UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Um Teorema de DeMoivre-Laplace de Ordem arbitrária

Uma dissertação apresentada por

Helena Isabel Silva Gião

Para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Orientador: Professor Doutor Imme van den Berg

Esta dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri

Mestrado em Matemática Aplicada
Biénio 2001 / 2003

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Um Teorema de DeMoivre-Laplace de Ordem arbitrária

Uma dissertação apresentada por

Helena Isabel Silva Gião

Para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Orientador: Professor Doutor Imme van den Berg

Esta dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri

Mestrado em Matemática Aplicada
Biénio 2001 / 2003

"Esta dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri"

Um Teorema de DeMoivre-Laplace de Ordem Arbitrária

Índice

Resumo

Visto a uma escala apropriada, a família de coeficientes binomiais é infinitamente próxima de uma superfície descrita por uma função de Gauss. Neste trabalho mostra-se que nesta escala os quocientes de diferenças dos coeficientes binomiais de ordem n são infinitamente próximos das derivadas parciais da função de Gauss de ordem n. Resultado que se denomina como teorema de DeMoivre-Laplace de ordem arbitrária.

A transição discreto-contínuo faz-se baseada no teorema da sombra contínua. Para provar a transição de funções discretas para funções contínuas de ordem n é necessário estudar o conceito de função de classe S^n. Uma condição necessária para uma função ser de classe S^n é que o quociente de diferenças de ordem n seja uma função que toma valores limitados para argumentos limitados e é S-contínua.

Abstract

When appropriately scaled, the family of binomial coefficients is infinitely close to a surface described by the Gaussian distribution. In this work it is shown that at this scale the difference quotients of the binomial coefficients of order n are infinitely close to the partial derivatives of order n of the Gaussian distribution. This result constitutes a DeMoivre-Laplace theorem of arbitrary order.

The transition from the discrete to the continuous uses the theorem of the continuous shadow. To prove this transition from discrete functions to continuous functions at order n, it is necessary to study the concept of function class S^n. A necessary condition for a function to be of class S^n is that the difference quotient of order n takes limited values for limited arguments and is S-continuous.

Agradecimentos

Após a realização deste trabalho, cabe-me agradecer a todas as pessoas com quem directa ou indirectamente partilhei preocupações, reflexões e ansiedades. Para todas elas um muito obrigada. Agradeço especialmente a colaboração:

- do Professor Imme van den Berg, por ter aceite orientar este trabalho, pela forma minuciosa com que o fez, pela disponibilidade e entusiasmo demonstrados;

- do João, pelo incentivo e positivismo que sempre me encorajou nos momentos mais difíceis;

- da Beatriz, pela boa disposição e compreensão demonstrados em todos os momentos em que ficou privada da minha companhia.

Introdução

O objectivo deste trabalho é a obtenção de um teorema de DeMoivre-Laplace de ordem arbitrária, ou seja que a aproximação da família dos coeficientes binomiais, na escala normalizada e centrada -chamada função binomial- à função de Gauss se mantem a todas as ordens. Para provar esta transição de funções discretas para funções contínuas de ordem n é necessário estudar o conceito de função de classe S^n. No âmbito da análise não standard, a noção de ser de classe S^n é uma analogia a ser de classe C^n, aplicável a funções discretas.

Este trabalho é uma extensão do artigo "A higher order time-dependent DeMoivre-Laplace theorem" de Imme van den Berg [7], onde se mostra que a aproximação referida se mantinha até à primeira e segunda ordem. Recorda-se que a família de coeficientes binomiais com parâmetro ilimitado é infinitamente próxima na escala mencionada de uma superfície, descrita pela função de Gauss. Aqui mostra-se nesta escala que os quocientes de diferenças dos coeficientes binomiais de ordem n são infinitamente próximos das derivadas parciais da função de Gauss de ordem n.

Este trabalho é distinto de uma outra abordagem da assimptótica de ordem superior dos coeficientes binomiais feita por Francine Diener e Marc Diener [2], em termos duma expansão assimptótica de um tipo especial. Observa-se que seria interessante investigar num trabalho futuro a ligação entre as duas abordagens.

Ao longo do trabalho serão apresentados alguns conceitos e resultados novos necessários à realização do objectivo. Pressupõe-se alguns conhecimentos, da análise não standard elementar e de processos estocásticos.

Historicamente já vários conceitos não standard de regularidade de funções foram apresentados. Os conceitos de S-continuidade, S-diferenciabilidade e S-integrabilidade foram introduzidos por Robinson [6]. Funções de classe S^0, classe S^1 e mesmo de classe S^n foram introduzidas por F. Diener em [3], mas estas definições só se aplicam no contexto do contínuo. V. Neves [5] considerou convergência de discretizações não standard de funções standard de classe C^n. A definição de função de classe S^1 e de função de classe S^2, aplicável às funções internas e discretas, que se utiliza no trabalho é dada em [7] e aqui vamos estender a noção a todas as ordens standard. Chama-se a classe de funções acima obtida, as funções de classe S^n.

Mostra-se um teorema que faz a transição de funções de classe S^n para funções de classe C^n. Aplica-se este teorema à função binomial afim de obter o teorema de DeMoivre-Laplace de ordem arbitrária.

A estrutura do trabalho é a seguinte. No capítulo um, começa-se por tratar os conceitos não-standard de regularidade de funções reais que se referem em particular à continuidade. Observa-se as regras de conservação da S-continuidade após operações algébricas (adição, multiplicação e inversa de uma função). Recorda-se também o teorema do limite central de DeMoivre-Laplace de ordem zero.

No capítulo dois apresentam-se estimativas dos quocientes de diferenças da função binomial de primeira e segunda ordem na variável espaço e de primeira ordem na variável tempo. Além disso relaciona-se também o quociente de diferenças da função binomial de ordem n na variável t com o quociente de diferenças da função binomial de ordem $2n$ na variável x.

Nos capítulos três e quatro estudam-se as funções discretas de classe S^n no geral, no capítulo três apresentam-se e demonstram-se propriedades de regularidade (S-continuidade, S-diferenciabilidade e S-integrabilidade) de funções discretas e no capítulo quatro apresentam-se e demonstram-se a analogia entre as propriedades de regularidade de funções discretas e de funções contínuas de classe C^n.

No capítulo cinco, aplica-se o que foi demonstrado nos capítulos anteriores no caso concreto da função binomial. Começa-se por demonstrar que a função $b(t,x)$ é de classe S^{mn}, segue-se a demonstração do teorema de DeMoivre-Laplace de ordem arbitrária.

Capítulo 1

S-Continuidade e teorema de DeMoivre-Laplace

Este primeiro capítulo tem como objectivos recordar a noção de S-continuidade e como a distribuição binomial pode ser aproximada pela distribuição normal, um resultado conhecido como o teorema de DeMoivre-Laplace. A família de coeficientes binomiais $B(\nu, j) = \binom{\nu}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}$ com ν e j a variar é uma função S-contínua numa escala discreta, tornando-se perto de uma superfície descrita pela função de Gauss, sendo esta contínua, está-se perante a transição da S-continuidade para a continuidade.

Na secção 1.1 define-se a propriedade de ser uma função de classe S^0, como sendo uma função que toma valores limitados para argumentos limitados e é S-contínua. Apresenta-se também propriedades de regularidade associadas a operações de funções de classe S^0.

Na secção 1.2 recorda-se o teorema de DeMoivre-Laplace. E refere-se que a aproximação da função binomial à função de Gauss mantem-se até à primeira e segunda ordem. Sendo o objectivo deste trabalho mostrar que a proximidade entre a família de coeficientes binomiais e a superfície Gaussiana se mantem a todas as ordens.

1.1 S-Continuidade

A noção de S-continuidade foi introduzida por Robinson, e era usada como uma caracterização não standard da continuidade de funções reais standard. Esta noção será aplicada a funções discretas, embora as funções contínuas também possam ser S-contínuas. Daqui advém a necessidade de explicar o conjunto onde as funções discretas são definidas. A recta real é similar a um conjunto discreto de números reais, se a distância entre dois pontos sucessivos é sempre infinitesimal. Se a distância δx é constante, o conjunto escreve-se $\mathbb{X} = \{k\delta x \ : \ k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Neste contexto aplica-se o conceito de S-continuidade.

Demonstram-se propriedades de regularidade associadas a operações de funções de classe S^0: a soma e o produto de duas funções de classe S^0 é uma função de classe S^0 e a inversa multiplicativa de uma função apreciável de classe S^0 é de classe S^0.

Definição 1 *Seja $n \in \mathbb{N}$ standard e $x \in \mathbb{X}$. A função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ é S-contínua no ponto x se para todo $y \in \mathbb{X}$ tal que $y \simeq x$ se tem $f(y) \simeq f(x)$.*

Definição 2 *Seja $n \in \mathbb{N}$ standard e $x \in \mathbb{X}$. A função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ é de classe S^0 sobre $\mathbb{X}$ se f é limitada e S-contínua para todo $x \in \mathbb{X}$ limitado.*

Exemplo 3 *Apresentam-se alguns exemplos de funções de classe S^0.*

1. Uma função constante e limitada é de classe S^0.

2. As funções $f(x) = x^2$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$, são funções de classe S^0 pois se f toma valores limitados para argumentos limitados, logo f é limitada sobre o conjunto dos limitados.

3. A função $e(x) \equiv (1+\delta x)^{\frac{x}{\delta x}}$ é de classe S^0. Com efeito para x limitado tem-se $e(x) \simeq e^x$, então $e(x)$ é limitado. Além disso, se $y \simeq x$, $e(x) \simeq e^x \simeq e^y \simeq e(y)$.

Teorema 4 *Sejam $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ e f, g duas funções de classe S^0. Então*
$i)$ $f + g$ é de classe S^0,
$ii)$ $f \times g$ é de classe S^0.

Demonstração: $i)$Seja $x \in \mathbb{X}$ limitado, então $f(x)$ e $g(x)$ são limitadas pois f e g são de classe S^0; como a soma de números limitados é ainda um número limitado vem que $f(x) + g(x) = (f+g)(x)$ é limitado. Sejam $x, y \in \mathbb{X}$ limitado com $x \simeq y$. Então $f(y) + g(y) \simeq f(x) + g(x)$. $ii)$Seja $x \in \mathbb{X}$ limitado, então $f(x)$ e $g(x)$ são limitadas pois f e g são de classe S^0, logo $f(x) \times g(x) = (fg)(x)$ é limitado. Sejam $x, y \in \mathbb{X}$ limitados com $x \simeq y$. Então $f(y) \times g(y) \simeq f(x) \times g(x)$. ■

Teorema 5 *Sejam $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ de classe S^0 com apenas valores apreciáveis para argumentos limitados. Então $\dfrac{1}{f}$ é de classe S^0.*

Demonstração: Seja $x \in \mathbb{X}$ limitado então $f(x)$ é limitado; como x é limitado então $f(x)$ é apreciável logo $\frac{1}{f(x)}$ é limitado. Sejam $x, y \in \mathbb{X}$ limitados tais que $x \simeq y$ então $f(x) \simeq f(y)$ e como $f(x)$ e $f(y)$ são apreciáveis pode concluir-se $\frac{1}{f(x)} \simeq \frac{1}{f(y)}$. ∎

Exemplo 6 *Seja f de classe S^0, nem sempre $\frac{1}{f}$ é de classe S^0.*

A função $f(x) = \frac{1}{1+x}$ é limitada em $\mathbb{R} \setminus (-1 + \oslash)$ e infinitamente grande quando $x = -1 + \oslash$. Além disso se $y = x + \varepsilon$ com $\varepsilon \simeq 0$, $f(y) - f(x) = \frac{-\varepsilon}{(1+x)(1+x+\varepsilon)} \simeq 0$ se $x \not\simeq -1$ ou seja f é S-contínua excepto infinitamente próximo de -1. De facto mostra-se que f não é S-contínua próximo de -1. Se $x = -1 + \delta$, $\delta \simeq 0$ então $f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-1+\delta} = \frac{1}{\delta}$. Se $y = -1 + 2\delta$, $\delta \simeq 0$ então $f(y) = \frac{1}{2\delta}$. Logo $f(y) - f(x) = -\frac{1}{2\delta} \simeq \infty$.Por conseguinte f(x) não é de classe S^0.

