

Universidade de Évora

Mestrado em Matemática Aplicada

***INSPECÇÕES DE SISTEMAS COM COMPONENTES
EM SÉRIE E EM PARALELO***

***Dissertação apresentada para obter o grau
de Mestre em Matemática Aplicada pela
Universidade de Évora***

Isabel Cristina Gonçalves Vieira



ÉVORA, 2000

AGRADECIMENTOS

É com toda a sinceridade que expresso os maiores agradecimentos ao meu orientador, Professor Doutor José Rodrigues Dias, pela sua pronta disponibilidade, por todo o empenho e dedicação com que orientou este trabalho, colaborando com dados e testemunhos, sem os quais, jamais poderia ter concretizado os meus objectivos.

Quero também agradecer a todos os meus colegas que directa ou indirectamente contribuíram para a elaboração desta tese, com realce especial para a Sandra Saraiva e para o Dário Ferreira.

Por último, sem ser por sombras o agradecimento menos meritório, quero agradecer aos meus pais e ao João Pedro, pelo apoio incondicional que me votaram no decorrer desta tese, sem receberem, por vezes, o reconhecimento devido. Sem o seu apoio nunca teria chegado aqui. A eles *dedico* este trabalho.

RESUMO

Considerando sistemas, sujeitos a inspecções perfeitas, em que existe um custo por cada inspecção feita e um custo por unidade de tempo de mau funcionamento enquanto este não é detectado, pretendemos analisar nesta tese um conjunto de grandezas envolvidas no processo de minimização do seu custo total médio de funcionamento por ciclo.

Nomeadamente, pretendemos analisar o tempo médio de detecção e o número médio de inspecções até detectarmos a falha, cuja presença é apenas evidenciada pela realização daquelas. Em particular, considerando inspecções periódicas, pretendemos estudar a validade de algumas aproximações obtidas para o período de inspecção, comparando-as com a solução exacta, em especial no que diz respeito ao seu impacto nos respectivos custos totais médios.

No que diz respeito à constituição dos sistemas, começamos por analisar o caso de haver apenas um componente, para passarmos depois aos casos em que consideramos componentes em série e em paralelo. Neste contexto, fazemos um estudo comparativo dos respectivos períodos de inspecção que minimizam (ou quase) os respectivos custos.

Os resultados obtidos são calculados quer directamente, usando métodos usuais, quer recorrendo a técnicas de simulação, através da geração de valores aleatórios.

Seja no caso de um sistema com um só componente, seja no caso de sistemas com componentes em série ou em paralelo, consideramos que o tempo de vida desses componentes é uma variável aleatória, com diferentes tipos de taxas de risco.

A finalizar o trabalho, abordamos o caso de sistemas sujeitos a inspecções não periódicas, analisando-se as vantagens daí decorrentes ao nível de custos, tomando como referência o caso das inspecções periódicas.

ABSTRACT

Considering systems, subjects to perfect inspection, which has a fixed cost for each inspection and a fixed cost for each unit time of not detected bad working while this is not detected, we intended to analyze in this thesis a group of greatness involved in the process of minimization the expected total cost of operation during a cycle.

Namely, we intend to analyze the expected time between the system failure and its detection and the expected number of inspections during a cycle, whose presence is only evidenced by the accomplishment of those. In particular, we are considering periodic inspections, we intend to study the viability of some approximations obtained for the inspection period, comparing them with the exact solution, especially in what concerns the impact in the respective expected total costs.

Concerning the constitution of the systems, we begin by analyzing the case of there being just a component, we then pass to the cases where we consider components in series and in parallel. In this context, we make a comparative study of the respective inspection periods that they minimize (or almost) the respective costs.

The results obtained are calculated directly, using the usual methods, or resort to the simulation techniques, through the generation of random values.

Be it the case of a system with one only component, be it the case of systems with serial or parallel components, we consider that the lifetime of those components is a random variable with different failure rates.

In the last part of the thesis, we approach the case of systems subject to non periodic inspections, being analyzed the advantages brought about at the level of costs, taking as a reference the case of the periodic inspections.

ÍNDICE

1 – INTRODUÇÃO	9
2 – ASPECTOS TEÓRICOS	14
2.1 – Fiabilidade de um Sistema	14
2.2 – Taxa de Risco para algumas Distribuições	18
2.2.1 – Distribuição Exponencial	19
2.2.2 – Distribuição de Weibull	20
3 – SISTEMA COM UM SÓ COMPONENTE E INSPECÇÕES PERIÓDICAS	24
3.1 – O Modelo. Aspectos Económicos.....	24
3.2 – Optimização e Simulação	28
3.2.1 – Optimização	28
3.2.1.1 – Número Médio de Inspeções	28
3.2.1.2 – Tempo Médio de Detecção	30
3.2.1.3 – Minimização do Custo Total Médio por Ciclo	35
3.2.2 – Simulação	38
3.2.2.1 – Números Aleatórios	38
3.2.2.2 – Geração de Números Pseudo-Aleatórios com Distribuição Específica $F(.)$	39
3.2.3 – Teste do Modelo	40
3.3 – Obtenção e Análise de Resultados	42
3.3.1 – Distribuição Exponencial	42
3.3.2 – Distribuição de Weibull	44
3.3.3 – Aproximação do Período de Inspeção e do Custo Total Médio Mínimo por Ciclo	46
3.3.3.1 – Aproximações Associadas com $E(D)=P/2$	46
3.3.3.2 – Aproximações Quase Óptimas	51

3.3.4 – Influência do Tipo de Distribuição do Tempo de Vida sobre o Custo Total Médio por Ciclo	55
4 – SISTEMA COM COMPONENTES EM SÉRIE E INSPECÇÕES PERIÓDICAS	57
4.1 – Sistema com Dois Componentes em Série com Tempos de Vida Exponenciais	57
4.1.1 – Fiabilidade e Taxa de Risco do Sistema	58
4.1.2 – O Modelo	61
4.1.3 – Soluções Exactas e Soluções Aproximadas para o Período de Inspeção	63
4.1.4 – Análise do Comportamento do Período de Inspeção	63
4.1.5 – Tempo Médio de Detecção	70
4.1.6 – Apresentação de Resultados	71
4.2 – Sistema com Dois Componentes em Série com Tempos de Vida Weibull ..	78
4.2.1 – Fiabilidade e Taxa de Risco do Sistema	78
4.2.2 – Análise do Comportamento do Período de Inspeção	80
4.2.3 – Tempo Médio de Detecção	83
4.2.4 – Apresentação de Resultados	84
5 – SISTEMA COM COMPONENTES EM PARALELO E INSPECÇÕES PERIÓDICAS	90
5.1 – Sistema com Dois Componentes em Paralelo com Tempos de Vida Exponenciais	90
5.1.1 – Fiabilidade e Taxa de Risco do Sistema	91
5.1.2 – Análise do Comportamento do Período de Inspeção	94
5.1.3 – Tempo Médio de Detecção	100
5.1.4 – Apresentação de Resultados	101

6 – SISTEMAS COM INSPECÇÕES NÃO PERIÓDICAS	109
6.1 – O Modelo. Solução Ótima	109
6.2 – Solução Aproximada (Política de Risco Constante)	111
6.2.1 – Número Médio de Inspeções	115
6.2.2 – Tempo Médio de Detecção	115
6.2.3 – Soluções Aproximadas para a Política de Risco Constante	121
6.3 – Sistema com Dois Componentes em Série	124
6.3.1 – Inspeções não Periódicas	124
6.3.2 – Soluções Aproximadas para a Política de Risco Constante	127
7 – CONCLUSÕES FINAIS	129
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	134

1. INTRODUÇÃO

A inspecção de sistemas deve ser entendida como uma aposta clara na qualidade, independentemente do tipo de sistema. Este método de controlo tem muitos aspectos positivos e de interesse relevante a considerar.

Um sistema (mecânico, electrónico ou humano, por exemplo) pode ser simples ou complexo, quando analisado do ponto de vista do número de elementos que o constituem. Seja qual for a sua natureza e complexidade, está sujeito ao aparecimento de períodos de mau funcionamento, tendo como origem um ou mais dos seus elementos constituintes, isto é, todo o sistema que possamos considerar, devido a uma ruptura ou a desgaste, está sujeito ao aparecimento de falhas.

As falhas de um sistema podem ser tais que o próprio sistema não revela a sua existência, ou pelo menos não a revela em tempo apropriado e útil. Nestas condições, há necessidade de observarmos os sistemas em determinados instantes do seu funcionamento para determinarmos se entretanto ocorreu ou não qualquer tipo de falha.

O sistema produtivo, está assim, sujeito a falhas, das quais resulta uma produção defeituosa a partir de um determinado instante e até que a respectiva reparação seja feita. O conhecimento dessa produção defeituosa é, na maior parte das situações, apenas possível se em determinados instantes forem retiradas da linha de produção amostras que são sujeitas a análise. É a partir destes resultados que podemos concluir algo sobre o estado do sistema sem nos esquecermos que associado à obtenção e análise das amostras está associado um custo, que pode ser considerável.

Notemos que a existência de uma falha não detectada durante um determinado período do funcionamento de um sistema pode provocar consequências graves quer no próprio sistema quer naquilo que dele resulta. Estas consequências podem ser qualificáveis através do que podemos chamar um custo de mau funcionamento, que poderá englobar diversos custos provocados pelo aparecimento de uma falha do sistema.

É fácil concluirmos que, um sistema que precise de ser inspeccionado o deve ser, por um lado, o menor número de vezes possível para que possamos reduzir o custo das inspecções, mas, por outro lado, deve ser inspeccionado o mais possível para reduzir o tempo de mau funcionamento.

Estamos, pois, perante um problema de optimização (minimização) do que podemos chamar um custo total.

Em termos práticos, existem duas questões fundamentais que nos interessam resolver. Assim, por um lado, interessa determinarmos quais os instantes em que o sistema deve ser inspeccionado e por outro interessa calcularmos o custo total associado a uma determinada sequência de instantes de inspecção.

Sempre que os instantes de inspecção estão igualmente espaçados no tempo estamos perante inspecções periódicas, caso contrário estamos perante inspecções não periódicas.

Sabemos que a inspecção de sistemas encontra aplicação em áreas extremamente diversas e amplas. Parece-nos no entanto adequado, destacarmos a medicina e questões militares, pois assumem um papel fundamental em Controlo Estatístico de Qualidade.

O objectivo essencial do Controlo Estatístico de Qualidade é atingirmos uma garantia de qualidade em organizações de produção e de serviço, através da utilização de técnicas estatísticas convenientes. O termo qualidade é aqui equivalente a adequabilidade para uso, isto é, os produtos devem satisfazer os requisitos daqueles que os vão utilizar.

Existem dois aspectos gerais de qualidade: temos por um lado a *qualidade do projecto* (existindo obviamente diferenças entre diferentes tipos de um mesmo produto), e por outro lado a *qualidade de conformidade*, isto é, uma medida da forma como o produto se porta, relativamente a especificações e tolerância requeridas pelo projecto.

Qualquer produto possui um número de características que, conjuntamente, descrevem a sua adequabilidade para serem usados. Essas características são usualmente designadas por *características de qualidade*, e podem ter várias naturezas, como por exemplo físicas, sensoriais entre outras.

A qualidade está cada vez mais a tornar-se o factor básico de decisão do consumidor em relação a produtos e serviços. Consequentemente, a qualidade é o factor chave que conduz ao sucesso de uma organização.

São extraordinariamente diversificadas as técnicas estatísticas de controlo de qualidade. Especificamente salientamos as seguintes áreas:

- a) Controlo estatístico de processos;
- b) Amostragem de aceitação;
- c) Fiabilidade

Convém referirmos que, adicionalmente a estas áreas, existem ainda muitas outras, também úteis na análise de problemas de qualidade e no melhoramento dos processos. Neste trabalho ocupar-nos-emos apenas da fiabilidade.

A Teoria da Fiabilidade tem sido descrita por alguns autores, como a ciência da predição, da estimação ou da optimização da probabilidade do tempo de vida de dispositivos. O desenvolvimento rápido desta teoria resultou essencialmente do crescente ênfase mediático dado pelas empresas e pelos consumidores, em geral, em relação à fiabilidade dos vários dispositivos que quase diariamente são introduzidos no mercado. A confiança no bom funcionamento dos mecanismos no maior período de tempo possível, tem-se tornado motivo de competição entre fabricantes que produzem o mesmo bem.

As inspecções periódicas são muito mais cómodas nas aplicações práticas, pois por exemplo, é muito simples retirarmos de hora a hora uma amostra da linha de produção de um sistema produtivo, já que o operador não precisa de fazer qualquer esforço mental nesse sentido, limitando-se a entrar numa rotina.

A questão que torna este problema de optimização bastante mais complicado é o facto de o instante de aparecimento da falha do sistema ser na prática imprevisível. Dizemos que estamos perante uma inspecção aleatória. É o que pode acontecer, por exemplo, com a medição da tensão arterial sempre que se vai ao médico. Desta feita, diversos investigadores se tem ocupado com tal facto, e em especial a partir dos trabalhos de Barlow *et al* (1963), Hunter (1964) e Barlow e Proschan (1965).

Considera-se que o intervalo de tempo entre o instante em que o sistema começa a funcionar em estado de novo (pode ser depois de uma eventual reparação) e o instante em que o sistema falha é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade conhecida. Neste trabalho, iremos verificar como as duas distribuições consideradas podem influenciar quer o custo total médio de funcionamento, quer o valor otimizador do período de inspecção.

Salientamos também que, diversos modelos de complexidade e âmbito diferentes, têm sido abordados por diversos investigadores ao longo do tempo. Contudo, quanto maior é a complexidade e a sofisticação introduzidas nestes, menor é a sua aplicação na prática das organizações.

Em resumo, a manufactura moderna está perante um desafio considerável. Os clientes aumentaram assustadoramente e os seus requisitos de qualidade, sendo natural que esta tendência se acentue no futuro, essencialmente devido às grandes pressões competitivas. A necessidade de técnicas analíticas e estatísticas em controlo de qualidade está a aumentar rapidamente, com as novas tecnologias. O grande desafio da qualidade à indústria é o de melhorar a qualidade dos produtos e serviços, modernizar as práticas de controlo de qualidade e simultaneamente conseguir reduções substanciais no custo de qualidade.

Tratam-se de desafios difíceis. Contudo, os métodos modernos de controlo estatístico de qualidade, fornecerão seguramente uma base para a indústria responder favoravelmente a estes desafios.

O controlo estatístico de qualidade é neste momento mais do que um conjunto de instrumentos estatísticos, toda uma maneira de pensar global dos diferentes trabalhadores de uma empresa, com o objectivo de produzir os produtos correctamente à primeira e reduzir sistematicamente a variância das características de qualidade com interesse para o processo de produção.

Este trabalho encontra-se dividido em sete capítulos, sendo este o primeiro que designámos como Introdução.

No segundo capítulo apresentamos os aspectos teóricos da Teoria da Fiabilidade, importantes para todo o desenvolvimento dos capítulos que se seguem.

O capítulo III desenvolve, com algum detalhe, o modelo subjacente a uma política periódica de inspecção de um componente com tempos de vida exponencial e Weibull e respectivas implicações nos custos associados ao modelo.

Nos capítulos IV e V são estudados os sistemas com componentes montados em série e em paralelo, respectivamente.

O objectivo do capítulo VI é estudarmos o sistema composto por um único componente com tempo de vida exponencial e o sistema com dois componentes em série e tempos de vida exponenciais também, quando estamos perante inspecções não periódicas.

Finalmente, o capítulo VII é dedicado à comparação de resultados, isto é, a uma análise dos resultados obtidos nos capítulos anteriores.

2. ASPECTOS TEÓRICOS

É geralmente aceite que a qualidade e o bom funcionamento dos produtos são uma das principais preocupações dos consumidores e empresários. Estudemos, do ponto de vista matemático, algumas das questões que envolvem o tempo de bom funcionamento de um sistema.

Suponhamos que estamos interessados em analisar o tempo de vida ou de bom funcionamento de um (ou mais) componente instalado num sistema e sobre o qual é exercido um qualquer tipo de trabalho.

Se esse componente for colocado sob condições normais de funcionamento num determinado instante, digamos $t=0$, e observado até que falhe, isto é, que pare de funcionar adequadamente sob o esforço aplicado, a duração de vida T pode ser considerada uma variável aleatória contínua com uma determinada função de densidade de probabilidade $f(t)$.

Procuramos assim, neste capítulo, apresentar alguns conceitos e o correspondente tratamento analítico, relacionados com a fiabilidade de um sistema e com as distribuições probabilísticas do respectivo tempo de vida.

2.1 – FIABILIDADE DE UM SISTEMA

Consideremos T a variável aleatória não negativa que designa o intervalo de tempo entre o instante em que o sistema começa a funcionar em estado de novo e o instante em que falha. É uma variável aleatória que supomos com função de densidade $f(t)$ conhecida e contínua.

Existe uma grande quantidade de provas empíricas que nos indicam que o valor de T não pode ser previsto a partir de um modelo determinístico, pois componentes

“idênticos” sujeitos a “idênticos” esforços falharão em diferentes e imprevisíveis instantes. Alguns falharão logo no início do seu funcionamento e outros em momentos posteriores. Naturalmente, o “modo de falhar” variará com o tipo de peça que se esteja a considerar.

A Teoria da Fiabilidade tem aplicação desde logo, pelo simples facto de se manter desconhecido, desde o início, o instante em que determinado sistema deixa de funcionar de um modo correcto. De uma outra forma, o tempo de vida ou de bom funcionamento do sistema é uma variável aleatória. De qualquer modo, o emprego de um modelo probabilístico com T considerado como variável aleatória, parece-nos ser o modo mais realista de abordarmos o problema.

Chamamos *função de fiabilidade* $R(t)$ do sistema à probabilidade do sistema ainda estar operacional num instante t , isto é, à probabilidade do tempo de vida T do sistema ser superior a um dado valor t . Utilizando o facto de admitirmos que a função de densidade $f(t)$ da variável aleatória T é conhecida e contínua, podemos escrever

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(x)dx, \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

ou de outro modo, representando a respectiva função de distribuição por $F(t)$,

$$R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t), \quad t \geq 0 \quad (2.2)$$

Notemos que a definição dada é também válida para $t < 0$, ainda que, no que nos interessa, as variáveis aleatórias tempos de vida sejam sempre não negativas.

Observemos também que, uma vez que a distribuição é contínua,

$$R'(t) = -F'(t) = -f(t) \quad (2.3)$$

Designamos por T o tempo decorrido até que uma falha do sistema ocorra e $F(t)$ a função de distribuição de T . Admitamos que $F(t)=0$, para $t \leq 0$, não se impondo de

momento outras restrições a F. Se $t > 0$, então $T \leq t$ é o acontecimento “ocorre um falha no intervalo de tempo $[0, t]$ ”. Logo $T > t$ é o acontecimento complementar, “não ocorre falha no intervalo de tempo $[0, t]$ ”.

Suponhamos que não ocorre nenhuma falha no intervalo de tempo $[0, t]$. Qual a probabilidade de que o mesmo se verifique no intervalo de tempo $[t, t + \Delta]$? Estamos então, perante um problema de probabilidades condicionadas. Pretendemos determinar $P(T > t + \Delta | T > t)$, a probabilidade de que não ocorra qualquer falha no intervalo de tempo $[0, t + \Delta]$, sabendo que ela não ocorre de certeza no intervalo de tempo $[0, t]$.

Segundo a definição de probabilidade condicional temos,

$$P(T > t + \Delta | T > t) = \frac{P(T > t + \Delta, T > t)}{P(T > t)} = \quad (2.4)$$

$$= \frac{P(T > t + \Delta)}{P(T > t)} \quad (2.5)$$

Suponhamos agora que F é uma distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$. Então, $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, para $t > 0$ e $P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = e^{-\lambda t}$. Logo, pela igualdade (2.5), escrevemos,

$$P(T > t + \Delta | T > t) = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta} = P(T > \Delta) \quad (2.6)$$

Por outras palavras, se a peça do equipamento sobrevive no intervalo de tempo $[0, t]$, então a probabilidade de assim continuar no intervalo $[t, t + \Delta]$ é igual à probabilidade de sobrevivência no intervalo $[0, \Delta]$ com a mesma amplitude. Em conclusão, podemos dizer que a probabilidade de sobrevivência depende unicamente da amplitude do intervalo de tempo e não da idade do equipamento (sistema). Expressa em termos de função de distribuição F, esta propriedade estabelece que,

$$\frac{1 - F(t + \Delta)}{1 - F(t)} = 1 - F(\Delta), \quad t > 0, \Delta > 0 \quad (2.7)$$

Retomando a expressão (2.5), podemos escrever,

$$\frac{P(T > t + \Delta)}{P(T > t)} = \frac{1 - F(t + \Delta)}{1 - F(t)} = \frac{R(t + \Delta)}{R(t)} \quad (2.8)$$

Então poder-se-á escrever,

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} P(T \leq t + \Delta | T > t) = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta) - F(t)}{(1 - F(t))\Delta} = \\ &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

atendendo ao facto que,

$$\begin{aligned} F(t|x) &= P(T > t + x) = 1 - R(t|x) = \\ &= \frac{F(t + x) - F(x)}{1 - F(x)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Desta forma, por (2.3), vem

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.11)$$

A esta função chamamos *taxa de risco* do sistema, embora também se costume chamar taxa de quebras, taxa de falhas ou força de mortalidade.

Pela expressão (2.9), em termos probabilísticos, esta taxa dá-nos a probabilidade de o sistema falhar em $(t, t + dt)$, sabendo que não falhou até ao instante t .

A partir da taxa de risco podemos introduzir o que se pode designar por *taxa cumulativa de risco* $H(t)$ da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \int_0^t h(t) dt & (2.12) \\
 &= \int_0^t \frac{f(u)}{1-F(u)} du = -\ln R(t)
 \end{aligned}$$

Notemos que, em certo sentido, podemos dizer que as funções $f(t)$, $F(t)$, $h(t)$, e $R(t)$ são equivalentes, já que é possível exprimirmos cada uma delas em função de uma das outras. De facto, verificam-se as seguintes relações:

$$f(t) = F'(t) = -R'(t) \quad (2.13)$$

$$h(t) = -\frac{d}{dt} \ln R(t) \quad (2.14)$$

$$H(t) = -\ln R(t) \quad (2.15)$$

$$R(t) = e^{-H(t)} \quad (2.16)$$

$$f(t) = h(t) e^{-\int_0^t h(x) dx} \quad (2.17)$$

Em Barlow e Proschan (1975) e Bergman (1985), por exemplo, podemos ver outras expressões e designações para as grandezas apresentadas, outras grandezas usadas em fiabilidade, bem como algumas propriedades das mesmas.

2.2 – TAXA DE RISCO PARA ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES

Quando falamos numa distribuição dum tempo de vida, em fiabilidade, é usual referirmos o tipo da respectiva taxa de risco. Desta forma, uma taxa de risco $h(t)$ pode

ser, em termos genéricos, constante, crescente, decrescente e em forma de banheira, o que não constitui objecto de estudo deste trabalho. É com base neste facto, que nos propomos a apresentar alguns exemplos que nos permitem cobrir as diferentes situações de interesse prático.

2.2.1 – DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

Como se sabe trata-se de um dos modelos de tempo de vida que mais aparece na literatura, talvez pela sua grande simplicidade.

A sua função de densidade, $f(t)$, é dada por,

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (2.18)$$

sendo $\lambda > 0$. Como facilmente se pode verificar a *função de fiabilidade* $R(t)$ é,

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (2.19)$$

A esperança matemática e o desvio padrão são dados, respectivamente por,

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad \sigma(T) = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \quad (2.20)$$

No entanto também poderíamos calcular o tempo médio de vida, por

$$E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (2.21)$$

uma vez que, $R(t)$ tende mais rapidamente para zero que t tende para infinito.

Na distribuição exponencial a taxa de risco $h(t)$ é constante, o que facilmente se verifica através da aplicação de (2.11).

Recordemos que a distribuição exponencial é conhecida como a “distribuição sem memória”, pois

$$P(T > s + t | T > t) = P(T > s) \quad (2.22)$$

que se justifica facilmente, uma vez que a distribuição exponencial verifica a relação $P(T > s + t) = P(T > s)P(T > t)$. A probabilidade de que, passado um tempo t , a vida do sistema dure mais o tempo s , é independente de t , o que mostra não haver envelhecimento (ou rejuvenescimento), isto é, não haver memória do passado.

2.2.2 – DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL

Esta distribuição é a mais utilizada para descrever o tempo de vida de um sistema. Tal facto deve-se, evidentemente, à circunstância da distribuição poder assumir uma grande variedade de forma consoante o valor atribuído ao parâmetro β . A função densidade (figura 2.3) é dada por,

$$f(t) = \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{t - \gamma}{\delta} \right)^{\beta - 1} e^{-\left(\frac{t - \gamma}{\delta} \right)^\beta}, \quad t \geq \gamma \quad (2.23)$$

onde $-\infty < \gamma < +\infty$ é um parâmetro de localização, $\delta > 0$ é um parâmetro de escala e $\beta > 0$ é um parâmetro de forma.

O ponto mais importante é o parâmetro de forma, o qual reflecte o tipo de curva de taxa de risco. Tipicamente, este valor variará de um modo geral, entre 1 e 3, embora

neste trabalho nós consideremos também outros valores, quer inferiores a 1, quer superiores a 3, para podermos analisar situações extremas.

Queremos salientar que a distribuição exponencial de parâmetro $1/\delta$ é uma particularização desta distribuição, quando $\beta = 1$.

O parâmetro de escala δ está relacionado com o ponto máximo da curva, isto é, de acordo com o seu valor, a distribuição é mais plana ou mais pronunciada.

O parâmetro de localização γ é o menor valor possível de T. Na maior parte das vezes assumimos que este valor é zero (foi o que fizemos no parágrafo mais à frente sobre simulação), resultando assim na simplificação da função.

A sua esperança matemática e o seu desvio padrão são dados, respectivamente, por,

$$E(T) = \gamma + \delta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad \text{e} \quad \sigma(T) = \delta \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \quad (2.24)$$

onde $\Gamma(x)$ é a função gama definida por,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du \quad (2.25)$$

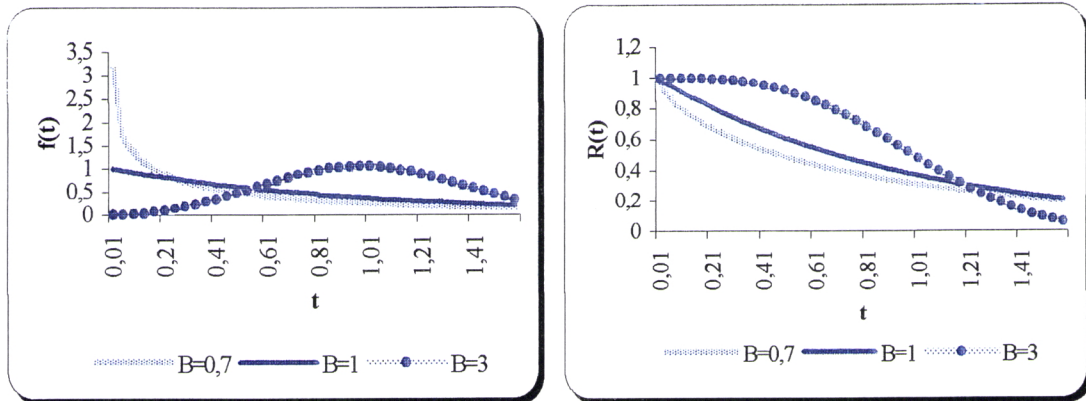
Atendendo a que a sua *função de fiabilidade* (figura 2.3), para $\gamma = 0$, é dada por,

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^{\beta}}, \quad t \geq 0 \quad (2.26)$$

temos imediatamente,

$$h(t) = \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{t}{\delta}\right)^{\beta-1}, \quad t \geq 0 \quad (2.27)$$

Pelos gráficos que se seguem, podemos observar tudo o que acabamos de referir.



Figuras 2.3 e 2.4 – Tempo de vida Weibull. Função de densidade $f(t)$ e função de fiabilidade $R(t)$ para $\beta = 0.7, \beta = 1$ e $\beta = 3$.

Da expressão (2.26), podemos concluir que,

- para $\beta=1$ temos $h(t) = \frac{1}{\delta}$, isto é, a taxa de risco é constante, pois trata-se da distribuição exponencial;
- para $\beta>1$ a taxa de risco é crescente, ou seja, $h(t)$ aumenta com o tempo (existe envelhecimento);
- para $\beta<1$ a taxa de risco é decrescente, ou seja, $h(t)$ diminui com o tempo (existe rejuvenescimento),

conforme podemos observar através da figura seguinte.

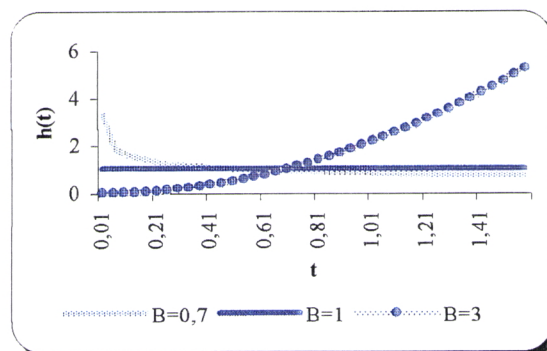


Figura 2.5 – Taxa de risco para a distribuição de Weibull , com $\beta = 0.7, \beta = 1$ e $\beta = 3$.

É claro que para além destas duas distribuições outras se poderiam referir e utilizar, como por exemplo a distribuição Normal, distribuição Log-normal, distribuição de Hjorth, distribuição Gama, distribuição de Makeham (Gumbel dos mínimos), logística e Gumbel de máximos.

