UNIVERSIDADE DE ÉVORA

TRAJECTÓRIAS DE SUPERFÍCIES DISCRETAS ASSOCIADAS A PROCESSOS ESTOCÁSTICOS COM PASSOS INFINITÉSIMAIS

Uma dissertação apresentada por

Elsa Maria Janes da Costa Godinho Calado Amaro

Para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Doutor Imme Van Den Berg

Mestrado em Matemática Aplicada
Biénio 1999/2001

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

TRAJECTÓRIAS DE SUPERFÍCIES DISCRETAS ASSOCIADAS A PROCESSOS ESTOCÁSTICOS COM PASSOS INFINITÉSIMAIS

Uma dissertação apresentada por

Elsa Maria Janes da Costa Godinho Calado Amaro

Para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Doutor Imme Van Den Berg

Mestrado em Matemática Aplicada
Biénio 1999/2001

ERRATA

Página	*Linha*	*Onde se lê*	*Leia – se*
12	4	Capitulo	Capítulo
12	0, 2	continua	contínua
13	7	símblos	símbolos
14	5	dominio	domínio
14	18	principios	princípios
15	12, 18	principio	princípio
16	9	nas somas de	à
16	11	príncipio	princípio
17	8, 12, 20	principio	princípio
19	13, 27	principio	princípio
19	17	necessáriamente	necessariamente
19	35	$\emptyset$	$\varnothing$
20	8, 11	principio	princípio
20	9, 10	continua	contínua
21	4	principio	princípio
22	18, 20, 24	continua	contínua
23	3, 6, 13	continua	contínua
24	4	X	x
24	6, 8, 21	continua	contínua
25	6, 9, 10, 11, 17, 20, 24, 26, 28, 30	continua	contínua
26	5	principio	princípio
26	12	extendemos	estendemos
26	20, 22	continua	contínua
27	2, 9, 11, 26	continua	contínua
29	18, 28	continua	contínua
31	7	$\frac{\exp\left(\delta x+\pounds(\delta x)^2-\exp\pounds(\delta x)^2\right)}{\delta x}$	$\frac{\exp\left(\delta x+\pounds(\delta x)^2\right)-\exp\pounds(\delta x)^2}{\delta x}$
32	11	continua	contínua
35	12	para a existência	para verificar a existência
35	16	continua	contínua

95	8	dy.	dY.
95	24	Teorema 1.1.1	Teorema 4.3
95	26	proposição 6.16	proposição 6.13
96	13	uma pois	uma, pois
97	16	obtemos assim	obtivemos
98	17	diferença obtemos	diferença, obtemos
99	14	δt	δt.
101	6	trajectória limitada	trajectórias limitadas
101	11	é S^{12},	é de classe S^{12},
102	5	S-continuas	S-contínuas
102	16	S-continuas	S-contínuas
103	6	exemplo 8.4	exemplo 8.3
105	17	quação	equação
105	22	x_t e y_t	X e Y
105	6, 23	S-continuas	S-contínuas
105	24	$E(f(x))$ e $E(f(y))$	$E(f(X))$ e $E(f(Y))$
106	14	fazendo	tomamos
108	3	univoca	unívoca
108	3	cada superfície	cada trajectória
108	4	continua	contínua
108	4	Mostramos que	De facto, verificamos que $\widetilde{X}$ é bem definida do seguinte modo:
108	9	das duas	da resolução das duas
108	11	é enunciado	é o enunciado
108	17	S-continua	S-contínua
110	10	o teorema	um teorema
110	20	de Calor.	de Calor discretos.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. DIENER, G. REEB. *Analyse Non Standard.* Hermann, 1989.

[2] F. DIENER, M. DIENER, (EDS). *Nonstandard Analysis in Practice*. Springer Verlag, 1995.

[3] I. P. Van Den BERG. On the relation between elementary partial difference equations and partial differential equations. *Annals of Pure and Applied Logic*, **92** 235-265, 1998.

[4] E.NELSON. *Radically elementary probability theory.* Princeton University Press, 1987.

[5] R. GOLDBLATT. *Lectures on the Hyperreals: An introduction to Nonstandard Analysis.* New York: Springer Verlag, 1998.

[6] I.Van Den BERG. *Principles of infinitesimal Stochastic and Financial Analysis.* Singapure: World Scientific, 2001.

ADENDA

Na página 108, após a linha 10 faço a seguinte adenda:

Observe-se ainda que a superfície $\widetilde{X}_s(t,x)$ é de classe C^{12}, porque a sombra de uma função de classe S^{12} é de classe C^{12}. [3]

De facto, só precisamos verificar que $\frac{\delta_{22}\widetilde{Y}(t,x)}{\delta x^2}$ é de classe S^{00}.

Com efeito:

$$\frac{\widetilde{Y}(t,x+2\delta x)-2\widetilde{Y}(t,x+\delta x)+\widetilde{Y}(t,x)}{\delta x^2}$$
$$\simeq \frac{\sigma'\left(t-\delta t,\widetilde{Y}\left(t-\delta t,x+3\sqrt{\delta t}\,\right)\right)-\sigma'\left(t-\delta t,\widetilde{Y}\left(t-\delta t,x+\sqrt{\delta t}\,\right)\right)}{\delta x}$$
$$\simeq \frac{\sigma\left(t,\widetilde{Y}(t,x+\delta x)\right)-\sigma\left(t,\widetilde{Y}(t,x)\right)}{\delta x}$$

que é de classe S^{00}.

Chamamos a $\widetilde{X}_s(t,x)$ a *Superfície Contínua* associada ao processo quase recombinado $X(t,x)$.

Na página 98, antes do lema 11.2, coloco o seguinte teorema com a demonstração:

Teorema: Seja X_t um processo quase-recombinado, satisfazendo a equação de diferenças estocásticas

$$\delta X_t = \mu(t,X_t)\delta t \pm \sigma(t,X_t)\sqrt{\delta t}$$

com st μ, σ, onde μ e σ são ambos de classe C^{12}.

Seja Z a superfície contínua associada ao processo quase-recombinado X_t.

Então μ e σ satisfazem

$$\sigma\frac{\partial\mu}{\partial Z}-D.\sigma = 0$$

onde

$$D = \frac{\partial}{\partial t}+\mu\frac{\partial}{\partial Z}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial Z^2}$$

é o *operador de Dynkin.*

Demonstração:

Seja (t,Z) standard e seja (s,X_s) limitado tal que $(s,X_s)\simeq(t,Z)$.

O movimento para cima seguido de um movimento para baixo tem a forma

$$\mu(s,X_s)\delta t+\sigma(s,X_s)\sqrt{\delta t}+\mu(s+\delta t,X_s^+)\delta t-\sigma(s+\delta t,X_s^+)\sqrt{\delta t}\,.$$

O movimento para baixo seguido do movimento para cima tem a expressão

$$\mu(s,X_s)\delta t-\sigma(s,X_s)\sqrt{\delta t}+\mu(s+\delta t,X_s^-)\delta t+\sigma(s+\delta t,X_s^-)\sqrt{\delta t}\,.$$

Assim sendo, a diferença entre as duas expressões tem a forma

$$-\left[\sigma(s+\delta t,X_s^+)-2\sigma(s,X_s)+\sigma(s+\delta t,X_s^-)\right]\sqrt{\delta t}+\left[\mu(s+\delta t,X_s^+)-\mu(s+\delta t,X_s^-)\right]\delta t. \quad (11.2)$$

Ora, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
\delta X_s^+ - \delta X_s^- &= \mu(s,X_s)\delta t + \sigma(s,X_s)\sqrt{\delta t} - \left(\mu(s,X_s)\delta t - \sigma(s,X_s)\sqrt{\delta t}\right) = \sigma(s,X_s)\delta x \\
\delta X_s^+ + \delta X_s^- &= 2\mu(s,X_s)\delta t \\
(\delta X_s^+)^2 - (\delta X_s^-)^2 &= 2\mu(s,X_s)\sigma(s,X_s)\delta t\delta x \\
(\delta X_s^+)^2 + (\delta X_s^-)^2 &= 2(\mu(s,X_s))^2\delta t^2 + 2(\sigma(s,X_s))^2\delta t \\
(\delta X_s^+)^3 + (\delta X_s^-)^3 &= 2(\mu(s,X_s))^3\delta t^3 + 6\mu(s,X_s)(\sigma(s,X_s))^2\delta t^2.
\end{aligned}
$$

Devido a se querer que a diferença seja um $\varnothing\delta t^2$, vamos aplicar o desenvolvimento de Taylor aos coeficientes de δt até a ordem do resto ser $\varnothing\delta t$.

Observe-se que devido ao facto de δX_t^+ e δX_t^- serem de ordem $\sqrt{\delta t}$, os cálculos são muito parecidos aos cálculos dos teoremas 10.1 e 10.4.

Obtem-se assim:

$$\mu(s+\delta t, X_s^+) = \mu(s,X_s) + \delta t\mu_1'(s,X_s) + \delta X_s^+\mu_2'(s,X_s) + \frac{1}{2}(\delta X_s^+)^2\mu_{22}''(s,X_s) + \varnothing\delta t$$

e

$$\mu(s+\delta t, X_s^-) = \mu(s,X_s) + \delta t\mu_1'(s,X_s) + \delta X_s^-\mu_2'(s,X_s) + \frac{1}{2}(\delta X_s^-)^2\mu_{22}''(s,X_s) + \varnothing\delta t.$$

Assim $\mu(s+\delta t, X_s^+) - \mu(s+\delta t, X_s^-)$ toma a forma:

$$
\begin{aligned}
\mu(s+\delta t, X_s^+) - \mu(s+\delta t, X_s^-) &= (\delta X_s^+ - \delta X_s^-)\mu_2'(s,X_s) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left((\delta X_s^+)^2 - (\delta X_s^-)^2\right)\mu_{22}''(s,X_s) + \varnothing\delta t \\
&= \sigma(s,X_s)\mu_2'(s,X_s)\delta x + \frac{1}{2}.2\mu(s,X_s)\sigma(s,X_s)\delta t\delta x + \varnothing\delta t \\
&= \sigma(s,X_s)\mu_2'(s,X_s)\delta x + \varnothing\delta t.
\end{aligned}
$$

Do mesmo modo, tratamos os coeficientes de $\sqrt{\delta t}$, agora até a ordem do resto ser $\varnothing\delta t^{\frac{3}{2}}$. Com efeito:

$$
\begin{aligned}
\sigma(s+\delta t, X_s^+) &= \sigma(s,X_s) + \delta X_s^+\sigma_2'(s,X_s) + \delta t\sigma_1'(s,X_s) + \frac{1}{2}(\delta X_s^+)^2\sigma_{22}''(s,X_s) + \\
&\quad + \delta t\delta X_s^+\sigma_{12}''(s,X_s) + \frac{1}{6}\sigma_{222}'''(s,X_s)(\delta X_s^+)^3 + \varnothing\delta t^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\sigma(s+\delta t, X_s^-) &= \sigma(s,X_s) + \delta X_s^-\sigma_2'(s,X_s) + \delta t\sigma_1'(s,X_s) + \frac{1}{2}(\delta X_s^-)^2\sigma_{22}''(s,X_s) + \\
&\quad + \delta t\delta X_s^-\sigma_{12}''(s,X_s) + \frac{1}{6}\sigma_{222}'''(s,X_s)(\delta X_s^-)^3 + \varnothing\delta t^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

O coeficiente de $\sqrt{\delta t}$ toma assim a forma:

$$
\begin{aligned}
&2\mu(s,X_s)\sigma_2'(s,X_s)\delta t + 2\sigma_1'(s,X_s)\delta t + \frac{1}{2}\sigma_{22}''(s,X_s)\left[2(\mu(s,X_s))^2\delta t^2 + 2(\sigma(s,X_s))^2\delta t\right] + \\
&+ \sigma_{12}''(s,X_s).2\mu(s,X_s)\delta t^2 + \frac{1}{6}\sigma_{222}'''(s,X_s)\left[2(\mu(s,X_s))^3\delta t^3 + 6\mu(s,X_s)(\sigma(s,X_s))^2\delta t^2\right] + \varnothing\delta t^{\frac{3}{2}} \\
&= 2\mu(s,X_s)\sigma_2'(s,X_s)\delta t + 2\sigma_1'(s,X_s)\delta t + \sigma_{22}''(s,X_s)(\sigma(s,X_s))^2\delta t + \varnothing\delta t^{\frac{3}{2}} \\
&= \left[\mu(s,X_s)\sigma_2'(s,X_s) + \sigma_1'(s,X_s) + \frac{1}{2}\sigma_{22}''(s,X_s)(\sigma(s,X_s))^2\right].2\delta t + \varnothing\delta t^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

Assim a expressão 11.2 toma a forma

$$- \left[\mu(s,X_s)\sigma_2'(s,X_s) + \sigma_1'(s,X_s) + \frac{1}{2}\sigma_{22}''(s,X_s)(\sigma(s,X_s))^2 \right]\delta t\delta x + \varnothing\delta t^2 +$$
$$+ \sigma(s,X_s)\mu_2'(s,X_s)\delta t\delta x + \varnothing\delta t^2$$
$$= \left[\sigma(s,X_s)\mu_2'(s,X_s) - \mu(s,X_s)\sigma_2'(s,X_s) - \sigma_1'(s,X_s) - \frac{1}{2}\sigma_{22}''(s,X_s)(\sigma(s,X_s))^2 \right]\delta t\delta x + \varnothing\delta t^2.$$

Então o coeficiente de $\delta t\delta x$ é quase infinitésimal, isto é:

$$\sigma(s,X_s)\mu_2'(s,X_s) - \mu(s,X_s)\sigma_2'(s,X_s) - \sigma_1'(s,X_s) - \frac{1}{2}\sigma_{22}''(s,X_s)(\sigma(s,X_s))^2 \simeq 0.$$

Como μ e σ são funções standard e $(s,X_s) \simeq (t,Z)$, logo a sua sombra é zero e é dada por

$$\sigma(t,Z)\mu_2'(t,Z) - \mu(t,Z)\sigma_2'(t,Z) - \sigma_1'(t,Z) - \frac{1}{2}\sigma_{22}''(t,Z)(\sigma(t,Z))^2 = 0.$$

Por transferência, a fórmula é verificada para todo (t,Z). ■

Façamos agora a ligação deste último teorema com o lema 11.2 onde obtivemos a condição suficiente para que um processo fosse quase-recombinado.

Façamos então a mudança de variável $Z = Z(t,x)$, com $\bar{\mu}(t,x) = \mu(t,Z(t,x))$ e $\bar{\sigma}(t,x) = \sigma(t,Z(t,x))$.

Assim obtemos:

$$\bar{\mu}_2' = \frac{\partial\mu}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial x} = \sigma\frac{\partial\mu}{\partial Z}$$
$$\bar{\sigma}_1' = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial\sigma}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial Z}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial Z} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \mu\frac{\partial\sigma}{\partial Z} - \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\partial\sigma}{\partial Z}\right)^2$$
$$\bar{\sigma}_2' = \frac{\partial\sigma}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial x} = \sigma\frac{\partial\sigma}{\partial Z}$$
$$\bar{\sigma}_{22}'' = \frac{\partial}{\partial Z}\left(\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial Z}\right)\frac{\partial Z}{\partial x} = \sigma\left(\frac{\partial\sigma}{\partial Z}\right)^2 + \sigma^2\frac{\partial^2\sigma}{\partial Z^2}.$$

Substituindo na última expressão do teorema, obtem-se:

$$\sigma\frac{\partial\mu}{\partial Z} - \mu\frac{\partial\sigma}{\partial Z} - \frac{\partial\sigma}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial Z^2} = 0$$
$$\bar{\mu}_2' - \mu\frac{\partial\sigma}{\partial Z} - \left(\bar{\sigma}_1' - \mu\frac{\partial\sigma}{\partial Z} + \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\partial\sigma}{\partial Z}\right)^2\right) - \frac{1}{2}\left(\bar{\sigma}_{22}'' - \sigma\left(\frac{\partial\sigma}{\partial Z}\right)^2\right) = 0$$
$$\bar{\mu}_2' - \bar{\sigma}_1' - \frac{\bar{\sigma}_{22}''}{2} = 0. \quad ■$$

“Esta tese não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri.”

Índice

j

Agradecimentos

É com o maior prazer que exprimo a minha gratidão:

► Ao professor Doutor Imme Van den Berg por ter aceite orientar esta dissertação, pelas suas sugestões e críticas, por todo o apoio e estimulo que me deu e pela forma dedicada como acompanhou o meu trabalho.

O despertar do meu interesse pela Análise Não Standard surgiu com as suas aulas de Mestrado da cadeira de Análise Não Standard.

Ao terminar a parte curricular do Mestrado pedi-lhe que fosse ele a orientar a minha dissertação, pedido que foi logo aceite.

Em diálogo com o meu orientador acerca das possibilidades de desenvolver a dissertação em Análise Não Standard, ficou assente que nela iria desenvolver um trabalho sobre trajectórias de superfícies discretas.

Preciso ainda aqui de frisar que todo o trabalho por mim realizado se deveu essencialmente ao incentivo, motivação, esclarecimento contínuo de todas as dúvidas que me iam surgindo ao longo do trabalho e do enorme apoio que me foi dado pelo Professor Doutor Imme Van den Berg. Ao Professor o meu Muito Obrigado.

► À Universidade de Évora e aos docentes do mestrado em Matemática Aplicada, biénio 1999-2001, pelos conhecimentos transmitidos.

► Aos meus pais, marido e irmã pela paciência, carinho, incentivo e positivismo que sempre me encorajava nos momentos mais difíceis, e pela confiança que em mim depositaram. Um agradecimento especial pela motivação que me incutiram na fase final deste trabalho.

► Aos meus colegas e amigos de Mestrado, Ana Bela Santos e Luís Rendas, e à minha amiga Domingas Reforço pela ajuda e apoio incondicional que me deram.

► Aos meus filhos, Iara Sofia e Tiago Miguel a quem dedico este trabalho.

Capítulo I
Introdução

Nesta dissertação teremos dois objectivos a alcançar. O primeiro objectivo será determinar o valor final de uma trajectória qualquer de um processo estocástico X_t, não percorrendo a trajectória como na fórmula de Ito, mas percorrendo dois caminhos em princípio mais simples: a trajectória alternada (mediana) e em seguida um caminho que também se pode chamar alternado, que é transverso ao processo. O segundo objectivo será calcular a esperança de $f\left(X_t\right)$, sendo f uma função standard continua definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e com crescimento polinomial.

Poderemos encontrar exemplos relacionados com os nossos objectivos em obras de Nelson, Eric Benoit, Van den Berg, Anderson, Reeb, Marc Diener e Francine Diener.

A dissertação é composta por sete capítulos.

O capítilo II refere-se às regras de cálculo, onde introduziremos as regras de Leibnitz, estendendo assim a teoria ZFC, à teoria ZFC+L. Introduziremos ainda as noções de número infinitésimal, apreciável, limitado e ilimitado. Por fim, resumiremos as regras de cálculo para a adição, multiplicação e potênciação.

O capítulo III trata a transição discreta-continua. Estenderemos a teoria ZFC+L, a uma nova teoria axiomática dos conjuntos (IST), onde introduziremos os três principios: Transferência, Idealização e Standardização. Trataremos também a S-continuidade, S-diferenciabilidade e S-integrabilidade. Ainda se tratará das aproximações globais onde trataremos as massas e caudas de uma função e as distribuições de probabilidade, onde daremos especial importância ao teorema da Stroboscopia e a um teorema central do limite (Teorema de De Moivre Laplace) não standard.

O Passeio Estocástico de Wiener e a Equação de Calor serão estudados no capítulo IV. O passeio estocástico de Wiener é um processo discreto e clássico, pelo que não podemos fazer nenhuma questão sobre a continuidade ou derivabilidade das trajectórias, ou sobre a densidade do processo.

Interessamo-nos pelo caso do passeio de Wiener com passos de tempo (logo de espaço) infinitésimais. Com esta hipótese no tamanho das variáveis, provamos alguns resultados, os quais são semelhantes a teoremas clássicos do movimento Browniano. As equações diferenciais estocásticas escrevem-se mediante este movimento, bem como as soluções das equações diferenciais parabólicas, em particular a equação de calor. Neste capitulo iremos utilizar equações de diferenças estocásticas. A ligação entre os dois métodos clássicos é provada pela Análise Não Standard. Assim tiramos vantagens da simplicidade dos conceitos discretos com a simplicidade dos cálculos analíticos. Em particular trataremos o movimento Browniano geométrico, que é um caso de um processo que se diz *recombinado.* Iremos definir uma *superfície discreta* associada a um tal processo.

O capítulo V refere-se às trajectórias sobre as superfícies discretas e nós utilizaremos as superfícies discretas para calcular esperanças, assim encontraremos os dois objectivos a alcançar mencionados no início. Note-se uma relação com a matemática financeira; num certo sentido obtivemos uma generalização da fórmula de Black-Scholes para processos subjacentes mais gerais que o movimento Browniano geométrico.

Consta no último capítulo uma generalização. Define-se o conceito de processo quase - recombinado, damos exemplos que mostram que há processos estocásticos originados de equações de diferenças estocásticas quase - recombinados, que não são recombinados. Apresentamos uma condição suficiente para que um processo seja quase - recombinado, em termos das derivadas parciais da média e da variância condicional. Em conclusão mostramos que o método para calcular esperanças do capítulo V, e as fórmulas por ele derivadas, se estendem a esta classe de processos mais geral.

Apresentada a estrutura do trabalho, seguem algumas considerações que focam a Análise Não Standard em si mesma, na sua história e na sua integração no Universo da Matemática.

A Análise Não Standard foi utilizada por um grande número de Matemáticos e utilizadores das matemáticas. Os novos resultados obtidos por métodos não standard têm sido utilizados nos diversos campos da matemática, nos dominios mais variados, desde a teoria das probabilidades às equações diferenciais, passando pela àlgebra mas também pela física e economia matemática. No entanto, embora a Análise Não Standard tenha mais de quarenta anos é ainda mal conhecida. A Análise Não Standard de Robinson (1961) necessitou de um conhecimento aprofundado da lógica e dos fundamentos da matemática. Contudo, hoje em dia os preliminares da lógica não são mais necessários num curso de Análise Não Standard do que num curso de matemáticas geral, embora a Análise Não Standard aposte de maneira essencial na teoria dos conjuntos, fazendo a distinção dos conjuntos em tipos: standard, internos, externos, halos, galáxias...

Muitos pensam que para aprender a Análise Não Standard é preciso pôr em causa os métodos matemáticos conhecidos, abandonar algumas das suas convicções, o que é completamente errado.

É conveniente aceitar a ideia que todos os conjuntos infinitos N, $\mathbb{R}$,..., possuem tanto elementos standard como elementos não standard. Intuitivamente os elementos standard são aqueles que podemos definir classicamente de forma única, 1, 2, $\sqrt{2}$, exp, $\cos x$,... enfim todos aqueles a quem podemos dar um nome, enquanto que os elementos não standard são todos os outros. Esta ideia simples conduz de corrida ao curso de Análise Não Standard, aos conjuntos internos e externos em particular, e é conveniente aprender a manipular com toda a segurança os novos conceitos.

A análise não standard é um tema aliciante e um caminho aberto ao desenvolvimento da matemática e do ensino.

É importante saber que a prática matemática corrente se pode formalizar em ZFC. Essa prática não vai sofrer qualquer alteração na Matemática Não Standard excepto no sentido de um duplo enriquecimento.

No final dos anos 70 surgiu uma axiomatização devida a E. Nelson, que toma como ponto de partida a teoria ZFC, na linguagem respectiva. À linguagem desta teoria junta um novo predicativo primitivo unário "st". Quer dizer, no universo dos objectos matemáticos usuais distinguimos, por meio do novo conceito, os que são standard e os que não são.

A teoria de Nelson é designada IST - é a teoria dos conjuntos internos (Internal Set Theory), pois, nela, os conjuntos são chamados conjuntos internos, os quais se dividem em conjuntos standard conjuntos não standard.

IST é uma extensão conservativa de ZFC, podendo ser livremente utilizada para demonstrar resultados clássicos, e permitindo caracterizar noções clássicas de maneira mais simples e intuitiva. A teoria de Nelson a mais do que as regras habituais que permanencem todas válidas, insere três principios de base: Transferência, Idealização e a Standardização.

A Análise Não Standard é uma extensão da matemática clássica. Aos axiomas da escolha, ZFC (Zermelo, Fraenkel e o axioma da escolha) iremos adicionar três novos axiomas, mais precisamente três esquemas de axiomas, os quais nos dizem como proceder com os novos objectos matemáticos.

Iremos começar por introduzir as regras de Leibniz (**I**), depois o axioma de indução externa e finalmente os três esquemas próprios que são o Axioma de transferência, axioma de Idealização e por fim o axioma de Standardização.

No entanto, com as regras de Leibniz e o axioma de indução externa já é possível desenvolver uma grande extensão da matemática clássica.

Com a Análise Não Standard existe uma simplificação dos conceitos da análise; simplificação das provas da análise; simplificação de algumas teorias matemáticas, em particular o assimptótico, os processos estocásticos contínuos, as equações diferenciais parciais e uma formulação de novos modelos matemáticos de fenómenos não matemáticos, tal como na física ou na economia, integração dos conceitos de pequeno e grande aos modelos, diferentes ordens de grandeza, no mesmo modelo.

Assim sendo algumas teorias matemáticas tornam-se acessíveis para mais pessoas, e novos fenómenos examinam-se com métodos matemáticos.

Mas, a análise não standard é uma extensão da matemática clássica, e não uma modificação da análise clássica. Não mudamos os conjuntos da matemática clássica, mas mudamos a maneira de falar deles. A linguagem da Análise Não Standard é mais rica.

Capítulo II
Regras de cálculo

A principal novidade fornecida pela Análise não Standard é a possibilidade de distinguir entre os objectos matemáticos usuais (números, funções,...) que se chamam standard e outros que se chamam não standard.

1. Regras de Leibniz

Sabe-se que toda a matemática clássica se reduz a um sistema formal com um único conceito primitivo, o de $(\in)$.

Expandimos este sistema com um novo símbolo "standard", abreviadamente "*st*". Este símbolo é um símbolo predicativo unário.

Um conjunto X pode ser standard (escrevemos $st\ X$) ou não standard (escrevemos $\rceil st\ X$).

As regras de Leibniz L, são os seguintes axiomas:

1) $st\,(0)$;
2) $\forall n \in \mathbb{N},\ st\,(n) \Rightarrow st\,(n+1)$;
3) $\forall n, m \in \mathbb{N},\ st\ n, m \Rightarrow st\,(n+m)$;
4) $\forall n, m \in \mathbb{N},\ st\ n, m \Rightarrow st\,(n.m)$;
5) $\forall n, m \in \mathbb{N},\ st\ n, m \Rightarrow st\,(n^m)$.

Depois introduzimos o axioma:

6) $\exists \omega \in \mathbb{N}, \rceil st \omega$

para dizermos que ω não é standard.

Uma consequência das regras de Leibniz **1)** e **2)** é que $st\,(0)$; $st\,(1)$; $st\,(2)$...

Vemos então que todos os números naturais construtíveis ou números naturais intuitivos são standard.

No entanto, pelo axioma **6**, existe no conjunto $\mathbb{N}$ um número natural não standard. É óbvio que tal número não é construtível (Reeb, 1979). A existência dele é unicamente formal. Podemos ver o predicativo standard como uma formalização do conceito de "construtível" ou "intuitivo". Mas, note-se bem que o conceito formal "Standard" é bem distinto dos conceitos informais "construtível" e "intuitivo".

Definição 1.1. *Um número real x diz-se:*

i) ***limitado****, se existe st $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq n$.*

ii) ***ilimitado ou infinitamente grande*** *se x não é limitado.*

iii) ***infinitésimal ou infinitamente pequeno*** *se para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ standard se tem $|x| \leq \frac{1}{n}$.*

iv) ***apreciável*** *se x é limitado e não é infinitésimal.*

Existem, portanto, números inteiros não standard. Estes inteiros são chamados ilimitados porque eles satisfazem a propriedade seguinte:

•Um inteiro é ilimitado se ele é superior a todo o inteiro standard.

Definição 1.2. *Dois números x e y dizem-se* ***infinitamente próximos*** *se $x-y$ é infinitésimal, e dizem-se* ***assimptóticos*** *se $\frac{x}{y}$ é infinitamente próximo de 1.*

Utilizaremos as seguintes notações:

$$x \simeq y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ são infinitamente próximos}$$

e

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ são assimptóticos.}$$

Escrevemos

$$\begin{aligned} x &\simeq 0 \text{ para indicar que } x \text{ é infinitésimal;} \\ x &\simeq +\infty \text{ para indicar que } x \text{ é ilimitado.} \end{aligned}$$

A soma de dois números infinitésimais é um número infinitésimal, bem como o produto de um número infinitésimal por qualquer número limitado.

Por outro lado, sem mais precisão sobre os seus valores, não é possível determinar a ordem de magnitude do produto de um número infinitésimal por um número ilimitado.

Exprimimos estas regras utilizando quatro símbolos, $\varnothing$, $\pounds$, @ e ∞. Torna-se útil ter notações genéricas para números cujo preciso valor não interessa, mas sim a sua ordem de grandeza.

As notações $\varnothing$, $\pounds$, @ e ∞ introduzidas por I. Van den Berg em 1987, são usadas respectivamente para qualquer: número infinitésimal, número limitado, número apreciável positivo e número ilimitado positivo. Elas serão formalizadas em termos de conjuntos externos no capítulo III.

Diz-se que dois números reais a e b são da mesma ordem de magnitude se

$$a = @b.$$

Resumem-se as regras de cálculo nas tabelas seguintes:

- Para a adição

+	$\varnothing$	@	$\pounds$	∞
$\varnothing$	$\varnothing$	@	$\pounds$	∞
@	@	@	$\pounds$	∞
$\pounds$	$\pounds$	$\pounds$	$\pounds$	∞
∞	∞	∞	∞	∞

- Para a multiplicação

.	$\varnothing$	@	£	∞
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\mathbb{R}$
@	$\varnothing$	@	£	∞
£	$\varnothing$	£	£	$\mathbb{R}$
∞	$\mathbb{R}$	∞	$\mathbb{R}$	∞

- Para a potênciação

Potências	$\varnothing$	@	£	∞
$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\varnothing$
@	$1+\varnothing$	@	@	$]0,\infty[$
£	$\mathbb{R}$	£	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
∞	$]0,\infty[$	∞	$]0,\infty[$	∞

Como exemplo, vamos mostrar que $\log @ = £$; $@^{\varnothing} = 1+\varnothing$ e que $\infty^{\varnothing} =]0,\infty[$.
Comecemos por mostrar que $\exp £ = @$, o que nos permite concluir que $\log @ = £$.
Com efeito:
Pela quinta regra de Leibnitz, temos que para $x > 0$ limitado
$\exp x = £$
e
$\frac{1}{\exp x} \gtrsim 0$.
Como $\frac{1}{\exp x}$ é limitado e não infinitésimal, logo é apreciável.
Seja *st* $n \in \mathbb{N}$, tal que $\left|\frac{1}{\exp x}\right| \leq n$. Como $\frac{1}{\exp x}$ não é infinitésimal, existe *st* $m \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{1}{\exp x}\right| \geq \frac{1}{m}$.
Então $|\exp x| \leq m$ e $\frac{1}{n} \leq |\exp x| \leq m$. Então $\exp x$ é apreciável.
Logo, podemos escrever que

$$\exp £ = @.$$

Portanto

$$\log @ = £. \quad \blacksquare$$

Mostremos agora que $@^{\varnothing}$. Com efeito:

$$\begin{aligned} @^{\varnothing} &= \exp(\varnothing \log @) = \\ &= \exp(\varnothing . £) = \\ &= \exp(\varnothing) = \\ &= 1+\varnothing \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Vamos agora demonstrar que $\infty^{\varnothing} =]0, \infty[$.

$$\begin{aligned}
\infty^{\varnothing} &= \exp(\varnothing \log \infty) = \\
&= \exp(\varnothing . \infty) = \\
&= \exp(\mathbb{R}) = \\
&=]0, \infty[\quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Capítulo III
Transição discreta-continua

Antes de iniciar a transição de números não standard a números standard ou de funções discretas a funções continuas através da sua sombra, é necessário definir conjuntos internos e conjuntos externos, pois estas noções estão implicitas nos princípios que iremos também definir e em todo o trabalho deste capitulo.

O discurso não standard comporta quer as fórmulas que se podem exprimir com a linguagem usual, isto é, sem fazer uso do novo modo, às quais chamamos fórmulas internas quer as fórmulas externas.

De modo mais informal, o Universo não standard contém quer os conjuntos da matemática usual chamados conjuntos internos (entre os quais alguns são standard e outros não standard) quer colecções que não são conjuntos formais de ZFC, porém chamados por abuso de linguagem, conjuntos externos.

