UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

MESTRADO EM MATEMÁTICA PARA O ENSINO

DISSERTAÇÃO

O Conjunto de Cantor

Carmen da Piedade Maceiras Barreiras

Orientadora:

Professora Doutora Sara Luísa Dimas Fernandes

Abril de 2011

Índice

O Conjunto de Cantor

RESUMO: O objectivo deste trabalho é o estudo aprofundado de um dos fractais mais conhecidos e estudados de sempre, o conjunto de Cantor.

É feita uma abordagem histórica, onde são apresentados os marcos principais da vida e obra de Georg Cantor.

Faz-se uma abordagem rigorosa do Conjunto de Cantor clássico e demonstram-se as suas principais propriedades, usando a definição mais conhecida deste conjunto, como intersecção numerável de conjuntos fechados e encaixados.

Estuda-se o conjunto de Cantor do ponto de vista dinâmico, isto é, como conjunto prisioneiro do sistema dinâmico discreto das iteradas de certas funções no intervalo.

Fez-se o estudo do conjunto de Cantor enquanto fractal, estudando a sua dimensão de Hausdorff, dimensão de capacidade e as propriedades de auto-semelhança.

Finalmente propõem-se actividades de sala de aula no âmbito das matérias estudadas.

PALAVRAS-CHAVE:

Conjunto de Cantor; Sistema Dinâmico Discreto; Dimensão Fractal; Ensino da Matemática

Cantor Set

ABSTRACT: The aim of this paper is a detailed study of one of the most known and studied fractals of all time, the Cantor set.

It is made a historical approach, which presents the major landmarks of life and work of Georg Cantor.

Is done a serious approach to the classical Cantor set and its main properties are proven, using the better known definition of this set as a countable intersection of closed nested sets.

The Cantor set is studied from the dynamic point of view, that means, as the prisoner set of a discrete dynamical system of the iterates of certain functions in the interval.

It is made the study of the Cantor set as a fractal, studying its Hausdorff dimension, box-counting dimension and the properties of self-similarity.

Finally, are proposed classroom activities within the subject matter.

KEY-WORDS:

Cantor set; Discrete Dynamic System, Dimension Fractal; Educational Mathematics

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos meus pais pela paciência e pelas palavras ânimo e incentivo que sempre recebi da sua parte.

Um agradecimento especial à Professora Doutora Sara Luísa Dimas Fernandes pela sua orientação, cooperação e compreensão ao longo da realização deste trabalho.

Agradeço, especialmente, a paciência e disponibilidade que sempre teve quando a solicitei.

.

Capítulo 1

Introdução

A teria dos fractais sempre despertou o meu interesse, e quando deparei pela primeira vez com o conjunto de Cantor, fiquei muito curiosa sobre este fractal e pela pessoa que o havia criado. Foi essa curiosidade que me levou a decidir fazer a minha tese sobre este tema.

À medida que avançava nas pesquisas sobre o tema escolhido, mais gostava e mais fascinada ficava com o tema, primeiro, porque descobri que conhecia pouco sobre o grande matemático, que foi e sempre será Georg Cantor, um matemático que revolucionou toda a matemática moderna, segundo, porque o conjunto que leva o seu nome é um "poço" inesgotável de conceitos, muitos deles leccionados no terceiro ciclo do ensino básico mas sobretudo no ensino secundário. Quanto mais investigava, mais descobria e mais me surpreendia com o trabalho que Georg Cantor desenvolveu.

A escolha deste tema surgiu durante a realização de um trabalho para a disciplina *Caos e Fractais em sala de Aula*. A teoria dos fractais sempre me fascinou, pois via-a como algo completamente novo para mim, pois só durante a minha licenciatura em ensino de Matemática, ouvi falar em fractais.

A teoria dos fractais foi uma descoberta para mim nos meus anos de universidade, pois estas figuras irregulares que só aqui fiquei a saber que se chamam fractais, sempre despertaram a minha curiosidade, pela sua beleza, pela sua complexidade e porque por detrás dessa beleza existe muita matemática.

A teoria dos fractais, contendo imagens de especial beleza, conseguem cativar os alunos, permitindo-lhes desenvolver o espírito experimental e crítico de forma a entender a geometria de objectos que não são tradicionais e de estabelecer modelos matemáticos para os resolver.

José Sebastião e Silva afirma, no seu livro *Guia para a utilização do compêndio de Matemática*, 1^o volume, que: *"Ensinar Matemática sem mostrar a origem e a finalidade dos conceitos é como falar de cores a um daltónico: é construir no vazio."*

Pretendo contribuir para que o processo ensino/aprendizagem da geometria e do cálculo, que são uma parte muito importante do currículo do ensino básico e secundário, seja mais empolgante, e que motive os alunos para a descoberta de novas situações e cujo programa descreve como uma das suas finalidades:

"Estabelecer conexões entre a Geometria, a Matemática discreta e a Análise Infinitesimal, envolvendo padrões geométricos e numéricos, os conceitos de medida, sucessões, iteração e limites, ao mesmo tempo que se adicionem novas ideias como a auto-semelhança e a dimensão fractal."

O conjunto de Cantor, que estudamos neste trabalho, é, provavelmente, o conjunto mais conhecido no mundo dos Matemáticos. Tem sido objecto de estudo dos mais variados pontos de vista e tema de inúmeras teses académicas e artigos científicos.

Esta dissertação procura uma ponte entre essas abordagens científicas e os conteúdos programáticos de Matemática dos ensinos básico e secundário em Portugal. A dissertação está escrita, sempre que possível, numa linguagem matemática adequada a estes níveis de ensino. Procurámos, em cada capítulo, dar uma perspectiva intuitiva antes da abordagem formal de cada conteúdo.

Esta dissertação está dividida em sete capítulos.

O segundo capítulo é uma breve referência à vida e obra deste grande e por vezes incompreendido matemático que foi Georg Cantor. Durante as leituras que fiz para escrever este capítulo fiquei muito surpreendida com a sua forma de ser, pois ele era uma pessoa que preferia não mostrar os seus verdadeiros sentimentos, pois tinha medo de magoar alguém e preferia guardar para si as suas angústias, o que inicialmente se pensava estar relacionado com as depressões que sofreu ao longo da sua vida. No entanto, apesar do seu carácter, ele criou toda uma matemática que veio revolucionar o pensamento matemático nos finais do século dezanove e inícios do século vinte. O seu trabalho só obteve o devido reconhecimento já no final da sua vida.

No terceiro capítulo resumimos alguns conceitos topológicos que serão de grande utilidade nos próximos capítulos, onde se revêem alguns conceitos básicos e resultados que são necessários para provar algumas propriedades do conjunto de Cantor.

No quarto capítulo apresentamos o conjunto de Cantor, de duas formas diferentes. Uma delas é bastante intuitiva, por isso, mais fácil de entender, a outra é mais formal e rigorosa no sentido matemático, necessária para a demonstração das propriedades fundamentais deste conjunto. Caracterizamos os elementos do conjunto de Cantor como sendo os números pertencentes ao intervalo $[0; 1]$, em cuja expansão ternária não aparece o dígito 1. Estudaremos algumas propriedades topológicas do conjunto de Cantor que o distinguem, como é o caso de ser um conjunto totalmente desconexo, raro, compacto e perfeito.

No capítulo cinco introduz-se o sistema das iteradas da função Tenda com declive

3 e faz-se um estudo intuitivo do conjunto de Cantor como o conjunto prisioneiro deste sistema. Seguidamente, com maior rigor, introduz-se o conjunto prisioneiro de uma família de funções quadráticas e demonstra-se que, para certos valores do parâmetro, este conjunto prisioneiro tem as propriedades fundamentais já demonstradas para o conjunto de Cantor.

O capítulo seis, apresenta o conjunto de Cantor como um fractal, e aí, calculamos a sua dimensão de três formas diferentes, sendo estas equivalentes, dimensão por auto-semelhança, dimensão de capacidade e por último a dimensão de Hausdorff. Nas três formas veremos que a dimensão do conjunto de Cantor é maior que 0 e menor que 1.

No último capítulo é feito o enquadramento do conjunto de Cantor nos programas de Matemática dos terceiro ciclo do ensino básico e ensino secundário, quais os conteúdos e conceitos onde pode ser incluído o conjunto de Cantor. Por fim, são apresentadas duas actividades, a título de exemplo, sobre o conjunto de Cantor que podem ser utilizadas nos níveis de ensino referidos.

As figuras do capítulo cinco foram produzidas com recurso ao Programa Maxima, que é um projecto de software livre de álgebra computacional iniciado no Massachussets Institute of Tecnology nos finais dos anos 60 e que perdura até aos nossos dias graças ao esforço voluntário de um grupo cada vez maior de adeptos.

Capítulo 2

A Vida e Obra de Georg Cantor

Georg Ferdinand Ludwing Philip Cantor, nasceu no dia 3 de Março de 1845, em São Petersburg, na Rússia, onde viveu até aos 11 anos.

Era o mais velho dos seis filhos, de um comerciante dinamarquês, Georg Waldemar Cantor, que trabalhava como agente de vendas em S. Petersburg e, mais tarde, como agente da Bolsa de S. Petersburg. O seu pai era um homem com um profundo amor pela cultura e pela arte. A mãe de Cantor era uma música russa, Maria Anna Böhm. Certamente, Cantor herdou os talentos musicais e artísticos dos seus pais, pois foi um excelente violinista.

Após uma educação infantil em casa com um professor particular, Cantor frequentou a escola primária de S. Petersburg, onde permaneceu até 1856, uma vez que a sua família teve que se mudar para a Alemanha, devido à doença de seu pai. Esta mudança deveu-se essencialmente, ao facto, de seu pai necessitar de um clima que apresentasse Invernos mais amenos que os de S. Petersburg.

Inicialmente, a família ficou a viver em Wiesbaden, onde frequentou o Gymnasium e, só mais tarde, se mudaram para Frankfurt.

Aí, Cantor estudou no Colégio Real Darmstadt, o qual concluiu, em 1860, com distinção. Já nesse tempo, ele demonstrava uma habilidade e destreza matemática, que se fizeram notar, sobretudo na área da Trigonometria. Então, o seu pai decidiu que ele havia de ser um grande engenheiro, o que o levou a frequentar o Instituto Superior Politécnico Grand-Ducal para estudar engenharia.

Ele sentia que essa não era a sua verdadeira vocação, no entanto, não o queria desiludir nem ir contra a vontade do seu pai.

Estando longe da influência da família, tomou a coragem e escreveu ao seu pai uma carta a pedir-lhe autorização para estudar Matemática. Esta autorização só lhe foi concedida ao fim de dois anos, quando já se encontrava perto do fim da sua licenciatura em engenharia.

Assim, em 1862, Cantor viajou para Zurique para aí continuar os seus estudos, mas depressa teve que voltar a casa, devido à morte de seu pai, em Junho de 1863. Esta situação, levou a que Cantor tivesse que mudar-se para a Universidade de Berlim, onde foi estudar Matemática, Física e Filosofia. Aí teve como professores a brilhantes matemáticos, tais como: Kummer, Weiestrass e Kronecker.

Em 1866, passou o Verão na Universidade de Göttinger, tendo depois regressado a Berlim para terminar a sua tese sobre a Teoria dos Números: "De Aequationibus secundi gradus indeterminatis" (sobre as equações indeterminadas de 2^o grau) em 1867.

Enquanto esteve em Berlim, Cantor manteve um contacto muito próximo com a Sociedade de Matemática da qual foi presidente. Neste mesmo período fez parte, também, de um grupo de jovens matemáticos que se reunia todas as semanas para discutir as suas ideias.

Quando terminou a sua tese, como não havia lugares disponíveis, na sua Universidade, ele foi leccionar numa escola privada feminina.

No entanto, dois anos mais tarde, ingressou na Universidade de Halle, uma instituição de ensino pouco prestigiada, onde esteve toda a sua carreira, até à sua aposentação.

Estando já a trabalhar na universidade de Halle, Cantor abandonou as investigações sobre a Teoria dos Números e focou-se na Análise. Esta mudança deveu-se ao facto de o seu colega Heine o ter desafiado a que resolvesse um problema que continuava sem solução. Esse problema era sobre a unicidade da representação de uma função como uma série trigonométrica. Cantor conseguiu resolver esse problema em Abril de 1870. Durante os anos de 1870 a 1872, Georg Cantor publicou vários artigos relacionados com séries trigonométricas.

Em 1872, Cantor foi promovido a professor extraordinário, ano em que publicou um artigo sobre as séries trigonométricas, onde definiu os números irracionais como sucessões convergentes de números racionais. No ano seguinte, Cantor provou que os números racionais são enumeráveis, ou seja, que se podem dispor numa correspondência biunívoca com os números naturais, mostrou, também, que os números algébricos, ou seja, os números que são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros, são enumeráveis, no entanto, não conseguiu provar que os números reais também eram enumeráveis. Cantor nunca deixou de tentar provar esta sua ideia, no entanto, no final do ano de 1873, conseguiu provar o contrário, ou seja, que o conjunto dos números reais não é enumerável. Esta demonstração foi publicada no ano de 1874, e nela Cantor utiliza o conhecido argumento da diagonal de Cantor ou método diagonal. É neste artigo que ele apresenta, pela primeira vez, a noção de correspondência biunívoca, ainda que de forma implícita.

Ainda durante o ano de 1874 mostrou que os números transcendentes, ou seja, um número irracional que não é raíz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros, são "quase todos".

Em 1874, com 29 anos, casou com Vally Guttmann de quem teve seis filhos. Foi passar a sua lua de mel, em Interlaken, na Suíça. Estando aí, Cantor passou longas horas discutindo as suas teorias com Julius Wilhelm Richard Dedekind, pois, tanto Cantor como Dedekind eram relativamente desprezados pelo resto da comunidade matemática, pois esta não aceitava as suas ideias demasiado geniais para a época.

Em 1878, Cantor redigiu um documento sobre dimensão, o qual enviou ao *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (*Crelle's Journal*), que era dirigido pelo matemático Kronecker. Kronecker não publicou este artigo até que Dedekind interveio a favor de Cantor. Este ficou muito ressentido com Kronecker e nunca mais voltou a enviar nenhum artigo seu a este jornal. Neste artigo Cantor apresenta o conceito exacto de correspondência biunívoca, analisa os conjuntos enumeráveis, faz o estudo sobre os conjuntos de igual potência, ou seja, os que estão em correspondência biunívoca.

Durante os anos de 1879 a 1884 Cantor publicou seis artigos na revista *Mathematische Annalen*, que serviram de introdução à Teoria dos Conjuntos. Foi também durante este período de tempo, que Cantor terminou a sua correspondência com Dedekind, pois este, havia recusado um convite seu para ocupar um lugar na universidade de Halle, que tinha ficado vago devido à morte de Heine. Quase ao mesmo tempo que terminava a correspondência com Dedekind, iniciava outra com Mittag-Leffler, que tinha uma revista, a *Acta Matemática,* onde Cantor publicou alguns trabalhos seus. No entanto os artigos mais importantes continuavam a ser publicados na revista *Mathematische Annalen.* Foi o quinto destes seis artigos, o mais importante, por diversas razões, primeiro, porque Cantor deu-se conta que a sua teoria do conjuntos não tinha a aceitação que ele pensava, tal como ele próprio o reconheceu, em segundo lugar, porque foi neste artigo que apresentou os números transfinitos (números cardinais ou ordinais que são maiores que todos os números finitos) como uma extensão autónoma e sistemática dos números naturais e menor que a dos reais.

Foi a este jovem matemático que Cantor fez as queixas sobre o comportamento que Kronecker tinha para com ele, rejeitando todos os seus trabalhos e pondo em dúvida todas as suas descobertas. Este enfrentamento com Kronecker, levou a que Cantor tivesse a sua primeira depressão em Maio de 1884. Algumas semanas depois recuperou-se, e tentou uma aproximação com Kronecker, a qual foi aceite, no entanto, as divergências entre ambos continuavam, pois tinham pontos de vista totalmente opostos. A partir desta altura as suas angústias tornaram-se um problema para ele, e, principalmente, porque não conseguia demonstrar a hipótese do contínuo, ou seja, demonstrar que não existe nenhum conjunto com cardinalidade maior que a cardinalidade do conjunto dos números naturais e menor do que a cardinalidade dos números reais.

Cantor sempre deu uma palavra de animo e de coragem aos jovens matemáticos que lutavam pelo seu lugar na comunidade matemática e vissem reconhecido o seu trabalho. Por isso, fundou o jornal Deutsche Mathematiker-Vereinigung, que servia para que esses jovens matemáticos publicassem os seus artigos que não conseguiam publicar em jornais controlados pelos matemáticos já conceituados.

Os seus últimos artigos importantes foram publicados entre os anos de 1895 e 1897. Estes artigos estavam relacionados com a Teoria dos Conjuntos e sobre a aritmética transfinita, aí descreve a sua teoria dos conjuntos bem ordenados e dos números ordinais. No ano de 1897 ele próprio descobriu vários paradoxos suscitados pela Teoria dos Conjuntos, que ele criou.

Durante um congresso voltou a reatar a sua amizade com Dedekind e começaram a corresponder-se novamente. A correspondência entre Dedekind e Cantor viu-se forçada a terminar devido a uma nova depressão de Cantor, decorria o ano de 1899. Durante os períodos em que sofria de depressão, Cantor afastava-se da matemática e aproximava-se da filosofia e da literatura, chegando ao ponto de acreditar firmemente que quem escrevia as obras de Shakespeare era Francis Bacon. No final deste mesmo ano, faleceu o seu filho mais novo, o que levou a que Cantor ficasse em depressão, da qual não se recuperou até ao final da sua vida.

No ano de 1903, durante uma assembleia da *Deutsche Mathematiker-Vereinignum,* deu uma conferência sobre o paradoxo da Teoria de Conjuntos.

Cantor retirou-se da universidade no ano de 1913 e passou os seus últimos anos de vida muito doente e em precária situação económica, faleceu no dia 6 de Janeiro de 1918 de um ataque cardíaco, num hospital psiquiátrico

Georg Cantor criou conceitos inovadores que tiveram muita resistência por parte da comunidade matemática da sua época, no entanto os matemáticos modernos aceitavam o trabalho que ele desenvolveu na Teoria dos Conjuntos, tal como se pode apreciar nas palavras de Hilbert: *"Ninguém nos poderá expulsar do Paraíso que Cantor criou."*

Foi durante a criação da Teoria dos Conjuntos que Cantor chegou ao conceito de número transfinito, número ordinal e cardinal, estabelecendo a diferença entre estes dois conceitos. Ele utilizou uma notação própria para representar os números cardinais, a letra hebraica $\aleph$ (aleph) e para os números ordinais, a letra grega ω (ómega), esta notação mantém-se até aos nossos dias

Apesar de todas as críticas que recebeu durante a sua vida, Georg Cantor, hoje em dia, é considerado o estudioso mais importante na história do pensamento sobre o infinito matemático, pois as suas teorias, levaram ao aparecimento de uma disciplina totalmente estruturada e com métodos diferenciados dentro da matemática, uma vez que a Teoria de Conjuntos, tem até hoje influência em quase todas as áreas da matemática ensinada tanto no ensino básico e secundário, como no universitário.

2.1 O conjunto dos números racionais é enumerável

O conjunto dos números racionais apresentou, inicialmente, alguns problemas quanto ao método de contagem dos seus elementos, pois entre dois números inteiros quaisquer, existe uma infinidade de números racionais.

Cantor começou por procurar atribuir "tamanho" aos diversos conjuntos com infinitos elementos, a que ele chamou potência. Dois conjuntos têm a mesma potência se existir uma correspondência biunívoca entre eles.

Ao conjunto dos números naturais ele atribuiu a potência, representada pela letra $\aleph_0$ (aleph-zero), que é o menor dos números transfinitos.

O $\aleph_0$ passou a servir de comparação para o estudo de outros conjuntos com infinitos elementos.

Quando os elementos de um conjunto se podem pôr em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais, diz-se que este conjunto é **contável** ou **enumerável** e a sua potência é $\aleph_0$.

Um importante conjunto que foi comparado com o conjunto dos números naturais foi o conjunto dos números racionais.

Cantor demonstrou que o conjunto do números racionais pode ser enumerado, ou seja, que este pode ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais.

Cantor começou por colocar os números racionais em linhas e colunas, em que cada linha tem denominador constante, começando no 1, de tal forma que a $n - ésima$ linha tenha todos os denominadores iguais a n. A $m - ésima$ coluna é composta por fracções de numerador m. Os numeradores, de cada linha, são dispostos por ordem crescente, começando no 0 (ver figura 2-1). Podemos continuar cada linha e cada coluna infini tamente, dessa forma garantimos que cada número racional deverá estar representado nalgum local. Assim, facilmente se vê que todos os números racionais positivos estão ali contidos, apesar de existirem muitos racionais que se repetem.

A enumeração é feita seguindo a ordem indicada pelas setas, desta forma, podemos contar os números racionais, sendo omitido qualquer racional que tenha aparecido previa-

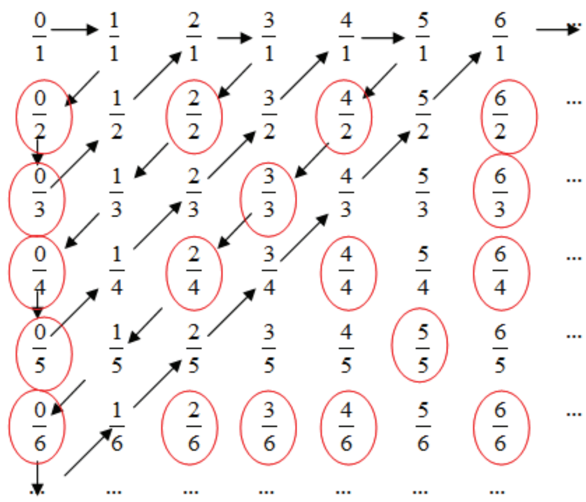


Figura 2-1: Os números racionais são contáveis.

mente. Por exemplo, não contaremos o $\frac{2}{2}$, dado que o número que representa esta fracção já tinha aparecido anteriormente sob a forma $\frac{1}{1}$. Temos pois que a emuneração começa da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \ldots \end{array}$$

Claramente, se pode ver que existe, aqui, uma correspondência um-a-um dos racionais positivos com os inteiros positivos. Para os racionais negativos faz-se um raciocínio análogo.

Desta forma, pode-se concluir que a potência dos números racionais é a mesma dos números naturais, ou seja, $\aleph_0$.

2.2 O Conjunto de Cantor

Cantor não foi o primeiro a descobrir o conjunto que leva o seu nome, como hoje em dia é conhecido. A descoberta deste conjunto não foi motivada pela geometria ou por algo que estivesse relacionado com ela.

De facto, Cantor chegou até ele através de um programa puramente aritmético.

O estudo sistemático da topologia de conjuntos da recta real surgiu durante os anos de 1870-1885, quando a maioria dos matemáticos investigavam dois problemas:

1^o - As condições segundo as quais uma função admitia um integral;

2^o - A unicidade das séries trigonométricas.

Foi, justamente, no meio destas investigações que foram feitas duas descobertas, aparentemente, independentes do conjunto de Cantor. Cada uma dessas descobertas estava relacionada com um destes problemas.

Bernhard Riemann (1826 - 1886) dedicou muito tempo a estudar o primeiro problema e sugeriu algumas condições que poderiam ser uma resposta.

Apesar de não as discutirmos, notamos que uma dessas condições é importante, já que poderá ter guiado o desenvolvimento da teoria de Medida e Integração.

Um matemático, que deu um grande incentivo e desenvolveu um trabalho crucial, aprofundando o trabalho já realizado por Riemann, foi Herman Hankel (1839 - 1873), nos inícios do ano de 1870. Hankel mostrou, baseando-se no trabalho de Riemann, que a integrabilidade de uma função depende da natureza de certos conjuntos de pontos relacionados com a função. Em particular, "uma função é Riemann-integrável se e só se é pontualmente descontínua", o que nos nossos dias significa, que, para cada $\sigma > 0$ o conjunto de pontos x onde a função oscila mais que σ em cada vizinhança de x, é um *conjunto* *raro.* O trabalho desenvolvido por Hankel, teve como base, o facto de ele acreditar que os conjuntos da forma $\{\frac{1}{2^n}\}$ serem protótipos para todos os subconjuntos *raros* na recta real. Hankel afirmava que todos os subconjuntos *raros* da recta real podiam ser cobertos por intervalos de comprimento arbitrariamente pequeno, ou seja, que tinham medida exterior igual a zero. Hoje sabemos que tal não se verifica.