1.2 Teorema de DeMoivre-Laplace

Inícia-se esta secção com as definições de rede binomial, na qual os coeficientes binomiais são definidos, coeficiente binomial e função binomial. Recorda-se o teorema de DeMoivre-Laplace de ordem zero e indica-se que este teorema é válido para diferenças/derivadas parciais de primeira e segunda ordem.

Definição 7 *Seja $\delta t > 0$. A rede aritmética binomial $N(\delta t, \sqrt{\delta t})$ é definida por*

$$N(\delta t, \sqrt{\delta t}) = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \nu, j \in \mathbb{Z}\ ,\ t = \nu\delta t,\ x = (2j - \nu)\sqrt{\delta t}\right\}.$$

Escreve-se

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \{\nu\delta t \mid \nu \in \mathbb{N}\} \\ \delta x &= 2\sqrt{\delta t}. \end{aligned}$$

O cone binomial $W_{\delta t}$ $(\delta t, \sqrt{\delta t}) \subset N(\delta t, \sqrt{\delta t})$ é definido por

$$W_{\delta t} = \left\{(t, x) \in N(\delta t, \sqrt{\delta t}) \mid t \geqslant 0, |x| \leqslant t/\sqrt{\delta t}\right\}.$$

Se $\delta t \simeq 0$ a rede aritmética, acima mensionada, é infinitésimal. *Note que, em último caso $W_{\delta t}$ contém todos os pontos (t, x) de $N(\delta t, \sqrt{\delta t})$ para t apreciável e x limitado.*

A rede $N(\delta t, \sqrt{\delta t})$ é uma rede de losangos, se $\delta t = \sqrt{\delta t} = 1$ os losangos transformam-se em quadrados e a rede é então $N(1,1) = \{(\nu, 2j-\nu) \in \mathbb{R}^2 : \nu, j \in \mathbb{Z}\}$. Por conveniência assume-se que $\frac{1}{\delta t}$ é um inteiro.

Notação 8 *Seja* $(t,x) \in N(\delta t, \sqrt{\delta t})$*, escreve-se*

$$\begin{aligned}\nu_t &= \frac{t}{\delta t}\\ j_{t,x} &= \frac{t}{2\delta t} + \frac{x}{2\sqrt{\delta t}}\end{aligned}$$

Reciprocamente, se ν*,* $j \in \mathbb{Z}$ *, ecreve-se*

$$\begin{aligned}t_\nu &= \nu\delta t\\ x_{\nu,j} &= (j - \nu/2)\, 2\sqrt{\delta t}\end{aligned}$$

Definição 9 *Seja* ν*,* $j \in \mathbb{N}$*, tal que* $0 \leq j \leq \nu$*. Recorde que*

$$\binom{\nu}{j} = \frac{\nu!}{j!(\nu-j)!}.$$

Seja $0 < p < 1$*. Então o coeficiente binomial* $B(\nu, j)$ *é definido por*

$$B(\nu, j) = \binom{\nu}{j} p^j\, (1-p)^{\nu - j}\,.$$

Definição 10 *Seja* $p = \frac{1}{2}$*. A função binomial é a função definida no cone binomial* $W_{\delta t}$ *por*

$$b(t,x) = \frac{1}{\delta x} B(\nu_t, j_{t,x}).$$

Se δx é infinitesimal, a função binomial $b(t,x)$ é o resultado de uma mudança de escala da família de coeficientes binomiais em três aspectos.

·Um macroscópio em ν, que reduz os períodos de tempo com um factor δt.

·Um telescópio em j, (i.e um macroscopio com centro e escala móvel). Esta mudança de escala centraliza os inteiros j ao redor de $\frac{\nu_t}{2}$ e reduz a distância entre dois inteiros consecutivos com o factor δx.

·Um microscópio no valor do coeficiente binomial, estendendo-os com o factor $\frac{1}{\delta x}$.

A distribuição binomial será adaptada à rede discreta pela mudança de escala, pois está-se perante uma função binomial que toma valores apreciáveis para t apreciável e x limitado.

Recorda-se o Teorema de DeMoivre-Laplace de ordem zero que prova que a função binomial para valores de $p = \frac{1}{2}$ é infinitamente próxima da função de Gauss.

Teorema 11 *(**DeMoivre-Laplace**) Seja $\delta t \simeq 0$, para $(t, x) \in W_{\delta t}$ tal que t apreciável e x limitado. Então*

$$b(t,x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right). \tag{1.1}$$

Esta aproximação mantem-se para a primeira e segunda ordem, pois certos quocientes de diferenças parciais de $b(t,x)$ estão infinitamente próximos de certas derivadas parciais de $G(t,x)$, como se recorda de [7].

Se $\frac{1}{\delta t}$ é infinitamente grande, tem-se que para todo o t apreciável e x limitado vem que

$$\frac{\delta b(t,x)}{\delta 2t} \simeq \frac{\partial G(t,x)}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\frac{\delta b(t,x)}{\delta x} \simeq \frac{\partial G(t,x)}{\partial x} \tag{1.3}$$

$$\frac{\delta^2 b(t,x)}{\delta x^2} \simeq \frac{\partial^2 G(t,x)}{\partial x^2}. \tag{1.4}$$

Estes resultados serão verificados posteriormente no segundo capítulo.

É importante recordar para o desenvolvimento do estudo, a derivada contínua da função de Gauss na primeira e segunda ordem. De facto tem-se

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2} - \frac{1}{t}\right) G(t,x) \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial x} = -\frac{x}{t} G(t,x) \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^2 G(t,x)}{\partial x^2} = \left(\frac{x^2}{t^2} - \frac{1}{t}\right) G(t,x). \tag{1.7}$$

Capítulo 2

Quocientes de diferenças da função binomial

Os objectivos deste capítulo são a obtenção de fórmulas combinatórias e estimativas dos quocientes de diferenças da função binomial.

Na secção 2.1, relativamente à variável espaço x, obtem-se uma equação para o quociente de diferenças de primeira e segunda ordem da função binomial, e verifica-se que esta é infinitamente próxima da primeira e segunda derivada na variável x da função de Gauss respectivamente, para t apreciável e x limitado.

Na secção 2.2, no que se refere à variável tempo t, obtem-se a equação do quociente de diferenças de primeira ordem da função binomial, e verifica-se também que esta é infinitamente próxima da primeira derivada em t da função de Gauss, para t apreciável e x limitado.

Na secção 2.3 relacionam-se as equações dos quocientes de diferenças na variável espaço e tempo para todas as ordens.

Apresenta-se uma notação que se utiliza em todo o trabalho.

Seja u uma aplicação de duas variáveis $\mathbb{T} \times \mathbb{X}$ contida em $\mathbb{R}$. Adopta-se a seguinte notação de diferenças.

$$\begin{aligned}
\delta_1 u(t,x) &= u(t+2\delta t, x) - u(t,x)\\
\delta_2 u(t,x) &= u(t, x+\delta x) - u(t,x)\\
\delta_2^2 u(t,x) &= u(t, x+2\delta x) - 2u(t, x+\delta x) + u(t,x).
\end{aligned}$$

2.1 Diferenças com respeito à variável espaço

Serão derivadas a primeira e segunda ordem do quociente de diferenças da função $b(t,x)$ com respeito a x. O lema seguinte é o ponto de partida para todos os cálculos.

Lema 12 *Para todo x tal que $(t,x) \in W_{\delta t}$ e $x \neq \frac{t}{\sqrt{\delta t}}$*

$$b(t, x+\delta x) = b(t,x)\left(\frac{1-\frac{x}{2t}\delta x}{1+\frac{x}{2t}\delta x + \frac{1}{2t}\delta x^2}\right). \tag{2.1}$$

Demonstração: Começa-se por introduzir uma notação para as diferenças. Seja $\nu = \nu_t$ e $j = j_{t,x}$, note que

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\nu} &= \frac{2}{t}\delta t, \\
\left(j-\frac{\nu}{2}\right).\frac{2}{\nu} &= \left(j-\frac{\nu}{2}\right).\frac{2\delta t}{t} = \frac{\left(j-\frac{\nu}{2}\right)\delta x}{2t}.\delta x = \frac{x}{2t}.\delta x, \\
\delta x &= 2\sqrt{\delta t}.
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
b(t,x+\delta x) &= \frac{B(\nu, j+1)}{\delta x} \\
&= \frac{B(\nu,j)}{\delta x}\cdot\frac{\nu-j}{j+1} \\
&= b(t,x)\frac{\frac{\nu}{2}-\left(j-\frac{\nu}{2}\right)}{\frac{\nu}{2}+\left(j-\frac{\nu}{2}\right)+1} \\
&= b(t,x)\frac{1-\left(j-\frac{\nu}{2}\right)\frac{2}{\nu}}{1+\left(j-\frac{\nu}{2}\right)\frac{2}{\nu}+\frac{2}{\nu}} \\
&= b(t,x)\frac{1-\frac{x}{2t}.\delta x}{1+\frac{x}{2t}.\delta x+\frac{2\delta t}{t}} \\
&= b(t,x)\left(\frac{1-\frac{x}{2t}.\delta x}{1+\frac{x}{2t}.\delta x+\frac{2\delta t}{t}}\right), \ t \neq 0 \ .
\end{aligned}$$

■

A partir do Lema 12 pode-se derivar de forma quase imediata a fórmula exacta do quociente de diferenças de $b(t,x)$ na direcção x .

Proposição 13 *Para $(t,x) \in W_{\delta t}$, com t apreciável e x limitado*

$$\frac{\delta_2 b(t,x)}{\delta x} = b(t,x)\left(-\frac{x+\frac{1}{2}\delta x}{t\left(1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{2t}\delta x^2\right)}\right). \tag{2.2}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
b(t,x+\delta x)-b(t,x) &= b(t,x)\left(\frac{1-\frac{x}{2t}\delta x}{1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{2t}\delta x^2}-1\right)\\
&= b(t,x)\left(\frac{1-\frac{x}{2t}\delta x-1-\frac{x}{2t}\delta x-\frac{1}{2t}\delta x^2}{1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{2t}\delta x^2}\right)\\
&= b(t,x)\left(\frac{-\frac{x}{t}\delta x-\frac{1}{2t}\delta x^2}{1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{2t}\delta x^2}\right)\\
&= b(t,x)\left(\frac{-\frac{x}{t}-\frac{1}{2t}\delta x}{1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{2t}\delta x^2}\right)\delta x.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\delta_2 b(t,x)}{\delta x} = b(t,x)\left(-\frac{x+\frac{1}{2}\delta x}{t\left(1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{2t}\delta x^2\right)}\right).$$

■

Deduz-se para t apreciável e x limitado, uma aproximação do quociente de diferenças da função binomial na direcção x.

Proposição 14 *Para t apreciável e x limitado*

$$\frac{\delta_2 b(t,x)}{\delta x} \simeq -\frac{x}{t}b(t,x).$$

Demonstração: A demonstração da proposição utiliza a fórmula (2.2). Seja $\delta x \simeq 0$, t apreciável e x limitado. Note que

$$\frac{1}{2}\delta x \simeq 0 \quad , \quad \frac{1}{1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{2t}\delta x^2} \simeq 1.$$

Consequentemente

$$\frac{\delta_2 b(t,x)}{\delta x} \simeq -\frac{x}{t}b(t,x).$$

■

Com base nas fórmulas (1.1) e (1.6) verificou-se que o quociente de diferenças parciais de primeira ordem de $b(t,x)$ em relação à variável x é infinitamente próximo da derivada de primeira ordem da função de Gauss com respeito a x, para todo t apreciável e x limitado. E assim se mostra a fórmula (1.3) enunciada no primeiro capítulo.

De forma a simplificar os cálculos para determinar a segunda ordem do quociente de diferenças da função binomial na variável x introduz-se a seguinte notação.

$$C(x) = -\frac{x + \frac{1}{2}\delta x}{t\left(1 + \frac{x}{2t}\delta x + \frac{1}{2t}\delta x^2\right)}.$$

Assim para todo $(t, x) \in W_{\delta t}$, $\dfrac{\delta_2 b(t,x)}{\delta x} = C(x) b(t,x)$.