2. Conjuntos internos e externos

Definição 2.1. *1. Uma fórmula da matemática clássica com um único símbolo* $\{\in\}$ *diz-se interna.*

2. Uma fórmula com os dois símbolos $\{\in, st\}$ *diz-se externa.*

Dizemos que uma fórmula é interna se esta se pode escrever sem utilizar o modo standard nem nenhum dos seus derivados, como infinitamente próximo ou limitado.

Um conjunto diz-se interno, se é definido com a ajuda de uma fórmula interna. Rigorosamente falando, não existem conjuntos, só existem fórmulas, empregar conjuntos corresponde a empregar abreviações. Por exemplo, escrevemos $[0,1[\, \subset \mathbb{R}$ em vez de $(\forall x)\,(0 \leq x < 1 \Rightarrow x \in \mathbb{R})$.

Em particular, todos os conjuntos já definidos na Matemática clássica são internos. A estes conjuntos aplicam-se sem restricções todos os teoremas clássicos.

Não existem conjuntos não internos, mas combinamos falar de conjuntos externos os quais serão "definidos" por uma fórmula externa que não se reduz a uma fórmula interna.

Um exemplo é o conjunto externo de todos os reais infinitésimais, notada $\varnothing$:

$$\varnothing \equiv \{x \in \mathbb{R}\,|x \simeq 0\}\,.$$

Então a expressão $\varnothing \subset [-1,1]$ é uma abreviação de

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(x \simeq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1)\,.$$

Outros exemplos de conjuntos externos são

$$\begin{aligned} \pounds &\equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ limitado}\} \\ @ &\equiv \{x \in \mathbb{R}\,|x > 0,\ \text{apreciáveis}\} \\ \infty &\equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0,\ \text{ilimitado}\}\,. \end{aligned}$$

Na prática, um conjunto externo é todo o sub-conjunto de um conjunto interno definido por meio de uma fórmula externa, para o qual pelo menos um teorema clássico não é verificado.

Definição 2.2. *Uma* ***ordem de grandeza*** *é uma parte convexa de* $\mathbb{R}$.

As ordens de grandeza "triviais" são os intervalos internos, mas as ordens de grandeza "verdadeiras" são as partes convexas externas. Elas conservam a propriedade essencial de imprecisão, porque não têm um infimo e/ou um supremo.

Os símblos introduzidos no capítulo anterior $\varnothing$, $\pounds$, @, $\varepsilon\pounds$ (ε qualquer) são todos, por definição, ordens de grandeza.

Outros exemplos de ordens de grandeza são os intervalos externos, como por exemplo: $\{x \mid 0 \lessapprox x \lessapprox 1\}$.

As ordens de grandeza podem ser consideradas conjuntos externos.

Entre duas ordens de grandeza A e B, iremos utilizar a notação seguinte

$$\begin{aligned} A &\equiv B \Leftrightarrow A,\, B \text{ são idênticos} \\ A &= B \Leftrightarrow A \subset B. \end{aligned}$$

Esta notação, está em analogia com a notação clássica, onde escrevemos por exemplo

$$\frac{1}{x} = o(1) \text{ para } x \to \infty$$

em que podemos interpretar como $o(1) \equiv \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$.

De facto, se g fôr uma função definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a cada x faz corresponder $\frac{1}{x}$, então temos que $g(x) = o(1)$ para $x \to \infty$, $g \in o(1) \Leftrightarrow \{g\} \subset o(1)$.

Vejamos agora um exemplo relacionado com a Análise Não Standard.

Exemplo 2.3. *Supondo* $\varepsilon \simeq 0$, $\varepsilon > 0$. *Escrevemos*

1- $\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 + \varnothing$, *no sentido de que* $\frac{1}{1+\varepsilon} \subset 1 + \varnothing$.

2- $\frac{1}{1+\pounds\varepsilon} \equiv 1 + (-\pounds\varepsilon) \equiv 1 + \pounds\varepsilon$, *no sentido de que as grandezas são idênticas e* $\frac{1}{1+\pounds\varepsilon} = 1 + \varnothing$, *com o significado de que a grandeza* $\frac{1}{1+\pounds\varepsilon}$ *está contida em* $1 + \varnothing$.

A distinção entre conjuntos internos e externos , leva-nos a perguntar de que modo vão ser utilizados os conjuntos externos, sabendo nós à priori que não podem ser utilizados os teoremas clássicos. Com efeito, dispomos para manipular os conjuntos externos de novos utensílios, que são os princípios de permanência. Os matemáticos não standard dispõem de um grande número de princípios de permanência. Aqui, iremos limitar-nos a apresentar dois dos mais utilizados, o Princípio de Cauchy que é o mais simples e o Lema de Robinson que foi, históricamente o primeiro.

Princípio de Cauchy
Nenhum conjunto externo é interno.

De facto, dois conjuntos de natureza diferente são diferentes.

Este princípio é muito útil na práctica, pois ele permite estender a validade de uma propriedade a um dominio mais vasto que aquele sobre o qual a propriedade pode ser verificada. Por exemplo, supondo que queriamos estabelecer que uma propriedade interna $F(x)$ é verdadeira para todo $x \simeq 0$. Então em virtude deste princípio, ela é necessáriamente verdadeira para certos x não infinitésimais, sobre um intervalo $[-a, a]$ com a apreciável.

Passemos agora a enunciar o **Lema de Robinson.**

Lema 2.4. *Seja (U_n) uma sucessão interna de reais. Se $U_n \simeq 0$ para todo n standard, então existe ω ilimitado tal que $U_n \simeq 0$ para todo $n \leq \omega$.*

Demonstração:

Ponhamos $V_n = \max_{p \leq n} |U_p|$. Consideremos o conjunto interno $I = \{n \in \mathbb{N} : nV_n < 1\}$. Por hipótese, ele contém o conjunto ${}^{\sigma}\mathbb{N}$ (conjunto externo dos inteiros standard). Em virtude do principio de Cauchy, ele o contém estritamente. Seja $\omega \in \mathbb{N} \cap I$ com $\omega \simeq +\infty$. Então $\forall p \leq \omega$

$$|U_p| \leq V_\omega < \frac{1}{\omega} \simeq 0. \quad \blacksquare$$

3. Princípios

Vejamos agora três principios: Transferência; Idealização e Standardização, os quais são os ingredientes originais de uma nova teoria axiomática dos conjuntos, proposta por Nelson, e chamada Internal Set Theory (IST). A manipulação dos conjuntos externos conduz-nos inevitavelmente a separarmo-nos da teoria axiomática IST de Nelson. Com efeito, nesta teoria tal como na teoria clássica ZFC, todos os conjuntos, objectos da teoria, são internos, estes que qualificamos de externos não são "dignos", propriamente falando, do nome de conjuntos.

A teoria IST pode ser descrita da forma seguinte:

Consideramos a teoria clássica ZFC, à qual estão ligadas a maioria das matemáticas de hoje, e juntamos ao predicativo binário indefinido $\in$, o predicativo unário indefinido st, enfim adicionamos aos oito axiomas de ZFC três axiomas suplementares: Transferência; Idealização e Standardização. Obtemos assim uma nova teoria axiomática dos conjuntos. Nelson mostrou que IST é uma extensão conservativa de ZFC.

Estes três princípios permitem a introdução de noções essenciais, tais como: a existência de um número ilimitado e sombra de x.

3.1. Transferência

Vamos utilizar a seguinte notação:

$$\forall^{st} x F(x) \text{ como abreviatura de } \forall x \left[st\ x \Rightarrow F(x) \right]$$

e

$$\exists^{st} x F(x) \text{ como abreviatura de } \exists x \left[st\ x \text{ e } F(x) \right].$$

3.1.1. Princípio de Transferência Fraca

Para toda a fórmula standard $F(x)$ que não comporta nenhuma outra variável que não seja x, temos o enunciado seguinte

$$\forall^{st} x\ F(x) \Rightarrow \forall x\ F(x)$$

e do mesmo modo

$$\exists x\ F(x) \Rightarrow \exists^{st} x\ F(x).$$

Este principio pode ser utilizado para mostrar que certos conjuntos são standard. Podemos encontrar alguns exemplos em [1].

Dizemos que uma fórmula interna é uma fórmula standard se todas as constantes dessa fórmula são standard. Dizemos que uma fórmula interna não é standard se ela contém pelo menos uma constante não standard. É claro que os axiomas usuais da matemática (ZFC) são fórmulas standard porque elas são internas e não comportam nenhuma constante.

Vejamos agora o principio de transferência geral.

3.1.2. Princípio de transferência geral

Para toda a fórmula standard $F(x, t_1, ..., t_n)$ não tendo outras variáveis livres que não sejam x, t_1,...,t_n, temos o enunciado seguinte

$$\forall^{st} t_1, t_2, ..., t_n \left[\forall^{st} x\ F(x, t_1, ..., t_n) \Rightarrow \forall x\ F(x, t_1, ..., t_n) \right]$$

e do mesmo modo

$$\forall^{st} t_1, t_2, ..., t_n \left[\exists x\ F(x, t_1, ..., t_n) \Rightarrow \exists^{st} x\ F(x, t_1, ..., t_n) \right].$$

Este princípio é utilizado, por exemplo, na demonstração do seguinte enunciado: **dois conjuntos standard são iguais se e só se eles têm os mesmos elementos standard.** Não apresentamos aqui a demonstração, no entanto o leitor pode consultá-la em [1].

As propriedades elementares da Análise como a continuidade de uma função ou a convergência de uma sucessão podem ser traduzidas na Análise Não Standard. Podemos estabelecer a equivalência entre a definição clássica e a nova definição utilizando o princípio da transferência.

Alguns exemplos podem ser consultados em [1].

Aqui, iremos tratar as somas de Riemann, onde encontramos os critérios de integrabilidade nas somas de Riemann, os quais serão necessários para conceitos que irão ser introduzidos na secção que diz respeito à S-integrabilidade. Na demonstração do critério (que não iremos demonstrar aqui, mas que pode ser consultada em [1]) utiliza-se o príncipio de transferência.

3.2. Somas de Riemann

Definição 3.1. *Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$, e x_0, x_1,...,x_n elementos de $[a,b]$ tal que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Dizemos que $D = \{x_0, ..., x_n\}$ é uma* ***decomposição*** *de $[a,b]$.*

Dizemos ainda que esta decomposição é ***infinitésimal*** *se para todo $i = 0, ..., n-1$, se tem $x_i \simeq x_{i+1}$.*

Consideremos em particular a discretização infinitésimal seguinte da recta real. Seja $\delta x \simeq 0$, $\delta x > 0$ (a existência de δx irá ser assegurada com o princípio de idealização). Ponhamos

$$\mathbb{X} = \{k.\delta x \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Se a, $b \in \mathbb{X}$, $a \leq b$ escrevemos

$$[a...b] = \{x \mid x \in \mathbb{X},\ a \leq x \leq b\}.$$

Dizemos que $[a...b]$ é um **quase-intervalo.**

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $D = \{x_0, ..., x_n\}$ uma decomposição de $[a,b]$. Designamos por $\Delta_D(f)$ a quantidade sempre positiva ou nula definida por

$$\Delta_D(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\left(\sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}\right).$$

É evidente que se a decomposição D' é mais fina que D, isto é, se todo intervalo $[x'_i, x'_{i+1}]$ de D' está contido num intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ de D, logo $\Delta_{D'}(f) \leq \Delta_D(f)$.

Definição 3.2. *Dizemos que uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é* ***integrável à Riemann*** *se para todo $\varepsilon > 0$, existe uma decomposição D do intervalo $[a,b]$ tal que $\Delta_D(f) < \varepsilon$.*

Teorema 3.3. ***(Critério de integrabilidade à Riemann)***
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função standard limitada. Existe uma equivalência entre:
i) *f é integrável à Riemann;*
ii) *Para toda a decomposição infinitésimal D, $\Delta_D(f) \simeq 0$;*
iii) *Existe uma decomposição D tal que $\Delta_D(f) \simeq 0$.*

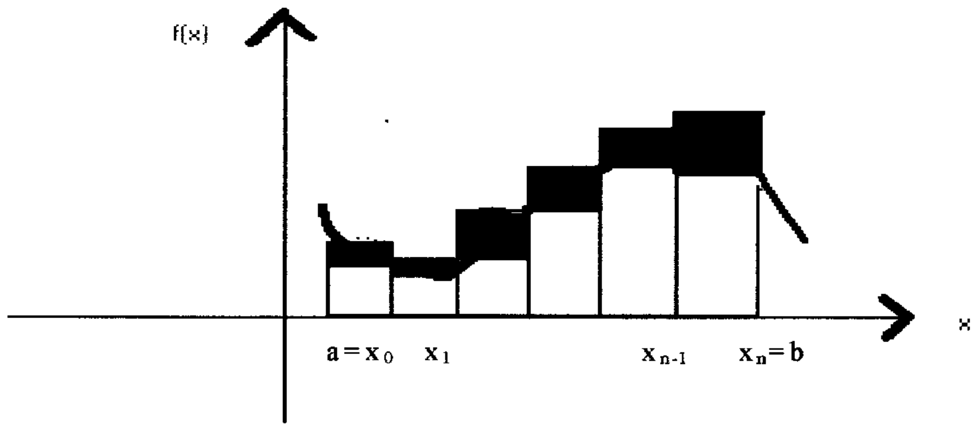


Figura 3.1: A região de àrea Δ_D

Teorema 3.4. *Toda a função standard continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann.*

As demonstrações destes teoremas podem ser consultadas em [1].

Para aplicar o principio de transferência é conveniente assegurar que a fórmula considerada é interna e que toda a constante ou parâmetro que figuram nela são também standard. Se tentarmos utilizar o principio onde uma destas hipóteses não seja verificada cometemos uma transferência ilegal. Alguns exemplos de transferências ilegais, podem também ser consultados em [1].

3.3. Idealização

O principio de Idealização permite exprimir o facto seguinte: todo o conjunto infinito contém inevitavelmente elementos não standard.

O termo finito aqui tem exactamente o mesmo significado que na matemática clássica: Um conjunto **E** é finito se toda a injecção de **E** em **E** é uma bijecção.

Utilizaremos a seguinte notação:

★ **fini**(x) significa que o conjunto x é finito;
★ $\exists^{fini}(x)\ F(x)$ como abreviatura de $\exists x\,[\mathbf{fini}(x)\ \text{e}\ F(x)]$;
★ $\forall^{fini}(x)\ F(x)$ como abreviatura de $\forall x\,[\mathbf{fini}(x) \Rightarrow\ F(x)]$.

Enunciemos agora o principio.

3.3.1. Princípio de Idealização

Para toda a fórmula interna B, contendo pelo menos duas variáveis livres x e y, onde $x \in \mathbb{N}$, $x = \max z$, com $z \subset \mathbb{N}$, tem-se

$$\forall^{st\ fini} z\ \exists x \forall y \in z\ B(x,y) \Leftrightarrow \exists x \forall^{st} y\ B(x,y).$$

Vejamos com um exemplo o sentido deste enunciado.

Suponhamos que B seja uma relação binária como por exemplo a relação $\geq$. A parte esquerda da equivalência indica uma propriedade desta relação, conhecida por concorrência, para toda a parte finita existe um elemento do alvo que está em relação simultânea com todos os elementos da parte finita considerada. No caso particular da relação $\geq$, significa que existe um majorante para toda a parte finita. Da parte direita da equivalência deduzimos então que existe um majorante para todos os elementos standard.

Este princípio conduz-nos naturalmente ao seguinte teorema:

Teorema 3.5. $\mathbb{N}$ *contém inteiros ilimitados.*

A demonstração pode ser consultada em [1].

É claro, que podemos deduzir deste teorema que $\mathbb{R}$ contém números ilimitados (por exemplo um inteiro ilimitado N), números infinitésimais (por exemplo $\frac{1}{N}$) e números não standard apreciáveis (por exemplo $1 + \frac{1}{N}$). Por definição, os inteiros ilimitados (donde a existência é assegurada por este teorema) são não standard.

Enunciemos agora o teorema de Nelson:

Teorema 3.6. *Para todo o conjunto E, existe um conjunto finito F contendo todos os elementos standard de E.*

A demonstração pode ser consultada em [1].

Daremos agora um significado deste último teorema.

Para $E = \mathbb{N}$, dizemos que para todo o elemento $N \in \mathbb{N}$, o conjunto $F = \{n \in \mathbb{N} \mid n < N\}$ é finito (resultado clássico). Mas é claro também que para N ilimitado, este conjunto contém, por definição, todos os inteiros standard.

No caso de $E = \mathbb{R}$, uma construção explicita de F é menos evidente. No entanto, se considerarmos por exemplo, que $E = [0,1]$, já podemos assegurar a existência de F. Consideremos o sub-conjunto de $[0,1]$

$$D = \left\{ x_0 = 0;\ x_1 = \frac{1}{N};\ x_2 = \frac{2}{N}; ...; x_N = 1 \right\}$$

o qual é finito pois contêm apenas $N+1$ elementos. Se escolhermos N ilimitado, qualquer intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ é de comprimento infinitésimal e não pode conter mais do que um real standard. Isto sugere que não existem mais de $N+1$ reais standard contidos em $[0,1]$.

Podemos encontrar mais exemplos de aplicação do princípio em [1].

3.4. Standardização

O princípio de standardização permite associar a todo o conjunto, quer seja interno ou externo, um único conjunto standard chamado sua standardização.

Este princípio possui um grande número de consequências fortemente úteis, a começar pela existência de uma sombra para um elemento ou um conjunto. Segundo F. Diener, G. Reeb e mesmo Nelson, este princípio é muito energico, podendo mesmo ser muito forte para os trabalhos de uma matemática não standard elementar.

Podemos de facto, como sugere Nelson, obter o essencial dos resultados matemáticos elementares no quadro de uma teoria axiomática, mais enfraquecidos do que em IST, substituindo a standardização por uma das suas consequências, por exemplo o príncipio de recorrência externa (ver adiante). Sendo assim, nota-se a perda da existência de uma parte standard para todo o real limitado.

3.4.1. Principio de standardização

Para toda a fórmula standard $F(x)$, tem-se

$$\forall^{st} x \exists^{st} y \forall^{st} z \left[z \in y \Leftrightarrow z \in x \text{ e } F(z) \right].$$

O princípio assegura a existência de um conjunto standard y tendo para elementos standard os elementos standard z de x satisfazendo $F(z)$. Este conjunto é necessáriamente único porque dois tais conjuntos y e y' têm, por definição, os mesmos elementos standard. Como eles são standard, eles são iguais.

Definição 3.7. *Seja x um conjunto e $E = \{z \in x \mid F(z)\}$ um subconjunto de x. Chamamos* ***standardização*** *de E, denotada ${}^sE$, o único conjunto standard tendo para elementos standard, os elementos standard de E.*

Temos que para z standard, $z \in E \Leftrightarrow z \in {}^sE$. Notemos que, se um conjunto e a sua standardização têm por definição os mesmos elementos standard, nada temos dito sobre os elementos não standard da standardização; em particular eles não verificam necessariamente $F(z)$.

O principio de standardização permite formalizar a seguinte ideia: toda a colecção de objectos standard determina um único conjunto standard.

Vejamos um exemplo de standardização de conjuntos.

Exemplo 3.8. *Seja $B(x,y)$ a bola de centro em x e raio y.*

1- *Para ε infinitésimal, tem-se*

- ${}^sB(0,\varepsilon) = \{0\}$;
- ${}^sB(\sqrt{\varepsilon},\varepsilon) = \varnothing$.

2- *Para todo ω ilimitado,*

- ${}^s\{z \in \mathbb{N} \mid z < \omega\} = \mathbb{N}$;
- ${}^s\{z \in \mathbb{N} \mid z > \omega\} = \emptyset$.

Um dos usos correntes do princípio de Standardização é o seguinte:

Suponhamos que procuramos definir uma nova noção, digamos, para fixar ideias, que é a continuidade para as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Podemos proceder do seguinte modo; primeiro formulamos a noção para o caso particular onde os objectos considerados são standard, a definição pode ser assim, geralmente, externa mas muito intuitiva

$$f \text{ é S-contínua sse } \forall\, {}^{st}x \forall y \; x \simeq y \Rightarrow f(x) \simeq f(y)\,.$$

Podemos assim estender esta noção a outros objectos quaisquer, standard ou não, por meio do principio de standardização.

De facto, mostra-se por standardização e transferência, que a standardização de $\{f \mid f \text{ é S-continua}\}$ é igual a $\{f \mid f \text{ é continua}\}$.

Os dois principios seguintes são versões enfraquecidas do principio de standardização, mas úteis nas aplicações.

3.4.2. Princípio de recorrência externa

Para toda a fórmula $F(n)$ interna ou externa, temos:

$$\left[F(0) \;\text{ e } \forall^{st} n\,(F(n) \Rightarrow F(n+1))\right] \Rightarrow \forall^{st} n \; F(n)\,.$$

Demonstração:

O conjunto

$$E = {}^{s}\{n \in \mathbb{N} \mid F(n)\}$$

é um conjunto standard contendo zero, tal que

$$\forall^{st} n\,[n \in E \Rightarrow (n+1) \in E]\,.$$

Por transferência, é satisfeito o axioma de recorrência clássica, donde

$$E = \mathbb{N}.$$

Como o conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid F(n)\}$ tem os mesmos elementos standard que E, ele contém todo o n standard. ■

3.4.3. Sombra de um número real

Esta noção, de sombra de um número real, permite-nos associar a qualquer número não standard, um número standard, infinitamente próximo desse número. Na demonstração teremos que aplicar o principio de standardização.

Vamos então enunciar e demonstrar o teorema que permite a definição de sombra de um real.

Teorema 3.9. *Para todo o real limitado x, existe um único real standard $°x$ tal que*

$$x \simeq °x.$$

Este real é chamado sombra de x ou ainda parte standard de x.

Demonstração:
Comecemos por demonstrar a unicidade. Com efeito:
Sendo x um número real limitado, se x tivesse duas sombras x_0 e x_1, então teriamos

$$x_0 \simeq x \simeq x_1$$

donde o real $x_0 - x_1$ seria standard, pois x_0 e x_1 são standard, e infinitésimal. Portanto $x_0 - x_1 = 0$, e teriamos $x_0 = x_1$.

Para estabelecer a existência de uma sombra para todo o real limitado x, suponhamos por exemplo $x > 0$, e consideremos o conjunto $E = {}^S\{t \in \mathbb{R}\ |t < x\}$. Como x é limitado, existe um r standard tal que $|x| < r$.

Assim

$$\forall^{st} t \in E \quad t < r$$

donde por transferência

$$\forall t \in E \quad t < r.$$

O conjunto standard E é portanto majorado e não nulo pois $0 \in E$: o conjunto possui um limite superior a, que é standard. Mostremos assim que $a \simeq x$.

Com efeito:

- *Se existir um standard $y > 0$ tal que $x - a > y$, então teriamos que $a + y$ seria um elemento standard de E o que é absurdo;*
- *Se existir um standard $y > 0$ tal que $a - x > y$, então seria $\forall^{st} t \in E$, $t < a - y$ donde por transferência, $\forall t \in E$, $t < a - y$, o que também é absurdo.*

Logo

$$a \simeq x. \quad \blacksquare$$

Definição 3.10. *Um real que possui uma sombra é chamado* **quase standard**. *Se A é uma parte de $\mathbb{R}$, dizemos que um real $x \in A$ é* **quase standard** *em A se x é quase standard e se a sua sombra aparece em A.*

As regras que se seguem dão-nos o comportamento, da parte standard dos operadores com respeito às operações elementares e de ordem em $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} {}^{0}(x+y) &= {}^{0}x + {}^{0}y \\ {}^{0}(xy) &= {}^{0}x\,{}^{0}y \\ {}^{0}\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{{}^{0}x} \text{ se } {}^{0}x \neq 0 \\ x &\leq y \Rightarrow {}^{0}x \leq {}^{0}y \\ {}^{0}x &< {}^{0}y \Rightarrow x < y. \end{aligned}$$

Utilizaremos ainda a notação seguinte:

$$\begin{aligned} x &\lessapprox y \text{ se } x < y \text{ ou } x \simeq y, \text{ isto é se } {}^{0}x \leq {}^{0}y. \\ x &\not\simeq y \text{ se } x \text{ não é infinitamente próximo de } y. \\ x &\lnapprox y \text{ se } x < y \text{ e } x \not\simeq y, \text{ isto é se } {}^{0}x < {}^{0}y. \end{aligned}$$

4. S - Continuidade e S - Diferenciabilidade

4.1. S - Continuidade

Falamos de conceitos externos, que correspondem a conceitos internos que normalmente pertencem à análise continua: S - continuidade.

Veremos que estes conceitos externos estão em vigor também para conjuntos discretos, de pontos a distância infinitésimal; uma análise continua então do mundo discreto. As funções podem ser standard, como por exemplo $y = 2x$, ou podem ser funções não standard, como por exemplo $y = x + \varepsilon$, $\varepsilon \simeq 0$.

Assim sendo, nós nos interessaremos em abordar aqui as funções internas mais regulares, isto é, aquelas "quase iguais" a uma função standard continua, a que nós chamamos funções de classe S^0.

Definição 4.1. *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. A função f diz-se* **S - contínua** *sobre A se*

$$\forall x, y \in A; x \simeq y \Longrightarrow f(x) \simeq f(y).$$

Para as funções não standard por exemplo, continuidade e S-continuidade são duas noções distintas. Assim, por exemplo, a função:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ definida por} \\ f(x) &= \begin{cases} \varepsilon \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

é S-continua e não é continua.
A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

é continua e não S-continua.
Ora tem-se que $\varepsilon \simeq 0$. Se $x \simeq \varepsilon$, então tem-se

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \simeq \frac{\pi}{2}$$

e

$$f(\varepsilon) = \arctan\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Logo

$$f(x) \not\simeq f(\varepsilon)$$

pelo que $f(x)$ não é S-continua.

Definição 4.2. *Se f é S - contínua sobre A, e se $f(x)$ é limitado para todo $x \in A$ limitado, a função f diz-se de classe S^0.*

Iremos enunciar, em seguida, alguns teoremas importantes nomeadamente para a adição, multiplicação, composição, inverso e subconjuntos de funções de classe S^0. As demonstrações destes teoremas poderão ser consultadas em [2].

Teorema 4.3. *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e f e g duas funções de classe S^0. Então $f+g$ é de classe S^0 e $f \cdot g$ é de classe S^0.*

Teorema 4.4. *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : f(A) \to \mathbb{R}$. Se f e g são de classe S^0 então $g \circ f$ é de classe S^0.*

Teorema 4.5. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ de classe S^0 tendo só valores apreciáveis para argumentos limitados. Então $\frac{1}{f}$ é de classe S^0.*

Teorema 4.6. *Sejam st $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$ de classe S^0. Seja $B \subset A$ e $g : B \to \mathbb{R}^n$ tal que $g(x) \simeq f(x)$, para todo $x \in B$ limitado. Então g é de classe S^0.*

É claro, que a função $f(x) = x$ é de classe S^0.

A função e^x é de classe S^0 para todo o $x > 0$ limitado. Com efeito, se $X > 0$ limitado, então e^x é limitado pelas regras de Leibnitz. Se x e y são limitados, tal que $x \simeq y$ então prova-se facilmente que $e^x \simeq e^y$. Logo e^x é S-continua. Então pela definição 4.2, a função e^x é de classe S^0, para x limitado positivo.

No entanto, a função e^x não é S - continua para $x > 0$ ilimitado.

Com efeito,

$$\begin{aligned} e^{x+\frac{1}{x}} - e^x &= e^x \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) . \frac{1}{x} = \\ &= \frac{e^x}{x} (1 + \varnothing) = \\ &= \infty \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Muitas vezes as funções internas não são definidas explicitamente, como nos exemplos precedentes, mas através de fórmulas de recorrência. Neste caso, o lema da sombra local (ver adiante) permite saber localmente se uma função é de classe S^0, se esta fôr aos passos limitados ou de pequenos passos. O lema indica a possibilidade de associar a toda a função interna uma função standard, desde que ela seja quase standard nos pontos standard. Esta standardização (que coincide com a sombra porque f é de classe S^0) corresponde, em termos standard, à noção de limite uniforme de uma sucessão de funções.

Definição 4.7. *Sejam E e F dois espaços métricos standard e seja $f : E \to F$. Dizemos que f é de classe S^0 no ponto $x \in E$ se e só se f é quase standard e S-continua no ponto x.*

Dizemos que f é de classe S^0 sobre uma parte A de E sse f é de classe S^0 em todo o ponto standard de A, isto é, sse para todo o *st* $x \in A$, ${}^0(f(x))$ existe e ${}^0(f(x)) = f({}^0x)$.

Definição 4.8. *Seja F um espaço métrico standard. Uma função $f : \mathbb{R} \to F$ é aos **passos limitados** sobre o intervalo $[a, b]$ se $f(a)$ é quase standard e se existe uma decomposição infinitésimal $a = x_0 < x_1 < ... < x_\omega = b$ de $[a, b]$ tal que, para todo $i = 0, ..., \omega - 1$, existe $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ tal que $f(\xi)$ é quase standard então $f(x)$ é quase standard para todo $x \in [x_i, x_{i+1}]$.*

Definição 4.9. *Seja F um espaço métrico standard. Uma função $f : \mathbb{R} \to F$ é de **pequenos passos** sobre o intervalo $[a, b]$ se $f(a)$ é quase standard e se existe uma decomposição infinitésimal $a = x_0 < x_1 < ... < x_\omega = b$ de $[a, b]$ tal que, para todo $i = 0, ..., \omega - 1$, existe $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ tal que $f(\xi)$ é quase standard então $f(x) \simeq f(\xi)$ para todo $x \in [x_i, x_{i+1}]$.*

Uma função aos passos limitados possui em particular, sobre a decomposição infinitésimal $(x_0, ..., x_n)$ a propriedade seguinte:

1- $f(x_0)$ é quase standard;

2- Se $f(x_n)$ é quase standard então $f(x_{n+1})$ é quase standard.

Pode-se deduzir, no entanto, que uma função aos passos limitados é quase standard sobre todo o intervalo $[a,b]$. Com efeito, o facto de ser quase standard é uma propriedade externa e não pode servir de hipótese a uma recorrência (interna). Pode-se deduzir, por recorrência externa que f é quase standard sobre $[x_0, x_n]$ para todo *st* n, pois, para todo *st* n, x_n continua equivalente a x_0. Pelas mesmas razões, não é verdade, em geral, que uma função de pequenos passos sobre $[a,b]$ continue quase standard sobre este intervalo. Note-se que a classe das funções de pequenos passos contem quer as funções continuas quer as funções S-continuas. Com efeito, é imediato para as funções S-continuas e, para uma função f continua sobre $[a,b]$, logo uniformemente continua, que se tem

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in [a,b] \forall x' \in [a,b] \quad [|x - x'| < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) < \varepsilon],$$

logo, sendo ε infinitésimal, podemos escolher $\eta \simeq 0$ e pôr $x_i = a + i\eta$.

Vejamos agora um exemplo.

Exemplo 4.10. *Seja $\varepsilon > 0$ infinitésimal.*

1- *A função $f(x) = \frac{\varepsilon x}{1+\varepsilon^2 - x}$ é de pequenos passos sobre o intervalo $[0,1]$ pois, a função é continua, embora não seja S-continua nos pontos deste intervalos de abcissa não equivalente a* 1.

2- *A função constante definida por $f(x) = (1+\varepsilon)^i$ para $(i-1)\varepsilon \leq x \leq i\varepsilon$, $i \geq 1$, é por construção, de pequenos passos, se $i = \frac{£}{\varepsilon}$, embora não seja continua. No entanto a função é de classe S^0 sobre $]-\infty, +\infty[$ porque a função é quase igual em todos os pontos quase standard à função* $\exp(x)$.

4.1.1. Teorema da sombra contínua

Teorema 4.11. *(Da sombra continua)*

Sejam E e F dois espaços métricos standard. Para todo $f : E \to F$ de classe S^0, existe uma única função standard continua de E em F, equivalente a f em todos os pontos quase standard de E.

Definição 4.12. *A função standard continua da qual a existência é assegurada pelo teorema anterior chama-se* **sombra** *de f e denota-se ${}^0 f$.*

A demonstração do teorema da sombra continua utiliza dois lemas, os quais iremos enunciar em seguida.

Antes, porém, vejamos um lema que nos indica a possibilidade de associar a toda a função interna uma função standard, com a condição de que ela seja quase standard nos pontos standard. Esta standardização (que coincide com a sombra porque f é de classe S^0) corresponde em termos standard, à noção de limite simples de um seguimento de funções.

