não estudar, estudar. Quero dizer, também tem que se estudar, só que tem mais que perceber, para se* [poder compreender] [...] *bem a matéria.* (E1J)[7]

Na aula é muito participativo pois, como ele próprio afirma, gosta de expressar a sua opinião. É um aluno que responde sempre às questões colocadas pela professora e, quando tem dúvidas, é com ela que costuma esclarecê-las. No entanto, isso não o impede de discutir as suas dúvidas com os colegas, tanto na sala de aula como fora dela.

Encara, com muito entusiasmo e curiosidade, os novos desafios e as novas propostas de trabalho. Segundo ele, em resposta ao questionário realizado no início do segundo

[7] (E1J) significa que os dados foram retirados da 1ª entrevista do José.

período, o trabalho de grupo não torna a Matemática mais fácil. No entanto, na primeira entrevista, afirmou gostar de trabalhar em grupo pois, assim, pode esclarecer dúvidas e aprender com os colegas:

> *Porque assim podemos discutir opiniões e podemos ficar a saber mais,* [com o] *que alguns colegas nos* [...] *dizem.* (E1J)

Gosta de tudo nas aulas de Matemática: *gosto de* [aprender] *coisas novas sobre a matemática,* [quanto ao] *que gosto menos* [...], *acho que* [...] [posso afirmar que não há] *nada* [que não goste] (E1J). O tipo de tarefas que mais gosta são as de investigação pois, para ele, este tipo de tarefas são as que permitem *aprender mais de uma determinada matéria.* (E1J)

A imagem da Matemática

O José tem uma visão utilitária da Matemática. Para ele, a Matemática é muito importante para o dia-a-dia e essencial para *o futuro* [inclusive a Matemática] *faz com que hajam melhores profissionais* (E1J). De acordo com o José a Matemática é, sobretudo, uma actividade individual que se entende melhor quando descoberta pelos próprios. No entanto, afirma que prefere as actividades em grupo, pois estas são facilitadoras da sua aprendizagem:

> Invest: *Quais são para ti as aulas mais estimulantes, as que tu gostas mais? São as aulas que trabalhas em grupo? Ou pelo contrário as que estás a trabalhar individualmente?*
> José: *As que trabalho em grupo.*
> Invest: *Porquê?*
> José: *Porque, assim, podemos discutir opiniões e podemos ficar a saber mais, com a ajuda do que os colegas nos dizem.*
> Invest: *Portanto, a inter-ajuda pode facilitar a aprendizagem?*
> José: *Sim.* (E1J)

De acordo com as respostas que deu ao questionário (realizado no início do segundo período) e na primeira entrevista, a Matemática tem que ser, em primeiro lugar, compreendida e só depois é que pode ser memorizada:

Invest: *E como é que tu aprendes matemática?*
José: *Tenho que a perceber primeiro e depois faço exercícios sobre a matéria.* (E1J)

Para o José a exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação é, apenas, uma forma diferente de aprender Matemática o que não significa uma aprendizagem mais significativa:

Invest: *[...] Consideras ter aprendido mais com estas aulas* [aulas de resolução de tarefas de investigação] *ou com as aulas anteriores?*
José: *Com as duas.*
Invest: *Não têm qualquer diferença? Com as duas como?*
José: *Encontro* [diferenças]. *Trabalhámos em grupo numas, e noutras fizemos exercícios individualmente e também tínhamos a explicação da professora e agora nas aulas* [de resolução de tarefas de investigação] *fizemos só trabalho em grupo.*
Invest: *Em suma, consideras que são formas diferentes de aprender, mas que aprendes exactamente o mesmo?*
José: *Sim.* (E2J)[8]

No entanto, afirmou que gosta de realizar tarefas de investigação em grupo. Segundo ele, durante a realização das tarefas é possível discutir ideias com os colegas, facto que facilita a sua aprendizagem:

Invest: *Gostaste de realizar as tarefas de investigação? Achaste que funcionaram bem? Que aprendeste mais ou de uma maneira diferente?*
José: *Sim.*
Invest: *Porquê? Porque é que gostaste? O que é que estas tarefas trazem de novo em relação ás outras?*
[...]
José: *Falavam sobre coisas novas, os padrões e tinham-se coisas diferentes para fazer.*
Invest: *Podiam ter sido dadas coisas novas de outra forma. Porque é que gostaste destas tarefas? O que é que te leva a dizer: "sim gostei muito apesar de ser diferente"?*
José: *Podíamos discutir opiniões entre o grupo, podíamos...*
Invest: *Quando são aulas em que é o professor a explicar tu consegues ter tempo para explorar as ideias que te surgem?*
José: *Nem sempre.*
Invest: *E nestas?*
José: *Nestas sim.*
Invest: *Consideras isso bom?*
José: *Sim.* (E2J)

[8] (E2J) significa que os dados foram retirados da 2ª entrevista do José.

Conexões matemáticas

Tal como o grupo da Sofia, também o grupo do José sentiu uma grande dificuldade em generalizar os padrões das tarefas *Os Números...* (Anexo 2) e *Ainda os Números...* (Anexo 3):

> *Sentimos muitas dificuldades em achar a fórmula [...]. Tínhamos todos os dados, mas não conseguíamos encontrar a sua solução.* (R2)[9]

Para eles foi difícil relacionar os dados e, consequentemente, formalizar a expressão do enésimo termo. Para o José o mais difícil foi compreender a relação entre os números de ordem e os termos, facto que lhe dificultou o entendimento da fórmula de generalização. No entanto, foi mais fácil encontrar o enésimo termo nas tarefas onde aparecem números e figuras:

> Invest: *Para generalizar, para encontrar o enésimo termo, lembraste quais eram as tarefas mais fáceis?*
> José: *Com as figuras era mais difícil, mas com os números e com as figuras e números era mais fácil do que só com figuras.*
> Invest: *E do que só com números? Só em relação à generalização. Só para o enésimo termo. Achaste alguma diferença, ou não? Ou não é significativo?*
> José: *Há diferenças, por exemplo aqui [exemplo de um padrão com números e figuras] dá muito mais hipóteses de conseguir a fórmula.*
> Invest: *Porquê? Ajudou-te olhar para a figura, é isso?*
> José: *Sim.* (E2J)

As dificuldades sentidas, tal como no caso anterior, podem ser atribuídas essencialmente à falta do suporte visual, ou seja, da existência de uma imagem pictórica.

No relatório realizado no final da tarefa *O super-chocolate* (Anexo 4) foi afirmado, pelo grupo, que conseguiram encontrar facilmente a fórmula que permite saber o número de caramelos e de bombons que se encontra numa caixa de qualquer dimensão porque recorreram à área do rectângulo:

> *Chegámos ao padrão através da fórmula que é igual à área (bombons) e depois descobrimos que se tirarmos um na altura e no comprimento temos o nº de caramelos. A representação utilizada para os bombos foi* $n \times x$ *e para os caramelos foi* $(n-1) \times (x-1)$ *em que o n é altura e o x o comprimento.* (R4)

[9] (R2) significa que os dados foram retirados do relatório realizado no final da tarefa *Os Números...*.