Proposição 15 *Para $(t, x) \in W_{\delta t}$, com t apreciável e x limitado*

$$\frac{\delta_2^2 b(t,x)}{\delta x^2} = b(t,x)\left[\frac{x^2 - t + 2x\delta x + \frac{1}{2}\delta x^2}{t^2\left(1 + \frac{x}{2t}\delta x + \frac{1}{t}\delta x^2\right)\left(1 + \frac{x}{2t}\delta x + \frac{1}{2t}\delta x^2\right)}\right]. \tag{2.3}$$

Demonstração: Como

$$\frac{\delta_2 b(t,x)}{\delta x} = C(x) b(t,x),$$

aplicando a fórmula (2.2) tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_2^2 b(t,x)}{\delta x^2} &= \frac{C(x+\delta x) b(t, x+\delta x) - C(x) b(t,x)}{\delta x} \\
&= \frac{C(x+\delta x) b(t, x+\delta x) - C(x+\delta x) b(t,x)}{\delta x} \\
&\quad + \frac{C(x+\delta x) b(t,x) - C(x) b(t,x)}{\delta x} \\
&= C(x+\delta x)\frac{\delta b(t,x)}{\delta x} + b(t,x)\frac{\delta C(x)}{\delta x} \\
&= C(x+\delta x) C(x) b(t,x) + b(t,x)\frac{\delta C(x)}{\delta x} \\
&= b(t,x)\left[C(x+\delta x) C(x) + \frac{\delta C(x)}{\delta x}\right].
\end{aligned}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta C(x)}{\delta x} &= \frac{C(x+\delta x)-C(x)}{\delta x} \\
&= \frac{-\dfrac{x+\delta x+\frac{1}{2}\delta x}{t\left(1+\frac{(x+\delta x)}{2t}\delta x+\frac{1}{2t}\delta x^2\right)}+\dfrac{x+\frac{1}{2}\delta x}{t\left(1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{2t}\delta x^2\right)}}{\delta x} \\
&= -\frac{\delta x+\dfrac{\delta x^3}{4t}}{t\left(1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{t}\delta x^2\right)\left(1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{2t}\delta x^2\right)\delta x} \\
&= -\frac{1+\dfrac{\delta x^2}{4t}}{t\left(1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{t}\delta x^2\right)\left(1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{2t}\delta x^2\right)}.
\end{aligned}
$$

Substituindo vem que

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta_2^2 b(t,x)}{\delta x^2} &= b(t,x)\left[C(x+\delta x)C(x)+\frac{\delta C(x)}{\delta x}\right] \\
&= b(t,x)\frac{x^2+2x\delta x+\dfrac{3\delta x^2}{4}}{t^2\left(1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{t}\delta x^2\right)\left(1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{2t}\delta x^2\right)}+ \\
&\quad -b(t,x)\frac{1+\dfrac{\delta x^2}{4t}}{t\left(1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{t}\delta x^2\right)\left(1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{2t}\delta x^2\right)} \\
&= b(t,x)\left[\frac{x^2-t+2x\delta x+\frac{1}{2}\delta x^2}{t^2\left(1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{t}\delta x^2\right)\left(1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{2t}\delta x^2\right)}\right].
\end{aligned}
$$

■

Para t apreciável e x limitado apresenta-se uma aproximação do quociente de diferenças de segunda ordem da função binomial na variável x .

Proposição 16 *Para t apreciável e x limitado*

$$\frac{\delta_2^2 b(t,x)}{\delta x^2} \simeq \left(\frac{x^2}{t^2}-\frac{1}{t}\right)b(t,x).$$

Demonstração: Seja $\delta x \simeq 0$, t apreciável e x limitado. Tem-se

$$2x\delta x \simeq 0 \quad , \quad \frac{1}{2}\delta x^2 \simeq 0 \quad , \quad 1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{t}\delta x^2 \simeq 1.$$

Aplicando na fórmula (2.3) tem-se

$$\frac{\delta_2^2 b(t,x)}{\delta x^2} \simeq \left(\frac{x^2}{t^2}-\frac{1}{t}\right) b(t,x).$$

■

Com base na expressão da função binomial e na expressão da segunda derivada da função de Gauss em ordem a x se verifica que o quociente de diferenças parciais de segunda ordem da função binomial com respeito a x é infinitamente próximo da derivada de segunda ordem da função de Gauss na variável x para todo t apreciável e x limitado. Desta forma se mostra a fórmula (1.4) do primeiro capítulo.

2.2 Diferenças com respeito à variável tempo

Será derivado o quociente de diferenças de primeira ordem da função $b(t,x)$ com respeito a t. Primeiro expressa-se a função $b(t+2\delta t,x)$ em termos de $b(t,x)$.

Lema 17 *Para x tal que $(t,x)\in W_{\delta t}$. Então*

$$b(t+2\delta t,x) = b(t,x)\left(\frac{1+\dfrac{3\delta t}{t}+\dfrac{2\delta t^2}{t^2}}{1+\dfrac{4\delta t}{t}+\dfrac{4\delta t^2}{t^2}-\dfrac{x^2\delta t}{t^2}}\right).$$

Demonstração: Começa-se por introduzir uma notação para as diferenças. Seja $\nu=\nu_t$ e $j=j_{t,x}$, note que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\nu} &= \frac{\delta t}{t}, \\
\delta x &= 2\sqrt{\delta t}, \\
\left(j-\frac{\nu}{2}\right) &= \frac{x}{2\sqrt{\delta t}} = \frac{x}{\delta x}, \\
\delta 2t &= 2\delta t.
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
b(t+2\delta t,x) &= \frac{B(\nu+2,j+1)}{\delta x}\\
&= \frac{B(\nu,j)}{\delta x}\cdot\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(j+1)(\nu-j+1)}\cdot\frac{1}{4}\\
&= b(t,x)\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(1+\frac{2}{\nu}\right)}{\left(1+\frac{2}{\nu}\right)^2-\frac{\left(j-\frac{\nu}{2}\right)^2}{\frac{\nu}{4}}\cdot\frac{1}{\nu}}\\
&= b(t,x)\frac{\left(1+\frac{\delta t}{t}\right)\left(1+\frac{2\delta t}{t}\right)}{\left(1+\frac{2\delta t}{t}\right)^2-\frac{\left(\frac{x}{\delta x}\right)^2}{\frac{t}{4\delta t}}\cdot\frac{\delta t}{t}}\\
&= b(t,x)\frac{1+\frac{3\delta t}{t}+\frac{2\delta t^2}{t^2}}{1+\frac{4\delta t}{t}+\frac{4\delta t^2}{t^2}-\frac{4x^2\delta t^2}{t^2\delta x^2}}\\
&= b(t,x)\left(\frac{1+\frac{3\delta t}{t}+\frac{2\delta t^2}{t^2}}{1+\frac{4\delta t}{t}+\frac{4\delta t^2}{t^2}-\frac{x^2\delta t}{t^2}}\right),\ t\neq 0\ .
\end{aligned}$$

■

Utilizando o resultado demonstrado no lema anterior, determina-se a fórmula exacta do quociente de diferenças de $b(t,x)$ na direcção t .

Proposição 18 *Para* $(t,x)\in W_{\delta t}$, *com* t *apreciável e* x *limitado*

$$\frac{\delta_1 b(t,x)}{\delta 2t} = \frac{1}{2}b(t,x)\left(\frac{x^2-t-2\delta t}{t^2+4t\delta t+4\delta t^2-x^2\delta t}\right). \tag{2.4}$$

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
b(t+2\delta t,x)-b(t,x) &= b(t,x)\left(\frac{1+\frac{3\delta t}{t}+\frac{2\delta t^2}{t^2}}{1+\frac{4\delta t}{t}+\frac{4\delta t^2}{t^2}-\frac{x^2\delta t}{t^2}}-1\right)\\
&= b(t,x)\left(\frac{-\frac{\delta t}{t}+\frac{x^2\delta t}{t^2}-\frac{2\delta t^2}{t^2}}{1+\frac{4\delta t}{t}+\frac{4\delta t^2}{t^2}-\frac{x^2\delta t}{t^2}}\right)\\
&= b(t,x)\left(\frac{-\frac{1}{2t}+\frac{x^2}{2t^2}-\frac{\delta t}{t^2}}{1+\frac{4\delta t}{t}+\frac{4\delta t^2}{t^2}-\frac{x^2\delta t}{t^2}}\right)2\delta t.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta_1 b(t,x)}{\delta 2t} &= \frac{1}{2}b(t,x)\left(\frac{\frac{x^2}{t^2}-\frac{1}{t}-\frac{2\delta t}{t^2}}{1+\frac{4\delta t}{t}+\frac{4\delta t^2}{t^2}-\frac{x^2\delta t}{t^2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}b(t,x)\left(\frac{\frac{x^2-t-2\delta t}{t^2}}{\frac{t^2+4t\delta t+4\delta t^2-x^2\delta t}{t^2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}b(t,x)\left(\frac{x^2-t-2\delta t}{t^2+4t\delta t+4\delta t^2-x^2\delta t}\right).
\end{aligned}
$$

■

Apresenta-se uma aproximação do quociente de diferenças da função binomial na variável t, para x limitado e t apreciável.

Proposição 19 *Para t apreciável e x limitado*

$$\frac{\delta_1 b(t,x)}{\delta 2t} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2}-\frac{1}{t}\right)b(t,x).$$

Demonstração: Seja $\delta t \simeq 0$, t apreciável e x limitado. Note que

$$4t\delta t+4\delta t^2-x^2\delta t \simeq 0.$$

Consequentemente, substituindo na fórmula (2.4) tem-se

$$\frac{\delta_1 b(t,x)}{\delta 2t} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2}-\frac{1}{t}\right)b(t,x).$$

■

Verifica que o quociente de diferenças parciais de primeira ordem de $b(t,x)$ em relação ao tempo é infinitamente próximo da derivada da função de Gauss na mesma variável para todo t apreciável e x limitado. Fica assim verificada a fórmula (1.2) com base nas fórmulas (1.1) e (1.5) do primeiro capítulo.

2.3 Relação entre diferenças na variável espaço e tempo

Relaciona-se o quociente de diferenças da função binomial de ordem n na variável t com o quociente de diferenças da função binomial de ordem $2n$ na variável x. Por razões didácticas antes da apresentação do caso geral, começa-se por relacionar a primeira ordem do quociente de diferenças da função $b(t,x)$ na variável t com a segunda ordem do quociente de diferenças da mesma função mas na variável x. Segue-se a relação entre a segunda ordem do quociente de diferenças da função $b(t,x)$ no que respeita ao tempo e a quarta ordem do quociente de diferenças da mesma função em relação ao espaço.

Lema 20 *Para todo* $(t,x) \in W_{\delta t}$

$$\frac{\delta_1 b(t,x)}{\delta 2t} = \frac{1}{2}\frac{\delta_2^2 b(t,x-\delta x)}{\delta x^2}.$$

Demonstração: Do Triângulo de Pascal, obtem-se

$$B(\nu+1,j+1) = \frac{1}{2}B(\nu,j) + \frac{1}{2}B(\nu,j+1).$$

Então pela conversão da definição 9 tem-se

$$b(t+2\delta t,x) = \frac{1}{2}b(t,x+\delta x) + \frac{1}{2}b(t,x+\delta x).$$

Após mais um passo de tempo na rede binomial $N\left(\delta t,\sqrt{\delta t}\right)$ obtem-se a relação entre a diferença horizontal $\delta_1 b(t,x)$ e a diferença vertical $\delta_2^2 b(t,x)$,

$$b(t+2\delta t,x) = \frac{1}{4}b(t,x+\delta x) + \frac{1}{2}b(t,x) + \frac{1}{4}b(t,x-\delta x).$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}\frac{b(t+2\delta t,x)-b(t,x)}{\delta 2t} &= \frac{\frac{1}{4}b(t,x+\delta x) - \frac{1}{2}b(t,x) + \frac{1}{4}b(t,x-\delta x)}{\delta 2t} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\delta_2^2 b(t,x-\delta x)}{\delta x^2}.\end{aligned}$$

■

Lema 21 *Para todo* $(t,x) \in W_{\delta t}$

$$\frac{\delta_1^2 b(t,x)}{(\delta 2t)^2} = \frac{1}{4}\frac{\delta_2^4 b(t,x-2\delta x)}{\delta x^4}.$$

Demonstração: Pelo lema 20 tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_1^2 b(t,x)}{(\delta 2t)^2} &= \frac{1}{2}\frac{\delta_1}{\delta 2t}\left(\frac{\delta_2^2 b(t,x-\delta x)}{\delta x^2}\right) \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_2^2 b(t+2\delta t,x-\delta x)}{\delta x^2} - \frac{\delta_2^2 b(t,x-\delta x)}{\delta x^2}\right)}{\delta 2t} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\delta_2^2}{\delta x^2}\left(\frac{\delta_1 b(t,x-\delta x)}{\delta 2t}\right) \\
&= \frac{1}{4}\frac{\delta_2^2}{\delta x^2}\left(\frac{\delta_2^2 b(t,x-2\delta x)}{\delta x^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\frac{\delta_2^4 b(t,x-2\delta x)}{\delta x^4}.
\end{aligned}$$

■

Chega-se agora ao último teorema do capítulo, em que se generaliza a relação entre os quocientes de diferenças de ordem n da função binomial na variável espaço e tempo.

