Universidade de Évora

Mestrado em Matemática Aplicada
Biénio 1999/2001

O problema da caracterização da relação entre Q-convexidade e R-convexidade no caso 2×2 simétrico

Dissertação realizada por
Luís Miguel Zorro Bandeira

Orientador: Prof. Dr. António da Costa Ornelas Gonçalves
(Professor Associado)

Esta Dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri.

Évora
Setembro de 2003

Universidade de Évora

Mestrado em Matemática Aplicada
Biénio 1999/2001

O problema da caracterização da relação entre Q-convexidade e R-convexidade no caso 2×2 simétrico

Dissertação realizada por
Luís Miguel Zorro Bandeira

Orientador: Prof. Dr. António da Costa Ornelas Gonçalves
(Professor Associado)

Esta Dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri.

Évora
Setembro de 2003

O autor gostaria de agradecer ao Prof. Dr. António Ornelas, orientador desta dissertação, ao Prof. Dr. Pablo Pedregal, aos meus familiares, à minha namorada e a todos os meus amigos.

Conteúdo

Capítulo 1. Introdução 7

Capítulo 2. Preliminares 13

1. Espaços topológicos 13

2. Espaços métricos 16

3. Espaços vectoriais 18

4. Espaços normados 20

5. Espaços com produto interno 23

6. Espaços de medida 24

6.1. σ -álgebras 24

6.2. Medidas 25

6.3. Medidas exteriores 27

6.4. A medida de Lebesgue 28

6.5. Medidas de Radon 30

6.6. Funções mensuráveis 33

6.7. Convergência quase sempre e convergência em medida 36

7. O integral de Lebesgue 38

8. Topologias fracas 42

8.1. A topologia fraca $\sigma(X, X')$ 42

8.2. A topologia fraca* $\sigma(X', X)$ 43

8.3. Espaços reflexivos 45

8.4. Espaços separáveis 45

9. Os espaços L^p 46

9.1. Definições e propriedades 46

9.2. Reflexividade. Separabilidade. O dual de L^p 48

9.3. Convergência forte, fraca e fraca* em L^p 50

9.4. A b-convergência 53

9.5. Os espaços $L^p(\Omega, Y)$ 54

10. Os espaços $W^{1,p}$ 56

10.1. Definições e propriedades 56

10.2. Desigualdades de Sobolev 57

10.3. O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ 58

10.4. Convergência forte, fraca e fraca* em $W^{1,p}$ 59

11. Funções convexas 59

Capítulo 3. As Medidas de Young e a Q-convexidade 67

1. As Medidas de Young e a sci fraca 67

2. Q-convexidade e medidas de Young gradiente homogéneas 85

2.1. O caso p= $+\infty$ 88

3. Propriedades das funções Q-convexas 93

Capítulo 4. A P-convexidade 95

1. Uma condição suficiente para a Q-convexidade 95

2. Propriedades das funções P-convexas 103

Capítulo 5. A R-convexidade e os laminados 111

1. Introdução 111

2. Uma condição necessária para a Q-convexidade 113

3. Propriedades das funções R-convexas 115

4. Os laminados 120

Capítulo 6. Relações entre P-, Q- e R-convexidade 125

1. Implicações conhecidas 125

2. Exemplos e contra-exemplos 130

2.1. Funções Q-afins 130

2.2. Formas quadráticas 136

2.3. Outros exemplos 142

3. A R-convexidade implica a Q-convexidade? 159

3.1. O contra-exemplo de Šverák 160

3.2. A modificação de James 164

3.3. A modificação de Pedregal 164

Bibliografia 171

CAPíTULO 1

Introdução

Nesta dissertação analisa-se a relação entre laminados e micro-estruturas (ou, equivalentemente, entre Q- e R-convexidade) no caso 2×2. Para explicar brevemente o contexto em que se inserem estes conceitos, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, subconjunto conexo com fronteira suficientemente suave. Este domínio será para nós a parte do espaço ocupada por um **corpo** antes de sofrer uma deformação, ao qual chamaremos **configuração de referência**. Frequentemente referir-nos-emos a Ω como o corpo. A deformação do corpo é uma aplicação $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, suposta suficientemente suave, injectiva (excepto possivelmente na fronteira de Ω), preservando a orientação. A matriz $\nabla u(x)$ é chamada o gradiente da deformação e dá-nos uma medida da 'intensidade' local da deformação. A exigência de ser localmente biunívoca e de preservar a orientação pode ser escrita como $det(\nabla u(x)) > 0$ qs em Ω. Um corpo deformado associado a uma deformação arbitrária u pode estar sujeito a forças no corpo representadas por um campo vectorial $f : u(\Omega) \to \mathbb{R}^m$. A função f depende obviamente de u e representa a densidade das forças aplicadas por unidade de volume na configuração deformada. Poderão também existir forças na superfície definidas como um campo vectorial numa parte da fronteira $\gamma_1 \subset \partial u(\Omega)$, $g : \gamma_1 \to \mathbb{R}^m$, representando a densidade das forças aplicadas na superfície por unidade de área na configuração deformada. Consideramos então uma função $W : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{M}^{m\times n} \to (-\infty, +\infty]$ (onde $\mathbb{M}^{m\times n}$ é o espaço das matrizes $m \times n$, que identificaremos com $\mathbb{R}^{nm}$), a densidade energética, que representa a energia acumulada no corpo menos as forças a que o corpo está sujeito. As configurações de equilíbrio do material correspondem às soluções do problema variacional, que consiste em encontrar minimizantes (ou mais geralmente extremantes) do funcional da energia representando a energia interna associada a uma deformação do corpo

(1) $$I(u) = \int_\Omega W(x, u(x), \nabla u(x))dx,$$

onde a densidade de energia contínua W pode também depender de parâmetros físicos adicionais que são supostos constantes. Tais minimizantes descrevem configurações de equilíbrio do material sob condições de ambiente dadas. Uma destas importantes condições é a condição global na fronteira

$$u = u_0 \ em \ \partial\Omega$$

sendo u_0 uma deformação fixada, representando as condições prescritas na fronteira de Ω. Suponhamos que W só depende da variável gradiente. Uma das propriedades importantes que W deverá verificar será a coercividade:

$$W(F) \geq c(|F|^p - 1), \ \ F \in \mathbb{M}^{m\times n}, para \ algum \ p > 1, c > 0.$$

Note-se que o expoente de coercividade é importante, pois diz-nos que as sucessões minimizantes para I serão uniformemente limitadas no espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ (utilizando a desigualdade de Poincaré para controlar as próprias funções). Assim, estamos interessados em sucessões limitadas (u_j) em $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ precisamente para aquele p. Se a hipótese de coercividade falha para todos estes $p > 1$, poderão não existir configurações de equilíbrio. Por esta razão, podemos tomar para deformações admissíveis u em (1) as que pertencem a $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Tipicamente, a deformação u_0 com a qual fixamos as condições na fronteira de Ω será uma função lipschitziana $u_0 \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ (note-se as condições que supusemos em Ω) tal que $I(u_0) < \infty$. É também usual supormos que $u_0 : \Omega \to u_0(\Omega)$ é (globalmente) injectiva. Sob estas condições (que eventualmente poderiam ser um pouco diferentes), queremos analisar o problema da existência de configurações de equilíbrio, em particular estamos interessados em compreender em que situações existe uma deformação admissível u^* tal que

$$I(u^*) \leq I(u),$$

para qualquer u admissível. O modo mais geral de obter uma resposta é o chamado método directo. Para compreendermos a sua elegância, olhemos por momentos para o caso de dimensão finita.

Seja $I : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$. Procuremos um $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $I(x_0) \leq I(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. A primeira condição que temos de assegurar é que I seja limitada inferiormente, i.e., $I(x) \geq c > -\infty$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. Caso contrário, não faz sentido o problema de minimização: não pode existir minimizante. Seja então

$$-\infty < m = inf\{I(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

e seja (x_j) uma sucessão minimizante: $(I(x_j)) \searrow m$. Se (x_j) é relativamente compacta em $\mathbb{R}^n$ então existe uma subsucessão tal que $x_j \to x_0$. Consequentemente, se I é contínua, por ser $I(x_j) \to m$, vem $I(x_0) = m$ e x_0 é minimizante. Na realidade, como estamos interessados em minimizantes é suficiente pedir a semicontinuidade inferior sequencial de I:

$$I(x) \leq \liminf_{j \to \infty} I(x_j)$$

sempre que $x_j \to x$. O método directo do cálculo das variações consiste em imitar o caso de dimensão finita na situação de dimensão infinita. Os vários ingredientes importantes são:

- I não ser identicamente igual a $+\infty$ (que não é indispensável);
- I ser limitado inferiormente;
- Existirem boas propriedades de compacidade para a topologia do conjunto das funções competidoras;
- I ser sci com respeito à topologia escolhida.

Os espaços das funções competidoras são usualmente espaços de Banach com normas integrais, $L^p(\Omega)$, $W^{1,p}(\Omega)$, e as topologias adequadas com boas propriedades de compacidade são as topologias fracas nestes espaços. Em particular, se X é um destes espaços e é reflexivo, sabemos, pelo teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, que

$$\|u_j\|_X \leq M < \infty \ implica \ u_j \rightharpoonup u, u \in X,$$

possivelmente para uma subsucessão. Esta propriedade é extremamente conveniente e explica porque é que a convergência fraca é tão importante para nós e porque estamos interessados em aprofundar os conhecimentos sobre ela. Finalmente, a etapa mais difícil da aplicação do método directo é exigir a propriedade da sci sequencial com respeito a estas topologias fracas:

$$u_j \rightharpoonup u \ em \ X \ implica \ I(u) \leq \liminf_{j \to \infty} I(u_j)$$

Podemos resumir tudo isto que referimos acerca do método directo no seguinte teorema (cujo esquema de demonstração foi dado acima):

TEOREMA 1. *(Método Directo do Cálculo das Variações)*

Consideremos o princípio variacional

$$inf\{I(u) : u \in \mathcal{A}\}$$

onde

i: *$\mathcal{A}$ é um subconjunto convexo fechado de um espaço de Banach reflexivo;*

ii: *I é coercivo: $I(u) \geq c\|u\|_X, c > 0$ ou $lim_{\|u\| \to \infty} I(u) = +\infty$;*

iii: *I é sequencialmente sci com respeito à topologia fraca em X;*

iv: *Existe $\overline{u} \in \mathcal{A}$ tal que $I(\overline{u}) < \infty$.*

Então existe $u_0 \in \mathcal{A}$ com $I(u_0) < +\infty$ e $I(u_0) \leq I(u)$ para todo o $u \in \mathcal{A}$.

No nosso contexto, o funcional I é dado por (1), e o que se pretende com o terceiro ingrediente da página anterior, é obrigar as sucessões minimizantes (u_j) a convergir fracamente para algum u em $W^{1,p}(\Omega)$ (com $p > 1$).

Para aplicar o teorema 1, estamos interessados na propriedade de sci fraca (sequencial) do funcional I. O verdadeiro resultado é decidir quando

$$u_j \rightharpoonup u \quad implica \quad I(u) \leq \liminf_{j \to \infty} I(u_j).$$

Enquanto que a convexidade de W na variável gradiente tem um papel central no caso escalar (i.e., quando $n = 1$ ou $m = 1$) (é a condição necessária e suficiente para a sci fraca do funcional I), no caso vectorial (i.e, $n > 1$ e $m > 1$), a convexidade de $W(x, u, \cdot)$ é ainda suficiente para assegurar a sci fraca de I, mas, no entanto, está longe de ser necessária e, além disso, existem muitos exemplos importantes nos quais $W(x, u, \cdot)$ não é convexa e os respectivos funcionais são fracamente sci. A condição que é necessária foi introduzida, há cerca de 50 anos atrás, por Morrey, e chama-se quasiconvexidade (à qual chamaremos, por comodidade, Q-convexidade). Na prática esta condição é difícil de verificar, pois é caracterizada através de uma média, dada por um integral, em vez de poder ser caracterizada em termos pontuais (o que não é possível para $m \geq 3$, como mostrou Kristensen, em [**14**]). Foi então introduzida, também por Morrey, uma condição mais fraca, a convexidade característica-1 (à qual chamaremos, também por comodidade, R-convexidade). Mais tarde, foi introduzida (por Ball) uma condição mais forte que a Q-convexidade mas simultaneamente mais fraca que a convexidade usual, a policonvexidade, ou P-convexidade. Estas duas condições são dadas em termos pontuais. As relações entre estes tipos diferentes de convexidade já se encontram bastante bem estudadas actualmente, conforme se pode ver abaixo, no capítulo 6, secção 1. Contudo, uma questão que permanece em aberto é saber se a R-convexidade implica ou não, no caso $m = n = 2$, a Q-convexidade. Como referimos no início desta introdução, pretende-se com esta dissertação contribuir para o esclarecimento desta questão.

CAPíTULO 2

Preliminares

Neste capítulo enunciamos os conceitos e resultados básicos que se consideram como ponto de partida para esta dissertação.

1. Espaços topológicos

DEFINIÇÃO 2. *Uma família τ de subconjuntos de um conjunto X diz-se uma topologia em X se τ contém o conjunto vazio, $\emptyset$, o próprio conjunto X, a união e a intersecção de qualquer sua subfamília finita. O par (X, τ) diz-se um espaço topológico.*

Os conjuntos de τ chamam-se os abertos de (X, τ).

DEFINIÇÃO 3. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma vizinhança de $x \in X$ é um conjunto que contém um conjunto aberto contendo x. Uma vizinhança de um conjunto $A \subset X$ é um conjunto que contém um conjunto aberto contendo A.*

DEFINIÇÃO 4. *Seja (X, τ) um espaço topológico, $S \subset X$. Um ponto $x \in S$ diz-se:*

- **a:** *um ponto interior de S se S é uma vizinhança de x. O interior de S é o conjunto $int(S)$ formado pelos pontos interiores de S;*
- **b:** *um ponto exterior de S se for interior ao complementar de S em X, $S^c = \{x \in X : x \notin S\}$. O exterior de S é o conjunto $ext(S)$ formado pelos pontos exteriores a S;*
- **c:** *um ponto fronteiro de S se não for ponto interior nem ponto exterior a S. A fronteira de S é o conjunto ∂S formado pelos pontos fronteiros de S;*
- **d:** *um ponto de acumulação ou ponto limite de S quando qualquer vizinhança V de x em X contém algum ponto $s \in S$, com $s \neq x$. O derivado de S é o conjunto S' formado pelos pontos de acumulação de S;*
- **e:** *um ponto isolado se pertencer a S mas não for ponto de acumulação de S;*

DEFINIÇÃO 5. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico. Dizemos que a sucessão* (a_n) *converge para* $a \in X$, $a_n \to a$, *se qualquer vizinhança de* a *contém todos os pontos* a_n *(excepto possivelmente para um número finito). Uma sucessão* (a_n) *diz-se convergente se* $a_n \to a$ *para algum* $a \in X$.

DEFINIÇÃO 6. *Um conjunto diz-se fechado se o seu complementar for aberto.*

LEMA 7. *A intersecção de qualquer família de subconjuntos fechados é fechada e a união de qualquer família finita de fechados é fechada. O conjunto vazio e* X *são fechados.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[16]**, pág.74. □

DEFINIÇÃO 8. *A aderência ou fecho de* A, $\overline{A}$, *é a intersecção de todos os fechados que contêm* A.

DEFINIÇÃO 9. *Se* $Y \subseteq X$, *e* τ *é uma topologia para* X, *então a topologia*

$$\tau_Y = \{A : A = B \cap Y, B \in \tau\}$$

chama-se a topologia induzida em Y *por* τ. *Um subconjunto de* Y *diz-se relativamente aberto se está em* τ_Y *e diz-se relativamente fechado se o seu complementar em* Y *é relativamente aberto.*

Um subconjunto de um espaço topológico é sempre tomado como um espaço topológico com a sua topologia induzida, a não ser que outra topologia seja dada explicitamente.

DEFINIÇÃO 10. *Se* (X, τ) *e* (Y, τ') *são espaços topológicos, e* $f : X \to Y$, *então* f *é contínua se* $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} \in \tau$ *para qualquer* $A \in \tau'$. *Por outras palavras, uma aplicação entre dois espaço topológicos é contínua se a imagem inversa de qualquer aberto é um aberto. Uma função* f *diz-se contínua no ponto* x *se para qualquer vizinhança* U *de* $f(x)$ *existe uma vizinhança* V *de* x *tal que* $f(V) \subset U$.

DEFINIÇÃO 11. *Sejam* (X, τ) *e* (Y, τ') *espaços topológicos,* $f : X \to Y$. *Dizemos que* f *é um homeomorfismo ou um isomorfismo topológico se* f *é contínua, bijectiva e* f^{-1} *é contínua. Neste caso dizemos que os espaços* X *e* Y *são homeomorfos.*

LEMA 12. *Sejam* (X, τ) *e* (Y, τ') *espaços topológicos,* $f : X \to Y$. *Então, cada uma das seguintes condições é equivalente à continuidade de* f*:*

a: *A função* f *é contínua em cada* $x \in X$.

b: *Para qualquer* $F \in Y$ *fechado,* $f^{-1}(F) \in X$ *é fechado*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[10]**, pág.13. □

LEMA 13. *Sejam* (X, τ), (Y, τ') *e* (Z, τ'') *espaços topológicos. Se* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$ *são contínuas, então a função composta* $g \circ f : X \to Z$ *é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[16]**, pág.60. □

LEMA 14. *Seja* (X, τ) *um espaços topológico,* $f, g : X \to \mathbb{R}$*, contínuas, e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então as funções dadas pelas expressões*

$$|f(\cdot)|, \quad \alpha f(\cdot), \quad f(\cdot) + g(\cdot)$$

são contínuas. Se $X = \mathbb{R}$*, então as expressões*

$$\max_{x \in X}(f(x), g(x)), \quad \min_{x \in X}(f(x), g(x))$$

definem também funções contínuas.

DEMONSTRAÇÃO. Basta utilizar o lema anterior, e pensar nas regiões acima dos gráficos (para as funções max e min). □

DEFINIÇÃO 15. *Um espaço topológico* X *diz-se um espaço de Hausdorff (ou separado) se:*

i: *Para cada* $x \in X$*, o conjunto* $\{x\}$ *é fechado;*

ii: *Para cada par de pontos distintos* $x, y \in X$*, existem vizinhanças disjuntas de* x *e* y.

DEFINIÇÃO 16. *Uma cobertura aberta de um conjunto* A *num espaço topológico* X *é uma família de conjuntos abertos cuja união contém* A. *Dizemos que* X *é compacto se de cada cobertura aberta for possível extrair uma subcobertura finita. Notemos que um subconjunto* $A \subseteq X$ *é compacto na sua topologia relativa sse de cada cobertura aberta de* A *por elementos de* X *for possível extrair uma subcobertura finita.*

DEFINIÇÃO 17. *Um subconjunto A de um espaço de Hausdorff X diz-se relativamente compacto se $\overline{A}$ é compacto.*

DEFINIÇÃO 18. *Um subconjunto A de um espaço topológico X diz-se sequencialmente compacto se qualquer sucessão $(a_n) \subset A$ possui uma subsucessão convergente para um elemento $a \in A$.*

DEFINIÇÃO 19. *Um espaço topológico X diz-se localmente compacto se cada um dos seus elementos possui uma vizinhança cujo fecho é compacto.*

DEFINIÇÃO 20. *Um conjunto A diz-se denso num espaço topológico X se $\overline{A} = X$.*

LEMA 21. **a:** *Um subconjunto fechado de um compacto é compacto.*

b: *A imagem de um compacto por uma função contínua é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração segue directamente das definições. □

LEMA 22. *Uma função real contínua num compacto atinge o seu supremo e o seu ínfimo, i.e., tem máximo e mínimo.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**10**], pág.18. □

2. Espaços métricos

DEFINIÇÃO 23. *Seja X um conjunto, $x, y, z \in X$ e d uma função real definida em $X \times X$, com as seguintes propriedades:*

i: $d(x,x) = 0$, $d(x,y) > 0$ *se* $x \neq y$;

ii: $d(x,y) = d(y,x)$;

iii: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Então d diz-se uma métrica em X. O conjunto X munido da métrica d chama-se espaço métrico. Por comodidade, sempre que não houver perigo de confusão, diremos o espaço métrico X, deixando subentendida a métrica d.

DEFINIÇÃO 24. *Seja X um espaço métrico, $r > 0$ e $a \in X$. A bola aberta de centro a e raio $r > 0$ é o conjunto*

$$B(a,r) := \{x \in X : d(x,a) < r\}.$$

DEFINIÇÃO 25. *Seja X um espaço métrico. Um conjunto $A \subset X$ diz-se limitado se existir $R \geq 0$ tal que $d(x,y) \leq R$, quaisquer que sejam $x, y \in A$. Além disso, se Y é um espaço métrico e $f : X \to Y$ é uma aplicação, diz-se que f é uma aplicação limitada se a sua imagem $f(X)$ é um subconjunto limitado de Y.*

PROPOSIÇÃO 26. *Qualquer espaço métrico é um espaço topológico.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[10]**, pág.19. □

DEFINIÇÃO 27. *Seja X um espaço métrico. Dizemos que o ponto $a \in X$ é limite da sucessão $(a_n) \subset X$ quando*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ d(a_n, a) < \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N} \ com \ n \geq n_0.$$

Quando a é limite da sucessão (a_n), diz-se também que a_n tende para a, ou que a_n converge para a, denotando este facto por

$$a_n \to a \ ou \ \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Uma sucessão que possui limite diz-se convergente, caso contrário diz-se divergente.

DEFINIÇÃO 28. *Seja X um espaço métrico. Uma sucessão (a_n) diz-se uma sucessão de Cauchy se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ d(a_n, a_m) < \varepsilon \ \forall n, m \in \mathbb{N} \ com \ n, m \geq n_0.$$

DEFINIÇÃO 29. *Um espaço métrico diz-se completo se toda a sucessão de Cauchy é convergente.*

LEMA 30. *Num espaço métrico toda a sucessão convergente é sucessão de Cauchy. Uma sucessão de Cauchy converge sse possui uma subsucessão convergente.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue imediatamente das definições. □

LEMA 31. *Sejam X, Y espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ é contínua em $a \in X$ sse para qualquer sucessão $(a_n) \subset X$*

$$a_n \to a \;\Rightarrow\; f(a_n) \to f(a).$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**16**], pág.113. □

TEOREMA 32. *Seja X um espaço métrico, $A \subset X$. Então A é compacto sse A é sequencialmente compacto.*

DEFINIÇÃO 33. *Sejam X, Y espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ diz-se lipschitziana se*

$$\exists k > 0 \;: d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y) \;\forall x, y \in X.$$

3. Espaços vectoriais

Vamos definir apenas espaços vectoriais reais (a que chamaremos, por simplicidade, de espaços vectoriais).

DEFINIÇÃO 34. *Chamamos espaço vectorial a qualquer conjunto $X \neq \emptyset$ com duas operações nele definidas:*

uma aplicação $(x, y) \mapsto x + y$ de $X \times X$ em X, chamada adição;

uma aplicação $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{R} \times X$ em X, chamada multiplicação por um escalar, verificando os seguintes axiomas:

a: $x + y = y + x$,

b: $(x + y) + z = x + (y + z)$,

c: $\forall x, y \in X \;\exists z \in X : x + z = y$,

d: $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

e: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

f: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

g: $1x = x$,

para quaisquer $x, y, z \in X$, e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Chamamos vectores aos elementos de X e escalares aos elementos de $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 35. *Seja X um espaço vectorial. Se $E \subset X$ e $x_0 \in X$, chamamos ao conjunto $E + x_0 = \{y \in X : y = x + x_0$ para algum $x \in E\}$ a translação-x_0 de E. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, escrevemos $\alpha E = \{y \in X : y = \alpha x$ para algum $x \in E\}$ e chamamos a este conjunto a dilatação de E pelo factor α.*

DEFINIÇÃO 36. *Seja X um espaço vectorial. Um vector $x \in X$ diz-se combinação linear dos vectores $x_1, ..., x_k \in X$ se existirem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_k$ com $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k$.*

DEFINIÇÃO 37. *Um conjunto finito $\{x_1, ..., x_k\} \subset X$ diz-se linearmente independente se*

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0.$$

Um conjunto qualquer $X' \subset X$ diz-se linearmente independente se qualquer subconjunto finito é linearmente independente. Se um conjunto não é linearmente independente então diz-se linearmente dependente.

DEFINIÇÃO 38. *Seja A um subconjunto de um espaço vectorial X. Designamos por $lin(A)$ o invólucro linear de A, i.e.,*

$$lin(A) = \{\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k : x_1, ..., x_k \in A \text{ e } \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, ...\}$$

DEFINIÇÃO 39. *Um conjunto $B \subset X$ diz-se uma base de X se B é linearmente independente e gera X (i.e., $lin(B) = X$).*

DEFINIÇÃO 40. *Se existe em X uma base finita então diz-se que X tem dimensão finita.*

Neste caso demonstra-se (ver, p. ex. [**18**]) que todas as bases de X têm o mesmo número de elementos, número esse que é chamado a dimensão de X. Caso contrário diz-se que X tem dimensão infinita.

DEFINIÇÃO 41. *Sejam X, Y espaços vectoriais. Uma aplicação $L : X \to Y$ diz-se uma aplicação linear se*

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \quad \forall x, y \in X,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

DEFINIÇÃO 42. *Seja τ uma topologia num espaço vectorial X tal que*

a: *para cada $x \in X$, o conjunto $\{x\}$ é fechado;*

b: *as operações de espaço vectorial são contínuas com respeito a τ.*

Sob estas condições, diz-se que τ é uma topologia vectorial em X, e X um espaço vectorial topológico.

4. Espaços normados

O conceito de norma de um vector é uma generalização (abstracção axiomática) do conceito de comprimento de um vector em $\mathbb{R}^n$.

DEFINIÇÃO 43. *Uma função $|\cdot|_X : X \to [0, +\infty)$ diz-se uma norma se:*

a: $|x|_X = 0$ *sse* $x = 0$,

b: $|\lambda x|_X = |\lambda||x|_X \ \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

c: $|x + y|_X \leq |x|_X + |y|_X, \ \forall x, y \in X$.

DEFINIÇÃO 44. *Chamamos espaço normado a um espaço vectorial com uma norma nele definida.*

OBSERVAÇÃO 45. Um espaço normado é de modo natural um espaço métrico (logo um espaço topológico): a distância define-se por $d(x, y) = |x - y|_X$. A convergência definida pela norma e a convergência definida pela métrica coincidem, obviamente.

DEFINIÇÃO 46. *Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado. Dizemos que uma sucessão $(x_n) \subset X$ converge para $x \in X$ se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{R} \ : \ |x_n - x|_X < \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N} \ \textit{com} \ n \geq n_0.$$

OBSERVAÇÃO 47. Note-se que $x_n \to x$ em X significa $|x_n - x|_X \to 0$.

DEFINIÇÃO 48. *Duas normas definidas no mesmo espaço vectorial X dizem-se equivalentes se definem a mesma convergência, i.e., se as correspondentes sucessões convergentes são as mesmas:*

$$|\cdot|_1 \ e \ |\cdot|_2 \ dizem-se \ equivalentes \ se \ |x_n|_1 \to 0 \Leftrightarrow |x_n|_2 \to 0, \ \forall (x_n) \subset X.$$

PROPOSIÇÃO 49. *Seja X um espaço vectorial de dimensão finita. Então todas as normas em X são equivalentes.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**17**], pág.142. □

TEOREMA 50. *Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado, $C \subset X$. Se C é compacto, então é fechado e limitado. Se $X = \mathbb{R}^n$ então C é compacto sse é limitado e fechado.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**19**], pág.20 e [**17**], pág.80. □

DEFINIÇÃO 51. *Um espaço normado $(X, |\cdot|_X)$ diz-se completo se qualquer sucessão de Cauchy em X converge (para um elemento de X). Chama-se espaço de Banach a qualquer espaço normado completo.*

DEFINIÇÃO 52. *Sejam X, Y espaços normados. Uma aplicação linear $L : X \to Y$ diz-se limitada se*

$$\exists k > 0 \ : \ |L(x)|_Y \leq k|x|_X \quad \forall x \in X.$$

OBSERVAÇÃO 53. A definição anterior só se aplica a aplicações lineares, para as não-lineares aplicamos a definição 25 (a qual não faz sentido para aplicações lineares).

LEMA 54. *Sejam X, Y espaços normados, $L : X \to Y$ uma aplicação linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

a: *L é lipschitziana;*

b: *existe $x_0 \in X$ tal que $L(\cdot)$ é contínua em x_0;*

c: $\sup_{|x|\leq 1} |L(x)| < \infty$;

d: *L é limitada.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**10**], pág.59. □

DEFINIÇÃO 55. *Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado. O espaço dual de X, X', é o espaço das aplicações lineares contínuas definidas em X.*

DEFINIÇÃO 56. *Sejam X, Y espaços normados, $L : X \to Y$ uma aplicação linear. A norma desta aplicação linear define-se por*

$$|L| = \sup_{|x|_X \leq 1} |L(x)|.$$

LEMA 57. *O espaço dual de X, X', com a norma acima definida é um espaço de Banach.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**10**], pág.61. □

DEFINIÇÃO 58. *Sejam X, Y espaços normados e $f : X \to Y$ um operador. O operador f diz-se compacto se $f(A)$ é relativamente compacto em Y sempre que A é limitado em X.*

DEFINIÇÃO 59. *Dizemos que o espaço normado X se injecta no espaço normado Y, e denotamos por $X \hookrightarrow Y$, se*

i: *X é um subespaço vectorial de Y;*

ii: *o operador de injecção I definido de X para Y por $I(x) = x \ \forall x \in X$ é contínuo.*

DEFINIÇÃO 60. *Dizemos que a injecção $X \hookrightarrow Y$ é compacta se o operador de injecção I é compacto.*

DEFINIÇÃO 61. *Seja X um espaço de Banach.*

i: *Um hiperplano H é um conjunto da forma*

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$$

onde f é um funcional linear sobre X e $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii: *Diz-se que hiperplano H, definido como acima, separa (resp. separa estritamente) os conjuntos $A, B \subset X$ se $f(x) \leq \alpha \ \forall x \in A$ e $f(x) \geq \alpha \ \forall x \in B$ (resp. se $\exists \varepsilon > 0 : f(x) \leq \alpha - \varepsilon \ \forall x \in A$ e $f(x) \geq \alpha + \varepsilon \ \forall x \in B$).*

iii: *Os conjuntos*

$$\{x \in X : f(x) < \alpha\}, \ \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

e

$$\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}, \ \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$

dizem-se, respectivamente, semi-espaços abertos e semi-espaços fechados limitados por H.

OBSERVAÇÃO 62. Note-se que o hiperplano H, definido por $f(x) = \alpha$, é fechado sse f é contínua.

TEOREMA 63. ***(Hahn-Banach)*** *Seja X um espaço de Banach, $A, B \subset X$ dois conjuntos convexos, disjuntos e não vazios.*

i: *Suponhamos que A é aberto. Então existe um hiperplano fechado H que separa A e B.*

ii: *Suponhamos que A é aberto e B é compacto. Então existe um hiperplano fechado H que separa estritamente A e B.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[5]**, pág.5 e 7. □

COROLÁRIO 64. *Seja C um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ tal que $C \neq \mathbb{R}^n$. Então existe um semi-espaço fechado que contém C.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[27]**, pág.99. □

5. Espaços com produto interno

DEFINIÇÃO 65. *Num espaço vectorial real X, uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_X : X \times X \to \mathbb{R}$ diz-se um produto interno em X se $\forall x, y, z \in X$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valem as seguintes condições*

a: $\langle x, y \rangle_X = \langle y, x \rangle_X$;

b: $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_X = \alpha \langle x, z \rangle_X + \beta \langle y, z \rangle_X$;

c: $\langle x, x \rangle_X \geq 0$ *e* $\langle x, x \rangle_X = 0 \Rightarrow x = 0$.

Um espaço vectorial com um produto interno diz-se um espaço com produto interno.

PROPOSIÇÃO 66. *Num espaço com produto interno pode sempre definir-se uma norma por*

$$|x|_X = \sqrt{\langle x, x \rangle_X}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[19]**, pág.45. □

DEFINIÇÃO 67. *Num espaço com produto interno, chama-se norma associada ao produto interno à norma definida na proposição anterior.*

OBSERVAÇÃO 68. Temos então que qualquer espaço com produto interno é também um espaço normado. A recíproca é falsa.

DEFINIÇÃO 69. *Um espaço com produto interno que seja completo (para a norma associada ao produto interno) diz-se um espaço de Hilbert.*

DEFINIÇÃO 70. *Num espaço com produto interno dois vectores x, y dizem-se ortogonais (e escreve-se $x \perp y$) se $\langle x, y\rangle = 0$.*

OBSERVAÇÃO 71. Uma das mais importantes consequências de termos um produto interno é a possibilidade de definirmos a ortogonalidade de vectores, o que torna a teoria dos espaços de Hilbert muito mais próxima da teoria do espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ do que da teoria geral dos espaços de Banach.

6. Espaços de medida

6.1. σ -álgebras.

DEFINIÇÃO 72. *Seja X um conjunto arbitrário. Uma colecção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X diz-se uma álgebra de subconjuntos de X se satisfaz as seguintes condições:*

1: $X \in \mathcal{A}$;

2: $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;

3: $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

DEFINIÇÃO 73. *Uma álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X diz-se uma σ-álgebra se, nas hipótese da definição anterior, substituirmos 3 por*

3': $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

DEFINIÇÃO 74. *Seja X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em X. O par $(X, \mathcal{A})$ chama-se um espaço mensurável.*

OBSERVAÇÃO 75. **1:** Para um conjunto arbitrário X, seja $\mathcal{P}(X)$ a colecção de todos os subconjuntos de X. Então $A \in \mathcal{P}(X)$ é equivalente a $A \subset X$.

2: $\mathcal{P}(X)$ é a maior σ-álgebra de subconjuntos de X.

3: $\{\emptyset, X\}$ é a menor σ-álgebra de subconjuntos de X.

PROPOSIÇÃO 76. *Seja X um conjunto, e seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X. Então existe a menor σ-álgebra em X que contém $\mathcal{F}$, a que chamamos a σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [7], pág.3. □

Utilizamos agora a proposição precedente para definir uma importante família de σ-álgebras.

DEFINIÇÃO 77. *Seja X um espaço topológico. A σ-álgebra de Borel em X é a σ-álgebra em X gerada pela colecção dos subconjuntos abertos do espaço topológico X e denotamo-la por $\mathcal{B}_X$. Os subconjuntos de Borel (ou borelianos) de X são os conjuntos que pertencem a $\mathcal{B}_X$.*

OBSERVAÇÃO 78. Um caso particular importante é quando $X = \mathbb{R}^n$.

6.2. Medidas.

DEFINIÇÃO 79. *Seja X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em X. Uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ diz-se contavelmente aditiva se satisfaz*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

para cada sucessão infinita $\{A_i\}$ de conjuntos disjuntos que pertencem a $\mathcal{A}$.

DEFINIÇÃO 80. *Uma medida (ou uma medida contavelmente aditiva) em $\mathcal{A}$ é uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ que satisfaz $\mu(\emptyset) = 0$ e é contavelmente aditiva.*

DEFINIÇÃO 81. *Seja X um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em X e μ uma medida em $\mathcal{A}$. Então, chamamos a $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Habitualmente diremos que μ é uma medida em $(X, \mathcal{A})$ ou, se a σ-álgebra $\mathcal{A}$ é subentendida, diremos que μ é uma medida em X.*

DEFINIÇÃO 82. *Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida. Definimos a variação $|\mu|$ de μ por*

$$|\mu|(A) = \sup_{(A_1,..,A_l)\in M(A)} \sum_{i=1}^{l} |\mu(A_i)|,$$

onde $M(A)$ denota o conjunto de todas as colecções finitas $(A_1,...,A_l)$ tal que $A_i \in \mathcal{M}$, com $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

DEFINIÇÃO 83. *A uma medida em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ chamamos medida de Borel em $\mathbb{R}^n$. Mais geralmente, se X é um subconjunto de Borel de $\mathbb{R}^n$ e se $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra que consiste nos subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}^n$ que estão contidos em X, então uma medida em $(X,\mathcal{A})$ diz-se uma medida de Borel em X.*

DEFINIÇÃO 84. *Seja X um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em X e μ uma medida em $\mathcal{A}$. Dizemos que μ é uma medida de probabilidade se $\mu(X) = 1$. Neste caso chamamos a $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de probabilidade.*

EXEMPLO 85. Um exemplo importante de uma medida de probabilidade é a medida de Dirac δ_x (suportada no ponto x, ver definição 113), que se define para qualquer subconjunto $A \in \mathcal{A}$ por

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

PROPOSIÇÃO 86. *Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida, A e B subconjuntos de X pertencendo a $\mathcal{A}$ tais que $A \subset B$. Então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Se, além disso A satisfaz $\mu(A) < +\infty$, então $\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [7], pág.10. □

PROPOSIÇÃO 87. *Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida. Se $\{A_k\}$ é uma sucessão arbitrária de conjuntos que pertencem a $\mathcal{A}$, então*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [7], pág.11. □

6.3. Medidas exteriores.

DEFINIÇÃO 88. *Seja X um conjunto. Uma medida exterior em X é uma função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ tal que*

a: $\mu^*(\emptyset) = 0$;

b: *Se $A \subset B \subset X$, então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;*

c: *Se $\{A_n\}$ é uma sucessão de subconjuntos de X, então $\mu^*(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$ (subaditividade).*

OBSERVAÇÃO 89. **i:** Pode-se dizer que uma medida exterior em X é uma função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ que é monótona e contavelmente subaditiva, e vale 0 no $\emptyset$.

ii: Note-se que uma medida pode não ser uma medida exterior; de facto, uma medida em X é uma medida exterior sse o seu domínio é $\mathcal{P}(X)$. Por outro lado, uma medida exterior geralmente não é contavelmente aditiva, e consequentemente não é uma medida.

DEFINIÇÃO 90. *Seja X um conjunto, e μ^* uma medida exterior em X. Um conjunto $B \subset X$ é μ^*-mensurável (ou mensurável com respeito a μ^*) se*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

é verificada para qualquer conjunto $A \subset X$.

OBSERVAÇÃO 91. Um subconjunto μ^*-mensurável de X é tal que divide cada subconjunto de X de tal modo que o seu tamanho (medido por μ^*) é a soma das suas partes.

TEOREMA 92. *Seja X um conjunto, μ^* uma medida exterior em X e $\mathcal{M}_{\mu^*}$ a colecção de todos os subconjuntos μ^*-mensuráveis de X. Então*

a: *$\mathcal{M}_{\mu^*}$ é uma σ-álgebra;*

b: *a restrição de μ^* a $\mathcal{M}_{\mu^*}$ é uma medida em $\mathcal{M}_{\mu^*}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [7], pág.18. □

Voltemos agora a nossa atenção para a medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, que denotaremos por $|\cdot|^*$.

DEFINIÇÃO 93. *Um intervalo n-dimensional é um subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *da forma* $I_1 \times ... \times I_n$ *onde* $I_1, ..., I_n$ *são intervalos de* $\mathbb{R}$ *e*

$$I_1 \times ... \times I_n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in I_i,\ i = 1, ..., n\}.$$

OBSERVAÇÃO 94. Note-se que os intervalos $I_1, ..., I_n$, e consequentemente o intervalo n-dimensional $I_1 \times ... \times I_n$, podem ser abertos, fechados, ou nem abertos nem fechados.

DEFINIÇÃO 95. *O volume do intervalo limitado n-dimensional* $I_1 \times ... \times I_n$ *é o produto dos comprimentos dos intervalos* $I_1, ..., I_n$*, que denotamos por* $vol(I_1 \times ... \times I_n)$.

DEFINIÇÃO 96. *Para cada* $A \subset \mathbb{R}^n$ *seja* $\mathcal{C}_A$ *o conjunto de todas as sucessões* (R_i) *de intervalos abertos limitados n-dimensionais para as quais* $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} R_i$. *Então* $|A|^*$*, a medida exterior de Lebesgue de* A*, é o ínfimo do conjunto*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} vol(R_i) : (R_i) \in \mathcal{C}_A \right\}.$$

PROPOSIÇÃO 97. *A medida exterior de Lebesgue em* $\mathbb{R}^n$ *é uma medida exterior, e associa a cada intervalo n-dimensional o seu volume.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [7], pág.17. □

DEFINIÇÃO 98. *Um subconjunto Lebesgue mensurável de* $\mathbb{R}^n$ *é um subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *que é mensurável com respeito à medida exterior de Lebesgue.*

PROPOSIÇÃO 99. *Cada boreliano de* $\mathbb{R}^n$ *é Lebesgue mensurável*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [7], pág.21. □

6.4. A medida de Lebesgue.

DEFINIÇÃO 100. *A restrição da medida exterior de Lebesgue em* $\mathbb{R}^n$ *à colecção* $\mathcal{M}_{\mu^*}$ *dos subconjuntos Lebesgue mensuráveis de* $\mathbb{R}^n$ *chama-se medida de Lebesgue, e denotaremos por* $|A|$ *a medida de Lebesgue dum conjunto* $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

OBSERVAÇÃO 101. A restrição da medida exterior de Lebesgue a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ também será chamada de medida de Lebesgue (Ver proposição 110, abaixo).

PROPOSIÇÃO 102. *Seja A um subconjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}^n$. Então*

a: $|A| = \inf\{|U| : U$ *é aberto e* $A \subset U\}$*;*

b: $|A| = \sup\{|K| : K$ *é compacto e* $K \subset A\}$*.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[7]**, pág.26. □

TEOREMA 103. *A medida de Lebesgue $|\cdot|$ em $\mathbb{R}^n$ é invariante por translações, i.e., se $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{R}^n$, então $|A| = |A + x|$. Além disso, um subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ é Lebesgue mensurável sse $B + x$ é Lebesgue mensurável $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[30]**, pág.429. □

TEOREMA 104. *A medida de Lebesgue $|\cdot|$ em $\mathbb{R}^n$ é homogénea positiva, i.e., se $\alpha \neq 0$ e $A \subset \mathbb{R}^n$, então $|\alpha A| = |\alpha|^n |A|$. Além disso, um subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ é Lebesgue mensurável sse αB é Lebesgue mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[30]**, pág.435. □

DEFINIÇÃO 105. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. A medida μ (ou o espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$) diz-se completa (completo) se as relações $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ e $B \subset A$ conjuntamente implicam $B \in \mathcal{A}$.*

DEFINIÇÃO 106. *Um conjunto $B \subset X$ diz-se μ-desprezável (ou μ-nulo) se existe $A \subset X$ com $A \in \mathcal{A}$, $B \subset A$ e $\mu(A) = 0$.*

OBSERVAÇÃO 107. Temos então, nas condições acima, que uma medida μ é completa sse todos os subconjuntos μ-nulos de X pertencem a $\mathcal{A}$.

DEFINIÇÃO 108. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, e μ uma medida em $\mathcal{A}$. O completamento de $\mathcal{A}$ relativamente a μ é a colecção $\mathcal{A}_\mu$ dos subconjuntos A de X para os quais existem* *conjuntos $E, F \in \mathcal{A}$ tais que $E \subset A \subset F$ e $\mu(F \backslash E) = 0$, onde $F \backslash E = \{x \in F : x \notin E\}$. Um conjunto que pertence a $\mathcal{A}_\mu$ diz-se μ-mensurável.*

Suponhamos que A, E e F são como acima. Segue imediatamente que $\mu(E) = \mu(F)$. Além disso, se $B \subset A$, com $B \in \mathcal{A}$, então

$$\mu(B) \leq \mu(F) = \mu(E).$$

Consequentemente

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A} \text{ e } B \subset A\},$$

e o valor de $\mu(E)$ e $\mu(F)$ depende apenas do conjunto A (e da medida μ) e não da escolha dos conjuntos E e F satisfazendo as condições da definição 108. Podemos então definir

DEFINIÇÃO 109. *Seja $\overline{\mu} : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, $\overline{\mu}(A) = \mu(E)(= \mu(F))$, onde $E, F \in \mathcal{A}$, $E \subset A \subset F$ e $\mu(F \backslash E) = 0$. Dizemos que $\overline{\mu}$ é o completamento de μ.*

PROPOSIÇÃO 110. *A medida de Lebesgue em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{|\cdot|^*})$ é o completamento da medida de Lebesgue em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [7], pág.37. □

6.5. Medidas de Radon.

DEFINIÇÃO 111. *Sejam μ uma medida de Borel em X, E um subconjunto de Borel em X, $\mathcal{A}$ a colecção de todos os conjuntos abertos em X e $\mathcal{K}$ a colecção de todos os conjuntos compactos em X. Dizemos que a medida μ é*

- **a:** *exteriormente regular em E se $\mu(E) = \inf\{\mu(A) : E \subset A, A \in \mathcal{A}\}$;*
- **b:** *interiormente regular em E se $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \in \mathcal{K}\}$.*

Dizemos que uma medida de Borel μ é regular se é interiormente e exteriormente regular em todos os conjuntos de Borel.