Apesar da investigação de Hankel sobre a natureza de certos conjuntos de pontos ter sido muito importante, o facto de ele não ter considerado a possibilidade de conjuntos infinitos - em particular, conjuntos infinitos *raros*, levou-o por um caminho errado.

Só quando se descobriu que os conjuntos *raros* podiam ter medida exterior positiva é que a importância dos conjuntos de medida nula na teoria da medida, foi reconhecida.

A descoberta destes conjuntos, *raros* com medida positiva, foi feito por Henry J. S. Smith (1826 - 1883), professor de Geometria em Oxford, num ensaio de 1875.

Depois de uma exposição sobre integração de funções descontínuas, Smith apresentou um método para construir conjuntos *raros* que foi muito mais "substancial" que o conjunto $\{\frac{1}{2^n}\}$. Ele observou o seguinte:

... Let m be any given integral number greater than 2*. Divide the interval from* 0 *to* 1 *into m equal parts; and exempt the last segment from any subsequent division. Divide each of the remaining $m-1$ segments from any subsequent subdivision. If this operation be continued* ad infinitum*, we shall obtain an infinite number of points of division P upon the line from* 0 *to* 1*. This points lie in loose order ...*

Na terminologia moderna, a expressão *"loose order"* usada por Smith é o que nós chamamos de *conjuntos raros.* Está implícito no trabalho de Smith, a suposição de que os intervalos extraídos são abertos, e que os restantes intervalos são fechados. Hoje em dia, este conjunto é conhecido mundialmente, como o conjunto de Cantor, e esta parece ser a primeira vez que se apresentava este tipo de conjunto. No mesmo ensaio, Smith mostra que ao se dividir os intervalos restantes antes do passo n em m^n partes iguais e extraindo-se o último segmento de cada subdivisão, obtém-se um conjunto *raro* de medida exterior positiva.

Smith teve consciência da sua descoberta, e declara o seguinte: *"o resultado obtido no último exemplo merece atenção, porque se opõe à teoria de funções descontínuas, a qual recebeu uma sanção de um eminente geómetra, Dr. Hermann Hankel."*, e continua a explicar as dificuldades na teoria de Integração que o seu exemplo mostra. É interessante notar que o ensaio de Smith foi largamente ignorado entre os matemáticos europeus e desafortunadamente os seus descobrimentos cruciais ficaram desconhecidos.

Uma década depois, foi feita uma redescoberta similar por Cantor, que ilustrava as dificuldades das teorias contemporâneas de Integração e o começo da evolução da teoria de Medida e Integração.

Georg Cantor (1845 - 1918) estudou a topologia geral depois de terminar a sua tese em Teoria de Números, em Berlim, no ano de 1867. Começou a estudar com Eduard Heine (1821 - 1881) na Universidade de Halle a unicidade de séries trigonométricas. Este problema pode ser posto da seguinte forma:

Se para todo x, excepto em algum conjunto P, se tem que

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n sen(nx)\right) = 0$$

os coeficientes a_n e b_n terão que ser zero?

Heine respondeu a esta questão afirmativamente *"quando a convergência seja uniforme,* *no geral, no respeitante ao conjunto P, o qual é finito."*, querendo dizer, por definição, que a convergência seja uniforme em cada subintervalo que não tenha pontos do conjunto finito P.

No entanto, Cantor avançou mais neste problema. Em documentos de 1870 e 1871 removeu a hipótese de que a convergência seja *"uniforme no geral"* e começou a considerar o caso onde P é um conjunto infinito.

Num ensaio, de 1872, Cantor introduziu a noção de *ponto de acumulação* de um conjunto, que ele definiu tal como hoje o fazemos. Chamou aos pontos de acumulação de um conjunto, o *conjunto derivado*, o qual denotou por P'. Então P'' era o conjunto derivado de P' e assim sucessivamente.

Cantor mostrou que se o conjunto P era tal que $P^{(n)} = \emptyset$ para algum inteiro n e a série trigonométrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n sen(nx)\right) = 0,$$

excepto, possivelmente, em P, então todos os coeficientes devem ser zero. O trabalho de Cantor neste problema foi decisivo, e duplamente importante, já que os conjuntos derivados teriam um papel importante nos seus trabalhos futuros.

Durante os anos de 1879 - 1884 Cantor escreveu uma série de ensaios intitulados *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, que contém o primeiro tratado sistemático de topologia de conjuntos da recta real. Em particular, interessa-nos a introdução de três conceitos nesta série. Cantor define o que se conhece como conjunto *denso*, cuja nomenclatura ainda hoje é utilizada. Dá alguns exemplos, incluindo o conjunto de números da forma $\frac{2^{2n+1}}{2^m}$, onde n e m são inteiros e continua notando que a relação entre conjuntos densos e os seus conjuntos derivados. Ou seja, $P \subset (\alpha, \beta)$ é denso em (α, β) se (e só se) $P' = (\alpha, \beta)$.

Cantor discute, também, a partição de um conjunto em duas componentes, que ele qualifica como *redutível* e *perfeita*. A sua definição de conjunto perfeito, ainda hoje está vigente: *Um conjunto P é perfeito se satisfaz $P = P'$.*

Cantor afirma que os conjuntos perfeitos não são necessariamente densos.

Como nota a essa afirmação, Cantor introduz o conjunto que viria a ser conhecido como o Conjunto Ternário de Cantor: *o conjunto de números reais da forma*

$$x = \frac{c_1}{3} + ... + \frac{c_v}{3^v} + ...$$

onde c_v é 0 ou 2 para cada natural v.

Cantor nota que este conjunto é infinito e perfeito, com a propriedade de que não é denso em nenhum intervalo, por muito pequeno que este seja.

Durante o tempo em que Cantor trabalhou estes problemas, os outros matemáticos estavam a trabalhar em extensões do Teorema Fundamental do Cálculo para funções descontínuas.

Cantor dirigiu esta questão numa carta fechada em Novembro de 1883, na qual define o conjunto de Cantor, tal como já o havia descrito num dos seus ensaios anteriores. Ainda nesta carta Cantor, define a Função de Cantor, esta é a primeira vez que se fala desta função.

Definiu-se, primeiro, no complemento do conjunto de Cantor, como a função cujos valores são

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{2} + ... + \frac{c_{\mu-1}}{2^{\mu-1}} + \frac{2}{2^\mu}\right)$$

para qualquer inteiro entre

$$a = \frac{c_1}{3} + ... + \frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}} + \frac{1}{3^\mu}$$

e

$$b = \frac{c_1}{3} + ... + \frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}} + \frac{2}{3^\mu},$$

onde cada c_v é 0 ou 2. Cantor concluiu esta secção da carta fazendo notar que esta função pode ser estendida a uma função contínua e crescente em $[0;1]$. Esta serve como contra-exemplo a extensão de Harnack do Teorema Fundamental do Cálculo para funções descontínuas, o qual estava na moda naquele tempo.

Cantor passou algum tempo no ano de 1870 considerando a possibilidade da existência de uma correspondência bijectiva entre uma recta e um plano. Em 1887, numa carta a Richard Dedekind (1831 - 1916), Cantor explicou que tinha encontrado essa correspondência:

"Let (x_1, x_2) *be a point in the unit square, and let* $0.x_{1,1}x_{1,2}x_{1,3}....$ *e* $0.x_{2,1}x_{2,2}x_{2,3}......$ *be decimal expansions of* x_1 *and* x_2 *respectively. Map the point* (x_1, x_2) *to the point on the real line whose decimal expansion is* $0.x_{1,1}x_{2,1}x_{1,2}x_{2,2}....$*"*

Esta constatação feita pelo Cantor é uma correspondência injectiva entre o intervalo $[0;1]$ e $[0;1] \times [0;1]$.

Não existe evidência de como Cantor determinou o conjunto e a função de Cantor. No entanto, J. F. Fleron propõe a seguinte hipótese: *Pelo caminho que tomou Cantor, na topologia geral, a sua introdução aritmética do conjunto de Cantor e da função de Cantor, e a sua facilidade com os métodos aritméticos, é possível que seja dentro do* *quadro aritmético de expansões binárias e ternárias que Cantor se aproximou do conjunto de Cantor e da função de Cantor.*

Capítulo 3

Noções Preliminares

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos topológicos que serão utilizados para provar algumas das importantes propriedades do conjunto de Cantor. Estas serão apresentadas no próximo capítulo.

Definição 3.1 *a) Uma família τ de subconjuntos de um conjunto X diz-se uma* ***topologia*** *em X se τ tiver as três seguintes propriedades:*

i) $\varnothing \in \tau$ e $X \in \tau$.

ii) Se $V_i \in \tau$, para $i = 1, 2, ..., n$, então $V_1 \cap V_2 \cap ... \cap V_n \in \tau$.

iii) Se $\{V_\alpha\}$ for uma família arbitrária de elementos de τ (finitas contáveis ou incontáveis), então $\bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha \in \tau$.

b) Se τ for uma topologia em X então (X, τ) chama-se um espaço topológico e os elementos de τ são chamados conjuntos abertos em X.

Em todo este capítulo consideremos (X, τ) um espaço topológico e S um subconjunto de X.

Definição 3.2 *Um ponto $x \in S$, chama-se um ponto* ***interior*** *de S quando existe um* *conjunto aberto A de X tal que $x \in A \subset S$.*

Definição 3.3 *O **interior** de S é o conjunto formado pelos pontos interiores de S e denota-se S^o.*

Proposição 3.4 *O interior de um conjunto S, num espaço topológico X, é a reunião de todos os subconjuntos abertos de X que estão contidos em S. Em particular, S^o é aberto em X.*

Definição 3.5 *Num espaço topológico X, diz-se que um conjunto V é uma **vizinhança** de um ponto $x \in X$ quando $x \in V^o$, isto é, que V contém um aberto que contém x.*

Definição 3.6 *O **exterior** de um subconjunto S num espaço topológico X é o conjunto $ext\,(S) = \{x \in S : \text{ existe } A \text{ aberto,com } x \in A \subset X - S\ \}$*

Definição 3.7 *A **fronteira** de um subconjunto S de um espaço topológico X é o conjunto $fr\,(S)$ formado por todos os pontos $x \in X$ tais que toda a vizinhança de x contém pontos de S e do complementar $X - S$.*

Isto que dizer, para que $x \in fr\,(S)$ é necessário e suficiente que x não pertença nem ao interior de S nem ao exterior de $X - S$.

Definição 3.8 *Um ponto $x \in X$ diz-se **aderente** a S quando toda a vizinhança de x em X contém pelo menos um ponto de S.*

Definição 3.9 *O conjunto dos pontos X que são aderentes a S chama-se o **fecho** de S e denota-se $\overline{S}$.*

Definição 3.10 *O conjunto S é fechado se $\overline{S} = S$.*

De facto, o fecho de qualquer conjunto é um subconjunto fechado, visto ser a intersecção de conjuntos fechados.

Teorema 3.11 *A união de uma família finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

A demonstração deste resultado pode ser consultada em [12]

Teorema 3.12 *A intersecção de um número finito ou infinito de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

A demonstração deste resultado pode ser consultada em [12]

Definição 3.13 *Um ponto $x \in X$, chama-se **ponto de acumulação** de S quando toda a vizinhança de V de x em X contém algum ponto $s \in S$, distinto de x.*

Definição 3.14 *O conjunto dos pontos de acumulação de S chama-se o **derivado** de S e denota-se S'.*

Definição 3.15 *Um espaço topológico X chama-se **conexo** quando o $\emptyset$ e o X são os únicos subconjuntos de X, simultaneamente abertos e fechados.*

Ou seja, um espaço topológico X é conexo, se e só se, não pode ser expresso como a reunião de dois subconjuntos abertos, disjuntos e não-vazios.

Definição 3.16 *Um subconjunto S de um espaço topológico X chama-se **conexo**, quando, com a topologia induzida de X, S é um espaço conexo.*

Definição 3.17 *Um espaço topológico X diz-se **totalmente desconexo** quando os seus únicos subconjuntos conexos são o $\emptyset$ e os seus pontos, isto equivale a dizer que as suas componentes conexas são pontos.*

Um subconjunto da recta real é totalmente desconexo se e só se, não contém nenhum intervalo.

Definição 3.18 *S é um conjunto* ***denso,*** *se* $\overline{S} = X$.

Definição 3.19 *S é um conjunto* ***raro****, se o seu fecho é o conjunto fronteira,* $fr\,(S)$.

No intervalo $[0;1]$, o conjunto de Cantor é um conjunto raro, como veremos no próximo capítulo.

Definição 3.20 *Um conjunto diz-se* ***denso em si próprio*** *se S não contém pontos isolados, isto é,* $S \subset S'$.

Definição 3.21 *Se S é fechado e denso em si próprio, diz-se que S é um conjunto* ***perfeito****, isto é,* $S = S'$.

Nota 3.22 *Este conceito foi introduzido por Georg Cantor, pela primeira vez, em 1884, tal como pode ser consultado em [11]*

Teorema 3.23 *Se S é denso em si próprio, então $\overline{S}$ é um conjunto perfeito.*

A demonstração deste resultado pode ser consultada em

Definição 3.24 *Um subconjunto da recta real é compacto, se é limitado e fechado.*

A demonstração deste resultado pode ser consultada em [12]

Capítulo 4

O Conjunto de Cantor e suas Propriedades

O conjunto de Cantor é um subconjunto fractal do intervalo $[0;1]$, que admite duas definições equivalentes:

Definição Numérica:

É o conjunto de todos os pontos do intervalo $[0;1]$ que admite uma expressão escrita na base 3 onde não aparece o algarismo 1.

Definição Geométrica:

O conjunto de Cantor, obtém-se, através de um processo recursivo, que consiste em retirar, aos intervalos fechados de cada etapa, o segmento de recta que corresponde ao terço central aberto de cada intervalo fechado. Ao conjunto de pontos resultante, que se obtém chama-se *Conjunto de Cantor*.

Note-se que, em cada etapa ficamos com dois segmentos que serão novamente divididos em três partes iguais. Este processo construtivo origina uma figura auto-semelhante com razão de semelhança 1/3.

O conjunto de Cantor não é um conjunto contínuo de pontos como o segmento de recta inicial, nem é um conjunto de pontos isolados, é algo entre os dois. Todos os pontos do conjunto de Cantor são pontos de acumulação. Isto é, se nós escolhermos um ponto qualquer, podemos encontrar outro ponto que está arbitrariamente próximo dele. Demonstraremos estas propriedades na secção seguinte.

Propriedades do Conjunto de Cantor

A abordagem geométrica é útil do ponto de vista pedagógico por ser intuitiva e de fácil compreensão para um público como os alunos do ensino secundário. No entanto, necessitamos de uma definição rigorosa para demonstrar as propriedades enunciadas atrás e outras.

Tomemos o intervalo $[0;1]$ da recta real, o qual será denotado por C_0. Divide-se este intervalo em três intervalos de igual comprimento, de forma a obter os seguintes intervalos:

$$\left[0;\frac{1}{3}\right];\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right);\left[\frac{2}{3};1\right]$$

Para construir o conjunto de Cantor, na etapa 1, retira-se o intervalo do meio, ou seja, $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Quando retiramos este intervalo, obtemos C_1 que é a união dos intervalos restantes,

$$C_1=\left[0;\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};1\right]$$

Na etapa 2, voltamos a dividir em três partes iguais, os intervalos que obtivemos em

C_1 e obtemos os seguintes intervalos

$$\left[0; \frac{1}{9}\right]; \left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right); \left[\frac{2}{9}; \frac{3}{9}\right] \text{ e } \left[\frac{6}{9}; \frac{7}{9}\right]; \left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right); \left[\frac{8}{9}; 1\right]$$

Agora retiramos, os intervalos intermédios e obtemos o C_2,

$$C_2 = \left[0; \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}; \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}; \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}; 1\right]$$

Estes intervalos têm $\frac{1}{9}$ de comprimento, enquanto que o C_1 tem $\frac{1}{3}$ e o C_0 tem comprimento 1.

Tomamos o C_2 e voltamos a dividir cada intervalo que o compõe em três partes iguais, obtendo os seguintes intervalos:

$$\left[0; \frac{1}{27}\right]; \left(\frac{1}{27}; \frac{2}{27}\right); \left[\frac{2}{27}; \frac{3}{27}\right] \text{ e } \left[\frac{6}{27}; \frac{7}{27}\right]; \left(\frac{7}{27}; \frac{8}{27}\right); \left[\frac{8}{27}; \frac{9}{27}\right] \text{ e}$$
$$\left[\frac{18}{27}; \frac{19}{27}\right]; \left(\frac{19}{27}; \frac{20}{27}\right); \left[\frac{20}{27}; \frac{21}{21}\right] \text{ e } \left[\frac{24}{27}; \frac{25}{27}\right]; \left(\frac{25}{27}; \frac{26}{27}\right); \left[\frac{26}{27}; 1\right]$$

Novamente, retiramos os intervalos intermédios abertos e obtemos o C_3,

$$C_3 = \left[0; \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}; \frac{3}{27}\right] \cup \left[\frac{6}{27}; \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}; \frac{9}{27}\right] \cup \left[\frac{18}{27}; \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}; \frac{21}{21}\right] \cup \left[\frac{24}{27}; \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}; 1\right]$$

Este processo repete-se infinitamente.

Em geral, para obtermos o conjunto C_{m+1} tomamos o conjunto C_m e dividimos os seus intervalos em três partes de igual comprimento e retiramos os intervalos intermédios abertos.

Definição 4.1 *O conjunto de Cantor C é a intersecção de todos os conjuntos C_m, ou*

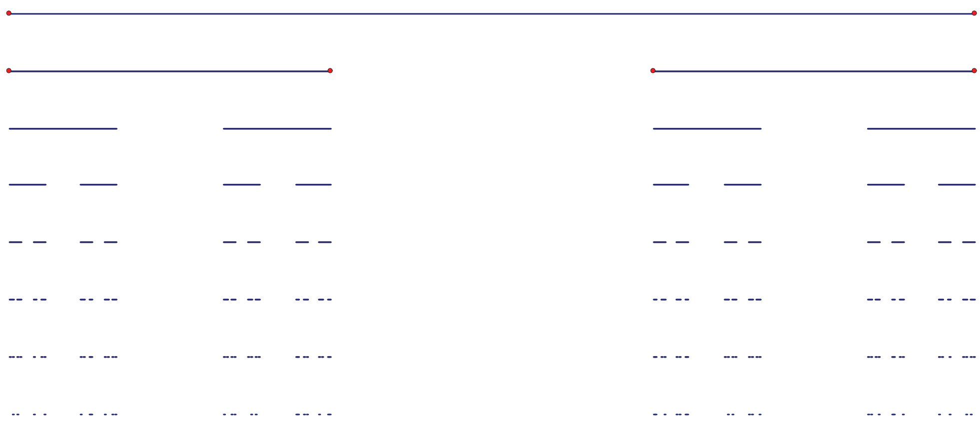


Figura 4-1: Conjunto de Cantor

seja,

$$C = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m.$$

Uma das primeiras propriedades observadas nos conjuntos C_m é a seguinte:

Proposição 4.2 *C_m é a união disjunta de 2^m intervalos fechados.*

Demonstração 4.3 *Prova-se por indução Matemática.*

Para $m = 1$ vem que C_1 é formado por $2 = 2^1$ intervalos fechados.

Hipótese de Indução: C_m é formado por 2^m intervalos fechados.

Queremos mostrar que C_{m+1} é formado por 2^{m+1} intervalos fechados.

Sabemos que C_{m+1} se obtém quando se divide cada um dos intervalos de C_m em três partes iguais e se elimina o subintervalo intermédio de cada intervalo de C_m, logo de cada intervalo de C_m obtemos 2 intervalos fechados disjuntos.

Assim, C_{m+1} tem o dobro dos intervalos de C_m, como C_m tem 2^m intervalos fechados, *temos que C_{m+1c} tem*

$$2 \times 2^m = 2^{m+1}$$

intervalos fechados.■

Podemos representar os números reais de $C_0 = [0;1]$ na base 3, usando uma expressão da seguinte forma:

$$x = x_1 \times 3^{-1} + x_2 \times 3^{-2} + x_3 \times 3^{-3} + ... + x_n \times 3^{-n} + ...$$

com $x_i = 0, 1$ ou 2. Associamos, assim, a cada x em C uma sucessão $(x_1, x_2, ...)$ de $0, 1$ ou 2.

Facilmente vemos que os elementos do conjunto de Cantor estão descritos para valores $x_i = 0$ ou $x_i = 2$, para todo o i.

De facto podem aparecer elementos do conjunto de Cantor que têm na sua expansão ternária o dígito 1, por exemplo, o número $\frac{1}{3} = (0,1)_3$. Mas $\frac{1}{3}$ também pode ser escrito na seguinte forma: $(0,02222....)_3 = \left(0,0\overline{2}\right)_3$. Os únicos casos em que 1 aparece são quando este é seguido apenas por 0 ou apenas seguido de 2.

De uma forma mais geral, podemos afirmar o seguinte:

Seja $x \in C : x \to (x_1 x_2 x_3 ...)$, com $x_{i+1} = 1$, então, acontece um dos seguintes casos

$$\begin{aligned} x &\to (x_1 x_2 ... x_i 1000...) \\ x &\to (x_1 x_2 ... x_i 1222...) \end{aligned}$$

Em ambos os casos, podemos reescrever x do seguinte modo:

$$(x_1x_2...x_i1000...) \sim (x_1x_2...x_i02222...)$$

$$(x_1x_2...x_i1222...) \sim (x_1x_2...x_i20000...)$$

de forma a escrevê-lo sem utilizar o dígito 1.

Formalismo

De acordo com o método iterativo descrito, já definimos os conjuntos C_0, C_1, C_2 e C_3. Vamos, agora, formalizar cada um dos seguintes.

Construção dos extremos de um intervalo I_j^m do conjunto $C_m = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} I_j^m$.

Seja $j \in \{0, 1, 2, ..., 2^m - 1\}$.

Se $j = 0$, definimos $a_0 = 0$, se $j \neq 0$ então escrevemos j na base binária, ou seja, da seguinte forma:

$$j = 2^0 \times b_0 + 2^1 \times b_1 + 2^2 \times b_2 + ... + 2^m \times b_m$$

onde $b_m = 1$ e $b_i = b_i \in \{0; 1\}$.

Seja

$$a_j = 2b_0 \cdot 3^0 + 2b_1 \cdot 3^1 + ... + 2b_m \cdot 3^m \tag{4.1}$$

Isto é, dado um $j \in \{0, 1, 2, ..., 2^m - 1\}$, pode-se escrever na base binária da seguinte forma:

Os uns são transformados em dois

Por exemplo:

$j = 10$, escrito na base binária vem,

$$j = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3$$

Então o

$$\begin{aligned} a_j &= a_{10} = 0 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + 0 \times 3^2 + 2 \times 3^3 \\ &= 0 + 6 + 0 + 2\,(27) \\ &= 6 + 54 \\ &= 60 \end{aligned}$$

Os intervalos do conjunto C_m são então da seguinte forma:

$$I_j^m = \left[\frac{a_j}{3^m}; \frac{a_j + 1}{3^m}\right]$$

com $m \in \mathbb{N}$ e $j \in \{0, 1, 2, ..., 2^m - 1\}$, onde a_j é da forma apresentada em (4.1). Por exemplo

$$\begin{aligned} C_1 &= I_0^1 \cup I_1^1 = \left[\frac{a_0}{3}; \frac{a_0 + 1}{3}\right] \cup \left[\frac{a_1}{3}; \frac{a_1 + 1}{3}\right] \\ &= \left[\frac{0}{3}; \frac{0 + 1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; \frac{2 + 1}{3}\right] \\ &= \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right] \end{aligned}$$

porque $a_0 = 0$ e $a_1 = 2$.

Vejamos outro exemplo, calculemos $I_j^m = I_5^3$.

O $j = 5$, escrito na base binária vem,

$$j = 5 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2$$

e o

$$\begin{aligned} a_j &= a_5 = 2 \times 3^0 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^2 \\ &= 2 + 0 + 18 \\ &= 20 \end{aligned}$$

logo o $I_5^3 = \left[\frac{20}{3^3}; \frac{21}{3^3}\right]$.

O a_j é um número natural que, escrito na base 3, não tem nenhum coeficiente igual a 1.

Proposição 4.4 *Cada intervalo I_j^m tem comprimento $\frac{1}{3^m}$.*

Demonstração 4.5 *Seja $i \in \{0, 1, 2, 3, ..., 2^m - 1\}$.*

Então os intervalos $I_j^m = \left[\frac{a_i}{3^m}; \frac{a_i+1}{3^m}\right]$ têm comprimento:

$$\frac{a_i + 1}{3^m} - \frac{a_i}{3^m} = \frac{a_i + 1 - a_i}{3^m} = \frac{1}{3^m} \blacksquare$$

Proposição 4.6 *A soma do comprimento dos intervalos que compõem C_m é $\left(\frac{2}{3}\right)^m$.*

Demonstração 4.7 *Seja $m \in \mathbb{N}$ e $C_m = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} I_j^m = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left[\frac{a_j}{3^m}; \frac{a_j+1}{3^m}\right]$.*

Sabemos que cada C_m tem 2^m intervalos fechados e que cada um têm comprimento igual a $\frac{1}{3^m}$.