Acrescentemos como resumo, a seguinte consideração:

- É muito importante compreendermos, que no caso da distribuição exponencial, podemos identificar o tempo de operação (a partir de algum valor inicial fixado arbitrariamente) com a idade de operação. Isso porque nesta distribuição, uma peça que não tenha falhado é tão boa quanto a nova e devido a este facto, o seu comportamento de falha, durante qualquer período particular, depende somente, da extensão desse período e não do seu passado. Contudo, quando se admite outra distribuição que não seja a exponencial, como a Weibull, o passado exerce influência sobre o desempenho da peça. Assim, para o caso exponencial, podemos definir T, como o tempo em serviço (até falhar), enquanto que para um caso não exponencial, devemos definir T como a duração total de vida até falhar.

3. SISTEMA COM UM SÓ COMPONENTE E INSPECÇÕES PERIÓDICAS

Cada vez mais colocam-se aos departamentos de produção das empresas problemas importantes de maximização de lucros e minimização de custos. A maximização de lucros está irremediavelmente associada ao “perfeito” funcionamento de todos os sistemas que constituem o processo produtivo. É perfeitamente natural que com o tempo de utilização de um dado dispositivo este comece a demonstrar um certo desgaste. Com o propósito de evitarmos esse desgaste, é importante realizarem-se inspecções. É claro que, esta opção acarreta custos para a referida empresa, pelo facto de estar associado a cada inspecção um determinado custo. Podemos no entanto, não optar por inspecionar, pelo que, duas situações podem ocorrer:

- 1) a necessidade de compra de um novo componente resultado de uma avaria irreversível;
- 2) estando o componente a funcionar, não o está a fazer nas melhores condições, podendo o mesmo estar a produzir um produto final imperfeito.

Em ambas as situações, os custos podem ser bastante elevados. Neste parágrafo procuramos especificar os pressupostos em que assenta o modelo em estudo e suas variáveis.

3.1 – O MODELO. ASPECTOS ECONÓMICOS

O modelo aqui apresentado assenta nas seguintes hipóteses fundamentais:

- [H₁] O sistema tem apenas dois estados de funcionamento: um de bom funcionamento correspondente ao tempo de vida, e outro de mau funcionamento, como resultado de uma falha;

- [H₂] O estado de mau funcionamento é apenas detectável se o sistema for inspeccionado;
- [H₃] As inspeções não interferem no estado do sistema e são de duração nula;
- [H₄] Existe um custo C_1 por cada inspeção feita ao sistema e um custo C_2 por cada unidade de tempo de mau funcionamento não detectado;
- [H₅] Consideramos que um ciclo começa com o sistema em estado novo e acaba no instante em que a falha é detectada;
- [H₆] A probabilidade de erro na detecção do estado do sistema é zero, pelo que, as inspeções se podem considerar perfeitas.

Apesar deste modelo poder ser visto com bastante generalidade e interesse prático, pois basta atendermos à simplicidade com que é formulado não deixa de conter algumas restrições, pelo que diferentes modelos alternativos têm sido apresentados na literatura.

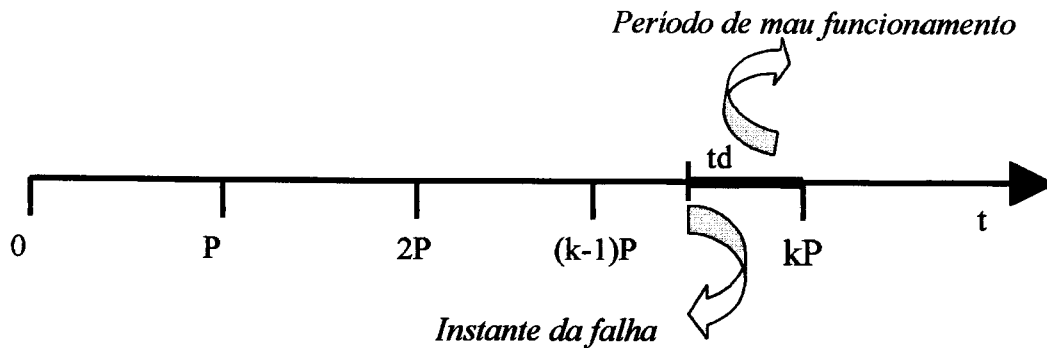
Desta forma vamos referenciar alguns dos modelos que nos parecem mais importantes.

Listas bibliográficas e análises sobre modelos de inspeção de sistemas podem encontrar-se em Pierskalla e Voelker (1976) e em Sherif (1982). Gibra (1975), Montgomery (1980) e Vance (1983) apresentam sínteses relativas à literatura existente sobre modelos com inspeções imperfeitas, as quais aparecem sempre em controlo estatístico de qualidade.

No que respeita aos aspectos económicos, mesmo que não corresponda à melhor política de inspeção, muitas vezes optamos pela inspeção periódica, por minimizar os custos.

Tal como referenciamos a inspeção não altera o estado do sistema.

Supondo que o sistema falha entre os instantes $(k-1)P$ e kP , queremos calcular o valor médio de N (número de observações).



Por observação do que se enunciou anteriormente vemos que N , o número de observações é dado por,

$$N = \text{int}\left(\frac{t}{P}\right) + 1, \quad (3.1)$$

onde $\text{int}()$ designa a função inteiro.

Esta variável aleatória toma valores inteiros e positivos, logo é discreta. Não pode tomar o valor zero, pois tem de ocorrer pelo menos uma observação para detectarmos a falha.

Se o período P diminui, fazem-se mais observações, isto é, N aumenta e consequentemente o número médio de observações $E(N)$ também aumenta. Consideramos que cada observação tem um certo custo C_1 , logo se numa situação concreta tivermos n observações, o custo é dado por $C_1 n$. Desta forma, o período P não deve ser nem muito grande nem muito pequeno, pois se for muito grande pode passar muito tempo entre a ocorrência da falha e a sua detecção, podendo verificar-se danos irremediáveis (exemplo: morte). Se for muito pequeno n aumenta, assim como os custos.

Por outro lado, existe um período de mau funcionamento que ocorre pelo facto da falha não ser detectada imediatamente, mas sim pela observação que segue a seguir à mesma.

Este tempo de mau funcionamento será designado por D e corresponde ao tempo de detecção da falha. Também é uma variável aleatória. Obviamente, do mau

funcionamento do sistema que advém da falha não ser detectada logo que ocorre, está associado um novo custo, que designaremos por C_2 .

Então, para um dado valor t de T , temos um custo total dado por,

$$C = C_1n + C_2d \quad (3.2)$$

onde n e d são os valores de N e D correspondentes a t , com,

$$d = nP - t, \quad d \geq 0 \quad (3.3)$$

Como é evidente, n e d e portanto c dependem de t e de P . Para um dado valor do período de inspecção P , o custo total médio por ciclo $E(C)$ é dado por,

$$E(C) = C_1E(N) + C_2E(D), \quad (3.4)$$

onde, $E(N)$ e $E(D)$ representam o Número Médio de Inspeções e o Tempo Médio de Detecção da Falha, respectivamente.

Em suma com o objectivo de calcularmos o custo total médio de funcionamento do sistema durante um ciclo (desde o início até à detecção e reparação da falha), consideramos as seguintes grandezas:

- T - tempo de vida (ou de bom funcionamento) do sistema;
- N - número de inspeções do sistema, incluindo aquele em que a falha é detectada. Estamos a considerar apenas inspeções periódicas;
- D - tempo de detecção da falha do sistema (intervalo de tempo entre o instante da ocorrência da falha e o instante da sua detecção);
- C - custo total de mau funcionamento do sistema devido a custo das inspeções e o custo do seu funcionamento enquanto a falha não é detectada.

Designamos ainda por C_1 e C_2 , respectivamente, o custo de cada inspecção e o custo por unidade de tempo de mau funcionamento do sistema.

3.2 – OPTIMIZAÇÃO E SIMULAÇÃO

Na primeira parte deste ponto iremos debruçar-nos sobre aspectos essenciais relativos à optimização de um sistema produtivo e em particular, à minimização dos respectivos custos de funcionamento.

Na segunda parte, e já que para obter determinados resultados foi necessário recorreremos a técnicas de simulação, debruçar-nos-emos em testar o nosso modelo .

3.2.1 – OPTIMIZAÇÃO

3.2.1.1 – NÚMERO MÉDIO DE INSPECÇÕES

Como já referimos, o número de inspecções durante um ciclo (que representamos por N) é uma das variáveis aleatórias importantes no modelo apresentado.

Relativamente à variável N observemos que a sua esperança matemática será dada por,

$$E(N) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \quad (3.5)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t) dt \quad (3.6)$$

em que p_k representa a probabilidade de o sistema ser inspeccionado k vezes e t_k são os instantes de inspecção, com $t_0 = 0$, e onde a função $f(t)$ é a função densidade de probabilidade do tempo de vida T do sistema.

Como estamos perante inspecções periódicas de período P , com $t_k = kP$, podemos obter sucessivamente,

$$\begin{aligned}
 p_k &= \int_{(k-1)P}^{kP} f(t)dt = F(kP) - F[(k-1)P] = \\
 &= 1 - R(kP) - 1 + R[(k-1)P] \\
 &= R[(k-1)P] - R(kP)
 \end{aligned}$$

Substituindo p_k em $E(N)$ vem,

- $k=1$ temos $R(0) - R(P) +$
- $k=2$ temos $+ 2 [R(P) - R(2P)] +$
- $k=3$ temos $+ 3 [R(2P) - R(3P) + \dots ,$

ou seja,

$$E(N) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \int_{(k-1)P}^{kP} f(t)dt = \quad (3.7)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k [F(kP) - F(k-1)P] = \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
 &= k [R(0) + R(P) + R(2P) + \dots + R(kP) + \dots] = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} R(kP) \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

A série $\sum_{k=0}^{\infty} R(kP)$ é uniformemente convergente em $[a, \infty)$, $a > 0$ e como $R(kP)$ é contínua em $[a, \infty)$, pois admitimos que $f(t)$ é contínua, então $E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} R(kP)$ é contínua no mesmo intervalo.

Sabemos que no caso da distribuição exponencial, o número médio de inspecções, $E(N)$ é-nos dado por,

$$E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda kP} = 1 + e^{-\lambda P} + e^{-2\lambda P} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-\lambda P}} \quad (3.10)$$

pois sabemos que a série $\sum e^{-\lambda kP}$ é uma série geométrica de razão $e^{-\lambda P}$ que é convergente, uma vez que, $|R| < 1$.

No caso da distribuição ser de Weibull, com $\gamma = 0$, temos,

$$E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(kP)^\beta} \quad (3.11)$$

3.2.1.2 – TEMPO MÉDIO DE DETECÇÃO

A partir das expressões (3.9) e (3.3) e representando por d o número médio de amostras desde o instante em que a falha ocorre e o instante da sua detecção, podemos escrever,

$$E(D) = PE(N) - E(T) \quad (3.12)$$

$$= P \left(\sum_{k=1}^{\infty} R(kP) \right) - E(T) \quad (3.13)$$

Como,

$$E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = [-tR(t)]_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} (-R(t)) dt, \text{ obtemos}$$

$$E(T) = \int_0^{\infty} R(t) dt, \quad (3.14)$$

pelo que, podemos escrever,

$$E(D) = P \left(\sum_{k=1}^{\infty} R(kP) \right) - \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (3.15)$$

Esta expressão permite-nos dar (Rodrigues Dias (1987a)) uma interpretação geométrica muito simples e sugestiva: o tempo médio até à extracção da primeira

amostra após a falha “ é dado pela diferença de 2 áreas, em que uma corresponde a $\sum PR(kP)$, é a soma das áreas de rectângulos de bases P , centradas em kP , $k=0,1,2,3,\dots$, e de altura $R(kP)$ e em que a outra área, correspondente a $E(T)$, é a área limitada superiormente por $R(t)$, inferiormente pelo eixo das abcissas e à esquerda pelo eixo das ordenadas”, como se pode constatar na figura 3.1.

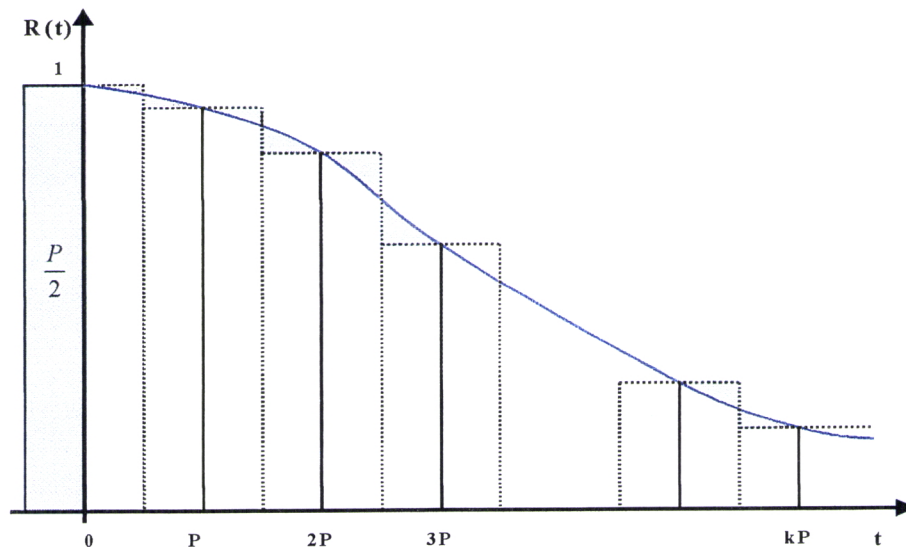


Figura 3.1 – Interpretação geométrica do tempo médio de detecção

Com base na interpretação geométrica sugerida pela expressão anterior, poderemos facilmente compreender que: para valores razoavelmente pequenos de P , a área dos rectângulos à direita do eixo das ordenadas aproxima-se de $E(T)$, pelo que $E(D)$ se aproxima de $P/2$ (área a tracejado na figura 3.1), isto é,

$$E(D) \cong P/2 \quad (3.16)$$

Este resultado baseia-se no seguinte raciocínio: a diferença entre a soma das áreas dos rectângulos e a área limitada por $R(t)$, é dada pela soma das áreas sombreadas das regiões apresentadas na figura 3.1. Admitindo uma linearização de $R(t)$, a soma dessas áreas é aproximadamente igual à soma de áreas de triângulos. Esta conclusão assumirá maior veracidade quanto mais pequeno for o valor de P .

Daqui resulta que,

$$E(D) \cong \frac{P[R(0) - R(P)]}{2} + \frac{P[R(P) - R(2P)]}{2} + \frac{P[R(2P) - R(3P)]}{2} + \dots$$

$$= \frac{P}{2}[R(0) - R(P) + R(P) - R(2P) + R(2P) - \dots] = \frac{P}{2}$$

Assim, poderemos afirmar que :

“ Se $R(t)$ admite uma aproximação linear no intervalo $[kP, (k+1)P]$, então $E(D)=P/2$ ”.

Para evidenciarmos este facto, damos como exemplo o caso em que a distribuição T é de Weibull, com $\beta = 2$. Os resultados obtidos por simulação para 20 000 números aleatórios estão apresentados na figura 3.2 , onde comparamos $E(D)$ com $P/2$. Através do método dos mínimos quadrados, obtivemos $r^2 = 0.99953$, o que é revelador do excelente ajustamento conseguido.

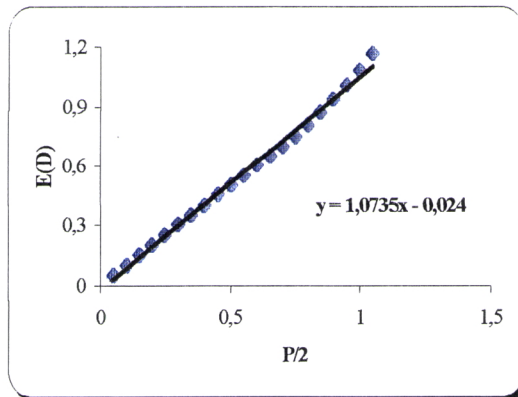


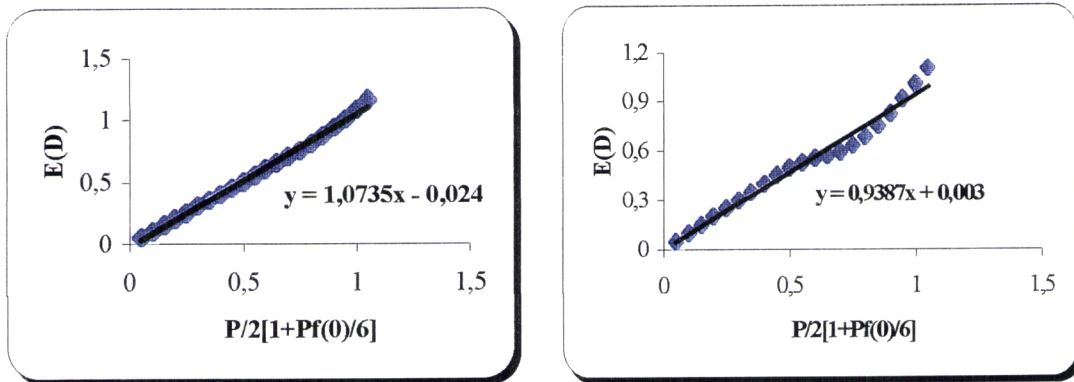
Figura 3.2 – Regressão linear entre $E(D)$ e $P/2$ para a distribuição de Weibull, com $\beta=2$.

Recordemos que Schneeweiss (1976), considerando uma linearização de $f(t)$ nos intervalos $[kP, (k+1)P]$, $k=0,1,2,\dots$, obteve a aproximação,

$$E(D) \cong \frac{P}{2} \left[1 + \frac{Pf(0)}{6} \right] \quad (3.17)$$

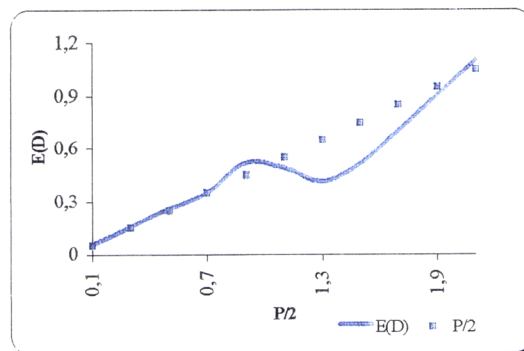
Notemos que, esta aproximação apenas é aplicável para valores de β superiores ou iguais a 1.

Também fomos testar a viabilidade desta nova aproximação, novamente por simulação de 20 000 números aleatórios. Os resultados que obtivemos estão expressos nos dois gráficos seguintes e também eles são reveladores do bom ajuste que conseguimos.



Figuras 3.3 e 3.4 – Regressão linear entre $E(D)$ e $P/2[1+Pf(0)/6]$, para a distribuição de Weibull, com $\beta=2$ (esquerda) e $\beta=3$ (direita), obtendo-se $r^2=0.9953$ e $r^2=0.9766$, respectivamente

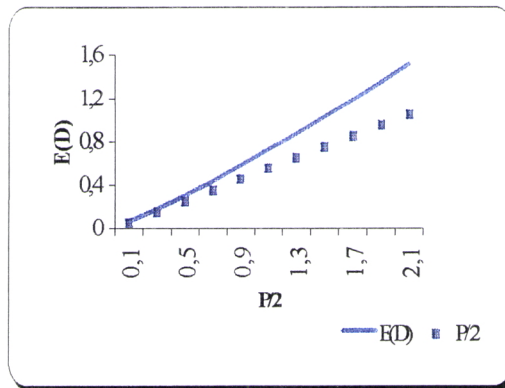
Notemos que este resultado, contudo, só é válido para $f(0) < \infty$, podendo-nos conduzir à conclusão $E(D) \geq P/2$, o que nem sempre se verifica. Assim, por exemplo no caso da distribuição T ser de Weibull, com $\beta = 5$, (figura 3.5), podemos verificar que para alguns períodos de inspeção, o tempo médio $E(D)$ é inferior a $P/2$.



Figuras 3.5 – Comparação entre $E(D)$ e $P/2$ para a distribuição de Weibull com $\beta=5$.

No entanto, no caso da distribuição exponencial, pelo facto da curva de $R(t)$ ser côncava, a interpretação geométrica mostra facilmente que $E(D)$ é sempre superior a $P/2$.

O mesmo pressuposto é também verificado no caso da distribuição T ser de Weibull, para $\beta = 0.7$. Observe-se a figura 3.6.



Figuras 3.6 - Comparação entre $E(D)$ e $P/2$, para a distribuição de Weibull, com $\beta=0.7$.

No caso em que $R(t)$ apresenta um ponto de inflexão, desde que P não seja muito elevado e desde que a distribuição do tempo de vida não tenha um desvio padrão muito pequeno, podemos considerar boa a aproximação $E(D) \cong P/2$.

Por outro lado, Nakagawa e Yassui (1979) mostraram que se $F(t)$, e portanto $R(t)$, admitissem uma aproximação linear em $[kP, (k+1)P], k=0,1,2,\dots$, então $E(D) \cong P/2$. Este resultado é também evidente a partir da interpretação geométrica apresentada na figura 3.1.

Tendo em conta que $E(D) \geq 0$, por definição, a partir da equação (3.12) podemos escrever

$$E(N) \geq \frac{E(T)}{P} \tag{3.18}$$

Por outro lado, $E(D) \leq P$, logo para $P \neq 0, \infty$ o número médio de observações é finito com,

$$E(N) < \frac{E(T)}{P} + 1 \quad (3.19)$$

Nos casos extremos, verificamos que $E(N) \rightarrow \infty$, quando $P \rightarrow 0$ e que $E(N) \rightarrow 1$, quando $P \rightarrow \infty$. Neste último caso, não nos devemos esquecer que estamos a supor que existe sempre uma inspecção após a falha.

Em suma, e da mesma forma que no caso do número médio de inspecções, também o cálculo do tempo médio de detecção pode oferecer bastantes dificuldades no tratamento analítico, pelo que o recurso a métodos aproximados e em particular à simulação podem ser bastante imprescindíveis.

3.2.1.3 – MINIMIZAÇÃO DO CUSTO TOTAL MÉDIO POR CICLO

Através das expressões (3.5) e (3.12), podemos reescrever o custo total médio por ciclo como,

$$\begin{aligned} E(C) &= C_1 E(N) + C_2 E(D) \\ &= C_1 E(N) + C_2 P E(N) - C_2 E(T) \\ &= E(N)(C_1 + C_2 P) - C_2 E(T) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Tomando em consideração que $r = C_1/C_2$, podemos obter a mesma expressão da forma seguinte,

$$E(C) = C_2 E(T) \left\{ \left[\frac{r}{E(T)} + \frac{P}{E(T)} \right] E(N) - 1 \right\} \quad (3.21)$$

A questão que se coloca nesta fase será : qual o valor de P_0 que minimiza o custo total médio por ciclo?

Inspeccionando muito frequentemente, ou seja, com P pequeno, o número médio de inspeções é elevado pelo que aumenta o custo.

À medida que P aumenta, o custo diminui. No entanto, quando P já é grande demais, aumenta a possibilidade da produção ser má, o sistema falhar e não se detectar, e assim, o custo total médio aumenta. Então, existe necessariamente um P mínimo (P_0). O custo total médio mínimo, ao qual chamaremos $E(C)_0$, é obtido para um valor P_0 de P que verifica a seguinte igualdade:

$$E(N) + (r + P) \frac{d}{dP} E(N) = 0 \quad (3.22)$$

Atendendo a que a derivação de $E(N)$ pode ser efectuada, sendo suficiente que $f(t)$ seja uma função contínua, obtemos,

$$\frac{d}{dP} E(N) = - \sum_{k=1}^{\infty} k f(kP) \quad (3.23)$$

Através de (3.9), o problema de minimização consiste, pois, em resolvermos a equação,

$$\sum_{k=0}^{\infty} R(kP) - (r + P) \sum_{k=1}^{\infty} k f(kP) = 0 \quad (3.24)$$

É claro que o valor de P_0 também pode ser obtido por (3.20), resultando,

$$\frac{d}{dP} E(C) = C_1 \frac{d}{dP} E(N) + C_2 \left[E(N) + P \frac{d}{dP} E(N) \right] = 0 \quad (3.25)$$

Como facilmente podemos verificar o tratamento analítico das expressões (3.24) e (3.25) é bastante difícil.

No que respeita à distribuição exponencial, utilizando (3.10), temos,

$$\frac{d}{dP} E(N) = -\frac{\lambda e^{-\lambda P}}{(1 - e^{-\lambda P})^2} \quad (3.26)$$

Retomemos a expressão (3.25), ou seja,

$$C_1 \frac{d}{dP} E(N) + C_2 E(N) + PC_2 \frac{d}{dP} E(N) = 0$$

Dividindo tudo por C_2 , vem

$$r - \frac{\lambda e^{-\lambda P}}{(1 - e^{-\lambda P})^2} + \frac{1}{1 - e^{-\lambda P}} + P - \frac{\lambda e^{-\lambda P}}{(1 - e^{-\lambda P})} = 0 \quad (3.27)$$

Este resultado, permite-nos desde já concluir que, para calcularmos o P óptimo não importa o valor de C_1 e C_2 , mas sim o valor do cociente r .

Agora se multiplicarmos o resultado (3.27) por $(1 - e^{-\lambda P})^2$ de forma a eliminarmos os denominadores, obtemos,

$$e^{\lambda P} = 1 + \lambda r + \lambda P \quad (3.28)$$

Geometricamente,

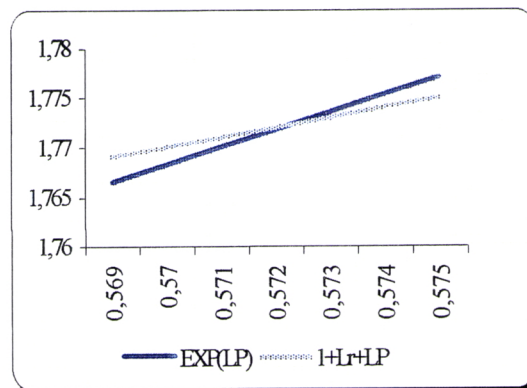


Figura 3.7 - Gráfico da distribuição exponencial utilizando a expressão (3.28) para $r = 0.2$ e $\lambda = 1$.

Como existe apenas um ponto de intersecção, também obtemos apenas uma solução óptima. Podemos dizer que existe apenas um valor de optimização “do custo do sistema”.

No entanto, esta situação de unicidade nem sempre se verifica, pois no caso da distribuição de Weibull para determinados valores dos parâmetros existe mais do que um mínimo, conforme veremos mais à frente.

3.2.2 – SIMULAÇÃO

Impossibilitados que estamos, muitas vezes de sobre a realidade actuar, esta é substituída por modelos que, sob um determinado ponto de vista, se considera que a representam. Actuando sobre os modelos, procuramos tirar conclusões aplicáveis à própria realidade. Fazer simulação é imitar a realidade através de modelos.

Os modelos que aqui nos interessam são aqueles que não conservam as características físicas do sistema que representam (ou pretendem representar), ditos matemáticos. Como é conhecido, estes modelos podem ser classificados em modelos probabilísticos (ou estocásticos), se neles intervêm variáveis aleatórias e modelos determinísticos, caso contrário.

3.2.2.1 – NÚMEROS ALEATÓRIOS

Para simularmos variáveis aleatórias é necessário dispormos de um processo de gerar aleatoriamente amostras dessas variáveis. Ora, estas amostras podem ser obtidas a partir de amostras correspondentes da variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo (0,1). Sequências independentes desta variável são chamadas números aleatórios. O gerador que utilizamos foi o MSExcel.

Os números gerados pelo computador constituem uma sequência de números calculados matematicamente por uma regra prefixada, mas do ponto de vista estatístico podem ser encarados como números aleatórios, uma vez que, apesar da sua relação

determinística, conhecido um é praticamente impossível prever o próximo. Esta é a razão pela qual os números gerados pelo computador são designados por números pseudo-aleatórios. Estas sequências de números pseudo-aleatórios possuem uma grande vantagem, pois podem ser repetidas desde o início e assim possibilitam uma repetição do processo computacional da simulação.

3.2.2.2 – GERAÇÃO DE NÚMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS COM DISTRIBUIÇÃO ESPECÍFICA F(.)

Pelo que referenciamos anteriormente, precisamos de um processo para transformar os números gerados em valores aleatórios das variáveis que pretendemos simular. Para tal, podemos utilizar por exemplo, o algoritmo de transformação inversa para as nossas duas distribuições, embora existam outros como o método de transformação ou o método de rejeição.

No que se segue, designaremos por $\{1-U_i\}_{i \geq 1}$ (ou genericamente por 1-U) números pseudo-aleatórios uniformes em (0,1), gerados pelo MSExcel.

Vamos então apresentar um dos principais algoritmos de transformação, o algoritmo de transformação inversa (algoritmo universal).

Seja 1-U um número pseudo-aleatório uniforme em (0,1) e F(x) uma função distribuição arbitrária. Se $F^{-1}(1-U) = \inf \{y : F(y) \geq 1-U\}$, então $X = F^{-1}(U)$ tem função de distribuição F(x).

Este algoritmo é sempre utilizado, salvo quando a expressão analítica de F(x) não existe, ou se existir, não for analiticamente invertível.

Sabemos que a função de distribuição da variável aleatória exponencial é dada por

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \text{com } \lambda > 0 \quad (3.29)$$

donde, aplicando o algoritmo de transformação inversa e atendendo a que U segue uma distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$, temos,

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-U) \quad (3.30)$$

Quando utilizamos este algoritmo é sempre prudente verificarmos a que valores de X correspondem os extremos de $(1-U)$. Assim, para $u=0$ vem $x = \infty$ e para $u=1$ vem $x=0$, pelo que está de acordo com (3.29).