DEFINIÇÃO 112. *Uma medida de Borel μ em X diz-se uma medida de Radon se for exteriormente regular nos borelianos, interiormente regular nos abertos e satisfizer a condição*

$$\mu(K) < \infty$$

para qualquer $K \in \mathcal{K}$.

DEFINIÇÃO 113. *Sejam X um espaço de Hausdorff localmente compacto, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra sobre X e μ uma medida regular em $(X, \mathcal{A})$. Definimos suporte de μ como o complementar da união de todos os subconjuntos abertos μ-nulos, e denotamos por $spt(\mu)$.*

DEFINIÇÃO 114. *Seja X um espaço topológico e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos o suporte de f por*

$$spt(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

OBSERVAÇÃO 115. Sendo X um espaço topológico, $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

a: $spt(f + g) \subset spt(f) \cup spt(g)$;

b: $spt(\lambda f) = spt(f)$ se $\lambda \neq 0$;

c: $spt(fg) = spt(f) \cap spt(g)$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[30]**, pág.327. □

DEFINIÇÃO 116. *Seja X um espaço topológico. Escrevemos $C_c(X)$ para denotar o espaço das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$, de suporte compacto.*

Note-se que $C_c(X)$ é um espaço vectorial. De facto, se $f, g \in C_c(X)$, então $f + g$ é uma função contínua em X e, além disso, pela observação 115, $spt(f+g) \subset spt(f) \cup spt(g)$ logo, como $spt(f + g)$ é um subconjunto fechado contido num conjunto compacto, é um conjunto compacto. Semelhantemente, se $f \in C_c(X)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lambda f \in C_c(X)$.

OBSERVAÇÃO 117. Se X é um espaço de Hausdorff, então o espaço das funções reais contínuas em X com suporte compacto é igual ao espaço das funções reais contínuas em X que valem zero fora de um conjunto compacto.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**30**], pág.327. □

DEFINIÇÃO 118. *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto e I um funcional linear em $C_c(X)$. Dizemos que o funcional linear I é positivo se $I(f) \geq 0$ para qualquer $f \in C_c(X)$ tal que $f \geq 0$ em X.*

Iremos mostrar que se I é um funcional linear positivo em $C_c(X)$, então existe uma única medida de Radon μ em X tal que $I(f) = \int_X f d\mu$ para qualquer $f \in C_c(X)$.

DEFINIÇÃO 119. *Seja A um subconjunto de um conjunto X. A função χ_A definida por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in A \\ 0 & se\ x \in X \setminus A \end{cases}$$

chama-se função característica de A (em X).

DEFINIÇÃO 120. *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto.*

a: *Para um conjunto aberto não-vazio $A \subset X$ e $f \in C_c(X)$, escrevemos $f \prec A$ se $\chi_A \leq f \leq 1$ em X e $spt(f) \subset A$.*

b: *Para um conjunto compacto $K \subset X$ e $f \in C_c(X)$, escrevemos $f \succ K$ se $0 \leq f \leq 1$ em X e $f = 1$ em K, i.e., $\chi_K \leq f \leq 1$.*

PROPOSIÇÃO 121. *Seja I um funcional linear positivo em $C_c(X)$. Definimos a função (de conjuntos) μ na colecção $\mathcal{A}$ de todos os conjuntos abertos de X pondo*

$$\mu(A) = \sup\{I(f) : f \in C_c(X)\ e\ f \prec A\}$$

para $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \emptyset$ e $\mu(\emptyset) = 0$. Definimos a função (de conjuntos) μ^* em $\mathcal{P}(X)$ pondo

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(A) : E \subset A\ e\ A \in \mathcal{A}\} \tag{2}$$

para $E \in \mathcal{P}(X)$. Então μ^* é uma medida exterior em X e $\mu^*(A) = \mu(A)$ para qualquer $A \in \mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**30**], pág.332. □

PROPOSIÇÃO 122. *Consideremos a medida μ que é a restrição da medida exterior μ^* definida em X por (2) na proposição precedente à σ-álgebra $\mathcal{M}_{\mu^*}$. Seja $\mathcal{A}$ a colecção de todos os conjuntos abertos de X e $\mathcal{K}$ a colecção de todos os conjuntos compactos de X. Então*

a: $\mu(E) = \inf\{\mu(A) : E \subset A, A \in \mathcal{A}\}$ *para qualquer* $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

b: $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \in \mathcal{K}\}$ *para qualquer* $A \in \mathcal{A}$.

c: $\mu(K) < \infty$ *para qualquer* $K \in \mathcal{K}$.

Então em particular μ *é uma medida de Radon.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**30**], pág.335. □

TEOREMA 123. ***(Teorema da representação de Riesz)****Seja* X *um espaço de Hausdorff localmente compacto e* $I \in C_c(X)$ *um funcional linear. então existe uma única medida de Radon* μ *na* σ*-álgebra de Borel* $\mathcal{B}_X$ *dos subconjuntos de* X *tal que*

$$I(f) = \int_X f d\mu$$

para qualquer $f \in C_c(X)$.

DEMONSTRAÇÃO. [**30**], pág.335. □

OBSERVAÇÃO 124. Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto e I um funcional linear positivo. A medida μ em $\mathcal{B}_X$ construída nos termos do funcional linear positivo I na proposição 121 é uma medida de Radon como foi mostrado na proposição 122 e, além disso, $I(f) = \int_X f d\mu$ para qualquer $f \in C_c(X)$ como vimos no teorema anterior.

OBSERVAÇÃO 125. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. O espaço $\mathcal{M}(\Omega)$ das medidas de Radon suportadas em Ω é um espaço vectorial que pode ser normado através da sua variação, i.e.,

$$|\mu|_{\mathcal{M}(\Omega)} = |\mu|(\Omega)$$

o que o torna um espaço de Banach (Ver [**28**], pág.40).

6.6. Funções mensuráveis.

PROPOSIÇÃO 126. *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável, e seja* $A \subset X$ *tal que* $A \in \mathcal{A}$. *Para uma função* $f : A \to [-\infty, +\infty]$, *as seguintes condições são equivalentes:*

a: *para cada número real* t, $\{x \in A : f(x) \leq t\} \in \mathcal{A}$;

b: *para cada número real* t, $\{x \in A : f(x) < t\} \in \mathcal{A}$;

c: *para cada número real* t, $\{x \in A : f(x) \geq t\} \in \mathcal{A}$;

d: *para cada número real* t, $\{x \in A : f(x) > t\} \in \mathcal{A}$;

DEMONSTRAÇÃO. Ver [7], pág.48. □

DEFINIÇÃO 127. *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável, e seja* $A \subset X$ *tal que* $A \in \mathcal{A}$. *Uma função* $f : A \to [-\infty, +\infty]$ *diz-se mensurável com respeito a* $\mathcal{A}$ *se satisfaz uma (consequentemente todas) as condições da proposição 126.*

OBSERVAÇÃO 128. Uma função que é mensurável com respeito a $\mathcal{A}$ diz-se $\mathcal{A}$-mensurável, ou, se a σ-álgebra $\mathcal{A}$ é clara no contexto, apenas mensurável.

DEFINIÇÃO 129. *Se* $X = \mathbb{R}^n$, *uma função que é mensurável com respeito a* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *diz-se Borel mensurável, e uma função que é mensurável com respeito a* $\mathcal{M}_{|.|^*}$ *diz-se Lebesgue mensurável.*

OBSERVAÇÃO 130. Toda a função Borel mensurável em $\mathbb{R}^n$ é Lebesgue mensurável.

PROPOSIÇÃO 131. *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável,* $A \subset X$ *tal que* $A \in \mathcal{A}$ *e* $f, g : A \to [-\infty, +\infty]$. *Então as funções* $f \vee g$ *e* $f \wedge g$ *dadas por*

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))$$

$$(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

são mensuráveis.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [7], pág.50. □

PROPOSIÇÃO 132. *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável,* $A \subset X$ *tal que* $A \in \mathcal{A}$ *e* $(f_n) : A \to [-\infty, +\infty]$ *uma sucessão de funções mensuráveis. Então*

a: *as funções* $\sup_n f_n$ *e* $\inf_n f_n$ *são mensuráveis;*

b: *as funções*

$$\limsup_n f_n = \inf_{k>0} \sup_{n \geq k} f_n$$

e

$$\liminf_n f_n = \sup_{k>0} \inf_{n \geq k} f_n$$

são mensuráveis;

c: *a função* $\lim_n f_n$ *(cujo domínio é* $\{x \in A : \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x)\}$*) é mensurável.*

Demonstração. Ver [7], pág.51. □

Proposição 133. *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável,* $A \subset X$ *tal que* $A \in \mathcal{A}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então as funções* αf, $f+g$, $f-g$, fg *e* f/g *(onde o domínio de* f/g *é* $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$*) são mensuráveis.*

Demonstração. Ver [7], pág.52. □

Proposição 134. *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável,* $A \subset X$ *tal que* $A \in \mathcal{A}$. *Para uma função* $f : A \to \mathbb{R}$, *as seguintes condições são equivalentes:*

a: f *é mensurável com respeito a* $\mathcal{A}$*;*

b: *para cada aberto* $U \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$*;*

c: *para cada fechado* $C \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$*;*

d: *para cada subconjunto de Borel* B *de* $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Demonstração. Ver [7], pág.55. □

Definição 135. *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida. Uma propriedade do conjunto de elementos de* X *diz-se que é verificada* μ*-quase sempre se existe um conjunto* $N \in \mathcal{A}$, *satisfazendo* $\mu(N) = 0$ *(i.e., com medida* μ *nula) e que contém todos os elementos de* X *para os quais a propriedade não se verifica. Mais geralmente, se* $E \subset X$ *, diz-se que uma propriedade é verificada* μ*-quase sempre em* E *se existe um conjunto* $N \subset E$ *(com* $N \in \mathcal{A}$*), satisfazendo* $\mu(N) = 0$ *e que contém todos os elementos de* E *para os quais a propriedade não se verifica.*

Observação 136. **i:** A expressão μ-quase sempre é abreviada por μ-qs e, nos casos em que a medida μ é clara no contexto, por qs;

ii: seja F o conjunto dos elementos de X para os quais a propriedade não se verifica. Então não é necessário que $F \in \mathcal{A}$; é apenas necessário que exista um conjunto $N \in \mathcal{A}$, com $F \subset N$, satisfazendo $\mu(N) = 0$. Note-se que se μ é completa, então $F \in \mathcal{A}$.

PROPOSIÇÃO 137. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ tais que $f = g$ qs em X. Se μ é completa e f é $\mathcal{A}$-mensurável, então g é $\mathcal{A}$-mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[7]**, pág.59. □

6.7. Convergência quase sempre e convergência em medida.

DEFINIÇÃO 138. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $D \in \mathcal{A}$ e $(f_n) : D \to [-\infty, +\infty]$ uma sucessão de funções $\mathcal{A}$-mensuráveis. Dizemos que f_n converge para f quase sempre se o conjunto dos elementos $x \in D$ para os quais a relação $f(x) = \lim_n f_n(x)$ falha é μ-nulo. Neste caso dizemos que $f = \lim_n f_n$ quase sempre.*

COROLÁRIO 139. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $(f_n), f : X \to [-\infty, +\infty]$ tais que (f_n) converge para f quase sempre. Se μ é completa e cada f_n é $\mathcal{A}$-mensurável, então f é $\mathcal{A}$-mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[7]**, pág.59. □

PROPOSIÇÃO 140. ***(Unicidade do limite qs)*** *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $D \in \mathcal{A}$, $(f_n) : D \to [-\infty, +\infty]$ uma sucessão de funções $\mathcal{A}$-mensuráveis e $g_1, g_2 : D \to [-\infty, +\infty]$ funções $\mathcal{A}$-mensuráveis. Se*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = g_1 \text{ qs em } D \text{ e } \lim_{n\to\infty} f_n = g_2 \text{ qs em } D$$

então

$$g_1 = g_2 \text{ qs em } D.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[30]**, pág.88. □

DEFINIÇÃO 141. *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida,* $D \in \mathcal{A}$ *e* $(f_n) : D \to [-\infty, +\infty]$ *uma sucessão de funções* $\mathcal{A}$*-mensuráveis. Diz-se que* (f_n) *converge na medida* μ *em* D *se existe uma função* $f : D \to \mathbb{R}$ *,* $\mathcal{A}$*-mensurável, tal que para cada* $\varepsilon > 0$ *tenhamos*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in D : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0,$$

i.e., para cada $\varepsilon > 0$ *e* $\eta > 0$ *existe* $n_{\varepsilon,\eta} \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\mu\{x \in D : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} < \eta \text{ para } n \geq n_{\varepsilon,\eta}.$$

Escrevemos $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *em* D *para esta convergência.*

TEOREMA 142. ***(Unicidade do limite da convergência em medida)*** *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida,* $D \in \mathcal{A}$ *e* $(f_n) : D \to [-\infty, +\infty]$ *uma sucessão de funções* $\mathcal{A}$*-mensuráveis e* $g_1, g_2 : D \to \mathbb{R}$ *funções* $\mathcal{A}$*-mensuráveis. Se*

$$f_n \xrightarrow{\mu} g_1 \text{ em } D \text{ e} f_n \xrightarrow{\mu} g_2 \text{ em } D$$

então

$$g_1 = g_2 \text{ qs em } D.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**30**], pág.97. □

TEOREMA 143. ***(H. Lebesgue)*** *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida,* $D \in \mathcal{A}$*,* $(f_n) : D \to [-\infty, +\infty]$ *uma sucessão de funções* $\mathcal{A}$*-mensuráveis e* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função* $\mathcal{A}$*-mensurável. Suponhamos*

1: $f_n \to f$ *q.s em* D*;*

2: $\mu(D) < \infty$.

Então $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *em* D.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**30**], pág.98. □

TEOREMA 144. ***(F. Riesz)*** *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida,* $D \in \mathcal{A}$*,* $(f_n) : D \to [-\infty, +\infty]$ *uma sucessão de funções* $\mathcal{A}$*-mensuráveis e* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função* $\mathcal{A}$*-mensurável. Se* $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *em* D*, então existe uma subsucessão* (f_{n_k}) *tal que* $f_{n_k} \to f$ μ*-qs em* D.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**30**], pág.98. □

7. O integral de Lebesgue

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida.

DEFINIÇÃO 145. *Uma função $s : X \to \mathbb{R}$ diz-se uma função simples se toma apenas um número finito de valores. Se s é uma função simples tomando os valores $a_1, ..., a_m$, seja $A_i = s^{-1}(a_i) = \{x \in X : s(x) = a_i\}$ $(1 \leq i \leq m)$. Temos então $s(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x)$.*

OBSERVAÇÃO 146. Temos que s é mensurável sse $A_1, A_2, ..., A_m$ são mensuráveis.

Definimos agora o integral de funções simples não-negativas.

DEFINIÇÃO 147. *Seja $s : X \to \mathbb{R}$ uma função simples, não-negativa, e $A \in \mathcal{A}$. Sejam $a_1, ..., a_m$ todos os valores distintos não-nulos de s e seja $A_i = s^{-1}(a_i), 1 \leq i \leq m$. Definimos o integral de s em A com respeito a μ como a soma*

$$I_A(s) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A \cap A_i).$$

OBSERVAÇÃO 148. Este valor pode ser $+\infty$ pois $\mu(A \cap A_i)$ pode ser $+\infty$.

Estendemos agora esta noção de integral a funções mensuráveis não-negativas pela aproximação por funções simples.

TEOREMA 149. *Seja $f : X \to [0, +\infty]$ uma função mensurável. Então existe uma sucessão de funções simples não-negativas*

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq f$$

tal que $s_i \to f$ pontualmente. Mais geralmente, se f é limitada, então $s_i \to f$ uniformemente.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**2**], pág.62. □

DEFINIÇÃO 150. *Sejam $f : X \to [0, +\infty]$ uma função mensurável e $A \in \mathcal{A}$. O integral de f em A com respeito a μ é definido por*

$$\int_A f d\mu = \sup\{I_A(s) : 0 \leq s \leq f, \ s \text{ simples}\}.$$

PROPOSIÇÃO 151. *Sejam* $A, B \in \mathcal{A}$ *e* f *uma função mensurável não-negativa.*

1: *Se* $B \subset A$ *então*

$$\int_B f d\mu \leq \int_A f d\mu \ ;$$

2: *Se* $\mu(A) = 0$, *então*

$$\int_A f d\mu = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**2**], pág.65. □

PROPOSIÇÃO 152. *Seja* f *uma função mensurável não-negativa e* $A \in \mathcal{A}$. *Se* $\int_A f d\mu = 0$, *então* $f = 0$ *qs em* A.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**2**], pág.66. □

PROPOSIÇÃO 153. *Sejam* f, g *funções mensuráveis não-negativas e* $A \in \mathcal{A}$. *Se* $f = g$ *qs em* A, *então*

$$\int_A f d\mu = \int_A g \, d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**2**], pág.69. □

TEOREMA 154. ***(Teorema da convergência monótona)*** *Seja* (f_n) *uma sucessão de funções mensuráveis tal que* $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$. *Então*

$$\lim_n \int_A f_n d\mu = \int_A \lim_n f_n d\mu \ \textit{para} \ A \in \mathcal{A}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**2**], pág.72. □

Estendemos finalmente esta noção de integral a funções mensuráveis com valores em $[-\infty, +\infty]$. Seja $f : X \to [-\infty, +\infty]$. Definimos as funções

$$f_+ = \max(f, 0) \ \ e \ \ f_- = -\min(f, 0).$$

Note-se que f_+ e f_- são funções mensuráveis (recorde-se a proposição 131), e temos

$$f = f_+ - f_-.$$

LEMA 155. *Seja* $A \in \mathcal{A}$. *As seguintes condições são equivalentes.*

1: $\int_A |f| d\mu < \infty$;

2: $\int_A f_+ d\mu < \infty$ *e* $\int_A f_- d\mu < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pág.76. □

DEFINIÇÃO 156. *Uma função mensurável* $f : X \to [-\infty, +\infty]$ *diz-se integrável em* $A \in \mathcal{A}$ *se for satisfeita uma das condições do lema anterior. Neste caso definimos*

$$\int_A f d\mu = \int_A f_+ d\mu - \int_A f_- d\mu.$$

TEOREMA 157. ***(Linearidade)*** *Sejam* $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ *integráveis em* $A \in \mathcal{A}$ *e* $c \in \mathbb{R}$. *Então*

a: cf *é integrável em* A *e* $\int_A cf d\mu = c \int_A f d\mu$;

b: $f + g$ *é integrável em* A *e* $\int_A f + g\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_A g\, d\mu$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pág.76. □

COROLÁRIO 158. ***(Monotonia)*** *Sejam* $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ *integráveis em* $A \in \mathcal{A}$, *com* $f \leq g$. *Então*

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g\, d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pág.77. □

COROLÁRIO 159. *Seja* $f : X \to [-\infty, +\infty]$ *integrável em* $A \in \mathcal{A}$. *Então*

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pág.77. □

TEOREMA 160. ***(Lema de Fatou)*** *Seja* (f_n) *uma sucessão de funções mensuráveis não-negativas e* $A \in \mathcal{A}$. *Então*

$$\int_A \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_A f_n d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [7], pág.72. □

TEOREMA 161. ***(Teorema da convergência dominada de Lebesgue)*** *Seja* $(f_n) : X \to [-\infty, +\infty]$ *uma sucessão de funções mensuráveis em* X*,* $g : X \to [0, +\infty]$ *uma função integrável em* X *e* $A \in \mathcal{A}$ *tais que*

i: $f(x) = \lim_n f_n(x)$*;*

ii: $|f_n(x)| \leq g(x)$*,* $n = 1, 2, \ldots$

são verificadas qs em A*. Então* f *e* (f_n) *são integráveis em* A *e*

$$\int_A \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int_A f_n d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [7], pág.72. □

Se f é uma função definida num subconjunto A de $\mathbb{R}^{n+m}$, podemos considerar f como dependendo do par de variáveis (x, y), com $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$. O integral de f em A denota-se por

$$\int_A f(x, y) dx dy$$

ou, se quisermos definir o integral sobre todo o espaço $\mathbb{R}^{n+m}$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x, y) \chi_A(x, y) dx dy.$$

Se, em particular, $A \subset \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$\int_A f(x) dx = \int_A f(x_1, \ldots x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

TEOREMA 162. ***(Teorema de Fubini)*** *Seja* f *integrável em* $\mathbb{R}^{n+m}$*. Então*

1: **a:** $f(x, \cdot)$ *é integrável qs em* $\mathbb{R}^n$*;*

b: $f(\cdot, y)$ *é integrável qs em* $\mathbb{R}^m$*;*

2: **a:** $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, \cdot) dx$ *é igual qs a uma função integrável de* y*;*

b: $\int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y) dy$ *é igual qs a uma função integrável de* x*;*

3:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x, y) dx dy$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pág.99. □

8. Topologias fracas

8.1. A topologia fraca $\sigma(X, X')$.

Seja X um espaço de Banach, X' o seu dual munido da norma dual

$$|f|_{X'} = \sup_{|x|_X \leq 1} |\langle f, x\rangle|$$

e $f \in X'$. Denotamos por $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$. Fazendo f percorrer X', obtemos uma família $(\varphi_f)_{f\in X'}$ de aplicações de X em $\mathbb{R}$.

Definição 163. *A topologia fraca $\sigma(X, X')$ em X é a topologia mais fraca (i.e., com menor número de abertos) em X que torna contínuas todas as aplicações $(\varphi_f)_{f\in X'}$.*

Proposição 164. *A topologia fraca $\sigma(X, X')$ é separada.*

Demonstração. Ver [**5**], pág.35. □

Observação 165. Dada uma sucessão (x_n) em X, denotamos por $x_n \rightharpoonup x$ a convergência de x_n para x na topologia fraca $\sigma(X, X')$, que se lê "x_n converge fracamente para x na topologia fraca $\sigma(X, X')$". Recordemos que $x_n \to x$ em X significa $|x_n - x|_X \to 0$ e, para evitar perigo de confusão, ler-se-á "x_n converge fortemente para x em X".

Proposição 166. *Seja (x_n) uma sucessão em X. Então temos*

- **i:** *$x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(X, X')$ sse $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \forall f \in X'$;*
- **ii:** *Se $x_n \to x$, então $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(X, X')$;*
- **iii:** *Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(X, X')$, então $|x_n|_X$ é limitada e $|x|_X \leq \liminf |x_n|_X$;*
- **iv:** *Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(X, X')$ e se $f_n \to f$ em X' (i.e., $|f_n - f|_{X'} \to 0$), então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*
- **v:** *Se $x_n \rightharpoonup x$ e $|x_n|_X \to |x|_X$, então $x_n \to x$.*

Demonstração. Ver [**5**], pág.36, e [**19**], pág. 59. □

Proposição 167. *Suponhamos que X tem dimensão finita. Então a topologia fraca $\sigma(X, X')$ e a topologia usual coincidem. Em particular uma sucessão (x_n) converge fracamente sse converge fortemente.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5], pág.36. □

OBSERVAÇÃO 168. **i:** Os abertos da topologia fraca $\sigma(X, X')$ são também abertos da topologia forte. Quando X tem dimensão infinita, a topologia fraca $\sigma(X, X')$ é estritamente mais fraca que a topologia forte, i.e., existem abertos da a topologia forte que não são abertos da topologia fraca;

ii: Em geral existem sucessões que convergem fracamente mas que não convergem fortemente.

8.2. A topologia fraca* $\sigma(X', X)$.

Seja X um espaço de Banach, X' o seu dual (munido da norma dual) e X'' o seu bidual, i.e., o dual de X', munido da norma

$$|\xi|_{X''} = \sup_{|f|_{X'} \leq 1} |\langle \xi, f \rangle|.$$

Temos uma injecção canónica $J : X \to X''$ dada por: fixado $x \in X$, a aplicação $f \mapsto \langle f, x \rangle$ de X' em $\mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo em X', i.e., um elemento de X'', que denotamos por Jx. Temos então

$$\langle Jx, f \rangle_{X'', X'} = \langle f, x \rangle_{X', X} \quad \forall x \in X, \ \forall f \in X'.$$

Sabemos que J é linear e que é uma isometria (i.e., $|Jx|_{X''} = |x|_X$ para qualquer $x \in X$). Com a ajuda de J podemos identificar X com um subespaço de X''. No espaço X' estão já definidas duas topologias:

i: a topologia forte (associada à norma de X');

ii: a topologia fraca $\sigma(X, X')$.

Vamos agora definir uma terceira topologia em X': a topologia fraca* que denotamos por $\sigma(X', X)$. Para cada $x \in X$ consideramos a aplicação $\varphi_x : X' \to \mathbb{R}$ definida por $f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle$. Fazendo x percorrer X, obtemos uma família de aplicações $(\varphi_x)_{x \in X}$ de X' em $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 169. *A topologia fraca*, designada por $\sigma(X', X)$, é a topologia mais fraca em X' que torna contínuas todas as aplicações $(\varphi_x)_{x \in X}$.*

Como $X \subset X''$, é claro que a topologia $\sigma(X', X)$ é menos fina que a topologia $\sigma(X', X'')$. Dito de outra forma, a topologia $\sigma(X', X)$ possui menos abertos que a topologia $\sigma(X', X'')$ (que possui menos abertos que a topologia forte).

OBSERVAÇÃO 170. **i:** Se uma topologia possui menos abertos, então ela possui mais compactos. Como os compactos têm um papel fundamental nos teoremas de existência, daí a importância destas topologias fracas.

ii: Dada uma sucessão $(f_n) \subset X'$, designamos por $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ a convergência de f_n para f na topologia $\sigma(X', X)$.

PROPOSIÇÃO 171. *A topologia fraca* $\sigma(X', X)$ é separada.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5], pág.40. □

PROPOSIÇÃO 172. *Seja f_n uma sucessão em X'. Então temos*

i: $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X)$ *sse* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \forall x \in X$;

ii: *Se* $f_n \to f$, *então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(X', X'')$;

iii: *Se* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(X', X'')$, *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X)$;

iv: *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X)$, *então* $|f_n|_{X'}$ *é limitada e* $|f|_{X'} \leq \liminf |f_n|_{X'}$;

v: *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X)$ *e se* $x_n \to x$ *em* X *(i.e.,* $|x_n - x|_X \to 0$*), então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5], pág.41. □

OBSERVAÇÃO 173. Se X tem dimensão finita, então as três topologias coincidem.

TEOREMA 174. ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)*** *O conjunto* $B_{X'} = \{f \in X' : |f|_{X'} \leq 1\}$ *é compacto para a topologia fraca** $\sigma(X', X)$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5], pág.43. □

8.3. Espaços reflexivos.

DEFINIÇÃO 175. *Seja X um espaço de Banach e J a injecção canónica de X em X''. Dizemos que X é reflexivo se $J(X) = X''$ (i.e., J é sobrejectiva).*

Quando X é reflexivo identificamos implicitamente X e X'' (com a ajuda do isomorfismo J).

TEOREMA 176. ***(Kakutani)*** *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo sse*

$$B_X = \{x \in X : |x|_X \leq 1\}$$

é compacto para a topologia $\sigma(X, X')$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5], pág.44. □

PROPOSIÇÃO 177. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $M \subset X$ um subespaço vectorial fechado. Então M (munido da norma* ***induzida*** *por X) é ele próprio um espaço de Banach reflexivo.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5], pág.45. □

COROLÁRIO 178. *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo sse X' é reflexivo.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5], pág.46 □

8.4. Espaços separáveis.

DEFINIÇÃO 179. *Dizemos que um espaço métrico X é separável se possui um subconjunto numerável denso.*

PROPOSIÇÃO 180. *Seja X um espaço métrico separável e $F \subset X$. Então F é separável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5], pág.47. □

TEOREMA 181. *Seja X um espaço de Banach tal que X' é separável. Então X é separável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5], pág.47. □

OBSERVAÇÃO 182. A recíproca é falsa. Existem espaços de Banach X separáveis tal que X' não é separável. Ver, por exemplo, $X = L^1$, no próximo capítulo.

COROLÁRIO 183. *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo e separável sse X' é reflexivo e separável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**5**], pág.48. □

PROPOSIÇÃO 184. *Seja X um espaço de Banach separável e (f_n) uma sucessão limitada em X'. Então existe uma subsucessão (f_{n_k}) que converge na topologia fraca* $\sigma(X', X)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**5**], pág.50. □

TEOREMA 185. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sucessão limitada em X. Então existe uma subsucessão (x_{n_k}) que converge na topologia fraca $\sigma(X, X')$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**5**], pág.50. □

9. Os espaços L^p

No que se segue Ω representa um aberto de $\mathbb{R}^n$, munido da medida de Lebesgue.

9.1. Definições e propriedades.

DEFINIÇÃO 186. *Dizemos que duas funções $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue integráveis são equivalentes ou estão na mesma classe de equivalência se $f - g : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função tal que*

$$\int_\Omega |f(x) - g(x)|dx = 0.$$

DEFINIÇÃO 187. *A classe de equivalência de uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, que denotamos por $[f]$, é o conjunto das funções $g : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue integráveis que lhe são equivalentes.*

OBSERVAÇÃO 188. Como usualmente, em vez de $[f]$, escreveremos f, pensando neste como um representante da sua classe de equivalência.

DEFINIÇÃO 189. *Designamos por $L^1(\Omega)$ o espaço das classes de equivalência de funções Lebesgue integráveis em Ω com valores em $\mathbb{R}$, munido da norma*

$$|f|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

DEFINIÇÃO 190. *Seja $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ por*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \textit{ mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

munido da norma

$$|f|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

DEFINIÇÃO 191. *Definimos o espaço $L^\infty(\Omega)$ por*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \textit{ mensurável e } \exists\, c \geq 0 : |f(x)| \leq c \;\; qs \textit{ em } \Omega\},$$

munido da norma

$$|f|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c : |f(x)| \leq c \; qs \textit{ em } \Omega\} = supess_{x\in\Omega}|f(x)|.$$

PROPOSIÇÃO 192. *Se $f \in L^\infty$, temos*

$$|f(x)| \leq |f|_{L^\infty} \; qs \textit{ em } \Omega.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5], pág.56. □

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por p' o expoente conjugado de p, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

TEOREMA 193. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq |f|_{L^p(\Omega)}|g|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5], pág.56. □

TEOREMA 194. *Para qualquer $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ é um espaço vectorial e $|\cdot|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5], pág.57. □

TEOREMA 195. ***(Fischer-Riesz)*** *Para qualquer $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[5]**, pág.57. □

COROLÁRIO 196. *$L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno*

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[19]**, pág.51. □

9.2. Reflexividade. Separabilidade. O dual de L^p.

TEOREMA 197. *$L^p(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[5]**, pág.59. □

PROPOSIÇÃO 198. *Os espaços $L^1(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$ não são reflexivos.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[5]**, pág.64 e 65. □

OBSERVAÇÃO 199. O dual de $L^\infty(\Omega)$ contém estritamente $L^1(\Omega)$. Identificamos $(L^\infty(\Omega))'$ com o espaço das medidas de Radon (Ver **[28]**, pág.41).

TEOREMA 200. ***(Teorema da representação de Riesz para L^p)*** *Seja $1 < p < \infty$ e seja $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Então existe um único $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega u(x)f(x)dx, \ \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso, temos

$$|u|_{L^{p'}(\Omega)} = |\varphi|_{(L^p(\Omega))'}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[5]**, pág.61. □

OBSERVAÇÃO 201. No que segue faremos a identificação $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$.

TEOREMA 202. ***(Teorema da representação de Riesz para L^1)*** *Seja $\varphi \in (L^1(\Omega))'$. Então existe um único $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega u(x)f(x)dx, \ \forall f \in L^1(\Omega).$$

Além disso, temos

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} = |\varphi|_{(L^1(\Omega))'}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**5**], pág.63. □

OBSERVAÇÃO 203. No que segue faremos a identificação $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$.

DEFINIÇÃO 204. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{loc}(\Omega)$ se $f\chi_K \in L^p(\Omega)$ para cada compacto $K \subset \Omega$.*

LEMA 205. *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. tal que*

$$\int_\Omega f(x)u(x)dx = 0 \ \forall u \in C_c(\Omega).$$

Então $f = 0$ qs em Ω.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**5**], pág.61. □

TEOREMA 206. ***(Densidade)*** *Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, i.e.,*

$$\forall \ f \in L^p(\Omega) \ \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ g \in C_c(\Omega) : |f - g|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**5**], pág.62. □

TEOREMA 207. *$L^p(\Omega)$ é separável para $1 \leq p < \infty$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**5**], pág.63. □

PROPOSIÇÃO 208. *O espaço $L^\infty(\Omega)$ não é separável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**5**], pág.66. □

9.3. Convergência forte, fraca e fraca* em L^p.

DEFINIÇÃO 209. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. A sucessão $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ converge fortemente para $f \in L^p(\Omega)$ (e denotamos este facto por $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$) se*

$$|f_n - f|_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

OBSERVAÇÃO 210. Seja $1 \leq p < \infty$. A sucessão $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ converge fracamente para $f \in L^p(\Omega)$ (e denotamos este facto por $f_n \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega)$) se

$$\int_\Omega f_n(x)g(x)dx \to \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

qualquer que seja $g \in L^{p'}(\Omega)$.

OBSERVAÇÃO 211. Seja $p = \infty$. A sucessão $(f_n) \subset L^\infty(\Omega)$ converge fracamente* para $f \in L^\infty(\Omega)$ (e denotamos este facto por $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty(\Omega)$) se

$$\int_\Omega f_n(x)g(x)dx \to \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

qualquer que seja $g \in L^1(\Omega)$.

TEOREMA 212. *Sejam $1 \leq p < \infty$, $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ uma sucessão e $f \in L^p(\Omega)$, tais que $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subsucessão (f_{n_k}) tal que*

a: *$f_{n_k}(x) \to f(x)$ qs em Ω;*

b: *$|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ e qs em Ω, com $h \in L^p(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**5**], pág.58. □

PROPOSIÇÃO 213. *Seja $1 < p \leq \infty$. A sucessão (f_n) é fracamente relativamente compacta em $L^p(\Omega)$ (fracamente* relativamente compacta em $L^\infty(\Omega)$ se $p = \infty$) sse existe $k \geq 0$ tal que $|f_n|_{L^p(\Omega)} \leq k$ uniformemente em n.*

Seja $p = 1$. A sucessão (f_n) é fracamente relativamente compacta em $L^1(\Omega)$ sse:

i: *existe $k \geq 0$ tal que $|f_n|_{L^p(\Omega)} \leq k$ uniformemente em n;*

ii: *para qualquer* $\varepsilon > 0$*, existe* $\lambda(\varepsilon) > 0$ *tal que se* $E \subset \Omega$ *é mensurável, com* $|E| < \lambda(\varepsilon)$*, então*

$$\int_E |f_n(x)| dx < \varepsilon$$

qualquer que seja n.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [6], pág.329. □

OBSERVAÇÃO 214. A propriedade *ii* da proposição anterior chama-se equi-integrabilidade ou critério de Dunford-Pettis para a compacidade fraca de $L^1(\Omega)$.

LEMA 215. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto limitado. Então*

1º caso: *Se* $p = 1$,

$$f_n \rightharpoonup f \text{ em } L^1(\Omega)$$

sse

1: *existe* $k \geq 0$ *tal que* $|f_n|_{L^1(\Omega)} \leq k$*, qualquer que seja* n*;*

2: $\int_D [f_n(x) - f(x)] dx \to 0$ *para qualquer cubo* $D \subset \Omega$*;*

3: *para qualquer* $\varepsilon > 0$*, existe* $\lambda(\varepsilon) > 0$ *tal que se* $E \subset \Omega$ *é mensurável, com* $|E| < \lambda(\varepsilon)$*, então*

$$\int_E |f_n(x)| dx < \varepsilon$$

qualquer que seja n.

2º caso: *Se* $1 < p < \infty$,

$$f_n \rightharpoonup f \text{ em } L^p(\Omega)$$

sse

1: *existe* $k \geq 0$ *tal que* $|f_n|_{L^p(\Omega)} \leq k$*, qualquer que seja* n*;*

2: $\int_D [f_n(x) - f(x)] dx \to 0$ *para qualquer cubo* $D \subset \Omega$*;*

3º caso: *Se* $p = \infty$,

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } L^\infty(\Omega)$$

sse

1: *existe* $k \geq 0$ *tal que* $|f_n|_{L^\infty(\Omega)} \leq k$*, qualquer que seja* n*;*

2: $\int_D [f_n(x) - f(x)]dx \to 0$ *para qualquer cubo* $D \subset \Omega$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.20. □

É importante compreender a convergência fraca em $L^1(\Omega)$ de sucessões limitadas na norma de $L^1(\Omega)$ porque esta é a condição que nos permite representar limites fracos por medidas de Young.

LEMA 216. *Seja* (f_j) *uma sucessão limitada em* $L^1(\Omega)$, $|f_j|_{L^1(\Omega)} \leq C < \infty$. *Esta sucessão é fracamente relativamente compacta em* $L^1(\Omega)$ *se e só se*

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_j \int_{\{|f_j|\geq k\}} |f_j|\,dx\right) = 0. \tag{3}$$

A anulação do limite (3) impede a formação de efeitos de concentração.

DEMONSTRAÇÃO. Notemos primeiro que

$$|\{|f_j| \geq k\}| = \int_{\{|f_j|\geq k\}} 1\,dx \leq \int_{\{|f_j|\geq k\}} \frac{|f_j|}{k}\,dx \leq \int_\Omega \frac{|f_j|}{k}\,dx \leq \frac{C}{k}$$

logo, em particular para k suficientemente grande, $|\{|f_j| \geq k\}|$ é pequeno uniformemente em j. Como por hipótese (f_j) é fracamente relativamente compacta em $L^1(\Omega)$, então, em particular, temos a equi-integrabilidade, que nos dá

$$\int_{\{|f_j|\geq k\}} |f_j|\,dx \leq \varepsilon$$

para qualquer j, e para k suficientemente grande. Concluímos então que

$$\sup_j \int_{\{|f_j|\geq k\}} |f_j|\,dx \leq \varepsilon$$

para k suficientemente grande, que é exactamente, por definição de limite, o que queremos.

Reciprocamente, se vale (3) e $\varepsilon > 0$ é dado, utilizando novamente a definição de limite, podemos encontrar k_0 tal que

$$\int_{\{|f_j|\geq k\}} |f_j|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo o j, e para $k \geq k_0$. Fixemos $\delta = \frac{\varepsilon}{2k_0}$. Se $E \subset \Omega$ e $|E| < \delta$,

$$\int_E |f_j|\,dx \leq \int_{E\cap\{|f_j|\leq k_0\}} |f_j|\,dx + \int_{E\cap\{|f_j|\geq k_0\}} |f_j|\,dx \leq$$

$$\leq k_0|E| + \frac{\varepsilon}{2} \leq k_0\frac{\varepsilon}{2k_0} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e a sucessão (f_j) é equi-integrável. Como, por hipótese, é também equi-limitada em $L^1(\Omega)$, a sucessão (f_j) é fracamente relativamente compacta em $L^1(\Omega)$. □

TEOREMA 217. *Seja* $\Omega = \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ *e seja* $f \in L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$. *Estendemos* f *de* Ω *a* $\mathbb{R}^n$ *periodicamente. Seja*

$$f_n(x) = f(nx),$$

então

$$f_n \rightharpoonup \overline{f} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)dx \text{ em } L^p(\Omega)$$

se $1 \leq p < \infty$, *e*

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{f} \text{ em } L^\infty(\Omega)$$

se $p = \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.21. □

9.4. A b-convergência.

Já vimos que em $L^1(\Omega)$ nem toda a sucessão limitada possui uma subsucessão fracamente convergente. Sempre que uma sucessão limitada em $L^1(\Omega)$ não é equi-integrável, podemos "morder"(remover) o conjunto onde as concentrações ocorrem e ficamos com uma sucessão bem comportada. Isto é essencialmente o lema das mordidelas de Chacon.

TEOREMA 218. ***(Lema das mordidelas de Chacon)*** *Seja* (f_j) *uma sucessão limitada em* $L^1(\Omega)$ *onde*

$$\sup_j |f_j|_{L^1(\Omega)} = C < \infty.$$

Então existem uma subsucessão, que não renumeramos, uma sucessão decrescente de conjuntos mensuráveis $\Omega_n \subset \Omega$, $|\Omega_n| \searrow 0$ *e* $f \in L^1(\Omega)$ *tais que*

$$f_j \rightharpoonup f \text{ em } L^1(\Omega \backslash \Omega_n)$$

qualquer que seja n.

DEMONSTRAÇÃO. consultar [**23**], pág.105 ou, para uma demonstração mais geral, [**3**]. □

DEFINIÇÃO 219. *Dizemos que uma sucessão* $(f_j) \subset L^1(\Omega)$ *b-converge (ou converge no sentido das mordidelas) para* $f \in L^1(\Omega)$ *e escrevemos*

$$f_j \xrightarrow{b} f \text{ em } L^1(\Omega),$$

se existe uma sucessão decrescente (Ω_n) *de conjuntos mensuráveis satisfazendo* $|\Omega_n| \searrow 0$ *e*

$$f_j \rightharpoonup f \text{ em } L^1(\Omega \backslash \Omega_n)$$

qualquer que seja n.

Podemos reformular o lema das mordidelas dizendo que qualquer sucessão uniformemente limitada em $L^1(\Omega)$ contém uma subsucessão b-convergente para uma função em $L^1(\Omega)$.

Em algumas circunstâncias, a b-convergência pode ser melhorada para convergência fraca. Isto reduz-se a eliminarmos a possibilidade de ocorrerem concentrações. O lema seguinte dá-nos uma condição necessária e suficiente para tal melhoramento.

LEMA 220. *Seja* $f_j : \Omega \to (0, +\infty)$ *uma sucessão de funções mensuráveis em* $L^1(\Omega)$, *b-convergindo para* $f \in L^1(\Omega)$.

Então existe uma subsucessão fracamente convergente em $L^1(\Omega)$ *para* f *sse*

$$\liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f_j(x)dx \le \int_\Omega f(x)dx.$$

Mais geralmente, a própria sucessão $\{f_j\}$ *converge fracamente em* $L^1(\Omega)$ *para* f *sse*

$$\limsup_{j\to\infty} \int_\Omega f_j(x)dx \le \int_\Omega f(x)dx.$$

DEMONSTRAÇÃO. consultar **[23]**, pág. 109. □

9.5. Os espaços $L^p(\Omega, Y)$.

Para demonstrarmos o teorema de existência das medidas de Young usaremos o espaço $L^p(\Omega, Y)$, formado por funções $f : \Omega \to Y$, onde Y é um espaço de Banach com dual Y'. Para Ω mensurável $\subset \mathbb{R}^n$ escrevemos

$$L^p(\Omega, Y) = \{f : \Omega \to Y \ : f \text{ é fortemente mensurável e } \int_\Omega |f(x)|_Y^p\, dx < \infty\},$$

onde, como é habitual, queremos dizer que é um espaço de classes de equivalência (dada pela igualdade qs em Ω). Com "fortemente mensurável" pretende-se dizer que: existe uma sucessão de funções (f_j) mensuráveis simples (i.e., tomando apenas um número finito de valores) tal que $f_j(x) \xrightarrow{Y} f(x)$ pqt $x \in \Omega$ e

$$\int_\Omega |f_j(x) - f_k(x)|_Y^p\, dx \to 0,\ j,k \to \infty.$$

Escrevemos

$$L_w^p(\Omega, Y) = \{f : \Omega \to Y\ : f \text{ é } fracamente\ mensurável,$$
$$|f(\cdot)|_Y \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f(x)|_Y^p\, dx < \infty\}.$$

Dizer fracamente mensurável significa que para cada $T \in Y'$ a função $x \mapsto \langle f(x), T\rangle_{Y,Y'}$ é mensurável. Da mesma forma definimos

$$L_{w*}^p(\Omega, Y) = \{f : \Omega \to Y'\ : f \text{ é } fracamente^*\ mensurável,$$
$$|f(\cdot)|_{Y'} \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f(x)|_{Y'}^p\, dx < \infty\}.$$

$L^p(\Omega, Y)$, $L_\omega^p(\Omega, Y)$, $L_{\omega*}^p(\Omega, Y')$ são espaços de Banach, com a norma

$$|f|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|_Y^p dx\right)^{1/p}$$

(ou com Y' no lugar de Y, no caso de w^*).

TEOREMA 221. *Seja Y um espaço de Banach separável com dual Y'. Então $(L^p(\Omega, Y))' = L_{w*}^{p'}(\Omega, Y')$, $1 \le p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, segundo a dualidade*

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega \langle f(x), g(x)\rangle dx,$$

onde $f \in L^p(\Omega, Y)$ e $g \in L_{\omega*}^{p'}(\Omega, Y')$.