Também na transparência, da tarefa *A Moldura* (Anexo 5), realizada pelo grupo do José com o objectivo de dar a conhecer, aos colegas da turma, a forma como analisaram o problema, como realizaram as suas conjecturas e o modo como chegaram à generalização e respectiva expressão, se encontram referências explícitas a conceitos geométricos:

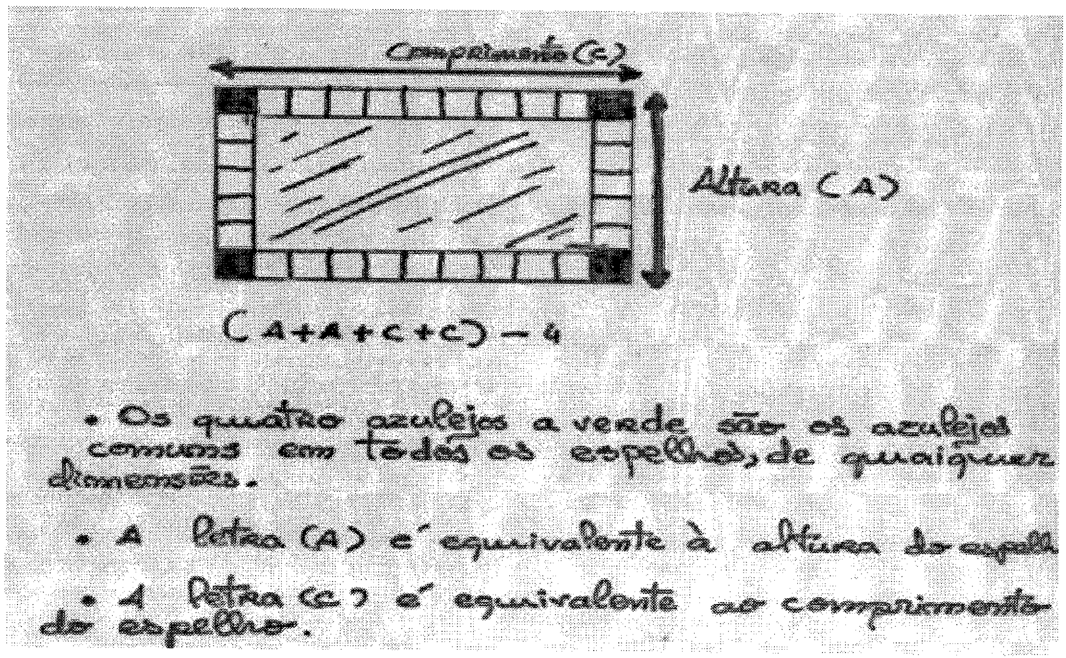


Figura 4 - transparência realizada pelo grupo do José referente à tarefa, *A Moldura* (Anexo 5).

Além disso, no relatório referiram ter encontrado a generalização do *padrão fazendo o perímetro do espelho e subtraindo 4 azulejos comuns* (R5). Segundo o José, esta tarefa é muito difícil de resolver através de uma abordagem exclusivamente numérica. Ele só descobriu a fórmula que permite saber o número de azulejos necessários à construção de qualquer espelho, quando estabeleceu a ligação do número de azulejos em redor do espelho com o perímetro da figura:

Invest: *Tens a noção a que conceitos matemáticos é que recorreram?*

José: *Recorremos ao perímetro do espelho. Fizemos vários espelhos para conseguir a fórmula e tentámos descobrir quais eram os azulejos que se repetiam em todas as figuras.*
[...]
Invest: *Recorreram a conceitos geométricos? As noções de Geometria ajudaram?*
José: *Sim. Sim.* (E2J)

A contribuição dos padrões e regularidades no entendimento da Álgebra

O José é um aluno interessado que mostra um bom domínio da maioria dos conceitos leccionados quer no presente ano lectivo, quer em anos lectivos anteriores. Associa a Álgebra ás funções e, segundo ele os padrões estão ligados à Geometria. Aquando da realização da primeira entrevista mostrou estar familiarizado com os símbolos e até mostrou alguma capacidade para os manipular:

> Invest: [...] *Já trabalhaste com expressões matemáticas?*
> José: *Sim.*
> Invest: *Então diz lá um exemplo de uma expressão.*
> [...]
> José: $y = kx$
> Invest: *Então e tens dificuldades quando trabalhas com fórmulas matemáticas?*
> José: *Não, até se percebe melhor.*
> [...]
> Invest: *Então o que é que significa para ti uma variável? Ou uma incógnita?*
> José: *É um valor que existe só que nós temos que através dos cálculos achá-lo, fazer a resolução.*
> Invest: *Então significa que, para ti, uma variável só pode tomar um valor?*
> José: *Não, podem ser muitos.*
> [...]
> Invest: [...] *E padrões?*
> José: *Padrões? Acho que sim, sim.*
> Invest: *Dá-me um exemplo de um padrão.*
> [...]
> *José: Então, um padrão é uma forma que vai sendo igual à medida que se vai espalhando, vai sendo sempre igual.*
> [...]
> Invest: *Já ouviste falar em Álgebra?*
> José: *Sim.*
> Invest: *Quando se fala em Álgebra que conteúdos é que te lembras?*
> [...]
> José: *Por exemplo, funções. E o Teorema de Pitágoras, também.* (E1J)

O grupo de trabalho onde o José está inserido, apesar de ter dois dos melhores alunos da turma, não conseguiu funcionar como grupo, ou seja, nunca conseguiram desenvolver um trabalho colaborativo. No seio do grupo houve uma competição "negativa" funcionando, sempre, em sub-grupos ou mesmo isoladamente, o que os prejudicou no seu desempenho:

Invest: *Quando recebiam a tarefa começavam a resolve-la imediatamente, ou delineavam uma estratégia?*
José: *Primeiro fizemos tudo um por si, e depois tivemos que juntar tudo e também não houve grandes discussões.*
[...]
Invest: *Durante a resolução das tarefas quem é que trabalhava com quem? Todos com todos, em subgrupos ou individualmente?*
José: *Trabalhávamos todos, pronto todos não, mas sim trabalhávamos em grupo só que dividíamos as tarefas.*
Invest: *Essa divisão era feita, por exemplo, ficando cada dois com uma tarefa ou trabalhavam cada um por si?*
José: *Cada um por si.* (E2J)

Sentiram sempre grande dificuldade em iniciar a resolução das tarefas e, durante a sua realização, mostraram pouca persistência, pouca confiança nos seus raciocínios e reduzido espírito crítico. À excepção do relatório da tarefa *O Super – chocolate* (Anexo 4) onde foi assumido que a *ficha foi relativamente fácil de realizar, devido ao trabalho de todo o grupo* (R4), todos os outros o iniciaram com a seguinte frase: *sentimos muita dificuldade em realizar a tarefa proposta.*

Desde o início que mostraram facilidade em perceber a lei de formação de cada um dos padrões apresentados mas só após muito esforço é que conseguiam descobrir a generalização. No entanto, é de salientar as capacidades de argumentar sobre ideias algébricas, como o raciocínio dedutivo e indutivo, a representação, a igualdade e a variável. Um bom exemplo disso é o relatório da tarefa *As escadas* (Anexo 1), por eles apresentado:

Sentimos algumas dificuldades em encontrar a fórmula N x 4.
Para chegarmos ao padrão N x 4 tivemos que descobrir que o número de degraus é igual ao número de setas utilizadas na base e na altura, e o número de setas utilizadas apenas nos degraus é o dobro do número de degraus, assim podemos dizer que n é igual ao número de degraus e que o 4 é número de setas utilizadas na base, na altura e nos degraus, porque o número de setas utilizadas na base e na altura são duas vezes o número de degraus e as setas utilizadas nos degraus são duas vezes o número de degraus.
A representação utilizada foi N x 4 porque é a representação que explica melhor. Utilizamos esta representação para descobriremos o número de setas utilizadas nos degraus.
Sabemos que o padrão funciona sempre porque fizemos cálculos:
$\boxed{N \times 4}$
$2 \times 4 = 8$
$30 \times 4 = 120$

Figura 5 – Extracto do relatório da tarefa *As escadas*

A análise deste relatório permite afirmar que os alunos conseguiram: (i) identificar e generalizar relações; (ii) representá-las simbolicamente; (iii) transformar expressões noutras equivalentes; e (iv) "tomar consciência" de que as relações simbólicas representam informações dadas ou desejadas.

