



Universidade de Évora

Caos em Repartições Públicas?

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Lígia Carla Pinto Henriques

Maio 2000



Universidade de Évora

Caos em Repartições Públicas?

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada



103066

Lígia Carla Pinto Henriques

Maio 2000

Trabalho realizado sob orientação do Sr. Prof.
Doutor Francisco Lage Calheiros da Faculdade
de Engenharia da Universidade do Porto no
âmbito do Mestrado em Matemática Aplicada,
da Universidade de Évora, biénio 1997-1999.

Agradecimentos

Ao Sr. Professor Francisco Lage Calheiros por todo o apoio e estímulo que me deu, pela confiança e amizade demonstradas e pela maneira incansável e dedicada como acompanhou todo o trabalho. O meu obrigado.

À Universidade de Évora e aos docentes do mestrado em Matemática Aplicada, biénio 1997-1999, pelos conhecimentos transmitidos.

Ao Instituto Politécnico de Tomar pelas facilidades concedidas para a realização do mestrado.

À Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto - Departamento de Engenharia Civil - pela cedência de instalações e meios informáticos.

Ao meu irmão Pedro pela ajuda e esclarecimentos prestados na fase de programação.

Às Sr.as. Professoras Paula Milheiro e Teresa Arede, da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, pela ajuda prestada na integração de equações diferenciais estocásticas não lineares.

Aos meus Pais, pela confiança que em mim depositaram e pela paciência e incentivo que me concederam. Um agradecimento especial pela preciosa ajuda que me prestaram na fase final deste trabalho.

Ao Tiago, pelo carinho e confiança constantes que teve para comigo. Pelo seu positivismo permanente e contagiante, o meu obrigado.

A todos aqueles de uma forma directa ou indirecta contribuíram para a realização deste trabalho.

Índice

Prefácio	iv
Capítulo 1 Introdução	1
1.1 Objecto e Método	1
1.2 Os Sistemas	2
Capítulo 2 Osciladores e Filas de Espera	6
2.1 Introdução	6
2.2 Osciladores Harmónicos e Filas de Espera com Capacidade de Serviço Variável	7
2.2.1 Osciladores Harmónicos	7
2.2.1.1 Oscilador Harmónico Amortecido	11
2.2.1.2 Oscilador Harmónico Forçado	13
2.2.1.3 Osciladores Harmónicos e a Transformada de Fourier	13
2.2.2 Relação entre os Osciladores Harmónicos e as Filas de Espera com Capacidade de Serviço Variável	14
2.2.2.1 Taxas de Chegada Flutuantes	17
2.2.2.2 Taxas de Atendimento Variáveis	18
2.3 Caos	18
2.4 Modelos com “Self-Organised Criticality”	23
2.4.1 O Modelo da Pilha de Areia	24
2.4.2 As Filas de Espera com Capacidade de Serviço Variável como Fenómenos SOC	26
2.5 Osciladores Não Lineares e Caos em Filas de Espera	26

Capítulo 3	Um Simulador para Filas de Espera com Capacidade de Serviço Variável	34
	3.1 Programação	34
	3.2 Validação do Simulador	41
Capítulo 4	Elementos da Teoria de Filas de Espera com Capacidade de Serviço Variável	42
	4.1 Introdução	42
	4.2 Filas de Espera com um Número de Servidores Variável	43
	4.2.1 Exemplos Numéricos	47
	4.3 Filas de Espera com Taxa de Atendimento Variável	51
	4.3.1 Exemplos Numéricos	54
Capítulo 5	Explorações do Simulador de Filas de Espera	57
	5.1 Testes em Modelos com um Número de Servidores Variável . .	57
	5.2 Procura de misturas	61
	5.3 Caos	65
	5.4 Estimação de Parâmetros e Identificação de Sistemas	86
Capítulo 6	Osciladores Estocásticos	87
	6.1 Introdução	87
	6.2 Equações Diferenciais Estocásticas e Filas de Espera	87
	6.3 A Equação Diferencial Estocástica do Oscilador Harmónico . .	88
	6.3.1 Integração da Equação Estocástica do Movimento do Pêndulo	90
	6.3.2 Integração da Equação Estocástica de Van der Pol	92
Capítulo 7	Integração Numérica de Equações Diferenciais Estocásticas	97
	7.1 Introdução	97
	7.2 Metodologias de Discretização e Simulação de EDEs	97
	7.3 Estabilidade e Expoentes de Lyapunov	102
	7.4 Considerações Finais	103

Apêndices	105
Apêndice 1: Testes ao Gerador	106
A1.1 Introdução	106
A1.2 Testes Directos	106
A1.3 Testes Indirectos	116
Apêndice 2: Grafo Infinitesimal das transição entre estados - M/M/c com regra de decisão	121
Apêndice 3: Convergência do modelo M/M/c com regra de decisão para o usual modelo M/M/c	122
Apêndice 4: Equações Diferenciais Estocásticas	127
Apêndice 5: Códigos de Programação	134
 Bibliografia	 156

Prefácio

Os problemas de espera, em sistemas da vida quotidiana, têm dado origem a inúmeras publicações científicas.

Este trabalho nasceu da observação dos tempos de espera num Arquivo de Identificação em que o serviço completo, isto é, a obtenção do bilhete de identidade, passa pela realização de diversas etapas em diferentes guichets: tirar a senha de atendimento, entregar os documentos, imposição das impressões digitais, recepção do ticket de levantamento, etc.... F. Calheiros (dados não publicados) constatou, após uma observação atenta, a "impossibilidade" de efectuar qualquer tipo de previsão em relação ao tempo médio de espera.

No decorrer deste trabalho detectámos que outros também tinham sido surpreendidos por estas dificuldades. Manuel Matos, professor do Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores (DEEC) da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, informou-nos que na compra do pão ao Domingo, numa confeitaria de moda no Porto, o efeito de congestionamento se reproduzia de forma incontrolável e imprevisível e o melhor, quando estava congestionado, era voltar depois.

Por outro lado Bak, um dos fundadores da teoria "*Self Organised Criticality*", ao estudar as avalanches ocorridas em montes de areia, concluiu que muitos sistemas apresentam regularmente, cascatas, clusters ou grupos de ocorrências com o mesmo aspecto imprevisível. Nagel, um dos principais estudiosos do tráfego automóvel, conseguiu mesmo provar que estes clusters de ocorrências apresentam um comportamento periódico.

O que há de comum a estes fenómenos registados por M. Matos (Engenheiro de Sistemas) na confeitaria, por K. Nagel e P. Bak (Físicos Puros) no tráfego e por F. Calheiros (Matemático Aplicado) num arquivo de identificação?

Os processos de evolução associados a estes sistemas são intrinsecamente não estacionários, isto é, têm oscilações que fazem com que se esteja a fazer estimativas fora de todas as regras de repetibilidade pressupostas numa amostragem clássica.

As dificuldades registadas na obtenção de estimativas do tempo médio não são exclusivas deste tipo de problemas. Medhi Danech-Pajouh, um dos principais gestores do tráfego da cidade de Paris, afirma que a colocação, na mesma, de painéis indicadores do tempo de trajecto até determinado local tem como principal objectivo o acompanhamento psicológico dos utentes e, que, de forma alguma as indicações dadas são precisas.

Perante sistemas deste tipo o principal objectivo do técnico é tentar controlá-los. Porém, a maior dificuldade reside no comportamento caótico dos mesmos, no sentido de que uma pequena modificação nas condições iniciais, como iremos ver, provoca divergência nas trajectórias dos sistemas. Os Teoremas de *Sarkoski*, característicos do caos topológico, não são directamente aplicáveis, uma vez que o conjunto de estados é discreto e mesmo muitas vezes finito.

Assim, numa tentativa para resolver as dificuldades atrás referidas, elaborámos este trabalho com o intuito de dar mais uma pequena contribuição para a sua solução.

A parte central deste trabalho é o estudo de filas de espera com capacidade de serviço variável em que o utente tem que passar por vários servidores para ter o serviço completo.

No Capítulo 1, descrevemos os objectivos deste trabalho, o seu enquadramento e as principais conclusões.

No Capítulo 2, começamos por apresentar elementos da teoria dos osciladores harmónicos e estabelecer a ponte entre estes e as filas de espera. De seguida, tecemos algumas considerações sobre o caos topológico e, em particular, sobre a dependência sensitiva nas condições iniciais. Os modelos com *Self Organised Criticality* (SOC) são também apresentados uma vez que as filas de espera com capacidade de serviço variável têm cascatas (avalanches) análogas às dos modelos SOC. Terminamos este

capítulo analisando a existência de caos em osciladores não lineares (Van der Pol) e estabelecendo critérios de existência de caos, no sentido da dependência sensitiva nas condições iniciais nas filas de espera com capacidade de serviço variável.

No Capítulo 3, descrevemos a construção de um simulador para filas de espera com capacidade de serviço variável efectuada em *Matlab*.

No Capítulo 4, analisamos alguns dos aspectos da Teoria das Filas de Espera com Capacidade de Serviço Variável desenvolvida por Ramalhoto e Syski.

O Capítulo 5, considerado o mais importante deste trabalho, é onde mostramos que a dependência nas condições iniciais se reflecte, por um lado, na existência de misturas de distribuições e por outro, na memória da sucessão associada ao número de clientes no sistema. Mostramos ainda que, nos modelos com dois postos de serviço, a sucessão do número de clientes no sistema é estruturalmente instável, uma vez que discretizada e dividida ao meio, encontramos duas séries com memórias diferentes. Verificamos também que, no caso de um modelo com três postos de serviço, a sucessão do número de clientes no sistema apresenta um comportamento caótico. Finalizamos este capítulo com o problema da estimação de parâmetros neste tipo de sistemas.

No Capítulo 6, apresentamos as versões estocásticas das equações diferenciais ordinárias dos osciladores descritos no Capítulo 2 e analisamos o principal problema da modelação de filas de espera por Equações Diferenciais Estocásticas, que consiste na escolha do tipo de ruído associado a chegadas poissonianas e a atendimentos exponenciais.

No Capítulo 7, apresentamos uma breve introdução à integração numérica de Equações Diferenciais Estocásticas analisando alguns dos esquemas apresentados na literatura e os problemas de estabilidade (Exponentes de *Lyapunov*).

Colocámos, também, em apêndice vários aspectos que têm importância. Assim, no Apêndice 1, efectuamos os testes ao gerador de números aleatórios do *Matlab*, cruciais para a validação de qualquer resultado. No Apêndice 2, apresentamos as taxas de transição entre estados que nos permitem comparar regimes estacionários. No Apêndice

3, efectuamos a demonstração da convergência de um modelo com número de servidores variável para um modelo M/M. No Apêndice 4, apresentamos um resumo da teoria das Equações Diferenciais Estocásticas (EDE's) para melhor compreensão do Capítulo 6. Finalmente, no Apêndice 5, apresentamos os códigos de programação constituídos pelos programas principais, pelas subrotinas e pelos mapas de simulação.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objecto e Método

O objectivo desta tese não é desenvolver uma técnica matemática mas resolver, usando matemática, um problema concreto que é o funcionamento de filas de espera com capacidade de serviço variável, características de qualquer repartição pública. Trata-se de um trabalho de Matemática Aplicada que pretende combinar dois objectivos, que são, a resolução de um problema concreto e o rigor da análise matemática. Por outras palavras, para além da obtenção de uma solução logicamente coerente pretendemos que tenha um significado concreto para o problema em estudo.

Para um problema concreto tem que se combinar a obtenção de uma solução razoável com a rapidez com que esta é obtida.

Assim, para filas de espera com capacidade de atendimento variável, na falta de fórmulas fechadas, optou-se por realizar um programa, para simulação, que permite ao gestor fazer as suas opções e determinar as suas consequências. O programa que preparámos pode fornecer toda a informação útil: tempo médio de espera, número de utentes na fila,

Uma boa metodologia científica deve pretender mais do que resolver, compreender. Rosenhaed discutiu aprofundadamente estas questões ([R89]).

Esta tentativa de compreensão levou-nos, por um lado, aos osciladores e ao caos e, portanto, às equações diferenciais, também estocásticas, e à tentativa de integração, também numérica. Por outro lado, levou-nos aos processos estocásticos (e às séries

temporais). A procura de desdobramentos de períodos (caos) levou-nos à procura de misturas de distribuições.

1.2 Os Sistemas

Sabemos que, uma das principais características deste tipo de sistemas é a sua incontrollabilidade e imprevisibilidade.

Estes sistemas são ainda caracterizados por apresentarem misturas de dois tipos de comportamento, por um lado, o aspecto da dinâmica não linear, eventualmente caótica, associada ao sistema e por outro, a componente estocástica associada aos indivíduos.

No tráfego automóvel, por exemplo, o primeiro aspecto é devido às propriedades das vias (organização dos semáforos, dos cruzamentos, largura e qualidade do piso, ...) e o segundo associado à variabilidade dos indivíduos, dos veículos, Para mais detalhes veja-se [CFR98].

No caso das filas de espera, cuja análise motivou o nosso estudo, o sistema é constituído por servidores (postos de serviço) e por diferentes áreas de serviço, as quais podem ter mais do que um posto de serviço, que temos de ultrapassar para completarmos o nosso objectivo. A parte estocástica diz respeito à variabilidade do atendimento dos diferentes postos de serviço e às diferentes dificuldades de atendimento dos diversos indivíduos.

Com servidores humanos a taxa de serviço é naturalmente variável com o tamanho da fila de espera e três situações podem ocorrer: ou a capacidade de serviço diminui, ou aumenta, ou mantém-se igual. O aumento da capacidade de atendimento pode ser feito de diferentes formas: modificando o número de servidores, abrindo mais postos de serviço, ou fazendo o servidor aumentar a sua taxa de atendimento. Este aumento da taxa de atendimento pode, por exemplo, ser obtido passando a atender um em cada dois clientes, que não tem consequências de maior em serviços não obrigatórios, como é o caso do controlo alfandegário. Nestes casos, a fila de espera apresenta um comportamento oscilatório. A diminuição da capacidade de atendimento com o tamanho da fila de espera pode ser devida aos servidores, os quais, ao verem o comprimento da fila se enervam ou têm mais dificuldade em se movimentarem, passando a efectuar o

atendimento de uma forma mais lenta. Neste caso a fila terá tendência para crescer indefinidamente.

Estamos pois perante filas de espera com oscilações, as quais podem ser devidas à abertura e/ou fecho de postos de serviço, ou ao aumento/diminuição da taxa de atendimento.

O segundo caso revela-se menos interessante uma vez que se enquadra dentro da teoria geral das filas de espera ([GH85], [K75] e [M91]).

O primeiro caso será o centro desta tese, onde pretendemos mostrar que filas de espera com oscilações devido a abertura e/ou fecho de postos de serviço são caóticas (Capítulo 2). Na incapacidade de mostrarmos todas as hipóteses associadas ao caos topológico tratado em [D89] e [S64], assumiremos que o caos em filas de espera com capacidade de serviço variável é caracterizado pela dependência sensitiva nas condições iniciais, isto é, tentaremos mostrar que estados vizinhos possuem evoluções temporais divergentes.

Se às filas de espera com oscilações estocásticas lhes removermos a componente estocástica, isto é, se considerarmos que a taxa de chegada ao sistema e a taxa de atendimento são determinísticas, temos, exactamente, osciladores. Estes, possuem propriedades que nos permitem afirmar que devidamente acoplados são caóticos. Por analogia com os trabalhos realizados sobre osciladores (Van der Pol e afins) mostramos que as filas de espera com oscilações são caóticas o que explica a sua não controlabilidade e a conseqüente imprevisibilidade (Capítulo 2).

Do ponto de vista matemático abordamos este problema de duas formas diferentes.

A primeira é baseada numa generalização do trabalho realizado por Ramalhoto e Syski ([RS96]), a qual foi conseguida através da construção de um simulador, via método de Monte Carlo, de filas de espera com número variável de servidores (Capítulo 3). Ao analisarmos a sucessão cronológica associada ao número de clientes no sistema verificamos que a dependência sensitiva nas condições iniciais se reflecte:

- (i) no tempo entre duas aberturas consecutivas do segundo posto de serviço, caso em que exibimos a mistura de duas distribuições (secção 5.2) (análoga à duplicação dos períodos);
- (ii) na memória do processo em que, num caso esvazia rapidamente e o sistema “esquece” depressa que a fila esteve cheia, $AR(p)$, e noutro, em que o sistema demora muito tempo a esvaziar a fila e, conseqüentemente, a “esquecer” que esteve cheio, sendo pois um processo de memória mais longa que o primeiro, $AR(p+k)$ ($k>0$) (secção 5.3) (o que significa trajectórias divergentes).

Resumindo, mostramos que, a sensibilidade nas condições iniciais se reflecte por um lado, na memória do processo, construindo uma série cronológica caótica, que pode ser combinada num processo AR não linear com transições de regime, e por outro, na mistura de distribuições.

A segunda abordagem matemática do problema de filas de espera com capacidade de serviço variável é realizada via equações diferenciais estocásticas. Uma vez que os osciladores são descritos por equações diferenciais ordinárias (EDO's) e tendo em conta que, este tipo de filas de espera não são mais do que osciladores devidamente perturbados parece pois natural, a descrição destes modelos por equações diferenciais estocásticas (EDE's) (Capítulo 6). Recorrendo ao trabalho desenvolvido por Talay ([T90]), no campo da integração estocástica de equações diferenciais estocásticas, tecemos breves considerações sobre a simulação das soluções de EDE's (Capítulo 7).

Podíamos ainda considerar uma terceira abordagem matemática, uma vez que as filas de espera podem ser encaradas como autómatos celulares, visto serem sistemas dinâmicos com espaço de estados e tempo discretos. Esta abordagem levar-nos-ia a uma incursão pela teoria algébrica dos autómatos ou a uma incursão pela mecânica estatística dos autómatos, as quais não serão abordadas nesta tese.

Optámos por não discutir a segunda componente do texto de Ramalhoto e Syski (qualidade de serviço) pois há alguma controvérsia na abordagem destes temas.

Capítulo 2

Osciladores e Filas de Espera

2.1 Introdução

Neste capítulo começamos por apresentar a teoria clássica dos osciladores harmónicos, apresentando, a título ilustrativo, a descrição do pêndulo simples e do sistema composto por uma massa acoplada a duas molas. Dada a sua importância abordamos ainda a ligação dos osciladores harmónicos à análise de Fourier.

Após caracterizarmos os osciladores harmónicos estabelecemos a ponte entre estes e as filas de espera com capacidade de serviço variável. O comportamento das filas de espera, idêntico ao dos osciladores harmónicos, é mais ou menos disfarçado pelo carácter estocástico das chegadas e dos atendimentos, logo, se as chegadas e os atendimentos forem determinísticos teremos exactamente osciladores.

Na secção 2.3, caracterizamos o caos topológico associado a um sistema dinâmico. Algumas das características de um sistema dinâmico caótico são: a dependência sensitiva nas condições iniciais, a existência de uma órbita densa e de uma regularidade (intermitência).

Na secção 2.4, centramos o estudo sobre os modelos com *Self-Organized Criticality* (SOC) apresentando uma descrição do modelo da Pilha de Areia. Mostramos ainda que, as filas de espera com capacidade de serviço variável são modelos SOC.

De seguida analisamos a existência de caos em osciladores não lineares originados nos trabalhos de Van der Pol. Tendo em conta que o desenvolvimento físico do sistema é completamente representado no espaço (retrato) de fases tecemos breves considerações em relação à detecção dos atractores caóticos num espaço de fases.

Finalizamos este capítulo mostrando a existência de caos em filas de espera com capacidade de serviço variável exibindo dependência sensível nas condições iniciais. Nos modelos de filas de espera com capacidade de serviço variável os valores críticos são os limiares de abertura e de fecho dos “novos” guichets (postos de serviço).

2.2 Osciladores Harmónicos e Filas de Espera com Capacidade de Serviço Variável

2.2.1 Osciladores Harmónicos

Os movimentos oscilatórios ou vibracionais têm um carácter universal e encontram-se presentes em vários domínios da Física. São exemplos de movimentos oscilatórios:

- as oscilações de um peso suspenso na extremidade de uma mola elástica;
- as vibrações da corda de uma guitarra;
- as oscilações do pêndulo;
- as vibrações dos átomos de um sólido;
- as oscilações dos sinais eléctricos de corrente alternada das instalações eléctricas.

Dizemos que um objecto ou partícula *oscila* quando realiza um movimento periódico em torno de uma posição de equilíbrio estável.

De todos os movimentos oscilatórios o mais importante é o movimento harmónico simples porque, além de ser o mais simples, a variação da oscilação ao longo do tempo segue uma lei do tipo “seno” ou “coseno”. É também o mais importante uma vez que as oscilações registadas na natureza e na engenharia são, muitas vezes, harmónicas e se não o forem podem ser sempre representadas como a sobreposição de várias oscilações harmónicas.

Dizemos que uma partícula executa um *movimento harmónico simples* sobre uma recta, no sentido do eixo OX, quando o seu deslocamento x em relação à posição de equilíbrio é dado, como função de t , pela lei,

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

onde A , ω_0 e φ são constantes. A grandeza φ representa a fase inicial (desvio relativamente ao máximo em $t=0$) e ω_0 representa a frequência angular natural das oscilações. O movimento harmónico simples é periódico de período $P = 2\pi/\omega_0$ e tem frequência, ν , dada pelo número de oscilações completas por unidade de tempo, isto é,

$$\nu = \frac{1}{P}.$$

São realizações concretas de osciladores harmónicos:

- (i) Pêndulo simples, para pequenas oscilações;
- (ii) Uma massa acoplada a uma mola, para pequenas oscilações;
- (iii) Um circuito eléctrico, LC, composto por um condensador caracterizado por uma capacidade (C) e uma bobine (L), para correntes baixas.

As propriedades mais importantes dos osciladores harmónicos são:

- (a) a frequência do movimento é independente da amplitude das oscilações, dentro dos limites de linearidade do sistema (pequenas oscilações);
- (b) os efeitos da acção de várias forças conjuntas pode ser sobreposto linearmente (princípio da sobreposição).

Os osciladores harmónicos são descritos por equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, do tipo

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t).$$

A resolução destas equações diferenciais pode ser encontrada em qualquer livro que aborde o Cálculo Diferencial e Integral em \mathbb{R}^n , como por exemplo [AJ95].

Exemplo 1: Pêndulo Simples

O pêndulo simples consiste numa partícula de massa M suspensa na extremidade de um fio de comprimento l , que supomos não elástico e com massa desprezável.

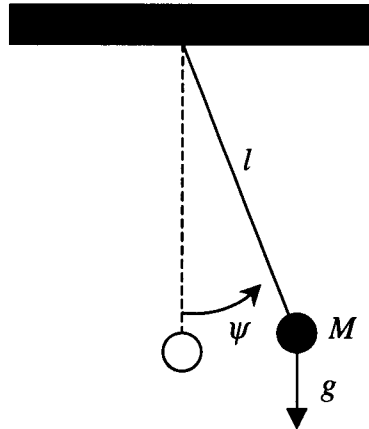


Figura 2.1 Pêndulo Simples

Seja ψ o ângulo, em radianos, que o fio faz, no instante t , com a posição de equilíbrio ($\psi(0)=0$). Pela 2ª lei de Newton,

$$M l \frac{d^2\psi}{dt^2} = -Mg \operatorname{sen} \psi, \quad (2.1)$$

onde $\operatorname{sen} \psi = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n} \frac{\psi^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Quando ψ é suficientemente pequeno, $\operatorname{sen} \psi \approx \psi$, e a equação (2.1) é reescrita da seguinte forma,

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \omega^2 \psi = 0, \quad (2.2)$$

onde $\omega^2 = \frac{g}{l}$, representa a frequência angular das oscilações e $-\omega^2 \psi$ a força elástica.

A solução da equação diferencial linear (2.2) é a equação do oscilador harmónico,

$$\psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

As constantes A e φ são determinadas através das condições iniciais, isto é, a partir do ângulo $\psi(0)$ (deslocamento angular) e da velocidade no instante inicial $\dot{\psi}(0)$.

Exemplo 2: Massas acopladas a molas: oscilações longitudinais

Consideremos uma partícula de massa M , colocada sobre uma superfície sem atrito, acoplada a duas molas idênticas presas a duas superfícies rígidas, conforme é possível observar na figura 2.2(a). A constante de restituição de cada mola é representada por K e o comprimento de cada mola, em repouso, é a_0 . Na posição de equilíbrio, cada mola sofre uma extensão passando, a possuir um comprimento a , pelo que, em equilíbrio, a força exercida em cada mola é $K(a - a_0)$ (figura 2.2(b)).

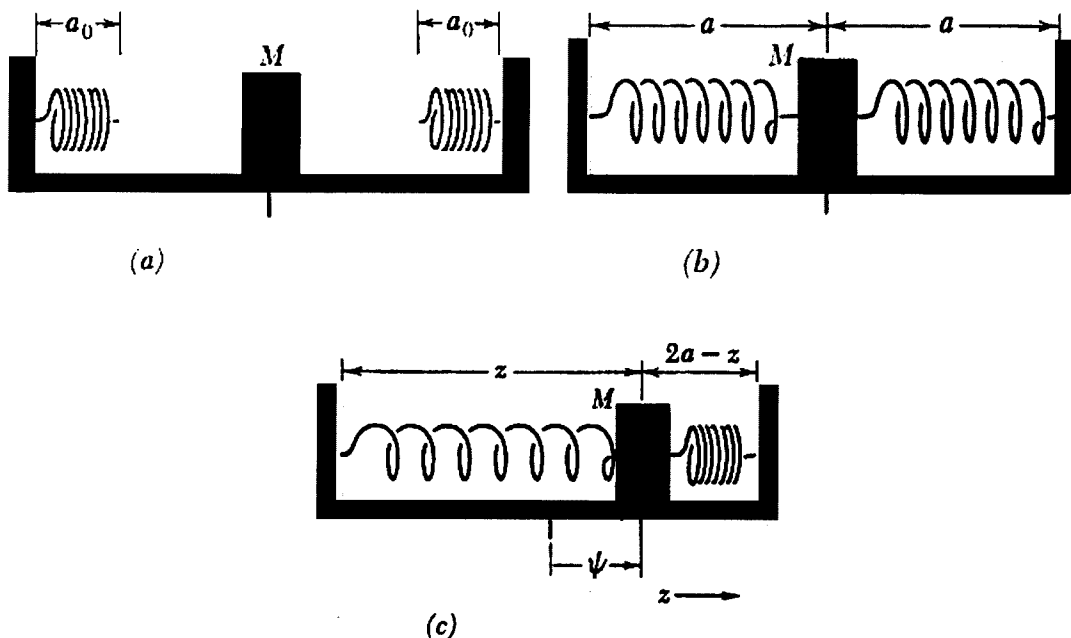


Figura 2.2 Oscilações Longitudinais: (a) Duas molas em repouso e uma massa; (b) Sistema em equilíbrio; (c) Configuração geral (Retirado de [Cr68])

Definindo z como a distância da massa M à superfície rígida do lado esquerdo, a distância desta à superfície do lado direito é $2a - z$ (figura 2.2(c)). A mola do lado esquerdo exerce assim uma força $K(z - a_0)$ na direcção $-z$ e a força exercida pela mola do

lado direito é $K(2a - z - a_0)$ na direcção $+z$. A força total é a soma destas duas forças, logo,

$$F = -2K(z - a).$$

Pela 2ª lei de Newton,

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = -2K(z - a) \quad (2.3)$$

Colocando $\varphi = z - a$ então $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 \psi}{dt^2}$, logo a equação (2.3) é dada por,

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + \omega^2 \psi = 0, \quad (2.4)$$

onde $\omega^2 = \frac{2K}{M}$. A solução geral da equação (2.4) é, uma vez mais, um oscilador harmónico,

$$\psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

2.2.1.1 Oscilador Harmónico Amortecido

Consideremos o oscilador harmónico sujeito a uma força elástica descrita por $-b\dot{x}$ e que actua no sentido oposto ao do deslocamento (exemplo: atrito). A equação do movimento é então,

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + Cx = 0. \quad (2.5)$$

Definindo $\lambda = \frac{b}{2M}$ como o coeficiente de amortecimento e $w_0^2 = \frac{C}{M}$ como a frequência angular natural, sem amortecimento, a equação diferencial linear de coeficientes constantes (2.5) é dada por ,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + w_0^2 x = 0.$$

Quando o amortecimento é pequeno, isto é, quando $\lambda < w_0$, a solução é

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \text{sen}(wt + \phi), \quad (2.6)$$

onde A e ϕ são constantes determinadas através das condições iniciais e

$$w = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{\frac{C}{M} - \frac{b^2}{4M^2}}. \quad (2.7)$$

As soluções descritas pela equação (2.6) são sinusóidais amortecidas, como ilustra a figura 2.3, sendo a amplitude das oscilações dada por $A e^{-\lambda t}$.

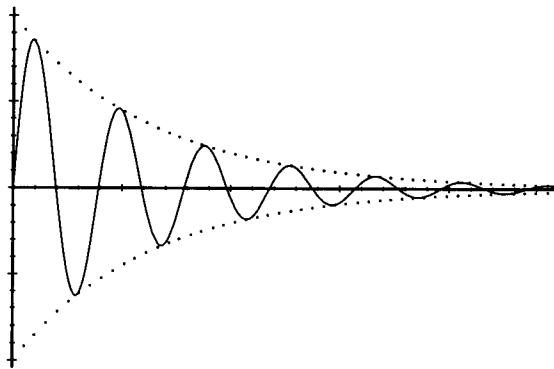


Figura 2.3 Oscilações Amortecidas

Se o amortecimento é muito grande, $w_0 < \lambda$, a equação (2.7) torna-se imaginária pelo que o movimento é não oscilatório (aperiódico) e amortecido (a amplitude decresce).

2.2.1.2 Oscilador Harmónico Forçado

Consideremos um oscilador harmónico sujeito a uma força elástica, $-Cx$, e a uma força externa, $F(t)$. São exemplos de osciladores forçados: a acção das ondas electromagnéticas absorvidas por uma antena sobre um circuito eléctrico, a colocação de um diapasão numa caixa de ressonância e a consequente oscilação das paredes da caixa (e do ar interior). A equação do movimento, desprezando o efeito do atrito, é,

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + Cx = F(t) \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x = \frac{1}{M} F(t), \text{ onde } w_0^2 = \frac{C}{M}.$$

A força externa pode ser de diversos tipos e pode exhibir vários tipos de dependência no tempo. Se a força externa é oscilatória, $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, a equação do movimento é,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x = \frac{F_0}{M} \cos(\omega t),$$

que é uma equação diferencial linear de 2ª ordem completa. A solução da equação homogénea é,

$$x(t) = A \cos(\omega t).$$

Para que $x(t)$ seja solução da equação diferencial completa, a amplitude A deve satisfazer a seguinte igualdade,

$$A = \frac{F_0}{M(w_0^2 - \omega^2)}.$$

2.2.1.3 Osciladores Harmónicos e a Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma transformação linear utilizada na resolução de problemas em sistemas lineares.

Teorema: Qualquer função periódica, $f(t)$, de período $P = 2\pi/\omega$, pode ser decomposta numa soma infinita, a chamada série de Fourier,

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + \dots + a_n \cos(n\omega t) + \dots \\ + b_1 \sin(\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots + b_n \sin(n\omega t) + \dots,$$

onde os coeficientes a_i e b_i ($i \in \mathbb{N}$) são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{P} \int_0^P f(t) dt;$$

$$a_i = \frac{2}{P} \int_0^P f(t) \cos(i\omega t) dt, \text{ para } i \geq 1;$$

$$b_i = \frac{2}{P} \int_0^P f(t) \sin(i\omega t) dt, \text{ para } i \geq 1,$$

e onde $2\omega, 3\omega, \dots, n\omega, \dots$, representam as frequências harmónicas.

O conjunto das funções periódicas $\{1, \sin(t), \cos(t)\}$ forma uma base do espaço vectorial das funções periódicas no domínio $[0, 2\pi]$, razão pela qual a decomposição de Fourier existe e é única. Desta forma, o estudo das funções periódicas reduz-se, simplesmente, ao estudo das funções sinusóidais, que se revela útil no estudo das filas de espera, como veremos a seguir.

2.2.2 Relação entre os Osciladores Harmónicos e as Filas de Espera com Capacidade de Serviço Variável

As filas de espera com capacidade de serviço variável são caracterizadas por: quando a capacidade de atendimento é insuficiente a fila cresce até ao limiar em que abrem mais guichets (postos de serviço), momento em que a capacidade de atendimento ultrapassa a procura e a fila volta a diminuir até ao limiar de fecho dos guichets. Basta portanto, abrir mais um posto de serviço para que as filas de espera apresentem um comportamento periódico, característico dos osciladores harmónicos estocásticos. No gráfico abaixo ilustramos o comportamento de uma fila de espera com dois postos de serviço.



Gráfico 2.1 Evolução de uma Fila de Espera com dois postos de Serviço (#PS=2):
Taxa de Chegada= 50, Taxa de Atendimento= 30 ; PS2: abre 11 e fecha 4

Se as taxas de chegada e de atendimento forem determinísticas temos exactamente o comportamento dos osciladores (figuras 2.4, 2.5 e 2.6).

Para fixar ideias, suponhamos uma fila de espera em que os clientes chegam regularmente, isto é, deterministicamente à taxa de 30 clientes por unidade de tempo e que a capacidade de serviço de cada posto, igualmente determinística, é de 20 clientes por unidade de tempo. Quando está apenas um posto de serviço activo, a fila de espera aumenta à taxa de 10 clientes por unidade de tempo e explode. Se, no momento em que estão 10 pessoas no sistema abrir o segundo posto de serviço, idêntico ao primeiro, a fila de espera diminui à taxa de $2 \cdot 20 - 30 = 10$ clientes por unidade de tempo e, quando o segundo posto fechar volta a aumentar à taxa de 10 clientes por unidade de tempo. Estamos perante uma situação onde as velocidades de subida e de descida são iguais como se pode observar na figura abaixo.

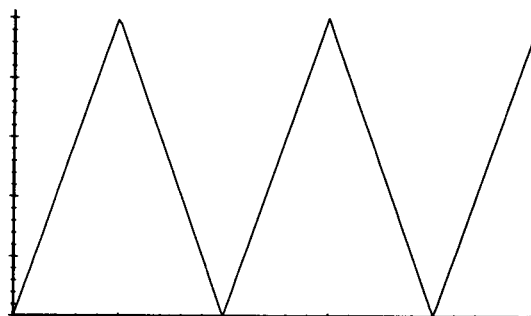


Figura 2.4 Velocidade de subida igual à de descida

Se a taxa de chegada fosse de 31 clientes por unidade de tempo e a capacidade de atendimento de 30 clientes por unidade de tempo, a subida seria à taxa de 1 cliente por unidade de tempo e a descida à taxa de $2 \cdot 30 - 31 = 29$ clientes por unidade de tempo, ou seja, a subida seria lenta e a descida rápida.

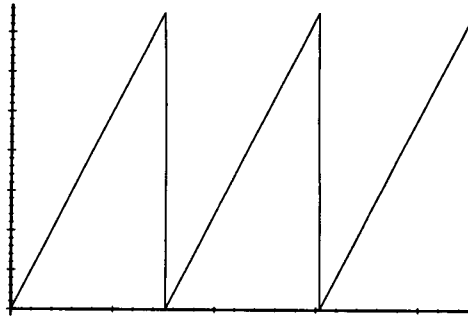


Figura 2.5 Velocidade de subida inferior à de descida

Se a taxa de chegada fosse de 70 clientes por unidade de tempo e a capacidade de atendimento de 30 clientes por unidade de tempo, a subida ocorreria à taxa de 40 clientes por unidade de tempo. Se no momento em que estiverem 40 clientes no sistema abrir um segundo posto a subida ocorreria à taxa de $70 - 2 \cdot 30 = 10$ clientes por unidade de tempo. Abrindo ainda mais um posto a descida ocorreria à taxa de $3 \cdot 30 - 70 = 20$ clientes por unidade de tempo até o sistema esvaziar, altura em que os segundo e terceiro postos fecham, reiniciando-se o processo.

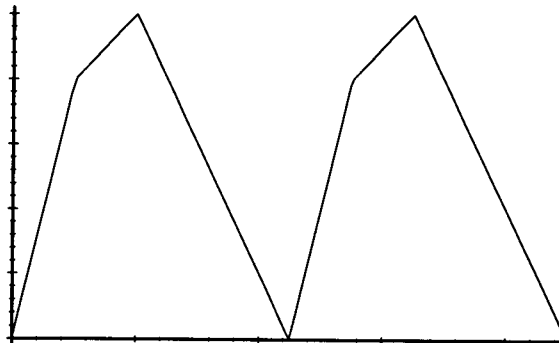


Figura 2.6 Velocidade de subida não constante

Podemos, portanto, "jogar" com as velocidades de subida e descida do oscilador para obtermos praticamente todas as funções periódicas que entendermos.

2.2.2.1 Taxas de Chegada Flutuantes

Caso usual é as chegadas ocorrerem segundo um Processo de Poisson homogéneo, visto ser um modelo simples, mas de facto existem muitos outros processos de chegada. Recordamos que, um processo de contagem $\{N(t); t \geq 0\}$ diz-se um Processo de Poisson (PP) com intensidade ou taxa λ , $\lambda > 0$ se,

(i) $N(0)=0$;

(ii) O processo tem incrementos independentes e estacionários;

(iii) A probabilidade de ocorrência de uma chegada entre t e $t+\Delta t$ (com Δt um intervalo de tempo infinitesimal) é dada por:

$$P(N(\Delta t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

onde λ é a intensidade do processo e $o(\Delta t)$ é tal que, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$;

(iv) A probabilidade de duas ou mais chegadas simultâneas entre t e $t+\Delta t$ é dada por:

$$P(N(\Delta t) \geq 2) = o(\Delta t).$$

Podemos ainda considerar processos determinísticos em que os clientes chegam igualmente intervalados e processos a que chamamos quase-determinísticos, em que os clientes chegam em intervalos afectados de uma pequena aleatoriedade. Dentro dos processos determinísticos distinguimos os processos com taxa constante e os processos com taxa flutuante, onde os clientes chegam ao sistema periodicamente, sendo a taxa de chegada constante por blocos. Estes tipos de processos estão associados a sistemas com algum tipo de dispositivo anterior à fila de espera, como por exemplo, um outro sistema de espera.

Do ponto de vista prático há muitas situações em que este tipo de comportamento aparece desde os semáforos que abrem e fecham até à escolha dos possíveis clientes.

2.2.2.2 Taxas de Atendimento Variáveis

A taxa de atendimento variável ou a capacidade de serviço modificável aparece naturalmente em qualquer situação em que o atendedor humano tem alguma interacção, por exemplo, visual, com a fila de espera. O atendedor humano pode optar por fazer um atendimento simplificado aumentando a capacidade de serviço, manter a sua capacidade de serviço mas chamar um colega para duplicar o número de clientes atendidos por unidade de tempo ou, enervar-se diminuindo a sua capacidade de atendimento, podendo, no entanto, esta diminuição estar relacionada com o tamanho da fila (ver secção 4.3).

Se a opção for por um aumento da capacidade de serviço em função do tamanho da fila de espera, o tamanho da fila pode tornar-se periódico, pelo que, via análise de Fourier constatamos a sobreposição de osciladores harmónicos.

2.3 Caos

Existem muitas definições de caos abrangendo um vasto leque de áreas. Optámos por seguir a abordagem topológica, tratada com mais detalhe em [D89] e [S64].

Suponhamos que temos um sistema dinâmico definido, por exemplo, em $X=[a, b] \subset \mathbb{R}$ e dado pela seguinte relação,

$$x_{n+1} = h(x_n), \quad (2.8)$$

onde h é uma aplicação de X em X .

Designamos de *órbita* ou *trajectória do sistema*, a uma sucessão definida pela condição de recorrência (2.8). Chamamos *ponto fixo* a um ponto \hat{x} tal que $\hat{x} = h(\hat{x})$ e dizemos que a *órbita é periódica de período T* se, $x_{n+T} = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Li e York (1975) e Sarkowskii (1964) provaram o seguinte resultado:

Seja $X=[a, b] \subset \mathbb{R}$ e h uma função contínua de X em X . Se existe $x^* \in X$ tal que,

$$h^3(x^*) \leq x^* < h(x^*) < h^2(x^*)$$

então,

(1) Para todo o inteiro $n > 1$, há um ponto periódico x_n com período n .

(2) Há um conjunto não numerável W de pontos não periódicos tais que,

(a) Se $x, y \in W$ com $x \neq y$ então,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |h^n(x) - h^n(y)| > 0 \text{ e } \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |h^n(x) - h^n(y)| = 0;$$

(b) Se $x \in W$ e y é um ponto periódico,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |h^n(x) - h^n(y)| > 0.$$

A condição (2a) diz-nos que existem dois pontos não periódicos cujas iteradas se aproximam e se afastam uma infinidade de vezes.