Teorema 22 *Para todo* $(t,x) \in W_{\delta t}$

$$\frac{\delta_1^n b(t,x)}{(\delta 2t)^n} = \frac{1}{2^n}\frac{\delta_2^{2n} b(t,x-n\delta x)}{\delta x^{2n}}.$$

Demonstração: Por indução. Para $n=1$, já foi verificado anteriormente. Suponha-se

$$\frac{\delta_1^n b(t,x)}{(\delta 2t)^n} = \frac{1}{2^n}\frac{\delta_2^{2n} b(t,x-n\delta x)}{\delta x^{2n}}.$$

Pretende-se mostrar que

$$\frac{\delta_1^{n+1} b(t,x)}{(\delta 2t)^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{\delta_2^{2(n+1)} b(t,x-(n+1)\,\delta x)}{\delta x^{2(n+1)}}.$$

Ora

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_1^{n+1} b(t,x)}{(\delta 2t)^{n+1}} &= \frac{\delta_1}{\delta 2t}\left(\frac{\delta_1^n b(t,x)}{(\delta 2t)^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{\delta_1}{\delta 2t}\left(\frac{\delta_2^{2n} b(t,x-n\delta x)}{\delta x^{2n}}\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{\delta_2^{2n}}{\delta x^{2n}}\left(\frac{\delta_1 b(t,x-n\delta x)}{\delta 2t}\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{1}{2}\frac{\delta_2^{2n}}{\delta x^{2n}}\left(\frac{\delta_2^2 b(t,x-(n+1)\,\delta x)}{\delta x^2}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\frac{\delta_2^{2(n+1)} b(t,x-(n+1)\,\delta x)}{\delta x^{2(n+1)}}.
\end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Propriedades de regularidade das funções discretas

O objectivo deste capítulo é o estudo das propriedades de regularidade de funções discretas de classe S^n, que têm uma certa analogia com as propriedades de regularidade de funções contínuas de classe C^n. Uma condição necessária para uma função ser de classe S^n é que o quociente de diferenças de ordem n seja uma função de classe S^0. Determina-se também a fórmula da "derivada discreta" de ordem n de uma função.

Na primeira secção verifica-se que um monómio de grau m standard é de classe S^n, tal como ele é de classe C^n.

Na secção 3.2 começa-se por estudar propriedades de regularidade associadas à derivação e integração discreta de funções de classe S^n. Mostra-se que se uma função f é de classe S^n a sua "derivada discreta" $\frac{\delta f}{\delta x}$ é de classe S^{n-1}, reciprocamente se a "derivada discreta" $\frac{\delta f}{\delta x}$ é de classe S^{n-1} e a função f é de classe S^0 pode-se concluir que a função f é de classe S^n.

Por fim na secção 3.3 demonstram-se propriedades de regularidade associadas às operações de funções de classe S^n. A soma e o produto de duas funções de classe S^n é de classe S^n. A inversa multiplicativa de uma função de classe S^n apreciável e a divisão de uma função de classe S^n por uma função apreciável de classe S^n é de classe S^n.

Recordam-se de [7] as definições de classe S^1 e S^2 de forma a facilitar a compreensão da definição de função de classe S^n.

Definição 23 *Seja* $\mathbb{I} \subset \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$. *A função* f *diz-se de classe* S^1 *em* $\mathbb{I}$ *se* f *e* $\dfrac{\delta f}{\delta x}$ *são ambas de classe* S^0 *em* $\mathbb{I}$.

Definição 24 *Seja* $\mathbb{I} \subset \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$. *A função* f *diz-se de classe* S^2 *em* $\mathbb{I}$ *se* f *é de classe* S^1 *em* $\mathbb{I}$ *e* $\dfrac{\delta^2 f}{\delta x^2}$ *é de classe* S^0 *em* $\mathbb{I}$.

Definição 25 *Seja* $\mathbb{I} \subset \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, *para todo* n *standard, a função* f *é de classe* S^n *em* $\mathbb{I}$ *se* f *é de classe* S^{n-1} *em* $\mathbb{I}$ *e* $\dfrac{\delta^n f(x)}{\delta x^n}$ *é de classe* S^0 *em* $\mathbb{I}$.

Em contraste com as funções contínuas a derivada discreta de ordem n existe sempre. A proposição seguinte apresenta uma fórmula da derivada discreta de ordem n.

Proposição 26 *Sejam* $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, *tem-se*

$$\frac{\delta^n f(x)}{\delta x^n} = \frac{1}{\delta x^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f(x + (n-j)\delta x) \tag{3.1}$$

Demonstração: Por indução interna. Pela definição de derivada discreta de uma função f se $n = 1$

$$\frac{\delta f(x)}{\delta x} = \frac{1}{\delta x} \left(f(x + \delta x) - f(x) \right).$$

Suponha-se (3.1) verdade pretende-se calcular a derivada de ordem $n + 1$ da função $f(x)$. Ora

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^{n+1}f(x)}{\delta x^{n+1}} &= \frac{\delta^n}{\delta x^n}\left(\frac{\delta f(x)}{\delta x}\right)\\
&= \frac{1}{\delta x^n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{\delta f(x+(n-j)\delta x)}{\delta x}\\
&= \frac{1}{\delta x^n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{1}{\delta x}\left(f(x+(n+1-j)\delta x)-f(x+(n-j)\delta x)\right)\\
&= \frac{1}{\delta x^n}\frac{1}{\delta x}(-1)^0\tbinom{n}{0}\left(f(x+(n+1)\delta x)-f(x+n\delta x)\right)+\\
&\quad+\frac{1}{\delta x^n}\frac{1}{\delta x}(-1)^n\binom{n}{n}\left(f(x+\delta x)-f(x)\right)+\\
&\quad+\frac{1}{\delta x^n}\frac{1}{\delta x}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}\left(f(x+(n+1-j)\delta x)-f(x+(n-j)\delta x)\right)\\
&= \frac{1}{\delta x^n}\frac{1}{\delta x}\left[(-1)^n f(x+\delta x)+(-1)^{n+1}f(x)+f(x+(n+1)\delta x)-f(x+n\delta x)\right]+\\
&\quad+\frac{1}{\delta x^n}\frac{1}{\delta x}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\binom{n}{j}\left(f(x+(n+1-j)\delta x)-f(x+(n-j)\delta x)\right)\\
&= \frac{1}{\delta x^n}\frac{1}{\delta x}\left[\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}f(x+(n+1-j)\delta x)\right]+\\
&\quad+\frac{1}{\delta x^n}\frac{1}{\delta x}\left[\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+1}\binom{n}{j}f(x+(n-j)\delta x)\right]+\\
&\quad+\frac{1}{\delta x^n}\frac{1}{\delta x}\left[f(x+(n+1)\delta x)+(-1)^{n+1}f(x)\right]\\
&= \frac{1}{\delta x^n}\frac{1}{\delta x}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}f(x+(n+1-j)\delta x)+\\
&\quad+\frac{1}{\delta x^n}\frac{1}{\delta x}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j-1}f(x+(n+1-j)\delta x)+\\
&\quad+\frac{1}{\delta x^n}\frac{1}{\delta x}\left[f(x+(n+1)\delta x)+(-1)^{n+1}f(x)\right]\\
&= \frac{1}{\delta x^n}\frac{1}{\delta x}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\left(\binom{n}{j}+\binom{n}{j-1}\right)f(x+(n+1-j)\delta x)+\\
&\quad+\frac{1}{\delta x^n}\frac{1}{\delta x}\left[f(x+(n+1)\delta x)+(-1)^{n+1}f(x)\right]\\
&= \frac{1}{\delta x^{n+1}}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\binom{n+1}{j}f(x+(n+1-j)\delta x).
\end{aligned}
$$

■

3.1 Monómios e Polinómios

Será derivado o quociente de diferenças de primeira e segunda ordem de um polinómio de coeficientes limitados, de modo a verificar que estes são infinitamente próximos da primeira e segunda derivada contínua do mesmo.

Mostra-se que o quociente de diferenças de m-ésima ordem de um polinómio de grau n standard é um polinómio de grau $n-m$ de coeficientes limitados, de forma a facilitar a demonstração de que todo o monómio de grau n standard de coeficientes limitados é de classe S^k.

Proposição 27 *Seja $p(x)$ um polinómio de coeficientes limitados de grau standard, com $x \in \mathbb{X}$, limitado. Tem-se que*

i) $\dfrac{\delta p(x)}{\delta x} = p'(x) + \delta x q_1(x)$ *, com $q_1(x)$ um polinómio de coeficientes limitados de grau menor do que $\partial_0(p')$.*

ii) $\dfrac{\delta^2 p(x)}{\delta x^2} = p''(x) + \delta x q_2(x)$ *, com $q_2(x)$ um polinómio de coeficientes limitados de grau menor do que $\partial_0(p'')$.*

Demonstração: i) Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ um polinómio de grau n standard, com coeficientes limitados. Tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\delta p(x)}{\delta x} &= \frac{p(x+\delta x) - p(x)}{\delta x} \\
&= a_0 - a_0 + \frac{a_1\left[(x+\delta x) - x\right]}{\delta x} + ... + \frac{a_n\left[(x+\delta x)^n - x^n\right]}{\delta x} \\
&= a_1 + \frac{a_2\left(2x\delta x + \delta x^2\right)}{\delta x} + ... + \frac{a_n\left[\sum\limits_{p=0}^{n}\binom{n}{p} x^{n-p}\delta x^p - x^n\right]}{\delta x} \\
&= a_1 + a_2\left(2x + \delta x\right) + ... + \frac{a_n\left(\sum\limits_{p=1}^{n}\binom{n}{p} x^{n-p}\delta x^p\right)}{\delta x} \\
&= a_1 + a_2\left(2x + \delta x\right) + ... + a_n\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p} x^{n-p}\delta x^{p-1} \\
&= a_1 + ... + n a_n x^{n-1} + \delta x\left(a_2 + ... + a_n\sum_{p=2}^{n}\binom{n}{p} x^{n-p}\delta x^{p-2}\right).
\end{aligned}$$

Seja

$$q_1(x) = a_2 + ... + a_n\sum_{p=2}^{n}\binom{n}{p} x^{n-p}\delta x^{p-2}.$$

Então

$$\frac{\delta p(x)}{\delta x} = p'(x) + \delta x q_1(x) \quad \text{e} \quad \partial_0 q_1 < \partial_0 p'.$$

ii) Segue da primeira parte da proposição que existem q_1, q_2, q_3 e q_4 polinómios de coeficientes limitados tais que

$$\frac{\delta p(x)}{\delta x} = p'(x) + \delta x q_1(x) \quad \text{e} \quad \partial_0 q_1 < \partial_0 p',$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta p'(x)}{\delta x} &= p''(x) + \delta x q_3(x) \quad \text{e} \quad \partial_0 q_3 < \partial_0 p'', \\ \frac{\delta q_1(x)}{\delta x} &= q_1'(x) + \delta x q_4(x) \quad \text{e} \quad \partial_0 q_4 < \partial_0 q_1' < \partial_0 p''.\end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 p(x)}{\delta x^2} &= \frac{\delta \frac{\delta p(x)}{\delta x}}{\delta x} \\ &= \frac{\delta\left(p'(x) + \delta x q_1(x)\right)}{\delta x} \\ &= p''(x) + \delta x q_4(x) + \delta x\left(q_1'(x) + \delta x q_3(x)\right) \\ &= p''(x) + \delta x\left(q_4(x) + q_1'(x) + \delta x q_3(x)\right).\end{aligned}$$

Define-se

$$q_2(x) = q_4(x) + q_1'(x) + \delta x q_3(x). \quad \text{Assim} \quad \partial_0 q_2 < \partial_0 p''.$$

Então

$$\frac{\delta^2 p(x)}{\delta x^2} = p''(x) + \delta x q_2(x).$$

■

A seguinte propriedade que se apresenta irá determinar o grau da m-ésima ordem do quociente de diferenças de um polinómio de coeficientes limitados de grau n.