Apesar disso, o José tal como os restantes elementos do grupo, mostrou-se pouco confiante e persistente, motivo que o levou a ter um baixo desempenho na realização das tarefas. Conseguiu perceber com facilidade a lei de formação dos padrões mas, segundo ele, teve alguma dificuldade em descobrir o enésimo termo. Apesar disso, mostrou facilidade em entender e manipular as fórmulas encontradas:

> Invest: *Tens dificuldades quando trabalhas com fórmulas matemáticas? Entendes o que elas significam quando estás a resolver uma tarefa?*
> José: *Sim, tive algumas dificuldades em encontrar* [a fórmula] *mas depois consigo percebe-la.*
> [...]
> Invest: *Para que serve o enésimo termo? Qual é o seu significado?*
> José: [...] *Aquela forma que estão a pedir serve para qualquer um, por exemplo num espelho pode servir para qualquer espelho.*
> Invest: *"Num espelho pode servir para qualquer espelho" O que queres dizer? Nessa tarefa o que te era pedido?*
> José: *Por exemplo, o número de azulejos em redor.*
> Invest: *Portanto, permite-te prever? É isso? Corrige-me se estou enganada. Permite-te prever o número de azulejos para um espelho de qualquer tamanho?*
> José: *Sim.* (E2J)

No início do estudo, durante a primeira entrevista, revelou ter alguma noção do significado de variável:

> José: *É um valor que existe só que nós temos que achá-lo através de cálculos.*
> Invest: *Então significa que, para ti, uma variável só pode tomar um valor?*
> José: *Não, pode tomar muitos.* (E1J)

Na segunda entrevista quando confrontado com a mesma questão, responde da seguinte forma:

> Invest: *O que é que significa para ti uma variável?*
> [...]
> José: *Significa qualquer termo.*
> Invest: *Significava qualquer "termo" da sequência?*
> José: *Um valor qualquer.*

Este episódio denota alguma confusão entre número de ordem e termo de sequência. Este equívoco também foi notório durante a realização das tarefas de investigação de sequências exclusivamente numéricas onde, apesar de as ter compreendido rapidamente, o José mostrou dificuldade em relacionar o número de ordem com o termo da sequência e consequentemente em chegar à generalização.

Surpreendentemente, nas aulas de Álgebra, o José foi um dos alunos mais empenhado e participativo. Este aspecto permite afirmar que o fraco desempenho do José, durante a realização das tarefas de investigação, se pode atribuir ao não funcionamento do grupo em que estava inserido. Durante as aulas evidenciou: (i) ter adquirido o sentido do símbolo; (ii) dominar o conceito de monómio e polinómio (coeficiente, parte literal e grau); (iii) saber operar com polinómios; (iv) ter aprendido a simplificar expressões algébricas; (v) ter adquirido o conceito de expressões equivalentes:

> Invest: *Olha para esta igualdade: 2×C + 2×L – 4 = (C+C+L+L) – 4. O que significa? Como é que sabemos que esta igualdade é verdadeira?*
> José: *Então, os menos quatro equivalem aos quatro azulejos comuns em todos os espelhos, e tá duas vezes C e noutro lado está C+C porque pode se pode substituir o C+C por 2×C ou dois C e a mesma coisa para a largura o L, que L+L substitui-se por 2×L, duas vez a largura.*
> [...]
> Invest: *Na generalização que vocês encontraram na última tarefa, consegues dar-me exemplos de monómios? E de polinómios?*
> José: *Sim.*
> Invest: *Então diz-me lá um monómio.*
> José: *A.*
> Invest: *E um polinómio?*
> José: *A+ A+ C+C.*
> [...]
> Invest: [...] *Podemos adicionar variáveis com significados diferentes?*
> José: *Não.*
> Invest: *Porquê?*
> [...]
> José: *Porque como têm significados diferentes não se podem adicionar, nem subtrair também.*
> [...]
> Invest: [...] *Consegues simplificar a seguinte expressão "(2×n) + (n – 2)"?*
> José: *Sim. [...] Então está (2×n) + (n – 2), então em vez de estar dois vezes n, primeiro tiramos os parênteses e depois está 2×n pode-se meter 2n e depois aqui mais n – 2 e ainda se pode simplificar mais, que é assim 2n mais 1n, tá aqui só n mas é como se tivesse um, fica 3n – 2.* (E2J)

A dificuldade do José foi a de expressar, através da escrita matemática, as regularidades encontradas. Durante a resolução do problema, apresentado ao longo da realização da segunda entrevista, a sua maior dificuldade foi formalizar o seu raciocínio mas, após ultrapassar essa etapa, simplificou a expressão e resolveu a equação com grande facilidade. Além disso, mostrou ter percebido o significado do resultado obtido no contexto do problema:

> Invest: *O que significa o 83 encontrado?*
> [...]
> José: *O 83 é a primeira página.*
> Invest: *É a segunda página?*
> José: *84.*
> Invest: *E a página seguinte?*
> José: *85.*
> Invest: *Então temos 83, 84, 85 mais...*
> José: *86, 87, 88* (E2J)

A comunicação matemática

O grupo onde o José está inserido apresentou sempre relatórios com alguma qualidade. Alguns dos alunos que fazem parte do grupo têm uma enorme facilidade em expressar as suas ideias, ou seja, conseguem com facilidade explicitar as suas conjecturas e conclusões. Desde a realização do primeiro relatório da tarefa *As escadas* (Anexo 1) que essa facilidade foi visível:

> *(...) Para chegarmos ao padrão N×4 tivemos que descobrir que o número de degraus* [número de ordem] *é igual ao número de setas utilizados na base e na altura, e o número de setas utilizadas apenas nos degraus* [número de ordem] *é o dobro do número de degraus* [número de ordem]. (R1)[10]

Além disso, como a competição intra-grupo era muito elevada foram, continuamente, obrigados a explicitar o mais correctamente possível os seus raciocínios, quer perante os colegas quer perante o professor que, neste processo, serviu muitas vezes de "árbitro". O relatório da tarefa *A Moldura* (Anexo 5) é um bom exemplo do que se acabou de referir:

> *(...) Chegamos ao padrão fazendo o perímetro do espelho e subtraindo 4 azulejos comuns. A representação utilizada foi (A + A+ C+ C) – 4 em que o A é*

[10] (R1) significa que os dados foram retirados do relatório realizado no final da tarefa *As escadas*.

a altura e o C é o comprimento, sendo subtraído por 4, que é o número de azulejos comuns em todos os espelhos. (R5)

O José sempre teve alguma facilidade na comunicação (oral) matemática, pois é um aluno que expressa as suas ideias com clareza. A apresentação, em grande grupo, dos resultados obtidos na tarefa *A Moldura* (Anexo 5) foi uma mostra disso, onde a linguagem utilizada foi explícita e adequada à situação.

Conclusão

O José é um aluno participativo e empenhado, que gosta da Matemática e das aulas de Matemática.

Para ele a Matemática é vista, sobretudo, como uma actividade individual que tem de ser compreendida e só depois trabalhada de forma mais rotineira.

Ao longo do estudo, algumas das suas ideias iniciais foram sofrendo alterações e, actualmente, o José prefere o trabalho de grupo pois admite que promove a capacidade dos alunos expressarem os seus raciocínios. Para ele, as tarefas de investigação são apenas uma forma diferente de aprender Matemática. Não se sentiu mais motivado do que em outras aulas e não considera que tenha aprendido mais e/ou melhor. Não se pode deixar de referir que o José esteve inserido num grupo que não conseguiu desenvolver qualquer tipo de trabalho colaborativo, o que leva a concluir que influenciou, negativamente, a forma de encarar esta forma de trabalho.

Durante as actividades de investigação foi evidente o estabelecimento, por parte do José, de conexões entre diferentes áreas da Matemática. Ele vê a Matemática como um conjunto de conceitos interligados, motivo pelo qual defende que é essencial utilizar, sempre que possível, os conhecimentos previamente adquiridos.

O José mostrou desde o início alguma facilidade em: (i) pensar genericamente; (ii) perceber regularidades; (iii) pensar analiticamente; e (iv) estabelecer relações entre variáveis. Assim, pode-se dizer que a este nível não sofreu qualquer evolução. Para ele, explicitar regularidades através de expressões matemáticas continua a ser uma tarefa muito difícil.

É de salientar que o José é considerado um aluno com um bom desempenho a Matemática em todo o seu percurso escolar. No entanto, não consegue generalizar um padrão (algebricamente) e poderemos afirmar que o bom desempenho do aluno está sustentado num ensino-aprendizagem-avaliação "tradicional" onde, essencialmente, são privilegiados os procedimentos e as rotinas.