A função de distribuição da variável de Weibull é dada pela expressão ,

$$F(x) = e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^\beta}, \quad x \geq \gamma, \delta > 0, \beta > 0 \quad (3.31)$$

Desta forma, aplicando novamente o algoritmo de transformação inversa vem, sucessivamente,

$$1-U = 1 - e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^\beta} \Leftrightarrow \ln(U) = -\left(\frac{X-\gamma}{\delta}\right)^\beta \Leftrightarrow \left(\frac{X-\gamma}{\delta}\right) = [\ln(1-U)]^{1/\beta}, \text{ donde,}$$

$$X = \gamma + \delta(-\ln(1-U))^{1/\beta} \quad (3.32)$$

Para $u=0$ temos $x = \infty$ e para $u=1$ vem $x = \gamma$, pelo que é compatível com (3.31).

3.2.3 – TESTE DO MODELO

Este ponto é importante para verificarmos se o método de simulação que construímos é ou não de uma boa precisão.

Para tal vamos usar a distribuição exponencial, pois em relação a esta distribuição podemos testar a viabilidade dos resultados obtidos por simulação para os 20 000 números aleatórios, pois também conhecemos as soluções analíticas.

Deste forma apresentamos de seguida dois quadros para diferentes valores de C_1 e C_2 , para os casos da distribuição exponencial de parâmetros 1 e 0.1.

$C_1 = 0,01 ; C_2 = 0,05$				
P	E(N)		E(D)	
	Analítico	Simulado	Analítico	Simulado
0,49	2,5971	2,5815	0,2657	0,2649
0,51	2,5217	2,5031	0,2791	0,2766
0,53	2,4457	2,4308	0,2893	0,2883
0,55	2,3791	2,3638	0,3016	0,3001
0,56	2,3469	2,3321	0,3073	0,306
0,58	2,2826	2,2722	0,317	0,3179
0,60	2,2262	2,2164	0,3288	0,3298
0,62	2,1753	2,1642	0,3418	0,3418
0,64	2,1276	2,1155	0,3547	0,3539
0,65	2,1037	2,0923	0,3605	0,36
0,67	2,0575	2,048	0,3716	0,3721

Quadro 3.1– Comparação entre os valores do número médio de observações e do tempo médio de detecção obtidos por simulação e analiticamente, no caso da Exp(1).

Podemos afirmar que a diferença entre os valores obtidos por simulação e analiticamente (os erros relativos), para o número médio de inspecções E(N), varia entre 0.7% e 0.4%, para o quadro 3.1 e entre 0.8% e 0.3%, para o quadro 3.2, o que nos parecem valores com uma precisão bastante satisfatória.

$C_1 = 1 ; C_2 = 2 ;$				
P	E(N)		E(D)	
	Analítico	Simulado	Analítico	Simulado
1	10,5795	10,5083	0,5093	0,5083
2	5,5497	5,5167	1,0292	1,0333
3	3,8787	3,8583	1,5659	1,5749
4	3,0472	3,0332	2,1186	2,133
5	2,5612	2,5415	2,7358	2,7075
6	2,2264	2,2164	3,2876	3,2982
7	1,9936	1,9864	3,8844	3,905

Quadro 3.2 – Comparação entre os valores do número médio de observações e do tempo médio de detecção obtidos por simulação e analiticamente, no caso da Exp (0.1).

No que respeita ao tempo médio de detecção $E(D)$, verificamos que o erro relativo existente entre os valores obtidos por simulação e analiticamente varia entre -0.5% e 0.9% , para o quadro 3.1 e entre -0.5% e 1% , para o quadro 3.2, respectivamente.

Para terminarmos este ponto, podemos afirmar, sem qualquer dúvida, que o método de simulação que construímos é de uma precisão bastante boa, uma vez que somos conduzidos a valores muito próximos dos obtidos analiticamente.

3.3 – OBTENÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Com base no modelo antes apresentado, fazemos o estudo de um conjunto de situações, quer de natureza teórica, quer de natureza essencialmente prática, com o objectivo fundamental de vermos até que ponto é que os valores dos parâmetros fundamentais, são ou não relevantes na perspectiva de minimização do custo total médio por ciclo. Com este intuito, obtivemos todo um conjunto de resultados, alguns dos quais se apresentam e analisam.

Procuramos por outro lado, estudar a influência da distribuição do tempo de vida do sistema, quer sobre o respectivo custo total médio de funcionamento, quer sobre o valor optimizante do período de inspecção e por fim avaliarmos a importância prática das soluções aproximadas para o período de inspecção P .

Começamos por acentuar, uma vez que o facto é importante em termos de aplicações, que a uma dada variação do período de inspecção P corresponde uma variação do custo total médio $E(C)$, que de um modo geral é pouco sensível à variação do período, como teremos oportunidade de constatar.

3.3.1 – DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

Vejamos o caso da distribuição exponencial, que como já referimos no ponto anterior apresenta um único mínimo. (Ver figura 3.8).

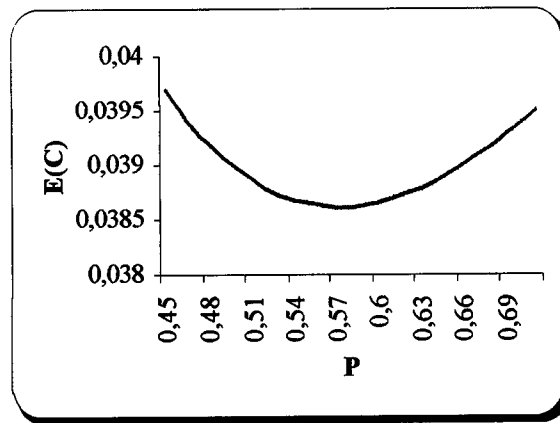


Figura 3.8 - Custo total médio por ciclo $E(C)$ em função do período de inspeção P , para a distribuição $\text{Exp}(1)$, com $C_1=0.01$ e $C_2=0.05$.

Por Rodrigues Dias (1987a) e tendo em conta a expressão (3.5), dizemos que em termos genéricos quando o número médio de inspeções cresce (decresce) por diminuição (aumento) de P , o tempo médio de detecção decresce (cresce).

Mais se acrescenta, pois quando P cresce o tempo médio de detecção $E(D)$ cresce também, pelo que, $E(N)$ e $E(D)$ variam em sentido inverso. A sua correlação é negativa, conforme podemos observar pela figura que se segue.

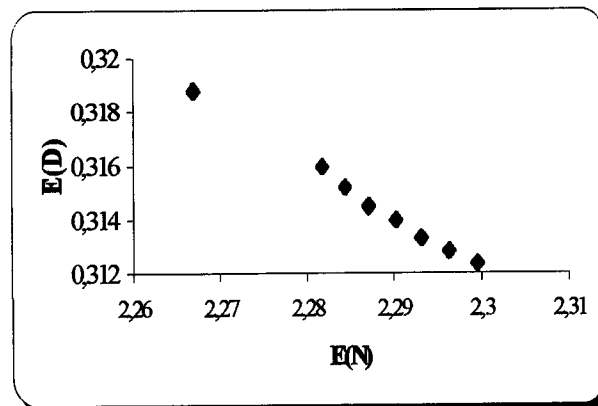
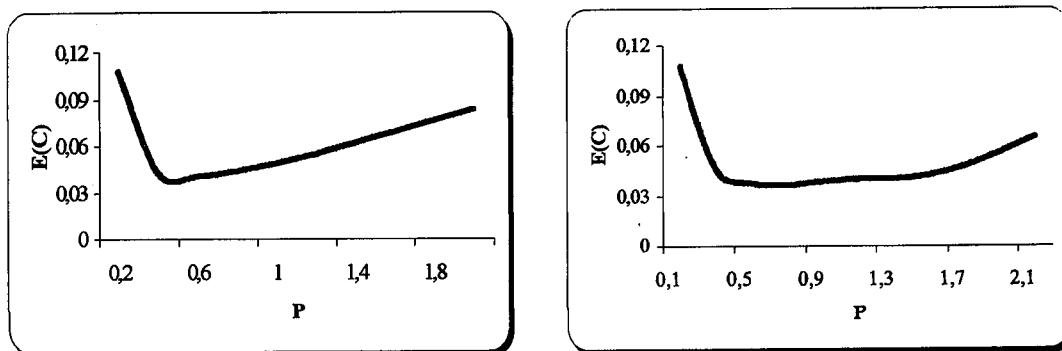


Figura 3.9 – Diagrama de dispersão que relaciona $E(N)$ com $E(D)$, para a distribuição $\text{Exp}(1)$.

3.3.2 – DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL

No que respeita à distribuição de Weibull, podemos começar por referenciar o caso em que $\beta=0.7$ e tal como no caso da distribuição exponencial apenas apresenta um valor mínimo, mantendo-se assim a unicidade de solução.

O mesmo se verifica quando $\beta=2$ e $\beta=3$. Observemos as figuras 3.10 e 3.11, conseguidas por simulação de 20 000 números aleatórios.



Figuras 3.10 e 3.11 - Custo total médio por ciclo $E(C)$ em função do período de inspeção P , para a distribuição de Weibull com $\beta=0.7$ (esquerda) e $\beta=3$ (direita) e com $C_1=0.01$ e $C_2=0.05$.

Tal como referimos no ponto 3.2.1.3, nem sempre se verifica a unicidade da solução de P_0 , pois como vamos observar na figura 3.12 para $\beta=5$ temos dois mínimos, sendo o valor de P_0 o mínimo absoluto, embora este facto exija cautelas aquando da sua minimização.

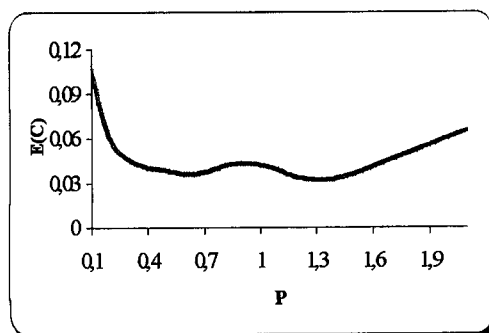


Figura 3.12 - Custo total médio por ciclo $E(C)$ em função do período de inspeção P , para a distribuição de Weibull com $\beta=5$, com $C_1=0.01$ e $C_2=0.05$.

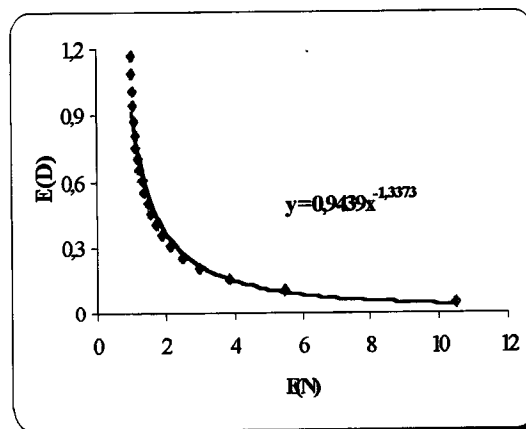
Voltando novamente à correlação existente entre $E(N)$ e $E(D)$, verificamos que estes têm uma variação que se pode considerar da mesma ordem de grandeza de P . Através da figura 3.13, constatamos que $E(D)$ e $E(N)$ estão correlacionados de um modo não linear.

Parece-nos apropriado para descrevermos a relação existente entre estas duas quantidades, uma função potência do tipo,

$$Y = AX^B,$$

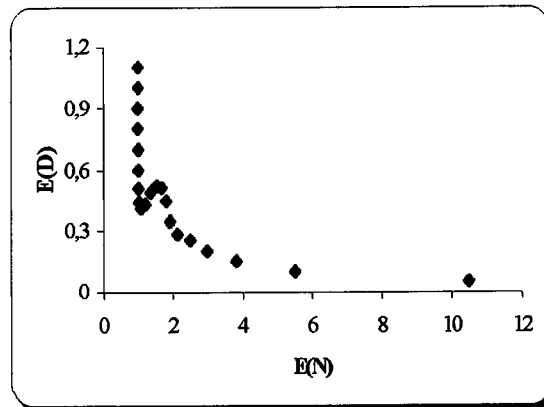
onde $Y = E(D)$ e $X = E(N)$, respectivamente.

Através do método dos mínimos quadrados, obtivemos o coeficiente de determinação não linear $r^2 = 0.9808$, que é bastante elevado.



Figuras 3.13 - Ajustamento de $E(D)$ em função de $E(N)$, para a distribuição de Weibull com $\beta=2$, obtendo-se $r^2=0.9808$.

No entanto, convém dizermos que podem ocorrer situações onde, para valores do período de inspeção P pertencentes a determinados intervalos, $E(N)$ e $E(D)$ apresentam o mesmo sentido de variação. É o que acontece, por exemplo, no caso da distribuição de Weibull, para $\beta=5$. Por observação da figura 3.14 seguinte, verificamos que quando P aumenta, $E(D)$ começa por aumentar, depois diminuir (tal como $E(N)$) e finalmente aumenta de novo.



Figuras 3.14 - Diagrama de dispersão que relaciona $E(N)$ com $E(D)$, para a distribuição de Weibull com $\beta=5$.

Através do método dos mínimos quadrados constatamos que o ajuste a uma potência ainda é bastante satisfatório, embora não tão bom como o do caso anterior, pois o coeficiente $r^2 = 0.9025$.

3.3.3 – APROXIMAÇÕES DO PERÍODO DE INSPECÇÃO E DO CUSTO TOTAL MÉDIO MÍNIMO POR CICLO

3.3.3.1 – APROXIMAÇÕES ASSOCIADAS COM $E(D)=P/2$

Vimos num ponto anterior que o valor P_0 que minimiza o custo total médio por ciclo é obtido através da equação (3.25), embora essa solução possa não ser única, conforme já referimos e mostramos também.

Na altura em que referenciamos esta equação, tivemos o cuidado de informar que a sua resolução não era imediata, exigindo o recurso a meios informáticos e a técnicas de análise numérica.

Os factos que acabamos de referir levaram os investidores a procurarem soluções aproximadas para o período de inspecção, que fossem por um lado facilmente aplicáveis no quotidiano e por outro suficientemente precisas.

Assim, Nakagawa e Yassui (1979), partindo da aproximação $E(D)=P/2$, obtiveram para o período de inspecção o valor dado pela seguinte expressão,

$$P_0^* = \sqrt{2rE(T)} \quad (3.33)$$

Para tal usaram-se as fórmulas (3.12) e (3.16) que nos permitem escrever o seguinte:

$$E(D) = E(N)P - E(T) \cong \frac{P}{2} \quad (3.34)$$

$$E(N)P = E(T) + \frac{P}{2} \quad (3.35)$$

$$E(N) = \frac{E(T)}{P} + \frac{1}{2} \quad (3.36)$$

Através das fórmulas anteriormente apresentadas podemos reescrever o custo total médio como,

$$E(C) = C_1 \left(\frac{E(T)}{P} + \frac{1}{2} \right) + C_2 \frac{P}{2} \quad (3.37)$$

e conseqüentemente,

$$\frac{dE(C)}{dP} \cong -C_1 \underbrace{\frac{E(T)}{P^2}}_0 + \frac{C_2}{2} \quad (3.38)$$

Este valor não depende da distribuição, depende apenas do valor médio e do cociente dos valores de C_1 e de C_2 .

No caso particular da distribuição exponencial, sabemos que,

$$e^{\lambda P} = 1 + \lambda P + \frac{(\lambda P)^2}{2} + \dots \quad (3.39)$$

Se desprezarmos as parcelas a partir da 3ª, vem

$$e^{\lambda P} = 1 + \lambda P + \frac{(\lambda P)^2}{2} \quad (3.40)$$

Através da equação (3.28), temos

$$\begin{aligned} 1 + \lambda P + \lambda r &= 1 + \lambda P + \frac{(\lambda P)^2}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(\lambda P)^2}{2} &= \lambda r \Leftrightarrow P^2 = \frac{2\lambda r}{\lambda^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P^* &= \sqrt{2rE(T)} \end{aligned}$$

Este valor P_0^* , no nosso caso é 0.632, pois estamos a considerar que $E(T)=1$, independentemente da distribuição em causa e consideramos $C_1=0.01$ e $C_2 = 0.05$.

Este resultado dada a sua simplicidade, é muito atractivo em termos de aplicações práticas, pelo que temos de analisar se o seu grau de precisão é ou não satisfatório.

Para tal consideramos,

$$Q = \frac{P^* - P_0}{P_0} \times 100\% \quad (3.41)$$

Este cociente dá-nos o erro cometido do valor P^* aproximado relativamente ao valor exacto P_0 .

Será que P^* difere muito ou pouco de P_0 ?

- Se diferir pouco, não existe problema.
- Se diferir muito, será que o erro relativo do $E(C)$ também vai ser grande ?

Seja $E(C)_0$, o custo associado ao valor P_0 e $E^*(C)$, o custo associado ao valor P^* e consideremos,

$$Q_1 = \frac{E^*(C) - E(C)_0}{E(C)_0} \times 100\% \quad (3.42)$$

Mesmo que o valor de Q seja muito elevado, atendendo ao facto que $E(C)$ é pouco sensível à variação do período P , o valor de Q_1 vai variar muito menos.

Podemos também comparar o tempo médio de detecção óptimo $E(D)_0$ com metade do período de inspecção óptimo P_0 , para vermos até que ponto a aproximação $E(D)=P/2$ é ou não boa, não só para o caso da distribuição exponencial, mas também para a distribuição de Weibull.

Para tal designaremos por Q_2 e Q_3 , os erros relativos seguintes,

$$Q_2 = \frac{P_0/2 - E(D)_0}{E(D)_0} \times 100\% \quad (3.43)$$

$$Q_3 = \frac{P^* - P_0}{P_0} \times 100\% \quad (3.44)$$

No quadro 3.3 estão indicados os valores obtidos para a distribuição de Weibull.

E(T)=1		
DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL	Q_2	Q_3
0,7	-16,87	10,53
1	-9,23	10,49
1,5	-2,31	5,33
2	-1,00	-2,77
3	0,87	-9,71
4	34,73	-51,38
5	57,45	-51,38

Quadro 3.3 – Valores de Q_2 e de Q_3 para a distribuição de Weibull, no caso em que $E(T)=1$, $C_1 = 0.01$ e $C_2 = 0.05$.

Podemos verificar o seguinte:

- a) Para a distribuição com taxa de risco constante, distribuição de Weibull com $\beta=1$ constatamos que $E(D)$ é sempre superior a $P/2$.

Por outro lado, para a distribuição de Weibull com β elevado, verificamos que $E(D)$ pode ser consideravelmente mais pequeno que $P/2$. Já no caso de $\beta=2$ e $\beta=3$, verificamos que $E(D) \cong P/2$.

- b) O valor de P_0^* , obtido por Nakagawa e Yassui (1979), pode afastar-se bastante de P_0 (tomando valores quer superiores quer inferiores). Novamente, no caso da distribuição de Weibull com $\beta=2$, podemos dizer que a aproximação em estudo é bastante satisfatória, pois não nos podemos esquecer que estamos a considerar $r/E(T) = 0.2$, que não é um valor muito baixo e sabemos que quanto maior (menor) for este cociente pior (melhor) é a aproximação em causa.

No entanto para que possamos evidenciar melhor o que referimos anteriormente para o parâmetro de forma $\beta=2$ da distribuição de Weibull, criamos 4 novas sequências, agora de 30 000 números aleatórios (para aumentarmos o grau de precisão) e os resultados obtidos estão esquematizados na figura 3.15.

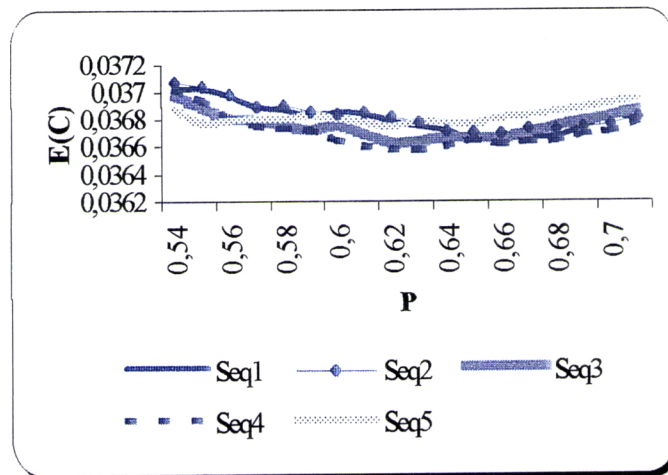


Figura 3.15 – Custo total médio $E(C)$ em função do período de inspeção P , para a distribuição de Weibull com $\beta=2$, $C_1=0.01$ e $C_2=0.05$, para 5 sequências diferentes de números aleatórios.

Claro que, se voltarmos a calcular os erros relativos Q_2 e Q_3 em relação às sequências em questão verificamos que estes são um pouco diferentes (quadro 3.4), uma vez que estamos perante amostras.

E(T)=1		
DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL	Q_2	Q_3
Seq 1	-1,00	-2,77
Seq 2	-0,64	-4,24
Seq 3	-0,08	1,94
Seq 4	0,36	0,32
Seq 5	-0,47	1,94

Quadro 3.4 – Diferentes valores de Q_2 e de Q_3 para a distribuição de Weibull com $\beta=2$.

Através do gráfico 3.15 e quadro 3.4, podemos afirmar que, especialmente, para a sequência 4 os valores de P_0 e P_0^* são quase iguais, logo a aproximação que estamos a estudar é boa, o que reforça o que havíamos dito antes.

3.3.3.2 – APROXIMAÇÕES QUASE ÓPTIMAS

De acordo com o que já referimos em pontos anteriores, vamos começar por obter uma solução para o período de inspeção e para o custo total médio no caso em que T tem tempo de vida exponencial.

Tomando em consideração que $E(T) = \frac{1}{\lambda}$, a equação (3.28) pode escrever-se como,

$$e^{P'} - (1 + r' + P') = 0 \tag{3.45}$$

onde $P' = \frac{P}{E(T)}$ e $r' = \frac{r}{E(T)}$.

Através desta nova relação, podemos fazer corresponder a cada valor de r' um valor de P' , a partir do qual obtemos imediatamente o correspondente valor do período de inspecção P com a igualdade,

$$P = P'E(T) \quad (3.46)$$

Assim, podemos reescrever

$$Q_3 = \frac{P_0^{*'} - P_0'}{P_0'} \times 100\% \quad (3.47)$$

onde, P_0' será a solução de (3.45) e em que $P_0^{*'}$ seria dado por $P_0^{*'} = \sqrt{2r'}$.

Claro que esta expressão também pode ser obtida por (3.45), fazendo,

$$e^{P'} \approx 1 + P' + \frac{P'^2}{2} \quad (3.48)$$

da mesma forma que fizemos em (3.40), pois

$$\begin{aligned} 1 + P' + r' &= 1 + P' + \frac{P'^2}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P' &= \sqrt{2r'} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Gostaríamos de salientar que os valores de Q_3 ajustam-se bastante bem a uma parábola.

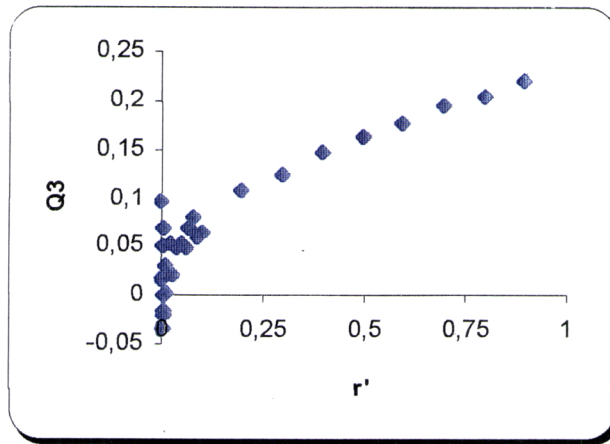
Usaremos para o facto,

$$Q_3^* = a + br'^{1/2} \quad (3.50)$$

isto é, a recta de regressão,

$$Q_3^* = a + bx, \text{ onde } x = \sqrt{r'} \quad (3.51)$$

Observemos a figura que se segue para podermos constatar o que acabámos de referir.



Figuras 3.16 – Diagrama de dispersão de Q_3 em função de r' , para a distribuição exponencial.

Tal como era de esperar estes valores foram obtidos, através do quadro 3.5, que está mais à frente e usando a equação (3.45).

Pelo método dos mínimos quadrados obtivemos $r^2 = 0.9811$.

De facto, usando uma recta do tipo Q_3^* (3.51) e recorrendo novamente ao método dos mínimos quadrados, obteve-se (Rodrigues Dias (1987a)),

$$Q_3^* = 0.234\sqrt{r'} \quad (3.52)$$

Com base nas expressões (3.33), (3.44) e (3.52), é possível obtermos a aproximação,

$$P_0^{**} = \frac{\sqrt{2rE(T)}}{1 + 0.234\sqrt{r'}} \text{ , com } r' = \frac{r}{E(T)} \quad (3.53)$$

É importante realçarmos que a aproximação (3.53), para o período de inspeção generaliza a aproximação (3.33), obtida anteriormente. O valor de $k = \frac{1}{1 + 0.234\sqrt{r'}}$ funciona como factor de correcção de P_0^* .

Analisemos agora, o comportamento desta nova aproximação, considerando para isso,

$$Q_3^{**} = \frac{P_0^{**} - P_0}{P_0} \times 100\% \quad (3.54)$$

r'	Q_3	Q_3^{**}
0,001	0,0976	0,0732
0,002	0,0161	0,0161
0,003	0,0694	0,0556
0,004	-0,0337	-0,0435
0,005	-0,0196	-0,0392
0,006	0,0000	-0,0182
0,007	-0,0167	-0,0333
0,008	0,0500	0,0333
0,009	0,0308	0,0077
0,01	0,0023	-0,0143
0,02	0,0526	0,0211
0,03	0,0208	-0,0208
0,04	0,0481	0,0000
0,05	0,0533	0,0000
0,06	0,0485	-0,0091
0,07	0,0686	0,0057
0,08	0,0811	0,0135
0,09	0,0600	-0,0100
0,1	0,0643	-0,0095
0,2	0,1088	0,0035
0,3	0,1232	-0,0043
0,4	0,1462	-0,0013
0,5	0,1628	-0,0023
0,6	0,1774	-0,0032
0,7	0,1949	-0,0010
0,8	0,2048	-0,0038
0,9	0,2200	0,0533

Quadro 3.5 – Valores de Q_3 e Q_3^{**} para diferentes valores de r' , no caso da distribuição ser exponencial.

Ao compararmos Q_3^* com Q_3^{**} , concluímos que P_0^{**} é sempre muito melhor que P_0^* e em particular para grandes valores de r (precisamente quando $E(D)=P/2$ é pior).

3.3.4 – INFLUÊNCIA DO TIPO DE DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE VIDA SOBRE O CUSTO TOTAL MÉDIO POR CICLO

Neste ponto pretendemos estudar a seguinte questão:

Será que os custos totais médios mínimos, relativos a duas distribuições diferentes, mas com a mesma média $E(T)$ são diferentes? Ou melhor, dependerá o custo total mínimo por ciclo essencialmente de $E(T)$ e não do tipo de distribuição?

Consideremos então, que as distribuições que temos vindo a referir têm a mesma esperança matemática $E(T)=1$, para podermos analisar até que ponto os valores de $E(C)_0$ serão influenciados pela mudança de distribuição.

Para isso, vamos ter em atenção vários valores de $r = C_1 / C_2$ e o cociente Q_4 ,

$$Q_4 = [E(C)_0 - E(C)_1^*] / E(C)_1^* \times 100\% , \quad (3.55)$$

onde $E(C)_1^*$ é dado por,

$$E(C)_1^* = C_2 E(T) \left[\frac{r}{2E(T)} + \sqrt{\frac{2r}{E(T)}} \right] \quad (3.56)$$

Notemos que $E(C)_0$ é o custo total médio mínimo por ciclo relativo à distribuição em questão e é dado por (3.21). Conforme se vê facilmente $E(C)_1^*$ é uma aproximação do custo conseguida por (3.16) e (3.33).

Pelo quadro 3.6, podemos concluir que,

- Existe uma variação de Q_4 , e conseqüentemente de $E(C)_0$ em função da distribuição T , em especial quando o cociente $r/E(T)$ é maior. Desta forma

podemos afirmar que, o custo mínimo $E(C)_0$ pode depender não só de $E(T)$, mas também do tipo de distribuição;

- Sempre que $r/E(T)$ tem um valor pequeno, para a distribuição de Weibull, quando $\beta=2$, $\beta=3$ e $\beta=5$, podemos afirmar que a dependência é fraca.

DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL	r/E(T)		
	0,01	0,1	0,2
0.7	8.30	10.42	12.42
1	1.20	3.83	5.43
2	0.01	0	0
3	-0.33	-0.17	-0.27
5	0	-0.18	-2.74

Quadro 3.6 – Valores de Q_4 para vários valores de $r/E(T)$ para a distribuição de Weibull.

4 . SISTEMA COM COMPONENTES EM SÉRIE E INSPECÇÕES PERIÓDICAS

Consideremos um sistema produtivo, independentemente da sua natureza ou complexidade. Tal como já sabemos, este sistema está sujeito a falhas, pelo que temos necessidade de proceder a inspecções que podem ser periódicas ou não periódicas.

Neste capítulo vamos ocupar-nos apenas das inspecções periódicas.

4.1 – SISTEMA COM DOIS COMPONENTES EM SÉRIE COM TEMPOS DE VIDA EXPONENCIAIS

A primeira prioridade deste ponto é tentarmos responder à seguinte questão: “Como podemos avaliar a fiabilidade de um conjunto de componentes em série se conhecermos a fiabilidade de cada um dos componentes que o constituem?”