Proposição 28 *Seja $p(x)$ um polinómio de coeficientes limitados de grau n standard, com $x \in \mathbb{X}$, limitado. Tem-se que $\frac{\delta^m p(x)}{\delta x^m}$ é um polinómio de grau menor ou igual a $n-m$ de coeficientes limitados, para todo m standard.*

Demonstração: Por indução externa. Considere o polinómio $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Para $m = 0$ tem-se $\frac{\delta^0 p(x)}{\delta x^0} = p(x)$, que é um polinómio de grau n com coeficientes limitados. Suponha-se que $\frac{\delta^m p(x)}{\delta x^m}$ é um polinómio de grau menor ou igual a $n-m$ com coeficientes limitados. Aplicando a proposição 27 deduz-se que

$$\frac{\delta^{m+1} p(x)}{\delta x^{m+1}} = \frac{\delta^m}{\delta x^m}\left(\frac{\delta p(x)}{\delta x}\right) = \frac{\delta^m}{\delta x^m}\left(p'(x) + \delta x q_1(x)\right).$$

Com $p'(x)+\delta x q_1(x)$ um polinómio de coeficientes limitados de grau $n-1$. Então $\frac{\delta^m}{\delta x^m}\left(p'(x) + \delta x q_1(x)\right)$ é um polinómio com coeficientes limitados de grau menor ou igual a $(n-1) - m = n - (m+1)$. ■

Antes porém de provar o teorema principal desta secção que um monómio de grau m standard é de classe S^n, observa-se que um monómio de grau n standard é de classe S^0 .

Observação 29 *Por indução externa. Pretende-se provar que para todo n standard, x^n é de classe S^0. Para $n = 0$, tem-se que 1 é uma constante limitada então é de classe S^0. Suponha-se x^n é de classe S^0. Tem-se pelo teorema 4 que $x^{n+1} = x^n.x$ é uma função de classe S^0 visto ser o produto de funções de classe S^0. Então x^{n+1} é uma função de classe S^0.*

Teorema 30 *Seja n standard. Para todo m standard, x^m é de classe S^n.*

Demonstração: Por indução externa. Para $n = 0$ verdade pela observação anterior. Suponha-se que x^mé de classe S^n. Pela proposição anterior tem-se que $\frac{\delta^{n+1}x^m}{\delta x^{n+1}} = \frac{\delta^n}{\delta x^n}\left(\frac{\delta x^m}{\delta x}\right)$ é um polinómio de coeficientes limitados de grau menor ou igual a $m-(n+1)$. Então $\frac{\delta^{n+1}x^m}{\delta x^{n+1}}$ é um polinómio de classe S^0. Como por hipotese de indução x^m é de classe S^n, então por definição x^mé um polinómio de classe S^{n+1}. ■

Do teorema anterior pode-se concluir que todo o polinómio de coeficientes limitados de grau standard é de classe S^n, resultado a aplicar ao problema da regularidade assimptótica dos coeficientes binomiais.

3.2 Derivação discreta e integração de funções de classe S^n

Estudam-se propriedades de regularidade associadas à derivação e integração discreta de funções de classe S^n. No que concerne às propriedades de regularidade associadas à derivação discreta mostra-se o lema de derivação, isto é se uma função f é de classe S^n então a sua "derivada discreta" $\frac{\delta f}{\delta x}$ é de classe S^{n-1}. Para além deste mostra-se também que se uma função f é de classe S^n a sua "derivada discreta" de ordem m, $\frac{\delta^m f}{\delta x^m}$ para todo m standard com $m < n$ é uma função de classe S^{n-m}.

Relativamente às propriedades de regularidade associadas à integração discreta, mostra-se o lema de integração, isto é se a "derivada discreta" $\frac{\delta f}{\delta x}$ é de classe S^{n-1} e a função f é de classe S^0 pode-se concluir que a função f é de classe S^n.

Lema 31 ***(Lema de Derivação)*** *Sejam* $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$*. Se* f *é uma função de classe* S^n*. Então* $\frac{\delta f}{\delta x}$ *é uma função de classe* S^{n-1}*, para todo* n *standard.*

Demonstração: Por indução externa. Por definição $\frac{\delta f}{\delta x}$ é uma função de classe S^0. Suponha-se que f é uma função de classe S^{n+1}. Por definição f é de classe S^n e $\frac{\delta^{n+1} f}{\delta x^{n+1}} = \frac{\delta^n}{\delta x^n}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)$ é uma função de classe S^0. Sendo f uma função de classe S^n deduz-se por hipotese de indução que $\frac{\delta f}{\delta x}$ é uma função de classe S^{n-1}. Aplicando novamente a definição 25 pode-se concluir que a função $\frac{\delta f}{\delta x}$ é de classe S^n. ■

Lema 32 *Sejam* $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *tais que* $\frac{\delta f}{\delta x}$ *é uma função de classe* S^n *e* f *é uma função de classe* S^0*. Então* f *é uma função de classe* S^n*, para todo* n *standard.*

Demonstração: Por indução externa. É trivial que f é uma função de classe S^0. Suponha-se que a função $\frac{\delta f}{\delta x}$ é de classe S^{n+1} e f é uma função de classe S^0. Tem-se pela definição 25 que $\frac{\delta f}{\delta x}$ é de classe S^n. Aplicando a hipotese de indução conclue-se que f é uma função de classe S^n. Deduz-se por definição que $\frac{\delta^{n+1} f}{\delta x^{n+1}} = \frac{\delta^n}{\delta x^n}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)$ é de classe S^0. Novamente pela definição 25 conclue-se que f é uma função de classe S^{n+1}. ■

Lema 33 ***(Lema de Integração)*** *Sejam* $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *tais que* $\frac{\delta f}{\delta x}$ *é uma função de classe* S^{n-1} *e* f *é uma função de classe* S^0*, com* $f(0)$ *limitado. Então* f *é uma função de classe* S^n*, para todo* n *standard.*

Observa-se que para $n = 1$, obtem-se o teorema clássico de Dini pois para f limitado num só ponto tem-se que f é de classe S^1.

Demonstração: Por indução externa. Por definição sendo f uma função de classe S^0 e $\frac{\delta f}{\delta x}$ uma função de classe S^0 então f é uma função de classe S^1. Suponha-se que $\frac{\delta f}{\delta x}$ é uma função de classe S^n e f uma função de classe S^0.

Por definição tem-se que $\dfrac{\delta^n}{\delta x^n}\left(\dfrac{\delta f}{\delta x}\right) = \dfrac{\delta^{n+1} f}{\delta x^{n+1}}$ é de classe S^0. Aplicando o lema anterior conclue-se que f é uma função de classe S^n. Então por definição f é uma função de classe S^{n+1}. ■

As duas proposições seguintes vão desempenhar um papel importante no desenvolvimento do quinto capítulo, uma vez que conhecendo o nível de S-continuidade do quociente de diferenças da função binomial, se pode concluir sobre o nível de S-continuidade da função binomial.

Proposição 34 *Sejam $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$. Se f é uma função de classe S^n então $\dfrac{\delta^m f}{\delta x^m}$ é de classe S^{n-m}, para todo n, m standard com $m < n$.*

Demonstração: Pelo lema de derivação conclue-se que a função $\dfrac{\delta f}{\delta x}$ é de classe S^{n-1}. Novamente pelo lema de derivação tem-se que $\dfrac{\delta^2 f}{\delta x^2}$ é de classe S^{n-2}. Ao aplicar-se m vezes o lema de derivação conclue-se que a função $\dfrac{\delta^m f}{\delta x^m}$ é de classe S^{n-m}. ■

Proposição 35 *Sejam $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$. Se f é uma função de classe S^n então f é uma função de classe S^m para todo n, m standard com $m < n$.*

Demonstração: Considere-se m standard tal que $m = n - k$. Por definição f é uma função de classe S^{n-1}. Novamente por definição tem-se que f é de classe S^{n-2}. Ao aplicar-se k vezes a definição 25 conclue-se que a função f é de classe S^{n-k}, isto é f é uma função de classe S^m. ■

3.3 Operações algébricas sobre funções de classe S^n

Em toda esta secção demonstram-se propriedades de regularidade associadas às operações de funções discretas de classe S^n. Numa certa maneira demonstra-se que a soma, o produto, a inversa multiplicativa e a divisão de funções de classe S^n resulta em função de classe S^n.

Já foi enunciado e demonstrado no primeiro capítulo o teorema em que duas funções de classe S^0, o seu produto e a sua soma é ainda uma função de classe S^0.

Lema 36 *Sejam* $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ *e* f, g *duas funções de classe* S^n. *Então* $f+g$ *é uma função de classe* S^n.

Demonstração: Por indução externa. Pelo teorema 4 resulta que $f+g$ é uma função de classe S^0. Suponham-se f e g duas funções de classe S^{n+1}. Pelo lema de derivação tem-se que $\frac{\delta f}{\delta x}$ e $\frac{\delta g}{\delta x}$ são duas funções de classe S^n. Tem-se que

$$\frac{\delta(f+g)}{\delta x}(x) = \frac{\delta f}{\delta x}(x) + \frac{\delta g}{\delta x}(x).$$

Aplicando a hipotese de indução tem-se que $\frac{\delta(f+g)}{\delta x}(x)$ é uma função de classe S^n. Pelo teorema 4 a função $f+g$ é de classe S^0 e como $\frac{\delta(f+g)}{\delta x}$ é uma função de classe S^n, pelo lema de integração conclue-se que $f+g$ é de classe S^{n+1}.
■

Teorema 37 *Sejam* $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ *e* f, g *duas funções de classe* S^n *então* $f \times g$ *é de classe* S^n.

Demonstração: Por indução externa. Pelo teorema 4 resulta que $f \times g$ é de classe S^0. Suponham-se f e g duas funções de classe S^{n+1}. Pelo lema de derivação tem-se que $\frac{\delta f}{\delta x}$ e $\frac{\delta g}{\delta x}$ são duas funções de classe S^n. Tem-se que

$$\frac{\delta(f \times g)}{\delta x}(x) = \frac{\delta f}{\delta x}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\delta g}{\delta x}(x).$$

Pela proposição 35 a função g é de classe S^n. Aplicando a hipotese de indução tem-se que a função $\frac{\delta f}{\delta x}(x) \cdot g(x)$ é de classe S^n. De igual forma, pela proposição 35 a função f é de classe S^n. Como a função $\frac{\delta g}{\delta x}$ é de classe S^n deduz-se por hipotese de indução que $f(x) \cdot \frac{\delta g}{\delta x}(x)$ é uma função de classe S^n. Pelo lema 36 e teorema 4 tem-se que a função $\frac{\delta}{\delta x}(f \times g)(x)$ é de classe S^n e $f \times g$ é de classe S^0 então pelo lema de integração tem-se que $f \times g$ é de classe S^{n+1}. ■

A demonstração efectuada no primeiro capítulo de que a inversa de uma função de classe S^0 com valores apreciáveis para argumentos limitados é de classe S^0 é um pré-requisito para o lema que se segue.

Lema 38 *Sejam* $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ *e* f *uma função de classe* S^n *com valores apreciáveis para argumentos limitados. Então* $\frac{1}{f}$ *é de classe* S^n.

Demonstração: Por indução externa. Pelo teorema 5, sendo f uma função de classe S^0 com apenas valores apreciáveis para argumentos limitados, pode-se concluir que $\frac{1}{f}$ é uma função de classe S^0. Suponha-se f uma função apreciável de classe S^{n+1}. Pela proposição 35 tem-se que f é uma função apreciável de classe S^n, desta forma se aplicar a hipotese de indução $\frac{1}{f}$ é uma função de classe S^n. Tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\delta\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{\delta x} &= \frac{\frac{1}{f(x+\delta x)} - \frac{1}{f(x)}}{\delta x} \\ &= -\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}.\frac{1}{f(x)f(x+\delta x)}.\end{aligned}$$

Pelo lema 36 e teorema 37 tem-se que $\frac{\delta\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{\delta x}$ é uma função de classe S^n. Pelo teorema 5 a função $\frac{1}{f(x)}$ é de classe S^0 então pelo lema de integração conclue-se que $\frac{1}{f(x)}$ é uma função de classe S^{n+1}. ■

Pelo lema 38 conclue-se imediatamente que a função racional $\frac{1}{1+x}$ para $x \not\simeq -1$ é de classe S^n. Apresenta-se um exemplo onde se mostra que a função $\frac{1}{1+x}$ para $x \not\simeq -1$ é de classe S^n, baseado na definição 25.