Capítulo 9

Conclusões

As conclusões que a seguir se apresentam procuram dar resposta a cada uma das questões formuladas para o desenvolvimento do estudo. Foram elaboradas a partir da análise transversal de cada um dos domínios dos dois alunos e destacam tanto aspectos de semelhança como aspectos de diferença que se consideram relevantes. Sempre que possível, são feitas referências a conclusões convergentes/divergentes presentes noutros estudos.

A imagem da Matemática

A Sofia tinha uma imagem pouco positiva da Matemática. Ela definia a Matemática como uma listagem de conteúdos, de difícil entendimento, que se aprendiam através da resolução "contínua" de exercícios. O José sempre gostou de Matemática, mas via-a como uma actividade essencialmente individual.

Ambos alteraram, ao longo do estudo, a imagem que traziam da Matemática. Para a Sofia esta passou a ser vista como algo que se experimenta, investiga e discute. Ela considera a exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação um desafio divertido que "obriga" os alunos a desenvolver hábitos de pensamento. As mudanças no José foram menos acentuadas, pois para ele este tipo de actividade matemática não é garantia de uma aprendizagem mais significativa. Além disso, também afirma que este tipo de tarefas propostas não o motivaram particularmente. No entanto, acabou por afirmar que gostou do trabalhado desenvolvido aquando da realização das tarefas porque, contrariamente a outras formas de trabalhar, permitiu-lhe aprender novos conteúdos, explorando e discutindo ideias com os colegas e respeitando o seu ritmo de aprendizagem. Esta reacção era um pouco esperada, uma vez que o José era um aluno habituado a ter "boas notas" sem grande esforço e, inclusive, sempre foi um aluno que se destacou, pela positiva, dos restantes colegas da turma. No entanto, durante a realização das tarefas de investigação foi um dos alunos que sentiu alguma dificuldade, facto que lhe criou ansiedade e consequentemente alguma resistência a este tipo de trabalho. Por outro lado, é necessário referir que o grupo onde o José estava inserido não funcionara, ou seja, em vez de realizarem trabalho colaborativo passaram a maior parte do tempo em competição.

Poder-se-á referir que a exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação contribui para a construção de uma imagem mais positiva da Matemática. Esta ideia já é vinculada nos trabalhos de Orton e Orton (1999), Vale e Pimentel (2005) e Vale, Palhares, Cabrita e Borralho (2006) onde se afirma que este tipo de tarefas atraem e motivam os alunos, retirando o negativismo que tem estado associado à aprendizagem da Matemática.

Conexões matemáticas

O método de ensino "tradicional" dificulta o estabelecimento, por parte dos alunos, de conexões matemáticas. Como já foi anteriormente afirmado, a Sofia era uma aluna com dificuldades em Matemática, que se habituou a entendê-la de uma forma compartimentada. Consequentemente, o estabelecimento de conexões não fazia parte das suas aprendizagens. Pelo contrário, o José sempre afirmou que apenas era possível aprender Matemática se esta for compreendida, facto que sempre o obrigou a tentar "ligar" os diferentes conteúdos leccionados.

O estabelecimento de conexões foi unanime, todos os grupos de forma mais ou menos consciente as estabeleceram, em particular o grupo da Sofia e do José fizeram-no de uma forma bastante confiante.

Em relação a este tipo de tarefas Vale e Pimentel (2005) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que proporcionam o estabelecimento de conexões entre diferentes conteúdos, promovem a utilização de diferentes representações e a análise de diferentes relações, bem como a utilização de conceitos geométricos por forma a facilitar e simplificar a generalização. De facto, é de destacar o estabelecimento de conexões na generalidade das tarefas realizadas pelos alunos. Em particular, o José afirmou só ter compreendido o padrão existente na tarefa *A Moldura* (Anexo 5) depois de recorrer ao conceito de perímetro.

É ainda importante salientar que nas tarefas *Os números...* (Anexo 2) e *Ainda os Números...* (Anexo 3), exclusivamente numéricas, os alunos sentiram dificuldade acrescida na sua resolução pelo facto de não conseguirem estabelecer conexões. Associado a estas também está a dificuldade que os alunos têm em ordenar e relacionar dados o que, na Matemática, é uma competência essencial. Assim, como Orton e Orton (1999) afirmam, a exploração de padrões também ajuda a desenvolver a capacidade de classificar e ordenar informação.

Os resultados obtidos permitem afirmar que a exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação ajuda os alunos a estabelecer diferentes níveis de conexões com o objectivo de perceber significados (Arcavi, 2006).

Em suma, estas tarefas promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico ao permitirem estabelecer conexões matemáticas entre diferentes conteúdos, ao possibilitarem que os alunos utilizem diferentes representações e proporcionarem análises de relações entre várias expressões.

A contribuição dos padrões e regularidades no entendimento da Álgebra

A exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação permitiu o desenvolvimento do pensamento algébrico ou, mais especificamente, o sentido do símbolo, ao proporcionar que os alunos utilizem diferentes representações, identifiquem e generalizem relações, analisem os seus significados e tomem consciência da importância da verificação de dados.

Durante a realização das tarefas os alunos foram "compelidos" a estabelecer conexões, a conjecturar e a explicitar raciocínios, a formular argumentos matemáticos, a expressar e comunicar generalizações, ou seja, de acordo com Guimarães *et. al.* (2006) e Ponte (2006) os alunos estiveram a aprender Álgebra pois, segundo estes autores, estas são algumas das principais características da Álgebra.

Além disso, é importante salientar o desempenho que os alunos tiveram durante as aulas de Álgebra. Foi notória a facilidade com que aprenderam a noção de monómio e polinómio (coeficiente, parte literal e grau), operações com polinómios (adição algébrica e multiplicação), simplificação de expressões algébricas e expressões equivalentes, atingindo a generalidade dos objectivos propostos. Como Ponte (2005) afirma, ao desenvolver-se o pensamento algébrico, melhora-se a capacidade de trabalhar com o cálculo algébrico e as funções, e proporciona-se maior capacidade de lidar com estruturas matemáticas, o que traz melhorias ao nível da aprendizagem matemática (interpretando e resolvendo problemas).

Contudo, neste estudo há alguns aspectos a salientar. Como já era hábito o José mostrou-se sempre mais seguro na aquisição dos novos conteúdos, mas sentiu-se mais ansioso e manifestou sempre alguma resistência, contribuindo para a dificuldade na generalização dos padrões. A Sofia, pelo contrário, mostrou-se sempre menos segura durante a aquisição dos conteúdos mas, a partir do momento que ganhou auto-confiança, mostrou ter facilidade na manipulação simbólica e na generalização de padrões.

Há ainda a referir a dificuldade que ambos mostraram na formalização do raciocínio e na resolução do problema proposto durante a realização da segunda entrevista. São vários os factores que podem estar por detrás desta situação, onde dois dos quais não se pode deixar de mencionar. Em primeiro lugar o factor tempo que, embora na entrevista não fosse muito visível, acabou por provocar, implicitamente, alguns constrangimentos. Em segundo lugar, nunca resolveram qualquer tarefa individualmente, ou seja, apesar de existirem grupos que funcionaram mal havia sempre um colega com quem discutir ideias ou, ainda mais relevante, que desse alguma sugestão, o que não aconteceu durante a entrevista.

A noção de variável é uma das mais importantes da Álgebra mas também das mais difíceis de interiorizar significativamente. Como tal, foi difícil de se desenvolver na sua plenitude durante o período de realização do estudo. Assim, não é de estranhar que, tanto o José como a Sofia, tenham mostrado alguma dificuldade ao tentarem explicar o seu entendimento sobre o conceito de variável. Como afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), para compreender a essência da Álgebra é necessário todo um percurso que, certamente, não se resume ao tempo de realização deste trabalho, em que os alunos contactem com um grande número de experiências algébricas informais, tais como análise de padrões e relações numéricas e a sua representação e generalização.

À semelhança dos resultados obtidos no estudo de Orton e Orton (1999) é possível concluir que o estudo da Álgebra pode ser iniciado através da exploração e generalização de padrões. No entanto, é preciso estar consciente de que a exploração de padrões não resolve todos os problemas do estudo da Álgebra ou, mais especificamente, do início do estudo da Álgebra.