Como a intersecção dos intervalos de C_m é vazio, então a soma total do comprimento de todos os intervalos é:

$$\underbrace{\frac{1}{3^m}+\frac{1}{3^m}+...+\frac{1}{3^m}}_{2^m}=\frac{\overbrace{1+1+1+...+1}^{2^m}}{3^m}=\frac{2^m}{3^m}=\left(\frac{2}{3}\right)^m \blacksquare$$

Proposição 4.8 *$\forall m \in \mathbb{N}$, C_m é fechado.*

Demonstração 4.9 *Para cada $m \in \mathbb{N}$, sabemos que*

$$C_m = \bigcup_{i=0}^{2m-1}\left[\frac{a_i}{3^m};\frac{a_i+1}{3^m}\right]$$

Assim, C_m é a união de 2^m intervalos fechados.

Sabemos que a união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Logo C_m é um conjunto fechado, para $m \in \mathbb{N}$.$\blacksquare$

Proposição 4.10 *C é um conjunto não vazio.*

Demonstração 4.11 *Como já sabemos o conjunto $C = \cap\{C_m : m \in \mathbb{N}\}$ e que os extremos do intervalo I_j^m, pertencem a C, para $\forall m \in \mathbb{N}$.*

Então $0 \in C$.

Logo C não é vazio.$\blacksquare$

Proposição 4.12 *O conjunto C é um conjunto compacto.*

Demonstração 4.13 *Por definição, $C = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_m$. Ou seja, C é a intersecção numerável de conjuntos fechados. Então C é um conjunto fechado.*

Como $C \subset C_m$ e $C_m \subset [0;1]$, para $m \in \mathbb{N}$, então $C \subset [0;1]$, logo é limitado. Um conjunto limitado e fechado em $\mathbb{R}$ é compacto.$\blacksquare$

Proposição 4.14 *C é um conjunto perfeito.*

Demonstração 4.15 *Como C é fechado, então $\overline{C} = C$.*

Se $x \in C$, então $x \in C_k$ para todo o k, donde se tem

$$x \in \bigcup_{j=0}^{2^k-1} I_j^k,$$

ou seja, $x \in I_j^k$, para algum $j \in \left\{0, 1, ..., 2^k - 1\right\}$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe um número inteiro positivo N tal que $\left(\frac{1}{3}\right)^N < \varepsilon$ e um número inteiro positivo $N(k)$ que garante que

$$I_j^{N(k)} \subset (x - \varepsilon; x + \varepsilon).$$

Logo os extremos de $I_j^{N(k)}$ pertencem a $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ e também a C. Assim, para todo o $\varepsilon > 0$

$$[(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \setminus \{x\}] \cap C \neq \emptyset.$$

Ou seja, x é ponto de acumulação de C, e sendo x arbitrário, podemos concluir que $C' = C$.

Portanto, C é perfeito.$\blacksquare$

Proposição 4.16 *C é não enumerável.*

Demonstração 4.17 *Demonstremos que existe uma função $f : C \to [0;1]$ sobrejectiva.*

Como consequência $\#C \geq \#[0;1]$, *isto é, que a cardinalidade do conjunto de Cantor será, pelo menos igual à cardinalidade de* $[0;1]$.

No entanto, e uma vez que $C \subseteq [0;1]$, *a sua cardinalidade é inferior ou igual à cardinalidade de* $[0;1]$. *Esta conclusão diz-nos que os dois conjuntos terão a mesma cardinalidade.*

Para construir a função f, *consideremos a expansão ternária de cada ponto* $p \in C$, *sem utilizar o dígito* 1. *Ou seja, cada ponto pertencente ao intervalo* $[0;1]$, *envolve na sua expansão ternária apenas os dígitos* $\{0;2\}$.

Tendo em mente a expansão ternária de qualquer elemento pertencente ao conjunto de Cantor, referida anteriormente, a função $f : C \to [0;1]$, *pode ser definida do seguinte modo: se a* x *corresponde a sucessão de coeficientes* $(x_1, x_2, x_3, ...)_3$ *com* $x_i \in \{0;2\}$, *correspondentes à sua expansão ternária, então*

$$f(x) = \frac{\overline{x_1}}{2} + \frac{\overline{x_2}}{2^2} + \frac{\overline{x_3}}{2^3} + ...,$$

onde

$$\overline{x_i} = \begin{cases} 0 \text{ se } x_i = 0 \\ 1 \text{ se } x_i = 2 \end{cases}$$

Para mostrar que f *é sobrejectiva, consideremos qualquer elemento* $a \in [0;1]$.

Represente-se a na sua expansão binária e que a cada ocorrência do dígito $\{1\}$ *este seja substituído pelo dígito* $\{2\}$, *obtendo assim uma nova sequência de coeficientes que permitem definir um número* $b \in C$ *na base 3.*

Este novo número b, *satisfaz a condição* $f(b) = a$.

Como resultado, f *é sobrejectiva, e por uma afirmação feita anteriormente, podemos afirmar que a cardinalidade de* C *é igual à cardinalidade de* $[0;1]$, *como já vimos, logo,* C

é não enumerável.■

Proposição 4.18 *C é um conjunto totalmente desconexo.*

Demonstração 4.19 *Consideremos cada um dos conjuntos C_k, que são a união de 2^k intervalos, cada intervalo tem comprimento $\frac{1}{3^k}$.*

Como $C \subset C_k$ para todo o k, se C contém algum intervalo $(a;b)$, então $(a;b) \subset C_k$, para todo o k, pelo que $(a;b) \subset I_j^k$ para cada k e algum $j \in \left\{0, 1, ..., 2^k - 1\right\}$.

Pela conexidade do intervalo $(a;b)$, existe em cada C_k um único intervalo I_j^k que o contém, pois os I_j^m são disjuntos.

Mas I_j^k tem comprimento $\frac{1}{3^k}$ e como $\frac{1}{3^m} \to 0$, quando $m \to +\infty$, (a,b) não poderá estar contido num intervalo de comprimento inferior a $b-a$, ou seja, $(a,b) \nsubseteq C$.■

Proposição 4.20 *C é raro.*

Demonstração 4.21 *Como C é fechado, $\overline{C} = C$ e $\left(\overline{C}\right)^o = C^o = \emptyset$, pois C não contém intervalos abertos, portanto, C é um conjunto raro.*■

Capítulo 5

O conjunto de Cantor e Sistemas Iterativos

O conjunto de Cantor possui uma propriedade importante que está directamente relacionada com os sistemas dinâmicos e intimamente ligada à Teoria do Caos.

Consideremos a função Tenda definida da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ -3x+3 & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

O seu gráfico está representado na figura 5-1.

Comecemos com o ponto inicial x_0 e com a sucessão $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ ....$ de pontos descritos por um processo da forma $f(x_n) = x_{n+1}$. Assim, $f(x_0) = x_1,\ f(x_1) = x_2,\ f(x_2) = x_3,\ ....$ A este processo chama-se iteração de f.

Vejamos como se comportam estas sucessões, para diferentes pontos iniciais.

Se $x_0 < 0$, então $x_1 = f(x_0) = 3x_0 < 0$ e por indução, todos os números x_k desta sucessão são da forma $x_k = 3^k x_0$ e portanto negativos. Esta sucessão é decrescente e tende

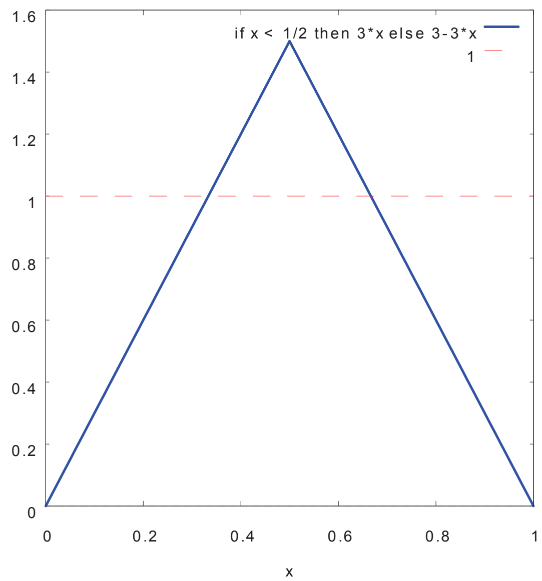


Figura 5-1: Representação gráfica da função $f(x)$.

para $-\infty$. Este tipo de sucessões são designadas por sucessões de escape e o ponto x_0 é o ponto de escape.

Se $x_0 > 1$, então $x_1 = f(x_0) = -3x_0+3 < 0$, portanto temos novamente uma sucessão que "escapa" para $-\infty$.

Se $x_0 = 0$, então $x_1 = f(0) = 3 \times 0 = 0$ e todos os pontos da sucessão serão zeros. O número 0 é um ponto fixo, pois $f(0) = 0$

Qualquer ponto x_0 que verifique $f^n(x_0) = 0$, então permanecerá, a partir da iterada n, sempre em zero e portanto diremos que x_0 é pré-fixo.

Todos os pontos próximos de $\frac{1}{2}$ iteram para fora do quadrado de lado 1 e escapam para $-\infty$, todos os pontos que iteram para o centro, escapam para $-\infty$ e todos os pontos que não escapam do intervalo $[0; 1]$, formam o conjunto de Cantor. Tal como se pode observar na figura 5-3.

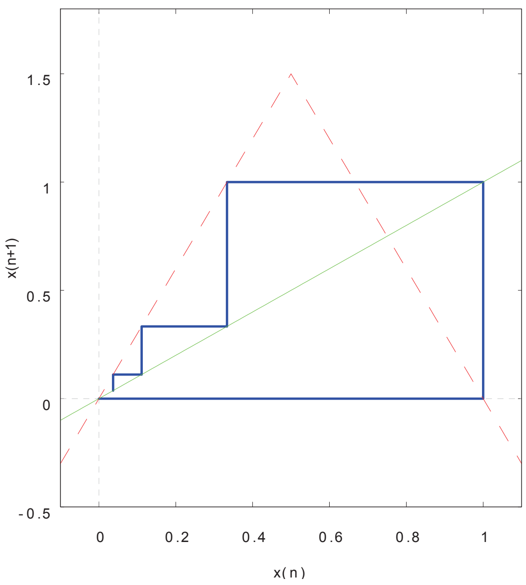


Figura 5-2: Iteração de pontos que pertencem ao conjunto de Cantor.

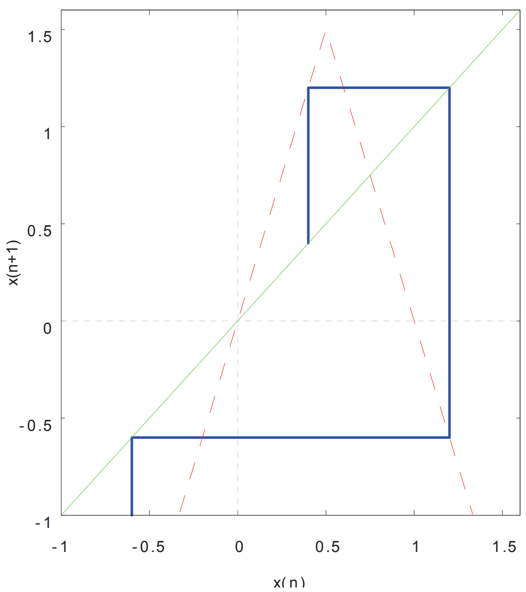


Figura 5-3: Iteração para pontos que não pertencem ao conjunto de Cantor.

Analisemos, então, a função Tenda mais ao pormenor:

Se $x \in \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$, então $f(x) > 1$. Portanto, partindo de qualquer ponto do intervalo $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$, depois da primeira iteração, estaremos fora do intervalo $[0;1]$ e a órbita irá tender para $-\infty$.

As figuras 5-4, 5-5 e 5-6 mostram as representações gráficas da primeira, segunda e terceira iterada:

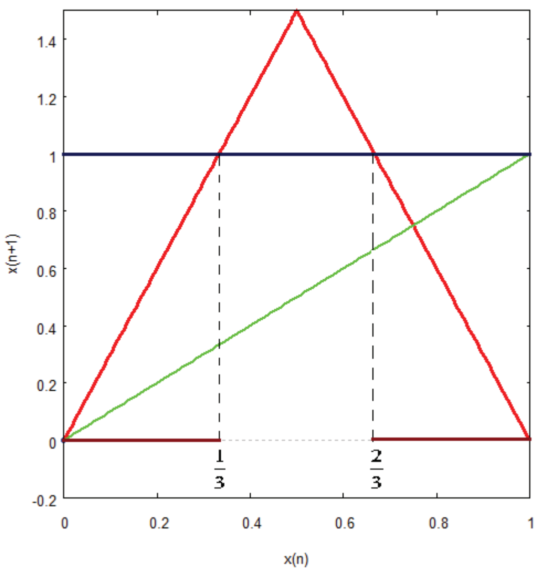


Figura 5-4: Representação gráfica da 1^a iteração da função $f(x)$.

Os intervalos marcados no eixo $x(n)$ de cada iteração são aqueles para os quais a iteração realizada volta a cair dentro do intervalo $[0;1]$.

Portanto, a função Tenda, após varias iterações, origina um conjunto de pontos, cujas órbitas não tendem para $-\infty$, quando se itera sucessivamente, este conjunto de pontos constitui o "nosso" conhecido Conjunto de Cantor.

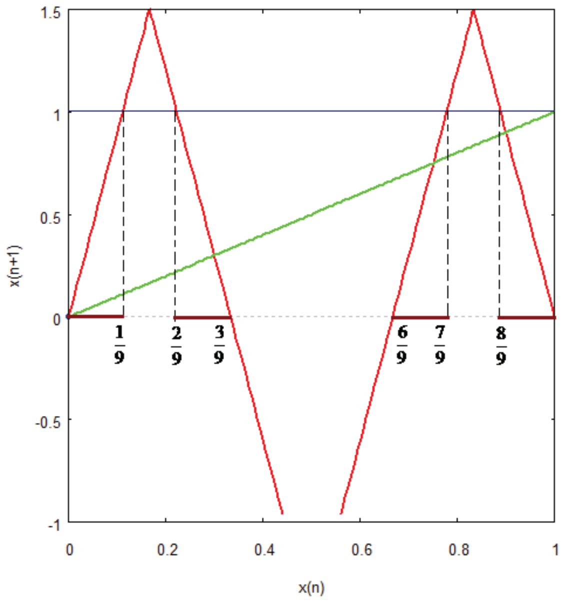


Figura 5-5: Representação gráfica da 2^a iteração da função $f(x)$.

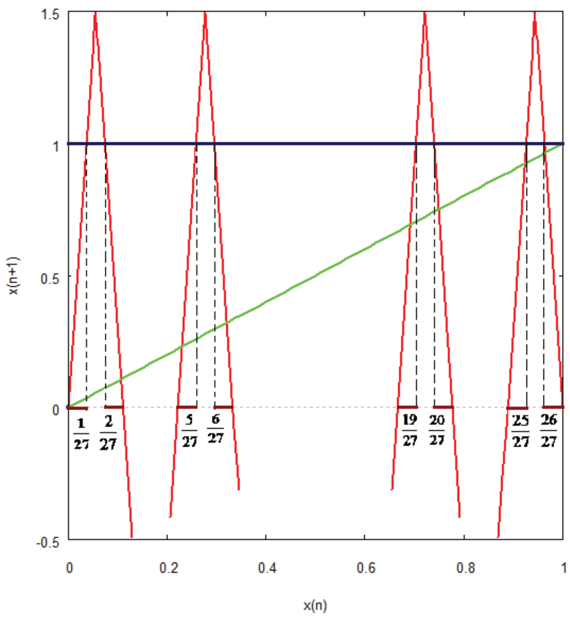


Figura 5-6: Representação gráfica da 3^a iteração da função $f(x)$.

Figura 5-7: Intervalos do conjunto de Cantor.

5.1 O Conjunto de Cantor e a Família Quadrática

Nesta secção, faremos uma análise sobre a família das funções quadráticas do tipo

$$F_\mu(x) = \mu x(1-x),$$

visto que esta ilustra fenómenos muito importantes, que ocorrem nos sistemas dinâmicos.

Proposição 5.1 *Seja* $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$.

1. $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$ *e* $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$, *onde* $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.
2. $0 < p_\mu < 1$ *se* $\mu > 1$.

A demonstração desta proposição é simples. A partir de agora iremos concentrar-nos no caso $\mu > 1$. A proposição seguinte mostra que a maioria dos pontos apresentam um comportamento bastante dócil sob iteração de F_μ: todos os pontos que não pertencem ao intervalo $[0;1]$ tendem para $-\infty$, tal como na função Tenda, vista anteriormente. Para valores pequenos de μ a dinâmica de F_μ não é complicada.

Proposição 5.2 *Suponha-se* $\mu > 1$.

Se $x < 0$, *então* $F_\mu^n(x) \to -\infty$ *quando* $n \to +\infty$.

Analogamente, se $x > 1$, *então* $F_{\mu}^{n}(x) \to -\infty$ *quando* $n \to +\infty$.

Demonstração 5.3 *Se* $x < 0$, *então* $\mu x(1-x) < x$, *portanto* $F_{\mu}(x) < x$. *Por isso,* $F_{\mu}^{n}(x)$ *é uma sequência decrescente. Esta sequência não pode convergir para um ponto* $p \in \mathbb{R}$, *porque nesse caso teríamos* $F_{\mu}^{n+1}(x) \to F_{\mu}(p) < p$, *enquanto que* $F_{\mu}^{n}(x) \to p$.

Logo $F_{\mu}^{n}(p) \to -\infty$.

Se $x > 1$, *então* $F_{\mu}(x) < 0$ *portanto* $F_{\mu}^{n}(x) \to -\infty$.■

Com base na análise gráfica, da figura 5-8, facilmente, podemos observar estes resultados.

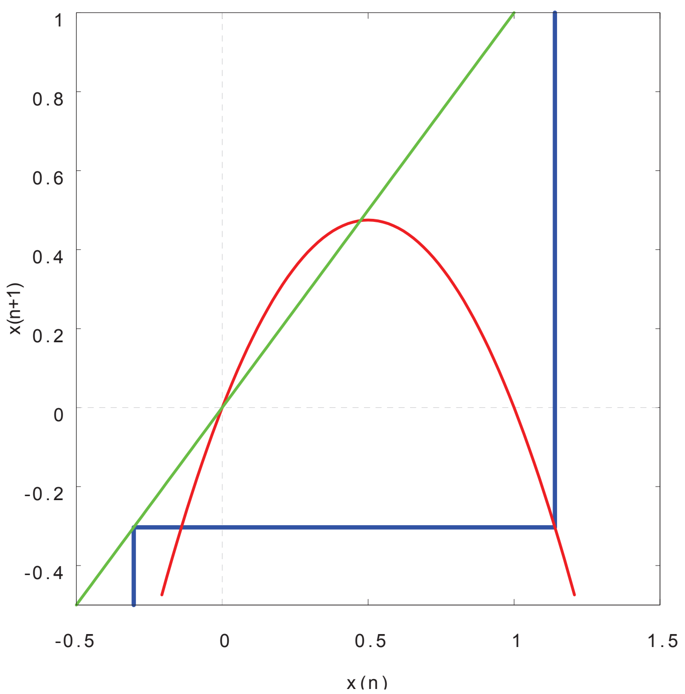


Figura 5-8: Gráfico de $F_{\mu}(x) = \mu x(1-x)$ quando $\mu > 1$.

Em consequência da Proposição anterior, todo o interesse da dinâmica da função quadrática ocorre no intervalo unitário $I = [0;1]$.

Definição 5.4 *Seja p um ponto fixo de f.*

*O ponto p é um **ponto fixo hiperbólico** se $\left|(f)'(p)\right| \neq 1$.*

- *Se $\left|(f)'(p)\right| < 1$, o ponto p chama-se **ponto fixo atractivo**.*
- *Se $\left|(f)'(p)\right| > 1$, o ponto p chama-se **ponto fixo repulsivo**.*

Proposição 5.5 *Seja $1 < \mu < 3$.*

*1. F_μ tem um **ponto fixo atractivo** em $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ e um **ponto fixo repulsivo** em 0.*

2. Se $0 < x < 1$, então

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = p_\mu.$$

Demonstração 5.6 *1. Seja $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ com $\mu > 1$.*

F_μ tem dois pontos fixos: um no ponto 0 e outro no ponto $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.

Note-se que $F'_\mu(0) = \mu$ e $F'_\mu(p_\mu) = 2 - \mu$.

Então o ponto 0 é um ponto fixo repulsivo para $\mu > 1$ e p_μ é um ponto atractivo para $1 < \mu < 3$.

2. Vejamos primeiro o caso $1 < \mu < 2$.

Suponhamos x pertencente ao intervalo $\left]0;\frac{1}{2}\right]$.

A análise do gráfico, mostra que

$$|F_\mu(x) - p_\mu| < |x - p_\mu|$$

se $x \neq p_\mu$.

Veja-se a figura 5-9.

Consequentemente, $F_{\mu}^{n}(x) \rightarrow p_{\mu}$ *quando* $n \rightarrow \infty$.

Por outro lado x *pertence ao intervalo,* $\left(\frac{1}{2};1\right)$, *então,* $F_{\mu}(x)$ *pertence ao intervalo* $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, *então isto implica que* $F_{\mu}^{n}(x) = F_{\mu}^{n-1}(F_{\mu}(x)) \rightarrow p_{\mu}$, *quando* $n \rightarrow \infty$.

O caso $2 < \mu < 3$ *é mais difícil.*

A análise gráfica mostra o quanto é diferente este caso. Veja-se o gráfico da figura 5-10.

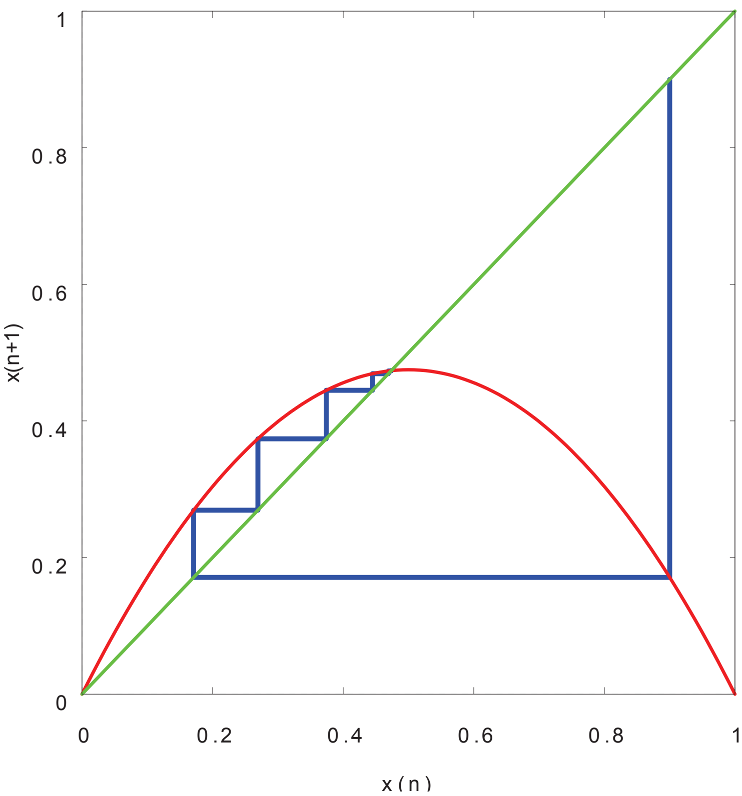


Figura 5-9: Gráfico da função $F_{\mu} = \mu x(1-x)$ *quando* $1 < \mu < 2$.

Note-se que $\frac{1}{2} < p_{\mu} < 1$.