Exemplo 39 *Considere-se a função $f(x) = \frac{1}{1+x}$ para $x \not\simeq -1$. Pretende-se mostrar que $\frac{1}{1+x}$ para $x \not\simeq -1$ é de classe S^n. A demonstração processa-se em duas partes. Na primeira parte deduz-se por indução interna, a fórmula do quociente de diferenças de ordem n da função $f(x)$. Na segunda parte mostra-se por indução externa que a função $f(x)$ é de classe S^n.*

(i) Mostra-se por indução interna que

$$\frac{\delta^n f}{\delta x^n}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)(1+x+\delta x)\times .....\times(1+x+n\delta x)}.$$

Para n=1 tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\delta f}{\delta x}(x) &= \frac{1}{\delta x}\left(\frac{1}{1+x+\delta x} - \frac{1}{1+x}\right) \\ &= \frac{-1}{(1+x)(1+x+\delta x)}.\end{aligned}$$

Suponha-se que

$$\frac{\delta^n f}{\delta x^n}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)(1+x+\delta x)\times \ldots\ldots \times (1+x+n\delta x)}.$$

Tem-se que

$$\begin{aligned}\frac{\delta^{n+1} f}{\delta x^{n+1}}(x) &= \frac{\frac{\delta^n f}{\delta x^n}(x+\delta x) - \frac{\delta^n f}{\delta x^n}(x)}{\delta x}\\ &= \frac{1}{\delta x}\left(\frac{(-1)^n n!}{(1+x+\delta x)\times \ldots\ldots \times (1+x+(n+1)\delta x)}\right)+\\ &\quad -\frac{1}{\delta x}\left(\frac{(-1)^n n!}{(1+x)\times \ldots\ldots \times (1+x+n\delta x)}\right)\\ &= \frac{(-1)^n n!}{\delta x}\left[\frac{1+x-(1+x+(n+1)\delta x)}{(1+x)\times \ldots\ldots \times (1+x+(n+1)\delta x)}\right]\\ &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+x)(1+x+\delta x)\times \ldots\ldots \times (1+x+(n+1)\delta x)}.\end{aligned}$$

(ii) Mostra-se por indução externa que a função $f(x)$ é de classe S^n. Para n=0, já foi verificado no exemplo 6. Suponha-se que $\frac{1}{1+x}$ para $x \not\simeq -1$ é uma função de classe S^n. Tem-se que

$$\frac{\delta^{n+1}}{\delta x^{n+1}}\left(\frac{1}{1+x}\right) = (-1)^{n+1}(n+1)!\frac{1}{(1+x)\times \ldots \times (1+x+(n+1)\delta x)}.$$

Deduz-se pelo teorema 4 e 5 que $(-1)^{n+1}(n+1)!\frac{1}{(1+x)\times \ldots\ldots \times (1+x+(n+1)\delta x)}$ é uma função de classe S^0. Aplicando a hipotese de indução e pela definição 25 conclue-se que a função racional $f(x) = \frac{1}{1+x}$ para $x \not\simeq -1$ é de classe S^{n+1}.

Teorema 40 *Sejam $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ e f, g duas funções de classe S^n com $g \not\simeq 0$. Então $\frac{f}{g}$ é uma função de classe S^n.*

Demonstração: Suponha-se f uma função de classe S^n e g uma função apreciável de classe S^n. Pelo Lema 38 a função $\frac{1}{g}$ é de classe S^n. Aplicando o teorema 37 conclue-se que $f \times \frac{1}{g}$ é de classe S^n. ∎

Capítulo 4

A Sombra de uma função transição discreto-contínuo

O objectivo deste capítulo é mostrar a analogia existente entre as propriedades de regularidade de funções discretas de classe S^n e as propriedades de regularidade de funções contínuas de classe C^n. Recorda-se o teorema da sombra contínua e o teorema da sombra derivável pois as transições discreto-contínuo são baseadas nestes dois teoremas. Mostra-se que se uma função é de classe S^n então a sua sombra ${}^0f$ é uma função de classe C^n e a função $\frac{\delta^n f(x)}{\delta x^n}$ é infinitamente próxima da função $\frac{d^n\, {}^0f(x)}{dx^n}$. Por razões didácticas antes da apresentação do caso geral começa-se por mostrar que se uma função f é de classe S^2 então a sua sombra ${}^0f$ é de classe C^2 e a função $\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^2}$ é infinitamente próxima da função $\frac{d^2\, {}^0f(x)}{dx^2}$.

Antes de se enunciar a definição de sombra de uma função e de um conjunto, define-se a sombra de um número real limitado x pelo número real standard infinitamente próximo e único, e escreve-se ${}^0x$.

Definição 41 *Seja st n e* $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto interno ou externo. Então a sombra* ${}^0\mathbb{X}$ *de* $\mathbb{X}$ *é definida por*

$$ {}^0\mathbb{X} \;=\; {}^s\{stx \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{X}, y \simeq x\} $$

Numa certa maneira a sombra de um conjunto é o conjunto standard mais próximo. Além disso dois conjuntos diferentes podem ter a mesma sombra. Considere-se o conjunto $T = [0, \delta x, 2\delta x, ..., 1 + \delta x]$ e o conjunto $S = [0, \delta x, 2\delta x, ..., 1]$ a sua sombra é o conjunto $T^0 = S^0 =^s \{\, x \in [0,1] : st\ x\} = [0,1]$.

Definição 42 *Seja $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe S^0. A sombra de f é uma função real $^0f :^0 \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida em dois passos.*
(i) Seja standard $x \in {}^0\mathbb{X}$ e $y \in \mathbb{X}$ tal que $y \simeq x$. Define-se

$$\left({}^0f\right)(x) \quad = \quad {}^0\left(f\left(y\right)\right).$$

Note-se que $f(y)$ é limitada, $\left({}^0f\right)(x)$ é bem definida e que $\left({}^0f\right)(x)$ é definida exclusivamente porque $\left({}^0f\left(y\right)\right) = \left({}^0f\left(z\right)\right)$ para qualquer $y, z \in \mathbb{X}$ tal que $y \simeq z \simeq x$.
(ii) A definição de ^0f é estendida aos pontos não standard de $\mathbb{X}$ por standardização.

Exemplo 43 *Da sombra de uma função.*
Seja $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função quadrática $f(x) = x^2$, mostra-se que a sua sombra é na mesma a função quadrática mas agora definida sobre $\mathbb{R}$. Começa-se pela construção de um par ordenado, elemento da sombra. Seja $x \simeq 3$, então $^0x = 3$ e $^0x^2 = 9$. Então $(3, 9) \in^s \left\{\left({}^0x, {}^0\left(f\left(x\right)\right)\right) : x \in \mathbb{X} \text{ limitado}\right\}$. Da mesma forma para forma para x limitado qualquer,

$$^0f(x) \quad = \quad {}^0(x^2) \quad = \quad ({}^0x)^2$$

pois $\left\{\left({}^0x, {}^0x^2\right) : x \text{ limitado}\right\} \subset {}^s\left\{\left({}^0x, {}^0\left(f\left(x\right)\right)\right) : x \in \mathbb{X} \text{ limitado}\right\}$. A standardização do conjunto externo $\left\{\left({}^0x, {}^0x^2\right) : x \text{ limitado}\right\} = \left\{\left(x, x^2\right) : x \in \mathbb{R} \text{ standard}\right\}$ é $\left\{\left(x, x^2\right) : x \in \mathbb{R}\ \right\}$.
Este exemplo generaliza todos as restrições a $\mathbb{X}$ das funções f standard contínuas: A sombra de f é ela própria.

Recorda-se formalmente que uma função é um conjunto de pares ordenados, da mesma forma a sombra de uma função f é construida à base de pares $(x, f(x))$ para cada $x \in \mathbb{X}$ limitado. Os objectos da sombra de f é um conjunto standard construido à base de pares ordenados de sombras pontuais $({}^0x, {}^0(f(x)))$ que formam um ponteado de pontos standard. Além disso uma função necessita de ser S-contínua para possuir sombra.

A sombra de uma função de classe S^0 é pelo menos uma função de classe C^0. Esta afirmação é objecto do teorema seguinte, que permite associar uma função contínua standard a uma função discreta S-contínua.

A demonstração do teorema necessita de se recordar a caracterização não standard de convergência. Se uma sucessão standard $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um x limitado então $x_\omega \simeq x$ para todo $\omega \simeq \infty$. Se uma sucessão standard $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para x então existe $\omega \simeq \infty$ tal que $x_\omega \not\simeq x$. Entre os índices infinitamente grandes pode-se supor ω arbitrariamente pequeno. Para $x \in \mathbb{R}$ note que $[x]$ é elemento maximal de $y \in \mathbb{X}$ tal que $y \leq x$, escreve-se $[x] \simeq x$.

Teorema 44 *(Teorema da Sombra Contínua) Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ de classe S^0 então a sua sombra ${}^0f$ é uma função unívoca e contínua, definida sobre $\mathbb{R}$ inteiro. Ela é a única função standard infinitamente próxima de f(x) para todo $x \in \mathbb{R}$ limitado. Reciprocamente, se a sombra de f é uma função unívoca f é necessariamente de classe S^0.*

Demonstração: Seja ξ standard. Então ${}^0f(\xi) =^s \{{}^0f(\eta) : \eta \in \mathbb{X}, \eta \simeq \xi\}$ sendo este não vazio, porque os $f(\eta)$ são limitados e reduzem-se a um ponto quando eles são todos infinitamente próximos uns dos outros. Logo ${}^0f(\xi)$ é definida de forma unívoca.

Por transferência ${}^0f$ é definida de forma unívoca sobre $\mathbb{R}$ inteiro.

Suponha-se com vista a um absurdo que ${}^0f$ é descontínua no ponto ξ. Existe uma sucessão standard $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para ξ e tal que ${}^0f(\xi_n)$ não converge para ${}^0f(\xi)$, tem-se $f[\xi_n] \simeq^0 f(\xi_n)$ para todo n limitado, então pelo lema de Robinson existe $\nu \simeq \infty$ tal que $f[\xi_n] \simeq^0 f(\xi_n)$ para todo $\eta \leq \nu$. Pelo critério de não convergência acima mencionado, existe $\omega \simeq \infty$, $\omega \leq \nu$ tal que ${}^0f(\xi_\omega) \not\simeq^0 f(\xi)$.

Então $f[\xi_\omega] \simeq^0 f(\xi_\omega) \not\simeq^0 f(\xi) \simeq f[\xi]$, contradição com a S-continuidade de f. Então ${}^0f$ é contínua no ponto ξ e por transferência para todos os pontos.

Reciprocamente, suponha-se com vista a um absurdo que f não é de classe S^0. Se $f(x)$ é não limitada para um argumento limitado x, e S-contínua, então ${}^0f$ não é definida em ${}^0x$. Se $f(x)$ é limitada para um argumento limitado x, mas não S-contínua, então existe $y \simeq x$ tal que $f(y) \not\simeq f(x)$ o que implica que ${}^0f({}^0x)$ contem ao menos dois valores. Portanto a sombra de f não é uma função unívoca, contradição.

Então f é de classe S^0. ■

A sombra de uma função de classe S^1 é pelo menos de classe C^1 e a sombra de uma função de classe S^2 é ao menos de classe C^2, estas propriedades são objecto de estudo nos dois teoremas seguintes.

Teorema 45 *(Teorema da Sombra Derivável) Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ de classe S^1 então a sua sombra ${}^0f$ é uma função real de classe C^1 e $\frac{\delta f}{\delta x}(x) \simeq \frac{d^0 f}{dx}(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$ limitado.*

Demonstração: Pretende-se mostrar que ${}^0f$ é derivável de derivada ${}^0\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)$. Tem que se estabelecer a proximidade do quociente de diferenças $\frac{{}^0f(\eta) - {}^0f(\xi)}{\eta - \xi}$ e ${}^0\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)(\xi)$ com uma aproximação de primeira ordem, ora dispõem-se de uma aproximação de ordem zero de ${}^0f$. É suficiente tomar ξ, η standard tal que

$\eta \not\simeq \xi$. Isto leva a uma demonstração do tipo $\varepsilon - \delta$ com $\varepsilon, \delta > 0$ standard. Pode-se escolher δ tal que para todo $\eta \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$ standard tem-se $\left|{}^0\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)(\eta) -{}^0 \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)(\xi)\right| < \varepsilon$.