A comunicação matemática

Como já foi afirmado anteriormente a exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação foi, sempre, realizada em pequenos grupos e em sala de aula. Além disso, a exploração das tarefas culminava com a realização de um relatório escrito.

A Sofia, no início do estudo, era uma aluna com dificuldades na comunicação escrita e oral, ou seja, era-lhe difícil comunicar descobertas e ideias matemáticas de forma não ambígua e adequada à situação. O José, desde o início do estudo, que mostrava alguma facilidade na comunicação oral, mas teve sempre dificuldade em comunicar, através da linguagem escrita, as suas descobertas e ideias matemáticas.

Ao longo do estudo a Sofia sofreu uma grande evolução na sua comunicação oral e, inclusive, no final do estudo já lhe fazia sentido justificar os seus raciocínios, facto totalmente novo nela. É de salientar que, durante a realização das últimas tarefas, ela já realizava conjecturas matemáticas e as discutia com os colegas de forma adequada à situação.

À semelhança do que aconteceu no estudo realizado por Nunes (2004), a elaboração do relatório escrito também suscitou dificuldades. As dificuldades sentidas pelos alunos estiveram associadas à organização de raciocínios e à comunicação escrita. Por isso, não é de estranhar que à medida que o número de tarefas realizadas ia aumentando também a qualidade das justificações e conclusões melhorava. No entanto, nunca deixaram de ser pouco formais, mas não ambíguas e adequadas à situação. É importante salientar que este resultado se deve a vários factores, em primeiro lugar a familiarização com as tarefas de investigação e, em segundo, ao desenvolvimento da capacidade de explorar e generalizar padrões.

Para a Sofia a realização dos relatórios escritos serviu para aprender Matemática pois, segundo ela, obrigavam-na a sintetizar o que tinha feito ao longo da exploração da tarefa, facto que a ajudou a compreender os conceitos trabalhados.

Em suma, a exploração de padrões familiariza os alunos com relações, conexões e ajuda a criar hábitos de investigação, contribuindo para o desenvolvimento da comunicação matemática, o que vai de encontro aos resultados obtidos nos estudos realizados por Chapin (1998) e Nunes e Alves (2005). Do exposto pode-se concluir que este tipo de actividade desenvolve a capacidade dos estudantes comunicarem matematicamente.

Reflexão final

Durante a realização do estudo foram muitas as oportunidades de reflexão. Enquanto era feita a redacção deste trabalho surgiram questões relacionadas com: (i) a evolução dos currículos de Matemática; (ii) a evolução das práticas lectivas; e (iii) o fraco desempenho, dos alunos, em Matemática.

Durante muitos anos os currículos escolares de Matemática tinham como objectivo principal fornecer as bases para a formação de um pequeno número de alunos que pretendiam prosseguir estudos. No entanto, a evolução da vida moderna e o consequente crescimento da importância da tecnologia, levou à globalização da Matemática, ou seja, o domínio da Matemática tornou-se essencial para o sucesso pessoal, no emprego e até na participação activa na sociedade moderna.

> O desempenho dos melhores alunos de um país em Matemática e noutras áreas relacionadas pode ter implicações no papel que o país desempenhará no futuro no sector das tecnologias de ponta e em geral na sua competitividade à escala internacional. Pelo contrário, as deficiências em Matemática dos alunos mais fracos podem ter consequências negativas nas perspectivas profissionais e financeiras dos indivíduos e na sua capacidade de participar plenamente na sociedade (PISA 2003, Lagarto e Sousa, 2004).

Indo de encontro ao que é referido no relatório da OCDE do PISA 2003, mas sendo ainda mais específica, um aluno que não seja algebricamente competente pode vir a ter o seu futuro comprometido a nível pessoal, profissional e até como elemento activo da sociedade. No entanto, quando analisamos o referido relatório, referente a itens relacionados com a Álgebra, percebemos que 31% dos alunos portugueses estão identificados com um nível de literacia baixo versus 23% dos alunos da OCDE. Perante estes dados temos a obrigação de procurar "caminhos" que ajudem a minimizar o problema.

Será necessário mudar práticas de ensino, deixar para trás um ensino "tradicionalista" que promove a rotina e, consequentemente, a aprendizagem "isolada" de conteúdos, para passarmos a ter práticas de ensino que desenvolvam aprendizagens significativas por parte dos alunos. Ser professor de Matemática significa seleccionar, implementar e garantir tarefas que maximizem o potencial de aprendizagem dos alunos (Arcavi, 2006).

Que tipo de aula deve ser promovida para que a significação passe a ter a devida importância? Há, certamente, uma infinidade de respostas mas existe uma que reúne consenso: aulas onde os alunos sejam motivados para a aprendizagem da Álgebra (Arcavi, 2006).

O presente estudo serviu para mostrar que existe um caminho alternativo para introduzir a Álgebra. A exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação pode contribuir para o entendimento da Álgebra, permite o estabelecimento de conexões matemáticas, desenvolve a comunicação matemática através do uso de uma linguagem (escrita e oral) não ambígua e adequada à situação e melhora a imagem da Matemática. No entanto, tal como Orton e Orton (1999) afirmam, não se pode deixar de alertar para o facto de este ser apenas um dos caminhos a ter em conta aquando da introdução da Álgebra.

O desenvolvimento deste projecto revelou-se um excelente momento de aprendizagem. Fazer a gestão do currículo, nesta perspectiva, foi muito enriquecedor e gratificante. Porém, não foi fácil pensar e seleccionar as diferentes tarefas propostas neste trabalho, realizar em tempo útil as alterações necessárias e, sempre que necessário acrescentar novas tarefas. As tarefas de investigação obrigaram a uma exploração prévia, por parte do professor e antes de serem aplicadas em sala de aula, com o objectivo de encontrar estratégias de abordagem/exploração o mais diversificadas possível. Além disso, para que o trabalho fosse rentabilizado era necessário saber orientar os alunos, sem nunca lhes fornecer, explicitamente, um caminho ou uma resposta.

Outro factor a ter em conta é a distribuição dos alunos por grupo pois o sucesso deste tipo de actividade depende do funcionamento dos grupos de trabalho.

Limitações do estudo e algumas recomendações

Uma limitação que se poderá apontar é o tempo de permanência no terreno para a recolha de dados. Esta investigação teria beneficiado com o alargamento dos conteúdos explorados. Para que tal pudesse ocorrer seria necessário, em primeiro lugar, a exploração de um maior número de tarefas e, em segundo, que estas fossem mais diversificadas. Para se poder explorar um maior número de conteúdos matemáticos seria importante que a diversidade de padrões explorados incluísse um maior número de padrões quadráticos. A exploração de padrões quadráticos exige mais dos alunos, visto terem um maior grau de dificuldade. A exploração deste tipo de padrões só pode ser iniciada depois de um domínio, por parte dos alunos, dos padrões lineares (de primeiro grau) pois, caso contrário, corre-se o risco de os alunos se desmotivarem. Um bom exemplo disso é a prestação dos alunos na exploração da tarefa *Os números...* (Anexo 2), que conduzia a uma sequência quadrática. A dificuldade foi notória, criando, nos alunos, um desinteresse pela tarefa ao ponto de acreditarem que já não conseguiam generalizar pois, segundo eles, já estava a acontecer "o habitual", ou seja, as tarefas já tinham atingido um nível de dificuldade tal que já não conseguiriam resolver mais alguma. Assim, percebe-se que o alargamento de conteúdos obrigaria a um alargamento de aulas observadas, o que já não era possível acontecer.

Com este estudo pretendeu-se compreender de que forma é que os padrões num contexto de tarefas de investigação podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Os resultados obtidos, embora positivos, podem estar associados a aspectos particulares do trabalho realizado. Contudo, fizeram emergir novas questões a serem investigadas, como por exemplo: Os padrões num contexto de tarefas de investigação podem contribuir para o entendimento de outros domínios matemáticos, sem ser o domínio da Álgebra? Quais as vantagens e limitações da exploração de padrões aparecer como um dos conteúdos dos programas do terceiro ciclo do ensino básico? Que outras estratégias poderão ser utilizadas por forma a melhorar o entendimento da Álgebra? De que forma se desenvolve o sentido do símbolo? De que forma os professores, em ambiente de colaboração, poderão promover e estimular o desenvolvimento do sentido do símbolo?