Suponhamos então que temos dois componentes em série de acordo com o seguinte esquema.

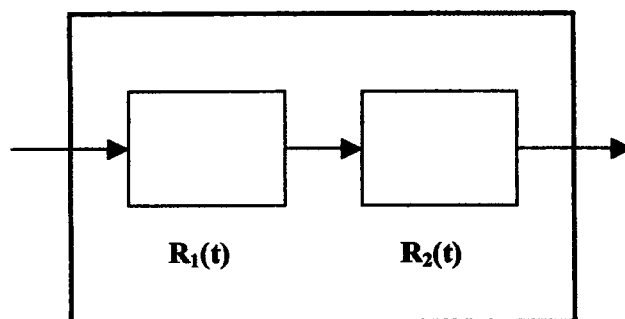


Figura 4.1 – Ilustração de um sistema com dois componentes em série.

4.1.1 – FIABILIDADE E TAXA DE RISCO DO SISTEMA

O bom funcionamento do sistema com componentes em série assenta no princípio de que este funciona correctamente se, e somente se, ambas as componentes funcionarem correctamente. Admitamos ainda que os componentes funcionam independentemente um do outro. Isto é, o bom (mau) funcionamento de um deles não influência o estado de bom (mau) funcionamento do outro.

Desta forma, a *função de fiabilidade* do sistema, que designaremos por $R_s(t)$, é dada por,

$$R_s(t) = P(T_s > t) = \quad (4.1)$$

$$= P(T_1 > t \text{ e } T_2 > t) \quad , \quad (4.2)$$

onde T_s é a variável aleatória que representa a duração até falhar do sistema.

Devido à independência do funcionamento dos dispositivos, vem

$$R_s(t) = P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t) = \quad (4.3)$$

$$= R_1(t) \cdot R_2(t), \quad t \geq 0 \quad (4.4)$$

A relação (4.4) permite-nos concluir que $R_s(t) \leq \min\{R_1(t), R_2(t)\}$, isto é, se tivermos um sistema com dois componentes em série, a fiabilidade do sistema é menor ou igual do que a fiabilidade de qualquer um dos seus componentes.

A dedução enunciada acima, para a função de fiabilidade de um sistema com dois componentes em série pode ser generalizada para um número n , fixo, de componentes. Assim, se n componentes, que funcionam independentemente forem montados em série e se o i -ésimo componente tiver fiabilidade $R_i(t)$, a fiabilidade do sistema, $R_s(t)$, virá dada por,

$$R_s(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot R_3(t) \cdot \dots \cdot R_n(t) \quad (4.5)$$

$$= \prod_{i=1}^n R_i(t), \quad t \geq 0, i = 1, \dots, n \quad (4.6)$$

Recordando agora a fórmula (2.2), temos,

$$\begin{aligned} R_s(t) &= P(T_s > t) = 1 - P(T_s \leq t) = \\ &= 1 - F_s(t), t \geq 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

Particularizando a fórmula (4.6), podemos concluir que a função de fiabilidade de um sistema com componentes em série com tempos de vida exponenciais é,

$$R_s(t) = e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda_n t} \quad (4.8)$$

$$= e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i t}, \quad (4.9)$$

o que nos permite desde já concluir que, obtemos uma expressão do mesmo tipo que (2.22), pelo que o sistema onde introduzimos uma nova interface, tem a mesma distribuição do tempo de vida que o “sistema “ constituído por um só componente.

Através das expressões (4.7), (4.8) e (4.9) verificamos que, as funções de distribuição e densidade de probabilidade do sistema composto por n componentes com tempos de vida exponenciais, são,

$$F_s(t) = 1 - e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i t}, t \geq 0 \quad (4.10)$$

$$f_s(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i t}, t \geq 0 \quad (4.11)$$

Desta forma,

$$\lambda_s = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \quad (4.12)$$

pelo que, o tempo médio de vida do sistema é-nos dado por,

$$E(T_s) = \int_0^{\infty} e^{-\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)t} dt = \left[-\frac{e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i t}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad (4.13)$$

Utilizando as fórmulas (2.11), (4.8) e (4.11) verificamos que a taxa de risco para este sistema é,

$$h_s(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad (4.14)$$

que é constante.

Consideremos, em particular, T_1 e T_2 as variáveis aleatórias que representam o tempo de vida de dois componentes com tempos de vida exponenciais. Através de (4.4), a *função de fiabilidade* do sistema composto por dois componentes em série será dada por,

$$R_s(t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}, t \geq 0 \quad (4.15)$$

Utilizando a fórmula (4.10), vemos que,

$$F_s(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}, t \geq 0 \quad (4.16)$$

Particularizando a fórmula (4.11) ao nosso caso, obtemos para a função densidade de probabilidade,

$$f_s(t) = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}, t \geq 0 \quad (4.17)$$

Assim, o tempo médio de vida do nosso sistema é dado por,

$$E(T_s) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (4.18)$$

que naturalmente é menor que o tempo médio de vida de qualquer um dos componentes.

Finalmente, através da fórmula (4.14), a taxa de risco para o sistema composto por duas componentes em série é constante, com

$$h_s(t) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (4.19)$$

4.1.2 – O MODELO

Tendo já sido definidas as funções de fiabilidade e densidade de probabilidade do sistema em série, é ainda objectivo do presente parágrafo estudarmos o período de inspecções a efectuar num sistema deste tipo. Esse estudo vai ser feito seguindo o modelo de uma política de inspecções periódicas, ou seja, determinarmos os instantes kP , com $k = 1, 2, \dots$ nos quais devemos efectuar inspecções ao sistema. Dito de um outro modo, determinarmos de quanto em quanto tempo teremos que inspeccionar o sistema com a finalidade, sempre presente de minimizarmos o custo total médio por ciclo inerente a este tipo de modelo e ainda de que modo este período de inspecção influencia o custo total médio mínimo por ciclo.

Admitindo as hipóteses [H1]-[H6] do ponto 3.1, consideremos dois componentes (ou dispositivos) com tempos de vida exponenciais com parâmetros λ_1 e λ_2 , respectivamente e que se encontram ligados em série.

Façamos então uma pequena alteração na hipótese [H4]. Admitamos que quando inspeccionamos o sistema temos que necessariamente inspeccionar cada um dos componentes que o constituem. Isto implica que, o custo por inspecção não seja C_1 , mas sim função deste valor, isto é, da forma kC_1 , com k constante. Esta modificação à hipótese [H4] parece-nos, do ponto de vista prático, bastante coerente, já que, um sistema em série só funciona correctamente quando todos os seus componentes funcionarem correctamente, também.

Por tudo o que acrescentámos temos de reformular o modelo de optimização considerado anteriormente. Consideremos:

C_{1s} – Custo de cada inspecção do sistema em série.

C_{2s} – Custo por unidade de tempo de mau funcionamento do sistema em série.

Consequentemente,

C_{11} – Custo de cada inspeção do 1º componente.

C_{21} – Custo por unidade de tempo de mau funcionamento do 1º componente.

C_{12} – Custo de cada inspeção do 2º componente.

C_{22} – Custo por unidade de tempo de mau funcionamento do 2º componente.

Como estamos a considerar os componentes em série, o sistema falha desde que um dos componentes falhe, pelo que, podemos escrever

$$C_{2s} = C_{21} = C_{22} \quad (4.20)$$

Assim se considerarmos que passar de um único componente para dois ou mais componentes em série o custo por unidade de tempo de mau funcionamento é o mesmo, temos,

$$C_{2s} = C_2 \quad (4.21)$$

Em relação à inspeção do sistema consideramos que é mais caro inspeccionar dois ou mais componentes do que apenas um, pois a inspeção pode ser efectuada por mais do que uma entidade ou pode demorar mais tempo, então

$$C_{1s} = C_{11} (1 + k' C_{12}) \quad (4.22)$$

Poderemos então afirmar que o custo total de inspeção do sistema é dado por,

$$C_{1s} = kC_1, \text{ com } k > 1 \quad (4.23)$$

Então,

$$r_s = \frac{C_{1s}}{C_{2s}} = \frac{kC_{11}}{C_2} \quad (4.24)$$

Deste modo, k é a relação entre os custos de inspeção do sistema com componentes em série e do sistema inicial com um só componente, tendo sido estudada em Rodrigues Dias e Infante (1999).

Pelo facto de considerarmos $C_{11} = C_1$,

$$r_s = \frac{kC_1}{C_2} = kr, \quad k > 1 \quad (4.25)$$

4.1.3 – SOLUÇÕES EXACTAS E SOLUÇÕES APROXIMADAS PARA O PERÍODO DE INSPECÇÃO

Tendo o sistema com dois componentes em série e tempos de vida exponenciais uma taxa de risco constante, $\lambda_s = (\lambda_1 + \lambda_2)$, como se viu, a solução exacta obtém-se de forma análoga ao referido antes, em (3.28).

As duas soluções aproximadas que consideramos anteriormente nas fórmulas (3.33) e (3.53), terão as seguintes formas,

$$P_s^* = \sqrt{2r_s E(T_s)} \quad (4.26)$$

$$P_s^{**} = \frac{P_s^*}{1 + .234\sqrt{r_s'}}, \quad \text{onde } r_s' = \frac{r_s}{E(T_s)} \quad (4.27)$$

Adiante iremos analisar estas duas aproximações.

4.1.4 – ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DO PERÍODO DE INSPECÇÃO

Devido ao facto de termos introduzido um componente em série, através da expressão (4.12), verificamos que existe um aumento da taxa de risco, já que reduzimos a fiabilidade do sistema, logo aparentemente o período de inspecção P_s , que minimiza o custo total médio por ciclo $E(C_s)$ diminui.

Para que possamos analisar esta questão, vamos apresentar alguns resultados, onde podemos comparar os valores do período de inspeção P_s , para o caso de um “sistema” constituído por um só componente e para o caso de um sistema constituído por dois componentes em série. Estes valores foram obtidos de forma analítica.

k=1.2 ; C₁=0,1 ; C₂=1			
1 componente	2 componentes		
	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.1$
$r = 0.1$	$r_s = 0.12$	$r_s = 0.12$	$r_s = 0.12$
$E(T) = 1$	$r'_s = 0.24$ $E(T_s) = 0.5$	$r'_s = 0.17999991$ $E(T_s) = 0.666667$	$r'_s = 0.132000132$ $E(T_s) = 0.909090$
$P = 0.42$	$P_s = 0.31$	$P_s = 0.36$	$P_s = 0.43$
$P^* = 0.447213595$	$P_s^* = 0.346410162$	$P_s^* = 0.4000001$	$P_s^* = 0.467099133$
$P^{**} = 0.416401044$	$P_s^{**} = 0.310783183$	$P_s^{**} = 0.363875366$	$P_s^{**} = 0.430499581$
$E(C) = 0.516241954$	$E(C_s) = 0.430624009$	$E(C_s) = 0.48371797$	$E(C_s) = 0.550298546$

k=1.2 ; C₁ = 0.1 ; C₂ = 1		
1 componente	2 componentes	
	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 0.5; \lambda_2 = 0.25$
$r = 0.1$	$r_s = 0.12$	$r_s = 0.12$
$E(T) = 2$	$r'_s = 0.12$ $E(T_s) = 1$	$r'_s = 0.090000023$ $E(T_s) = 1.333333$
$P = 0.6$	$P_s = 0.45$	$P_s = 0.52$
$P^* = 0.632455532$	$P_s^* = 0.489897949$	$P_s^* = 0.565685354$
$P^{**} = 0.601008375$	$P_s^{**} = 0.453164448$	$P_s^{**} = 0.528579097$
$E(C) = 0.700807139$	$E(C_s) = 0.572969872$	$E(C_s) = 0.64843977$

Quadros 4.1 e 4.2 – Valores obtidos para o período de inspeção P_s e para as duas aproximações, P_s^* e P_s^{**} , com $k = 1.2$, no caso da distribuição ser exponencial, com $\lambda=1$ e $\lambda=0.5$, respectivamente.

k=1.5 ; C₁=0,1 ; C₂=1			
1 componente	2 componentes		
	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.1$
$r = 0.1$	$r_s = 0.15$	$r_s = 0.15$	$r_s = 0.15$
	$r'_s = 0.3$	$r'_s = 0.224999888$	$r'_s = 0.165000165$
$E(T) = 1$	$E(T_s) = 0.5$	$E(T_s) = 0.666667$	$E(T_s) = 0.909090$
$P = 0.42$	$P_s = 0.34$	$P_s = 0.4$	$P_s = 0.48$
$P^* = 0.447213595$	$P_s^* = 0.387298335$	$P_s^* = 0.447213707$	$P_s^* = 0.522232707$
$P^{**} = 0.416401044$	$P_s^{**} = 0.343298738$	$P_s^{**} = 0.402534069$	$P_s^{**} = 0.476902505$
$E(C) = 0.516241954$	$E(C_s) = 0.493143243$	$E(C_s) = 0.552336402$	$E(C_s) = 0.62668296$

k=1.5 ; C₁ = 0.1 ; C₂ = 1		
1 componente	2 componentes	
	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 0.5; \lambda_2 = 0.25$
$r = 0.1$	$r_s = 0.15$	$r_s = 0.15$
	$r'_s = 0.15$	$r'_s = 0.112500028$
$E(T) = 2$	$E(T_s) = 1$	$E(T_s) = 1.333333$
$P = 0.6$	$P_s = 0.5$	$P_s = 0.59$
$P^* = 0.632455532$	$P_s^* = 0.547722558$	$P_s^* = 0.632057267$
$P^{**} = 0.601008375$	$P_s^{**} = 0.502208501$	$P_s^{**} = 0.58642899$
$E(C) = 0.700807139$	$E(C_s) = 0.651971154$	$E(C_s) = 0.736181913$

Quadros 4.3 e 4.4 – Valores obtidos para o período de inspeção P_s e para as duas aproximações, P_s^* e P_s^{**} , com $k = 1.5$, no caso da distribuição ser exponencial, com $\lambda=1$ e $\lambda=0.5$, respectivamente.

k=2 ; C ₁ =0,1 ; C ₂ =1			
1 componente	2 componentes		
	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.1$
$r = 0.1$	$r_s = 0.2$	$r_s = 0.2$	$r_s = 0.2$
	$r'_s = 0.4$	$r'_s = 0.29999985$	$r'_s = 0.22000022$
$E(T) = 1$	$E(T_s) = 0.5$	$E(T_s) = 0.666667$	$E(T_s) = 0.909090$
$P = 0.42$	$P_s = 0.39$	$P_s = 0.46$	$P_s = 0.54$
$P^* = 0.447213595$	$P_s^* = 0.447213595$	$P_s^* = 0.516397909$	$P_s^* = 0.603022388$
$P^{**} = 0.416401044$	$P_s^{**} = 0.389560715$	$P_s^{**} = 0.457731778$	$P_s^{**} = 0.543382965$
$E(C) = 0.516241954$	$E(C_s) = 0.589376936$	$E(C_s) = 0.657507313$	$E(C_s) = 0.743116724$

k=2 ; C ₁ = 0.1 ; C ₂ = 1		
1 componente	2 componentes	
	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 0.5; \lambda_2 = 0.25$
$r = 0.1$	$r_s = 0.2$	$r_s = 0.2$
	$r'_s = 0.2$	$r'_s = 0.150000038$
$E(T) = 2$	$E(T_s) = 1$	$E(T_s) = 1.333333$
$P = 0.6$	$P_s = 0.57$	$P_s = 0.67$
$P^* = 0.632455532$	$P_s^* = 0.632455532$	$P_s^* = 0.730296652$
$P^{**} = 0.601008375$	$P_s^{**} = 0.572540341$	$P_s^{**} = 0.669611244$
$E(C) = 0.700807139$	$E(C_s) = 0.772255659$	$E(C_s) = 0.869288798$

Quadros 4.5 e 4.6 – Valores obtidos para o período de inspeção P_s e para as duas aproximações, P_s^* e P_s^{**} , com $k = 2.0$, no caso da distribuição ser exponencial, com $\lambda = 1$ e $\lambda = 0.5$, respectivamente.

k=2.4 ; C₁=0,1 ; C₂=1			
1 componente	2 componentes		
	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.1$
$r = 0.1$	$r_s = 0.24$	$r_s = 0.24$	$r_s = 0.24$
	$r'_s = 0.48$	$r'_s = 0.35999982$	$r'_s = 0.264000264$
$E(T) = 1$	$E(T_s) = 0.5$	$E(T_s) = 0.666667$	$E(T_s) = 0.909090$
$P = 0.42$	$P_s = 0.42$	$P_s = 0.5$	$P_s = 0.59$
$P^* = 0.447213595$	$P_s^* = 0.489897949$	$P_s^* = 0.565685566$	$P_s^* = 0.660577929$
$P^{**} = 0.416401044$	$P_s^{**} = 0.4215554054$	$P_s^{**} = 0.496041375$	$P_s^{**} = 0.589679871$
$E(C) = 0.516241954$	$E(C_s) = 0.661379943$	$E(C_s) = 0.735822133$	$E(C_s) = 0.829376863$

k=2.4 ; C₁ = 0.1 ; C₂ = 1		
1 componente	2 componentes	
	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 0.5; \lambda_2 = 0.25$
$r = 0.1$	$r_s = 0.24$	$r_s = 0.24$
	$r'_s = 0.24$	$r'_s = 0.180000045$
$E(T) = 2$	$E(T_s) = 1$	$E(T_s) = 1.333333$
$P = 0.6$	$P_s = 0.62$	$P_s = 0.73$
$P^* = 0.632455532$	$P_s^* = 0.692820323$	$P_s^* = 0.7999999$
$P^{**} = 0.601008375$	$P_s^{**} = 0.621566366$	$P_s^{**} = 0.727750435$
$E(C) = 0.700807139$	$E(C_s) = 0.861248019$	$E(C_s) = 0.967392879$

Quadros 4.7 e 4.8 – Valores obtidos para o período de inspeção P_s e para as duas aproximações, P_s^* e P_s^{**} , com $k = 2.4$, no caso da distribuição ser exponencial, com $\lambda=1$ e $\lambda=0.5$, respectivamente.

Podemos então concluir que, contrariamente ao que poderíamos pensar, existem alguns casos que pelo facto de introduzirmos um novo componente em série no sistema, reduzindo-se a fiabilidade e aumentando a taxa de risco deste, o valor do período de inspeção do sistema aumenta.

Veja-se por exemplo, que independentemente do valor de k que estudamos, quando $\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.1$, $P_s^{**} > P^{**}$, assim como, $P_s^* > P^*$.

No entanto, fomos ainda verificar outra questão. Fomos analisar o que aconteceria, se nos mantivéssemos na mesma situação, mas se o custo C_1 diminuísse. Para tal, consideramos $C_1=0.01$ e mantivemos C_2 . Os resultados que obtivemos para $k=1.5$ e $k=2$ foram os seguintes,

k=1.5 ; C₁=0,01 ; C₂=1			
1 componente	2 componentes		
	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.1$
$r = 0.01$	$r_s = 0.015$	$r_s = 0.015$	$r_s = 0.015$
	$r'_s = 0.03$	$r'_i = 0.022499989$	$r'_s = 0.016500017$
$E(T) = 1$	$E(T_s) = 0.5$	$E(T_s) = 0.666667$	$E(T_s) = 0.909090$
$P = 0.14$	$P_s = 0.12$	$P_s = 0.14$	$P_s = 0.16$
$P^* = 0.141421356$	$P_s^* = 0.122474487$	$P_s^* = 0.141421392$	$P_s^* = 0.165144482$
$P^{**} = 0.138187763$	$P_s^{**} = 0.117703947$	$P_s^{**} = 0.136625826$	$P_s^{**} = 0.16032543$
$E(C) = 0.148178$	$E(C_s) = 0.132697412$	$E(C_s) = 0.15163908$	$E(C_s) = 0.175292615$

k=1.5 ; C₁ = 0.01 ; C₂ = 1		
1 componente	2 componentes	
	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 0.5; \lambda_2 = 0.25$
$r = 0.01$	$r_s = 0.015$	$r_s = 0.015$
	$r'_s = 0.015$	$r'_s = 0.011250003$
$E(T) = 2$	$E(T_s) = 1$	$E(T_s) = 1.333333$
$P = 0.2$	$P_s = 0.17$	$P_s = 0.2$
$P^* = 0.2$	$P_s^* = 0.173205081$	$P_s^* = 0.173205082$
$P^{**} = 0.196744605$	$P_s^{**} = 0.168379488$	$P_s^{**} = 0.169010338$
$E(C) = 0.206749708$	$E(C_s) = 0.183354866$	$E(C_s) = 0.210186493$

Quadros 4.9 e 4.10 – Valores obtidos para o período de inspeção P_s e para as duas aproximações, P_s^* e P_s^{**} , com $k = 1.5$, no caso da distribuição ser exponencial, com $\lambda=1$ e $\lambda=0.5$, respectivamente.

k=2 ; C ₁ =0,01 ; C ₂ =1			
1 componente	2 componentes		
	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.1$
$r = 0.01$	$r_s = 0.02$	$r_s = 0.02$	$r_s = 0.02$
	$r'_s = 0.04$	$r'_s = 0.029999985$	$r'_s = 0.022000022$
$E(T) = 1$	$E(T_s) = 0.5$	$E(T_s) = 0.666667$	$E(T_s) = 0.909090$
$P = 0.14$	$P_s = 0.13$	$P_s = 0.16$	$P_s = 0.18$
$P^* = 0.141421356$	$P_s^* = 0.141421356$	$P_s^* = 0.163299357$	$P_s^* = 0.190692423$
$P^{**} = 0.138187763$	$P_s^{**} = 0.135098735$	$P_s^{**} = 0.156938637$	$P_s^{**} = 0.184295912$
$E(C) = 0.148178$	$E(C_s) = 0.155169421$	$E(C_s) = 0.176929882$	$E(C_s) = 0.204307947$

k=2 ; C ₁ =0,01 ; C ₂ =1		
1 componente	2 componentes	
	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 0.5; \lambda_2 = 0.25$
$r = 0.01$	$r_s = 0.02$	$r_s = 0.02$
	$r'_s = 0.02$	$r'_s = 0.015000004$
$E(T) = 2$	$E(T_s) = 1$	$E(T_s) = 1.333333$
$P = 0.2$	$P_s = 0.19$	$P_s = 0.22$
$P^* = 0.2$	$P_s^* = 0.2$	$P_s^* = 0.230940079$
$P^{**} = 0.196744605$	$P_s^{**} = 0.193593489$	$P_s^{**} = 0.224505955$
$E(C) = 0.206749708$	$E(C_s) = 0.213586159$	$E(C_s) = 0.244510625$

Quadros 4.11 e 4.12 – Valores obtidos para o período de inspeção P_s e para as duas aproximações, P_s^* e P_s^{**} , com $k = 2.0$, no caso da distribuição ser exponencial, com $\lambda=1$ e $\lambda=0.5$, respectivamente.

Da mesma forma que na situação anterior, constatamos que, voltam a existir casos onde o valor do período de inspeção também aumenta.

Veja-se por exemplo, que para $\lambda=\lambda_1=0.5$; $\lambda_2=0.25$, com $k = 2.0$, temos $P_s^* = 0.230940079 > P^* = 0.2$ e $P_s^{**} = 0.224505955 > P^{**} = 0.196744605$.

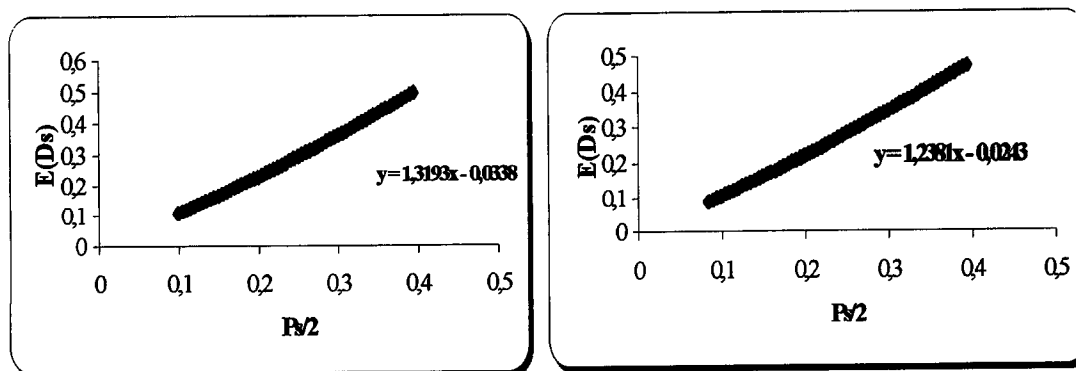
4.1.5 – TEMPO MÉDIO DE DETECÇÃO

No ponto 3.2.1.2, admitimos e mostramos graficamente que $E(D)=P/2$, fórmula (3.16), constituía uma boa aproximação.

Agora, neste ponto, pelo facto de estarmos perante um sistema com dois componentes em série com tempos de vida exponenciais e sabendo que este sistema continua a ter tempo de vida exponencial, também esta aproximação continua a ser bastante boa, tal como se esperava.

Notemos também que, quando k aumenta (diminui), o ajuste por nós conseguido diminui (aumenta) um pouco.

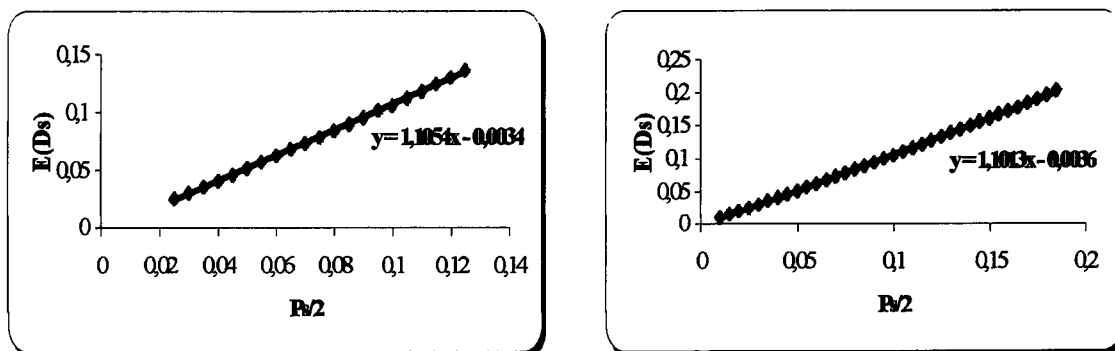
No que respeita aos custos, quanto maior (menor) é o cociente $r_s = kC_1/C_2$ menor (maior), é o ajuste por nós obtido, como podemos constatar através dos gráficos seguintes, que obtivemos por simulação de 20 000 números aleatórios.



Figuras 4.2 e 4.3 – Ajustamento do tempo médio de detecção $E(D_s)$ em função de $P_s/2$, para a distribuição exponencial, com $k=1.5$ e $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (esquerda) e com $k=2$ e $\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.5$ (direita), para $C_1 = 0.1$ e $C_2 = 1$, obtendo-se $r^2 = 0.9989$ e $r^2 = 0.9987$, respectivamente.

O aspecto gráfico de $E(D_s)$ já era de algum modo esperado, pois à medida que aumenta o período de inspeção P_s , também vai aumentar o tempo de detecção da falha (o que se torna intuitivamente aceitável). Se preferirmos, sempre que aumentar o

período de inspecção P_s obriga-nos a que o número de inspecções seja menor por ciclo e então mais tarde vai ser detectada a falha. As figuras 4.4 e 4.5 servem justamente para reforçar este facto.



Figuras 4.4 e 4.5 – Ajustamento do tempo médio de detecção $E(D_s)$ em função de $P/2$, para a distribuição exponencial, com $k=1.5$ e $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (esquerda) e com $k = 2$ e $\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.5$ (direita), para $C_1 = 0.01$ e $C_2 = 1$, obtendo-se $r^2 = 0.9996$ e $r^2 = 0.9995$, respectivamente.

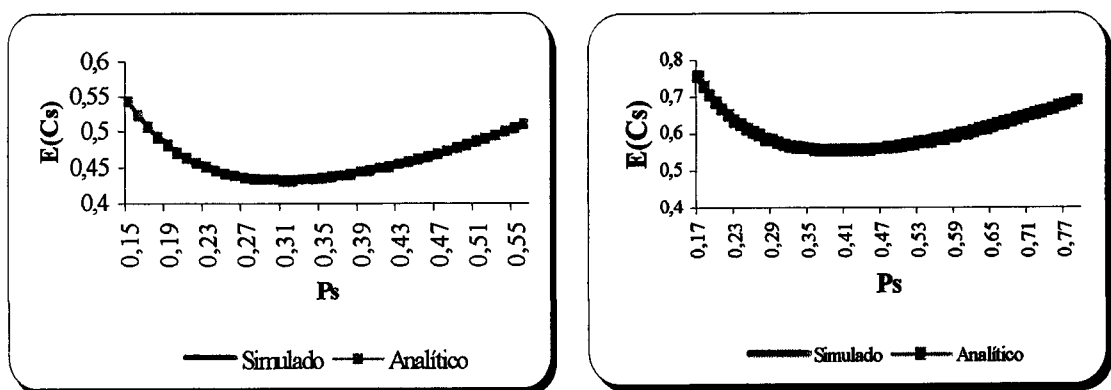
4.1.6 – APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

- O tempo de vida de um sistema, interpretado como sendo um só componente com tempo de vida exponencial, no qual introduzimos em série um ou mais componentes com a mesma distribuição exponencial do tempo de vida, continua a ser exponencial.
- Verificamos através dos resultados apresentados nos quadros anteriores que, apesar de aumentarmos a taxa de risco do sistema, pelo facto de introduzirmos um novo componente, diminuirmos a sua fiabilidade, existem casos onde o valor do período de inspecção do sistema aumenta, contrariamente ao que poderíamos pensar, já que aumentamos a complexidade do sistema.