Pelo teorema dos acréscimos dos limites. Existe $z \in [[\xi] .... [\eta]]$ tal que $\frac{f[\eta] - f[\xi]}{([\eta] - [\xi])} \simeq \frac{\delta f}{\delta x}(z)$. Então

$$\begin{aligned}\left|\frac{{}^0 f(\eta) -{}^0 f(\xi)}{\eta - \xi} -{}^0 \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)(\xi)\right| &\simeq \left|\frac{f[\eta] - f[\xi]}{[\eta] - [\xi]} -{}^0 \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)(\xi)\right| \\ &\simeq \left|\frac{\delta f}{\delta x}(z) -{}^0 \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)(\xi)\right| \\ &\simeq \left|{}^0\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)(z) -{}^0 \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)(\xi)\right| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Pela caracterização macroscópica da derivada observa-se que ${}^0 f$ é derivável de derivada ${}^0\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)(\xi)$ no ponto ξ e por transferência $\frac{d^0 f}{dx}(\xi) ={}^0 \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)(\xi)$ para todo. Pelo teorema da sombra contínua $\frac{\delta f}{\delta x}(x) \simeq^0 \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)(x) = \frac{d^0 f}{dx}(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$ limitado. ■

Por razões didácticas antes da apresentação do caso geral mostra-se que se uma função é de classe S^2 então a sua sombra é uma função real de classe C^2.

Teorema 46 *Seja $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe S^2. Então a sua sombra ${}^0 f$ é uma função real de classe C^2 e $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x) \simeq \frac{d^{2\ 0} f}{dx^2}(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$ limitado.*

Demonstração: Pela proposição 35 a função f é de classe S^1. Aplicando o teorema da sombra derivável tem-se que a função ${}^0 f$ é de classe C^1 e $\frac{\delta f}{\delta x}(x) \simeq \frac{d^0 f}{dx}(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$ limitado. Pelo lema de derivação tem-se que $\frac{\delta f}{\delta x}$ é de classe S^1 então de novo pelo teorema da sombra derivável a função $\frac{d^0 f}{dx}$ é de classe C^1 para todo x limitado e

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta x}(x)\right) \simeq \frac{d}{dx}\left(\frac{d^0 f}{dx}(x)\right)$$

então

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x) \simeq \frac{d^{20} f}{dx^2}(x).$$

■

Teorema 47 *Sejam* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *duas funções de classe* S^1 *com* $f \simeq g$. *Então* $\dfrac{\delta f}{\delta x} \simeq \dfrac{\delta g}{\delta x}$.

Demonstração: Pelo lema de derivação tem-se que $\dfrac{\delta f}{\delta x}$ e $\dfrac{\delta g}{\delta x}$ são duas funções de classe S^0. Aplicando o teorema da sombra contínua e o teorema da sombra derivável tem-se que ${}^0\left(\dfrac{\delta f}{\delta x}\right) = \dfrac{d\,{}^0 f}{dx}$ e ${}^0\left(\dfrac{\delta g}{\delta x}\right) = \dfrac{d\,{}^0 g}{dx}$. Pode-se concluir que $\dfrac{\delta f}{\delta x} \simeq \dfrac{d\,{}^0 f}{dx}$ e $\dfrac{\delta g}{\delta x} \simeq \dfrac{d\,{}^0 g}{dx}$. Como ${}^0 f =^0 g$ conclue-se que $\dfrac{\delta f}{\delta x} \simeq \dfrac{\delta g}{\delta x}$. ∎

O próximo teorema permite afirmar que a sombra de uma função de classe S^n é pelo menos uma função de classe C^n.

Teorema 48 *Seja* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* S^n *então a sua sombra* ${}^0 f$ *é uma função real de classe* C^n *e* $\dfrac{\delta^n f(x)}{\delta x^n} \simeq \dfrac{d^n\,{}^0 f(x)}{dx^n}$ *para todo* $x \in \mathbb{X}$ *limitado.*

Demonstração: Por indução externa. Pelo teorema da sombra contínua ${}^0 f$ é uma função real de classe C^0 e $f \simeq^0 f$ para todo $x \in \mathbb{X}$ limitado. Suponha-se f uma função de classe S^{n+1}. Pelo lema de derivação tem-se que a função $\dfrac{\delta f}{\delta x}$ é de classe S^n. Por definição a função $\dfrac{\delta^{n+1} f}{\delta x^{n+1}}$ é de classe S^0. Aplicando a proposição 34 a função $\dfrac{\delta^n f}{\delta x^n}$ é de classe S^1. Donde se pode aplicar o teorema da sombra derivável e tem-se que

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta^n f(x)}{\delta x^n}\right) \simeq \frac{d}{dx}{}^0\left(\frac{\delta^n f(x)}{\delta x^n}\right).$$

Ora por hipotese de indução então

$$\frac{d}{dx}{}^0\left(\frac{\delta^n f(x)}{\delta x^n}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n\,{}^0 f(x)}{dx^n}\right) = \frac{d^{n+1}\,{}^0 f(x)}{dx^{n+1}}.$$

∎

Como observação apresenta-se também a demonstração do teorema anterior por indução num outro sentido.

Observação 49 *Para* $n = 0$ *a demonstração é igual à antecedente. Suponha-se* f *uma função de classe* S^{n+1}. *Pelo lema de derivação tem-se que a função* $\dfrac{\delta f}{\delta x}$

é de classe S^n. *Aplicando a hipotese de indução tem-se* ${}^0\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)$ *é uma função de classe* C^n *e*

$$\frac{\delta^{n+1} f(x)}{\delta x^{n+1}} = \frac{\delta^n}{\delta x^n}\left(\frac{\delta f(x)}{\delta x}\right) \simeq \frac{d^n}{dx^n}{}^0\left(\frac{\delta f(x)}{\delta x}\right).$$

Pelo teorema da sombra derivável tem-se ${}^0\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{d\,{}^0 f}{\delta x}$ *então pode-se concluir que*

$$\frac{\delta^{n+1} f(x)}{\delta x^{n+1}} \simeq \frac{d^n}{dx^n}{}^0\left(\frac{\delta f(x)}{\delta x}\right) = \frac{d^n}{dx^n}\frac{d\,{}^0 f(x)}{dx} = \frac{d^{n+1}\,{}^0 f(x)}{dx^{n+1}}.$$

Capítulo 5

Regularidade da distribuição binomial

Este capítulo tem por objectivos mostrar que a função binomial $b(t, x)$ é de classe S^{mn} e validar a aproximação da função binomial à função de Gauss numa ordem arbitrária.

Na primeira secção mostra-se que a função binomial é de classe S^0 na variável x e na variável t, demonstra-se também que a mesma função é de classe S^n na variável x. Verifica-se que o teorema de DeMoivre-Laplace de ordem arbitrária é válido na variável espaço.

Na segunda secção mostra-se que a função binomial é de classe S^m na variável t e que o teorema de DeMoivre-Laplace de ordem arbitrária é válido na variável tempo.

Por fim na secção 5.3 mostra-se que o teorema de DeMoivre-Laplace de ordem arbitrária é válido nas duas variáveis, isto é que o quociente de diferenças de ordem m na variável t e de ordem n na variável x da função binomial é infinitamente próximo da derivada parcial de ordem m na variável t e de ordem n na variável x da função de Gauss.

Considere-se as funções discretas definidas sobre o produto $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ de duas grelhas regulares $\mathbb{X}$ de passo $\delta x \simeq 0$ e $\mathbb{Y}$ de passo $\delta y \simeq 0$ com $\delta x = 2\sqrt{\delta t}$.

Definição 50 *Seja $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$. A função f é de classe S^{00} em $\mathbb{I}$ se f é limitada e S-contínua nas duas variáveis.*

Definição 51 *Seja $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$. A função f é de classe S^{10} em $\mathbb{I}$ se f e $\dfrac{\delta_1 f}{\delta t}$ são ambas de classe S^{00} em $\mathbb{I}$. A função f é de classe S^{01} em $\mathbb{I}$ se*

f e $\dfrac{\delta_2 f}{\delta x}$ são ambas de classe S^{00} em $\mathbb{I}$. A função f é de classe S^{20} em $\mathbb{I}$ se f é de classe S^{10} e $\dfrac{\delta_1^2 f}{\delta t^2}$ é de classe S^{00} em $\mathbb{I}$.

Analogamente define-se funções de classe S^{02}. A função $f : \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{R}$ é de classe S^{12} em $\mathbb{I}\subset\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ se f é de classe S^{10} e de classe S^{02} em $\mathbb{I}$. Desta forma está-se em condições de se definir uma função de classe S^{mn}.

Definição 52 *Seja $f : \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{R}$ e $\mathbb{I}\subset\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$. A função f é de classe S^{m0} em $\mathbb{I}$ se f é de classe S^{m-10} e $\dfrac{\delta_1^m f}{\delta t^m}$ é de classe S^{00} em $\mathbb{I}$. A função f é de classe S^{0n} em $\mathbb{I}$ se f é de classe S^{0n-1} e $\dfrac{\delta_2^n f}{\delta x^n}$ é de classe S^{00} em $\mathbb{I}$.*

Definição 53 *Seja $f : \mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{R}$ e $\mathbb{I}\subset\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$. A função f é de classe S^{mn} em $\mathbb{I}$ se f é de classe S^{m0} e de classe S^{0n} em $\mathbb{I}$.*

5.1 A função $b(t, x)$ na variável espaço

Nesta secção demonstra-se que a função binomial é de classe S^n na variável x, com base na aproximação da distribuição binomial à função de Gauss e no quociente de diferenças de primeira ordem da função binomial na variável x. Demonstra-se também que a sombra da função $\dfrac{\delta_2^n b(t,x)}{\delta x^n}$ é a função $\dfrac{d^n G({}^0t,x)}{dx^n}$ para t apreciável.

Reescreve-se o quociente de diferenças de primeira ordem da função binomial na variável espaço

$$\frac{\delta_2 b(t,x)}{\delta x} = b(t,x)\left(-\frac{x+\frac{1}{2}\delta x}{t\left(1+\frac{x}{2t}\delta x+\frac{1}{2t}\delta x^2\right)}\right) \quad t \not\simeq 0. \tag{2.2}$$

Para simplificar a demonstração utiliza-se a notação do capítulo 2. Para $(t,x)\in W_{\delta t}$,

$$\frac{\delta_2 b(t,x)}{\delta x} = C(x)b(t,x).$$

Observa-se que pelo teorema 40 a função $C(x)$ é de classe S^n.

Lema 54 *Para t apreciável e $t\in\mathbb{T}$, a função $b(t,x)$ é de classe S^0 em x.*

Demonstração: A demonstração tem em conta a validade da aproximação da função binomial pela densidade de Gauss. A função de Gauss é limitada para t apreciável e é S-contínua na variável x. Resulta que a função $G(t,x)$ é de classe S^0 em x. Do teorema de DeMoivre-Laplace tem-se que $b(t,x) \simeq G(t,x)$ para t apreciável então a função $b(t,x)$ é de classe S^0 em x. ■

Teorema 55 *Para x limitado e $x \in \mathbb{X}$, a função $b(t,x)$ é de classe S^0 em t.*

Demonstração: A função de Gauss é limitada para x limitado e é S-contínua na variável t. Então a função $G(t,x)$ é de classe S^0 em t. Pelo teorema de DeMoivre-Laplace deduz-se que a função binomial $b(t,x)$ é de classe S^0 em t. ■

Do lema 54 e teorema 55 conclue-se que a função binomial $b(t,x)$ é de classe S^0 na variável espaço e tempo.

Lema 56 *Se $b(t,x)$ é uma função de classe S^n em x, onde $(t,x) \in W_{\delta t}$, com t apreciável então $b(t,x)$ é de classe S^{n+1} em x.*

Demonstração: Por indução externa. Pelo lema 54 e teorema 40 as funções $b(t,x)$ e $C(x)$ são de classe S^0 em x então pelo teorema 4 a função $\dfrac{\delta_2 b(t,x)}{\delta x}$ é de classe S^0 em x. Aplicando o lema de integração tem-se que a função $b(t,x)$ é de classe S^1 em x. Suponham-se as funções $b(t,x)$ e $C(x)$ de classe S^n em x. Então pelo teorema 37 a função $\dfrac{\delta_2 b(t,x)}{\delta x}$ é de classe S^n em x. Como $b(t,x)$ é uma função de classe S^0em x, deduz-se pelo lema de integração que $b(t,x)$ é de classe S^{n+1} em x. ■

No teorema que se segue mostra-se que a função binomial $b(t,x)$ é de classe S^n em x onde $(t,x) \in W_{\delta t}$, para t apreciável.