Estas novas questões de estudo podem ser vistas como desafios importantes não só para os professores mas também para a investigação em educação matemática.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica.* Lisboa: Ministério da Educação.

Arcavi, A. (2006). El desarrolo y el uso del sentido de los símbolos. Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Bishop, J. W. (1997). *Middle School students' Understanding of Mathematical Patterns and Their Symbolic Representations.* Chicago: Annual Meeting of the American Educational Research Association.

Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., Rocha, I. e Serrazina, L. (2006). Números e Álgebra: desenvolvimento curricular. Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 65-92). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Canavarro, A. (1993). *Concepções e práticas de professores de Matemática: Três estudos de caso.* Lisboa: APM.

Chapin, S. (1998). Mathematical Investigations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3,* (5), 332-338.

Davis, P., e Hersh, R. (1995). *A experiência matemática.* Lisboa: Gradiva.

Day, R. e Jones, G. (1997). Building Bridges to Algebraic Thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School, 2,* (4), 208-212.

Devlin, K. (1998). *Life by the numbers.* NY:John Wiley &Sons, Inc.

Fouche, K. (1997). Algebra for Everyone: Start Early. *Mathematics Teaching in the Middle School, 2,* (4), 226-229.

Goldenberg, E. P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de matemática. Em P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Ed.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 1-15). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Guimarães, F. Arcavi, A. Gómez, B. Ponte, J. P. e Silva, J. N. (2006). O ensino aprendizagem dos Números e da Álgebra: Que problemas, que desafios? Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 361-

379). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Herbert, K e Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning, *Teaching Children Mathematics, 3*, 340-345.

Lagarto, M. e Sousa, O. (2004). *O rendimento dos alunos em matemática: Capítulo 2 do Relatório PISA 2003*. Lisboa: Santillana-Constância

Lannin, J.K. (2004). Developing Mathematical Power by Using Explicit and Recursive Reasoning. *Mathematics teacher, 98*, (4), 216-223.

Martins, C., Maia, E., Menino, H., Rocha, I., Pires, M. V. (2002). O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da matemática. Em J.P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo e A. F. Dionísio (Org), *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 83-106). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Matos, J. F. e Carreira, S. P. (1994). Estudos de caso em Educação Matemática – Problemas actuais. *Quadrante, 3*, (1), p. 19-53.

ME-DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME-DES (2001, 2002). *Matemática A (10.º, 11.º, 12.º anos)*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário. (Retirado em 15 de Julho de 2006 de http://www.dgidc.min-edu/programas/prog_hm.asp)

ME-DGEBS (1991b). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem – 3º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Nunes, C. (2004). *A avaliação como regulação do processo de ensino-aprendizagem da Matemática – um estudo com alunos do 3º ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: APM.

Nunes, C. e Alves, M. (2005). Desenvolvendo o pensamento algébrico com actividades de investigação. Em Grupo de Trabalho de Investigação – GTI (Org.), *O Professor e o Desenvolvimento Curricular* (pp.249-271). Lisboa: APM.

Orton, A. (1999) (Ed.). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. Londres: Cassel.

Orton, A. e Orton, J. (1999). Pattern and Approach to Algebra. Em A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104-124). Londres. Cassel.

Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. Em P. Abrantes, L. C. Leal, e J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 7-14). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa prática. In Grupo de Trabalho de Investigação – GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85*, 36-42.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ponte, J. P., Brocardo, J., e Oliveira, H. (2003). Investigações no currículo. Em J. P. Ponte, J. Brocardo e Oliveira, H. (Ed.), *Investigações matemáticas na sala de aula* (pp.55-70). Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H. e Varandas, J. (1999). Investigando as aulas de investigações matemáticas. Em P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, e L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 133-151). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Porfírio, J. e Oliveira, H. (1999). Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. Em P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 111- 118). Lisboa: CIEFCUL e APM.

Ramalho, G. (2004). *PISA 2003, Resultados do estudo internacional: Primeiro relatório nacional.* Lisboa: ME, Gave.

Sandefur, J. e Camp, D. (2004). Paterns: Revitalizing Recurring Themes in School Mathematics. *Mathematics Teacher, 98*(4), 211.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M. e Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. Em J.P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo e A. F. Dionísio (Org), *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 83-106). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Saraiva, M. (2002). *O conhecimento e o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática. Um projecto colaborativo* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Segurado, I., e Ponte, J. P. (1998). Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo. *Quadrante, 7*(2), 5-40.

Silver, E. A. (1997). "Algebra for All" – Increasing Students' Access to Algebraic Ideias, Not Just Algebra Courses. *Mathematics Teaching in the Middle School, 2*, (4), 204-207.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema, 14*, 66-91.

Soares, J., Blanton, M. e Kaput, J. (2005). Thinking Algebraically across the Elementary School Curriculum. *Teaching Children Mathematics, Dezembro,* 228-235.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. e Hernandez, J. (1989). *Iniciación al Algebra.* Madrid: Editorial Sintesis, S. A.

Star, J. R., Herbel-Eisenmann, B. A. e Smith J. P. (2000). Algebraic Concepts: What`s Really New in New Curricula? *Mathematics Teaching in the Middle School, 5*, (7), 446-451.

Tall, D. (1992). The transition from arithmetic to algebra: number patterns or proceptual programmming? *New Directions in Algebra Education*, (pp. 213-231). Brisbane: Queensland University of Technology.

Tuckman, B. W. (2000). *Manual de investigação em educação.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., e Borralho, A. (2006). Os padrões no Ensino-Aprendizagem da Álgebra. Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 193-212). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

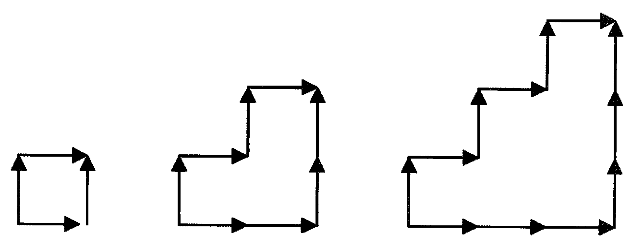
Vale, I., Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática, 85*, 14-22.

Yin, R. K. (1989). *Case study research: Design and methods.* Newbury Park, CA: Sage.

Anexos

Anexo 1 – Tarefa de investigação 1[11]

As escadas



1. Desenha a escada seguinte e descobre o número de setas usadas em cada escada.

2. Explica como é que se pode obter o número de setas necessárias para fazer uma escada com 30 degraus.

3. Será que consegues prever o número de setas necessárias para fazer uma escada com **n** degraus?

Bom Trabalho!

[11] Adaptado de Vale e Pimentel, 2005

Anexo 2 – Tarefa de investigação 2

Os números...

Observa a seguinte sequência:

2, 6, 12, 20,....

1. Descobre o sexto termo.

2. Descobre o enésimo termo. Explica o teu raciocínio.

Bom Trabalho!

Anexo 3 – Tarefa de investigação 3

Ainda os números...

Observa a seguinte sequência:

1, 4, 7, 10, 13,...

3. Descobre o oitavo termo.

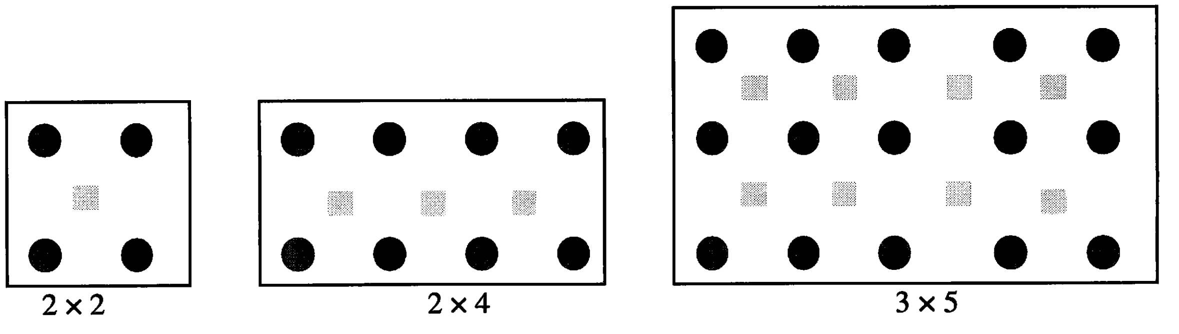
4. Descobre o enésimo termo. Explica o teu raciocínio.