A condição (2b) diz-nos que, se o estado inicial está em W , isto é, se o estado inicial não é periódico então não se aproxima de nenhum ponto periódico nem mesmo assintoticamente.

Um sistema dinâmico verificando estas condições diz-se que exhibe *caos topológico*.

A condição (2) indica-nos uma certa dependência nas condições iniciais. Em geral um sistema dinâmico diz-se que tem *dependência sensitiva nas condições iniciais* se, existe um ε positivo, para todo o elemento x de X e para toda a vizinhança U_x de x , e se existe um y na vizinhança U_x de x e um número natural, n , tal que o módulo da diferença das n -ésimas iteradas de $h(x)$ e de $h(y)$ é maior que ε . Simbolicamente,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \forall U_x \quad \exists y \in U_x \quad \exists n \in \mathbb{N} : |h^n(x) - h^n(y)| > \varepsilon.$$

Intuitivamente, dizemos que um sistema dinâmico exibe dependência sensível nas condições iniciais se existem pontos arbitrariamente próximos de x cujas iteradas se afastam de x em pelo menos ε unidades.

Como estas condições, (1) e (2), são muitas vezes difíceis de se verificar (na prática) foram propostas definições alternativas.

Por exemplo, h é dito *caótico* em X se é sensível nas condições iniciais, possui uma órbita densa (ocupa o espaço todo) e o conjunto dos pontos periódicos é denso em X .

Se a aplicação h possui uma órbita densa dizemos que o sistema dinâmico é topologicamente transitivo, isto é, a aplicação h de X em X é dita *topologicamente transitiva* se dados dois conjuntos abertos U e V contidos em X , existe k positivo tal que a intersecção entre a k -ésima iterada de $h(U)$ e V é não vazia. Simbolicamente,

$$\forall \substack{U, V \subset X \\ U \text{ e } V \text{ abertos}} \quad \exists k \in \mathbb{N} : h^k(U) \cap V \neq \emptyset.$$

O que significa que o sistema dinâmico caótico não pode ser decomposto em dois conjuntos abertos disjuntos.

Em conclusão, um sistema dinâmico caótico é imprevisível, não admite decomposição e possui uma regularidade. A imprevisibilidade pode ser exibida pela dependência sensível nas condições iniciais e como é topologicamente transitivo, não pode ser decomposto em dois subsistemas. Apesar do comportamento com aparência "aleatória" o sistema dinâmico caótico apresenta regularidade caracterizada pelo facto de o conjunto dos pontos periódicos ser denso.

Exemplo: (Retirado de: "Apontamentos de Análise Matemática I. FEUP. Capítulo 0 - Noções de Topologia Métrica")

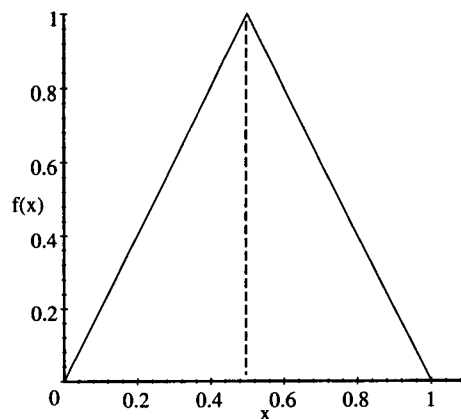
Considere-se a aplicação, f , de $[0, 1]$ em $[0, 1]$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x & , x \geq \frac{1}{2} \end{cases},$$

associada ao seguinte sistema dinâmico, $x_{n+1} = h(x_n)$, onde h é dada por,

$$h(x_n) = \begin{cases} 2x_n & , x_n \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x_n & , x_n \geq \frac{1}{2} \end{cases},$$

cuja representação gráfica é:



Este sistema exibe dependência sensível nas condições iniciais, com efeito se tomarmos como condições iniciais $x_0=0,4$ e $y_0=0,401$, as duas órbitas divergem até se perderem uma da outra.

n	x_n	y_n	$ x_n - y_n $
0	0,4	0,401	0,001
1	0,8	0,802	0,002
2	0,4	0,396	0,004
3	0,8	0,792	0,008
4	0,4	0,416	0,016
5	0,8	0,832	0,032
6	0,4	0,336	0,064
7	0,8	0,672	0,128
8	0,4	0,656	0,256

9	0,8	0,688	0,112
10	0,4	0,624	0,224
11	0,8	0,752	0,048
12	0,4	0,496	0,096
13	0,8	0,992	0,192
14	0,4	0,016	0,384
15	0,8	0,032	0,768
16	0,4	0,064	0,336
17	0,8	0,128	0,672
18	0,4	0,256	0,144
19	0,8	0,512	0,288
20	0,4	0,976	0,576
21	0,8	0,048	0,752
22	0,4	0,096	0,304
23	0,8	0,192	0,608
24	0,4	0,384	0,016
25	0,8	0,768	0,032
26	0,4	0,464	0,064
27	0,8	0,928	0,128
28	0,4	0,144	0,256
29	0,8	0,288	0,512
30	0,4	0,576	0,176
31	0,8	0,848	0,048
32	0,4	0,304	0,096
33	0,8	0,608	0,192
34	0,4	0,784	0,384001
35	0,799999	0,431999	0,368
36	0,400002	0,863998	0,463997
37	0,800003	0,272003	0,528
38	0,399994	0,544006	0,144012
39	0,799988	0,911987	0,112
40	0,400024	0,176025	0,223999
41	0,800049	0,352051	0,447998
42	0,399902	0,704102	0,304199
43	0,799805	0,591797	0,208008
44	0,400391	0,816406	0,416016
45	0,800781	0,367188	0,433594
46	0,398438	0,734375	0,335938
47	0,796875	0,53125	0,265625
48	0,40625	0,9375	0,53125
49	0,8125	0,125	0,6875
50	0,375	0,25	0,125

A partir da tabela construída no EXCEL e que traduz a evolução temporal das duas trajectórias constatamos que, $|x_n - y_n| = 2^n |x_0 - y_0|$ até um certo n . Graficamente, o comportamento observado é,

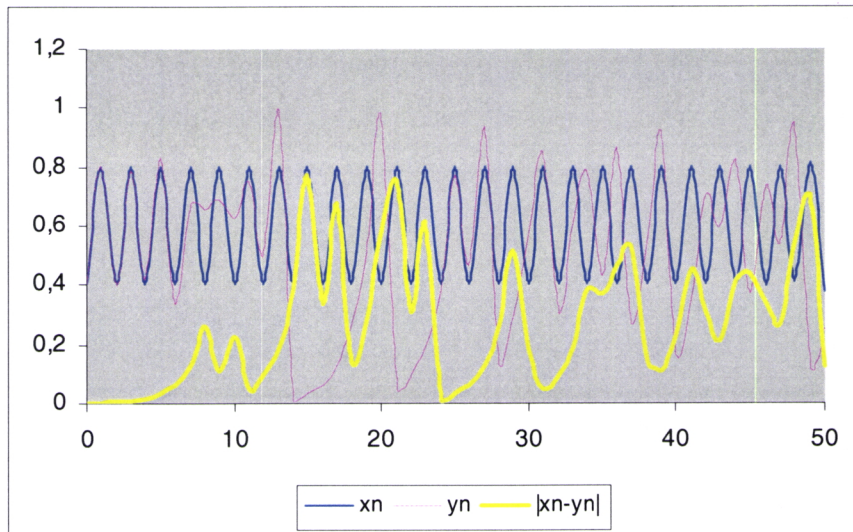


Gráfico 2.2 Comportamento divergente das trajetórias associadas às condições iniciais $x_0=0,4$ e $y_0=0,401$

2.4 Modelos com “Self Organised Criticality”

“Driving to work, you get stuck in a traffic jam and turn on the radio. The news is dominated by the devastation caused by the Turkish earthquake. Then comes word that forest fires have broken out again in Malaysia. Finally arriving at your office half an hour late, you’re told that after several years of amazing profitability, your company’s fortunes have taken a dive.

It’s just one of those days when everything seems to be going wrong. No sense getting upset about it – after all, there’s no rhyme or reason behind it. Or is there? Could there be some sort of pattern in the vagaries of life – a law that might allow them to be predicted, perhaps even averted?”¹

Por mais surpreendentes que sejam as evidências, estas apontam para a existência de uma lei, um princípio matemático que modela o tráfego, os fogos florestais, os tremores de terra, a actividade vulcânica, a vida, a formação de paisagens, o mercado de ações, a estrutura das empresas e até mesmo as filas de espera.

¹ Retirado de *Worldlink* (versão electrónica), edição de Novembro/Dezembro de 1999. (<http://backissues.worldlink.co.uk/articles181199171232/04.htm>)

Físicos e Matemáticos defendem que, grande parte dos fenómenos acima descritos e muitos outros são descritos por uma fórmula simples que promete, mesmo para os mais cépticos, ser mais importante do que a descoberta, há mais de 200 anos, da lei normal pelo matemático francês Frances Abraham De Moivre.

A forte crença na existência de uma lei universal conduziu a comunidade científica à criação de uma teoria matemática. Esta teoria é designada de "*Self-Organized Criticality (SOC)*". O arquétipo de um modelo SOC é a Pilha de Areia, cujo comportamento foi simulado em 1987 por Bak, Tag e Wiesenfeld.

A teoria SOC tem como base as interacções internas existentes em grandes sistemas. Os fenómenos SOC são caracterizados por possuírem uma dinâmica interna que os “auto-organiza” num estado crítico, governado por uma lei. Um *ponto crítico* é um ponto no qual o sistema muda radicalmente de comportamento ou estrutura. Uma vez o sistema neste estado qualquer pequena perturbação provoca reacções em cadeia - *Teoria das Avalanches* – que afectam todos os elementos do sistema.

2.4.1 O Modelo da Pilha de Areia

Consideremos uma caixa na qual se deita areia, grão a grão. No princípio, os grãos começam por preencher o fundo da caixa, começando depois a formar uma pilha. Quanto mais grãos forem adicionados maior é a inclinação da pilha, a qual atingirá um ponto crítico tal que, a adição de um grão de areia apenas, provoca uma avalanche. A avalanche preenche as áreas eventualmente vazias da caixa. Adicionando mais areia, esta começa a sair para fora da caixa. Quando o número de grãos de areia adicionados for igual ao número de grãos de areia perdidos (em média), então e de acordo com a teoria SOC, dizemos que, a pilha de areia auto-organizou-se num estado crítico. A adição de mais um grão de areia pode ou não provocar uma avalanche, contudo, a adição de um grão, a este estado crítico, irá certamente causar uma nova avalanche.

A implicação desta teoria nos fenómenos SOC permite-nos preocupar apenas com a globalidade do sistema e não com detalhes (a pilha de areia funciona como uma única

entidade). Além disso, as avalanches apresentam a mesma lei, as avalanches maiores são proporcionalmente menos frequentes que as mais pequenas.

O algoritmo de simulação de um modelo SOC é estruturalmente simples. Considere-se uma superfície bidimensional onde cada ponto, $z(x, y)$, é caracterizado por um número n , que pode ser interpretado como a inclinação média da pilha de areia no ponto $z(x, y)$. Quando o declive médio aumenta uma unidade temos que,

$$z(x, y) \rightarrow z(x, y)+1.$$

Se o aumento for tal que provoque uma avalanche, teremos uma redistribuição de n :

$$z(x, y) \rightarrow z(x, y)-4;$$

$$z(x\pm 1, y) \rightarrow z(x\pm 1, y)+1;$$

$$z(x, y\pm 1) \rightarrow z(x, y\pm 1)+1,$$

ou seja, os grãos de areia distribuem-se pelos estados vizinhos. Se após a distribuição, o valor de n for muito grande para pelo menos um dos estados vizinhos, o processo continua e caso não o seja, o processo pára. Neste caso escolhemos um outro ponto $z(x, y)$, ao acaso, e recomeçamos o processo.

O modelo da Pilha de Areia também pode ser tratado como um autómato celular visto possuir tempo e espaço de estados discretos.

Em 1992, Nagel executou uma experiência com pilhas de areia em caixas com três lados e tubos rotativos semicilíndricos cheios de areia. A areia caía a uma taxa constante na caixa mas o local era aleatório, fruto da rotação dos tubos semicilíndricos. Com esta experiência Nagel descobriu que as avalanches ocorrem periodicamente, sugerindo assim um comportamento oscilatório deste tipo de sistemas. O carácter periódico das avalanches está directamente relacionado com as variações na inclinação da pilha de areia.

Kai Nagel e Maya Paczki do *Brookhaven National Laboratory* em *Long Island* descobriram uma lei que relaciona o tamanho do engarrafamento de tráfego com a sua frequência, sugerindo desta forma que os carros numa estrada, tal como os grãos de areia numa pilha, criam estados SOC.



“Scientists have found that a power law links the size of traffic jam to their frequency, suggesting that cars on a road can – like grains of sand in a pile – create state of so-called self-organised criticality”¹

2.4.2 As Filas de Espera com Capacidade de Serviço Variável como Fenómenos SOC

O primeiro aspecto que nos faz ligar as filas de espera com capacidade de serviço variável aos fenómenos SOC é o comportamento divergente de estados vizinhos, o que traduz a ocorrência ou não de avalanches. Em filas de espera a avalanche traduz-se pela abertura de mais um posto de serviço ou pelo aumento da taxa de atendimento. Supondo que os segundos postos de serviço abrem quando o número de clientes na fila é superior ou igual a p , o estado crítico caracteriza-se por estarem $p-1$ clientes na fila de espera. A chegada de um cliente provoca a reacção em cadeia de abertura dos segundos postos, a qual pode não existir se em vez de ocorrer uma chegada ocorrer um fim de serviço. Não menos interessante é o facto de as aberturas dos segundos postos, as avalanches, apresentarem o comportamento oscilatório, demonstrado por Nagel. A questão fundamental que fica em aberto é saber, detectar e caracterizar a “pseudo-periodicidade” das avalanches num sistema real.

É com base nestes argumentos que afirmamos que, estes modelos de filas de espera são semelhantes a modelos SOC. No entanto, e para que a comunidade científica ligada ao estudo das Filas de Espera passe a encarar este facto é necessário que se proceda a uma investigação, que remetemos para trabalho futuro, da lei que relaciona o tamanho da fila de espera com a frequência da sua ocorrência.

2.5 Osciladores Não Lineares e Caos em Filas de Espera

O primeiro resultado sobre a existência de caos em osciladores eléctricos relaxados foi publicado em 1926, por Van der Pol.

A equação do movimento do sistema RLC (Resistência, Bobine, Capacidade) não linear tratado, em 1926, por Van der Pol, é

$$\ddot{x} - \alpha x + w^2 x = 0,$$

cuja solução é dada por,

$$x = C e^{\frac{\alpha t}{2}} \operatorname{sen} \left[\left(w^2 - \frac{\alpha^2}{4} \right) t + \varphi \right], \text{ para } \alpha > 0 \text{ e } \frac{\alpha^2}{4} < w^2.$$

Substituindo α por $\alpha - 3\frac{\gamma}{x^2}$, onde γ é uma constante e escrevendo $w t = t'$ e

$$x = \left(\frac{\alpha}{3\gamma} \right)^{1/2} v, \text{ Van der Pol conseguiu controlar o crescimento ilimitado da solução } x,$$

obtendo uma nova equação,

$$\ddot{v} - \beta(1 - v^2)\dot{v} + v = 0, \text{ onde } \beta = \frac{\alpha}{w} \text{ e } \dot{v} = \frac{dv}{dt'}, \quad (2.9)$$

conhecida como a equação de Van der Pol.

Se adicionarmos uma força externa, $F(t)$, do tipo sinusoidal, $F(t) = A \operatorname{sen}(w_0 t)$, obtemos a equação,

$$\ddot{v} - \beta(1 - v^2)\dot{v} + v = A \operatorname{sen}(w_0 t), \text{ onde } \beta = \frac{\alpha}{w} \text{ e } \dot{v} = \frac{dv}{dt'},$$

também designada na literatura por equação de Van der Pol.

Van der Pol construiu um outro oscilador capaz de produzir subharmônicas da frequência natural, w/i (para $i \geq 2$). Esta geração interna de subharmônicas é um dos primeiros indícios da existência de caos. Anos mais tarde, Li e Yorke, em 1975,

conseguiram, com base no trabalho desenvolvido por Van der Pol, demonstrar a existência de caos se existem ciclos de período 3.

Para um determinado sistema físico a sua solução num dado instante, t , define completamente o estado do sistema e ocupa um ponto no espaço de fases de tal forma que, com o decorrer do tempo, a trajectória traça uma linha no espaço de fases, que é única. Cada ponto do espaço de fases define completamente o estado físico do sistema e as trajectórias do espaço de fases traduzem o desenvolvimento físico do sistema.

A construção de um espaço de fases permite-nos averiguar a existência de ciclos limite (estáveis ou não), de ciclos atractores, se as espirais convergem em direcção aos pontos de equilíbrio (pontos de equilíbrio estáveis), e repulsores, se as espirais se afastam dos pontos de equilíbrio (pontos de equilíbrio instáveis).

A divergência de retratos de fase com pontos de partida muito próximos e descritos pela mesma lei permite detectar a existência de caos, no sentido da dependência sensitiva nas condições iniciais.

As trajectórias obtidas num sistema com um atractor caótico são distintas e nunca se aproximam umas das outras. Se, num sistema com um atractor caótico, as trajectórias têm origens próximas verifica-se que, com o evoluir do tempo as trajectórias vão divergir de forma exponencial, dando desta forma, um carácter imprevisível à evolução no tempo.

A estrutura do espaço de fases caótico é designada de fractal e foi utilizada pela primeira vez por Mandelbrot, em 1975, para expressar a ideia de 'forma' recorrendo a uma dimensão não – inteira.

O retrato de fases da equação de Van de Pol (2.9) pode ser obtido numericamente recorrendo ao Método de Euler, cuja estrutura é,

dado o sistema de equações diferenciais ordinárias autônomas (EDO's) do tipo,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases},$$

as iterações x_n e y_n são obtidas através do sistema,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h g(x_n, y_n) \end{cases},$$

onde h representa o incremento de tempo. Se h é suficientemente pequeno, a solução numérica é uma “boa” aproximação da solução do sistema. Por outro lado, se h for suficientemente grande, a solução numérica estará “longe” da solução real, podendo o retrato de fases exibir os seguintes comportamentos.

Considerando novamente a equação (2.9), dada por $\ddot{v} - \beta(1 - v^2)\dot{v} + v = 0$ e definindo $\dot{v} = u$, obtemos o sistema,

$$\begin{cases} \dot{v} = u \\ \dot{u} = \beta(1 - v^2)u - v \end{cases}.$$

Na figura abaixo apresentamos o retrato de fases para o sistema anterior.

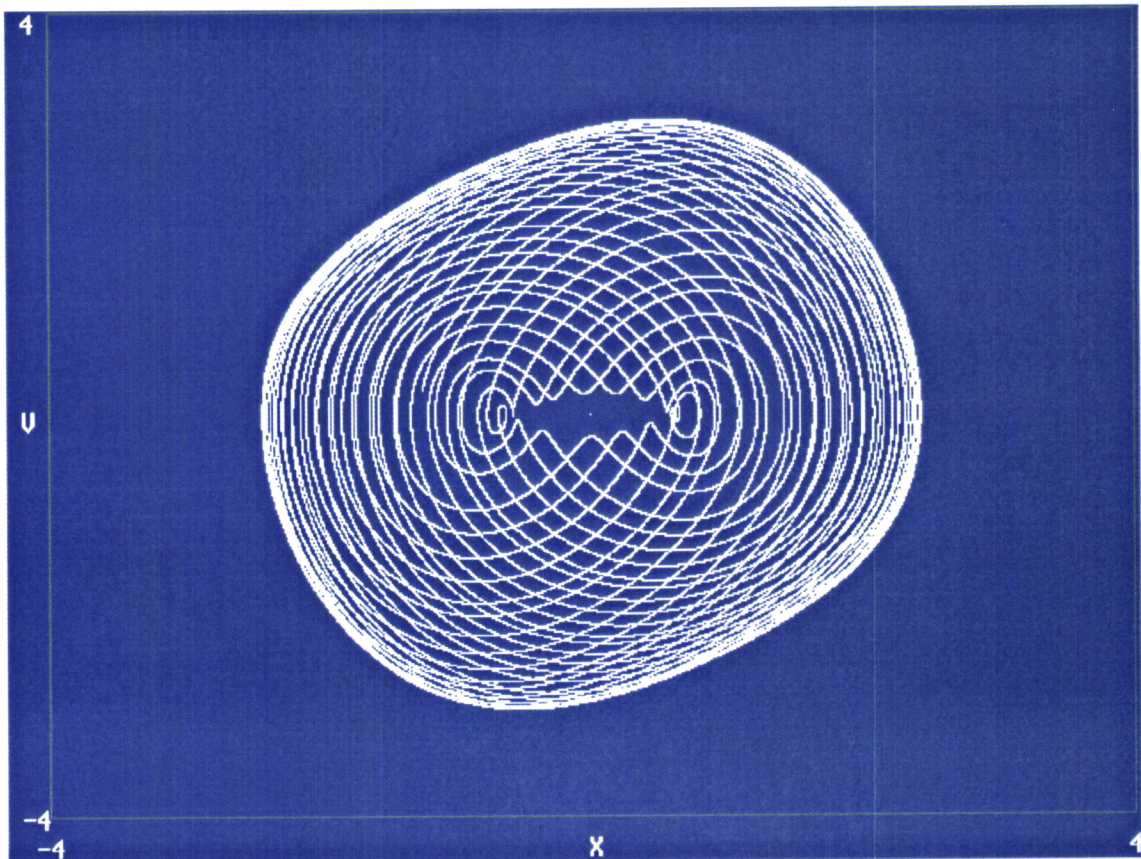


Figura 2.7 Retrato de fases da Equação de Van der Pol
(Retirado de <http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/phys505/images/DRIVEVDP.gif>)

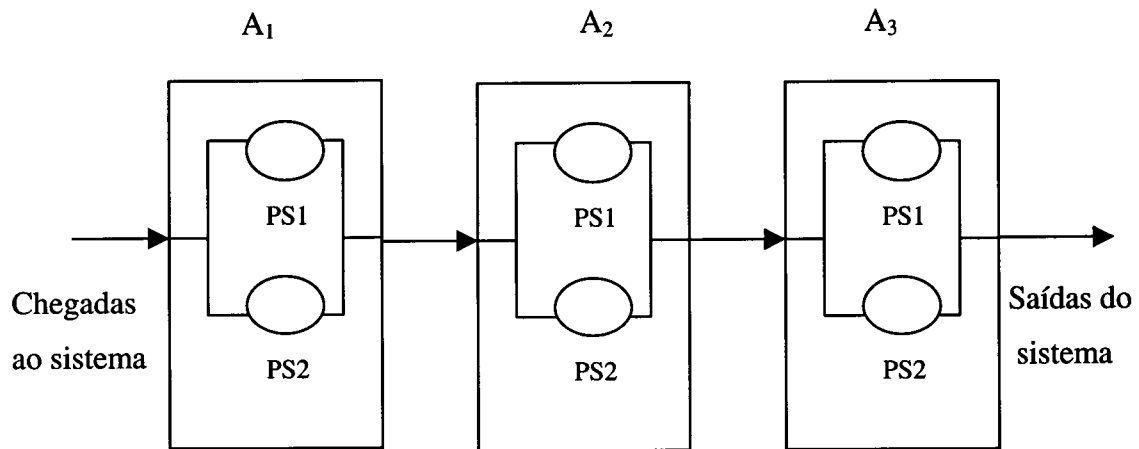
Esperamos, portanto, detectar a existência de caos nas filas de espera com capacidade de serviço variável, no sentido da dependência sensível nas condições iniciais.

Esperamos também que o modelo linear não seja adequado para modelar a sucessão cronológica associada ao número de clientes no sistema. Uma forma de verificarmos que o modelo não é linear é mostrando que a memória do processo varia. Ao ajustarmos um modelo à sucessão do número de clientes no sistema contamos que esta mude estruturalmente de simulação para simulação (secção 5.3).

Nos modelos em que a intensidade de tráfego é um, $\rho = \frac{\lambda}{2\mu} = 1$ (2 postos de serviço),

vamos ter flutuações estatísticas, uma vez que o modelo é estocasticamente instável, as quais devemos analisar. Além disso, vamos também ter de analisar os tempos de regresso ao mesmo estado uma vez que, estes tempos podem ser de diferentes tipos. Este assunto será estudado com mais detalhe na secção 5.2.

Consideremos a título ilustrativo o seguinte modelo composto por três osciladores acoplados em série onde, PS, representa um posto de serviço:



Para completar o atendimento o utente tem que passar sucessivamente nas áreas de serviço A₁, A₂ e A₃. Em cada área de serviço pode ser atendido no posto de serviço 1 ou no posto de serviço 2.

É este tipo de sistemas que vamos analisar e que é o centro desta tese.

Consideremos que os postos de serviço 1 (PS1) estão sempre abertos, que a abertura dos segundos postos de serviço (PS2) ocorre quando o número de clientes na fila de espera é superior ou igual a 10, os quais fecham quando não houverem clientes à espera e, que o atendimento é realizado numa unidade de tempo.

Os estados deste sistema podem ser caracterizados pelos trios ordenados (A₁, A₂, A₃), onde A₁, A₂ e A₃ representam o número de utentes à espera nas áreas de serviço A₁, A₂ e A₃, respectivamente. Podemos, também, calcular a distância entre dois estados utilizando, por exemplo, a norma do supremo. Assim, sendo (A₁, A₂, A₃) e (A'₁, A'₂, A'₃) dois estados do sistema, definimos a distância entre eles como sendo, $d = \sup_{1 \leq i \leq 3} |A_i - A'_i|$.

Consideremos os estados vizinhos (10,9,9) e (9,9,9) e analisemos a sua evolução, supondo que não ocorreu nenhuma chegada ao sistema.

Estados	A_1	A_2	A_3	A'_1	A'_2	A'_3	d
0	10	9	9	9	9	9	1
1	8	10	9	8	9	9	1
2	6	10	10	7	9	9	1
3	4	10	10	6	9	9	2
4	2	10	10	5	9	9	3
5	0	10	10	4	9	9	4
6	0	8	10	3	9	9	3
7	0	6	10	2	9	9	3
8	0	4	10	1	9	9	5
9	0	2	10	0	9	9	7
10	0	0	10	0	8	9	8
11	0	0	8	0	7	9	7
12	0	0	6	0	6	9	6
13	0	0	4	0	5	9	5
14	0	0	2	0	4	9	7
15	0	0	0	0	3	9	9
16	0	0	0	0	2	9	9
17	0	0	0	0	1	9	9
18	0	0	0	0	0	9	9
19	0	0	0	0	0	8	8
20	0	0	0	0	0	7	7
21	0	0	0	0	0	6	6
22	0	0	0	0	0	5	5
23	0	0	0	0	0	4	4
24	0	0	0	0	0	3	3
25	0	0	0	0	0	2	2
26	0	0	0	0	0	1	1
27	0	0	0	0	0	0	0

(Nota: Os valores a *bold* assinalam o funcionamento em simultâneo dos dois postos de serviço)

Como facilmente se observa, a evolução dos estados vizinhos, (10,9,9) e (9,9,9), espelha bem a dependência sensitiva nas condições iniciais deste tipo de modelos e a

imprevisibilidade da evolução no tempo. É neste sentido que vamos falar de caos em filas de espera, o mais pequeno desvio nas condições iniciais leva a desvios grandes nas previsões.

O estado (10,9,9) é um estado crítico, pois provoca uma "avalanche" de aberturas dos segundos postos de serviço de cada área, pelo que o modelo apresentado se enquadra dentro da teoria dos modelos SOC.

Nas secções 5.2 e 5.3 efectuaremos análises mais detalhadas sobre estes assuntos debruçando-nos essencialmente sobre a componente prática.

Capítulo 3

Um Simulador para Filas de Espera com Capacidade de Serviço Variável

3.1 Programação

A programação foi efectuada em *Matlab* tendo como principal objectivo a simulação de um problema concreto sobre filas de espera em série e em paralelo, para posterior análise do comportamento da sucessão cronológica associada ao número de clientes no sistema (número de clientes na fila de espera).

Consideremos um sistema com n áreas de serviço (AS) em série e onde cada área de serviço é composta por m postos de serviço (PS) (guichets, servidores) em paralelo ($n, m \in \mathbb{N}$) e que a abertura e fecho de cada posto de serviço obedece à seguinte regra de decisão: se o número de clientes na fila de espera da área de serviço i ($1 \leq i \leq n$) atingir A_{ij} , introduzem-se k ($1 \leq k \leq m$) servidores na área de serviço, quando diminuir para B_{ij} fecham-se os k servidores (sendo A_{ij} o limiar de abertura do j -ésimo posto de serviço da i -ésima área de serviço e B_{ij} o limiar de fecho do j -ésimo posto de serviço da i -ésima área de serviço).

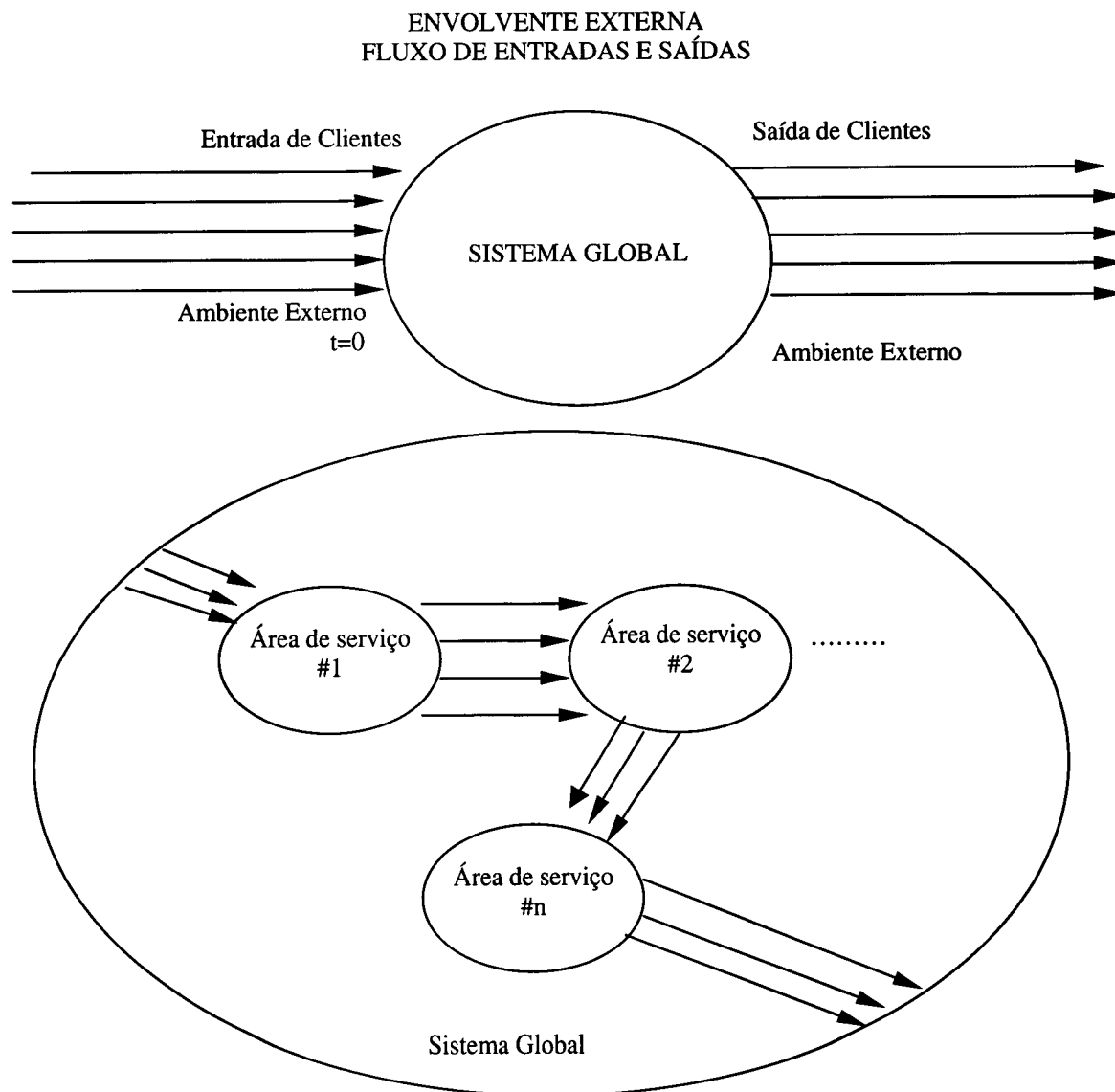
Para completar o serviço cada utente tem de passar pelas n áreas de serviço. Este é um tema que não encontramos descrito na bibliografia consultada. A associação de áreas de serviço corresponde à interacção entre osciladores.

Em relação à regra de decisão, convém ainda referir que, as quantidades A_{ij} e B_{ij} podem depender do posto de serviço e da área de serviço ou serem, apenas, função do posto de serviço. Como exemplo ilustrativo, considere-se o modelo: #AS=2 e #PS=2 e as regras de decisão:

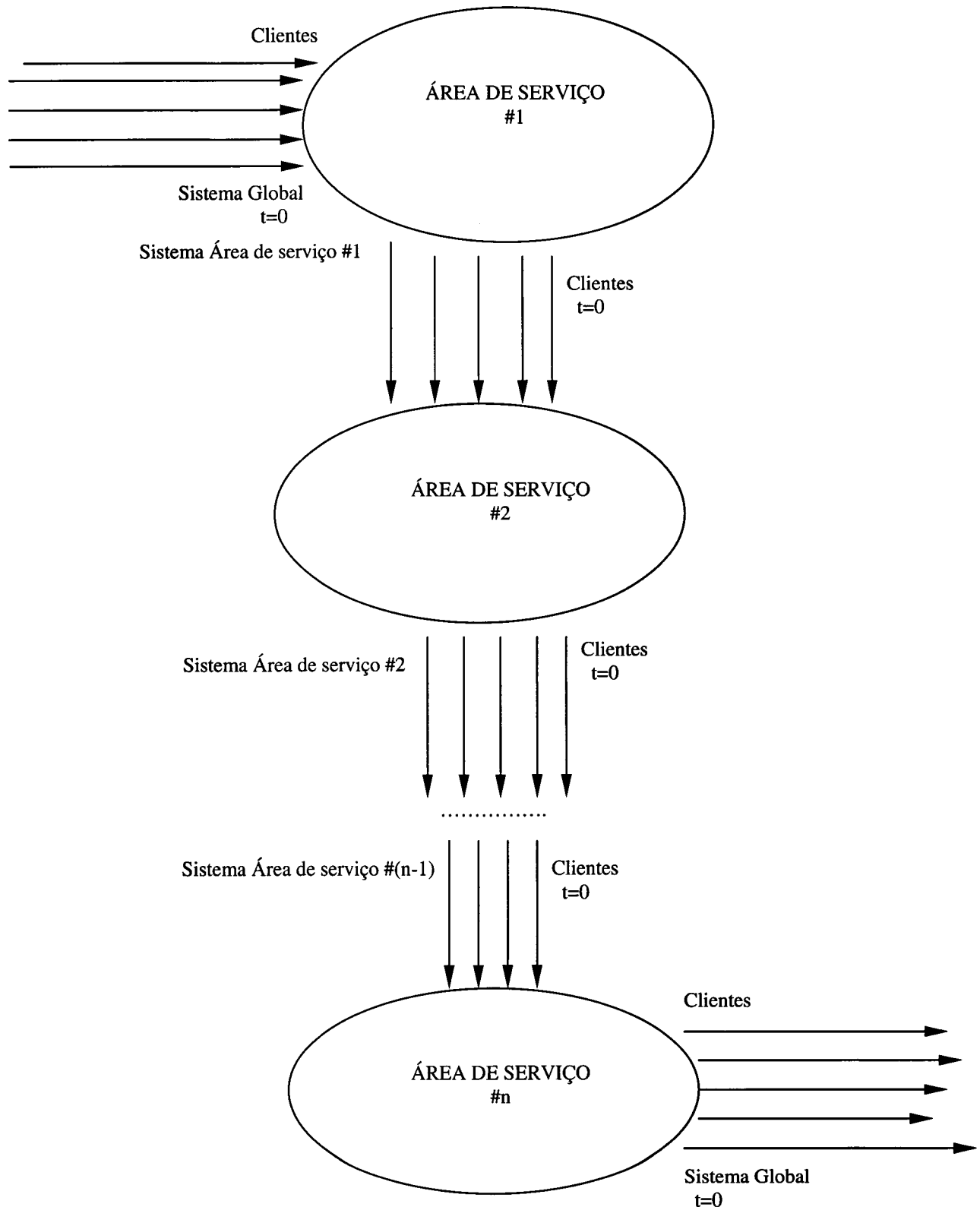
- 1ª Regra || Para AS1, PS2 abre quando #Fila de espera > 10 (A_{12})
 PS2 fecha quando #Fila de espera < 4 (B_{12})
 || Para AS2, PS2 abre quando #Fila de espera > 15 (A_{22})
 PS2 fecha quando #Fila de espera < 8 (B_{22})
- 2ª Regra || PS2 abre quando #Fila de espera > 10 (A_{i2}) (em qualquer AS)
 || PS2 fecha quando #Fila de espera < 4 (B_{i2}) (em qualquer AS).

Na primeira, as aberturas e fechos dos postos de serviço são função da área e do posto em questão, enquanto que, na segunda dependem apenas do posto de serviço.

A principal dificuldade da simulação de um problema deste tipo é o próprio problema em si, uma vez que é muito geral. Começámos por analisar o fluxo de entradas e saídas do sistema global, que apresentamos de forma esquemática.



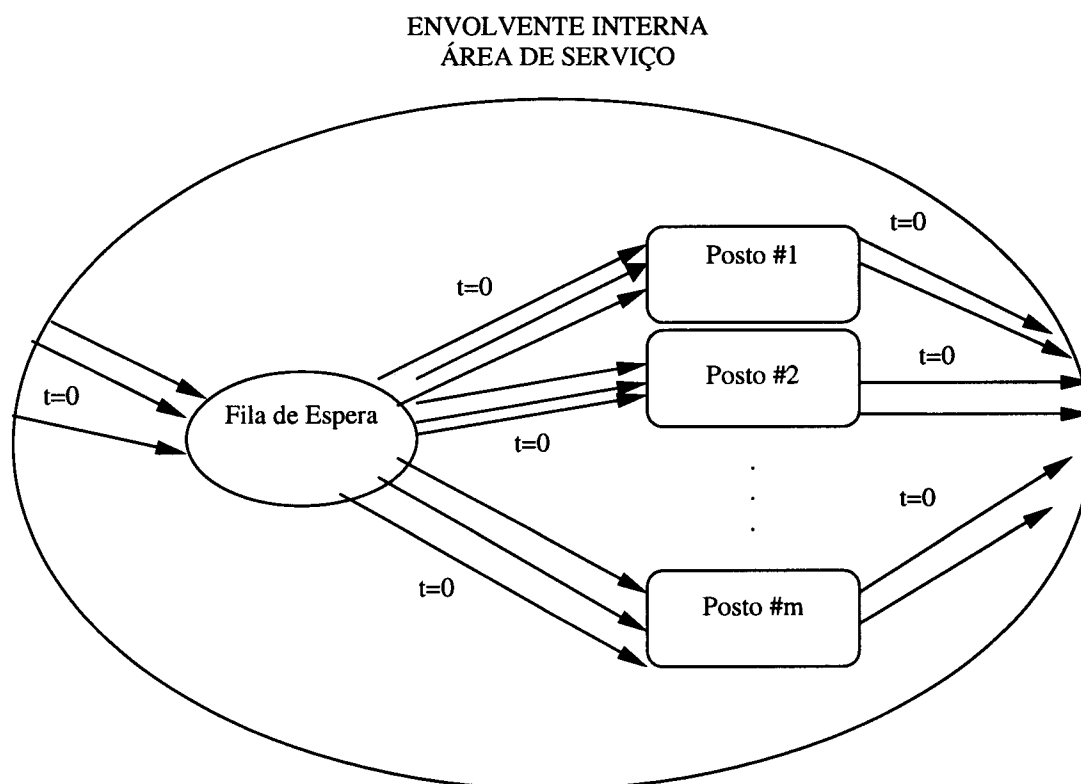
Supomos que a saída absorve todos os clientes que saem do sistema global. Caso isso não acontecesse, isto é, se o ambiente externo tivesse uma capacidade finita, provocaria uma acumulação de clientes na saída do sistema global. Esta acumulação excessiva de clientes iria afectar, numa primeira fase, a última área de serviço para posteriormente afectar o funcionamento de todas as áreas de serviço. Além disso, supomos também que a fonte do ambiente externo é ilimitada.