DEMONSTRAÇÃO. Consultar [11], pág.607. □

No nosso caso particular estamos interessados em

$$Y = C_0(\mathbb{R}^m) = \{f \in C(\mathbb{R}^m) : \lim_{|x|\to\infty} (x) = 0\}$$

$$Y' = \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) = \{medidas\ de\ Radon\ limitadas\ em\ \mathbb{R}^m\}$$

Neste caso temos a dualidade

$$(L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^m)))' = L^\infty_{\omega *}(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)).$$

10. Os espaços $W^{1,p}$

10.1. Definições e propriedades.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \le p \le \infty$.

DEFINIÇÃO 222. *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ define-se por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, ..., g_n \in L^p(\Omega) \text{ tais que } \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = \right.$$
$$\left. = - \int_\Omega g_i(x) \varphi(x) dx \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \ \forall i = 1, ..., n \right\}$$

onde $C_c^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções contínuas com derivadas parciais contínuas de todas as ordens, com suporte compacto, em Ω.

OBSERVAÇÃO 223. Pomos $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. Quando não houver perigo de confusão, por vezes escreveremos $W^{1,p}$ em vez de $W^{1,p}(\Omega)$.

DEFINIÇÃO 224. *Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, denotamos por*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ e } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Este g_i é único pelo Lema 205.

O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é munido da norma

$$|u|_{W^{1,p}} = |u|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^p}$$

ou, por vezes, da norma equivalente

$$\left(|u|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^p}^p \right)^{1/p} \quad (se\ 1 \le p < \infty).$$

O espaço $H^1(\Omega)$ é munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2};$$

a norma associada

$$|u|_{H^1} = \left(|u|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

é equivalente à norma de $W^{1,2}$.

TEOREMA 225. *O espaço $W^{1,p}$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$; $W^{1,p}$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$. O espaço H^1 é um espaço de Hilbert separável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**5**], pág.150. □

OBSERVAÇÃO 226. Na definição de $W^{1,p}$ podemos utilizar indiferentemente $C_c^1(\Omega)$ ou $C_c^\infty(\Omega)$ como conjunto das funções teste.

$\omega \subset\subset \Omega$ significa que ω é um aberto tal que $\overline{\omega} \subset \Omega$ e $\overline{\omega}$ é compacto.

TEOREMA 227. ***(Friedrichs)*** *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Então existe uma sucessão $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$u_{n|\Omega} \to u \text{ em } L^p(\Omega)$$

$$\nabla u_{n|\omega} \to \nabla u_{|\omega} \text{ em } L^p(\Omega)^n \text{ para qualquer } \omega \subset\subset \Omega.$$

OBSERVAÇÃO 228. Supondo hipóteses adicionais sobre Ω (regularidade), podemos obter um resultado mais preciso (Ver [**5**],pág.162).

10.2. Desigualdades de Sobolev.

TEOREMA 229. ***(Rellich-Kondrachov)*** *Suponhamos Ω limitado de classe C^1. Temos que*

- **a:** *se $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, \frac{np}{n-p})$,*
- **b:** *se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty)$,*
- **c:** *se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$,*

com injecções compactas.

OBSERVAÇÃO 230. **i:** Se substituirmos $W^{1,p}$ por $W_0^{1,p}$ (ver secção 10.3, abaixo), então não é necessária qualquer hipótese de regularidade sobre Ω.

ii: A injecção compacta pode ser lida da seguinte forma. Seja

$$u_\nu \rightharpoonup u \text{ em } W^{1,p}(\Omega).$$

- se $p < n$, então $u_\nu \to u$ em $L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, \frac{np}{n-p})$,
- se $p = n$, então $u_\nu \to u$ em $L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty)$,
- se $p > n$, então $u_\nu \to u$ em $L^\infty(\Omega)$.

10.3. O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$.

DEFINIÇÃO 231. *Seja $1 \le p < \infty$. $W_0^{1,p}(\Omega)$ designa o fecho de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Denotamos*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

OBSERVAÇÃO 232. O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ munido da norma induzida por $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável; é reflexivo se $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno de H^1.

As funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ são "grosso modo"as funções de $W^{1,p}(\Omega)$ "que se anulam em $\partial\Omega$". É delicado dar um sentido preciso a esta afirmação pois uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ está definida apenas qs (e $\partial\Omega$ pode ter medida nula). No entanto, as duas seguintes caracterizações dão sentido a esta afirmação.

LEMA 233. *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, com spt(u) compacto contido em Ω. Então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[5]**, pág.171. □

TEOREMA 234. *Suponhamos Ω de classe C^1. Seja*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ com } 1 \le p < \infty.$$

Então as seguintes propriedades são equivalentes:

i: *$u = 0$ em $\partial\Omega$;*

ii: *$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5], pág.171. □

TEOREMA 235. ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Suponhamos que Ω é um aberto limitado, $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante C (que depende de Ω e de p) tal que*

$$|u|_{L^p(\Omega)} \leq C|\nabla u|_{L^p(\Omega)} \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5], pág.174. □

10.4. Convergência forte, fraca e fraca* em $W^{1,p}$.

OBSERVAÇÃO 236. Seja $1 \leq p \leq \infty$. A sucessão $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ converge fortemente para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (e denotamos este facto por $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$) se

$$|u_n - u|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0.$$

OBSERVAÇÃO 237. Seja $1 \leq p < \infty$. A sucessão $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ converge fracamente para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (e denotamos este facto por $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$) se

$$\int_\Omega u_n(x)g(x)dx \to \int_\Omega u(x)g(x)dx \ \forall g \in L^{p'}(\Omega) \text{ e}$$
$$\int_\Omega \nabla u_n(x)g(x)dx \to \int_\Omega \nabla u(x)g(x)dx \ \forall g \in L^{p'}(\Omega).$$

OBSERVAÇÃO 238. Seja $p = \infty$. A sucessão $(u_n) \subset W^{1,\infty}(\Omega)$ converge fracamente* para $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ (e denotamos este facto por $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $W^{1,\infty}(\Omega)$) se

$$\int_\Omega u_n(x)g(x)dx \to \int_\Omega u(x)g(x)dx \ \forall g \in L^1(\Omega) \text{ e}$$
$$\int_\Omega \nabla u_n(x)g(x)dx \to \int_\Omega \nabla u(x)g(x)dx \ \forall g \in L^1(\Omega).$$

OBSERVAÇÃO 239. A convergência forte (resp. fraca) em $W^{1,p}(\Omega)$ significa a convergência forte (resp. fraca) em $L^p(\Omega)$ das funções e dos seus gradientes conjuntamente.

11. Funções convexas

Seja X um espaço de Banach.

DEFINIÇÃO 240. *Um subconjunto $A \subset X$ diz-se convexo se para quaisquer $x, y \in A, \lambda \in [0,1]$ temos $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.*

DEFINIÇÃO 241. *Seja A um subconjunto qualquer de X. O conjunto de todas as combinações convexas de elementos de A, i.e.,*

$$conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, u_i \in A, 1 \leq i \leq n \right\}$$

diz-se o convexificado de A.

OBSERVAÇÃO 242. $conv(A)$ é o menor conjunto convexo que contém A.

DEFINIÇÃO 243. *Seja $A \subset X$ um conjunto convexo. Uma função $f : A \to (-\infty, +\infty]$ diz-se convexa em A se*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

para quaisquer $x, y \in A$, $\lambda \in [0,1]$.

DEFINIÇÃO 244. *O domínio da função $f : X \to (-\infty, +\infty]$ é definido por*

$$dom(f) = \{x \in X : f(x) < +\infty\}.$$

DEFINIÇÃO 245. *O epigráfico da função $f : X \to (-\infty, +\infty]$ é definido por*

$$epi(f) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}.$$

PROPOSIÇÃO 246. *Uma função $f : X \to (-\infty, +\infty]$ é convexa sse $epi(f)$ é convexo.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**12**], pág.9. □

TEOREMA 247. ***(Desigualdade de Jensen)*** *Seja μ uma medida positiva de Radon sobre uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ num conjunto Ω tal que $\mu(\Omega) = 1$. Seja $f \in L^1(\mu)$ uma função com valores vectoriais tal que $f(x) \in K$ μ-qs em Ω, onde $K \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto convexo. Se φ é uma função convexa definida em K, então*

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega \varphi(f) d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**23**], pág.20. □

TEOREMA 248. *Sejam $X_1, ..., X_n$ espaços de Banach e seja $f : X_1 \times ... \times X_n \to (-\infty, +\infty]$ convexa em cada variável.*

1ªParte: Se f é limitada superiormente numa vizinhança de x, então f é contínua em x.

2ªParte: Se $X_1 = ... = X_n = \mathbb{R}$, então f é localmente lipschitziana no int(dom(f)).

DEMONSTRAÇÃO. 1ªParte

Suponhamos, s.p.g., que $x = 0$ e $f(0) = 0$. Como f é limitada superiormente numa vizinhança de $x = 0$, existe $\lambda > 0$ e $a \geq 1$ tal que

$$|x|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, ..., n\} \leq \lambda \Rightarrow f(x) \leq a.$$

Fixemos $\varepsilon > 0$ e s.p.g. suponhamos que $\varepsilon \leq an$. Mostremos que

$$|x|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{an}\lambda \;\Rightarrow\; |f(x)| \leq \varepsilon.$$

Utilizando a convexidade de f temos

$$f(x) = f(x_1, ..., x_n) = f\left(\delta(\frac{x_1}{\delta}, x_2, ..., x_n) + (1-\delta)(0, x_2, ..., x_n)\right) \leq$$
$$\leq \delta f(\frac{x_1}{\delta}, x_2, ..., x_n) + (1-\delta) f(0, x_2, ..., x_n),$$

sendo $\delta = \frac{\varepsilon}{an} \in [0, 1]$. Repetindo o processo na segunda variável, temos

$$f(x) \leq \delta f(\frac{x_1}{\delta}, x_2, ..., x_n) + (1-\delta)\left(f\left(\delta(0, \frac{x_2}{\delta}, x_3, ..., x_n) + (1-\delta)(0, 0, x_3, ..., x_n)\right)\right) \leq$$
$$\leq \delta f(\frac{x_1}{\delta}, x_2, ..., x_n) + (1-\delta)\delta f\left((0, \frac{x_2}{\delta}, x_3, ..., x_n)\right) + (1-\delta)^2 f((0, 0, x_3, ..., x_n)).$$

Iterando o processo obtemos

$$f(x) \leq \delta f(\frac{x_1}{\delta}, x_2, ..., x_n) + (1-\delta)\delta f\left((0, \frac{x_2}{\delta}, x_3, ..., x_n)\right) + (1-\delta)^2 \delta f((0, 0, \frac{x_3}{\delta}, ..., x_n)) +$$
$$+ ... + (1-\delta)^{n-1}\delta f(0, 0, ..., \frac{x_n}{\delta}) + (1-\delta)^n f(0, ..., 0) \leq$$

(Como $f(0) = 0$ e supondo $|x|_\infty \leq \delta\lambda = \frac{\varepsilon}{an}\lambda$) (note-se que $|x|_\infty = |(x_1, ..., x_n)|_\infty \leq \delta\lambda \Rightarrow |(x_1, ..., \frac{x_i}{\delta}, ..., x_n)|_\infty \leq \lambda \Rightarrow f\left(x_1, ..., \frac{x_i}{\delta}, ..., x_n\right) \leq a$)

$$\leq \delta a + (1-\delta)\delta a + (1-\delta)^2 \delta a + (1-\delta)^{n-1}\delta a \leq \delta(\underbrace{a + a + ... + a}_{n\, vezes}) = \varepsilon,$$

pois $(1-\delta) < 1$. Concluímos então que

$$|x|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{an}\lambda \;\Rightarrow\; f(x) \leq \varepsilon.$$

Falta-nos então mostrar que $f(x) \geq -\varepsilon$, o que obtemos de modo semelhante. Seja

$$0 = f(0, ..., 0) = f\left(\frac{1}{1+\delta}(0, ..., 0, x_n) + \frac{\delta}{1+\delta}(0, ..., 0, -\frac{x_n}{\delta})\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1+\delta}f(0,...,0,x_n) + \frac{\delta}{1+\delta}f(0,...,0,-\frac{x_n}{\delta}),$$

logo

$$f(0,...,0,x_n) \geq -\delta f(0,...,0,-\frac{x_n}{\delta}).$$

Iterando este processo, como acima, temos

$$\begin{aligned} 0 = f(0,...,0) &\leq \frac{1}{1+\delta}f(0,...,0,x_n) + \frac{\delta}{1+\delta}f(0,...,0,-\frac{x_n}{\delta}) \leq \\ &\leq \frac{1}{(1+\delta)^2}f(0,...,0,,x_{n-1},x_n) + \frac{\delta}{(1+\delta)^2}f(0,...,0,-\frac{x_{n-1}}{\delta},-\frac{x_n}{\delta})+ \\ &+ \frac{\delta}{1+\delta}f(0,...,0,-\frac{x_n}{\delta}) \leq \frac{1}{(1+\delta)^n}f(x_1,...,x_n) + \frac{\delta}{(1+\delta)^n}f(-\frac{x_1}{\delta},...,-\frac{x_n}{\delta})+ \\ &+ \frac{\delta}{(1+\delta)^{n-1}}f(0,-\frac{x_2}{\delta},...,-\frac{x_n}{\delta}) + ... + \frac{\delta}{(1+\delta)^2}f(0,...,0-\frac{x_{n-1}}{\delta},-\frac{x_n}{\delta})+ \\ &+ \frac{\delta}{1+\delta}f(0,...,0,-\frac{x_n}{\delta}) \end{aligned}$$

Se supusermos novamente que $|x|_\infty \leq \delta\lambda = \frac{\varepsilon}{an}\lambda$ (note-se que $|x|_\infty = |(x_1,...,x_n)|_\infty \leq \delta\lambda \Rightarrow |(0,...,0,-\frac{x_i}{\delta},...,-\frac{x_n}{\delta})|_\infty \leq \lambda \Rightarrow f\left(0,...,0,-\frac{x_i}{\delta},...,-\frac{x_n}{\delta}\right) \leq a$), como $(1+\delta) > 1$, obtemos

$$f(x) \geq -\delta(\underbrace{a+a+...+a}_{n\ vezes}) \geq -\frac{\varepsilon}{an}an = -\varepsilon,$$

i.e.,

$$|x|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{an}\lambda \Rightarrow f(x) \geq -\varepsilon.$$

Portanto f é contínua em $x = 0$.

2^a Parte

Queremos agora mostrar que no caso de dimensão finita, a condição f limitada superiormente numa vizinhança de um ponto deixa de ser necessária.

1^a Etapa. Provemos primeiro que se $x \in int(dom(f))$, então f é contínua em x. Suponhamos, novamente s.p.g., que $x = 0$ e, consequentemente, como $0 \in int(dom(f))$, que existe $\varepsilon > 0$ tal que

(4) $$\{x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : |x|_\infty \leq 2\varepsilon\} \subset dom(f).$$

Pondo $A = \{(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_i \in \{-\varepsilon, 0, \varepsilon\},\ i = 1, ..., n\}$ e $a = \max_{x \in A} f(x)$, temos que $a < +\infty$, pois $A \subset dom(f)$ (por (4)) e A é finito. Afirmamos que

$$|x|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq a. \tag{5}$$

De modo a provarmos esta última afirmação, observemos que se $0 \leq x_n \leq \varepsilon$ e $\varepsilon_i \in \{-\varepsilon, 0, \varepsilon\}$, então a convexidade de f com respeito à última variável implica que

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{n-1}, x_n) \leq a;$$

de facto

$$f\left(\frac{x_n}{\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{n-1}, \varepsilon) + (1 - \frac{x_n}{\varepsilon})(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{n-1}, 0)\right) \leq$$

$$\leq \frac{x_n}{\varepsilon} f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{n-1}, \varepsilon) + (1 - \frac{x_n}{\varepsilon}) f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{n-1}, 0) \leq \frac{x_n}{\varepsilon} a + (1 - \frac{x_n}{\varepsilon}) a.$$

Iterando este processo com respeito a todas as variáveis, chegamos finalmente a

$$f(x_1, ..., x_n) \leq \frac{x_1}{\varepsilon}(\varepsilon, x_2, ..., x_n) + (1 - \frac{x_1}{\varepsilon}) f(0, x_2, ..., x_n) \leq a,$$

para $0 \leq x_i \leq \varepsilon$, i.e, obtemos (5). Se algum dos x_i for negativo, $-x_i$ é positivo e portanto podemos aplicar o mesmo processo descrito acima. Donde (5) implica que se $x \in int(dom(f))$, então f é limitada numa vizinhança de x e, portanto, aplicando a 1ª parte, f é contínua em x.

2ª Etapa. Falta mostrar que f é localmente lipschitziana no interior do domínio de f.

Seja $x \in int(dom(f))$. Como f é contínua em x, existem $\delta > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$|y - x|_\infty = \max_{i=1,...,n} \{|y_i - x_i|\} \leq 2\delta \Rightarrow -\infty < \alpha \leq f(y) \leq \beta < +\infty. \tag{6}$$

Sejam z e z_1 tais que

$$|z_1 - z| \leq \delta,\ |z_1 - x| \leq \delta. \tag{7}$$

Observe-se que imediatamente obtemos $|z - x| \leq 2\delta$. Como z e z_1 verificam (6), temos que

$$|z - z_1| \leq \delta \Rightarrow f(z) - f(z_1) \leq \beta - \alpha.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Combinando $|x| \leq \frac{\varepsilon}{an}\lambda \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$ e a desigualdade anterior, concluímos que

$$|z - z_1| \leq \frac{\delta\varepsilon}{(\beta - \alpha)n} \Rightarrow |f(z) - f(z_1)| \leq \varepsilon. \tag{8}$$

Escolhendo $\varepsilon\delta = |z - z_1|(\beta - \alpha)n$ obtemos de (8), como $|z - z_1| \leq \delta$, que

$$|z - z_1| \leq \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_1)| \leq \frac{(\beta - \alpha)n}{\delta}|z - z_1|. \tag{9}$$

Seja agora z_2 tal que $|z_2 - x| \leq \delta$. Tomando $u = \frac{z_1+z_2}{2}$ vem

$$|z_1 - u| = \frac{1}{2}|z_1 - z_2| \leq \frac{1}{2}(|z_1 - x| + |x - z_2|) \leq \delta$$

e

$$|z_2 - u| \leq \delta.$$

Aplicando (9) obtemos

$$|z_1 - u| \leq \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(u)| \leq \frac{(\beta - \alpha)n}{\delta}|z_1 - u| \ e$$
$$|u - z_2| \leq \delta \Rightarrow |f(u) - f(z_2)| \leq \frac{(\beta - \alpha)n}{\delta}|u - z_2|.$$

Somando agora (lembremo-nos que $|z_1 - x| \leq \delta$) concluímos

$$|z_1 - x| \leq \delta, |z_2 - x| \leq \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| \leq |f(z_1) - f(u)| + |f(u) - f(z_2)| \leq$$
$$\leq \frac{(\beta - \alpha)n}{\delta}(|z_1 - u| + |u - z_2|) = \frac{(\beta - \alpha)n}{\delta}|z_1 - z_2|,$$

i.e., f é localmente lipschitziana. □

OBSERVAÇÃO 249.

- Notemos que se $f : X_1 \times ... \times X_n \to (-\infty, +\infty]$ é convexa, então f é convexa em cada uma das variáveis. A recíproca é, no entanto, falsa. Basta tomarmos $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ e $f(x, y) = xy$.
- Na segunda parte do teorema, se $f : X \to (-\infty, +\infty]$ é convexa e f é limitada superiormente numa vizinhança de um ponto x, então f é também localmente lipschitziana no $int(dom(f))$, mesmo que X seja um espaço de Banach de dimensão infinita. Para a demonstração neste caso consultar [**8**], pág.33.

DEFINIÇÃO 250. *Seja X um espaço normado, X' o seu dual e $f : X \to [-\infty, +\infty]$. A função $f' : X' \to [-\infty, +\infty]$ definida por*

$$f'(x') = \sup_{x \in X}\{\langle x, x' \rangle - f(x)\}$$

diz-se a função conjugada, ou polar, de f.

TEOREMA 251. *Seja X um espaço de Banach e seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua e convexa. Para cada $x \in X$, existe $x' \in X'$ tal que*

$$f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x' \rangle,$$

para todo o $y \in X$. Além disso, x e x' estão relacionados do seguinte modo

$$f(x) + f'(x') = \langle x, x' \rangle.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in X$ fixado. Como f é contínua, existe uma vizinhança de x na qual f é limitada, logo $int(epi(f)) \neq \emptyset$. Como f é convexa, então $epi(f)$ é convexo, logo $int(epi(f))$ é convexo. Observemos também que $(x, f(x)) \notin int(epi(f))$ (pois $(x, f(x)) \in \partial(epi(f))$). Aplicando o teorema de Hahn-Banach a $\{(x, f(x))\}$ e a $int(epi(f))$ (pois $\{(x, f(x))\}$ é convexo não vazio), temos que existem $a', \alpha \in \mathbb{R}$ e $x_1' \in X'$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle y, x_1' \rangle + a'a \geq \alpha & \text{para todo o } (y, a) \in epi(f), \\ \langle x, x_1' \rangle + a' f(x) = \alpha. & \end{array} \right. \tag{10}$$

Note-se primeiro que $a' \geq 0$, pois, caso contrário, como $(x, f(x) + k) \in epi(f)$, para qualquer $k \geq 0$, o que é absurdo. Mais ainda, $a' \neq 0$ pois, se $a' = 0$, então por (10) teríamos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle y, x_1' \rangle \geq \alpha & \text{para qualquer } y \in X \\ \langle x, x_1' \rangle = \alpha, & \end{array} \right.$$

o que implica em particular que $\langle y - x, x_1' \rangle \geq 0$ para qualquer $y \in X$, logo $x_1' = 0$, o que é absurdo. Consequentemente $a' > 0$ e deduzimos, novamente de (10) e do facto de $(y, f(y)) \in epi(f)$, que

$$\langle y, x_1' \rangle + a' f(y) \geq \langle x, x_1' \rangle + a' f(x) \Leftrightarrow \langle y, \frac{x_1'}{a'} \rangle + f(y) \geq \langle x, \frac{x_1'}{a'} \rangle + f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + \langle x - y, \frac{x_1'}{a'} \rangle.$$

Pondo $x' = -\frac{x_1'}{a'}$, obtemos imediatamente

$$f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x' \rangle$$

para qualquer $y \in X$.

Falta-nos então mostrar que

$$f(x) + f'(x') = \langle x, x' \rangle.$$

Como

$$f^{'}(x') = \sup_{x \in X} \{\langle x, x' \rangle - f(x)\}$$

obtemos imediatamente que

$$f(x) + f^{'}(x') \geq \langle x, x' \rangle.$$

Já vimos acima que

$$\langle x, x' \rangle - f(x) \geq \langle y, x' \rangle - f(y)$$

para qualquer $y \in X$. Tomando o supremo sobre todos os $y \in X$, obtemos

$$\langle x, x' \rangle - f(x) \geq \sup_{y \in X} \{\langle y, x' \rangle - f(y)\} = f^{'}(x'),$$

o que conclui a demonstração. □

TEOREMA 252. ***(de Carathéodory)*** *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Então*

$$conv(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i, x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.42. □

CAPÍTULO 3

As Medidas de Young e a Q-convexidade

1. As Medidas de Young e a sci fraca

Neste capítulo estudamos a propriedade da sci fraca para um funcional

$$I(u) = \int_\Omega W(\nabla u(x))dx$$

(onde para simplificar não consideramos a dependência em x e em u), ou seja, o comportamento dos integrais

$$\int_\Omega W(\nabla u_j(x))dx$$

ao longo duma sucessão (u_j) fracamente convergente em $W^{1,p}(\Omega)$. Se esta convergência fraca é na realidade forte, ou seja $u_j \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$, então, possivelmente para uma subsucessão, $u_j(x) \to u(x)$ e $\nabla u_j(x) \to \nabla u(x))$ pqt $x \in \Omega$. Se $W \geq 0$ é contínua vem, pelo Lema de Fatou,

$$\liminf_{j\to\infty} \int_\Omega W(\nabla u_j(x))dx \geq \int_\Omega W(\nabla u(x))dx.$$

Sendo W contínua e limitada inferiormente (por zero ou por outra constante), o funcional associado goza da propriedade da sci forte em $W^{1,p}$; valerá também esta desigualdade caso a convergência seja apenas fraca? Que hipóteses temos de impor a W de modo a assegurar a sci fraca? Note-se que no caso da convergência fraca podemos na mesma aplicar o lema de Fatou, mas neste caso $\liminf_{j\to\infty} W(\nabla u_j(x))$ não é em geral $W(\nabla u(x))$. De facto, vejamos alguns exemplos de como se comporta a convergência fraca com funcionais não-lineares.

EXEMPLO 253. Seja $\Omega = (0, \frac{\pi}{2})$, $f_j(x) = \sin(jx)$ e $g_j(x) = f_j^2(x)$, $x \in \Omega$. Temos então que

$$\int_a^b \sin(jx)dx = \frac{1}{j}\int_a^b j\sin(jx)dx = \frac{1}{j}(\cos(ja) - \cos(jb))$$

e

$$\int_a^b \sin^2(jx)dx = -\frac{1}{j}\sin(jx)cos(jx)|_a^b + \int_a^b \cos^2(jx)dx =$$

$$= -\frac{1}{j}\sin(jx)cos(jx)|_a^b + x|_a^b - \int_a^b \sin^2(jx)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b \sin^2(jx)dx = \frac{b-a}{2} + \frac{1}{4j}(\sin(2ja) - \sin(2jb))$$

Logo

$$\lim_{j\to+\infty} \int_a^b f_j(x)dx = \lim_{j\to+\infty} \frac{1}{j}(\cos(ja) - \cos(jb)) = 0 = \int_a^b 0dx$$

e

$$\lim_{j\to+\infty} \int_a^b g_j(x)dx = \lim_{j\to+\infty} \left(\frac{b-a}{2} + \frac{1}{4j}(\sin(2ja) - \sin(2jb))\right) = \frac{b-a}{2} = \int_a^b \frac{1}{2}dx$$

para qualquer intervalo $(a,b) \subset \Omega$. Aplicando o lema 215 temos que

$$f_j \overset{L^p}{\rightharpoonup} 0, g_j \overset{L^p}{\rightharpoonup} \frac{1}{2}$$

Observemos que o quadrado do limite fraco não coincide com o limite fraco dos quadrados, i.e.,

$$f_j^2 = g_j \rightharpoonup \frac{1}{2} \neq 0^2 = (limite\ fraco\ f_j)^2$$

No entanto, repare-se que temos a desigualdade da sci fraca

$$\liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f_j^2(x)dx = \frac{\pi}{4} > 0 = \int_\Omega 0^2 dx$$

onde 0 é o limite fraco de (f_j).

Tomemos agora $\varphi(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$ e examinemos o limite fraco da sucessão $(\varphi(g_j))$. Neste caso, temos

$$\int_a^b \sqrt{\sin^2(jx)}dx = \int_a^b |\sin(jx)|dx =$$

fazendo a mudança de variável $x = \frac{1}{j}y$, obtemos

$$= \frac{1}{j}\int_{ja}^{jb} |\sin(y)|dy =$$

e pela periodicidade do seno, concluímos então que

$$= \frac{1}{j}\int_{ja}^{ja+\pi\langle\frac{j(b-a)}{\pi}\rangle} |\sin(y)|dy + \frac{1}{j}\int_{ja+\pi\langle\frac{j(b-a)}{\pi}\rangle}^{jb} |\sin(y)|dy =$$

$$= \frac{1}{j}2\left\langle\frac{j(b-a)}{\pi}\right\rangle + \frac{1}{j}\int_{ja+\pi\langle\frac{j(b-a)}{\pi}\rangle}^{jb} |\sin(y)|dy =$$

$$= \frac{2(b-a)}{\pi} + \frac{2}{j}\left(\left\langle\frac{j(b-a)}{\pi}\right\rangle - \frac{j(b-a)}{\pi}\right) + \frac{1}{j}\int_{ja+\pi\langle\frac{j(b-a)}{\pi}\rangle}^{jb} |\sin(y)|dy$$

onde $\langle a \rangle$ representa a parte inteira de a.

Como

$$\left|\left\langle\frac{j(b-a)}{\pi}\right\rangle - \frac{j(b-a)}{\pi}\right| \leq 1 \ e \ \left|\int_{ja+\pi\langle\frac{j(b-a)}{\pi}\rangle}^{jb} |\sin(y)|dy\right| \leq 2$$

vem que

$$\frac{2}{j}\left(\left\langle\frac{j(b-a)}{\pi}\right\rangle - \frac{j(b-a)}{\pi}\right) + \frac{1}{j}\int_{ja+\pi\langle\frac{j(b-a)}{\pi}\rangle}^{jb} |\sin(y)|dy \to 0$$

quando $j \to \infty$. Portanto, temos que

$$\lim_{j\to\infty}\int_a^b |\sin(jx)|dx = \frac{2(b-a)}{\pi} = \int_a^b \frac{2}{\pi}dx$$

para qualquer intervalo $(a, b) \subset \Omega$. Consequentemente

$$\varphi(g_j) \rightharpoonup \frac{2}{\pi}$$

Note-se novamente que o limite fraco de $(\varphi(g_j))$ não é a composição de φ com o limite fraco de (g_j), pois

$$\varphi(g_j) \rightharpoonup \frac{2}{\pi} \neq \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \varphi(\frac{1}{2})$$

Além disso, por ser

$$\int_\Omega \varphi(\lim_{j\to\infty} g_j(x))dx = \frac{\pi}{2}\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} > 1 = \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega \varphi(g_j(x))dx,$$

não temos a desigualdade da sci fraca. Aparentemente precisamos de mais condições em W de modo a valer a propriedade da sci fraca.

EXEMPLO 254. Seja $f(x) = 2\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(x) - 1$ para $x \in [0, 1]$, estendida periodicamente a $\mathbb{R}$.

Tomemos $f_j(x) = f(jx)$. É fácil ver que os saltos de 1 para -1 ocorrem cada vez mais rapidamente quando $j \to \infty$. Por outro lado (utilizando, por exemplo, o teorema 217) concluímos que $f_j \rightharpoonup 0$ em $\Omega = (0, 1)$. No entanto, como $f_j^2 \equiv 1$ para todo o j, então $f_j^2 \rightharpoonup 1$ e mais uma vez o quadrado do limite fraco não é o limite fraco do quadrado.

Mais geralmente, se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então, aplicando o teorema 217 a $(\varphi \circ f)(x)$, obtemos

$$\varphi(f_j) \rightharpoonup \frac{1}{2}(\varphi(1) + \varphi(-1)).$$

Neste caso particular fomos capazes de descrever o comportamento no limite dos integrais

$$\int_0^1 \varphi(f_j(x))dx,$$

para qualquer função φ contínua, em termos da expressão $\frac{1}{2}(\varphi(1)+\varphi(-1))$.

Esta é a característica principal do instrumento medidas de Young: de modo análogo, podemos entender a sci fraca de uma forma muito mais geral. Os exemplos examinados já nos convenceram que existe algo de muito especial com as sucessões de natureza muito oscilatória quando a convergência é apenas fraca e não forte. Em termos gerais, o problema com o qual estamos a lidar pode ser formulado como segue.

Suponhamos que $f_j \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty(\Omega)$ e, consequentemente, $|f_j|_{L^\infty(\Omega)} \leq C < \infty$. Se φ é uma função contínua, temos que $(\varphi(f_j))$ é também uma sucessão uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega)$. Consequentemente, temos uma subsucessão fracamente* convergente em $L^\infty(\Omega)$:

$$\varphi(f_j(x)) \overset{*}{\rightharpoonup} g \text{ em } L^\infty(\Omega).$$

Através deste exemplos percebemos que g não é $\varphi(f)$. A medida de Young associada a (f_j) fornece-nos a ligação entre (f_j), f, g e φ.

DEFINIÇÃO 255. *Designamos por Carathé a família das funções $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^m \to (-\infty, +\infty]$ tipo Carathéodory, i.e. com $\psi(\cdot, \lambda)$ mensurável $\forall \lambda \in \mathbb{R}^m$ e $\psi(x, \cdot)$ contínua $\forall x \in \Omega$.*

DEFINIÇÃO 256. *Uma medida de Young, ou medida parametrizada, é uma família de medidas de probabilidade $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ associada a uma sucessão de funções $z_j : \Omega \to \mathbb{R}^m$, (com Ω mensurável $\subset \mathbb{R}^n$), com $spt(\nu_x) \subset \mathbb{R}^m$, satisfazendo o seguinte:*

1: *a função $x \mapsto \nu_x$ é mensurável (o que significa que, para cada $\psi \in$ Carathé, a média $\overline{\psi}^\nu(\cdot)$, definida por*

$$\overline{\psi}^\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda),$$

é mensurável);

2: *para cada $\psi \in$ Carathé tal que a sucessão $(\psi(\cdot, z_j(\cdot)))$ converge fracamente* em $L^\infty(\Omega)$ (ou mais geralmente, fracamente em algum $L^p(\Omega)$) o seu limite fraco é $\overline{\psi}^\nu(\cdot)$, ou seja*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \psi(x, z_j(x)) h(x) dx = \int_\Omega \overline{\psi}^\nu(x) h(x) dx$$

para qualquer $h \in L^1(\Omega)$ (esta é chamada a propriedade fundamental da medida de Young).

Intuitivamente, a medida de Young dá-nos a distribuição de probabilidade limite dos valores de (f_j) quando os pontos são tomados aleatoriamente na vizinhança de cada $x \in \Omega$. Se $B_r(x)$ denota a bola de raio $r > 0$ centrada em $x \in \Omega$ e $E \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto mensurável qualquer, então

$$\nu_x(E) = \lim_{r \to 0} \lim_{j \to \infty} \frac{|\{y \in B_r(x) : f_j(y) \in E\}|}{|B_r(x)|}.$$

Esta identificação mostra claramente que a sucessão (f_j) é forçada a tomar como valores, próximo de x, os vectores que estão no suporte de ν_x, cada um tomado com uma frequência relativa dada pelo respectivo peso. Vejamos outros exemplos.

EXEMPLO 257. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x_1, x_2) = \int_0^{x_1+x_2} \chi_{(0,\frac{3}{4})}(s)ds$$

onde $\chi_{(0,\frac{3}{4})}$ é a função característica do intervalo $(0, \frac{3}{4}) \subset (0,1)$ estendida periodicamente a $\mathbb{R}$. Seja $\overline{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\overline{u}(x) = (g(x), g(x))$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, *e* $u_j(x) = \frac{1}{j}\overline{u}(jx)$. Se calcularmos os gradientes destas funções obtemos

$$\nabla u_j(x) = \nabla(\frac{1}{j}\overline{u}(jx) = \begin{pmatrix} \chi_{(0,\frac{3}{4})}(j(x_1+x_2)) & \chi_{(0,\frac{3}{4})}(j(x_1+x_2)) \\ \chi_{(0,\frac{3}{4})}(j(x_1+x_2)) & \chi_{(0,\frac{3}{4})}(j(x_1+x_2)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & ,0 < j(x_1+x_2) - \langle j(x_1+x_2) \rangle < \frac{3}{4} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & ,\frac{3}{4} < j(x_1+x_2) - \langle j(x_1+x_2) \rangle < 1 \end{cases}$$

$$= \chi_{(0,\frac{3}{4})}(j(x_1+x_2))(1,1) \otimes (1,1)$$

onde o produto tensorial $a \otimes N = aN^T$, para $a \in \mathbb{R}^m$ e $N \in \mathbb{R}^n$, é a R-matriz $(a_i N_j)_{ij}$ (por R-matriz entendemos uma matriz cuja característica é 0 ou 1, i.e., qualquer par de linhas ou colunas é linearmente dependente). Queremos determinar a medida de Young associada a esta sucessão de gradientes. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; e \; O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $E \subset \mathbb{M}^{2\times 2}$ não contém A nem O então

$$\lim_{r\to 0}\lim_{j\to\infty} \frac{|\{y \in B_r(x) : \nabla u_j(y) \in E\}|}{|B_r(x)|} = \lim_{r\to 0}\lim_{j\to\infty} \frac{0}{|B_r(x)|} = 0,$$

o que significa que ν_x está concentrada em $\{A, O\}$, e portanto

$$\nu_x = \lambda(x)\delta_A + (1 - \lambda(x))\delta_O, \lambda(x) \in [0,1]$$

(δ massa de Dirac). Mais geralmente, se pensarmos como A ou O são distribuídas por ∇u_j

$$\lambda(x) = \lim_{r\to 0}\lim_{j\to\infty} \frac{|\{y \in B_r(x) : \nabla u_j(y) = A\}|}{|B_r(x)|} = \lim_{r\to 0} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

independente de $x \in \Omega$. Logo

$$\nu = \frac{3}{4}\delta_A + \frac{1}{4}\delta_O.$$

Para qualquer função contínua $\varphi : \mathbb{M}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ temos

$$\varphi(\nabla u_j) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\varphi}^\nu = \int_{\mathbb{M}^{2\times 2}} \varphi(\lambda) d\nu(\lambda) = \frac{3}{4}\varphi(A) + \frac{1}{4}\varphi(O), \tag{11}$$

em $L^\infty(\Omega)$.

EXEMPLO 258. Tomemos agora $\varphi_0(F) = |F|^2$ =soma dos quadrados das entradas de F, para $F \in \mathbb{M}^{2\times 2}$. Então

$$\varphi_0(\nabla u_j) = |\nabla u_j|^2 = \begin{cases} \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right|^2 & ,0 < j(x_1 + x_2) - \langle j(x_1 + x_2)\rangle < \frac{3}{4} \\ \left|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right|^2 & ,\frac{3}{4} < j(x_1 + x_2) - \langle j(x_1 + x_2)\rangle < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4 & ,0 < j(x_1 + x_2) - \langle j(x_1 + x_2)\rangle < \frac{3}{4} \\ 0 & ,\frac{3}{4} < j(x_1 + x_2) - \langle j(x_1 + x_2)\rangle < 1 \end{cases}$$

onde u_j é a sucessão do exemplo anterior. Tomando $\varphi = id$ em (11) temos que a sucessão dos gradientes (∇u_j) converge fracamente* em $L^\infty(\Omega)$ para $\nabla u = \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}0 = \frac{3}{4}A$. Como φ_0 é convexa, pela desigualdade de Jensen temos que

$$\int_{\mathbb{M}^{2\times 2}} |F|^2 d\nu(F) \geq \left|\int_{\mathbb{M}^{2\times 2}} F d\nu(F)\right|^2$$

que neste caso é apenas

$$\frac{3}{4}\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right|^2 + \frac{1}{4}\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right|^2 \geq \left|\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right|^2$$

que nos dá exactamente

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_j|^2 dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

um resultado de sci fraca (aplicando φ_0 a (11)).

Como foi apontado, a propriedade fundamental das medidas de Young fornece-nos uma maneira de representar e manipular os limites dos integrais do tipo

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega W(\nabla u_j(x))dx$$

(supomos que $W(F) \geq c(|F|^p - 1), F \in \mathbb{M}^{m\times n}$, para algum $p > 1, c > 0$, i.e., W coerciva). Desta perspectiva, as medidas de Young são uma ferramenta conveniente quando lidamos com funcionais integrais no cálculo das variações.

Naturalmente, convém esclarecer exactamente sob que tipo de condições podemos representar limites de integrais como acima por medidas de Young? Para tal, vamos começar por estabelecer um teorema de existência muito geral que pode ser aplicado à maioria das situações que encontramos na prática. É importante sublinhar que este resultado não garante de modo algum que os limites fracos existam, algo que terá de ser mostrado independentemente.

TEOREMA 259. *Seja Ω mensurável $\subset \mathbb{R}^n$, e sejam $z_j : \Omega \to \mathbb{R}^m$ funções mensuráveis satisfazendo*

$$\sup_j \int_\Omega g(|z_j|)\, dx < \infty, \tag{12}$$

onde $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função contínua crescente, com $g(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$.

Então existe uma subsucessão (que designamos por (z_j) também) tendo uma medida de Young ν associada (como na definição 256). (Em particular, se $\psi \in$ Carathé e $\int_\Omega \psi(x, z_j(x))h(x)dx$ converge, quando $j \to \infty$, $\forall h \in L^\infty(\Omega)$, então o seu limite é igual a $\int_\Omega \overline{\psi}^\nu(x)h(x)dx$.)

DEMONSTRAÇÃO. A ideia da demonstração é bastante natural. A existência de ν é obtida pela propriedade de compacidade para topologias fraca* no espaço apropriado. A parte mais técnica da demonstração requer uma extensão da representação de limites fracos para funções de Carathéodory. A demonstração tem várias etapas. A primeira consiste em mostrar a existência de medidas de Young.

1^a **Etapa:** Existência de ν

O espaço vectorial

$$C_0(\mathbb{R}^m) = \{f \in C(\mathbb{R}^m) : \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\},$$

é um espaço de Banach com a norma do supremo. O seu dual é o espaço das medidas de Radon suportadas em $\mathbb{R}^m$ denotado por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ com a norma dual de variação limitada. Como $C_0(\mathbb{R}^m)$ é separável temos, de acordo com o teorema 221, que

$$(L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^m)))' = L^\infty_{w^*}(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$$

com a dualidade

$$\langle \varphi, \mu \rangle_{L^1, L^\infty_{w^*}} = \int_\Omega \overline{\varphi}^\mu(x) dx,$$

com

$$\overline{\varphi}^\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(\lambda) d\mu_x(\lambda),$$

para $\varphi \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^m))$ e $\mu \in L^\infty_{w^*}(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$. A norma em $L^\infty_{w^*}(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$ é

$$|\mu|_{L^\infty_{w^*}} = \underset{x\in\Omega}{supess}\ |\mu_x|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)}.$$

Para cada j, definimos $\nu_j \in L^\infty_{w^*}(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$ por $\nu_{jx} = \delta_{z_j(x)}$, onde δ_a é a usual massa de Dirac centrada em $a \in \mathbb{R}^m$. Para $\varphi \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^m))$,

$$\langle \varphi(x), \nu_{jx} \rangle_{C_0, \mathcal{M}} = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(\lambda) d\nu_{jx}(\lambda)$$

$$\langle \varphi, \nu_j \rangle_{L^1, L^\infty_{w^*}} = \int_\Omega \langle \varphi(x), \nu_{jx} \rangle dx = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(\lambda) d\delta_{z_j(x)}(\lambda) dx = \int_\Omega \varphi(x)(z_j(x)) dx.$$

Verifica-se que

$$|\nu_j|_{L^\infty_{w^*}} = \underset{x\in\Omega}{supess}\ |\delta_{z_j(x)}| = 1$$

para todo o j. Pelo teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki temos que existe uma subsucessão (que designamos ainda por (ν_j)) e $\nu \in L^\infty_{w^*}(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$ tal que $\nu_j \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$, ou seja, $\langle \varphi, \nu_j \rangle \to \langle \varphi, \nu \rangle$, para todo o $\varphi \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^m))$, isto é,

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \varphi(x)(z_j(x)) dx = \int_\Omega \overline{\varphi}^\nu(x) dx \ \forall \varphi \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^m)). \tag{13}$$

Em particular, para qualquer $\psi \in$ *Carathé* tal que a sucessão $(\psi(\cdot, z_j(\cdot)))$ converge fracamente em $L^1(\Omega)$ e tal que $\psi(x,\lambda) \to 0$ quando $|\lambda| \to \infty$ $\forall x \in \Omega$ e $\alpha(\cdot) \in L^1(\Omega)$, sendo

$$\alpha(x) = |\varphi(x,\cdot)|_{C_0(\mathbb{R}^m)} = \sup\{|\psi(\cdot,\lambda)| : \lambda \in \mathbb{R}^m\},$$

temos que a função $\varphi(\cdot)$, dada por $\varphi(x) = \psi(x,\cdot)$, aplica Ω em $C_0(\mathbb{R}^m)$, e pertence mesmo a $L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^m))$, pelo que vale (13), o qual se pode escrever, neste caso,

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \psi(x, z_j(x))dx = \int_\Omega \overline{\psi}^\nu(x)dx. \tag{14}$$

O resto da demonstração é a extensão de (13) para uma função de Carathéodory arbitrária ψ tal que $(\psi(\cdot, z_j(\cdot)))$ converge fracamente em $L^1(\Omega)$. É de natureza muito técnica.