Referimo-nos concretamente aos casos em que $\lambda = 1$, para os quatro valores de k que estudamos e $\lambda = 0.5$ para $k=2$ e $k=2.4$.

- À medida que o tempo médio de vida do sistema, constituído por duas componentes em série se aproxima do tempo médio de vida do “sistema” constituído por um só componente, tanto o valor do período de inspeção P_s , como as duas aproximações, P_s^* e P_s^{**} aumentam.
- Verificamos também que, à medida que k aumenta (diminui), as aproximações P_s^* e P_s^{**} aumentam (diminuem) também, em qualquer das situações estudadas anteriormente.
- Verificamos que quanto maior (menor) é o cociente, $r_s = kC_1 / C_2$ maior (menor) é o valor do período de inspeção P_s que minimiza o custo total médio por ciclo $E(C_s)$ e conseqüentemente este valor também é maior (menor).
- Queremos ainda referenciar que também fizemos o mesmo procedimento que anteriormente, mas para valores obtidos por simulação e constatamos que os valores estão muito próximos dos obtidos analiticamente.

Através dos gráficos 4.6 e 4.7 que se seguem, constatamos que a curva por nós obtida para o custo total médio por ciclo $E(C_s)$ está bastante próxima da obtida analiticamente.



Figuras 4.6 e 4.7 – Custo total médio por ciclo $E(C)$ em função do período de inspeção P_s , com $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, para $k=1.2$ e com $\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.5$, para $k = 1.5$ quando $C_1=0.1$ e $C_2=1$, no caso da distribuição exponencial.

- Destes gráficos do custo total médio $E(C_s)$, queremos salientar dois pontos:
 - i) Se o período de inspeção P_s for pequeno, teremos de inspeccionar o sistema por ciclo bastantes vezes, logo mais fácil será detectarmos uma possível falha, o que implica que o custo por unidade de tempo de mau funcionamento será quase nulo, contribuindo a parcela $kC_1E(N_s)$ com maior peso para o custo total médio por ciclo, pois $E(C_s) = kC_1E(N_s) + E(D_s)$.
 - ii) Por outro lado, se P_s for grande inspeccionaremos menos, logo gastaremos menos com as inspeções ($kC_1E(N)$ será praticamente nula), mas o peso de $C_2E(D_s)$ será maior (tanto maior quanto maior for P_s), porque teremos mais dificuldade em detectar a falha.

- Queremos também salientar o facto de termos verificado que o valor de P_s que minimiza o custo total médio por ciclo $E(C_s)$ é solução da equação (3.28). É precisamente neste contexto que Nakagawa e Yassui (1979), conforme se refere em Rodrigues Dias (1987a), partindo da aproximação $E(D)=P/2$ obtiveram a aproximação para o período de inspeção P_0^* , dado pela expressão (4.26). Este resultado, dada a sua simplicidade é muito atractivo em termos práticos, pelo que, vamos analisar se esta aproximação é ou não satisfatória, bem como saber o que se passa em relação ao período de inspeção determinado por (3.28) e por (4.26), para os vários valores de k . Para tal, vamos primeiro comparar o valor de $E(D_s)_0$ com $P_{s0}/2$, sendo P_{s0} o período de inspeção óptimo, para verificarmos até que ponto $E(D_s)=P_s/2$ é uma boa aproximação. Designemos então Q_{2s} e Q_{3s} , como anteriormente em (3.43) e (3.44), os erros relativos em percentagem.

$$Q_{2s} = \frac{P_{s0} - E(D_s)_0}{E(D_s)_0} \times 100\% \quad (4.28)$$

$$Q_{3s} = \frac{P_{s0}^* - P_{s0}}{P_{s0}} \times 100\% \quad (4.29)$$

Nos quadros seguintes apresentamos diferentes valores destes dois cocientes para os vários valores de k que consideramos no decorrer deste trabalho.

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL	k=1.2		k=1.5		k=2		k=2.4	
	r_s'	Q_{2s}	r_s'	Q_{2s}	r_s'	Q_{2s}	r_s'	Q_{2s}
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=1$	0.24	-9.47	0.3	-10.5	0.4	-12.00	0.48	-12.16
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.5$	0.180	-8.44	0.225	-8.52	0.3	-9.87	0.36	-11.02
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.1$	0.132	-6.47	0.165	-7.78	0.22	-8.20	0.264	-9.70
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=0.5$	0.12	-6.90	0.15	-6.55	0.2	-7.00	0.24	-9.31
$\lambda=\lambda_1=0.5 ; \lambda_2=0.25$	0.090	-6.90	0.113	-7.20	0.15	-9.93	0.180	-8.32

Quadro 4.13 – Valores de Q_{2s} para os vários valores de k.

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL	k=1.2		k=1.5		k=2		k=2.4	
	r_s'	Q_{3s}	r_s'	Q_{3s}	r_s'	Q_{3s}	r_s'	Q_{3s}
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=1$	0.24	11.61	0.3	13.82	0.4	14.62	0.48	16.64
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.5$	0.180	11.11	0.225	11.75	0.3	12.17	0.36	13.14
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.1$	0.132	8.61	0.165	8.75	0.22	11.67	0.264	11.96
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=0.5$	0.12	8.89	0.15	9.6	0.2	10.88	0.24	11.75
$\lambda=\lambda_1=0.5 ; \lambda_2=0.25$	0.090	8.85	0.113	7.12	0.15	8.96	0.180	9.59

Quadro 4.14 – Valores de Q_{3s} para os vários os vários valores de k.

- Podemos concluir que, $E(D_s)$ é sempre superior a $P_s/2$ e esta diferença é tanto maior quanto maiores forem os valores de k e de r_s' .

Através dos quadros anteriores, constatamos que o valor de P_{s0}^* pode afastar-se consideravelmente de P_{s0} , novamente, para os maiores valores de k e r'_s , situações onde $P_s/2$ é uma má aproximação de $E(D_s)$.

- Tal como já havíamos visto anteriormente, o custo total médio por ciclo não é muito sensível a alterações do período de inspeção, portanto parece-nos importante analisarmos o que acontece com os custos, quando utilizamos as expressões (3.28) e (4.26), já que em última análise estamos perante um problema de minimização de custos.

Assim, apresentamos de seguida as expressões do custo total médio mínimo por ciclo $E(C_s)_0$ e de duas aproximações deste valor que designaremos por $E(C_s)_1^*$ e $E(C_s)_2^*$,

$$E(C_s)_0 = C_2 E(T_s) \left\{ \left[\frac{r_s}{E(T_s)} + \frac{P_0}{E(T_s)} \right] \sum_{k=0}^{\infty} R(kP_0) - 1 \right\} \quad (4.30)$$

$$E(C_s)_1^* = C_2 E(T_s) \left[\frac{r_s}{E(T_s)} + \sqrt{\frac{2r_s}{E(T_s)}} \right] \quad (4.31)$$

$$E(C_s)_2^* = C_2 E(T_s) \left\{ \left[\frac{r_s}{E(T_s)} + \frac{P_0^*}{E(T_s)} \right] \sum_{k=0}^{\infty} R(kP_0^*) - 1 \right\} \quad (4.32)$$

Notemos que $E(C_s)_1^*$ assenta em duas aproximações, por um lado substituímos P_{s0} por P_{s0}^* , por outro lado consideramos $E(D_s) = P_s/2$.

Podemos afirmar que, $E(C_s)_2^*$ é o valor correcto do custo total médio por ciclo correspondente ao valor aproximado P_{s0}^* do período de inspeção.

Da mesma forma que em situações anteriores, vamos analisar para diferentes casos, o grau de precisão de $E(C_s)_1^*$ e $E(C_s)_2^*$. Calculamos para isso, os respectivos erros em relação a $E(C_s)_0$, utilizando as seguintes grandezas,

$$Q_{5s} = [E(C_s)_1^* - E(C_s)_0] / E(C_s)_0 \times 100\% \quad (4.33)$$

$$Q_{6s} = [E(C_s)_2^* - E(C_s)_0] / E(C_s)_0 \times 100\% \quad (4.34)$$

Os resultados que obtivemos foram,

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL	k=1.2		k=1.5		k=2		k=2.4	
	Q _{5s}	Q _{6s}	Q _{5s}	Q _{6s}	Q _{5s}	Q _{6s}	Q _{5s}	Q _{6s}
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=1$	-18.82	-8.18	-8.12	-9.66	9.58	-11.24	21.64	-12.53
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.5$	-31.38	-5.65	-21.94	-7.43	-7.19	-8.76	3.50	-10.64
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.1$	-42.04	-4.65	-34.06	-3.87	-22.93	-5.83	-14.08	-7.14
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=0.5$	-45.17	-6.25	-37.85	-5.00	-26.92	-5.41	-18.82	-7.39
$\lambda=\lambda_1=0.5 ; \lambda_2=0.25$	-53.37	-4.15	-46.79	-2.62	-37.69	-4.26	-30.86	-4.94

Quadro 4.15 – Valores de Q_{5s} e Q_{6s} para os vários valores de k.

Concluimos que os valores de $E(C_s)_1^*$ e $E(C_s)_2^*$ afastam-se bastante, em termos relativos de $E(C_s)_0$ e isto acontece essencialmente para $E(C_s)_1^*$, pelo que consideramos a aproximação P_{s0}^* enunciada por Nakagawa e Yassui (1979) uma má aproximação, quando o sistema tem dois componentes em série com tempos de vida exponenciais.

- A aproximação que iremos estudar agora no nosso trabalho é fruto de um conjunto de resultados, entre os quais está o facto de Q₃ poder ser ajustado por uma parábola.

Por Rodrigues Dias (1987a), obteve-se, recorrendo ao método dos mínimos quadrados, (3.52).

Desta forma e com base em (4.26), (3.47) e (4.33) é possível obtermos a aproximação (4.27). Claro que, esta aproximação só será importante se o seu grau

de precisão for aceitável. Observemos então os quadros que se seguem, nos quais constam os valores de Q_{3s}^{**} e Q_{6s}^{**} , para várias situações, dados por,

$$Q_{3s}^{**} = (P_{s0}^{**} - P_{s0}) / P_{s0} \times 100\% \quad (4.35)$$

$$Q_{6s}^{**} = [E(C_s)_2^{**} - E(C_s)_0] / E(C_s)_0 \times 100\% \quad (4.36)$$

Notemos que $E(C_s)_2^{**}$ é o custo total médio por ciclo correspondente ao período de inspeção P_{s0}^{**} , estimado a partir de (4.27).

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL	k=1.2		k=1.5		k=2		k=2.4	
	Q_{3s}^{**}	Q_{6s}^{**}	Q_{3s}^{**}	Q_{6s}^{**}	Q_{3s}^{**}	Q_{6s}^{**}	Q_{3s}^{**}	Q_{6s}^{**}
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=1$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.5$	1.11	0.83	0	0	0	0	0	0
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.1$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=0.5$	0.67	0.53	0	0	0	0	0	0
$\lambda=\lambda_1=0.5 ; \lambda_2=0.25$	1.73	-0.90	0	0	0	0	0	0

Quadro 4.16 – Valores de Q_{3s}^{**} e Q_{6s}^{**} para os vários valores de k.

Uma análise que podemos fazer desde já é que a aproximação P_{s0}^{**} é sem sombra de dúvidas muito melhor aproximação que a anterior, independentemente do valor de k que estejamos a estudar.

No que se refere a $E(C_s)_2^{**}$, verificamos também que é melhor aproximação que $E(C_s)_2^*$, o que nos permite desde já concluir que esta aproximação do custo total médio por ciclo é bastante mais precisa e quase óptima no que se refere aos custos. O que acabámos de enunciar permite-nos reforçar o facto do custo total médio por ciclo ser pouco sensível à variação do período de inspeção, o que se deve, em parte ao número médio de inspeções e do tempo de detecção variarem em sentidos opostos.

4.2 – SISTEMA COM DOIS COMPONENTES EM SÉRIE COM TEMPOS DE VIDA WEIBULL

4.2.1 – FIABILIDADE E TAXA DE RISCO DO SISTEMA

A situação em que nos encontramos é similar à que apresentamos na figura 4.1, quando exemplificamos o caso do sistema com dois componentes em série com tempos de vida exponenciais. Da mesma forma, devido ao facto de termos introduzido um novo componente em série, reduzimos a fiabilidade do sistema e através das fórmulas (2.29) e (4.6) a *função de fiabilidade* do sistema será dada por,

$$R_s(t) = e^{-\left(\frac{t}{\delta_1}\right)^{\beta_1}} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\delta_2}\right)^{\beta_2}}, t \geq 0 \quad (4.37)$$

Tal como fizemos para o sistema com componentes em série e tempos de vida exponenciais, vamos agora generalizar as funções de fiabilidade e distribuição de probabilidade, para o sistema com n componentes em série com tempos de vida Weibull.

Temos então, através das fórmulas (2.29) e (4.6), anteriormente definidas, como função de fiabilidade para um sistema com n componentes em série com tempos de vida Weibull e $\gamma=0$,

$$R_s(t) = e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{t}{\delta_i}\right)^{\beta_i}}, t \geq 0 \quad (4.38)$$

Recordando agora as fórmulas (2.2) e (4.9), verificamos que a função de distribuição do sistema em causa tem a seguinte expressão,

$$F_s(t) = 1 - e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{t}{\delta_i}\right)^{\beta_i}}, t \geq 0 \quad (4.39)$$

Agora se utilizarmos a fórmula (2.13), obtemos para a função de densidade de probabilidade do sistema a seguinte expressão,

$$f_s(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\delta_i^{\beta_i}} t^{\beta_i-1} e^{-\sum_{i=1}^n (\frac{t}{\delta_i})^{\beta_i}}, t \geq 0 \quad (4.40)$$

Da mesma forma que fizemos quando tratamos o “sistema” composto por um único componente com tempo de vida de Weibull, temos para a taxa de risco deste novo sistema a mesma expressão (2.11), que rescrevemos aqui.

$$h_s(t) = \frac{f_s(t)}{R_s(t)} \quad (4.41)$$

Tal como seria de esperar esta taxa não é constante.

Ocupemo-nos agora do caso inicialmente proposto, isto é, um sistema com dois componentes em série com tempos de vida Weibull.

Pelas fórmulas (4.38) e (4.39), temos para as funções de distribuição e densidade de probabilidade do sistema, as seguintes expressões,

$$F_s(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\delta_1}\right)^{\beta_1}} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\delta_2}\right)^{\beta_2}}, t \geq 0 \quad (4.42)$$

$$f_s(t) = \frac{\beta_1}{\delta_1^{\beta_1}} t^{\beta_1-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\delta_1}\right)^{\beta_1}} + \frac{\beta_2}{\delta_2^{\beta_2}} t^{\beta_2-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\delta_2}\right)^{\beta_2}}, t \geq 0 \quad (4.43)$$

Claro que, a taxa de risco $h_s(t)$ é obtida como em (4.40).

4.2.2 – ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DO PERÍODO DE INSPECÇÃO

O modelo em que nos vamos basear é o mesmo que enunciamos no ponto 4.1.2, para a distribuição exponencial.

Vamos também considerar as duas soluções aproximadas que referenciamos atrás nas fórmulas (4.26) e (4.27).

Tal como aconteceu no sistema composto por duas componentes em série com tempos de vida exponenciais, verificamos que pelo facto de introduzirmos um novo componente em série no nosso sistema, existe um aumento da taxa de risco, pois reduzimos a sua fiabilidade. Nesta situação esperamos que o período de inspecção P_s que minimiza o custo total médio por ciclo $E(C_s)$ diminua.

Assim, vamos apresentar alguns resultados, obtidos analiticamente, para que possamos analisar e comparar o valor do período de inspecção P_s , nos casos do “sistema” ser constituído por um e dois componentes.

$\beta_1 = \beta_2 = 0.7 ; C_1 = 0.1 ; C_2 = 1$			
1 componente	2 componentes		
	k=1,5	k=2	k=2.4
$r = 0.1$	$r_i = 0.15$	$r_i = 0.2$	$r_i = 0.24$
	$r_s' = 0.401477847$	$r_s' = 0.535303796$	$r_s' = 0.642364555$
$E(T) = 1$	$E(T_s) = 0.3736196187$	$E(T_s) = 0.373619619$	$E(T_s) = 0.373619619$
$P = 0.39$	$P_s = 0.28$	$P_s = 0.31$	$P_s = 0.34$
$P^* = 0.447213595$	$P_s^* = 0.334792302$	$P_s^* = 0.386584852$	$P_s^* = 0.423482487$
$P^{**} = 0.416401044$	$P_s^{**} = 0.291562928$	$P_s^{**} = 0.330074502$	$P_s^{**} = 0.356603169$
$E(C) = 0.5490466845$	$E(C_s) = 0.4689654748$	$E(C_s) = 0.5639502570$	$E(C_s) = 0.6353743743$

Quadro 4.17 – Valores obtidos, para o período de inspecção P_s e para as duas aproximações, P_s^* e P_s^{**} , com $k = 1.5, k = 2$ e $k = 2.4, C_1 = 0.1, C_2 = 1$ e $\beta_1 = \beta_2 = 0.7$, no caso da distribuição ser Weibull.

$\beta_1 = \beta_2 = 2 ; C_1 = 0.1 ; C_2 = 1$			
1 componente	2 componentes		
	k=1,5	k=2	k=2.4
r = 0.1	$r_s = 0.15$	$r_s = 0.2$	$r_i = 0.24$
	$r_s' = 0.212131969$	$r_s' = 0.282842625$	$r_s' = 0.33941115$
E(T) = 1	E(T _s) = 0.707107	E(T _s) = 0.707107	E(T _s) = 0.707107
P = 0.45	P _s = 0.46	P _s = 0.53	P _s = 0.58
P* = 0.447213595	P _s * = 0.460578006	P _s * = 0.531829672	P _s * = 0.582590216
P** = 0.416401044	P _s ** = 0.415768468	P _s ** = 0.472969513	P _s ** = 0.51269634
E(C) = 0.4972231244	E(C _s) = 0.5355787715	E(C _s) = 0.6318332481	E(C _s) = 0.7025964440

Quadro 4.18 – Valores obtidos, para o período de inspeção P_s e para as duas aproximações, P_s* e P_s** ,com k = 1.5, k = 2 e k = 2.4 ,C₁ = 0.1, C₂=1 e $\beta_1 = \beta_2 = 2$, no caso da distribuição ser Weibull.

$\beta_1 = \beta_2 = 3 ; C_1 = 0.1 ; C_2 = 1$			
1 componente	2 componentes		
	k=1,5	k=2	k=2.4
r = 0.1	$r_s = 0.15$	$r_s = 0.2$	$r_i = 0.24$
	$r_s' = 0.189073678$	$r_s' = 0.252098237$	$r_s' = 0.302517885$
E(T) = 1	E(T _s) = 0.793341525	E(T _s) = 0.793341525	E(T _s) = 0.793341525
P = 0.45	P _s = 0.49	P _s = 0.57	P _s = 0.61
P* = 0.447213595	P _s * = 0.487854955	P _s * = 0.56332638	P _s * = 0.617093131
P** = 0.416401044	P _s ** = 0.442800335	P _s ** = 0.504099722	P _s ** = 0.546727253
E(C) = 0.4963717076	E(C _s) = 0.5619297510	E(C _s) = 0.6616472638	E(C _s) = 0.7355420443

Quadro 4.19 – Valores obtidos, para o período de inspeção P_s e para as duas aproximações, P_s* e P_s** ,com k = 1.5, k = 2 e k = 2.4 ,C₁ = 0.1, C₂=1 e $\beta_1 = \beta_2 = 3$, no caso da distribuição ser Weibull.

$\beta_1 = 2; \beta_2 = 3 ; C_1 = 0.1 ; C_2 = 1$			
1 componente	2 componentes		
	k=1,5	k=2	k=2.4
r = 0.1	$r_s = 0.15$	$r_s = 0.2$	$r_i = 0.24$
	$r_s' = 0.201140601$	$r_s' = 0.268187468$	$r_s' = 0.321824962$
E(T) = 1	E(T _s) = 0.745747	E(T _s) = 0.745747	E(T _s) = 0.745747
P = 0.45	P _s = 0.48	P _s = 0.56	P _s = 0.6
P* = 0.447213595	P _s * = 0.47299482	P _s * = 0.546167374	P _s * = 0.598296381
P** = 0.416401044	P _s ** = 0.428070545	P _s ** = 0.487135705	P _s ** = 0.528181685
E(C) = 0.4972231244	E(C _s) = 0.5475845573	E(C _s) = 0.6453406526	E(C _s) = 0.7170977930

Quadro 4.20 – Valores obtidos, para o período de inspeção P_s e para as duas aproximações, P_s* e P_s** , com k = 1.5, k = 2 e k = 2.4 , C₁ = 0.1, C₂ = 1 e $\beta_1 = 2$ e $\beta_2 = 3$, no caso da distribuição ser Weibull.

$\beta_1 = \beta_2 = 5 ; C_1 = 0.1 ; C_2 = 1$			
1 componente	2 componentes		
	k=1,5	k=2	k=2.4
r = 0.1	$r_s = 0.15$	$r_s = 0.2$	$r_i = 0.24$
	$r_s' = 0.172305453$	$r_s' = 0.229740603$	$r_s' = 0.275688724$
E(T) = 1	E(T _s) = 0.87054703	E(T _s) = 0.87054703	E(T _s) = 0.87054703
P = 0.43	P _s = 1.15	P _s = 1.16	P _s = 1.16
P* = 0.447213595	P _s * = 0.511042179	P _s * = 0.590100679	P _s * = 0.646422907
P** = 0.416401044	P _s ** = 0.465797974	P _s ** = 0.530590137	P _s ** = 0.575691082
E(C) = 0.4963778415	E(C _s) = 0.5236182661	E(C _s) = 0.5771630206	E(C _s) = 0.6197427279

Quadro 4.21 – Valores obtidos, para o período de inspeção P_s e para as duas aproximações, P_s* e P_s** , com k = 1.5, k = 2 e k = 2.4 , C₁ = 0.1, C₂ = 1 e $\beta_1 = \beta_2 = 5$, no caso da distribuição ser Weibull.

Podemos então concluir que, para o parâmetro de forma da distribuição de Weibull, $\beta=0.7$ ao aumentarmos a complexidade do sistema, a fiabilidade deste diminui e a taxa de risco aumenta, e o período de inspeção diminui, o que não constitui surpresa para nós.

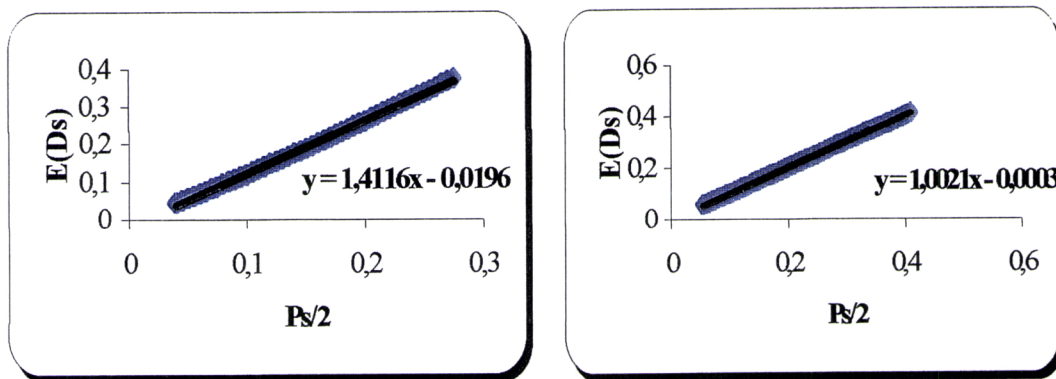
Para os restantes parâmetros de forma da distribuição de Weibull que apresentamos, o valor do período de inspeção P_s aumenta como sucedera para alguns casos já verificados antes para a distribuição exponencial, o que à priori não esperaríamos.

4.2.3 – TEMPO MÉDIO DE DETECÇÃO

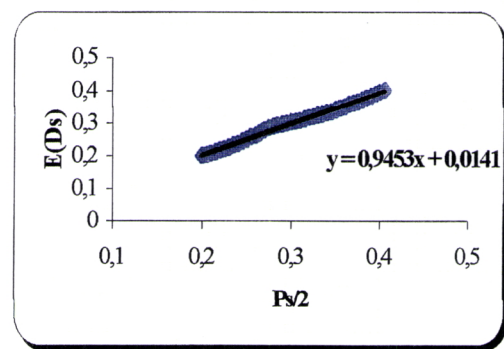
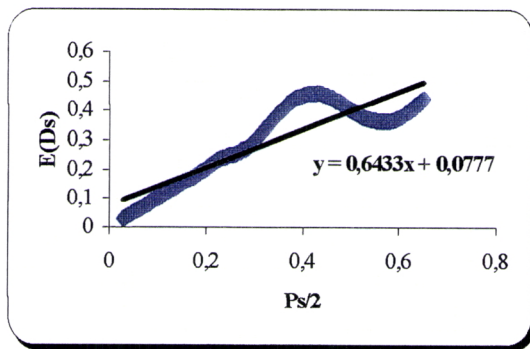
No que respeita ao tempo médio de detecção, verificamos que ao introduzirmos uma nova componente no sistema, a aproximação $E(D)=P/2$, encontrada para o “sistema” composto por uma única componente, continua a ser bastante boa.

Queremos desde já salientar o facto do ajuste por nós obtido, quando $\beta_1 = \beta_2 = 2$ ser excelente, já que $r^2=1$.

Estes resultados também foram obtidos por simulação de 20 000 números aleatórios.



Figuras 4.8 e 4.9 – Ajustamento do tempo médio de detecção $E(D_s)$ em função de $P_s/2$, para a distribuição de Weibull, com $\beta_1 = \beta_2 = 0.7$, $\beta_1 = \beta_2 = 2$, para $k = 2$, $C_1 = 0.1$ e $C_2 = 1$, obtendo-se $r^2 = 0.9989$ e $r^2 = 1$, respectivamente.



Figuras 4.10 e 4.11 – Ajustamento do tempo médio de detecção $E(D_s)$ em função de $P_s/2$, para a distribuição de Weibull, com $\beta_1 = \beta_2 = 5$, para $k = 1.5$ e com $\beta_1 = 2$ e $\beta_2 = 3$, para $k = 2$, obtendo-se $r^2 = 0.7742$ e $r^2 = 0.9924$, respectivamente.

Gostaríamos ainda de realçar o facto, que de uma forma geral, à medida que k aumenta (diminui) o ajuste por nós efectuado usando o método dos mínimos quadrados é melhor (pior), com excepção dos casos em que temos mais do que um mínimo ($\beta=5$ e $\beta_1=2$ e $\beta_2=3$) para o período de inspecção que minimiza o custo total médio por ciclo, como podemos constatar através dos gráficos 4.10 e 4.11.

4.2.4 – APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

- O tempo de vida de um sistema, interpretado como sendo um só componente com tempo de vida Weibull, no qual introduzimos em série um ou mais componentes com a mesma distribuição Weibull do tempo de vida, não continua a ser Weibull.
- À medida que k aumenta (diminui), as aproximações P_s^* e P_s^{**} aumentam (diminuem) tal como o período de inspecção.

- **Caso $\beta_1 = \beta_2 = 0.7$**

- Verificamos que e de acordo com o que esperávamos o valor do período de inspeção que minimiza o custo total médio por ciclo diminui, pois introduzimos no sistema uma nova componente reduzindo-se a fiabilidade deste e aumentamos a sua taxa de risco.

- **Caso $\beta_1 = \beta_2 = 2$**

- Contrariamente ao que esperaríamos verificamos que, apesar de aumentarmos a taxa de risco e consequentemente diminuirmos a fiabilidade do sistema ao introduzirmos componentes em série, o valor do período de inspeção P_s que minimiza o custo total médio por ciclo aumenta, não obstante de aumentarmos a complexidade do sistema, conforme já referimos noutras situações.

- **Caso $\beta_1 = \beta_2 = 3$**

- Da mesma forma que no caso anterior e exactamente pela mesma razão, verificamos que, para a situação inicial, contrariamente ao que poderíamos esperar o valor do período de inspeção P_s que minimiza o custo total médio por ciclo $E(C_s)$ aumenta e consequentemente este valor também aumenta.

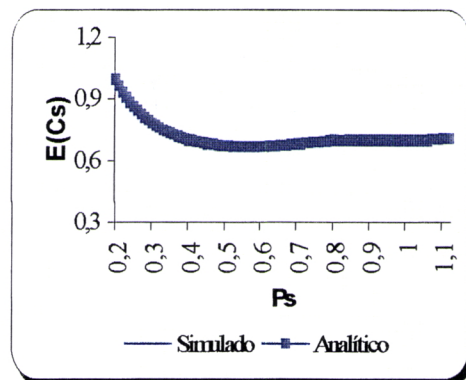
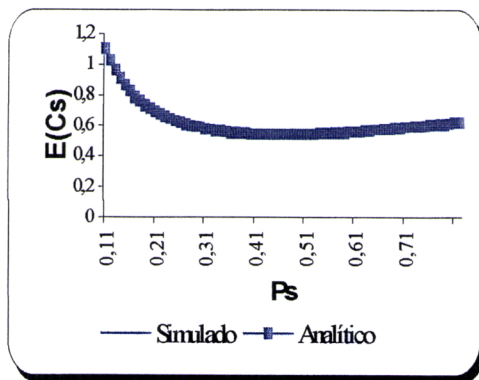
- **Casos em que $\beta_1=2$ e $\beta_2=3$ e $\beta_1 = \beta_2 = 5$**

- Neste dois casos o facto que nos parece mais importante destacarmos deve-se ao facto de termos mais do que um período de inspeção P_s que minimiza o custo total médio $E(C_s)$, para a situação inicial. No entanto e para pudermos comparar o “sistema” constituído por um só componente com o sistema com dois componentes, admitimos que o período de inspeção P_s que minimiza o custo total médio por ciclo $E(C_s)$ é o mínimo absoluto.