Lema 4.13. *Seja $[a...b] \subset \mathbb{X}$ e $f : [a...b] \to \mathbb{R}$. Então a sombra ${}^0 f$ é definida em duas etapas:*
1- *Seja $x \in {}^0[a...b]$ standard. Ponhamos*

$$\left({}^0 f\right)(x) = {}^0 f(\xi),$$

onde ξ é um elemento de $\mathbb{X}$ tal que $\xi \simeq x$.
2- *Extendemos a função externa $\{(x, ({}^0 f(x))) \mid st\ x \in {}^0[a...b]\}$ à função standard ${}^0 f$: ${}^0[a...b] \to \mathbb{R}$ por standardização.*

Lema 4.14. *Sejam E e F dois espaços métricos standard e seja $f : E \to F$ uma aplicação que não toma mais do que valores quase standard nos pontos standard. Existe uma única função standard, denotada ${}^s f$, chamada standardização de f, tal que*

$$\forall^{st} x \in E\ \left({}^S f\right)(x) = {}^0(f(x)).$$

Demonstração:
Aplicamos o principio de extensão à função que a cada elemento standard x de E associa o elemento standard ${}^0(f(x))$ de F. ■
Deduz-se que a sombra, se existir é única e unívoca, sendo neste caso ${}^0 f = {}^S f$.

Exemplo 4.15. *Sendo $\varepsilon > 0$, infinitésimal*

- $f(x) = \varepsilon x$ tem por standardização ${}^0 f(x) = 0$;
- $f(x) = (x + \varepsilon)^2$ tem por standardização ${}^0 f(x) = x^2$;
- $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ tem por standardização

$${}^S f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \text{ se } x < 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ se } x > 0. \end{cases}$$

Observemos que neste último caso, f não é de classe S^0, ${}^S f$ não é continua e ${}^0 f$ não está definida.

Lema 4.16. *Sejam E e F dois espaços métricos standard. Uma função $f : E \to F$ é S-continua no ponto $x \in E$ se e só se*

$$\forall^{st} \varepsilon > 0\ \exists^{st} \eta > 0\ \forall y\ d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

onde $d(x, y)$ representa a distância entre x e y e $\delta(f(x), f(y))$ representa a distância entre as imagens de x e y.

Demonstração:

Seja $st\ x \in E$ e seja ε um número standard positivo. Como f é S-continua, é claro que a fórmula interna $[\forall y\ d(x,y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon]$ é verificada para todo η infinitésimal positivo. Assim, em virtude do princípio de Cauchy, existe um standard positivo η para o qual ainda a fórmula é verificada.

Seja $st\ x \in \mathbb{R}$ e seja $y \in E$ tal que $y \simeq x$. Por hipótese, como $d(x,y) \simeq 0$, para todo ε standard positivo, logo $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Portanto $f(x) \simeq f(y)$. ■

Vistos os dois lemas, passemos à demonstração do teorema 4.11.

Demonstração: (do teorema da sombra continua)

Como f é de classe S^0, a standardização de f existe e é por construção equivalente a f em todo o ponto standard. Mostremos que ela é continua.

Como ${}^Sf$ é uma aplicação standard, é suficiente mostrar que

$$\forall^{st}x\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\eta > 0\ \forall y\ d(x,y) \le \eta \Rightarrow \delta({}^sf(x), {}^sf(y)) \le \varepsilon.$$

Como f é de classe S^0, temos em particular

$$\forall^{st}x\ \forall^{st}\varepsilon > 0\ \exists^{st}\eta > 0\ \forall^{st}y\ d(x,y) \le \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \le \varepsilon.$$

Ora, como x, y e δ são standard, temos que

$$\delta(f(x), f(y)) \simeq \delta({}^sf(x), {}^sf(y)).$$

Logo

$$\forall^{st}x\ \forall^{st}\varepsilon > 0\ \exists^{st}\eta > 0\ \forall^{st}y\ d(x,y) \le \eta \Rightarrow \delta({}^sf(x), {}^sf(y)) \le \varepsilon$$

de onde obtemos a conclusão por transferência.

Ponhamos agora ${}^0f = {}^sf$. Falta, agora assegurar que f e ${}^0f$ são equivalentes em todo o ponto quase standard. Isto resulta imediatamente da continuidade de ${}^0f$ e da S-continuidade de f. Com efeito, se $x \in E$, e se ${}^0x$ existe e aparece em E, temos que

$$f(x) \simeq f({}^0x) \simeq {}^0f({}^0x) \simeq {}^0f(x). \quad ■$$

Teorema 4.17. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função standard e x_0 um real standard. Então f é continua no ponto x_0 sse*

$$\forall\delta \simeq 0\ \ f(x_0 + \delta) \simeq f(x_0).$$

Demonstração:

Da continuidade de f em x deduz-se que

$$\forall^{st}\varepsilon > 0 \exists\eta > 0\ [\forall x\ \ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

donde por transferência

$$\forall^{st}\varepsilon > 0 \exists^{st}\eta > 0 \left[\forall x \ \ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right].$$

Assim, para todo $\delta \simeq 0$, a fórmula precedente aplicada a $x = x_0 + \delta$ leva a que

$$\forall^{st}\varepsilon > 0 \quad |f(x_0 + \delta) - f(x_0)| < \varepsilon$$

donde $f(x_0 + \delta) \simeq f(x_0)$.

Deduz-se da hipótese que a fórmula

$$\forall^{st}\varepsilon > 0 \left[\exists\eta > 0 \forall x \ \ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right]$$

é verificada, sendo suficiente escolher $\eta \simeq 0$. Por transferência

$$\forall\varepsilon > 0 \left[\exists\eta > 0 \forall x \ \ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right]. \quad \blacksquare$$

4.2. S - Diferenciabilidade

Vamos agora falar sobre **S-diferenciabilidade** que é um conceito externo que corresponde a um conceito de regularidade de funções que pertence à análise continua. Veremos que uma função é S-diferenciável se existir uma função infinitamente próxima do cociente da diferença das funções.

Definição 4.18. 1– *Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. A função f diz-se* **S - diferenciável** *sobre A se existe uma função φ tal que para qualquer $x, y \in A$ limitado, $y \neq x$.*

$$y \simeq x \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \simeq \varphi(x)$$

tal função φ diz-se uma **S - derivada** *(φ não é única).*

2– *Se φ é de classe S^0* e *f é de classe S^0, então f diz-se de classe* $\mathbf{S}^1$.

Teorema 4.19. *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e f, g duas funções de classe S^1. Sejam φ uma S-derivada de f e ψ uma S-derivada de g. Então $f + g$, $f.g$ são de classe S^1, $\frac{f}{g}$ em todo ponto onde g é apreciável* e *$f \circ g$ em todo o ponto onde g é limitado, também são de classe S^1. Mais*

1) $\varphi + \psi$ é uma S-derivada de $f + g$;

2) $\varphi.g + f.\psi$ é uma S-derivada de $f.g$;

3) $\frac{\varphi.g - f.\psi}{g^2}$ é uma S-derivada de $\frac{f}{g}$, nos pontos onde g é apreciável;

4) $\varphi(g(x)).\psi(x)$ é uma S-derivada de $f \circ g$, ($g(x)$ limitado).

Teorema 4.20. *Seja $\delta x > 0$, $\delta x \simeq 0$. Uma função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ é de classe S^1 se e só se $\frac{\delta f(x)}{\delta x}$ é de classe S^0* e *$f(x)$ é limitado em pelo menos um ponto limitado.*

As demonstrações destes teoremas podem ser consultadas no capítulo 8.2 de [5], onde se encontram essencialmente feitas.

Assim como as funções discretas $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ podem ser de classe S^0, elas também podem ser de classe S^1. Escrevemos $\delta f(x)$ em lugar de $f(x + \delta x) - f(x)$ e δx_i em lugar de $x_{i+1} - x_i$.

Vejamos agora um exemplo de uma função de classe S^1.

Exemplo 4.21. *Consideremos a função discreta definida por:*

$$\epsilon(x) = (1+\delta x)^{\frac{x}{\delta x}}$$

a qual é S^1 sobre $\mathbb{X}$, com S-derivada $\epsilon(x)$.
De facto

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\epsilon(x)}{\delta x} &= \frac{\epsilon(x+\delta x)-\epsilon(x)}{\delta x} = \\
&= \frac{(1+\delta x)^{\frac{x+\delta x}{\delta x}} - (1+\delta x)^{\frac{x}{\delta x}}}{\delta x} = \\
&= \frac{(1+\delta x)^{\frac{x}{\delta x}}((1+\delta x)-1)}{\delta x} = \\
&= (1+\delta x)^{\frac{x}{\delta x}} = \\
&= \epsilon(x).
\end{aligned}$$

Vamos então aplicar o teorema 4.20, mas para tal necessitamos de provar que $\epsilon(x)$ é de classe S^0.

Vejamos então que $\epsilon(x)$ é de classe S^0. Comecemos por verificar que $\epsilon(x)$ é limitado.

$$\begin{aligned}
\epsilon(x) &= e^{\frac{x}{\delta x}\log(1+\delta x)} = \\
&= e^{\frac{x}{\delta x}(\delta x(1+\varnothing))} = \\
&= e^{x(1+\varnothing)}
\end{aligned}$$

que é limitado.
Assim para todo x limitado, $\epsilon(x)$ é limitado.
Passemos agora a verificar que $\epsilon(x)$ é S-continua.
Com efeito, sejam x e y limitados quaisquer tal que

$$x \simeq y.$$

Já vimos que sendo x e y limitados e $x \simeq y$ então $e^x \simeq e^y$.
Então

$$\begin{aligned}
\epsilon(x) &= (1+\delta x)^{\frac{x}{\delta x}} \simeq \\
&\simeq e^x \simeq \\
&\simeq e^y \simeq \\
&\simeq (1+\delta x)^{\frac{y}{\delta x}} = \\
&= \epsilon(y).
\end{aligned}$$

Logo $\epsilon(x)$ é S-continua.
Podemos então concluir que

$$\frac{\delta\epsilon(x)}{\delta x} = \epsilon(x)$$

é de classe S^0.

É óbvio, que $\epsilon(x)$ é limitado em pelo menos um ponto limitado. Pelo teorema 4.20 conclui-se então que $\epsilon(x)$ é de classe S^1. ■

Já vimos como se definem funções com uma variável de classe S^i com $i \in \{0,1\}$. Vejamos agora como definir funções de classe S^2.

Definição 4.22. *Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ e $[a...b] \subset \mathbb{X}$ um quase intervalo.*

Diz-se que f é de classe S^2 em $[a...b]$ se f é de classe S^1 e $\frac{\delta^2 f}{(\delta x)^2}$ é de classe S^0 em $[a...b]$.

Tinhamos visto que para $x \in \mathbb{R}$ se define $\delta f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ por :

$$\delta f(x) = f(x + \delta x) - f(x).$$

Definimos agora para $x \in \mathbb{R}$, $\delta^2 f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ por

$$\delta^2 f(x) = \delta(\delta f(x))$$

onde

$$\delta^2 f(x) = f(x + 2\delta x) - 2f(x + \delta x) + f(x).$$

Vejamos dois exemplos de funções não standard que são de classe S^0, S^1e S^2 em $\mathbb{X}$.

Exemplo 4.23. *Vamos considerar a função do exemplo 4.21. Seja então a função discreta definida por:*

$$\epsilon(x) = (1 + \delta x)^{\frac{x}{\delta x}}$$

a qual é S^1 sobre $\mathbb{X}$, com S-derivada $\epsilon(x)$.

Calculemos agora $\frac{\delta^2 \epsilon(x)}{(\delta x)^2}$. Iremos utilizar no cálculo o resultado obtido no exemplo 4.21. Com efeito:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \epsilon(x)}{(\delta x)^2} &= \frac{\delta(\delta \epsilon(x))}{(\delta x)^2} \\ &= \frac{\delta}{\delta x}\frac{\delta \epsilon(x)}{\delta x} \\ &= \frac{\delta}{\delta x}(\epsilon(x)) \\ &= \epsilon(x). \end{aligned}$$

Como $\epsilon(x)$ é de classe S^1 e $\frac{\delta^2 \epsilon(x)}{(\delta x)^2} = \epsilon(x)$ é de classe S^0 logo por definição $\epsilon(x)$ é de classe S^2.

Exemplo 4.24. *Definimos para $x \in \mathbb{X}$*

$$e(x) = (1 + x\delta x)^{\frac{1}{\delta x}}.$$

Temos para x limitado que

$$e(x) = \exp\left(x - \frac{x^2}{2}\delta x + \frac{x^3}{3}(\delta x)^2 + \pounds(\delta x)^3\right).$$

Tomando um termo vimos que $e(x) \simeq \exp(x)$. Logo $e(x)$ é de classe S^0 em $\mathbb{X}$.
Tomando dois termos , obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{\delta e(x)}{\delta x} &= \exp\left(x - \frac{x^2}{2}\delta x\right)\left(\frac{\exp\left(\delta x + \pounds(\delta x)^2 - \exp \pounds(\delta x)^2\right)}{\delta x}\right)\\ &= \exp(x) + \varnothing.\end{aligned}$$

Logo podemos concluir que $e(x)$ é de classe S^1 em $\mathbb{X}$.
Tomando três termos, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 e(x)}{(\delta x)^2} &= \exp\left(x - \frac{x^2}{2}\delta x + \frac{x^3}{3}(\delta x)^2\right)\times\\ &\times\frac{\exp\left(2\delta x - 2x(\delta x)^2 + \pounds(\delta x)^3\right) - 2\exp\left(\delta x - x(\delta x)^2 + \pounds(\delta x)^3\right) + \exp \pounds(\delta x)^3}{(\delta x)^2}.\end{aligned}$$

Aplicando Taylor a $\exp\left(2\delta x - 2x(\delta x)^2 + \pounds(\delta x)^3\right) - 2\exp\left(\delta x - x(\delta x)^2 + \pounds(\delta x)^3\right) + \exp \pounds(\delta x)^3$, obtem-se

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 e(x)}{(\delta x)^2} &= \exp\left(x - \frac{x^2}{2}\delta x + \frac{x^3}{3}(\delta x)^2\right)\times\\ &\times\frac{1 + 2\delta x + 2(\delta x)^2 - 2x(\delta x)^2 - 2\left(1 + \delta x + \frac{(\delta x)^2}{2} - x(\delta x)^2\right) + 1}{(\delta x)^2}\\ &= \exp(x) + \varnothing.\end{aligned}$$

Logo concluimos que $e(x)$ é de classe S^2 em $\mathbb{X}$. ■

4.3. S - Continuidade e S - Diferenciabilidade para funções de duas variáveis

Estendamos agora os conceitos a funções de duas variáveis. No entanto, antes de passarmos à definição de funções com duas variáveis de classe S^{ij}, iremos introduzir uma notação.

Seja $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ e $(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, onde $\mathbb{Y}$ é da forma

$$\mathbb{Y} = \{n.\delta y \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

com δy infinitésimal e estritamente positivo.

Escrevemos:

$$\begin{aligned} \delta_1 f(x,y) &= f(x+\delta x, y) - f(x,y) \\ \delta_2 f(x,y) &= f(x, y+\delta y) - f(x,y) \end{aligned}$$

e para $i,j \in \{1,2\}$

$$\delta_{ij}^2 f(x,y) = \delta_i \delta_j f(x,y).$$

Para $x \in \mathbb{X}$ e $y \in \mathbb{Y}$ definimos as funções $f_x : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ e $f_y : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ por

$$f_x(y) = f_y(x) = f(x,y).$$

Vamos agora passar à definição de funções com duas variáveis de classe S^{ij} com $i,j \in \{0,1,2\}$.

Definição 4.25. *Seja $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ e $D \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.*
1. *Diz-se que f é de classe S^{00} em D se f é limitada e S-continua para todo ponto $(x,y) \in D$ limitado.*
2. *Diz-se que f é de classe S^{10} em D se f e $\frac{\delta_1 f}{\delta x}$ são de classe S^{00} em D.*
3. *Diz-se que f é de classe S^{01} em D se f e $\frac{\delta_2 f}{\delta y}$ são de classe S^{00} em D.*
4. *Diz-se que f é de classe S^{20} em D se f é de classe S^{10} e $\frac{\delta_2 f}{\delta x^2}$ é de classe S^{00} em D. (De modo análogo se pode definir funções de classe S^{02}).*
5. *Seja $i,j \in \{1,2\}$. Diz-se que f é de classe S^{ij} em D se f é de classe S^{i0} e S^{0j} em D.*

Por exemplo se considerarmos no plano $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

esta é de classe S^{00}, no entanto não é de classe S^{10}, pois embora seja de classe S^1 na primeira variável, não o é na segunda variável.

Vejamos agora outro exemplo onde iremos mostrar que uma função não é de classe S^{10}, exemplo este que foi retirado de [3].

Exemplo 4.26. *Consideremos a equação de diferenças parcial definida no plano discreto $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, onde a solução da equação não é de classe S^{10}.*

$$\begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta x}(u,x) &= \sqrt{u} \\ u(0,y) &= y. \end{aligned}$$

Notemos que $u_0(x) \simeq 0$.
Mostramos que existe $\eta \simeq 0$ *tal que* $u_\eta(x) \not\simeq 0$, *para* $x > 0$ *apreciável.*
Com efeito:
Seja $y \in \mathbb{Y}$, $y \gtrapprox 0$.
Para todo $x \geq 0$ *limitado, temos que* $u_y(x) \simeq U_{^0y}(x)$, *onde* $U_{^0y}$ *é a solução da equação diferencial*

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= \sqrt{u} \\ U(0) &= {}^0y. \end{aligned}$$

Assim, para $x \geq 0$ *tem-se que*

$$u_y(x) \simeq \frac{\left(x + 2\sqrt{^0y}\right)^2}{4} \simeq \frac{\left(x + 2\sqrt{y}\right)^2}{4}.$$

Pelo princípio de cauchy, existe $\eta \simeq 0$ *tal que para todo* $x \geq 0$ *apreciável*

$$U_\eta(x) \simeq \frac{\left(x + 2\sqrt{\eta}\right)^2}{4} \simeq \frac{x^2}{4} \not\simeq 0 = u_0(x).$$

Assim podemos concluir que a função de duas variáveis u, *solução da equação parcial de classe* S^{00}, *não pode ser de classe* S^{00}.

É claro, que funções do tipo $f(x,y) = x^n.y^m$ com n, $m \in \mathbb{N}$ standard são de classe S^{ij}, para todo $i,j \in \{0,1,2\}$.
Outro exemplo onde iremos aplicar esta definição encontra-se no capítulo V. Aí, iremos mostrar que a superfície discreta é de classe S^{12}.

5. S - Integrabilidade

Já vimos na secção 3.2 a qual está consagrada às somas de Riemann, quando é que uma função é integrável à Riemann e os critérios de integrabilidade à Riemann. Vejamos agora, as condições para que uma função seja S-Riemann-integrável.
Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma sucessão finita de pontos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ tal que

$$\begin{aligned} \text{i) } x_0 &\simeq a \\ \text{ii) } \forall_n, 0 &\leq i < \nu \text{ , } x_{i+1} \simeq x_i \\ \text{iii) } x_\nu &\simeq b \end{aligned}$$

chama-se uma **discretização infinitésimal** de $[a,b]$.
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Escrevemos para $0 \leq i < \nu$

$$M_i = \sup_{x_i \le x < x_{i+1}} f(x)$$

e

$$m_i = \inf_{x_i \le x < x_{i+1}} f(x).$$

Sabemos que $\delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Supomos que a, b são limitados. Uma função f diz-se **S-Riemann-integrável** se para todas as discretizações infinitésimais de $[a, b]$

$$\sum_{0 \le i < \nu} m_i \delta x_i \simeq \sum_{0 \le i < \nu} M_i \delta x_i$$

e

$$\sum_{0 \le i < \nu} M_i \delta x_i \text{ é limitado.}$$

Todo o valor $I \simeq \sum_{0 \le i < \nu} M_i \delta x_i$ diz-se um **S-integral** de f.

É obvio, que uma função de classe S^0 é S-Riemann-integrável, pois $m_i \simeq M_i$ para cada i e

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \le i < \nu} (M_i - m_i) \delta x_i &= \sum_{0 \le i < \nu} \oslash \delta x_i = \\
&= \oslash \sum_{0 \le i < \nu} \delta x_i = \\
&= \oslash (b - a) = \\
&= \oslash £ = \\
&= \oslash.
\end{aligned}$$

Teorema 5.1. *Sejam a, b, limitados, $a < b$. Seja $(x_i)_{0 \le i < \nu}$ uma discretização infinitésimal de $[a, b]$. Seja f S-Riemann-integrável e Riemann-integrável. Então*

$$\int_a^b f(x)\, dx \text{ é um } \textbf{S-integral.}$$

Não iremos desenvolver aqui uma teoria de S - integrabilidade. Vamos desenvolver sim, uma teoria de aproximações de integrais e somas complicadas por integrais simples.

Teorema 5.2. *Sejam a, b limitados $a < b$ e f, g duas funções de classe S^0 e integráveis à Riemann definidas sobre $[a, b]$, tal que $f(x) \simeq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Então*

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Teorema 5.3. *Sejam a, b limitados $a < b$ e $f, g : [a...b] \to \mathbb{R}$ tal que f, g são duas funções de classe S^0 definidas sobre $[a...b]$, tal que $f(x) \simeq g(x)$ para todo $x \in [a...b]$. Então*

$$\sum_{a \leq x < b} f(x)\, \delta x \simeq \sum_{a \leq x < b} g(x)\, \delta x.$$

Corolário 5.4. *(Aproximação de uma soma por um integral) Sejam a, b limitados e $f : [a...b] \to \mathbb{R}$ de classe S^0. Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe S^0 e Riemann - integrável. Seja $f(x) \simeq g(x)$ para todo $x \in [a...b]$. Então*

$$\sum_{a \leq x < b} f(x)\, \delta x \simeq \int_a^b g(x)\, dx.$$

5.1. Teorema da Stroboscopia

Um teorema muito útil para a existência de sombras é o teorema da **Stroboscopia**, o qual iremos agora enunciar e demonstrar.

Teorema 5.5. *(**Da Stroboscopia**) Seja $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $b \gg a$, $(a, \varphi(a))$ limitado. Suponhamos que existe uma decomposição infinitésimal $(t_0, t_1, ..., t_N)$ de $[a, b]$ e uma função standard continua $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $n = 0, ..., N-1$ e todo $t \in [t_n, t_{n+1}[$:*

$$\begin{aligned} i)\ \varphi(t) &\simeq \varphi(t_n) \\ ii)\ \frac{\varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n)}{t_{n+1} - t_n} &\simeq f(t_n, \varphi(t_n)). \end{aligned}$$

Então φ é de classe S^0 (de facto S^1) sobre um intervalo de comprimento apreciável $[a, a']$, $a \neq a'$, e sua sombra ${}^\circ\varphi$ verifica sobre a sombra deste intervalo a equação diferencial $x' = f(t, x)$.

Para demonstrar o teorema, vamos seguir os seguintes passos:

a) Mostrar que a função φ que satisfaz as hipóteses deste teorema é aos passos limitados.

b) Mostrar que se φ é limitado sobre um intervalo $[a, a']$, então φ é S-continua sobre este intervalo. Deduzir que existe a', $a \ll a' \ll b$ tal que y seja de classe S^0 sobre $[a, a']$.

c) Mostrar que a sombra de φ, que se designa por φ_0, sobre este intervalo, tem, para todo $t \in [a, a']$,

$$\varphi_0(t) - \varphi_0(a) \simeq \int_a^t f(\tau, \varphi_0(\tau))\, d\tau.$$

Comecemos por demonstrar **a)**.

a) Supondo que $\varphi(t_n)$ é limitado. Então $f(t_n, \varphi(t_n))$ é limitado. Logo por **ii)**

$$\varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n) = f(t_n, \varphi(t_n) + \emptyset)(t_{n+1} - t_n)$$

é infinitésimal. Então φ é aos passos infinitésimal, pelo que φ é aos passos limitados.

b) Seja a' tal que φ é limitado sobre o intervalo $[a, a']$.
Seja s, $t \in [a, a']$, $s < t$ e tal que $s \simeq t$ e seja k tal que $s \in [t_k, t_{k+1}[$ e seja n tal que $t \in [t_n, t_{n+1}[$ então:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) - \varphi(s) &\simeq \varphi(t_n) - \varphi(t_k) = \\
&= \sum_{k \leq m < n} \varphi(t_{m+1}) - \varphi(t_m) = \\
&= \sum_{k \leq m < n} [f(t_m, \varphi(t_m)) + \emptyset](t_{m+1} - t_m) = \\
&= \sum_{k \leq m < n} (\pounds + \emptyset)(t_{m+1} - t_m) = \\
&= (\pounds + \emptyset) \sum_{k \leq m < n} (t_{m+1} - t_m) =
\end{aligned}$$

como

$$\sum_{k \leq m < n} (t_{m+1} - t_m) = (t_{k+1} - t_k) + (t_{k+2} - t_{k+1}) + \ldots$$

logo

$$\begin{aligned}
\varphi(t) - \varphi(s) &\simeq (\pounds + \emptyset)(t_n - t_k) = \\
&= (\pounds + \emptyset).\emptyset = \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Assim concluimos que φ é S-continua.
Como φ é limitada e S-continua, **então** φ é de classe $\mathbf{S}^0$ sobre o intervalo $[a, a']$.
Suponhamos agora, que existe $\alpha = t_\mu \simeq 0$ tal que $\varphi(\alpha)$ é ilimitado.

Seja $\mu = \max\{n \mid |\varphi(t_n)| \leq 1\}$. Então $\varphi(t_\mu) \simeq \varphi(a)$.
Mas $\varphi(t_\mu) > 1$, logo $\varphi(t_\mu) \not\simeq \varphi(a)$. Contradição.
Assim

$$L = \{\alpha \mid \varphi(\alpha) \text{ limitado}\} \supset a + \varnothing.$$

Pelo princípio de Cauchy

$$L \supsetneqq a + \varnothing.$$

Podemos assim supôr $a' \in L - (a + \varnothing)$.

c) Nesta demonstração iremos utilizar o **Principio de Carnot** que nos diz que se dois números standard reais são infinitamente próximos então eles são iguais
$\exists n$ tal que $t \in [t_n, t_{n+1}[$, $a = t_0$.

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) - \varphi_0(a) &\simeq \varphi(t) - \varphi(a) \simeq \\
&\simeq \varphi(t_n) - \varphi(t_0) = \\
&= \sum_{0 \leq m < n} [\varphi(t_{m+1}) - \varphi(t_m)] = \\
&= \sum_{0 \leq m < n} [f(t_m, \varphi(t_m)) + \emptyset](t_{m+1} - t_m) = \\
&= \sum_{0 \leq m < n} [f(t_m, \varphi_0(t_m)) + \emptyset](t_{m+1} - t_m) = \\
&= \sum_{0 \leq m < n} f(t_m, \varphi_0(t_m))(t_{m+1} - t_m) + \sum_{0 \leq m < n} \emptyset (t_{m+1} - t_m) = \\
&= \sum_{0 \leq m < n} f(t_m, \varphi_0(t_m))(t_{m+1} - t_m) + \emptyset \sum_{0 \leq m < n} (t_{m+1} - t_m) = \\
&= \sum_{0 \leq m < n} f(t_m, \varphi_0(t_m))(t_{m+1} - t_m) + \emptyset (t_n - t_0) = \\
&= \sum_{0 \leq m < n} f(t_m, \varphi_0(t_m))(t_{m+1} - t_m) + \emptyset \times \pounds = \\
&= \sum_{0 \leq m < n} f(t_m, \varphi_0(t_m))(t_{m+1} - t_m) + \emptyset.
\end{aligned}$$

Como f é de classe S^0e se tem uma decomposição infinitésimal podemos aplicar a soma de Riemann, logo

$$\sum_{0\leq m<n} f\left(t_m,\varphi_0\left(t_m\right)\right)\left(t_{m+1}-t_m\right)+\emptyset \simeq \int_0^t f\left(\tau,\varphi_0\left(\tau\right)\right)d\tau+\emptyset\ .$$

Portanto, se $t\in\left[a,a'\right]$

$$\varphi_0\left(t\right)-\varphi_0\left(a\right)\simeq\int_0^t f\left(\tau,\varphi_0\left(\tau\right)\right)d\tau+\emptyset.$$

Pelo principio de Carnot, podemos escrever que

$$\varphi_0\left(t\right)-\varphi_0\left(t_0\right)=\int_0^t f\left(\tau,\varphi_0\left(\tau\right)\right)d\tau.$$

Derivando ambos os membros, ainda se obtém:

$$\varphi_0'\left(\tau\right)=f\left(\tau,\varphi_0\left(\tau\right)\right).\quad\blacksquare$$

6. Aproximações Globais

6.1. Massas e caudas

Vamos em seguida considerar aproximações globais: integrais e somas sobre intervalos de comprimento limitado ou infinito. Note-se que uma aproximação global de funções induz uma aproximação de somas (teorema das aproximações multiplicativas de Cauchy). De facto uma aproximação local de um certo tipo é suficiente. Para tal, iremos introduzir os conceitos de cauda e massa.

Definição 6.1. *Seja $f\geq 0$ uma função real, de modo que*

$$I\equiv\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx,$$

é convergente e estritamente positivo.

A cauda esquerda C^- de f é definida por

$$C^-=\left\{y\mid\int_{-\infty}^{y} f\left(x\right)dx=\oslash.I\right\}.$$

A cauda direita C^+ de f é definida por

$$C^{+}=\left\{y \mid \int_{y}^{\infty} f(x)\, dx=\varnothing.I\right\}.$$

A massa M_f de f é definida por

$$M_f=\mathbb{R}\backslash\left(C^{-}\cup C^{+}\right).$$

Os conceitos de cauda e massa definem-se também para os somatórios, em particular para as somas de Riemann.

Seja $f:\mathbb{X}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que

$$S=\sum_{x\in\mathbb{X}} f(x)\,\delta x$$

é convergente.

Aqui as definições da cauda esquerda C^{-} e da cauda direita C^{+} são:

$$C^{-}=\left\{y \mid \sum_{x\leq y} f(x)\,\delta x=\varnothing.S\right\}$$

e

$$C^{+}=\left\{y \mid \sum_{x>y} f(x)\,\delta x=\varnothing.S\right\}.$$

A massa é de novo

$$M_f=\mathbb{X}\backslash\left(C^{-}\cup C^{+}\right).$$

6.2. Aproximação de Somas e integrais

A massa é um meio para determinar aproximações de somas e integrais. O teorema seguinte mostra que uma aproximação local de uma função, só sobre a massa dela é suficiente para uma aproximação do seu integral global sobre $\mathbb{R}$. As demonstrações dos teoremas seguintes podem ser consultadas em [2].

Teorema 6.2. *Sejam $f,g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ de massa $\mathbf{M}$ igual, tal que $m_g\subset m_f$, e tal que $f(x)\sim g(x)$, para todo $x\in\mathbf{M}_g$. Então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\sim\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx.$$

De facto, $m_g\equiv m_f$.

Teorema 6.3. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ de massa £ iguais, tal que $m_g \subset m_f \subset £$, integráveis à Riemann e de classe S^0,e tal que $f(x) \simeq g(x)$, para todo $x \in £$. Então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \simeq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx.$$

De facto, $m_g \equiv m_f$.

Teorema 6.4. *Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^+$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ de massa £, e de classe S^0 e g também integrável à Riemann. Seja $f(x) \simeq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$ limitado. Então para todo $x \in \mathbb{R}$*

$$\sum_{y \leq x} f(y)\, \delta x \simeq \int_{-\infty}^{x} g(y)\, dy.$$

Teorema 6.5. *Seja $\delta x \simeq 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ de classe S^0 e Riemann - integrável de massa £. Então*

$$\sum_{x \in \mathbf{X}} f(x)\, \delta x \simeq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

6.3. Distribuições de Probabilidade

O nosso objectivo, nesta secção, é determinar aproximações de integrais e somas de Riemann, pelo que não iremos estar ocupados com problemas de mensuralidade.

Só iremos tratar de probabilidades sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \Pr)$ finito, pois assim não teremos problemas de existência de esperanças.

Claro que $pr(x) > 0$, para cada $x \in \Omega$ e

$$\sum_{x \in \mathbf{X}} pr(x) = 1.$$

Uma variável estocástica é simplesmente uma função $y : \Omega \to \mathbb{R}$, onde a sua esperança é dada por

$$E\ y = \sum_{x \in \mathbf{X}} y(x)\, pr(x),$$

e a sua variância, é dada por

$$Var\ y = E\,(y - E\ y)^2.$$

O seu desvio padrão é $\sqrt{Var\ y}$.

Para as distribuições de probabilidade existe um método para localizar a massa. As suas caudas e a sua massa são definidas analogamente como foram definidas as somas de Riemann.

Por exemplo:

$$a \in C^{-} \Leftrightarrow \sum_{y(x) \leq a} y(x)\, pr(x) = \varnothing .1 \simeq 0.$$

Sendo y uma variável estocástica, com esperança μ e desvio padrão σ, dizemos que

$$\mu + \pounds.\sigma$$

é uma galáxia centrada em μ e de ordem σ.