2^a **Etapa:** Alguns preliminares técnicos

Seja ψ uma função de Carathéodory não negativa tal que $(\psi(\cdot, z_j(\cdot)))$ converge fracamente em $L^1(\Omega)$. Logo, pelo lema 215, temos, em particular, que é uniformemente limitada em $L^1(\Omega)$ e vale a propriedade da equi-integrabilidade; donde, pelo lema 216, e porque $\psi \geq 0$, a igualdade

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_j \int_{\{\psi(\cdot,z_j(\cdot))\geq k\}} \psi(x,z_j(x))\,dx\right) = 0.$$

Por outro lado, como g é crescente (por hipótese)

$$\int_\Omega g(|z_j(x)|)\,dx \geq \int_{\{|z_j|\geq k\}} g(|z_j(x)|)\,dx \geq \int_{\{|z_j|\geq k\}} g(k)\,dx = g(k)|\{|z_j| \geq k\}|$$

logo

$$g(k)\sup_j |\{|z_j| \geq k\}| \leq \sup_j \int_\Omega g(|z_j(x)|)\,dx < \infty\,(*)$$

e, por outro lado, como temos $\lim_{k\to\infty} g(k) = \infty$ (também por hipótese), vem

$$\lim_{k\to\infty} \sup_j |\{|z_j| \geq k\}| = 0,$$

senão contradizíamos $(*)$. Consequentemente, podemos escolher $m_k \geq k$ de tal modo que

$$\sup_j |\{|z_j| \geq m_k\}| \leq \frac{1}{k^2},$$

donde

$$k\sup_j |\{|z_j| \geq m_k\}| \leq \frac{1}{k}.$$

Seja θ^k uma sucessão de funções auxiliares definidas para $t \in \mathbb{R}$ por

$$\theta^k(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq k \\ 1 - |t| + k & k \leq |t| \leq k+1 \\ 0 & |t| \geq k+1, \end{cases}$$

e defina-se $\psi^k(x,\lambda) = \theta^k(|\lambda|)\theta^k(\psi(x,\lambda))\psi(x,\lambda)$. Podemos então deduzir as seguintes propriedades:

i: $\psi^k = \psi$ se $\psi \leq k$ e $|\lambda| \leq k$;

ii: $\psi^k \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^m))$ para qualquer k;

iii: $0 \leq \psi^k \leq \psi$ para qualquer k;

iv: (ψ^k) é uma sucessão crescente;

v: $\lim_{k\to\infty} \psi^k = \psi$ pontualmente.

DEMONSTRAÇÃO. (das propriedades)

i: Notemos que

$$\theta^k(|\lambda|) = \begin{cases} 1 & |\lambda| \leq k \\ 1 - |\lambda| + k & k \leq |\lambda| \leq k+1 \\ 0 & |\lambda| \geq k+1, \end{cases}$$

e

$$\theta^k(\psi(x,\lambda)) = \begin{cases} 1 & \psi \leq k \\ 1 - \psi + k & k \leq \psi \leq k+1 \\ 0 & \psi \geq k+1, \end{cases}$$

logo, para $\psi \leq k$ e $|\lambda| \leq k$ temos $\psi^k = \psi$;

ii: Por hipótese $\psi \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^m))$. Como $|\theta^k| \leq 1$, imediatamente obtemos $\psi^k \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^m))$;

iii: $0 \leq \theta^k \leq 1$ logo, como $\psi \geq 0$, vem que $0 \leq \psi^k \leq \psi$ para todo o k;

iv: como θ^k é uma sucessão crescente e como $\psi \geq 0$, concluímos que (ψ^k) é uma sucessão crescente;

v: Fixemos $(x,\lambda)=(x_0,\lambda_0)$ arbitrário. Como ψ é independente de k e θ^k converge pontualmente para 1 (bastando para tal tomar $k\geq|\lambda_0|+\psi(x_0,\lambda_0)$):

$$\lim_{k\to\infty}\psi^k(x_0,\lambda_0)=\lim_{k\to\infty}\Big(\theta^k(|\lambda_0|)\theta^k(\psi(x_0,\lambda_0))\psi(x_0,\lambda_0)\Big)=\psi(x_0,\lambda_0)$$

obtendo assim $\lim_{k\to\infty}\psi^k=\psi$ pontualmente. □

3^a **Etapa:** Extensão de (13)

Nesta etapa queremos concluir que (13) é válido sob as hipóteses da 2^a etapa. Para este fim, seja

$$\gamma_{j,k}=\int_\Omega(\psi^{m_k}(x,z_j(x))-\psi(x,z_j(x)))\,dx.$$

Temos então as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}|\gamma_{j,k}|&=\left|\int_\Omega\psi^{m_k}(x,z_j(x))-\psi(x,z_j(x))\,dx\right|\leq\int_\Omega|\psi^{m_k}(x,z_j(x))-\psi(x,z_j(x))|\,dx\leq\\&\leq\int_{\{|z_j|\leq m_k\,\wedge\,\psi(\cdot,z_j(\cdot))\leq m_k\}}|\psi^{m_k}(x,z_j(x))-\psi(x,z_j(x))|\,dx+\\&\qquad+\int_{\{|z_j|\geq m_k\,\vee\,\psi(\cdot,z_j(\cdot))\geq m_k\}}|\psi^{m_k}(x,z_j(x))-\psi(x,z_j(x))|\,dx\leq\end{aligned}$$

como $\psi\geq0$, $|\psi^{m_k}-\psi|\leq|\psi|$, e $m_k\geq k$, obtemos

$$\begin{aligned}&\leq\int_{\{|z_j|\geq m_k\}\cup\{\psi(\cdot,z_j(\cdot))\geq m_k\}}\psi(x,z_j(x))\,dx\leq\int_{\{|z_j|\geq m_k\}\cup\{\psi(\cdot,z_j(\cdot))\geq k\}}\psi(x,z_j(x))\,dx\leq\\&\leq\int_{\{\psi(\cdot,z_j(\cdot))\geq k\}}\psi(x,z_j(x))\,dx\;+\;\int_{\{|z_j|\geq m_k\}\cap\{\psi(\cdot,z_j(\cdot))\leq k\}}\psi(x,z_j(x))\,dx\leq\\&\leq\sup_j\int_{\{\psi(\cdot,z_j(\cdot))\geq k\}}\psi(x,z_j(x))\,dx\;+\;\sup_j\int_{\{|z_j|\geq m_k\}\cap\{\psi(\cdot,z_j(\cdot))\leq k\}}k\,dx=\\&=\sup_j\int_{\{\psi(\cdot,z_j(\cdot))\geq k\}}\psi(x,z_j(x))\,dx\;+\;\sup_j k\,|\{|z_j|\geq m_k\}\cap\{\psi(x,z_j(x))\leq k\}|\leq\\&\leq\sup_j\int_{\{\psi(\cdot,z_j(\cdot))\geq k\}}\psi(x,z_j(x))\,dx\;+\;k\sup_j|\{|z_j|\geq m_k\}|\to0\end{aligned}$$

quando $k\to\infty$, pela 2^a etapa. Concluímos então que

$$\lim_{k\to\infty}|\gamma_{j,k}|=0\Leftrightarrow\lim_{k\to\infty}\left|\int_\Omega\psi^{m_k}(x,z_j(x))-\psi(x,z_j(x))\,dx\right|=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{k\to\infty}\int_\Omega\psi^{m_k}(x,z_j(x))\,dx=\int_\Omega\psi(x,z_j(x))\,dx$$

uniformemente em j. Em particular, este facto implica

$$\lim_{j\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \psi^{m_k}(x,z_j(x))\,dx = \lim_{k\to\infty}\lim_{j\to\infty}\int_\Omega \psi^{m_k}(x,z_j(x))\,dx.$$

Como $\psi^{m_k} \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^m))$ para qualquer k (ii da 2^a*etapa*), por (14) (e pelo que já vimos anteriormente nesta etapa) temos

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega \psi(x,z_j(x))\,dx = \lim_{j\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \psi^{m_k}(x,z_j(x))\,dx\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\lim_{j\to\infty}\int_\Omega \psi^{m_k}(x,z_j(x))\,dx\right) = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega \overline{\psi^{m_k}}^\nu(x)dx$$

e, pelo teorema da convergência monótona (cujas hipóteses foram verificadas em ii, iii, iv e v da 2^a etapa), obtemos

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \overline{\psi^{m_k}}^\nu(x)dx = \int_\Omega \overline{\psi}^\nu(x)dx$$

logo

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega \psi(x,z_j(x))dx = \int_\Omega \overline{\psi}^\nu(x)dx$$

i.e., (13) é verificada para qualquer função de Carathéodory não negativa ψ, tal que $(\psi(\cdot,z_j(\cdot)))$ converge fracamente em $L^1(\Omega)$.

4^a **Etapa:** Conclusão

Se retirarmos a condição de não negatividade de ψ, podemos sempre separar ψ nas partes positiva e negativa, ψ^+ e ψ^- ($\psi^+ = \sup\{\psi, 0\}$, $\psi^- = \sup\{-\psi, 0\}$) e aplicar os passos 2 e 3 a estas duas funções, tendo em mente que a convergência fraca em $L^1(\Omega)$ conduz-nos à equi-integrabilidade da sucessão $(|\psi(x,z_j(x))|)$ e consequentemente à equi-integrabilidade de ψ^+ e ψ^-, pois notemos que $\psi = \psi^+ - \psi^-$ e que $|\psi| = \psi^+ + \psi^-$. Para $\xi \in L^\infty(\Omega)$ podemos tomar $\varphi(x,\lambda) = \xi(x)\psi(x,\lambda)$, de tal modo que φ é ela própria uma função de Carathéodory à qual podemos aplicar os argumentos precedentes. Observe-se que a convergência fraca em $L^1(\Omega)$ da sucessão $(\psi(\cdot,z_j(\cdot)))$ implica o mesmo para $(\xi(\cdot)\psi(\cdot,z_j(\cdot)))$. Assim, (13) também é válido para φ (pois na 3^a etapa verificámos que (13) é válido para qualquer função φ de Carathéodory fracamente convergente em $L^1(\Omega)$), i.e.

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega \xi(x)\psi(x,z_j(x))dx = \int_\Omega \xi(x)\overline{\psi}^\nu(x)dx \tag{15}$$

para qualquer $\xi \in L^\infty(\Omega)$ (pois ξ era arbitrário em $L^\infty(\Omega)$), ou seja

$$\psi(\cdot, z_j(\cdot)) \rightharpoonup \overline{\psi}^\nu$$

em $L^1(\Omega)$. Falta-nos então mostrar que quase todo o ν_x é uma medida de probabilidade. Pela sci fraca da norma, temos

$$|\nu_x| \leq \liminf_{j\to\infty} |\nu_{jx}| = \liminf_{j\to\infty} |\delta_{z_j(x)}| = 1,$$

logo $|\nu_x|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)} \leq 1$ pqt $x \in \Omega$. Se tomarmos em particular $\psi = \chi_{B_R}(x)$, $\xi = 1$ em (15), sendo B_R a bola de raio R centrada na origem, obtemos

$$\int_{B_R\cap\Omega} \overline{1}^\nu(x)dx = \int_\Omega \overline{\chi_{B_R}}^\nu(x)dx = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \chi_{B_R}(x)dx =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_{B_R\cap\Omega} 1dx = \lim_{j\to\infty} |B_R \cap \Omega| = |B_R \cap \Omega|.$$

Consequentemente (recorde-se que $|\nu_x| \leq 1$)

$$|B_R \cap \Omega| = \int_{B_R\cap\Omega} 1dx \geq \int_{B_R\cap\Omega} |\nu_x|dx = \int_{B_R\cap\Omega} \overline{1}^\nu(x)dx = |B_R \cap \Omega|$$

e concluímos assim o desejado, ou seja, $|\nu_x|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)} = 1$. □

EXEMPLO 260. Tomando $g(t) = t^p$ para $p \geq 1$ (podemos, no entanto, também tomar $0 < p < 1$) obtemos que qualquer sucessão limitada em $L^p(\Omega)$ contém uma subsucessão que gera uma medida parametrizada no sentido do teorema 259. Este é portanto um exemplo particularmente importante.

OBSERVAÇÃO 261. Quando trabalhamos com medidas de Young é importante termos em mente que para identificarmos a medida de Young ν associada a uma particular sucessão (z_j) de funções (obtida talvez de uma forma construtiva ou utilizando outra forma), é suficiente verificar se

$$\varphi(z_j) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\varphi}^\nu \ em\ L^\infty(\Omega),$$

para qualquer $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$. É ainda suficiente ter

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \xi(x)\varphi(z_j(x))dx = \int_\Omega \xi(x)\overline{\varphi}^\nu(x)dx, \tag{16}$$

para ξ e φ pertencendo a subconjuntos numeráveis densos de $L^1(\Omega)$ e $C_0(\mathbb{R}^m)$, respectivamente. Se assim é para uma família de medidas de probabilidade $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ dada e para uma sucessão de funções (z_j) satisfazendo (12), então ν é a medida de Young associada a (z_j) e consequentemente

$$\psi(\cdot, z_j(\cdot)) \rightharpoonup \overline{\psi}^{\nu}$$

para qualquer função de Carathéodory ψ tal que $(\psi(\cdot, z_j(\cdot)))$ é converge fracamente em $L^1(\Omega)$. A justificação deste facto é que as medidas de probabilidade ν são identificadas pela sua acção em $C_0(\mathbb{R}^m)$. A equação (16) identifica cada ν_x pqt $x \in \Omega$.

Existem duas situações especialmente interessantes para as quais esta observação tem alguma relevância. Iremos inclui-las no lema seguinte.

LEMA 262. *Consideremos duas sucessões, (z_j) e (w_j), ambas limitadas em $L^p(\Omega)$. Então a medida de Young para ambas as sucessões é a mesma se é verificada uma das seguintes condições:*

i: $|\{z_j \neq w_j\}| \to 0$;

ii: $|z_j - w_j|_{L^p(\Omega)} \to 0$.

DEMONSTRAÇÃO. **i:**Seja $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$ e $\xi \in L^1(\Omega)$. Então

$$\left|\int_\Omega \xi(x)\varphi(z_j(x))dx - \int_\Omega \xi(x)\varphi(w_j(x))dx\right| = \left|\int_{\{z_j\neq w_j\}} \xi(x)(\varphi(z_j(x)) - \varphi(w_j(x)))dx\right| \leq$$
$$\leq \int_{\{z_j\neq w_j\}} |\xi(x)|(|\varphi(z_j(x))| + |\varphi(w_j(x))|)dx \leq \int_{\{z_j\neq w_j\}} 2|\varphi|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)}|\xi(x)|dx$$

e este integrando é uma função de $L^1(\Omega)$ e é integrada sobre uma sucessão de conjuntos cuja medida tende para zero, logo o limite quando $j \to \infty$ é zero, o que por sua vez implica que os limites fracos de de $(\varphi(z_j))$ e $(\varphi(w_j))$ são os mesmos. Pela observação anterior, ambas as sucessões partilham a mesma medida de Young.

ii: Como já vimos acima

$$|\xi(x)(\varphi(z_j(x)) - \varphi(w_j(x)))| \leq 2|\varphi|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)}|\xi(x)| \; pqt \; x \in \Omega,$$

logo o lado esquerdo está em $L^1(\Omega)$. Por hipótese $(z_j - w_j) \to 0$ em $L^p(\Omega)$ logo (para uma subsucessão) $(z_j - w_j) \to 0$ qs em Ω e, como φ é contínua, obtemos

$$\lim_{j\to\infty} (\varphi(z_j(x)) - \varphi(w_j(x))) = 0 \; qs \; em \; \Omega.$$

Donde

$$\int_\Omega \xi(x)[\varphi(z_j(x)) - \varphi(w_j(x))]dx \to 0,$$

pelo teorema da convergência dominada (dada a majoração feita antes) quando $j \to \infty$, $\xi \in L^1(\Omega)$ e $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$. Como $\xi \in L^1(\Omega)$ é arbitrário, temos novamente que os limites fracos de $(\varphi(z_j))$ e $(\varphi(w_j))$ coincidem e, pela observação anterior, partilham a mesma medida de Young. □

Vejamos um exemplo de aplicação deste lema.

EXEMPLO 263. Suponhamos que (z_j) é uma sucessão limitada em $L^p(\Omega)$ e seja $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ a sua medida de Young associada. Consideremos os operadores de truncatura

$$T_k(\lambda) = \begin{cases} \lambda & |\lambda| \le k \\ k\frac{\lambda}{|\lambda|} & |\lambda| > k. \end{cases}$$

Queremos mostrar que (z_j) e $(T_{k(j)}(z_j))$ partilham a mesma medida de Young, para qualquer sucessão $k(j) \to \infty$ quando $j \to \infty$. Para isso notemos que $z_j \neq T_{k(j)}(z_j)$ quando $|z_j| > k(j)$ logo, para aplicarmos (i) do lema anterior, temos de mostrar que $|\{|z_j| > k(j)\}| \to 0$ quando $j \to \infty$. Como

$$\int_\Omega |z_j(x)|^p dx \ge \int_{\{|z_j|>k(j)\}} |z_j(x)|^p dx \ge k(j)^p |\{|z_j| > k(j)\}|$$

e como (z_j) é limitada (suponhamos que por c), obtemos finalmente o que queremos, pois

$$|\{|z_j| > k(j)\}| \le \frac{c}{k(j)^p} \to 0 \; qd \; j \to \infty.$$

Consideremos agora uma sucessão $(W(\nabla u_j))$ fracamente convergente em $L^1(\Omega)$, onde (u_j) é uma sucessão minimizante para o funcional I, tal que

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega W(\nabla u_j(x))dx = \int_\Omega \overline{W}^\nu(x)dx. \tag{17}$$

Aqui $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ é a medida de Young associada à sucessão $(z_j = \nabla u_j)$, que é limitada em $L^p(\Omega)$ pois $(W(\nabla u_j))$ é limitada em $L^1(\Omega)$ (por (u_j) ser uma sucessão minimizante e W ser coerciva). Dado que

$$\nabla u(x) = \int_{\mathbb{M}^{m\times n}} A \, d\nu_x(A)$$

é o limite fraco em $L^1(\Omega)$ de (∇u_j) (por tomarmos $\psi(x,\lambda) = \lambda$ no teorema 259) a propriedade de sci fraca permanecerá verdadeira se

$$\int_\Omega W(\nabla u(x))\, dx \leq \int_\Omega \overline{W}^\nu(x)\, dx. \tag{18}$$

A suposição que fizemos de $(W(\nabla u_j))$ ser fracamente convergente em $L^1(\Omega)$ nem sempre é verdadeira. Podemos encarar o próximo teorema como uma espécie de lema de Fatou. Ele diz-nos que mesmo nos casos em que a sucessão $(\psi(\cdot, z_j(\cdot)))$ não tem nenhuma subsucessão fracamente convergente, ainda podemos considerar a média $\overline{\psi}^\nu$, obtida através da medida de Young ν associada a esta sucessão, e obter no limite (não uma igualdade mas sim) uma desigualdade, a qual tem precisamente o sentido que nos interessa para obter a sci.

TEOREMA 264. *Se (z_j) é uma sucessão de funções mensuráveis com medida de Young associada $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$, então temos*

$$\liminf_{j\to\infty} \int_E \psi(x, z_j(x))dx \geq \int_E \overline{\psi}^\nu(x)dx \tag{19}$$

para qualquer $\psi \in$ Carathé com crescimento linear (i.e. $\psi(x,\xi) \geq c(|\xi|-1)$ $\forall x,\xi,\ c>0$) e para qualquer E mensurável $\subset \Omega$.

Para demonstrar este teorema necessitamos de introduzir um teorema auxiliar, que relaciona a b-convergência com as medidas de Young.

TEOREMA 265. *Seja (z_j) uma sucessão de funções com medida de Young associada ν. Se para algum $\varphi \in$ Carathé a sucessão $(\varphi(\cdot, z_j(\cdot)))$ é limitada em $L^1(\Omega)$ então, possivelmente para uma subsucessão,*

$$\varphi(\cdot, z_j(\cdot)) \xrightarrow{b} \overline{\varphi}^\nu. \tag{20}$$

DEMONSTRAÇÃO. Pelo lema das mordidelas (teorema 218), existem uma colecção de subconjuntos Ω_n e $\widetilde{\varphi} \in L^1(\Omega)$ tais que $|\Omega_n| \searrow 0$ e

$$\varphi(\cdot, z_j(\cdot)) \rightharpoonup \widetilde{\varphi} \text{ em } L^1(\Omega \backslash \Omega_n)$$

qualquer que seja n. Pelo teorema 259, sempre que a convergência fraca em $L^1(\Omega)$ se verifica para qualquer subconjunto $E \subset \Omega$, o limite fraco em (20) é $\overline{\varphi}^\nu$. Como $|\Omega_n| \searrow 0$ concluímos que $\widetilde{\varphi} = \overline{\varphi}^\nu$ pqt $x \in \Omega$. □

DEMONSTRAÇÃO. (do teorema 264)

Se o lado esquerdo da desigualdade (19) é infinito, nada há a provar. Se $\liminf_{j\to\infty} \int_E \psi(x, z_j(x))dx$ é finito, a sucessão $(\psi(\cdot, z_j(\cdot)))$ é limitada em $L^1(E)$ logo, pelo teorema anterior,

$$\psi(\cdot, z_j(\cdot)) \xrightharpoonup{b} \overline{\psi}^\nu$$

em $L^1(E)$. Pelo lema 220, temos a desigualdade

$$\int_E \overline{\psi}^\nu(x)dx \leq \liminf_{j\to\infty} \int_E \psi(x, z_j(x))dx,$$

o que conclui a demonstração. □

Em conclusão, se W verifica a desigualdade da coercividade

$$W(F) \geq c(|F|^p - 1), p > 1$$

e (18) é verificada para qualquer ν obtido dos gradientes de uma sucessão limitada em $W^{1,p}$, então

$$\liminf_{j\to\infty} \int_\Omega W(\nabla u_j(x))dx \geq \int_\Omega W(\nabla u(x))dx$$

quando $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$.

Reduzimos a propriedade da sci fraca a uma certa desigualdade que envolve medidas de Young, desigualdade essa que nos lembra a desigualdade de Jensen. Iremos explicar intuitivamente o porquê de a desigualdade de Jensen parecer estar relacionada com a sci fraca. Grosso modo, a convergência fraca de funções significa convergência em média e portanto tomarmos integrais joga um papel principal em determinarmos a função limite dos elementos da sucessão. Os únicos funcionais que comutam com a operação de integração são os afins. No entanto, se entendermos a convergência fraca em termos de medidas de Young, a desigualdade de Jensen afirma que funcionais associados a funções convexas podem não comutar com a integração, mas respeitam sempre uma desigualdade, cuja direcção é a apropriada para termos a sci fraca.

2. Q-convexidade e medidas de Young gradiente homogéneas

A restrição no lagrangiano W que nos garante a propriedade da sci fraca é (18). Esta desigualdade deve ser válida para todas as possíveis medidas de Young geradas por gradientes de sucessões limitadas em $W^{1,p}$. Como cada ν_x em particular é uma medida de probabilidade, se W é convexa então (18) é verdadeira. Esta é a clássica desigualdade de Jensen. Em particular, a sci fraca será válida para qualquer lagrangiano convexo. A convexidade de W não é, no entanto, uma condição necessária no caso vectorial $(m, n > 1)$.

DEFINIÇÃO 266. *Uma família de medidas de probabilidade $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ diz-se uma $W^{1,p}(\Omega)$-medida de Young (repare-se na referência explícita ao domínio Ω) se ela é a medida de Young (de acordo com o teorema 259) gerada por uma sucessão (∇u_j) de gradientes de uma sucessão (u_j) limitada em $W^{1,p}(\Omega)$.*

DEFINIÇÃO 267. *Se a medida de Young $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ é tal que $\nu_x = \nu_0$ pqt $x \in \Omega$, onde ν_0 é uma medida de probabilidade fixada, dizemos que ν é homogénea.*

DEFINIÇÃO 268. *Chamaremos domínio a qualquer aberto limitado regular Q (em particular com $|\partial Q| = 0$).*

O seguinte resultado afirma que os membros individuais de uma família de medidas de probabilidade $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$, que seja uma $W^{1,p}(\Omega)$-medida de Young, são eles próprios $W^{1,p}(Q)$-medidas de Young homogéneas para qualquer domínio Q.

PROPOSIÇÃO 269. *Seja $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ uma $W^{1,p}(\Omega)$-medida de Young. Para quase todo $a \in \Omega$ e para qualquer domínio Q, existe uma sucessão limitada $\{v_{a,j}\}$ em $W^{1,p}(Q)$ tal que a medida de Young homogénea associada a $\{\nabla v_{a,j}\}$ é ν_a. Mais geralmente, cada função $v_{a,j}$ pode ser escolhida de tal modo que $v_{a,j} - u_{F(a)} \in W_0^{1,p}(Q)$, onde $u_F(x)$ é a função linear Fx e*

$$F(a) = \int_{\mathbb{M}^{m\times n}} A \, d\nu_a(A).$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[24]**, pág.73. □

Devido a este resultado, podemos definir uma $W^{1,p}$-medida de Young homogénea (sem referência a nenhum domínio em particular) como uma medida de probabilidade ν suportada no conjunto $\mathbb{M}^{m\times n}$ das matrizes $m \times n$ tal que para todo o domínio $Q \subset \mathbb{R}^n$ existe uma sucessão de gradientes (∇u_j), onde (u_j) é uma sucessão limitada em $W^{1,p}(Q)$ que gera ν, de acordo com o teorema 259 e tal que $u_j - u_F \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde F é o primeiro momento de ν. Temos imediatamente que se $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ é uma $W^{1,p}(\Omega)$-medida de Young, então quase sempre ν_x é ela própria uma $W^{1,p}$-medida de Young homogénea.

DEFINIÇÃO 270. *Uma função $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to (-\infty, +\infty]$ diz-se $W^{1,p}$-Q-convexa fechada se*

$$\int_{\mathbb{M}^{m\times n}} W(A)d\nu(A) \geq W\left(\int_{\mathbb{M}^{m\times n}} A\ d\nu(A)\right)$$

para todas as $W^{1,p}$-medidas de Young homogéneas.

Note-se que esta definição requer a desigualdade de Jensen para um subconjunto (próprio) de medidas de probabilidade suportadas no conjunto $\mathbb{M}^{m\times n}$. A conclusão das observações e definições anteriores é que a condição de $W^{1,p}$-Q-convexidade fechada é uma condição suficiente (e necessária) de modo a termos (18). Para uma função geral de Carathéodory $W : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{M}^{m\times n} \to (-\infty, +\infty]$ a condição de $W^{1,p}$-Q-convexidade fechada pode ser reformulada nos seguintes termos:

$$\int_{\mathbb{M}^{m\times n}} W(x,u,A)\ d\nu(A) \geq W\left(x, u, \int_{\mathbb{M}^{m\times n}} A\ d\nu(A)\right)$$

para qualquer par $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$ e para qualquer $W^{1,p}$-medida de Young homogénea ν.

Estamos agora em condições de formular um teorema geral de existência de minimizante (sob a condição da $W^{1,p}$-Q-convexidade fechada agora reformulada) utilizando o método directo do cálculo das variações. Suponhamos que

$$W : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{M}^{m\times n} \to (-\infty, +\infty]$$

é uma função de Carathéodory que satisfaz a condição de coercividade

$$W(x,u,A) \geq c(|A|^p - 1),\ \ c > 0,\ \ p > 1$$

para todos os pares (x, u). Consideremos o problema de minimização do integral

$$I(u) = \int_\Omega W(x, u(x), \nabla u(x))dx, \;\; u \in W^{1,p}(\Omega), \;\; u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

onde $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ é dado tal que $I(u_0) < \infty$. Procuramos minimizantes U do integral $I(\cdot)$, ou seja

$$I(U) = m = \inf_u I(u).$$

TEOREMA 271. *Se W é $W^{1,p}$-Q-convexa fechada, então existe pelo menos um minimizante U.*

Para tratar o caso em que o lagrangiano W não depende apenas do gradiente ∇u, mas também da posição u convém ter em mente o seguinte facto sobre como a convergência forte numa das componentes da sucessão é reflectida na medida de Young. Neste caso a convergência forte reflecte a trivialidade da medida parametrizada para a respectiva componente.

LEMA 272. *Seja $z_j = (u_j, v_j) : \Omega \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ uma sucessão limitada em $(L^p(\Omega))^{d\times m}$ tal que (u_j) converge fortemente para u em $(L^p(\Omega))^d$. Se $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ é a medida de Young associada a (z_j), então $\nu_x = \delta_{u(x)} \otimes \mu_x$ pqt $x \in \Omega$, onde $\{\mu_x\}_{x\in\Omega}$ é a medida de Young correspondente a (v_j).*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\psi_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e $\psi_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções contínuas e limitadas, tais que

$$\psi_1(u_j) \to \psi_1(u) \text{ em } L^p(\Omega),$$

$$\psi_2(v_j) \rightharpoonup \overline{\psi}_2^\mu \text{ em } L^{p'}, \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Então $\psi_1(u_j)\psi_2(v_j) \rightharpoonup \psi_1(u)\overline{\psi}_2^\mu$ em $L^1(\Omega)$, para qualquer E mensurável $\subset \Omega$, pois para cada $h \in L^\infty(E)$ temos

$$\left|\int_E \left[\psi_1(u_j)\psi_2(v_j) - \psi_1(u)\overline{\psi}_2^\mu\right] h\,dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_E [\psi_1(u_j)\psi_2(v_j) - \psi_1(u)\psi_2(v_j)]\, h\,dx\right| + \left|\int_E \left[\psi_1(u)\psi_2(v_j) - \psi_1(u)\overline{\psi}_2^\mu\right] h\,dx\right| \leq$$

$$\leq |\psi_1(u_j) - \psi_1(u)|_{L^p} |\psi_2(v_j)|_{L^{p'}} |h|_{L^\infty} + \left|\int_E \left[\psi_2(v_j) - \overline{\psi}_2^\mu\right] [\psi_1(u)h]\, dx\right| \to 0$$

quando $j \to \infty$, pois $h \in L^\infty \Rightarrow h \in L^p$ e $h \in L^{p'}$. Consequentemente

$$\int_E \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m} \psi_1(\lambda_1)\psi_2(\lambda_2) d\nu_x(\lambda_1, \lambda_2) dx =$$
$$= \int_E \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m} \psi_1(\lambda_1)\psi_2(\lambda_2) d(\delta_{u(x)}(\lambda_1) \otimes \mu_x(\lambda_2)) dx.$$

Como ψ_1, ψ_2 e E são arbitrários, concluímos então que $\nu_x = \delta_{u(x)} \otimes \mu_x$ que é o resultado. □

Este lema é aplicado a sucessões $(u_j, \nabla u_j)$ nas quais (u_j) converge fracamente em $W^{1,p}(\Omega)$. Nesta situação as funções u_j convergem fortemente para o limite fraco, pelo teorema de compacidade dos espaços de Sobolev. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é o limite fraco e $\{\mu_x\}_{x\in\Omega}$ é a medida de Young associada aos gradientes (∇u_j), então $\nu_x = \delta_{u(x)} \otimes \mu_x$ pqt $x \in \Omega$.

DEMONSTRAÇÃO. (do teorema 271)

Defina-se o número real

$$m = \inf\{I(u) : u \in W^{1,p}(\Omega),\ u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\}.$$

Se $\{u_j\}$ é uma sucessão minimizante, então pela coercividade, a sucessão dos gradientes é limitada, e consequentemente vale a desigualdade de Poincaré na sucessão das próprias funções. Temos então que (u_j) é uma sucessão limitada em $W^{1,p}$ cujo gradiente irá gerar uma $W^{1,p}(\Omega)$-medida de Young $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$. Para uma subsucessão apropriada, $u_j \rightharpoonup u$ e

$$\nabla u(x) = \int_{\mathbb{M}} A \, d\nu_x(A). \tag{21}$$

Como (u_j) é uma sucessão minimizante, pelo lema anterior, pelo teorema 264, pela $W^{1,p}$-Q-convexidade fechada, por (21) e por m ser o ínfimo, obtemos

$$m = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega W(x, u_j(x), \nabla u_j(x)) dx \geq \int_\Omega \int_{\mathbb{M}} W(x, u(x), A) d\nu_x(A) dx \geq$$
$$\geq \int_\Omega W\left(x, u(x), \int_{\mathbb{M}} A d\nu_x(A)\right) dx = \int_\Omega W(x, u(x), \nabla u(x)) dx \geq m$$

donde u é um minimizante em $W^{1,p}(\Omega)$. □

2.1. O caso p= $+\infty$.

Dado que já vimos a relação entre a $W^{1,p}$-Q-convexidade fechada do integrando e a sci fraca do respectivo funcional, temos então uma boa motivação para melhor tentarmos compreender esta condição necessária (e suficiente). Abordamos nesta secção o caso em que $p = +\infty$ (o chamado caso lipschitziano (repare-se nas condições impostas sobre Ω)), dado que o caso $p < +\infty$ envolve muitas questões técnicas.

Seja u_F a função lipschitziana afim $u_F(x) = Fx$ para $x \in \Omega$. Para $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que $u - u_F \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ podemos gerar uma família admissível de medidas de probabilidade em (18). Podemos fazê-lo pelo lema de Riemann-Lebesgue, que é um caso particular de um resultado mais geral de homogeneização.

LEMA 273. *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ e $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $u - u_F \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$. Então existe uma sucessão $\{u_j\}$ limitada em $W^{1,\infty}(\Omega)$, $u_j - u_F \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$, tal que a medida de Young associada a $\{\nabla u_j\}$ é homogénea e definida por*

$$\langle \overline{\nu}, \varphi \rangle_{\mathcal{M},C_0} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \varphi(\nabla u(x))dx,$$

para qualquer $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$.

Precisamos de alguns resultados que enunciaremos em seguida.

DEFINIÇÃO 274. *Para um dado ponto $x \in \mathbb{R}^n$, dizemos que uma sucessão (E_i) de conjuntos encolhe regularmente para x se existe $\alpha > 0$ e uma sucessão (r_i) de números positivos, convergente para zero, tais que cada $E_i \subset B(x, r_i)$, onde $B(x, r_i)$ é a bola centrada em x de raio r_i, e*

$$|E_i| \geq \alpha |B(x, r_i)|.$$

DEFINIÇÃO 275. *Uma família de subconjuntos abertos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ diz-se uma cobertura de Vitali de $\Omega \in \mathbb{R}^n$ se para todo o $x \in \Omega$ existe uma sucessão $\{A_i\}$ de subconjuntos da família dada que encolhe regularmente para x.*

TEOREMA 276. *(da cobertura de Vitali) Seja $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma cobertura de Vitali de Ω. Então existe uma sucessão $(\lambda_i) \subset \Lambda$ tal que*

$$\left| \Omega \backslash \bigcup_i A_{\lambda_i} \right| = 0$$

e os subconjuntos A_{λ_i} são disjuntos 2 a 2.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**13**], pág.31. ∎

LEMA 277. *Sejam* Ω *e* D *dois subconjuntos limitados e regulares de* $\mathbb{R}^n$ *com* $|\partial\Omega| = |\partial D| = 0$. *Seja* (z_j) *uma sucessão de funções mensuráveis em* Ω *tal que*

$$C = \sup_j \int_\Omega g(|z_j(x)|)dx < \infty$$

para uma função contínua, crescente $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *com* $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$. *Seja* $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ *a medida de Young associada a alguma subsucessão, igualmente denotada por* (z_j). *Então existe uma subsucessão* (w_j) *de funções mensuráveis definidas em* D *tal que*

$$\sup_j \int_D g(|w_j(x)|)dx < \infty$$

e a sua medida de Young homogénea $\overline{\nu}$ *é dada por*

$$\langle \overline{\nu}, \varphi \rangle_{\mathcal{M}, C_0} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \overline{\varphi}^\nu(x)dx$$

para qualquer $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $a \in D$ qualquer. Como Ω é limitado, tomando $\varepsilon \leq \frac{1}{j}$ temos que $a + \varepsilon\overline{\Omega}$ é limitado e consequentemente existe $r_\varepsilon > 0$ tal que $a + \varepsilon\overline{\Omega} \subset B(a, r_\varepsilon)$. Tomando $\alpha = \frac{|a+\varepsilon\overline{\Omega}|}{|a+\varepsilon B|} = \frac{|\overline{\Omega}|}{|B|}$, independente de ε, temos que

$$|a + \varepsilon\overline{\Omega}| \geq |B(x, r_\varepsilon)|,$$

$r_\varepsilon \to 0$ quando $j \to \infty$. Concluímos então que a família de subconjuntos de D dada por

$$\mathcal{A}_j = \{a + \varepsilon\overline{\Omega} \subset D : a \in D, \varepsilon \leq \frac{1}{j}\}$$

é uma cobertura de Vitali de D. Então, pelo lema da cobertura de Vitali, temos que existe uma sucessão numerável de conjuntos $\{a_{ij} + \varepsilon_{ij}\overline{\Omega}\}$, $\varepsilon_{ij} \leq \frac{1}{j}$, disjuntos 2 a 2 e

$$D = \bigcup_i (a_{ij} + \varepsilon_{ij}\overline{\Omega}) \cup N_j, \ |N_j| = 0. \tag{22}$$

Note-se que, como

$$|D| = \left|\bigcup_i (a_{ij} + \varepsilon_{ij}\overline{\Omega}) \cup N_j\right| = \left|\bigcup_i (a_{ij} + \varepsilon_{ij}\overline{\Omega})\right| + |N_j| = \sum_i |a_{ij} + \varepsilon_{ij}\overline{\Omega}| =$$
$$= \sum_i |\varepsilon_{ij}\overline{\Omega}| = |\overline{\Omega}| \sum_i (\varepsilon_{ij})^n = |\Omega| \sum_i (\varepsilon_{ij})^n,$$

temos

$$\sum_i (\varepsilon_{ij})^n = \frac{|D|}{|\Omega|}. \tag{23}$$

Definamos agora

$$w_j(x) = z_j\left(\frac{x-a_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\right)$$

para $x \in a_{ij} + \varepsilon_{ij}\overline{\Omega}$. Pela mudança de variável $y = \frac{x-a_{ij}}{\varepsilon_{ij}}$ (e utilizando (22) e (23)) , obtemos

$$\int_D g(|w_j(x)|)dx = \sum_i \int_{a_{ij}+\varepsilon_{ij}\Omega} g\left(\left|\left(\frac{x-a_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\right)\right|\right)dx =$$

$$= \sum_i (\varepsilon_{ij}^n \int_\Omega g(|z_j(y)|)dy \leq C\frac{|D|}{|\Omega|} < \infty,$$

pois por hipótese

$$C = \sup_j \int_\Omega g(|z_j(x)|)dx < \infty.$$

Por outro lado, utilizando a mesma mudança de variável, se $\xi \in C(\overline{D})$ e $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$, temos

$$\int_D \varphi(w_j(x))\xi(x)dx = \sum_i \int_{a_{ij}+\varepsilon_{ij}\Omega} \varphi\left(z_j\left(\frac{x-a_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\right)\right)\xi(x)dx =$$

$$= \sum_i (\varepsilon_{ij})^n \int_\Omega \varphi(z_j(y))\xi(y\varepsilon_{ij}+a_{ij})dy = \sum_i (\varepsilon_{ij})^n \xi(\overline{y}\varepsilon_{ij}+a_{ij}) \int_\Omega \varphi(z_j(y))dy,$$

pelo teorema do valor médio para integrais (note-se que ξ é contínua). Na última igualdade temos uma soma de Riemann para o integral de ξ em D e

$$\lim_{j\to\infty} \int_D \varphi(w_j(x))\xi(x)dx = \lim_{j\to\infty}\left(\sum_i (\varepsilon_{ij})^n \xi(\overline{y}\varepsilon_{ij}+a_{ij})\right) \lim_{j\to\infty}\int_\Omega \varphi(z_j(y))dy =$$

$$= \int_D \xi(x)dx \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \overline{\varphi}^\nu(x)dx = \int_D \xi(x)dx\langle\overline{\nu},\varphi\rangle.$$

Por (16) concluímos finalmente que a medida homogénea $\overline{\nu}$ é a medida parametrizada associada a $\{w_j\}$. □

OBSERVAÇÃO 278. No lema anterior podemos tomar $D = \Omega$.

Queremos aplicar o lema anterior ao caso em que $z_j = \nabla u_j$, onde u_j é uma sucessão limitada em $W^{1,p}(\Omega)$. Precisamos de uma sucessão de funções $w_j \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\nabla w_j(x) = \nabla u_j\left(\frac{x-a_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\right) \tag{24}$$

para $x \in a_{ij} + \varepsilon_{ij}\Omega$ onde, pelo lema da cobertura de Vitali,

$$\Omega = \bigcup_i (a_{ij} + \varepsilon_{ij}\overline{\Omega}) \cup N_j, \ |N_j| = 0.$$

A condição (24) poderá ser satisfeita pondo

$$w_j(x) = \varepsilon_{ij} u_j \left(\frac{x - a_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \right)$$

para $x \in a_{ij} + \varepsilon_{ij}\Omega$. Poderá no entanto acontecer que tal w_j não pertença a $W^{1,p}(\Omega)$. A única forma (conhecida) de obtermos o desejado será impor a u_j valores afins na fronteira.

Seja $F \in \mathbb{M}^{m\times n}$ e u_F a função afim $u_F(x) = Fx$. Se $u_j \in W^{1,p}(\Omega)$ e $u_j - u_F \in W_0^{1,p}(\Omega)$, a função

$$w_j(x) = \begin{cases} \varepsilon_{ij} u_j \left(\frac{x-a_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \right) + u_F(a_{ij}) & x \in a_{ij} + \varepsilon_{ij}\Omega \\ u_F(x) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

está bem definida como função de $W^{1,p}(\Omega)$ (cada um dos ramos é uma função de $W^{1,p}(\Omega)$ e coincidem na fronteira), $w_j - u_F \in W_0^{1,p}(\Omega)$ (pois quando $x \in a_{ij} + \varepsilon_{ij}\partial\Omega$ vem $y = \frac{x-a_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \in \partial\Omega$ onde $u_{ij}(y)$ tem o valor F_y, donde $w_j(x) = Fa_{ij} + \varepsilon_{ij} F \frac{x-a_{ij}}{\varepsilon_{ij}} = Fx$) e o seu gradiente satisfaz (24). Após esta conversa informal, notamos que, pelo lema anterior, obtemos em particular o lema 273.

No seguimento do lema 273, se utilizarmos $\overline{\nu}$ em (18), obtemos a desigualdade

$$W(F) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega W(F + \nabla u(x))dx \tag{25}$$

para quaisquer $F \in \mathbb{M}^{m\times n}$ e $u - u_F \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ Uma função que satisfaz a desigualdade diz-se Q-convexa. A Q-convexidade é equivalente à $W^{1,\infty}$-Q-convexidade fechada se W toma apenas valores finitos (ver [**24**], pág.21). É menos restritiva do que (18) sob convergência fraca em $W^{1,p}(\Omega)$, p finito (ver [**24**], pág.21). Note-se que a escolha do domínio Ω em (25) é irrelevante. Do ponto de vista geométrico, (25) diz-nos que de todas as deformações com valores afins na fronteira determinados pela matriz F, a energia mínima é atingida pela própria deformação afim.

3. Propriedades das funções Q-convexas

PROPOSIÇÃO 279. *Se a desigualdade da Q-convexidade (25) se verifica para algum aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então verifica-se para qualquer aberto limitado $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que a desigualdade da Q-convexidade se verifica para um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Queremos mostrar que para qualquer domínio limitado $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$, temos

$$\int_{\Omega'} W(A + \nabla\varphi(x))dx \geq W(A)|\Omega'|$$

para quaisquer $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$,$\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega', \mathbb{R}^n)$. Como Ω é aberto e Ω' é limitado, existe $x_0 \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ tal que $x_0 + \varepsilon\Omega' \subset \Omega$ (ε "encolhe" Ω' para que caiba em Ω, e x_0 centra-o). Definimos $\psi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ por

$$\psi(x) = \begin{cases} \varepsilon\varphi(\frac{x-x_0}{\varepsilon}) & \text{se } x \in x_0 + \varepsilon\Omega', \\ 0 \quad , & \text{se } x \in \Omega\backslash(x_0 + \varepsilon\Omega'). \end{cases}$$

Então,fazendo a mudança de variável $y = \frac{x-x_0}{\varepsilon}$, obtemos

$$\int_{\Omega'} W(A + \nabla\varphi(y))dy = \int_{x_0+\varepsilon\Omega'} W\left(A + \nabla\varphi\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)\right)\left|\det\nabla\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)\right| dx =$$
$$= \varepsilon^{-n}\int_{x_0+\varepsilon\Omega'} W\left(A + \nabla\varphi\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)\right)dx = \varepsilon^{-n}\int_{x_0+\varepsilon\Omega'} W(A + \nabla\psi(x))dx =$$
$$= \varepsilon^{-n}\left\{\int_{\Omega} W(A + \nabla\psi(x))dx - f(A)|\Omega - (x_0 + \varepsilon\Omega')|\right\}$$

Por hipótese temos

$$\int_{\Omega} W(A + \nabla\varphi(x))dx \geq W(A)|\Omega|,$$

de onde sai que

$$\varepsilon^{-n}\left\{\int_{\Omega} W(A + \nabla\psi(x))dx - W(A)|\Omega - (x_0 + \varepsilon\Omega)|\right\} \geq$$
$$\geq \varepsilon^{-n}\left\{W(A)|\Omega| - W(A)|\Omega - (x_0 + \varepsilon\Omega')|\right\} = \varepsilon^{-n}W(A)|x_0 + \varepsilon\Omega'|$$

que, por sua vez, nos dá

$$\int_{\Omega'} W(A + \nabla\varphi(y))dy \geq \varepsilon^{-n}W(A)|x_0 + \varepsilon\Omega'| = \varepsilon^{-n}W(A)|\varepsilon\Omega'| = W(A)|\Omega'|,$$

o resultado desejado. □

Em conclusão, basta verificar a desigualdade da Q-convexidade no cubo unitário $[0,1]^n$ ou $[-1,1]^n$.