Desta forma, verificamos mais uma vez, que contrariamente ao que esperávamos e não obstante de aumentarmos a complexidade do sistema o período P_s de inspeção volta a aumentar.

- À semelhança do que fizemos para a distribuição exponencial, através dos gráficos que se seguem, vamos poder comparar alguns valores que obtivemos por simulação com os analíticos.

Verificamos que os valores analíticos estão bastante próximos dos valores simulados, para os dois valores de k que consideramos no nosso trabalho e sempre que os parâmetros de forma da distribuição de Weibull para o nosso sistema sejam iguais.



Figuras 4.12 e 4.13 – Custo total médio por ciclo $E(C_s)$ em função do período de inspeção P_s , com $\beta_1 = \beta_2 = 2$, para $k = 1.5$ e com $\beta_1 = \beta_2 = 3$, para $k = 2$, quando $C_1 = 0.1$ e $C_2 = 1$, no caso da distribuição de Weibull.

- Para finalizar este capítulo vamos analisar as aproximações que considerámos para o período de inspeção. Para tal e da mesma forma que fizemos para o sistema com tempos de vida exponenciais, vamos primeiro comparar o valor de $E(D_s)_0$ com $P_{s0}/2$, com o intuito de verificarmos se a aproximação $E(D_s) = P_s/2$ é ou não satisfatória. Nos quadros que se seguem apresentamos os valores de Q_{2s} e Q_{3s} definidos como em (3.43) e (3.44).

DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL	k=1.5		k=2		k=2.4	
	Q ₂	Q ₃	Q ₂	Q ₃	Q ₂	Q ₃
$\beta_1=\beta_2=0.7$	-20.02	19.64	-21.00	24.84	-21.97	24.55
$\beta_1=\beta_2=2$	0	0.22	0	0.38	0	0.45
$\beta_1=\beta_2=3$	0.29	-0.41	0.45	-1.23	0.38	1.16
$\beta_1=2 ; \beta_2=3$	0.15	-1.46	0.22	-2.50	0.29	-0.28
$\beta_1=\beta_2=5$	58.51	-55.57	59.22	-49.14	59.22	-44.27

Quadro 4.22 – Valores de Q_{2s} e Q_{3s} para $k=1.5$, $k=2$ e $k=2.4$.

Pelos resultados anteriores verificamos que existem valores onde $E(D_s)$ é inferior a $P_s/2$ e outros em que é superior. Para os parâmetros “extremo” da distribuição de Weibull, constatamos que independentemente da situação em causa esta aproximação não é boa. Por outro lado, para o parâmetro $\beta=2$, verificamos exactamente o contrário, pois os valores de Q_{2s} são nulos para os três casos que estamos a estudar, logo esta aproximação é óptima. Para os outros dois casos, podemos afirmar que $E(D_s)$ é uma boa aproximação de $P_s/2$. No que respeita ao período de inspecção, existem alguns casos em que o valor de P_{s0}^* pode afastar-se consideravelmente de P_{s0} , podendo também assumir valores quer superiores quer inferiores. Para as situações mais comuns da distribuição em estudo, ou seja quando os parâmetros de forma são $\beta=2$ e $\beta=3$, respectivamente, podemos afirmar que P_{s0} e P_{s0}^* estão próximos.

- Vamos agora verificar o que acontece em relação aos custos, pois não nos podemos esquecer que estamos perante um problema de minimização de custos. Para tal, consideramos as expressões (4.30), (4.31) e (4.32) tal como fizemos anteriormente, vamos analisar para diferentes casos o grau de precisão de $E(C_s)_1^*$ e $E(C_s)_2^*$ utilizando (4.33) e (4.34).

DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL	k=1.5		k=2		k=2.4	
	Q ₅	Q ₆	Q ₅	Q ₆	Q ₅	Q ₆
$\beta_1=\beta_2=0.7$	-0.68	-13.05	13.80	16.16	26.69	-15.53
$\beta_1=\beta_2=2$	-15.35	0.16	3.76	0.27	19.14	0
$\beta_1=\beta_2=3$	-21.31	-0.31	-3.16	-0.91	8.57	-1.31
$\beta_1=2 ; \beta_2=3$	-17.39	-1.11	2.37	1.03	15.33	0
$\beta_1=\beta_2=5$	522.35	737.21	686.80	748.78	748.85	754.95

Quadro 4.23 – Valores de Q_{5s} e Q_{6s} para k=1.5 , k=2.0 e k=2.4.

- Pelos resultados conseguidos, verificamos que de uma forma geral os valores de $E(C_s)_1^*$ afastam-se bastante em termos relativos de $E(C_s)_0$, tal como os de $E(C_s)_2^*$ para os valores “extremo” dos parâmetros da distribuição de Weibull. Nestas condições consideramos a aproximação (4.26) má.

No entanto, parece-nos importante salientarmos que $E(C_s)_2^*$ é uma aproximação bastante melhor que $E(C_s)_1^*$ (com excepção dos casos que já referimos). Veja-se, por exemplo que, especialmente, com $\beta=2$ e também para $\beta=3$ os valores de Q_{6s} estão bastante próximos de zero, o que nos permite afirmar que, nestas situações a aproximação em causa é boa.

- Resta-nos agora analisar a aproximação (4.27). Consideremos (4.35), (4.36) e os quadros que se seguem.

DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL	k=1.5		k=2		k=2.4	
	Q _{3s} **	Q _{6s} **	Q _{3s} **	Q _{6s} **	Q _{3s} **	Q _{6s} **
$\beta_1=\beta_2=0.7$	3.57	-2.29	6.45	-4.50	5.88	-4.41
$\beta_1=\beta_2=2$	-8.70	6.63	-11.32	10.52	-12.07	12.75
$\beta_1=\beta_2=3$	-10.20	7.40	-12.28	10.89	-9.84	9.42
$\beta_1=2 ; \beta_2=3$	-10.42	7.88	-12.50	11.63	-11.67	12.01
$\beta_1=\beta_2=5$	-59.13	792.11	-54.31	833.21	-50.00	792.20

Quadro 4.24 – Valores de Q_{3s}** e Q_{6s}** para k=1.5, k=2 e k=2.4.

- Em termos gerais, verificamos que P_{s0}^* é melhor aproximação que P_{s0}^{**} , para o verdadeiro valor do período de inspeção. Dizemos em termos gerais, porque não o podemos afirmar em relação ao parâmetro $\beta=0.7$.

No que se refere a $E(C_s)_2^{**}$, consideramos que esta também é pior aproximação que $E(C_s)_2^*$, com excepção do caso $\beta_1=\beta_2=0.7$.

Podemos, dados os resultados obtidos, e apesar de nem sempre P_{s0}^* ser melhor aproximação para o período de inspeção, considerar que $E(C_s)_2^*$ é uma aproximação do custo total médio por ciclo mais precisa, no geral dos casos apresentados, que $E(C_s)_2^{**}$.

- Em suma queremos ainda referir que, à medida que o tempo de vida do sistema constituído por duas componentes em série, se aproxima do tempo médio de vida do “sistema” constituído por um só componente, quer o valor exacto, quer as duas aproximações P_s^* e P_s^{**} do período de inspeção P_s do sistema aumentam, independentemente do parâmetro de forma da distribuição e da situação em estudo.

5. SISTEMA COM COMPONENTES EM PARALELO E INSPECÇÕES PERIÓDICAS

Neste trabalho pretendemos, fundamentalmente, prosseguir o estudo que vem sendo feito, considerando agora a introdução de um ou mais componentes em paralelo, a partir de um sistema inicial. Este caso é importante em situações em que o custo por unidade de tempo de mau funcionamento é relevante como acontece, por exemplo, em contextos de saúde (hospitalares e outros), de segurança (de pessoas e bens) e militares (de defesa e de ataque).

Uma das grandes vantagens deste tipo de modelos é que para o bom funcionamento do sistema basta que, pelo menos um dos componentes que o integram esteja a funcionar nas melhores condições. Muitas vezes é utilizado um esquema em paralelo de modo a aumentarmos a fiabilidade do sistema.

Apenas nos vamos ocupar de sistemas em paralelo com tempos de vida exponenciais.

5.1 – SISTEMA COM DOIS COMPONENTES EM PARALELO COM TEMPOS DE VIDA EXPONENCIAIS

Um dos objectivos a que nos propomos neste ponto é especificarmos as funções de fiabilidade e densidade de probabilidade deste tipo de modelo. Pretendemos também apresentar expressões para o cálculo dos períodos de inspecção, isto é, determinarmos os instantes kP_p , com $k=1,2,\dots$ nos quais se devem realizar inspecções ao sistema. A última fase deste ponto consiste em analisarmos os custos totais médios mínimos por ciclo, determinados utilizando cada uma das aproximações que se vão apresentar, à semelhança do que fizemos para o sistema em série.

5.1.1 - FIABILIDADE E TAXA DE RISCO DO SISTEMA

Comecemos por ilustrar a situação em que nos encontramos e pretendemos estudar.

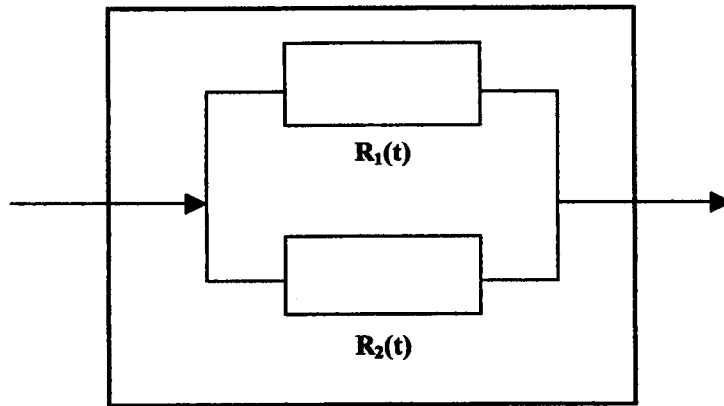


Figura 5.1 — Ilustração de um sistema com dois componentes em paralelo.

A fiabilidade da ligação de dispositivos em paralelo baseia-se no pressuposto que os componentes são montados de tal modo que o sistema deixa de funcionar correctamente somente se todos os componentes falharem, isto é, o sistema para funcionar é suficiente que pelo menos um dos componentes funcione nas melhores condições.

Sendo assim, seja T_p a variável aleatória que representa o tempo de bom funcionamento de um sistema com componentes em paralelo. Novamente, admitindo que os componentes trabalham independentemente um do outro, a *função de fiabilidade* do sistema, que designamos por $R_p(t)$, pode ser expressa em termos da fiabilidade dos componentes de $R_1(t)$ e $R_2(t)$, do seguinte modo,

$$R_p(t) = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t) \cdot R_2(t) \quad (5.1)$$

De notar que podemos também escrever,

$$R_p(t) = 1 - [1 - R_1(t)] \cdot [1 - R_2(t)] \quad (5.2)$$

A relação (5.2) mostra-nos que, $R_p(t) \geq \max\{R_1(t), R_2(t)\}$ ou seja, o sistema apresenta maior fiabilidade do que qualquer dos seus componentes.

As ideias referidas para dois componentes que funcionam independentemente, podem ser generalizadas para um número n , fixo, de componentes.

Assim, se n componentes que funcionam independentemente, estiverem a trabalhar em paralelo, e se o i -ésimo componente tiver fiabilidade $R_i(t)$, então a *função de fiabilidade* do sistema $R_p(t)$, será dada por,

$$\begin{aligned} R_p(t) &= P(T_p > t) = \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)), t \geq 0, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.3)$$

Se o sistema tiver n componentes em paralelo com tempos de vida exponenciais, $R_p(t)$ é dada por,

$$R_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda_i t}), t \geq 0, i = 1, \dots, n \quad (5.4)$$

Pelo facto de sabermos que,

$$R_p(t) = 1 - F_p(t), t \geq 0, \quad (5.5)$$

verificamos que, para o sistema em causa, a função de distribuição é,

$$F_p(t) = \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda_i t}) = \quad (5.6)$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} e^{-(\lambda_i + \lambda_j)t} + \dots + (-1)^n e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i t}, t \geq 0 \quad (5.7)$$

e conseqüentemente a função densidade de probabilidade é dada por,

$$f_p(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{-\lambda_i t} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i + \lambda_j) e^{-(\lambda_i + \lambda_j)t} - \dots - (-1)^n \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i t}, t \geq 0 \quad (5.8)$$

A taxa de risco é obtida da mesma forma que em (2.11) ou seja,

$$h_p(t) = \frac{f_p(t)}{R_p(t)} \quad (5.9)$$

Pelo apresentado anteriormente, podemos afirmar que esta taxa não é constante.

Queremos ainda referir que o tempo médio de vida do sistema em paralelo com n componentes com tempos de vida exponenciais é dado por,

$$E(T_p) = \int_0^{\infty} \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda_i t}) \right] dt \quad (5.10)$$

Por (5.6), temos que,

$$E(T_p) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{i < j} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} + \sum_{i < j < k} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad (5.11)$$

Vamos considerar, em particular, um sistema com dois componentes em paralelo, cada um com tempo de vida exponencial de parâmetros λ_1 e λ_2 , respectivamente. Então, a partir de (5.4), temos,

$$R_p(t) = e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}, t \geq 0 \quad (5.12)$$

A função de distribuição do sistema que estamos a estudar é,

$$F_p(t) = (1 - e^{-\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t}) = \quad (5.13)$$

$$= 1 - e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} + e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}, t \geq 0 \quad (5.14)$$

Particularizando a fórmula (5.8) para o nosso sistema, obtemos como função densidade de probabilidade,

$$f_p(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}, t \geq 0 \quad (5.15)$$

Esta expressão permite-nos ainda concluir que, as variáveis aleatórias T_1 e T_2 representam os tempos de vida de dois componentes em paralelo com tempos de vida exponenciais e que se T_p designar o tempo de vida do sistema com esses componentes em paralelo, então T_p não será exponencialmente distribuída.

Finalmente, para obtermos a taxa de risco referente a este sistema que estamos a estudar, basta-nos particularizar a fórmula (5.9).

Notemos que à medida que o tempo médio de vida do sistema aumenta (diminui) a taxa de risco diminui (aumenta).

Gostariamos ainda de realçar que, o tempo médio de vida $E(T_p)$ deste sistema aumenta, podendo-se neste caso, escrever,

$$E(T_p) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (5.16)$$

5.1.2 – ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DO PERÍODO DE INSPECÇÃO

O modelo em que nos baseamos é exactamente o mesmo que referenciamos no ponto 4.1.3, tendo em conta que o sistema que estamos a estudar tem neste ponto dois componentes montados em paralelo.

Desta forma e de um modo análogo ao que fizemos no parágrafo 3.1, admitimos as hipóteses [H1]-[H6], embora façamos as alterações necessárias.

O valor do período de inspecção que minimiza o custo total médio por ciclo $E(C_p)$ é a solução da equação (3.24) (Rodrigues Dias (1983)).

As soluções aproximadas para o período de inspecção também são as mesmas que já referenciamos antes, mas que relembramos,

$$P_p^* = \sqrt{2r_p E(T_p)} \quad (5.17)$$

$$P_p^{**} = \frac{P_p^*}{1 + 0.234\sqrt{r_p'}}, \quad \text{com } r_p' = \frac{r_p}{E(T_p)} \quad (5.18)$$

Pelo facto de introduzirmos um novo componente em paralelo no sistema, aumentamos a sua fiabilidade. Desta forma, esperamos que o período de inspecção P_p que minimiza o custo total médio por ciclo aumente.

Através dos quadros seguintes, podemos comparar e analisar os valores por nós obtidos de forma analítica para o período de inspecção P_p , nos casos em que o “sistema” é constituído por um só componente e em que o mesmo é constituído por dois componentes em paralelo.

k=1,2 ; C ₁ =0,1 ; C ₂ =1				
1 componente	2 componentes			
	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3$	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.1$
r = 0.1	r _p = 0.12	r _p = 0.12	r _p = 0.12	r _p = 0.12
	r _p ' = 0.110769234	r _p ' = 0.08	r _p ' = 0.051428572	r _p ' = 0.011891892
E(T) = 1	E(T _p) = 1.0833333	E(T _p) = 1.5	E(T _p) = 2.3333333	E(T _p) = 10.0909091
P = 0.42	P _p = 0.5	P _p = 0.6	P _p = 0.74	P _p = 1.55
P* = 0.447213595	P _p * = 0.509901944	P _p * = 0.6	P _p * = 0.748331472	P _p * = 1.556219195
P** = 0.416401044	P _p ** = 0.4638735688	P _p ** = 0.562754016	P _p ** = 0.710621482	P _p ** = 1.5174962
E(C) = 0.516241954	E(C _p) = 0.573426548	E(C _p) = 0.661242482	E(C _p) = 0.80942735	E(C _p) = 1.618806251

Quadro 5.1 – Valores obtidos para o período de inspecção P_p e para as duas aproximações, P_p^*

e P_p^{**} , com k=1.2, no caso da distribuição ser exponencial, com $\lambda=1$.

k=1,2 ; C ₁ =0.1 ; C ₂ =1					
1 componente	2 componentes		1 componente	2 componentes	
	$\lambda = \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 4$	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 2$		$\lambda = \lambda_1 = 3; \lambda_2 = 4$	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 3$
r = 0.1	r _p = 0.12	r _p = 0.12	r = 0.1	r _p = 0.12	r _p = 0.12
	r _p ' = 0.205714297	r _p ' = 0.16		r _p ' = 0.272432433	r _p ' = 0.24
E(T) = 0.5	E(T _p) = 0.5833333	E(T _p) = 0.75	E(T) = 0.3333333	E(T _p) = 0.44047619	E(T _p) = 0.5
P = 0.29	P _p = 0.36	P _p = 0.42	P = 0.23	P _p = 0.31	P _p = 0.33
P* = 0.316227766	P _p * = 0.374165728	P _p * = 0.424264069	P* = 0.258198877	P _p * = 0.325137333	P _p * = 0.346410162
P** = 0.286270171	P _p ** = 0.338264858	P _p ** = 0.387951782	P** = 0.228865813	P _p ** = 0.289748485	P _p ** = 0.310783183
E(C) = 0.38615894	E(C _p) = 0.438351446	E(C _p) = 0.48674432	E(C) = 0.328753656	E(C _p) = 0.38942807	E(C _p) = 0.410071964

Quadro 5.2 – Valores obtidos para o período de inspeção P_p e para as duas aproximações, P_p* e P_p** , com k=1.2 , no caso da distribuição ser exponencial., com $\lambda=2$ e $\lambda=3$.

k=1,5 ; C ₁ =0,1 ; C ₂ =1				
1 componente	2 componentes			
	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3$	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.1$
r = 0.1	r _p = 0.15	r _p = 0.15	r _p = 0.15	r _p = 0.15
	r _p ' = 0.138461543	r _p ' = 0.1	r _p ' = 0.064285715	r _p ' = 0.014864865
E(T) = 1	E(T _p) = 1.0833333	E(T _p) = 1.5	E(T _p) = 2.3333333	E(T _p) = 10.0909091
P = 0.42	P _p = 0.55	P _p = 0.66	P _p = 0.83	P _p = 1.73
P* = 0.447213595	P _p * = 0.570087704	P _p * = 0.670820393	P _p * = 0.836660021	P _p * = 1.739905954
P** = 0.416401044	P _p ** = 0.524424787	P _p ** = 0.624601566	P _p ** = 0.789801248	P _p ** = 1.691643956
E(C) = 0.516241954	E(C _p) = 0.650479557	E(C _p) = 0.747753462	E(C _p) = 0.913357469	E(C _p) = 1.818869309

Quadro 5.3 – Valores obtidos para o período de inspeção P_p e para as duas aproximações, P_p* e P_p** , com k=1.5 , no caso da distribuição ser exponencial , com $\lambda=1$.

k=1,5 ; C ₁ =0.1 ; C ₂ =1					
1 componente	2 componentes		1 componente	2 componentes	
	$\lambda = \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 4$	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 2$		$\lambda = \lambda_1 = 3; \lambda_2 = 4$	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 3$
r = 0.1	r _p = 0.15	r _p = 0.15	r = 0.1	r _p = 0.15	r _p = 0.15
	r _p ' = 0.257142872	r _p ' = 0.2		r _p ' = 0.340540541	r _p ' = 0.3
E(T) = 0.5	E(T _p) = 0.58333333	E(T _p) = 0.75	E(T) = 0.33333333	E(T _p) = 0.44047619	E(T _p) = 0.5
P = 0.29	P _p = 0.4	P _p = 0.46	P = 0.23	P _p = 0.34	P _p = 0.37
P* = 0.316227766	P _p * = 0.418330001	P _p * = 0.474341649	P* = 0.258198877	P _p * = 0.36351459	P _p * = 0.387298335
P** = 0.286270171	P _p ** = 0.373956455	P _p ** = 0.429405256	P** = 0.228865813	P _p ** = 0.319839627	P _p ** = 0.343298738
E(C) = 0.386158947	E(C _p) = 0.499708957	E(C _p) = 0.553157322	E(C) = 0.328753656	E(C _p) = 0.445073796	E(C _p) = 0.467859699

Quadro 5.4 – Valores obtidos para o período de inspeção P_p e para as duas aproximações, P_p*

e P_p** , com k=1.5 , no caso da distribuição ser exponencial , com $\lambda=2$ e $\lambda=3$.

k=2 ; C ₁ =0,1 ; C ₂ =1				
1 componente	2 componentes			
	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3$	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.1$
r = 0.1	r _p = 0.2	r _p = 0.2	r _p = 0.2	r _p = 0.2
	r _p ' = 0.18461539	r _p ' = 0.13333333	r _p ' = 0.085714287	r _p ' = 0.01981982
E(T) = 1	E(T _p) = 1.08333333	E(T _p) = 1.5	E(T _p) = 2.33333333	E(T _p) = 10.0909091
P = 0.42	P _p = 0.63	P _p = 0.76	P _p = 0.96	P _p = 1.99
P* = 0.447213595	P _p * = 0.658280578	P _p * = 0.774596669	P _p * = 0.966091776	P _p * = 2.009070342
P** = 0.416401044	P _p ** = 0.598141881	P _p ** = 0.713621482	P _p ** = 0.904150094	P _p ** = 1.944995962
E(C) = 0.516241954	E(C _p) = 0.767495018	E(C _p) = 0.878021	E(C _p) = 1.069124011	E(C _p) = 2.115877641

Quadro 5.5 – Valores obtidos para o período de inspeção P_p e para as duas aproximações, P_p*

e P_p** , com k=2.0 , no caso da distribuição ser exponencial , com $\lambda=1$.

k=2 ; C ₁ =0.1 ; C ₂ =1					
1 componente	2 componentes		1 componente	2 componentes	
	$\lambda = \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 4$	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 2$		$\lambda = \lambda_1 = 3; \lambda_2 = 4$	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 3$
r=0.1	r _p =0.2	r _p =0.2	r=0.1	r _p =0.2	r _p =0.2
	r _p ' = 0.342857162	r _p ' = 0.266666667		r _p ' = 0.454054055	r _p ' = 0.4
E(T) = 0.5	E(T _p) = 0.5833333	E(T _p) = 0.75	E(T) = 0.3333333	E(T _p) = 0.44047619	E(T _p) = 0.5
P = 0.29	P _p = 0.45	P _p = 0.53	P = 0.23	P _p = 0.39	P _p = 0.42
P* = 0.316227766	P _p * = 0.483045878	P _p * = 0.547722558	P* = 0.258198877	P _p * = 0.419750493	P _p * = 0.447213595
P** = 0.286270171	P _p ** = 0.424836342	P _p ** = 0.488672767	P** = 0.228865813	P _p ** = 0.362579824	P _p ** = 0.389560715
E(C) = 0.386158947	E(C _p) = 0.593884185	E(C _p) = 0.654397616	E(C) = 0.328753656	E(C _p) = 0.530851271	E(C _p) = 0.556757267

Quadro 5.6 – Valores obtidos para o período de inspeção P_p e para as duas aproximações, P_p* e P_p** , com k=2.0 , no caso da distribuição ser exponencial , com λ=2 e λ=3.

k=2.4 ; C ₁ =0,1 ; C ₂ =1				
1 Componente	2 componentes			
	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3$	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.5$	$\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.1$
r=0.2	r _p =0.24	r _p =0.24	r _p =0.24	r _p =0.24
	r _p ' = 0.221538468	r _p ' = 0.16	r _p ' = 0.102857144	r _p ' = 0.023783784
E(T) = 1	E(T _p) = 1.0833333	E(T _p) = 1.5	E(T _p) = 2.3333333	E(T _p) = 10.0909091
P = 0.57	P _p = 0.68	P _p = 0.83	P _p = 1.04	P _p = 2.17
P* = 0.632455532	P _p * = 0.721110244	P _p * = 0.848528137	P _p * = 1.058300517	P _p * = 2.200826292
P** = 0.572540341	P _p ** = 0.64956763	P _p ** = 0.775903564	P _p ** = 0.984422596	P _p ** = 2.124170376
E(C) = 0.772255659	E(C _p) = 0.8539713	E(C _p) = 0.970547	E(C _p) = 1.182644084	E(C _p) = 2.330356748

Quadro 5.7 – Valores obtidos para o período de inspeção P_p e para as duas aproximações, P_p* e P_p** , com k=2.4 , no caso da distribuição ser exponencial , com λ=1.

k=2.4 ; C ₁ =0.1 ; C ₂ =1					
1 componente	2 componentes		1 componente	2 componentes	
	$\lambda = \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 4$	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 2$		$\lambda = \lambda_1 = 3; \lambda_2 = 4$	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 3$
r = 0.2	r _p = 0.24	r _p = 0.24	r = 0.2	r _p = 0.24	r _p = 0.24
	r _p ' = 0.411428595	r _p ' = 0.32		r _p ' = 0.544864865	r _p ' = 0.48
E(T) = 0.5	E(T _p) = 0.5833333	E(T _p) = 0.75	E(T) = 0.3333333	E(T _p) = 0.44047619	E(T _p) = 0.5
P = 0.39	P _p = 0.49	P _p = 0.57	P = 0.31	P _p = 0.42	P _p = 0.45
P* = 0.447213595	P _p * = 0.529150247	P _p * = 0.6	P* = 0.365148353	P _p * = 0.459813627	P _p * = 0.489897949
P** = 0.389560715	P _p ** = 0.460093075	P _p ** = 0.529861965	P** = 0.309118826	P _p ** = 0.392089226	P _p ** = 0.421555405
E(C) = 0.589376936	E(C _p) = 0.664187621	E(C _p) = 0.729429041	E(C) = 0.509020495	E(C _p) = 0.59521092	E(C _p) = 0.623239442

Quadro 5.8 – Valores obtidos para o período de inspeção P_p e para as duas aproximações, P_p^* e P_p^{**} , com $k=2.4$, no caso da distribuição ser exponencial, com $\lambda=2$ e $\lambda=3$.

Resulta da análise dos quadros anteriores que o período de inspeção para um sistema com dois componentes em paralelo e tempos de vida exponenciais é maior que o período de inspeção do "sistema" composto por um único componente, independentemente do valor de k.

Este resultado já era de algum modo esperado, pois como já referenciamos anteriormente, a fiabilidade do sistema com dois componentes em paralelo é superior à fiabilidade de um componente a funcionar em isolado, o que implica que inspecionemos com maior frequência o sistema.

De notarmos que, considerando como boa a solução aproximada dada por (5.17) e considerando, por outro lado, que, com $k \geq 1$, temos $r_p \geq r$, poderíamos concluir de imediato que, como $E(T_p) > E(T_1)$, P_p seria sempre maior que o período $P_1^* = P^*$ que minimiza o custo total médio quando se considera apenas o sistema inicial, apenas com o primeiro componente.

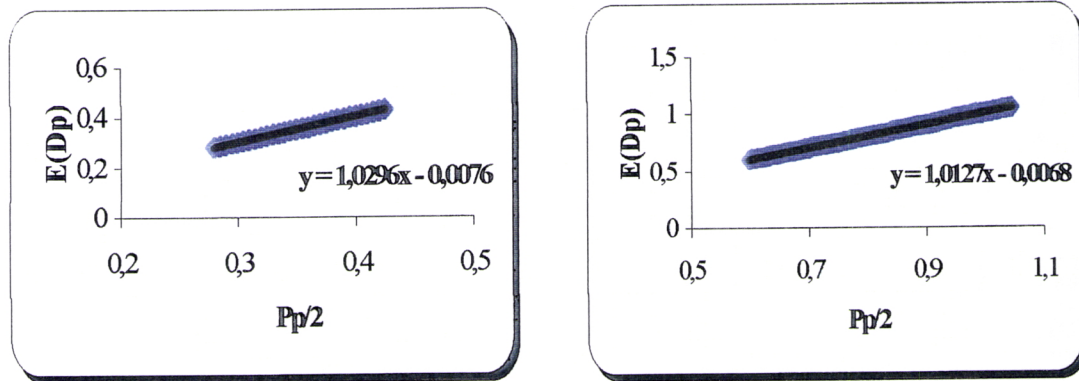
5.1.3 – TEMPO MÉDIO DE DETECÇÃO

Pelo facto de introduzirmos uma nova componente em paralelo no sistema, verificamos que a aproximação admitida na fórmula (4.10), $E(D) = P/2$ continua a ser bastante boa, apesar do sistema não continuar a ser exponencial.