6.4. Lema de Chebyshev

Teorema 6.6. ***(Lema de Chebyshev)*** *Seja Ω um espaço de probabilidade finito e $y : \Omega \to \mathbb{R}^{+}$ uma variável estocástica não negativa. Seja $\lambda > 0$. Então*

$$\Pr\{y \geq \lambda\} \leq \frac{Ey}{\lambda}$$

Antes de iniciar a demonstração do teorema temos que ter em conta que

$$\{y \geq \lambda\} = \{x \in \Omega \mid y(x) \geq \lambda\}.$$

Passemos então à demonstração do teorema.
Demonstração:

$$\begin{aligned}
\Pr\{y \geq \lambda\} &= \sum_{y \geq \lambda} pr(x) \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{y \geq \lambda} \lambda pr(x) \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \sum_{y \geq \lambda} y(x)\, pr(x) \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \sum_{y \in \Omega} y(x)\, pr(x) \\
&= \frac{Ey}{\lambda} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 6.7. ***(Lema de Chebychev externo)*** *Seja Ω um espaço de probabilidade finito e $y : \Omega \to \mathbb{R}^{+}$ uma variável estocástica não negativa. Então*

$$M_y \subset \pounds.Ey$$

Demonstração:
Se $Ey = 0$, $y(x) = 0$ para cada $x \in \Omega$ o resultado é trivial: $M_y = \pounds.Ey = \{0\}$. Supomos que $Ey > 0$ e seja $\lambda \simeq +\infty$. Pelo Lema de Chebychev

$$\Pr\{y \geq \lambda.Ey\} \leq \frac{Ey}{\lambda Ey} = \frac{1}{\lambda} \simeq 0$$

Vemos que $\lambda \in y$ pertence à cauda de y. Então $M_y \subset \pounds.Ey$. ■

6.5. Lema de Concentração da Massa

Teorema 6.8. ***(Lema de Concentração da Massa)*** *Seja Ω um espaço de probabilidade finito e $y : \Omega \to \mathbb{R}^+$ uma variável estocástica, com esperança μ e desvio padrão σ. Então*

$$M_y \subset \mu + \pounds.\sigma$$

Demonstração:
Pondo

$$z = \frac{y - \mu}{\sigma}$$

temos

$$y = \sigma z + \mu.$$

Então

$$Ez^2 = E\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{E(y-\mu)^2}{\sigma^2}.$$

Como $\mu = E(y)$ então tem-se

$$\frac{E(y - Ey)^2}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.$$

Pelo ***Lema de Chebychev externo*** *$M_{z^2} \subset \pounds$. Se $\alpha \in M_z$ logo $\alpha^2 \in M_{z^2} \subset \pounds$, logo $\alpha \in \pounds$. Vemos que α é limitado, $M_z \subset \pounds$ concluindo que $M_y = \sigma M_z + \mu \subset \sigma\pounds + \mu$.* ■

6.6. Teorema de De Moivre Laplace

A prova do teorema de De Moivre Laplace será efectuada em três etapas:

1- Estimamos o cociente de dois coeficientes binomiais. No primeiro lema iremos obter a fórmula combinatorial. No segundo e no terceiro lema obteremos aproximações para as coordenadas t e x da fórmula.

2- Na primeira parte da demonstração do teorema, iremos oter uma estimação do coeficiente binomial como a função do coeficiente binomial maximal, por aproximações sucessivas.

3- Na última parte da demonstração do teorema iremos obter uma aproximação assimptótica do coeficiente binomial maximal.

Lema 6.9. *Seja* $0 < p < 1$, j, $v \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq v$. *Então*

$$B_p(v, j+1) = B_p(v, j)\frac{1 - \left(j - \frac{v}{2}\right).\frac{2}{v}}{1 + \left(j - \frac{v}{2}\right).\frac{2}{v} + \frac{2}{v}}.\frac{p}{p-1}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
B_p(v, j+1) &= \binom{v}{j+1}.p^{(j+1)}.(1-p)^{(v-j-1)} \\
&= \frac{v!}{(j+1)!\,(v-(j+1))!}.p^j.(1-p)^{(v-j)}.\frac{p}{1-p} \\
&= \frac{v!}{j!\,(v-j)!}.\frac{v-j}{j+1}.p^j.(1-p)^{(v-j)}.\frac{p}{1-p} \\
&= B_p(v, j).\frac{\frac{v}{2} - \left(j - \frac{v}{2}\right)}{\frac{v}{2} + \left(j - \frac{v}{2}\right) + 1}.\frac{p}{1-p} \\
&= B_p(v, j).\frac{1 - \left(j - \frac{v}{2}\right)\frac{2}{v}}{1 + \left(j - \frac{v}{2}\right)\frac{2}{v} + \frac{2}{v}}.\frac{p}{1-p}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 6.10. *Seja* $\delta t \simeq 0$ *e* **a** *um número real limitado. Seja* t *apreciável. Então para* $(t, x) \in \mathbf{C}$

$$b_a(t, x+\delta x) = b_a(t, x).\frac{1 - \frac{x}{2t}\delta x}{1 + \frac{x}{2t}\delta x + \varnothing\delta x}.(1 + 2a\delta x + \varnothing\delta x).$$

Demonstração:
Ponhamos $v = v_t$, $j = j_{t,x}$ *e* $p = \frac{1}{2} + a\sqrt{\delta t}$. *Note-se que:*
- $\frac{2}{v} = \frac{2}{t}\delta t = \frac{2}{t}\sqrt{\delta t}.\sqrt{\delta t} = \varnothing.\delta x$
- $\left(j - \frac{v}{2}\right).\frac{2}{v} = \left(j - \frac{v}{2}\right).\frac{2\delta t}{t} = \frac{\left(j-\frac{v}{2}\right)\delta x}{2t}.\delta x = \frac{x}{2t}.\delta x$
- $\frac{p}{1-p} = \frac{\frac{1}{2}+a\sqrt{\delta t}}{\frac{1}{2}-a\sqrt{\delta t}} = \frac{1+a\delta x}{1-a\delta x} = (1 + a\delta x)(1 + a\delta x + \varnothing\delta x) = 1 + 2a\delta x + \varnothing\delta x.$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
b_a(t, x+\delta x) &= \frac{B_p(v, j+1)}{\delta x} \\
&= \frac{B_p(v, j)}{\delta x}.\frac{1 - \left(j - \frac{v}{2}\right).\frac{2}{v}}{1 + \left(j - \frac{v}{2}\right).\frac{2}{v} + \frac{2}{v}}.\frac{p}{1-p} \\
&= b_a(t, x).\frac{1 - \frac{x}{2t}.\delta x}{1 + \frac{x}{2t}.\delta x + \varnothing\delta x}.(1 + 2a\delta x + \varnothing\delta x). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 6.11. *Seja* $\delta t \simeq 0$ *e* **a** *limitado. Seja* $(t, x) \in \mathbf{C}$ *com* t *apreciável e* x *limitado. Então*

$$b_a(t, x+\delta x) = b_a(t, x).\left(1 - \frac{x - 2at}{t}\delta x + \varnothing\delta x\right).$$

Demonstração:

Sendo $\frac{x}{2t}\delta x \simeq 0$ *tem-se que* $\frac{1}{1+\frac{x}{2t}\delta x+\varnothing\delta x} = 1 - \frac{x}{2t}\delta x + \varnothing\delta x.$

Pelo lema anterior tem-se

$$\begin{aligned}
b_a(t, x+\delta x) &= b_a(t,x)\,.\frac{1-\frac{x}{2t}.\delta x}{1+\frac{x}{2t}.\delta x+\varnothing\delta x}.\left(1+2a\delta x+\varnothing\delta x\right)\\
&= b_a(t,x)\,.\left(1-\frac{x}{2t}.\delta x\right)\left(1-\frac{x}{2t}\delta x+\varnothing\delta x\right).\left(1+2a\delta x+\varnothing\delta x\right)\\
&= b_a(t,x)\,.\left(1-\frac{x}{2t}.\delta x-\frac{x}{2t}\delta x+\varnothing\delta x\right).\left(1+2a\delta x+\varnothing\delta x\right)\\
&= b_a(t,x)\,.\left(1+2a\delta x-\frac{x}{2t}.\delta x-\frac{x}{2t}\delta x+\varnothing\delta x\right)\\
&= b_a(t,x)\,.\left(1-\frac{x-2at}{t}\delta x+\varnothing\delta x\right). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 6.12. *(De Moivre-Laplace)*

Seja $\delta t \simeq 0$ *e seja* **a** *limitado. Então para algum ponto* $(t,x) \in \mathbf{C}$ *onde* t *apreciável e* x *limitado*

$$b_a(t,x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-2at)^2}{2t}\right).$$

Demonstração:

Vamos provar o teorema para o caso onde $a = 0$. *O caso geral pode ser mostrado análogamente fazendo* $x' = x - 2at$.

Para t *fixo, o máximo de* $b(t,x)$ *é obtido para* $x = 0$.

Vamos primeiro exprimir $b(t,x)$ *em função de* $b(t,0)$, *e em seguida fazemos uma estimativa para* $b(t,0)$.

Para $x > 0$, *tem-se*

$$\begin{aligned}
b(t,x) &= b(t,0)\prod_{0\le y<x}\frac{b(t,y+\delta x)}{b(t,y)}\\
&= b(t,0)\prod_{0\le y<x}\left(1-\frac{y+\varnothing}{t}\delta x\right)\\
&= b(t,0)\exp\left[\sum_{0\le y<x}\log\left(1-\frac{y+\varnothing}{t}\delta x\right)\right]\\
&= b(t,0)\exp\left[\sum_{0\le y<x}-\frac{y+\varnothing}{t}\delta x\,(1+\varnothing)\right]\\
&= b(t,0)\exp\left[-\frac{1}{t}\sum_{0\le y<x}(y+\varnothing)\,\delta x\right]\\
&= b(t,0)\exp\left[-\frac{1}{t}\int_0^x y\;dy+\varnothing\right]\\
&= b(t,0)\exp\left(-\frac{x^2}{2t}+\varnothing\right)\\
&= b(t,0)\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)(1+\varnothing)\,.
\end{aligned}$$

O caso onde $x<0$, pode ser mostrado de modo análogo tendo em conta que

$$b(t,0)=b(t,x)\prod_{x\le y<0}\frac{b(t,y+\delta x)}{b(t,y)}.$$

Para estimar $b(t,0)$, vamos utilizar o lema de concentração de massa e o lema de Robinson's.

Como $b(t,x)\,\delta x$ é a distribuição de probabilidade em $\mathbf{C}_T$ com média zero e desvio padrão $\sqrt{t}$ standard, o lema de concentração de massa diz que para algum z ilimitado

$$1=\sum_{|x|\le\frac{t}{\sqrt{\delta t}}}b(t,x)\,\delta x\simeq\sum_{x\le z}b(t,x)\,\delta x.$$

Pela proposição 2.4 e o lema de Robinson's, existe algum $z'\simeq+\infty$ tal que

$$\sum_{|x|\le z'}\frac{b(t,x)}{b(t,0)}\delta x\simeq\int_{-z'}^{+z'}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)dx.$$

Como o integral é convergente, obtemos

$$\int_{-z'}^{+z'} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx = \sqrt{2\pi t}.$$

Podemos agora concluir que

$$\begin{aligned} 1 &\simeq \sum_{|x|\leq z'} b(t,x)\,\delta x \\ &= b(t,0) \sum_{|x|\leq z'} \frac{b(t,x)}{b(t,0)}\delta x \\ &= b(t,0) \, . \left(\sqrt{2\pi t} + \oslash\right). \end{aligned}$$

Assim sendo, $b(t,0) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$.

Como tinhamos que $b(t,x) = b(t,0)\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)(1+\oslash)$, *obtemos finalmente que*

$$b(t,x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right). \qquad \blacksquare$$

O teorema De Moivre Laplace diz que a distribuição binomial se comporta sobre a sua massa como a função de Gauss. Este comportamento desaparece na cauda, mas só até certo grau: a cauda da distribuição binomial é contudo exponencial quadrática decrescente.

Proposição 6.13. *Seja* $\delta t \simeq 0$ *e* a *limitado. Para algum* $(t,x) \in C$, *com* t *apreciável e* x *ilimitado tem-se:*

$$b_a(t,x) = \pounds . \exp\left(-@x^2\right).$$

Demonstração:

Pelo lema 6.13, existe algum limitado x_0 *(por exemplo* $x_0 = (4a+1)\,t$*) tal que para algum* $y \geq x_0$

$$b_a(t, y + \delta x) \leq b_a(t,y) \, . \left(1 - \frac{y}{2t}\delta x\right).$$

Se $z<1$ temos que $\ln(1-z)\leq -z$, *logo para algum x ilimitado*

$$\begin{aligned}
b_a(t,x) &\leq b_a(t,x_0).\prod_{x_0<y<x}\left(1-\frac{y}{2t}\delta x\right)\\
&= b_a(t,x_0).\exp\left[\sum_{x_0<y<x}\ln\left(1-\frac{y}{2t}\delta x\right)\right]\\
&\leq b_a(t,x_0).\exp\left[\sum_{x_0<y<x}-\frac{y}{2t}\delta x\right]\\
&\leq b_a(t,x_0).\exp\left[\int_{x_0}^{x}-\frac{y}{2t}dy\right]\\
&\leq b_a(t,x_0).\exp\left[-\frac{x^2-x_0^2}{4t}\right]\\
&= \pounds.\exp\left(-@x^2\right). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Seja $v\in\mathbb{N}$ fixo (normalmente $v\simeq+\infty$). Sejam $j,\ n\in\mathbb{N}$ e $0\leq j\leq n$. De uma certa maneira o teorema central do limite no caso da distribuição binomial

$$\Pr\{n\}=B(n,j)=\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ n \text{ qualquer}$$

(teorema de **De Moivre Laplace**) resulta de mudanças de escala:

1) $t=\frac{n}{v}$, uma **macroscopa** sobre n. Um número de ordem v será limitado.

2) $x=\frac{j-\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{v}}{2}}$, uma **telescopa** sobre j. É uma translacção, seguida por uma macroscopa. Um número tendo com respeito a $\frac{n}{2}$ (passa onde a telescopa é directa, o centro de imagem da telescopa) uma distância de ordem $\frac{\sqrt{v}}{2}$ (de facto um número ilimitado) será limitado.

3) $\beta(n,j)=\frac{\sqrt{v}}{2}B(n,j)$, uma microscopa sobre os valores da distribuição binomial. Valores de ordem estrita $\frac{1}{\sqrt{v}}$ serão apreciáveis.

O resultado das três mudanças de escala aplicadas à função de duas variáveis $B(n,j)$ escreve-se $b(v;t,x)$ ou simplesmente $b(t,x)$, a função binomial

$$b(t,x)=\frac{\sqrt{v}}{2}.B\left(vt,\frac{vt}{2}+x\frac{\sqrt{v}}{2}\right).$$

Note-se que $vt=n$ e $\frac{vt}{2}+x\frac{\sqrt{v}}{2}=\frac{n}{2}+\frac{x}{\sqrt{t}}.\frac{\sqrt{n}}{2}$, onde $\frac{n}{2}$ é a média e $\frac{\sqrt{n}}{2}$ é o desvio padrão.

A massa de $B(n,j)$ sendo $M_B=\frac{n}{2}+\pounds.\frac{\sqrt{n}}{2}$, a massa M_b de $b(v;t,x)$ é igual a

$$M_b=\frac{M_B-\frac{n}{2}}{\frac{1}{\sqrt{t}}.\frac{\sqrt{n}}{2}}=\sqrt{t}.\pounds.$$

Se t é apreciável, então $M_b=\pounds$.

Exemplo 6.14. *A densidade de Gauss é dada por*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

e a sua massa é $\pounds$.
Com efeito:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\sqrt{2\pi} = \\ &= 1. \end{aligned}$$

Se $y \simeq +\infty$ então

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx &\leq \int_{y}^{+\infty} \exp(-x)\, dx \simeq \\ &\simeq 0 = \\ &= \oslash I. \end{aligned}$$

Logo $y \in C^+$.
Verifica-se análogamente que se $y \simeq -\infty$ então $y \in C^-$.
Se y é standard e limitado, tem-se que:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx > 0$$

e como é standard, logo podemos concluir que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \gtrsim\!\!\!\!\not\;\, 0.$$

Logo $y \in M_g$.
Podemos assim concluir que

$$M_g \equiv \pounds. \quad \blacksquare$$

Observemos que $M_b \equiv \pounds$ pelo teorema de De Moivre Laplace e pela proposição 6.13.

Exemplo 6.15. *Seja $\alpha > 0$. Então a massa da densidade*

$$g_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right)$$

é $\pounds\sqrt{\alpha}$.
Iremos fazer a seguinte substituição durante a demonstração
$r = \frac{x}{\sqrt{\alpha}} \iff x = \sqrt{\alpha} r$ *logo* $dx = \sqrt{\alpha} dr$. *Se* $x = \lambda \Rightarrow r = \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}$; *se* $x = +\infty \Rightarrow r = +\infty$.
De facto, se $\lambda > 0$, então

$$\begin{aligned}
\int_\lambda^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \int_\lambda^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right) dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \sqrt{\alpha} dr = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr.
\end{aligned}$$

Vê-se aqui que:
- $\lambda \in C^+$ *se* $\lambda = \infty\sqrt{\alpha}$
- $\lambda \in C^-$ *se* $\lambda = -\infty\sqrt{\alpha}$.

Então

$$M_{g_\alpha} = \pounds\sqrt{\alpha}.$$

Se α apreciável então

$$M_{g_\alpha} = \pounds. \quad \blacksquare$$

Exemplo 6.16. 1$-$ *A massa de todas as variáveis normalizadas (de esperança 0 e variância 1) está contida em $\pounds$, tal como a lei de probabilidade standard normal* $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

2$-$ *A massa da lei normal* $g_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{2\sigma}\right)^2\right)$ *é* $\mu + \pounds\sigma$.

3$-$ *Se considerarmos a lei binomial* $B(j,n) = \binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *sobre* $\{0, ..., n\}$ *onde* $n \in \mathbb{N}$ *e* $0 \leq j \leq n$, *a sua esperança é* $\frac{n}{2}$ *e o seu desvio padrão é* $\frac{\sqrt{n}}{2}$. *Então a sua massa satisfaz* $M_B \equiv \frac{n}{2} + \pounds\frac{\sqrt{n}}{2} \equiv \frac{n}{2} + \pounds\sqrt{n}$.

Para y limitado tem-se $b(t,y) = \pounds \exp(-@y^2 + \pounds y)$.
Para y não limitado tem-se $b(t,y) = \exp(-@y^2)$, como foi visto na proposição 6.13.

7. S - Exponencial

O teorema da De Moivre Laplace menciona que as distribuições binomiais são próximas das correspondentes distribuições normais. Muitas vezes, a esperança da variável aleatória com respeito à distribuição binomial é próxima da esperança correspondente, com respeito à distribuição normal, isto é realmente claro, quando a esperança da binomial é expressa em termos da função binomial, tornando-se assim numa soma de Riemann. A esperança com respeito à distribuição normal tem a forma de um integral, e até certo grau de regularidade e condições de crescimento da variável aleatória este integral é o integral de Riemann correspondente à soma de Riemann.

Dizemos que a função real g definida para todo o x é de ordem exponencial se existem K, c limitados tal que para todo x se tem

$$g(x) \leq K \exp(cx).$$

Isto inspira a noção de ordem S-exponencial, que definimos para funções standard ou não standard.

Definição 7.1. *Uma função real $g(x)$ que cresce no máximo com $K \exp(cx)$, onde K, c são limitados, diz-se de* ***ordem S-exponencial****.*

Vejamos agora um lema, que diz que se g é de ordem S-exponencial então ${}^0g$ é de ordem exponencial.

Lema 7.2. *Seja g uma função de classe S^0 de ordem S-exponencial, a qual é infinitamente próxima de uma função standard continua ${}^0g$. Então ${}^0g$ é de ordem exponencial.*

Demonstração:
Sejam K e c standard tal que

$$g(x) \leq K \exp(cx)$$

para todo x ilimitado.
Pelo princípio de Cauchy, existe um número standard A, $\forall x \geq A$ tal que

$$g(x) \leq K \exp(cx).$$

Seja y um número real standard tal que $y \geq A$ e seja x tal que $x \simeq y$. Por hipótese temos que

$${}^0g(y) \simeq g(x) \leq K \exp(cx) \simeq K \exp(cy).$$

Então, pelo princípio de Carnot

$${}^0g(y) \leq K \exp(cy).$$

Por transferência

$${}^0g(y) \leq K \exp(cy)$$

para todo o $y \geq A$, em particular para y ilimitado.

Podemos assim concluir que ${}^0g$ é de ordem exponencial. ■

Neste último teorema, iremos obter uma aproximação de uma função definida através de um somatório por meio de um integral. Iremos verificar que a massa de ambas as funções é o conjunto dos limitados e aplicar o teorema 6.4.

Teorema 7.3. *Sejam $g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ de classe S^0 de ordem S - exponencial e ${}^0g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma sombra de g. Seja τ apreciável. Então para cada x limitado*

$$\begin{aligned} u(\tau, x) &\equiv \sum_{|y| \leq \frac{t}{\sqrt{\delta t}}} b(t,y)\, g(x+y)\, \delta x \simeq \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\tau}}\, {}^0g(x+y)\, dy. \end{aligned}$$

Demonstração:
Se y ilimitado tem-se:

$$\begin{aligned} b(t,y)\, g(x+y) &= \exp\left(-@y^2\right).\pounds \exp\left(\pounds\,(x+y)\right) = \\ &= \pounds \exp\left(-@y^2 + \pounds y\right) = \\ &= \pounds \exp\left(-@y\,(y+\pounds)\right) = \\ &= \pounds \exp\left(-@y\,(1+\varnothing)\, y\right) = \\ &= \pounds \exp\left(-@y^2\right). \end{aligned}$$

Logo a massa de $b(t,y)\, g(x+y)$ está contida no conjunto dos limitados.

De igual modo se obtém que a massa de $\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)\, {}^0g(x+y)$ está contida no conjunto dos limitados. Portanto as massas de $b(t,y)\, g(x+y)$ e $\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)\, {}^0g(x+y)$ são iguais.

Então pelo teorema 6.4

$$\begin{aligned} u(t, x) &\equiv \sum_{|y| \leq \frac{t}{\sqrt{\delta t}}} b(t,y)\, g(x+y)\, \delta x \simeq \\ &\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)}{\sqrt{2\pi t}}\, {}^0g(x+y)\, dy. \end{aligned}$$ ■

Capítulo IV
O Passeio Estocástico de Wiener e a Equação de Calor

8. O passeio Estocástico de Wiener

Definição 8.1. *Sejam $\delta t > 0$ e $\Pi = \{t : \exists n \in \mathbb{N}, t = n\delta t\}$. Seja $t \in \Pi$. Um* ***processo estocástico indexado*** *pelo quase intervalo $[0...T]$ é um conjunto Λ de trajectórias $\lambda : [0...T] \to \mathbb{R}$, tendo cada trajectória uma probabilidade $pr(\lambda) > 0$, de modo que*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} pr(\lambda) = 1.$$

O conjunto de trajectórias Λ é um espaço de probabilidade. Interprete-se como todos os cenários possiveis de desenvolvimento futuro.

Um processo estocástico é identificado como uma sucessão de variáveis estocásticas $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$, todos definidos sobre o mesmo espaço de probabilidade. Iremos definir as trajectórias do processo implicitamente através dos seus incrementos

$$\delta X_t = X_{t+\delta t} - X_t.$$

Os incrementos do passeio de Wiener W no tempo t qualquer são as variáveis estocásticas

$$\delta W_t = \begin{cases} \sqrt{\delta t} & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \\ -\sqrt{\delta t} & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Então toda a trajectória λ no todo tempo t é uma soma parcial

$$\lambda(t) = \sum_{0 \leq s \leq t} (-1)^{\varepsilon(s)} \sqrt{\delta t}$$

onde $\varepsilon(s) = 1$ ou $\varepsilon(s) = 0$.

Uma equação para os incrementos das trajectórias de um processo estocástico é uma equação do tipo

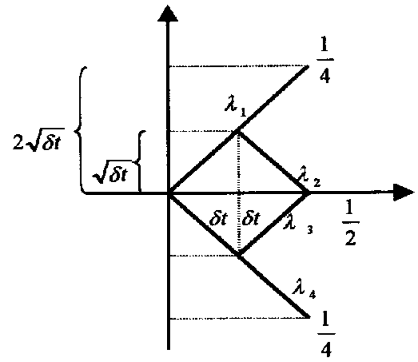


Figura 8.1: Trajectórias do passeio de Wiener

$$\delta X_t = \mu\,(t, X_t)\,\delta t + \sigma\,(t, X_t)\,\delta W_t$$

a qual é designada por **equação de diferenças estocásticas.**

Toda a trajectória λ do passeio de Wiener define uma trajectória $\xi = \xi^{\lambda}$ do processo X, como sucessão de somas parciais dos incrementos

$$\delta\xi\,(t) = \mu\,(t, \xi\,(t))\,\delta t + \sigma\,(t, \xi\,(t))\,\delta\lambda\,(t)$$

e com a mesma probabilidade.

Usualmente todas as trajectórias são S-continuas, não S-estacionárias, não S-deriváveis e de comprimento ilimitado, devido aos incrementos das trajectórias serem normalmente de ordem estrita $\sqrt{\delta t}$.

Por exemplo, a distribuição de probabilidade do passeio de Wiener é

$$\begin{aligned} \Pr\{W_t = x\} &= b\,(t, x)\,\delta x \\ &\sim \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\delta x \text{ , com } x \text{ limitado e } t \text{ apreciável.} \end{aligned}$$

O **Movimento Browniano geométrico** é definido pela equação de diferenças estocásticas

$$\begin{cases} \delta S_t = \mu S_t \delta t + \sigma S_t \delta W_t \\ S_0 = 1 \end{cases}$$

Uma trajectória $\xi\,(t)$ satisfaz

$$\delta\xi(t) = \mu\xi(t)\,\delta t \pm \sigma\xi(t)\sqrt{\delta t}$$

ou ainda, desenvolvendo

$$\begin{aligned}
\xi(t+\delta t) - \xi(t) &= \mu\xi(t)\,\delta t \pm \sigma\xi(t)\sqrt{\delta t} \Leftrightarrow \\
\boldsymbol{\xi}(t+\delta t) &= \xi(t)\left[1 + \mu\delta t \pm \sigma\sqrt{\delta t}\right]
\end{aligned}$$

logo é uma sucessão de produtos parciais

$$\xi(t) = \prod_{0 \le s < t}\left(1 + \mu\delta t \pm \sigma\sqrt{\delta t}\right)$$

o que dá

$$\xi(t) \simeq e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\lambda(t)} \qquad \text{para } t \text{ limitado.}$$

Antes de efectuarmos a verificação, notemos que:
► $\sum_{x \le \xi < y} \delta x = \delta x \sum_{x \le \xi < y} 1 = \delta x \frac{y-x}{\delta x} = y - x$
► $\sum_{0 \le \xi < 1} 1 = \frac{1}{\delta x}$
Passemos agora à verificação. Com efeito:

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= \prod_{0 \le s < t}\left(1 + \mu\delta t \pm \sigma\sqrt{\delta t}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{0 \le s < t} \log\left[1 + \mu\delta t \pm \sigma\sqrt{\delta t}\right]\right) \\
&= \exp\left(\sum_{0 \le s < t}\left(\mu\delta t \pm \sigma\sqrt{\delta t} - \frac{1}{2}\sigma^2\delta t + \varnothing\delta t\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{0 \le s < t}\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t \pm \sigma\sqrt{\delta t} + \varnothing\delta t\right]\right)
\end{aligned}$$

como $\sum_{0 \le s < t} \delta t = t$, então

$$\xi(t) = \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\lambda(t) + \varnothing t\right). \tag{8.1}$$

Exemplo 8.2. *Sejam μ, t limitados e σ apreciável. Seja $\xi(t)$ a trajectória do movimento browniano geométrico mediano, com $\delta\xi(t) = \mu\xi(t)\delta t + \sigma\xi(t)\sqrt{\delta t}$ para $\frac{t}{\delta t}$ par e $\delta\xi(t) = \mu\xi(t)\delta t - \sigma\xi(t)\sqrt{\delta t}$ para $\frac{t}{\delta t}$ impar.*

Já vimos que $\xi(t) \simeq e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}$, para t limitado.

Vamos assim começar por calcular:

***i)** $\xi(2\delta t)$;*

***ii)** $\xi(t)$ para $\frac{t}{\delta t}$ par.*

Em seguida iremos mostrar que:

***iii)** $\xi(t)$ é de classe S^0, mas não é de classe S^1;*

***iv)** $\xi(t)$ é de classe S^1se considerarmos ξ só para tempos t tal que $\frac{t}{\delta t}$ é par.*

Por fim, concluir que

***v)** $\xi(t)$ tem uma sombra e verificar a fórmula encontrada para a sombra, utilizando o teorema da Stroboscopia.*

***i)** Temos que*

$$\xi(t+\delta t) = \xi(t)\left[1 + \mu\delta t \pm \sigma\sqrt{\delta t}\right]$$

logo

$$\xi(t+\delta t) = \begin{cases} \xi(t)\left[1+\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\right] & \text{se } \frac{t}{\delta t} \text{ par} \\ \xi(t)\left[1+\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}\right] & \text{se } \frac{t}{\delta t} \text{ impar.} \end{cases}$$

Assim, para $t = 0$ vem que

$$\xi(0) = 1$$

para $t = \delta t$, temos que

$$\begin{aligned} \xi(\delta t) &= \xi(0+\delta t) = \\ &= \xi(0)\left[1+\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\right] = \\ &= 1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}. \end{aligned}$$

e para $t = 2\delta t$, tem-se que

$$\begin{aligned} \xi(2\delta t) &= \xi(\delta t + \delta t) = \\ &= \xi(\delta t)\left[1+\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}\right]. \end{aligned}$$

Substituindo $\xi(\delta t)$, *obtem-se para* $\xi(2\delta t)$:

$$\begin{aligned}
\xi(2\delta t) &= \left(1+\mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}\right)\left(1+\mu\delta t-\sigma\sqrt{\delta t}\right)\\
&= (1+\mu\delta t)^2-\sigma^2\delta t\\
&= 1+2\mu\delta t+\mu^2(\delta t)^2-\sigma\delta t\\
&= 1+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)2\delta t+\mu^2(\delta t)^2.
\end{aligned}$$

ii) *Se* $\frac{t}{\delta t}$ *é par, logo* $\xi(t)$ *irá subir* $\frac{t}{2\delta t}$ *vezes e descer* $\frac{t}{2\delta t}$ *vezes.*

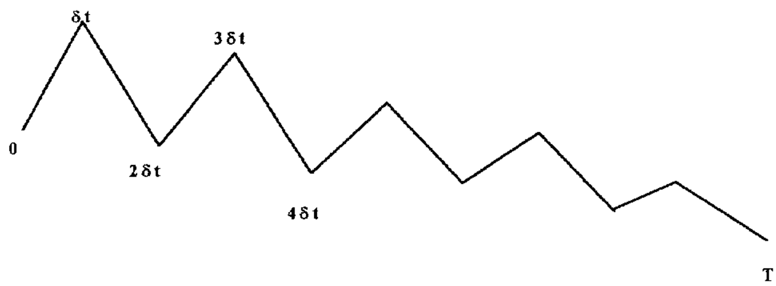


Figura 8.2: A trajectória mediana

Então multiplicando o factor $1+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)2\delta t+\mu^2(\delta t)^2$, $\frac{t}{2\delta t}$ *vezes, obtemos que:*

$$\xi(t)=\left[1+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)2\delta t+\mu^2(\delta t)^2\right]^{\frac{t}{2\delta t}}.$$

iii) *Vamos agora mostrar que:*

a) $\xi(t)$ *é limitado para todo t limitado*

e

b) $\xi(t)$ *é* S *- continua.*

a) *Por* (8.1) *temos, para qualquer t limitado, que*

$$\xi(t)\simeq e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}=e^{\pounds}=\pounds.$$

Logo $\xi(t)$ é limitado, para todo t limitado.
b) *Sejam s, t limitados tal que $s \simeq t$. Então*

$$\begin{aligned} \xi(s) &\simeq e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)s} \simeq \\ &\simeq e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t} \simeq \\ &\simeq \xi(t). \end{aligned}$$

Pela definição 3.1, podemos concluir que $\xi(t)$ é S - continua.
*Por **a)** e **b)** e pela definição 3.2 podemos concluir que $\xi(t)$ é de classe S^0. Como $\xi(t)$ é de classe S^0, podemos concluir que $\xi(t)$ tem uma sombra a qual nos é dada por*

$${}^0\xi(t) = \exp\left[\left({}^0\mu - \frac{{}^0\sigma^2}{2}\right)t\right].$$

Verifiquemos agora que $\xi(t)$ não é de classe S^1. De facto, se t fôr limitado,

$$\begin{aligned} \frac{\xi(t+\delta t)-\xi(t)}{\delta t} &= \frac{\xi(t)\left(\mu\delta t \pm \sigma\sqrt{\delta t}\right)}{\delta t} \\ &= \xi(t)\mu \pm \sigma\frac{\xi(t)}{\sqrt{\delta t}} \\ &\simeq \infty. \end{aligned}$$

iv) *Vejamos agora que $\xi(t)$ é de classe S^1 para $\frac{t}{\delta t}$ par. Para tal, temos que calcular $\frac{\xi(t+2\delta t)-\xi(t)}{2\delta t}$.*
Notemos que como μ é limitado então $\frac{\mu^2}{2}$ também é limitado, pelas regras de Leibnitz.
*Calculemos agora $\frac{\xi(t+2\delta t)-\xi(t)}{2\delta t}$, utilizando **i)**.*
Com efeito:

$$\begin{aligned} \frac{\xi(t+2\delta t)-\xi(t)}{2\delta t} &= \frac{\xi(t)\left[1+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)2\delta t+\mu^2(\delta t)^2\right]-\xi(t)}{2\delta t} \\ &= \frac{\xi(t)+\xi(t)\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)2\delta t+\mu^2(\delta t)^2\right]-\xi(t)}{2\delta t} \\ &= \xi(t)\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\xi(t).\mu^2\frac{\delta t}{2} \simeq \\ &\simeq \xi(t)\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\delta\xi(t)}{\delta(2t)} \simeq \xi(t)\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

É claro que $\xi(t)\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ *é de classe* S^0 *pelo que podemos concluir que* $\xi(t)$ *é* S^1 *para* $\frac{t}{\delta t}$ *par.*

v) Sabemos que só uma função de classe S^0 *tem uma sombra.*

Assim, **existe uma função real** $y(t)$ *que pelo teorema da Stroboscopia é diferenciável sobre os pontos pares,* **para todo** t **limitado, tal que**

i') $\xi(t) \simeq y(t)$

ii') $\frac{dy}{dt} = y(t)\left({}^0\mu - \frac{{}^0\sigma^2}{2}\right).$

Verifiquemos agora a fórmula calculada para a sombra, resolvendo a equação diferencial de variáveis separadas.