PROPOSIÇÃO 280. *Uma função contínua* $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ *é Q-convexa sse*

$$\int_{(0,1)^n} W(F+\nabla u(x))dx \geq W(F), \tag{26}$$

$\forall F \in \mathbb{M}^{m\times n}$ *e* $\forall u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *periódica no cubo unitário.*

DEMONSTRAÇÃO. A suficiência da condição é clara, dado que, pela proposição anterior, basta verificarmos a condição de Q-convexidade no cubo unitário. Para estabelecer a necessidade, suponhamos agora que W é Q-convexa e seja u uma deformação periódica qualquer. Consideremos a sucessão (u_j), dada por $u_j(x) = Fx + (1/j)u(jx)$, $x \in (0,1)^n$. Calculando o gradiente, obtemos $\nabla u_j = F + \nabla u(jx)$ e, pelo lema 273 (como W é contínua), a medida parametrizada gradiente associada a ∇u_j é homogénea e dada por

$$\langle W, \nu \rangle = \int_{(0,1)^n} W(F+\nabla u(x))\, dx.$$

Como W é Q-convexa temos, pela desigualdade de Jensen

$$\int_{(0,1)^n} W(F+\nabla u(x))\, dx \geq W\left(\int_{(0,1)^n} F+\nabla u(x)\, dx\right) = W\left(F + \int_{(0,1)^n} \nabla u(x)\, dx\right) = W(F),$$

pois u é periódica em $(0,1)^n$. □

CAPÍTULO 4

A P-convexidade

1. Uma condição suficiente para a Q-convexidade

A contribuição principal deste capítulo é expor a fonte principal de exemplos não-triviais (leia-se, não-convexos) de funções que satisfazem a condição de Q-convexidade. Por outro lado, veremos que a condição de convexidade não é razoável sob o ponto de vista das aplicações.

Se não podemos, razoavelmente, supor a condição de convexidade no lagrangiano W, como poderemos então encontrar outra condição em W de modo a garantir (18)?

Uma ideia fundamental é a seguinte: suponhamos que encontrámos uma função $M : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ que satisfaz a propriedade

$$M\left(\int_{\mathbb{M}^{m\times n}} A \, d\nu(A)\right) = \int_{\mathbb{M}^{m\times n}} M(A) \, d\nu(A) \tag{27}$$

para qualquer $W^{1,p}$-medida de Young homogénea ν ou para alguma sua subclasse. Se $g : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ é convexa, a composição $W(A) = g(M(A))$ irá verificar (18), pela usual desigualdade de Jensen

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{M}^{m\times n}} W(A) d\nu_x(A) dx = \int_\Omega \int_{\mathbb{M}^{m\times n}} g(M(A)) d\nu_x(A) dx \geq \int_\Omega g\left(\int_{\mathbb{M}^{m\times n}} M(A) d\nu_x(A)\right) dx =$$
$$= \int_\Omega g\left(M\left(\int_{\mathbb{M}^{m\times n}} A d\nu_x(A)\right)\right) dx = \int_\Omega W\left(\int_{\mathbb{M}^{m\times n}} A d\nu_x(A)\right) dx.$$

Semelhantemente, se $M(A)$ representa agora o vector de todas as funções (linearmente independentes) que verificam (27) e g é uma função convexa de todos os seus argumentos, a composição $W(A) = g(M(A))$ também irá verificar (18).

O que significa (27) em termos da sucessão $\{\nabla u_j\}$ que gera ν? Se as duas sucessões $\{\nabla u_j\}$ e $\{M(\nabla u_j)\}$ convergem fracamente em $L^1(\Omega)$ para ∇u e $\overline{M}$, respectivamente, então (27) significa precisamente que $\overline{M} = M(\nabla u)$, o que se pode verificar utilizando a propriedade fundamental das medidas de Young e (27):

$$\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u = \int_{\mathbb{M}^{m\times n}} A d\nu(A)$$

$$M(\nabla u_j) \rightharpoonup \overline{M} \text{ em } L^1(\Omega) \Rightarrow \overline{M} = \int_{\mathbb{M}^{m\times n}} M(A) d\nu(A) = M\left(\int_{\mathbb{M}^{m\times n}} A d\nu(A)\right),$$

ou seja, concluímos assim o que afirmámos.

Reciprocamente, se quisermos que (27) se verifique, teremos de mostrar que ν pode ser gerada por uma sucessão $\{\nabla u_j\}$ tal que $\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u$ e $M(\nabla u_j) \rightharpoonup M(\nabla u)$ em $L^1(\Omega)$, onde $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Na prática, dado que se $p > 1$ temos garantida a convergência $\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u$, o facto de $M(\nabla u_j) \rightharpoonup M(\nabla u)$ em $L^1(\Omega)$ é obtido como resultado dos dois seguintes ingredientes principais:

1: $\{M(\nabla u_j)\}$ converge fracamente em $L^1(\Omega)$ (o que é consequência das limitações uniformes em algum $L^r(\Omega)$, com $r > 1$);

2: $M(\nabla u_j) \rightharpoonup M(\nabla u)$ no sentido das distribuições.

Como poderemos procurar funções M que satisfaçam (27)? Como a convergência fraca $M(\nabla u_j) \rightharpoonup M(\nabla u)$ em $W^{1,\infty}(\Omega)$ implica que M e $-M$ são Q-convexas, somos levados a determinar funções contínuas $M : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ tais que M e $-M$ sejam Q-convexas. Como a Q-convexidade implica a R-convexidade (como veremos no capítulo 6), M e $-M$ terão de ser R-convexas (o que é o mesmo que dizer que M é R-afim), i.e., a função $M(A + tB)$ deve ser afim em t sempre que B tem característica igual a 1. Estas funções são identificadas no seguinte teorema.

TEOREMA 281. *As funções afins dos menores de uma matriz são as únicas funções R-afins.*

DEMONSTRAÇÃO. A função $M(A+tB)$ é, como função de t, um polinómio de grau= $car(B)$. Como $car(B) = 1$, temos que $M(A + tB)$ é uma função afim. Mostremos agora estas são de facto as únicas funções R-afins.

Seja $M(F)$ uma função R-afim e, por conveniência de notação, $M^{(0)}(F)$ a constante $M(0)$. A diferença $M_{(1)}(F) = M(F) - M^{(0)}(F)$ vale zero nas matrizes de car-0, i.e., na matriz nula. Seja $(e_{i_k})_k$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$, tal que $(e_{i_k} \otimes e_{j_l})_{kl}$ é a base do espaço das matrizes $\mathbb{M}^{n\times n}$.

Seja $M^{(1)}(F)$ o funcional linear definido nas matrizes $F \in \mathbb{M}^{n\times n}$ e determinado pelos números $M_{(1)}(e_{i_1} \otimes e_{j_1})$:

$$M^{(1)}(F) = M^{(1)}\left(\sum_{i_1,j_1} f_{i_1j_1}e_{i_1} \otimes e_{j_1}\right) = \sum_{i_1,j_1} f_{i_1j_1}M_{(1)}(e_{i_1} \otimes e_{j_1}),$$

(onde $f_{i_1j_1}$ são os elementos da matriz F) e seja

$$M_{(2)}(F) = M_{(1)}(F) - M^{(1)}(F).$$

Afirmamos que esta função vale zero nas matrizes de car-1. De modo a provarmos esta afirmação, estabelecemos a seguinte propriedade elementar das funções R-afins que iremos utilizar diversas vezes: se $\widetilde{M}$ é uma função R-afim tal que $\widetilde{M}(2A) = \widetilde{M}(2B) = 0$ e $car\{A - B\} = 0$, então $\widetilde{M}(A+B) = 0$. De facto, como $car\{A - B\} = 1$ e $\widetilde{M}$ é R-afim, podemos escrever

$$\widetilde{M}(A+B) = \widetilde{M}\left(\frac{1}{2}(2A) + \frac{1}{2}(2B)\right) = \frac{1}{2}\widetilde{M}(2A) + \frac{1}{2}\widetilde{M}(2B) = 0.$$

Por outro lado, $M_{(2)}$ é R-afim (pois é a diferença de duas funções afins car-1) e vale zero em $e_{i_1} \otimes e_{j_1}$, pois

$$M_{(2)}(F) = M_{(1)}(F) - M^{(1)}(F)$$

e

$$M_{(1)}(e_{i_1} \otimes e_{j_1}) = M^{(1)}(e_{i_1} \otimes e_{j_1}).$$

É também verdade para qualquer escalar s, tendo em mente que $M_{(1)}$ é R-afim (note-se que $car\{se_{i_1} \otimes e_{j_1}\} = 1$) e a definição de $M^{(1)}$, que

$$\begin{aligned} M_{(2)}(se_{i_1} \otimes e_{j_1}) &= M_{(1)}(se_{i_1} \otimes e_{j_1}) - M^{(1)}(se_{i_1} \otimes e_{j_1}) = \\ &= sM_{(1)}(e_{i_1} \otimes e_{j_1}) - M^{(1)}(se_{i_1} \otimes e_{j_1}) = \\ &= sM_{(1)}(e_{i_1} \otimes e_{j_1}) - sM_{(1)}(e_{i_1} \otimes e_{j_1}) = 0. \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade antes mencionada (ver $\widetilde{M}$), podemos escrever

$$\begin{aligned} M_{(2)}((se_{i_1} + te_{i_2}) \otimes e_{j_1}) &= M_{(2)}(se_{i_1} \otimes e_{j_1} + te_{i_2} \otimes e_{j_1}) = \\ &\frac{1}{2}M_{(2)}(se_{i_1} \otimes e_{j_1}) + \frac{1}{2}M_{(2)}(se_{i_2} \otimes e_{j_1}) = 0 \end{aligned}$$

procedendo desta forma, podemos mostrar que

$$M_{(2)}(a \otimes e_{j_1}) = 0$$

para qualquer vector $a \in \mathbb{R}^n$ (note que se $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, podemos então reescrever a à custa da base canónica de R^n, i.e., $a = a_1 e_{i_1} + a_2 e_{i_2} + ... + a_n e_{i_n}$).

Utilizando agora a mesma técnica com respeito ao segundo factor (não esquecendo o que acabámos de concluir), obtemos

$$M_{(2)}(a \otimes b) = 0$$

para quaisquer vectores $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Para os índices i_1, i_2, j_1 e j_2 dados, seja $\Lambda^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}(F)$ o menor 2×2 de F correspondente às linhas i_1, i_2 e às colunas j_1, j_2. Definamos

$$M^{(2)}(F) = \sum_{i_1 < i_2, j_1 < j_2} \Lambda^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}(F) M_{(2)}(e_{i_1} \otimes e_{j_1} + e_{i_2} \otimes e_{j_2}).$$

Sabemos que $M^{(2)}$ é R-afim (relembremos que o determinante é uma função R-afim), logo a diferença

$$M_{(3)}(F) = M_{(2)}(F) - M^{(2)}(F)$$

é também R-afim. Afirmamos agora que $M_{(3)}$ vale zero nas matrizes de car-2 ou inferior. Já sabemos que este facto se verifica para matrizes de car-2 ou inferior e também, por definição, para todas as matrizes $e_{i_1} \otimes e_{j_1} + e_{i_2} \otimes e_{j_2}$. Utilizando outra vez repetidamente a propriedade elementar atrás mencionada, podemos então mostrar sucessivamente

$$M_{(3)}(a \otimes e_{j_1} + e_{i_2} \otimes e_{j_2}) = 0,$$

$$M_{(3)}(a \otimes b + e_{i_2} \otimes e_{j_2}) = 0,$$

$$M_{(3)}(a \otimes b + c \otimes e_{j_2}) = 0,$$

$$M_{(3)}(a \otimes b + c \otimes d) = 0$$

para vectores arbitrários $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$, o que prova o que afirmámos. Pomos agora

$$M^{(3)}(F) = \sum_{i_1 < j_1, i_2 < j_2, i_3 < j_3} \Lambda^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3}(F) M_{(3)}(e_{i_1} \otimes e_{j_1} + e_{i_2} \otimes e_{j_2} + e_{i_3} \otimes e_{j_3}).$$

Aplicando sucessivamente o método acima exposto chegamos finalmente a $M_{(n)}(F)$, definido por

$$M_{(n)}(F) = M_{(n-1)}(F) - M^n(n-1)(F)$$

que é também R-afim, pelas razões acima referidas. Podemos também agora afirmar que $M_{(n)}$ vale zero nas matrizes de car-$(n-1)$ ou inferior. Este facto verifica-se para matrizes de car-$(n-2)$ ou inferior e, como antes, por definição, para todas as matrizes $e_{i_1} \otimes e_{j_1} + e_{i_2} \otimes e_{j_2} + ... + e_{i_{(n-1)}} \otimes e_{j_{(n-1)}}$. Utilizando este facto e novamente a propriedade elementar referida anteriormente (e já por diversas vezes utilizada...), poderemos concluir que

$$M_{(n)}(\alpha_1 \otimes \beta_1 + ... + \alpha_{(n-1)} \otimes \beta_{(n-1)}) = 0$$

para vectores arbitrários $\alpha_1, ..., \alpha_{(n-1)}, \beta_1, ..., \beta_{(n-1)} \in \mathbb{R}^n$, o que prova a nossa última afirmação.

Finalmente, pomos

$$M^{(n)}(F) = \det(F) M_{(n)}(\mathbb{I}_n), \ M^*(F) = M_{(n)}(F) - M^{(n)}(F).$$

Temos que M^* é R-afim. Podemos também mostrar que M^* vale zero nas matrizes de car-n ou inferior. temos então que M^* vale zero em $\mathbb{M}^{n\times n}$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} M(F) = M(0) + \sum_{i_1, j_1} \Lambda_{j_1}^{i_1}(F) M_{(1)}(e_{i_1} \otimes e_{j_1}) + \sum_{i_1 < i_2, j_1 < j_2} \Lambda_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(F) M_{(2)}(e_{i_1} \otimes e_{j_1} + e_{i_2} \otimes e_{j_2}) + \\ \sum_{i_1 < j_1, i_2 < j_2, i_3 < j_3} \Lambda_{j_1 j_2 j_3}^{i_1 i_2 i_3}(F) M_{(3)}(e_{i_1} \otimes e_{j_1} + e_{i_2} \otimes e_{j_2} + e_{i_3} \otimes e_{j_3}) + \cdots + \\ + \sum_{i_1 < j_1, \ldots, i_{(n-1)} < j_{(n-1)}} \Lambda_{j_1 \ldots j_3}^{i_1 \ldots i_3}(F) M_{(n-1)}(e_{i_1} \otimes e_{j_1} + \cdots + e_{i_{(n-1)}} \otimes e_{j_{(n-1)}}) + \\ + \det(F) M_{(n)}(\mathbb{I}_n). \end{aligned}$$

□

A nossa tarefa principal consiste agora em mostrarmos que os menores geram de facto funcionais fracamente contínuos.

Para uma matriz $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$, seja A' uma submatriz quadrada de A de ordem r. A matriz cofactor de A' é definida pela identidade

$$A'(adj A')^T = \det A' \mathbb{I}_r,$$

onde $adjA'$ é a matriz cofactor de A e $\mathbb{I}_r$ é a matriz identidade de ordem r. Se A' é não singular, então

$$adj(A') = \det(A')(A')^{-1}.$$

TEOREMA 282. *Se* $u_j \rightharpoonup u$ *em* $W^{1,p}(\Omega)$ *e* $p \geq r$, *então* $\det(\nabla u_j)' \rightharpoonup \det(\nabla u)'$ *no sentido das distribuições.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**24**], pág.28. □

Este resultado é muito importante pois permite-nos concluir que quando $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e $(M(\nabla u_j))$ converge fracamente em $L^1(\Omega)$, sendo M um qualquer menor de ordem r e $p \geq r$, então temos que $M(\nabla u_j) \rightharpoonup M(\nabla u)$ em $L^1(\Omega)$ e consequentemente (como já reflectimos, sobre (27))

$$M\left(\int_{\mathbb{M}^{m\times n}} Ad\nu(A)\right) = \int_{\mathbb{M}^{m\times n}} M(A)d\nu(A)$$

verificar-se-à para a medida de Young associada a (∇u_j). Por exemplo, no caso $p = \infty$ temos a convergência fraca* em $L^\infty(\Omega)$ de $(M(\nabla u_j))$ para qualquer menor M logo $M(\nabla u_j) \overset{*}{\rightharpoonup} M(\nabla u)$ em $L^\infty(\Omega)$ se u é o limite fraco de (u_j). Podemos então formular a seguinte

PROPOSIÇÃO 283. *Se* M *é um menor e* ν *é uma* $W^{1,\infty}$*-medida de Young homogénea, então (27) verifica-se.*

Definimos agora um novo tipo de convexidade.

DEFINIÇÃO 284. *Uma função* $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to (-\infty, +\infty]$ *diz-se P-convexa se existe* $g : \mathbb{R}^{\tau(n,m)} \to (-\infty, +\infty]$ *convexa, tal que*

$$W(A) = g(M(A))$$

onde $M : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$ *é tal que*

$$M(A) = (A, adj_2 A, ..., adj_{n\wedge m} A),$$

i.e., $M(A)$ *é o vector de todos os menores da matriz* $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$.

Na definição precedente, $adj_s A$ significa a matriz de todos os menores $s \times s$ da matriz $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$, $2 \leq s \leq n \wedge m = \min\{n, m\}$, e

$$\tau(n,m) = \sum_{s=1}^{n \wedge m} \sigma(s)$$

onde

$$\sigma(s) = \binom{m}{s}\binom{n}{s} = \frac{m!\, n!}{(s!)^2 (m-s)!(n-s)!}$$

Observação 285. **i:** No caso $m = n = 2$, a noção de policonvexidade pode ser lida da seguinte forma:

$$\begin{cases} \tau(n,m) = \tau(2,2) = 4 + 1 = 5 \\ M(A) = (A, \det A) \\ W(A) = g(A, \det A). \end{cases}$$

ii: Na definição de policonvexidade de uma dada função W, a função g tal que $W(A) = g(M(A))$ não é em geral única. Por exemplo, para $m = n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}$$

e

$$W(A) = |A|^2 = (A_1^1)^2 + (A_1^2)^2 + (A_2^1)^2 + (A_2^2)^2 = (A_1^1 - A_2^2)^2 + (A_2^1 + A_1^2)^2 + 2 \det A.$$

Sejam $g_1, g_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$g_1(A, a) = |A|^2,$$

$$g_2(A, a) = (A_1^1 - A_2^2)^2 + (A_2^1 + A_1^2)^2 + 2a.$$

Então g_1 e g_2 são convexas (pois $x \mapsto x^2$, $(x, y) \mapsto (x - y)^2$, $(x, y) \mapsto (x + y)^2$ e $a \mapsto 2a$ são funções convexas, bem como a soma de funções convexas), $g_1 \neq g_2$ (note-se que $g_1 = g_2$ apenas quando $a = \det A$) e

$$W(A) = g_1(M(A)) = g_1(A, \det A) = g_2(A, \det A) = g_2(M(A)).$$

Uma consequência directa do que foi dito neste capítulo é que toda a função P-convexa W verifica (18) para qualquer $W^{1,p}$-medida de Young homogénea e, consequentemente, temos o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 286. *Se* $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to (-\infty, +\infty]$ *é P-convexa e* $u_j \xrightarrow{*} u$ *em* $W^{1,p}(\Omega)$*, então*

$$\liminf_{j\to\infty} \int_\Omega W(\nabla u_j(x))dx \geq \int_\Omega W(\nabla u(x))dx.$$

É relativamente simples encontrar exemplos de lagrangianos P-convexos que não são convexos. Por exemplo, $g(\det A)$ é sempre P-convexa para qualquer função convexa g; em particular para a função identidade $g(r) = r$, que nos dá uma função policonvexa, $\det A$, que não é convexa.

Temos assim um novo tipo de convexidade mais fraca que a usual e que é condição suficiente para a Q-convexidade.

2. Propriedades das funções P-convexas

TEOREMA 287. *Seja* $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to (-\infty, +\infty]$ *e suponhamos que existe uma função* c : $\mathbb{R}^{\tau(n,m)} \to (-\infty, +\infty]$ *convexa tal que*

$$W(A) \geq c(M(A))$$

qualquer que seja $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$.

1ª *Parte. As seguintes condições são equivalentes:*

i: W *é P-convexa*

ii: *Vale a desigualdade*

$$W\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i W(A_i) \tag{28}$$

sempre que $A_i \in \mathbb{M}^{m\times n}$, $\lambda_i \geq 0$ *com* $\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i = 1$, *satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i M(A_i) = M\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i A_i\right), \tag{29}$$

onde $\tau = \tau(n, m)$.

Em particular, seja $g : \mathbb{R}^\tau \to (-\infty, +\infty]$ *definida por*

$$g(X) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i f(A_i) : \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i M(A_i) = X\right\}; \tag{30}$$

então g *está bem definida, é convexa e se* W *satisfaz (28) e (29), então*

$$W(A) = g(M(A)) \tag{31}$$

qualquer que seja $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$.

2ª *Parte. Seja* $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, *i.e.,* W *toma apenas valores finitos, então as seguintes condições são equivalentes:*

i: W *é P-convexa*

iii: *Para qualquer* $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$ *existe um* $\beta(A) \in \mathbb{R}^\tau$ *tal que*

$$W(B) \geq W(A) + \langle \beta(A); M(B) - M(A) \rangle \tag{32}$$

para qualquer $B \in \mathbb{M}^{m\times n}$, *onde* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *denota o produto interno em* $\mathbb{R}^{\tau}$. *Em particular, se* $h : \mathbb{R}^{\tau} \to (-\infty, +\infty]$ *é definida por*

$$h(X) = \sup_{A \in \mathbb{M}^{m\times n}} \{\langle \beta(A); X - M(A)\rangle + W(A)\} \tag{33}$$

e W *satisfaz (32), então* h *é convexa e*

$$W(A) = h(M(A)) \tag{34}$$

para qualquer $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$.

DEMONSTRAÇÃO. $i \Rightarrow ii$. Como W é P-convexa, existe $g : \mathbb{R}^{\tau} \to (-\infty, +\infty]$, $\tau = \tau(n, m)$, convexa, tal que

$$W(A) = g(M(A)).$$

Temos então que

$$\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i W(A_i) \geq \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i g(M(A_i)) \geq g\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i M(A_i)\right) = g\left(M\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i A_i\right)\right) = W\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i A_i\right),$$

por (30).

$ii \Rightarrow i$. Seja $I \geq \tau + 1$ um inteiro e para $X \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$g_I(X) = inf\left\{\sum_{i=1}^{I} \lambda_i W(A_i) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{I} \lambda_i = 1, \sum_{i=1}^{I} \lambda_i M(A_i) = X\right\}. \tag{35}$$

Provaremos em seguida que g_I satisfaz $W(A) = g_I(M(A))$ e que podemos escolher $I = \tau + 1$, s.p.g., estabelecendo então (31). A demonstração está dividida em 4 etapas.

1^a Etapa. Primeiro mostramos que g_I está bem definida. Para o provarmos, vejamos que dado $X \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$ e $I \geq \tau + 1$, existem λ_i e A_i tais que $\sum \lambda_i M(A_i) = X$. No sentido do teorema de Carathéodory isto é equivalente a mostrar que (identificamos $\mathbb{M}^{m\times n}$ com $\mathbb{R}^{nm}$)

$$conv(M(\mathbb{R}^{nm})) = \mathbb{R}^{\tau(n,m)},$$

onde $conv(C)$ denota o convexificado de C e

$$M(\mathbb{R}^{nm}) = \left\{X \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)} : existe\ A \in \mathbb{M}^{m\times n}\ tal\ que\ M(A) = X\right\}.$$

Suponhamos, por absurdo, que $conv(M(\mathbb{R}^{nm})) \neq \mathbb{R}^{\tau}$. Então, por um corolário do teorema de Hahn-Banach, existem $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^{\tau}$, $\beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$conv(M(\mathbb{R}^{nm})) \subset V = \{X \in \mathbb{R}^{\tau} : \langle \alpha, X \rangle \leq \beta\},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^{\tau}$. Temos então para $X \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$ e $\alpha \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$

$$X = (X_1, X_2, ..., X_{n\wedge m}) \in \mathbb{R}^{\sigma(1)} \times \mathbb{R}^{\sigma(2)} \times ... \times \mathbb{R}^{\sigma(n\wedge m)} = \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n\wedge m}) \in \mathbb{R}^{\sigma(1)} \times \mathbb{R}^{\sigma(2)} \times ... \times \mathbb{R}^{\sigma(n\wedge m)} = \mathbb{R}^{\tau(n,m)}.$$

Podemos então escrever

$$\langle \alpha, X \rangle = \sum_{s=1}^{n\wedge m} \langle \alpha_s, X_s \rangle.$$

Como $\alpha \neq 0$, existe $t \in \{1, ..., n \wedge m\}$ tal que $\alpha_t \neq 0$ enquanto que $\alpha_s \neq 0$ se $s < t$ (se $\alpha_1 \neq 0$, então tomamos $t = 1$). Mostramos agora que $conv(M(\mathbb{R}^{nm})) \subset V$ nos leva a uma contradição e que portanto $conv(M(\mathbb{R}^{nm})) = \mathbb{R}^{\tau}$ vale. Seja $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ e, portanto, $M(A) = (A, adj_2 A, ..., adj_{n\wedge m} A) \in M(\mathbb{R}^{nm}) \subset conv(M(\mathbb{R}^{nm}))$. Escolhendo A de modo que t linhas de A são vectores de $\mathbb{R}^n$ arbitrários e as outras $(m-t)$ linhas são zero, temos

$$\langle \alpha, M(A) \rangle = \langle \alpha_t, adj_t A) \rangle,$$

sendo as t linhas escolhidas tal que o lado direito desta última igualdade é diferente de zero. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrário. Multiplicamos a matriz A por λ, e denotamos a matriz obtida por B. Temos então que $M(B) \in M(\mathbb{R}^{nm}) \subset conv(M(\mathbb{R}^{nm}))$ (pois $M(A) \in M(\mathbb{R}^{nm})$) e

$$\langle \alpha, M(B) \rangle = \langle \alpha_t, adj_t B \rangle = \langle \alpha_t, adj_t \lambda A \rangle = \lambda \langle \alpha_t, adj_t A \rangle = \lambda \langle \alpha, M(A) \rangle.$$

Como $conv(M(\mathbb{R}^{nm})) \subset V$ deduzimos que $M(A), M(B) \in V$, i.e.

$$\begin{cases} \langle \alpha, M(A) \rangle \leq \beta \\ \langle \alpha, M(B) \rangle = \lambda \langle \alpha, M(A) \rangle \leq \beta \end{cases}$$

e como λ é arbitrário e $\langle \alpha, M(A) \rangle \neq 0$, chegamos a um absurdo.

2^a Etapa. Queremos agora mostrar que podemos tomar $I = \tau + 1$ em (35). Primeiro mostramos que não há perda de generalidade se tomarmos $I = \tau + 2$. Definimos

$$M(epi(W)) = \{(M(A), a) \in \mathbb{R}^{\tau} \times \mathbb{R} : W(A) \leq a\} \subset \mathbb{R}^{\tau+1}.$$

Temos então que $(M(A_i), W(A_i)) \in M(epi(W))$ e, portanto,

$$\left(X, \sum_{i=1}^{I} \lambda_i W(A_i)\right) = \left(\sum_{i=1}^{I} \lambda_i M(A_i), \sum_{i=1}^{I} \lambda_i W(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{I} \lambda(M(A_i), W(A_i)) \in conv(M(epi(W))).$$

Pelo teorema de Carathéodory, podemos então tomar $I = \tau + 2 (= (\tau + 1) + 1)$. Falta agora reduzir I de $\tau + 2$ para $\tau + 1$. Mostremos que dados $X, M(A_i) \in \mathbb{R}^\tau$, $1 \leq i \leq \tau + 2$, $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to (-\infty, +\infty]$ e $\alpha_i \in \mathbb{R}$ com

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\tau+2} \alpha_i = 1 \\ \\ \sum_{i=1}^{\tau+2} \alpha_i M(A_i) = X \end{array} \right. \tag{36}$$

então existem β_i, $1 \leq i \leq \tau + 2$, tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\tau+2} \beta_i = 1, \textit{ pelo menos um dos } \beta_i = 0 \\ \\ \sum_{i=1}^{\tau+2} \beta_i W(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\tau+2} \alpha_i W(A_i), \end{array} \right. \tag{37}$$

logo o que queremos. Suponhamos que todos os $\alpha_i > 0$ em (36) (senão (37) seria trivial). Como $X \in conv\{M(A_1), ..., M(A_{\tau+2})\} \subset \mathbb{R}^\tau$ (por (36)) resulta, pelo teorema de Carathéodory, que existem $\widetilde{\alpha_i} \geq 0$, $1 \leq i \leq \tau + 2$, com $\sum_{i=1}^{\tau+2} \widetilde{\alpha_i} = 1$ e pelo menos um dos $\widetilde{\alpha_i} = 0$ tais que

$$\sum_{i=1}^{\tau+2} \widetilde{\alpha_i} M(A_i) = X.$$

Podemos supor, s.p.g., que

$$\sum_{i=1}^{\tau+2} \widetilde{\alpha_i} W(A_i) > \sum_{i=1}^{\tau+2} \alpha_i W(A_i),$$

caso contrário escolhendo $\beta_i = \widetilde{\alpha_i}$ obteríamos imediatamente o desejado. Seja então

$$J = \{i \in \{1, ..., \tau + 2\} : \alpha_i - \widetilde{\alpha_i} < 0\}.$$

Note-se que $J \neq \emptyset$, caso contrário $\alpha_i \geq \widetilde{\alpha_i} \geq 0$, para qualquer $1 \leq i \leq \tau + 2$ e como pelo menos um dos $\widetilde{\alpha_i} = 0$, teríamos uma contradição, pois $\sum_{i=1}^{\tau+2} \alpha_i = \sum_{i=1}^{\tau+2} \widetilde{\alpha_i} = 1$ e $\alpha_i > 0$ para qualquer i. Definimos então

$$\lambda = \min_{i \in J} \left\{ \frac{\alpha_i}{\widetilde{\alpha_i} - \alpha_i} \right\}.$$

Claramente $\lambda > 0$ (λ é o menor elemento de uma família de termos positivos). Finalmente, seja

$$\beta_i = \alpha_i + \lambda(\alpha_i - \widetilde{\alpha_i}), \ 1 \leq i \leq \tau + 2.$$

Temos portanto

$$\beta_i = \alpha_i + \min_{i\in J}\left\{\frac{\alpha_i}{\widetilde{\alpha}_i - \alpha_i}\right\}(\alpha_i - \widetilde{\alpha}_i) \geq \alpha_i + \frac{\alpha_i}{\widetilde{\alpha}_i - \alpha_i}(\alpha_i - \widetilde{\alpha}_i) = 0$$

e

$$\sum_{i=1}^{\tau+2}\beta_i = \sum_{i=1}^{\tau+2}\alpha_i + \lambda(\alpha_i - \widetilde{\alpha}_i) = \alpha_1 + \lambda(\alpha_1 - \widetilde{\alpha}_1) + \alpha_2 + \lambda(\alpha_2 - \widetilde{\alpha}_2) + \dots + \alpha_{\tau+2} + \\ + \lambda(\alpha_{\tau+2} - \widetilde{\alpha}_{\tau+2}) = 1 + \lambda - \lambda = 1,$$

e pelo menos um dos $\beta_i = 0$ (aquele em que o índice for igual ao índice para o qual é atingido o $\min_{i\in J}\left\{\frac{\alpha_i}{\widetilde{\alpha}_i - \alpha_i}\right\}$) e

$$\sum_{i=1}^{\tau+2}\beta_i W(A_i) = \sum_{i=1}^{\tau+2}\alpha_i W(A_i) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{\tau+2}\alpha_i W(A_i) - \sum_{i=1}^{\tau+2}\widetilde{\alpha}_i W(A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\tau+2}\alpha_i W(A_i),$$

pois supusemos que

$$\sum_{i=1}^{\tau+2}\widetilde{\alpha}_i W(A_i) > \sum_{i=1}^{\tau+2}\alpha_i W(A_i).$$

Obtivemos (37), o que conclui esta etapa. Como I pode ser tomado igual a $\tau+1$, denotaremos g_I por g.

3^a Etapa. Mostremos agora que g é convexa. Sejam $\lambda \in [0,1]$, $X, Y \in \mathbb{R}^\tau$. Queremos mostrar que

$$\lambda g(X) + (1-\lambda)g(Y) \geq g(\lambda X + (1-\lambda)Y).$$

Fixemos $\varepsilon > 0$. De (30) deduzimos (e pela definição de ínfimo) deduzimos que existem $\lambda_i \geq 0$ com $\sum_{i=1}^{\tau+1}\lambda_i = 1$, $\mu_i \geq 0$ com $\sum_{i=1}^{\tau+1}\mu_i = 1$, $A_i, B_i \in \mathbb{M}^{m\times n}$ tais que

$$\lambda g(X) + (1-\lambda)g(Y) + \varepsilon \geq \lambda\sum_{i=1}^{\tau+1}\lambda_i W(A_i) + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{\tau+1}\mu_i W(B_i), \tag{38}$$

com

$$\sum_{i=1}^{\tau+1}\lambda_i M(A_i) = X, \sum_{i=1}^{\tau+1}\mu_i M(B_i) = Y. \tag{39}$$

Seja, para $1 \leq i \leq \tau+1$

$$\begin{cases} \widetilde{\lambda}_i = \lambda\lambda_i & C_i = A_i \\ \widetilde{\lambda}_{i+(\tau+1)} = (1-\lambda)\mu_i & C_{i+(\tau+1)} = B_i. \end{cases}$$

Então podemos reescrever (38) e (39) como

$$\begin{cases} \lambda g(X) + (1-\lambda)g(Y) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{2\tau+2} \widetilde{\lambda}_i W(C_i) & \heartsuit \\ \sum_{i=1}^{2\tau+2} \widetilde{\lambda}_i M(C_i) = \lambda X + (1-\lambda)Y & \spadesuit. \end{cases}$$

Tomando o ínfimo no lado direito de $\heartsuit$, de entre todos os $\widetilde{\lambda}_i, C_i$ satisfazendo $\spadesuit$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda g(X) + (1-\lambda)g(Y) + \varepsilon \geq \inf\left\{ \sum_{i=1}^{2\tau+2} \widetilde{\lambda}_i W(C_i) : \sum_{i=1}^{2\tau+2} \widetilde{\lambda}_i M(C_i) = \lambda X + (1-\lambda)Y \right\} = \\ = g(\lambda X + (1-\lambda)Y) \end{aligned}$$

por (35) e pela 2^a Etapa. Como ε é positivo arbitrário, concluímos que

$$g(X) + (1-\lambda)g(Y) + \geq g(\lambda X + (1-\lambda)Y),$$

i.e, g é convexa.

4^a Etapa. Para concluirmos esta parte da demonstração falta-nos mostrar que

$$W(A) = g(M(A)),$$

onde g satisfaz

$$g(X) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i W(A_i) : \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i M(A_i) = X \right\}.$$

Mostrámos na etapa anterior que g é convexa. Escolhendo $X = M(A)$, vem que

$$g(M(A)) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i W(A_i) : \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i M(A_i) = M(A) \right\}$$

e este ínfimo é atingido exactamente por $W(A)$, pois

$$\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i W(A_i) \geq W\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i A_i \right)$$

sempre que

$$\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i M(A_i) = M\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} A_i \right).$$

$i \Rightarrow iii$. Como W é P-convexa e finita, podemos utilizar ii para encontrar $g : \mathbb{R}^\tau \to \mathbb{R}$ convexa satisfazendo

$$\begin{cases} W(A) = g(M(A)) \\ g(X) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i W(A_i) : \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i M(A_i) = X \right\} \end{cases}$$

Como g é convexa e finita, é contínua e portanto, pelo teorema (251), para qualquer que seja $X \in \mathbb{R}^\tau$ existe um $\widetilde{\beta}(X) \in \mathbb{R}^\tau$:

$$g(Y) \geq g(X) + \langle\widetilde{\beta}(X), Y - X\rangle$$

para qualquer que seja $Y \in \mathbb{R}^\tau$. Escolhendo $Y = M(B)$, $X = M(A)$ e $\beta(A) = \widetilde{\beta}(M(A))$, obtemos

$$W(B) \geq W(A) + \langle\beta A, M(B) - M(A)\rangle.$$

iii $\Rightarrow$ *i*. Definimos novamente h por

$$h(X) = \sup_{A \in \mathbf{M}^{m\times n}} \{\langle\beta(A), X - M(A)\rangle + W(A)\}.$$

Como h é o supremo de funções afins, é convexa. Se $X = M(B)$, vem

$$h(M(B)) = \sup_{A \in \mathbf{M}^{m\times n}} \{\langle\beta(A), M(B) - M(A)\rangle + W(A)\}$$

e (32) assegura-nos que o supremo é atingido por $W(B)$ e portanto $W(B) = h(M(B))$ $\square$

EXEMPLO 288. Se $m = n = 2$ então *ii)* escreve-se

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{6} \lambda_i W(A_i) \geq W\left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i A_i\right) \\ \sum_{i=1}^{6} \lambda_i (A_i, \det A_i) = \left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i A_i, \det(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i A_i)\right) \end{cases}$$

e *iii)* escreve-se

$$W(B) \geq W(A) + \langle\gamma(A); B - A\rangle + \delta(A)(\det B - \det A)$$

onde $\gamma(A) \in \mathbb{R}^4$ e $\delta(A) \in \mathbb{R}$.

OBSERVAÇÃO 289. **i:** A hipótese $W(A) \geq c(M(A))$ é utilizada apenas para garantir que g definida em (30) não toma o valor $-\infty$;

ii: A fórmula de representação (30) é importante pelas seguintes razões:

-Como já foi mencionado na definição de policonvexidade de uma função W, a função associada g não é única. A expressão (30) permite-nos definir de modo construtivo uma tal função g. Uma observação semelhante poderá ser feita utilizando (34).

-Se $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, i.e., W toma apenas valores finitos, então g definida por (30) toma também valores finitos;

iii: Se W é P-convexa e toma apenas valores finitos, então i, ii e iii do teorema anterior são equivalentes.

CAPÍTULO 5

A R-convexidade e os laminados

1. Introdução

Como existem materiais cuja densidade energética armazenada não possui a propriedade da Q-convexidade, somos levados a considerar problemas de minimização mais gerais onde se permite às $W^{1,p}$-medidas de Young entrarem na classe dos competidores. Estes conceitos são fisicamente interpretados como micro-estruturas e representam sucessões minimizantes altamente oscilatórias em escalas espaciais cada vez mais refinadas. Uma micro-estrutura é uma estrutura numa escala entre a escala macroscópica (aquela que nós usualmente observamos) e a escala atómica. Tais estruturas são abundantes na natureza: estruturas hierárquicas finas numa folha vegetal e em muitos outros materiais biológicos; disposição de fissuras, fendas e inclusões nas rochas e no solo; amostras de misturas de escala fina em fluxos turbulentos ou multi-fase; materiais em camadas, ou de fibras reforçadas, produzidos pelo homem; e misturas finas de fases em transformações de fase sólido-sólido, entre outros. A micro-estrutura influencia de modo crucial o comportamento macroscópico do material ou do sistema e é muitas vezes escolhida (ou espontaneamente gerada) de modo a optimizar a sua performance (máxima resistência para um dado peso, energia mínima, entropia– grandeza física que traduz o estado de um sistema termodinâmico, definida, num processo reversível, como a razão entre a variação da quantidade de calor do sistema e a temperatura absoluta à qual ocorreu essa variação - máxima, permeabilidade máxima ou mínima, ...). As micro-estruturas desenvolvem-se frequentemente em muitas escalas diferentes no espaço e no tempo, e entender a sua formação, interacção e o efeito global destas estruturas é um desafio científico, enquanto que a sua modelação nos proporciona um exemplo ilustrativo. Na literatura aplicada, a passagem de micro-escalas para macro-escalas é frequentemente obtida por inteligentes técnicas ad-hoc de "média"e "normalização". Falta-nos uma boa estrutura matemática na qual estes procedimentos possam ser justificados e sistematicamente melhorados, e o seu desenvolvimento seria uma tarefa difícil mas recompensadora. Ao analisar-se as micro-estruturas dum ponto de vista matemático, usualmente despreze-se a escala atómica, considerando desde o início um modelo contínuo. O essencial é então compreender escalas que são pequenas (ou convergem para zero) comparadas com uma escala macroscópica fixada. A investigação faz-se principalmente em três áreas: homogeneização, modelos variacionais de micro-estruturas e concepção de estruturas óptimas (o qual está normalmente entre as duas primeiras áreas, visto a estrutura óptima frequentemente corresponder a uma homogeneização limite). O problema básico na homogeneização é determinar (ou pelo menos delimitar) o comportamento macroscópico induzido por uma dada micro-estrutura (dada, por exemplo, por uma mistura periódica de dois condutores térmicos quando o limite do período tende para zero, ou por uma sucessão fracamente convergente de tensores condutivos). Os modelos variacionais de micro-estruturas tentam modelar sistemas que espontaneamente formam micro-estruturas internas supondo que a estrutura formada pretende optimizar uma certa propriedade. O motivo da formação de tal estrutura é tipicamente o facto de que não existe uma estrutura óptima e as sucessões optimizantes têm de desenvolver oscilações cada vez mais finas (que podem apenas ser limitadas por efeitos desprezados no modelo, como por exemplo a subjacente estrutura atómica). Estudaremos uma classe particularmente importante das micro-estruturas: os laminados. Este tipo de micro-estrutura pode ser caracterizado em termos da desigualdade de Jensen para funções R-convexas.

Entre os materiais (que mencionámos no início deste capítulo) cuja densidade energética não goza da propriedade da Q-convexidade encontram-se os cristais elásticos (a este respeito pode-se aprofundar os conhecimentos consultando **[24]**, capítulo 4). Existe uma condição necessária para que uma função seja Q-convexa que é também muito importante para a descrição das configurações de equilíbrio de cristais elásticos. Esta propriedade chama-se R-convexidade e requer a noção usual de convexidade segundo direcções com característica= 1.

2. Uma condição necessária para a Q-convexidade

DEFINIÇÃO 290. *Seja* $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to (-\infty, +\infty]$. *Diz-se que* W *é R-convexa se*

$$W(\frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_2) \leq \frac{1}{2}W(F_1) + \frac{1}{2}W(F_2)$$

quaisquer que sejam $F_1, F_2 \in \mathbb{M}^{m\times n}$, *com* $car\{F_1 - F_2\} \leq 1$.

OBSERVAÇÃO 291. **i:** A definição usual de R-convexidade é

"Uma função $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to (-\infty, +\infty]$ diz-se R-convexa se

$$W(\lambda F_1 + (1-\lambda)F_2) \leq \lambda W(F_1) + (1-\lambda)W(F_2)$$

para qualquer $\lambda \in [0,1], F_1, F_2 \in \mathbb{M}^{m\times n}$ com $car\{F_1 - F_2\} \leq 1$."

que é equivalente à dada na definição anterior.

ii: Na notação tensorial, a noção de R-convexidade escrever-se-à

$$\varphi(t) = W(A + t\; a \otimes b)$$

é convexa em t, para quaisquer $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$, $a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$, onde $a \otimes b = (a^i b_\alpha)_{1\leq i\leq m, 1\leq \alpha\leq n}$;

Sejam $F \in \mathbb{M}^{m\times n}$, $a \in \mathbb{R}^m$, um vector unitário $b \in \mathbb{R}^n$ e T o cubo unitário n-dimensional. Seja $\chi_{1/2}$ a função característica do intervalo $(0, 1/2)$ em $(0,1)$ extendida periodicamente a $\mathbb{R}$ e $\chi = \chi_{1/2} - 1$. Consideremos a função vectorial

$$u(x) = \int_0^{x.b} \chi(s)ds\, a,\;\; x \in T.$$

Esta função é T-periódica se b é um dos n eixos ortogonais de T e, consequentemente, é elegível no teorema. O gradiente desta função é então dado por

$$\nabla u(x) = \chi(x.b) a \otimes b = \begin{cases} a\otimes b & \text{se } 0 < x.b - \langle x.b\rangle < 1/2 \\ -a\otimes b & \text{se } 1/2 < x.b - \langle x.b\rangle < 1, \end{cases}$$

onde $\langle r\rangle$ denota a parte inteira de r. Se W é Q-convexa, pelo teorema 280, temos que

$$W(F) \leq \int_T W(F + \chi(x.b)a\otimes b)dx = \frac{1}{2}W(F + a\otimes b) + \frac{1}{2}W(F - a\otimes b) =$$

$$= \frac{1}{2}W(F_1) + \frac{1}{2}W(F_2)$$

para qualquer matriz F e quaisquer vectores a e b. Esta desigualdade é a condição de R-convexidade, obtendo assim que esta condição é necessária para a Q-convexidade.