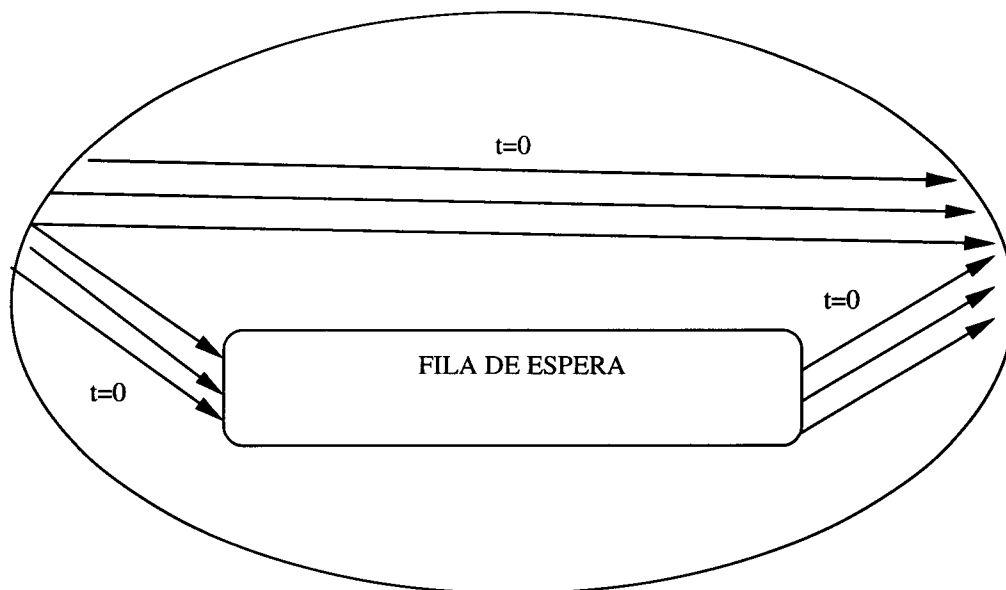


Analisando as envolventes externa e interna constatámos que, uma das dificuldades seria a conjugação de todo o tipo de acontecimentos, como por exemplo, a entrada de um cliente no sistema, a sua movimentação, a actualização dos tempos, a saída do cliente do sistema, Desta forma começámos por considerar nulos os seguintes tempos:

- tempo que um cliente demora a chegar à fila de espera;
- tempo que um cliente demora a deslocar-se da fila de espera para o posto de serviço;
- tempo que um cliente leva a chegar ao posto de serviço, quando não existe fila de espera formada;
- tempo que um cliente leva a sair do posto de serviço até ingressar na área de serviço seguinte, se esta existir.

Os diagramas esquemáticos realizados foram:





Construímos também tabelas com o intuito de auxiliar a gestão de todas as ocorrências.

		AREA SERVICIO#1			AREA SERVICIO#2			AREA SERVICIO#3			
ACTIVIDADES		PS#1	PS#2	FL#1	PS#1	PS#2	FL#1	PS#1	PS#2	FL#1	IN
FECHADO/ABERTO	0/1										
INACTIVO/ACTIVO	0/1										
NEUTRO/OCORRE	0/1										
TEMPO	seg										

		AREA SERVICIO#1			AREA SERVICIO#2			AREA SERVICIO#3		
FILA ESPERA	num									

		AREA SERVICIO#1			AREA SERVICIO#2			AREA SERVICIO#3				
		PS#1	PS#2	FILA	PS#1	PS#2	FILA	PS#1	PS#2	FILA	IN	OUT
TOTAL	num											

TEMPO REAL	AREA SERVICIO#1					AREA SERVICIO#2					AREA SERVICIO#3					IN	TMP IN	OUT
	PS#1	TMP	PS#2	TMP	FILA	PS#1	TMP	PS#2	TMP	FILA	PS#1	TMP	PS#2	TMP	FILA			

		AREA SERVICIO#1			AREA SERVICIO#2			AREA SERVICIO#3			TOTAL
Tmp Activ/CLIENTE		PS#1	PS#2	FL#1	PS#1	PS#2	FL#2	PS#1	PS#2	FL#3	

Na elaboração do algoritmo principal recorremos a funções auxiliares, as chamadas subrotinas, as quais pela sua frequente recorrência constituíram a maior dificuldade em conseguirmos uma estrutura ordenada que englobasse todos os sub-algoritmos. Como consequência deste facto um dos problemas que surgiu durante a construção do algoritmo principal foi a actualização, de forma ordenada, de todos os valores dos campos.

Paralelamente à elaboração do programa principal construímos uma subrotina, cuja principal função é escrever o mapa de simulação linha por linha.

Apresentamos a título de exemplo o mapa de simulação para o modelo:

M/M/2: #AS=1 ; #PS=2 ; o=50 ; tchg=35 ; ttd=20,

onde "o" representa o número de ocorrências (linhas) da simulação; "tchg" representa a taxa de chegada e "ttd" a taxa de atendimento.

TMP REAL	PS 1	TMP	PS 2	TMP	FL 1	IN	TMP	OUT
0.000	0	0.000	0	0.000	0	0	0.005	0
0.005	1	0.114	0	0.000	0	1	0.019	0
0.024	1	0.095	0	0.000	1	2	0.069	0
0.024	1	0.095	1	0.003	0	2	0.069	0
0.027	1	0.092	0	0.000	0	2	0.065	1
0.093	1	0.026	0	0.000	1	3	0.067	1
0.093	1	0.026	1	0.035	0	3	0.067	1
0.119	0	0.000	1	0.009	0	3	0.041	2
0.128	0	0.000	0	0.000	0	3	0.032	3
0.160	1	0.019	0	0.000	0	4	0.021	3
0.179	0	0.000	0	0.000	0	4	0.002	4
0.181	1	0.034	0	0.000	0	5	0.123	4
0.215	0	0.000	0	0.000	0	5	0.089	5
0.304	1	0.005	0	0.000	0	6	0.009	5
0.309	0	0.000	0	0.000	0	6	0.004	6
0.313	1	0.004	0	0.000	0	7	0.084	6
0.317	0	0.000	0	0.000	0	7	0.081	7
0.397	1	0.024	0	0.000	0	8	0.020	7
0.417	1	0.004	0	0.000	1	9	0.009	7
0.417	1	0.004	1	0.123	0	9	0.009	7

Baseado no algoritmo principal construímos dois novos códigos, onde no primeiro é permitido discretizar, à priori, o tempo, ou seja, os instantes de observação do sistema e no segundo as taxas de chegada e de atendimento são determinísticas. As subrotinas utilizadas são todas iguais à excepção da que escreve o mapa de simulação e da que trabalha directamente com as taxas de chegada e de atendimento. Com base no mesmo

modelo e considerando agora que $\rho=200$ e que o intervalo de discretização, Δt , é de 0.2, o mapa de simulação obtido é:

TMP REAL	PS 1	TMP	PS 2	TMP	FL 1	IN	TMP	OUT
0.000	0	0.000	0	0.000	0	0	0.007	0
0.206	1	0.084	1	0.037	4	12	0.031	6
0.405	1	0.008	1	0.222	8	21	0.013	11
0.601	1	0.072	1	0.026	8	26	0.016	16
0.802	1	0.034	1	0.028	8	34	0.118	24
1.071	1	0.074	0	0.000	0	37	0.041	36
1.212	1	0.008	0	0.000	0	40	0.008	39
1.473	1	0.018	0	0.000	0	43	0.008	42
1.604	1	0.008	1	0.007	3	51	0.000	46
1.812	1	0.019	1	0.017	4	59	0.004	53
2.004	1	0.019	1	0.045	7	71	0.031	62
2.215	1	0.050	1	0.046	8	79	0.024	69
2.401	1	0.004	1	0.095	5	87	0.042	80
2.635	1	0.032	1	0.057	1	93	0.007	90

Considerando o modelo M/M/2: #AS=1 ; #PS=2 ; $\rho=25$; $t_{chg}=50$; $t_{atd}=60$, mas supondo que as taxas de chegada e de atendimento são determinísticas obtemos o seguinte mapa de simulação.

TMP REAL	PS 1	TMP	PS 2	TMP	FL 1	IN	TMP	OUT
0.000	0	0.000	0	0.000	0	0	50.000	0
50.000	1	60.000	0	0.000	0	1	50.000	0
100.000	1	10.000	0	0.000	1	2	50.000	0
100.000	1	10.000	1	60.000	0	2	50.000	0
110.000	0	0.000	1	50.000	0	2	40.000	1
150.000	1	60.000	1	10.000	0	3	50.000	1
160.000	1	50.000	0	0.000	0	3	40.000	2
200.000	1	10.000	0	0.000	1	4	50.000	2
200.000	1	10.000	1	60.000	0	4	50.000	2
210.000	0	0.000	1	50.000	0	4	40.000	3
250.000	1	60.000	1	10.000	0	5	50.000	3
260.000	1	50.000	0	0.000	0	5	40.000	4
300.000	1	10.000	0	0.000	1	6	50.000	4
300.000	1	10.000	1	60.000	0	6	50.000	4
310.000	0	0.000	1	50.000	0	6	40.000	5
350.000	1	60.000	1	10.000	0	7	50.000	5
360.000	1	50.000	0	0.000	0	7	40.000	6
400.000	1	10.000	0	0.000	1	8	50.000	6
400.000	1	10.000	1	60.000	0	8	50.000	6
410.000	0	0.000	1	50.000	0	8	40.000	7
450.000	1	60.000	1	10.000	0	9	50.000	7
460.000	1	50.000	0	0.000	0	9	40.000	8
500.000	1	10.000	0	0.000	1	10	50.000	8
500.000	1	10.000	1	60.000	0	10	50.000	8
510.000	0	0.000	1	50.000	0	10	40.000	9

Os programas principais, as subrotinas e os mapas de simulação são apresentados no Apêndice 5 juntamente com a descrição sumária de cada subrotina.

Em ambos os códigos existem limitações, que passamos a indicar:

- A simulação do modelo M/M/1 tem uma restrição que adveio da dificuldade em gerir as aberturas e fechos dos postos de serviço, fruto da vasta classe de modelos que tentámos incluir no programa. Assim, a simulação deste modelo é realizada colocando dois postos de serviço por área (número mínimo por área) e escolhendo o limite de abertura do segundo posto de forma a que este nunca abra (número elevado);
- O primeiro posto de serviço de qualquer área de serviço encontra-se sempre aberto, só não funcionando na ausência de clientes. Este facto impede a simulação de modelos com chegadas e atendimentos em blocos.

Uma abordagem interessante, para um trabalho posterior, seria a construção de um programa simulador de filas de espera por módulos, no qual cada módulo trataria uma determinada classe de problemas e ao utilizador bastaria escolher o módulo correspondente ao modelo em análise.

3.2 Validação do Simulador

A validação do simulador, passa numa primeira fase por uma análise detalhada do gerador de números aleatórios do *Matlab* e numa segunda fase por simulações de modelos, cujos resultados teóricos sejam conhecidos, de modo a compararmos os resultados teóricos com os obtidos via simulação, analisando também as eventuais flutuações de amostragem. As análises referidas foram remetidas para o Apêndice 1, sob o título de Testes ao Gerador.

Capítulo 4

Elementos da Teoria de Filas de Espera com Capacidade de Serviço Variável

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos duas classes de modelos de filas de espera com capacidade de serviço variável, sendo a primeira caracterizada por possuir um número de servidores variável e a segunda, por ter taxa de atendimento variável em função do comprimento da fila de espera.

Os modelos apresentados, neste capítulo, enquadram-se dentro da teoria clássica das filas de espera pelo que há apenas uma área de serviço.

A primeira classe de modelos foi tratada por Ramalhoto e Syski [RS96] e refere-se a filas de espera $M/M/c$ com a seguinte regra de decisão: quando o número de clientes no sistema é superior ou igual a b (linha de acção) introduzem-se k postos de serviço no sistema, ficando o sistema com $c+k$ servidores, e quando é menor ou igual que a (linha de alarme ou prevenção) removem-se os k postos de serviço ($a < b$). Apresentamos os principais resultados obtidos pelos referidos autores bem como a generalização de um dos resultados apresentados.

Na segunda classe de modelos analisamos filas de espera $M/M/c$ com a seguinte característica: quando o número de clientes no sistema é superior ou igual ao número de servidores disponíveis, c , a taxa de atendimento aumenta exponencialmente em função do número de clientes na fila de espera.

Para cada classe de modelos apresentamos, a título ilustrativo, um ou dois exemplos numéricos.

4.2 Filas de Espera com Número de Servidores Variável

Consideremos o modelo markoviano do tipo nascimento e morte $M/M/c$ caracterizado por chegadas poissonianas de taxa λ , c servidores (postos de serviço) independentes com distribuição de serviço exponencial de taxa μ , disciplina da fila FCFS (*First Come First Served*), sem restrições à capacidade da fila de espera e com a seguinte regra de decisão: quando o número de clientes no sistema é superior ou igual a b adicionam-se k ($k \in \mathbb{N}$) servidores, e quando este é inferior ou igual a a retiram-se os k ($k \in \mathbb{N}$) postos de serviço, onde supomos que $a < b$.

Desta forma, se existirem $(b-1)$ clientes no sistema e ocorrer uma chegada, o número de servidores passa para $c+k$, mantendo-se até o número de clientes no sistema passar para a .

A classe de modelos assim definida é um *Processo de Markov bidimensional* $\{(X(t), Y(t)): 0 \leq t < \infty\}$, onde $X(t)$ representa o número de clientes no sistema no instante t e $Y(t)$ indica o número de servidores em funcionamento no instante t , com espaço de estados, Θ , dado pelos pares ordenados,

$$\Theta = \{(i, n): i = 0, 1, \dots; n = c, c+k\}.$$

Supondo que o processo está no estado (i, n) podem ocorrer as seguintes transições entre estados consecutivos:

- (i) um cliente termina o seu serviço:
 - a) $(i, c) \rightarrow (i-1, c)$, $1 \leq i \leq b-1$;
 - b) $(a+1, c+k) \rightarrow (a, c)$;
 - c) $(i, c+k) \rightarrow (i-1, c+k)$, $i \geq a+2$;
- (ii) chega um cliente ao sistema:
 - d) $(i, c) \rightarrow (i+1, c)$, $0 \leq i \leq b-2$;
 - e) $(b-1, c) \rightarrow (b, c+k)$;
 - f) $(i, c+k) \rightarrow (i+1, c+k)$, $i \geq a+1$;

O processo markoviano a 2-dimensões $(X(t), Y(t))$ é do tipo nascimento e morte, excepto nos estados onde há alteração do número de servidores.

As taxas de nascimento e morte do sistema são, respectivamente:

$$\lambda_{(i,n)} = \lambda, \forall (i,n) \in \Theta,$$

$$\mu_{(i,n)} = \begin{cases} i\mu & , 1 \leq i \leq c \wedge n = c \\ c\mu & , c \leq i \leq b-1 \wedge n = c \\ (c+k)\mu & , i \geq a+2 \wedge n = c+k \end{cases}$$

e as taxas de transição infinitesimais, $q_{(r,m)(i,n)}$, dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} q_{(i,c)(i+1,c)} = \lambda & , 0 \leq i \leq b-2 \\ q_{(b-1,c)(b,c+k)} = \lambda & , i=b-1 \\ q_{(i,c+k)(i+1,c+k)} = \lambda & , i \geq a+1 \\ q_{(i,c)(i-1,c)} = i\mu & , 1 \leq i \leq c \\ q_{(i,c)(i-1,c)} = c\mu & , c+1 \leq i \leq a \\ q_{(i,c)(i-1,c)} = c\mu & , a+1 \leq i \leq b-1 \\ q_{(a+1,c+k)(a,c)} = (c+k)\mu & , i=a+1 \\ q_{(i,c+k)(i-1,c+k)} = (c+k)\mu & , a+2 \leq i \leq b \\ q_{(i,c+k)(i-1,c+k)} = (c+k)\mu & , i \geq b+1 \end{array} \right.$$

As transições associadas ao fim de serviço dependem do número de servidores disponíveis, definindo-se duas fases:

- (i) fase ascendente: quando estão c servidores activos e $a \leq i \leq b-1$;
- (ii) fase descendente: quando estão $c+k$ servidores activos e $a+1 \leq i \leq b$.

O Grafo Infinitesimal das transições entre estados do processo é apresentado no Apêndice 2.

Definindo a probabilidade de o sistema estar no estado (i, n) por,

$$P_{(i,n)}(t) = P\{X(t) = i, Y(t) = n\},$$

é possível construir a matriz das probabilidades de transição, $\mathbf{P}(t)$, que é uma matriz estocástica¹ e que satisfaz o sistema de equações diferenciais progressivas de *Kolmogorov*. Na forma matricial, o sistema é dado por:

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}, \quad t \geq 0 \text{ e } \mathbf{P}(0) = \mathbf{I},$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e $\mathbf{Q} = (q_{(r,m)(i,n)})$ é a matriz das taxas de transição instantâneas, também designada de matriz infinitesimal, verificando $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{1}$ é o vector coluna constituído por uns e $\mathbf{0}$ é o vector coluna constituído por zeros.

A distribuição de equilíbrio (distribuição estacionária) do processo markoviano bidimensional, a existir, satisfaz a seguinte igualdade,

$$e_{(i,n)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_{(i,n)}(t),$$

que, em notação matricial é representada por $\mathbf{e} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(t)$.

Em equilíbrio, as probabilidades associadas a cada estado são independentes do tempo, logo, $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{0}$ e portanto, em regime estacionário,

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \tag{4.1}$$

sendo esta a equação matricial que permite obter a distribuição estacionária do processo.

¹ Uma matriz estocástica \mathbf{A} é uma matriz cujos elementos são todos não negativos, $\mathbf{A} \geq 0$, e cuja soma das linhas ou colunas é igual a 1, isto é, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$, onde $\mathbf{1}$ é o vector coluna com elementos todos iguais a um.

Definindo as quantidades, $\rho = \frac{\lambda}{(c+k)\mu}$ e $\tau = \frac{\lambda}{c\mu}$ onde $\rho < \tau$ e supondo $\rho < 1$, Ramalhoto e Syski [RS96] garantiram a existência de distribuição estacionária sem imporem qualquer restrição a τ .

A solução da equação (4.1) foi calculada pelos referidos autores, sendo dada por:

$$e_{(i,c)} = \tau^i c^{i-c} \frac{c!}{i!} \varphi(0, \tau) e_{(b-1,c)} \quad , 0 \leq i \leq c-1 \quad (4.2)$$

$$e_{(i,c)} = \tau^i \varphi(0, \tau) e_{(b-1,c)} \quad , c \leq i \leq a-1 \quad (4.3)$$

$$e_{(i,c)} = \tau^a \varphi(i-a, \tau) e_{(b-1,c)} \quad , a \leq i \leq b-1 \text{ (fase ascendente)} \quad (4.4)$$

$$e_{(i,c+k)} = \psi(i, \rho) \rho e_{(b-1,c)} \quad , a \leq i \leq b-1 \text{ (fase descendente)} \quad (4.5)$$

$$e_{(i,c+k)} = \psi(b, \rho) \rho^{i-b+1} e_{(b-1,c)} \quad , i \geq b \quad (4.6)$$

onde $\varphi(i, \tau) = \frac{\tau^i - \tau^{b-a}}{\tau^{b-1} - \tau^b}$, $\psi(i, \rho) = \frac{1 - \rho^{i-a}}{1 - \rho}$ e $e_{(b-1,c)}$ é obtido pela condição de normalização,

$$\sum_i e_{(i,c)} + \sum_i e_{(i,c+k)} = 1.$$

A distribuição de equilíbrio descrita pelas equações (4.2-4.6) simplifica-se bastante tomando $\tau=1$ e $b-a=1$. Quando $\tau=1$, $\lambda = c\mu$ logo, $\rho = \frac{c}{c+k}$. Reescrevendo $\varphi(i, \tau)$ na

forma $\frac{\tau^{i-b+1} - \tau^{-a+1}}{1 - \tau}$ mostra-se facilmente que, $\lim_{\tau \rightarrow 1} \varphi(i, \tau) = b - a - i$.

Observando o grafo infinitesimal das transições entre estados apresentado no Apêndice 2 facilmente se constata que, tomando o limite do processo markoviano a 2-dimensões quando o limiar de inclusão de novos servidores, b , tende para mais infinito, o modelo M/M/c com a regra de decisão apresentada, converge para a usual fila de espera M/M/c. Colocando a linha de acção tão longe quanto o necessário fazemos com que o sistema

nunca utilize os k servidores extra, funcionando, desta forma, como o usual modelo $M/M/c$.

Os autores mencionados demonstraram a convergência destes dois tipos de modelos nas seguintes condições:

- (a) Com $b-a=1$, $\tau < 1$ e $\rho < 1$, provaram a convergência das duas distribuições de equilíbrio;
- (b) Com $b-a=1$, $\tau \neq 1$ e $\rho < 1$, demonstraram a convergência do número médio de clientes no sistema.

Em relação ao ponto (b) pensamos que a demonstração apresentada terá uma gralha ao considerar $\tau \neq 1$ em vez de $\tau < 1$ porque, enquanto que no modelo $M/M/c$ com regra de decisão não é necessário impor qualquer restrição a τ , o mesmo não acontece no modelo limite, $M/M/c$, no qual, para haver distribuição estacionária é necessário impor que a intensidade de tráfego do processo, τ , seja inferior à unidade. Caso esta restrição seja violada, o modelo $M/M/c$ não tem estados estacionários e como tal não faz sentido considerar a distribuição de equilíbrio do processo, razão pela qual, segundo a nossa opinião, não é possível estabelecer qualquer tipo de convergência no ponto (b).

Finalizamos esta secção generalizando o resultado de convergência apresentado no ponto (a), demonstrando no Apêndice 3 que o modelo $M/M/c$ com a usual regra de decisão e com as restrições $b-a=n$, $\tau < 1$ e $\rho < 1$ converge para o modelo $M/M/c$, tomando o limite, quando n tende para mais infinito.

4.2.1 Exemplos Numéricos

Consideremos uma fila de espera onde as chegadas ocorrem segundo um processo de poisson de taxa 10 clientes por unidade de tempo e os clientes são atendidos, por dois servidores, à taxa de 5 clientes por unidade de tempo, sendo a disciplina da fila de espera FCFS e não havendo qualquer restrição ao tamanho da mesma.

O modelo descrito caracteriza-se por possuir $\tau=1$, facto que, simplifica e reduz a complexidade da distribuição de probabilidade do sistema em equilíbrio, descrita pelas equações (4.2-4.6).

Para este modelo, vamos considerar duas regras de decisão distintas, (a) e (b), analisando, para cada caso, a distribuição de probabilidade obtida e o número médio de clientes no sistema. As regras de decisão utilizadas são:

- (a) quando o número de clientes no sistema é superior ou igual a 5 abre-se mais um posto de serviço e quando este é inferior ou igual a 4 fecha-se o posto de serviço extra (caso em que $b-a=1$);
- (b) quando o número de clientes no sistema é superior ou igual a 6 abre-se mais um posto de serviço e quando este é inferior ou igual a 4 fecha-se o posto de serviço extra (caso em que $b-a>1$);

Regra de decisão (a): Neste caso o modelo é caracterizado por $\tau=1$ e $b-a=1$, logo as equações (4.2-4.6) podem ser reescritas do seguinte modo,

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{(i,c)} = c^{i-c} \frac{c!}{i!} e_{(b-1,c)} \quad , 0 \leq i \leq c-1 \\ e_{(i,c)} = e_{(b-1,c)} \quad , c \leq i \leq b-1 \\ e_{(i,c+k)} = \rho^{i-b+1} e_{(b-1,c)} \quad , i \geq b \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.7) \\ (4.8) \\ (4.9) \end{array}$$

onde $e_{(b-1,c)}$ é dado por:

$$e_{(b-1,c)} = \left[\frac{c!}{c^c} \sum_{i=0}^{c-1} \frac{c^i}{i!} + b - c + \frac{\rho}{1-\rho} \right]^{-1}.$$

Particularizando para o modelo descrito obtemos a seguinte distribuição de probabilidade, para o sistema em regime estacionário:

$$\left\{ \begin{array}{ll} e_{(i,2)} = \frac{2^i}{13i!} & , 0 \leq i \leq 1 \\ e_{(4,2)} = \frac{2}{13} & , 2 \leq i \leq 4 \\ e_{(i,3)} = \rho^{i-4} \frac{2}{13} & , i \geq 5 \end{array} \right.$$

O número médio de clientes no sistema é dado por:

$$\begin{aligned} & 0 * \frac{1}{13} + 1 * \frac{2}{13} + 2 * \frac{2}{13} + 3 * \frac{2}{13} + 4 * \frac{2}{13} + \frac{2}{13} \sum_{i=5}^{+\infty} i \rho^{i-4} = \\ & \frac{20}{13} + \frac{2}{13} \sum_{j=0}^{+\infty} ((j+2)+3) \rho^{j+1} = \frac{20}{13} + \frac{2}{13} \left\{ 3 \sum_{j=0}^{+\infty} \rho^{j+1} + \sum_{j=0}^{+\infty} (j+2) \rho^{j+1} \right\} = \\ & = \frac{20}{13} + \frac{2}{13} \left\{ \frac{3\rho}{1-\rho} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{d}{d\rho} (\rho^{j+2}) \right\}, \end{aligned}$$

e como a série geométrica é convergente para $|\rho| < 1$, é válida a permutação entre as operações diferenciação e soma infinita,

$$\begin{aligned} & = \frac{20}{13} + \frac{2}{13} \left\{ \frac{3\rho}{1-\rho} + \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \rho^{j+2} \right) \right\} = \frac{20}{13} + \frac{2}{13} \left\{ \frac{3\rho}{1-\rho} + \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho^2}{1-\rho} \right) \right\} = \\ & = \frac{20}{13} + \frac{2}{13} \left\{ \frac{\rho(5-4\rho)}{(1-\rho)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Substituindo ρ pelo respectivo valor (0,67) obtemos que o número médio de clientes no sistema é de 3,69.

Regra de decisão (b): Para este caso o modelo é caracterizado por $\tau=1$ e $b-a>1$, logo as equações (4.2-4.6) podem ser reescritas do seguinte modo,

$$e_{(i,c)} = c^{i-c} \frac{c!}{i!} (b-a) e_{(b-1,c)} \quad , 0 \leq i \leq c-1 \quad (4.10)$$

$$e_{(i,c)} = (b-a) e_{(b-1,c)} \quad , c \leq i \leq a-1 \quad (4.11)$$

$$e_{(i,c)} = (b-i) e_{(b-1,c)} \quad , a \leq i \leq b-1 \quad (4.12)$$

$$e_{(i,c+k)} = \frac{\rho(1-\rho^{i-a})}{1-\rho} e_{(b-1,c)} \quad , a \leq i \leq b-1 \quad (4.13)$$

$$e_{(i,c+k)} = \frac{\rho^{i-b+1}(1-\rho^{b-a})}{1-\rho} e_{(b-1,c)} \quad , i \geq b \quad (4.14)$$

onde $(e_{(b-1,c)})^{-1}$ é dado por:

$$\begin{aligned} (e_{(b-1,c)})^{-1} &= (b-a) \left[\frac{c!}{c^c} \sum_{i=0}^{c-1} \frac{c^i}{i!} + a-c+1 + \frac{b-a-1}{2} \right] + \\ &+ \frac{\rho}{1-\rho} \left[b-a-1 - \frac{\rho(1-\rho^{b-a-1})}{1-\rho} + \frac{1-\rho^{b-a}}{1-\rho} \right]. \end{aligned}$$

Desta forma, a distribuição de probabilidade do sistema, em equilíbrio, é:

$$\begin{aligned} e_{(i,2)} &= \frac{2^i}{14 i!} \quad , 0 \leq i \leq 1 \\ e_{(i,2)} &= \frac{2}{14} \quad , 2 \leq i \leq 4 \\ e_{(i,2)} &= \frac{(6-i)}{14} \quad , i=4, 5 \\ e_{(i,3)} &= \frac{\rho(1-\rho^{i-4})}{14(1-\rho)} \quad , i=4, 5 \\ e_{(i,3)} &= \frac{\rho^{i-5}(1-\rho^2)}{14(1-\rho)} \quad , i \geq 6 \end{aligned}$$

O número médio de clientes no sistema é dado por:

$$0 * \frac{1}{14} + 1 * \frac{2}{14} + 2 * \frac{2}{14} + 3 * \frac{2}{14} + 4 * \frac{2}{14} + (5 * \frac{1}{14} + 5 * \frac{1}{14} * \rho) + \frac{1}{14} \frac{1-\rho^2}{1-\rho} \sum_{i=6}^{\infty} i \rho^{i-5} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{25}{14} + \frac{5}{14} * \rho + \frac{1}{14} \frac{1-\rho^2}{1-\rho} \sum_{j=0}^{+\infty} ((j+2)+4)\rho^{j+1} = \\
 &= \frac{25}{14} + \frac{5}{14} * \rho + \frac{1}{14} \frac{1-\rho^2}{1-\rho} \left\{ 4 \sum_{j=0}^{+\infty} \rho^{j+1} + \sum_{j=0}^{+\infty} (j+2)\rho^{j+1} \right\} = \\
 &= \frac{25}{14} + \frac{5}{14} * \rho + \frac{1}{14} \frac{1-\rho^2}{1-\rho} \left\{ \frac{4\rho}{1-\rho} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^{j+2} \right\},
 \end{aligned}$$

como anteriormente é válida a permutação dos operadores derivada e somatório,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{25}{14} + \frac{5}{14} * \rho + \frac{1}{14} \frac{1-\rho^2}{1-\rho} \left\{ \frac{4\rho}{1-\rho} + \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho^2}{1-\rho} \right) \right\} = \\
 &= \frac{25}{14} + \frac{5}{14} * \rho + \frac{1}{14} \frac{1-\rho^2}{1-\rho} \left\{ \frac{4\rho}{1-\rho} + \frac{\rho(2-\rho)}{(1-\rho)^2} \right\} = \\
 &= \frac{25}{14} + \frac{5}{14} * \rho + \frac{1}{14} (1+\rho) \left\{ \frac{\rho(6-5\rho)}{(1-\rho)^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Substituindo ρ pelo valor de 0,67 constatamos que o número médio de clientes no sistema, para esta regra de decisão, é de 3,93.

4.3 Filas de Espera com Taxa de Atendimento Variável

Considere-se uma fila de espera M/M/m com as seguintes características:

- (i) Quando o número de clientes no sistema, k , é inferior ou igual ao número de servidores, a taxa de atendimento é dada por $k\mu$ ($1 \leq k \leq m$);
- (ii) Quando o número de clientes no sistema, k , é superior ou igual ao número de servidores disponíveis, a taxa de atendimento aumenta em função do número de clientes na fila de espera ($k-m$).

Assim, a taxa de atendimento é dada por,

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & , 1 \leq k \leq m \\ m\alpha^{k-m}\mu & , k \geq m \end{cases}$$

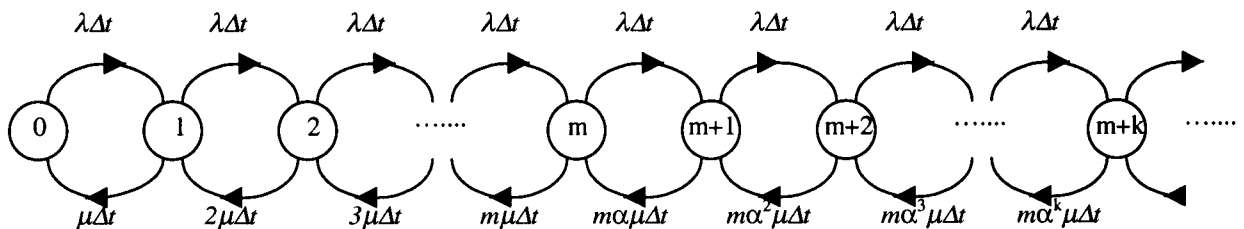
e a taxa de chegada de clientes ao sistema por,

$$\lambda_k = \lambda \quad , \forall k \in N_0,$$

onde k representa o número de clientes no sistema e α é uma constante verificando $\alpha > 1$. Se $\alpha = 1$, este modelo reduz-se ao usual $M/M/m$. Se $\alpha < 1$, os servidores atenderiam mais devagar, sendo a “lentidão” do serviço directamente proporcional ao número de clientes na fila de espera. Este comportamento está, por exemplo, associado a servidores nervosos que se atrapalham com o acumular de clientes no sistema e a sistemas com capacidade física limitada, como é o caso das oficinas.

Com $\alpha > 1$, quando o número de clientes no sistema ultrapassa o número de servidores activos, em vez de se abrirem mais postos de serviço, a taxa de atendimento é multiplicada por α por cada, novo, cliente na fila de espera.

O grafo infinitesimal das transições entre estados do processo é,



A distribuição estacionária do processo existe, impondo a usual restrição à intensidade

de tráfego do processo, $\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$.

As equações de equilíbrio do processo são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda P_{k-1} = k\mu P_k \quad 1 \leq k \leq m \\ \lambda P_{k-1} = m\mu \alpha^{k-m} P_k \quad k \geq m+1 \end{array} \right. \quad (4.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda P_{k-1} = k\mu P_k \quad 1 \leq k \leq m \\ \lambda P_{k-1} = m\mu \alpha^{k-m} P_k \quad k \geq m+1 \end{array} \right. \quad (4.16)$$

A partir da equação (4.15) obtemos que, para $1 \leq k \leq m$, a probabilidade associada a cada estado do processo é dada por,

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} P_0 \quad (4.17)$$

e, com base na equação (4.16) mostra-se que, para $k \geq m+1$, a probabilidade de cada estado do processo é,

$$P_k = \frac{\lambda^{k-m}}{(m\mu)^{k-m} \alpha^{\sum_{j=1}^{k-m} j}} P_m \quad (4.18)$$

Conjugando as equações (4.17) e (4.18) podemos escrever a probabilidade dos estados P_k para $k \geq m+1$, em função de P_0 ,

$$P_k = \frac{\lambda^k}{m! m^{k-m} \mu^k \alpha^{\sum_{j=1}^{k-m} j}} P_0. \quad (4.19)$$

A probabilidade de encontrar o sistema vazio, P_0 , é obtida através da condição de normalização,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P_k = 1,$$

isto é,

$$P_0 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^m \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{m! m^{k-m} \mu^k \alpha^{\sum_{j=1}^{k-m} j}} \right\} = 1,$$

ou seja,

$$P_0 = \left\{ \sum_{k=0}^m \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{m! m^{k-m} \mu^k \alpha^{\sum_{j=1}^{k-m} j}} \right\}^{-1}. \quad (4.20)$$

Com base na distribuição de probabilidade dos estados é possível determinar o número médio de clientes no sistema, o tempo médio de espera, o tempo médio de permanência, o número médio de clientes na fila de espera,....

Por questões práticas fixamos o tamanho da fila de espera em p clientes, donde, se estiverem no sistema $m+p$ clientes o $(m+p+1)$ -ésimo cliente é rejeitado bem como todos os clientes que chegarem ao sistema, enquanto nenhum dos clientes a serem servidos terminar o seu atendimento.

Finalizamos esta secção, apresentando dois exemplos numéricos onde tentaremos pôr em evidência, para cada um, a influência do parâmetro α no comportamento da distribuição de probabilidade dos estados do sistema.

4.3.1 Exemplos Numéricos

Exemplo 1: Consideremos o modelo M/M/2 onde as chegadas ocorrem à taxa de 20 clientes por unidade de tempo e o atendimento é efectuado à taxa de 7 clientes por unidade de tempo. A disciplina da fila é FCFS e a capacidade da fila é de 8 clientes, sendo de 10 o número máximo de clientes no sistema.

Recorrendo às equações (4.17, 4.19 e 4.20) e utilizando a folha de cálculo EXCEL obtivemos a distribuição de probabilidade associada aos estados do sistema para três valores diferentes de α : 1,2; 1,4 e 1,6, cujo gráfico apresentamos.

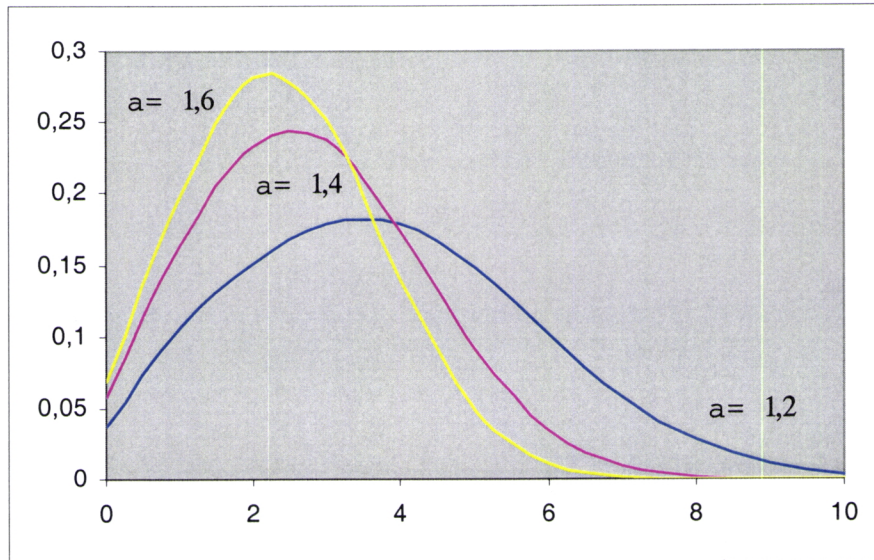


Gráfico 4.1 Evolução da distribuição de probabilidade do modelo M/M/2 com taxa de atendimento variável, em função de α

Como seria de esperar, o acréscimo do parâmetro α provoca uma diminuição na probabilidade de haver muitos clientes no sistema.

Exemplo 2: Considere-se o modelo M/M/5 onde os clientes chegam ao sistema à taxa de 40 clientes por unidade de tempo e o serviço efectuado por cada um dos servidores é prestado à taxa de 6 clientes por unidade de tempo. A disciplina da fila é FCFS e a capacidade da fila de espera é de 30 clientes, sendo de 35 o número máximo de clientes no sistema.

Mais uma vez, recorreremos às equações (4.17, 4.19 e 4.20) e à folha de cálculo EXCEL para obtermos a distribuição de probabilidade do sistema. Experimentámos diversos valores do parâmetro α (1,1; 1,2; 1,05; 1,025 e 1,4) sem que tivessem ocorrido alterações significativas da distribuição de probabilidade, pelo que, apresentamos, a título de exemplo, o gráfico da distribuição de probabilidade para $\alpha=1,1$.

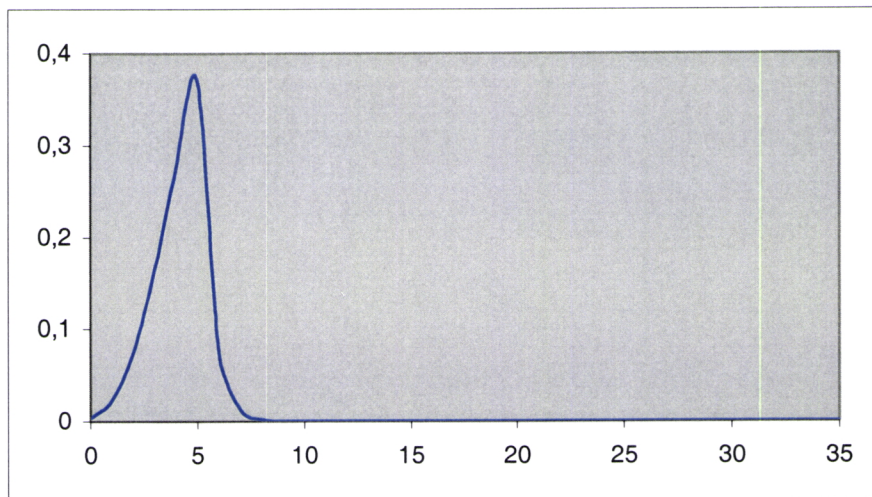


Gráfico 4.2 Evolução da distribuição de probabilidade do modelo M/M/5 com taxa de atendimento variável

Capítulo 5

Explorações do Simulador de Filas de Espera

5.1 Testes em Modelos com um Número de Servidores Variável

No Capítulo 3, descrevemos a construção de um simulador de filas de espera com capacidade de serviço variável e, em paralelo, mostrámos a validade do mesmo na simulação dos usuais modelos $M/M/c$.

Nesta secção, estamos interessados em simular alguns dos modelos propostos por [RS96] para efectuarmos, se possível, a confirmação, via simulação, dos resultados apresentados no referido artigo.