Com efeito:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{y(t)} &= \left({}^0\mu - \frac{{}^0\sigma^2}{2}\right)dt \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \ln(y(t)) - \ln(y(0)) = \left({}^0\mu - \frac{{}^0\sigma^2}{2}\right)t \\ &\Longleftrightarrow \ln\left(\frac{y(t)}{y(0)}\right) = \left({}^0\mu - \frac{{}^0\sigma^2}{2}\right)t \\ &\Longleftrightarrow \frac{y(t)}{y(0)} = e^{\left({}^0\mu - \frac{{}^0\sigma^2}{2}\right)t} \\ &\Longleftrightarrow y(t) = y(0)\,e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}. \end{aligned}$$

Por **i')***, podemos escrever que*

$$\xi(t) \simeq \xi(0)\,e^{\left({}^0\mu - \frac{{}^0\sigma^2}{2}\right)t} \simeq \xi(0)\,e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}.$$

Como $\xi(0) = 1$ *então obtemos que*

$$\xi(t) \simeq e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}.$$

Podemos assim concluir por **i), ii), iii), iv)** *e* **v)** *que a função* $\xi(t)$ *é de classe* S^0*, é de classe* S^1 *para os tempos pares e possui uma sombra diferenciável a qual nos é dada por* $\xi(0)\,e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}$.

■

No exemplo seguinte iremos calcular o comprimento de uma trajectória qualquer do passeio de Wiener e do movimento Browniano geométrico. Mostraremos ainda que o comprimento de qualquer uma destas duas trajectórias é ilimitado.

Exemplo 8.3. *Sejam $T \in \mathbb{T}$, X um processo estocástico e ξ uma trajectória de X.*
O comprimento $V(\xi)$ de ξ é definido por

$$V(\xi) = \sum_{0 \leq t < T} |\delta\xi(t)|.$$

Supomos que T é apreciável.
i) Vamos calcular o comprimento de uma trajectória qualquer do passeio de Wienner e mostrar que este é ilimitado.
ii) Consideramos o movimento browniano geométrico com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ e iremos dar uma expressão assimptótica para o comprimento da trajectória mediana ξ e deduzir que este comprimento é ilimitado.

i) Já sabemos que

$$\delta w(t) = \pm\sqrt{\delta t}.$$

Assim o comprimento é dado por

$$V(\xi) = \sum_{0 \leq t < T} \sqrt{\delta t} = \frac{T}{\delta t}.\sqrt{\delta t} = \frac{T}{\sqrt{\delta t}}.$$

É óbvio que sendo $\delta t \simeq 0$, então

$$V(\xi) = \frac{T}{\sqrt{\delta t}} \simeq +\infty.$$

Logo o comprimento é ilimitado.

ii) Consideremos agora o movimento browniano geométrico, e supomos que $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. Logo podemos escrever que

$$\xi(t) \simeq \exp\left(-\frac{t}{2}\right).$$

Calculemos então o comprimento da trajectória mediana. Utilizaremos no cálculo a aproximação pela soma de Riemann.

Com efeito:

$$\begin{aligned}
V(\xi) &= \sum_{0\leq t<T} \xi(t)\sqrt{\delta t} = \\
&= \sum_{0\leq t<T} \left(\exp\left(-\frac{t}{2}\right)+\varnothing\right)\sqrt{\delta t} = \\
&= (1+\varnothing)\sum_{0\leq t<T} \exp\left(-\frac{t}{2}\right)\frac{\delta t}{\sqrt{\delta t}} = \\
&= \frac{1+\varnothing}{\sqrt{\delta t}}\sum_{0\leq t<T} \exp\left(-\frac{t}{2}\right)\delta t = \\
&= \frac{1+\varnothing}{\sqrt{\delta t}}\int_0^T \exp\left(-\frac{t}{2}\right)dt = \\
&= \frac{1+\varnothing}{\sqrt{\delta t}}\left(-2\exp\left(-\frac{T}{2}\right)+2\right) = \\
&= -\frac{2+\varnothing}{\sqrt{\delta t}}\left(\exp\left(-\frac{T}{2}\right)-1\right).
\end{aligned}$$

Como T apreciável, temos que o seu comprimento é ilimitado. ■

9. A Equação de Calor

O passeio de Wiener, tal como outros processos (ex: movimento Browniano geométrico), é apresentado por uma superfície discreta, definida sobre o cone binomial, e satisfazendo a equação de calor discreta:

$$\frac{u(t+2\delta t,x)-u(t,x)}{2\delta t} = -\frac{1}{2}\frac{u(t,x+\delta x)-2u(t,x)+u(t,x-\delta x)}{(\delta x)^2}.$$

Consideramos um processo X, solução da equação de diferenças estocástica

$$\begin{cases} \delta X_t = \mu(t,X_t)\,\delta t + \sigma(t,X_t)\,\delta W_t \\ X_0 = c \qquad\qquad\qquad\qquad\quad c\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Um tal processo é, como o passeio de Wiener, bivalente: em cada tempo t existem exactamente duas maneiras para continuar.

Seja ξ uma trajectória de X e λ a trajectória do passeio de Wiener correspondente.

$$\begin{aligned}\delta\xi^{+}(t) &= \xi^{+}(t+\delta t)-\xi(t)\\ \delta\xi^{-}(t) &= \xi^{-}(t+\delta t)-\xi(t)\end{aligned}$$

Se $\delta\lambda(t)=+\sqrt{\delta t}$ fala-se de um movimento para cima e o valor obtido escreve-se $\xi^{+}(t+\delta t)$; se $\delta\lambda(t)=-\sqrt{\delta t}$ fala-se de um movimento para baixo e o valor obtido escreve-se $\xi^{-}(t+\delta t)$. Supondo que ξ satisfaz a seguinte propriedade do passeio de Wiener: Um movimento para cima seguido de um movimento para baixo é igual a um movimento para baixo seguido de um movimento para cima (fig 9.1)

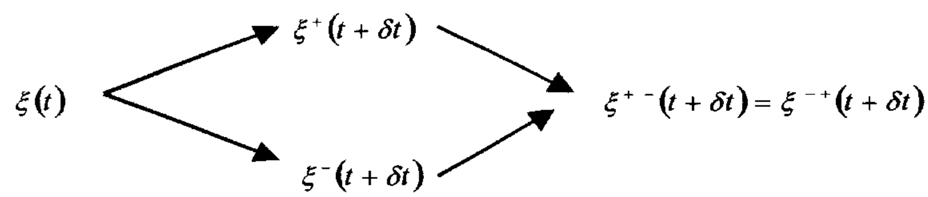


Figura 9.1: O efeito recombinado

Então ξ diz-se **Recombinado**. Duas trajectórias ξ e η de um processo recombinado tendo no tempo t o mesmo número de movimentos para cima (e à posteriori o mesmo número de movimentos para baixo) têm o mesmo valor $\xi(t)=\eta(t)$.

Definição 9.1. *Sejam* $\delta t>0$, $\delta x=2\sqrt{\delta t}$, $\Pi=\{k\delta t: k\in\mathbb{N}\}$, $\mathbb{X}=\{n\delta x: n\in\mathbb{Z}\}$. *A rede* $R_{\delta t,\delta x}$ *é definida por*

$$R_{\delta t,\delta x}=\{(t,x): t\in\Pi, x\in t+\mathbb{X}\}.$$

Seja $T\in\Pi$. *O cone binomial* $C_T\subset R_{\delta t,\delta x}$ *é definido por*

$$C_T=\left\{(t,x)\in R_{\delta t,\delta x}: t\in[0...T],\ x\in\left[-\frac{t}{\sqrt{\delta t}}...\frac{t}{\sqrt{\delta t}}\right]\right\}.$$

Nota 9.2. *O cone binomial é a reunião de todas as trajectórias do passeio de Wiener.*

Vamos primeiro introduzir a seguinte notação.

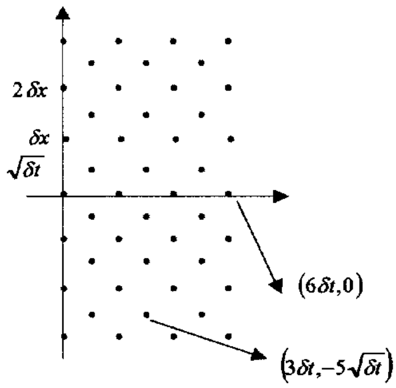


Figura 9.2: Alguns pontos da rede binomial

Notação: Seja $T \in \mathbb{T}$ e $(t,x) \in C_{[0...T]}$. Seja η um processo recombinado indexado por $[0...T]$. Denotemos por $\Lambda_{t,x}$ a colecção de toda a trajectória na qual o tempo t contêm $j_{t,x}$ passos para cima.

Note-se que se a trajectória no tempo t tem $j_{t,x}$ passos para cima, então tem $\nu_t - j_{t,x}$ passos para baixo. Por isso $\Lambda_{t,x}$ é o conjunto de todas as trajectórias nas quais no tempo t tem $j_{t,x}$ passos para cima e $\nu_t - j_{t,x}$ passos para baixo. Desde que o processo seja recombinado, todos os elementos de $\Lambda_{t,x}$ tomam algum valor no tempo t, no caso do processo de Wiener, temos $\lambda(t) = x$ para algum $\lambda \in \Lambda_{t,x}$.

De facto, sendo λ uma trajectória do passeio de Wiener indexado por $[0...T]$, em que no tempo t com $0 \leq t \leq T$, λ subiu j vezes e desceu $\nu - j$ vezes, então $\lambda(t) = j\sqrt{\delta t} + (v-j)\left(-\sqrt{\delta t}\right)$. Sejam $v = \frac{t}{\delta t}$ e $j = \frac{t}{2\delta t} + \frac{x}{\delta x}$. Obtemos assim

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= j\sqrt{\delta t} + (v-j)\left(-\sqrt{\delta t}\right) \\
&= \left(\frac{t}{2\delta t} + \frac{x}{\delta x}\right)\sqrt{\delta t} - \left(\frac{t}{\delta t} - \frac{t}{2\delta t} - \frac{x}{\delta x}\right)\sqrt{\delta t} \\
&= \sqrt{\delta t}\left(\frac{t}{2\delta t} + \frac{x}{\delta x} - \frac{t}{\delta t} + \frac{t}{2\delta t} + \frac{x}{\delta x}\right) \\
&= \frac{2x}{\delta x}\sqrt{\delta t} \\
&= \frac{x}{\sqrt{\delta t}}.\sqrt{\delta t} \\
&= x.
\end{aligned}$$

Esta observação justifica a seguinte definição.

Definição 9.3. *Seja $T \in \mathbb{T}$, e seja η um processo recombinado indexado por $[0...T]$. A* **superfície discreta** *associada a η é $\widetilde{\eta} : C_{[0...T]} \to \mathbb{R}$ definida por $\widetilde{\eta}(t,x) = \lambda(t)$ para algum $\lambda \in \Lambda_{t,x}$.*

A superfície discreta associada ao passeio de Wiener é o plano

$$\widetilde{W}(t,x) = x.$$

A superfície discreta associada ao movimento Browniano geométrico, curvada, tem a aproximação

$$\widetilde{S}(t,x) \simeq e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma x}$$

para $(t,x) \in C_T$ limitado.

Para $x = 0$ já vimos que $\widetilde{\xi}(t) \simeq e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}$. Se $x \neq 0$, representando por S o movimento Browniano geométrico, logo $\delta S_t = \mu S_t \delta t + \sigma S_t \delta w_t$. Ora S é um processo recombinado. Sendo $\widetilde{S}(t,x) = \lambda(t)$ onde $\lambda(t)$ é uma trajectória de S com o mesmo número de movimentos para cima que uma trajectória α do passeio de Wiener com $\alpha(t) = x$, t e x limitados, a trajectória λ correspondente satisfaz

$$\lambda(t) \simeq \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\alpha(t)\right).$$

Então para x limitado

$$\widetilde{S}(t,x) \simeq \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma x\right) \tag{9.1}$$

Definição 9.4. *Um processo bivalente X diz-se uma* **martingala** *se para toda a trajectória α e em todo o tempo t*

$$\alpha(t) = \frac{1}{2}\alpha^+(t+\delta t) + \frac{1}{2}\alpha^-(t+\delta t)$$

ou

$$\frac{1}{2}\delta\alpha^+(t) + \frac{1}{2}\delta\alpha^-(t) = 0.$$

Nota 9.5. *Geralmente uma solução da equação de diferenças estocásticas é uma martingala sse $\mu \equiv 0$, porque se tem sempre*

$$\frac{1}{2}\delta\alpha^+(t) + \frac{1}{2}\delta\alpha^-(t) = \mu(t,\alpha(t))\,\delta t.$$

Nota 9.6. *Seja* $(t,x) \in R_{\delta t,\delta x}$ e $f : R_{\delta t,\delta x} \to \mathbb{R}$. *Escrevemos*

1- $2\sqrt{\delta t} = \delta x$

2- $\delta_1 f(t,x) = f(t+2\delta t, x) - f(t,x)$

3- $\delta_2 f(t,x) = f(t, x+\delta x) - f(t,x)$

4- $\delta_{22} f(t,x) = f(t, x+2\delta x) - 2f(t, x+\delta x) + f(t,x)$.

Notemos, antes de passar ao próximo teorema que:

$$\xi(t,x) = \xi\left(t-\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)\left(1+\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}\right).$$

Teorema 9.7. *Seja* ξ *uma martingala bivalente recombinando. Seja* $\widetilde{\xi}$ *a superfície discreta associada a* ξ. *Então para todo o ponto* (t,x) *pertencente ao cone binomial*

$$\frac{\delta_1\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta(2t)} = -\frac{1}{2}\frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x-\delta x)}{(\delta x)^2}.$$

Demonstração:

Temos que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\xi}(t,x) &= \frac{1}{2}\widetilde{\xi}^{+}(t+\delta t,x) + \frac{1}{2}\widetilde{\xi}^{-}(t+\delta t,x)\\
&= \frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right) + \frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+\delta t, x-\sqrt{\delta t}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x+\delta x) + \frac{1}{2}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x) + \frac{1}{2}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x-\delta x)\right]\\
&= \frac{1}{4}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x+\delta x) + \frac{1}{4}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x) + \frac{1}{4}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x) + \frac{1}{4}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x-\delta x)\\
&= \frac{1}{4}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x+\delta x) + \frac{1}{2}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x) + \frac{1}{4}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x-\delta x).
\end{aligned}$$

Logo, tem-se que

$$\widetilde{\xi}(t,x) - \widetilde{\xi}(t+2\delta t, x) = \frac{1}{4}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x+\delta x) - \frac{1}{2}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x) + \frac{1}{4}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x-\delta x)$$

pelo que

$$\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x) - \widetilde{\xi}(t,x) = -\frac{1}{2}\left[\frac{\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x+\delta x) - 2\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x) + \widetilde{\xi}(t+2\delta t, x-\delta x)}{2}\right].$$

Dividindo ambos os membros por $\delta(2t) = 2\delta t$, obtem-se

$$\begin{aligned}\frac{\delta_1\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta(2t)} &= -\frac{1}{2}\frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x-\delta x)}{4\delta t}\\ &= -\frac{1}{2}\frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x-\delta x)}{(\delta x)^2}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Notemos que se $\frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t,x)}{(\delta x)^2}$ é de classe S^0 nas duas variáveis então pode-se considerar a quase equação de expressão mais simples

$$\frac{\delta_1\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta(2t)} \simeq -\frac{1}{2}\frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t,x)}{(\delta x)^2}.$$

Vejamos agora um teorema onde iremos considerar que ξ satisfaz a equação de diferenças estocásticas.

Teorema 9.8. *Seja ξ um processo recombinando satisfazendo a equação de diferenças estocásticas:*

$$\begin{aligned}\delta\xi(t,x) &= \mu\xi(t,x)\,\delta t \pm \sigma\xi(t,x)\sqrt{\delta t}\\ &= \mu(t,\xi(t))\,\delta t \pm \sigma(t,\xi(t))\sqrt{\delta t}.\end{aligned}$$

Então a superfície discreta associada satisfaz a equação

$$\frac{\delta_1\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta(2t)} = -\frac{1}{2}\frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t+2\delta t, x-\delta x)}{(\delta x)^2} - \widehat{\mu}(t,x),$$

onde

$$\widehat{\mu}(t,x) = \frac{1}{2}\widetilde{\mu}(t,x) + \frac{1}{4}\widetilde{\mu}\left(t+\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right) + \frac{1}{4}\widetilde{\mu}\left(t+\delta t, x-\sqrt{\delta t}\right)$$

é "a média de garfo".

Demonstração

Com efeito, temos que:

$$\begin{aligned}\mu(t,\xi(t))\,\delta t &= \frac{1}{2}\delta\xi^+(t) + \frac{1}{2}\delta\xi^-(t)\\ &= \frac{1}{2}\left(\xi^+(t+\delta t) - \xi(t)\right) + \frac{1}{2}\left(\xi^-(t+\delta t) - \xi(t)\right)\\ &= \frac{1}{2}\xi^+(t+\delta t) - \xi(t) + \frac{1}{2}\xi^-(t+\delta t)\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\mu\left(t,\xi\left(t\right)\right)\delta t+\xi\left(t\right) &= \frac{1}{2}\xi^{+}\left(t+\delta t\right)+\frac{1}{2}\xi^{-}\left(t+\delta t\right)\Leftrightarrow \\
\mu\left(t,\xi\left(t\right)\right)\delta t+\xi\left(t\right) &= \frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)+\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\Leftrightarrow \\
\mu\xi\left(t,x\right)\delta t+\widetilde{\xi}\left(t,x\right) &= \frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)+\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right).
\end{aligned}$$

Também, se tem:

$$\begin{aligned}
\mu\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\delta t &= \frac{1}{2}\delta\xi^{+\,-}\left(t+\delta t\right)+\frac{1}{2}\delta\xi^{+\,+}\left(t+\delta t\right)= \\
&= \frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x\right)-\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)+\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x+2\sqrt{\delta t}\right)+ \\
&\quad -\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)
\end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned}
\mu\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\delta t &= \frac{1}{2}\delta\xi^{-\,+}\left(t+\delta t\right)+\frac{1}{2}\delta\xi^{-\,-}\left(t+\delta t\right)= \\
&= \frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x\right)-\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)+\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x-2\sqrt{\delta t}\right)+ \\
&\quad -\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right).
\end{aligned}$$

Temos assim o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{l}
\mu\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\delta t=\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x\right)-\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)+\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x+2\sqrt{\delta t}\right) \\
\mu\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\delta t=\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x\right)-\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)+\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x-2\sqrt{\delta t}\right)
\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow &\left\{\begin{array}{l}
\mu\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\delta t=\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x\right)-\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)+\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x+\delta x\right) \\
\mu\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\delta t=\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x\right)-\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)+\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x-\delta x\right)
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

logo

$$\left\{\begin{array}{l}
\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)=-\mu\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\delta t+\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x\right)+\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x+\delta x\right) \\
\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)=-\mu\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\delta t+\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x\right)+\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+2\delta t,x-\delta x\right)
\end{array}\right..$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}
\mu(t,x)\,\delta t+\widetilde{\xi}(t,x) &= \frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)+\frac{1}{2}\widetilde{\xi}\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)= \\
&= -\frac{1}{2}\mu\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\delta t+\frac{1}{4}\widetilde{\xi}(t+2\delta t,x+\delta x)+\frac{1}{4}\widetilde{\xi}(t+2\delta t,x)+ \\
&\quad -\frac{1}{2}\mu\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\delta t+\frac{1}{4}\widetilde{\xi}(t+2\delta t,x-\delta x)+\frac{1}{4}\widetilde{\xi}(t+2\delta t,x) \\
&= -\frac{1}{2}\mu\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\delta t-\frac{1}{2}\mu\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\delta t+\frac{1}{2}\widetilde{\xi}(t+2\delta t,x)+ \\
&\quad +\frac{1}{4}\left[\widetilde{\xi}(t+2\delta t,x+\delta x)+\widetilde{\xi}(t+2\delta t,x-\delta x)\right]
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\widetilde{\xi}(t+2\delta t,x)-\widetilde{\xi}(t,x) &= \frac{1}{2}\mu\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\delta t+\frac{1}{2}\mu\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\delta t+\mu(t,x)\,\delta t+ \\
&\quad -\frac{1}{4}\left[\widetilde{\xi}(t+2\delta t,x+\delta x)+\widetilde{\xi}(t+2\delta t,x-\delta x)-2\widetilde{\xi}(t+2\delta t,x)\right].
\end{aligned}$$

Tendo em conta a definição anterior, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\delta_1\widetilde{\xi}(t,x) &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t+2\delta t,x-\delta x)}{2}\right]+\frac{1}{2}\mu\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\delta t+\frac{1}{2}\mu\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\delta t+ \\
&\quad +\mu(t,x)\,\delta t.
\end{aligned}$$

Dividindo por $\delta(2t)=2\delta t=\frac{(\delta x)^2}{2}$, vem

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_1\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta(2t)} &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t+2\delta t,x-\delta x)}{2\frac{(\delta x)^2}{2}}\right]+\frac{1}{4}\widetilde{\mu}\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)+\frac{1}{4}\widetilde{\mu}\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)+ \\
&\quad +\frac{1}{2}\widetilde{\mu}(t,x).
\end{aligned}$$

fazendo

$$\frac{1}{4}\widetilde{\mu}\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)+\frac{1}{4}\widetilde{\mu}\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)+\frac{1}{2}\widetilde{\mu}(t,x)=\widehat{\mu}(t,x)$$

vem que

$$\frac{\delta_1\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta(2t)}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t+2\delta t,x-\delta x)}{(\delta x)^2}\right]+\widehat{\mu}(t,x). \qquad \blacksquare$$

Por fim, vamos enunciar e demonstrar um teorema, o qual tem a ver com a equação de calor sobre a rede $\mathbf{R}_{\delta t,\delta x}$ com valor final dado.

Consideremos a Equação de Calor sobre a rede $\mathbf{R}_{\delta t,\delta x}$ com valor final, sendo prescrito

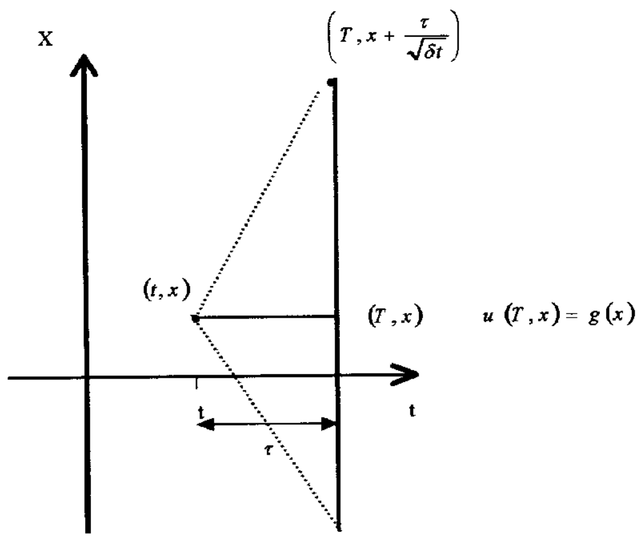


Figura 9.3: O valor final é determinado pelo triângulo de trajectórias extremas

$$\begin{cases} \frac{\delta_1 u(t,x)}{\delta(2t)} = -\frac{1}{2}\frac{\delta_{22} u(t+2\delta t, x-\delta x)}{(\delta x)^2} \\ u\,(T,x) = g\,(x)\ , \qquad g : \mathbb{X} \to \mathbb{R} \end{cases} \tag{9.2}$$

Para simplificar, iremos escrever τ em vez de $T-t$, com t, $T \in \Pi$ e $t < T$.

Teorema 9.9. *A solução de* (9.2) *interpreta-se como uma martingala recombinando. Além disso, para todo* t, x, *com* $t \leq T$ e $(t,x) \in R_{\delta t, \delta x}$, *tem-se*

$$u\,(T-\tau, x) = \sum_{|y| \leq \frac{\tau}{\sqrt{\delta t}}} b\,(\tau, y)\, g\,(x+y)\, \delta x. \tag{9.3}$$

Notemos que se a demonstração do teorema 9.9, fôr lida no sentido inverso, obtem-se para cada $(t,x) \in \mathbf{R}_{\delta t, \delta x}$, tal que $\frac{\tau}{\delta t}$ é par

$$\begin{cases} u\,(t,x) = \frac{1}{4}u\,(t+2\delta t, x+\delta x) + \frac{1}{2}u\,(t+2\delta t, x) + \frac{1}{4}u\,(t+2\delta t, x+\delta x) \\ u\,(T,x) = g\,(x)\,. \end{cases}$$

Se $\frac{\tau}{\delta t}$ é impar, definimos $u\,(t,x)$ sempre do mesmo modo formal por

$$u\,(t,x) = \frac{1}{2}u\left(t+\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right) + \frac{1}{2}u\left(t+\delta t, x-\sqrt{\delta t}\right).$$

Esta igualdade mostra que $u\,(t,x)$ representa a superfície discreta de uma martingala.

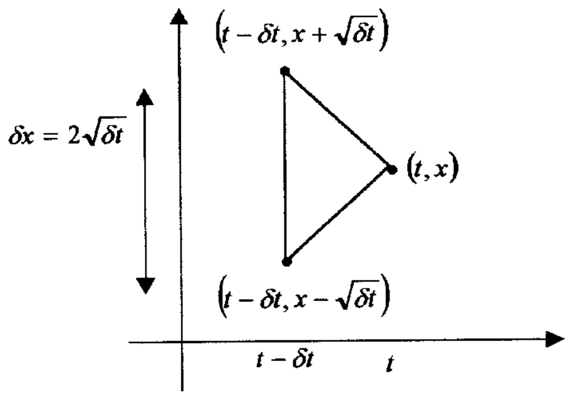


Figura 9.4: O triângulo de Pascal, traduzido na propriedade de martingala

Passemos agora à demonstração da fórmula (9.3) a qual se mostra com indução retrograda, utilizando a propriedade do triângulo de Pascal

$$B(n,j) = \frac{1}{2}B(n-1,j-1) + \frac{1}{2}B(n-1,j),$$

e a qual se traduz na propriedade de martingala da função $b(t,x)$, por

$$b(t,x) = \frac{1}{2}b\left(t+\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right) + \frac{1}{2}b\left(t+\delta t, x-\sqrt{\delta t}\right).$$

Demonstração:
Supondo que por hipótese de indução, se tem para todo o x

$$u(T-\tau,x) = \sum_{|y|\leq\frac{\tau}{\sqrt{\delta t}}} b(\tau,y)\, g(x+y)\,\delta x.$$

Assim, para qualquer x

$$\begin{aligned} u(T-\tau-\delta t,x) &= \frac{1}{2}u\left(T-\tau,x+\sqrt{\delta t}\right) + \frac{1}{2}u\left(T-\tau,x-\sqrt{\delta t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{|y|\leq\frac{\tau}{\sqrt{\delta t}}} b(\tau,y)\, g\left(x+\sqrt{\delta t}+y\right)\delta x + \frac{1}{2}\sum_{|y|\leq\frac{\tau}{\sqrt{\delta t}}} b(\tau,y)\, g\left(x-\sqrt{\delta t}+y\right)\delta x. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y+\sqrt{\delta t}=z$, obtem-se

$$\begin{aligned} u(T-\tau-\delta t,x) &= \frac{1}{2}\sum_{-\frac{\tau}{\sqrt{\delta t}}+\sqrt{\delta t}\leq z\leq\frac{\tau}{\sqrt{\delta t}}+\sqrt{\delta t}} b\left(\tau,z-\sqrt{\delta t}\right) g(x+z)\,\delta x + \\ &+\frac{1}{2}\sum_{-\frac{\tau}{\sqrt{\delta t}}-\sqrt{\delta t}\leq z\leq\frac{\tau}{\sqrt{\delta t}}-\sqrt{\delta t}} b\left(\tau,z+\sqrt{\delta t}\right) g(x+z)\,\delta x. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2}b\left(\tau, z-\sqrt{\delta t}\right)+\frac{1}{2}b\left(\tau, z+\sqrt{\delta t}\right)=b\left(\tau+\delta t, z\right)$, vem que

$$u\left(T-\tau-\delta t, x\right)=\sum_{|z|\leq\frac{\tau}{\sqrt{\delta t}}+\sqrt{\delta t}} b\left(\tau+\delta t, z\right) g\left(x+z\right)\delta x,$$

o que mostra a fórmula (9.3), por indução. ■

Finalmente, iremos escrever $u\left(t,x\right)$ como uma esperança sobre as trajectórias de uma martingala.

Com efeito,

$$\begin{aligned} u\left(t,x\right) &= \sum_{|y|\leq\frac{\tau}{\sqrt{\delta t}}} b\left(\tau, y\right)\delta x g\left(x+y\right) \\ &= \sum_{|y|\leq\frac{\tau}{\sqrt{\delta t}}} \Pr\left\{\omega_\tau=y\right\}.g\left(x+y\right) \\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda_\tau} g\left(x+\lambda\left(\tau\right)\right)\Pr\left(\lambda\right). \end{aligned}$$

onde Λ_τ é o conjunto de todas as trajectórias do passeio de Wiener indexado pelo quase intervalo $[0...\tau]$.

Capítulo V
Trajectórias de Superfícies Discretas

10. Trajectórias de Superfícies Discretas

Neste capítulo iremos falar sobre trajectórias de superfícies discretas associadas a processos estocásticos com passos infinitésimais.

Encontraremos aqui os resultados principais deste trabalho. É neste capítulo que iremos ver como calcular o valor final de uma trajectória qualquer.

Veremos como esse valor pode ser calculado, fazendo primeiro uma trajectória horizontal e depois um caminho vertical.

Antes de enunciarmos e demonstrarmos os teoremas principais, iremos enunciar e demonstrar dois teoremas preliminares.

A necessidade destes teoremas, é devida a duas aproximações com ordem de restos diferentes, as quais irão ser efectuadas utilizando o teorema de Taylor para duas variáveis.

Vejamos então os teoremas de Taylor para duas variáveis. Iremos começar pelo teorema de Taylor para duas variáveis até a ordem do resto ser $\varnothing\delta t$.

Teorema 10.1. *Seja f_1' de classe S^{00}, f_{22}'' de classe S^{00} em x e f_2' de classe S^{00}. Então*

$$f\left(\delta t, \sqrt{\delta t}\right) = f(0,0) + \sqrt{\delta t} f_2'(0,0) + \delta t\left(f_1'(0,0) + \frac{1}{2} f_{22}''(0,0)\right) + \varnothing\delta t. \tag{10.1}$$

Demonstração:
Temos então que:

$$\begin{aligned} f\left(\delta t, \sqrt{\delta t}\right) - f(0,0) &= f\left(\delta t, \sqrt{\delta t}\right) - f\left(0, \sqrt{\delta t}\right) + f\left(0, \sqrt{\delta t}\right) - f(0,0) \\ &= \delta t f_1'\left(0, \sqrt{\delta t}\right) + \varnothing\delta t + \sqrt{\delta t} f_2'(0,0) + \frac{\delta t}{2} f_{22}''(0,0) + \varnothing\delta t \\ &= \delta t\left(f_1'(0,0) + \varnothing\right) + \sqrt{\delta t} f_2'(0,0) + \frac{\delta t}{2} f_{22}''(0,0) + \varnothing\delta t \end{aligned}$$

pois f_1' é de classe S^{00}, logo é S-continua.
Portanto

$$f\left(\delta t, \sqrt{\delta t}\right) = f(0,0) + \sqrt{\delta t} f_2'(0,0) + \delta t\left(f_1'(0,0) + \frac{1}{2} f_{22}''(0,0)\right) + \varnothing\delta t. \quad \blacksquare$$

Fica assim demonstrado o teorema de Taylor para duas variáveis até a ordem do resto ser $\varnothing\delta t$.