Bom Trabalho!

Anexo 4 – Tarefa de investigação 4[12]

O super – chocolate

O super-chocolate é apresentado em caixas onde os caramelos estão dispostos no centro de cada uma das filas de bombons, como mostra a figura.



As dimensões de cada caixa dizem-nos quantas linhas e quantas colunas de bombons tem cada caixa.

1. Quantos caramelos há em cada caixa? E bombons?
2. Quantos bombons há numa caixa com dimensões 50 × 52? E caramelos?
3. Encontra um método que te permita saber o número de caramelos e de bombons que se encontra numa caixa de qualquer dimensão.

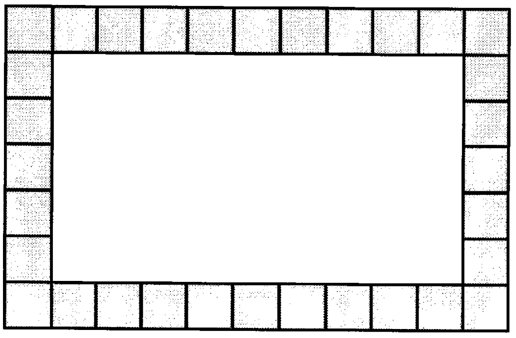
Bom Trabalho!

[12] Adaptado de Vale e Pimentel, 2005

Anexo 5 – Tarefa de investigação 5[13]

A Moldura

A Moldarte faz molduras em espelhos rectangulares formadas por azulejos quadrados, como mostra a figura.



4. Quantos azulejos são necessários para fazer o espelho representado na figura anterior?
5. Desenha espelhos de várias dimensões. Explica por palavras tuas, recorrendo a números, a tabelas, etc., o número de azulejos que são necessários para colocar à volta de um espelho com quaisquer dimensões.
6. Tenta encontrar uma fórmula que permita saber o número de azulejos necessários à construção de qualquer espelho.

Bom Trabalho!

[13] Adaptado de Vale e Pimentel, 2005

Anexo 6 – Tarefa de investigação preliminar 1

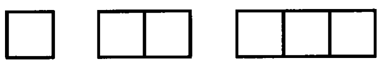
Padrões!

1) Descobre os dois termos seguintes em cada uma das sequências:

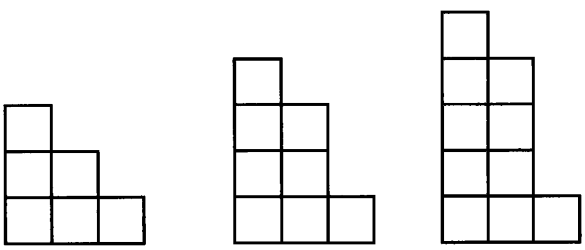
1.1) 2, 5, 8, 11,...

1.2) 1, 3, 6, 10,...

1.3) 1, 2, 5, 10,...

1.4)  ....

2) Observa as seguintes torres:



1 andar 2 andares 3 andares

2.1) Quantos blocos são necessários para construir uma torre de 5 andares? E de 6?

2.2) Quantos blocos são necessários para construir uma torre de 20 andares?

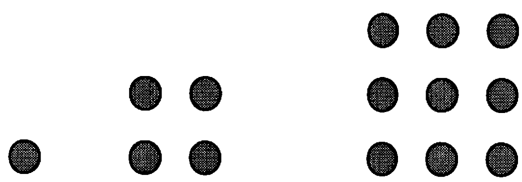
2.3) Quantos blocos são necessários para construir uma torre de 100 andares?

2.4) Quantos blocos são necessários para construir uma torre de **n** andares?

Bom Trabalho!

Anexo 7 – Tarefa de investigação preliminar 2

Os quadrados....



1 4 9

Ordem	1	2	3	4				
Nº de pintas	1	4						

Os três primeiros números quadrangulares estão representados no diagrama anterior.

1. Desenha um diagrama semelhante ao anterior, descobre os seguintes três números quadrangulares e completa a tabela de resultados.

2. Explica como é que se pode obter o vigésimo número quadrangular.

3. Será que consegues prever o número de pintas em qualquer ordem?

Bom Trabalho!

Anexo 8 – Tarefa de investigação preliminar 3

A festa do João

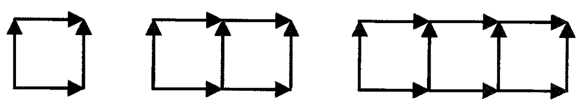
O João faz anos na próxima sexta-feira e pretende dar uma festa na sua casa.
Ele pretende sentar os convidados em mesas rectangulares. É possível sentar 4 pessoas por mesa. Quando se juntam 2 mesas é possível sentar 6 pessoas.

Quantas pessoas consegue sentar o João, se juntar 3 mesas? E 4 mesas? E 100 mesas? E **n** mesas?

Bom Trabalho!

Anexo 9 – Tarefa de investigação preliminar 4[14]

As cancelas



1. Desenha a cancela seguinte e descobre o número de setas usadas em cada cancela.

2. Explica como é que se pode obter o número de setas necessárias para fazer a trigésima cancela.

3. Será que consegues prever o número de setas necessárias para fazer a enésima cancela.

Bom Trabalho!

[14] Adaptado de Vale e Pimentel, 2005

Anexo 10 – Conteúdo do relatório

No relatório devem responder às seguintes questões:

- Que dificuldades sentiram?
- Como é que chegaram ao padrão?
- Que representação usaram?
- Como é que sabem que o modelo encontrado funciona sempre?

Podem, sempre que acharem pertinente, acrescentar qualquer outra ideia que vos surja, relacionada com a resolução da tarefa de investigação.

Anexo 11 – Guião de observação de aulas

Tarefa realizada:

Data:

Trabalho de grupo (grupos fixos):

A	B	C	D	E
José	Afonso	Maria Ana	Irene	Dora
Carlos	Hélia	Paulo	Francisco	Fernando
Telmo	Rute	Susana	Renata	Isabel
Júlia	António	Gui	Sofia	

Tempo de realização da Tarefa:

Funcionamento dos grupos (Valores/atitudes):

1. Distribuição de tarefas dentro do grupo
   (Como? Por quem?)

2. Tipo de interacções

   (Quem fala com quem? Sobre o quê?)

3. Trabalho colaborativo

   (Quem decide o quê? Há algum aluno que se sobreponha aos restantes?)

4. Grau de envolvimento e de sucesso na realização da tarefa

   (Sabem por onde começar? Existe alguma confusão no início? Revelam espírito crítico? Têm confiança nos seus raciocínios?)

<u>Funcionamento dos grupos</u> (Relacionado com as questões específicas):

1. Padrões/regularidades

   (Dificuldades na procura de padrões? Conseguem formular generalizações com facilidade? Demonstram dificuldades em ambas?)

Os padrões num contexto de tarefas investigação permitem (ou não)...

2. Fórmulas

   (Percebem o seu significado no contexto de situações concretas? Mostram aptidão para as utilizar na resolução de problemas?)

3. Conexões matemáticas

   (Realizam ou não? Com ou sem facilidade?)

4. Comunicar descobertas e ideias matemáticas

   (Através do uso de uma linguagem escrita? Oral? Ambas? De forma não ambígua? Adequada à situação?)

Aspectos relevantes a registar

Comentários

Anexo 12 – Autorização para a realização das entrevistas

Declaração

Declaro que autorizo o meu educando ________________________________
____ a realizar entrevistas com a professora Elsa Maria de Figueiredo Isabelinho Domingues Barbosa, no âmbito do trabalho para tese de Mestrado em Didáctica da Matemática sobre padrões.