Teorema 57 *A função $b(t,x)$ é de classe S^n em x para todo n standard, com t apreciável.*

Demonstração: Por indução externa. Pelo lema 54, a função $b(t,x)$ é de classe S^0 em x. Suponha-se $b(t,x)$ uma função de classe S^n em x. Pelo teorema 40 a função $C(x)$ é de classe S^n. Aplicando o teorema 37, o produto das duas funções $b(t,x)$ e $C(x)$ é uma função de classe S^n em x. Sendo $b(t,x)$ uma função de classe S^0 em x. Pelo lema de integração tem-se que $b(t,x)$ é uma função de classe S^{n+1} em x. ■

O teorema de DeMoivre-Laplace comprova que a função binomial $b(t,x)$ é infinitamente próxima da função de gauss $G(t,x)$, para todo $(t,x) \in W_{\delta t}$. Com base neste resultado se demonstra o teorema precedente.

Teorema 58 *Tem-se que* $^0\left(\frac{\delta_2^n b(t,x)}{\delta x^n}\right) = \frac{d^n G(^0t,x)}{dx^n}$ *com* t *apreciável, para todo* n *standard.*

Demonstração: Por indução externa. Do teorema de DeMoivre-Laplace tem-se que $^0b(t,x) = G(^0t,x)$, para t apreciável. Suponha-se $b(t,x)$ uma função de classe S^{n+1} em x. Pelo lema de derivação tem-se que $\frac{\delta_2 b(t,x)}{\delta x}$ é de classe S^n em x então por definição $\frac{\delta_2^{n+1} b(t,x)}{\delta x^{n+1}}$ é de classe S^0 em x. Aplicando a proposição 34 tem-se que a função $\frac{\delta_2^n b(t,x)}{\delta x^n}$ é de classe S^1 em x. Deduz-se do teorema da sombra derivável e da hipotese de indução que

$$\begin{aligned} {}^0\left(\frac{\delta_2}{\delta x}\left(\frac{\delta_2^n b(t,x)}{\delta x^n}\right)\right) &= \frac{d}{dx}{}^0\left(\frac{\delta_2^n b(t,x)}{\delta x^n}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n G(^0t,x)}{dx^n}\right) \\ &= \frac{d^{n+1} G(^0t,x)}{dx^{n+1}}. \end{aligned}$$

■

Recorda-se a fórmula da derivada contínua de ordem n na variável x da função de Gauss de [1]

Observação 59 *Para* t *apreciável, com* $\frac{x}{\sqrt{^0t}} \simeq \frac{x}{\sqrt{t}}$ *tem-se que*

$$\frac{\delta_2^n b(t,x)}{\delta x^n} \simeq (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2t}} n! \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{1}{k! 2^k (n-2k)!} \left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^{n-2k}.$$

5.2 A função $b(t,x)$ na variável tempo

Nesta secção prova-se que a função binomial é de classe S^m na variável t,com base na aproximação da função binomial à função de Gauss e na equação de diferenças da função binomial da variável t. Mostra-se que a sombra da função $\frac{\delta_1^m b(t,x)}{(\delta 2t)^m}$ é a função $\frac{d^m G(t,^0 x)}{dt^m}$ para x limitado.

Analogamente à secção anterior relembra-se a derivada discreta da função binomial na variável t .

$$\frac{\delta_1 b(t,x)}{\delta 2t} = \frac{1}{2} b(t,x)\left(\frac{x^2 - t - 2\delta t}{t^2 + 4t\delta t + 4\delta t^2 - x^2\delta t}\right) \quad t \not\simeq 0. \tag{2.4}$$

Para simplificar a demonstração introduz-se uma função auxiliar.

$$D(t) = \frac{x^2 - t - 2\delta t}{2\,(t^2 + 4t\delta t + 4\delta t^2 - x^2\delta t)}.$$

Passa-se a reescrever a derivada discreta da função binomial na variável t com uma notação mais simples. Para $(t,x) \in W_{\delta t}$,

$$\frac{\delta_1 b(t,x)}{\delta 2t} = D(t)b(t,x).$$

Pelo teorema 40, observa-se que a função $D(t)$ é de classe S^m.

Lema 60 *Se $b(t,x)$ é uma função de classe S^m em t, onde $(t,x) \in W_{\delta t}$, com x limitado então $b(t,x)$ é de classe S^{m+1} em t.*

Demonstração: Por indução externa. Pelos teoremas 40 e 55 as funções $b(t,x)$ e $D(t)$ são de classe S^0 em t. Aplicando o teorema 4 tem-se que a função $\frac{\delta_1 b(t,x)}{\delta 2t}$ é de classe S^0 em t. Pelo lema de integração a função $b(t,x)$ é de classe S^1 em t. Suponha-se $b(t,x)$ uma função de classe S^m em t e a função racional $D(t)$ de classe S^m então pelo teorema 37 a função $\frac{\delta_1 b(t,x)}{\delta 2t}$ é de classe S^m em t. Como $b(t,x)$ é uma função de classe S^0 em t e $\frac{\delta_1 b(t,x)}{\delta 2t}$ é de classe S^m em t então pelo lema de integração a função $b(t,x)$ é de classe S^{m+1} em t. ■

Tal como foi feito para a função binomial na variável espaço, mostra-se também que a função binomial é de classe S^m em t onde $(t,x) \in W_{\delta t}$, para x limitado.

Teorema 61 *A função $b(t,x)$ é de classe S^m em t para todo m standard, com x limitado.*

Demonstração: Por indução externa. Pelo teorema 55, a função $b(t,x)$ é de classe S^0 em t. Suponha-se $b(t,x)$ uma função de classe S^m em t. Pelo teorema 40 a função $D(t)$ é de classe S^m. Aplicando o teorema 37, o produto das duas funções $b(t,x)$ e $D(t)$ é uma função de classe S^m em t. Sendo $b(t,x)$ uma função de classe S^0 em t. Pelo lema de integração tem-se que $b(t,x)$ é uma função de classe S^{m+1} em t. ■

Teorema 62 *Tem-se que* ${}^0\left(\frac{\delta_1^m b(t,x)}{(\delta 2t)^m}\right) = \frac{d^m G(t, {}^0x)}{dt^m}$ *com x limitado, para todo m standard.*

Demonstração: Por indução externa. Do teorema de DeMoivre-Laplace tem-se que ${}^0b(t,x) = G(t, {}^0x)$, para x limitado. Suponha-se $b(t,x)$ uma função de classe S^{m+1} em t. Pelo lema de derivação tem-se que $\frac{\delta_1 b(t,x)}{\delta 2t}$ é de classe S^m em t então por definição $\frac{\delta_1^{m+1} b(t,x)}{(\delta 2t)^{m+1}}$ é de classe S^0 em t. Pela proposição 34 tem-se que a função $\frac{\delta_1^m b(t,x)}{(\delta 2t)^m}$ é de classe S^1 em t. Aplicando o teorema da sombra derivável e por hipotese de indução deduz-se que

$$\begin{aligned} {}^0\left(\frac{\delta_1}{\delta 2t}\left(\frac{\delta_1^m b(t,x)}{(\delta 2t)^m}\right)\right) &= \frac{d}{dt}{}^0\left(\frac{\delta_1^m b(t,x)}{(\delta 2t)^m}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d^m G(t, {}^0x)}{dt^m}\right) \\ &= \frac{d^{m+1} G(t, {}^0x)}{dt^{m+1}}. \end{aligned}$$

■

Observação 63 *Para x limitado, com* $\frac{{}^0x}{\sqrt{t}} \simeq \frac{x}{\sqrt{t}}$ *tem-se que*

$$\begin{aligned} \frac{\delta_1^m b(t,x)}{(\delta 2t)^m} &= \frac{1}{2^m}\frac{\delta_2^{2m} b(t, x - m\delta x)}{\delta x^{2m}} \\ &\simeq \frac{1}{2^m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2t}} (2m)! \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{1}{k! 2^k (2m-2k)!}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^{2(m-k)}. \end{aligned}$$

5.3 Teorema Principal

Nesta secção realiza-se o objectivo do trabalho, uma vez que se demonstra que a aproximação da função binomial à função de Gauss se mantem a todas as ordens. A este resultado se denomina teorema de DeMoivre-Laplace de ordem arbitrária.

Teorema 64 (***DeMoivre-Laplace de ordem arbitrária***) *Para todo m, n standard tem-se que*

$$^{0}\left(\frac{\delta_1^m\delta_2^n b(t,x)}{(\delta 2t)^m\,\delta x^n}\right) = \frac{d^m d^n G(t,x)}{dt^m dx^n}.$$

Demonstração: Do teorema de DeMoivre-Laplace de primeira ordem tem-se que ${}^{0}b(t,x) = G(t,x)$. Note que

$$\frac{\delta_1^m\delta_2^n b(t,x)}{(\delta 2t)^m\,\delta x^n} = \frac{\delta_2^n}{\delta x^n}\left(\frac{\delta_1^m b(t,x)}{(\delta 2t)^m}\right).$$

Deduz-se do teorema 22 que

$$\begin{aligned}
^{0}\left(\frac{\delta_1^m\delta_2^n b(t,x)}{(\delta 2t)^m\,\delta x^n}\right) &= {}^{0}\left(\frac{\delta_2^n}{\delta x^n}\left(\frac{\delta_1^m b(t,x)}{(\delta 2t)^m}\right)\right)\\
&= {}^{0}\left(\frac{\delta_2^n}{\delta x^n}\left(\frac{1}{2^m}\frac{\delta_2^{2m} b(t,x-m\delta x)}{\delta x^{2m}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2^m}{}^{0}\left(\frac{\delta_2^{n+2m} b(t,x-m\delta x)}{\delta x^{n+2m}}\right).
\end{aligned}$$

Aplicando o teorema 58 e porque a sombra de uma função é uma função standard, tem-se que

$$\begin{aligned}
^{0}\left(\frac{\delta_1^m\delta_2^n b(t,x)}{(\delta 2t)^m\,\delta x^n}\right) &= \frac{1}{2^m}\frac{d^{n+2m}G(t,x)}{dx^{n+2m}}\\
&= \frac{1}{2^m}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^{2m}G(t,x)}{dx^{2m}}\right)\\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{2^m}\frac{d^{2m}G(t,x)}{dx^{2m}}\right).
\end{aligned}$$

Porque a função $G(t,x)$ satisfaz a equação do calor deduz-se que

$$\begin{aligned}
^{0}\left(\frac{\delta_1^m\delta_2^n b(t,x)}{(\delta 2t)^m\,\delta x^n}\right) &= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{2^m}\frac{d^{2m}G(t,x)}{dx^{2m}}\right)\\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^m G(t,x)}{dt^m}\right)\\
&= \frac{d^m d^n G(t,x)}{dt^m dx^n}.
\end{aligned}$$

■

Bibliografia

[1] Abramowitz, Milton, Stegun Irene A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions.* Dover publications, Inc., New York.

[2] Diener, F., Diener, M. (2004). *Asymptotics of the price oscillations of a European call option in a tree model.* Math. Finance 14, no. 2, 271-293.

[3] Diener, F., Reeb G. (1989). *Analise non standard.* Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts.

[4] Nelson, E. (1987). *Radically elementary probability theory.* Princeton University Press.

[5] Neves, V. (1995). Difference quotients and smoothness (a conjecture of Keith Stroyan). *In Developments in Nonstrandard Mathematics*, pages 119-129. Pitmans Res. Notes Math. 336, Longman Harrow.

[6] Robinson, A. (1996). *Nonstrandard Analysis third ed.* Princeton University Press.

[7] Van den Berg, I. (1996). *A Higher order time-dependent de Moivre-Laplace theorem.* Technical report, SOM 96A18 Univ. Groningen.

[8] Van den Berg, I. (1997). *On the relation between elementary partial difference equations and partial differential equations.* Technical report, SOM 97A09 Univ. Groningen.

[9] Van den Berg, I. (2000). *Principles of infinitesimal stochastic and financial analysis.* World Scientific, Singapore.

[10] Van den Berg, I. (1998). *equations paraboliques et intégrales de chemins finies avec applications financières.* Press Universite de Nice-Sophia Antipolis.