Nos livros clássicos de cálculo estocástico são introduzidos os cálculos de Ito, onde encontramos a conhecida Fórmula de Ito. Esta fórmula também pode ser encontrada numa forma não standard em [2], no capítulo 4, o qual está consagrado a Eric Benoit. A menos de uma translacção para zero, a fórmula de Ito é semelhante à fórmula 10.1, pelo que passamos a enunciar a conhecida fórmula. No entanto, antes de enunciarmos o teorema que diz respeito à Fórmula de Ito, iremos escrever a equação diferencial estocástica com que iremos trabalhar.

Seja a equação diferencial estocástica

$$dx_t = b(x_t, t)\,dt \pm s(x_t, t)\sqrt{dt}.$$

Fazendo a mudança de variável dada por $y = \varphi(x,t)$, $x = \psi(y,t)$ onde φ e ψ são funções standard C^∞, obtemos a equação diferencial estocástica equivalente

$$dy_t = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} b + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} s^2\right) dt \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} s\sqrt{dt} + \oslash dt$$

onde as derivadas de φ são avaliadas a partir do ponto $(x_t, t) = (\psi(y_t, t), t)$.

A demonstração apresentada na página 83 de [2] adapta-se ao nosso caso sem qualquer modificação porque φ_1', φ_{22}'', φ_2' são todas de classe S^{00}.

Passemos agora a enunciar a Fórmula de Ito.

Proposição 10.2. *(Fórmula de Ito, não standard)*
Seja $b(x,t)$ uma função standard C^∞. Seja B uma função definida pelo integral

$$B(x,t) = \int_0^x b(\xi, t)\,dt.$$

Seja λ uma trajectória do passeio de Wiener. Temos:

$$B(\lambda_T, T) \simeq \sum_{t=0}^{T-dt} b(\lambda, t)\,d\lambda + \int_0^T \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\right) dt.$$

Notemos que $d\lambda^2 = dt$.

Compare-se com o Teorema da Fórmula de Ito como aparece nos livros clássicos de processos estocásticos.

Teorema 10.3. *Seja X_t um processo de Ito dado por*

$$dX_t = udt + vdB_t.$$

Seja $g(t,X) \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$, (isto é, g é continua, duas vezes diferenciável e com derivadas continuas em $[0,\infty) \times \mathbb{R}$).

Então $y_t = g(t, X_t)$ é um processo de Ito e

$$dy_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)\,dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)\,(dX_t)^2$$

de acordo com as regras

$$\begin{aligned} dt.dt &= dt.dB_t = dB_t.dt = 0 \\ dB_t.dB_t &= dt. \end{aligned}$$

Se substituirmos a fórmula diferencial em dy_t e usando as regras estabelecidas obtemos a expressão equivalente

$$\begin{aligned} g(t, X_t) &= g(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + u_s \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} v_s^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) \right) ds + \\ &+ \int_0^t v_s . \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)\, dB_s \end{aligned}$$

onde $u_s = u(s, \omega)$ e $v_s = v(s, \omega)$.

Não apresentaremos a demonstração do teorema da Fórmula de Ito, pois estariamos a fugir do pretendido. No entanto pensamos que seja curioso consultar as demonstrações quer ao nível da Matemática clássica, a qual pode ser encontrada por exemplo no livro "Stochastic Differential Equations; An Introduction whith applications", cujo autor é Bernt Oksendal; quer ao nível da Análise Não Standard, a qual pode ser encontrada em [2], capítulo 4, e verificarmos como ao nível da Análise Não Standard a demonstração se torna muito mais acessível.

Enunciaremos e demonstremos em seguida o teorema de Taylor para duas variáveis, mas agora até a ordem do resto ser $\pounds\delta t^2 = \varnothing\delta t\sqrt{\delta t}$, visto que $\pounds\delta t = \varnothing\sqrt{\delta t}$.

Teorema 10.4. *Seja f_1' de classe S^{10}, f_{12}'' de classe S^{01}, f_2' de classe S^{00}, f_{22}'' de classe S^{01} em x e f_{222}''' de classe S^{01}. Então*

$$\begin{aligned} f\left(\delta t, \sqrt{\delta t}\right) &= f(0,0) + \sqrt{\delta t} f_2'(0,0) + \delta t \left(f_1'(0,0) + \frac{1}{2} f_{22}''(0,0) \right) + \delta t \sqrt{\delta t} \left(f_{12}''(0,0) + \frac{1}{6} f_{222}'''(0,0) \right) \\ &+ \pounds\delta t^2. \end{aligned}$$

Demonstração:
Temos que:

$$\begin{aligned} f\left(\delta t, \sqrt{\delta t}\right) - f(0,0) &= f\left(\delta t, \sqrt{\delta t}\right) - f\left(0, \sqrt{\delta t}\right) + f\left(0, \sqrt{\delta t}\right) - f(0,0) \\ &= \delta t f_1'\left(0, \sqrt{\delta t}\right) + \pounds\delta t^2 + \sqrt{\delta t} f_2'(0,0) + \frac{\delta t}{2} f_{22}''(0,0) + \frac{\delta t^{\frac{3}{2}}}{6} f_{222}'''(0,0) + \pounds\delta t^2 \end{aligned}$$

Como f_1' é de classe S^{10} então

$$\begin{aligned}
f\left(\delta t,\sqrt{\delta t}\right)-f(0,0) &= \delta t\left(f_1'\left(0,\sqrt{\delta t}\right)-f_1'(0,0)+f_1'(0,0)\right)+\sqrt{\delta t}f_2'(0,0)+\frac{\delta t}{2}f_{22}''(0,0)+\\
&+\frac{\delta t^{\frac{3}{2}}}{6}f_{222}'''(0,0)+\pounds\delta t^2\\
&= \delta t f_1'(0,0)+\delta t\left(\sqrt{\delta t}f_{12}''(0,0)+\pounds\delta t\right)+\sqrt{\delta t}f_2'(0,0)+\frac{\delta t}{2}f_{22}''(0,0)+\\
&+\frac{\delta t^{\frac{3}{2}}}{6}f_{222}'''(0,0)+\pounds\delta t^2\\
&= \delta t f_1'(0,0)+\delta t\sqrt{\delta t}f_{12}''(0,0)+\pounds\delta t^2+\sqrt{\delta t}f_2'(0,0)+\frac{\delta t}{2}f_{22}''(0,0)+\\
&+\frac{\delta t^{\frac{3}{2}}}{6}f_{222}'''(0,0)+\pounds\delta t^2\\
&= \sqrt{\delta t}f_2'(0,0)+\delta t\left(f_1'(0,0)+\frac{1}{2}f_{22}''(0,0)\right)+\delta t\sqrt{\delta t}\left(f_{12}''(0,0)+\frac{1}{6}f_{222}'''(0,0)\right)+\\
&+\pounds\delta t^2.
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
f\left(\delta t,\sqrt{\delta t}\right) &= f(0,0)+\sqrt{\delta t}f_2'(0,0)+\delta t\left(f_1'(0,0)+\frac{1}{2}f_{22}''(0,0)\right)+\delta t\sqrt{\delta t}\left(f_{12}''(0,0)+\frac{1}{6}f_{222}'''(0,0)\right)+\\
&+\pounds\delta t^2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Neste momento, já temos tudo o que é necessário, definido para podermos enunciar e demonstrar os teoremas principais.

Comecemos por dar a definição de **Trajectória alternada**.

Definição 10.5. *(Trajectória alternada)*
Seja λ uma trajectória de um processo X. Sejam a, $b \in \mathbb{R}$. λ diz-se uma ***trajectória alternada*** *sobre o intervalo $[a...b]$, se sobre este intervalo, cada movimento para cima é seguido por um movimento para baixo, e cada movimento para baixo é seguido por um movimento para cima.*

Um exemplo de uma trajectória alternada é a trajectória mediana.

Antes de definirmos a noção de caminho vertical, tentaremos explicar o seu sentido. Num caminho vertical existirão movimentos num único intervalo de tempo $[b-\delta t...b]$ com $b \in \mathbb{R}$. No entanto considerando sempre que o primeiro movimento é para a esquerda este realiza-se como se o tempo "recuasse", isto é, começamos no ponto $(b,0)$ e daremos um passo na "vertical" de $\sqrt{\delta t}$ ficando assim no ponto $\left(b-\delta t,\sqrt{\delta t}\right)$. No segundo movimento efectuar-se-á no intervalo $[b-\delta t...b]$ e daremos um passo novamente na "vertical" de $\sqrt{\delta t}$ ficando assim no ponto $(b,\delta x)$.

Assim, no movimento **n** se **n** fôr impar iremos para o ponto $\left(b - \delta t, n\sqrt{\delta t}\right)$ se **n** fôr par iremos para o ponto $\left(b, \frac{n}{2}\delta x\right)$. Podemos afirmar portanto, que o caminho não será uma trajectória do processo.

Definição 10.6. *ξ diz-se um* **caminho vertical** *sobre o intervalo $[a...b]$, se sobre este intervalo, cada movimento para a esquerda é seguido por um movimento para a direita, e cada movimento para a direita é seguido por um movimento para a esquerda.*

Como já tinhamos dito, o nosso objectivo é determinar o valor final de uma trajectória qualquer. Esse valor será calculado percorrendo primeiro uma trajectória horizontal e depois um caminho vertical.

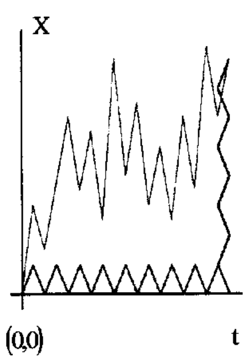


Figura 10.1:

Comecemos pela trajectória horizontal a qual é uma trajectória alternada.
Vamos então enunciar o teorema.

Teorema 10.7. *Seja X um processo recombinando, satisfazendo a equação de diferenças estocásticas*

$$\delta X_t = \mu\left(t, X_t\right)\delta t \pm \sigma\left(t, X_t\right)\sqrt{\delta t}.$$

Suponhamos que μ é de classe S^{00}, t é limitado, σ é de classe $C^1 \cap S^{11}$, e X é uma trajectória limitada que tem um movimento superior no tempo t e um movimento inferior no tempo $t + \delta t$.
Então

$$\frac{X\left(t+2\delta t\right) - X\left(t\right)}{2\delta t} \simeq \mu\left(t, X\left(t\right)\right) - \frac{1}{2}\sigma\left(t, X\left(t\right)\right)\frac{\partial\sigma\left(t, X\left(t\right)\right)}{\partial X\left(t\right)}.$$

Vamos agora passar à demonstração do teorema, a qual se vai iniciar com o cálculo de $X\left(t+2\delta t\right) - X\left(t\right)$, utilizando o facto de X satisfazer a equação de diferenças estocásticas.

Após este cálculo, teremos que fazer dois cálculos auxiliares, um para μ e outro para σ, até a ordem do resto ser $\varnothing\delta t$. Depois irá bastar substituir as aproximações encontradas para μ e σ no resultado obtido para $X(t+2\delta t) - X(t)$ para chegarmos ao resultado pretendido.

Demonstração:
Sem perda de generalidade, vamos supor que o primeiro movimento é para cima.
Comecemos por calcular $X(t+2\delta t)$.
De facto, como X satisfaz a equação de diferenças estocásticas, então

$$X(t+\delta t) = X(t) + \mu(t, X(t))\,\delta t + \sigma(t, X(t))\sqrt{\delta t}.$$

Portanto

$$X(t+2\delta t) = X(t+\delta t+\delta t) = X(t+\delta t) + \mu(t+\delta t, X(t+\delta t))\,\delta t - \sigma(t+\delta t, X(t+\delta t))\sqrt{\delta t}.$$

Então:

$$\begin{aligned} X(t+2\delta t) - X(t) &= [\mu(t, X(t)) + \mu(t+\delta t, X(t+\delta t))]\,\delta t + \\ &\quad - [\sigma(t+\delta t, X(t+\delta t)) - \sigma(t, X(t))]\sqrt{\delta t}. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Precisamos assim de fazer dois cálculos auxiliares um para μ e outro para σ, para obter um erro de ordem $\varnothing\delta t$. No entanto, como σ é um dos coeficientes de $\sqrt{\delta t}$ temos que fazer para este o desenvolvimento de Taylor até a ordem do resto ser $\varnothing\sqrt{\delta t}$.

i) Comecemos pelo cálculo de $\mu(t+\delta t, X(t+\delta t))$.
Como por hipótese μ é S^0, logo

$$\begin{aligned} \mu(t+\delta t, X(t+\delta t)) &= \mu(t+\emptyset, X(t+\emptyset)) \\ &= \mu(t+\emptyset, X(t)+\emptyset) \\ &= \mu(t, X(t)) + \emptyset. \end{aligned}$$

Assim sendo em (10.2) o coeficiente de δt satisfaz:

$$[\mu(t, X(t)) + \mu(t+\delta t, X(t+\delta t))]\,\delta t = \mu(t, X(t)).2\delta t + \emptyset\delta t. \tag{10.3}$$

ii) Passemos então ao cálculo para $\sigma(t+\delta t, X(t+\delta t))$, fazendo o seu desenvolvimento de Taylor até a ordem do resto ser $\varnothing\sqrt{\delta t}$.

Ora,

$$\begin{aligned}
\sigma\left(t+\delta t, X\left(t+\delta t\right)\right) &= \sigma\left(t+\delta t, X\left(t\right)+\mu\left(t, X\left(t\right)\right)\delta t+\sigma\left(t, X\left(t\right)\right)\sqrt{\delta t}\right)= \\
&= \sigma\left(t, X\left(t\right)+\mu\left(t, X\left(t\right)\right)\delta t+\sigma\left(t, X\left(t\right)\right)\sqrt{\delta t}\right)+ \\
&\quad +\delta t\frac{\partial\sigma}{\partial t}\left(t, X\left(t\right)+\mu\left(t, X\left(t\right)\right)\delta t+\sigma\left(t, X\left(t\right)\right)\sqrt{\delta t}\right)+\emptyset\delta t= \\
&= \sigma\left(t, X\left(t\right)\right)+\left(\mu\left(t, X\left(t\right)\right)\delta t+\sigma\left(t, X\left(t\right)\right)\sqrt{\delta t}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial X}\left(t, X\left(t\right)\right)+\varnothing\sqrt{\delta t}+ \\
&\quad +\delta t\frac{\partial\sigma}{\partial t}\left(t, X\left(t\right)+\mu\left(t, X\left(t\right)\right)\delta t+\sigma\left(t, X\left(t\right)\right)\sqrt{\delta t}\right)+\varnothing\delta t.
\end{aligned}$$

Como σ é S^1 em t e X, tem-se que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}\left(t, X\left(t\right)+\mu\left(t, X\left(t\right)\right)\delta t+\sigma\left(t, X\left(t\right)\right)\sqrt{\delta t}\right)=\pounds$$

e

$$\frac{\partial\sigma}{\partial X}\left(t, X\left(t\right)\right)=\pounds.$$

Assim sendo, temos que

$$\sigma\left(t+\delta t, X\left(t+\delta t\right)\right)=\sigma\left(t, X\left(t\right)\right)+\sigma\left(t, X\left(t\right)\right)\frac{\partial\sigma}{\partial X}\left(t, X\left(t\right)\right)\sqrt{\delta t}+\varnothing\sqrt{\delta t}+\pounds\delta t+\emptyset\delta t.$$

Logo

$$\sigma\left(t+\delta t, X\left(t+\delta t\right)\right)=\sigma\left(t, X\left(t\right)\right)+\sigma\left(t, X\left(t\right)\right)\frac{\partial\sigma}{\partial X}\left(t, X\left(t\right)\right)\sqrt{\delta t}+\varnothing\sqrt{\delta t}.$$

Consequentemente

$$\left[\sigma\left(t+\delta t, X\left(t+\delta t\right)\right)-\sigma\left(t, X\left(t\right)\right)\right]\sqrt{\delta t}=\frac{1}{2}\sigma\left(t, X\left(t\right)\right)\frac{\partial\sigma}{\partial X}\left(t, X\left(t\right)\right)2\delta t+\emptyset\delta t. \qquad (10.4)$$

Assim, substintuindo (10.3) e (10.4) em (10.2) vem:

$$X(t+2\delta t)-X(t)=\mu(t,X(t))\,2\delta t+\varnothing\delta t-\frac{1}{2}\sigma(t,X(t))\,\frac{\partial\sigma}{\partial X}(t,X(t))\,2\delta t+\emptyset\delta t.$$

Pelo que:

$$\frac{X(t+2\delta t)-X(t)}{2\delta t}=\mu(t,X(t))-\frac{1}{2}\sigma(t,X(t))\,\frac{\partial\sigma}{\partial X}(t,X(t))+\emptyset$$

ou

$$\frac{X(t+2\delta t)-X(t)}{2\delta t}\simeq\mu(t,X(t))-\frac{1}{2}\sigma(t,X(t))\,\frac{\partial\sigma}{\partial X}(t,X(t)).\quad\blacksquare$$

Vamos agora enunciar outro teorema onde estendemos o teorema anterior a funções contínuas, através da existência de uma sombra de X.

Teorema 10.8. *Seja X um processo recombinando, satisfazendo a equação de diferenças estocásticas*

$$\delta X_t=\mu(t,X_t)\,\delta t\pm\sigma(t,X_t)\sqrt{\delta t}.$$

Sejam a, b limitados tal que $a<b$. Suponhamos que μ é de classe S^{00}, σ é de classe $C^1\cap S^{11}$ e que t é limitado. Seja X uma trajectória alternada limitada sobre um intervalo $[a...b]$. Então X tem uma sombra ${}^0X$, de classe C^1, tal que para todo $t\in({}^0a,{}^0b)$ se tem

$$\frac{d\,{}^0X}{dt}={}^0\mu\left(t,{}^0X\right)-\frac{1}{2}\,{}^0\sigma\left(t,{}^0X\right)\frac{\partial\,{}^0\sigma\left(t,{}^0X\right)}{\partial\,{}^0X}.$$

<u>Demonstração</u>:
Seja $t\in[a...b;2\delta t]$.
Note-se que $X(t+\delta t)\simeq X(t)$.
Temos do teorema anterior que

$$\frac{X(t+2\delta t)-X(t)}{2\delta t}\simeq\mu(t,X(t))-\frac{1}{2}\sigma(t,X(t))\,\frac{\partial\sigma}{\partial X}(t,X(t)).$$

Comecemos por ver se $\frac{\delta X(t)}{\delta(2t)}$ é S^0.

Ora $\mu(t,X(t))$, $\sigma(t,X(t))$, $\frac{\partial\sigma}{\partial X}(t,X(t))$ são funções limitadas e S-continuas, pois são funções standard continuas. Logo, pelo **Teorema 1.1.1** $\mu(t,X(t))-\frac{1}{2}\sigma(t,X(t))\frac{\partial\sigma}{\partial X}$ é S^0.

Assim sendo, podemos concluir que $\frac{\delta X(t)}{\delta(2t)}$ é de classe S^0.

São assim verificadas as condições do **teorema da Stroboscopia**, pelo que podemos afirmar que existe uma função ${}^0X$ continua, sombra de X e que verifica sobre o intervalo $[{}^0a,{}^0b]$

$$\frac{d\,{}^0X}{dt} = {}^0\mu\left(t,{}^0X\right) - \frac{1}{2}\,{}^0\sigma\left(t,{}^0X\right)\frac{\partial\,{}^0\sigma\left(t,{}^0X\right)}{\partial\,{}^0X}. \quad \blacksquare$$

Vamos agora estabelecer uma equação de diferenças para um caminho vertical de um processo recombinado.

Teorema 10.9. *Seja X um processo recombinado satisfazendo a equação de diferenças estocásticas*

$$\delta X(t) = \mu(t, X_t)\,\delta t \pm \sigma(t, X_t)\sqrt{\delta t}.$$

Suponhamos que μ é de classe S^0, t é limitado, σ é de classe $C^1 \cap S^1$, e X é um caminho limitado que tem um movimento para a esquerda no tempo t e um movimento para a direita no tempo $t + \delta t$.

Seja $\widetilde{X}$ a superfície discreta associada.

Então

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{X}(t, x+\delta x) - \widetilde{X}(t,x)}{\delta x} &= \sigma\left(t-\delta t, \widetilde{X}\left(t-\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)\right) \\ &\simeq \sigma\left(t, \widetilde{X}(t,x)\right).\end{aligned}$$

Passemos então à demonstração do teorema. Vamos iniciá-la começando por calcular $\widetilde{X}(t, x+\delta x) - \widetilde{X}(t,x)$, tendo em conta que X é um processo recombinado. O resultado pretendido vai ser imediato, tendo em conta que σ é de classe $C^1 \cap S^1$, e portanto

$$\sigma\left(t-\delta t, \widetilde{X}\left(t-\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)\right) \simeq \sigma\left(t, \widetilde{X}\left(t-\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)\right) \simeq \sigma\left(t, \widetilde{X}(t,x)\right).$$

<u>**Demonstração**</u>:

Comecemos por calcular $\widetilde{X}(t, x+\delta x)$ e $\widetilde{X}(t,x)$ em termos de $\widetilde{X}\left(t-\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)$.

Ora, como X satisfaz a equação de diferenças estocásticas, tem-se:

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(t, x+\delta x) &= \widetilde{X}\left(t-\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right) + \mu\left(t-\delta t, \widetilde{X}\left(t-\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)\right)\delta t + \\ &\quad +\sigma\left(t-\delta t, \widetilde{X}\left(t-\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)\right)\sqrt{\delta t}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(t,x) &= \widetilde{X}\left(t-\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right) + \mu\left(t-\delta t, \widetilde{X}\left(t-\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)\right)\delta t + \\ &\quad -\sigma\left(t-\delta t, \widetilde{X}\left(t-\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)\right)\sqrt{\delta t}.\end{aligned}$$

Logo

$$\widetilde{X}(t,x+\delta x)-\widetilde{X}(t,x)=2\sigma\left(t-\delta t,\widetilde{X}\left(t-\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\right)\sqrt{\delta t}.$$

Então

$$\frac{\widetilde{X}(t,x+\delta x)-\widetilde{X}(t,x)}{2\sqrt{\delta t}}=\sigma\left(t-\delta t,\widetilde{X}\left(t-\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\right).$$

Ou seja, tendo em conta que σ é de classe $C^1\cap S^1$

$$\frac{\widetilde{X}(t,x+\delta x)-\widetilde{X}(t,x)}{\delta x}\simeq\sigma\left(t,\widetilde{X}(t,x)\right). \quad \blacksquare$$

De seguida enunciaremos e demonstremos outro teorema onde estendemos este último teorema a funções contínuas, através da existência de uma sombra de $\widetilde{X}$.

Teorema 10.10. *Seja X um processo recombinado satisfazendo a equação de diferenças estocásticas*

$$\delta X(t)=\mu(t,X_t)\,\delta t\pm\sigma(t,X_t)\sqrt{\delta t}.$$

Sejam a, b limitados tal que $a<b$. Suponhamos que μ é de classe S^0, σ é de classe $C^1\cap S^1$, t é limitado e X é um caminho limitado sobre um intervalo $[a...b]$ que tem um movimento para a esquerda no tempo t e um movimento para a direita no tempo $t+\delta t$.

Seja $\widetilde{X}$ a superfície discreta associada.

Então $\widetilde{X}$ tem uma sombra ${}^0\widetilde{X}$, de classe C^1, tal que para todo $t\in({}^0a,{}^0b)$ se tem

$$\frac{d\,{}^0\widetilde{X}}{dx}={}^0\sigma\left(t,{}^0\widetilde{X}(t,x)\right).$$

Demonstração:

Seja $t\in[a...b;2\delta t]$.

Temos do teorema anterior que

$$\frac{\widetilde{X}(t,x+\delta x)-\widetilde{X}(t,x)}{\delta x}\simeq\sigma\left(t,\widetilde{X}(t,x)\right).$$

Temos que $\sigma\left(t,\widetilde{X}(t,x)\right)$ é uma função limitada e S-continua, pois é uma função standard continua.

Assim, podemos concluir que $\frac{\delta\widetilde{X}(t,x)}{\delta x}$ é de classe S^0.

Sendo assim, verificam-se as condições do **teorema da Stroboscopia**, pelo que podemos afirmar que existe uma função ${}^0\widetilde{X}$ continua, sombra de $\widetilde{X}$ e que verifica sobre o intervalo $[{}^0a,{}^0b]$

$$\frac{d^0\widetilde{X}}{dx} = {}^0\sigma\left(t, {}^0\widetilde{X}(t,x)\right). \quad \blacksquare$$

Afim de ilucidar melhor, vamos ver dois exemplos de superfícies discretas. O primeiro exemplo será o da trajectória do passeio de wiener, o qual é trivial, e o segundo será o do movimento Browniano geométrico, o qual irá exigir mais cálculos.

Exemplo 10.11. *Seja então λ a trajectória do passeio de Wiener, tal que quando $\delta\lambda(t) = \sqrt{\delta t}$ se fala de um movimento para cima e quando $\delta\lambda(t) = -\sqrt{\delta t}$ se fala de um movimento para baixo.*

Seja t limitado. Queremos então verificar que:

$$\text{i)}\ \frac{\lambda(t+2\delta t) - \lambda(t)}{2\delta t} = 0$$

e que

$$\text{ii)}\ \frac{\widetilde{w}(t, x+\delta x) - \widetilde{w}(t,x)}{\delta x} = 1,$$

onde $\widetilde{w}(t,x)$ é a superfície discreta associada ao passeio de wiener.
Comecemos por **i)**.
Supondo, sem perda de generalidade, que o primeiro movimento é para cima. Então

$$\lambda(t+\delta t) = \lambda(t) + \sqrt{\delta t},$$

e por conseguinte no passo seguinte tem-se

$$\lambda(t+2\delta t) = \lambda(t+\delta t) - \sqrt{\delta t} = \lambda(t).$$

Assim, é obvio que

$$\frac{\lambda(t+2\delta t) - \lambda(t)}{2\delta t} = 0.$$

Resolvendo a equação de diferenças, obtemos que

$$w(t,0) = 0.$$

Passemos agora a **ii)**.

Comecemos por verificar que

$$\widetilde{w}(t,x+\delta x)-\widetilde{w}(t,x)=\delta x.$$

Ora

$$\begin{aligned}\widetilde{w}(t,x+\delta x)-\widetilde{w}(t,x) &= \sqrt{\delta t}-\left(-\sqrt{\delta t}\right)= \\ &= 2\sqrt{\delta t}= \\ &= \delta x.\end{aligned}$$

E por conseguinte

$$\frac{\widetilde{w}(t,x+\delta x)-\widetilde{w}(t,x)}{\delta x}=1\ .$$

Resolvendo a equação de diferenças, obtemos que a superfície discreta associada ao passeio de Wiener é o plano

$$\widetilde{w}(t,x)=x,\text{ para }(t,x)\in C_T\text{ limitado.}\qquad\blacksquare$$

Exemplo 10.12. *Consideremos agora o movimento browniano geométrico, o qual é definido pela equação:*

$$\left\{\begin{array}{c}\delta S_t=\mu S_t\delta t+\sigma S_t\delta W_t\\ S_0=1\end{array}\right.,$$

onde $\delta W_t=\pm\sqrt{\delta t}$.
Sabemos ainda que uma trajectória $\xi(t)$ *satisfaz*

$$\delta\xi(t)=\mu(t,\xi(t))\,\delta t\pm\sigma(t,\xi(t))\sqrt{\delta t}.$$

Queremos portanto verificar que $\widetilde{S}(t,x)$ *satisfaz a fórmula do teorema 10.7* e *a fórmula do teorema 10.9, isto é, iremos verificar que* $\widetilde{S}(t,x)$ *satisfaz*

$$\textit{i)}\ \frac{\xi(t+2\delta t)-\xi(t)}{2\delta t}\simeq\mu\xi(t)-\frac{1}{2}\sigma\xi(t).\sigma=\mu\xi(t)-\frac{1}{2}\sigma^2\xi(t)$$

e

$$\textit{ii)}\ \frac{\widetilde{S}(t,x+\delta x)-\widetilde{S}(t,x)}{\delta x}\simeq\sigma\widetilde{S}(t,x),$$

onde $\widetilde{S}(t,x)$ é a superfície discreta associada ao movimento browniano geométrico.

i) Já vimos que sendo $\xi(t)$ a trajectória do movimento browniano geométrico mediano, e t limitado, que

$$\begin{aligned}\xi(t+2\delta t) &= \xi(t)\left(1+\mu\delta t-\sigma\sqrt{\delta t}\right)\left(1+\mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}\right)\\ &= \xi(t)\left(1+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)2\delta t\right)\end{aligned}$$

por conseguinte

$$\frac{\xi(t+2\delta t)-\xi(t)}{2\delta t}\simeq\xi(t)\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right).$$

Logo

$$\frac{\xi(t+2\delta t)-\xi(t)}{2\delta t}\simeq\mu\xi(t)-\frac{\sigma^2}{2}\xi(t).$$

Passemos agora à verificação do resultado quando consideramos o caminho vertical, no qual é utilizada a superfície discreta associada ao movimento Browniano geométrico.

ii) Temos que

$$\widetilde{S}(t,x+\delta x)-\widetilde{S}(t,x)=2\sigma\widetilde{S}\left(t-\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\sqrt{\delta t}.$$

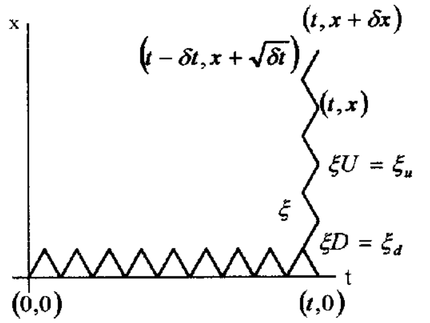
Logo

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad\frac{\widetilde{S}(t,x+\delta x)-\widetilde{S}(t,x)}{2\sqrt{\delta t}}=\sigma\widetilde{S}\left(t-\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\\ &\Leftrightarrow\quad\frac{\widetilde{S}(t,x+\delta x)-\widetilde{S}(t,x)}{\delta x}\simeq\sigma\widetilde{S}(t,x).\qquad\blacksquare\end{aligned}$$

Iremos agora apresentar uma aproximação global da superfície discreta associada ao movimento browniano geométrico por meio da superfície continua. Antes, porém, iremos enunciar dois lemas assimptóticos. O primeiro terá a ver com a trajectória horizontal e o segundo com o caminho vertical. A aproximação será uma consequência directa destes dois lemas.

Lema 10.13. *Seja $(t,0)\in C$. Então*

$$\widetilde{\xi}(t,0)=\xi_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}+\emptyset\right)t}.$$



$$\begin{aligned} \xi_u &= \xi_d \frac{U}{D} = \\ &= \xi D \frac{U}{D} = \\ &= \xi U \end{aligned}$$

Figura 10.2:

Demonstração:

Consideremos a linha horizontal traçada na figura com início em $(0, 0)$.

Vamos então calcular $\widetilde{\xi}\,(t, 0)$. Durante o cálculo, vamos utilizar o conhecimento de que $x = \exp(\log x)$ e iremos aplicar Taylor a log visto que $\log(1+x) = x\,(1+\emptyset)$ para x limitado.

$$\begin{aligned} \widetilde{\xi}\,(t,0) &= \xi_0 \left[1 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) 2\delta t + \mu^2 (\delta t)^2\right]^{\frac{t}{2\delta t}} = \\ &= \xi_0 e^{\frac{t}{2\delta t}\log\left[1+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)2\delta t+\mu^2(\delta t)^2\right]} = \\ &= \xi_0 e^{\frac{t}{2\delta t}\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)2\delta t+\mu^2(\delta t)^2(1+\emptyset)\right]} = \\ &= \xi_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(1+\emptyset)t} = \\ &= \xi_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}+\emptyset\right)t} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 10.14. *Seja* $(t, x) \in C$. *Então*

$$\widetilde{\xi}\,(t, x) = \xi\,(t, 0)\, e^{[(1+\emptyset)\sigma x]}.$$

Vamos então passar à demonstração do lema. Para tal, vamos começar por calcular $\widetilde{\xi}\,(t, x+\delta x)$ no qual iremos aplicar Taylor ao cociente, e também o conhecimento de que $\mu\delta t = \pounds\delta t = \emptyset\sqrt{\delta t}$. Depois passaremos ao cálculo de $\widetilde{\xi}\,(t, x)$ e durante o cálculo iremos utilizar também o conhecimento de que $x = \exp(\log x)$ e iremos aplicar Taylor ao logaritmo visto que $\log(1+x) = x\,(1+\emptyset)$ para x limitado. Vamos considerar sempre que ξ é limitado.