3. Propriedades das funções R-convexas

DEFINIÇÃO 292. *Seja* $\lambda_i > 0$ *com* $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1$, *onde* $l \in \mathbb{N}$. *Seja* $A_i \in \mathbb{M}^{m\times n}$, $1 \leq i \leq l$. *Diz-se que* (λ_i, A_i) *satisfaz* (H_l) *se*

i: $l = 2$, *então* $car\{A_1 - A_2\} \leq 1$.

ii: $l > 3$, *então, a menos de uma permutação,* $car\{A_1 - A_2\} \leq 1$ *e se*

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2 & B_1 = \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ \mu_i = \lambda_{i+1} & B_i = A_{i+1},\ 2 \leq i \leq l-1, \end{cases}$$

então (μ_i, B_i) *satisfaz* (H_{l-1}).

EXEMPLO 293. **i:** $l = 2$: $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, então (λ_1, A_1), (λ_2, A_2) satisfazem (H_2) sse $car\{A_1 - A_2\} \leq 1$.

ii: $l = 3$: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, então $(\lambda_i, A_i)_{1\leq i\leq 3}$ satisfazem (H_3) se, a menos de uma permutação,

$$\begin{cases} car\{A_1 - A_2\} \leq 1 \\ car\left\{A_3 - \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right\} \leq 1 \end{cases}$$

iii: $l = 4$: $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1$, então (λ_i, A_i) satisfazem (H_4) se, a menos de uma permutação, uma das seguintes condições é verificada: ou

$$\begin{cases} car\{A_1 - A_2\} \leq 1 \\ car\left\{A_3 - \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right\} \leq 1 \\ car\left\{A_4 - \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\right\} \leq 1 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} car\{A_1 - A_2\} \leq 1, car\{A_3 - A_4\} \leq 1 \\ car\left\{\frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{\lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4}{\lambda_3 + \lambda_4}\right\} \leq 1. \end{cases}$$

PROPOSIÇÃO 294. *Se* $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to (-\infty, +\infty]$, *então são equivalentes as seguintes condições:*

i: W *é R-convexa*

ii: *verifica-se*

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i W(A_i) \geq W\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i A_i\right) \tag{40}$$

sempre que $(\lambda_i, A_i)_{1\leq i\leq l}$ *satisfazem* (H_l).

DEMONSTRAÇÃO. $ii \Rightarrow i$. Se escolhermos $l = 2$, $car\{A_1 - A_2\} \leq 1$ e por (40) temos

$$\lambda_1 W(A_1) + \lambda_2 W(A_2) \geq W(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)$$

o que nos dá o resultado, pois $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$.

$ii \Rightarrow i$. Provemos (40) por indução. Por definição de R-convexidade, (40) vale para $l = 2$. Suponhamos que a proposição é verdadeira para $l - 1$, i.e.,

$$\sum_{i=1}^{l-1} \lambda_i W(A_i) \geq W\left(\sum_{i=1}^{l-1} \lambda_i A_i\right)$$

sempre que $(\lambda_i, A_i)_{1\leq i\leq l-1}$ satisfazem (H_{l-1}). Observemos que

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i W(A_i) = (\lambda_1 + \lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} W(A_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} W(A_2)\right) + \sum_{i=3}^{l} \lambda_i W(A_i).$$

Se utilizarmos a R-convexidade e a hipótese (H_l), obtemos

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i W(A_i) = (\lambda_1 + \lambda_2) W\left(\frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) + \sum_{i=3}^{l} \lambda_i W(A_i) =$$

e, utilizando a hipótese de indução e novamente a hipótese (H_l),

$$= \mu_1 W(B_1) + \sum_{i=2}^{l-1} \mu_i W(B_i) = \sum_{i=1}^{l-1} \mu_i W(B_i) \geq W\left(\sum_{i=1}^{l-1} \mu_i B_i\right) =$$

$$W\left((\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \lambda_3 A_3 + \ldots + \lambda_l A_l\right) = W\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i A_i\right).$$

□

OBSERVAÇÃO 295. O resultado acima é muito mais fraco do que o do teorema correspondente para funções P-convexas, no sentido em que não podemos fixar um limite superior para l. Em seguida estudaremos dois exemplos, os quais nos mostram que a situação é intrinsecamente mais complicada para funções R-convexas.

EXEMPLO 296. Seja $m = n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{1}{5} \\ A_1 = A, A_2 = B, A_3 = C, A_4 = D, A_5 = A. \end{cases}$$

$(\lambda_i, A_i)_{1 \le i \le 5}$ satisfazem (H_5), visto que

$$\begin{cases} \det\{A_1 - A_2\} = \det\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0 \\ \det\{A_3 - \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\} = \det\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0 \\ \det\{A_4 - \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\} = \det\left\{\begin{pmatrix} -\frac{7}{12} & \frac{14}{3} \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}\right\} = 0 \\ \det\{A_5 - \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}\} = \det\left\{\begin{pmatrix} -\frac{3}{16} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} & -1 \end{pmatrix}\right\} = 0. \end{cases}$$

No entanto, se somarmos A_1 e A_5 e se considerarmos

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_5 = \frac{2}{5}, \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \frac{1}{5} \\ B_1 = A, B_2 = B, B_3 = C, B_4 = D \end{cases}$$

verificamos que $(\mu_i, B_i)_{1 \le i \le 4}$ não satisfaz (H_4) , pois $\det\left(B_3 - \frac{\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2}{\mu_1 + \mu_2}\right) \neq 0$. Por outras palavras, se utilizarmos a proposição 294, temos este resultado surpreendente que se W é R-convexa então

$$W(\frac{2}{5}A + \frac{1}{5}B + \frac{1}{5}C + \frac{1}{5}D) \le \frac{2}{5}W(A) + \frac{1}{5}W(B) + \frac{1}{5}W(C) + \frac{1}{5}W(D)$$

mesmo sabendo que $(\mu_i, B_i)_{1 \le i \le 4}$ não satisfaz (H_4). Para mostrarmos a desigualdade acima utilizamos a comutatividade e associatividade da adição, i.e.,

$$W(\frac{1}{5}A + \frac{1}{5}B + \frac{1}{5}C + \frac{1}{5}D + \frac{1}{5}A) \le \frac{1}{5}W(A) + \frac{1}{5}W(B) + \frac{1}{5}W(C) + \frac{1}{5}W(D) + \frac{1}{5}W(A).$$

EXEMPLO 297. (Casadio). Seja $m = n = 2$ e

$$\begin{cases} A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \alpha_1 = \frac{8}{15}, \alpha_2 = \frac{4}{15}, \alpha_3 = \frac{2}{15}, \alpha_4 = \frac{1}{15}. \end{cases}$$

Observe-se que

$$\sum_{i=1}^{4}\alpha_i A_i = \frac{8}{15}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{4}{15}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\frac{2}{15}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{15}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

e

$$\begin{cases} car\{A_1-A_2\} = car\left\{\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}=2\\ car\{A_2-A_3\} = car\left\{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\right\}=2\\ car\{A_1-A_4\} = car\left\{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\right\}=2\\ car\{A_3-A_4\} = car\left\{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}=2\\ car\{A_2-A_4\} = car\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\right\}=2\\ car\{A_1-A_3\} = car\left\{\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}=2. \end{cases}$$

Seja

$$\begin{cases} B_1 = A_1, B_2 = A_2, B_3 = A_3, B_4 = A_4, B_5 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4}\alpha_i A_i\\ \lambda_1 = \frac{8}{16}, \lambda_2 = \frac{4}{16}, \lambda_3 = \frac{2}{16}, \lambda_4 = \frac{1}{16}, \lambda_5 = \frac{1}{16}. \end{cases}$$

Note-se que $\lambda_i, B_i)_{1\le i\le 5}$ satisfazem (H_5), pois

$$\begin{cases} \det\{B_4-B_5\} = \det\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right\}=0\\ \det\{B_3-\frac{\lambda_4 B_4+\lambda_5 B_5}{\lambda_4+\lambda_5}\} = \det\left\{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}=0\\ \det\{B_2-\frac{\lambda_3 B_3+\lambda_4 B_4+\lambda_5 B_5}{\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5}\} = \det\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\right\}=0\\ \det\{B_1-\frac{\lambda_2 B_2+\lambda_3 B_3+\lambda_4 B_4+\lambda_5 B_5}{\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5}\} = \det\left\{\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}=0. \end{cases}$$

Portanto, utilizando a proposição (294), obtemos

$$W(0) = W\left(\sum_{i=1}^{5}\lambda_i B_i\right) \le \sum_{i=1}^{5}\lambda_i W(B_i)$$

i.e.

$$16W(0) \leq 8W(A_1) + 4W(A_2) + 2W(A_3) + W(A_4) + W(B_5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15W(0) \leq 8W(A_1) + 4W(A_2) + 2W(A_3) + W(A_4),$$

pois $B_5 = 0$. Temos então, dividindo esta última desigualdade por 15, que

$$W(0) = W\left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{4} \alpha_i W(A_i),$$

mesmo sabendo que nenhum dos $A_i - A_j$, com $i \neq j$, tem car-1.

4. Os laminados

Como a Q-convexidade implica a R-convexidade, as medidas de probabilidade que satisfazem a desigualdade de Jensen relativamente à classe das funções R-convexas são de facto exemplos de medidas de probabilidade gradiente. Esta família de medidas pode ser entendida, pelo menos conceptualmente, de uma forma construtiva. Chamamos-lhes laminados para reforçar o facto da sua forma laminar. De facto, os laminados são quase a única forma de produzir exemplos explícitos de medidas parametrizadas gradiente. Certamente lembramos-nos do Lema de Riemann-Lebesgue (que nos permite considerar medidas parametrizadas gradiente associadas a gradientes de funções periódicas). O problema é decidir quando estas são ou não laminados.

Sejam $F_i \in \mathbb{M}^{m\times n}$, $i = 1, 2$, $a \in \mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^n$ um vector unitário dados de tal modo que

$$F_1 - F_2 = a \otimes b. \tag{41}$$

Se χ_t é a função característica do intervalo $(0, t)$ em $(0, 1)$ extendida periodicamente, a medida de Young associada à sucessão de gradientes

$$\nabla u_j(x) = F_2 + \chi_t(jx \cdot b) a \otimes b,$$
$$u_j(x) = F_2 x + \frac{1}{j}\int_0^{jx\cdot b} \chi_t(s) ds\ a$$

é

$$\nu_x = \nu = t\delta_{F_1} + (1-t)\delta_{F_2},\ x \in \Omega, \tag{42}$$

onde Ω é um qualquer aberto limitado em $\mathbb{R}^n$. Consequentemente a medida de probabilidade ν em (42) é uma medida de Young gradiente para qualquer $t \in [0, 1]$ se a condição de compatibilidade (41) se verificar. Aplicando o

LEMA 298. *Seja (v_j) uma sucessão limitada em $W^{1,p}(\Omega)$ tal que a sucessão (∇v_j) gera a medida de Young $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$. Seja*

$$\nabla u(x) = \int_{\mathbb{M}^{m\times n}} A d\nu_x(A) \in \mathbb{M}^{m\times n},\ u \in W^{1,p}(\Omega),$$

tal que $v_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Então existe uma nova sucessão (u_k), limitada em $W^{1,p}(\Omega)$, tal que (∇u_k) gera a mesma medida de Young ν e $u_k - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo o k. Se para $p < \infty$ $(|\nabla v_j|^p)$ é equi-integrável, então $(|\nabla u_k|^p)$ também o é.

(que poderá ser encontrada em **[24]**, pág73) a (42), podemos supor s.p.g. que $u_j - u_F \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$, $F = tF_1 + (1-t)F_2$. Além disso ∇u_j toma os valores F_1 e F_2 excepto em pequenos conjuntos E_j, $|E_j| \to 0$. Gostaríamos de dar um passo mais à frente nesta construção. Suponhamos agora (além de (41)) que

$$
\begin{aligned}
F_2 &= t_0 F_2^{(1)} + (1-t_0)F_2^{(2)},\ t_0 \in (0,1),\\
F_2^{(1)} - F_2^{(2)} &= c \otimes d,
\end{aligned}
\tag{43}
$$

onde $c \in \mathbb{R}^m$ e $d \in \mathbb{R}^n$ é outro vector unitário. Seja Ω_i^j a parte de Ω onde $\nabla u_j = F_i$. Para j e i fixados, baseados na condição de compatibilidade (43), podemos construir uma sucessão de gradientes (∇v_k^{ji}), $v_k^{ji} - u_{F_2} \in W_0^{1,\infty}(\Omega_i^j)$, cujos valores alternam essencialmente entre $F_2^{(1)}$ e $F_2^{(2)}$ com a frequência pré-designada $t_0 \in (0,1)$ e normal d às camadas dispostas. Seja E_k^{ji} o conjunto onde ∇v_k^{ji} não toma o valor $F_2^{(1)}$ ou $F_2^{(2)}$. Escolhendo $k = k(j,i)$ de tal modo que

$$\frac{|E_k^{ji}|}{|\Omega_i^j|} \to 0$$

quando $j \to \infty$ uniformemente em $i = 1, 2$. Definimos

$$u^{(j)}(x) = \begin{cases} v_{k(j,i)}^{ji}(x) & x \in \Omega_i^j \\ u_j(x) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esta sucessão $(u^{(j)})$ é uniformemente limitada em $W^{1,\infty}(\Omega)$ e satisfaz $u^{(j)} - u_F \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$. A medida de Young homogénea associada a $(\nabla u^{(j)})$ é

$$\nu = t\delta_{F_1} + (1-t)\left(t_0\delta_{F_2^{(1)}} + (1-t_0)\delta_{F_2^{(2)}}\right).$$

Esta medida de probabilidade é uma medida de Young gradiente supostas as condições de compatibilidade (41) e (43). Podemos generalizar esta construção de "camadas sobre camadas" envolvendo um número finito de matrizes, se a condição de car-1 estiver definida de modo recursivo (como na condição (H_l)).

Uma consequência imediata é então a seguinte.

PROPOSIÇÃO 299. *Se a família* $\{(t_i, Y_i)\}_{1\leq i\leq l}$ *satisfaz a condição* (H_l)*, a medida de probabilidade* $\nu = \sum_i t_i\delta_{Y_i}$ *é uma medida de Young gradiente.*

Podemos até tomar limites fracos* no sentido das medidas de sucessões de combinações convexas finitas de massas de Dirac que verifiquem (H_l). Estes limites fracos serão também medidas de Young: o argumento envolve tomar sucessões diagonais. Note-se que de facto o conjunto das medidas de Young é fracamente* fechado. Estes limites fracos, de certa forma, podem ser interpretados como condições (H_l) quando $l \to \infty$. Definamos então laminado.

DEFINIÇÃO 300. *Uma medida de probabilidade* ν *em* $\mathbb{M}^{m\times n}$ *diz-se um laminado de ordem finita se existe uma família* $\{(\lambda_i, F_i)\}_{i=1,\ldots,l}$ *que satisfaz* (H_l) *e*

$$\nu = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i\delta_{F_i}.$$

Uma medida de probabilidade ν *é um laminado se existe uma sucessão* ν_j *de laminados de ordem finita com suporte num conjunto compacto fixado tal que*

$$\nu_j \xrightarrow{*} \nu$$

no sentido das medidas.

Podemos agora formular a seguinte

PROPOSIÇÃO 301. *Todo o laminado é uma medida parametrizada gradiente homogénea.*

DEMONSTRAÇÃO. Cada laminado de ordem finita é uma medida de Young gradiente homogénea, e como os laminados se obtêm como limites fracos* de laminados de ordem finita, e como o conjunto das medidas de Young gradiente homogéneas é fracamente* fechado, os laminados estarão neste conjunto. □

Existem de facto duas formas de produzir explicitamente medidas parametrizadas gradiente. Uma é os laminados e a outra é o lema de Riemann-Lebesgue para gradientes periódicos. A dificuldade, como já foi dito, é decidir quando conseguimos ou não obter a mesma medida com ambos.

Pode ser extremamente difícil decidir quando uma dada medida de probabilidade é ou não um laminado, mesmo em exemplos que parecem, à primeira vista, simples.

EXEMPLO 302. Consideremos os seguintes gradientes, dados pelas quatro matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e consideremos também as quatro matrizes adicionais

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, J_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A medida

$$\frac{1}{2}\delta_{A_1} + \frac{1}{4}\delta_{A_2} + \frac{1}{8}\delta_{A_3} + \frac{1}{16}\delta_{A_4} + \frac{1}{16}\delta_{J_4}$$

é um laminado de ordem finita. A sucessão de medidas

$$\left(\frac{1}{2}\delta_{A_1} + \frac{1}{4}\delta_{A_2} + \frac{1}{8}\delta_{A_3} + \frac{1}{16}\delta_{A_4} + \ldots + \frac{1}{2^{4k+1}}\delta_{A_1} + \frac{1}{2^{4k+2}}\delta_{A_2} + \frac{1}{2^{4k+3}}\delta_{A_3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^{4(k+1)}}\delta_{A_4} + \frac{1}{2^{4(k+1)}}\delta_{J_4}\right)_k$$

é também uma sucessão de laminados de ordem finita. Concluímos então que

$$\frac{8}{15}\delta_{A_1} + \frac{4}{15}\delta_{A_2} + \frac{2}{15}\delta_{A_3} + \frac{1}{15}\delta_{A_4}$$

é um laminado, mas no entanto não é um laminado de ordem finita.

OBSERVAÇÃO 303. Poderemos encontrar outros exemplos em [4].

Uma pergunta razoável que poderemos colocar é a seguinte: qualquer medida parametrizada gradiente homogénea será um laminado? Tentaremos responder a esta pergunta durante o próximo capítulo.

Existe uma dualidade entre medidas parametrizadas gradiente e Q-convexidade, e entre laminados e R-convexidade. A ligação é a desigualdade de Jensen. Neste sentido, o problema de decidir se qualquer medida parametrizada gradiente é um laminado é equivalente ao problema de decidir se a R-convexidade implica a Q-convexidade. Ambos os problemas são igualmente difíceis à primeira vista, e possuímos a resposta para ambos excepto no caso 2×2.

CAPíTULO 6

Relações entre P-, Q- e R-convexidade

1. Implicações conhecidas

O seguinte resultado é devido essencialmente a Morrey.

TEOREMA 304. **i:** *Seja* $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, *então*

$$W \text{ convexa} \Rightarrow W\ P-\text{convexa} \Rightarrow W\ Q-\text{convexa} \Rightarrow W\ R-\text{convexa}.$$

Se $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to (-\infty, +\infty]$, *então*

$$W \text{ convexa} \Rightarrow W\ P-\text{convexa} \Rightarrow W\ R-\text{convexa}.$$

ii: *Se* $m = 1$ *ou* $n = 1$, *estas noções são equivalentes.*

iii: *Se* $W \in C^2(\mathbb{R}^{nm})$, *então a R-convexidade é equivalente à condição de Legendre-Hadamard (ou condição de elipticidade)*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial W(A)}{\partial A^i_\alpha \partial A^j_\beta} \lambda^i \lambda^j \mu_\alpha \mu_\beta \geq 0 \qquad (L-H)$$

para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^n$, $A = (A^i_\alpha)_{1\leq i\leq m, 1\leq\alpha\leq n} \in \mathbb{M}^{m\times n}$.

iv: *Se* $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ *é convexa, P-convexa, Q-convexa ou R-convexa, então* W *é localmente lipschitziana.*

Antes de demonstrarmos o teorema damos um lema envolvendo duas propriedades básicas dos determinantes.

LEMA 305. *Seja* $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$ *e* $M(A)$ *o vector de todos os menores da matriz* $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$.

i: *Para quaisquer* $A, B \in \mathbb{M}^{m\times n}$ *com* $car\{A - B\} \leq 1$ *e qualquer* $\lambda \in [0, 1]$, *então*

$$M(\lambda A + (1 - \lambda)B) = \lambda M(A) + (1 - \lambda)M(B);$$

ii: *para qualquer domínio* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *e quaisquer* $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$, $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, *então*

$$M(A) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega M(A+\nabla\varphi(x))dx,$$

ou seja, M *é Q-afim (i.e.,* M *e* $-M$ *são Q-convexas).*

DEMONSTRAÇÃO. Vejamos o caso $n = m = 2$ (contido no caso geral, cuja demonstração pode ser consultada em [8], pág.192 e 195).

Temos então

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}$$

e

$$M(A) = (A, \det A) = (A_1^1, A_2^1, A_1^2, A_2^2, A_1^1A_2^2 - A_2^1A_1^2)$$

i: Como $car\{A-B\} \leq 1$, temos que existem $a, b \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$B = A + a\otimes b = \begin{pmatrix} A_1^1 + a^1b_1 & A_2^1 + a^1b_2 \\ A_1^2 + a^2b_1 & A_2^2 + a^2b_2 \end{pmatrix}.$$

Daqui concluímos que

$$\det(\lambda A + (1-\lambda)B) = \det(\lambda A + (1-\lambda)(A + a\otimes b)) = \det(A + (1-\lambda)a\otimes b) =$$
$$= \lambda \det A + (1-\lambda)\det B$$

É então fácil obter

$$M(\lambda A + (1-\lambda)B) = (\lambda A + (1-\lambda)B, \det(\lambda A + (1-\lambda)B) =$$
$$= (\lambda A + (1-\lambda)B, \lambda\det A + (1-\lambda)\det B) = \lambda(A, \det A) + (1-\lambda)(B, \det B) =$$
$$= \lambda M(A) + (1-\lambda)M(B)$$

sempre que $car\{A-B\} \leq 1$.

ii: Notemos que se $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, então, pelo teorema de Schwarz, temos

$$\det\nabla\varphi = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right).$$

Obtemos então, utilizando a igualdade acima

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \det(A+\nabla\varphi(x))dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \det\begin{pmatrix} A_1^1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & A_2^1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} \\ A_1^2+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & A_2^2+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\end{pmatrix} dx =$$

$$= \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \det A\, dx + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega A_1^1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}dx + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega A_2^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}dx - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega A_2^1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}dx +$$

$$- \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega A_1^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}dx + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right)dx =$$

o que nos dá, se $\varphi\in C_0^2(\Omega,\mathbb{R}^2)$,

$$= \det A \tag{44}$$

que é o resultado desejado. Por densidade, (44) verifica-se também se $\varphi\in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^2)$.

Deduzimos então que qualquer que seja $\varphi\in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^2)$, teremos

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega M(A+\nabla\varphi(x))dx = \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega (A+\nabla\varphi(x))dx, \int_\Omega \det(A+\nabla\varphi(x))dx\right) =$$

$$= \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega A dx + \int_\Omega \nabla\varphi(x))dx, \int_\Omega \det(A+\nabla\varphi(x))dx\right) = M(A),$$

concluindo assim a demonstração.

□

DEMONSTRAÇÃO. (do teorema 304)

i: 1^a Parte) W convexa $\Rightarrow$ W P-convexa

Seja $W:\mathbb{M}^{m\times n}\to(-\infty,+\infty]$, convexa. Então, existe $g:\mathbb{R}^{\tau(n,m)}\to(-\infty,+\infty]$ convexa, tal que

$$W(A) = g(M(A))$$

pois basta tomar $g(M(A)) = g(A) = W(A)$, pois, por hipótese, esta função é convexa.

2^a Parte) W P-convexa $\Rightarrow$ W Q-convexa

Como W é P-convexa, existe $g:\mathbb{R}^{\tau(n,m)}\to\mathbb{R}$ convexa, tal que $W(A) = g(M(A))$.

Logo, obtemos que

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega W(A+\nabla\varphi(x))dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g(M(A+\nabla\varphi(x)))dx \geq$$

e aplicando a desigualdade de Jensen e a alínea ii do lema anterior, vem

$$\geq g\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega M(A+\nabla\varphi(x))dx\right) = g(M(A)) = W(A)$$

para quaisquer domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$ e $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. A desigualdade acima é precisamente a definição de Q-convexidade.

3^a Parte) W Q-convexa $\Rightarrow$ W R-convexa

Recordamos que queremos mostrar que

$$W(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda W(A) + (1-\lambda)W(B)$$

para quaisquer $\lambda \in [0,1]$ e $A, B \in \mathbb{M}^{m\times n}$ com $car\{A - B\} \leq 1$. Dividimos a demonstração em duas etapas.

1^a Etapa) Sejam $\lambda \in [0,1]$ e $A, B \in \mathbb{M}^{m\times n}$ com $car\{A - B\} \leq 1$ fixos. Seja $\varepsilon > 0$. Supomos (conforme veremos na 2^a etapa) que existe um domínio limitado $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ $(\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset)$ e $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tais que

$$(45) \qquad \begin{cases} \big|\,|\Omega_1| - \lambda|\Omega|\,\big| \leq \varepsilon \\ \big|\,|\Omega_2| - (1-\lambda)|\Omega|\,\big| \leq \varepsilon \\ \nabla\varphi(x) = \begin{cases} (1-\lambda)(A-B) & \text{se } x \in \Omega_1 \\ -\lambda(A-B) & \text{se } x \in \Omega_2 \end{cases} \\ |\varphi|_{L^\infty} \leq k = k(A,B). \end{cases}$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \int_\Omega W(\lambda A + (1-\lambda)B + \nabla\varphi(x))dx &= \int_{\Omega_1} W(\lambda A + (1-\lambda)B + \nabla\varphi(x))dx + \\ + \int_{\Omega_2} W(\lambda A + (1-\lambda)B + \nabla\varphi(x))dx &+ \int_{\Omega\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)} W(\lambda A + (1-\lambda)B + \nabla\varphi(x))dx = \\ = \int_{\Omega_1} W(A)dx + \int_{\Omega_2} W(B)dx &+ \int_{\Omega\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)} W(\lambda A + (1-\lambda)B + \nabla\varphi(x))dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, como W é Q-convexa, obtemos

$$\int_\Omega W(\lambda A + (1-\lambda)B + \nabla\varphi(x)) \geq W(\lambda A + (1-\lambda)B)|\Omega|$$

o que nos dá

$$W(\lambda A + (1-\lambda)B)|\Omega| \leq \int_{\Omega_1} W(A)dx + \int_{\Omega_2} W(B)dx + \int_{\Omega\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)} W(\lambda A + (1-\lambda)B + \nabla\varphi(x))dx.$$

Notemos agora que, como por hipótese

$$(46) \qquad \big|\,|\Omega_1| - \lambda|\Omega|\,\big| \leq \varepsilon \; e \; \big|\,|\Omega_2| - (1-\lambda)|\Omega|\,\big| \leq \varepsilon$$

deduzimos que

$$|\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)| \leq 2\varepsilon$$

pois $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, por (46) e porque $|\nabla \varphi|_{L^\infty} \leq k$ concluímos que

$$W(\lambda A + (1-\lambda)B)|\Omega| \leq \lambda|\Omega|W(A) + (1-\lambda)|\Omega|W(B).$$

2^a Etapa) Falta ainda mostrarmos (45). Observemos que se $car\{A - B\} \leq 1$, então existe uma matriz R invertível $n \times n$ tal que

$$A - B = R \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ & 0 & \end{pmatrix}. \tag{47}$$

escolhemos então $\Omega = (0,1)^n$ e deduzimos que qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existem $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ ($\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ e $\psi_1 \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \big|\,|\Omega_1| - \lambda|\Omega|\,\big| \leq \varepsilon \\ \\ \big|\,|\Omega_2| - (1-\lambda)|\Omega|\,\big| \leq \varepsilon \\ \\ \nabla\psi_1(x) = \begin{cases} (1-\lambda)(\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) & \text{se } x \in \Omega_1 \\ -\lambda(\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) & \text{se } x \in \Omega_2 \end{cases} \\ \\ |\psi_1|_{L^\infty} \leq k = k(\alpha). \end{cases} \tag{48}$$

Definimos então $\psi(x) = (\psi_1(x), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ e $\varphi(x) = R\psi(x)$, qualquer que seja $x \in \Omega$. Combinando esta definição com (47) e (48), obtemos (45).

4^a Parte) Se considerarmos o caso onde $W : \mathbb{M}^{m \times n} \to (-\infty, +\infty]$, a implicação W convexa $\Rightarrow$ W P-convexa demonstra-se da mesma forma que no caso em que W toma apenas valores finitos. Vejamos agora a implicação W P-convexa $\Rightarrow$ W R-convexa. como W é P-convexa, existe $g : \mathbb{R}^{\tau(n,m)} \to (-\infty, +\infty]$ convexa tal que $W(A) = g(M(A))$. Seja $\lambda \in [0,1], A, B \in \mathbb{M}^{m \times n}$ com $car\{A - B\} \leq 1$. Então, utilizando a alínea i) do lema anterior, concluímos que

$$W(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq g(M(\lambda A + (1-\lambda)B)) = g(\lambda M(A) + (1-\lambda)M(B)) \leq$$
$$\leq \lambda g(M(A)) + (1-\lambda)g(M(B)) = \lambda W(A) + (1-\lambda)W(B)$$

ii: Se $m = 1$ ou $n = 1$, então para quaisquer duas matrizes $A, B \in \mathbb{M}^{m\times n}$ temos $car\{A - B\} \leq 1$, logo a R-convexidade e a convexidade são equivalentes e portanto também todas as outras o são.

iii: Suponhamos que $W \in C^2(\mathbb{R}^{nm})$ e R-convexa,i.e.,

$$\varphi(t) = W(A + t\lambda \otimes \mu)$$

é convexa em t, quaisquer que sejam $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^n$. Como φ é também C^2, calculando $\varphi''(t)$ (que é maior ou igual a zero pois φ é convexa) obtemos a condição de Legendre-Hadamard.

iv: Se W é R-convexa, então é convexa em cada uma das suas variáveis, logo, pelo teorema 248, concluímos que W é localmente lipschitziana.

□

2. Exemplos e contra-exemplos

Ao longo desta secção iremos ver o que acontece em alguns casos particulares, e iremos também mostrar alguns contra-exemplos.

2.1. Funções Q-afins. Começamos por recordar a definição de função Q-afim.

DEFINIÇÃO 306. *Uma função Borel mensurável, localmente integrável $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ diz-se Q-afim se W e $-W$ são Q-convexas.*

Primeiro apresentamos um lema que será utilizado na demonstração do teorema que se lhe segue:

LEMA 307. *Seja $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$,*

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^m & \dots & A_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

Seja, para $1 \leq s \leq n \wedge (m-1)$

$$h(A) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{\binom{n}{s}} \sum_{i=1}^{\binom{m-1}{s}} \gamma_{l\alpha}^i A_l^1 \left(adj_s \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \right)_\alpha^i .$$

Se h é R-afim, i.e. $h(A + a\otimes b) = h(A) + \langle \nabla h(A), a\otimes b\rangle$, então existe $\delta^j_\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le \beta \le \binom{n}{s+1}$, $1 \le j \le \binom{m}{s+1}$ tais que

$$h(A) = \sum_{\beta=1}^{\binom{n}{s+1}} \sum_{j=1}^{\binom{m}{s+1}} \delta^j_\beta \left(adj_{s+1} \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \right)^j_\beta = \langle \delta, adj_{s+1} A\rangle.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.123. □

TEOREMA 308. *Seja $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R}$. As seguintes condições são equivalentes:*

i: *W é Q-afim.*

ii: *W é R-afim, i.e. W e $-W$ são R-convexas, i.e.*

$$W(\lambda A + (1-\lambda)B) = \lambda W(A) + (1-\lambda)W(B)$$

para quaisquer $\lambda \in [0,1]$ e $A, B \in \mathbb{M}^{m\times n}$ com $car\{A - B\} \le 1$.

ii': *Para quaisquer $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$, $a \in \mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^n$*

$$W(A + a\otimes b) = W(A) + \langle \nabla W(A), a\otimes b\rangle$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto escalar em $\mathbb{R}^{nm}$.

iii: *W é P-afim, i.e. W e $-W$ são P-convexas.*

iii': *Existe $\beta \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$:*

$$W(A) = W(0) + \langle \beta, M(A)\rangle$$

para qualquer $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto escalar em $\mathbb{R}^{\tau(n,m)}$.

DEMONSTRAÇÃO. $i \Rightarrow ii$. Resulta imediatamente do teorema 304, pois

$$W\ Q-convexa \;\Rightarrow\; W\ R-convexa$$

$$-W\ Q-convexa \;\Rightarrow\; -W\ R-convexa$$

$ii' \Rightarrow ii$. Note-se que ii' pode ser escrita como:

Quaisquer que sejam $A, B \in \mathbb{M}^{m\times n}$ com $car\{A - B\} \le 1$,

$$W(B) = W(A) + \langle \nabla W(A), B - A\rangle,$$

i.e. W é R-afim.

ii $\Rightarrow$ *ii'*. (não é necessária à demonstração). Fixemos $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$, $a \in \mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^n$ e seja, para $t \in [0,1]$

$$\varphi(t) = W(A + ta \otimes b).$$

Como W é R-afim, então φ é afim e portanto, em particular, $\varphi \in C^1$ e, também em particular,

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t-0} = \varphi'(0) \Leftrightarrow$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0). \tag{49}$$

Como $\varphi(t) = W(A + ta \otimes b)$, então φ diferenciável implica W diferenciável e, por (49), vem que

$$W(A + ta \otimes b) = W(A) + t\langle \nabla W(A), a \otimes b\rangle,$$

obtendo-se então o resultado requerido fazendo $t = 1$.

ii' $\Rightarrow$ *iii'*. Seja

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^m & \dots & A_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que W é tal que

$$W(A + a \otimes b) - W(A) = \langle \nabla W(A), a \otimes b\rangle \tag{50}$$

para quaisquer $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$, $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$. Queremos mostrar que existe $\beta \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$ tal que

$$W(A) - W(0) = \langle \beta, M(A)\rangle \tag{51}$$

qualquer que seja $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$. Demonstramos por indução em m.

1^a Etapa: $m = 1$. Como $m = 1$, (50) pode ser escrita como

$$W(A + B) - W(A) = \langle \nabla W(A), B\rangle$$

para quaisquer $A, B \in \mathbb{R}^n$, ou seja, W é afim. Fazendo $A = 0$, $B = A$, temos

$$W(A) - W(0) = \langle \nabla W(0), A\rangle$$

mas como $A \in \mathbb{R}^n$ (i.e.$m = 1$), $M(A) = A$, logo, escolhendo $\nabla W(0) = B$, obtemos imediatamente

$$W(A) - W(0) = \langle \beta, M(A)\rangle,$$

qualquer que seja $A \in \mathbb{R}^n$.

1^{a}' Etapa: $m = 2$. Esta etapa não é necessária, mas iremos prová-la para melhor ilustrarmos a hereditariedade. Seja

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & \dots & A_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix}$$

e para $a \in \mathbb{R}^2$, $b \in \mathbb{R}^n$

$$a \otimes b = \begin{pmatrix} a^1 b \\ a^2 b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 b_1 & \dots & a^1 b_n \\ a^2 b_1 & \dots & a^2 b_n \end{pmatrix}.$$

Queremos mostrar que se W é R-afim, i.e.

$$W(A + a \otimes b) - W(A) = \langle \nabla W(A), a \otimes b \rangle \tag{52}$$

então existe $\beta \in \mathbb{R}^{\tau(n,2)}$ tal que

$$W(A) = W(0) + \langle \beta, M(A) \rangle$$

onde

$$M(A) = (adj_2 A) \in \mathbb{R}^{n2} \times \mathbb{R}^{\binom{n}{2}} = \mathbb{R}^{\tau(n,2)}.$$

Notemos que, a menos de um sinal ou da ordem, um elemento da matriz $adj_2 A$ é essencialmente $\det(A_k, A_l)$, $1 \le k < l \le n$. Fixamos então A^2, escolhemos $a^1 = 1$, $a^2 = 0$ em (52) e definimos

$$g(A^1) = W \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix}.$$

Então $g(A^1 + tb) = W \begin{pmatrix} A^1 + tb \\ A^2 \end{pmatrix}$ é afim em t e podemos então utilizar a 1^a etapa para encontrar $\gamma = \gamma(A^2) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$g(A^1) = g(0) + \langle \gamma(A^2), A^1 \rangle = W \begin{pmatrix} 0 \\ A^2 \end{pmatrix} + \langle \gamma(A^2), A^1 \rangle.$$

Repetindo o argumento e fixando agora $A^1 = 0$, temos

$$W \begin{pmatrix} 0 \\ A^2 \end{pmatrix} = W(0) + \langle \beta^2, A^2 \rangle.$$

Combinando estas duas últimas igualdades, vem então que

$$W \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 0 \\ A^2 \end{pmatrix} + \langle \gamma(A^2), A^1 \rangle = W(0) + \langle \beta^2, A^2 \rangle + \langle \gamma(A^2), A^1 \rangle. \tag{53}$$

Por esta equação, como W é R-afim, então é afim (quando A^1 está fixado) com respeito a A^2, logo $\gamma(A^2) = (\gamma_1(A^2), \dots, \gamma_n(A^2))$ é afim e portanto existem $\beta^1 = (\beta_1^1, \dots, \beta_n^1) \in \mathbb{R}^n$, $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{R}^n$

tais que

$$\gamma_l(A^2) = \beta_l^1 + \langle \delta_l, A^2 \rangle, \ l = 1, ..., n.$$

(53) pode então reescrever-se como

$$W\begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = W(0) + \langle \beta^2, A^2 \rangle + \langle \beta^1, A^1 \rangle + \sum_{l=1}^{n} A_l^1 \langle \delta_l, A^2 \rangle =$$

(54)
$$= W(0) + \langle \beta^1, A^1 \rangle + \langle \beta^2, A^2 \rangle + \sum_{l=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \delta_{l\alpha} A_l^1 A_\alpha^2.$$

Como W é R-afim obtemos de (54) que se

$$h(A) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \delta_{l\alpha} A_l^1 A_\alpha^2$$

então h é R-afim e portanto, aplicando o lema 307, temos que existe $\varepsilon_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq \binom{n}{2}$ tal que

$$h(A) = \sum_{k=1}^{\binom{n}{2}} \varepsilon_k \left(adj_2 \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} \right)_k = \langle \varepsilon, adj_2 A \rangle,$$

que combinada com (54) nos dá

$$W\begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = W(0) + \langle \beta, M \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} \rangle,$$

o que conclui esta etapa.

2^a Etapa: hereditariedade. Suponhamos que demonstrámos esta implicação para todo o $l < m$. Fixando $A^2, ..., A^m$ e utilizando o facto de que W é R-afim, temos que W é afim em A^1, para $A^2, ..., A^m$ fixados. Portanto, existem $\psi \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} = (\psi_1, ..., \psi_n)$ e $\chi \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}$ tais que

(55)
$$W(A) = \langle \psi \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}, A^1 \rangle + \chi \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}.$$

Procedendo agora como na etapa anterior (com $A^2, ..., A^m$ em vez de A_2), procedendo como na etapa anterior e utilizando a hipótese de indução encontramos

(56)
$$\begin{cases} \chi \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} = W(0) + \langle \beta^0, M \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \rangle \\ \\ \psi_l \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} = \beta_l + \langle \gamma_l, M \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \rangle, l = 1, ..., n. \end{cases}$$

para alguns $\beta^0, \gamma_1, ..., \gamma_n \in \mathbb{R}^{\tau(n,m-1)}$ e $\beta^1 = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n$.Combinando (55) e (56) obtemos

$$W(A) = \langle \psi \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}, A^1 \rangle + \chi \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} = \langle \psi \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}, A^1 \rangle + W(0) + \langle \beta^0, M \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \rangle =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \psi_l \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} A_l^1 + W(0) + \langle \beta^0, M \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \rangle = \sum_{l=1}^{n} \left(\beta_l + \langle \gamma_l, M \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \rangle \right) A_l^1 + W(0) +$$

$$+ \langle \beta^0, M \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \rangle = W(0) + \langle \beta^0, M \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \rangle + \langle \beta^1, A^1 \rangle + \sum_{l=1}^{n} A_l^1 \langle \gamma_l, M \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \rangle =$$

$$(57) \qquad = W(0) + \langle \beta^0, M \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \rangle + \langle \beta^1, A^1 \rangle + \sum_{s=1}^{n \wedge (m-1)} \sum_{l=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{\binom{n}{s}} \sum_{i=1}^{\binom{m-1}{s}} \gamma_{l\alpha}^{is} A_l^1 \left(adj_s \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \right)_\alpha^i .$$

Pondo

$$h(A) = \sum_{l=1}^{n} A_l^1 \langle \gamma_l, M \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \rangle = \sum_{l=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{\binom{n}{s}} \sum_{i=1}^{\binom{m-1}{s}} \gamma_{l\alpha}^{is} A_l^1 \left(adj_s \begin{pmatrix} A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix} \right)_\alpha^i ,$$

deduzimos do facto de W ser R-afim e de (57)que h é R-afim. Aplicando então o lema 307 temos que existem $\delta_\beta^{js} \in \mathbb{R}$, $1 \leq s \leq n \wedge (m-1)$, $1 \leq \beta \leq \binom{n}{s+1}$, $1 \leq j \leq \binom{m}{s+1}$ tais que

$$h(A) = \sum_{s=1}^{n \wedge (m-1)} \sum_{\beta=1}^{\binom{n}{s+1}} \sum_{j=1}^{\binom{m}{s+1}} \delta_\beta^{js} (adj_{s+1} A)_\beta^j.$$

Combinando esta igualdade com (57) (semelhante à etapa anterior, novamente) encontramos $\beta \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$ tal que

$$W(A) = W(0) + \langle \beta, M(A) \rangle,$$

que é o resultado que queríamos.

iii' $\Rightarrow$ *iii*. Por hipótese existe $\beta \in \mathbb{R}^{\tau(n,m}$ tal que

$$W(A) = W(0) + \langle \beta, M(A) \rangle.$$

Consequentemente W é afim nos menores de A, ou seja, W é P-afim.

iii $\Rightarrow$ *i*. Resulta imediatamente do teorema 304, pois

$$W \ P - convexa \ \Rightarrow \ W \ Q - convexa$$

$$-W \ P - convexa \ \Rightarrow \ -W \ Q - convexa.$$

□

EXEMPLO 309. **i:** Se $m = n = 2$, então o teorema diz-nos que as únicas funções Q-afins são do tipo

$$W(A) = W(0) + \langle \beta, \alpha \rangle + \gamma \det A.$$

Em particular a única função Q-afim totalmente não-linear é $\det A$ (pela alínea ii').

ii: Em geral, se $n, m > 1$, então as únicas funções não-lineares Q-afins são os menores $s \times s$ da matriz $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$, onde $2 \leq s \leq n \wedge m$.

2.2. Formas quadráticas.

Este caso particular tem bastante interesse pois as equações de Euler associadas são lineares. Primeiro enunciamos um lema que será necessário à demonstração do teorema subsequente.

LEMA 310. *Seja S uma matriz simétrica em $\mathbb{M}^{(m\times n)\cdot(m\times n)}$ e*

$$W(A) = \langle SA, A \rangle.$$

Então

i: *W é convexa sse*

$$W(A) \geq 0,$$

qualquer que seja $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$.

ii: *W é P-convexa sse existe $\alpha \in \mathbb{R}^{\sigma(2)}$ tal que*

$$W(A) \geq \langle \alpha, adj_2 A \rangle$$

para qualquer$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^{\sigma(2)}$ e $\sigma(2) = \binom{m}{2}\binom{n}{2}$.

iii: *W é Q-convexa sse*

$$\int_\Omega W(\nabla \varphi(x))dx \geq 0,$$

para qualquer domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e qualquer $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

iv: *W é R-convexa sse*

$$W(a \otimes b) \geq 0,$$

quaisquer que sejam $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$.