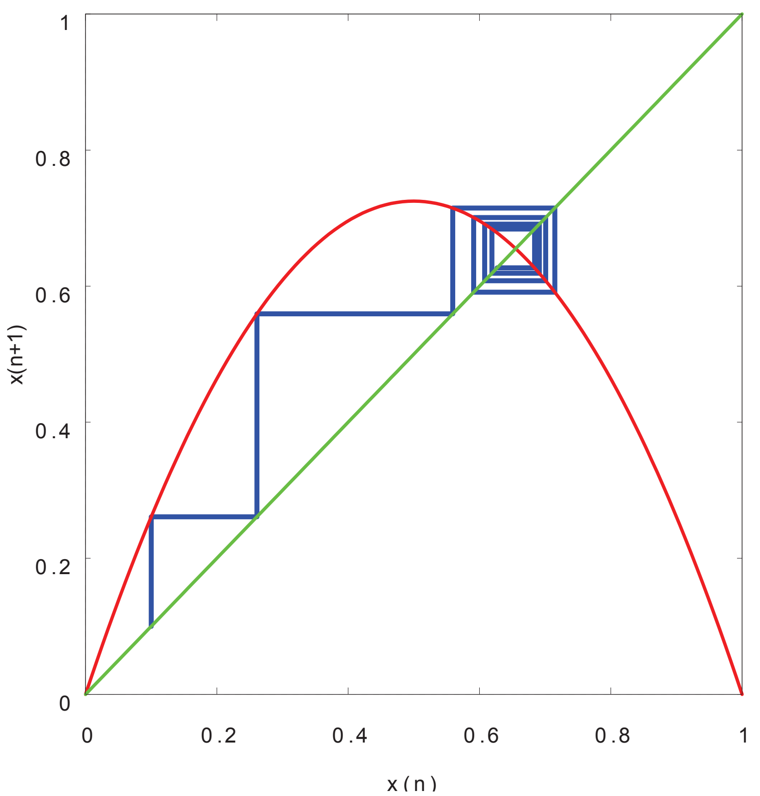


Figura 5-10: Gráfico da função $F_\mu = \mu x\,(1-x)$ quando $2 < \mu < 3$.

Seja $\widehat{p}_\mu$ o único ponto do intervalo $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ que tem imagem p_μ por F_μ. Então pode-se facilmente observar que F_μ^2 aplica o intervalo $[\widehat{p}_\mu;p_\mu]$ no intervalo $\left[\frac{1}{2};p_\mu\right]$.

Isto significa que $F_\mu^n(x) \to p_\mu$ quando $n \to +\infty$ para todo o $x \in [\widehat{p}_\mu;p_\mu]$.

Suponha-se, agora, que $x < \widehat{p}_\mu$. Analisando, novamente, o gráfico, observamos que existe um $k > 0$, tal que $F_\mu^k(x) \in [\widehat{p}_\mu;p_\mu]$.

Portanto, $F_\mu^{k+n}(x) \to p_\mu$ quando $n \to +\infty$, tal como ocorreu no caso anterior.

Finalmente, tal como anteriormente, F_μ transforma o intervalo $(p_\mu;1)$ em $(0;p_\mu)$, então o resultado anterior, também se verifica aqui.

Visto que $(0;1) = (0;\widehat{p}_\mu) \cup [\widehat{p}_\mu;p_\mu] \cup (p_\mu;1)$, o teorema fica demonstrado para $\mu \neq 2$.

Para $\mu = 2$.

Seja $F(x) = 2x(1-x)$. Os seus pontos fixos são o 0 e o $\frac{1}{2}$. O $F'(x) = 2-4x$, logo $F'(0) = 2$ e $F'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Portanto, 0 é um ponto fixo repulsivo e $\frac{1}{2}$ é um ponto fixo atractivo. Tal como se observa na figura 5-11.■

Daqui resulta, para $1 < \mu < 3$, que se têm unicamente dois pontos fixos e todos os outros pontos pertencentes a I são assimptóticos para p_μ.

Assim as dinâmicas de F_μ são completamente entendidas para μ pertencente ao intervalo, dado anteriormente.

Os retratos de fase dos F_μ estão representados nas figuras 5-12 e 5-13.

Quando o $\mu = 3$, tem-se $F'_\mu(p_\mu) = -1$, o que origina que as dinâmicas de F_μ se tornem um pouco mais complicadas: nasce, um novo ponto periódico de período 2. Este é o

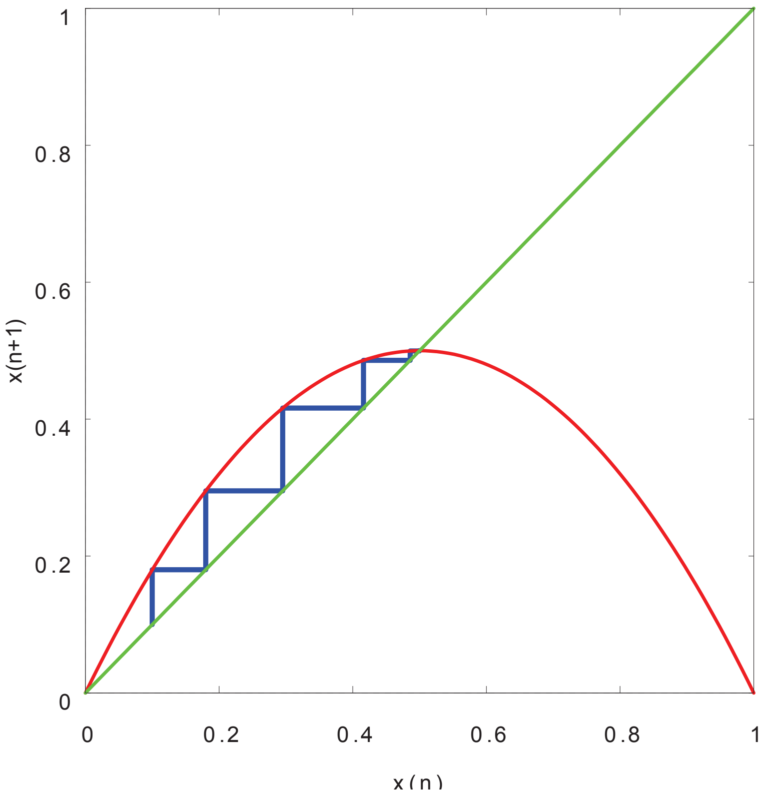


Figura 5-11: Gráfico da função $F_\mu = \mu x\,(1-x)$ *quando* $\mu = 2$.

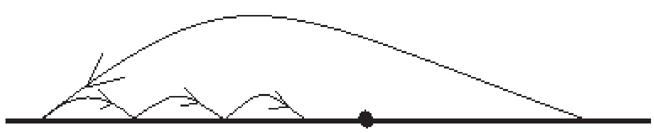


Figura 5-12: Descrição do comportamento da função $F_\mu = \mu x\,(1-x)$ *quando* $1 < \mu < 2$.

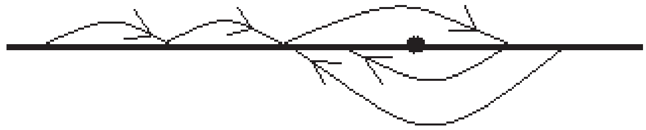


Figura 5-13: Descrição do comportamento da função $F_\mu = \mu x (1 - x)$ quando $2 < \mu < 3$.

começo de uma longa história: μ continua a desenvolver as dinâmicas de F_μ, estas tornam-se progressivamente mais complicadas até o retrato de fase de F_μ ser dramaticamente diferente dos anteriores.

Este cenário será analisado em maior detalhe mais à frente. Vejamos, agora, o caso, quando $\mu > 4$.

Daqui em diante, deixaremos de escrever μ e escrevemos F em vez de F_μ.

Como já foi referido anteriormente, o mais interessante da dinâmica de F ocorre no intervalo unitário I.

Note-se que, para $\mu > 4$, o valor máximo de F será $\frac{\mu}{4} > 1$. Portanto, certos pontos abandonam I depois da primeira iteração de F. Denotaremos o conjunto desses pontos por A_0. Claramente, A_0 é um intervalo aberto centrado em $\frac{1}{2}$ e tem a seguinte propriedade:

$$se\ x \in A_0,\ \ então\ F(x) > 1,\ F^2(x) < 0\ \ e\ \ F^n(x) \to -\infty.$$

A_0 é o conjunto de pontos que escapam de I imediatamente após uma iteração de F, observe-se a figura 5-14. Todos os outros pontos em I, continuam em I, após a primeira iteração de F.

Seja $A_1 = \{x \in I : F(x) \in A_0\}$.

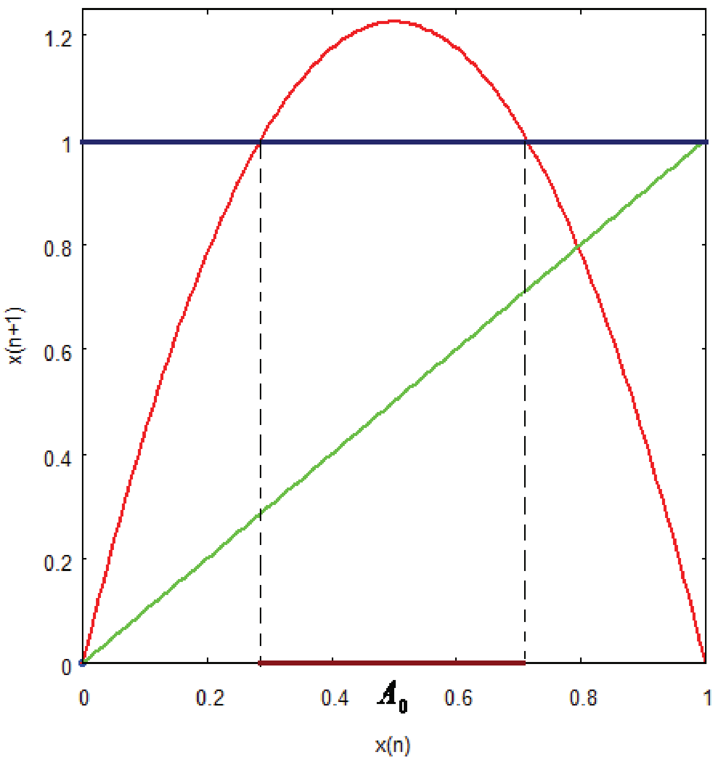


Figura 5-14: Construção do conjunto A_0.

Se $x \in A_1$, então $F^2(x) > 1$, $F^3(x) < 0$, tal como havia sido visto anteriormente, $F^n(x) \to -\infty$.

De forma indutiva, considere-se $A_n = \{x \in I : F^n(x) \in A_0\}$.

Isto é, $A_n = \{x \in I : F^i(x) \in I, \forall i \leq n \text{ mas } F^{n+1}(x) \notin I\}$, Podemos então dizer que A_n é o conjunto dos pontos que escapam de I a partir da $(n+1) - \acute{e}sima$ iterada. Como anteriormente, $x \in A_n$, implica que a órbita de x tende para $-\infty$. Uma vez que já conhecemos o comportamento final de qualquer ponto que pertence A_n, resta-nos somente analisar o comportamento dos pontos que nunca escapam de I, isto é, o conjunto de pontos que se situam em

$$I - \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$

Denote-se este conjunto por Λ.

A primeira questão é: o que representa, precisamente, este conjunto de pontos?

Para compreender melhor o conjunto Λ, descrevemos, cuidadosamente, esta construção recursiva.

Como A_0 é um intervalo aberto centrado em $\frac{1}{2}$, $I - A_0$ consiste em dois intervalos fechados disjuntos, I_0 à esquerda e I_1 à direita. Veja-se a figura 5-15.

Note-se que F percorre ambos intervalos, I_0 e I_1, monotonamente em I, ou seja, F é crescente no intervalo I_0 e decrescente no intervalo I_1. Uma vez que $F(I_0) = F(I_1) = I$, existe um par de intervalos abertos, um em I_0 e outro em I_1, que são aplicados em A_0 por F.

Por isso, estes dois intervalos são precisamente o conjunto A_1. Considere-se, agora, $I - (A_0 \cup A_1)$.

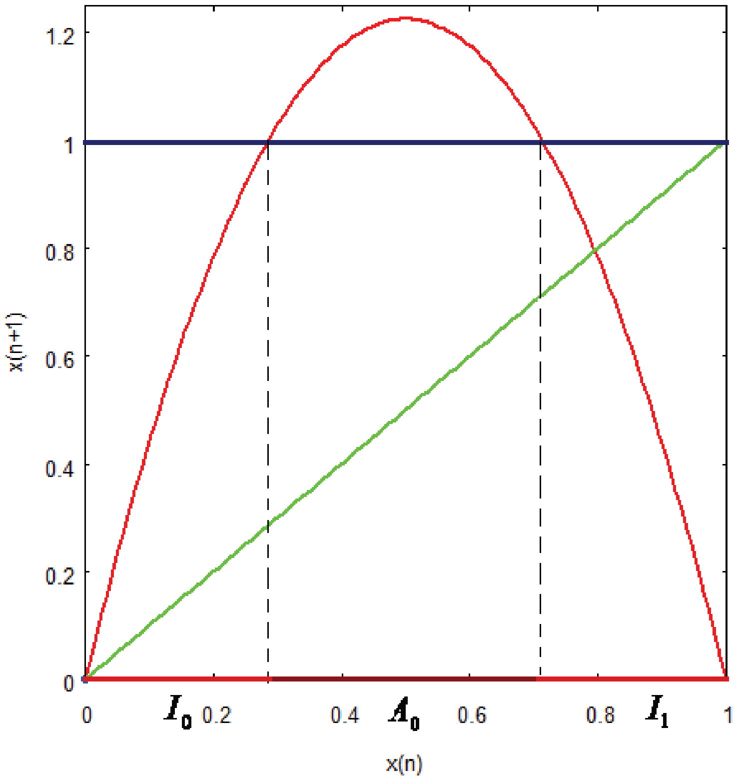


Figura 5-15: Construção dos intervalos I_0 e I_1.

Este conjunto é composto por quatro intervalos fechados e F aplica cada um deles monotonamente, em I_0 ou I_1.

Consequentemente F^2 aplica cada um deles no intervalo I. Por isso, vemos que qualquer um dos quatro intervalos de $I - (A_0 \cup A_1)$ contém um intervalo aberto é aplicado por F^2 em A_0.

Portanto, os pontos destes intervalos escapam de I a partir da terceira iteração de F.

A este conjunto chamamos A_2.

F^2 é alternadamente crescente e decrescente nestes quatro intervalos. Observe-se que o gráfico de F^2 apresenta duas "bossas" como mostra a figura 5-16. Os traços a cheio no eixo $x\,(n)$ representam o C_1.

Continuando o processo, registemos o facto:

A_n é composto por 2^n intervalos abertos disjuntos.

Portanto $I - (A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_n)$ é composto por 2^{n+1} intervalos fechados.

A construção de Λ é reminiscente da construção do conjunto ternário de Cantor: Λ é obtido por sucessivas remoções dos intervalos intermédios abertos de um conjunto de intervalos fechados.

Generalizemos, então, a definição já dada do conjunto de Cantor:

Definição 5.7 *O conjunto Λ é um conjunto de Cantor se é um subconjunto de I, que é fechado, totalmente desconexo e perfeito*

Relembremos que um conjunto é totalmente desconexo se não contém intervalos; um conjunto é perfeito se todos os pontos desse conjunto são pontos de acumulação.

Exemplo 5.8 *O "nosso" conjunto de Cantor é agora um caso particular desta nova abor-*

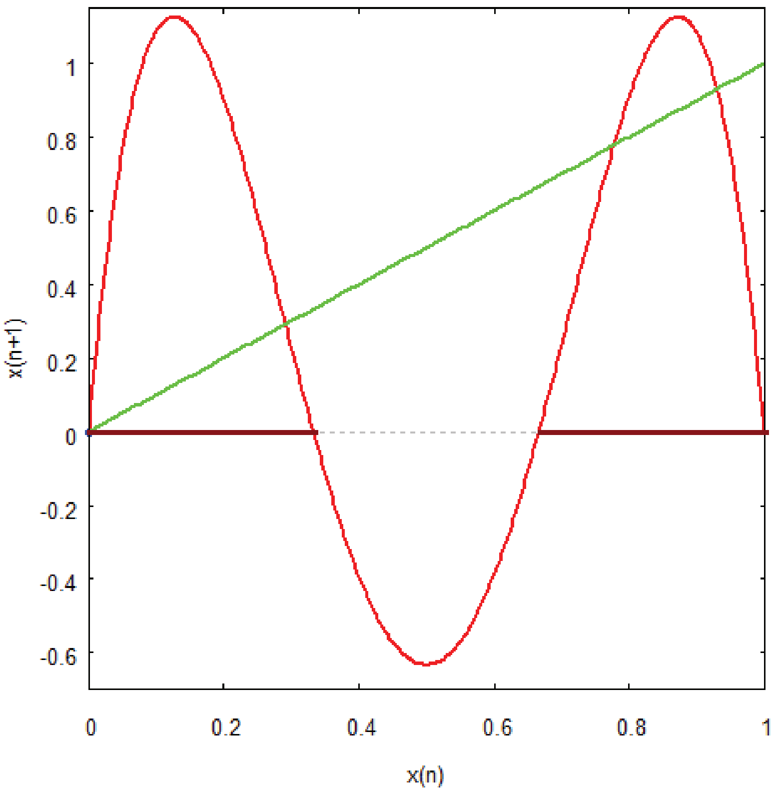


Figura 5-16: Representação gráfica de F_μ^2.

dagem, o conjunto ternário de Cantor.

O procedimento através do qual construímos C no capitulo 4 é inteiramente análogo à construção do conjunto Λ*, atrás apresentado.*

Para garantir que o nosso conjunto Λ é um conjunto de Cantor, à luz da definição 5-7, necessitamos de uma hipótese adicional em μ. Assumimos que μ é suficientemente grande para que $|F'(x)| > 1 \ \forall x \in I_0 \cup I_1$.

Portanto, para estes valores de μ, $\exists \lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > \lambda$, $\forall x \in \Lambda$.

Pela regra da cadeia, observa-se, que $\left|(F^n)'(x)\right| > \lambda^n$.

Afirmamos que Λ não contém intervalos. De facto, se tal acontecesse, poderíamos escolher x, $y \in \Lambda$, $x \neq y$, com o intervalo fechado $[x; y] \subset \Lambda$. Mas então, $\left|(F^n)'(\alpha)\right| > \lambda^n$ para todo $\alpha \in [x; y]$.

Escolhemos n tal que $\lambda^n |y - x| > 1$. Pelo teorema do valor intermédio observa-se, então, que $|F^n(y) - F^n(x)| \geq \lambda^n |y - x| > 1$, o que implica que pelo menos um, $F^n(y)$ ou $F^n(x)$ está fora de I. Isto é contraditório, então Λ é totalmente desconexo.

Porque Λ é a intersecção enumerável de intervalos fechados, então Λ é fechado.

Provaremos, agora, que Λ é perfeito.

Note-se, primeiro, que qualquer extremo de A_n está em Λ: de facto, tais pontos são aplicados no ponto 0 (ao fim de um certo número finito de iteradas), e ficam em I sob iteração, visto que o 0 é um ponto fixo.

Agora, se $p \in \Lambda$ fosse isolado, todo ponto vizinho deixaria I sob iteração de F. Tais pontos devem pertencer a algum A_k. Agora ou existe uma sequência de extremos de A_k que converge para p, ou todos os pontos de uma vizinhança de p (excluindo o p) saem de I quando se aplica F um certo número de vezes.

No primeiro caso, temos os extremos de A_k que tendem para 0, portanto, pertencem a Λ. No segundo caso, assumimos que F^n aplica p em 0 e todos os outros pontos da vizinhança de p no eixo real negativo. Então F^n é máximo em p tal que $(F^n)'(p) = 0$.

Pela regra da cadeia, teremos $F'\left(F^i(p)\right) = 0$ para algum $i < n$. Portanto $F^i(p) = \frac{1}{2}$. Mas então $F^{i+1}(p) \notin I$ e $F^n(p) \to -\infty$, contradizendo o facto que $F^n(p) = 0$.

Portanto está provado que $p \in \Lambda$ tem que ser ponto de acumulação.

Teorema 5.9 *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor.*

Demonstração 5.10 *Usando o que foi feito acima, determinamos os valores de μ para que $\left|F'_\mu(x)\right| > 1$, para qualquer $x \in (I_0 \cup I_1)$.*

Sabemos que o valor mínimo do módulo da derivada em $(I_0 \cup I_1)$ é obtido nos pontos onde $F_\mu = 1$, ou seja, temos que determinar os valores de x tais que $\mu x(1-x) = 1$.

Resolvendo a equação anterior obtemos as seguintes soluções: $x_1 = \frac{-\mu+\sqrt{\mu^2-4\mu}}{-2\mu}$ e $x_2 = \frac{-\mu-\sqrt{\mu^2-4\mu}}{-2\mu}$.

Seguidamente determinamos os valores de μ para que nesses pontos tenhamos $\left|F'_\mu(x)\right| > 1$, tomemos apenas o valor $x_1 = \frac{-\mu+\sqrt{\mu^2-4\mu}}{-2\mu}$, pois o outro caso é simétrico e tem, em módulo, igual derivada. Então, obtemos as seguintes soluções: $\left|F'_\mu(x_1)\right| = \left|[\mu x_1(1-x_1)]'\right| = |\mu - 2\mu x_1| > 1 \Leftrightarrow \mu > 2 + \sqrt{5} \vee \mu > 2 - \sqrt{5}$.

Como $\mu > 0$, temos que para qualquer $x \in (I_0 \cup I_1)$, ou seja, qualquer $x \in \Lambda$, tem-se que $\left|F'_\mu(x)\right| > 1$ se $\mu > 2 + \sqrt{5}$. $\blacksquare$

Capítulo 6

Dimensão do Conjunto de Cantor

Na natureza encontramos muitas formas geométricas que não se podem explicar através dos diversos conceitos matemáticos que o Homem conhece, por isso foi necessário criar uma matemática diferente, uma matemática que desse respostas às questões que a matemática "tradicional" não conseguia responder. Foi dessa necessidade que surgiram os fractais, estes são formas geométricas que não se conseguem classificar na matemática "tradicional", ou seja, dentro de Geometria Euclidiana devido, essencialmente, a três características fundamentais que os definem e os distinguem das demais formas geométricas: auto-semelhança; dimensão fractal e a sua complexidade.

Hoje em dia, a Geometria Fractal, é utilizada em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo, no estudo de sistemas caóticos, análise e reconhecimento de padrões em imagens e medições de comprimento de curvas, por exemplo a linha costeira.

Ao contrário do que se pode observar na Geometria Euclidiana, onde o valor da dimensão representa a dimensionalidade do espaço em que um dado objecto está inserido, a dimensão fractal representa o nível de irregularidades de um fractal.

A principal diferença entre as duas definições é que a dimensão fractal pode assumir valores fraccionários, o que não acontece na dimensão Euclidiana. A dimensão Fractal pode ser fraccionária devido ao facto de representar o nível de ocupação do espaço da figura e não o espaço em si, ou seja, o espaço onde a figura está contida. Desta forma, quanto maior for a irregularidade da forma geométrica, maior será a sua dimensão fractal.

A *dimensão Euclidiana ou topológica*, é um conceito clássico. Diz-se que dois espaços topológicos têm a mesma dimensão se, entre os pontos de um e os pontos do outro, existir uma correspondência contínua e unívoca. Esta dimensão é dada pelo número de coordenadas necessárias para descrever uma forma euclidiana. Por exemplo, para descrever uma linha (curva ou não) necessita-se de uma só coordenada; para descrever um plano necessita-se de duas coordenadas e para descrever um volume necessita-se de três coordenadas. Euclides no seu livro *"Os Elementos"*, diz que um ponto tem dimensão zero, uma linha, curva ou não, tem dimensão 1, uma superfície tem dimensão 2 e um volume tem dimensão 3.

A *dimensão Fractal* diz respeito à dimensão espacial, ou seja, ao espaço que a figura ocupa. Pode ser calculada de várias formas. Se a figura não possuir auto-semelhança, o método gráfico mais utilizado é o *"box-couting"*, ou seja, dimensão de capacidade. Se possuir, auto-semelhança, como é o caso do conjunto de Cantor, podemos calcular a dimensão por outro método um pouco mais simples, como veremos mais adiante.

Uma primeira definição, dada pelo próprio Mandelbrot, diz: - *"Um conjunto é dito Fractal se a dimensão Hausdorff-Besicovitch deste conjunto for maior do que a sua dimensão topológica"*. No decorrer do tempo ficou claro que esta definição era muito restritiva embora tenha motivações pertinentes.