Demonstração:

Se seguirmos dois passos da linha vertical, na figura, a qual tem inicio em $(t, 0)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\xi}(t,x+\delta x) &= \left(1+\mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}\right)\widetilde{\xi}\left(t-\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)= \\
&= \widetilde{\xi}(t,x)\frac{\left(1+\mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}\right)}{\left(1+\mu\delta t-\sigma\sqrt{\delta t}\right)}= \\
&= \widetilde{\xi}(t,x)\frac{\left(1+(\sigma+\emptyset)\sqrt{\delta t}\right)}{\left(1-(\sigma-\emptyset)\sqrt{\delta t}\right)}= \\
&= \widetilde{\xi}(t,x)\left(1+(1+\emptyset)\sigma\delta x+\pounds\delta t\right) \qquad (10.5)
\end{aligned}$$

Consequentemente, o início para a superfície inferior da linha vertical

$$\begin{aligned}
\widetilde{\xi}(t,x) &= \widetilde{\xi}(t,0)\left[1+(1+\emptyset)\sigma\delta x\right]^{\frac{x}{\delta x}}= \\
&= \widetilde{\xi}(t,0)\,e^{\frac{x}{\delta x}\log[1+(1+\emptyset)\sigma\delta x]+\pounds\delta t}= \\
&= \widetilde{\xi}(t,0)\,e^{\frac{x}{\delta x}[(1+\emptyset)\sigma\delta x](1+\emptyset)}= \\
&= \widetilde{\xi}(t,0)\,e^{x(1+\emptyset)\sigma}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

O teorema seguinte dá-nos uma aproximação da superfície discreta por meio de uma superfície continua. De facto, temos uma derivação da fórmula (9.1).

Teorema 10.15. *Seja $(t,x)\in C$, onde t e x são limitados, e seja ξ_t o movimento browniano geométrico. Seja ξ_0 limitado. Então:*

$$\widetilde{\xi}(t,x)\simeq\xi_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma x}.$$

Demonstração:

A demonstração deste teorema é uma consequência directa dos dois lemas assimptóticos. De facto substituindo no último lema, o resultado obtido no primeiro, vem que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\xi}(t,x) &\simeq \widetilde{\xi}(t,0)\,e^{\sigma x}\simeq \\
&\simeq \xi_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t}e^{\sigma x}= \\
&= \xi_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma x} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Utilizando o teorema 4.6, afirmamos que $\widetilde{\xi}(t,x)$ é de classe S^0. Sabe-se que só uma função de classe S^0 tem uma sombra. Assim, podemos ter uma função discreta g, se g fôr de classe S^0 então podemos encontrar uma função continua, através da sua sombra. Vamos em seguida escrever a equação diferencial que está associada a $\widetilde{\xi}(t,x)$.

Assim, pegando em (10.5), podemos obter:

$$\widetilde{\xi}(t,x+\delta x)=\widetilde{\xi}(t,x)+\widetilde{\xi}(t,x)(1+\emptyset)\sigma\delta x \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\ & \frac{\widetilde{\xi}(t,x+\delta x)-\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta x}=\widetilde{\xi}(t,x)(1+\emptyset)\sigma \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\ & \frac{\widetilde{\xi}(t,x+\delta x)-\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta x}=\sigma\widetilde{\xi}(t,x)+\emptyset\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da Stroboscopia, obtemos a equação diferencial que lhe está associada

$$\frac{dY}{dx}=\sigma(t,Y)Y.$$

Teorema 10.16. *Seja* $(t,x)\in C$*, onde* t *é ilimitado e* $x=\pounds\sqrt{t}$*. Seja* $\xi(t,x)$ *o movimento browniano geométrico e seja* ξ_0 *limitado. Suponhamos que* $\mu\lnapprox\frac{\sigma^2}{2}$*. Então:*

$$\xi(t,x)=\varnothing.$$

Segundo **Nelson (1987)** quase todas as trajectórias λ satisfazem

$$\lambda(t)=\pounds\sqrt{t},$$

sendo definido por **Anderson** em 1974 acontecimento quase certo do seguinte modo:

Se A é um conjunto interno então $\Pr A\simeq 1$.

Se A é um conjunto externo então o acontecimento é quase certo se se verificar a seguinte condição

$$\forall\varepsilon\gnapprox 0\ \exists B \text{ interno, } B\supset A \text{ tal que } \Pr(B)<\varepsilon.$$

Demonstração:
Para μ, σ apreciáveis, $\mu\lnapprox\frac{\sigma^2}{2}$, $t\simeq+\infty$ e $x=\pounds\sqrt{t}$, temos que

$$\begin{aligned}\xi(t,x) &= \xi(t,0)\exp(\sigma x+\emptyset)\\ &= \xi_0\exp\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}+\emptyset\right)t\right]\exp(\sigma(1+\emptyset)x)\\ &= \xi_0\exp\left[-@t+\pounds\sqrt{t}+\emptyset t+\emptyset x\right]\\ &= \xi_0\exp\left[-@t+\pounds\sqrt{t}\right]\\ &= \emptyset \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Iremos em seguida enunciar e demonstrar outro teorema, o qual nos diz que a superfície discreta é S^{12}. Embora se tenham que verificar quatro pontos para se averiguar se uma função é de classe S^{12}, a demonstração irá ser efectuada em apenas três partes, visto que já foi verificado que $\widetilde{\xi}(t,x)$ é de classe S^0. Assim sendo, primeiro iremos mostrar que $\frac{\delta_1\widetilde{\xi}(t,x)}{2\delta t}$ é de classe S^0; em seguida que $\frac{\delta_2\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta x}$ é de classe S^0 e por fim demonstraremos que $\frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t,x)}{(\delta x)^2}$ também é de classe S^0. No entanto, para demonstrar que $\frac{\delta_1\widetilde{\xi}(t,x)}{2\delta t}$ é de classe S^0 vamos utilizar o teorema 1.1.1, e portanto primeiro vamos encontrar uma aproximação para $\frac{\delta_1\widetilde{\xi}(t,x)}{2\delta t} = \frac{\widetilde{\xi}(t+2\delta t,x)-\widetilde{\xi}(t,x)}{2\delta t}$. Para se mostrar que $\frac{\delta_2\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta x}$ é de classe S^0 vamos utilizar o resultado já obtido de que $\frac{\delta_2\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta x} = \frac{\widetilde{\xi}(t,x+\delta x)-\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta x} \simeq \sigma e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma x}$ e utilizaremos também o teorema 1.1.1. Por fim, para demonstrar que $\frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t,x)}{(\delta x)^2}$ é de classe S^0 utilizaremos também o teorema 1.1.1, e uma aproximação para $\frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t,x)}{(\delta x)^2}$.

Teorema 10.17. *A superfície discreta associada a ξ_t é de classe S^{12}.*

Demonstração

Consideremos a superfície discreta associada ao movimento browniano geométrico

$$\widetilde{\xi}(t,x) \simeq e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma x}$$

e vamos verificar que esta é S^{12}.
Para tal, teriamos que demonstrar que :

$$\begin{aligned}
&\text{i) } \widetilde{\xi}(t,x) \text{ é limitada e S-continua}\\
&\text{ii) } \frac{\delta_1\widetilde{\xi}(t,x)}{2\delta t} \text{ é limitada e S-continua}\\
&\text{iii) } \frac{\delta_2\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta x} \text{ é limitada e S-continua}\\
&\text{iv) } \frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t,x)}{(\delta x)^2} \text{ é limitada e S-continua.}
\end{aligned}$$

Como **i)** já foi demonstrado, comecemos então por demonstrar que $\frac{\delta_1\widetilde{\xi}(t,x)}{2\delta t}$ é limitada e S-continua..

ii) Pelo exemplo 10.12, sabemos que

$$\frac{\widetilde{\xi}(t+2\delta t)-\widetilde{\xi}(t)}{2\delta t} \simeq \widetilde{\xi}(t)\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

o que pelo teorema 1.1.1, nos permite afirmar que $\frac{\delta_1\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta t}$ é limitada e S-continua.
iii) Já vimos no exemplo 10.12 que

$$\frac{\widetilde{\xi}\,(t,x+\delta x)-\widetilde{\xi}\,(t,x)}{\delta x}\simeq\sigma\widetilde{\xi}\,(t,x)\,,\text{ para }\sigma\text{ limitado.}$$

Pelo teorema 1.1.1, $\frac{\delta_2\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta x}$ é limitada e S-continua.
iv) Sabe-se que

$$\delta_{22}\widetilde{\xi}\,(t,x)=\widetilde{\xi}\,(t,x+2\delta x)-2\widetilde{\xi}\,(t,x+\delta x)+\widetilde{\xi}\,(t,x)\,.$$

Ora

$$\widetilde{\xi}\,(t,x+2\delta x)=\widetilde{\xi}\left(t-\delta t,x+3\sqrt{\delta t}\right)\left(1+\mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}\right)$$

e

$$\widetilde{\xi}\left(t,x+2\sqrt{\delta t}\right)=\widetilde{\xi}\left(t-\delta t,x+3\sqrt{\delta t}\right)\left(1+\mu\delta t-\sigma\sqrt{\delta t}\right).$$

Mas também

$$\widetilde{\xi}\left(t,x+2\sqrt{\delta t}\right)=\widetilde{\xi}\left(t-\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\left(1+\mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}\right)$$

e ainda

$$\widetilde{\xi}\,(t,x)=\widetilde{\xi}\left(t-\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\left(1+\mu\delta t-\sigma\sqrt{\delta t}\right).$$

Portanto

$$\widetilde{\xi}\,(t,x+2\delta x)-\widetilde{\xi}\,(t,x+\delta x)=2\sigma\widetilde{\xi}\left(t-\delta t,x+3\sqrt{\delta t}\right)\sqrt{\delta t}.$$

Bem como

$$\widetilde{\xi}\,(t,x+\delta x)-\widetilde{\xi}\,(t,x)=2\sigma\widetilde{\xi}\left(t-\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\sqrt{\delta t}.$$

Por conseguinte

$$\begin{aligned}
\delta_{22}\widetilde{\xi}(t,x) &= 2\sigma\widetilde{\xi}\left(t-\delta t, x+3\sqrt{\delta t}\right)\sqrt{\delta t} - 2\sigma\widetilde{\xi}\left(t-\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)\sqrt{\delta t} \\
&= \sigma\left[\widetilde{\xi}\left(t-\delta t, x+3\sqrt{\delta t}\right) - \widetilde{\xi}\left(t-\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)\right]2\sqrt{\delta t} \\
&= \sigma\left[2\sigma\widetilde{\xi}\left(t-2\delta t, x+\delta x\right)\sqrt{\delta t}\right]2\sqrt{\delta t} \\
&= \sigma^2\widetilde{\xi}\left(t-2\delta t, x+\delta x\right)4\delta t.
\end{aligned}$$

Então

$$\delta_{22}\widetilde{\xi}(t,x) = \sigma^2\widetilde{\xi}(t-2\delta t, x+\delta x)\,4\delta t.$$

Por conseguinte

$$\frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t,x)}{4\delta t} = \sigma^2\widetilde{\xi}(t-2\delta t, x+\delta x)$$

ou seja,

$$\frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t,x)}{\delta x^2} \simeq \sigma^2\widetilde{\xi}(t,x).$$

Pelo teorema 1.1.1, $\frac{\delta_{22}\widetilde{\xi}(t,x)}{(\delta x)^2}$ é limitada e S-continua.
Por **i**), **ii**), **iii**) e **iv**) podemos concluir que a superfície discreta associada é S^{12}. ■

Já vimos que se tivermos um processo recombinado então podemos calcular o valor final da trajectória através de equações diferenciais.
Vamos por fim calcular a esperança da última variável estocástica. Como aplicação iremos ver dois exemplos: o primeiro relacionado com o movimento Browniano geométrico, o segundo estará ligado à Matemática Financeira.
Passemos então a enunciar o teorema.

Teorema 10.18. *Seja X um processo recombinado satisfazendo a equação de diferenças estocásticas*

$$\delta X_t = \mu(t, X_t)\,\delta t \pm \sigma(t, X_t)\sqrt{\delta t}$$

com μ de classe S^0 e σ de classe S^1, e com condição inicial $X(0) = a$, a apreciável.
Seja $\widetilde{X}(t,x)$ a superfície discreta associada ao processo, com condição inicial $\widetilde{X}(t,0)$.

Suponhamos que $\sigma(t, X_t)$ tem um crescimento S-linear na segunda variável.
Seja ${}^\circ\widetilde{X}(t,x)$, a sombra de $\widetilde{X}(t,x)$, solução da equação diferencial

$$\frac{d\,{}^\circ\widetilde{X}(t,x)}{dx} = {}^\circ\sigma\left(t,\ {}^\circ\widetilde{X}\right)$$

com condição inicial ${}^\circ\widetilde{X}(t,0)$ que é a solução no tempo t da equação

$$\frac{d\,{}^\circ\widetilde{X}}{dt} = {}^\circ\mu\left(t,\ {}^\circ\widetilde{X}\right) - \frac{1}{2}^\circ\sigma\left(t,\ {}^\circ\widetilde{X}\right)\frac{\partial\,{}^\circ\sigma\left(t,\ {}^\circ\widetilde{X}\right)}{\partial\,{}^\circ\widetilde{X}}$$

a qual tem como solução inicial ${}^\circ\widetilde{X}(0) = {}^\circ a$, a apreciável.
Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função standard continua com crescimento polinomial.
Então a esperança de $f(X_t)$ é dada por:

$$Ef(X_t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) f\left({}^\circ\widetilde{X}(t,x)\right)dx.$$

Demonstração:
Recordemos, antes de iniciar a demonstração propriamente dita do teorema que:
$b(t,x) \simeq \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)}{\sqrt{2\pi t}}$ para todo x limitado e pela proposição 6.16 sabemos que $b(t,x) = \pounds\exp\left(-@x^2\right)$ para x ilimitado, o que nos permite concluir que $b(t,x) \simeq \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)}{\sqrt{2\pi t}}$ para todo $x\in\mathbb{R}$.
A demonstração do teorema será assim efectuada em seis etapas.
Iremos mostrar que:

i) ${}^\circ\widetilde{X}(t,x)$ tem um crescimento no máximo S-exponencial linear.

ii) $\widetilde{X}(t,x)$ tem um crescimento no máximo S-exponencial linear. Aqui utilizaremos a desigualdade clássica.

iii) $f\left({}^\circ\widetilde{X}(t,x)\right)$ e $f\left(\widetilde{X}(t,x)\right)$ têm um crescimento no máximo S-exponencial linear.

iv) A massa de $b(t,x).f\left(\widetilde{X}(t,x)\right)$ é o conjunto dos limitados.

v) A massa de $\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)}{\sqrt{2\pi t}}.f\left({}^\circ\widetilde{X}(t,x)\right)$ é o conjunto dos limitados.

vi) Concluir o resultado pretendido.

i) Pelo teorema 10.9, tem-se que

$$\frac{\widetilde{X}(t,x+\delta x) - \widetilde{X}(t,x)}{\delta x} \simeq \sigma\left(t,\widetilde{X}(t,x)\right)$$

para t limitado.

Pelo teorema 10.10, tem-se que

$$\frac{d\,^\circ\widetilde{X}\,(t,x)}{dx} =^\circ \sigma\left(t,\ ^\circ\widetilde{X}\right).$$

Ora a função é standard limitada, logo tem supremo limitado por transferência, pelo que podemos escrever

$$\frac{d\,^\circ\widetilde{X}}{dx} \leq k^\circ\widetilde{X}$$

com $k = \sup\left(\ ^\circ\sigma\left(t,\ ^\circ\widetilde{X}\right)\right)$, e que é uma função standard.
Vejamos agora que o seu crescimento é no máximo exponencial linear com n standard.
Com efeito:

$$\begin{aligned}
\frac{d\,^\circ\widetilde{X}}{dx} &\leq k\,^\circ\widetilde{X} \Leftrightarrow \int_0^x \frac{d\,^\circ\widetilde{X}}{^\circ\widetilde{X}} \leq \int_0^x kdx \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ln\left|\,^\circ\widetilde{X}\right| \leq kx + c \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ ^\circ\widetilde{X}\,(t,x) \leq A\exp(kx)
\end{aligned}$$

com $A = \exp(c)$.
Como $^\circ\widetilde{X}\,(t,x)$ é standard e continua, logo também é S-continua.

ii) Vejamos agora que $\widetilde{X}\,(t,x)$ tem também um crescimento no máximo S-exponencial linear. Para tal iremos utilizar a desigualdade clássica.
Ora

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}\,(t,x+\delta x) - \widetilde{X}\,(t,x) &\leq k\widetilde{X}\,(t,x)\,\delta x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \widetilde{X}\,(t,x+\delta x) \leq \widetilde{X}\,(t,x) + k\widetilde{X}\,(t,x)\,\delta x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \widetilde{X}\,(t,x+\delta x) \leq \widetilde{X}\,(t,x)\,[1+k\delta x].
\end{aligned}$$

Portanto

$$\widetilde{X}\,(t,x) \leq \widetilde{X}\,(t,0)\,(1+k\delta x)^{\frac{x}{\delta x}}.$$

Assim sendo

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}\,(t,x) &\leq \widetilde{X}\,(t,0)\exp\left[\frac{x}{\delta x}\log(1+k\delta x)\right] \\
&\leq \widetilde{X}\,(t,0)\exp\left[\frac{x}{\delta x}.k\delta x\right] \\
&= \widetilde{X}\,(t,0)\exp[kx].
\end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$\widetilde{X}(t,x) \leq \widetilde{X}(t,0)\exp[kx].$$

iii) Suposemos que $f(y)$ tem um crescimento polinomial para todo $y \in \mathbb{R}$, isto é,

$$f(y) \leq l.y^n,$$

com l, n standard.

Vamos agora ver como é o crescimento de $f\left(\widetilde{X}(t,x)\right)$ e de $f\left({}^{\circ}\widetilde{X}(t,x)\right)$.

Como tanto $\widetilde{X}(t,x)$ como ${}^{\circ}\widetilde{X}(t,x)$ têm um crescimento S-exponencial linear logo quer $\widetilde{X}(t,x)$ quer ${}^{\circ}\widetilde{X}(t,x)$ são menores ou iguais que $\pounds.\exp[\pounds x]$, portanto, basta mostrar que $f\left(\widetilde{X}(t,x)\right)$ tem um crescimento no máximo S-exponencial linear pois $f\left({}^{\circ}\widetilde{X}(t,x)\right)$ tem o mesmo comportamento.

Com efeito

$$\begin{aligned} f\left(\widetilde{X}(t,x)\right) &\leq \pounds\left(\widetilde{X}(t,0)\exp[kx]\right)^n \\ &= \pounds.\pounds.\exp[\pounds x] \\ &= \pounds.\exp[\pounds x]. \end{aligned}$$

Logo $f\left(\widetilde{X}(t,x)\right)$ tem um crescimento no máximo S-exponencial linear.

Podemos assim afirmar que $f\left(\widetilde{X}(t,x)\right)$ e que $f\left({}^{\circ}\widetilde{X}(t,x)\right)$ têm um crescimento no máximo S-exponencial linear.

Temos que ${}^{\circ}\widetilde{X}(t,x)$ é continua, logo $f\left({}^{\circ}\widetilde{X}(t,x)\right)$ também é continua.

iv) Calculemos agora a massa de $b(t,x)\,f\left(\widetilde{X}(t,x)\right)$.

Se x limitado, tem-se

$$\begin{aligned} b(t,x)\,f\left(\widetilde{X}(t,x)\right) &= @\exp\left(-@x^2+\pounds x\right).\pounds\exp(\pounds x) \\ &= \pounds.\exp\left(-@x^2+\pounds x\right) \\ &= \pounds\exp\left(-@x^2\right). \end{aligned}$$

Se x ilimitado, tem-se

$$\begin{aligned} b(t,x)\,f\left(\widetilde{X}(t,x)\right) &= \exp\left(-@x^2\right).\pounds\exp(\pounds x) \\ &= \pounds\exp\left(-@x^2+\pounds x\right) \\ &= \pounds\exp(-@x(x+\pounds)) \\ &= \pounds\exp(-@x(1+\varnothing)x) \\ &= \pounds\exp\left(-@x^2\right). \end{aligned}$$

Logo $b(t,x)\, f\left(\widetilde{X}(t,x)\right)$ é majorado por $K_1 \exp(-|x|)$, com K_1 standard.

Portanto a massa de $b(t,x)\, f\left(\widetilde{X}(t,x)\right)$ está incluida em $\pounds$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

vi) Vamos agora determinar a massa de $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) f\left({}^\circ\widetilde{X}(t,x)\right)$.

Com efeito:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) f\left({}^\circ\widetilde{X}(t,x)\right) &= \pounds \exp\left(-@x^2\right).\pounds \exp\left(\pounds x\right)\\ &= \pounds \exp\left(-@x^2 + \pounds x\right)\\ &= \pounds \exp\left(-@x^2\right).\end{aligned}$$

Assim, $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) f\left({}^\circ\widetilde{X}(t,x)\right)$ é majorado por $K_2 \exp(-|x|)$, com K_2 standard.

Pelo que podemos afirmar que a massa de $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) f\left({}^\circ\widetilde{X}(t,x)\right)$ é o conjunto dos limitados para todo o $x \in \mathbb{R}$.

vii) Por **i)**, **ii)**, **iii)**, e **iv)** podemos concluir que

$$b(t,x)\, f\left(\widetilde{X}(t,x)\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) f\left({}^\circ\widetilde{X}(t,x)\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como temos que

$$\begin{aligned}Ef(X_t) &= \sum_{x\in\mathbf{X}} b(t,x)\, f\left(\widetilde{X}(t,x)\right)\delta x =\\ &= \sum_{|x|\le \frac{T}{\sqrt{\delta t}}} b(t,x)\, f\left(\widetilde{X}(t,x)\right)\delta x.\end{aligned}$$

Por **i)-vi)** e pelo teorema 6.4

$$\begin{aligned}Ef(X_t) &= \sum_{x\in\mathbf{X}} b(t,x)\, f\left(\widetilde{X}(t,x)\right)\delta x \simeq\\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) f\left({}^\circ\widetilde{X}(t,x)\right) dx. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Vejamos agora dois exemplos onde iremos calcular a $Ef(X_t)$.

O primeiro exemplo será relacionado com o movimento browniano geométrico, e o segundo estará ligado à Matemática Financeira. No exemplo relacionado com o movimento Browniano geométrico, para calcular a $Ef(X_t)$, iremos utilizar o teorema 10.18. Assim iremos ter que averiguar se são verificadas todas as condições do teorema para o podermos aplicar.

Exemplo 10.19. *Consideremos o movimento browniano geométrico, o qual é definido pela equação*

$$\begin{cases} \delta S_t = \mu S_t \delta t + \sigma S_t \delta w_t \\ S_0 = 1 \end{cases}$$

onde $\delta w_t = \pm\sqrt{\delta t}$. *Consideremos que* μ *e* σ *são de classe* S^0.

Sabemos que uma trajectória $\xi(t)$ *satisfaz*

$$\delta\xi(t) = \mu(t, \xi(t))\,\delta t \pm \sigma(t, \xi(t))\sqrt{\delta t}.$$

Ainda sabemos que a superfície discreta associada ao movimento browniano geométrico é dada por

$$\widetilde{S}(t, x) = \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma x(1 + \varnothing)\right],$$

para $(t, x) \in \mathbf{C}_T$, t *limitado e* x *qualquer.*

Queremos portanto verificar que

$$Ef(S_t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) f\left(\exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma x\right]\right) dx$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função standard continua com crescimento polinomial.*

Comecemos então a averiguar se se verificam todas as condições do teorema.

Temos que o movimento Browniano geométrico tem como condição inicial $S(0) = 1$, *logo a condição inicial é apreciável.*

Como μ *e* σ *são limitados em* S_t *com coeficientes limitados, logo podemos dizer que* μ *é de classe* S^0 *e* σ *é de classe* S^1. *Sendo* σ *linear, logo* σ *é S-linear na segunda variável.*

O movimento Browniano geométrico é um processo recombinado, pelo que tem uma superfície discreta associada ao processo, a qual já foi calculada, e nos é dada por:

$$\widetilde{S}(t, x) = S(0)\exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \varnothing\right)t + \sigma x + \varnothing\right].$$

Verificam-se assim todas as condições de crescimento do teorema, pelo que o podemos aplicar. Logo a esperança de $f(S_t)$ *é dada por*

$$Ef(S_t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) f\left(\exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma x\right]\right) dx. \qquad \blacksquare$$

Vejamos agora um exemplo onde vamos considerar que a função de gauss não está centralizada. Iremos aqui utilizar o teorema de De Moivre Laplace.

Exemplo 10.20. *Este último exemplo provém da Matemática Financeira. Na abordagem de* **Cox-Ross-Rabinstein** *o movimento Browniano geométrico serve como modelo do desenvolvimento discreto do preço das acções. Eles mostraram uma fórmula para o preço C de acções Europeias do tipo "call" e "put" com tempo de exercício das opções T, e com taxa de juro r para as obrigações. Essa fórmula, generalizada a todas as opções Europeias e que traduzimos aqui no contexto da Análise Não Standard, é dada por:*

$$\begin{aligned} C &\equiv \frac{1}{(1+r\delta t)^{\frac{T}{\delta t}}} \sum_{|x|\leq \frac{T}{\sqrt{\delta t}}} b_{\frac{r-\mu}{2\sigma}}(T,x)\, f(\xi(T,x))\,\delta x \\ &\simeq \frac{\exp(-rT)}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y}{2T}\right).f\left(\xi_0 \exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma y\right)\right)dy. \end{aligned}$$

sendo $\frac{1}{(1+r\delta t)^{\frac{T}{\delta t}}} \simeq \exp(-rT)$.

A representação do preço de uma opção Europeia na forma de uma soma de Riemann, infinitamente próxima do seu integral de Riemann encontra-se em [6], *de Van den Berg.*

Seja X um processo recombinado satisfazendo a equação de diferenças estocásticas

$$\delta X_t = \mu X_t \delta t \pm \sigma X_t \sqrt{\delta t}$$

onde μ, σ são de classe S^0.

Seja $\xi(T,x)$ uma trajectória do movimento browniano geométrico.

Seja r a taxa de juro, σ a volatibilidade das acções (variância relativa), μ a taxa de crescimento médio das acções, T o tempo de exercício das opções (cobertura de riscos até ao tempo T, isto é, até ao tempo T vão ser pagas).

Queremos então verificar que

$$\mathcal{E} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\left(x-\frac{(r-\mu)T}{\sigma}\right)^2}{2T}\right).f\left(\xi_0 \exp\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma x\right)\right)dx$$

onde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função standard continua com crescimento polinomial.

Recordemos, antes de iniciar a demonstração, que:

1- $b_{\frac{r-\mu}{2\sigma}}(T,x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}.\exp\left(-\frac{\left(x-\frac{(r-\mu)T}{\sigma}\right)^2}{2T}\right)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, T apreciável e r limitado.

Pois, sendo r, μ, e σ limitados logo pelo teorema 1.1.1 $\frac{r-\mu}{2\sigma}$ é limitado. Utilizando o teorema de De Moivre Laplace, em que $a=\frac{r-\mu}{2\sigma}$ limitado obtem-se o resultado para T apreciável e x limitado. Para x ilimitado também foi provado na proposição 6.16.

2- $\xi_0 \exp\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma x\right)$ tem um crescimento S-exponencial linear.

3- $\xi(T,x)$ tem um crescimento no máximo S-exponencial linear.

Iremos mostrar que:

i) $f\left(\xi_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma x\right)\right)$ *e* $f(\xi(T,x))$ *têm um crescimento no máximo S-exponencial linear.*

ii) A massa de $b_{\frac{r-\mu}{2\sigma}}(T,x).f(\xi(T,x))$ *está contida no conjunto dos limitados.*

iii) A massa de $\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}.\exp\left(-\frac{\left(x-\frac{(r-\mu)T}{\sigma}\right)^2}{2T}\right).f\left(\xi_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma x\right)\right)$ *está contida no conjunto dos limitados.*

iv) Concluir o resultado pretendido.

i) Como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função standard continua com crescimento polinomial, logo para todo* $y \in \mathbb{R}$

$$f(y) \leq l.y^n$$

com l, n *standard.*

Queremos mostrar que $f\left(\xi_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma x\right)\right)$ *e* $f(\xi(T,x))$ *têm um crescimento no máximo S-exponencial linear.*

Iremos mostrar apenas uma pois a outra é análoga.

Com efeito:

$$\begin{aligned} f(\xi(T,x)) &\leq \pounds(\xi(T,0)\exp(kx))^n \\ &= \pounds.\pounds\exp(\pounds x) \\ &= \pounds\exp(\pounds x). \end{aligned}$$

Logo podemos concluir que $f(\xi(T,x))$ *tem um crescimento no máximo S-exponencial linear.*

ii) Já vimos que $b_{\frac{r-\mu}{2\sigma}}(T,x) = \pounds.\exp(-@x^2)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, t *limitado. Logo*

$$\begin{aligned} b_{\frac{r-\mu}{2\sigma}}(T,x)\, f(\xi(T,x)) &= \pounds.\exp\left(-@x^2\right).\pounds\exp(\pounds x) \\ &= \pounds.\exp\left(-@x^2\right) \end{aligned}$$

pelo que a massa de $b_{\frac{r-\mu}{2\sigma}}(T,x)\, f(\xi(T,x))$ *está contida no conjunto dos limitados para todo* $x \in \mathbb{R}$.

iii) Calculemos agora a massa de $\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}.\exp\left(-\frac{\left(x-\frac{(r-\mu)T}{\sigma}\right)^2}{2T}\right).f\left(\xi_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma x\right)\right)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}.\exp\left(-\frac{\left(x-\frac{(r-\mu)T}{\sigma}\right)^2}{2T}\right).f\left(\xi_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma x\right)\right) &= \pounds.\exp(-@x^2).\pounds\exp(\pounds x) \\ &= \pounds.\exp\left(-@x^2\right) \\ &\leq \exp(-|x|). \end{aligned}$$

Logo a sua massa está contida em $\pounds$.

iv) *Pelo teorema 10.18, sendo ξ_0 limitado, $\xi(T,x)$ uma trajectória do movimento browniano geométrico e T, x limitados tem-se que*

$$\xi(T,x) \simeq \xi_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma x\right).$$

Sabemos que

$$\mathcal{E} = \sum_{|x| \le \frac{T}{\sqrt{\delta t}}} b_{\frac{r-\mu}{2\sigma}}(T,x)\, f(\xi(T,x))\,\delta x.$$

Pelo teorema de De Moivre Laplace e o teorema 6.4, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \sum_{|x| \le \frac{T}{\sqrt{\delta t}}} b_{\frac{r-\mu}{2\sigma}}(T,x)\, f(\xi(T,x))\,\delta x \\
&\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \int_{-\frac{T}{\sqrt{\delta t}}}^{\frac{T}{\sqrt{\delta t}}} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{(r-\mu)T}{\sigma}\right)^2}{2T}\right) \cdot f\left(\xi_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma x\right)\right) dx \\
&\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{(r-\mu)T}{\sigma}\right)^2}{2T}\right) \cdot f\left(\xi_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma x\right)\right) dx. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Se nesta última fórmula fizermos a mudança de variável $y = x - \frac{(r-\mu)T}{\sigma}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2T}\right) \cdot f\left(\xi_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\left(y + \frac{(r-\mu)T}{\sigma}\right)\right)\right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2T}\right) \cdot f\left(\xi_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma y + (r-\mu)T\right)\right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2T}\right) \cdot f\left(\xi_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma y + rT\right)\right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2T}\right) \cdot f\left(\xi_0 \exp\left(\sigma y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)\right) dy.
\end{aligned}$$

Com esta mudança de variável obtemos assim uma fórmula para $\mathcal{E}$ análoga à fórmula obtida para a $Ef(S_t)$.

Capítulo VI
Processos quase-recombinados

11. Processos quase-recombinados

Vamos agora definir o que é um processo quase - recombinado, e em seguida verificar a condição necessária e suficiente para que um processo seja quase - recombinado.

Definição 11.1. *Um processo diz-se* ***quase - recombinado*** *se um movimento para cima seguido de um movimento para baixo diferir de um* $\varnothing\delta t^2$ *de um movimento para baixo seguido de um movimento para cima.*

Lema 11.2. *Para que um processo seja quase - recombinado é suficiente que:*

$$\mu_2'(t,x) - \sigma_1'(t,x) - \frac{\sigma_{22}''(t,x)}{2} = 0$$

onde μ *é de classe* S^{11} *,* σ *é de classe* S^{11} *e ainda* μ_{22}'' *e* σ_{22}'' *são de classe* S^{01}.