DEMONSTRAÇÃO. $i)(\Rightarrow)$ Suponhamos que W é convexa. Então, pela definição de W temos que, para quaisquer que sejam $A, B \in \mathbb{M}^{m\times n}$

$$\langle S(\lambda A + (1-\lambda)B), \lambda A + (1-\lambda)B\rangle \leq \lambda\langle SA, A\rangle + (1-\lambda)\langle SB, B\rangle$$

qualquer que seja $\lambda \in [0,1]$. Em particular

$$\langle S(\lambda A), \lambda A\rangle \leq \lambda\langle SA, A\rangle \Leftrightarrow \lambda^2\langle SA, A\rangle \leq \lambda\langle SA, A\rangle \;\Rightarrow\; W(A) \geq 0$$

qualquer que seja $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$, pois $\lambda \in [0,1]$.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos agora que $W(A) \geq 0$, qualquer que seja $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$. Então, para $A, B \in \mathbb{M}^{m\times n}$ quaisquer,

$$\langle SA, A\rangle \geq 0 \Rightarrow \lambda^2\langle SA, A\rangle \leq \lambda\langle SA, A\rangle$$

$$\langle SB, B\rangle \geq 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2\langle SB, B\rangle \leq (1-\lambda)\langle SB, B\rangle,$$

qualquer que seja $\lambda \in [0,1]$. Somando os respectivos lados direitos destas duas últimas implicações, obtemos

$$\lambda^2\langle SA, A\rangle + (1-\lambda)^2\langle SB, B\rangle \leq \lambda\langle SA, A\rangle + (1-\lambda)\langle SB, B\rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle S(\lambda A + (1-\lambda)B), \lambda A + (1-\lambda)B\rangle \leq \lambda\langle SA, A\rangle + (1-\lambda)\langle SB, B\rangle,$$

qualquer que seja $\lambda \in [0,1]$, i.e. W é convexa.

$ii)(\Leftarrow)$ Suponhamos que existe $\alpha \in \mathbb{R}^{\sigma(2)}$:

$$W(A) \geq \langle \alpha, adj_2 A\rangle \tag{58}$$

qualquer que seja $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$. Se tomarmos

$$g(A) = W(A) - \langle \alpha, adj_2 A\rangle$$

então por (58) temos que $g(A) \geq 0$ e pela alínea $i)$ deste lema concluímos que g é convexa. Então

$$W(A) = g(A) + \langle \alpha, adj_2 A\rangle$$

é P-convexa.

$(\Rightarrow)$ Suponhamos agora que W é P-convexa. Queremos mostrar que (58) se verifica para algum $\alpha \in \mathbb{R}^{\sigma(2)}$. Aplicando o teorema 287, 2^a parte, alínea iii, fazendo $A = 0$ e $B = A$ (tendo em mente que $W(0)=0$) temos que existe $\beta = (\beta_{\sigma(1)}, ..., \beta_{\sigma(n\wedge m)}) \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$ tal que

$$W(A) \geq \langle \beta, M(A) \rangle = \sum_{s=1}^{n\wedge m} \langle \beta_{\sigma(s)}, adj_s A \rangle.$$

Multiplicando A por $\varepsilon > 0$, obtemos

$$W(\varepsilon A) = \langle S(\varepsilon A), \varepsilon A \rangle = \varepsilon^2 W(A).$$

Por outro lado, vem que

$$W(\varepsilon A) \geq \langle \beta, M(\varepsilon A) \rangle = \varepsilon \langle \beta_{\sigma(1)}, A \rangle + \varepsilon^2 \langle \beta_{\sigma(2)}, adj_2 A \rangle + O(\varepsilon^3)$$

portanto, em particular,

$$\varepsilon^2 W(A) \geq \varepsilon \langle \beta_{\sigma(1)}, A \rangle + \varepsilon^2 \langle \beta_{\sigma(2)}, adj_2 A \rangle + O(\varepsilon^3).$$

Dividindo por ε e fazendo $\varepsilon \to 0$ deduzimos que

$$\langle \beta_{\sigma(1)}, A \rangle \leq 0$$

qualquer que seja $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$, i.e., $\beta_{\sigma(1)} = 0$ o que, por sua vez, nos dá

$$\varepsilon^2 f(A) \geq \varepsilon^2 \langle \beta_{\sigma(2)}, adj_2 A \rangle + O(\varepsilon^3).$$

Dividindo agora por ε^2 e fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos

$$W(A) \geq \langle \beta_{\sigma(2)}, adj_2 A \rangle,$$

ou seja, (287) com $\alpha = \beta_{\sigma(2)}$.

iii)($\Rightarrow$) Suponhamos que W é Q-convexa ou seja, por definição

$$W(A) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega W(A + \nabla\varphi(x))dx$$

para qualquer domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e quaisquer $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$, $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Em particular, tomando $A = 0$ e observando que $W(0) = 0$, obtemos o desejado.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que

$$\int_\Omega W(\nabla\varphi(x))dx \geq 0,$$

para qualquer domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e qualquer $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Seja $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$ qualquer. Então

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega W(A+\nabla\varphi(x))dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \langle S(A+\nabla\varphi(x)), A+\nabla\varphi(x)\rangle dx =$$
$$= \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \langle SA + S\nabla\varphi(x), A+\nabla\varphi(x)\rangle dx \geq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \langle SA, A\rangle dx = W(A).$$

iv) Basta tomar $A = a\otimes b$, com $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$ e utilizar a alínea *i)*. □

TEOREMA 311. *Seja S uma matriz simétrica em $\mathbb{M}^{(m\times n)\cdot(m\times n)}$,*

$$W(A) = \langle SA, A\rangle$$

onde $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^{nm}$. Então

i: *W é R-convexa sse W é Q-convexa.*

ii: *Se $m = 2$ ou $n = 2$, então*

$$W\ P-convexa \Leftrightarrow W\ Q-convexa \Leftrightarrow W\ R-convexa.$$

iii: *Se $m, n \geq 3$ então, em geral,*

$$W\ R-convexa \not\Rightarrow W\ P-convexa$$

DEMONSTRAÇÃO. Para *i), ii)* consultar [8], pág.129.

iii) Queremos mostrar que se $m = n = 3$, então existe uma função W R-convexa que não é P-convexa. Seja

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix}$$

e

$$W(A) = (A_1^1 - A_2^3 - A_3^2)^2 + (A_2^1 - A_1^3 + A_3^1)^2 + (A_1^2 - A_1^3 - A_3^1)^2 + (A_2^2)^2 + (A_3^3)^2. \tag{59}$$

Dividimos a demonstração em duas partes.

1^a Parte. Mostramos primeiro que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$W(a\otimes b) - \varepsilon|a\otimes b|^2 \geq 0 \tag{60}$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^3$, onde $|A|^2 = \langle A, A\rangle$ denota a norma usual. O lema 310 garantirá então que

$$g(A) = W(A) - \varepsilon|A|^2 = \langle SA, A\rangle - \varepsilon\langle A.A\rangle = \langle (S-\varepsilon I)A, A\rangle$$

é R-convexa. Seja

$$\varepsilon_0 = \inf\{f(a \otimes b) : a, b \in \mathbb{R}^3, |a \otimes b| = 1\}.$$

Como $W \geq 0$ (como podemos observar em (59)), temos que $\varepsilon_0 \geq 0$. Para mostrarmos (60) é suficiente provar que $\varepsilon_0 > 0$. Suponhamos, por absurdo, que $\varepsilon_0 = 0$. Observemos que o mínimo é obtido trivialmente e portanto existem $a, b \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{cases} W(a \otimes b) = \varepsilon_0 = 0 \\ |a \otimes b| = 1. \end{cases} \tag{61}$$

Recordemos que

$$a \otimes b = \begin{pmatrix} a^1 b_1 & a^1 b_2 & a^1 b_3 \\ a^2 b_1 & a^2 b_2 & a^2 b_3 \\ a^3 b_1 & a^3 b_2 & a^3 b_3 \end{pmatrix}$$

portanto, a primeira equação de (61) torna-se

$$\begin{cases} a^1 b_1 = a^2 b_3 + a^3 b_2 \\ a^1 b_2 = a^3 b_1 - a^1 b_3 \\ a^2 b_1 = a^1 b_3 - a^3 b_1 \\ a^2 b_2 = 0 \\ a^3 b_3 = 0. \end{cases}$$

Mostramos então que este sistema de equações está em contradição com o facto de que $|a \otimes b| = 1$. Para tal, examinemos o sistema e separemos a discussão em vários casos.

1^o caso: Se $a^2 = a^3 = 0$ então temos que

$$\begin{cases} a^2 = a^3 = 0 \\ a^1 b_1 = 0 \\ a^1 b_2 = 0 \\ a^1 b_3 = 0. \end{cases}$$

Caso $1a$: Se $a^1 = 0$, então $a^1 = a^2 = a^3 = 0$ e portanto $|a \otimes b| = 0$, contradição.

Caso $1b$: Se $a^1 \neq 0$, então vem que $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, contradição.

2^o caso: Se $a^2 = b_3 = 0$, então obtemos

$$\begin{cases} a_2 = b^3 = 0 \\ a^1 b_1 = a^3 b_2 \\ a^1 b_2 = 0 \\ a^3 b_1 = 0. \end{cases}$$

Caso $2a$: Se $a^3 = 0$, então $a^1 b_1 = 0$ e portanto $|a \otimes b| = 0$.

Caso $2b$: Se $b_1 = 0$, então $a^3 b_2 = 0$, o que é absurdo.

3^o caso: Se $a^3 = b_2 = 0$, conclui-se que

$$\begin{cases} a^3 = b_2 = 0 \\ a^1 b_1 = a^2 b_3 \\ a^1 b_3 = 0 \\ a^2 b_1 = 0 \end{cases}$$

Caso $3a$: Se $a^1 = 0$, então $a^2 b_3 = 0$, logo $|a \otimes b| = 0$.

Caso $3b$: Se $b_3 = 0$, então $a^1 b_1 = 0$, contradição.

4^o caso: Se $b_2 = b_3 = 0$, então vem que

$$\begin{cases} b_2 = b_3 = 0 \\ a^1 b_1 = 0 \\ a^3 b_1 = 0 \\ a^2 b_1 = 0 \end{cases}$$

o que é absurdo. Concluímos então que $\varepsilon_0 > 0$ e portanto g definida como acima é R-convexa, qualquer que seja $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

2^a Parte. Queremos mostrar agora que g não é P-convexa. No sentido do lema 310, é suficiente mostrar que qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}^9$, existe um $A \in \mathbb{R}^9$ tal que

$$g(A) + \langle \alpha, adj_2 A \rangle < 0.$$

Mostraremos que esta condição se verifica para matrizes da forma

$$A = \begin{pmatrix} b+d & c-a & a \\ c+a & 0 & b \\ c & d & 0 \end{pmatrix}.$$

Para tais matrizes temos

$$W(A) = (b+d-d-b)^2 + (c-a-c+a)^2 + (c+a-c-a)^2 + 0^2 + 0^2 = 0$$

e portanto vem que

$$g(A) = W(A) - \varepsilon|A|^2 = -\varepsilon|A|^2 = -\varepsilon((b+d)^2 + (c-a)^2 + a^2 + (c+a)^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

e

$$adj_2 A = \begin{pmatrix} -bd & bc & cd+ad \\ ad & -ac & -(bd+d^2-c^2+ac) \\ bc-ab & ac+a^2-b^2-bd & a^2-c^2 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente

$$\langle \alpha, adj_2 A \rangle = -\alpha_1 bd + \alpha_2 bc + \alpha_3(cd+ad) + \alpha_4 ad - \alpha_5 ac - \alpha_6(bd+d^2-c^2+ac) +$$

$$+ \alpha_7(bc-ab) + \alpha_8(ac+a^2-b^2-bd) + \alpha_9(a^2-c^2).$$

Vamos considerar vários casos, como na 1^a parte.

1^o Caso: Se $\alpha_8 > 0$ então tomamos $a = c = d = 0$ e $b \neq 0$, obtendo

$$g(A) + \langle \alpha, adj_2 A \rangle = -\varepsilon |A|^2 + \langle \alpha, adj_2 A \rangle = -\varepsilon(2b^2) - \alpha_8 b^2 < 0.$$

2^o Caso: Se $\alpha_6 > 0$, então pondo $a = b = c = 0$ e $d \neq 0$, obtemos

$$g(A) + \langle \alpha, adj_2 A \rangle = -\varepsilon(2d^2) - \alpha_6(d^2) < 0.$$

Podemos agora supor $\alpha_8 \leq 0$ e $\alpha_6 \leq 0$.

3^o Caso: Se $\alpha_9 - \alpha_6 > 0$ $(\alpha_8 \leq 0,\ \alpha_6 \leq 0)$ e tomando $a = b = d = 0$ e $c \neq 0$, obtemos então

$$g(A) + \langle \alpha, adj_2 A \rangle = -\varepsilon(3c^2) + (\alpha_6 - \alpha_9)c^2 < 0.$$

Supomos, por fim, que $\alpha_8 \leq 0$, $\alpha_6 \leq 0$ e $\alpha_9 - \alpha_6 \leq 0$. Como $\alpha_6 \leq 0$, então deduzimos de $\alpha_9 - \alpha_6 \leq 0$ que $\alpha_9 \leq \alpha_9 - \alpha_6 \leq 0$. Como $\alpha_8 \leq 0$, vem finalmente que $\alpha_8 + \alpha_9 \leq 0$. Tomando $b = c = d = 0$ e $a \neq 0$ obtemos

$$g(A) + \langle \alpha, adj_2 A \rangle = -\varepsilon(3a^2) + (\alpha_8 + \alpha_9)a^2 < 0.$$

Provámos então que g não é P-convexa. Encontrámos então uma função g que é R-convexa mas não é P-convexa. □

2.3. Outros exemplos.

O seguinte lema é-nos necessário para a demonstração do teorema que se lhe segue:

LEMA 312. *Sejam* $o < \lambda < 1$, $b, c \in \mathbb{R}^{n+1}$ *e* $A \in \mathbb{M}^{(n+1)\times n}$ *tais que*

$$adj_n A = \lambda b + (1-\lambda)c \neq 0.$$

Então existem $B, C \in \mathbb{M}^{(n+1)\times n}$ *tais que*

$$\begin{cases} A = \lambda B + (1-\lambda)C \\ adj_n B = b, adj_n C = c \\ car\{B - C\} \leq 1 \end{cases}$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.142. □

TEOREMA 313. *Seja* $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R}$.

i: *Seja* $\Phi : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ *Q-afim e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$W(A) = g(\Phi(A))$$

(em particular se $n = m$*, podemos tomar* $\Phi(A) = \det A$*).*

Então

$$W\ P-convexa \Leftrightarrow W\ Q-convexa \Leftrightarrow W\ R-convexa \Leftrightarrow g\ convexa.$$

ii: *Superfícies mínimas: seja* $m = n+1$*. Recordemos que se* $A \in \mathbb{M}^{(n+1)\times n}$*, então*

$$adj_n A = (\det \widehat{A}^1, -\det \widehat{A}^2, ..., (-1)^{k+1}\det \widehat{A}^k, ..., (-1)^{n+2}\det \widehat{A}^{n+1})$$

onde $\widehat{A}^k$ *é a matriz* $n \times n$ *obtida de* A *por supressão da sua k-ésima linha. Seja* $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$W(A) = g(adj_n A),$$

então

$$W\ P-convexa \Leftrightarrow W\ Q-convexa \Leftrightarrow W\ R-convexa \Leftrightarrow g\ convexa.$$

iii: *Para* $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$*, seja* $|A|$ *a norma Euclidiana, i.e.*

$$|A| = \left(\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(A^i_\alpha)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e seja $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$W(A) = g(|A|).$$

Então

$$W\ P-convexa \Leftrightarrow W\ Q-convexa \Leftrightarrow W\ R-convexa \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g\ convexa\ e\ g(0) = \inf\{g(x), x \geq 0\}.$$

iv: *Sejam* $m = n$*,* $1 \leq \alpha \leq 2n$ *e* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$W(A) = |A|^\alpha + h(\det A)$$

onde $|A|$ *denota a norma euclidiana de* A*. Então*

$$W\ P-convexa \Leftrightarrow W\ Q-convexa \Leftrightarrow W\ R-convexa \Leftrightarrow h\ convexa.$$

v: *Sejam* $m = n = 2$, $A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}$, $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_2, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$W(A) = g_1(A_1^1, A_2^1) + g_2(A_1^2) + h(\det A).$$

Então

$$W\ P-convexa \Leftrightarrow W\ Q-convexa \Leftrightarrow W\ R-convexa \Leftrightarrow g_1, g_2 \text{ e } h \text{ convexas.}$$

vi: *Sejam* $m = n$, $p > 0$, $1 \leq s \leq n-1$ *e*

$$W(A) = \begin{cases} \left(\frac{|adj_s A|^{n/s}}{\det A}\right)^p & \text{se } \det A > 0 \\ +\infty & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $|\cdot|$ *denota a norma euclideana. Então*

$$W\ P-convexa \Leftrightarrow W\ R-convexa \Leftrightarrow p \geq \frac{s}{n-s}.$$

DEMONSTRAÇÃO. *i)* Seja $\Phi : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ Q-afim e

$$W(A) = g(\Phi(A)).$$

As implicações

$$g\ convexa \Rightarrow W\ P-convexa \Rightarrow W\ Q-convexa \Rightarrow W\ R-convexa$$

seguem imediatamente do teorema 304, portanto falta mostrar que se W é R-convexa, então g é convexa. Suponhamos, s.p.g., que Φ não é constante, caso contrário o resultado é trivial, pois W e g seriam constantes. Queremos mostrar que para $\lambda \in (0,1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$g(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \leq \lambda g(\alpha) + (1-\lambda)g(\beta)$$

sabendo que W é R-convexa. Como por hipótese Φ é Q-afim, pelo teorema 308 temos que

$$\Phi(A) = a_0 + \langle a, M(A)\rangle = a_0 + \langle a_1, A\rangle + \sum_{j=2}^{n\wedge m} \langle a_j, adj_j A\rangle$$

onde $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_1 \in \mathbb{R}^{nm}$ e $a_j \in \mathbb{R}^{\sigma(j)}$ onde $\sigma(j) = \binom{m}{j}\binom{n}{j}$. Como $\Phi(A) \not\equiv a_o$ (pois supusemos que Φ era não constante), então pelo menos um dos a_j, $1 \leq j \leq n \wedge m$ é diferente de zero. Seja s tal que $a_s \neq 0$ mas $a_{s-1} = a_{s-2} = ... = a_1 = 0$ (se $a_1 \neq 0$ tomaríamos $s = 1$). Como $a_s \neq 0 (\in \mathbb{R}^{\sigma(s)})$

temos que pelo menos uma das componentes de $a_s = (a_s^1, ..., a_s^{\sigma(s)})$ é diferente de zero. S.p.g. tomamos $a_s^{\sigma(s)} \neq 0$. Então escolhemos $B, C \in \mathbb{M}^{m\times n}$ da seguinte forma:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} B_1^1 & ... & B_s^1 & B_{s+1}^1 & ... & B_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1^s & ... & B_s^s & B_{s+1}^s & ... & B_n^s \\ \hline B_1^{s+1} & ... & B_s^{s+1} & B_{s+1}^{s+1} & ... & B_n^{s+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1^m & ... & B_s^m & B_{s+1}^m & ... & B_n^m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{\alpha - a_0}{a_s^{\sigma(s)}} & 0 & \\ & & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e semelhantemente para C, excepto que substituímos a primeira componente por $\frac{\beta - a_0}{a_s^{\sigma(s)}}$. Temos que

$$(62) \qquad \begin{cases} \Phi(B) = \alpha, \Phi(C) = \beta, \\ car\{B - C\} \leq 1, \end{cases}$$

pois $a_j = 0$ se $j < s$, $adj_s B = (0, ..., 0, \frac{\alpha - a_0}{a_s^{\sigma(s)}})$,$adj_s C = (0, ..., 0, \frac{\beta - a_0}{a_s^{\sigma(s)}})$ e $adj_j B = adj_j C = 0$ se $j \geq s + 1$. Utilizando agora 62, a R-convexidade de W, a quasi-afinidade de Φ e o teorema 308 obtemos

$$\lambda g(\alpha) + (1 - \lambda) g(\beta) = \lambda g(\Phi(B)) + (1 - \lambda) g(\Phi(C)) = \lambda W(B) + (1 - \lambda) W(C) \geq$$
$$\geq W(\lambda B + (1 - \lambda) C) = g(\Phi(\lambda B + (1 - \lambda) C)) = g(\lambda \Phi(B) + (1 - \lambda) \Phi(C)) = g(\lambda \alpha + (1 - \lambda) \beta)$$

que é o resultado pretendido.

ii) Analogamente ao caso anterior, é suficiente mostrar que a R-convexidade de W implica a convexidade de g. Queremos portanto mostrar que se $\lambda \in (0, 1)$, $b, c \in \mathbb{R}^{n+1}$, então

$$g(\lambda b + (1 - \lambda) c) \leq \lambda g(b) + (1 - \lambda) g(c)$$

sabendo que W é R-convexa e $W(A) = g(adj_n A)$. Dividimos a demonstração em dois casos.

1^o Caso. Supomos $\lambda b + (1 - \lambda) c \neq 0$; por simplificação escrevemos $\alpha = \lambda b + (1 - \lambda) c = (\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Como $\alpha \neq 0$, podemos supor, s.p.g., que $\alpha_1 \neq 0$. Temos então

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & ... & A_n^1 \\ A_1^2 & ... & A_3^2 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^{n+1} & ... & A_n^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_2 & -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} & ... & -\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_1} \\ \alpha_1 & 0 & ... & 0 \\ & 1 & & \\ & & & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos então verificar que

$$adj_n A = (\det \widehat{A}^1, -\det \widehat{A}^2, ..., (-1)^{k+1} \det \widehat{A}^k, ..., (-1)^{n+2} \det \widehat{A}^{n+1}) =$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, ..., \alpha_{n+1}) = \alpha = \lambda b + (1-\lambda)c \neq 0$$

pois, por exemplo

$$\det \begin{pmatrix} -\alpha_2 & -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} & \dots & -\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_1} \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \alpha_3.$$

Podemos então aplicar o lema 312 para obtermos $B, C \in \mathbb{M}^{(n+1)\times n}$ tais que

$$\begin{cases} A = \lambda B + (1-\lambda)C \\ adj_n B = b, adj_n C = c \\ car\{B - C\} \leq 1. \end{cases}$$

Utilizando a R-convexidade de W obtemos

$$\lambda g(b) + (1-\lambda)g(c) = \lambda g(adj_n B) + (1-\lambda)g(adj_n C) = \lambda W(B) + (1-\lambda)W(C) \geq$$

$$\geq W(\lambda B + (1-\lambda)C) = W(A) = g(adj_n A) = g(\lambda b + (1-\lambda)c).$$

2^o*Caso.* Supomos agora que $\lambda b + (1-\lambda)c = 0$. Observemos primeiro que como W é R-convexa então pelo teorema 304 temos que é contínua e, como $W(A) = g(adj_n A)$, vem que g também é contínua. Aplicando o 1^o caso para $\beta = b + (\varepsilon, 0, ..., 0)$ e $\gamma = c + (\varepsilon, 0, ..., 0)$ onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário (pois $\lambda\beta + (1-\lambda)\gamma \neq 0$), obtemos

$$\lambda g(\beta) + (1-\lambda)g(\gamma) \geq g(\lambda\beta + (1-\lambda)\gamma) \Leftrightarrow \lambda g(b + (\varepsilon, 0, ..., 0)) + (1-\lambda)g(c + (\varepsilon, 0, ..., 0)) \geq$$

$$\geq g(\lambda(b + (\varepsilon, 0, ..., 0)) + (1-\lambda)(c + (\varepsilon, 0, ..., 0))).$$

Como g é contínua obtemos, pela arbitrariedade de ε, o resultado requerido.

iii) Seja $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$ e $W(A) = g(|A|)$. Pelo teorema 304 falta apenas mostrar que:

$$W\ R-convexa \underset{(1)}{\Rightarrow} g\ convexa\ e\ g(0) = \inf\{g(x) : x \geq 0\} \underset{(2)}{\Rightarrow} W\ convexa.$$

$(\underset{(1)}{\Rightarrow})$. Definamos primeiro g por simetria, i.e., $g(x) = g(-x)$ se $x \leq 0$. Sejam $\lambda \in [0,1]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Queremos mostrar que

$$g(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \leq \lambda g(\alpha) + (1-\lambda)g(\beta).$$

Como g é simétrica podemos supor que $\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta \geq 0$. Definimos $F = (F^i_j)_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ e $G = (G^i_j)_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ tal que $F^1_1 = \alpha$, $G^1_1 = \beta$ e $F^i_j = G^i_j = 0$ se $(i,j) \neq (1,1)$. Note-se que $car\{F-G\} \leq 1$. Utilizando a R-convexidade de W obtemos

$$g(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) = W(\lambda F + (1-\lambda)G) \leq \lambda W(F) + (1-\lambda)W(G) =$$

$$= \lambda g(|\alpha|) + (1-\lambda)g(|\beta|) = \lambda g(\alpha) + (1-\lambda)g(\beta).$$

Como g é convexa e par, temos que

$$g(0) = \inf\{g(x), x \geq 0\}.$$

$(\underset{(2)}{\Rightarrow})$. Observemos também que a convexidade e a simetria de g implicam que g é crescente em $(0, +\infty)$, o que nos dá

$$W(\lambda F + (1-\lambda)G) = g(|\lambda F + (1-\lambda)G|) \leq g(\lambda|F| + (1-\lambda)|G|) \leq$$

$$\leq \lambda g(|F|) + (1-\lambda)g(|G|) = \lambda W(F) + (1-\lambda)W(G),$$

o que conclui a demonstração da alínea *iii*) do teorema.

iv) Sejam $m = n$, $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$, $1 \leq \alpha \leq 2n$ e

$$W(A) = |A|^\alpha + h(\det A).$$

Segue do teorema 304 que apenas temos de provar que

$$W \ R-convexa \Rightarrow h \ convexa.$$

Sejam $\lambda \in (0,1)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Queremos mostrar que

$$h(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda h(a) + (1-\lambda)h(b).$$

S.p.g. escolhemos $a \neq b$ e $a \neq 0$. Seja $e_1 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon \neq 0$ com $\varepsilon(b-a) > 0$. Seja $v(\varepsilon) = \frac{a\varepsilon}{b-a}$ e $A(\varepsilon) = (A^i_j(\varepsilon))_{1\leq i,j\leq n}$ a matriz diagonal

$$A^1_1(\varepsilon) = v(\varepsilon),\ A^2_2(\varepsilon) = ... = A^n_n(\varepsilon) = \left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

$$A^i_j(\varepsilon) = 0 \ se \ i \neq j.$$

Verificamos então que

$$\det A(\varepsilon) = v(\varepsilon) \underbrace{\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdots \left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{n-1}}}_{(n-1)\ vezes} = a$$

$$\det(A(\varepsilon) + \varepsilon e_1 \otimes e_1) = (v(\varepsilon) + \varepsilon)\frac{a}{v(\varepsilon)} = a + \frac{a\varepsilon}{\frac{a\varepsilon}{b-a}} = b$$

$$\det(A(\varepsilon) + (1-\lambda)\varepsilon e_1 \otimes e_1) = (v(\varepsilon) + (1-\lambda)\varepsilon)\frac{a}{v(\varepsilon)} = \lambda a + (1-\lambda)b,$$

ou seja

$$\begin{cases} \det A(\varepsilon) = a, \det(A(\varepsilon) + \varepsilon e_1 \otimes e_1) = b \\ \det(A(\varepsilon) + (1-\lambda)\varepsilon e_1 \otimes e_1) = \lambda a + (1-\lambda)b. \end{cases}$$

Como W é R-convexa, temos

$$|A(\varepsilon) + (1-\lambda)\varepsilon e_1 \otimes e_1|^\alpha + h(\lambda a + (1-\lambda)b) = W(\lambda A(\varepsilon) + (1-\lambda)(A(\varepsilon) + \varepsilon e_1 \otimes e_1)) \leq$$

$$\leq \lambda W(A(\varepsilon)) + (1-\lambda)W(A(\varepsilon)+\varepsilon e_1 \otimes e_1) = \lambda |A(\varepsilon)|^\alpha + \lambda h(a) + (1-\lambda)|A(\varepsilon)+\varepsilon e_1 \otimes e_1|^\alpha + (1-\lambda)h(b).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \lambda |A(\varepsilon)|^\alpha + (1-\lambda)|A(\varepsilon) + \varepsilon e_1 \otimes e_1|^\alpha - |A(\varepsilon) + (1-\lambda)\varepsilon e_1 \otimes e_1|^\alpha = \\ = \lambda \left((v(\varepsilon))^2 + (n-1)\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^{2/n-1} \right)^{\alpha/2} + \\ + (1-\lambda)\left((v(\varepsilon)+\varepsilon)^2 + (n-1)\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^{2/n-1} \right)^{\alpha/2} + \\ - \left((v(\varepsilon) + (1-\lambda)\varepsilon)^2 + (n-1)\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^{2/n-1} \right)^{\alpha/2} \end{aligned}$$

Se $\alpha = 2n$, a igualdade acima escreve-se

$$\begin{aligned} = \lambda \left((v(\varepsilon))^2 + (n-1)\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^{2/n-1} \right)^{n} + \\ + (1-\lambda)\left((v(\varepsilon)+\varepsilon)^2 + (n-1)\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^{2/n-1} \right)^{n} + \\ - \left((v(\varepsilon) + (1-\lambda)\varepsilon)^2 + (n-1)\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^{2/n-1} \right)^{n}. \end{aligned}$$

Notemos agora que somando a última parcela de cada binómio vem que

$$\lambda(n-1)\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^{2n/n-1} + (1-\lambda)(n-1)\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^{2n/n-1} - (n-1)\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^{2n/n-1} = 0.$$

Somando agora a penúltima parcela de cada binómio

$$\lambda n(v(\varepsilon))^2(n-1)^{n-1}\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^2+(1-\lambda)n(v(\varepsilon)+\varepsilon)^2(n-1)^{n-1}\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^2+$$
$$-n(v(\varepsilon)+(1-\lambda)\varepsilon)^2(n-1)^{n-1}\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^2 \not\to 0 \textit{ quando } \varepsilon\to 0,$$

o que já não acontece com a parcela anterior, que fica

$$\lambda\frac{n(n-1)}{2}v(\varepsilon)^4(n-1)^{n-2}\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^{2\frac{n-2}{n-1}}+(1-\lambda)\frac{n(n-1)}{2}(v(\varepsilon)+\varepsilon)^4(n-1)^{n-2}\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^{2\frac{n-2}{n-1}}+$$
$$-\frac{n(n-1)}{2}(v(\varepsilon)+(1-\lambda)\varepsilon)^4(n-1)^{n-2}\left(\frac{a}{v(\varepsilon)}\right)^{2\frac{n-2}{n-1}}\to 0 \textit{ quando } \varepsilon\to 0,$$

o mesmo acontecendo com todas as outras parcelas. Utilizando este raciocínio (tendo especial cuidado quando α não é par), observamos que o fenómeno que acontece quando $\alpha = 2n$ não acontece para nenhum $\alpha = 1,...,2n$. Concluímos então que se $\alpha = 1,...,2n$, então que h é convexa.

v) Seja $m = n = 2$, $A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}$ e

$$W(A) = g_1(A_1^1, A_2^1) + g_2(A_1^2) + h(\det A).$$

Como habitualmente, é suficiente mostrar que se W é R-convexa, então g_1,g_2 e h são convexas. Mostremos primeiro que dado $\lambda \in [0,1]$, $(\alpha,\beta),(a,b)\in\mathbb{R}^2$, então

$$g_1(\lambda(\alpha,\beta)+(1-\lambda)(a,b)) \le \lambda g_1(\alpha,\beta)+(1-\lambda)g_2(a,b).$$

Escolhendo

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

e utilizando a R-convexidade de W (note-se que $car\{A-B\}\le 1$), obtemos

$$g_1(\lambda\alpha+(1-\lambda)a,\lambda\beta+(1-\lambda)b)+g_2(0)+0 \le \lambda(g_1(\alpha,\beta)+g_2(0)+0)+(1-\lambda)(g_1(a,b)+g_2(0)+0).$$

Seja agora $\lambda\in[0,1]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Escolhendo

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \alpha & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ \beta & 0\end{pmatrix}$$

e utilizando novamente o facto de que W é R-convexa (note-se também novamente que $car\{A-B\}\le 1$) obtemos o desejado

$$g_1(0,0)+g_2(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)+0 \le \lambda(g_1(0,0)+g_2(\alpha)+0)+(1-\lambda)(g_1(0,0)+g_2(\beta)+0).$$

Mostremos agora a convexidade de h, i.e.,

$$h(\lambda s + (1-\lambda)t) \leq \lambda h(s) + (1-\lambda)h(t)$$

quaisquer que sejam $s, t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$. Se $s = t = 0$, nada há para mostrar. Suponhamos então que $s, t \neq 0$ e consideremos

$$A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \frac{t}{s} \end{pmatrix}.$$

Aplicando novamente a R-convexidade de W, concluímos que

$$h(\lambda s + (1-\lambda)t) \leq \lambda h(s) + (1-\lambda)h(t)$$

quaisquer que sejam $s, t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$.

vi) Dividimos a demonstração desta alínea em duas partes.

1^a Parte.

$$p \geq \frac{s}{n-s} \Rightarrow f \ P-convexa.$$

definamos primeiro $h : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$h(x, \delta) = x^{np/s} \delta^{-p}.$$

Afirmamos que h é convexa sse $p \geq \frac{s}{n-s}$. Seja $H(h(x,\delta))$ a matriz hessiana de $h(x,\delta)$, i.e.

$$H(h(x,\delta)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x,\delta) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial \delta} h(x,\delta) \\ \frac{\partial^2}{\partial \delta \partial x} h(x,\delta) & \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} h(x,\delta) \end{pmatrix}$$

onde

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x,\delta) = \frac{np}{s}\left(\frac{np}{s} - 1\right) x^{\frac{np}{s}-2} \delta^{-p}, \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} h(x,\delta) = p(p+1) x^{\frac{np}{s}} \delta^{-(p+2)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \delta} h(x,\delta) = \frac{\partial^2}{\partial \delta \partial x} h(x,\delta) = -p\frac{np}{s} x^{\frac{np}{s}-1} \delta^{-(p+1)}.$$

h é convexa (como é C^2) sse a matriz H for semi-definida positiva. Para tal

$$\det(H) = x^{2(\frac{np}{s}-1)} \delta^{-2(p+1)} \frac{np^2}{s} \left(\left(\frac{np}{s} - 1\right)(p+1) - \frac{np^2}{s} \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\frac{np}{s} - 1\right)(p+1) - \frac{np^2}{s} \right) \geq 0 \Leftrightarrow p \geq \frac{s}{n-s}.$$

Como

$$Tr(H) = px^{\frac{np}{s}-2} \delta^{-(p+2)} \left(\frac{n}{s}\left(\frac{np}{s} - 1\right) \delta^2 + (p+1)x^2 \right),$$

se $p \geq \frac{s}{n-s}$, vem que

$$Tr(H) = \frac{n}{n-s}(\delta^2 + x^2) \geq 0.$$

Seja então $g : \mathbb{R}^{\sigma(s)} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(B, \delta) = h(|B|, \delta) = \left(\frac{|B|^{n/s}}{\delta}\right)^p$$

onde $\sigma(s) = \binom{n}{s}\binom{n}{s}, 1 \leq s \leq n-1$. Pela convexidade de h e pelo facto de $x \mapsto h(x, \delta)$ ser uma função não-decrescente de x, deduzimos

$$g(\lambda A + (1-\lambda)B, \lambda\delta_1 + (1-\lambda)\delta_2) \leq h(\lambda|A| + (1-\lambda)|B|, \lambda\delta_1 + (1-\lambda)\delta_2) \leq$$
$$\leq \lambda g(A, \delta_1) + (1-\lambda)g(B, \delta_2)$$

quaisquer que sejam $(A, \delta_1), (B, \delta_2) \in \mathbb{R}^{\sigma(s)} \times (0, +\infty)$, $\lambda \in [0, 1]$. Observando que

$$W(A) = g(adj_s A, \det A)$$

e como g é convexa para $p \geq \frac{s}{n-s}$, concluímos que W é P-convexa para $p \geq \frac{s}{n-s}$.

2^a Parte.

$$W \ R-convexa \Rightarrow p \geq \frac{s}{n-s}.$$

Sejam $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\det(A + ta \otimes b) > 0.$$

Então a R-convexidade de W implica que

$$\varphi(t) = W(A + ta \otimes b) = \left(\frac{|adj_s(A + ta \otimes b|^{n/s}}{\det(A + ta \otimes b)}\right)^p$$

é convexa em t. Simplifiquemos as notações, sendo $\lambda_1, ..., \lambda_5$ tais que

$$\begin{cases} |adj_s(A + ta \otimes b)|^2 = \lambda_1^2 t^2 + \lambda_2 t + \lambda_3^2 \\ \det(A + ta \otimes b) = \lambda_4 t + \lambda_5. \end{cases}$$

Tais $\lambda_1, ..., \lambda_5$ existem pois $adj_s(A + ta \otimes b)$ bem como $\det(A + ta \otimes b)$ são afins em t (note-se que $car\{a \otimes b\} \leq 1$). Podemos então reescrever

$$\varphi(t) = (\lambda_1^2 t^2 + \lambda_2 t + \lambda_3^2)^{np/2s}(\lambda_4 t + \lambda_5)^{-p}$$

e, calculando a sua segunda derivada, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= (\lambda_1^2t^2+\lambda_2 t+\lambda_3^2)^{\frac{np}{2s}-2}(\lambda_4 t+\lambda_5)^{-(p+2)}\Big(\lambda_1^2\frac{np}{s}(\lambda_1^2t^2+\lambda_2 t+\lambda_3^2)(\lambda_4 t+\lambda_5)^2+\\ &+\frac{np}{2s}(\frac{np}{2s}-1)(2\lambda_1^2 t+\lambda_2)^2(\lambda_4 t+\lambda_5)^2-\frac{np^2}{2s}(2\lambda_1^2 t+\lambda_2)(\lambda_1^2t^2+\lambda_2 t+\lambda_3^2)(\lambda_4 t+\lambda_5)+\\ &-\frac{np^2}{2s}\lambda_4(2\lambda_1^2 t+\lambda_2)(\lambda_1^2t^2+\lambda_2 t+\lambda_3^2)(\lambda_4 t+\lambda_5)+p(p+1)\lambda_4^2(\lambda_1^2t^2+\lambda_2 t+\lambda_3^2)^2\Big)=\\ &=(\lambda_1^2t^2+\lambda_2 t+\lambda_3^2)^{\frac{np}{2s}-2}(\lambda_4 t+\lambda_5)^{-(p+2)}\left(\lambda_1^4\lambda_4^2t^4\frac{p}{s^2}(n-s)^2\left(p-\frac{s}{n-s}\right)+O(t^3).\right).\end{aligned}$$

Como φ é convexa para $t\geq 0$, teremos de ter $p\geq\frac{s}{n-s}$. □

OBSERVAÇÃO 314. **i:** No caso das superfícies mínimas, i.e. $m=n+1$, temos que se $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$, então $adj_n\nabla u$ representa a normal à superfície. No caso $n=2$, $u(x_1,x_2)=(u_1,u_2,u_3)$, temos

$$adj_2\nabla u=\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_1},\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2},\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right).$$

ii: No caso *iv)* do teorema, não podemos retirar a hipótese $\alpha<2n$. De facto, se $n=2$ e $\alpha=4$, então $f(A)=|A|^4-2(\det A)^2=(A_1^1+A_2^1)^2+(A_1^2+A_2^2)^2+2(A_1^1A_2^2+A_2^1A_1^2)^2$ é mesmo convexa.

Vimos no teorema 304 que

$$W\ convexa\Rightarrow W\ P-convexa\Rightarrow W\ Q-convexa\Rightarrow W\ R-convexa.$$

Vimos também que

$$W\ P-convexa\not\Rightarrow W\ convexa$$

bastando para tal considerarmos

$$W(\xi)=\det\xi.$$

No teorema 311 vimos que se $m,n\geq 3$ então que

$$W\ R-convexa\not\Rightarrow W\ P-convexa$$

não se verifica. Mostraremos agora que esta implicação permanece falsa mesmo quando $m=n=2$ (mas, neste caso, W não poderá ser quadrática) dando dois contra-exemplos, o primeiro envolvendo funções W que tomam o valor $+\infty$, e o outro envolvendo funções finitas por toda a parte. No final, mostramos que

$$W\ R-convexa \not\Rightarrow W\ Q-convexa$$

se $n, m \geq 3$, sendo ainda um problema em aberto quando $m = n = 2$.

Sejam $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{M}^{2\times 2}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in (0,1)$ tais que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \sum_{i=1}^3 \lambda_i \det A_i = \det\left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i A_i\right) \\ \det(A_1 - A_2) \neq 0, \det(A_1 - A_3) \neq 0, \det(A_2 - A_3) \neq 0. \end{cases}$$

Tais pares $(\lambda_i, A_i)_{1\leq i\leq 3}$ existem, pois por exemplo, para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ e

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

temos

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \det A_i = 0 = \det\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i A_i\right),$$

e

$$det(A_1 - A_2) = 1, \det(A_1 - A_3) = 2, \det(A_2 - A_3) = 1.$$

Note-se também que $(\lambda_i, A_i)_{1\leq i\leq 3}$, como acima, não satisfazem a propriedade (H_3), pois

$$\det(A_1 - A_2) \neq 0, \det(A_1 - A_3) \neq 0, \det(A_2 - A_3) \neq 0.$$

Definimos então $W : \mathbb{M}^{2\times 2} \to (-\infty, +\infty]$ como

$$W(X) = \begin{cases} 0 & \text{se } X \in \{A_1, A_2, A_3\} \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

PROPOSIÇÃO 315. *W é R-convexa mas não é P-convexa.*

DEMONSTRAÇÃO. Mostremos primeiro que W é R-convexa, ou seja, que

$$W(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda W(X) + (1-\lambda)W(Y) \tag{63}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathbb{M}^{2\times 2}$ tais que $car\{X - Y\} \leq 1$ e para qualquer $\lambda \in [0,1]$. Temos 3 casos:

1^o*Caso* Se $X \neq A_i$ ou $Y \neq A_j$, então $W(X) = +\infty$ ou $W(X) = +\infty$ e portanto (63) é verdadeira.

2ºCaso $X = A_i$ e $Y = A_j$ com $i \neq j$. Este caso é impossível pois por construção $car\{A_i - A_j\} = 2$ se $i \neq j$.

2ºCaso Se $X = Y = A_i$, então (63) é satisfeita, pois temos

$$W(A_i) \leq W(A_i).$$

Falta-nos então mostrar que W não é P-convexa. Por absurdo, consideremos W P-convexa. Então, pelo teorema 287 (1^a parte, fazendo $c(M(A))) \equiv 0$) , que

$$W\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i W(A_i)$$

para quaisquer $A_i \in \mathbb{M}^{m \times n}$, $\lambda_i \geq 0$ com $\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i = 1$, satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i M(A_i) = M\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i A_i\right).$$

Em particular, temos que $(\lambda_i, A_i)_{1 \leq i \leq 3}$ verifica estas hipóteses e, no entanto

$$W\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i A_i\right) = W\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right) = +\infty > 0 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i W(A_i),$$

o que é absurdo. □

Voltamos agora a nossa atenção para um contra-exemplo envolvendo funções W que tomam apenas valores finitos. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}, |A|^2 = (A_1^1)^2 + (A_2^1)^2 + (A_1^2)^2 + (A_2^2)^2.$$

PROPOSIÇÃO 316. *Seja* $W : \mathbb{M}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(A) = |A|^4 - a(\det A)^2 - b|A|^2 \det A,$$

onde $|b| \leq 4$ *e* $8a + 3b^2 \leq 16$. *Então* W *é R-convexa.*

DEMONSTRAÇÃO. Dividimos a demonstração em três partes.

1^a Parte. Notações. Para qualquer $A \in \mathbb{M}^{2\times 2}$ associamos $\widehat{A} \in \mathbb{M}^{2\times 2}$ da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}, \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_2^2 & -A_1^2 \\ -A_2^1 & A_1^1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que

$$(64)\quad \begin{cases} |A| = \sqrt{(A_1^1)^2 + (A_2^1)^2 + (A_1^2)^2 + (A_2^2)^2} = \sqrt{(A_2^2)^2 + (-A_1^2)^2 + (-A_2^1)^2 + (A_1^1)^2} = |\widetilde{A}| \\ \det A = A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2 = A_2^2 A_1^1 - (-A_2^1)(-A_1^2) = \det \widetilde{A} \\ \langle A, \widetilde{B} \rangle = A_1^1 B_2^2 - A_2^1 B_1^2 - A_1^2 B_2^1 + A_2^2 B_1^1 = \langle \widetilde{A}, B \rangle \\ \langle A, \widetilde{A} \rangle = A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2 - A_1^2 A_2^1 + A_2^2 A_1^1 = 2 \det A \end{cases}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^4$. Temos então que

$$\frac{\partial}{\partial A_1^1}(\det A) = A_2^2, \frac{\partial}{\partial A_2^1}(\det A) = -A_1^2, \frac{\partial}{\partial A_1^2}(\det A) = -A_2^1, \frac{\partial}{\partial A_2^2}(\det A) = A_1^1$$

logo

$$\nabla(\det A) = \begin{pmatrix} A_2^2 & -A_1^2 \\ -A_2^1 & A_1^1 \end{pmatrix} = \widetilde{A}.$$

2^a Parte. Calculamos agora a seguinte expressão

$$\psi(A, B) = \sum_{i,j=1}^{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \frac{\partial^2 W}{\partial A_\alpha^i \partial A_\beta^j} B_\alpha^i B_\beta^j.$$

O objectivo é mostrar que $\psi \geq 0$ quando restrita a matrizes B com $\det B = 0$. Sendo esta condição equivalente à condição de Legendre-Hadamard, teremos então pelo teorema 304 que W é R-convexa.