Apesar de existirem uma infinidade de modelos a testar, a complexidade destes não nos permite efectuar uma análise semelhante à efectuada na validação do simulador (veja-se Apêndice 1 - Testes Indirectos). Desta forma, optámos por simular os exemplos descritos na subsecção 4.2.1 de modo a confrontar o número médio de clientes no sistema, apresentado na referida subsecção, com o valor obtido, via simulação. Confirmamos ainda, via simulação, a convergência dos processos com um número variável de servidores para os usuais modelos M/M , quando a diferença entre os limiares de abertura e fecho tende para mais infinito.

Relembramos que na subsecção 4.2.1 trabalhámos modelos com dois postos de serviço, com chegadas à taxa de 10 clientes por unidade de tempo e atendimento à taxa de 5 clientes por unidade de tempo, com disciplina da fila de espera FCFS e sem restrições ao tamanho da mesma. Considerámos ainda duas regras de decisão, que recordamos:

- (a) quando o número de clientes no sistema é superior ou igual a 5 abre-se mais um posto de serviço e quando este é inferior ou igual a 4 fecha-se o posto de serviço extra;
- (b) quando o número de clientes no sistema é superior ou igual a 6 abre-se mais um posto de serviço e quando este é inferior ou igual a 4 fecha-se o posto de serviço extra.

Foram realizadas duas simulações, uma para cada regra de decisão, com 1000 ocorrências cada. Com base no mapa de simulação, determinámos o tempo (médio) total de permanência em cada estado do sistema e a probabilidade associada a estes, obtida pelo quociente entre tempo total de permanência em cada estado e o tempo total de simulação. Para cada simulação obtivemos a distribuição de probabilidade simulada e o número médio de clientes no sistema.

Os resultados obtidos para o modelo com a regra de decisão (a) foram:

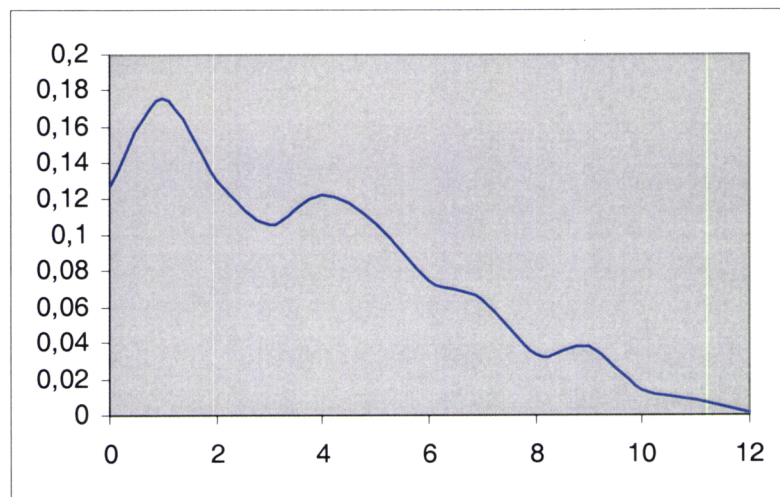


Gráfico 5.1 Distribuição de Probabilidade Simulada (n=1000) para o modelo com regra de decisão (a)

	Valor Simulado	Valor Teórico
Número médio de Clientes no Sistema	3,52	3,69

O valor simulado, do número médio de clientes, está muito próximo do respectivo valor teórico.

Os resultados obtidos na simulação do modelo com a regra de decisão (b) foram:

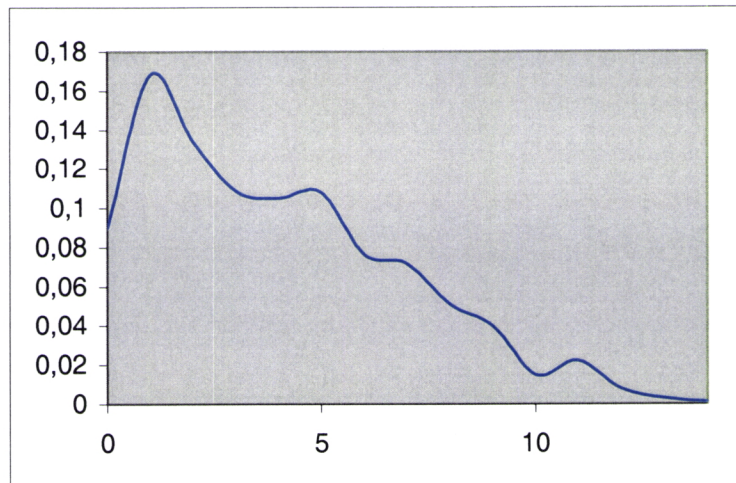


Gráfico 5.2 Distribuição de Probabilidade Simulada ($n=1000$) para o modelo com regra de decisão (b)

	Valor Simulado	Valor Teórico
Número médio de Clientes no Sistema	3,98	3,93

Mais uma vez, constatamos a proximidade entre o valor teórico e valor simulado do número médio de clientes no sistema.

Finalizamos esta secção, mostrando, via simulação, a convergência do modelo com regra de decisão: se o número de clientes na fila exceder as b unidades (limiar de abertura) abrem-se mais k postos de serviço, os quais fecham quando não existirem clientes na fila de espera, para o modelo M/M/c.

Com base no resultado exposto e demonstrado no Apêndice 3, seleccionámos o modelo: #AS=1 ; #PS=2 com a regra de decisão: PS2: Abre: b ; Fecha: 1 e tentámos verificar que, quando b aumenta, o modelo proposto converge para o modelo M/M/1, caracterizado por: #AS=1; #PS=1.

Fixámos as taxas de chegada e de atendimento de clientes em 40 e 45, respectivamente, garantindo, desta forma, a convergência do modelo M/M/1.

Efectuámos quarenta (40) simulações de 20000 ocorrências cada, onde, o critério de abertura e fecho estabelecido para a i -ésima ($1 \leq i \leq 40$) simulação foi:

PS2: Abre: $i-1$ ($1 \leq i \leq 40$) Fecha: 1.

Para cada simulação determinámos as probabilidades associadas a cada estado do sistema, efectuando os quocientes entre os tempos totais de permanência nos estados e o tempo total de simulação. Os resultados obtidos foram agrupados, apresentando o gráfico 5.3 a evolução da convergência, de duas em duas simulações.

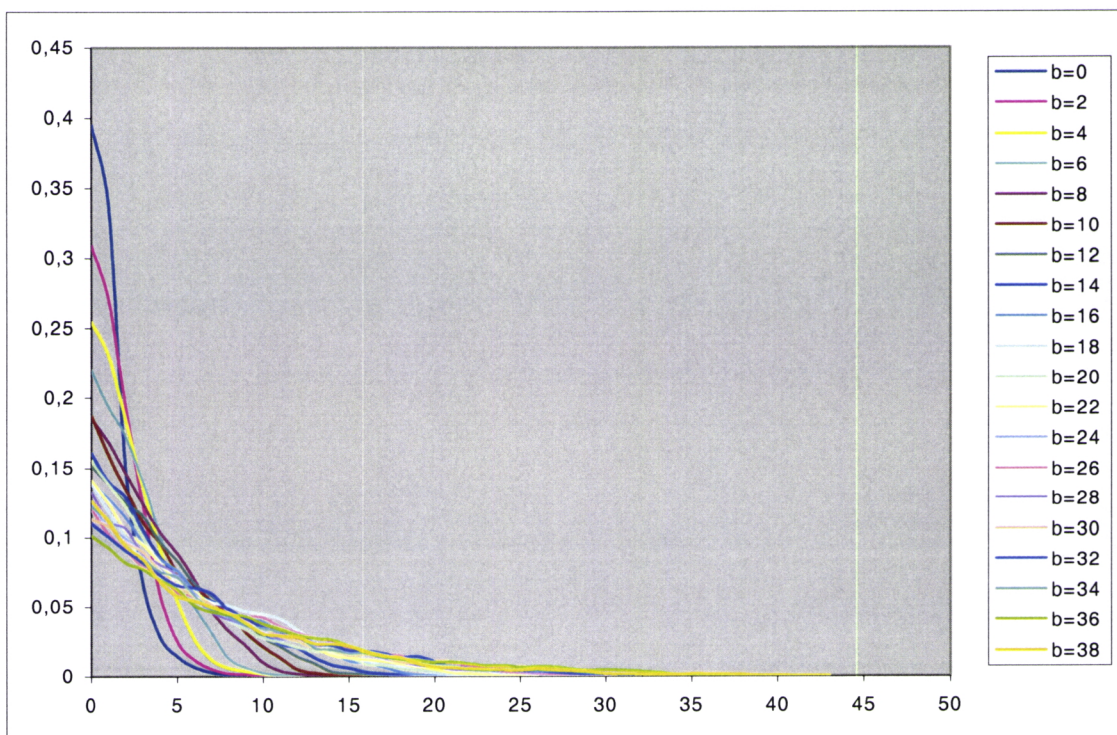


Gráfico 5.3 Convergência do modelo com regra de decisão para o modelo M/M/1

Como se pode observar, as distribuições de probabilidade simuladas aproximam-se da distribuição de probabilidade associada ao modelo M/M/1.

5.2 Procura de Misturas

A sensibilidade nas condições iniciais pode produzir comportamentos divergentes mas com tipos (leis) perfeitamente determinados e em número finito. Se tal se verificar, devemos encontrar no sistema, quantidades (variáveis aleatórias) que são misturas associadas a essas trajectórias divergentes. As passagens ascendentes do número de postos de serviço a funcionar em simultâneo devem exibir este tipo de comportamento.

As misturas de distribuições estão associadas a fenómenos descritos por leis diferentes, consoante os mecanismos que lhes estão subjacentes.

A procura de misturas de distribuições é centrada no modelo composto por uma área de serviço ($\#AS=1$) e três postos de serviço ($\#PS=3$) e onde os postos de serviço 1 e 2 não têm quaisquer restrições de abertura e fecho. Supomos ainda que, a taxa de chegada de clientes ao sistema é o dobro da taxa de atendimento, isto é, $\lambda=2\mu$, o que nos conduz a um modelo com grandes flutuações. As flutuações de amostragem, resultantes da instabilidade do modelo, conduzirão a situações onde há necessidade de abrir o 3º posto de serviço e a outras onde tal não é necessário. Pretendemos que o 3º posto de serviço não abra muitas vezes, mas apenas as suficientes para serem observadas. Assim, o limiar de abertura do posto de serviço 3 foi calculado teoricamente, supondo que este se encontra em actividade pelo menos cerca de 10% do tempo total de simulação.

Nos casos em que o 3º posto de serviço abre esperamos que o número de clientes na fila de espera decresça rapidamente, uma vez que estão três servidores activos. Ao observarmos o comportamento final da fila de espera do sistema, esperamos identificar descidas abruptas do número de clientes correspondentes à abertura do 3º posto de serviço.

Defina-se, então, a variável aleatória Z , que traduz o número de postos de serviço (guichets) a funcionar em simultâneo e que corresponde ao estado do sistema. A variável aleatória assim definida toma os valores: $Z=1$, se apenas um posto de serviço está em funcionamento; $Z=2$, se estão dois postos de serviço em funcionamento e $Z=3$, quando estão todos os postos em actividade.

Definida a variável aleatória Z , é agora possível determinar os tempos médios de retorno ao mesmo estado do sistema, resultantes das passagens ascendentes do número de postos de serviço a funcionar em simultâneo, de forma a analisar a sua distribuição.

Ao observarmos o estado do sistema $Z=2$, facilmente se constata que o retorno a este estado pode ser efectuado de duas formas diferentes:

(i) Fecho de um posto de serviço e posterior abertura: $Z=2 \rightarrow Z=1 \rightarrow Z=2$.

Como no sistema simulado os postos de serviço 1 e 2 estão sempre em funcionamento, o encerramento de um deles deve-se apenas ao facto de não existirem clientes no sistema;

(ii) Abertura do 3º posto de serviço e posterior fecho: $Z=2 \rightarrow Z=3 \rightarrow Z=2$.

O retorno ao estado $Z=2$ é estruturalmente diferente do apresentado na situação (i), pelo que, terá certamente uma distribuição diferente.

Efectuada a simulação do sistema e analisando os tempos médios de retorno ao estado $Z=2$, teremos tempos provenientes das duas situações anteriores. Esperamos que a conjugação destas duas leis dê uma mistura e que esta seja detectável.

O modelo escolhido para a realização da simulação foi: #AS=1; #PS=3 ; $\lambda=40$; $\mu=20$; $o=10000$ com as seguintes regras de decisão de abertura e fecho do posto de serviço 3:

	Abertura PS3	Fecho PS3
Regra 1	36	33
Regra 2	36	32
Regra 3	35	32

Depois de efectuadas as simulações, determinámos a distribuição do tempo de retorno ao estado $Z=2$, para cada regra de decisão. Para identificar a presença ou não de misturas de distribuições, calculámos, para cada caso, a distribuição cumulativa e, com base nesta, construímos o gráfico do logaritmo da distribuição cumulativa, apresentando, a título ilustrativo, o gráfico correspondente à regra de decisão 3.

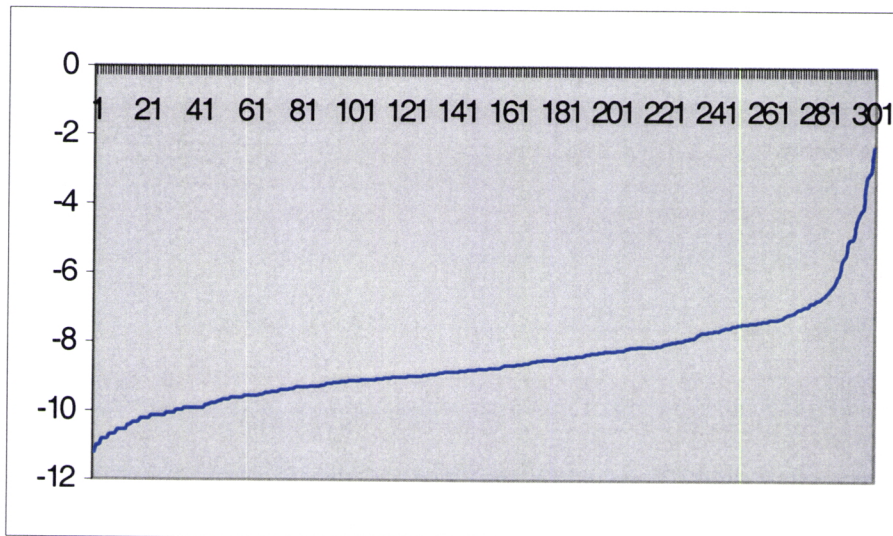


Gráfico 5.4 Logaritmo da distribuição cumulativa das passagens ascendentes no estado $Z=2$, para a 3ª regra de decisão

A curva descrita no gráfico fez-nos lembrar a curva associada à distribuição cumulativa do modelo normal, facto que nos conduziu à elaboração dos Papéis de Probabilidade Normais, para cada uma das distribuições obtidas. Na construção do papel de probabilidade normal supusemos que a média da distribuição é nula. Os resultados obtidos para os logaritmos das distribuições cumulativas de cada regra de decisão são apresentados nos gráficos abaixo.

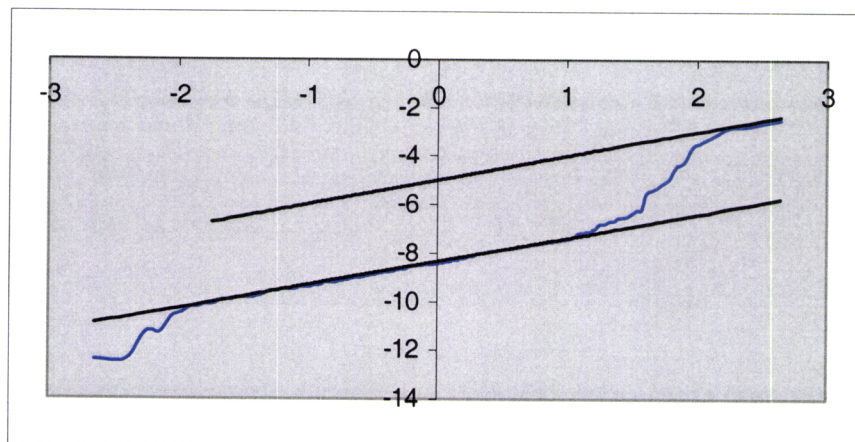
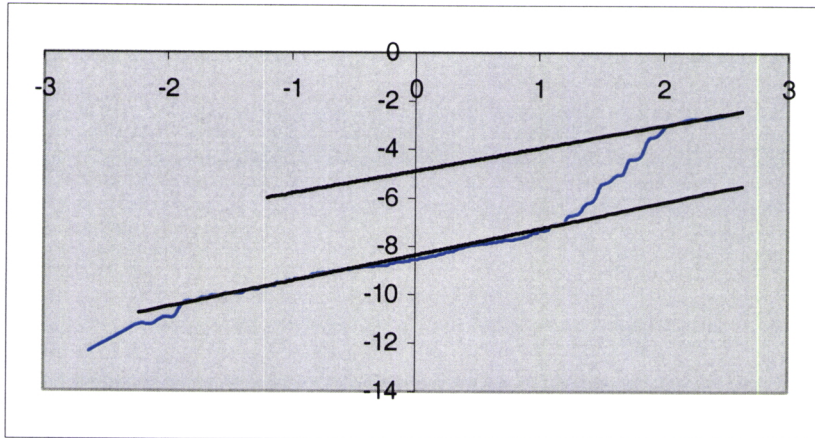
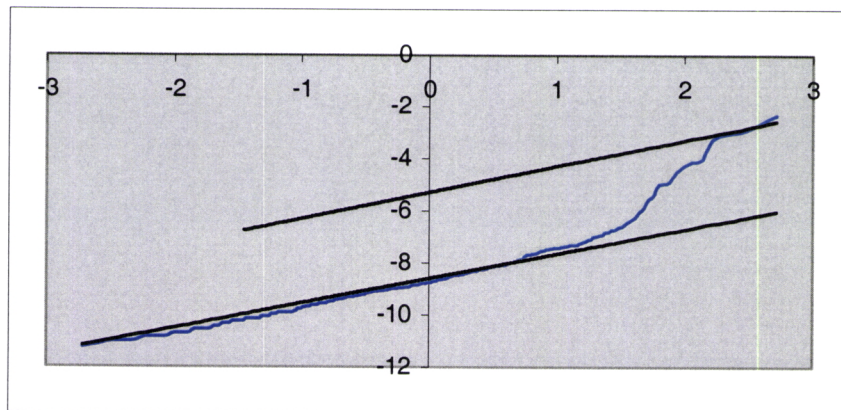


Gráfico 5.5 Papel de Probabilidade Normal para $\ln(\pi)$ com $Z=2$ para a regra 1

Gráfico 5.6 Papel de Probabilidade Normal para $\ln(p_i)$ com $Z=2$ para a regra 2Gráfico 5.7 Papel de Probabilidade Normal para $\ln(p_i)$ com $Z=2$ para a regra 3

Nos três gráficos apresentados é possível observar a existência de duas regiões que possuem um comportamento próximo do de uma recta e uma outra região, de transição, que estabelece a ligação entre as duas primeiras. As rectas inscritas nos papéis de probabilidade normais para $\ln(p_i)$, permitem-nos inferir, que as regiões a que estão associadas têm ambas um comportamento semelhante, isto é, $\ln(p_i)$ possui distribuição Normal e p_i distribuição Log-Normal. Como o declive apresentado nas duas rectas é sensivelmente o mesmo podemos ainda concluir que, além das duas regiões possuírem o mesmo tipo de distribuição, possuem distribuições com médias diferentes mas com variâncias idênticas, uma vez que o declive da recta representa uma estimativa da variância da distribuição Normal (Log-Normal). Nos gráficos 5.5 e 5.6 é visível a existência de duas regiões de transição intercaladas por duas zonas com distribuição Normal. No gráfico 5.7, as duas zonas com distribuição Normal são intercaladas por

uma zona de transição. A fase ou zona de transição está directamente relacionada com as aberturas e/ou fechos do 3ª posto da área de serviço.

Estamos, claramente, perante um modelo com misturas de distribuições.

Antes de finalizarmos o estudo sobre misturas de distribuições, no modelo constituído por uma área de serviço ($\#AS=1$) e três postos de serviço ($\#PS=3$), procedemos ao cálculo dos papéis de probabilidade associados aos modelos extremais Gumbell de Máximos, Gumbell de Mínimos e Weibull, para cada uma das regras consideradas. Este procedimento teve como principal objectivo analisar a adequabilidade dos dados ao conjunto dos modelos extremais. Os resultados obtidos, para cada regra e para cada modelo extremal, não foram melhores do que os obtidos pelo papel de probabilidade Normal.

Conseguindo-se identificar as leis de base (log-normais?) podíamos efectuar o teste de identificação da existência de misturas (em escala ou em localização), apresentado em [C93]. Caso a hipótese nula, não existência de mistura, fosse rejeitada, sabíamos que existia mistura. O número de componentes da mistura podia ser determinado através da técnica iterativa, apresentada em [C93], ou com base no teste da Razão de Verosimilhanças para misturas de Normais, apresentado em [C94]. No entanto, o estudo de misturas de distribuições não é o objectivo deste trabalho, remetendo-o para um trabalho futuro.

5.3 Caos

Nesta secção, debruçamo-nos sobre o estudo da sucessão cronológica associada ao número de clientes no sistema de um modelo com capacidade de serviço variável. Esperamos que a dependência sensitiva nas condições iniciais se reflecta na memória linear do processo, ou seja, pretendemos mostrar que discretizando a sucessão associada ao estado do sistema e dividindo-a em duas partes, estas poderão apresentar memórias diferentes. A memória destes processos vai ser identificada com base no comportamento da função de autocorrelação (FAC) e da função de autocorrelação parcial (FACP). Estas

funções estão presentes em grande parte dos programas estatísticos mais conhecidos e, de entre os que dispúnhamos, seleccionámos o PEST (ITSM), o que não significa que estejamos a tentar aplicar a metodologia de *Box e Jenkins*, porque ela só pode ser aplicada a modelos lineares, que não é o nosso caso.

No primeiro teste, analisamos o comportamento da sucessão cronológica associada ao número de clientes de um sistema com oscilações estocásticas, esperando estabelecer alguma relação entre o tempo médio de regresso à origem (sistema vazio) e a memória do processo. Esperamos, também, conseguir relacionar a memória do processo com a discretização escolhida e, se possível, estabelecer alguma relação com as taxas de chegada e de atendimento de clientes.

No segundo teste, analisamos o comportamento da sucessão de clientes associada a um sistema caótico. Mostrámos, na secção anterior, a existência de misturas de distribuições para um certo tipo de modelos e, esperamos agora, poder mostrar que a dependência nas condições iniciais se reflecte na instabilidade da memória destes processos, nomeadamente no comportamento da FAC e da FACP.

O primeiro teste foi efectuado para o modelo composto por duas áreas de serviço (#AS=2) e dois postos de serviço (#PS=2), sendo a simulação efectuada com um total de 25000 ocorrências. Para este modelo genérico foram simulados três sistemas com as seguintes características e considerando as chegadas e os atendimentos estocásticos:

Sistema	Taxa de Chegada (λ /hora)	Taxa de Atendimento (μ /hora)	Abertura do PS2	Fecho de cada AS	Relação entre as velocidades de subida (\uparrow) e de descida (\downarrow)
1	30	20	≥ 8	0	$\uparrow = \downarrow$
2	70	40	≥ 11	0	$\uparrow > \downarrow$
3	40	30	≥ 8	0	$\uparrow < \downarrow$

Tabela 5.1 Esquema Geral das Simulações

Para cada sistema foi calculado o número total de clientes e a sucessão obtida foi de seguida discretizada, de acordo com os seguintes critérios:

- (i) $a=0,125$ horas=7,5 minutos; (ii) $2a=0,25$ horas=15 minutos;
 (iii) $4a=0,5$ horas=30 minutos; (iv) $5a=0,75$ horas=45 minutos.

Cada uma das séries discretizadas foi dividida ao meio e guardada num ficheiro de texto. As **quarenta e oito** séries obtidas foram introduzidas no PEST para cálculo das FAC e FACP respectivas. Relembramos, que a ordem da FAC e da FACP é dada pelos valores situados fora das bandas de significância $\pm 1,96/\sqrt{n}$. Os resultados para cada sistema estão sumariados nas tabelas 5.2, 5.3 e 5.4.

1º Sistema: $\lambda=30$; $\mu=20$; PS2 abre ≥ 8 ; $\sigma=25000$; $\uparrow=\downarrow$

Discretização (hora)	1ª Parte		2ª Parte	
	FAC	FACP	FAC	FACP
0,125	11 n= 1096	2	21 n= 1095	2
0,25	5 n= 548	2	10 n= 547	2
0,5	2 n= 274	1	5 n= 273	1
0,75	1 n= 183	1	3 n= 182	1

Tabela 5.2 Resultados do 1º Sistema para o modelo: #AS=2 e #PS=2¹

2º Sistema: $\lambda=70$; $\mu=40$; PS2 abre ≥ 11 ; $\sigma=25000$; $\uparrow>\downarrow$

Discretização (hora)	1ª Parte		2ª Parte	
	FAC	FACP	FAC	FACP
0,125	16 n= 470	2	17 n= 470	2
0,25	7 n= 235	1	7 n= 235	1
0,5	3 n= 118	1	3 n= 117	1
0,75	2 n= 78	1	1 n= 78	1

Tabela 5.3 Resultados do 2º Sistema para o modelo: #AS=2 e #PS=2¹

¹ Aparentemente quanto mais grossa é a discretização menor é a memória.

3º Sistema: $\lambda=40$; $\mu=30$; PS2 abre ≥ 8 ; $\sigma=25000$; $\uparrow < \downarrow$

Discretização (hora)	1ª Parte		2ª Parte	
	FAC	FACP	FAC	FACP
0,125	4 n= 828	2	3 n= 827	3
0,25	2 n= 413	2	1 n= 414	2
0,5	1 n= 207	1	0 n= 206	0
0,75	0 n= 138	0	0 n= 137	0

Tabela 5.4 Resultados do 3º Sistema para o modelo: #AS=2 e #PS=2¹

As memórias lineares, dadas pela FAC, para os três sistemas simulados (estocásticos), podem ser transformadas em minutos. Assim, para o primeiro sistema, onde as velocidades de subida e de descida são iguais, a memória linear, da primeira parte, dada pela FAC, foi de $11 \cdot 7,5 = 82,5$ minutos, $5 \cdot 15 = 75$ minutos, $2 \cdot 30 = 60$ minutos e $1 \cdot 45 = 45$ minutos, para as sucessivas discretizações. A segunda parte da simulação integra, seguramente, mais aberturas do segundo posto de serviço de cada área e, assim, a memória linear vem mais alta sendo de $21 \cdot 7,5 = 157,5$ minutos, $10 \cdot 15 = 150$ minutos, $5 \cdot 30 = 150$ minutos e de $3 \cdot 45 = 135$ minutos, respectivamente. Para o segundo sistema, a velocidade de subida é superior à de descida, pelo que, a memória linear do processo, obtida pela FAC, para a primeira parte foi de 120 minutos, 105 minutos, 90 minutos e 90 minutos, para as sucessivas discretizações; na segunda parte os resultados obtidos pela memória linear, dada pela FAC, foram de 127,5 minutos, 105 minutos, 90 minutos e 45 minutos, respectivamente. No terceiro sistema, a velocidade de subida é inferior à de descida, e a memória do processo, para a primeira parte, dada pela FAC, foi de 30 minutos, 30 minutos, 30 minutos e 0 minutos, para as discretizações 0,125, 0,25, 0,5 e 0,75 respectivamente; na segunda parte, a memória dada pela FAC foi 22,5 minutos para a discretização 0,125; 15 minutos para a discretização 0,25 e 0 minutos para as discretizações 0,5 e 0,75.

Para o primeiro sistema simulado, supondo que as chegadas e os atendimentos são *determinísticos*, o tempo necessário para abrir os segundos postos de serviço de cada

área seria de 48 minutos, pelo que, o tempo necessário para que o processo volte ao estado inicial seria de 96 minutos, uma vez que as velocidades de subida e descida são iguais. Desta forma, se o processo fosse determinístico a memória linear associada a cada discretização seria de 96 minutos. Para o segundo sistema, e considerando, uma vez mais, as chegadas e os atendimentos *determinísticos*, o tempo necessário para que o processo volte ao estado inicial é de $22(\text{subida})+66(\text{descida})=88$ minutos, sendo esta a memória linear do processo. Para o terceiro sistema simulado o tempo necessário para voltar ao estado inicial é de $48(\text{subida})+24(\text{descida})=72$ minutos, admitindo, uma vez mais, que o processo é *determinístico*, pelo que, a memória linear do processo seria de 72 minutos.

Observando as tabelas 5.2, 5.3 e 5.4 constatamos que quando a discretização duplica, a FAC do processo, regra geral e exceptuando possíveis oscilações de amostragem, reduz-se para metade. O mesmo não acontecendo na FACP, a qual apresenta um comportamento que nos impossibilita, com base nestes estudos, de estabelecer qualquer relação entre a ordem da FACP e a discretização utilizada. Como seria de esperar quanto mais fina é a partição, maior é a memória do processo, pelo menos no que diz respeito ao comportamento da FAC. Observamos ainda, que o modelo com menor memória é o modelo com velocidade de subida inferior à de descida, isto é, com tempo de subida superior ao de descida (Tabela 5.4).

Os valores observados, para as memórias lineares dos modelos estocásticos, diferem dos valores associados às memórias lineares dos correspondentes processos determinísticos, fruto das flutuações de amostragem associadas aos processos de chegada e de atendimento. De facto, algumas das flutuações registadas são “captadas” pelo processo, mas outras perdem-se, devido ao comportamento estocástico do sistema, pelo que, o período do sistema (tempo que demora a voltar ao estado inicial), T , é uma variável aleatória contínua com uma determinada lei de probabilidade.

A diferença significativa entre as memórias das 1ª e 2ª partes do primeiro sistema resulta do comportamento não linear das oscilações e, esperamos que o comportamento da sucessão de tempos entre regressos consecutivos ao estado inicial, espelhe de alguma forma as diferenças registadas. De facto, a razão entre as médias da 2ª e da 1ª parte é cerca de dois (2) o que confirma os resultados obtidos pela FAC (21/11).

Na impossibilidade de mostrarmos todos os gráficos das FAC's, apresentamos os gráficos relativos ao 1º sistema, para cada uma das discretizações:

- Discretização 0,125:

1ª Parte

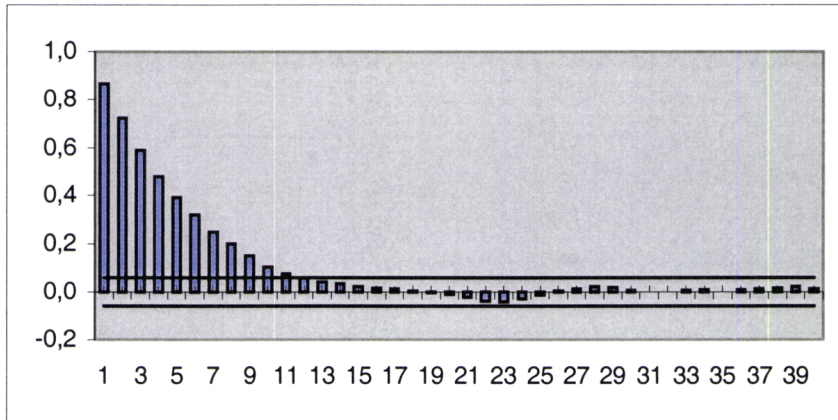


Gráfico 5.8 FAC

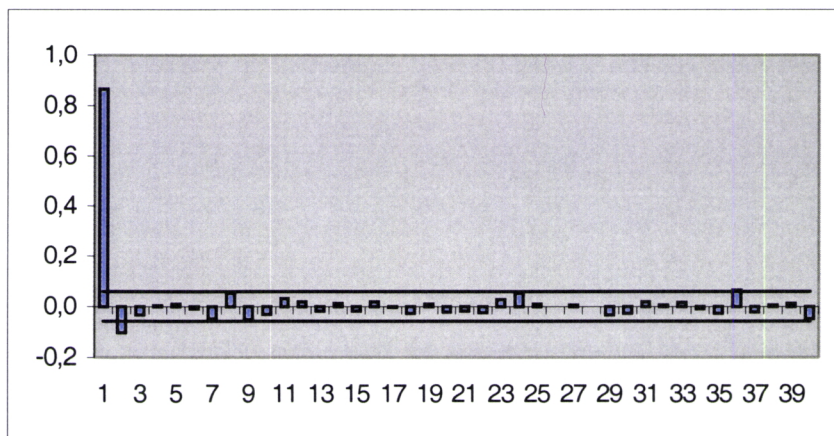


Gráfico 5.9 FACP

2ª Parte

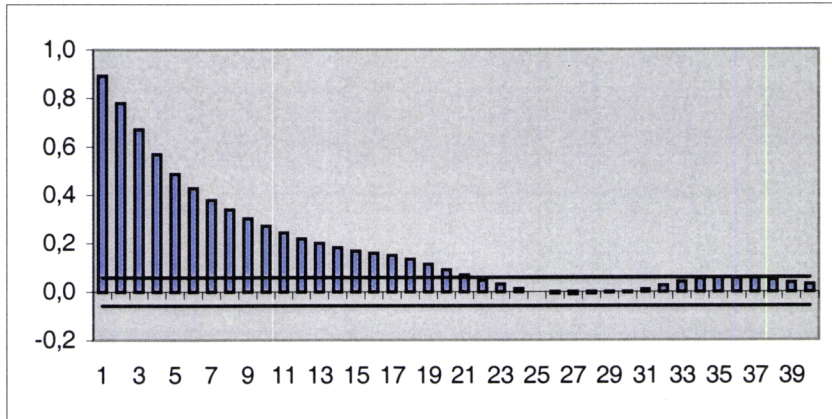


Gráfico 5.10 FAC

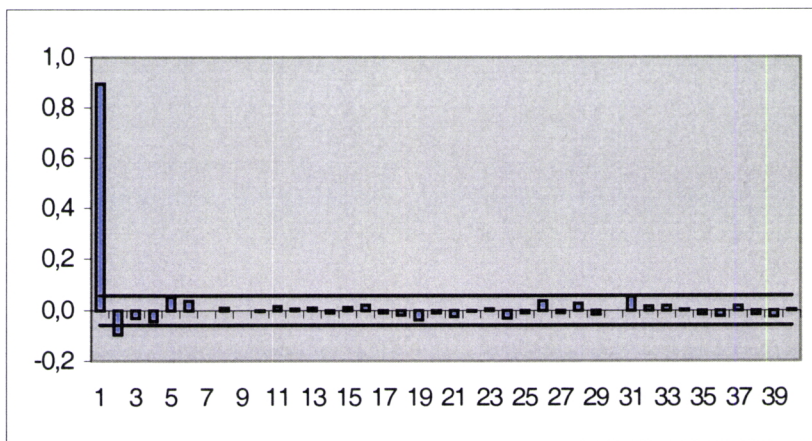


Gráfico 5.11 FACP

- Discretização 0,25:

1ª Parte

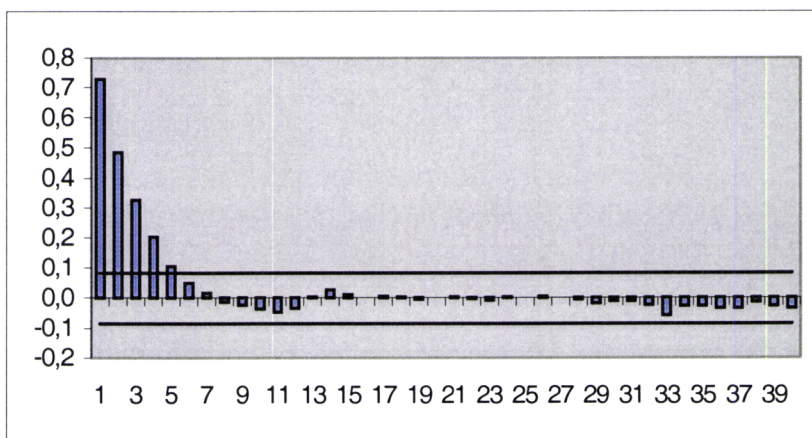


Gráfico 5.12 FAC

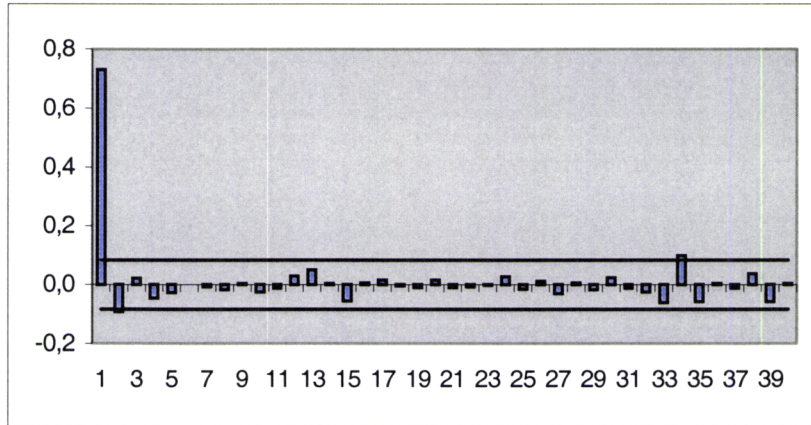


Gráfico 5.13 FACP

2ª Parte

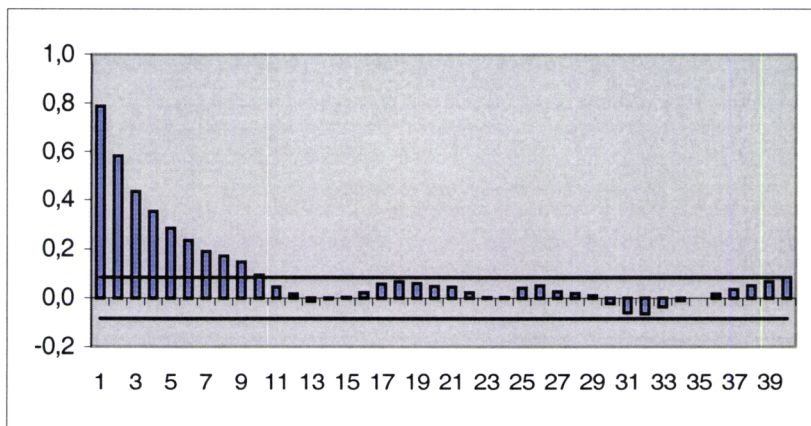


Gráfico 5.14 FAC

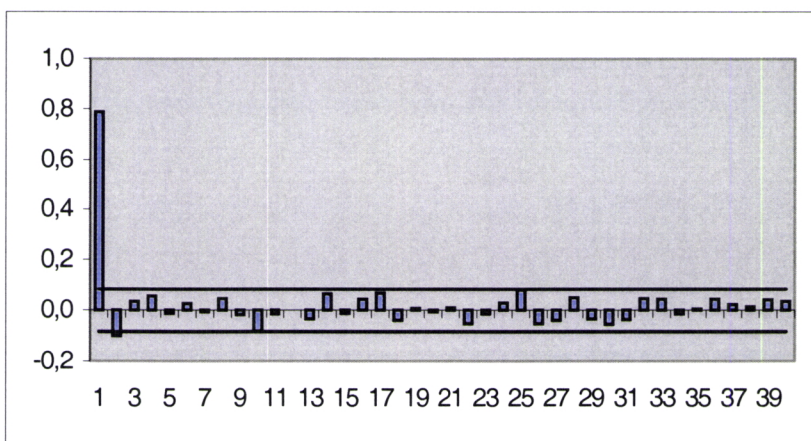


Gráfico 5.15 FACP

- Discretização 0,5:

1ª Parte

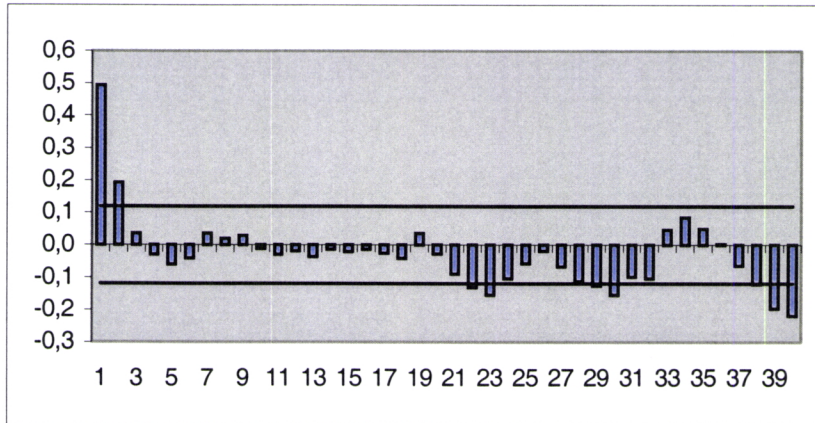


Gráfico 5.16 FAC

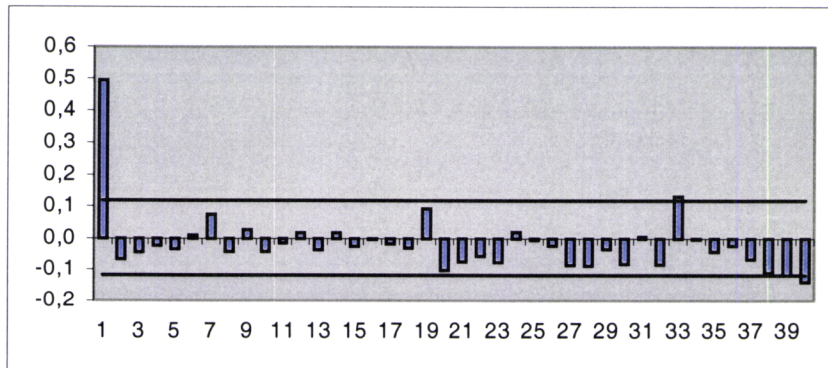


Gráfico 5.17 FACP

2ª Parte

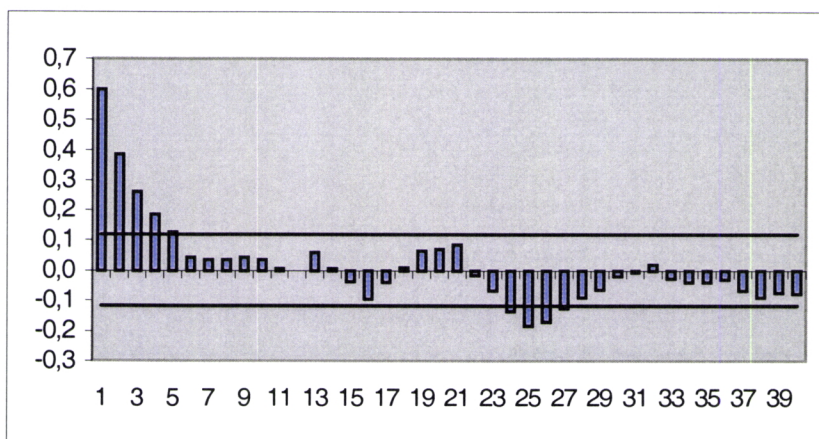


Gráfico 5.18 FAC

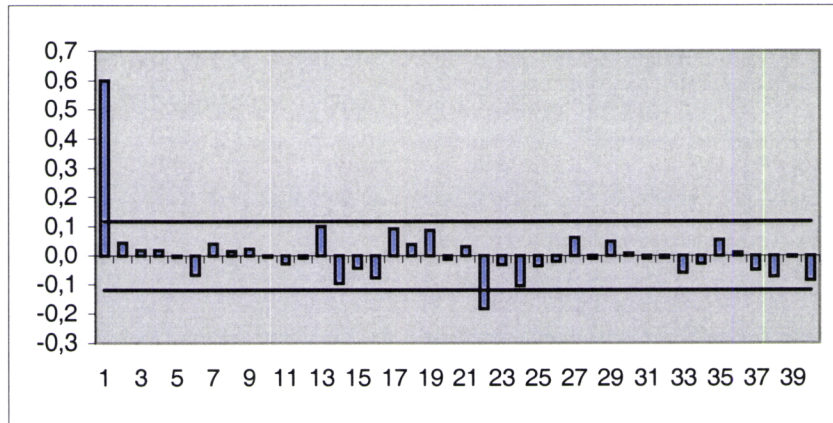


Gráfico 5.19 FACP

- Discretização 0,75:

1ª Parte

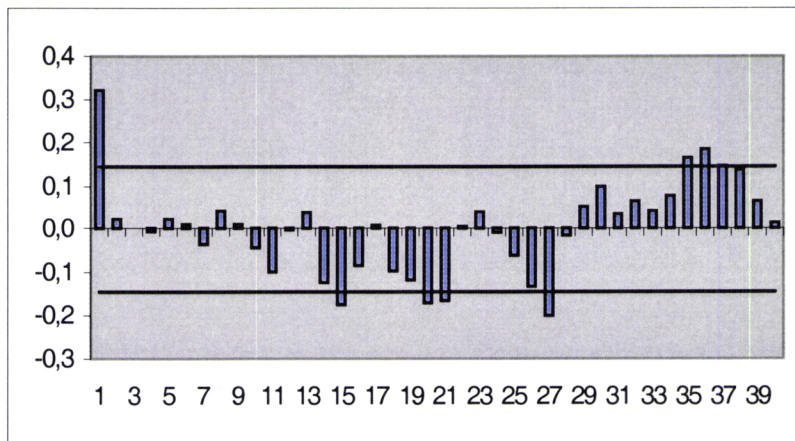


Gráfico 5.20 FAC

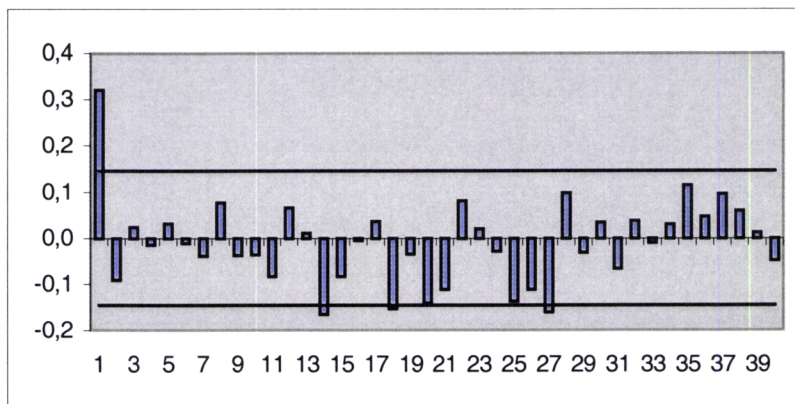


Gráfico 5.21 FACP

2ª Parte

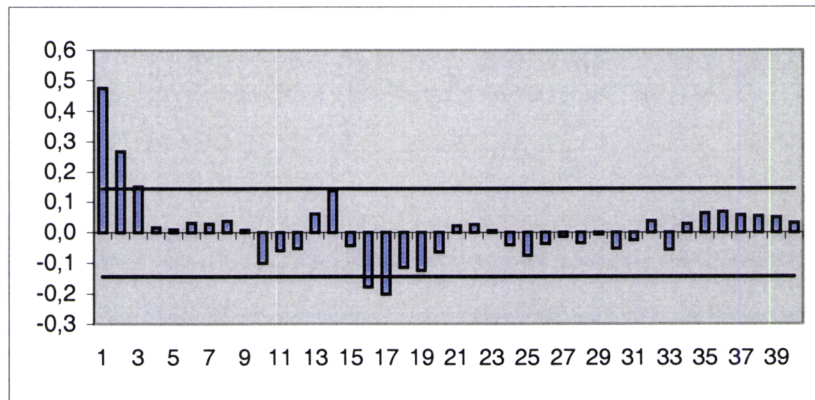


Gráfico 5.22 FAC

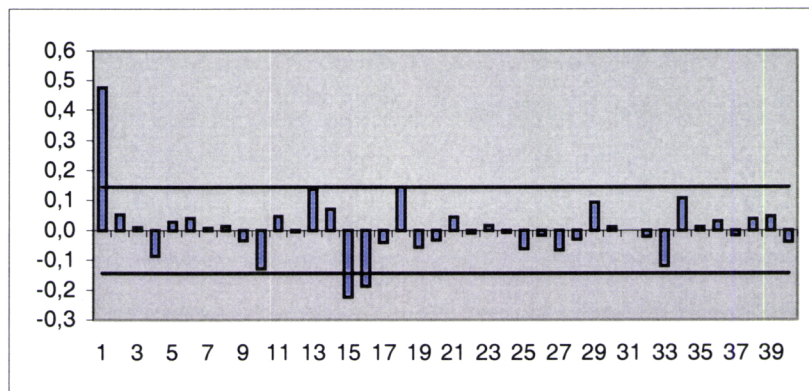


Gráfico 5.23 FACP

A partir da discretização 0,5, verificamos que a FAC e a FACP apresentam valores significativos noutros *lags*. Segundo a nossa opinião, estes comportamentos são devidos a flutuações de amostragem. Embora, à primeira vista, possa parecer um comportamento caótico, também podem ser flutuações estocásticas do sistema. Os testes estatísticos (Apêndice 1) realizados ao gerador de números aleatórios do *Matlab* apenas nos permitem dizer que o gerador é bom para os aspectos testados, nada nos garantindo, uma vez que se trata de um sistema dinâmico caótico, que apresente os mesmos desempenhos perante outro tipo de testes e, por isso parte destas flutuações, também, podem ter origem na ressonância com o gerador.

Concluído este teste, passámos à elaboração de um segundo teste para um modelo composto por uma área de serviço ($\#AS=1$) e três postos de serviço ($\#PS=3$). Com base

neste modelo, simulámos o sistema: #AS=1; #PS=3; $\lambda=40$; $\mu=20$, com a regra de decisão: PS3 abre quando o número de clientes na fila for superior ou igual a 36; PS3 fecha quando o número de clientes for inferior ou igual a 32, PS1 e PS2 não têm quaisquer restrições de abertura e fecho, com um total de 10000 ocorrências e utilizando as discretizações apresentadas no primeiro teste. As oito séries obtidas foram posteriormente analisadas no PEST, encontrando-se os resultados na tabela 5.6.

Sistema: $\lambda=40$; $\mu=20$; PS3 abre ≥ 36 e fecha ≤ 32 ; o=10000

Discretização (Hora)	1ª Parte		2ª Parte	
	FAC	FACP	FAC	FACP
0,125	25 n= 485	1	28 38-40 n= 484	1
0,25	10 26-35 n= 242	1	13 20-40 n= 242	1
0,5	4 13-15 23-24 39-40 n= 121	1	6 11-23 29-40 n= 121	1
0,75	2 9-10 26-29 n= 81	1	3 8-15 19-26 33-36 n= 80	1

Tabela 5.6 Resultados do Sistema #AS=1 e #PS=3

Observando a tabela acima, constatamos a presença de períodos com comportamento não linear. A existência destes períodos permite-nos efectuar previsões em pontos “longe”, sem que seja possível efectuarmos previsões em pontos “próximos”.

Constatamos também que, uma discretização “fina” esconde este tipo de comportamento e uma discretização mais “grossa” coloca-o em evidência e acentua-o, uma vez que soma tudo o que se passou, o que em certa medida é uma média. Desta forma, a discretização actua como uma espécie de média. Constatamos também que existem bocados de memória que ficam perdidos pelo caminho.

A instabilidade registada nas ordens das FAC's para cada discretização é fruto da dependência sensível nas condições iniciais.

Apresentamos de seguida os gráficos das FAC's descritas na tabela 5.6.

- Discretização 0,125:

1ª Parte

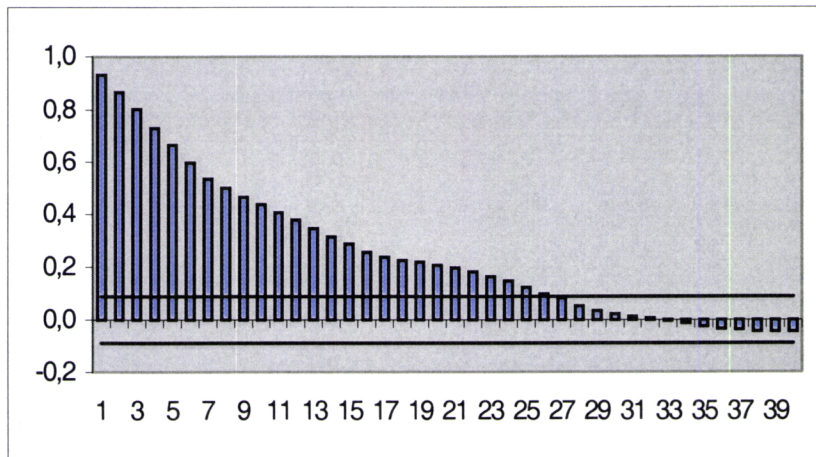


Gráfico 5.24 FAC

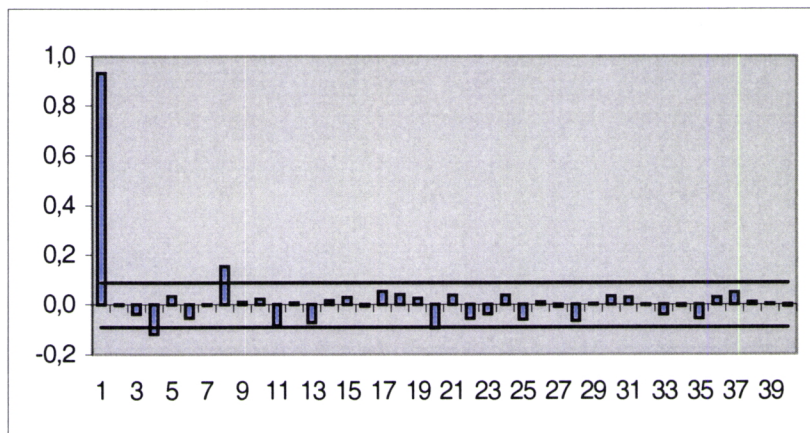


Gráfico 5.25 FACP

2ª Parte

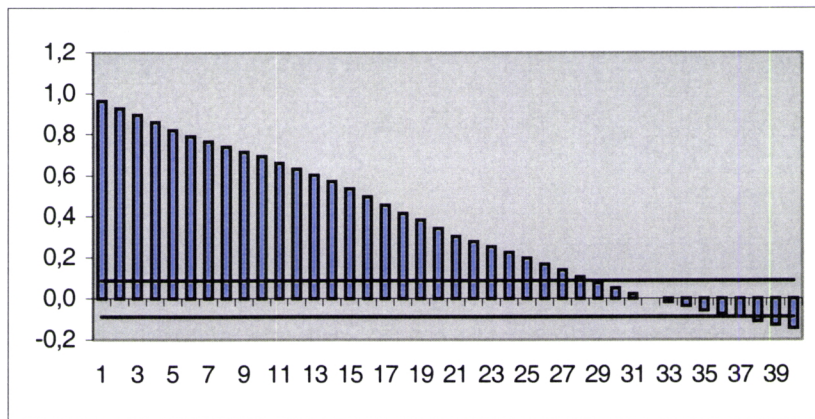


Gráfico 5.26 FAC

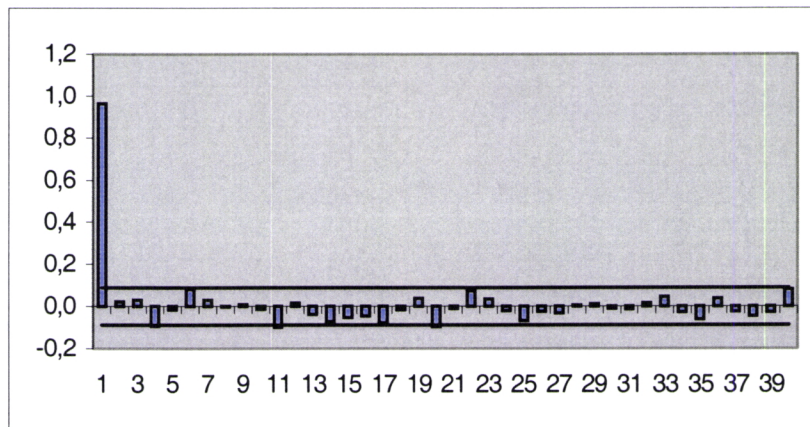


Gráfico 5.27 FAC

- Discretização 0,25:

1ª Parte

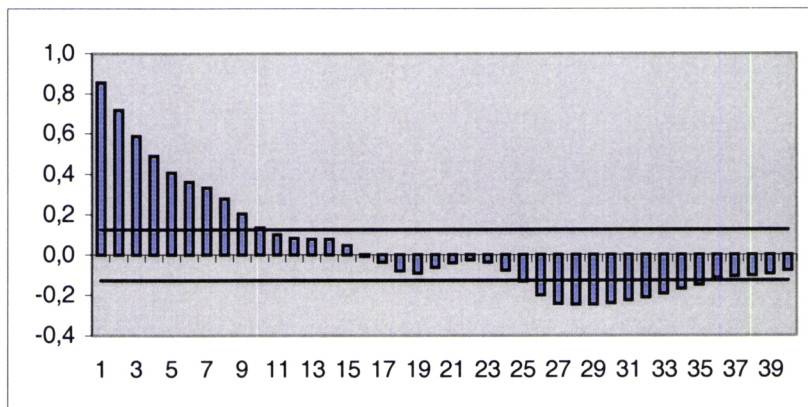


Gráfico 5.28 FAC

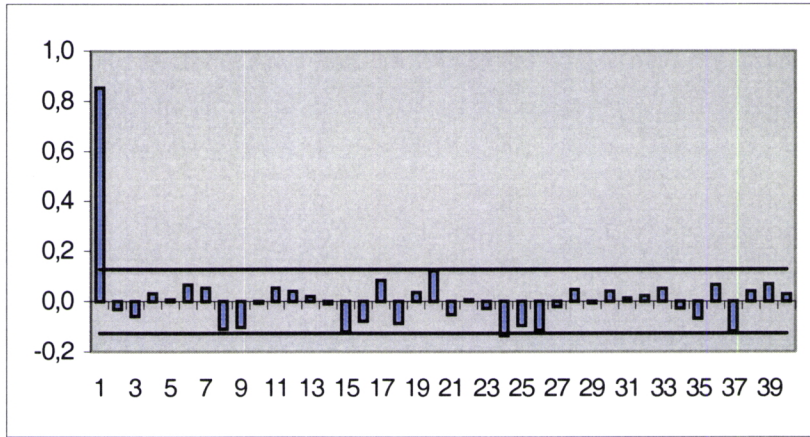


Gráfico 5.29 FACP

2ª Parte

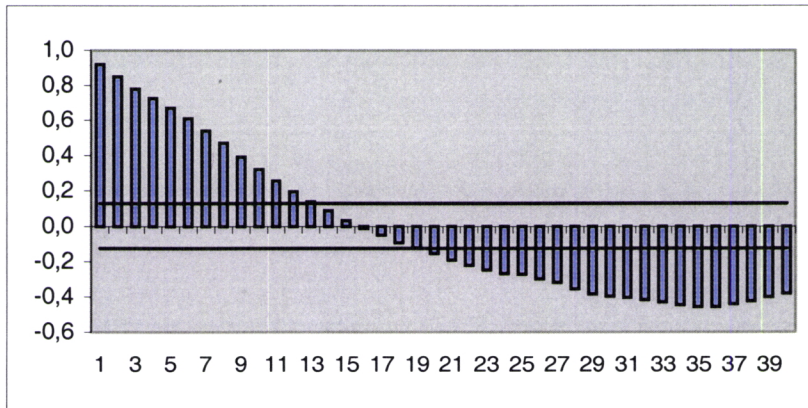


Gráfico 5.30 FAC

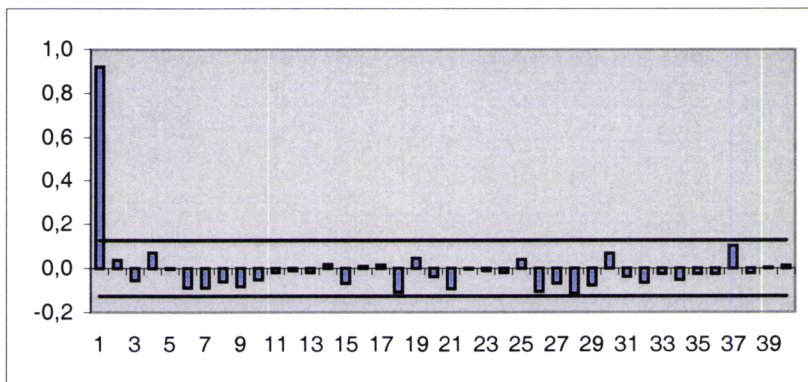


Gráfico 5.31 FACP

- Discretização 0,5:

1ª Parte

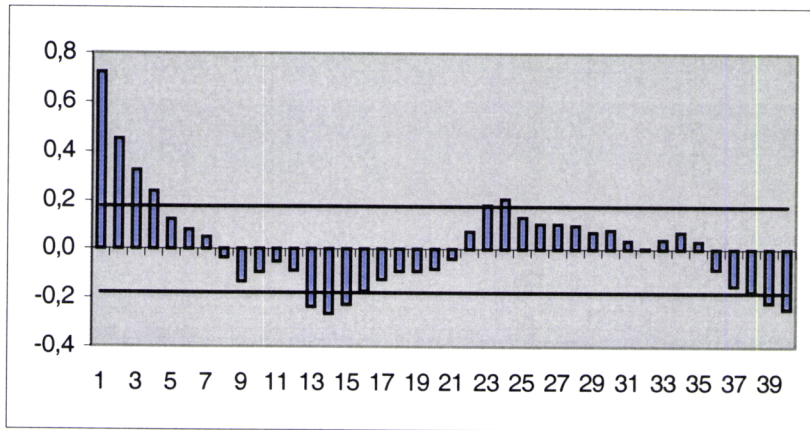


Gráfico 5.32 FAC

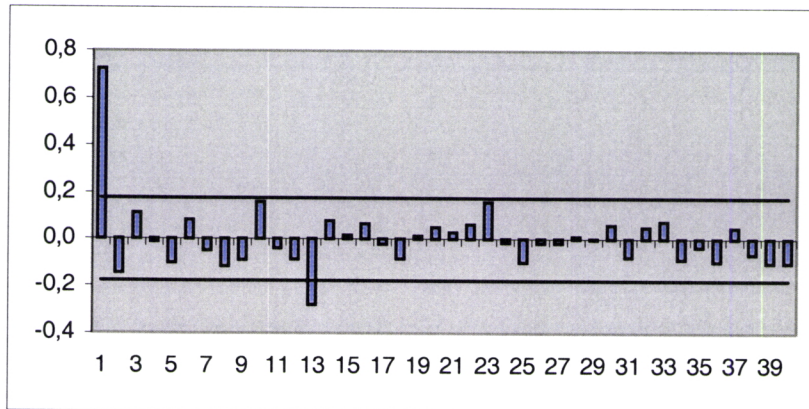


Gráfico 5.33 FAC

2ª Parte

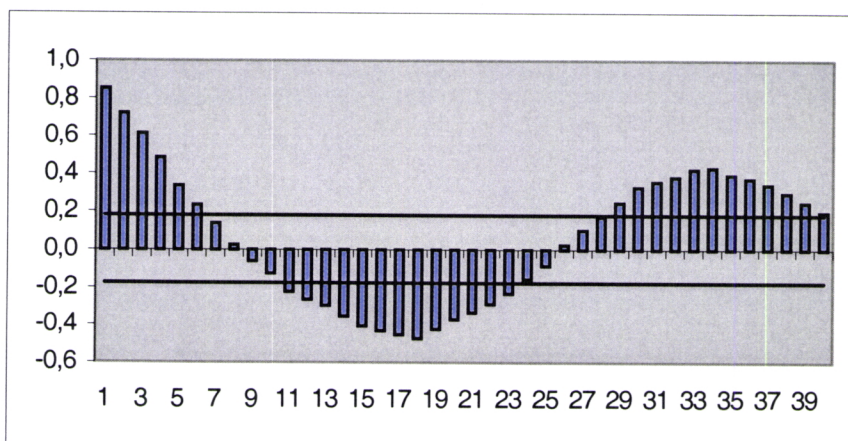


Gráfico 5.34 FAC

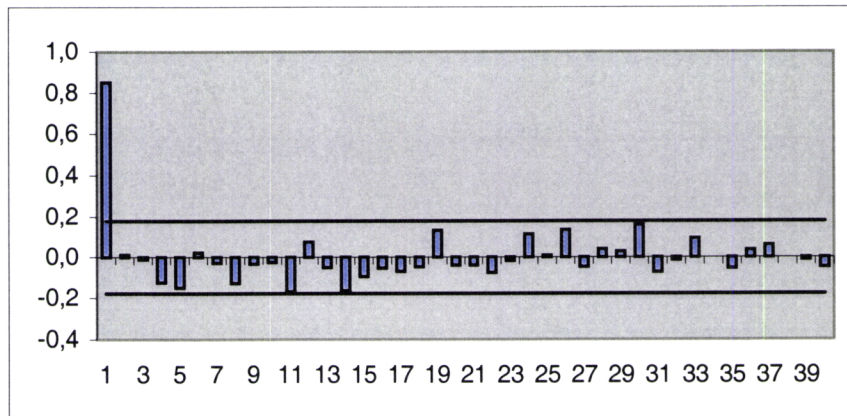


Gráfico 5.35 FACP

- Discretização 0,75:

1ª Parte

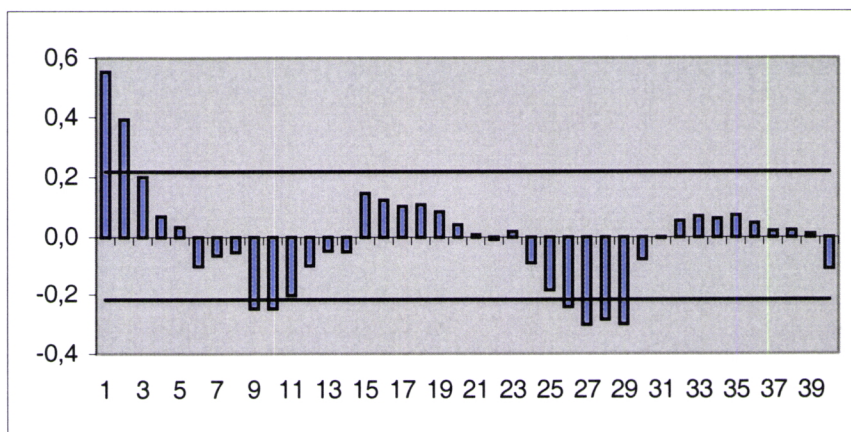


Gráfico 5.36 FAC

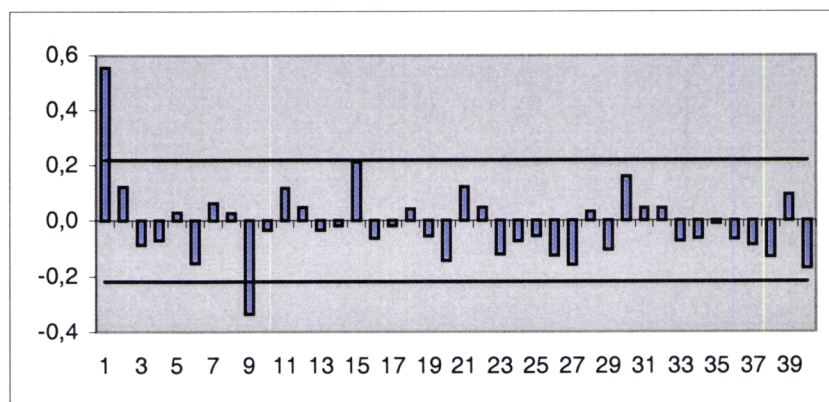


Gráfico 5.37 FACP

2ª Parte

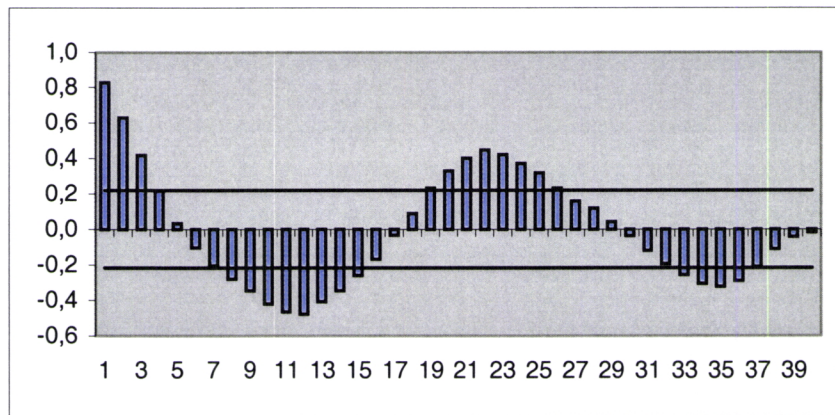


Gráfico 5.38 FAC

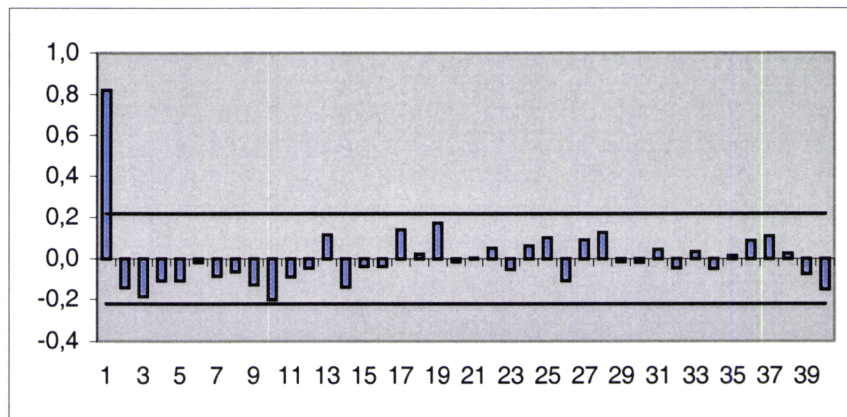


Gráfico 5.39 FACP

Ao analisarmos os gráficos apresentados constatamos que à medida que a discretização aumenta, isto é, quando a partição é mais “grossa”, e dado que esta actua como uma média, a FAC apresenta um comportamento semelhante ao de um oscilador amortecido. Na FAC são claramente visíveis dois tipos de zonas: uma zona a que podemos designar de *zona activa*, quando os valores estão situados fora das bandas de significância $\pm 1,96/\sqrt{n}$ e uma zona que designamos de *zona inactiva*, quando os valores estão situados dentro dos limites das bandas de significância. Desta forma, o comportamento da FAC caracteriza-se por zonas activas intercaladas com zonas inactivas. A “regra” que determina o regresso do processo a uma zona activa é não-linear, não sendo possível, com base no teste efectuado, determinar uma expressão analítica da mesma. No entanto, e apesar de estarmos perante um processo não linear ele pode ser combinado num processo AR não linear com transições de regime.

Os diagramas de fases permitem-nos identificar a estrutura dos dados, pelo que, podemos, através da construção de diagramas de fases, tentar estabelecer alguma relação entre estes e o comportamento das FAC's. Pretendemos, com base na construção iterativa dos diagramas de fases observar a evolução do comportamento do sistema até à ordem pretendida. Os diagramas de fases correspondem aos gráficos: X_t versus X_{t+p+1}^i , onde p^i representa a ordem da FAC do i -ésimo período.

Na impossibilidade de apresentarmos todos os diagramas de fases, escolhemos, de entre os obtidos, aqueles que nos parecem mais elucidativos para a compreensão da relação entre a memória do processo e o tipo de estrutura subjacente aos dados. Durante a realização dos mesmos, constatámos que as primeiras e as segundas partes de cada discretização nem sempre apresentam a mesma “estrutura”.

Os diagramas de fases para a primeira parte da discretização 0,25 são apresentados nos gráficos 5.40, 5.41 e 5.42.

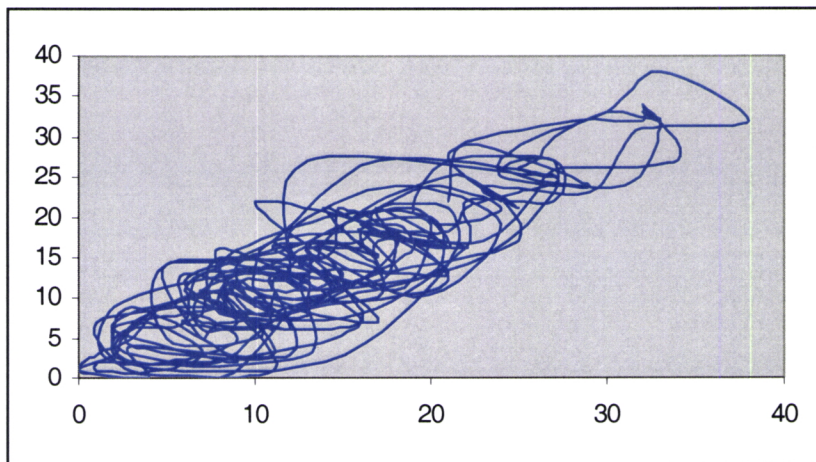


Gráfico 5.40 Diagrama de Fases: X_t versus X_{t+1}

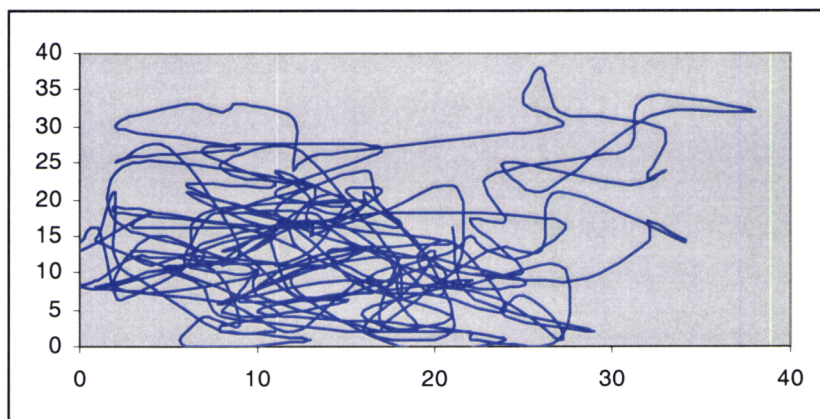


Gráfico 5.41 Diagrama de Fases: X_t versus X_{t+11}

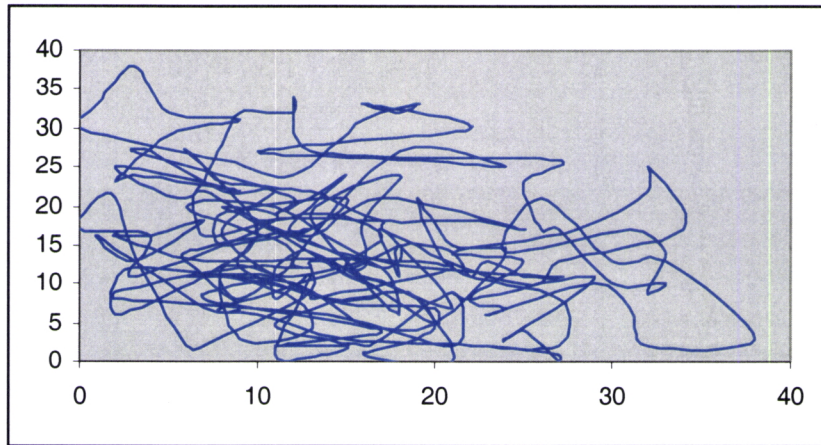


Gráfico 5.42 Diagrama de Fases: X_t versus X_{t+27}

Ao analisarmos os gráficos apresentados constatamos que no segundo diagrama de fases ocorreu uma mudança de estrutura e no terceiro é visível uma nova mudança de estrutura, que pode, muito bem, representar uma ausência de estrutura.

Para ilustrar o comportamento estrutural das segundas partes das discretizações seleccionámos a discretização 0,125.

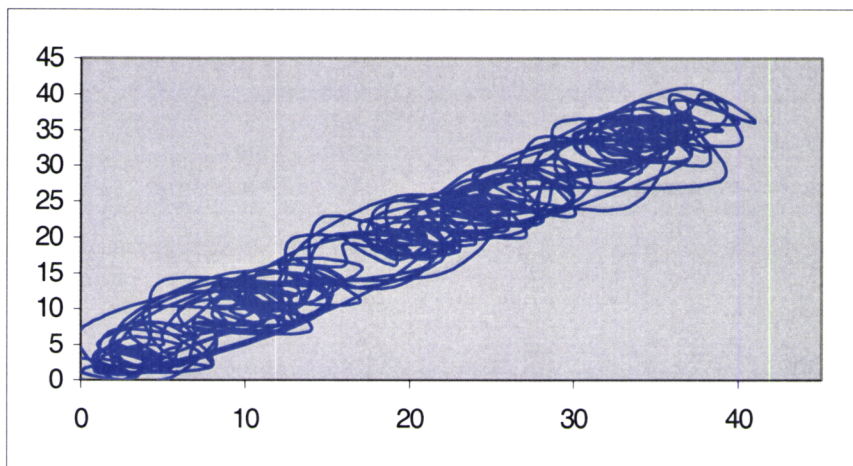
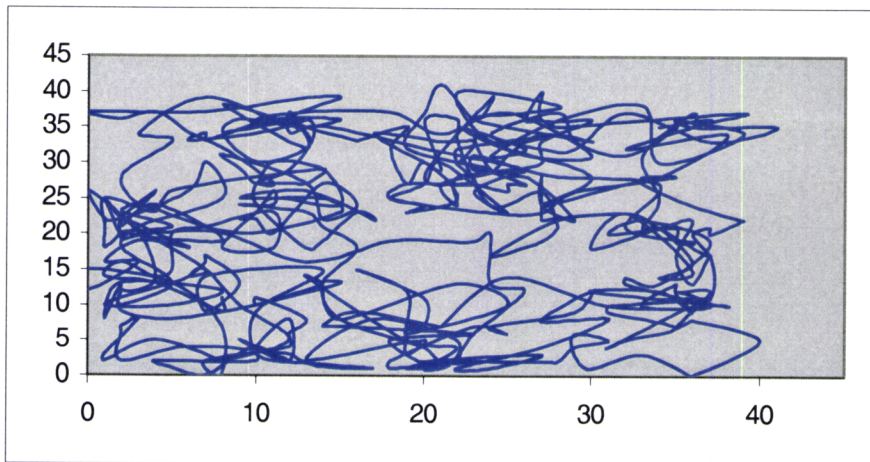
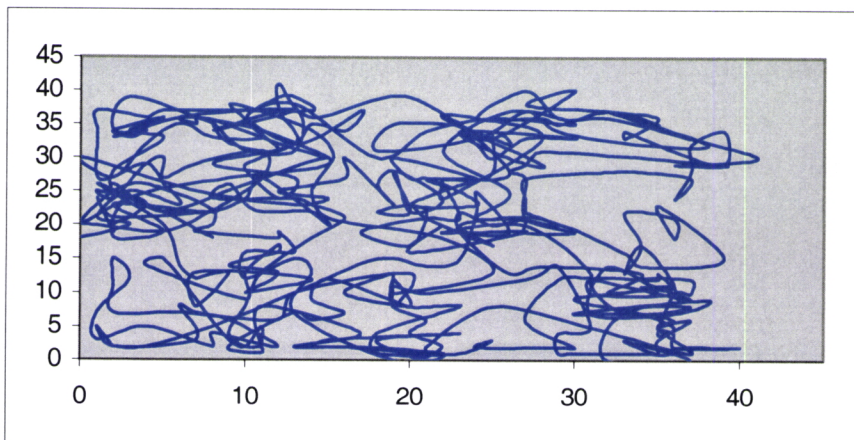


Gráfico 5.43 Diagrama de Fases: X_t versus X_{t+1}

Gráfico 5.44 Diagrama de Fases: X_t versus X_{t+29} Gráfico 5.45 Diagrama de Fases: X_t versus X_{t+39}

Neste caso, observamos, novamente, que o segundo diagrama de fases apresenta uma mudança de estrutura em relação ao primeiro e que, apesar de se verificar alguma alteração de estrutura do segundo para o terceiro diagrama de fases, esta é menos acentuada.

Realçamos que não queremos com isto dizer que todas as discretizações apresentam este tipo de comportamento.

Parece-nos pois, que a ordem da FAC está associada a uma mudança de estrutura, mudança esta que pode corresponder a uma duplicação, a uma inexistência de estrutura ou simplesmente a uma alteração de estrutura.

5.4 Estimação de Parâmetros e Identificação de Sistemas

O problema sério que se coloca na análise estatística das filas de espera com capacidade de serviço variável é a estimação dos parâmetros. A primeira dificuldade consiste em caracterizar e definir quais as variáveis aleatórias de interesse. Se não conseguimos efectuar esta caracterização, que na maior parte dos problemas não é uma tarefa complicada, quanto mais estimar!. Não sabemos que caminhos escolher por forma a conseguir resolver este problema.

Capítulo 6

Osciladores Estocásticos

6.1 Introdução

As equações diferenciais estocásticas (EDE's) são utilizadas para descrever o comportamento de fenômenos dinâmicos sujeitos a perturbações aleatórias (ruído) e têm aplicações em vários campos da Ciência e da Tecnologia.