Para verificar esta condição começaremos por indicar a expressão que tem um movimento para cima seguido por um movimento para baixo e a expressão tomada por um movimento para baixo seguido de um movimento para cima. Em seguida iremos calcular a diferença entre as duas expressões, o que nos vai dar um termo em δt e um termo em δx. Depois aplicaremos directamente a fórmula de Taylor, visto μ e σ verificarem as condições necessárias para a aplicação do teorema de Taylor. Primeiro aplicaremos ao coeficiente de δt e em seguida ao coeficiente de δx. Por fim, substituindo os resultados obtidos pela aplicação da fórmula de Taylor na expressão que tinhamos obtido para a diferença obtemos o resultado pretendido.

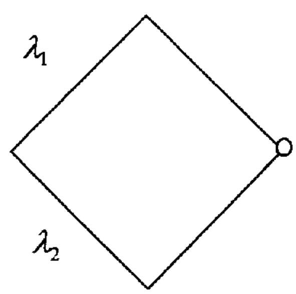


Figura 11.1: O efeito quase-recombinado

Comecemos então pelo movimento para cima seguido de um movimento para baixo. Então tem-se

$$\mu(t,x)\,\delta t+\sigma(t,x)\sqrt{\delta t}+\mu\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\delta t-\sigma\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\sqrt{\delta t}.$$

O movimento para baixo seguido do movimento para cima, tem a expressão

$$\mu(t,x)\,\delta t-\sigma(t,x)\sqrt{\delta t}+\mu\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\delta t+\sigma\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\sqrt{\delta t}.$$

Assim sendo, a diferença entre as duas expressões tem a forma:

$$\begin{aligned}&\sigma(t,x)\,\delta x+\left[\mu\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)-\mu\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\right]\delta t-\sigma\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\sqrt{\delta t}+\\&-\sigma\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\sqrt{\delta t}\end{aligned}$$

a qual é equivalente a

$$\begin{aligned}&\sigma(t,x)\,\delta x+\left[\mu\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)-\mu\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\right]\delta t-\frac{1}{2}\sigma\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)\delta x+\\&-\frac{1}{2}\sigma\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\delta x\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\left[\sigma\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)-2\sigma(t,x)+\sigma\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\right]\delta x+\\&+\left[\mu\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)-\mu\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)\right]\delta t\end{aligned}$$

Vamos agora aplicar o teorema de Taylor para duas variáveis até a ordem do resto ser $\varnothing\delta t$ ao coeficiente de δt, devido a se querer que a diferença seja um $\varnothing\delta t^2$ e estarmos a aplicar o teorema ao coeficiente de δt.

Tem-se que o coeficiente de δt é:

$$\mu\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)-\mu\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right).$$

Como μ está nas condições necessárias para a aplicação do teorema de Taylor, obtem-se directamente que

$$\mu\left(t+\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right)=\mu(t,x)+\sqrt{\delta t}\mu_2'(t,x)+\delta t\left(\mu_1'(t,x)+\frac{1}{2}\mu_{22}''(t,x)\right)+\varnothing\delta t$$

e

$$\mu\left(t+\delta t,x-\sqrt{\delta t}\right)=\mu(t,x)-\sqrt{\delta t}\mu_2'(t,x)+\delta t\left(\mu_1'(t,x)+\frac{1}{2}\mu_{22}''(t,x)\right)+\varnothing\delta t$$

pelo que

$$\begin{aligned} \mu\left(t+\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)-\mu\left(t+\delta t, x-\sqrt{\delta t}\right) &= 2\sqrt{\delta t}\mu_2'(t,x)+\varnothing\delta t \\ &= \delta x \mu_2'(t,x)+\varnothing\delta t. \end{aligned}$$

Apliquemos agora o teorema de Taylor a $\sigma\left(t+\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)$ e a $\sigma\left(t+\delta t, x-\sqrt{\delta t}\right)$ até a ordem do resto ser $\varnothing\delta t$. Como σ está nas condições necessárias para a aplicação do teorema, então tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma\left(t+\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right) &= \sigma(t,x)+\sqrt{\delta t}\sigma_2'(t,x)+\delta t\left(\sigma_1'(t,x)+\frac{1}{2}\sigma_{22}''(t,x)\right)+ \\ &+\left(\sigma_{12}''(t,x)+\frac{1}{6}\sigma_{222}'''(t,x)\right)\delta t\sqrt{\delta t}+\varnothing\delta t^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma\left(t+\delta t, x-\sqrt{\delta t}\right) &= \sigma(t,x)-\sqrt{\delta t}\sigma_2'(t,x)+\delta t\left(\sigma_1'(t,x)+\frac{1}{2}\sigma_{22}''(t,x)\right)+ \\ &-\left(\sigma_{12}''(t,x)+\frac{1}{6}\sigma_{222}'''(t,x)\right)\delta t\sqrt{\delta t}+\varnothing\delta t^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Logo

$$\sigma\left(t+\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)+\sigma\left(t+\delta t, x-\sqrt{\delta t}\right)=2\sigma(t,x)+2\delta t\sigma_1'(t,x)+\delta t\sigma_{22}''(t,x)+\varnothing\delta t^{\frac{3}{2}}.$$

Portanto, o coeficiente de δt terá a expressão:

$$\sigma(t,x)-\frac{1}{2}\left[\sigma\left(t+\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)+\sigma\left(t+\delta t, x-\sqrt{\delta t}\right)\right]=-\delta t\left(\sigma_1'(t,x)+\frac{1}{2}\sigma_{22}''(t,x)\right)+\varnothing\delta t^{\frac{3}{2}}.$$

Assim sendo, a nossa expressão toma a forma

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\left[\sigma\left(t+\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)-2\sigma(t,x)+\sigma\left(t+\delta t, x-\sqrt{\delta t}\right)\right]\delta x+ \\ &+\left[\mu\left(t+\delta t, x+\sqrt{\delta t}\right)-\mu\left(t+\delta t, x-\sqrt{\delta t}\right)\right]\delta t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\delta t\delta x\sigma_1'(t,x)-\frac{\delta t\delta x}{2}\sigma_{22}''(t,x)+\delta t\delta x\mu_2'(t,x)+\varnothing\delta t^2= \\ &= \left(-\sigma_1'(t,x)-\frac{\sigma_{22}''(t,x)}{2}+\mu_2'(t,x)\right)\delta t\delta x+\varnothing\delta t^2. \end{aligned}$$

Pelo que sendo μ, σ, t e x standard é suficiente que

$$\mu_2'(t,x) - \sigma_1'(t,x) - \frac{\sigma_{22}''(t,x)}{2} = 0. \quad \blacksquare$$

Vamos agora ver como exemplos, três processos cujas superfícies discretas associadas a eles, verificam a condição necessária de quase - recombinado.

Primeiro iremos analisar a superfície discreta associada ao movimento browniano geométrico, e em seguida analisaremos outras trajectórias limitadas.

Exemplo 11.3. *Consideremos a equação que define o movimento browniano geométrico*

$$\delta S_t = \mu S_t \delta t \pm \sigma S_t \sqrt{\delta t}.$$

Temos assim que:

$$\widetilde{\mu} = \mu S \text{ e } \widetilde{\sigma} = \sigma S.$$

Na demonstração de que a superfície discreta é S^{12}, obtivemos que:

$$S_1' = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) S;$$

$$S_2' = \sigma S$$

e que

$$S_{22}'' = \sigma^2 S.$$

Vamos agora verificar se é satisfeita a condição necessária para que um processo seja quase - recombinado. Temos então que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}_2' - \widetilde{\sigma}_1' - \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}_{22}'' &= \mu S_2' - \sigma S_1' - \frac{1}{2}\sigma S_{22}'' = \\
&= \mu\sigma S - \sigma\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) S - \frac{1}{2}\sigma\sigma^2 S = \\
&= \mu\sigma S - \sigma\mu S + \frac{\sigma^3}{2} S - \frac{\sigma^3}{2} S = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo é satisfeita a condição necessária, pelo que se pode concluir que a superfície discreta associada ao movimento browniano geométrico, de facto já um processo recombinado, é um processo quase - recombinado.

Vamos ver agora outro exemplo de um processo quase - recombinado.

Exemplo 11.4. *Consideremos as equações:*

$$\mu(t,x) = -\frac{1}{2}t\sin x + \sin x$$

e

$$\sigma(t,x) = t\cos x.$$

Pela periodicidade de x, $\mu(t,x)$ e $\sigma(t,x)$ são S-continuas e limitadas, para t limitado e x qualquer, tal como as suas derivadas de ordem standard.

Vamos então verificar que é satisfeita a condição necessária para que o processo seja quase - recombinado. Tem-se então que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}_2'(t,x) - \widetilde{\sigma}_1'(t,x) - \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}_{22}''(t,x) &= -\frac{1}{2}t\cos x + \cos x - (\cos x) - \frac{1}{2}(-t\cos x) = \\
&= -\frac{1}{2}t\cos x + \cos x - \cos x + \frac{1}{2}t\cos x = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo é satisfeita a condição, pelo que se pode concluir que o processo é quase - recombinado.

Exemplo 11.5. *Consideremos as equações:*

$$\mu(t,x) = -\frac{1}{2}t\sin x + \sin x + 2x$$

e

$$\sigma(t,x) = t\cos x + 2t.$$

Pela periodicidade de x, $\mu(t,x)$ e $\sigma(t,x)$ são S-continuas e limitadas, para t limitado e x qualquer, tal como as suas derivadas de ordem standard.

Vamos então verificar que é satisfeita a condição necessária para que o processo seja quase - recombinado. Tem-se então que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}_2'(t,x) - \widetilde{\sigma}_1'(t,x) - \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}_{22}''(t,x) &= -\frac{1}{2}t\cos x + \cos x + 2 - (\cos x + 2) - \frac{1}{2}(-t\cos x) = \\
&= -\frac{1}{2}t\cos x + \cos x + 2 - \cos x - 2 + \frac{1}{2}t\cos x = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo é satisfeita a condição, pelo que se pode concluir que o processo é quase - recombinado.

Vamos agora considerar duas trajectórias próximas, que têm no mesmo intervalo de tempo de comprimento δt os movimentos para cima (e à posteriori os movimentos para baixo), e verificar a divergência dessas trajectórias. No entanto sem existir mais informação sobre σ não é possivel controlar a divergência entre duas trajectórias próximas se no mesmo intervalo de tempo de comprimento δt uma das trajectórias fôr para cima e a outra para baixo. Esta impossibilidade é devida ao facto do que foi visto no exemplo 8.3, em que mostramos que o comprimento de uma trajectória qualquer do passeio de Wiener ou a trajectória mediana têm comprimento ilimitado.

Teorema 11.6. *Sejam λ, α duas trajectórias próximas com os mesmos movimentos para cima, do processo X_t que satisfaz a seguinte equação de diferenças*

$$\delta X_t = \mu(t, X_t)\,\delta t + \sigma(t, X_t)\,\delta w_t$$

Assim

$$\delta\lambda(t) = \mu(t, \lambda(t))\,\delta t \pm \sigma(t, \lambda(t))\,\delta w_t$$

e

$$\delta\alpha(t) = \mu(t, \alpha(t))\,\delta t \pm \sigma(t, \alpha(t))\,\delta w_t.$$

A diferença entre λ e α é dada por:

$$\begin{aligned}
& \lambda(t+\delta t) - \alpha(t+\delta t) \\
= \; & (\lambda(0) - \alpha(0)) \times \\
& \times \exp\left[\sum_{0\le s\le t} \log\left(1 + \frac{\sigma(s,\lambda(s)) - \sigma(s,\alpha(s))}{\lambda(s)-\alpha(s)}\delta w_s + \frac{\mu(t,\lambda(s)) - \mu(t,\alpha(s))}{\lambda(s)-\alpha(s)}\delta t\right)\right].
\end{aligned}$$

Vamos agora demonstrar o teorema calculando a diferença entre $\lambda(t+\delta t) - \alpha(t+\delta t)$ e $\lambda(t) - \alpha(t)$.

Demonstração:
Sejam λ, α duas trajectórias próximas com o mesmo número de movimentos para cima.
Calculemos agora a diferença entre essas trajectórias.
Tem-se que:

$$\begin{aligned}
\lambda(t+\delta t) - \alpha(t+\delta t) &= \lambda(t) + \mu(t,\lambda(t))\,\delta t + \sigma(t,\lambda(t))\,\delta w_t - \alpha(t) - \mu(t,\alpha(t))\,\delta t - \sigma(t,\alpha(t))\,\delta w_t \\
&= (\lambda(t) - \alpha(t)) \times \\
&\quad \times \left(1 + \frac{\sigma(t,\lambda(t)) - \sigma(t,\alpha(t))}{\lambda(t)-\alpha(t)}\delta w_t + \frac{\mu(t,\lambda(t)) - \mu(t,\alpha(t))}{\lambda(t)-\alpha(t)}\delta t\right).
\end{aligned}$$

Logo, por indução

$$
\begin{aligned}
& \lambda(t+\delta t)-\alpha(t+\delta t) \\
= \; & (\lambda(0)-\alpha(0)) \times \\
& \times \prod_{0\leq s\leq t}\left(1+\frac{\sigma(s,\lambda(s))-\sigma(s,\alpha(s))}{\lambda(s)-\alpha(s)}\delta w_s+\frac{\mu(t,\lambda(s))-\mu(t,\alpha(s))}{\lambda(s)-\alpha(s)}\delta t\right) \\
= \; & (\lambda(0)-\alpha(0)) \times \\
& \times \exp\left[\log\prod_{0\leq s\leq t}\left(1+\frac{\sigma(s,\lambda(s))-\sigma(s,\alpha(s))}{\lambda(s)-\alpha(s)}\delta w_s+\frac{\mu(t,\lambda(s))-\mu(t,\alpha(s))}{\lambda(s)-\alpha(s)}\delta t\right)\right] \\
= \; & (\lambda(0)-\alpha(0)) \times \\
& \times \exp\left[\sum_{0\leq s\leq t}\log\left(1+\frac{\sigma(s,\lambda(s))-\sigma(s,\alpha(s))}{\lambda(s)-\alpha(s)}\delta w_s+\frac{\mu(t,\lambda(s))-\mu(t,\alpha(s))}{\lambda(s)-\alpha(s)}\delta t\right)\right] \\
= \; & (\lambda(0)-\alpha(0))\exp\left[\sum_{0\leq s\leq t}\log\left(1+\sigma'(s,\lambda(s))\,\delta w_s+\mu'(s,\lambda(s))\,\delta t\right)\right]. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Uma majoração pode ser só da forma $(\lambda(0)-\alpha(0))\exp \pounds\frac{@}{\sqrt{\delta t}}$.

Por enquanto, se σ é de classe S^{01}

$$\sigma' \equiv \frac{\sigma(s,\lambda(s))-\sigma(s,\alpha(s))}{\lambda(s)-\alpha(s)}$$

é de classe S^{00}, e $\sum_{0\leq s\leq t}\sigma'(s,\lambda(s))\,\delta w_s-\frac{1}{2}\sum_{0\leq s\leq t}(\sigma'(s,\lambda(s)))^2(1+\varnothing)\,\delta t$ é quase certamente de classe S^0.

Se μ é de classe S^{01}

$$\mu' \equiv \frac{\mu(s,\lambda(s))-\mu(s,\alpha(s))}{\lambda(s)-\alpha(s)}$$

é de classe S^{00}, e $\sum_{0\leq s\leq t}\mu'(s,\lambda(s))\,\delta t$ é quase certamente de classe S^0.

Sendo quase todas as trajectórias de classe S^0,

$$\sum_{0\leq s\leq t}\sigma'(s)\,\delta w_s+\sum_{0\leq s\leq t}\mu'(s)\,\delta t$$

é limitado quase certamente, logo $\lambda(t)-\alpha(t)\simeq 0$ quase certamente.

Vamos agora calcular a esperança de um processo quase-recombinado. Antes, porém, iremos enunciar alguns teoremas, proposições e definições, que nos servirão de apoio ao cálculo da esperança. Outros teoremas são teoremas da literatura sobre equivalência de processos não recombinados, os quais não iremos utilizar. As demonstrações dos teoremas podem ser consultadas em Benoit; Diffusions discrétes et mécanique Stochastique, em [2], capítulo 4 ou Nelson [4].

Proposição 11.7. *Seja x_t e y_t dois processos definidos em $[0,T]$. Nos dois casos seguintes, dizemos que os processos são equivalentes:*

1- Equivalência com respeito aos valores do processo: os dois processos são definidos no mesmo espaço de probabilidade Ω, e quase certamente $\|x-y\| \simeq 0$.

2- Equivalência com respeito à proximidade das probabilidades $\sum_{\gamma\in B} |\Pr(x=\gamma) - \Pr(y=\gamma)| \simeq 0$.

Definição 11.8. *A função f de B para $\mathbb{R}$ é uniformemente S-continua sse*

$$\forall\gamma_1\forall\gamma_2 \|\gamma_1-\gamma_2\| \simeq 0 \Rightarrow f(\gamma_1) \simeq f(\gamma_2).$$

Teorema 11.9. *Seja Z_t uma familia de variáveis aleatórias $t \in \{0,\ dt, ..., Ndt\}$, Z_t sempre limitado, tal que*

$$\begin{aligned} E(Z_t \mid Z_0...Z_{t-dt}) &= 0 \\ E\left(Z_t^2 \mid Z_0...Z_{t-dt}\right) &= 1. \end{aligned}$$

Então os processos

$$\begin{cases} x_{t+dt} = x_t + Z_t\sqrt{dt} \\ x_0 = 0 \end{cases} \text{e} \begin{cases} w_{t+dt} = w_t \pm \sqrt{dt} \\ w_0 = 0 \end{cases}$$

com valores no conjunto das funções limitadas por $[0, Ndt]$ são equivalentes: O processo x_t é Browniano.

Teorema 11.10. *Se Z_t é uma familia de variáveis aleatórias satisfazendo a hipótese do teorema anterior, a equação diferencial estocástica construida para Z_t é equivalente à quação diferencial estocástica construida para $\pm\sqrt{dt}$.*

Teorema 11.11. *Se $\beta(x,t)$ e $\sigma(x,t)$ são duas funções tendo como sombras b e s iguais, a equação de diferenças estocásticas desenvolvida para β e σ é equivalente à equação diferencial desenvolvida para b e s.*

Definição 11.12. *O processo x_t e y_t são equivalentes, e escrevemos $x_t \sim y_t$ se e só se, para todas as funções f de B para $\mathbb{R}$ que são uniformemente S-continuas e limitadas, as esperanças $E(f(x))$ e $E(f(y))$ são infinitamente próximas.*

Vamos então enunciar o teorema que nos permite o cálculo da esperança de um processo quase recombinado.

Introduzimos algumas notações:

Seja X_t um processo satisfazendo a equação de diferenças estocásticas

$$\delta X_t = \mu(t, X_t)\,\delta t \pm \sigma(t, X_t)\sqrt{\delta t}.$$

Escrevemos $X_t^+ = X_t + \mu(t,X_t)\,\delta t + \sigma(t,X_t)\sqrt{\delta t}$, $X_t^- = X_t + \mu(t,X_t)\,\delta t - \sigma(t,X_t)\sqrt{\delta t}$ e $X_t^{+\,-} = \left(X_{t+\delta t}^+\right)^-$, $X_t^{-\,+} = \left(X_{t+\delta t}^-\right)^+$. Define-se $\varepsilon(t, X_t)$ por

$$\begin{aligned} \varepsilon(t,X_t) = &\left(\mu(t,X_t)\,\delta t + \sigma(t,X_t)\sqrt{\delta t} + \mu\left(t,X_t^+\right)\delta t - \sigma\left(t,X_t^+\right)\sqrt{\delta t}\right) + \\ &- \left(\mu(t,X_t)\,\delta t - \sigma(t,X_t)\sqrt{\delta t} + \mu\left(t,X_t^-\right)\delta t + \sigma\left(t,X_t^-\right)\sqrt{\delta t}\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$X_t^{+\,-} - X_t^{-\,+} = \varepsilon\,(t, X_t)\,. \qquad (11.1)$$

Teorema 11.13. *Seja X_t um processo quase recombinado satisfazendo a equação de diferenças estocásticas*

$$\delta X_t = \mu\,(t, X_t)\,\delta t \pm \sigma\,(t, X_t)\,\sqrt{\delta t}$$

com μ de classe S^{00} e σ de classe S^{01}.

Então existe um processo recombinado Y_t equivalente ao processo X_t com incrementos δY_t dados por

$$\delta Y_t = \mu'\,(t, Y_t)\,\delta t + \sigma'\,(t, Y_t)\,\delta w_t$$

com $\mu'\,(t, Y_t) = \mu\,(t, X_t) + \eta_t$ e $\sigma'\,(t, Y_t) = \sigma\,(t, X_t) + \zeta_t \delta t^{\frac{1}{2}}$, onde η_t, $\zeta_t \simeq 0$.

Demonstração:

Vamos construir um processo Y_t recombinado ou uma superfície discreta $\widetilde{Y}\,(t, x)$, a partir do nosso processo original.

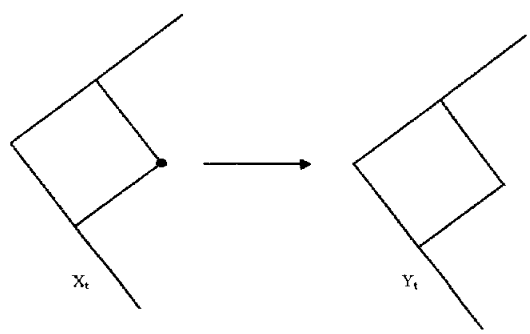


Figura 11.2:

Assim, fazendo:

$\delta Y_0 = \delta X_0$

$\delta Y_{\delta t} =$

$$\begin{cases} \delta Y_{\delta t}\left(\delta t, -\sqrt{\delta t}\right) = \mu\left(\delta t, \widetilde{Y}_{\delta t}\left(\delta t, -\sqrt{\delta t}\right)\right)\delta t + \sigma\left(\delta t, \widetilde{Y}_{\delta t}\left(\delta t, -\sqrt{\delta t}\right)\right)\sqrt{\delta t} \\ \delta Y_{\delta t}\left(\delta t, \sqrt{\delta t}\right) = \mu\left(\delta t, \widetilde{Y}_{\delta t}\left(\delta t, \sqrt{\delta t}\right)\right)\delta t + \sigma\left(\delta t, \widetilde{Y}_{\delta t}\left(\delta t, \sqrt{\delta t}\right)\right)\sqrt{\delta t} - \varepsilon\,(0,0) \end{cases}$$

Observe-se que $Y^{+\,-} = Y^{-\,+}$, e que a superfície discreta $\widetilde{Y}\,(t, x)$ é definida até $2\delta t$.

Suponhamos que a superfície discreta $\widetilde{Y}$ é definida até t. Definimos os passos δY_t que com abuso de linguagem, podemos escrever $\delta Y_t\,(t, x)$ com indução em x. De facto

$$\delta Y_t\left(t, -\frac{t}{\sqrt{\delta t}}\right) = \mu\left(t, \widetilde{Y}_t\left(t, -\frac{t}{\sqrt{\delta t}}\right)\right)\delta t + \sigma\left(t, \widetilde{Y}_t\left(t, -\frac{t}{\sqrt{\delta t}}\right)\right)\delta w_t.$$

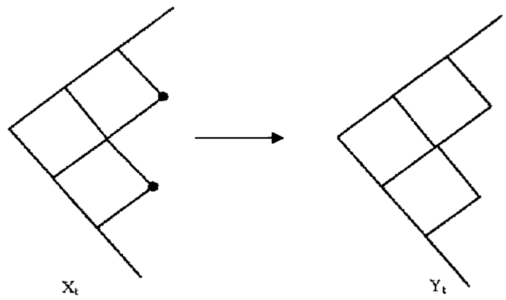


Figura 11.3:

Definemos $\widetilde{Y}\left(t+\delta t,-\frac{t}{\sqrt{\delta t}}\right)=Y_t\left(t,-\frac{t}{\sqrt{\delta t}}\right)+\delta^- Y_t\left(t,-\frac{t}{\sqrt{\delta t}}\right)$.

Suponha-se que $\delta Y_t(t,x)$ *é definida até* x. *Definimos* $\delta Y_t(t,x+\delta x)$ *por*

$$\delta Y_t(t,x+\delta x)=\mu\left(t,\widetilde{Y}_t(t,x+\delta x)\right)\delta t+\sigma\left(t,\widetilde{Y}_t(t,x+\delta x)\right)\delta w_t-\varepsilon\left(t-\delta t,x+\sqrt{\delta t}\right).$$

Segue da fórmula (11.1) *que* $Y_t(t,x)+\delta^+Y_t(t,x)=Y_t(t,x+\delta x)+\delta^-Y_t(t,x+\delta x)$ *e que podemos definir* $\widetilde{Y}(t+\delta t,x+\delta x)=Y_t(t,x)+\delta^+Y_t(t,x)$.

O processo Y_t *assim definido irá ser recombinado.*

Seja $t=n\delta t$ *limitado. No tempo* t *o passo* δY_t *provém no máximo de* n *correcções sobre os passos* δX_t. *Sendo o processo* X_t *quase recombinado, a ordem de grandeza de cada correcção é* $\varnothing\delta t^2$. *Então a sua diferença satisfaz*

$$\delta Y_t-\delta X_t=n\varnothing\delta t^2=n\delta t.\varnothing\delta t=t.\varnothing\delta t=\varnothing\delta t.$$

Segue que δY_t *é da forma*

$$\delta Y_t=\mu'(t,Y_t)\,\delta t+\sigma'(t,Y_t)\,\delta w_t$$

com $\mu'(t,Y_t)=\mu(t,X_t)+\eta_t$ *e* $\sigma'(t,Y_t)=\sigma(t,X_t)+\zeta_t\delta t^{\frac{1}{2}}$, *onde* η_t, $\zeta_t\simeq 0$. *A diferença entre as trajectórias correspondentes será*

$$\begin{aligned}\lambda_{Y(t)}-\lambda_{X(t)} &= \sum_{0\le s<t}(\delta Y_t-\delta X_t)=\sum_{0\le s<t}\varnothing\delta t\\ &= \varnothing.\frac{t}{\delta t}.\delta t=\varnothing.t=\varnothing.\end{aligned}$$

Sendo as probabilidades das trajectórias dos processos X_t *e* Y_t *iguais, podemos assim concluir que os processos* X_t *e* Y_t *são equivalentes.* ■

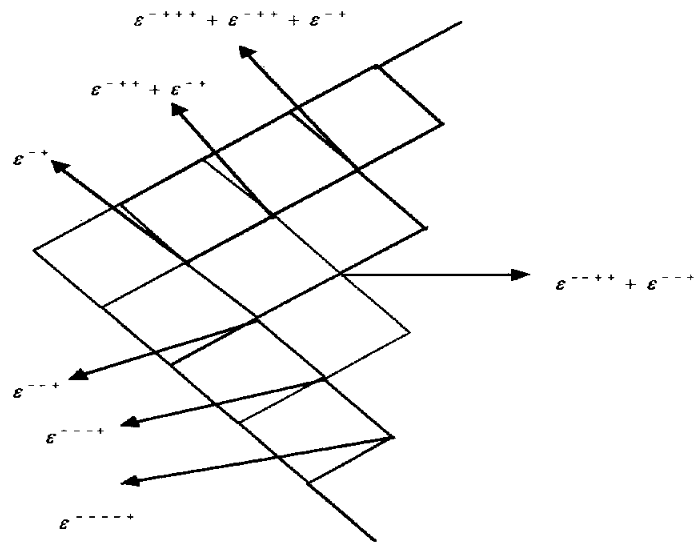


Figura 11.4: Acumulação de correcções aos incrementos do processo X_t

Seja X_t um processo quase recombinado. Definamos para t, x standard

$$\widetilde{X}_S\,(t,x) = {}^0\{(s, X\,(s)) \mid X \text{ é uma trajectória limitada, } s \text{ limitado e } s \simeq t\}$$

a qual é pelo teorema da sombra continua uma aplicação univoca, visto que a cada superfície discreta corresponde a sombra de uma única trajectória continua e vice-versa.. Mostramos que $\widetilde{X}$ é bem definida. Seja α uma trajectória do movimento de Wiener, tal que $\alpha_{X(s)} = x$. Seja Y o processo dado pelo teorema precedente. Seja $s' \simeq t$ e $\alpha_{Y(s')} = x$. Então $X\,(s') \simeq Y\,(s')$ e ${}^0X\,({}^0s') = {}^0Y\,({}^0s')$. Daqui

$$\widetilde{X}_S = {}^0\widetilde{Y}.$$

Observe-se que $\widetilde{X}_S\,(t,x)$ se calcula através das duas equações diferenciais dos teoremas 10.8 e 10.10.

Em conclusão, a esperança de variáveis estocásticas da forma $f\,(X_t)$, que é enunciado no último teorema, calcula-se em analogia ao teorema 10.18.

Teorema 11.14. *Seja X_t um processo quase-recombinado satisfazendo a equação de diferenças estocásticas*

$$\delta X_t = \mu\,(t, X_t)\,\delta t \pm \sigma\,(t, X_t)\,\sqrt{\delta t}$$

com μ de classe S^{00} e σ de classe S^{01}.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função uniformemente S-continua e limitada. Seja T limitado.

Então a esperança de $f(X_T)$ é dada por:

$$Ef(X_T) \simeq \sum_{|x| \leq \frac{T}{\sqrt{\delta t}}} b(T,x) f\left(\widetilde{X}_S(T,x)\right) \delta x.$$

Se T apreciável, tem-se que

$$Ef(X_T) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right) .^0 f\left({}^0\widetilde{X}_S(T,x)\right) dx.$$

Demonstração:
Sendo f uma função de classe S^0, como $X_t \simeq Y_t$ então $f(X_t) \simeq f(Y_t)$.
Pela definição 11.12 podemos concluir que as suas esperanças são infinitamente próximas, isto é

$$E(f(X_t)) \simeq E(f(Y_t)).$$

Ora

$$E(f(Y_t)) = \sum_{|x| \leq \frac{T}{\sqrt{\delta t}}} b(t,x) f\left(\widetilde{Y}(T,x)\right) \delta x \simeq \sum_{|x| \leq \frac{T}{\sqrt{\delta t}}} b(t,x) f\left(\widetilde{X}(T,x)\right) \delta x.$$

Logo

$$E(f(X_t)) \simeq \sum_{|x| \leq \frac{T}{\sqrt{\delta t}}} b(t,x) f\left(\widetilde{X}(T,x)\right) \delta x.$$

A segunda fórmula segue do teorema 10.18. ■

Capítulo VII
Conclusão

Foram enunciados e demonstrados alguns teoremas que nos permitem calcular o valor final de uma trajectória qualquer de um processo recombinado X_t, não percorrendo a trajectória como na fórmula de Ito, mas percorrendo dois caminhos: a trajectória alternada (mediana), e um caminho que é transverso ao processo. Foi feita a aplicação destes teoremas quer no passeio estocástico de Wiener quer no movimento Browniano geométrico. O teorema que nos permite o cálculo da esperança de $f(X_t)$, sendo X_t um processo recombinado e f uma função standard continua definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e com crescimento polinomial também foi enunciado e demonstrado, tendo sido testado em dois exemplos: o primeiro quando consideramos o movimento Browniano geométrico; o segundo num exemplo relacionado com a Matemática Financeira.

Do mesmo modo foi enunciado e demonstrado o teorema para o cálculo da esperança da forma $Ef(X_t)$, sendo X_t um processo quase-recombinado.

A demonstração dos teoremas necessitou de alguns métodos gerais da Análise Não Standard. Tivemos, portanto que enunciar algumas regras de cálculo elementares à mesma. Em particular foi necessário fazer uma transição dos números não standard para números standard e de funções discretas para funções continuas. Tal facto foi possível através da sombra de um número real, ou sombra de uma função. Os meios necessários foram as noções de S-continuidade, S-diferenciabilidade, S-integrabilidade de funções e o teorema da Stroboscopia que nos permite uma transicção geral de equações de diferenças para equações diferenciais. Essencial foi ainda o teorema de De Moivre Laplace, o Passeio Estocástico de Wiener, o Movimento Browniano geométrico e a Equação de Calor.

A Análise Não Standard, permite estudar as diversas àreas da Matemática, mas no meu ponto de vista de uma forma muito mais clara e menos complicada. Talvez fosse bom todo o estudante conhecer a Análise Não Standard, pois em principio iria compreender muito melhor todos os pormenores essenciais para o conhecimento das diversas áreas da Matemática e ao chegar à Matemática Clássica já se compreenderia muito melhor o pretendido nas diferentes áreas.

Capítulo VIII
Bibliografia

References

[1 F. Diener, G. Reeb Analyse Non Standard]

[2 Francine Diener, Marc Diener ; Nonstandard Analysis in Practice Spring]

[3 I. P. Van Den Berg ; Annals of Pure and Applied Logic]

[4 Edward Nelson ; Radically elementary probability theory]

[5 Robert Goldblatt; Lectures on the Hyperreals; An introduction to Nonstard Analysis]

[6 Imme Van den Berg; Principles of infinitesimal Stochastic and Financial Analysis]

j