Será garantido o anonimato, em qualquer referência feita no texto escrito ao conteúdo das entrevistas.

Data ____/ 02 / 2006

Assinatura

____

Anexo 13 – Guião da primeira entrevista aos alunos

Identificação do aluno

- Nome
- Idade
- Percurso escolar e níveis obtidos anteriormente.

Concepções sobre a Matemática

- Dá exemplos de coisas que aprendeste de Matemática, neste ano lectivo? E nos anos anteriores?
- O que mais gostas nas aulas de Matemática? E o que menos gostas?
- Consideras-te um aluno bom, médio ou fraco a Matemática?
- Porque achas que há alunos com dificuldades em Matemática? E alunos bons em Matemática?
- Como é que aprendes Matemática?
- Como costumas estudar Matemática? Estudas sozinho ou com ajuda de alguém?
- Como te sentes quando o professor indica que se vai fazer uma tarefa nova?
- Que tipo de tarefa gostas mais de realizar nas aulas de Matemática (exercícios, problemas, tarefas de investigação)? Porquê?
- Achas importante estudar Matemática? Porquê?

Concepções sobre a aula de Matemática

- Na aula, costumas responder às questões colocadas pela professora?
- Tomas iniciativa de colocar questões à professora?
- Costumas trocar impressões com os teus colegas?
- Se tivesses que explicar a um rapaz de outro país como são as aulas de Matemática, o que dirias?
- Como é para ti um bom professor de Matemática?

- Quais são para ti as aulas mais estimulantes? São as que trabalhas em grupo ou pelo contrário as que trabalhas individualmente? Porquê?

Concepções sobre Álgebra

- Já trabalhaste com expressões matemáticas? Dá-me exemplos.
- Tens dificuldades quando trabalhas com fórmulas matemáticas? Entendes o que significam?
- O que significa para ti uma variável? Uma incógnita?
- Já ouviste falar em sequências? Dá-me um exemplo.
- Já ouviste falar em regularidades? Dá-me um exemplo.
- Já ouviste falar em padrões? Dá-me um exemplo.
- Já ouviste falar em Álgebra? De que matérias te lembras quando falo em Álgebra? Dá-me exemplos.

Anexo 14 – Guião da segunda entrevista aos alunos

Identificação do aluno

- Nome

1ª Parte

Opiniões sobre a aula de Matemática

- Consideras ter aprendido mais com estas aulas ou com as aulas anteriores? Porquê?
- Gostaste de trabalhar em grupo? Porquê?
- O que mais gostaste nas últimas aulas? E o que menos gostaste?
- Gostaste de realizar as tarefas de investigação? Porquê?
- Se tivesses que explicar a um rapaz de outro país como foram estas, últimas, aulas de Matemática, o que dirias?

Dinâmicas do trabalho de grupo

Quando vos era distribuída uma tarefa:

- Quem é que a começava a resolver? Todos em conjunto? Alguém em particular? Porquê?
- Começavam-na a resolver imediatamente? Sabiam qual a estratégia a utilizar? Como é que faziam?
- Durante a resolução das tarefas quem é que trabalhava com quem? Todos com todos? Ou formavam sub grupos? Ou trabalhavam individualmente?
- Quando conseguiam uma resposta o que faziam? Tentavam confirmar o vosso resultado ou chamavam a professora? Porquê?
- Quando não conseguiam chegar logo ao resultado esperado, o que faziam? Tentavam outra estratégia? Tentavam perceber o erro cometido? Porquê?

Concepções sobre Álgebra

- O que são padrões? Dá-me um exemplo.
- Quais foram, para ti, as tarefas mais fáceis de realizar? As que tinham números e figuras? Ou as que apenas tinham números? Porquê?
- Tens dificuldades quando trabalhas com fórmulas matemáticas? Entendes o que significam quando estás a resolver uma tarefa?
- O que significa o enésimo termo? Para que serve?
- O que significa para ti uma variável? Dá-me um exemplo.
- Depois de perceberes o padrão, consegues generaliza-lo? Quais são as dificuldades que sentes? Porquê?

2ª Parte

Questões associadas à última tarefa:

- Depois de leres a tarefa o que fizeste? Porquê?
- O que fizeste para encontrar a fórmula pedida na última alínea? Porquê?
- (Sofia) O que significa $2\times C + 2\times L - 4$?
- (José) O que significa $(A+A+C+C) - 4$?
- A que conceitos Matemáticos recorreste? Porquê?
- Como é que percebeste que o modelo encontrado funciona sempre?
- $2\times C + 2\times L - 4 = (C+C+L+L) - 4$

  O que significa? Como é que sabemos que esta igualdade é verdadeira?

3ª Parte

Ligações com a Álgebra

- Na generalização que fizeram na última tarefa, consegues dar-me exemplos de monómios e de polinómios?
- Podemos adicionar variáveis com significados diferentes? Porquê?
- Simplifica esta expressão: (2xn) + (n – 2)
- Os parênteses são necessários na expressão anterior? Fazem alguma diferença? Porquê?
- Como é que sabemos o grau de um polinómio? Dá-me um exemplo de um polinómio de 2º grau e de um monómio de 1º grau.

4ª Parte

Resolução de um problema

Num dado livro, a secção de assuntos relacionados com a poluição tem 6 páginas consecutivas. A soma dos números das 6 páginas é 513. Quais são os números destas páginas?

Anexo 15 – Questionário[15]

Nome:___________________________________ **Nº**____ **Data:** __/__/__

Com este questionário pretendo conhecer:

- O que é para ti a Escola
- O que é para ti a Matemática

Responde às seguintes questões **assinalando com uma circunferência** o número (de 1 a 5) que melhor corresponde à tua opinião.

Discordo totalmente	Discordo ligeiramente	Não concordo nem discordo	Concordo ligeiramente	Concordo totalmente
1	2	3	4	5

1ª Parte

1. A escola é importante para o futuro.	**1 2 3 4 5**
2. A escola é divertida.	**1 2 3 4 5**
3. Na escola são transmitidos conhecimentos.	**1 2 3 4 5**
4. Na escola fazem-se amigos.	**1 2 3 4 5**
5. Na escola as aulas são o mais importante.	**1 2 3 4 5**
6. As matérias leccionadas na escola são desinteressantes.	**1 2 3 4 5**
7. As aulas onde se desenvolve trabalho de grupo são mais estimulantes.	**1 2 3 4 5**

2ª Parte

1. A Matemática é importante para o dia-a-dia.	**1 2 3 4 5**
2. A Matemática ajuda a desenvolver o raciocínio.	**1 2 3 4 5**
3. A Matemática é sobretudo uma actividade individual.	**1 2 3 4 5**
4. Quando somos nós a descobrir compreendemos melhor a Matemática.	**1 2 3 4 5**
5. Os problemas de Matemática têm uma e uma só resposta.	**1 2 3 4 5**
6. A Matemática memoriza-se.	**1 2 3 4 5**
7. A Matemática compreende-se.	**1 2 3 4 5**
8. A Matemática torna-se mais fácil quando trabalhada em grupo.	**1 2 3 4 5**

[15] Baseado no Questionário utilizado por Nunes, C. (2004). *A avaliação como regulação do processo de ensino-aprendizagem da Matemática: Um estudo com alunos do 3º ciclo do Ensino Básico.* Lisboa: APM.

Anexo 16 – Comunicação aos Encarregados de Educação

Desde o ano lectivo anterior que me encontro a fazer Mestrado em Didáctica da Matemática, estando no presente ano lectivo a realizar a tese de Mestrado. Neste âmbito irei realizar um estudo na turma do 8º D, onde tenho por objectivo ajudar a desenvolver, nos alunos, o sentido de variável permitindo um melhor desempenho no domínio da Álgebra e Funções. Pretendo também melhorar a comunicação (escrita e oral) matemática.

Toda a unidade didáctica será leccionada dentro do exigido no Currículo Nacional do Ensino Básico.

Com os melhores cumprimentos,

A professora de Matemática

Elsa Barbosa