Iniciaremos este capítulo tecendo algumas considerações sobre a relação entre as EDE's e as Filas de Espera, nomeadamente no que diz respeito ao “ruído” adequado à modelação com equações diferenciais estocásticas das filas de espera. Remetemos para o Apêndice 4 uma breve introdução, teórica, às equações diferenciais estocásticas, sugerindo [Øk89] e [Ma97] para uma análise mais detalhada. Procedemos em seguida ao estabelecimento dos modelos estocásticos dos osciladores tratados no Capítulo 2, vulgarmente designados de osciladores estocásticos. Terminamos este capítulo com a resolução das EDE's dos osciladores estocásticos, isto é, dos osciladores com perturbações estocásticas para posterior análise do comportamento da solução se possível.

6.2 Equações Diferenciais Estocásticas e Filas de Espera

Vimos no Capítulo 2 que um posto de serviço com aberturas e fechos é um oscilador decomponível em osciladores harmónicos (sinusóidais) via transformada de Fourier. Como as chegadas e os atendimentos são estocásticos estes osciladores vêm perturbados por estas componentes estocásticas daí o poderem ser modelados por uma sobreposição

de EDE's do tipo, $\ddot{x}(t) + k x(t) = \text{"ruído"}$, sendo esta equação, utilizando o cálculo de Itô ou o de Stratonovich, tratada no desenvolvimento deste capítulo. Este "ruído" pode ser, em particular, a saída de um outro oscilador, o que nos leva a um sistema de equações.

Um problema que não sabemos resolver, desde já, é qual o tipo de ruído a introduzir na equação diferencial e que corresponde, por exemplo, a chegadas poissonianas e atendimentos exponenciais. Sabemos que não é Gaussiano porque se o fosse isso significaria que o número de clientes no sistema seguia a lei normal, o que não é verdade. Ficam claramente vários problemas em aberto, para o uso de EDE's na modelação de filas de espera.

6.3 A Equação Diferencial Estocástica do Oscilador Harmónico

Considere-se o oscilador estocástico descrito pela equação diferencial d -dimensional de 2ª ordem com componente estocástica de 1ª ordem,

$$\ddot{x}(t) + f(x(t), \dot{x}(t), t) = g(x(t), \dot{x}(t), t) \varepsilon(t) \text{ para } t \geq 0, \quad (6.1)$$

onde $\varepsilon(t)$ é um ruído branco d -dimensional, $x(t)$ toma valores em \mathbb{R}^d , $f: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $g: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$. Definindo a variável $y(t) = \dot{x}(t)$, a equação (6.1) pode ser reescrita como um sistema,

$$\begin{cases} dx(t) = y(t) dt \\ dy(t) = -f(x(t), y(t), t) + g(x(t), y(t), t) dw(t) \end{cases}^1, \quad (6.2)$$

onde a 2ª equação é uma equação diferencial estocástica de Itô e $w(t)$ é um processo de Wiener unitário d -dimensional.

No tratamento dos osciladores estocásticos optaremos pelo cálculo de Itô. No entanto, e caso seja necessário recorreremos ao cálculo de Stratonovich aplicando as fórmulas de conversão apresentadas em [Br97]. As fórmulas de conversão permitem transformar um

¹ Relembramos que w_0^2 é a frequência angular e não o processo de Wiener unitário.

integral de Itô num integral de Stratonovich e vice-versa o que permite, em certos casos, simplificar os cálculos.

Os osciladores estocásticos lineares são descritos por equações do tipo,

$$\ddot{x}(t) + k x(t) = h \varepsilon(t) \text{ para } t \geq 0,$$

onde k e h são constantes positivas, e os não lineares, são descritos por equações da forma,

$$\ddot{x}(t) + k(x(t), \dot{x}(t), t) = h \varepsilon(t), \quad t \geq 0,$$

e onde $\varepsilon(t)$ é um ruído branco unidimensional.

Relembremos as equações dos osciladores e vejamos como perturbá-las com ruído branco de forma a obter osciladores estocásticos (lineares ou não lineares).

A equação do movimento de um pêndulo simples é uma equação diferencial de 2ª ordem com coeficientes constantes,

$$\ddot{x}(t) + w_0^2 x(t) = 0.$$

De entre as várias versões estocásticas da equação anterior apresentamos uma com ruído aditivo, a equação (1), e outra com ruído multiplicativo, a equação (2),

$$(1) \quad (I) \quad \ddot{x}(t) + w_0^2 x(t) = h \varepsilon(t), \quad t \geq 0,$$

$$(2) \quad (S) \quad \ddot{x}(t) + w_0^2 x(t) = h x(t) \varepsilon(t), \quad t \geq 0$$

que representam equações de osciladores estocásticos lineares.

A equação de Van der Pol do oscilador relaxado é,

$$\ddot{x}(t) - \beta (1 - x^2(t)) \dot{x}(t) + x(t) = 0.$$

Mais uma vez, existem várias versões estocásticas, que podem ser ou não resolúveis e que podem apresentar componentes de ruído aditivas (equação (1)) ou multiplicativas (equação (2)),

$$(1) \quad (I) \quad \ddot{x}(t) - \beta(1 - x^2(t))\dot{x}(t) + x(t) = h \varepsilon(t) \text{ para } t \geq 0$$

$$(2) \quad (I) \quad \ddot{x}(t) - \beta(1 - x^2(t))\dot{x}(t) + x(t) = h x(t) \varepsilon(t) \text{ para } t \geq 0,$$

e que representam equações de osciladores estocásticos não lineares.

6.3.1 Integração da Equação Estocástica do Movimento do Pêndulo

Consideremos a EDE de Itô,

$$(I) \quad \ddot{x}(t) + w_0^2 x(t) = h \varepsilon(t) \text{ para } t \geq 0, \tag{6.3}$$

onde h e w_0^2 são duas constantes positivas e $\varepsilon(t)$ é um ruído branco unitário unidimensional. Defina-se a variável $y(t) = \dot{x}(t)$. Desta forma a equação (6.3) pode ser escrita da seguinte forma,

$$(I) \quad d \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} dw(t)^2.$$

Dada a condição inicial $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, a equação anterior tem uma única solução com a seguinte fórmula integral,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + (I) \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} dw(s), \tag{6.4}$$

onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & 0 \end{bmatrix}$.

² Relembramos w_0^2 é a frequência angular e não o processo de Wiener unitário.

Com base na matriz A assim definida verificamos que $A^2 = -w_0^2 I_2$, onde I_2 é a matriz identidade de segunda ordem. Usando esta relação prova-se que,

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = \begin{bmatrix} \cos(w_0 t) & \frac{1}{w_0} \text{sen}(w_0 t) \\ -w_0 \text{sen}(w_0 t) & \cos(w_0 t) \end{bmatrix}.$$

Substituindo na equação (6.4), obtemos,

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(w_0 t) + \frac{y_0}{w_0} \text{sen}(w_0 t) + \frac{h}{w_0} (\text{I}) \int_0^t \text{sen}(w_0 (t-s)) dw(s) \\ y(t) = -x_0 w_0 \text{sen}(w_0 t) + y_0 \cos(w_0 t) + h (\text{I}) \int_0^t \cos(w_0 (t-s)) dw(s) \end{cases}.$$

Uma vez que as funções integradas dos termos $(\text{I}) \int_0^t \text{sen}(w_0 (t-s)) dw(s)$ e

$(\text{I}) \int_0^t \cos(w_0 (t-s)) dw(s)$ são aleatórios, então, usando

$$\int_0^t f(s) dw(s) \sim N\left(0, \int_0^t f^2(s) ds\right), \text{ vem,}$$

$$E(x(t)) = x_0 \cos(w_0 t) + \frac{y_0}{w_0} \text{sen}(w_0 t) \text{ e}$$

$$\text{Var}(x(t)) = \frac{h^2}{w_0^2} \int_0^t \cos^2(w_0 (t-s)) ds = \frac{h^2}{w_0^2} \left[t + \frac{1}{2w_0} \text{sen}(w_0 t) \right].$$

Desta forma,

$$x(t) \sim N\left(x_0 \cos(w_0 t) + \frac{y_0}{w_0} \text{sen}(w_0 t), \text{Var}(x(t))\right)$$

e

$$x(t)|_{x(s)=s} \sim N\left(x_s \cos(w_0 (t-s)) + \frac{y_0}{w_0} \text{sen}(w_0 (t-s)), V_s\right),$$

$$\text{onde } V_s = \frac{h^2}{w_0^2} \left[t - s + \frac{1}{2w_0} \text{sen}(w_0(t-s)) \right].$$

Na segunda EDE proposta para modelar o movimento do pêndulo supusemos que a força externa (ruído branco) afectava o deslocamento do pêndulo. Assim,

$$(S) \quad \ddot{x}(t) = -w_0^2 x(t) - x(t) \varepsilon(t) \text{ para } t \geq 0. \quad (6.5)$$

A resolução desta EDE de (S) passa por integrar duas vezes a equação, usando as usuais regras de cálculo. Após a primeira integração o resultado obtido é,

$$(S) \quad \dot{x}(t) = \dot{x}(0) - \int_0^t w_0^2 x(s) ds - \int_0^t h x(s) dw(s)$$

e portanto,

$$(S) \quad x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(0) dr - \underbrace{\int_0^t \left(\int_0^s w_0^2 x(r) dr \right) ds}_{(*)} - \underbrace{\int_0^t \left(\int_0^s h x(r) dw(r) \right) ds}_{(**)}.$$

Integrando por partes as parcelas (*) e (**), obtemos uma fórmula para a solução da EDE (6.5),

$$(S) \quad x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + w_0^2 \int_0^t (r-t)x(r) dr + h \int_0^t (r-t)x(r) dw(r).$$

6.3.2 Integração da Equação Estocástica de Van der Pol

Consideremos a EDE,

$$\ddot{x}(t) - \beta(1 - x^2(t))\dot{x}(t) + x(t) = h\varepsilon(t), \text{ para } t \geq 0, \quad (6.6)$$

onde h é uma constante positiva, $\varepsilon(t)$ é um ruído branco unitário unidimensional e $k(x(t), \dot{x}(t), t) = -\beta(1 - x^2(t))\dot{x}(t) + x(t)$ é uma função de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$. Introduzindo a variável $y(t) = \dot{x}(t)$, a equação de Itô correspondente é,

$$(I) \quad d \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ k(x(t), y(t), t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} dw(t), \quad (6.7)$$

supondo que $k(x(t), \dot{x}(t), t)$ é uma função limitada em todo o seu domínio e localmente lipschitziana em (x, y) , garantindo assim as usuais condições de existência e unicidade de solução local de (6.7), para cada condição inicial $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

A resolução das EDE's dos osciladores estocásticos não lineares passa, numa primeira fase, por transformar o processo de Wiener, $w(t)$, sob certas condições, num novo processo de Wiener, $\tilde{w}(t)$, indexado a uma EDE de um oscilador estocástico linear. Os teoremas mais importantes na resolução destes tipo de EDE's são os teoremas de *Cameron-Martin-Girsanov* e de *Girsanov*, que apresentamos remetendo a demonstração para [Ma97].

Teorema de Cameron-Martin-Girsanov: Seja $\{w(t): 0 \leq t \leq T\}$ um processo de Wiener unitário m -dimensional definido no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) . Seja o vector aleatório $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)^T \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$ (Apêndice 4) e defina-se:

$$(i) \quad \zeta_0^T = -\frac{1}{2} \int_0^T |\phi(u)|^2 du + \int_0^T \phi^{Tr}(u) dw(u),$$

$$(ii) \quad \tilde{w}(t) = w(t) - \int_0^t \phi(u) du,$$

$$(iii) \quad d\tilde{P}(w) = \exp[\zeta_0^T(\phi)] dP(w).$$

(iv) Se $\tilde{P}(\Omega) = 1$ então $\{\tilde{w}(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ é um novo processo de Wiener unitário m -dimensional definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P})$.

Uma condição suficiente para que a condição (iv) seja válida é que existam duas constantes positivas μ e C tais que:

$$E\left[e^{\mu|\phi(t)|^2}\right] \leq C, \forall 0 \leq t \leq T.$$

Teorema de Girsanov: Seja $\{w(t): 0 \leq t \leq T\}$ um processo de Wiener unitário m -dimensional definido no espaço de probabilidade (Ω, F, P) . Seja $x(t)$ um processo de Itô d -dimensional definido em $[0, T]$ e dado pela equação,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s) ds + \int_0^t g(s) dw(s),$$

com $f \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^d)$ e $g \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^{d \times m})$. Seja $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)^T \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$ e $\{\tilde{w}(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ o processo de Wiener e \tilde{P} a medida de probabilidade definidos no teorema anterior. Se $\tilde{P}(\Omega) = 1$ então $x(t)$ é um processo de Itô definido no espaço de probabilidade (Ω, F, \tilde{P}) em relação ao processo de Wiener unitário \tilde{w} e descrito pela seguinte equação,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t [f(s) + g(s)\phi(s)] ds + \int_0^t g(s) d\tilde{w}(s).$$

O teorema de *Cameron-Martin-Girsanov* ao transformar o processo de Wiener $\{w(t)\}_{0 \leq t \leq T}$, definido no espaço de probabilidade (Ω, F, P) , num novo processo de Wiener $\{\tilde{w}(t)\}_{0 \leq t \leq T}$, definido no espaço de probabilidade (Ω, F, \tilde{P}) com $\tilde{P}(\Omega) = 1$, permite resolver complicadas equações de Itô. Como complemento ao teorema de *Cameron-Martin-Girsanov*, o teorema de *Girsanov* permite obter uma solução explícita da nova equação de Itô associada ao processo de Wiener $\tilde{w}(t)$ e à medida de probabilidade \tilde{P} .

Seja $T > 0$ e $(x(t), y(t))$ uma solução da equação (6.7) para $t \in [0, T]$. Defina-se,

$$\phi(t) = h^{-1} \left(-\beta(1 - x^2(t))y(t) + x(t) \right) \text{ para } t \in [0, T],$$

uma função $\mathcal{L}^2 ([0, T] ; \mathbb{R})$ e sejam

$$(a) \quad \zeta_0^T = -\frac{1}{2} \int_0^T |\phi(u)|^2 du + \int_0^T \phi(u) dw(u),$$

$$(b) \quad \tilde{w}(t) = w(t) - \int_0^t \phi(u) du,$$

$$(c) \quad d\tilde{P}(w) = \exp[\zeta_0^T(\phi)] dP(w).$$

Nestas condições $\tilde{P}(\Omega)=1$ e $\{\tilde{w}(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ é um processo de Wiener unidimensional no novo espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathbb{F}, \tilde{P})$, todos os conjuntos de medida P -nula são conjuntos de medida \tilde{P} -nula e $(x(t), y(t))$ é a solução da equação de Itô,

$$(I) \quad d \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ 0 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} d\tilde{w}(t), \quad t \in [0, T],$$

que traduz a EDE de um oscilador estocástico linear,

$$(I) \quad \ddot{x}(t) = h \dot{w}(t), \quad \text{para } t \in [0, T]. \tag{6.8}$$

A equação diferencial (6.8), no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{F}, \tilde{P})$, pode ser resolvida explicitamente já que é uma equação linear.

A sua solução, dada uma condição inicial $(x(t), y(t))=(x_0, y_0)$ é igual, em distribuição, à solução da equação de Itô,

$$(I) \quad d \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ 0 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} dw(t),$$

para $t \in [0, T]$ e para a condição inicial, onde esta equação é agora considerada em (Ω, \mathbb{F}, P) , e onde se supõem satisfeitas as condições do Teorema de Existência e Unicidade de solução para estas equações.

Assim podemos considerar que a solução (6.8) é um processo estocástico gaussiano cujas média e covariância são facilmente calculáveis.

O Teorema de Cameron (e/ou fórmula de Girsanov) permite obter pela mudança de probabilidade a distribuição da solução de (6.7).

Propusemos uma segunda EDE para modelar a equação estocástica de Van der Pol, cuja principal característica consiste em possuir um ruído multiplicativo. Os teoremas sobre os osciladores estocásticos não lineares (Teorema de Cameron-Martin-Girsanov e Teorema de Girsanov), apresentados, apenas dizem respeito a osciladores com ruído aditivo, pelo que, não nos é possível resolver a segunda equação proposta para o oscilador relaxado de Van der Pol.

A integração numérica destas EDE's é, portanto, crucial para se testar qual o tipo de ruído a colocar na equação para se obter uma fila de espera com chegadas poissonianas e atendimentos exponenciais. As EDE's são certamente uma abordagem equivalente à abordagem usual das filas de espera, desde que se resolva o problema apresentado (ruído).

Capítulo 7

Integração Numérica de Equações Diferenciais Estocásticas

7.1 Introdução

Neste capítulo tentaremos descrever de forma sumária a integração numérica de Equações Diferenciais Estocásticas (EDE's). Começamos por apresentar uma breve descrição da teoria subjacente, à qual se segue a apresentação de alguns dos métodos de discretização, nas versões unidimensionais, apresentados na literatura -Esquema de Euler e Esquema de Milsthein- ([PT85], [KPa95] e [T90]). Finalizamos esta breve introdução à análise numérica de EDE's, analisando o conceito de estabilidade e os expoentes de Lyapunov.

Para mais detalhes sobre este assunto veja-se [PT85], [KPa95] e [T90] e a página do INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Unité de Recherche Inria-Sophia Antipolis; www.inria.fr) onde é possível encontrar uma equipa de investigação em simulação numérica de EDE's, bem como a listagem dos trabalhos efectuados por esta equipa, chefiada por Denis Talay, que não estão "on line".

7.2 Metodologias de Discretização e de Simulação de EDE's

Seja $\{X(t):0 \leq t \leq T\}$ um processo de difusão, solução da equação diferencial de Itô,

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t), \quad (7.1)$$

com condição inicial $X(0)=X_0$. Suponhamos que X_0 é uma variável aleatória F_0 -mensurável, que $\{W(t):t \geq 0\}$ é um processo de Wiener F_t -martingale (Apêndice 4), que

a e σ são funções contínuas uniformemente Lipschitzianas de \mathbb{R} em \mathbb{R} e que a função σ é de classe C^1 .

Nestas condições a equação (7.1) tem uma única solução $\{X(t): t \geq 0\}$.

Pretendemos, com base numa malha, pré-determinada, discretizar o tempo, obtendo assim uma aproximação do processo de Markov $\{X(t)\}$, via métodos numéricos.

A solução, discretizada no tempo, correspondente à equação (7.1) é da forma,

$$X(t_{i+1}) = f(X(t_i), w), \quad (7.2)$$

onde o conjunto $\{t_i : i = 0, 1, \dots\}$ representa a malha previamente escolhida.

Na discretização de EDE's optaremos pelo cálculo de Itô uma vez que o cálculo de Stratanovich levanta alguns problemas ([T90]).

Dado o intervalo de tempo $[0, T]$ podemos definir uma *malha* como sendo o conjunto,

$$\Delta_T^n = \{0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \dots < t_k^n < \dots\},$$

onde os pontos t_k^n ($k \in \mathbb{N}$) representam os nós da malha e as distâncias $t_k^n - t_{k-1}^n$ traduzem o passo da malha. Quando estas distâncias são iguais dizemos que a malha é uniforme, de passo constante ou que os nós são equidistantes.

Considerando uma determinada malha podemos associar à equação (7.1) um esquema recursivo do tipo (7.2) dado por,

$$\bar{X}_{p+1}^n = f(\bar{X}_p^n; w_s; t_p^n \leq s \leq t_{p+1}^n); \bar{X}_0^n = X_0,$$

onde $t_p^n = \frac{p}{n}T$ e $X_t^n = \bar{X}_{\lfloor \frac{nt}{T} \rfloor}^n$.

Definindo $\frac{T}{n} = h$ como o passo da malha (da discretização) então, $t_p^n = ph = t_p^h$ e

$$X_t^n = \bar{X}_{\left[\frac{nt}{T}\right]}^n = \bar{X}_{\left[\frac{t}{h}\right]}^h = X_t^h, \text{ e}$$

$$\Delta w_p^h \approx w_{t_p^h} - w_{t_{p-1}^h} = w(ph) - w((p-1)h).$$

Uma aproximação do processo $X(t)$ para t pequeno é dada por:

$$X(t) \cong a(X(0))t + \sigma(X(0))(w(t) - w(0)),$$

e constitui a base do *Esquema de Euler*, o qual é um processo estocástico em tempo contínuo, que satisfaz a seguinte condição:

$$\begin{cases} \bar{X}_{p+1}^h = \bar{X}_p^h + a(\bar{X}_p^h)h + \sigma(\bar{X}_p^h)\Delta w_{p+1}^h \\ \bar{X}_0^h = X_0 \end{cases} \quad (7.3)$$

Mostra-se que o processo estocástico associado ao esquema de Euler converge em média quadrática para X_t , $\forall t \geq 0$, ou seja,

$$E\left[|X_t - X_t^h|^2\right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Como as funções a e σ são funções contínuas uniformemente Lipschitzianas temos ainda que,

$$E\left[|X_t^h - X_t|^2\right] = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Desta forma o erro cometido pelo esquema de Euler é da ordem de $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, para o integral do Itô, enquanto que na equação diferencial ordinária correspondente, o erro cometido pelo esquema de Euler é da ordem de $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Sendo a ordem do esquema

determinada pelo β tal que $E\left[|X_t^h - X_t|^2\right] = o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$, dizemos que o esquema de Euler para a versão estocástica tem ordem 0.5 e para a versão determinística tem ordem 1.0.

Este esquema é facilmente implementado uma vez que, em cada passo, é apenas necessário simular o comportamento de $\Delta w_{p+1}^h = w((p+1)h) - w(ph)$, cuja lei de probabilidade é normal com média nula e variância dada pelo intervalo de tempo, isto é, $\Delta w_{p+1}^h \sim N(0, h)$.

O facto de o esquema apresentado nem sempre ter um bom desempenho (é divergente para uma aproximação segundo as trajectórias (*pathwise*) de $X(t)$) leva-nos a tentar encontrar um esquema com uma maior ordem.

Para reduzirmos o erro do integral de Itô para $o\left(\frac{1}{n}\right)$ é necessário introduzirmos um novo esquema. Efectuando a expansão de Taylor de $\sigma(X_s)$ em torno de $X(t_p^h)$ obtemos,

$$\sigma(X_s) \cong \sigma(X(t_p^h)) + \sigma'(X(t_p^h))\sigma(X(t_p^h))(w_s - w_{t_p^h})$$

e portanto o processo $X(t)$ pode ser aproximado pela equação,

$$X(t) \approx a(X(0))t + \sigma(X(0))(w(t) - w(0)) + \sigma'(X(0))\sigma(X(0)) \int_0^t (w(s) - w(0))dw(s)$$

Pela fórmula de Itô (Apêndice 4),

$$\int_0^t (w(s) - w(0))dw(s) = \frac{1}{2}(w^2(t) - t), \text{ logo}$$

$$X(t) \approx a(X(0))t + \sigma(X(0))(w(t) - w(0)) + \frac{1}{2}\sigma'(X(0))\sigma(X(0))(w^2(t) - t).$$

A esta equação está associado o *Esquema de Milshtein*, dado pela seguinte condição;

$$\bar{X}_{p+1}^h = \bar{X}_p^h + a(\bar{X}_p^h)h + \sigma(\bar{X}_p^h)\Delta w_{p+1}^h + \frac{1}{2}\sigma(\bar{X}_p^h)\sigma'(\bar{X}_p^h)(\Delta w_{p+1}^h)^2 - h \quad (7.4)$$

Escrevendo, $\tilde{a}(X_p^h) = a(X_p^h) - \frac{1}{2}\sigma(X_p^h)\sigma'(X_p^h)$, a equação (7.4) vem dada por,

$$\bar{X}_{p+1}^h = \bar{X}_p^h + \tilde{a}(\bar{X}_p^h)h + \sigma(\bar{X}_p^h)\Delta w_{p+1}^h + \frac{1}{2}\sigma(\bar{X}_p^h)\sigma'(\bar{X}_p^h)(\Delta w_{p+1}^h)^2, \quad (7.5)$$

com condição inicial $\bar{X}_0^h = X_0$.

Tal como o esquema de Euler anteriormente apresentado, o esquema de Milshtein é de

fácil implementação porque $\Delta w_{p+1}^h \sim N(0, h)$ e $\frac{(\Delta w_{p+1}^h)^2}{h} \sim \chi_{(1)}^2$.

O esquema de Milshtein não é assintoticamente eficiente pelo que foram propostas novas versões e melhoramentos do esquema de Milshtein de modo a torná-lo assintoticamente eficiente.

O resultado que se segue é devido a Milshtein que prova que o esquema de Euler tem ordem 0.5 e o esquema de Milshtein ordem 1.0, como já havia sido referido.

Teorema: Suponhamos que as funções a e σ são funções de classe C^2 , com derivadas de primeira e segunda ordens limitadas.

- Então o esquema de Euler satisfaz a seguinte propriedade: para qualquer instante de integração T , existe uma constante positiva $C(T)$ tal que, para cada passo h do tipo

$$\frac{T}{n}, \text{ com } n \in \mathbb{N};$$



$$\left[E \left| X(T) - \bar{X}_n^h \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C(T) \sqrt{h}.$$

- O esquema de Milshtein satisfaz uma propriedade similar sendo o limite superior do erro,

$$\left[E \left| X(T) - \bar{X}_n^h \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C(T) h.$$

Na versão multidimensional o esquema de Milshtein é de difícil implementação ([T90]) pelo que o esquema de Euler, na versão multidimensional, é considerado como o único esquema eficiente para uma aproximação em média quadrática.

Clark e Cameron provaram que no caso multidimensional e sob a condição de comutatividade,

$$\forall j, \forall k : \partial \sigma_j(\cdot) \sigma_k(\cdot) = \partial \sigma_k(\cdot) \sigma_j(\cdot),$$

o esquema de Milshtein permite obter a melhor taxa de convergência para uma aproximação em média quadrática, de entre todos os esquemas de discretização.

7.3 Estabilidade e Expoentes de Lyapunov

O conceito de estabilidade que procuramos deverá garantir que o sistema é estável quando admite uma única solução periódica $Y(t)$ e quando para qualquer condição inicial constante, o correspondente processo $X(t)$ satisfaz a relação:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |Y(t) - X(t)| = 0 \quad \text{q.c.},$$

ou seja, assintoticamente as trajectórias $Y(t)$ e $X(t)$ devem estar próximas uma da outra.

Definição: Seja $X(t, x)$ uma solução da EDE de Itô (7.1) com condição inicial x , então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |X(t, x)| = \lambda \quad \text{q.c.},$$

existe e é independente de x , e λ representa o Expoente de Lyapunov (T90).

Se $\lambda < 0$ então $X(t, x)$ converge q.c. para zero, independentemente da condição inicial, apresentando um comportamento exponencial decrescente no tempo, pelo que o sistema é dito estável.

Do ponto de vista numérico o estudo da estabilidade é realizado da seguinte forma: obtida uma trajectória do processo $X(t)$, $\bar{X}(t)$, ao longo de um intervalo de tempo, começamos por calcular, $\bar{\lambda}_T = \frac{1}{T} \log |\bar{X}(T, x)|$, após o que determinamos o expoente de Lyapunov associado à trajectória $\bar{X}(t)$, $\bar{\lambda} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \bar{\lambda}_T$ e analisamos a grandeza de $|\lambda - \bar{\lambda}|$. Desta forma o expoente de Lyapunov actua como uma medida da divergência das trajectórias obtidas.

7.4 Considerações Finais

Uma das grandes dificuldades deste tipo de problemas reside na escolha da discretização, da malha, adequada à obtenção de “boas” aproximações da solução da equação (7.1). Sabemos da integração numérica de EDO's que se devem colocar mais nós onde a função muda mais as suas características, por exemplo: se considerarmos uma sucessão de circunferências concordantes, devem-se colocar mais nós onde a curvatura varia; se considerarmos uma sucessão de exponenciais, associadas ao comportamento das misturas, devem-se colocar mais nós onde ocorre a transição de uma exponencial para outra. Torna-se assim necessário proceder a um estudo prévio da EDE para determinação dos pontos de transição, nos quais deverão existir mais nós.

Uma preocupação associada a estes tipos de esquemas e a outros apresentados na literatura consultada é a necessidade de controlar os erros cometidos em cada iteração

por forma a que o erro total de simulação não seja demasiado grande, garantindo assim a estabilidade do esquema (expoentes de Lyapunov). Esta preocupação, no tratamento numérico de equações diferenciais ordinárias, conduziu à inclusão de esquemas implícitos como forma de controlar a variância da estimação.

A utilidade da integração numérica de EDE's não levanta qualquer tipo de dúvidas. No entanto, para que ela possa ser aplicada à teoria das filas de espera é necessário, em primeiro lugar, determinar qual o tipo de ruído associado a uma fila de espera com chegadas poissonianas e atendimentos exponenciais. Sabemos que não pode ser um ruído branco gaussiano, podendo eventualmente ser exponencial.

Este é o primeiro desafio que se coloca ao matemático aplicado que pretende aprofundar a teoria das filas de espera com a ajuda da simulação numérica de EDE's.

Apêndices

Apêndice 1: Testes ao Gerador

Apêndice 2: Grafo Infinitesimal das transições entre estados-
 $M/M/c$ com regra de decisão

Apêndice 3: Convergência do modelo $M/M/c$ com regra de decisão para o
usual modelo $M/M/c$

Apêndice 4: Equações Diferenciais Estocásticas

Apêndice 5: Códigos de Programação

Apêndice 1

Testes ao Gerador

A1.1 Introdução

Tendo este trabalho uma componente de simulação, efectuada em *Matlab*, houve a necessidade de efectuar testes prévios ao simulador de números aleatórios utilizado pelo *Matlab* – a que chamamos testes directos. Os testes directos visam, numa primeira instância, testar a adequação dos números aleatórios uniformes ao modelo $\{Unif[0,1]\}$ para, numa segunda instância, se testar a adequação dos dados ao modelo $\{Exp(\lambda)\}$, com λ previamente fixado. Os testes de ajustamento utilizados foram o teste Kolmogorov–Smirnov (K-S) e o teste χ^2 para hipóteses simples. Em seguida utilizou-se a metodologia de Box-Jenkins para detectar a existência de correlação. Visando dissipar quaisquer dúvidas em relação ao gerador utilizado pelo *Matlab*, nomeadamente no que diz respeito à sua periodicidade, construiu-se um programa com o objectivo de analisar o período do gerador, encerrando-se desta forma os testes directos.

Após a construção do simulador de filas de espera, efectuámos diversos testes, os chamados testes indirectos, para analisarmos a sensibilidade do gerador de números aleatórios e para confrontarmos os resultados obtidos via simulação com os respectivos valores teóricos.

A1.2 Testes Directos

Começámos por gerar 1000 números aleatórios com distribuição Uniforme no intervalo $[0,1]$, cujo gráfico apresentamos (gráfico A1.1) e procedemos de seguida ao cálculo das principais estatísticas, cujos resultados estão sumariados na Tabela A1.1.

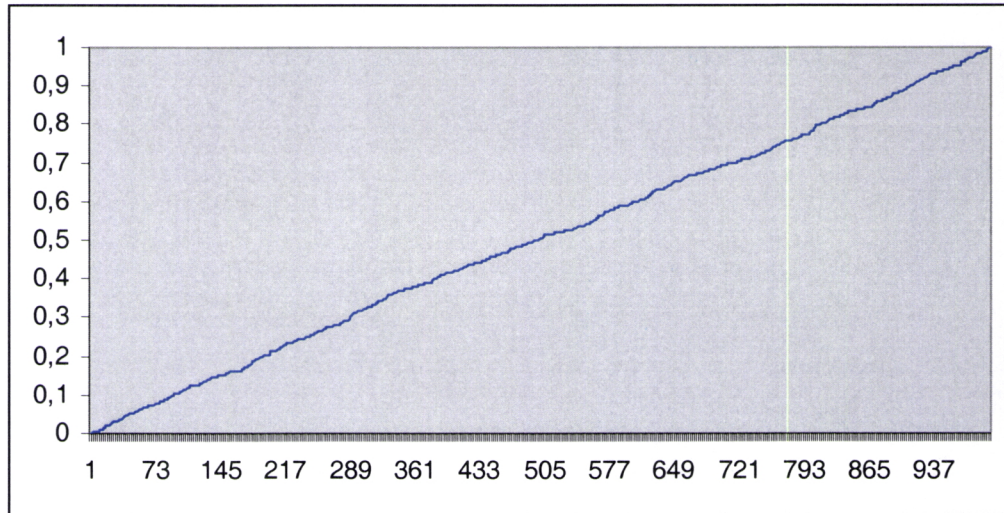


Gráfico A1.1 Números Aleatórios Uniformes

Números Uniformes	Gerador	Valores Teóricos
Média	0,499349	0,5
Desvio Padrão	0,280843202	0,28867
Variância	0,078872904	0,083333
Curtose ¹	-1,124618643	-1,2
Assimetria ²	-0,023614115	0

Tabela A1.1 Estatísticas Sumárias dos Números Uniformes

Ao analisar o gráfico A1.1 constatamos que a linha obtida tem um comportamento muito próximo do de uma recta de declive “um”, facto que indicia um bom comportamento do gerador. A partir da tabela A1.1 é possível verificar que os resultados obtidos pelas medidas descritivas estão muito próximos dos valores teóricos, facto que corrobora a opinião expressa anteriormente sobre a qualidade do gerador.

No seguimento dos testes efectuamos uma análise dos números aleatórios gerados segundo a metodologia de *Box e Jenkins*. Desta forma, se a amostra obtida for não correlacionada, os valores das funções de autocorrelação (FAC) e de autocorrelação parcial (FACP) devem estar situados dentro das bandas de significância $\pm 1,96/\sqrt{n}$. A

¹ A fórmula utilizada para calcular a "Curtose" é $\gamma_2 = \beta_2 - 3$, onde $\beta_2 = \mu_4/\mu_2^2$.

² A fórmula utilizada para calcular o coeficiente de Assimetria é $\gamma_1 = \mu_3/\sigma^3$.

amostra original foi inserida no “package” estatístico PEST e dada a magnitude dos valores (muito pequenos) não foi possível obter qualquer resultado. Perante este facto multiplicámos cada um dos valores da amostra por 100, efectuando-se desta forma uma mudança de escala, de modo a evitar os problemas registados. Os resultados obtidos para a nova série são apresentados nos gráficos A1.2 e A1.3:

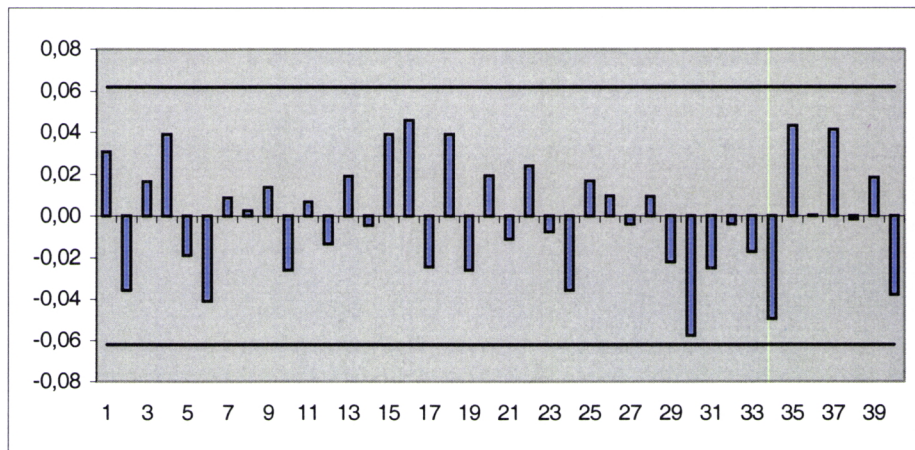


Gráfico A1.2 Função de Autocorrelação dos Números Gerados

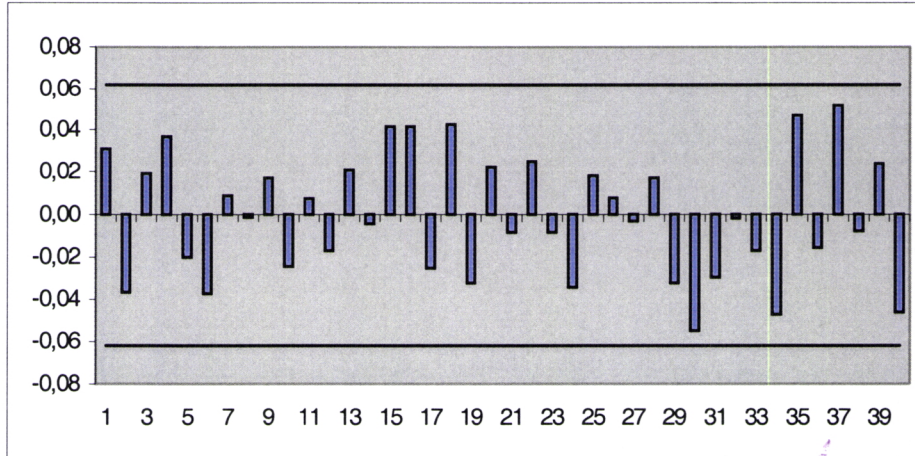


Gráfico A1.3 Função de Autocorrelação Parcial dos Números Gerados

A análise dos gráficos obtidos permite inferir que, com um grau de confiança de 95%, a amostra obtida é constituída por elementos não correlacionados.

Os números aleatórios foram ordenados para geração dos números aleatórios exponenciais. Assim, seja

u - número aleatório uniforme;

t - número aleatório exponencial,
 que se deseja conhecer. Como, se F_X é a função de distribuição da variável aleatória X , a variável aleatória $F_X(x)$ é uniforme em $[0, 1]$. Assim no caso da lei exponencial, em que $F_X(i)$ tem inversa vem a seguinte relação entre um número aleatório exponencial t e um número aleatório uniforme u ,

$$u = 1 - e^{-\lambda t} \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(1-u)}{\lambda}.$$

Aplicada esta transformação, obtivemos uma sucessão de números aleatórios exponenciais.

Na análise que se segue trabalharemos com $\lambda=10$.

Calculámos as principais estatísticas com o objectivo de averiguar a “proximidade” da distribuição $\text{Exp}(10)$. Os resultados obtidos estão sumariados na seguinte tabela:

Números Exponenciais ($\lambda=10$)		Valores Teóricos
Média	0,0972	0,1
Desvio Padrão	0,094709	0,1
Variância	0,00897	0,01
Curtose¹	6,445429	6
Assimetria²	2,052823	2

Tabela A1.2 Estatísticas Sumárias dos Números $\text{Exp}(10)$

Uma vez mais, é possível constatar a proximidade entre valores simulados e valores teóricos, já registada na análise dos números aleatórios uniformes.

Apresenta-se de seguida o gráfico dos números uniformes versus números exponenciais, que deverá traduzir o comportamento da função de distribuição de uma variável aleatória com distribuição Exponencial.

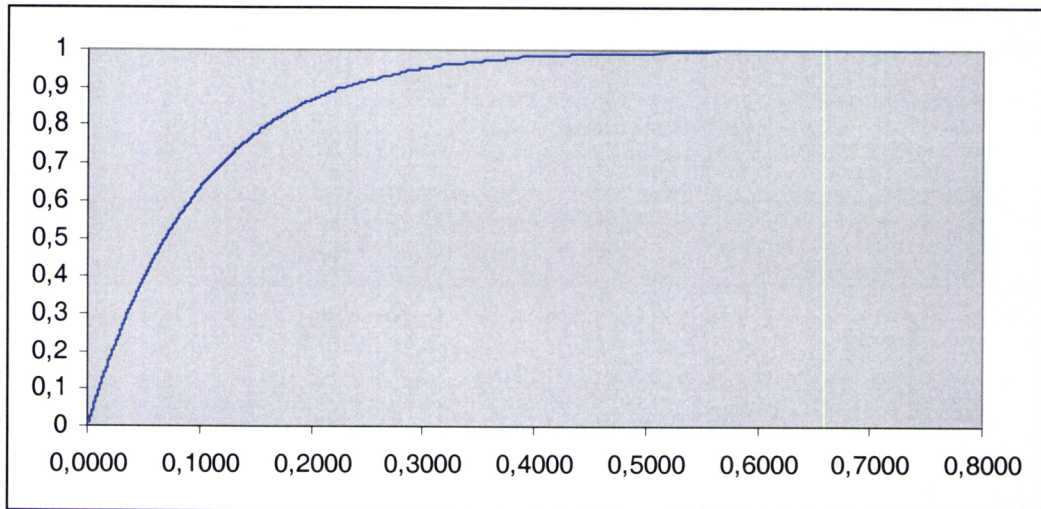


Gráfico A1.4 Números Uniformes versus Números Exponenciais

O gráfico apresentado traduz o comportamento da função de distribuição de uma lei exponencial.