Distante do rigor e do formalismo matemático, pode-se definir Fractais, como nos ensinam alguns estudiosos da área: *"Objectos que sempre apresentam cópias aproximadas de si mesmo em seu interior."*

A dimensão fractal pode ser calculada, através dos seguintes dois métodos, entre outros:

♣ *Dimensão por auto-semelhança;*

♣ *Dimensão de capacidade.*

6.1 Dimensão por Auto-Semelhança

Definição 6.1 *Um conjunto é auto-semelhante se é a união de pequenos conjuntos que são semelhantes a si próprio.*

Quando um objecto apresenta auto-semelhança, ou seja, a estrutura do objecto repete-se em sucessivas escalas, umas dentro das outras, a sua dimensão pode ser determinada por um método bem simples. Para se chegar a este método, vamos analisar três objectos dos quais conhecemos a sua dimensão, um segmento de recta, um quadrado e um cubo.

Começamos por dividir estes objectos em n partes iguais sendo cada uma delas uma redução da figura inicial, segundo uma razão de semelhança r.

- *Segmento de Recta*

Tomemos um segmento de recta qualquer, onde temos $n = 1$, $r = 1$ e do qual sabemos a sua dimensão, ou seja, $D = 1$, figura 6-1.

Figura 6-1: Segmento de recta, $n = 1$ e $r = 1$.

Se dividirmos o segmento de recta em duas partes iguais, temos $n = 2$, $r = \frac{1}{2}$, figura

6-2.

Figura 6-2: Segmento de recta dividido em duas partes iguais, ou seja, $n = 2$ e $r = \frac{1}{2}$.

Se o dividirmos em três partes iguais, obtemos $n = 3$, $r = \frac{1}{3}$, figura 6-3 e assim sucessivamente.

Figura 6-3: Segmento de recta dividido em três partes iguais, ou seja, $n = 3$ e $r = \frac{1}{3}$.

Podemos relacionar n, r e D da seguinte forma:

$$n = \left(\frac{1}{r}\right)^D$$

- *Quadrado*

Tomemos um quadrado unitário, ou seja, $n = 1$, $r = 1$ e sabemos que a sua dimensão é $D = 2$, figura 6-4.

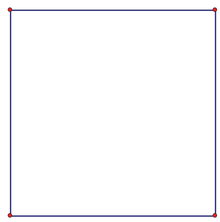


Figura 6-4: Quadrado unitário, ou seja, $n = 1$ e $r = 1$.

Quando dividirmos os seus lados em duas partes iguais, teremos $n = 4$ e $r = \frac{1}{2}$, figura

6-5.

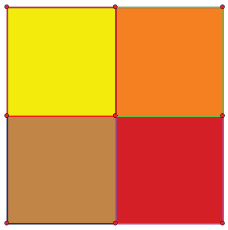


Figura 6-5: Quadrado unitário dividido em quatro quadradinhos, ou seja, $n = 4$ e $r = \frac{1}{2}$.

Se dividirmos, agora, os seus lados em três partes iguais, temos $n = 9$ e $r = \frac{1}{3}$, figura 6-6 e assim sucessivamente.

Podemos, então relacionar n, r e D da seguinte forma:

$$n = \left(\frac{1}{r}\right)^D$$

- *Cubo*

Tomemos, agora, um cubo unitário, ou seja, $n = 1$, $r = 1$ e sabemos que a sua dimensão

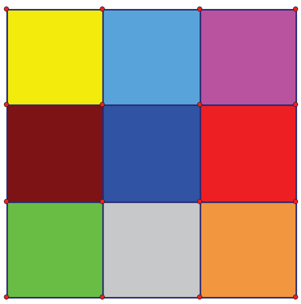


Figura 6-6: Quadrado unitário dividido em 9 quadradinhos, ou seja, $n = 9$ e $r = \frac{1}{3}$.

é $D = 3$, figura 6-7.

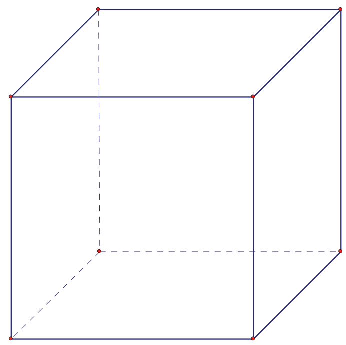


Figura 6-7: Cubo unitário, $n = 1$ e $r = 1$.

Agora dividimos os seus lados em duas partes iguais e teremos $n = 8$, $r = \frac{1}{2}$, figura 6-8.

Se o dividirmos em três partes iguais, obtemos $n = 27$, $r = \frac{1}{3}$, figura 6-9 e assim sucessivamente.

A relação das figuras anteriores, também, se verifica neste caso:

$$n = \left(\frac{1}{r}\right)^D$$

Da relação anterior obtemos o seguinte:

$$n = \left(\frac{1}{r}\right)^D \iff D = \frac{\log n}{\log \frac{1}{r}} \tag{6.1}$$

Esta relação verifica-se para as figuras geométricas que apresentam uma forma regular, supomos que esta igualdade, também se verifica para outro tipo de figuras, as figuras que apresentam irregularidades.

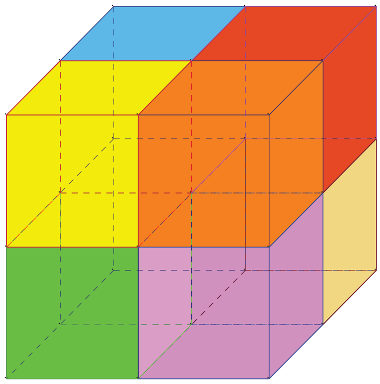


Figura 6-8: Cubo dividido em 8 cubinhos, ou seja, $n = 8$ e $r = \frac{1}{2}$.

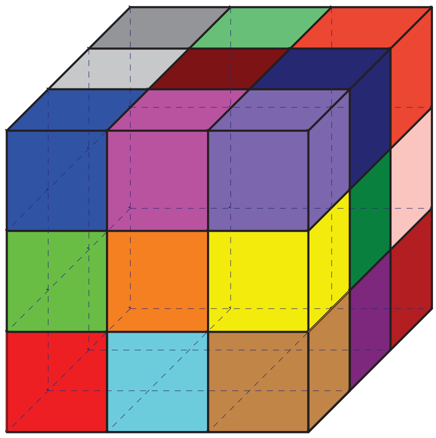


Figura 6-9: Cubo dividido em 27 cubinhos, ou seja, $n = 27$ e $r = \frac{1}{3}$.

Cálculo da dimensão do Conjunto de Cantor

Ao analisar o que ocorre quando passamos de uma etapa para outra, na construção do conjunto de Cantor, observamos que passamos de um segmento de recta para dois, desta forma o $n = 2$, e que o novo segmento de recta foi obtido quando reduzimos o segmento anterior com uma razão de semelhança $r = \frac{1}{3}$. Aplicando a relação obtida em (6.1), temos:

$$D = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,63$$

Logo, podemos ver que o conjunto de Cantor ocupa mais espaço que um ponto e menos espaço que um segmento de recta. No entanto, o conjunto de Cantor tem dimensão topológica 0, pois este conjunto consiste numa infinidade de pontos "pulverizados". Note-se que esta dimensão é maior que a dimensão topológica.

6.2 Dimensão de capacidade

Quando um fractal não apresenta auto-semelhança, não há como calcular a sua dimensão fractal pelo método anterior, devido às irregularidades que o fractal apresenta. Uma alternativa para o cálculo da sua dimensão fractal é o método, conhecido como, *box-couting*, ou seja, contagem de caixas. Este método consiste em cobrir a figura com uma malha de quadrículas de lado ℓ, e contar quantas possuem ao menos um ponto da figura. Denotemos esse valor por n. Seja δ o lado da moldura que escolhemos para inserir a figura.

Consideremos um quadrado de lado δ. Se o dividirmos em quatro quadrados iguais de lado ℓ, cada um dos novos quadrados terá lado igual à metade da aresta inicial, δ. Obtemos, assim, $n = 4$ e $\frac{\delta}{\ell} = 2$. Como a dimensão do quadrado é $D = 2$, obtemos a seguinte relação:

$$n = \left(\frac{\delta}{\ell}\right)^D$$

Tomemos, agora, um cubo de aresta δ, dividimos este cubo em 8 cubinhos de aresta ℓ igual à metade da aresta inicial. Para este caso teremos $n = 8$, $\frac{\delta}{\ell} = 2$ e $D = 3$, podemos escrever $8 = 2^3$, e assim obtemos a relação anterior, ou seja, $n = \left(\frac{\delta}{\ell}\right)^D$.

Então obtemos o seguinte:

$$n = \left(\frac{\delta}{\ell}\right)^D \iff D = \frac{\log n}{\log \frac{\delta}{\ell}}$$

No entanto, para que o valor de D seja preciso, é necessário que a malha seja muito fina, isto é, que o lado ℓ dos quadradinhos seja tão pequeno quanto se queira. Dessa forma, podemos definir D aplicando o limite quando o lado ℓ tende para zero:

$$D = \lim_{\ell \to 0} \frac{\log n}{\log \frac{\delta}{\ell}}$$

Cálculo da dimensão do conjunto de Cantor

Numa dada etapa do conjunto de Cantor, podemos cobri-lo com $n = 2^k$ quadrículas (que representa o número de intervalos) de lado $\ell = \frac{1}{3^k}$ (que representa o comprimento do intervalo da etapa k). Como a construção do conjunto toma o intervalo $[0;1]$, temos $\delta = 1$.

Note-se que neste caso, fazer $\ell \to 0$ é equivalente a $k \to \infty$. Então

$$D = \lim_{k \to \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^k} = \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,63$$

que coincide com a dimensão calculada pela fórmula (6.1).

6.3 Dimensão de Hausdorff

A dimensão é uma primeira estimativa do tamanho de um conjunto e indica-nos a forma adequada de o medir. Podemos imaginar que a dimensão é como a lente adequada de um microscópio para ver o conjunto. Se tentarmos ver um conjunto pequeno com uma lente com pouca graduação, não o veremos. No entanto, se utilizarmos uma lente com uma graduação muito elevada, só veremos algo muito desfocado. Só podemos ver o conjunto com a lente adequada, ou seja, a sua dimensão.

No caso do conjunto de Cantor, a dimensão zero é "demasiado pequena" (tem infinitos pontos) e a dimensão um é "demasiado grande" porque não nos permite vê-lo, já que tem medida zero.

Em 1919, Hausdorff introduziu a dimensão fraccionária e a forma de medir essa dimensão que generalizou a dimensão e a medida de Lebesgue. Actualmente, estes conceitos conhecem-se como sendo medida e dimensão de Hausdorff.

Ainda que a definição de dimensão de Hausdorff esteja associada a um processo de medida, introduzimos, intuitivamente, a dimensão de semelhança, que coincide em muitos casos com a dimensão de Hausdorff.

A ideia é ver como coincide em muitos casos com a dimensão de Hausdorff, ou seja, é ver como varia a medida de um conjunto quando se faz uma redução com uma certa razão de semelhança r.

Para chegarmos à Dimensão de Hausdorff é necessário abordar o conceito de medida. Medida, intuitivamente, é a maneira de se atribuir um tamanho a um conjunto, representando essa característica por um número.

Definição 6.2 *Considere $F \subset \mathbb{R}^n$. Diâmetro de F é o supremo das distâncias entre dois dos seus pontos e denotamos por $|F|$. Ou seja,*

$$|F| = \sup \{\|x - y\|, \ x, \ y \in F\}.$$

Definição 6.3 *Uma $\delta -$ cobertura para um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é uma família enumerável de conjuntos $\{X_i\}$ com diâmetro máximo δ que cobre F, ou seja,*

$$\left\{ X_i : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \quad e \quad 0 < |X_i| \leq \delta \right\}$$

Existem infinitas famílias que satisfazem as exigências referidas anteriormente, qualquer que seja F.

Definição 6.4 *Considere $F \subset \mathbb{R}^n$ e $s \geq 0$. Dado $\delta > 0$ definimos*

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |X_i|^s \ : \ \{X_i\} \text{ é } \delta - \textit{cobertura para } F \right\}. \tag{6.2}$$

À medida que δ se aproxima de 0 vamos ter cada vez menos coberturas e o ínfimo em 6.2 aumenta aproximando-se de um limite quando $\delta \to 0$

Queremos famílias que cobrem F, porém restritas a valores cada vez menores de δ. Fazendo $\delta \to 0$, temos a medida de Hausdorff s-dimensional.

$$H^s(F) = \lim_{\delta \to 0} H_\delta^s(F). \tag{6.3}$$

Seguidamente enunciaremos algumas propriedades relacionadas com a medida de Hausdorff.

Proposição 6.5 *Considere F_i uma família enumerável de conjuntos abertos ou fechados*[1] *disjuntos. Então*

$$H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} H^s\left(F_i\right).$$

Para saber mais sobre este resultado pode-se consultar a página 26 de [8].

Proposição 6.6 *Se $F \subset \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$, então*

$$H^s\left(\lambda F\right) = \lambda^s H^s\left(F\right)$$

onde $\lambda F = \{\lambda x \mid x \in F\}$.

Demonstração 6.7 *Toda a $\delta -$ cobertura de λF pode ser escrita como $\{\lambda X_i\}$, onde X_i é uma $\frac{\delta}{\lambda} -$ cobertura de F. Pela definição de medida de Hausdorff temos:*

$$\begin{aligned}
H^s\left(\lambda F\right) &= \lim_{\delta\to 0} H^s_\delta\left(\lambda F\right) \\
&= \lim_{\delta\to 0}\left(\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\lambda X_i\right|^s\right\}\right) \\
&= \lim_{\delta\to 0}\left(\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^s\left|X_i\right|^s\right\}\right) \\
&= \lim_{\delta\to 0}\lambda^s\left(\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|X_i\right|^s\right\}\right) \\
&= \lambda^s \lim_{\delta\to 0} H^s_{\frac{\delta}{\lambda}}\left(F\right) \\
&= \lambda^s \lim_{\gamma\to 0} H^s_\gamma\left(F\right) \\
&= \lambda^s H^s\left(F\right)
\end{aligned}$$

[1] *Esta proposição é válida numa situação mais geral em que F_i é uma família enumerável de conjuntos de Borel disjuntos. Conjuntos obtidos pela intersecção ou união enumerável de conjuntos abertos ou fechados são conjuntos de Borel.*

Portanto,

$$H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F) \blacksquare$$

Recorrendo a 6.2, torna-se claro que, para qualquer conjunto F e qualquer $\delta < 1$, $H^s(F)$ é decrescente com s. Assim, por 6.3, $H^s(F)$ também decresce com s. Mais, temos que, se $t > s$ e $\{U_i\}$ é uma $\delta - cobertura$ de F, então

$$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

Assim, se tomarmos os ínfimos (sobre as $\delta - coberturas$), obtemos

$$H^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s} H^s_\delta(F).$$

Fazendo $\delta \to 0$, verifica-se que, se $H^s(F) < \infty$, então $H^t(F) = 0$ para $t > s$.

Por outro lado, daqui decorre também, que se $H^t(F) > 0$, não podemos ter $H^s(F) < \infty$, logo $H^s(F) = \infty$.

Assim, a representação gráfica de $H^s(F)$, como função de s mostra que existe um valor crítico de s, no qual $H^s(F)$ "salta" de ∞ para 0. Ver figura 6-10.

Portanto,

$$\inf\{s \ : H^s(F) = 0\} = \sup\{s : H^s(F) = \infty\}$$

e a este valor crítico de s é chamado Dimensão de Hausdorff de F e é denotado por $\dim_H(F)$. Assim,

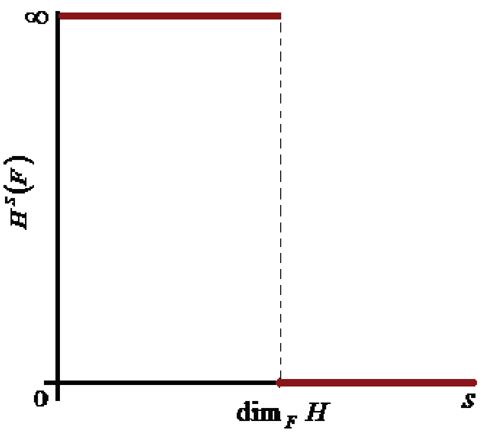


Figura 6-10: Representação gráfica de $H^s(F)$ como função de s.

Definição 6.8 *A dimensão de Hausdorff de um conjunto F define-se como*

$$\begin{aligned}\dim_H(F) &= \inf\{s \ : H^s(F) = 0\}\\ &= \sup\{s \ : H^s(F) = \infty\}\end{aligned}$$

Então,

$$H^s(F) = \begin{cases}\infty, & se \quad s < \dim_H(F)\\ 0, & se \quad s > \dim_H(F)\end{cases}$$

Se $s = \dim_H(F)$, então $H^s(F)$ pode ser zero ou infinito, ou pode satisfazer o seguinte,

$$0 < H^s(F) < \infty$$

Cálculo da dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor

O seguinte lema sugere-nos um valor para a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor.

Lema 6.9 *Seja C o conjunto de Cantor e suponha-se que existe $s > 0$ tal que $0 < H^s(C) < \infty$. Então $s = \frac{\log 2}{\log 3}$.*

Demonstração 6.10 *O conjunto de Cantor pode ser decomposto*

$$C_1 \cup C_2 = C,$$

onde $C_1 = C \cap \left[0; \frac{1}{3}\right]$ e $C_2 = C \cap \left[\frac{2}{3}; 1\right]$.

Note-se que estas duas partes são geometricamente semelhantes a C, porém reduzidas na razão de $r = \frac{1}{3}$.

Pelas proposições 6.5, 6.6 temos que

$$\begin{aligned} H^s(C) &= H^s(C_1) + H^s(C_2) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(C) + \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(C) \\ &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(C) \end{aligned}$$

Como $0 < H^s(C) < \infty$, dividindo ambos membros da igualdade por $H^s(C)$, obtemos

$$1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s$$

Aplicando o logaritmo nos dois membros e isolando s, obtemos

$$s = \frac{\log 2}{\log 3} \blacksquare$$

Com base no lema anterior, provemos que a dimensão do conjunto de Cantor é: $s = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Cada conjunto C_k pode ser coberto por 2^k intervalos de comprimento 3^{-k} e C está contido em C_k.

A cobertura $\{U_i\}$ de C formada pelos 2^k intervalos C_k, de comprimento 3^{-k} dá-nos que

$$H^s_{3^{-k}}(C) \leq \sum_i |U_i|^s = 2^k 3^{-sk} = 1,$$

se

$$s = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Fazendo $K \to +\infty$, obtemos $H^s(C) \leq 1$.

Para provar que $H^s(C) \geq \frac{1}{2}$ mostramos que

$$\sum_i |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s} \tag{6.4}$$

para qualquer cobertura $\{U_i\}$ de C. É suficiente assumir que os U_i são intervalos e, expandindo um pouco e usando o facto de C ser compacto, basta-nos verificar 6.4 para o caso em que $\{U_i\}$ *é* uma família finita de subintervalos fechados de $[0;1]$.

Para U_i, seja k um inteiro tal que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}$$

Então U_i pode intersectar um intervalo de C_k, já que os intervalos estão separados em pelo 3^{-k}. Se $j \geq k$ então U_i intersecta

$$2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s (|U_i|)^s$$

intervalos de C_j.

Escolhemos j suficientemente grande para que

$$3^{-(j+1)} \leq |U_i|$$

para todo U_i.

Já que $\{U_i\}$ intersecta todos os 2^j intervalos de C_j,

$$2^j \leq \sum_j 2^j 3^s \left(|U_i|\right)^s,$$

o que origina

$$\sum_i \left(|U_i|\right)^s \geq 3^{-s} = \frac{1}{2}$$

logo

$$H_s\left(C\right) \geq \frac{1}{2} > 0$$

Donde

$$\dim_H\left(C\right) = s = \frac{\log 2}{\log 3}$$

A proposição 6.5 também é útil no cálculo da dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor, vejamos como:

Podemos dividir o conjunto de Cantor em duas partes iguais:

$$C_L = C \cap \left[0, \frac{1}{3}\right] \text{ e } C_R = C \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

ambas semelhantes a C de comprimento $\frac{1}{3^k}$.

A união $C = C_L \cup C_R$ é vazia, assim

$$\begin{aligned} Hs\,(C) &= H_s\,(C_L) + H_s\,(C_R) \\ &= H_s\left(\frac{1}{3}C_L\right) + H_s\left(\frac{1}{3}C_R\right) \\ &= 2H_s\left(\frac{1}{3}C\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^s H_sC \end{aligned}$$

Se $0 < H_s\,(C) < \infty$, então $1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s$, o qual leva a que $\dim_H (C) = s = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Capítulo 7

Actividades a aplicar em Sala de Aula

A introdução de fractais no ensino secundário, para além de satisfazer a curiosidade dos alunos que já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma ideia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas. Actividades que envolvem fractais possibilitam ao aluno o desenvolvimento do raciocínio - lógico matemático, a integração entre conceitos matemáticos e elementos do quotidiano, desenvolvimento do sentido crítico, da criatividade, entre outras.

Existem vários conteúdos matemáticos que o aluno pode adquirir, compreender e aplicar quando realiza uma actividade que envolva fractais. Estes conteúdos devem ser abordados consoante o nível de ensino, ou seja, quando mais elementar o nível, mais intuitivamente este conteúdo deve ser abordado, no entanto, isto não quer dizer que estes não sejam objectivos. Seguidamente apresentam-se alguns conteúdos matemáticos que podem ser leccionados envolvendo os fractais:

★ Auto-semelhança

★ Dimensão

★ Áreas, volumes e perímetros

★ Números Complexos

★ Funções

★ Transformações Geométricas

★ Semelhança de Figuras

▶Razão de semelhança

▶Ampliação

▶Redução

▶Razão de semelhança entre áreas e perímetros

★ Sucessões

▶Termos de uma sucessão

▶Termo geral da sucessão

▶Limite

▶Progressão Aritmética

▶Progressão Geométrica

A metodologia a aplicar na resolução de uma actividade envolvendo fractais deve estar baseada na "resolução de problemas", isto é, na realização, e na observação das situações problemáticas. Proponho actividades que envolvam a resolução de problemas, situações que podem permitir o desenvolvimento da criatividade, podendo o aluno apresentar as suas ideias matemáticas e conjecturas, desenvolvendo, desta forma o seu raciocínio matemático.

Esta metodologia pode levar o aluno a uma maior compreensão das situações, ao reconhecimento das conexões entre as suas ideias e à organização do seu conhecimento.

Atitude/Valores e Competências

♦ Mostrar confiança em si próprio quando confrontado com situações novas.

♦ Revelar curiosidade e gosto de aprender, de pesquisar e de investigar.

♦ Ter hábitos de trabalho e de persistência, procurando realizar o trabalho até ao fim de forma organizada e apresentá-lo com a devida qualidade.

♦ Ser capaz de resolver problemas, formular hipóteses, prever resultados e seleccionar estratégias de resolução, e de no final criticar os resultados obtidos.

♦ Conseguir comunicar e transmitir conceitos, ideias e procedimentos, tanto em linguagem corrente como em linguagem matemática.

♦ Apreciar a harmonia dos números e de figuras e reconhecer a sua presença na arte, na técnica e na vida.

♦ Saber utilizar a Matemática na interpretação do real, reconhecendo formas e processos que envolvam conceitos matemáticos.

♦ Realizar construções geométricas e reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a software da geometria dinâmica.

♦ Visualizar e desenvolver o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em geometria e em outras áreas da matemática.

♦ Compreender os conceitos de comprimento, de perímetro, de área assim como conseguir aplicar estes conceitos na resolução e formulação de problemas.

♦ Predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e numéricos com gosto por investigar propriedades e relações geométricas.

⧫ Procurar e encontrar padrões e regularidades formulando em seguida generalizações em situações diversas, nomeadamente em contexto numéricos e geométricos.

Objectivos

✠ Trabalhar as relações numéricas dos Fractais e seus elementos, conforme as iterações sucessivas; por exemplo, contagem, perímetro e áreas.

✠ Trabalhar com padrões geométricos, estudando o conceito de medida, sequências e limites, ao mesmo tempo em que se adicionam novas ideias como a auto-semelhança e a dimensão Fractal.

✠ Analisar algoritmos e progressões geométricas e aritméticas.

✠ Desenvolver atitudes de pesquisa, abordagem de situações novas, partilha de saberes e responsabilidades

✠ Desenvolver o raciocínio e o pensamento científico, descobrindo relações entre conceitos de matemática.

✠ Permitir as conexões entre a Geometria, a Matemática Discreta e a Análise Infinitesimal, envolvendo padrões geométricos e numéricos, os conceitos de medida, sucessões, iteração e limites ao mesmo tempo que adiciona novas ideias como o conceito de auto-semelhança e dimensão fractal.

7.1 Actividades em Anexo

As actividades propostas estão em Anexo.

Capítulo 8

Conclusão

O estudo elaborado ao longo destes meses sobre o conjunto de Cantor não fez mais do que levantar um pouco a cortina para o mundo matemático que se abre quando se fala do trabalho de Georg Cantor.