Figuras 5.2 e 5.3 – Ajustamento do tempo médio de detecção $E(D_p)$ em função de $P_p/2$, para $k = 1.2$, com $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (esq) e para $k = 1.5$, com, $\lambda = \lambda_1 = 1 ; \lambda_2 = 0.5$ (direita) com $C_1 = 0.1$ e $C_2 = 1$, no caso da distribuição ser exponencial, obtendo-se $r^2 = 0.9997$ e $r^2 = 0.9995$, respectivamente.

Verificamos também que à medida que k aumenta (diminui), o ajuste por nós conseguido é menos (mais) significativo, pois o coeficiente de regressão linear r^2 está mais (menos) afastado da unidade, conforme podemos verificar pelos gráficos (5.2) e (5.3). Queremos ainda referenciar que, o melhor ajuste ocorre para os valores de $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0.1$.



Figuras 5.4 e 5.5 – Ajustamento do tempo médio de detecção $E(D_p)$ em função de $P_p/2$, para $k = 1.5$, com $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (esq) e para $k = 2$, com, $\lambda = \lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0.1$ (direita) com $C_1 = 0.1$ e $C_2 = 1$, no caso da distribuição ser exponencial, obtendo-se $r^2 = 0.9996$ para ambos os casos.

O aspecto gráfico de $E(D_p)$ para o sistema com dois componentes em paralelo e tempos de vida exponenciais é muito semelhante aquele apresentado para o sistema com dois componentes em série, pelo que, a interpretação que fizemos nessa situação também é válida para este caso que estamos a estudar.

5.1.4 – APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

- O tempo de vida de um sistema, interpretado como sendo um só componente com tempo de vida exponencial, no qual introduzimos em paralelo um ou mais componentes com a mesma distribuição exponencial do tempo de vida, não continua a ser exponencial.
- Tal como aconteceu com o sistema constituído por dois componentes em série, verificamos também que à medida que k aumenta (diminui), as aproximações P_p^* e P_p^{**} aumentam (diminuem) também.

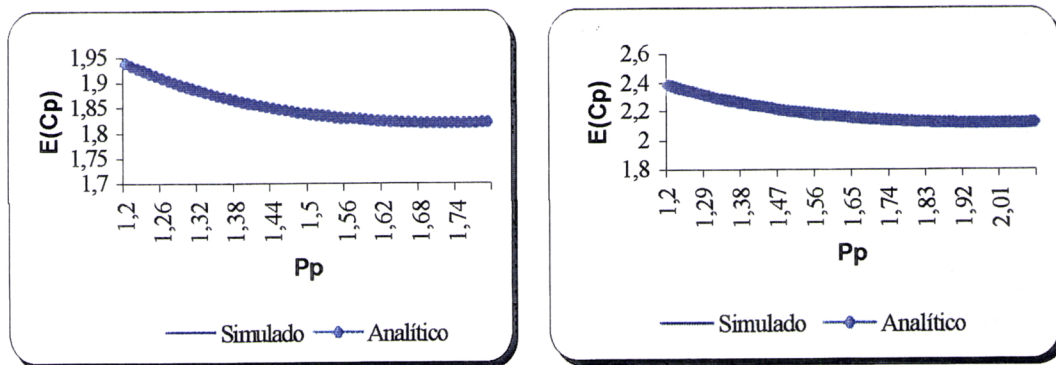
- À medida que o tempo médio de vida do sistema constituído por dois componentes em paralelo se aproxima do tempo médio de vida do “sistema” constituído por um só componente, tanto o valor exacto do período de inspecção P_p , como os valores das duas aproximações P_p^* e P_p^{**} diminuem.

- Tal como era esperado, pelo facto de introduzirmos um novo componente em paralelo no sistema, aumentarmos a fiabilidade deste e o valor do período de inspecção P_p aumenta também.

Notemos que, tal não acontece em sistemas com componentes em série, onde os períodos podem aumentar ou diminuir, conforme mostrámos no parágrafo anterior.

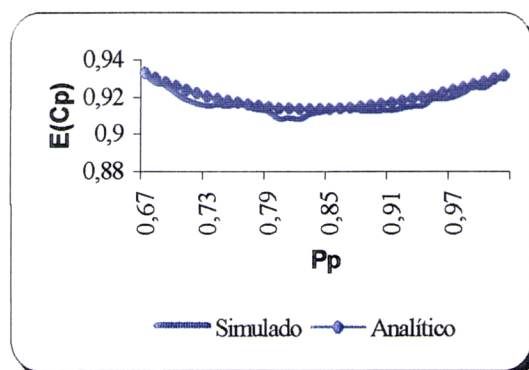
- Podemos então verificar através dos gráficos seguintes que, os valores por nós encontrados através da simulação para o período de inspecção P_p , que minimizam o custo total médio por ciclo $E(C_p)$, estão bastante próximos dos valores analíticos.

Exactamente como nos casos anteriores, através da simulação de 20 000 números aleatórios, obtivemos alguns resultados que vamos poder comparar com os obtidos analiticamente. Ver figuras 5.6 e 5.7.



Figuras 5.6 e 5.7– Custo total médio por ciclo $E(C_p)$ em função do período de inspecção P_p , com $\lambda = \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0.1$ para $k = 1.5$ e $k = 2$, $C_1 = 0.1$ e $C_2 = 1$, no caso em que a distribuição é exponencial.

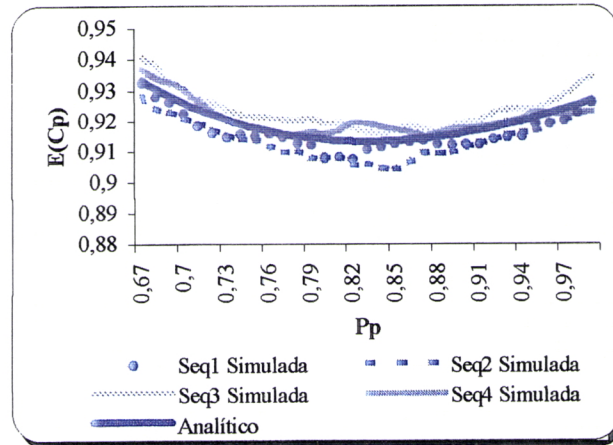
- Queremos também referenciar que à medida que k aumenta (diminui) melhores (piores) são os resultados obtidos por simulação, já que, a curva do custo total médio por ciclo $E(C_p)$ se aproxima mais (menos) da mesma obtida analiticamente.
- Gostaríamos ainda de destacar uma situação que nos parece interessante. Através da figura 5.8 verificamos que a curva obtida por simulação para o custo total médio por ciclo $E(C_p)$, quando $\lambda = \lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0.5$, para $k = 1.5$ não está muito afastada da obtida analiticamente, embora não esteja tão próxima como nos exemplos anteriores.



Figuras 5.8 – Custo total médio por ciclo $E(C_p)$ em função do período de inspeção P_p , com $\lambda = \lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0.5$ para $k=1.5$, $C_1=0.1$ e $C_2=1$, no caso da distribuição ser exponencial.

Pelo facto de estarmos a trabalhar com amostras, gerámos três novas sequências de 20 000 números aleatórios e os resultados estão esquematizados na figura 5.9 que apresentamos de seguida.

A nossa intenção foi apenas mostrarmos que era possível encontrar uma curva do custo total médio por ciclo $E(C_p)$ que se ajustasse melhor à curva analítica, como por exemplo se verifica para a sequência 4.



Figuras 5.9 - Custo total médio por ciclo $E(C_p)$ em função do período de inspeção P_p , com $\lambda = \lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0.5$ para $k=1.5$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 1$, para três novas sequências, no caso da distribuição ser exponencial.

- Queremos ainda salientar o facto de que à medida que nos aproximamos do tempo médio de vida do “sistema” composto por um só componente, os valores da simulação por nós obtida são mais ajustados à realidade, pois os valores dos coeficientes r^2 , para o tempo médio de detecção $E(D_p)$ em função de $P_p/2$ são melhores e a curva do custo total médio por ciclo $E(C_p)$ está mais próxima da curva obtida analiticamente.
- Para finalizarmos este capítulo, vamos analisar as aproximações que considerámos para o período de inspeção. Tal como já havíamos feito para o sistema com dois componentes em série, vamos primeiramente comparar os valores de $E(D_p)_0$ com $P_{p0}/2$, para que possamos analisar se a aproximação $E(D)=P/2$ é ou não satisfatória. Nos quadros que se seguem apresentamos os valores de Q_{2p} e Q_{3p} definidos como em (4.28) e (4.29), mas obviamente para o sistema com dois componentes em paralelo.

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL	k=1.2		k=1.5		k=2		k=2.4	
	r_p'	Q_{2p}	r_p'	Q_{2p}	r_p'	Q_{2p}	r_p'	Q_{2p}
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=3$	0.11	-1.52	0.14	-1.76	0.18	-1.91	0.22	-2.46
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=1$	0.08	-0.09	0.1	-0.80	0.133	-1.45	0.16	-0.87
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.5$	0.05	-0.01	0.06	-0.17	0.086	-0.21	0.10	-0.65
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.1$	0.01	-0.29	0.015	-0.17	0.019	-0.39	0.023	-0.77
$\lambda=\lambda_1=2 ; \lambda_2=4$	0.21	-1.23	0.257	-1.47	0.343	-2.41	0.41	-3.56
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=2$	0.16	-1.32	0.2	-0.39	0.266	-1.79	0.32	-2.09
$\lambda=\lambda_1=3 ; \lambda_2=4$	0.27	-1.13	0.34	-2.31	0.45	-3.62	0.55	-3.93
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=3$	0.24	-1.46	0.3	-1.94	0.4	-2.91	0.48	-3.25

Quadro 5.9 – Valores de Q_{2p} para os vários valores de k.

- Podemos concluir que, $E(D_p)$ volta a ser sempre superior a $P_p/2$, e esta diferença é tanto maior quanto maior for o valor de k e de r_p' . No entanto, podemos afirmar que esta aproximação é satisfatória, pois os valores de Q_{2p} não são muito elevados.

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL	k=1.2		k=1.5		k=2		k=2.4	
	r_p'	Q_{3p}	r_p'	Q_{3p}	r_p'	Q_{3p}	r_p'	Q_{3p}
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=3$	0.11	2.00	0.14	3.65	0.18	4.49	0.22	5.88
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=1$	0.08	0	0.1	1.64	0.133	1.92	0.16	2.41
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.5$	0.05	1.13	0.06	0.80	0.086	0.63	0.10	1.92
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.1$	0.01	0.40	0.015	0.57	0.019	0.96	0.023	1.38
$\lambda=\lambda_1=2 ; \lambda_2=4$	0.21	3.93	0.257	4.58	0.343	7.34	0.41	8.16
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=2$	0.16	1.02	0.2	3.12	0.266	3.34	0.32	5.26
$\lambda=\lambda_1=3 ; \lambda_2=4$	0.27	4.88	0.34	6.92	0.45	7.63	0.55	9.52
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=3$	0.24	4.97	0.3	4.68	0.4	6.48	0.48	8.89

Quadro 5.10 – Valores de Q_{3p} para os vários valores de k.

- Em relação ao valor de P_{p0}^* , verificamos que é sempre superior ao valor de P_{p0} e os valores estão mais (menos) afastados de P_{p0} , quanto maior (menor) é o valor de k .

Sempre que $\lambda=2$, $\lambda=3$ e $\lambda=\lambda_1=1;\lambda_2=3$, os valores de P_{p0}^* afastam-se consideravelmente de P_{p0} , pelo que, para estes casos, consideramos que (5.17) é uma aproximação má. Não estamos a contemplar o caso em que $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 2$, com $k=1.2$ e os restantes casos, pois para estes podemos dizer que esta aproximação é bastante satisfatória.

- Consideremos agora as expressões (5.17), (5.18) e (4.30), para que possamos analisar o que acontece em termos de custos. Assim, vamos considerara para diferentes casos, o grau de precisão de $E(C_p)_1^*$ e $E(C_p)_2^*$, utilizando, naturalmente, (4.31) e (4.32).
- Através do quadro 5.11, verificamos que os valores de $E(C_p)_1^*$ afastam-se bastante em termos relativos de $E(C_p)_0$, para os valores de k que estudamos, o que nem sempre se verifica para $E(C_p)_2^*$.

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL	k=1.2		k=1.5		k=2		k=2.4	
	Q _{5p}	Q _{6p}	Q _{5p}	Q _{6p}	Q _{5p}	Q _{6p}	Q _{5p}	Q _{6p}
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=3$	-45.03	-0.95	-37.60	-1.91	-25.72	-2.86	-17.32	-3.82
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=1$	-54.21	0	-48.13	-0.69	-38.32	-0.70	-30.99	-1.41
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.5$	-64.59	-0.44	-59.78	-0.44	-52.46	-0.44	-47.30	-0.89
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.1$	-83.90	-0.10	-81.90	-0.10	-78.94	-0.20	-76.80	-0.23
$\lambda=\lambda_1=2 ; \lambda_2=4$	-19.85	-1.82	-7.45	-3.63	10.59	-5.49	25.43	-7.29
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=2$	-30.50	0	-20.75	-1.43	-3.96	-2.88	7.55	-4.35
$\lambda=\lambda_1=3 ; \lambda_2=4$	-3.69	-4.85	10.86	-4.95	36.30	-7.45	54.33	-9.94
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=3$	-11.66	-4.27	3.22	-4.33	25.29	-6.56	40.78	-8.79

Quadro 5.11 – Valores de Q_{5p} e Q_{6p} para os vários valores de k .

- Para reforçar o que já havíamos dito, quando $\lambda=2$ e $\lambda=3$, (excepto $\lambda=2$ com $k=1.2$ e $k=1.5$), verificamos que os valores de $E(C_p)_2^*$ também se afastam consideravelmente de $E(C_p)_0$, situações em que a aproximação (5.17) é má. Em relação aos outros casos em estudo, podemos afirmar que a aproximação é bastante satisfatória, uma vez que, os valores de Q_{6p} estão próximos de zero, chegando-se mesmo a atingir o valor zero. Veja-se, por exemplo, $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=2$, para $k=1.2$.
- Desta forma, podemos desde já concluir que esta aproximação do custo total médio por ciclo é quase óptima no que se refere aos custos.
- Centremo-nos agora, na aproximação (5.18). Para tal, tomemos em atenção (4.35), (4.36) e o próximo quadro.

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL	k=1.2		k=1.5		k=2		k=2.4	
	Q_{3p}^{**}	Q_{6p}^{**}	Q_{3p}^{**}	Q_{6p}^{**}	Q_{3p}^{**}	Q_{6p}^{**}	Q_{3p}^{**}	Q_{6p}^{**}
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=3$	-6.00	5.10	-5.45	3.01	-4.76	3.02	-4.41	3.05
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=1$	-6.67	6.00	-6.06	2.89	-6.58	3.67	-6.02	3.69
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.5$	-4.05	3.74	-4.82	1.81	-5.21	2.28	-4.81	2.30
$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.1$	-1.94	1.96	-2.31	0.40	-2.01	0.40	-2.30	0.58
$\lambda=\lambda_1=2 ; \lambda_2=4$	-8.33	6.96	-5.00	3.86	-6.67	5.98	-6.12	6.02
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=2$	-9.52	8.25	-6.52	4.51	-7.55	6.16	-7.02	6.26
$\lambda=\lambda_1=3 ; \lambda_2=4$	-6.45	5.43	-5.88	5.33	-7.69	8.26	-7.14	8.38
$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=3$	-6.06	5.03	-5.41	4.62	-7.14	7.19	-6.67	7.32

Quadro 5.12 – Valores de Q_{3p}^{**} e Q_{6p}^{**} para os vários valores de k.

- Podemos afirmar que para $\lambda=1$, a aproximação (5.18) é pior que a (5.17), pois os valores de P_{p0}^{**} afastam-se mais de P_{p0} , para os diferentes valores de k.

O mesmo se verifica em relação aos casos, em que consideramos $\lambda=2$ e $\lambda=3$, pois os valores de Q_{3p} , são de uma forma geral (pois não o podemos confirmar para todos os casos) inferiores a Q_{3p}^{**} .

- Verificamos também que, quando $\lambda=1$ e $\lambda=2$, $E(C_p)_2^{**}$ é pior aproximação que $E(C_p)_2^*$, o mesmo não acontecendo apenas para $\lambda=3$ e $k=2.4$.
- Em suma, podemos concluir, em especial que, para $\lambda=1$, $E(D_p)$ é aproximadamente igual a metade do período de inspeção, pelo que a aproximação P^* é preferível a P^{**} . Quando $\lambda=2$ ou $\lambda=3$, podemos concluir que a aproximação P^* também é de um modo geral (pois existem algumas excepções. Veja-se, por exemplo $\lambda=\lambda_1=2$; $\lambda_2=4$ e $k=2.4$) preferível a P^{**} .

6. SISTEMAS COM INSPECÇÕES NÃO PERIÓDICAS

Conforme referimos na introdução deste trabalho as políticas periódicas de inspecção são muito cómodas do ponto de vista da sua aplicação prática. No entanto, na maioria dos casos não são estas políticas periódicas de inspecção aquelas que nos conduzem ao custo mínimo da função objectivo que pretendemos estudar, conforme teremos oportunidade de constatar no presente capítulo.

Perante tal facto, justificamos plenamente o estudo das políticas não periódicas de inspecção.

6.1 – O MODELO. SOLUÇÃO ÓPTIMA

O modelo a que nos referimos (modelo de Barlow *et al*) assenta nas hipóteses fundamentais, $[H_1-H_6]$ que referimos no ponto 3.1.1..

O problema que se coloca é determinarmos uma sequência de instantes de inspecção t_k , $k = 1,2,3,\dots$, com $t_0 = 0$, de tal modo que o custo total médio por ciclo seja mínimo. Esta sequência existe desde que a distribuição de tempo de vida do sistema tenha média finita e função de distribuição contínua.

Para que possamos encontrar a solução óptima, consideremos no modelo as variáveis seguintes, que também já tínhamos referenciado, mas que reproduzimos:

T - Tempo de vida (ou de bom funcionamento) do sistema;

D - Tempo de detecção da falha do sistema (intervalo de tempo entre o momento da falha e o momento da sua detecção);

N - Número de inspecções do sistema, incluindo aquela em que a falha é detectada;

C - Custo total, resultante do custo das inspecções e do custo de mau funcionamento não detectado.

Consideremos ainda o custo fixo C_1 de cada inspecção e o custo fixo C_2 por unidade de tempo de mau funcionamento do sistema.

Usando a terminologia simples e intuitiva de “custos”, podemos então dizer que o custo total médio por ciclo $E(C)$ é dado por,

$$E(C) = C_1 E(N) + C_2 E(D) , \quad (6.1)$$

onde

$$E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) dt \quad (6.2)$$

$$E(D) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t) f(t) dt \quad (6.3)$$

sendo t_k , com $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, e $t_0 = 0$, os instantes de inspecção e $f(t)$, com $f(t) \geq 0$, $t \geq 0$, a função densidade de probabilidade do tempo de vida do sistema.

De facto, basta termos em conta que se o sistema falha num instante t do intervalo $(t_k, t_{k+1}]$, pelo que o número de inspecções é $n = k+1$ e o tempo de detecção é $d = t_{k+1} - t$.

A partir de (6.2) podemos obter facilmente, tal como já referimos anteriormente a propósito das inspecções periódicas, a seguinte expressão extremamente simples,

$$E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} R(t_k) \quad (6.4)$$

onde, $R(t) = 1 - F(t)$ e $t_0 = 0$, como sabemos.

Esta expressão que é formalmente idêntica à expressão (3.9) obtida para as inspecções periódicas, com $t_k = kP$, sendo P o período de inspecção, admite também a

mesma interpretação geométrica simples e sugestiva: $E(N)$ é a soma das ordenadas da curva $R(t)$ considerada na origem e nos instantes de inspeção t_k , com $k = 1, 2, 3, \dots$

O problema que então surge, é o da determinação do primeiro instante de inspeção t_1 , já que, supomos $t_0 = 0$. Veja-se por exemplo Hunter (1964) apresentou um método iterativo conducente à obtenção (aproximada) desse valor t_1 , em termos computacionais, mas que foi considerado pouco atraente e até difícil por diversos investigadores.

Esta é uma das razões pela qual as inspeções não periódicas aproximadas e as inspeções periódicas têm despertado e merecido tanta atenção por parte dos investigadores.

Antes de finalizarmos este ponto, gostaríamos ainda de referenciar que no caso em que o tempo de vida é exponencial, a solução óptima deste modelo consiste em inspecionarmos o sistema periodicamente, onde o período de inspeção P satisfaz a equação (3.28).

6.2 – SOLUÇÃO APROXIMADA (POLÍTICA DE RISCO CONSTANTE)

Neste ponto, vamos referenciar algumas soluções aproximadas que foram propostas na literatura. Estamos-nos a referir aos trabalhos de Keller (1974), Nakagawa e Yassui (1980), Munford (1981) e Keller (1982).

Seja então $h(t) = f(t) / R(t)$ a taxa de risco do sistema e $H(t)$, definida por,

$$H(t) = \int_0^t h(t) dt \quad (6.5)$$

a respectiva taxa cumulativa de risco, como sabemos.

Vamos definir como política (aproximada) de risco constante a solução aproximada para o modelo e aquela política cujos instantes de inspeção t_k , com $k = 1, 2, 3, \dots$, e com $t_0=0$, verificam a seguinte relação,

$$H(t_k) = k\Delta H, k = 1,2,3,\dots \quad (6.6)$$

A partir desta expressão, podemos escrever,

$$H(t_{k+1}) - H(t_k) = \Delta H \quad (6.7)$$

e também conjuntamente com (6.5) que

$$\begin{aligned} H(t_k) &= -\ln R(t_k) \Leftrightarrow & (6.8) \\ \Leftrightarrow k\Delta H &= -\ln R(t_k) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{k\Delta H} &= (R(t_k))^{-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow R(t_k) &= \frac{1}{e^{k\Delta H}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow R(t_k) &= e^{-k\Delta H} & (6.9) \end{aligned}$$

Consequentemente,

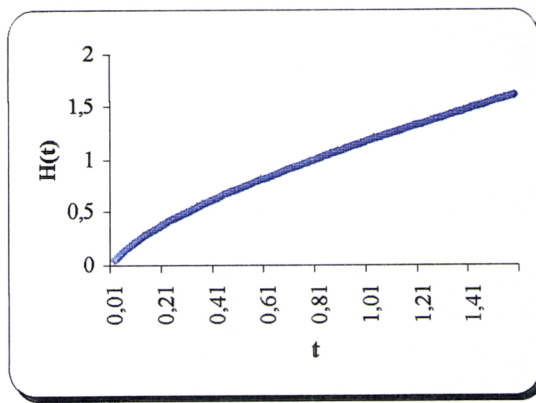
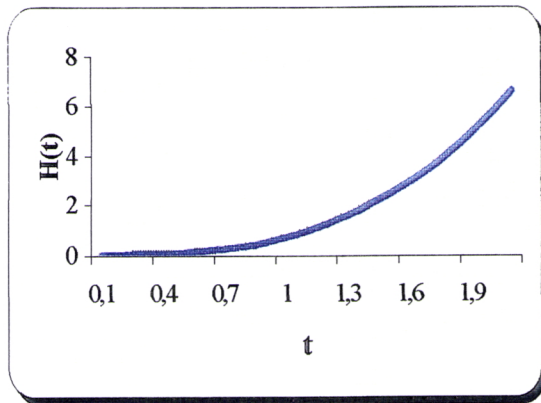
$$t_k = R^{-1}(e^{-k\Delta H}) \quad (6.10)$$

ou por (2.2),

$$t_k = F^{-1}(1 - e^{-k\Delta H}) \quad (6.11)$$

Esta política de inspeção admite (Rodrigues Dias (1987a)) uma interpretação muito simples: os instantes de inspeção t_k são tais que a taxa cumulativa de risco entre duas quaisquer inspeções consecutivas é constante.

Nas figuras 6.1 e 6.2 representamos geometricamente esta política de inspeção correspondente a uma taxa de risco $h(t)$ crescente ($\beta=3$) e também a correspondente política para uma taxa de risco $h(t)$ decrescente ($\beta=0.7$).



Figuras 6.1 e 6.2 – Políticas de inspeção correspondentes a uma taxa de risco crescente e decrescente, respectivamente.

Estas duas figuras mostram-nos intuitivamente que, se a taxa de risco $h(t)$ de um sistema é crescente (decrescente), então de acordo com esta política de inspeção, os intervalos de tempo entre inspeções consecutivas são decrescentes (crescentes).

Finalmente, se a taxa de risco $h(t)$ de um sistema é constante (caso da distribuição exponencial), estamos perante uma inspeção periódica.

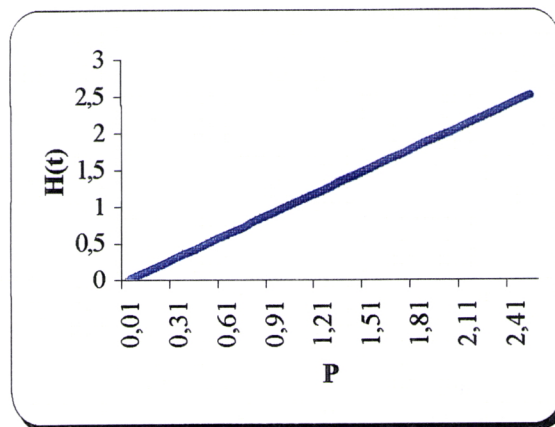


Figura 6.3 – Política de inspeção correspondente a uma taxa de risco constante.

Para a distribuição de Weibull, por (2.2) e (2.25), com $\gamma = 0$, sabemos que a função de distribuição $F(t)$, é dada por,

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^\beta} \quad (6.12)$$

e para este modelo,

$$F(t_k) = 1 - e^{-k\Delta H} \quad (6.13)$$

Assim, se fizermos $F(t) = F(t_k)$, obtemos

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\left(\frac{t_k}{\delta}\right)^\beta} &= 1 - e^{-k\Delta H} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{t_k^\beta}{\delta^\beta} &= -k\Delta H \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t_k^\beta &= k\Delta H \delta^\beta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t_k &= \delta(k\Delta H)^{1/\beta}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

o que nos permite calcular os instantes de inspeção t_k . Se considerarmos $\beta=1$, calculamos os instantes de inspeção t_k para a distribuição exponencial, como é evidente.

Por (6.14) e (2.22), novamente com $\gamma = 0$,

$$f(t_k) = \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{\delta(k\Delta H)^{1/\beta}}{\delta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{\delta(k\Delta H)^{1/\beta}}{\delta}\right)^\beta} \quad (6.15)$$

$$= \frac{\beta}{\delta} (k\Delta H)^{\frac{\beta-1}{\beta}} e^{-k\Delta H} \quad (6.16)$$

6.2.1 – NÚMERO MÉDIO DE INSPECÇÕES

Debrucemo-nos agora sobre o número médio de inspecções $E(N)$ na política de risco constante. A partir da definição, podemos escrever,

$$E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} R(t_k) \quad (6.17)$$

onde, o número de inspecções N inclui aquela em que a falha é detectada e em que os instantes t_k obedecem à condição (6.14).

Ora, tomando em consideração a relação (6.9), podemos escrever, introduzindo o índice 1 em $E(N)$,

$$E(N)_1 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\Delta H} = \frac{1}{1 - e^{-\Delta H}} \quad (6.18)$$

Notemos que, o número médio de inspecções $E(N)_1$ admite também a mesma interpretação geométrica, em termos formais, que apresentámos aquando das inspecções periódicas: soma das ordenadas da “função de fiabilidade” de $H(t)$, tomadas na origem e nos “instantes de inspecção” $k\Delta H$, com $k = 1, 2, 3, \dots$

Gostaríamos também de referir, já que é um aspecto particularmente interessante e curioso, que a taxa cumulativa de risco $H(t)$, vista como variável aleatória tem distribuição exponencial, com média e variância unitárias (veja-se Rodrigues Dias (1986)).

6.2.2 – TEMPO MÉDIO DE DETECÇÃO

Analisemos agora o que se passa com o tempo médio de detecção da falha $E(D)$ de acordo com a política de risco constante.

Recordando a expressão (6.9),

$$E(D) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k e^{-k\Delta H} (e^{\Delta H} - 1) - E(T) \quad (6.19)$$

com t_k dado por (6.14).

Vamos agora definir um “tempo de detecção” D^* em termos da variável H . Assim, seja t um valor particular de T a que corresponde um valor h de H . Se a detecção da falha é feita em t_k , então temos,

$$d = t_k - t, \quad t_k \geq t \quad (6.20)$$

$$d^* = k\Delta H - h, \quad k\Delta H \geq h \quad (6.21)$$

Desta forma, a partir da expressão anterior podemos obter,

$$E(D)_\lambda^* = \frac{\Delta H - 1 + e^{-\Delta H}}{1 - e^{-\Delta H}} = \quad (6.22)$$

$$= \Delta H E(N)_\lambda - E(H) \quad (6.23)$$

Verificamos então que esta expressão é formalmente equivalente àquela que obtivemos anteriormente em (3.12), para as inspecções periódicas.

Se desenvolvermos $e^{-\Delta H}$, na expressão (6.22), obtemos

$$E(D^*)_\lambda = \frac{\Delta H}{2}, \quad (6.24)$$

que também é formalmente idêntica a uma aproximação que fizemos em (3.16), para as inspecções periódicas.

Por outro lado, tendo em conta as expressões (6.23) e (6.24), podemos escrever

$$\frac{\Delta H}{2} = \Delta H E(N)_\lambda - E(H) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta H = \frac{2E(H)}{2E(N)_1 - 1},$$

pelo que,

$$\Delta H \cong \frac{E(H)}{E(N)_1 - 1/2}, \quad (6.25)$$

que como é evidente, é também ela formalmente idêntica à expressão (3.35).