Procedemos de seguida ao ajustamento do modelo $\{Exp(10)\}$ aos dados obtidos. Realizámos em primeiro lugar o teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) que permite averiguar o ajustamento da distribuição Exponencial de parâmetro 10 às observações. Assim:

Hipótese: $H_0 : X \sim Exp(6)$ vs $H_1 : \neg H_0$

Nível de significância (n. s.): $\alpha=1\%$ ou $\alpha=5\%$

Estatística de Teste: $D_n \underset{H_0}{\sim} K-S$ com $n=1000$,

onde $D_n = \sup_{x \in \mathfrak{R}_0^+} |F_n(x) - F_{Exp(6)}(x)|$; $F_n(\cdot)$ é a função de distribuição empírica da amostra aleatória,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \# \{i: X_i \leq x\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{]-\infty, x]}(x_i), \text{ onde } I_{(\cdot)} \text{ representa a função indicatriz.}$$

Prova-se que $D_n = \max(D_n^+, D_n^-)$, onde

$$D_n^+ = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{i}{n} - F_{Exp(10)}(X_{(i)}) \right], 0 \right\},$$

$$D_n^- = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left[F_{Exp(10)}(X_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right], 0 \right\}$$

e $F_{Exp(10)}(X_{(i)})$ representa a função de distribuição de uma variável aleatória com distribuição Exp(10) para a i -ésima estatística de ordem.

Região Crítica: $W =]c, +\infty[$, onde $c = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha$, ou seja, $P(D_n \in W \mid H_0) = \alpha$ e portanto $c = F_{D_n}^{-1}(1 - \alpha)$ é o quantil de probabilidade $(1 - \alpha)$ da distribuição de D_n . Para $\alpha = 1\%$, $c = 0,051545$ e para $\alpha = 5\%$, $c = 0,043007$.

Decisão: obtém-se construindo uma tabela com as seguintes entradas:

i	$x_{(i)}$	$F_n(x_{(i)})$	$F_0(x_{(i)}) = 1 - e^{-10x_{(i)}}$	(1) $\frac{i}{1000} - F_0(x_{(i)})$	(2) $F_0(x_{(i)}) - \frac{i-1}{1000}$
1	0,000060	1/1000	0,0006	0,0004	0,0006
.
.
.
1000	0,760090	1	0,9995	0,0005	0,0005

Máx (1) = 0,026 e Máx (2) = 0,0262, logo $D_n = \max(0,026; 0,0262) = 0,0262$ e portanto a hipótese H_0 não deve ser rejeitada aos n.s. de 1% e 5%.

O teste K-S é robusto na medida em que D_n depende somente de $F_0(X_{(i)})$ que, caso a distribuição postulada seja contínua verifica,

$$F_0(X_{(i)}) \sim \text{Beta}(i, n - i + 1),$$

ou seja, D_n possui distribuição sob H_0 independente de F_0 , isto é, é livre da distribuição postulada.

Efectuámos ainda um outro teste de ajustamento, o chamado teste χ^2 para hipóteses simples.

Este teste permite averiguar o ajustamento de uma distribuição ou família de distribuições a um conjunto de dados referentes a uma variável aleatória contínua ou discreta. Uma condição imperativa é que n seja grande e que os dados estejam agrupados em classes.

A Testar: Adequação da distribuição Exp(10) aos dados obtidos;

Obtenção das classes: Como a distribuição a adequar é contínua, com densidade decrescente, optámos por considerar classes equiprováveis. Nas provas do Lic. João Gonçalves Pereira (a apresentar na Universidade de Évora) mostra-se que se agruparmos em classes de igual amplitude há um erro sistemático constante. $\{A_i\}_{i=1,\dots,k}$ diz-se uma partição constituída por classes equiprováveis sse $P(A_i) = \frac{1}{k}$, $i=1,\dots,k$, logo

$$A_i = \begin{cases}]-\infty, a_i] & , i=1 \\]a_{i-1}, a_i] & , i=2,\dots,k-1. \\]a_{k-1}, +\infty] & , i=k \end{cases}$$

Para $k=15$ e sob a hipótese nula,

$$\begin{aligned} a_i &= F_X^{-1}\left(\frac{i}{15}\right), i=1,\dots,14 \\ &= -\frac{1}{10} \text{Ln}\left(1 - \frac{i}{15}\right), i=1, 2,\dots,14 \end{aligned}$$

logo as classes e as respectivas frequências observadas para os dados em análise são:

i	A _i	Frequências Observadas N _i	$\frac{(N_i - N_i^0)^2}{N_i^0}$	Sign(N _i - N _i ⁰)
1]0, a ₁]	62	0,326667	-
2]a ₁ , a ₂]	64	0,106667	-
3]a ₂ , a ₃]	67	0,001667	+
4]a ₃ , a ₄]	58	1,126667	-
5]a ₄ , a ₅]	66	0,006667	-
6]a ₅ , a ₆]	65	0,041667	-
7]a ₆ , a ₇]	76	1,306667	+
8]a ₇ , a ₈]	84	4,506667	+
9]a ₈ , a ₉]	66	0,006667	-
10]a ₉ , a ₁₀]	62	0,326667	-
11]a ₁₀ , a ₁₁]	86	5,606667	+
12]a ₁₁ , a ₁₂]	56	1,706667	-
13]a ₁₂ , a ₁₃]	72	0,426667	+
14]a ₁₃ , a ₁₄]	54	2,406667	-
15]a ₁₄ , +∞[62	0,326667	-
Soma		1000	18,23	

Hipótese: $H_0 : X \sim Exp(10)$ vs $H_1 : \neg H_0$

Nível de significância: $\alpha=1\%$

Estatística de Teste: $T = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - N_i^0)^2}{N_i^0} = \frac{k}{n} \sum_{i=1}^k N_i^2 - n \stackrel{a}{\underset{H_0}{\sim}} X_{(k-1)}^2$

Sabendo que $N_i \sim Bin\left(n, \frac{1}{k}\right)$, $\forall i=1, \dots, 15$, para classes equiprováveis sob H_0 , a frequência expectável, N_i^0 , não é mais do que o valor esperado de N_i , isto é,

$$N_i^0 = E[N_i | H_0] = \frac{n}{k}.$$

Região Crítica: $W =]c, +\infty[$, onde $c = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha$, isto é,

$$c = F_{\chi^2_{(k-1)}}^{-1}(1 - \alpha) = F_{\chi^2_{(14)}}^{-1}(0,99) = 29,1413.$$

Decisão: $t_{\text{obs}} = 18,23 \notin W =]29,1413; +\infty[$, logo a decisão a tomar será a de não rejeitar H_0 ao n. s. de 1%.

Na última coluna do quadro colocámos o sinal "+" se o valor observado é superior ao valor teórico e "-", no caso contrário. Notamos a concentração de "+" no centro da distribuição, o que é confirmado pela variância observada ser inferior à teórica.

Os testes directos terminam com a análise ao período do gerador. O programa, elaborado em *Matlab*, começa por gerar uma sequência de dez números aleatórios, após o que vai gerando números até encontrar um número igual ao primeiro elemento da sequência inicial. Depois de o encontrar gera mais nove números, completando assim uma segunda sequência de dez números aleatórios. Se as duas sequências obtidas são iguais então o gerador é provavelmente periódico. Dada a magnitude dos números aleatórios e tendo em conta que os arredondamentos efectuados poderiam induzir em erro a análise, optámos por estimar um limite inferior para o período do gerador em função do número de casas decimais utilizadas. O código efectuado foi:

```

u=zeros(2,10);
for auxu=1:10
    u(1,auxu)=floor(rand*1000);
end
r=floor(rand*1000);
i=1;
while r~=u(1,1),
    r=floor(rand*1000);
    i=i+1;
    if rem(i,30000) == 0
        i
    end
end
u(2,1)=r;
for auxu=2:10

```

```

u(2,auxu)=floor(rand*1000);
end

u
i

```

Os resultados obtidos, em doze testes, para precisões de 4 e 3 casas decimais estão resumidos na tabela abaixo, onde na primeira coluna é registado o número de iterações efectuadas até encontrar um número aleatório igual ao primeiro elemento da sequência inicial e na segunda coluna é registado o valor lógico da proposição: “As duas sequências geradas são iguais?”:

4 casas decimais		3 casas decimais	
N.º Iterações	Valor Lógico	N.º Iterações	Valor Lógico
8578	F	555	F
4516	F	270	F
16843	F	809	F
2432	F	544	F
2487	F	534	F
4750	F	3779	F
2391	F	3691	F
4391	F	520	F
5764	F	491	F
30928	F	12	F
2623	F	57	F
27000	F	1875	F

Tabela A1.3 Resultados dos testes ao período do gerador

A tabela acima permite concluir que o gerador truncado a 4 casas decimais não tem período inferior a 2000, resultado este que em conjunto com os já obtidos, confere ao gerador um bom grau de confiança em relação a testes futuros que utilizem as características testadas.

A1.3 Testes Indirectos

Na parte introdutória deste apêndice fizémos referência aos objectivos dos testes indirectos que são, a análise da adaptabilidade do gerador ao problema em estudo e a comparação dos valores teóricos das filas de espera M/M com os respectivos valores simulados.

Por uma questão de simplicidade optámos por simular filas de espera M/M/2, onde a taxa de chegada de clientes ao sistema escolhida foi de 40 clientes por unidade de tempo ($\lambda=40$). Como forma de analisar a sensibilidade do gerador foram seleccionadas três taxas de atendimento que originaram três modelos: 1º Modelo: $\mu_1=25$; 2º Modelo: $\mu_2=21$; 3º Modelo: $\mu_3=22$, com intensidades de tráfego, respectivamente, de $\rho_1=0.8$, $\rho_2=0.952381$ e $\rho_3=0.909091$.

Fixadas as taxas de chegada e de atendimento para cada modelo, simulámos 30000 ocorrências. Perante os resultados obtidos determinámos o tempo (médio) total de permanência em cada estado do sistema, caracterizado pelo número de clientes na fila de espera e pelos que estão a ser servidos. A probabilidade associada a cada estado do sistema foi obtida através do quociente entre o tempo (médio) total de permanência no estado e o tempo total (médio) de simulação, obtendo-se assim, para cada modelo, uma distribuição de probabilidade simulada. Com base nesta distribuição de probabilidade calculámos as principais estatísticas (média, variância e desvio padrão) de modo a compará-las com os respectivos valores teóricos. Construámos, também, os intervalos de confiança a 95% e a 99% para a média com variância conhecida, via teorema do limite central, para analisarmos se a média dos simulados pertencem ao espectro de variações admissíveis.

Para o modelo teórico M/M/2, o número médio de clientes no sistema é dado por,

$c\rho + \frac{c\rho}{1-\rho}$, onde $c = \frac{2p_0\rho^2}{1-\rho}$. A variância correspondente é

$$\lambda^2 \left\{ \frac{2}{\mu^2} + \frac{p_0\rho^2}{\mu^3(1-\rho)^3} - \left[\frac{1}{\mu} \left(1 + p_0 \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right)^2 \right) \right]^2 \right\}.$$

As estatísticas utilizadas para a distribuição de probabilidade simulada são, para a média de clientes no sistema $\sum_{i=1}^n p_i x_i$ e para a variância, $\sum_{i=1}^n p_i (x_i - \bar{x})^2$, sendo n o número de estados da distribuição em causa. Os resultados obtidos estão sumariados tabela A1.4:

$\lambda=40$		$\mu_1=25$			
n=41	Valores Teóricos	Valores Simulados	IC a 95%		
Média	4,44444444	4,451141802	3,57205947	5,316829	
Variância	8,12246914	19,71290327	IC a 99%		
Desvio Padrão	2,84999459	4,439921539	3,29797035	5,590919	

$\lambda=40$		$\mu_2=21$			
n=103	Valores Teóricos	Valores Simulados	IC a 95%		
Média	20,4878049	18,6682371	16,9751259	24,00048	
Variância	330,827806	317,823649	IC a 99%		
Desvio Padrão	18,1886725	17,82760918	15,8714995	25,10411	

$\lambda=40$		$\mu_3=22$			
n=47	Valores Teóricos	Valores Simulados	IC a 95%		
Média	10,4761905	10,95771696	8,0838563	12,86852	
Variância	70,0211765	89,18420916	IC a 99%		
Desvio Padrão	8,36786571	9,443739151	7,33222396	13,62016	

Tabela A1.4 Resultados das Simulações (o=30000)

Analisando a tabela anterior constatamos que a média dos valores simulados estão próximos dos correspondentes valores teóricos. A maior discrepância entre estes dois valores é registada no 2º modelo ($\mu_2=21$) que pode ser explicada por flutuações de amostragem ou pela especificidade deste modelo, na medida em que a intensidade de tráfego está perto do limiar de convergência.

No que diz respeito à variância (desvio padrão) verificamos que os valores obtidos via simulação sobrestimam os correspondentes valores teóricos.

No entanto, e apesar dos desvios verificados no valor da média e da variância (desvio padrão) das distribuições simuladas, os intervalos de confiança construídos contêm os valores simulados, facto que nos permite inferir que os modelos testados estão a ser correctamente simulados e que o gerador de números aleatórios está a desempenhar razoavelmente o seu papel.

Após este teste continuou a persistir uma dúvida, que ainda não havia sido testada, sobre o número de ocorrências a escolher para cada simulação. Recordamos que no teste anterior optámos por $n=30000$ como poderíamos ter escolhido qualquer outro valor, desde que razoável. A resposta não é óbvia pois depende do tipo de modelo a simular e das condições impostas ao mesmo. Sabendo que, uma forma de corrigir os erros devido a flutuações de amostragem, é fazendo simulações com um elevado número de ocorrências, então, se os resultados provenientes de uma simulação deste tipo não diferirem substancialmente dos obtidos no teste anterior, concluímos que para um número de ocorrências da ordem dos 20000, 30000, 40000 já deverão estar corrigidos os erros derivados de flutuações de amostragem. Outro factor que poderia ser decisivo na escolha do número de ocorrências da simulação seria a duração da mesma, mas tal não acontece porque os tempos de simulação não são elevados. Por exemplo, uma simulação com 20000 ocorrências oscila entre os 2m40s e os 2m43s.

Assim, de entre os três modelos já simulados, seleccionámos ao acaso o 3º modelo e realizámos cinco (5) simulações de 20000 ocorrências cada, perfazendo um total de 100000 ocorrências. Em cada simulação determinámos os tempos totais (médios) parciais de permanência em cada estado, sendo o tempo total obtido pela soma dos cinco tempos parciais (médios). A probabilidade de cada estado foi calculada pelo quociente entre o tempo total de permanência no estado e o tempo total de simulação, obtido pela soma dos cinco tempos parciais de simulação. Os valores obtidos para as cinco simulações foram organizados numa tabela, que apresentamos:

Estados	1ª Simulação	2ª Simulação	3ª Simulação	4ª Simulação	5ª Simulação	Total	Probabilidade
0	12,34	12,789	12,926	13,739	9,297	61,091	0,049525226
1	23,8	22,1	21,728	22,536	16,954	107,118	0,086838374
2	23,067	19,41	22,104	20,187	15,375	100,143	0,081183884
3	19,761	18,097	19,002	18,564	15,965	91,389	0,074087195
4	17,35	17,979	16,957	19,373	14,777	86,436	0,070071899
5	14,83	16,02	14,891	16,829	14,033	76,603	0,062100487

6	13,083	14,364	13,477	15,356	12,339	68,619	0,055628021
7	10,995	13,293	11,278	14,007	12,272	61,845	0,050136478
8	10,209	11,153	8,237	10,856	11,877	52,332	0,042424483
9	9,667	8,88	8,11	10,172	10,31	47,139	0,038214624
10	7,878	8,523	7,226	9,068	10,229	42,924	0,03479761
11	7,461	8,447	6,513	7,78	8,904	39,105	0,031701625
12	6,589	7,896	6,319	7,227	8,291	36,322	0,029445503
13	6,584	7,997	6,369	6,196	7,25	34,396	0,027884134
14	5,255	6,634	5,659	5,999	7,341	30,888	0,025040271
15	4,546	5,671	5,459	5,132	7,872	28,68	0,02325029
16	3,766	5,183	5,211	4,331	7,305	25,796	0,02091229
17	3,369	4,933	5,356	3,935	5,85	23,443	0,019004761
18	3,589	4,527	5,178	3,734	5,369	22,397	0,01815679
19	2,76	3,731	4,593	2,946	4,819	18,849	0,015280499
20	3,207	2,718	4,133	2,615	4,362	17,035	0,013809926
21	3,04	2,71	3,898	3,26	4,142	17,05	0,013822087
22	2,662	2,562	3,857	3,123	3,413	15,617	0,012660383
23	2,469	2,077	3,088	2,866	3,462	13,962	0,011318708
24	2,057	2,132	3,581	2,369	2,771	12,91	0,010465873
25	1,885	1,851	3,037	2,145	3,099	12,017	0,009741936
26	2,022	1,452	2,454	1,762	2,947	10,637	0,008623199
27	1,495	1,719	2,491	1,594	2,7	9,999	0,008105985
28	1,255	1,759	1,998	1,242	2,725	8,979	0,007279092
29	0,866	1,701	1,613	1,158	2,18	7,518	0,006094689
30	0,848	1,762	1,767	0,715	1,876	6,968	0,005648815
31	1,037	1,166	1,523	0,426	1,763	5,915	0,00479517
32	0,864	0,724	1,125	0,483	1,652	4,848	0,003930175
33	0,871	0,407	0,791	0,459	1,291	3,819	0,003095985
34	0,619	0,442	0,899	0,471	0,795	3,226	0,002615252
35	0,244	0,344	0,96	0,484	0,54	2,572	0,002085068
36	0,332	0,447	0,97	0,35	0,491	2,59	0,00209966
37	0,44	0,278	0,91	0,285	0,295	2,208	0,00178998
38	0,361	0,397	0,935	0,409	0,161	2,263	0,001834568
39	0,366	0,331	0,7	0,196	0,175	1,768	0,001433281
40	0,281	0,442	0,603	0,257	0,24	1,823	0,001477869
41	0,174	0,646	0,555	0,47	0,132	1,977	0,001602714
42	0,039	0,796	0,575	0,289	0,031	1,73	0,001402476
43	0,042	0,633	0,587	0,47	0,002	1,734	0,001405718
44	0,008	0,478	0,478	0,379	0	1,343	0,001088743
45	0,04	0,491	0,279	0,276	0	1,086	0,000880398
46	0,044	0,305	0,273	0,462	0	1,084	0,000878777
47	0,04	0,347	0,253	0,382	0	1,022	0,000828515
48	0,017	0,206	0,324	0,444	0	0,991	0,000803383
49	0	0,193	0,113	0,497	0	0,803	0,000650976
50	0	0,087	0,174	0,328	0	0,589	0,00047749
51	0	0,047	0,205	0,251	0	0,503	0,000407772
52	0	0,067	0,126	0,184	0	0,377	0,000305626
53	0	0,003	0,056	0,227	0	0,286	0,000231854
54	0	0	0,071	0,069	0	0,14	0,000113495
55	0	0	0	0,155	0	0,155	0,000125655
56	0	0	0	0,071	0	0,071	5,75582E-05
57	0	0	0	0,14	0	0,14	0,000113495
58	0	0	0	0,167	0	0,167	0,000135383
59	0	0	0	0,061	0	0,061	4,94515E-05
60	0	0	0	0,035	0	0,035	2,83738E-05
61	234,524	249,347	251,995	249,993	247,674	1233,533	1

Tabela A1.5 Resultados finais das cinco simulações (o=100000)

Com base na distribuição de probabilidade simulada calculámos as principais estatísticas, que apresentamos em paralelo com as obtidas no 1º teste, para comparação.

$\lambda=40$	$\mu_3=22$	$\sigma=100000$
n=61	Valores Teóricos	Valores Simulados
Média	10,47619048	9,805616874
Variância	70,02117651	84,4615046
Desvio Padrão	8,367865708	9,1902940458
		IC a 95%
		8,376255459 12,57613
		IC a 99%
		7,716490161 13,23589

$\lambda=40$	$\mu_3=22$	$\sigma=30000$
n=47	Valores Teóricos	Valores Simulados
Média	10,47619048	10,95771696
Variância	70,02117651	89,18420916
Desvio Padrão	8,367865708	9,443739151
		IC a 95%
		8,0838563 12,86852
		IC a 99%
		7,33222396 13,62016

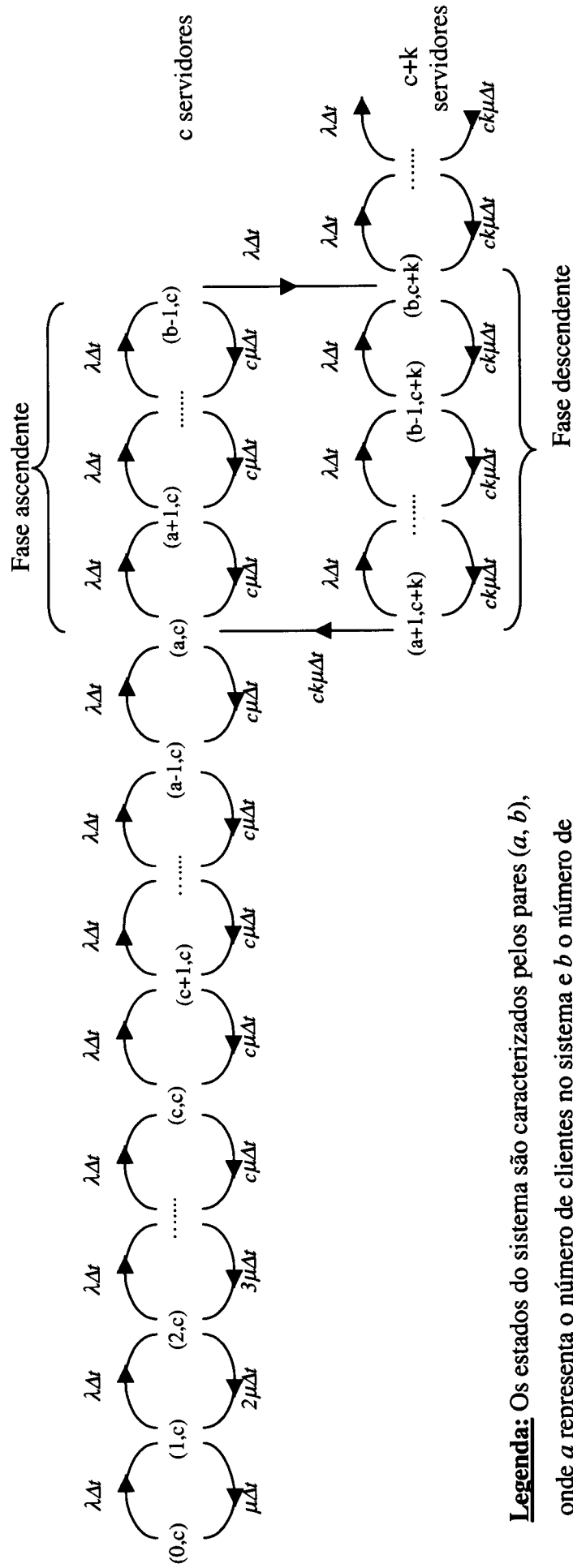
Tabela A1.6 Comparação dos resultados em função do número de ocorrências

A principal diferença registada reside no facto de a variância obtida neste teste, ser mais próxima do respectivo valor teórico. A diferença verificada na variância das duas simulações, provocada pelo acréscimo de 70000 ocorrências, é de 4,72270456. Fazendo uma simples regra de proporções chegaríamos à conclusão de que seriam necessárias, além das 30000, mais 284035 ocorrências para que os valores simulados da variância “coincidissem” com os respectivos valores teóricos.

Apêndice 2

Grafo Infinitesimal das transições entre estados

M/M/c com regra de decisão



Legenda: Os estados do sistema são caracterizados pelos pares (a, b) , onde a representa o número de clientes no sistema e b o número de servidores activos.

Apêndice 3

Convergência do modelo M/M/c com regra de decisão para o usual modelo M/M/c

Consideremos o modelo M/M/c com a regra de decisão apresentada na secção 4.2, com $\tau < 1$ e $\rho < 1$. Tome-se $b-a=n$ e substitua-se nas equações (4.2-4.6), então

$$e_{(i,c)} = \frac{c! \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{i!} \frac{1}{c^c} \frac{1}{\tau^{n+a-1}} \frac{1-\tau^n}{1-\tau} e_{(n+a-1,c)} \quad , 0 \leq i \leq c-1 \quad (A3.1)$$

$$e_{(i,c)} = \frac{\tau^i}{\tau^{n+a-1}} \frac{1-\tau^n}{1-\tau} e_{(n+a-1,c)} \quad , c \leq i \leq a-1 \quad (A3.2)$$

$$e_{(i,c)} = \frac{\tau^i - \tau^{n+a}}{\tau^{n+a-1} (1-\tau)} e_{(n+a-1,c)} \quad , a \leq i \leq n+a-1 \quad (A3.3)$$

$$e_{(i,c+k)} = \frac{1-\rho^{i-a}}{1-\rho} \rho e_{(n+a-1,c)} \quad , a \leq i \leq n+a-1 \quad (A3.4)$$

$$e_{(i,c+k)} = \frac{1-\rho^n}{1-\rho} \rho^{i-n-a+1} e_{(n+a-1,c)} \quad , i \geq n+a \quad (A3.5)$$

onde $e_{(n+a-1,c)}$ é obtido pela condição de normalização, $\sum_i e_{(i,c)} + \sum_i e_{(i,c+k)} = 1$.

Após alguns cálculos mostra-se que,

$$e_{(n+a-1,c)} = \frac{c^c (1-\tau) \tau^{n+a-1}}{c! (1-\tau^n) A(n, a, \tau)},$$

sendo $A(n, a, \tau)$ dada por:

$$A(n, a, \tau) = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1-\tau^{a-c}}{1-\tau} - \frac{c^c}{c!} \frac{\tau^a}{1-\tau} - \frac{n c^c}{c!} \frac{\tau^{n+a}}{1-\tau^n} +$$

$$+ \frac{\rho}{1-\rho} \frac{c^c (1-\tau) \tau^{n+a-1}}{c! (1-\tau^n)} \sum_{j=0}^{n-1} (1-\rho^j) + \frac{\rho(1-\rho^n)}{(1-\rho)^2} \frac{c^c (1-\tau) \tau^{n+a-1}}{c! (1-\tau^n)}.$$

A equação (A3.2) com $i=c$ é dada por,

$$e_{(c,c)} = \frac{\tau^c (1 - \tau^n)}{\tau^{n+a-1} (1 - \tau)} e_{(n+a-1,c)},$$

logo,

$$e_{(n+a-1,c)} = \frac{\tau^{n+a-1} (1 - \tau)}{\tau^c (1 - \tau^n)} e_{(c,c)}.$$

Estamos assim em condições de poder reescrever o sistema das probabilidades estacionárias (A3.1-A3.5) em função de $e_{(c,c)}$:

$$e_{(i,c)} = \frac{c! \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{i!} \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c} e_{(c,c)}, \quad 0 \leq i \leq c-1 \quad (\text{A3.6})$$

$$e_{(i,c)} = \tau^{i-c} e_{(c,c)}, \quad c \leq i \leq a-1 \quad (\text{A3.7})$$

$$e_{(i,c)} = \frac{\tau^i - \tau^{n+a}}{\tau^c (1 - \tau^n)} e_{(c,c)}, \quad a \leq i \leq n+a-1 \quad (\text{A3.8})$$

$$e_{(i,c+k)} = \frac{1 - \rho^{i-a}}{1 - \rho} \rho \frac{\tau^{n+a-1} (1 - \tau)}{\tau^c (1 - \tau^n)} e_{(c,c)}, \quad a \leq i \leq n+a-1 \quad (\text{A3.9})$$

$$e_{(i,c+k)} = \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} \rho^{i-n-a+1} \frac{\tau^{n+a-1} (1 - \tau)}{\tau^c (1 - \tau^n)} e_{(c,c)}, \quad i \geq n+a \quad (\text{A3.10})$$

A partir de (A3.6) podemos escrever que,

$$e_{(c,c)} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!} e_{(0,c)}$$

e reescrever as equações (A3.6-A3.10) em função de $e_{(0,c)}$:

$$e_{(i,c)} = \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i e_{(0,c)} \quad , 0 \leq i \leq c-1 \quad (A3.11)$$

$$e_{(i,c)} = \frac{c^c}{c!} \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^i e_{(0,c)} \quad , c \leq i \leq a-1 \quad (A3.12)$$

$$e_{(i,c)} = \frac{\tau^n (\tau^{i-n} - \tau^a) c^c}{1 - \tau^n} e_{(0,c)} \quad , a \leq i \leq n+a-1 \quad (A3.13)$$

$$e_{(i,c+k)} = \frac{1 - \rho^{i-a}}{1 - \rho} \rho \frac{\tau^{n+a-1} (1 - \tau) c^c}{1 - \tau^n} e_{(0,c)} \quad , a \leq i \leq n+a-1 \quad (A3.14)$$

$$e_{(i,c+k)} = \frac{1 - \rho^{i-a}}{1 - \rho} \rho^{i-n-a+1} \frac{\tau^{n+a-1} (1 - \tau) c^c}{1 - \tau^n} e_{(0,c)} \quad , i \geq n+a \quad (A3.15)$$

onde $e_{(0,c)}$ é tal que, $\sum_i e_{(i,c)} + \sum_i e_{(i,c+k)} = 1$. Substituindo as equações (A3.11- A3.15)

na equação de normalização obtemos a probabilidade de não encontrar clientes no sistema markoviano bidimensional, $e_{(0,c)}$, que é dada por,

$$e_{(0,c)} = [B(n, a, \tau, \rho)]^{-1},$$

onde

$$B(n, a, \tau, \rho) = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i + \sum_{i=c}^{a-1} \frac{c^c}{c!} \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^i + \sum_{i=a}^{n+a-1} \frac{c^c}{c!} \frac{\tau^n (\tau^{i-n} - \tau^a)}{1 - \tau^n} +$$

$$+ \sum_{i=a}^{n+a-1} \frac{1 - \rho^{i-a}}{1 - \rho} \rho \frac{c^c (1 - \tau) \tau^{n+a-1}}{c! (1 - \tau^n)} + \sum_{i=n+a}^{\infty} \frac{1 - \rho^{i-a}}{1 - \rho} \rho^{i-n-a+1} \frac{(1 - \tau) \tau^{n+a-1}}{(1 - \tau^n)} \frac{c^c}{c!}.$$

Antes de procedermos ao cálculo do limite da distribuição de probabilidade do modelo bidimensional relembremos a distribuição de equilíbrio de uma fila de espera M/M/c:

$$P_i^* = \begin{cases} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i P_0^* & , i \leq c \\ \frac{c^c}{c!} \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^i P_0^* & , i \geq c \end{cases},$$

$$\text{com } P_0^* = \left[\sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}} \right]^{-1}.$$

Assim,

$$(i) \lim_{n \rightarrow +\infty} e_{(0,c)} = \left[\sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}} \right]^{-1} = P_0^*$$

porque,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i + \sum_{i=c}^{a-1} \frac{c^c}{c!} \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^i + \sum_{i=a}^{n+a-1} \frac{c^c}{c!} \frac{\tau^n (\tau^{i-n} - \tau^a)}{1 - \tau^n} \right\} = \\ & = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{i=c}^{a-1} \frac{c^c}{c!} \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^i + \sum_{i=a}^{n+a-1} \frac{c^c}{c!} \frac{\tau^n (\tau^{i-n} - \tau^a)}{1 - \tau^n} \right\} = \\ & = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{i=c}^{a-1} \frac{c^c}{c!} \tau^i + \sum_{i=a}^{n+a-1} \frac{c^c}{c!} \frac{\tau^i}{1 - \tau^n} - \sum_{i=a}^{n+a-1} \frac{c^c}{c!} \frac{\tau^{n+a}}{1 - \tau^n} \right\} = \\ & = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i + \sum_{i=c}^{a-1} \frac{c^c}{c!} \tau^i + \sum_{i=a}^{+\infty} \frac{c^c}{c!} \tau^i - 0 = \\ & = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i + \sum_{i=c}^{+\infty} \frac{c^c}{c!} \tau^i = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i + \frac{c^c}{c!} \tau^c \frac{1}{1 - \tau} = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{c^c (1 - \tau) \tau^{n+a-1}}{c! (1 - \tau^n)} \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \rho^j) = 0 \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=n+a}^{+\infty} \frac{1 - \rho^{i-a}}{1 - \rho} \rho^{i-n-a+1} \frac{(1 - \tau) \tau^{n+a-1}}{(1 - \tau^n)} \frac{c^c}{c!} = 0 \end{aligned}$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} e_{(i,c)} = \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i P_0^* = P_i^*, \quad 0 \leq i \leq c-1;$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow +\infty} e_{(i,c)} = \frac{c^c}{c!} \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^i P_0^* = P_i^* , \quad i \geq c;$$

$$(iv) \lim_{n \rightarrow +\infty} e_{(i,c+k)} = 0 , \quad i \geq a.$$

Mostrámos assim que o modelo M/M/c com a regra de decisão descrito em 4.2 e verificando $\tau < 1$ e $\rho < 1$ converge para o usual modelo M/M/c quando a diferença entre os limiares de abertura e fecho tende para mais infinito.

Apêndice 4

Equações Diferenciais Estocásticas

Considere-se um processo físico cuja dinâmica ao longo do tempo t é descrita pela variável aleatória $X(t)$ através da equação diferencial,

$$\frac{dX}{dt} = f(X(t), t) \text{ com condição inicial } X(t_0) = X_0 \text{ para } t \geq t_0 \quad (\text{A4.1})$$

Sem perda de generalidade suporemos que $t_0 = 0$ e que o processo descrito pela variável aleatória $X(t)$ toma valores em \mathbb{R} .

Suponhamos que o referido processo é perturbado por fenómenos aleatórios (ruídos), neste caso a equação (A4.1) vem dada por,

$$\frac{dX}{dt} = f(X(t), t) + g(X(t), t) \text{ "ruído" },$$

cuja solução na forma integral é,

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s), s) ds + \int_0^t g(X(s), s) \text{ "ruído" } ds \quad (\text{A4.2})$$

A representação matemática para o termo “ruído” é o chamado Ruído Branco Unitário

$\varepsilon(t) = \frac{dw(t)}{dt}$, que é a derivada, no sentido das funções generalizadas do processo de

Wiener unitário $w(t)$ ([Br86], [Br97]), também designado nalguma literatura por movimento browniano ([Ø89], [Ma97]) e representado por $B(t)$, uma vez que o processo $w(t)$ foi proposto por Wiener como a descrição matemática do processo físico, movimento browniano $B(t)$. ([KP95])

O processo de Wiener unitário é um processo estocástico, $w(t)=w_t(\omega)=w(t, \omega)$ (usamos apenas $w(t)$ para abreviar a notação), definido no espaço de probabilidade (Ω, F, P) com as seguintes propriedades:

- (i) $w(0)=0$ quase certamente¹ (q.c.);
- (ii) Para $0 \leq s < t < \infty$, o incremento $w(t)-w(s)$ possui distribuição normal com média zero e variância $t-s$, ou seja,

$$w(t)-w(s) \sim N(0, t-s)$$
- (iii) Para $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k < \infty$, os incrementos $w(t_i)-w(t_{i-1})$ ($1 \leq i \leq k$) são independentes e a sua distribuição é, apenas função de t_i-t_{i-1} , tendo o processo de Wiener unitário incrementos estacionários.

Na definição do processo de Wiener unitário não impusemos a condição do espaço de probabilidade (Ω, F, P) ser completo², no entanto, no que se vai seguir consideraremos (Ω, F, P) um espaço de probabilidade completo.

As principais propriedades do processo de Wiener unitário são:

- (i) Pela lei forte dos grandes números: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{w(t)}{t} = 0$, q.c.;
- (ii) Para quase todo o $\omega \in \Omega$, as trajectórias do processo de Wiener unitário não são diferenciáveis. O processo de Wiener unitário é uma função de variação ilimitada sendo a variação total de cada trajectória infinita, q.c.;
- (iii) Para quase todo o $\omega \in \Omega$, as trajectórias do processo de Wiener unitário são contínuas.

¹ Seja X uma variável aleatória e $\{X_k\}$ ($k \geq 1$) uma sucessão da variáveis aleatórias definidas no espaço de probabilidade (Ω, F, P) . Se existirem conjuntos, $\Omega_0 \in F$, de medida- P nula tais que, para qualquer que seja $\omega \notin \Omega_0$, a sequência $\{X_k(\omega)\}$ converge para $X(\omega)$ no sentido usual, então dizemos que $\{X_k\}$ converge para X quase certamente ou com probabilidade 1 e escrevemos: $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X$.

² Seja (Ω, F, P) um espaço de probabilidade e considere-se a σ -álgebra,

$$\bar{F} = \{A \subset \Omega: \exists B, C \in F \text{ tais que } B \subset A \subset C, P(B) = P(C)\}$$

designada de completada de F . O espaço de probabilidade (Ω, F, P) é completo se $F = \bar{F}$.

Voltando à equação (A4.2) estamos, agora, em condições de substituir o termo “ruído” ds por $\varepsilon(s)ds=dw(s)$, obtendo,

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s), s) ds + \int_0^t g(X(s), s) dw(s) \quad (\text{A4.3})$$

Considere-se o espaço de probabilidade (Ω, F, P) completo. Seja $w(t)$ um processo de Wiener unitário unidimensional e $f: \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções Borel-mensuráveis. A equação diferencial estocástica unidimensional de Itô é dada por,

$$dX(t) = f(X(t), t) dt + g(X(t), t) dw(t), \quad (\text{A4.4})$$

para $t \in [0, T]$ com condição inicial $X(0) = X_0(\omega) = X_0$ (independente do processo de Wiener unitário $w(t)$) e cuja equação integral é,

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s), s) ds + \int_0^t g(X(s), s) dw(s), \text{ para } 0 \leq t \leq T. \quad (\text{A4.5})$$

O processo estocástico $\{X(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ definido em \mathbb{R} é solução da equação (A4.4) se verifica as seguintes propriedades:

- (i) $\{X(t)\}$ é contínuo e para cada t , $X(t)$ é F_t -mensurável, onde $\{F_t\}_{t \geq 0}$ é uma família de σ -álgebras crescentes de F (isto é, $F_t \subset F_s \subset F$, para todo $0 \leq t < s < \infty^3$);
- (ii) $\{f(X(t), t)\} \in \mathcal{L}^1([0, T]; \mathbb{R})$ e $\{g(X(t), t)\} \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R})^4$;
- (iii) a equação (A4.5) é válida para todo o $t \in [0, T]$ com probabilidade 1.

A solução $\{X(t)\}$ é única se, dada outra solução $\{\tilde{X}(t)\}$,

$$P\{X(t) = \tilde{X}(t), \forall 0 \leq t \leq T\} = 1.$$

³ Num espaço de probabilidade completo (Ω, F, P) a família, $\{F_t\}$, de σ -álgebras crescentes de F é contínua à direita e F_0 contém todos os conjuntos de medida P -nula.

⁴ $\mathcal{L}^p([a, b]; \mathbb{R})$: família de processos F_t - mensuráveis, $\{f(t)\}_{a \leq t \leq b}$, tais que $\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty$ q.c..

O primeiro integral da equação (A4.5) é de Riemman (ou de Lebesgue), no entanto, o segundo integral não pode ser considerado de Riemman-Stieljes dado que $w(s)$ é de variação ilimitada q.c., o que nos conduz à definição de *integrals estocásticos* da forma,

$\int_0^t G(s) dw(s)$. Apesar de este integral não ser de Riemman-Stieljes ele pode ser calculado através do limite quando n tende para $+\infty$ de somas de Riemman-Stieljes (R-S) apropriadas. Para tal tomamos uma decomposição do intervalo de integração $[0, t]$,

$$0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq t_2^{(n)} \leq \dots \leq t_{n-1}^{(n)} \leq t_n^{(n)} = t ,$$

com diâmetro convergente para zero e escolhemos de forma adequada os pontos intermédios, $\tau_i^{(n)} \in [t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}]$.