As repercussões da Teoria de Conjuntos, desenvolvida a partir da sua obra, fazem dela a Teoria Fundacional da Matemática Moderna, fornecendo um conjunto de axiomas que permitem provar ou refutar proposições sobre objectos matemáticos de todas as áreas da Matemática.

Como grande parte das ideias inovadoras da ciência, também as ideias de Cantor foram inicialmente mal recebidas, e mesmo ridicularizadas, por matemáticos de renome. No entanto, o espírito das suas ideias prevaleceu e o seu trabalho é hoje reconhecido por toda a comunidade científica. Não é por acaso que a sua Hipótese do contínuo foi o primeiro dos famosos 23 problemas propostos por Hilbert no início do século XX.

Para além desta hipótese do contínuo que, naturalmente, entusiasmou os matemáticos do século XX, muitos têm sido os desenvolvimentos das teorias de Cantor e muitas têm sido as abordagens e aplicações destas. Procurámos neste trabalho investigar o conjunto de Cantor, tentando perceber a sua origem, o que se tem inovado desde então, as suas aplicações e as possibilidades de utilização na sala de aula para alunos dos ensinos básico e secundário.

A perspectiva do conjunto de Cantor enquanto limite de um sistema iterativo, que tanto pode ser vista geometricamente como algebricamente, permite envolver e motivar os alunos para o estudo das sucessões, progressões, funções, limites e muitos outros pontos do programa de Matemática, mas permite também alertá-los para o mundo perigoso da intuição. Como pode um aluno, sem bases fundamentais de Lógica e Teoria de Conjuntos compreender a formação de um conjunto como este, quais as grandes diferenças entre as etapas de construção e o conjunto final? O que é a auto-semelhança num conjunto, do qual se conhecem apenas as etapas de construção?

A abordagem ao conjunto de Cantor através dos sistemas dinâmicos vai ao encontro da teoria do caos e dos fractais que é actualmente recomendada (mas não obrigatória) no ensino secundário. Uma abordagem à dimensão fractal, através da dimensão de capacidade ou de auto-semelhança seria um bom exercício de aplicação dos logaritmos e gráficos logarítmicos.

O que fazemos neste trabalho é apenas uma amostra do que pode ser feito, usando o conjunto Cantor nas suas diversas facetas, para a motivação e compreensão da Matemática.

Concluímos com a sensação de termos apenas começado.

Bibliografia

[1] Adler, R. L., Konheim, A. G., McAndrew, M. H., *Topological entropy.* Trans. Amer. Math. Soc. 114, 1965, 309–319.

[2] Buchan A., Haugen C., Benett R., Scheuermann C., *Fractals and the Cantor set*, 1990.

[3] Coppel, W. *An interesting Cantor set,* The American Mathematical Monthly, Volume 90, Number 7, August-September 1983.

[4] Devaney, R., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd edition, Addison-Wesley, 1989.

[5] Dauben, Joseph W., *Georg Cantor and the battle for transfinite set theory*, Department of History Herbert H. Lehman College, CUNY

[6] Departamento da Educação Básica, *Currículo Nacional do Ensino Básico, Competências Essenciais*, Lisboa, Reprografia da Secretaria- Geral do Ministério da Educação, 2001.

[7] Direcção Geral dos Ensinos Básicos e Secundário, *Programa Matemática – Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem*, Lisboa, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, E.P., 1991, vol.2.

[8] Falconer, K., *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, John Wiley and Sons (1993).

[9] Fleron, J. F., *A note on the History of the Cantor Set and Cantor Function*, Mathematics Magazine, Volume 67, Apr., 1994, pp. 136-140.

[10] Holmgren, R.A., *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Springer, 2000.

[11] Kuratowski, K., *Topology*, Academic Pr / PWN; Revised edition (1966).

[12] Lima, Elon Lages, *Elementos de Topologia Geral*, Ao livro Técnico S.A. e Editora da Universidade de São Paulo, 1970.

[13] Nelson, Dylan R., *The Cantor set - A brief introduction,*University of California - Berkeley, Berkeley, CA 94704

[14] Peitgen, H.-O., Jurgens, H., Saupe, D., *Chaos and fractals : new frontiers of science*, Springer, (1993).

[15] Robinson, Clark, *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*, 2^a edição, CRC Press LLC, 1999.

[16] Shaver, Christopher, *An Exploration of the Cantor Set*, Rockhurst University, 09 James and Elizabeth Monahan Summer Research Fellowship, Summer 2008 MT4960: Mathematics Seminar, Spring 2009.

[17] Tricot, C., *Curves and Fractal Dimension*, Springer, New York,1995.

Internet

▷ http://georgecantor-6na.blogspot.com/2009/11/geor-cantor-o-pensador-do-infinito.html

▷ www.ufmt.br/icet/matematica/geraldo/biografia.htm

▷ http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set

▷ www.biographybase.com/biography/Cantor_Georg.html

▷ www.answers.com/topic/georg-cantor#ixzz1B6gnnv

▷ www.answers.com/topic/georg-cantor#ixzz1B6gfkQMs

▷ www.math.umass.edu/~mcnnors/fractal/fractal.htm

▷ www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/galeria.htm

▷ www.fractals.8m.com/queson.htm#go

▷ www.fractales.org

▷ www.maths.adelaide.edu.au/pure/pscott/fractals/fu2.html#Anchor33333

▷ http://pt.wikipedia.org/wiki/Dimens%C3%A3o_de_Hausdorff

▷ www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/dimensao.htm

▷ http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico7.php

▷ www.worldlingo.com/ma/enwiki/pt/Hausdorff_dimension

▷ http://pt.encydia.com/es/Dimens%c3%a3o_de_Hausdorff-Besicovitch

▷ www.labma.ufrj.br/~beatriz/arquivo/frac.pdf

▷ http://dme.uma.pt/people/faculty/mauricio.reis/documentos/TrabSDD.pdf

▷ http://en.wikipedia.org/wiki/Hausdorff_dimension

▷ http://mathworld.wolfram.com/HausdorffDimension.html

▷ http://planetmath.org/encyclopedia/HausdorffDimension.html

▷ http://pt.encydia.com/es/Conjunto_de_Cantor

▷ http://revistas.ifg.edu.br/ojs/index.php/seminarioic/article/viewFile/60/23

▷ http://mathnet.kaist.ac.kr/mathnet/kms_tex/223.pdf

▷ www.jstor.org/pss/2159830

▷ www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/0938-2.pdf

Capítulo 10

ANEXOS

ANEXOS

Conexões Entre as Tarefas Propostas e o Programa de Matemática

Ensino do 3º Ciclo do Ensino Básico

Ano/Conteúdo Programático / Tarefa Proposta	7º ano		8º ano			9º ano
	Sequências e regularidades	**Semelhança**	**Números racionais**	**Sequências e regularidades**	**Sólidos geométricos**	**Números reais**
Tarefa 1 - *Construção do conjunto de Cantor utilizando o Geometer's Sketchpad*	• Termo geral de uma sequência Numérica • Expressões algébricas			• Termo geral de uma sequência Numérica • Expressões algébricas		• Noção de número real e recta real • Intervalos
Tarefa 2 – *Conjunto de Cantor e a noção Intuitiva de Limite*	• Termo geral de uma sequência Numérica • Expressões algébricas			• Termo geral de uma sequência Numérica • Expressões algébricas		
Tarefa 3 – *Conjunto de Cantor, o Plano e o Espaço*	• Termo geral de uma sequência Numérica • Expressões algébricas	• Noção de semelhança • Ampliação e redução de um Polígono • Polígonos semelhantes	• Representação, comparação e ordenação • Operações, propriedades e regras operatória	• Termo geral de uma sequência Numérica • Expressões algébricas	• Área da superfície e volume	
Tarefa 4 – *Números e a sua representação…*			• Potências de base e expoente inteiro (incluindo a regra de potência da potência)			
Tarefa 5 - *Árvores e o conjunto de Cantor*	• Termo geral de uma sequência Numérica • Expressões algébricas	• Noção de semelhança • Ampliação e redução de um Polígono • Polígonos semelhantes	• Operações, propriedades e regras operatória	• Termo geral de uma sequência Numérica • Expressões algébricas		• Noção de número real e recta real • Intervalos
Tarefa 6 – *O conjunto de Cantor e a Função Tenda*	• Termo geral de uma sequência Numérica • Expressões algébricas		• Representação, comparação e ordenação • Operações, propriedades e regras operatória	• Termo geral de uma sequência Numérica • Expressões algébricas		• Noção de número real e recta real • Intervalos

Ensino Secundário

Ano/Conteúdo Programático / **Tarefa Proposta**	**10º ano** — **FUNÇÕES E GRÁFICOS. FUNÇÕES POLINOMIAIS**	**11º ano** — **SUCESSÕES**
Tarefa 1 - *Construção do conjunto de Cantor utilizando o Geometer's Sketchpad*		• Definição e diferentes formas de representação. • Estudo de propriedades: - monotonia e limitação. • Progressões Aritméticas e Geométricas: termo geral e soma de n termos consecutivos. • Noção de limite.
Tarefa 2 – *Conjunto de Cantor e a noção Intuitiva de Limite*		• Definição e diferentes formas de representação. • Estudo de propriedades: - monotonia e limitação. • Progressões Aritméticas e Geométricas: termo geral e soma de n termos consecutivos. • Noção de limite.
Tarefa 3 – *Conjunto de Cantor, o Plano e o Espaço*		• Definição e diferentes formas de representação. • Estudo de propriedades: - monotonia e limitação. • Progressões Aritméticas e Geométricas: termo geral e soma de n termos consecutivos. • Noção de limite.
Tarefa 5 - *Árvores e o conjunto de Cantor*		• Estudo de propriedades: - monotonia e limitação. • Progressões Aritméticas e Geométricas: termo geral e soma de n termos consecutivos. • Noção de limite.
Tarefa 6 – *O conjunto de Cantor e a Função Tenda*	• Funções Polinomiais.	• Definição e diferentes formas de representação. • Progressões Aritméticas e Geométricas: termo geral e soma de n termos consecutivos.
Tarefa 7 – *Iteração Gráfica da Família de Funções Quadráticas*	• Estudo Intuitivo de propriedades da função quadrática, considerando a análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções (considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez). • Funções Polinomiais.	✓ Tema facultativo
Tarefa 8 – *Iteração Gráfica e a Calculadora Gráfica*	• Estudo Intuitivo de propriedades da função quadrática, considerando a análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções (considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez). • Funções Polinomiais.	• Tirar partido do uso da calculadora gráfica. ✓ Tema facultativo

Tarefa 9 – *O Conjunto de Cantor e a Função Quadrática*	• Estudo Intuitivo de propriedades da função quadrática, considerando a análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções (considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez). • Funções Polinomiais.	✓ Tema facultativo
Tarefa 10 – *Pontos Críticos*	• Estudo Intuitivo de propriedades da função quadrática, considerando a análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções (considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez). • Funções Polinomiais.	✓ Tema facultativo

Tarefa 1: *Construção do conjunto de Cantor utilizando o Geometer's Sketchpad*

A ideia básica de um fractal, é que este exibe recursividade ou auto-semelhança, ou seja, quando observamos uma parte qualquer do fractal, vemos o padrão original da figura completa.

Objectivos

- Aprender a utilizar o software Geometer's Sketchpad.
- Desenvolver uma tarefa de investigação, visando contemplar, inicialmente, os conteúdos de padrões numéricos e regularidades.
- Levar os alunos a fazer explorações, descobertas, formular conjecturas, argumentar e comunicar-se matematicamente as suas conclusões.
- Desenvolver o espírito crítico.
- Identificar uma sucessão.
- Escrever os termos de uma sucessão.
- Escrever o termo geral de uma sucessão conhecidos alguns dos seus termos.
- Identificar sucessões monótonas.
- Identificar sucessões limitadas.

Procedimentos

1. Dividir a turma em grupos de trabalho de três a quatro elementos cada.
2. Entrega-se a Ficha de Trabalho aos alunos.
3. Estes devem ler atentamente a tarefa e de seguida utilizando o computador e o programa Geometer's Sketchpad aí instalado proceder à realização da primeira parte da ficha de Trabalho.
4. Depois de construído o conjunto de Cantor através do Geometer's Sketchpad, o aluno deverá responder às questões apresentadas no final da ficha de Trabalho.
5. Depois de responder às questões, cada grupo apresentará as suas conclusões à turma.

Ficha de Trabalho

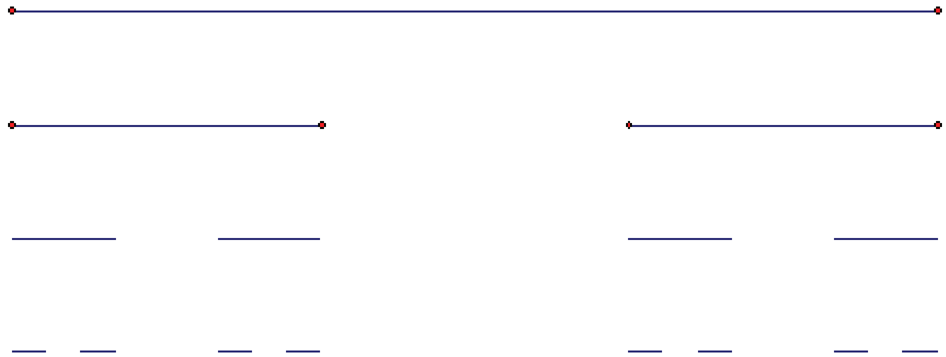
Tarefa 1: *Construção do conjunto de Cantor utilizando o Geometer's Sketchpad*

1. Desenhar um segmento de recta, horizontal. (Para que o segmento de recta seja completamente horizontal, deve-se premir a tecla **shift**)
2. De seguida, desloca-se os seus pontos para baixo. Para os deslocar devemos seleccioná-los, só os pontos, e de seguida vamos ao menu **Transform** e depois **Translate...**, e colocamos na caixa, no item distância fixa o valor de 1 cm, e no item ângulo fixo -90º e clicamos em **Translate**.
3. A ideia do conjunto de Cantor é eliminar o terço intermédio do segmento de recta. Assim, fazemos duplo clic no ponto esquerdo que acabamos de deslocar, e vemos que se produz uma animação de círculos concêntricos sobre ele. Isto é o mesmo que seleccionar o ponto e executamos o comando **Transform** e seleccionamos **Mark Center**. Depois, seleccionamos o ponto direito e executamos o comando **Transform** e selecciona-se **Dilate...** duas vezes, primeiro com (1/3) e depois com (2/3), e desenhamos os dois segmentos de recta dos lados.

2ª etapa do conjunto de Cantor

4. No passo seguinte, utilizaremos o comando **Iterate** para obter uma figura representativa do conjunto de Cantor, enquanto fractal. Seleccionamos os pontos iniciais, ou seja, os que pertencem à recta construída no ponto 1.

De seguida, vamos ao **Transform** e seleccionamos **Iterate...** e associamos os dois pontos com o novo segmento esquerdo. Seguidamente, em **Struture** seleccionamos **New Map**, e associamos os pontos originais com o segmento da direita. Depois de clicar em **Iterate**, obtemos o conjunto de Cantor. Para aumentar ou diminuir o número de iterações, seleccionamos o **Display** seguidamente **Increase Iterations** ou **Decrease Iterations** e utilizamos **(+)** e **(-)** respectivamente.



Conjunto de Cantor até à 3ª etapa.

O Conjunto de Cantor

Observe a construção realizada anteriormente, que obedece a algumas regras:

Considere o segmento inicial [0,1].

a) Como varia o comprimento dos segmentos de recta das diferentes etapas de construção do Conjunto de Cantor e o número de segmentos de cada etapa, com as iterações?
b) Identifique a lei de formação em cada linha.
c) Verifique se as sequências construídas na alínea (a) são monótonas?
d) Para onde tende as medidas de cada segmento de recta e o número de segmentos das diferentes etapas de construção do Conjunto de Cantor?

Como o tema dos fractais é algo novo no ensino, esta é uma forma interessante de introduzir conteúdos matemáticos de forma atractiva para os alunos. Foi com base nesta ideia que programei a tarefa 1.

Para a realização desta tarefa a turma seria dividida em grupos de quatro elementos, pois desta forma os alunos podem discutir as suas ideias, primeiro, dentro do grupo e depois num debate final, onde, as conclusões a que cada grupo chegou serão apresentadas e discutidas perante a turma.

Com esta tarefa pretendo que os alunos, tenham um primeiro contacto com o programa Geometer's Sketchpad. Trata-se de um programa de geometria dinâmica, que possibilita aos alunos construírem o fractal - Conjunto de Cantor, recorrendo às suas funcionalidades básicas, tais como a construção de um segmento de recta e utilizar a ferramenta da iteração.

Na segunda parte da tarefa, são colocadas, quatro questões, aos alunos, às quais deverão responder depois de construírem algumas etapas da construção do conjunto de Cantor. Esta segunda parte pode ser destinada a alunos do ensino básico, mais precisamente, a alunos do 7º ou 8º ano de escolaridade, os quais responderiam às alíneas a) e b), pois é nestes anos que os alunos têm um primeiro contacto com as Sequências. Um dos objectivos do programa de Matemática para os 7º ou 8º ano de escolaridade é que alunos compreendam a noção de termo geral de uma sequência numérica e a representem usando símbolos matemáticos adequados, o outro objectivo, é que os alunos determinem o termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral. As etapas da construção do conjunto de Cantor são por isso, um bom exercício, pois os alunos podem determinar, facilmente, o termo geral da sequência, tanto do número de segmentos de recta como do comprimento dos segmentos de recta depois de identificarem a sua regularidade. Com base na construção das etapas do conjunto de Cantor, podemos, ainda, pedir que identifiquem os termos dessas sequências e a sua ordem. Os alunos deverão observar que o termo de ordem n corresponde ao valor obtido na etapa n da construção do conjunto de Cantor

Já no ensino secundário, esta actividade pode ser aplicada na sua totalidade, aos alunos do 11º ano, no tema Sucessões. Sendo que neste ano os alunos devem identificar os termos de uma sucessão, a ordem e o termo geral de uma sucessão. Uma das orientações dadas pelo programa do 11º ano é que a escrita de expressões para os termos gerais das sucessões deve ser procurada como forma de representar as situações que se vão descrevendo. Do mesmo modo podem-se introduzir as noções de termo, de ordem, ou até de razão. A construção de algumas etapas do conjunto de Cantor é um bom exemplo, pois permite ao aluno visualizar e identificar, facilmente, os termos de uma sucessão, a ordem, a qual o aluno deverá identificar como sendo o número da etapa de construção do conjunto de Cantor. Esta actividade pode servir de base para a introdução do conceito de progressão geométrica e para que aluno entenda o que é a razão de uma sucessão, pois quando o aluno analisa a construção de algumas etapas da construção do conjunto de Cantor ao identificar a regularidade está a identificar a razão.

Relativamente ao estudo da monotonia pretende-se que os alunos identifiquem se as sucessões encontradas na alínea b) são crescentes ou decrescentes. Com base na observação da figura obtida através do Geometer's Sketchpad, os alunos facilmente concluem que uma das expressões geradoras é crescente, a sequência do número de segmentos de recta obtidos em cada etapa, pois à medida que aumenta o número das etapas de construção do conjunto de Cantor o número de segmentos de recta obtidos em cada etapa também aumenta, enquanto que a outra expressão é decrescente, pois à medida que aumenta o número de etapas de construção do conjunto de Cantor diminui o comprimento dos segmentos de recta de etapa para etapa. Depois de os alunos terem identificado a monotonia das sucessões, torna-se mais fácil identificarem os valores para os quais as sucessões tendem.

Tarefa 2: *O conjunto de Cantor e a noção intuitiva de Limite*

Objectivos

- Desenvolver uma tarefa de investigação, visando contemplar, inicialmente, os conteúdos de padrões numéricos e regularidades.
- Levar os alunos a fazer explorações, descobertas, formular conjecturas, argumentar e comunicar-se matematicamente as suas conclusões.
- Desenvolver o espírito crítico.
- Identificar uma sucessão.
- Escrever os termos de uma sucessão.
- Escrever o termo geral de uma sucessão conhecidos alguns dos seus termos.
- Escrever o termo geral de uma progressão geométrica conhecido um termo e a razão.

No entanto, o objectivo principal, desta tarefa é que os alunos possam iniciar o estudo intuitivo de limite.

Procedimentos

1. Pedir aos alunos que desenhem uma linha de 20 cm, posicionada numa folha de papel conforme indicação C_0 na Ficha da tarefa, considerando-a como unidade de medida (esta linha será chamada de "origem do fractal");
2. Remover mentalmente o intervalo intermédio aberto C_0 e desenhar o resultado, chamando-o de C_1;
3. Remover mentalmente, agora, os intervalos intermédio abertos de cada segmento de C_1 e desenhar o resultado, chamando-o de C_2;
4. Desenhar C_3 e C_4, utilizando as mesmas instruções;
5. Discutir com o grupo como se apresentaria o Conjunto restante na 5ª, 10ª e 100ª iterações;
6. Perguntar ao grupo o que aconteceria se continuássemos os processo infinitamente;
7. Introduzir a noção de que este processo matemático pode continuar indefinidamente e que o resultado deste processo infinito é o Conjunto de Cantor;

8. Mostrar como o Conjunto de Cantor, enquanto limite deste procedimento, apresenta as duas características básicas dos fractais: auto-semelhança e complexidade;
9. Solicitar o preenchimento da tabela proposta na Ficha da tarefa;
10. Pedir que o grupo identifique a lei de formação de cada coluna;
11. Discussão das conclusões, dentro do grupo e depois perante a turma.

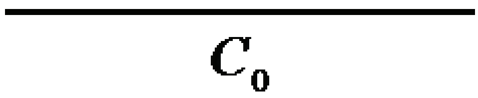
Recursos:

- - Folhas de papel, régua, lápis e borracha;
- - Quadro, para registo das respostas dos alunos;
- - Ficha de Trabalho.

Ficha de Trabalho

Tarefa 2: *O conjunto de Cantor e a noção intuitiva de Limite*

- Desenhar no centro de uma folha branca, um segmento de recta de 20 cm. Nomeia esse segmento de recta de C_0 tal como o indicado no exemplo, considerando-o como a unidade de medida (este segmento de recta será a "origem do fractal)"



Exemplo do segmento inicial.

- Depois de dividir, mentalmente, o segmento de recta em três partes iguais, remove, também mentalmente, o intervalo intermédio de C_0 e desenhar o resultado, chamando-o de C_1;
- Repetir o processo iniciado no item anterior, mentalmente, e agora, elimina os intervalos intermédios de cada segmento de recta de C_1 e desenhar o resultado, chamando-o de C_2;
- Repetir o processo para encontrar o C_3 e o C_4, utilizando as regras dos itens anteriores;
- De acordo com o que observou, como se apresentaria o Conjunto de Cantor na 5ª, 10ª e 100ª iterações?
- Complete a tabela seguinte:

Iteração	Comprimento de cada segmento	Número de segmentos	Comprimento Total
0	1	1	1
1	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{9}$		
3			
4			
5			

1. Quantos segmento de recta tem a 10ª iteração? E a 100ª iteração?
2. Haverá alguma iteração com 512 segmentos de recta? Se sim, qual?
3. Será que existe um segmento de recta em que o seu comprimento é $\frac{1}{59049}$? Se sim, qual?
4. Qual o comprimento total da 100ª iteração?
5. Seja C_n a sucessão do comprimento de cada segmento de recta, S_n a sucessão do número de segmentos de recta e T_n a sucessão do comprimento total.

   Determina a lei de formação de cada uma das sucessões.
6. Estude a monotonia de cada uma das sucessões.
7. Determine a ordem depois da qual os termos da sucessão T_n são inferiores a 0,012.
8. Será que alguma das sucessões possui o termo 0? Justifique.
9. Comente a afirmação:" Duas das sucessões são limitadas."
10. Das três sucessões, identifique quais são as progressões aritméticas e as geométricas. Justifique a resposta.

No início da tarefa a turma será dividida em grupos de quatro elementos cada, que terão como tarefa resolver a tarefa em grupo e depois apresentar as suas conclusões à turma, num debate final.

Nesta tarefa pede-se aos alunos que comecem por construir algumas etapas do conjunto de Cantor, utilizando o lápis e papel, até à etapa 4. Pede-se até à etapa 4, pois a partir desta etapa os alunos já conseguem fazer uma ideia do processo de construção do conjunto de Cantor, o que lhe permite responder às questões que lhe são colocadas.