Por fim, seguindo o mesmo processo usado por Nakagawa e Yassui (1979) para obtermos (3.33), também nesta política de risco constante é possível obtermos uma aproximação formalmente idêntica para ΔH :

$$\Delta H = \sqrt{2rE(H)} = \sqrt{2r} \quad (6.26)$$

Em jeito de síntese final do que apresentámos até agora, permita-se-nos realçar a correspondência que nos foi possível estabelecer entre resultados referentes à política de inspeção periódica e a uma política não periódica de risco constante. Neste contexto, poder-se-ia considerar esta política não periódica como sendo uma política periódica em termos de taxa cumulativa de risco $H(t)$.

Claro que, tem toda a viabilidade querermos comparar os valores dos custos totais mínimos relativos à política de risco constante e à política periódica de inspeção em diferentes situações.

Para isso, vamos começar por recordar que a condição de mínimo do custo total médio por ciclo $E(C)$ é dada por,

$$rE'(N) + E'(D) = 0, \quad (6.27)$$

onde $E(N)$ e $E(D)$ são dados por (6.17) e (6.19), respectivamente.

Tendo em conta estas expressões, verificamos que,

$$E'(N) = \frac{-e^{-\Delta H}}{(1 - e^{-\Delta H})^2} \quad (6.28)$$

$$E'(D) = e^{\Delta H} \sum_{k=1}^{\infty} t_k e^{-k\Delta H} + (e^{\Delta H} - 1) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{dt_k}{d\Delta H} e^{-k\Delta H} - kt_k e^{-k\Delta H} \right) \quad (6.29)$$

Notemos que t_k é dado por (6.14) e conseqüentemente,

$$\frac{dt_k}{d\Delta H} = \frac{ke^{-k\Delta H}}{f(t_k)} \quad (6.30)$$

No caso da distribuição de Weibull, que é o caso que vamos estudar, t_k e $f(t_k)$ são dados por (6.14) e (6.16), conforme já tínhamos referido.

Depois de termos apresentado as expressões analíticas para as variáveis em que assenta o modelo, podemos determinar e analisar os valores, em percentagem, do cociente,

$$R_1 = [E(C)_2 - E(C)_1] / E(C)_1 \times 100\%, \quad (6.31)$$

onde $E(C)_1$ e $E(C)_2$ são, respectivamente, os custos totais médios mínimos relativos à política de risco constante e à política periódica de inspeção.

Deste modo, R_1 permite-nos comparar, em termos de custos as duas políticas anteriores.

No quadro 6.1, encontram-se presentes os valores de R_1 , para diversos parâmetros de forma da distribuição de Weibull.

DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL	R_1
0,7	4,18
1	0
2	10,3
3	25,67
5	53,18

Quadro 6.1 – Valores de R_1 , para a distribuição de Weibull, com $C_1 = 0.1$ e $C_2 = 1$.

A análise deste quadro permite-nos tirar as seguintes conclusões:

- No caso da distribuição de Weibull, quanto mais a taxa de risco se afasta da taxa de risco constante, mais se justifica, em termos de custos, a inspeção não periódica de sistemas;
- No nosso caso, como o cociente $r/E(T) = 0.1$, que é um valor relativamente elevado, notamos que, os valores de R_1 também são elevados, pelo que, se justificam as inspeções não periódicas.

Gostaríamos ainda de referir que da mesma forma que já aconteceu em capítulos anteriores, também obtivemos os valores do custo total médio mínimo relativo à política de risco constante por simulação de 20 000 números aleatórios e os resultados que obtivemos são muito próximos dos obtidos analiticamente, conforme se pode ver no exemplo seguinte.

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL			
$r/E(T) = 0.01$		$r/E(T) = 0.1$	
Analítico	Simulado	Analítico	Simulado
0.148178	0.14803616	0.516241954	0.516203812

Quadro 6.2 – Valores de $E(C)_1$ obtidos por simulação e analiticamente, para a distribuição exponencial.

Antes de finalizarmos, vamos apresentar um quadro onde pudemos mais uma vez comparar os valores que obtivemos analiticamente e por simulação de 20 000 números aleatórios, para o caso da distribuição exponencial.

$C_1 = 0.1 ; C_2 = 1$				
ΔH	E(N)		E(D)	
	Analítico	Simulado	Analítico	Simulado
0.39	3.096520474	3.08879566	0.207642985	0.207787116
0.4	3.033244782	3.02819899	0.21318062	0.212816116
0.41	2.973095715	2.961951902	0.218969243	0.218336616
0.42	2.915849911	2.906154692	0.224656963	0.224521116
0.43	2.861304786	2.857669622	0.230361058	0.229804616
0.44	2.809276171	2.798860107	0.236081515	0.234994116
0.45	2.759596267	2.75745	0.24181832	0.241648616

Quadro 6.3 – Comparação entre os valores de E(N) e E(D) obtidos por simulação e analiticamente, no caso da Exp(1).

Queremos desde já referir que os valores analíticos que obtivemos para cada ΔH do número médio de inspecções E(N) e do tempo médio de detecção E(D) são exactamente os mesmos que obtivemos no parágrafo das inspecções periódicas correspondentes a P, como é evidente.

Podemos afirmar que a diferença entre os valores obtidos por simulação e analiticamente (os erros relativos), para o número médio de inspecções E(N), varia entre -0.4% e -0.1%.

Em relação ao tempo médio de detecção E(D), verificamos que o erro relativo existente entre os valores obtidos por simulação e analiticamente varia entre -0.5% e 0.1%.

Uma vez que, os valores obtidos por simulação estão bastante próximos dos obtidos analiticamente, reforçamos o facto do método de simulação que construímos ser de um grau de precisão elevado, conforme já tínhamos verificado no ponto 3.2.3..

Em termos de síntese global, poderemos dizer que as inspecções periódicas são muito cómodas do ponto de vista prático, mas que, em termos de custos podem ser altamente desaconselháveis, conforme revelam os valores de R_1 .

6.2.3 - SOLUÇÕES APROXIMADAS PARA A POLÍTICA DE RISCO CONSTANTE

No capítulo sobre inspecções periódicas, em (3.33) analisámos a validade, em termos de custos, de uma solução aproximada obtida para o período de inspecção por Nakagawa e Yassui (1979),

$$P_0^* = \sqrt{2rE(T)} \quad (6.32)$$

No ponto anterior, estabelecemos uma correspondência entre resultados da política de risco constante e da política periódica de inspecção. Em particular, consideramos a aproximação para o acréscimo ΔH da taxa cumulativa de risco dada por,

$$\Delta H^* = \sqrt{2rE(H)} = \sqrt{2r} \quad (6.33)$$

Vejamos agora a validade desta aproximação em termos de custos. Designemos então por $E(C)_1$, o custo total médio mínimo correspondente à política de risco constante (para um valor optimizante ΔH) e por $E(C)_1^*$, o custo total médio mínimo referente ao valor aproximado ΔH^* .

Para determinarmos e pudermos avaliar os erros relativos desta aproximação, consideremos o cociente,

$$R_2 = \left[E(C)_1^* - E(C)_1 \right] / E(C)_1 \times 100\% \quad (6.34)$$

e o próximo quadro, onde apresentamos, novamente, vários parâmetros da distribuição de Weibull.

E(T)=1	
DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL	R ₂
0,7	2,68
1	0,3
2	0,87
3	4,36
5	13,44

Quadro 6.4 – Valores de R₂, para as distribuição de Weibull, com C₁ = 0.1 e C₂ = 1.

Através deste quadro, podemos concluir que:

- Para a distribuição de Weibull em que a taxa de risco não se afasta de uma forma muito acentuada da taxa de risco constante (seja decrescente ou crescente), verificamos que a aproximação referida pode ser considerada como uma boa aproximação.
- No caso em que na distribuição de Weibull a taxa de risco é fortemente crescente, verificamos que os erros relativos da aproximação são acentuados, pelo que, nestas situações consideramos a aproximação (6.33) má.

Para finalizarmos, podemos afirmar que a aproximação ΔH^* pode ser considerada, em certos casos como uma boa aproximação e conseguimos bastante facilmente a sua obtenção.

No capítulo sobre inspeções periódicas, depois de termos analisado a validade da aproximação P_0^* dada por (3.33), obtivemos uma nova aproximação para o período de inspeção dada por (3.53).

Vejamos agora aqui a validade de uma aproximação correspondente em termos de ΔH , que vamos designar por ΔH^{**} e que é dada por,

$$\Delta H^{**} = \frac{\sqrt{2r}}{1 + 0.234\sqrt{r}}, \text{ com } r' = r/E(H) = r \quad (6.35)$$

Da mesma forma que fizemos anteriormente, designemos por $E(C)_1^{**}$, o custo total médio por ciclo correspondente à aproximação ΔH^{**} e por R_3 o cociente,

$$R_3 = \left[E(C)_1^{**} - E(C)_1 \right] / E(C)_1 \times 100\% \quad (6.36)$$

No quadro seguinte, vamos apresentar os respectivos valores de R_3 , correspondentes a diversos valores dos parâmetros de forma da distribuição de Weibull.

E(T)=1	
DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL	R_3
0,7	0
1	0
2	1,9
3	6,34
5	16,77

Quadro 6.5 – Valores de R_3 , para a distribuição de Weibull, com $C_1 = 0.1$ e $C_2 = 1$.

Da análise do quadro anterior, podemos concluir que:

- No caso da distribuição de Weibull em que a taxa de risco não se afasta muito da taxa de risco constante, esta aproximação é ótima, sendo portanto melhor do que a anterior.

- No caso em que na distribuição de Weibull a taxa de risco é fortemente crescente, verificamos que esta aproximação continua a não ser uma boa aproximação, obtendo-se resultados piores que para a aproximação (6.33).

6.3 – SISTEMA COM DOIS COMPONENTES EM SÉRIE

Tomando em consideração tudo o que referenciamos anteriormente, vamos agora testar e comparar os valores dos custos totais mínimos relativos à política de risco constante e à política periódica de inspecção para diferentes situações, para um sistema com dois componentes em série e tempos de vida exponenciais e Weibull.

6.3.1 – INSPECÇÕES NÃO PERIÓDICAS

Para atingirmos o objectivo a que nos propomos, temos de começar por calcular os instantes de inspecção t_k .

Da mesma forma que fizemos para o sistema composto por um único componente, sabemos que a função de distribuição de probabilidade para um sistema com dois componentes em série e tempos de vida exponenciais é dada por,

$$F_s(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \quad (6.37)$$

e para este modelo, $F_s(t_k)$ é dada por (6.13), como vimos anteriormente.

Se igualarmos as expressões, obtemos,

$$\begin{aligned} 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t_k} &= 1 - e^{-k\Delta H} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -(\lambda_1 + \lambda_2)t_k &= -k\Delta H \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t_k &= \frac{k\Delta H}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Se o sistema tiver dois componentes em série com tempos de vida de weibull, o procedimento é o mesmo que o anterior, tendo em conta que a função de distribuição de probabilidade para este sistema é dada por,

$$F_s(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\delta_1}\right)^{\beta_1}} e^{-\left(\frac{t}{\delta_2}\right)^{\beta_2}} \quad (6.39)$$

Como vamos considerar apenas o caso em que o sistema tem os dois componentes com parâmetros de forma iguais, (6.39) reduz-se a,

$$F_s(t) = 1 - e^{-2\left(\frac{t}{\delta}\right)^{\beta}} \quad (6.40)$$

Assim, se procedermos exactamente como nos casos anteriores, também conseguimos identificar os instantes de inspecção para este sistema. Igualando as expressões (6.39) e (6.13), temos,

$$\begin{aligned} 1 - e^{-2\left(\frac{t_k}{\delta}\right)^{\beta}} &= 1 - e^{-k\Delta H} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t_k^{\beta} &= \frac{k\Delta H}{2} \delta^{\beta} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t_k &= \left[0.5k\Delta H\delta^{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}}, \end{aligned} \quad (6.41)$$

Depois de identificarmos os instantes de inspecção t_k , para o sistema com dois componentes em série e tempos de vida exponenciais e Weibull, estamos em condições de calcular o custo total médio mínimo relativo à política de risco constante.

Para sabermos qual é o valor de ΔH que corresponde ao custo total médio mínimo, basta considerarmos $E'(N)$ e $E'(D)$, como em (6.28) e (6.29).

No entanto não nos podemos esquecer que em relação à fórmula (6.29), para o sistema com dois componentes em série e tempos de vida exponenciais t_k é dado por (6.38) e a função densidade de probabilidade é,

$$f_s(t_k) = (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-k\Delta H} \tag{6.42}$$

Em relação ao caso do sistema com dois componentes em série e tempos de vida de Weibull, t_k é dado por (6.41) e

$$\begin{aligned} f_s(t_k) &= 2 \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{\delta(0.5k\Delta H)^{1/\beta}}{\delta} \right)^{\beta-1} e^{-2 \left(\frac{\delta(0.5k\Delta H)^{1/\beta}}{\delta} \right)^\beta} = \\ &= 2 \frac{\beta}{\delta} (0.5k\Delta H)^{\frac{\beta-1}{\beta}} e^{-k\Delta H} \end{aligned} \tag{6.43}$$

Finalmente para pudermos comparar os valores dos custos totais médios mínimos relativos à política de risco constante e à política de inspeção, voltamos a calcular os valores do cociente R_1 enunciado como em (6.31) e registamo-los no quadro 6.6.

Queremos referir que estes valores foram encontrados analiticamente, através das fórmulas (6.1), (6.17) e (6.19), como era de esperar.

R_1		$k=1.5$	$k=2$
Distribuição Exponencial	$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=1$	0	0
	$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.5$	0	0
Distribuição de Weibull	$\beta=\beta_1=\beta_2=0.7$	2.20	2.08
	$\beta=\beta_1=\beta_2=2$	10.17	9.81
	$\beta=\beta_1=\beta_2=3$	25.85	25.42
	$\beta=\beta_1=\beta_2=5$	-2.09	-5.16

Quadro 6.6 – Valores de R_1 , para as distribuições exponencial e de Weibull, com $C_1 = 0.1, C_2 = 1, k = 1.5$ e $k = 2$.

A análise deste quadro, permite-nos concluir que, para ambas as distribuições e tal como já aconteceu antes para o “sistema” com um único componente, quanto mais a taxa de risco se afasta da taxa de risco constante, mais se justificam em termos de custos, as inspeções não periódicas ao sistema.

Em síntese, poderemos dizer mais uma vez que, em termos de custos as inspeções periódicas podem ser bastante desaconselháveis, conforme revelam os valores de R_1 .

6.3.2 - SOLUÇÕES APROXIMADAS PARA A POLÍTICA DE RISCO CONSTANTE

Para que possamos verificar a validade da aproximação (6.33) em termos de custos, vamos considerar o cociente R_2 como em (6.34) e o quadro que se segue.

R_2		$k=1.5$	$k=2$
Distribuição Exponencial	$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=1$	2.73	2.11
	$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.5$	0.41	0.35
Distribuição de Weibull	$\beta=\beta_1=\beta_2=0.7$	3.70	3.18
	$\beta=\beta_1=\beta_2=2$	4.20	4.28
	$\beta=\beta_1=\beta_2=3$	8.20	8.41
	$\beta=\beta_1=\beta_2=5$	9.22	10.40

Quadro 6.7 – Valores de R_2 ,para as distribuições exponencial e de Weibull, com $C_1=0.1$, $C_2=1$, $k=1.5$ e $k=2$.

Da análise deste quadro podemos concluir que,

- No caso da distribuição exponencial, verificamos que os erros relativos da aproximação não são acentuados, pelo que, podemos considerar a aproximação em estudo muito satisfatória, uma vez que os valores de R_2 não são muito elevados.

- No que se refere à distribuição de Weibull, para $\beta=\beta_1=\beta_2=0.7$, podemos afirmar o mesmo, pois o valor de R_2 também não é elevado. No que respeita aos restantes casos, consideramos que a aproximação em estudo é pouco satisfatória.

Finalmente, vamos avaliar a validade da aproximação (6.35), tomando em consideração o cociente R_3 enunciado em (6.36) e os resultados do próximo quadro.

R_3		$k=1.5$	$k=2$
Distribuição Exponencial	$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=1$	4.76	4.57
	$\lambda=\lambda_1=1 ; \lambda_2=0.5$	1.70	1.64
Distribuição de Weibull	$\beta=\beta_1=\beta_2=0.7$	6.76	6.20
	$\beta=\beta_1=\beta_2=2$	7.07	7.30
	$\beta=\beta_1=\beta_2=3$	11.94	12.36
	$\beta=\beta_1=\beta_2=5$	12.35	13.98

Quadro 6.8 – Valores de R_3 , para as distribuições exponencial e de Weibull, com $C_1 = 0.1, C_2 = 1, k = 1.5$ e $k = 2$.

Podemos afirmar que:

- Para o sistema com dois componentes em série com tempos de vida exponenciais é pior do que a anterior, embora os valores de R_3 não sejam muito elevados.
- No caso do sistema com dois componentes em série e tempos de vida Weibull, a aproximação também é pior que a anterior.

Em síntese, diremos que a aproximação (6.33) é quase óptima no caso do sistema com dois componentes em série e tempos de vida exponenciais e melhor para o sistema com dois componentes em série e tempos de vida Weibull que a (6.35), pois o cociente R_2 é menor que R_3 , para as distribuições em estudo, independentemente dos valores de k que consideramos.

7. CONCLUSÕES FINAIS

Neste capítulo examinaremos de um modo mais cuidado os resultados obtidos nos capítulos anteriores.

Como nos podemos aperceber ao longo da realização deste trabalho, o cariz simples que este problema de optimização apresenta, não implica que seja simples a sua resolução. Os vários aspectos a considerar enquanto se estuda inspecção de sistemas e o aleatório, que em determinada altura se enquadra no problema, conferem-lhe um grau de dificuldade inesperado.

Não será no entanto, este facto, que levará a que as inspecções de sistemas percam aplicabilidade ou interesse.

Ao longo deste trabalho abordámos duas distribuições distintas, que nos conduziram a resultados diferentes, também. Escolhemos as distribuições exponencial e weibull, pelo facto de serem as mais utilizadas neste tipo de problemas.

Vamos agora apresentar os pontos que nos parecem mais importantes do estudo que efectuamos e queremos destacar:

- a) Na 1ª parte obtivemos uma expressão para o número médio de inspecções, quando tratamos o “sistema” composto por um único componente. No caso concreto da distribuição exponencial, obtivemos uma outra expressão que permitiu, recorrendo a técnicas de simulação, obter o número médio de inspecções simulado. De notar que foi através destes resultados que, podemos testar a viabilidade do nosso modelo, chegando-se à conclusão que a simulação é satisfatoriamente precisa;
- b) Obtivemos também uma expressão muito simples para o tempo médio de detecção. Tal como aconteceu para o número médio de inspecções, também

- nos foi possível obter resultados por simulação para o tempo médio de detecção e que também testamos através dos valores analíticos;
- c) Obtivemos ainda uma expressão analítica que, mediante o modelo nos permitiu obter o valor do período de inspecção que minimiza o custo total médio por ciclo. Observamos também que existem situações onde a solução pode não ser única;
 - d) Através dos valores que obtivemos, no decorrer deste trabalho, constatamos que o custo total médio mínimo por ciclo é pouco sensível a alterações do período de inspecção. Tal facto, permite-nos concluir que, em princípio, aproximações para o período de inspecção serão boas em termos de custos. A insensibilidade do custo total médio a alterações no período de inspecção deve-se, em parte, ao facto de $E(N)$ e $E(D)$ terem variações em sentidos opostos;
 - e) Concluimos que o custo total médio mínimo por ciclo do sistema com um único componente pode depender da distribuição do tempo de vida e não apenas do seu tempo médio de vida. Situações há, no entanto, em que essa dependência é fraca;
 - f) O tempo médio de detecção pode ser maior, menor ou igual a metade do período de inspecção;
 - g) Obtivemos resultados referentes à utilização da aproximação obtida por Nakagawa e Yassui (1979), P_0^* , relativa ao período de inspecção;
 - h) Conseguimos também, resultados para o custo total médio mínimo por ciclo, quando utilizada a aproximação anterior. Concluimos que os erros relativos para os custos são bastante menores em relação aos correspondentes erros para o período de inspecção, o que vem reforçar o facto de aproximações para o período de inspecção serem boas aproximações em termos de custos;

- i) Utilizamos também a aproximação P_0^{**} , obtida por Rodrigues Dias (1987a);
- j) Através da comparação entre os resultados obtidos para P_0^* e P_0^{**} , concluímos que para a distribuição exponencial e determinados parâmetros de forma da distribuição de Weibull, P_0^{**} é melhor aproximação que P_0^* , no caso do “sistema” com um único componente apenas, que é, como se sabe aquele a que nos estamos a referir. No entanto com a utilização de outros parâmetros, casos há em que se verifica o contrário. Desta forma, poderemos afirmar que P_0^{**} funciona melhor ou pior consoante a distribuição em causa e os respectivos parâmetros. Em última análise P_0^{**} é melhor aproximação no que se refere aos custos.
- k) Para o sistema composto por dois componentes em série e em paralelo com tempos de vida exponenciais, o Tempo Médio de Detecção de uma falha $E(D_s)$ e $E(D_p)$, têm comportamentos muito semelhantes e bastante similares aos apresentados para o sistema com um único componente e tal como sabemos são funções do período de inspecção. Desta forma, à medida que aumenta o período entre inspecções também vai aumentar o tempo médio de detecção da falha, o que se torna intuitivamente aceitável, pois se aumenta o período de inspecção o sistema é inspeccionado menos vezes e então mais tarde vai ser detectada a falha.
- Tudo o que referenciamos também se aplica ao outro sistema por nós igualmente estudado, que é o sistema com dois componentes em série e tempos de vida Weibull.
- l) Em relação ao Número Médio de Inspeções por ciclo, $E(N_s)$ e $E(N_p)$ o seu comportamento também é bastante semelhante e novamente bastante similar ao sistema com um único componente. Para pequenos valores de P ($P \rightarrow 0$), o

número médio de inspeções é extremamente alto e quando o intervalo entre inspeções é grande ($P \rightarrow \infty$), este tende para 1;

- m) Finalmente o Custo Total Médio de funcionamento por ciclo para cada um dos sistemas, $E(C)$, $E(C_s)$ e $E(C_p)$ também têm um comportamento gráfico bastante semelhante. O que difere de modelo para modelo e que se torna extremamente importante de referirmos, é o período de inspeção que minimiza esta quantidade. Assim, concluímos, como resultado implícito da fiabilidade de cada modelo, que o período de inspeção do sistema em paralelo é superior ao período de inspeção do sistema com um só componente e este por sua vez superior ao período de inspeção do sistema em série, no caso dos custos de cada inspeção e os custos por unidade de tempo de mau funcionamento serem iguais em todos os modelos;
- n) Uma outra conclusão bastante importante e menos esperada, é que os Custos Totais Médios Mínimos por ciclo de um modelo com um só componente são mais baixos que os equivalentes Custos Totais Médios Mínimos por ciclo do sistema em paralelo e do sistema em série. Em contrapartida, os Custos Totais Médios Mínimos do sistema em paralelo são superiores aos equivalentes custos do sistema em série (para o mesmo r e claro que, os sistemas a que nos referimos tem tempos de vida exponenciais). A explicação encontrada para esta questão vem dada pelo facto de que no sistema em paralelo o ciclo é maior (intervalo de tempo desde o início de funcionamento em estado de novo até ao instante em que a falha é detectada) e então o Custo Total Médio Mínimo associado será maior. De um outro modo, gastamos mais por ciclo, mas num maior intervalo de tempo;
- o) Poderemos então afirmar, que para estudarmos o Custo Total Médio Mínimo por ciclo é importante conhecermos o valor de k , isto é, a razão entre o custo por inspeção do modelo com um só componente e do modelo com dois

- componentes a operar em série e em paralelo. De facto, com o conhecimento do valor de k , poderemos com relativa facilidade, calcular os custos associados e assim optarmos pela montagem ou não de um novo componente;
- p) No que diz respeito à precisão das várias aproximações obtidas para o período de inspecção de cada modelo, ambas podem ser consideradas soluções quase óptimas, já que, os erros relativos em percentagem não são muito elevados, embora dependa, obviamente, da situação em estudo e do sistema em causa. Para o sistema composto por dois componentes em série e tempos de vida exponenciais, concluímos que, P_0^{**} é melhor aproximação que P_0^* , enquanto que para os sistemas com dois componentes em série e tempos de vida Weibull e dois componentes em paralelo e tempos de vida exponenciais, concluímos que em termos gerais (pois não acontece para todos os casos que estudamos) P_0^* é melhor aproximação que P_0^{**} ;
- q) No último parágrafo estudámos as inspecções não periódicas, pois tal como referimos estas inspecções são as que nos conduzem ao custo mínimo. Neste ponto verificamos, que quando o “sistema” é composto por um único componente a aproximação P_0^{**} é melhor que a P_0^* ;
- r) Finalmente, quando temos o sistema composto por dois componentes em série, para inspecções não periódicas, concluímos que, para a distribuição exponencial a aproximação P_0^* é quase óptima e esta é mais precisa que a P_0^{**} , para a distribuição de Weibull.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Almeida, C.P.L.(1998): - *Influência do Período de Inspeção nos Custos de Funcionamento de um Sistema*. Tese de Mestrado, ISEG, Lisboa.
- Barlow, R. ; Hunter, L.C. ; Proschan, F. (1963): - Optimum Checking Procedures. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, Vol. II, Nº 4, pp 1078-1095.
- Barlow, R. ; Proschan, F. (1965): - *Mathematical Theory of Reliability*. John Wiley, New York.
- Barlow, R. ; Proschan, F. (1975): - *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- Bergman, B. (1985): - On Reliability Theory and its Applications. *Scand J. Statist*, Vol.12, Nº 1, pp 1-41.
- Gibra, I. N. (1975): - Recent Developments in Control Chart Techniques. *Journal of Quality Technology*, Vol.7, Nº 4, pp 183-192.
- Hunter, L.C. (1964): - Optimum Checking Procedures. *Statistical Theory of Reliability*, ed. M. Zelen, The University of Wisconsin Press, Madison, pp 95-113.
- Infante, P. (1997): - *Optimização em Controlo Estatístico de Qualidade*. Trabalho de Síntese no âmbito das Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica.
- Keller, J.B. (1974): - Optimum Checking Schedules for Systems Subject to Random Failure. *Management Science*, Vol.21, Nº 3, pp 256-260.
- Keller (1982): - Optimum Inspection Policies. *Management Science*, Vol.28, Nº 4, pp 447-450.

-
- Montgomery, D.C. (1980): - The Economic Design of Control Charts: A Review and Literature Survey. *Journal of Quality Technology*, Vol.12, Nº 2, pp 75-87.
 - Munford, A.G. (1981): - Comparison Among Certain Inspection Policies. *Management Science*, Vol.27, Nº 3, pp 260-267.
 - Nakagawa, T. ; Yassui, K. (1979): - Approximate Calculation of Inpeccion Policy with Weibull Failures Times. *IEEE Transations on Reliability*, Vol.R-28, Nº 5, pp 403-404.
 - Nakagawa, T. ; Yassui, K. (1980): - Aproximate Calculation of Optimal Inspection Times. *Journal of the Operational Research Society*, Vol.31, Nº 9, pp 851-853.
 - Pierskalla, W.P. ; Voelker, J.A. (1976): - A Survey of Maintenance Models: The Control and Surveillance of Deteriorating Systems. *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.23, Nº 3, pp 353-388.
 - Rodrigues Dias, J. (1983): - Influence de la Période d'Inspection sur les Coûts dans l'Inspection Périodique de Systèmes. *Revue de Statistique Appliquée*, Vol.XXXI, Nº4, pp 5-15.
 - Rodrigues Dias, J. (1986): - Uma Política Quase Óptima de Inspeção não Periódica de Sistemas. *Centro de Estatística e Aplicações, INIC, Nota Nº12, Lisboa.*
 - Rodrigues Dias, J. (1987a): - *Políticas de Inspeção de Sistemas*. Tese de Doutoramento, Universidade de Évora.
 - Rodrigues Dias, J. (1987b): - Uma Solução para o Período de Inspeção de Sistemas. *XII Jornadas Luso-Espanholas de Matemática*, Braga.
 - Rodrigues Dias, J. (1990a): - A New Approximation for the Inspection Period of Systems with Diferent Failure Rates. *EJOR*, Nº 45, pp 219-223.

-
- Rodrigues Dias, J. (1990b): - Some Approximate Inspection Policies for a System with Imperfect Inspections. *Recherche Opérationnelle / Operations Research*, Vol.24, Nº 2, pp 191-199.
 - Rodrigues Dias, J. (1998): - Análise do Período de Inspeção de um Sistema com Componentes em Série e Tempos de Vida Exponenciais. *VIII Congresso da APDIO, IO98*, Faro.
 - Rodrigues Dias, J.; Infante, P. (1999a): - Comparação de Períodos de Inspeção e de Custos em Sistemas com Componentes em Série e com Diferentes Tipos de Taxas de Risco. *VII Congresso Anual da SPE*, Ofir.
 - Rodrigues Dias, J.; Infante, P. (1999b): - Analysis of the Inspection Period in a System with Serial Components and a Weibull Lifetime Distribution. *IV Congresso Galego de Estatística e Investigación de Operacións*, Santiago de Compostela.
 - Schneeweiss, W.G. (1976): - On the Mean Duration of Hidden Faults in Periodically Checked Systems. *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.R-25, Nº 5, pp 346-348.
 - Sherif, Y.S. (1982): - Reliability Analysis: Optimal Inspection and Maintenance Schedules of Failures Systems. *Microelectronic Reliability*, Vol. 22, Nº 1, pp 59-115.
 - Vance, L.C. (1983): - A Bibliography of Statistical Quality Control Chart Techniques, 1970-1980. *Journal of Quality Technology*, Vol.15, Nº 2, pp 59-62.