Calculemos primeiro ∇W. Temos que

$$\frac{\partial W}{\partial A_1^1} = 4|A|^2 A_1^1 - 2a(\det A) A_2^2 - 2b A_1^1 \det A - b|A|^2 A_2^2$$

$$\frac{\partial W}{\partial A_2^1} = 4|A|^2 A_2^1 - 2a(\det A)(-A_1^2) - 2b A_2^1 \det A - b|A|^2(-A_1^2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial A_1^2} = 4|A|^2 A_1^2 - 2a(\det A)(-A_2^1) - 2b A_1^2 \det A - b|A|^2(-A_2^1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial A_2^2} = 4|A|^2 A_2^2 - 2a(\det A) A_1^1 - 2b A_2^2 \det A - b|A|^2 A_1^1$$

i.e.

$$\frac{\partial W}{\partial A_\alpha^i} = 4|A|^2 A_\alpha^i - 2a(\det A)\widetilde{A}_\alpha^i - 2b A_\alpha^i \det A - b|A|^2 \widetilde{A}_\alpha^i,$$

$1 \leq \alpha, i \leq 2$. Deduzimos então que, para $1 \leq i, j, \alpha, \beta \leq 2$,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial A_\alpha^i \partial A_\beta^j} = 8 A_\alpha^i A_\beta^j + 4|A|^2 \delta^{ij} \delta_{\alpha\beta} - 2a \widetilde{A}_\alpha^i \widetilde{A}_\beta^j - 2a \det A \widetilde{\delta}^{ij} \widetilde{\delta}_{\alpha\beta} - 2b A_\alpha^i \widetilde{A}_\beta^j +$$

$$- 2b(\det A) \delta^{ij} \delta_{\alpha\beta} - 2b \widetilde{A}_\alpha^i A_\beta^j - b|A|^2 \widetilde{\delta}^{ij} \widetilde{\delta}_{\alpha\beta}$$

onde

$$\delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \widetilde{\delta}^{ij} = \begin{cases} (-1)^j & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

e semelhantemente para $\delta_{\alpha\beta}$ e $\widetilde{\delta}_{\alpha\beta}$. Temos então que

$$\psi(A,B) = \frac{\partial^2 W}{\partial A_1^1 \partial A_1^1} B_1^1 B_1^1 + \frac{\partial^2 W}{\partial A_1^1 \partial A_2^1} B_1^1 B_2^1 + \dots + \frac{\partial^2 W}{\partial A_2^2 \partial A_2^2} B_2^2 B_2^2 =$$

$$= 8(A_1^1 A_1^1 B_1^1 B_1^1 + A_1^1 A_2^1 B_1^1 B_2^1 + \dots + A_2^2 A_2^2 B_2^2 B_2^2) + |A|^2 (B_1^1 B_1^1 + B_2^1 B_2^1 + B_1^2 B_1^2 + B_2^2 B_2^2) +$$

$$- 2a(\widetilde{A}_1^1 \widetilde{A}_1^1 B_1^1 B_1^1 + \widetilde{A}_1^1 \widetilde{A}_2^1 B_1^1 B_2^1 + \dots + \widetilde{A}_2^2 \widetilde{A}_2^2 B_2^2 B_2^2) - 2a(\det A)(B_1^1 B_2^2 - B_2^1 B_1^2) +$$

$$- 2b(A_1^1 \widetilde{A}_1^1 B_1^1 B_1^1 + A_1^1 \widetilde{A}_2^1 B_1^1 B_2^1 + \dots + A_2^2 \widetilde{A}_2^2 B_2^2 B_2^2) - 2b \det A (B_1^1 B_1^1 + B_2^1 B_2^1 + B_1^2 B_1^2 + B_2^2 B_2^2) +$$

$$- 2b(\widetilde{A}_1^1 A_1^1 B_1^1 B_1^1 + \widetilde{A}_1^1 A_2^1 B_1^1 B_2^1 + \dots + \widetilde{A}_2^2 A_2^2 B_2^2 B_2^2) - b|A|^2 (B_1^1 B_2^2 - B_2^1 B_1^2) =$$

$$= 8(\langle A,B \rangle)^2 + 4|A|^2|B|^2 - 2a(\langle \widetilde{A},B \rangle)^2 - 2a(\det A)(\det B) - 2b\langle A,B \rangle \langle \widetilde{A},B \rangle +$$

$$- 2b \det A |B|^2 - 2b\langle \widetilde{A},B \rangle \langle A,B \rangle - 2b(\det B)|A|^2.$$

De modo a terminar a demonstração da proposição teremos apenas de mostrar que

$$\psi(A,B) = 8(\langle A,B \rangle)^2 + 4|A|^2|B|^2 - 2a(\langle \widetilde{A},B \rangle)^2 - 4b\langle A,B \rangle \langle \widetilde{A},B \rangle - 2b \det A |B|^2,$$

sempre que $\det B = 0$.

3^a Parte. Observemos primeiro que $\psi(A,B)$ é homogénea de grau 2 em A (e em B):

$$\psi(\lambda A,B) = 8(\langle \lambda A,B \rangle)^2 + 4|\lambda A|^2|B|^2 - 2a(\langle \widetilde{\lambda A},B \rangle)^2 - 4b\langle \lambda A,B \rangle \langle \widetilde{\lambda A},B \rangle +$$

$$- 2b \det(\lambda A)|B|^2 = 8\lambda^2(\langle A,B \rangle)^2 + 4\lambda^2|A|^2|B|^2 - 2a\lambda^2(\langle \widetilde{A},B \rangle)^2 +$$

$$- 4b\lambda^2\langle A,B \rangle \langle \widetilde{A},B \rangle - 2b\lambda^2 \det A |B|^2) = \lambda^2 \psi(A,B),$$

análogo para $\psi(A, \lambda B)$.

Se $X \neq 0$, temos que existe $a \in (0,+\infty)$ tal que $|X| = a$. Logo $\frac{1}{a}|X| = 1$, de onde deduzimos que

$$\psi(X,B) = a^2 \psi(\frac{1}{a}X, B) \geq a^2 \min_{A \in \mathbb{M}^{2\times 2}} \{\psi(A,B) : |A| = 1\}.$$

Consequentemente, é suficiente provar que

$$\min_{A \in \mathbb{M}^{2\times 2}} \{\psi(A,B) : |A| = 1\} \geq 0$$

qualquer que seja $B \in \mathbb{M}^{2\times 2}$ com $\det B = 0$. Como $\psi(\cdot, B)$ é contínua no seu domínio, temos que o mínimo é atingido na variedade $|A| = 1$. Sendo α um multiplicador de Lagrange, temos então de provar que $\psi(A_0, B) \geq 0$ qualquer que seja A_0 ponto crítico da função de A,

$$\varphi(A, B) = \psi(A, B) - \alpha(|A|^2 - 1).$$

Então as derivadas parciais de φ em ordem a A^i_α em A_0 são

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial A^i_\alpha}\varphi(A,B)\bigg|_{A=A_0} &= 16(\langle A_0, B\rangle)B^i_\alpha + 8|B|^2(A_0)^i_\alpha - 4a(\langle \widetilde{A}_0, B\rangle)\widetilde{B}^i_\alpha - 4b\langle \widetilde{A}_0, B\rangle B^i_\alpha + \\ &- 4b\langle A_0, B\rangle \widetilde{B}^i_\alpha - 2b|B|^2(\widetilde{A}_0)^i_\alpha - 2\alpha(A_0)^i_\alpha = 0 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 8(\langle A_0, B\rangle)B^i_\alpha + 4|B|^2(A_0)^i_\alpha - 2a(\langle \widetilde{A}_0, B\rangle)\widetilde{B}^i_\alpha - 2b\langle \widetilde{A}_0, B\rangle B^i_\alpha + \\ -2b\langle A_0, B\rangle \widetilde{B}^i_\alpha - b|B|^2(\widetilde{A}_0)^i_\alpha = \alpha(A_0)^i_\alpha\end{aligned} \tag{65}$$

Multiplicando esta última igualdade por A^i_α e somando em i e em α, obtemos

$$\begin{aligned}8\langle A_0, B\rangle\langle A_0, B\rangle + 4|B|^2|A_0|^2 - 2a\langle \widetilde{A}_0, B\rangle\langle A_0, \widetilde{B}\rangle - 2b\langle \widetilde{A}_0, B\rangle\langle A_0, B\rangle + \\ - 2b\langle A_0, B\rangle\langle A_0, \widetilde{B}\rangle - b|B|^2\langle \widetilde{A}_0, A_0\rangle = \alpha|A_0|^2 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

como $|A_0| = 1$ e por (64)

$$\Leftrightarrow 8(\langle A_0, B\rangle)^2 + 4|A_0|^2|B|^2 - 2a(\langle \widetilde{A}_0, B\rangle)^2 - 4b\langle A_0, B\rangle\langle \widetilde{A}_0, B\rangle - 2b(\det A_0)|B|^2 = \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \psi(A_0, B) = \alpha.$$

Utilizando a mesma técnica acima exposta, multiplicando (65) por B^i_α (e tendo em mente que $\langle B, \widetilde{B}\rangle = 2\det B = 0$), deduz-se que

$$\begin{aligned}8\langle A_0, B\rangle|B|^2 + 4|B|^2\langle A_0, B\rangle - 2a\langle \widetilde{A}_0; B\rangle\langle B, \widetilde{B}\rangle - 2b\langle \widetilde{A}_0, B\rangle|B|^2 + \\ - 2b\langle A_0, B\rangle\langle B, \widetilde{B}\rangle - b|B|^2\langle \widetilde{A}_0, B\rangle = \alpha\langle A_0, B\rangle \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (12|B|^2 - \alpha)\langle A_0, B\rangle - 3b|B|^2\langle \widetilde{A}_0, B\rangle = 0.$$

E analogamente, multiplicando agora (65) por $\widetilde{B}^i_\alpha$

$$\begin{aligned}8\langle A_0, B\rangle\langle B, \widetilde{B}\rangle + 4|B|^2\langle A_0, \widetilde{B}\rangle - 2a\langle \widetilde{A}_0, B\rangle|\widetilde{B}|^2 - 2b\langle \widetilde{A}_0, B\rangle\langle B, \widetilde{B}\rangle + \\ - 2b\langle A_0, B\rangle|\widetilde{B}|^2 - b|B|^2\langle \widetilde{A}_0, \widetilde{B}\rangle = \alpha\langle A_0, \widetilde{B}\rangle \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow ((4-2a)|B|^2-\alpha)\langle \widetilde{A}_0, B\rangle - 3b|B|^2\langle A_0, B\rangle = 0.$$

Resumindo temos

$$\begin{cases} (12|B|^2-\alpha)\langle A_0, B\rangle - 3b|B|^2\langle \widetilde{A}_0, B\rangle = 0 \\ ((4-2a)|B|^2-\alpha)\langle \widetilde{A}_0, B\rangle - 3b|B|^2\langle A_0, B\rangle = 0 \end{cases}$$

o que nos dá várias possibilidades:

1^o Caso. A primeira possibilidade é

$$\langle A_0, B\rangle = \langle \widetilde{A}_0, B\rangle = 0.$$

Temos então que

$$\psi(A_0, B) = 8(\langle A_0, B\rangle)^2 + 4|A_0|^2|B|^2 - 2a(\langle A_0, B\rangle)^2 - 4b\langle A_0, B\rangle\langle \widetilde{A}_0, B\rangle - 2b(\det A_0)|B|^2 =$$

$$= 4|A_0|^2|B|^2 - 2b(\det A_0)|B|^2.$$

Como $|b| \leq 4$ (por hipótese) e dado que para qualquer $A \in \mathbb{M}^{2\times 2}$ temos $2\det A \leq |A|^2$ (pois $(A_1^1 - A_2^2)^2, (A_2^1 + A_1^2)^2 \geq 0$) deduzimos imediatamente que $\psi(A_0, B) \geq 0$, logo que $\psi(A, B) \geq 0$.

2^o Caso. Outra possibilidade é $\langle \widetilde{A}_0, B\rangle = 0$, $\langle A_0, B\rangle \neq 0$. Temos então imediatamente que $\psi(A_0, B) = \alpha \geq 0$.

3^o Caso. Suponhamos agora que $\langle A_0, B\rangle = 0$, $\langle \widetilde{A}_0, B\rangle \neq 0$. Como $a \leq 2$, concluímos então que $\alpha \geq 0$.

4^o Caso. Suponhamos, por último, que $\langle \widetilde{A}_0, B\rangle \neq 0$ e $\langle A_0, B\rangle \neq 0$, o que nos leva a concluir

$$(12|B|^2-\alpha)((4-2a)|B|^2-\alpha)\langle A_0, B\rangle\langle \widetilde{A}_0, B\rangle = 9b^2|B|^4\langle A_0, B\rangle\langle \widetilde{A}_0, B\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (12|B|^2-\alpha)((4-2a)|B|^2-\alpha) = 9b^2|B|^4,$$

i.e.

$$\alpha^2 - 2\alpha|B|^2(8-a) + 3|B|^4(16-8a-3b^2) = 0.$$

Escrevendo $k_1 = (8-a)|B|^4$ e $k_2 = (16-8a-3b^2)|B|^4$, a equação acima pode-se reescrever como

$$\alpha^2 - 2k_1\alpha + k_2 = 0, \tag{66}$$

onde $k_2 \geq 0$ pois por hipótese $8a + 3b^2 \leq 16$ e $k_1 \leq 0$ pois $a \leq 2 \leq 8$ (não esquecendo que $|b| \leq 4$). Resolvendo a equação (66) em ordem a α, deduz-se

$$\alpha = \frac{2k_1 \pm \sqrt{4k_1^2 - 4k_2}}{2}$$

o que imediatamente nos dá que as soluções de α, se forem reais (único caso que nos interessa), serão ambas positivas. □

PROPOSIÇÃO 317. *Seja* $f : \mathbb{M}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$W(A) = |A|^4 - \frac{4}{\sqrt{3}}|A|^2 \det A.$$

Então W não é P-convexa.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos, por absurdo, que W é P-convexa. Então, pelo teorema 287 (2^a parte, fazendo $B = 0$ e relembrando que neste caso $M(A) = (A, \det A)$) existem $\beta \in \mathbb{R}^4$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$W(A) \geq \langle \beta, A\rangle + \gamma \det A = \beta_1^1 A_1^1 + \beta_2^1 A_2^1 + \beta_1^2 A_1^2 + \beta_2^2 A_2^2 + \gamma \det A.$$

Como o lado direito desta última igualdade é a soma de um termo quadrático (o determinante) e um termo linear, temos que existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{W(A)}{1+|A|^2} \geq c,$$

qualquer que seja $A \in \mathbb{M}^{2\times 2}$. No entanto esta última afirmação é absurda visto que, escolhendo $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, temos

$$\frac{W(A)}{1+|A|^2} = \frac{(2t^2)^2 - 8t^4/\sqrt{3}}{1+2t^2} = \frac{4(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}} \frac{t^4}{1+2t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

logo W não é P-convexa. □

OBSERVAÇÃO 318. A combinação destas duas últimas proposições dá-nos o contra-exemplo.

3. A R-convexidade implica a Q-convexidade?

Chegámos finalmente à parte essencial deste trabalho, em função do qual as partes anteriores foram redigidas como preliminares. Começamos por apresentar o contra-exemplo de Šverák que respondeu à questão de saber se a R-convexidade implica ou não a Q-convexidade (no caso de deformações u de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ com $m \geq 3$. Relembramos que no caso 2×2 o problema continua ainda em aberto.

A maioria da investigação antes do resultado de Šverák estava centrada em escolher um integrando W R-convexo em particular e tentar provar que (ou mostrar que não) existe uma função $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e $F \in \mathbb{M}^{m\times n}$ tais que

$$\int_\Omega W(F + \nabla u(x))dx < \int_\Omega W(F)dx. \tag{67}$$

A ideia chave de Šverák foi fixar uma função u e tentar encontrar funções W que satisfazem (67) mas que são R-convexas, como por exemplo, no contra-exemplo de Dacorogna-Marcellini (que apresentámos na secção anterior, apenas para mostrar que a R-convexidade não implica a P-convexidade) em que consideramos

$$W(F) = |F|^4 - \gamma|F|^2 \det F,$$

$F \in \mathbb{M}^{2\times 2}$. Então

$$\begin{aligned} W \ convexa &\Leftrightarrow |\gamma| \le \frac{4}{3}\sqrt{2}, \\ W \ P-convexa &\Leftrightarrow |\gamma| \le 2, \\ W \ Q-convexa &\Leftrightarrow |\gamma| \le 2+\varepsilon, \\ W \ R-convexa &\Leftrightarrow |\gamma| \le \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

É sabido que $\varepsilon > 0$, mas continua em aberto o problema de saber se $2 + \varepsilon = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Šverák fez a observação crucial que o espaço vectorial gerado pelos gradientes de polinómios trigonométricos contém poucas direcções de car-1 e consequentemente suportam muitas funções R-convexas. Depois do contra-exemplo de Šverák, apresentamos também as suas re-interpretações por outros grandes matemáticos.

3.1. O contra-exemplo de Šverák.

TEOREMA 319. *Suponhamos que $m \ge 3$, $n \ge 2$. Então existe uma função $W : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ que é R-convexa mas não é Q-convexa.*

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a função periódica $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} \sin 2\pi x_1 \\ \sin 2\pi x_2 \\ \sin 2\pi(x_1 + x_2) \end{pmatrix}.$$

Então temos que

$$\nabla u(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi x_1 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi x_1 \\ \cos 2\pi(x_1 + x_2) & \cos 2\pi(x_1 + x_2) \end{pmatrix}. \tag{68}$$

É claro que os valores de ∇u estão todos no espaço vectorial

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \\ t & t \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Seja $W : L \to \mathbb{R}$ dada por

$$f\left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \\ t & t \end{pmatrix} \right) = -rst. \tag{69}$$

Temos que as R-direcções em L são dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Note-se que as matrizes acima formam uma base para L cujos elementos têm car-1). Consequentemente a função W é R-afim em L. Utilizando a fórmula da trigonometria $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ e como

$$\int_0^1 \sin(2\pi x) \cos(2\pi x) dx = 0,$$

deduzimos

$$\int_{[0,1]^2} W(\nabla u(x))dx = \int_{[0,1]^2} - \cos 2\pi x_1 \cos 2\pi x_1 \cos 2\pi(x_1 + x_2) dx_1 dx_2 =$$
$$= -\int_{[0,1]^2} (\cos 2\pi x_1)^2 (\cos 2\pi x_2)^2 dx_1 dx_2 + \int_{[0,1]^2} \cos 2\pi x_1 \sin 2\pi x_1 \cos 2\pi x_2 \sin 2\pi x_2 dx_1 dx_2 =$$
$$= -\int_{[0,1]^2} (\cos 2\pi x_1)^2 (\cos 2\pi x_2)^2 dx_1 dx_2 = -\frac{1}{4} < 0 = W(0),$$

i.e., W não é Q-convexa.

Para terminar a demonstração precisaríamos de estender W, como função R-convexa, a todo o espaço $\mathbb{M}^{3\times 2}$; ou, como alternativa, mais acessível, de fazer a extensão não da função W mas de uma sua pequena perturbação, que conserve as propriedades de W que nos interessam. No que segue iremos encarar novamente $\mathbb{M}^{3\times 2}$ como sendo o espaço euclideano $\mathbb{R}^6$. A norma de $X \in \mathbb{M}^{3\times 2}$ é dada por $|X|^2$ =soma dos quadrados das entradas de X.

LEMA 320. *Seja L o subespaço vectorial de $\mathbb{M}^{3\times 2}$ definido acima e seja $\pi : \mathbb{M}^{3\times 2} \to L$ a correspondente projecção ortogonal. Seja $W : L \to \mathbb{R}$ a função definida por (69). Então para cada $\varepsilon > 0$ existe um $k = k(\varepsilon) > 0$ tal que a função $g : \mathbb{M}^{3\times 2} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$g_{\varepsilon,k}(x) = W(\pi x) + \varepsilon(|x|^2 + |x|^4) + k|x - \pi x|^2 \tag{70}$$

é R-convexa em $\mathbb{M}^{3\times 2}$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos, por absurdo, que existe um $\varepsilon > 0$ tal que $g_{\varepsilon,k}$ não é R-convexa, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ (em particular, pois $k \in \mathbb{R}$). Consequentemente existem $m^k \in \mathbb{M}^{3\times 2}$, $a^k \in \mathbb{R}^3$, $b^k \in \mathbb{R}^2$, com $|a^k| = |b^k| = 1$, tais que

$$D^2 g_{\varepsilon,k}(m^k)(a^k \otimes b^k, a^k \otimes b^k) < 0.$$

Ou seja: pondo $a^k \otimes b^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k, x_5^k, x_6^k) = x^k$,

$$\begin{aligned} -2[m_1^k(x_4^k x_5^k) + m_4^k(x_1^k x_5^k) + m_5^k(x_1^k x_4^k)] + 2\varepsilon[(1 + 2|m^k|^2)|x^k|^2 + 4\langle x^k, m^k\rangle] + \\ + 2k[(x_2^k)^2 + (x_3^k)^2 + (x_5^k - x_6^k)^2] < 0 \ \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $|x^k|^2 = |a^k|^2|b^k|^2 = 1$, se $(|m^k|)$ tendesse para ∞ quando $k \to \infty$, a soma das duas primeiras parcelas iria para $+\infty$ (pois a 2^a parcela é quadrática definida positiva em $|m^k|$, em particular domina a 1^a parcela, que é linear); e a última parcela tenderia também para $+\infty$ se $(x_2^k)^2 + (x_3^k)^2 + (x_5^k - x_6^k)^2$ fosse estritamente positivo (note-se que não pode ser negativo). Concluímos então que (m^k) tem de ser uma sucessão limitada e $(x_2^k, x_3^k, x_5^k - x_6^k)$ tem de tender para zero (mais depressa que $1/k$). Assim podemos tomar subsucessões convergentes, $(m^k) \to m$, $(a^k) \to a$, $(b^k) \to b$, $(x^k) \to x$ e, passando ao limite, obter

$$-2[m_1(x_4x_5) + m_4(x_1x_5) + m_5(x_1x_4)] + 2\varepsilon[(1 + 2|m|^2)|x|^2 + 4\langle x, m\rangle] + 0 \le 0,$$

sendo $x - \pi x = 0$, i.e. $x \in L$.

Mas a primeira parcela (que é a 2^a derivada duma função, $W(\cdot)$, que é afim na direcção $x \in L$ onde estamos a calcular a 2^a derivada) tem de ser zero, o que é absurdo, pois obtemos $\varepsilon \le 0$. Existe então um $k(\varepsilon)$ tal que $g_\varepsilon := g_{\varepsilon,k(\varepsilon)}$ é R-convexa. □

Temos agora de mostrar que esta função g_ε continua a não ser Q-convexa tal como g.

TEOREMA 321. *Existem $\varepsilon > 0$ e $k > 0$ tais que a função $g_{\varepsilon,k}$ dada por (70) não é Q-convexa.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja u definido como acima. Em particular, como $\nabla u \in L^\infty$, temos que existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\int_{(0,1)^2} (W(\nabla u) + \varepsilon(|\nabla u|^2 + |\nabla u|^4))dx < 0.$$

Como também temos $\nabla u \in L$, então obtém-se imediatamente

$$\int_{(0,1)^2} g_{\varepsilon,k}(\nabla u)dx = \int_{(0,1)^2} (W(\nabla u) + \varepsilon(|\nabla u|^2 + |\nabla u|^4))dx < 0 = g_{\varepsilon,k}(0),$$

i.e., $g_{\varepsilon,k}$ não é Q-convexa. □

Combinando o lema e o teorema anterior encontramos um exemplo de uma função em $\mathbb{M}^{3\times 2}$ que é R-convexa mas não é Q-convexa. falta-nos então extender este exemplo ao caso em que o espaço de chegada tem dimensão $m \geq 3$.

COROLÁRIO 322. *Sejam $n \geq 2$, $m \geq 3$ e $T : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{M}^{3\times 2}$ definida por*

$$TX = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \\ x_3^1 & x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Seja $g_{\varepsilon,k} : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ definida por $\overline{g}_{\varepsilon,k}(X) = g_{\varepsilon,k}(TX)$. Então $g_{\varepsilon,k}$ é R-convexa mas não é Q-convexa.

DEMONSTRAÇÃO. Como T transforma R-matrizes em R-matrizes e $g_{\varepsilon,k}$ é R-convexa, então $\overline{g}_{\varepsilon,k}$ é R-convexa. Consideremos a função periódica

$$\widetilde{u}(x_1, ..., x_n) = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), u_3(x_1, x_2), 0, ..., 0).$$

Como a primeira submatriz 3×2 é igual à matriz (68), conclui-se finalmente que $\overline{g}_{\varepsilon,k}(X)$ não é Q-convexa. □

E isto conclui a demonstração. □

3.2. A modificação de James. Consideremos a extensão periódica $\widetilde{s}$ da função $s : [0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$s(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1/4) \\ 1/2 - x & x \in [1/4,3/4) \\ x-1 & x \in [3/4,1), \end{cases}$$

com média zero e $s' = 1$ em $(0,1/4) \cup (3/4,1)$ e $s' = -1$ em $(1/4,3/4)$ e definimos $\widetilde{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por

$$\widetilde{u}(x_1,x_2) = (\widetilde{s}(x_1), \widetilde{s}(x_2), \widetilde{s}(x_1+x_2)).$$

Então $\nabla\widetilde{u} \in L$ e sendo f definida como antes, basta apenas calcular as áreas respectivas para concluirmos

$$\int_{(0,1)^2} f(\nabla\widetilde{u}(x))dx = \left(1 - \frac{12}{16}\right) - \frac{12}{16} = -\frac{1}{2} < 0 = f(0).$$

Procedendo da mesma forma como no contra-exemplo de Šverák, encontramos uma função R-convexa que não é Q-convexa. Este contra-exemplo pode ser re-interpretado em termos de laminados, procedendo-se para tal como pode ser observado na subsecção seguinte.

3.3. A modificação de Pedregal. Nesta secção vamos descrever uma medida parametrizada gradiente que não é um laminado. Este contra-exemplo é uma interpretação em termos de laminados contra-exemplo de Šverák.

Refinemos primeiro a definição de laminado.

LEMA 323. *Seja ν um laminado suportado num conjunto compacto K com primeiro momento (ou baricentro) $Y \in conv(K)$. Então existe uma sucessão de pares $\{(t_i^k, Y_i^k)\}_{1\leq i\leq k}$ satisfazendo (H_k) tal que $Y_i^k \in conv(K)$ para todos os k e i, tal que*

$$\sum_i t_i^k \delta_{Y_i^k} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Como ν é um laminado com suporte K, por definição, existe um conjunto de pares $\{s_j^k, Z_j^k\}_{1\leq j\leq k}$ verificando a condição (H_k) e

$$\sum_j s_j^k \delta_{Z_j^k} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu.$$

Em particular todas as matrizes Z_j^k estão contidas numa bola fixada (caso contrário, se $Z_j^k \to \infty$ para alguma subsucessão poderíamos tomar uma função contínua φ tal que $\varphi \geq 0$, $\varphi|_K = 0$ e $\varphi(Z_j^k) = 1/t_i^k$, o que contradiz a convergência fraca*). Pela definição de (H_k), podemos encontrar uma decomposição do conjunto de índices $\{1, 2, ..., k\}$ em dois subconjuntos próprios $T_i^k, i = 1, 2$, tais que se

$$t_i^k = \sum_{T_i^k} s_j^k, \ Y_i^k = \sum_{T_i^k} \frac{s_j^k}{t_i^k} Z_j^k, \ i = 1, 2,$$

então $car\{Y_1^k - Y_2^k\} \leq 1$. Passando a uma subsucessão em k, pomos $Y_i^k \to Y_i$, $t_i^k \to t_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$. Afirmamos que se $Y_i \notin conv(K)$, então $t_i = 0$. Suponhamos, por absurdo, que não. Consideremos uma vizinhança U de $conv(K)$, convexa e aberta, tal que $Y_i \notin U$. Para k suficientemente grande, por definição de limite, $Y_i^k \notin U$ e $t_i^k \geq t_i/2 > 0$. Isto implica que a soma

$$\sum_{j \in T_i^k, Z_j^k \notin U} \frac{s_j^k}{t_i^k}$$

não converge para zero, caso contrário U não seria convexo. Como os denominadores t_i^k estão uniformemente distantes de zero, concluímos que

$$\sum_{j \in T_i^k, Z_j^k \notin U} s_j^k$$

também não converge para zero. Absurdo, pois o suporte de ν está contido em U por hipótese. Se $t_i = 0$, rejeitamos o par (t_i, Y_i). De qualquer modo $Y = t_1 Y_1 + t_2 Y_2$. Procedemos agora recursivamente. Pela definição da condição (H_k), o conjunto dos pares $\{(s_j^k, Z_j^k)\}_{j \in T_1^k}$ verifica alguma condição (H_l) e, consequentemente, podemos aplicar o procedimento acima a este conjunto de pares, encontrando além disso uma subsucessão de índices k e pares (t_{1i}, Y_{1i}), $i = 1, 2$ tais que $car\{Y_{11} - Y_{22}\} \leq 1$, $Y_1 = t_{11} Y_{11} + t_{12} Y_{12}$ e $Y_{1i} \in conv(K)$ dado $t_{1i} > 0$. Decompondo agora T_2^k e os subconjuntos subsequentes, observamos que para uma sucessão diagonal adequada e renomeando os coeficientes t_i e as matrizes Y_i para t_i^l e Y_i^l, respectivamente, obtemos

$$\lim_{l \to \infty} \lim_{k \to \infty} \left| \sum_i t_i^l \psi(Y_i^l) - \sum_i s_j^k \psi(Z_j^k) \right| = 0,$$

$\{(t_i^l, Y_i^l)\}_{1\leq i\leq l}$ satisfaz (H_l), $Y_i^l \in conv(K)$, para qualquer função contínua. Esta igualdade implica que o limite fraco para

$$\sum_i t_i^l \delta_{Y_i^l} \text{ e } \sum_j s_j^k \delta_{Z_j^k}$$

é o mesmo, o que termina a demonstração. □

Usando este refinamento da noção de laminado, podemos agora construir o referido contra-exemplo usando uma deformação periódica. Seja $\chi = (2\chi_0 - 1)$ onde χ_0 é a função característica de $(0, 1/2)$ em $(0,1)$ estendida periodicamente. Definimos a deformação $u : \Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ pondo

$$u_1(x_1,x_2) = \int_0^{x_1} \chi(s)ds,$$
$$u_2(x_1,x_2) = \int_0^{x_2} \chi(s)ds,$$
$$u_3(x_1,x_2) = \int_0^{x_1+x_2} \chi(s+\frac{1}{4})ds.$$

O gradiente ∇u é a matriz

$$\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \chi(x_1) & 0 \\ 0 & \chi(x_2) \\ \chi(x_1+x_2+\frac{1}{4}) & \chi(x_1+x_2+\frac{1}{4}) \end{pmatrix}.$$

Note-se que o gradiente está contido no subespaço tridimensional L, das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \\ z & z \end{pmatrix} \mapsto (x,y,z). \tag{71}$$

Se considerarmos a sucessão de funções Ω-periódicas ($\Omega = (0,1)^2$) $u_j(x) = \frac{1}{j}u(jx)$, pelo Lema de Riemann-Lebesgue a medida parametrizada gradiente correspondente à sucessão de gradientes $\{\nabla u_j\} = \{\nabla u(jx)\}$ é homogénea e, depois da identificação sugerida em (71), dada por

$$\nu = \frac{1}{16}\left(\delta_{(1,1,1)} + \delta_{(1,-1,-1)} + \delta_{(-1,1,-1)} + \delta_{(-1,-1,1)}\right) + \\ + \frac{3}{16}\left(\delta_{(1,1,-1)} + \delta_{(1,-1,1)} + \delta_{(-1,1,1)} + \delta_{(-1,-1,-1)}\right).$$

Seja V o conjunto dos vértices do cubo $C = [-1,1]^3$. sabemos então que ν é uma medida parametrizada com $spt(\nu) = V$ e com baricentro na origem; mas ν não pode ser um laminado facto, por causa da seguinte

OBSERVAÇÃO 324. Se μ é um laminado com $spt(\mu) = V$ e primeiro momento 0,

$$\mu = \frac{1}{8}\left(\delta_{(1,1,1)} + \delta_{(1,-1,-1)} + \delta_{(-1,1,-1)} + \delta_{(-1,-1,1)}\right) + \\ + \frac{1}{8}\left(\delta_{(1,1,-1)} + \delta_{(1,-1,1)} + \delta_{(-1,1,1)} + \delta_{(-1,-1,-1)}\right).$$

De facto, pelo lema 323, se quisermos encontrar laminados suportados no conjunto V dos vértices do cubo e tendo primeiro momento 0, podemos restringir-nos ao cubo C. Como as únicas direcções de car-1 em C são as dadas pelos eixos, a única possibilidade é a afirmada na observação anterior.

A situação quando a dimensão do espaço de chegada é $m = 2$ é drasticamente distinta. Para tentar encontrar analogamente um contra-exemplo, neste caso, parece natural definir a deformação periódica $u : \Omega = (0,1)^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$u_1(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \chi(s)ds + \int_0^{x_1+x_2} \chi(s + \frac{1}{4})ds,$$

$$u_2(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \chi(s)ds + \int_0^{x_1+x_2} \chi(s + \frac{1}{4})ds.$$

O gradiente de u,

$$\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \chi(x_1) + \chi(x_1 + x_2 + \frac{1}{4}) & \chi(x_1 + x_2 + \frac{1}{4}) \\ \chi(x_1 + x_2 + \frac{1}{4}) & \chi(x_2) + \chi(x_1 + x_2 + \frac{1}{4}) \end{pmatrix},$$

pertence sempre ao subespaço tridimensional das matrizes simétricas 2×2. A subjacente medida parametrizada gradiente gerada de u por homogeneização pode ser representada pela identificação

$$\begin{pmatrix} x + z & z \\ z & y + z \end{pmatrix} \mapsto (x, y, z)$$

e novamente por

$$\nu = \frac{1}{16}\left(\delta_{(1,1,1)} + \delta_{(1,-1,-1)} + \delta_{(-1,1,-1)} + \delta_{(-1,-1,1)}\right) + \\ + \frac{3}{16}\left(\delta_{(1,1,-1)} + \delta_{(1,-1,1)} + \delta_{(-1,1,1)} + \delta_{(-1,-1,-1)}\right).$$

O que muda agora é o conjunto das direcções de car-1 contido no correspondente subespaço tridimensional L. De facto, os vectores $(x, y, z) \in L$ dão-nos direcções de car-1 sse

$$\det\left(\begin{pmatrix} x + z & z \\ z & y + z \end{pmatrix}\right) = (x + z)(y + z) - z^2 = xy + yz + xz = 0.$$

Vamos ver que, ao contrário do que acontecia em dimensão superior, ν é agora um laminado. Consideremos os seguintes pontos no cubo $C = [-1,1]^3 \subset L$ cujas coordenadas são dadas por:

$$P_0 = (0,0,0),\ P_1 = (-\frac{1}{2},1,1),\ P_2 = (\frac{1}{10}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}),\ P_3 = (1,-\frac{5}{7},1),$$
$$P_4 = (-\frac{1}{11},-\frac{1}{11},-\frac{5}{11}),\ P_5 = (1,1,-1),\ P_6 = (-1,-1,0).$$

Podemos verificar que

$$P_2 - P_1,\ P_4 - P_3,\ P_6 - P_5$$

são todas car-1 (queremos dizer que as coordenadas de tais diferenças satisfazem a equação $xy + yz + xz = 0$), pois

$$P_2 - P_1 = \frac{6}{5}(\frac{1}{2}, -1, -1),$$
$$P_4 - P_3 = \frac{4}{11}(-3, \frac{12}{7}, -4),$$
$$P_6 - P_5 = (-2,-2,1).$$

Podemos construir um laminado utilizando estas direcções, suportado no conjunto dos vértices do cubo, da seguinte forma. Primeiro escrevemos

$$P_0 = \lambda_1 P_2 + (1-\lambda_1)P_1,$$

onde $P_2 - P_1$ é uma direcção de car-1 e $\lambda_1 = \frac{5}{6}$. Do mesmo modo

$$P_2 = \lambda_2 P_3 + (1-\lambda_2)P_4,$$

$$P_1 = \lambda_3(1,1,1) + (1-\lambda_3)(-1,1,1),$$

onde mais uma vez $P_4 - P_3$ e $(1,1,1)-(-1,1,1)$ são direcções de car-1, $\lambda_2 = \frac{7}{40}$ e $\lambda_3 = \frac{1}{4}$. Pomos agora

$$P_0 = \lambda_1(\lambda_2 P_3 + (1-\lambda_2)P_4) + (1-\lambda_1)(\lambda_3(1,1,1) + (1-\lambda_3)(-1,1,1)).$$

Da mesma forma

$$P_3 = \lambda_4(1,1,1) + (1-\lambda_4)(1,-1,1),$$

$$P_4 = \lambda_5 P_5 + (1-\lambda_5)P_6,$$
$$P_6 = \frac{1}{2}(-1,-1,1) + \frac{1}{2}(-1,-1,-1),$$

onde $(1,1,1)-(1,-1,1)$, P_5-P_6, $(-1,-1,1)-(-1,-1,-1)$ são direcções de car-1, $\lambda_4=\frac{1}{7}$ e $\lambda_5=\frac{5}{11}$. Temos então finalmente que

$$P_0=\lambda_1[\lambda_2(\lambda_4(1,1,1)+(1-\lambda_4)(1,-1,1))+(1-\lambda_2)(\lambda_5(1,1,-1)+(1-\lambda_5)(\frac{1}{2}(-1,-1,1)+ \\ +\frac{1}{2}(-1,-1,-1))]+(1-\lambda_1)(\lambda_3(1,1,1)+(1-\lambda_3)(-1,1,1)).$$

Utilizamos esta decomposição para encontrar o laminado suportado em V. O laminado ν_1 que se obtém desta construção é

$$\nu_1=\frac{3}{16}\left(\delta_{(-1,-1,-1)}+\delta_{(-1,-1,1)}\right)+\frac{2}{16}\left(\delta_{(1,-1,1)}+\delta_{(-1,1,1)}\right)+\ +\frac{1}{16}\left(\delta_{(1,1,1)}+5\delta_{(1,1,-1)}\right).$$

Por simetria podemos também construir mais dois laminados, ν_2 e ν_3, com a origem por primeiro momento e com as fracções de volume dadas por

$$\nu_2=\frac{3}{16}\left(\delta_{(-1,-1,-1)}+\delta_{(-1,1,-1)}\right)+\frac{2}{16}\left(\delta_{(-1,1,1)}+\delta_{(1,1,-1)}\right)+\frac{1}{16}\left(\delta_{(1,1,1)}+5\delta_{(1,-1,1)}\right),$$

(*simetria* xy)

$$\nu_3=\frac{3}{16}\left(\delta_{(-1,-1,-1)}+\delta_{(1,-1,-1)}\right)+\frac{2}{16}\left(\delta_{(1,1,-1)}+\delta_{(1,-1,1)}\right)+\frac{1}{16}\left(\delta_{(1,1,1)}+5\delta_{(-1,1,1)}\right).$$

(*simetria* xz)

Agora é apenas uma questão aritmética para encontrarmos

$$\nu=\frac{1}{3}\nu_1+\frac{1}{3}\nu_2+\frac{1}{3}\nu_3=\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)\delta_{(-1,-1,-1)}+\frac{1}{16}\delta_{(-1,-1,1)}+ \\ +\left(\frac{2}{3.16}+\frac{5}{3.16}+\frac{2}{3.16}\right)\delta_{(1,-1,1)}+\left(\frac{2}{3.16}+\frac{2}{3.16}+\frac{5}{3.16}\right)\delta_{(-1,1,1)}+ \\ +\left(\frac{1}{3.16}+\frac{1}{3.16}+\frac{1}{3.16}\right)\delta_{(1,1,1)}+\left(\frac{5}{3.16}+\frac{2}{3.16}+\frac{2}{3.16}\right)\delta_{(1,1,-1)}+\frac{1}{16}\delta_{(-1,1,-1)}+\frac{1}{16}\delta_{(1,-1,-1)}= \\ =\frac{1}{16}(\delta_{(1,1,1)}+\delta_{(1,-1,-1)}+\delta_{(-1,1,-1)}+\delta_{(-1,-1,1)})+\frac{3}{16}(\delta_{(1,1,-1)}+\delta_{(1,-1,1)}+\delta_{(-1,1,1)}+\delta_{(-1,-1,-1)}).$$

Pela convexidade do conjunto dos laminados com o mesmo primeiro momento, ν é um laminado, falhando assim a tentativa de Pedregal para encontrar um contra-exemplo no caso 2×2.

Bibliografia

[1] Adams, R. A., Sobolev Spaces, Academic Press (1975)
[2] Adams, M., Guillemin, V., Measure theory and probability, Birkhäuser (1996)
[3] Ball, J. M., Murat, F., Remarks on Chacon's Bitting Lemma, revised version (1988)
[4] Bethuel, F., Huisken, G., Müller, S., Steffen, K., Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems, Springer, Lectures given at the 2nd Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Cetraro, Italy, June 15 – 22 (1996)
[5] Brezis, H., Analyse functionnelle, Théorie et applications, Masson (1987)
[6] Cesari, L., Optimization - theory and applications, Problems with ordinary differential equations, Applications of Mathematics, 17 Springer, (1983)
[7] Cohn, D. L., Measure Theory, Birkhäuser (1980)
[8] Dacorogna, B., Direct Methods in the Calculus of Variations, Springer (1989)
[9] Dacorogna, B., Marcellini, P., A Counterexample in the Vectorial Calculus of Variations, Material instabilities in continuum mechanics and related mathematical problems (J.M. Ball, ed.), Oxford Univ. Press, 77-83 (1988)
[10] Dunford, N., Schwartz, J.T., Linear Operators, Interscience Publishers, inc., New York (1958)
[11] Edwards, R. E., Functional Analysis, Theory and applications, Dover Publications, Inc., New York (1995)
[12] Ekeland, I., Temam, R., Convex analysis and variational problems, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1976)
[13] de Guzmán, M., Differentiation of integrals in R^n. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 481. Springer-Verlag, Berlin-New York (1975)
[14] Kristensen, J., On the non-locality of quasiconvexity, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 16, no. 1, 1–13 (1999)
[15] Lieb, E. H., Loss, M., Analysis, Second edition, Graduate Studies in Mathematics, 14. American Mathematical Society, Providence, RI (2001)
[16] Lima, E.L., Elementos de Topologia Geral, IMPA, Rio de Janeiro (1970)
[17] Machado, A., Introdução à análise funcional, Escolar Editora (1991)
[18] Magalhães, L. T., Álgebra linear como introdução à matemática aplicada, Texto Editora (1989)
[19] Ornelas, A., Apontamentos de Análise Funcional I, Apontamentos da Licenciatura em Matemática Aplicada da Universidade de Évora, Évora (2001)
[20] Ornelas, A., Cálculo das Variações, Apontamentos da disciplina de Mestrado em Matemática Aplicada da Universidade de Évora, Évora (2002)
[21] Pedregal, P., Jensen's inequality in the calculus of variations. Differential Integral Equations 7, no. 1, 57–72 (1994)
[22] Pedregal, P., Some remarks on quasiconvexity and rank-one convexity, Proc. R. Soc. Edinb., 162, n 5, 1055-1065 (1996)
[23] Pedregal, P., Parametrized Measures and Variational Principles, Birkhäuser (1997)
[24] Pedregal, P., Variational Methods in Nonlinear Elasticity, SIAM (2000)
[25] Rudin, W., Real and complex analysis, Third edition, MacGraw-Hill (1987)
[26] Rudin, W., Functional Analysis, Second edition, MacGraw-Hill, Inc. (1991)
[27] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1972)
[28] Roubícěk, T., Relaxation in the optimization theory and variational calculus, De Gruyter series in nonlinear analysis and applications 4, Berlin; New York (1997)
[29] Šverák, V., Rank-one convexity does not imply quasiconvexity, Proc. R. Soc. Edinb., 120A, 185-189 (1992)
[30] Yeh, J., Lectures on Real Analysis, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge (2000)