Esta tarefa servirá de base para a introdução do tema Sucessões, leccionado no 11º ano do ensino secundário. Começamos por pedir aos alunos que preencham a tabela. Depois do preenchimento da tabela os alunos terão um primeiro contacto como o tema Sucessões, que alguns alunos poderão relacionar como sequências, conteúdo leccionado no 7º ou 8º ano do terceiro ciclo do ensino básico. Tendo como base o conceito Sequências, recordaremos o que são termos de uma sequência e a ordem dos termos de uma sequência. Neste momento é introduzido o conceito de Sucessão.

Neste momento o aluno perceberá que quando nos referimos a iteração, estamos a referirmo-nos à ordem dos termos da sucessão, desta forma já consegue responder às cinco primeiras questões.

Relativamente à questão seis, o estudo da monotonia, pretende-se que os alunos identifiquem se as sucessões C_n, S_n e T_n são crescentes ou decrescentes. Com base no preenchimento da tabela e observando o que acontece aos valores obtidos em cada coluna, os alunos facilmente concluem que os valores de duas das colunas estão a decrescer, ou seja, as sucessões que representam essas colunas são decrescentes, pois à medida que aumenta o número de iteradas diminui o valor de etapa para etapa, ou seja, na primeira coluna, que representa o comprimento de cada segmento de recta, verifica-se que à medida que se aumenta o número de iterações vai diminuindo o comprimento de cada segmento de recta, na terceira coluna, que representa o comprimento total dos segmentos de recta, acontece, exactamente, o mesmo. O mesmo já não se verifica na coluna do meio, ou seja, a segunda coluna, onde se pode observar que à medida que se aumenta o número de iterações, também, aumenta o número de segmentos de recta de cada iterada, logo tem-se uma sucessão crescente.

Na questão oito pretende-se que o aluno, verifique que nenhuma sucessão possui o termo zero, sem fazer cálculos, ou seja, com base no que observa na tabela. Uma vez que se inicia esta construção com um segmento de recta de comprimento 1 e apesar de se estar, constantemente, a retirar (1/3) de cada segmento de recta, que fica em cada iteração, estes nunca chegam a ser zero, por mais próximo que se esteja, bem como, quando nos referimos ao comprimento total dos segmentos de recta restantes em cada etapa. A sucessão da segunda coluna, também não pode possuir o termo zero, pois como nos estamos a referir ao número de segmentos por etapa, o seu primeiro termo é 1, e é uma sucessão crescente, logo, nunca poderá ter o termo zero.

Utilizando a calculadora gráfica, através da sua representação gráfica e dos cálculos, os alunos poderão chegar por si mesmo ao conceito intuitivo de limite. A utilização da calculadora gráfica, através da representação gráfica da sequência de termos permite ao aluno chegar aos conceitos de infinitamente grande, infinitamente pequeno e ao limite de uma sucessão, mais facilmente.

Deste modo, os estudantes ganham confiança nos seus próprios saberes e compreendem as novas aquisições como complementares e facilitadoras, aprofundamentos das suas competências para dar respostas a situações cada vez mais complexas.

Esta actividade serve, também, de base para estudar as propriedades de certas sucessões, as progressões geométricas e para que aluno entenda o que é a razão de uma progressão, pois quando o aluno analisa a construção de algumas etapas da construção do conjunto de Cantor ao identificar a regularidade está a identificar a razão dessa progressão.

Tarefa 3: ***O Conjunto de Cantor no Plano e no Espaço***

Objectivos

- Desenvolver uma tarefa de investigação, visando contemplar, inicialmente, os conteúdos de padrões numéricos e regularidades.
- Levar os alunos a fazer explorações, descobertas, formular conjecturas, argumentar e comunicar matematicamente as suas ideias.
- Desenvolver o espírito critico
- Identificar uma sequência/sucessão.
- Escrever os termos de uma sequência/sucessão.
- Escrever o termo geral de uma sucessão conhecidos alguns dos seus termos.
- Escrever o termo geral de uma progressão geométrica conhecido um termo e a sua razão.
- Determinar o limite de uma sucessão.

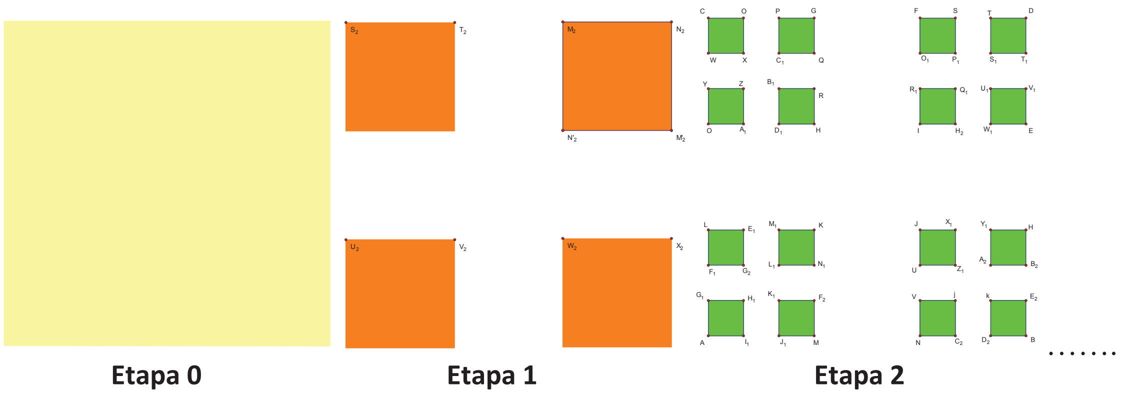
Procedimento

1. Dividir a turma em grupos de trabalho.
2. Entrega-se a Ficha de Trabalho aos alunos.
3. Estes devem ler atentamente a tarefa e de seguida responder às questões propostas.
4. Antes de os alunos iniciarem a resolução da actividade, perguntar-se-á aos alunos se com base na observação da figura, podem explicar o que acontece ao quadrado inicial à medida que avança na construção do conjunto de Cantor.
5. Recordar à turma que apesar de termos um quadrado, estamos a fazer um processo análogo ao realizado na actividade 2, ou seja, estamos a construir o conjunto de Cantor, mas agora no plano.
6. Pede-se à turma que preencha a tabela e seguidamente responda até à questão 9.
7. Antes de os alunos responderem à questão 10, fazer-se-á uma pausa para debater os resultados obtidos nesta questões. Estes resultados devem ser obtidos dentro do grupo, por todos os elementos.
8. Fazer um processo análogo ao realizado para o quadrado, mas agora para o cubo. Depois de responder às últimas questões, o grupo apresentará as suas conclusões à turma.

Ficha de Trabalho

Tarefa 3: *O Conjunto de Cantor, o Plano e o Espaço*

Considera um quadrado unitário, isto é, um quadrado que tem 1 cm de lado.



1. Complete o quadro seguinte:

Iteração	Comprimento do lado de cada quadrado	Número de quadrados	Área de um quadrado	Área Total
0	1	1	1	1
1	$\frac{1}{3}$	4	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	16		
3				
4				
5				

2. Quantos quadrados existem na 9ª iteração? E na 100ª iteração? E na $n-ésima$ etapa?

3. Qual será a área de um quadrado da 9ª iteração? E da 100ª iteração? E na $n-ésima$ etapa?

4. Qual é a área total da 9ª iteração? E da 100ª iteração? E na $n-ésima$ etapa?

5. Existe alguma relação entre o quadrado da etapa 0 e um dos quadrados das etapas seguintes? Se sim, qual?

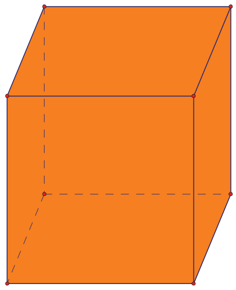
6. Seja C_n a sucessão do comprimento do lado de cada quadrado, Q_n a sucessão do número de quadrados, A_n a sucessão da área de cada quadrado e A_{T_n} a sucessão da área total.

Indique o termo geral de cada uma das sucessões.

7. Estude cada uma das sucessões quanto á monotonia.

8. Será que alguma das sucessões são limitadas? Se sim, qual ou quais?

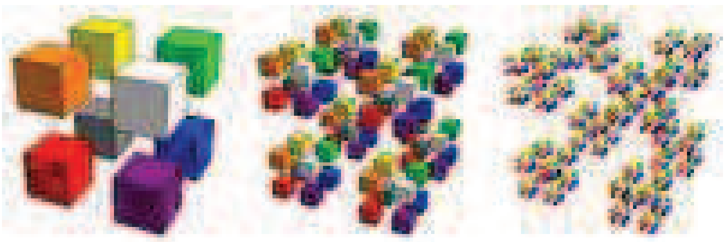
9. Será que alguma sucessão é maior que 1 e menor que 0 ?



10. Considere o cubo unitário, ou seja, a sua aresta mede $1\,cm$. Determine o seu volume.

11. Se reduzirmos o comprimento da aresta do cubo $\frac{1}{3}$, qual será agora o seu volume? Qual será o seu volume se reduzirmos $\frac{1}{9}$?

12. Se aplicarmos o mesmo método de construção do conjunto de Cantor ao cubo, quantos cubinhos obtemos na etapa 2 ? Qual é o volume de cada um desses cubinhos? Qual é o volume total da etapa?



13. Complete a tabela seguinte:

Iteração	**Comprimento da aresta do cubo**	**Número de cubos**	**Volume de um cubo**	**Volume Total**
0	1	1	1	1
1	$\frac{1}{3}$	8	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$
2	$\frac{1}{9}$			
3				
4				
5				

14. Com base nos resultados obtidos na tabela, que pode concluir?

15. Seja V_n a sucessão que dá volume de cada um dos cubos por etapa e V_{T_n} a sucessão do volume total. Escreve o seu termo geral de cada uma. Estude a monotonia e o limite de cada uma das sucessões.

A tarefa 3 é uma continuação da tarefa 2, no entanto, agora é pedido aos alunos que façam um raciocínio análogo ao realizado na tarefa 2, mas, agora para um quadrado unitário e para o cubo de aresta 1 cm.

A realização da tarefa será em grupos de quatro a cinco elementos cada.

A tarefa é constituída por 15 questões, algumas de resposta directa e outras onde se pede ao aluno que retire conclusões sobre o processo apresentado, tanto para o plano como para o espaço.

A tarefa está divida em dois momentos, ou seja, o primeiro momento estende-se da questão 1 à questão 9 e o segundo momento da questão 10 à questão 15. Após os alunos realizarem as questões referentes ao primeiro momento será feito uma exposição à turma das suas conclusões, só após esta exposição os alunos responderão às questões do segundo momento. No final da tarefa será feito um debate de ideias às quais os alunos chegaram durante a resolução da ficha de trabalho.

Esta tarefa pode ser realizada por alunos do 3º ciclo do ensino básico, podendo estes responder da questão 1 à questão 6, e da questão 10 à 14. Estas questões podem ser colocadas a alunos do 7º ano de escolaridade, quando se está leccionando o tema: **Sequências e Regularidades**. Um dos objectivos deste tema é que os alunos saibam identificar os termos de uma sequência e qual a ordem desse termo. Os alunos devem conseguir, também, escrever o seu termo geral. A forma como se processa a construção do conjunto de Cantor é um bom exemplo para o aluno identificar facilmente os termos de uma sequência e a sua ordem, a qual os alunos devem associar ao número de iteração.

Tanto a questão 1 como a questão 2, 3 e 4, são questões de resposta aberta, pois com base no preenchimento da tabela, o aluno consegue determinar os valores pedidos.

Na questão 5 os alunos deverão observar que existe semelhança entre os quadrados, pois à medida que se aumenta o número de iterações a razão de semelhança vai-se mantendo, ou seja, os quadrados que se obtêm são uma redução de razão, $r = \frac{1}{3}$, dos quadrados da iteração anterior.

Na questão 7 os alunos deverão escrever o termo geral das sucessões identificadas, uma sucessão por coluna.

Neste momento faz-se uma pausa na resolução da tarefa e cada um dos grupos apresentará as suas respostas e conclusões à restante turma. Sempre que o professor ache necessário poderá colocar questões aos grupos quando estes estão a expor as suas conclusões. Depois de terminar o debate fazer-se-á uma síntese sobre os conteúdos leccionados.

No referente aos conteúdos leccionados no 8º ano de escolaridade, o professor pode aplicar a tarefa quando leccionar os temas: **Sequências e Regularidades**, **Números Racionais** e **Sólidos Geométricos**. No entanto, um dos temas já havia sido leccionado no ano transacto – **Sequências e Regularidades**, o qual os alunos ainda terão presente nas suas mentes. O aluno pode resolver as questões referentes ao cálculo de áreas e aos volumes, pois o cálculos da área de um quadrado e o volume de um cubo é um dos conteúdos matemáticos que o aluno aprende no 2º ciclo de ensino básico. O único tema que é novo para o aluno é as operações com os **Números Racionais**, que com o novo Programa da Matemática passou a ser leccionado no 8º ano de escolaridade. Após o primeiro debate, onde os alunos apresentaram as suas conclusões, estes podem continuar a realização da tarefa. Para isso devem fazer um raciocínio análogo ao realizado para as questões 2, 3, 4 e 5, mas agora para o cubo.

A tarefa ***O conjunto de Cantor, o Plano e o Espaço***, na sua totalidade, pode ser introduzida no ensino secundário no 11º ano, pois só neste ano de escolaridade é leccionado o tema **Sucessões**. Trata-se de uma tarefa que servirá de introdução ao tema Sucessões, pois, esta começa por pedir ao alunos que preencham uma tabela e que com base nesses dados respondam às questões seguintes. Para o aluno conseguir responder a algumas desta questões, bastará recordar alguns conteúdos aprendidos no 3º ciclo do ensino básico – **Sequências e Regularidades**, **Números Racionais** e **Sólidos Geométricos** leccionados no 7º, 8º e 9º ano de escolaridade. O aluno recordará conceitos, tais como: *termos de uma sequência, ordem do termo, termo geral*. No entanto, o aluno deverá associar a ordem do termo com o número de iteração que corresponde ao número da etapa de construção do conjunto de Cantor.

A novidade para o aluno será o estudo da monotonia e verificar se uma sucessão é limitada ou não. Estes dois conceitos são abordados pela primeira vez neste ano de escolaridade. Quanto à monotonia, quando o aluno preenche a tabela, facilmente observa que tanto na segunda coluna como na quarta e na quinta coluna os valores estão a decrescer, logo temos aí uma sucessão decrescente, já a terceira coluna é a única em que os valores estão a crescer, assim sendo, o aluno pode concluir que esta sucessão é crescente.

Com base na observação da tabela o aluno conclui que os valores que estão na segunda, na quarta e na quinta coluna estão a decrescer, pode, por isso especular qual será o valor mínimo atingido ou para onde tende a sucessão. O mesmo se passará para a terceira coluna, no entanto, agora especulará qual será o valor máximo atingido ou para onde tende a sucessão.

Quando é pedido ao aluno que determine o termo geral da sucessão nas questões 6 e 15, este verifica que qualquer uma destas sucessões é uma progressão geométrica. Como todas as sucessões presentes nesta tarefa são progressões geométricas, esta tarefa é uma boa forma de introduzir o conceito de progressão geométrica, onde o aluno facilmente determina a razão dessas progressões geométricas.

Tarefa 4: *Números e a sua representação…*

Objectivos

- Multiplicar e dividir números inteiros.
- Calcular o valor de potências em que a base (diferente de zero) e o expoente são números inteiros.
- Comparar e ordenar números racionais representados nas formas decimal e fraccionária.
- Conhecer as propriedades e as regras das operações em **Q** e usá-las no cálculo.
- Efectuar operações com potências de base racional (diferente de zero) e expoente inteiro.
- Calcular o valor de expressões numéricas que envolvam números racionais.

Esta actividade foi elaborada com o intuito de facultar aos alunos um pouco mais de conhecimentos sobre a Matemática, ensinar-lhe uma forma diferente de escrever um número, seja ele qual for, que inicialmente está escrito na base 10, ou seja, na base que todos nós usamos no nosso dia-a-dia, numa outra base numérica e vice-versa.

Apesar de se poder dar esta actividade a qualquer aluno, independentemente do ano de escolaridade em que ele está, agora com o novo programa da Matemática do 3º ciclo do ensino básico, somente a partir do 8º ano de escolaridade o aluno aprende a operar com os números racionais, a utilizar as suas propriedades bem como a calcular o valor de uma potência de expoente inteiro.

Pretende-se que o aluno aprenda a escrever um número que inicialmente está escrito na base 10 numa outra base qualquer. Dessa forma a ficha de trabalho proposta, começa por apresentar um método de transformar um número escrito numa base d para a base decimal.

Seguidamente, mostra-se um método para converter um número escrito na base 10 para uma outra base d.

Estes dois métodos serão explicados em sala de aula pelo professor e seguidamente, pede-se ao aluno que resolva os exercícios 1 e 2.

Depois de resolvidos estes dois exercícios, ensina-se ao aluno um novo método, mas agora para os números fraccionários.

Seguidamente, pede-se ao aluno que resolva o exercício 3.

Nos exercícios 4 e 5 pede-se aos alunos que apliquem os conhecimentos adquiridos anteriormente.

No exercício 4 pede-se que os alunos descodifiquem uma mensagem apresentada na base 2, e para isso é fornecido aos alunos uma tabela reduzida da tabela ASCII, na qual é feita a associação entre o caracter do teclado do computador e um número escrito na base 10, neste caso utilizamos somente os caracteres referentes ao alfabeto, tanto o maiúsculo como o minúsculo. Para o aluno conseguir identificar qual o caracter representado no código da mensagem terá que transformar os números escritos na base 2 para a base 10.

Deve chamar-se a atenção dos alunos para o facto de que quando transformamos os números da tabela, escritos na base 10 para a base 2, através do método apresentado, eles só encontrarão sete dígitos, porque sãonúmeros inferiores a 128 e por isso devemos acrescentar o dígito zero no inicio de cada código, pois cada byte é composto por oito bits e só acrescentando um zero no inicio do código se obtêm um byte.

Na questão 5 pede-se aos alunos que codifiquem a mensagem apresentada, ou seja, realizem um processo inverso ao realizado na questão anterior.

Ficha de Trabalho

Tarefa 4: *Números e a sua representação…*

Os números que nós conhecemos do nosso dia-a-dia podem ser representados em qualquer sistema de numeração. O ser humano utiliza nos seus cálculos diários o sistema de numeração decimal, ou seja, a base dez, que tem dez dígitos diferentes $(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$. Já os computadores utilizam o sistema binário, o qual envolve unicamente dois dígitos $(0,1)$, logo trabalham com a base dois.

A base utilizada diz-nos o número de dígitos que se podem utilizar na sua representação, por exemplo: a base 10 utiliza 10 dígitos, de 0 a 9, a base dois utiliza dois dígitos, o 0 e 1, a base três utiliza três, o 0, 1 e o 2 e assim sucessivamente.

Mas como representar um número numa base diferente da base dez?

Para representarmos um número numa base diferente daquela em que está representado pode-se fazer o seguinte:

- ***Converter um número escrito numa base d para a base 10***

  Esta conversão obtêm-se *multiplicando cada dígito pela base d elevada à ordem do dígito, e somando todos estes valores*.

  Exemplo:

  $1532_{(6)}$ *base* 6

  $$\begin{aligned}&= 1\times 6^3 + 5\times 6^2 + 3\times 6^1 + 2\times 6^0\\ &= 1\times 216 + 5\times 36 + 3\times 6 + 2\times 1\\ &= 416_{(10)}\end{aligned}$$

  1532_{13} *base* 13

  $$\begin{aligned}&= 1\times 13^3 + 5\times 13^2 + 3\times 13^1 + 2\times 13^0\\ &= 1\times 2197 + 5\times 169 + 3\times 13 + 2\times 1\\ &= 3083_{(10)}\end{aligned}$$

  $110110{,}011_2$ *base* 2

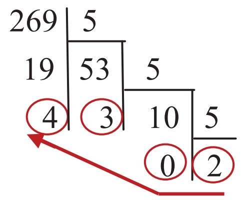
  $$\begin{aligned}&= 1\times 2^5 + 1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0 + 0\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3}\\ &= 1\times 32 + 1\times 16 + 0\times 8 + 1\times 4 + 1\times 2 + 0\times 1 + 0\times 0{,}5 + 1\times 0{,}25 + 1\times 0{,}125\\ &= 54{,}375_{(10)}\end{aligned}$$

- ***Converter um número escrito na base 10 para uma outra base***

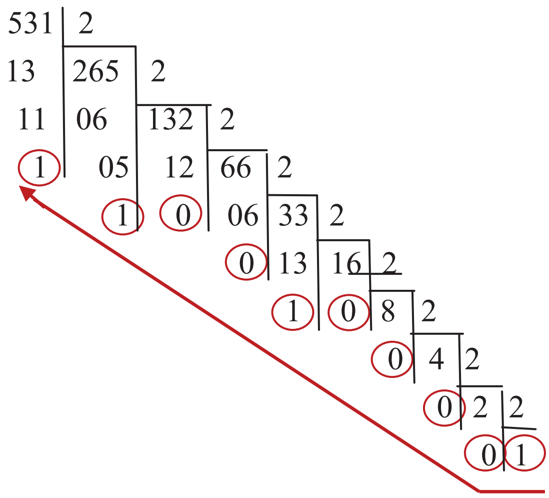
  Para converter um número escrito na base 10 para uma outra base d procede-se do seguinte modo:

  divide-se a parte inteira desse número pela base d, na qual queremos escrever o número e os quocientes obtidos, até que não seja possível efectuar mais nenhuma divisão. Os restos obtidos em cada uma dessas divisões, são os dígitos da base d.

  Por exemplo:



logo, $269_{(10)} = 2034_{(5)}$



logo, $531_{(10)} = 1000010011_{(2)}$

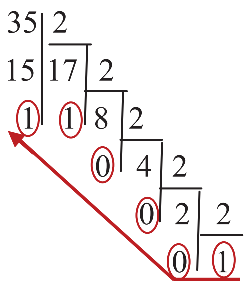
A representação desse número é feita de trás para a frente, ou seja, começa-se com o último quociente e os sucessivos restos lidos no sentido ascendente. Isto é, o último resto é o número que vem a seguir ao último quociente e assim sucessivamente.

Para os números fraccionários, o método modifica-se um pouco:

O número fraccionário é multiplicado pela base d, a parte inteira resultante forma o algarismo mais à esquerda da nova fracção e a parte fraccionária é novamente multiplicada pela base d, até que o resultado da parte fraccionária seja zero.

Exemplo:

$35{,}375_{(10)}$ na base 2



$$0{,}375 \times 2 = 0{,}75$$
$$0{,}75 \times 2 = 1{,}5$$
$$0{,}5 \times 2 = 1{,}0$$

logo, $35{,}375_{(10)} = 100011{,}011_{(2)}$

Exercícios

1. Transforme os seguintes números escritos na base indicada para a base 10:

   a) $1122222_{(3)}$

   b) $101010_{(2)}$

   c) $12200_{(3)}$

   d) $1021_{(4)}$

   e) $1025_{(6)}$

   f) $2125_{(8)}$

2. Transforme os seguintes números escritos na base 10 para a base indicada:

a) 1234 para a base 3

b) 4987 para a base 4

c) 543 para a base 2

d) 2143 para a base 5

e) 9870 para a base 8

f) 96 para a base 3

g) 96 para a base 6

3. Converta os seguintes números fraccionários, escritos na base 10 para a base indicada:

a) $\frac{1}{2}$ na base 2

b) $0,(3)$ na base 3

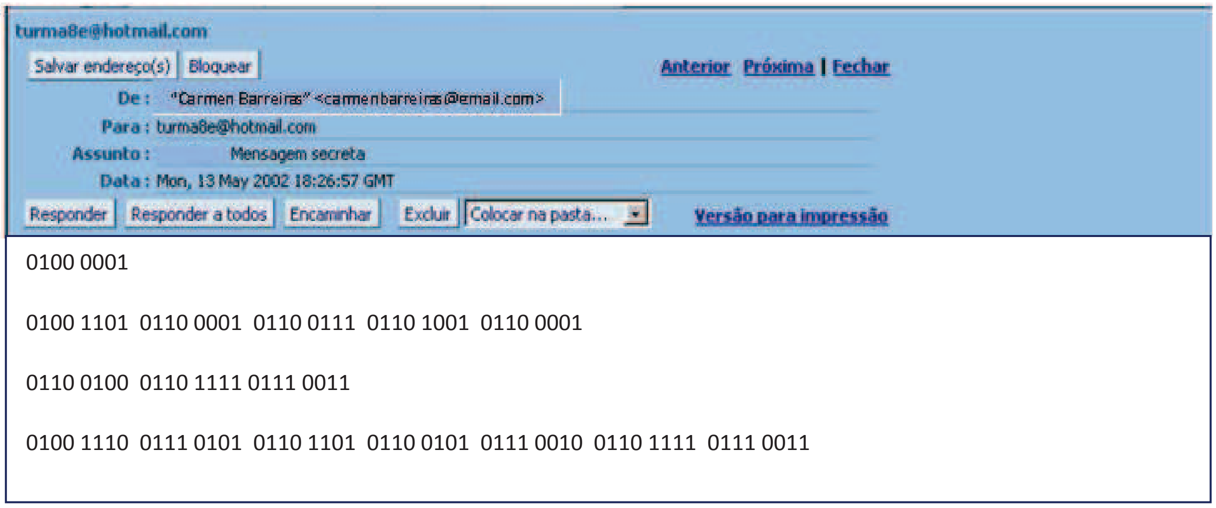
c) $0,25$ na base 2 e na base 3

d) $\frac{1}{81}$ na base 3

e) $\frac{2}{243}$ na base 3

4. Na vossa caixa de correio electrónico "ultra-secreta" (turma8e@hotmail.com) apareceu a seguinte mensagem:

Depois de abrirem a mensagem viram:



Esta mensagem está escrita no código binário, ou seja, na base 2.