Se $\tau_i^{(n)} = t_{i-1}^{(n)}$, dizemos que a escolha é *não-antecipativa*, sendo o limite em média quadrática das somas de R-S o integral de Itô. O cálculo de Itô (I) não segue as usuais regras de substituição de variáveis e de derivação em cadeia, apresentando, contudo, boas propriedades probabilísticas. As principais propriedades do cálculo de Itô são:

Sendo $\{f(X(t), t)\} \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R})$, $\{g(X(t), t)\} \in \mathcal{L}^2([0, T]; \mathbb{R})$ e considerando $0 \leq M < U < T$, então:

$$(i) \quad \int_M^T f dw(s) = \int_M^U f dw(s) + \int_U^T f dw(s), \text{ para quase todo o } \omega;$$

$$(ii) \quad \int_M^T (cf + g) dw(s) = c \int_M^T f dw(s) + \int_M^T g dw(s) \quad \forall c \in \mathbb{R}, \text{ para quase todo o } \omega;$$

$$(iii) \quad E \left[\int_M^T f dw(s) \right] = 0;$$

$$(iv) \quad E \left[\left(\int_M^T f(s) dw(s) \right)^2 \right] = E \left[\int_M^T f^2(s) ds \right] \text{ (Isometria de Itô);}$$

$$(v) \quad \text{Var} \left[\int_M^T f(s) dw(s) \right] = E \left[\int_M^T f^2(s) ds \right], \text{ por (iii) e (iv).}$$

As boas propriedades probabilísticas do integral de Itô advêm do facto de ser um *martingale*, isto é, um processo estocástico que verifica a seguinte propriedade,

$$E[X(t) | X(n), 0 \leq n \leq s] = X(s).$$

A regra de derivação em cadeia para integrais estocásticos de Itô, é a fórmula de Itô que apresentamos na versão unidimensional remetendo a versão multidimensional e as respectivas demonstrações para [Ø89].

Fórmula de Itô (unidimensional): Seja $X(t)$ um processo satisfazendo a equação $dX(t) = f(X(t), t)dt + g(X(t), t)dw(t)$ e considere-se a função real h definida em $\mathbb{R} \times [0, +\infty]$ e de classe C^2 no seu domínio. Então,

$$dh(X(t), t) = \frac{\partial h}{\partial t}(X(t), t)dt + \frac{\partial h}{\partial x}(X(t), t)dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(X(t), t)(dX(t))^2,$$

onde $dt \cdot dt = dt \cdot dw(t) = dw(t) \cdot dt = 0$ e $dw(t) \cdot dw(t) = dt$.

O integral de Itô é apropriado para modelar fenómenos em tempo discreto e onde a equação diferencial estocástica é uma aproximação de uma equação às diferenças estocásticas.

Quando a escolha do ponto intermédio, $\tau_i^{(n)}$, é tal que $\tau_i^{(n)} = \frac{t_{i-1}^{(n)} + t_i^{(n)}}{2}$, o limite em média quadrática das somas de R-S é o *integral de Stratonovich* (S) adequado para o estudo de sistemas em tempo contínuo com ruído não-branco. O cálculo de Stratonovich apresenta algumas vantagens em relação ao de Itô visto utilizar as usuais regras de cálculo e tem como principal desvantagem o fraco comportamento probabilístico (não é um martingale).

Terminamos esta breve introdução às equações diferenciais estocásticas estabelecendo critérios de existência e unicidade de solução:

Teorema de existência e unicidade de solução

Seja $T > 0$, $f: \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções mensuráveis satisfazendo as condições: $\exists K > 0, M > 0, \forall t \in [0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}$

(i) $|f(x, t)| + |g(x, t)| \leq K(1 + |x|)$ (condição de crescimento linear);

(ii) $|f(x, t) - f(y, t)| + |g(x, t) - g(y, t)| \leq M|x - y|$ (condição de Lipschitz)

Então existe uma solução, $X(t) = X(t, \omega)$, da equação (A4.4) quase certamente única no intervalo $[0, T]$ e que é contínua com probabilidade 1 e contínua em média quadrática. Além disso a solução é um processo de Markov.

Mantendo a condição de crescimento linear e substituindo a condição de Lipschitz (uniforme) por uma condição de Lipschitz local, garantimos a existência e unicidade locais da solução da equação (A4.4).

Se supusermos que as funções f e g são contínuas em t e, que $X(0) = X_0(\omega) = X_0$ (independente do processo de Wiener unitário $w(t)$) é uma variável aleatória com momento de ordem superior a dois finito, então a solução, $X(t) = X(t, \omega)$, da equação (A4.4) é um processo de difusão “uniforme” em $[0, T]$.

Um processo de difusão “uniforme” é um processo estocástico com trajetórias contínuas de probabilidade 1, o qual verifica as seguintes propriedades:

$\forall s, t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}, t > s$

(i) $E[X(t) - X(s) | X(s) = x] = a(x, s)(t - s) + o(t - s)$, quando t converge para s ($t \rightarrow s$), e onde $a(x, s)$ representa o coeficiente de tendência;

(ii) $E[(X(t) - X(s))^2 | X(s) = x] = b(x, s)(t - s) + o(t - s)$, quando $t \rightarrow s$ e onde $b(x, s)$ representa o coeficiente de difusão do processo, isto é, a “velocidade” da variância do processo.

Nestas condições, a solução da equação (A4.4) é um processo de difusão “uniforme” com coeficiente de tendência $a(x, t) = f(x, t)$ e coeficiente de variação $b(x, t) = g^2(x, t)$.

A principal vantagem desta formulação reside no facto de as probabilidades de transição do processo, sob certas condições de regularidade, satisfazerem as equações às derivadas parciais (EDP's) de Kolmogorov progressivas e regressivas ([Br97]).

Apêndice 5

Códigos de Programação

Neste apêndice apresentamos os três programas concebidos para simular filas de espera com capacidade de serviço variável bem como uma descrição sumária das subrotinas utilizadas em cada programa. Para uma melhor compreensão designamos de,

Programa 1: ao simulador com chegadas e atendimentos estocásticos;

Programa 2: ao simulador com chegadas e atendimentos estocásticos e com mapa de simulação discretizado;

Programa 3: ao simulador com chegadas e atendimentos determinísticos.

No quadro abaixo estabelecemos a correspondência entre as várias subrotinas e os correspondentes programas.

Subrotinas	Programa 1	Programa 2	Programa 3
Mínimos	×	×	×
Mintmp	×	×	×
Posactv	×	×	×
Possimul	×	×	×
Trans	×	×	
Trancte			×
Inout	×	×	×
Mapa de Simulação			
Mapsimul	×		×
Mapsi		×	

Descrição sumária das subrotinas utilizadas:

- (i) *mínimos*: calcula o mínimo e dá a sua posição;
- (ii) *mintmp*: calcula o mínimo de um array;
- (iii) *posactv*: array das actividades;
- (iv) *possimul*: posição no array da simulação;
- (v) *trans*: transforma os números aleatórios uniformes em números aleatórios exponenciais;
- (vi) *trancte*: taxas de chegada e atendimento constantes;
- (vii) *inout*: determina a abertura e fecho dos postos de serviço e dá a posição no array;
- (viii) *mapsimul*: mapa de simulação por linha;
- (ix) *mapsi*: mapa de simulação por intervalo de tempo.

PROGRAMA 1

```

o=5000;           %n.º de ocorrências da simulação
as=1;            %áreas serviço
ps=3;           %postos serviço
txchg=50;        %taxa chegada (n.º de chegadas por unidade de tempo)
txatd=20;        %taxa atendimento (n.º de atendimentos por unidade de tempo)
tmpreal=0;       %tempo real

```

```
%-----DIMENSIONAMENTO DAS MATRIZES-----
```

```

ACTV=zeros(4,1+(as*(ps+1)));           %actividades
FIL=zeros(1,as);                       %filas de espera
TOT=zeros(1,2+(as*(ps+1)));           %totais
CLI=zeros(1,1+(as*(ps+1)));           %totais cliente
SIMUL=zeros(o,4+(as*(2*ps+1)));        %simulação

```

```
%-----DIMENSIONAMENTO DAS MATRIZES-----
```

```

fidtot = fopen('d:\temp\tot.txt','w');   %ficheiro output totais
fidactv = fopen('d:\temp\act.txt','w');  %ficheiro output actividades
fidcli = fopen('d:\temp\cli.txt','w');   %ficheiro output totais clientes
fidtfil = fopen('d:\temp\fil.txt','w');  %ficheiro output filas
fclose(fidtot);
fclose(fidactv);
fclose(fidcli);
fclose(fidtfil);

```

```
%-----ABERTURAS INICIAIS -----
```

```

for auxas=1:as
    ACTV(1,POSACTV(auxas,1,as,ps))=1;
    ACTV(1,POSACTV(auxas,0,as,ps))=1;
end
ACTV(1,POSACTV(0,0,as,ps))=1;
ACTV(4,POSACTV(0,0,as,ps))=TRANS(txchg);

```

```
%-----ABERTURAS INICIAIS -----
```

```

for auxo=1:o
if auxo~=1

```

```
%-----PROCESSAMENTO MÍNIMOS -----
```

```

ACTV(3,:)=MINIMOS(ACTV);
tmp=MINTMP(ACTV);
%-----PROCESSAMENTO MÍNIMOS-----

%-----ABERTURAS E FECHOS-----

abertura=0;
fecho=0;
for auxas=1:as
  for auxps=1:ps
    if auxps~=1
      if FIL(1,auxas)>INOUT(0,auxas,auxps,FIL(1,auxas),as,ps)
        if ACTV(1,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==0 & ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==0
          abertura=1;
          ACTV(1,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=1;
          ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=1;
          FIL(1,auxas)=FIL(1,auxas)-1;
          if FIL(1,auxas)==0
            ACTV(2,POSACTV(auxas,0,as,ps))=0;
          end
          tmp=0;
        end
      else
        if FIL(1,auxas)<INOUT(1,auxas,auxps,FIL(1,auxas),as,ps)
          if ACTV(1,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==1
            ACTV(1,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=0;
          end
        end
      end
    end
  end
end
if abertura==1
  for auxas=1:as
    for auxps=1:ps
      ACTV(3,POSACTV(0,0,auxas,ps))=0;
      ACTV(3,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=0;
    end
  end
end
%-----ABERTURAS E FECHOS-----

```

```
tmpreal=tmpreal+tmp;
```

```
%-----ACTUALIZAÇÃO DE TEMPOS-----
```

```
for auxas=1:as
```

```
for auxps=1:ps
```

```
if ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==1
```

```
if ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))~=0
```

```
ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))-tmp;
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
if ACTV(3,POSACTV(0,0,as,ps))~=1
```

```
ACTV(4,POSACTV(0,0,as,ps))=ACTV(4,POSACTV(0,0,as,ps))-tmp;
```

```
end
```

```
%-----ACTUALIZAÇÃO DE TEMPOS-----
```

```
%-----TRATAMENTO DE SAÍDA-----
```

```
for auxps=1:ps
```

```
if ACTV(3,POSACTV(as,auxps,as,ps))==1
```

```
TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps)+1)=TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps)+1)+1;
```

```
if ACTV(1,POSACTV(as,auxps,as,ps))==1
```

```
if ACTV(2,POSACTV(as,0,as,ps))==1
```

```
FIL(1,as)=FIL(1,as)-1;
```

```
if FIL(1,as)==0
```

```
ACTV(2,POSACTV(as,0,as,ps))=0;
```

```
end
```

```
else
```

```
ACTV(2,POSACTV(as,auxps,as,ps))=0;
```

```
end
```

```
else
```

```
ACTV(2,POSACTV(as,auxps,as,ps))=0;
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
%-----TRATAMENTO DE SAÍDA-----
```

```
%-----TRATAMENTOS DE MOVIMENTAÇÃO-----
```

```

for auxas=(as-1):-1:1
  for auxps=1:ps
    if ACTV(3,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==1
      if ACTV(1,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==1
        if ACTV(2,POSACTV(auxas,0,as,ps))==1
          FIL(1,auxas)=FIL(1,auxas)-1;
          if FIL(1,auxas)==0
            ACTV(2,POSACTV(auxas,0,as,ps))=0;
          end
        else
          ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=0;
        end
      else
        ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=0;
      end
    end
  %-----
  in=0;
  for auxxps=1:ps
    if in==0
      if ACTV(1,POSACTV((auxas+1),auxxps,as,ps))==1
        if ACTV(2,POSACTV((auxas+1),auxxps,as,ps))==0
          ACTV(2,POSACTV((auxas+1),auxxps,as,ps))=1;
          in=1;
        end
      end
    end
  end
  if in==0
    ACTV(2,POSACTV((auxas+1),0,as,ps))=1;
    FIL(1,(auxas+1))=FIL(1,(auxas+1))+1;
  end
end
end
end
%-----TRATAMENTOS DE MOVIMENTAÇÃO-----

%-----TRATAMENTO DE ENTRADA-----
if ACTV(3,POSACTV(0,0,as,ps))==1
  TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps))=TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps))+1;
  in=0;

```

```

for auxps=1:ps
if in==0
    if ACTV(1,POSACTV(1,auxps,as,ps))==1
        if ACTV(2,POSACTV(1,auxps,as,ps))==0
            ACTV(2,POSACTV(1,auxps,as,ps))=1;
            in=1;
        end
    end
end
end
end
if in==0
    ACTV(2,POSACTV(1,0,as,ps))=1;
    FIL(1,1)=FIL(1,1)+1;
end
end
%-----TRATAMENTO DE ENTRADA-----

%-----GERAÇÃO DE TEMPOS-----
if ACTV(3,POSACTV(0,0,as,ps))==1
    ACTV(4,POSACTV(0,0,as,ps))=TRANS(txchg);
end
for auxas=1:as
for auxps=1:ps
if ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==1
    if ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==0
        ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=TRANS(txatd);
    end
end
end
end
%-----GERAÇÃO DE TEMPOS-----

end
%-----MOVIMENTAÇÃO PARA SIMUL-----
SIMUL(auxo,1)=tmpreal; %tempo real
for auxas=1:as
SIMUL(auxo,POSSIMUL(auxas,0,as,ps))=FIL(1,auxas); %filas espera
for auxps=1:ps
    SIMUL(auxo,POSSIMUL(auxas,auxps,as,ps)+1)=ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps)); %tempos
    SIMUL(auxo,POSSIMUL(auxas,auxps,as,ps))=ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps)); %activos

```

```

end
end
SIMUL(auxo,POSSIMUL(0,0,as,ps)-1)=TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps));           %TOT in
SIMUL(auxo,POSSIMUL(0,0,as,ps))=ACTV(4,POSACTV(0,0,as,ps));           %tmp in
SIMUL(auxo,POSSIMUL(0,0,as,ps)+1)=TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps)+1);       %TOT out
%-----MOVIMENTAÇÃO PARA SIMUL-----

end

mapsimul(SIMUL,as,ps,o);

```

PROGRAMA 2

```

o=2000;           %n.º de ocorrências da simulação
as=1;            %áreas serviço
ps=2;            %postos serviço
txchg=35;        %taxa chegada (n.º de chegadas por unidade de tempo)
txatd=20;        %taxa atendimento (n.º de atendimentos por unidade de tempo)
tmpreal=0;       %tempo real
inttempo=0.2;    %tempo de intervalo no mapa

```

```

%-----DIMENSIONAMENTO DAS MATRIZES-----
ACTV=zeros(4,1+(as*(ps+1)));           %actividades
FIL=zeros(1,as);                       %filas de espera
TOT=zeros(1,2+(as*(ps+1)));           %totais
CLI=zeros(1,1+(as*(ps+1)));           %totais cliente
SIMUL=zeros(o,4+(as*(2*ps+1)));       %simulação
%-----DIMENSIONAMENTO DAS MATRIZES-----

```

```

fidtot = fopen('c:\temp\tot.txt','w');   %ficheiro output totais
fidactv = fopen('c:\temp\act.txt','w');   %ficheiro output actividades
fidcli = fopen('c:\temp\cli.txt','w');    %ficheiro output totais clientes
fidtfil = fopen('c:\temp\fil.txt','w');   %ficheiro output filas
fclose(fidtot);
fclose(fidactv);
fclose(fidcli);
fclose(fidtfil);

```



```

%-----ABERTURAS INICIAIS -----
for auxas=1:as
    ACTV(1,POSACTV(auxas,1,as,ps))=1;
    ACTV(1,POSACTV(auxas,0,as,ps))=1;
end
ACTV(1,POSACTV(0,0,as,ps))=1;
ACTV(4,POSACTV(0,0,as,ps))=TRANS(txchg);
%-----ABERTURAS INICIAIS-----

for auxo=1:o
if auxo~=1

%-----PROCESSAMENTO MÍNIMOS-----
ACTV(3,:)=MINIMOS(ACTV);
tmp=MINTMP(ACTV);
%-----PROCESSAMENTO MÍNIMOS-----

%-----ABERTURAS E FECHOS-----
abertura=0;
fecho=0;
for auxas=1:as
    for auxps=1:ps
        if auxps~=1
            if FIL(1,auxas)>INOUT(0,auxas,auxps,FIL(1,auxas),as,ps)
                if ACTV(1,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==0 & ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==0
                    abertura=1;
                    ACTV(1,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=1;
                    ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=1;
                    FIL(1,auxas)=FIL(1,auxas)-1;
                    if FIL(1,auxas)==0
                        ACTV(2,POSACTV(auxas,0,as,ps))=0;
                    end
                    tmp=0;
                end
            end
        else
            if FIL(1,auxas)<INOUT(1,auxas,auxps,FIL(1,auxas),as,ps)
                if ACTV(1,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==1
                    ACTV(1,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=0;
                end
            end
        end
    end
end
end

```

```

        end
    end
end
end
end
if abertura==1
for auxas=1:as
for auxps=1:ps
    ACTV(3,POSACTV(0,0,auxas,ps))=0;
    ACTV(3,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=0;
end
end
end
%-----ABERTURAS E FECHOS-----

tmpreal=tmpreal+tmp;

%-----ACTUALIZAÇÃO DE TEMPOS-----
for auxas=1:as
for auxps=1:ps
    if ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==1
        if ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))~=0
            ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))-tmp;
        end
    end
end
end
if ACTV(3,POSACTV(0,0,as,ps))~=1
    ACTV(4,POSACTV(0,0,as,ps))=ACTV(4,POSACTV(0,0,as,ps))-tmp;
end
%-----ACTUALIZAÇÃO DE TEMPOS -----

%-----TRATAMENTO DE SAÍDA-----
for auxps=1:ps
    if ACTV(3,POSACTV(as,auxps,as,ps))==1
        TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps)+1)=TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps)+1)+1;
        if ACTV(1,POSACTV(as,auxps,as,ps))==1
            if ACTV(2,POSACTV(as,0,as,ps))==1
                FIL(1,as)=FIL(1,as)-1;
                if FIL(1,as)==0

```

```

    ACTV(2,POSACTV(as,0,as,ps))=0;
  end
else
  ACTV(2,POSACTV(as,auxps,as,ps))=0;
end
else
  ACTV(2,POSACTV(as,auxps,as,ps))=0;
end
end
end
%-----TRATAMENTO DE SAÍDA-----

%-----TRATAMENTOS DE MOVIMENTAÇÃO-----
for auxas=(as-1):-1:1
  for auxps=1:ps
    if ACTV(3,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==1
      if ACTV(1,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==1
        if ACTV(2,POSACTV(auxas,0,as,ps))==1
          FIL(1,auxas)=FIL(1,auxas)-1;
          if FIL(1,auxas)==0
            ACTV(2,POSACTV(auxas,0,as,ps))=0;
          end
        else
          ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=0;
        end
      else
        ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=0;
      end
    end
  end
  in=0;
  for auxxps=1:ps
    if in==0
      if ACTV(1,POSACTV((auxas+1),auxxps,as,ps))==1
        if ACTV(2,POSACTV((auxas+1),auxxps,as,ps))==0
          ACTV(2,POSACTV((auxas+1),auxxps,as,ps))=1;
          in=1;
        end
      end
    end
  end
end
end
end

```

```

    if in==0
        ACTV(2,POSACTV((auxas+1),0,as,ps))=1;
        FIL(1,(auxas+1))=FIL(1,(auxas+1))+1;
    end
end
end
end
end
%-----TRATAMENTO DE MOVIMENTAÇÃO-----

%-----TRATAMENTO DE ENTRADA-----
if ACTV(3,POSACTV(0,0,as,ps))==1
    TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps))=TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps))+1;
    in=0;
    for auxps=1:ps
        if in==0
            if ACTV(1,POSACTV(1,auxps,as,ps))==1
                if ACTV(2,POSACTV(1,auxps,as,ps))==0
                    ACTV(2,POSACTV(1,auxps,as,ps))=1;
                    in=1;
                end
            end
        end
    end
end
end
end
if in==0
    ACTV(2,POSACTV(1,0,as,ps))=1;
    FIL(1,1)=FIL(1,1)+1;
end
end
%-----TRATAMENTO DE ENTRADA-----

%-----GERAÇÃO DE TEMPOS-----
if ACTV(3,POSACTV(0,0,as,ps))==1
    ACTV(4,POSACTV(0,0,as,ps))=TRANS(txchg);
end
for auxas=1:as
    for auxps=1:ps
        if ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==1
            if ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==0
                ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=TRANS(txatd);
            end
        end
    end
end

```

```

end
end
end
%-----GERAÇÃO DE TEMPOS-----

end
%-----MOVIMENTAÇÃO PARA SIMUL-----
SIMUL(auxo,1)=tmpreal;                                %tempo real
for auxas=1:as
SIMUL(auxo,POSSIMUL(auxas,0,as,ps))=FIL(1,auxas);      %filas espera
for auxps=1:ps
    SIMUL(auxo,POSSIMUL(auxas,auxps,as,ps)+1)=ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps)); %tempos
    SIMUL(auxo,POSSIMUL(auxas,auxps,as,ps))=ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps)); %ativos
end
end
SIMUL(auxo,POSSIMUL(0,0,as,ps)-1)=TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps)); %TOT in
SIMUL(auxo,POSSIMUL(0,0,as,ps))=ACTV(4,POSACTV(0,0,as,ps)); %tmp in
SIMUL(auxo,POSSIMUL(0,0,as,ps)+1)=TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps)+1); %TOT out
%-----MOVIMENTAÇÃO PARA SIMUL-----

end

MAPSI(SIMUL,as,ps,o,inttempo);

```

PROGRAMA 3

```

o=1000;                %n.º de ocorrências da simulação
as=1;                  %áreas serviço
ps=3;                  %postos serviço
txchg=50;              %taxa chegada (n.º de chegadas por unidade de tempo)
txatd=30;              %taxa atendimento (n.º de atendimentos por unidade de tempo)
tmpreal=0;            %tempo real

```

```

%-----DIMENSIONAMENTO DAS MATRIZES-----
ACTV=zeros(4,1+(as*(ps+1))); %actividades
FIL=zeros(1,as);           %filas de espera
TOT=zeros(1,2+(as*(ps+1))); %totais
CLI=zeros(1,1+(as*(ps+1))); %totais cliente

```

```

SIMUL=zeros(o,4+(as*(2*ps+1)));           %simulação
%-----DIMENSIONAMENTO DAS MATRIZES-----

fidtot = fopen('d:\temp\tot.txt','w');     %ficheiro output totais
fidactv = fopen('d:\temp\act.txt','w');    %ficheiro output actividades
fidcli = fopen('d:\temp\cli.txt','w');     %ficheiro output totais clientes
fidtfil = fopen('d:\temp\fil.txt','w');    %ficheiro output filas
fclose(fidtot);
fclose(fidactv);
fclose(fidcli);
fclose(fidtfil);

%-----ABERTURAS INICIAIS-----
for auxas=1:as
    ACTV(1,POSACTV(auxas,1,as,ps))=1;
    ACTV(1,POSACTV(auxas,0,as,ps))=1;
end
ACTV(1,POSACTV(0,0,as,ps))=1;
ACTV(4,POSACTV(0,0,as,ps))=TRANSCTE(txchg);
%-----ABERTURAS INICIAIS -----

for auxo=1:o
    if auxo~=1

%-----PROCESSAMENTO MÍNIMOS -----
ACTV(3,:)=MINIMOS(ACTV);
tmp=MINTMP(ACTV);
%-----PROCESSAMENTO MÍNIMOS -----

%-----ABERTURAS E FECHOS-----
abertura=0;
fecho=0;
for auxas=1:as
    for auxps=1:ps
        if auxps~=1
            if FIL(1,auxas)>INOUT(0,auxas,auxps,FIL(1,auxas),as,ps)
                if ACTV(1,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==0 & ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==0
                    abertura=1;
                    ACTV(1,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=1;
                    ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=1;
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        FIL(1,auxas)=FIL(1,auxas)-1;
        if FIL(1,auxas)==0
            ACTV(2,POSACTV(auxas,0,as,ps))=0;
        end
        tmp=0;
    end
else
    if FIL(1,auxas)<INOUT(1,auxas,auxps,FIL(1,auxas),as,ps)
        if ACTV(1,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==1
            ACTV(1,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=0;
        end
    end
end
end
end
end
if abertura==1
for auxas=1:as
for auxps=1:ps
    ACTV(3,POSACTV(0,0,auxas,ps))=0;
    ACTV(3,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=0;
end
end
end
%-----ABERTURAS E FECHOS-----

tmpreal=tmpreal+tmp;

%-----ACTUALIZAÇÃO DE TEMPOS -----
for auxas=1:as
for auxps=1:ps
    if ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==1
        if ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))~=0
            ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))-tmp;
        end
    end
end
end
end
if ACTV(3,POSACTV(0,0,as,ps))~=1
    ACTV(4,POSACTV(0,0,as,ps))=ACTV(4,POSACTV(0,0,as,ps))-tmp;
end

```

```

end
%-----ACTUALIZAÇÃO DE TEMPOS-----

%-----TRATAMENTO DE SAÍDA-----

for auxps=1:ps
  if ACTV(3,POSACTV(as,auxps,as,ps))==1
    TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps)+1)=TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps)+1)+1;
    if ACTV(1,POSACTV(as,auxps,as,ps))==1
      if ACTV(2,POSACTV(as,0,as,ps))==1
        FIL(1,as)=FIL(1,as)-1;
        if FIL(1,as)==0
          ACTV(2,POSACTV(as,0,as,ps))=0;
        end
      else
        ACTV(2,POSACTV(as,auxps,as,ps))=0;
      end
    else
      ACTV(2,POSACTV(as,auxps,as,ps))=0;
    end
  end
end
%-----TRATAMENTO DE SAÍDA-----

%-----TRATAMENTOS DE MOVIMENTAÇÃO-----

for auxas=(as-1):-1:1
  for auxps=1:ps
    if ACTV(3,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==1
      if ACTV(1,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==1
        if ACTV(2,POSACTV(auxas,0,as,ps))==1
          FIL(1,auxas)=FIL(1,auxas)-1;
          if FIL(1,auxas)==0
            ACTV(2,POSACTV(auxas,0,as,ps))=0;
          end
        else
          ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=0;
        end
      else
        ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=0;
      end
    end
  end
end
%-----

```



```

in=0;
for auxxps=1:ps
    if in==0
        if ACTV(1,POSACTV((auxas+1),auxxps,as,ps))==1
            if ACTV(2,POSACTV((auxas+1),auxxps,as,ps))==0
                ACTV(2,POSACTV((auxas+1),auxxps,as,ps))=1;
                in=1;
            end
        end
    end
end
end
end
if in==0
    ACTV(2,POSACTV((auxas+1),0,as,ps))=1;
    FIL(1,(auxas+1))=FIL(1,(auxas+1))+1;
end
end
end
end
%-----TRATAMENTOS DE MOVIMENTAÇÃO-----

%-----TRATAMENTO DE ENTRADA-----
if ACTV(3,POSACTV(0,0,as,ps))==1
    TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps))=TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps))+1;
    in=0;
    for auxps=1:ps
        if in==0
            if ACTV(1,POSACTV(1,auxps,as,ps))==1
                if ACTV(2,POSACTV(1,auxps,as,ps))==0
                    ACTV(2,POSACTV(1,auxps,as,ps))=1;
                    in=1;
                end
            end
        end
    end
end
end
if in==0
    ACTV(2,POSACTV(1,0,as,ps))=1;
    FIL(1,1)=FIL(1,1)+1;
end
end
%-----TRATAMENTO DE ENTRADA-----

```

```

%-----GERAÇÃO DE TEMPOS-----
if ACTV(3,POSACTV(0,0,as,ps))==1
    ACTV(4,POSACTV(0,0,as,ps))=TRANSCTE(txchg);
end
for auxas=1:as
for auxps=1:ps
if ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==1
    if ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))==0
        ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps))=TRANSCTE(txatd);
    end
end
end
end
%-----GERAÇÃO DE TEMPOS-----

end
%-----MOVIMENTAÇÃO PARA SIMUL-----
SIMUL(auxo,1)=tmpreal; %tempo real
for auxas=1:as
SIMUL(auxo,POSSIMUL(auxas,0,as,ps))=FIL(1,auxas); %filas espera
for auxps=1:ps
    SIMUL(auxo,POSSIMUL(auxas,auxps,as,ps)+1)=ACTV(4,POSACTV(auxas,auxps,as,ps)); %tempos
    SIMUL(auxo,POSSIMUL(auxas,auxps,as,ps))=ACTV(2,POSACTV(auxas,auxps,as,ps)); %ativos
end
end
SIMUL(auxo,POSSIMUL(0,0,as,ps)-1)=TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps)); %TOT in
SIMUL(auxo,POSSIMUL(0,0,as,ps))=ACTV(4,POSACTV(0,0,as,ps)); %tmp in
SIMUL(auxo,POSSIMUL(0,0,as,ps)+1)=TOT(1,POSACTV(0,0,as,ps)+1); %TOT out
%-----MOVIMENTAÇÃO PARA SIMUL-----

end

mapsimul(SIMUL,as,ps,o);

```

SUBROTINAS

```
function [minim] = MINIMOS(x)
n = length(x);
minim=zeros(1,n);
for auxn=1:n
    if x(4,auxn)~=0
        x(4,auxn)=1/x(4,auxn) ;
    end
end
maxim=max(x(4,:));
for auxn=1:n
    if maxim==x(4,auxn)
        minim(1,auxn)=1;
    end
end
```

```
function [minim] = MINTMP(x)
n = length(x);
minim=9999;
for auxn=1:n
    if x(4,auxn)~=0
        if x(4,auxn)<minim
            minim=x(4,auxn);
        end
    end
end
```

```
function [pos] = POSACTV(x,y,a,p)
if x==0
    if y==0
        pos=(a*(p+1))+1;
    end
else
    if y==0
        pos=(x*(p+1));
    else
        pos=(x*(p+1)+(y-p)-1);
    end
end
```

```

function [pos] = POSSIMUL(x,y,a,p)
if x==0
    if y==0
        pos=(a*((p*2)+1))+3;
    end
else
    if y==0
        pos=(x*((p*2)+1))+1;
    else
        pos=(x*((p*2)+1)+1)-(2*p)+2*y-2;
    end
end
end

```

```

function [tempo] = TRANS(x)
tempo=- (log(1-rand))/x;

```

```

function [tempo] = TRANSCTE(x)
tempo=x;

```

```

function [valor] = INOUT(flag,a,p,f,Arst,PstT)

```

```

% VARIÁVEIS QUE RECEBE:

```

```

% flag      : 0-ABERTURA 1-FECHO
% a         : AREA DE SERVICO NO MOMENTO
% p         : POSTO DE SERVICO NO MOMENTO
% f         : COMPRIMENTO DA FILA NO MOMENTO
% Arst      : AREAS DE SERVICO TOTAIS
% PstT      : POSTOS DE SERVICO TOTAIS

```

```

%-----ABERTURA-----

```

```

if flag==0
    if p==2
        valor=0;
    end
    if p==3
        valor=11;
    end
end

```

```

end

```

```

%-----FECHO-----

```

```

if flag==1
    if p==2
        valor=1;
    end
    if p==3
        valor=11;
    end
end

```

```

end

```

Mapas de Simulação

```

function [rc] = MAPSIMUL(SIMUL,as,ps,o)

fid = fopen('d:\temp\simul.txt','w');           %ficheiro output simulação
fprintf(fid,'||TMP REAL||');
for auxas=1:as
    for auxps=1:ps
        fprintf(fid,'PS%2.0f|',auxps);
        fprintf(fid,'  TMP |');
    end
    fprintf(fid,'FL%2.0f||',auxas);
end
fprintf(fid,' IN |');
fprintf(fid,'  TMP |');
fprintf(fid,' OUT||\n');
fprintf(fid,'||-----||');
for auxas=1:as
    for auxps=1:ps
        fprintf(fid,'----|',auxps);
        fprintf(fid,'-----|');
    end
    fprintf(fid,'----||',auxas);
end
fprintf(fid,'----|');
fprintf(fid,'-----|');
fprintf(fid,'----||\n');
for auxl=1:o
    fprintf(fid,'||%8.3f||',SIMUL(auxl,1));
    for auxas=1:as
        for auxps=1:ps
            fprintf(fid,'%4.0f|',SIMUL(auxl,POSSIMUL(auxas,auxps,as,ps)
));
            fprintf(fid,'%6.3f|',SIMUL(auxl,POSSIMUL(auxas,auxps,as,ps)
+1));
        end
        fprintf(fid,'%4.0f||',SIMUL(auxl,POSSIMUL(auxas,0,as,ps)));
    end
    fprintf(fid,'%4.0f|',SIMUL(auxl,POSSIMUL(0,0,as,ps)-1));
    fprintf(fid,'%6.3f|',SIMUL(auxl,POSSIMUL(0,0,as,ps)));
    fprintf(fid,'%4.0f||\n',SIMUL(auxl,POSSIMUL(0,0,as,ps)+1));
end
fclose(fid);
rc=0;

```

```

function [rc] = MAPSI(SIMUL,as,ps,o,tempo)

fid = fopen('c:\temp\simul.txt','w');      %ficheiro output
simulação
intervalo=0;

fprintf(fid,'||TMP REAL||');
for auxas=1:as
    for auxps=1:ps
        fprintf(fid,'PS%2.0f|',auxps);
        fprintf(fid,'  TMP |');
    end
    fprintf(fid,'FL%2.0f| |',auxas);
end
fprintf(fid,' IN |');
fprintf(fid,'  TMP |');
fprintf(fid,' OUT| |\n');
fprintf(fid,'||-----||');
for auxas=1:as
    for auxps=1:ps
        fprintf(fid,'----|',auxps);
        fprintf(fid,'-----|');
    end
    fprintf(fid,'----| |',auxas);
end
fprintf(fid,'----|');
fprintf(fid,'-----|');
fprintf(fid,'----| |\n');
for auxl=1:o
if SIMUL(auxl,1)>=intervalo
    intervalo=intervalo+tempo;
    fprintf(fid,'||%8.3f||',SIMUL(auxl,1));
    for auxas=1:as
        for auxps=1:ps

fprintf(fid,'%4.0f|',SIMUL(auxl,POSSIMUL(auxas,auxps,as,ps)));

fprintf(fid,'%6.3f|',SIMUL(auxl,POSSIMUL(auxas,auxps,as,ps)+1));
        end
        fprintf(fid,'%4.0f| |',SIMUL(auxl,POSSIMUL(auxas,0,as,ps)));
        end
        fprintf(fid,'%4.0f|',SIMUL(auxl,POSSIMUL(0,0,as,ps)-1));
        fprintf(fid,'%6.3f|',SIMUL(auxl,POSSIMUL(0,0,as,ps)));
        fprintf(fid,'%4.0f| |\n',SIMUL(auxl,POSSIMUL(0,0,as,ps)+1));
    end
end
fclose(fid);
rc=0;

```

Bibliografia

[AF81] Alonso, M. e Finn, E. J., 1981. “Física: um curso universitário. Volume 1: Mecânica”. Editora Edgard Blücher Ltda.

[AJ95] Azenha, A. e Jerónimo, M. A., 1995. “Elementos de Cálculo Diferencial e Integral em \mathbb{R} e \mathbb{R}^n ”. Editora McGraw-Hill de Portugal, L.^{da}.

[B86] Bracewell, R. N., 1986. “The Fourier Transform and its Applications (Second Edition, Revised)”. McGraw-Hill, Inc..

[Br86] Braumann, C. A., 1986. “Equações Diferenciais Estocásticas: A importância da análise numérica vista através de um exemplo de aplicação”, em 1º Ciclo de Conferências em Análise Numérica e Optimização. Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, p. 284-298.

[Br97] Braumann, C. A., 1997. “O Acaso, a Bolsa e a Vida”, em Estatística: A Diversidade na Unidade, M. Souto de Miranda e I. Pereira (eds.). Sociedade Portuguesa de Estatística e Edições Salamandra, Lisboa, p. 29-55.

[C93] Cabral, M. S. E., 1993. “Identificação de um Modelo de Misturas Finitas: Aplicação a Dados Hidrológicos”, em A Estatística e o Futuro e o Futuro da Estatística, p.413-424.

[C94] Cabral, M. S. E., 1994. “Teste de Razão de Verosimilhanças para uma Mistura de Normais. Um Estudo de Simulação”, em actas do II Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística, Luso, p. 463-477.

[CA92] Costa, M. M. R. e Almeida, M. J. B. M. de, 1992. “Fundamentos de Física”. Livraria Almedina. Coimbra.

[CFR98] Calheiros, F., Faria, S. e Rodrigues, C., 1998. “Modelação estocástica com autómatos celulares do tráfego real”, em *Afirmar a Estatística: Um desafio para o século XXI*, C. D. Paulino, A. Pacheco, A. Pires e Ferreira da Cunha (eds.). Sociedade Portuguesa de Estatística, p. 138-192.

[Cr68] Crawford, F. S., 1968. “Berkeley Physics Course: WAVES, Volume 3”. McGraw-Hill, Inc..

[DPNPB92] Deus, J. D. de, Pimenta, M., Noronha, A., Pena, T. e Brogueira, P., 1992. “Introdução à Física”. Coleção Ciência e Técnico. McGraw-Hill de Portugal, L.^{da}.

[D89] Devaney R. L., 1989. “An Introduction to Chaotic Dynamical Systems (Second Edition)”. Addison-Wesley Publishing Company.

[FLS63] Feynman, R. P., Leighton, R. B. e Sands, M., 1963. “The Feynman Lectures on Physics, Volume I”. California Institute of Technology. Addison-Wesley Publishing Company.

[Fe96] Feichtinger, G., 1996. “Chaos Theory in Operations Research”. *International Transactions in Operational Research* , vol. 3, nº 1, p. 23-36. IFORS.

[GH85] Gross, D., Harris, C. M., 1985. “Fundamentals of Queueing Theory (2nd edition)”. John Wiley & Sons.

[KKR73] Kittel, C., Knight, W. D. e Ruderman, M. A., 1973. “Berkeley Physics Course: MECHANICS, Volume 1 (Second Edition)”. McGraw-Hill, Inc..

[K75] Kleinrock, L., 1975. “Queueing Systems. Volume I: Theory”. John Wiley & Sons.

[KF82] Kolmogorov. A N. e Fomin, S. V., 1982. “Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional”. Editora Mir.

[KPa95] Kloeden, P. e Platen, E., 1995. "Numerical Solution of Stochastic Differential Equations". Applications of Mathematics: Stochastic Modelling and Applied Probability n° 23. Springer-Verlag.

[LY75] Li, T. e Yorke, J. A. , 1975. "Period three implies chaos". American Mathematical Monthly, vol. 82, p. 985-992.

[M91] Medhi, J., 1991. "Stochastic Models in Queueing Theory". Academic Press, Inc..

[Ma97] Mao, X., 1997. "Stochastic Differential Equations & Applications", Horwood Publishing Limited.

[Ø89] Øksendal, B., 1989. "Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications (second edition)". Springer-Verlag. Berlin.

[P93] Pain, H. J., 1993. "The Physics of Vibration and Waves". John Wiley & Sons.

[PT85] Pardoux, E. e Talay, D., 1985. "Discretization and Simulation of Stochastic Differential Equations", Acta Applicandae Mathematicae, vol. 3, p. 23-47.

[R89] Rosenhead, J., 1989. "Rational Analysis for a Problematic World: Problems Structuring Methods for Complexity, Uncertainty, and Conflict", Paperback.

[RNMS90] Ramalhoto, M. F., Nunes, C., Morais, M. e Silvia, R., 1990. "Estudo de uma fila de espera com número variável de servidores". Actas da 1ª Conferência em Estatística e Optimização, Tróia, Portugal, p. 281-300.

[RS96] Ramalhoto, M. F. e Syski, R., 1996. "Queueing and Quality Service", em Investigação Operacional, vol. 16, p. 155-172.



[S64] Sarkosvskii, A N., 1964. "Coexistence of cycles of continuous map of line into itself".
Ukrain Mat., vol. 16, p. 61-71.

[Sa89] Savelev, I. A., 1980. "Physics: A General Course. Volume I- Mechanics , Molecular
Physics". Mir Publishers. Moscow.

[T90] Talay, D., 1990. "Simulation and Numerical Analysis of Stochastic Differential
Systems: A Review". Rapports de Recherche n° 1313; Programme 5: Automatique,
Productique, Traitement du Signal et des Données. INRIA, Unité de Recherche Inria-Sophia
Antipolis.

"Matlab: Reference Guide", 1992, The MathWorks, Inc.

"Matlab: User's Guide", 1993, The MathWorks, Inc.