O que significará?

Para poderem descodificar a mensagem vão ter de fazer uma correspondência entre cada sequência de oito dígitos e o seu significado.

Cada caracter do teclado de um computador é representado por um código de 8 bits (um byte), ou seja, cada sequência de oito dígitos representa um caracter.

Desta forma para identificar o caracter que corresponde a cada byte consulte a tabela seguinte.

caracter	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**
Decimal	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
caracter	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
Decimal	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	97	98	99	100	101	102
caracter	**g**	**h**	**i**	**j**	**k**	**l**	**m**	**n**	**o**	**p**	**q**	**r**	**s**	**t**	**u**	**v**
Decimal	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118
caracter	**w**	**x**	**y**	**z**												
Decimal	119	120	121	122												

Agora para conseguires encontrar o caracter que corresponde a cada código representado na mensagem, deve converter cada código binário para a base 10 e depois identificares na tabela qual a letra correspondente a esse código do 8 bits.

Descobre a mensagem codificada!!!!!!!!!!

5. Utilizando códigos de 8 bits codifica a seguinte mensagem:

"Descobre os mistérios dos números"

Tarefa 5: *Árvores e o conjunto de Cantor*

Objectivos

- desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os usar;
- compreender e ser capazes de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano e no espaço;
- Compreender a noção de semelhança.
- Ampliar e reduzir um polígono, dada a razão de semelhança.
- Identificar e construir polígonos semelhantes.
- Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados.
- Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral.
- Reconhecer que as propriedades das operações em ***Q*** se mantêm em ***R*** e aplicá-las na simplificação de expressões.
- Representar e interpretar intervalos de números reais, bem como a sua intersecção e reunião, simbólica e graficamente.
- Estudar a monotonia e limitação de uma sucessão.
- Identificar progressões geométricas, escrever o seu termo geral.

Procedimentos

1. Dividir a turma em grupos de trabalho, no máximo com quatro elementos cada.
2. Entrega-se a Ficha de Trabalho aos alunos.
3. Estes devem ler atentamente a ficha de trabalho e de seguida responder às questões propostas.
4. No inicio da ficha de trabalho é descrito o método de construção do conjunto de Cantor.
5. Os alunos resolvem a ficha de trabalho, seguindo as indicações dadas.
6. Fazer-se-á um debate sobre os resultados obtidos. Estes resultados devem ser obtidos dentro do grupo, por todos os elementos.

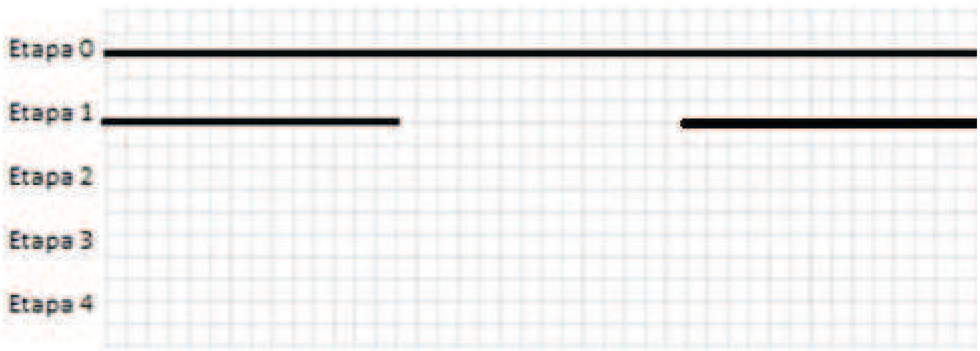
Ficha de Trabalho

Tarefa 5: *Árvores e o conjunto de Cantor*[1]

Comece por representar o conjunto de pontos do intervalo $[0;1]$. Primeiro divida o intervalo em três partes iguais e retire o intervalo intermédio aberto. Repita o mesmo processo para cada um dos intervalos fechados que vão ficando em cada etapa. Quando se repete este processo infinitamente, ao conjunto dos pontos que se obtêm chama-se ***Conjunto de Cantor***.

A figura abaixo, mostra a primeira etapa da construção do conjunto de Cantor.

1. Completa a figura de forma a construir as etapas 2, 3 e 4, de acordo com método de construção do conjunto de Cantor.



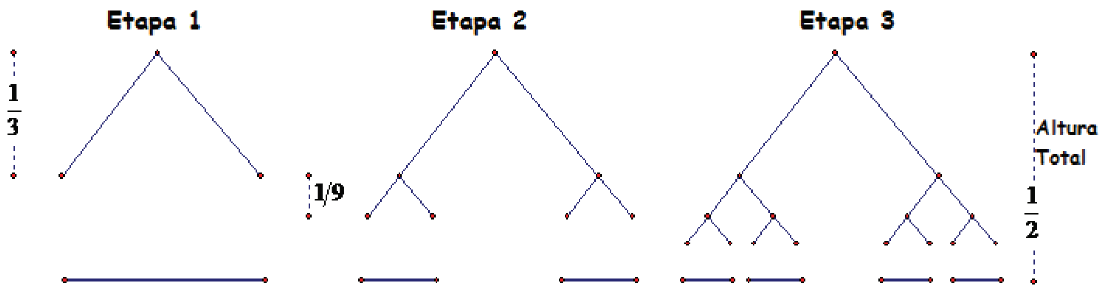
2. Quantos intervalos estão na quinta etapa? E na $n-ésima$ etapa?

Vamos, agora utilizar as árvores, representadas abaixo, para desenvolver um sistema que nos vai ajudar a entender a construção do conjunto de Cantor, até à $n-ésima$ etapa.

Suponha que a árvore cresce até gerar todo o conjunto de Cantor. Dê-lhe as dimensões específicas, de tal forma quês estas devem reproduzir o processo de subdivisão que gera o conjunto de Cantor no intervalo $[0,1]$.

Estas árvores ramificam em ângulos de 45° com a vertical, tendo os ramos novos, um $\frac{1}{3}$ do comprimento dos ramos anteriores

[1] Actividade retirada do livro: *Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume One*, de Heinz-Otto Peitgen; Evan Maletsky; Hartmut Jürgens; Terry Perciante; Dietmar Saupe e Lee Yunker.



A altura da árvore é $\frac{1}{3}$ na etapa 1, $\frac{4}{9}$ na etapa 2 e $\frac{13}{27}$ na etapa 3.

Etapa	*Altura*
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$
3	$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}=\frac{13}{27}$
.	
.	
final	$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+....=\frac{1}{2}$

3. Prove que a altura total da árvore vertical final é crescente e é $\frac{1}{2}$.

4. Prove que a largura total da árvore final é 1.

5. Discuta as propriedades de semelhança dos novos ramos em relação aos ramos anteriores.

Cada caminho na fase final da árvore pode ser abordado através de uma sequência interminável das letras R e L. Os dois extremos do intervalo inicial podem ser renomeados, usando os endereços $LLL\overline{L}$..... e $RRR\overline{R}$..... (As barras sobre as letras indicam que estas se repetem sem fim).

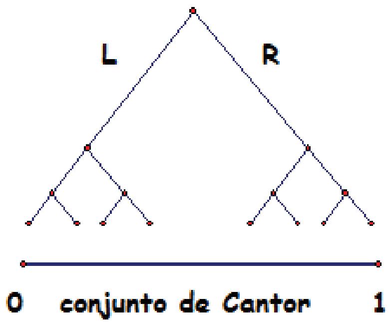
6. Use as letras R e L para dar os endereços dos dois extremos dos intervalos da etapa 1, assumindo que a árvore está completa.

7. Use as letras R e L para dar os quatro pares de endereços para os extremos dos 4 intervalos da etapa 2.

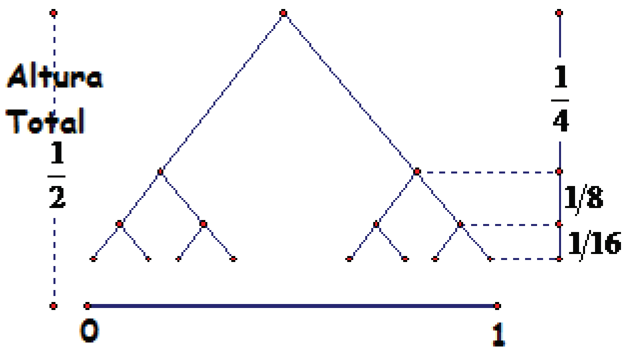
8. Será que os extremos de cada subintervalo permanecem como parte do conjunto de Cantor?

Cada sequência infinita das letras R e L corresponde a um caminho através da árvore quando esta está concluída. Todos os caminhos através da árvore correspondem a um ponto específico no conjunto de Cantor.

A sequência $LR\overline{LR}....$ é um caminho na árvore que nos leva a um ponto específico do conjunto de Cantor.



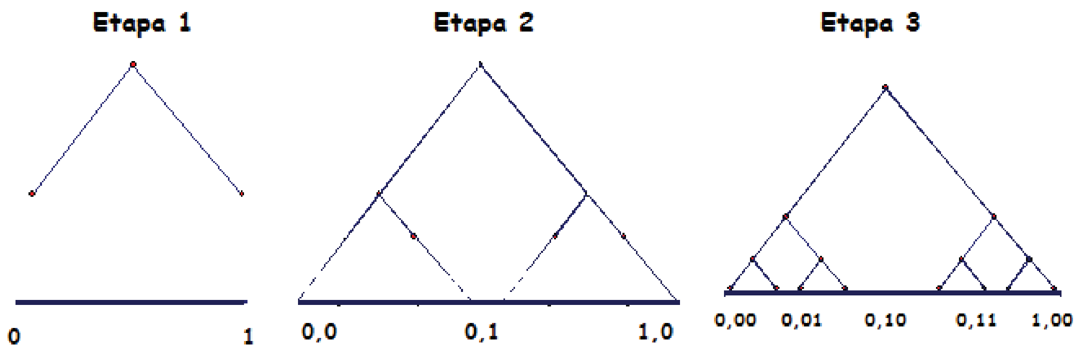
Ao modificar a taxa de crescimento da árvore, pode mostrar-se um jogo interessante para os números binários decimais.



9. Prove que esta árvore na sua fase adulta, tem uma altura de $\frac{1}{2}$ e a sua largura é 1.

Associe o algarismo 0 ao ramo L para a esquerda e o algarismo 1 ao ramo R para a direita.

Agora, cada sequência de letras corresponde a um número binário decimal.



Os ramos da etapa 1 indicam todos os caminhos de $LL\overline{L}...$ para $RR\overline{R}....$ Este valor corresponde a cada número binário decimal a partir de $0{,}00\overline{0} = 0$ para $0{,}1\,1\overline{1} = 1$.

O intervalo $[0{,}1]$ origina os seguintes endereços na etapa 3:

	Endereço usando letras	*notação binária*
Etapa 3	$LL\overline{L}....$ *para* $LL\overline{R}....$	$0{,}0\overline{00}..$ *para* $0{,}00\overline{1}... = 0{,}01$
	$LR\overline{L}...$ *para* $LR\overline{R}.....$	$0{,}01\overline{0}...$ *para* $0{,}01\overline{1}.... = 0{,}10$
	$RL\overline{L}...$ *para* $RL\overline{R}....$	$0{,}10\overline{0}...$ *para* $0{,}10\overline{1}.... = 0{,}11$
	$RR\overline{L}....$ *para* $RR\overline{R}....$	$0{,}11\overline{0}...$ *para* $0{,}11\overline{1}.... = 1{,}00$

Indique o endereço binário de 0 e 1 para cada sequência de letras:

10. $RLRR\overline{R}....$

11. $LLRLL\overline{L}...$

12. $LRRRLL\overline{L}...$

A turma será dividida em grupos de quatro elementos cada, no máximo, que terão como tarefa a realização da ficha de trabalho e no últimos trinta minutos apresentar as suas conclusões aos colegas, num debate.

Nesta ficha de trabalho, tarefa 5, é pedido aos alunos que completem a figura para as quatro primeiras etapas da construção do conjunto de Cantor. Na segunda questão pede-se aos alunos que indiquem o número de intervalos da 5 e da $n-ésima$ etapa da construção do conjunto de Cantor.

Esta duas questões podem ser resolvidas por qualquer aluno que frequente tanto o 7º ano de escolaridade como o 8º ano, pois na primeira questão somente é pedido que o aluno complete a figura de acordo com a forma como se constrói o conjunto de Cantor referida no inicio da ficha de trabalho. Na questão 2 e tendo como referência a figura da pergunta anterior o aluno consegue responder à primeira parte da questão. Na segunda parte da questão, com base na observação e contanto o número de segmentos de recta de cada etapa representados na figura o aluno consegue chegar à expressão pedida.

Estas duas questões poderão ser resolvidas quando se está a leccionar o tema *Sequências e Regularidades*, tanto no 7º como no 8º ano de escolaridade.

Seguidamente apresenta-se uma forma diferente de obter o conjunto de Cantor, através de árvores, onde cada etapa da construção do conjunto de Cantor é representada pelos ramos dessa árvore.

As questões 3 e 4 só podem ser resolvidas pelos alunos que frequentam o 11º ano de escolaridade, pois estas envolvem conteúdos matemáticos que só são leccionados nesse ano de escolaridade, tais como limite de uma sucessão, o qual é fácil o aluno identificar através da construção da árvore.

Na questão 5 pretende-se que o aluno observe que um dos ramos da etapa 2 é uma redução da etapa 1, assim como que um dos ramos na etapa 3 é uma redução dos ramos da etapa 2 e assim sucessivamente.

Esta questão pode ser respondida por alunos do 7º ano de escolaridade, pois neste ano é leccionado o tema *Semelhança*, onde o aluno aprende a noção de semelhança, identifica polígonos semelhantes, e com base na observação das árvores o aluno compreende mais facilmente este conceito, pois, torna-se mais fácil para o aluno entender este conceito através de modelos geométricos do que através de cálculos.

Pretende-se que o aluno, com base na observação da árvore final, conclua que quando ampliarmos um dos seus ramos obtemos a árvore inicial.

Continuando a realização da ficha de trabalho é apresentado ao aluno uma nova forma de encontrar os pontos do conjunto de Cantor, agora utilizando as letras L para representar o ramo esquerdo da árvore e R para representar o ramo direito da árvore.
As questões 6, 7 e 8 podem ser resolvidas em qualquer ano do 3º ciclo do ensino básico, já a questão 9 unicamente pode ser resolvida pelos alunos que frequentem o 11º ano de escolaridade, pois nesta questão pretende-se que o aluno prove que a altura da árvore é $\frac{1}{2}$ e a sua largura é 1. Para o aluno conseguir provar o que é pedido, torna-se mais fácil se este escrever o termo geral da sucessão que dá a altura da árvore bem como a sucessão que dá a largura da árvore.

Na última parte da ficha de trabalho entraremos numa matéria que não faz parte do currículo da Matemática, tanto no 3º do ensino básico como no ensino secundário, mas que ajudará o aluno a perceber a numeração binária, que este já ouviu falar nas aulas de TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação, ainda que muito superficialmente, pois nesta disciplina unicamente é dito ao aluno que o sistema de numeração de um computador é o sistema binário, um sistema de numeração onde só se encontram os dígitos 0 e 1.

Essas últimas questões podem ser resolvidas por alunos de todos os anos lectivos, no entanto, como a ficha de trabalho está mais direccionada para alunos de 7º, 8º e 11º ano de escolaridade, não faz muito sentido aplicá-la a outro ano de escolaridade que não seja estes, quando se estiver a leccionar as matérias atrás referidas.

Tarefa 6: *O conjunto de Cantor e a Função Tenda*

Objectivos

- Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados.
- Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral.
- Reconhecer que as propriedades das operações em ***Q*** se mantêm em ***R*** e aplicá-las na simplificação de expressões.
- Representar e interpretar intervalos de números reais, bem como a sua intersecção e reunião, simbólica e graficamente.
- Estudar a monotonia e limitação de uma sucessão.
- Identificar progressões geométricas, escrever o seu termo geral.
- Identificar uma função.
- Analisar o gráfico uma função.
- Analisar o comportamento de uma função.

Procedimentos

1. Dividir a turma em grupos de trabalho, no máximo com quatro elementos cada.
2. Entrega-se a Ficha de Trabalho aos alunos.
3. Estes devem ler atentamente a ficha de trabalho e de seguida responder às questões propostas.
4. No inicio da ficha de trabalho é descrito o método de construção do conjunto de Cantor.
5. Seguidamente faz-se uma abordagem diferente ao conjunto de Cantor, agora, através da iteração da *função Tenda.*
6. Os alunos resolvem a ficha de trabalho, seguindo as indicações dadas.
7. Far-se-á um debate sobre os resultados obtidos. Estes resultados devem ser obtidos dentro do grupo, por todos os elementos.

Ficha de Trabalho

Tarefa 6: *O conjunto de Cantor e a Função Tenda*[2]

Grande parte do trabalho realizado até os nossos dias sobre Fractais e Caos teve como base as primeiras ideias geradas por Georg Cantor, realizado no seu trabalho sobre a Teoria dos Conjuntos.

Uma das suas ideias/conceitos fundamentais apresentada, foi o conjunto de Cantor.

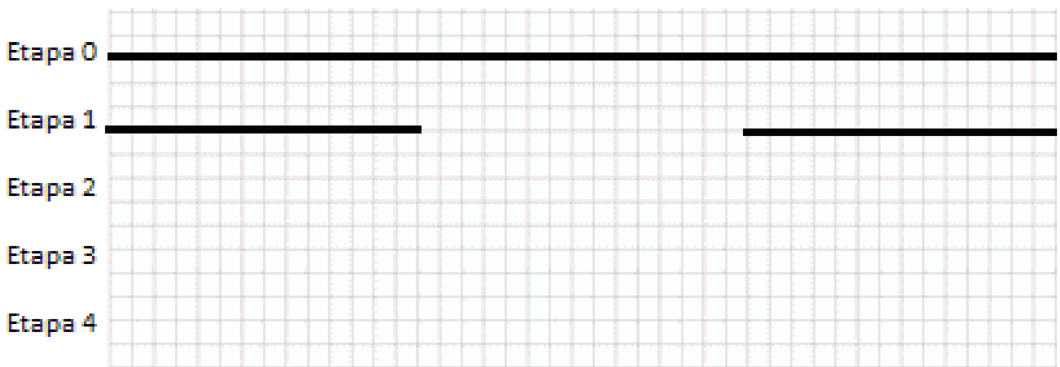
A construção deste conjunto é relativamente fácil. Comece por desenhar um segmento de recta com o comprimento de uma unidade. Retire o terço intermédio, tal como é apresentado na figura que se segue, obtendo-se dois segmentos de recta de comprimento um terço.

Na etapa seguinte, volte a retirar o terço intermédio de cada um dos segmentos resultantes da etapa 1, obtendo quatro segmentos de comprimento um nono.

Continuando este processo até ao infinito, iremos determinar o conjunto de Cantor. Na etapa n o número de segmentos tende para o infinito, enquanto que o comprimento de cada segmento tende para zero.

Na etapa final não temos intervalos, somente, temos uma "poeira" de pontos. É a esta "poeira" de pontos que se chama *Conjunto de Cantor*.

1. Na figura a etapa 0 e a etapa 1 da construção do conjunto de Cantor já se encontram construídas. Construa as etapas 2, 3 e 4, completando a figura.



2. Quantos subintervalos tem a etapa 5? E a etapa 6? E a etapa n?
3. Qual o comprimento de cada segmento da etapa 5? E da etapa 6? E da etapa n?

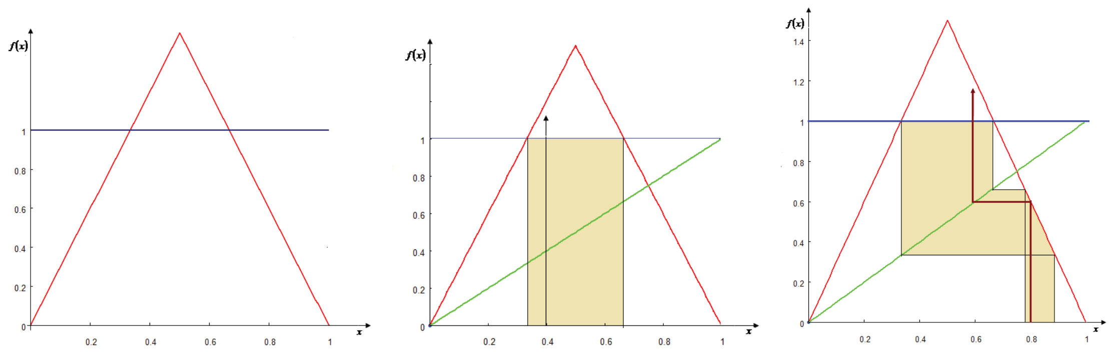
[2] Actividade retirada do livro: *Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume Two*, de Heinz-Otto Peitgen; Evan Maletsky; Hartmut Jürgens; Terry Perciante; Dietmar Saupe e Lee Yunker.

A iteração gráfica também nos pode levar à construção do conjunto de Cantor.

Considere a função f definida da seguinte forma:

$$f(x)=\begin{cases} 3x & se\ \ x\leq\dfrac{1}{2} \\ -3x+3 & se\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Esta função é conhecida como a *função Tenda*, onde o terço intermédio se estende acima da recta de equação $y=1$, tal como se pode observar na figura seguinte.



Etapa 0 **Etapa 1** **Etapa 2**

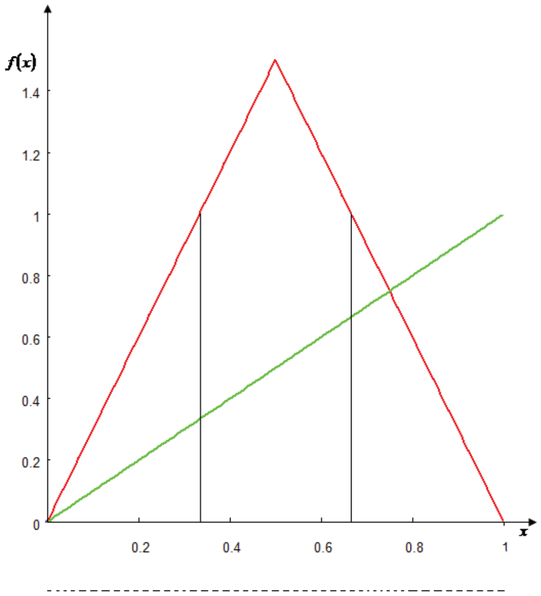
Na etapa 1, os pontos iniciais são $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Os pontos que pertencem a este intervalo, após a primeira iteração escapam do intervalo $[0,1]$.

4. **4.** Na etapa 2, podemos observar que os pontos pertencentes ao intervalo $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ escapam do intervalo $[0,1]$, ao fim de duas iterações. Indique outro intervalo de pontos pertencente ao intervalo $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ em que os pontos também escapam ao fim de duas iteradas. Sombreie, no gráfico da etapa 2 esse caminho de fuga.

5. **5.** A iteração dos extremos do intervalo $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ mostra como este intervalo se volta a repetir no intervalo $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Todos os pontos deste intervalo escapam, tal como acontece no intervalo $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. O extremo $\frac{7}{9}\to\frac{2}{3}$ e o extremo $\frac{8}{9}\to\frac{1}{3}$.

Determine os valores dos pontos fronteira do intervalo determinado na questão 5 e mostre como eles também levam a um intervalo de escape.

6. Use o resultado da questão 1 para marcar na linha tracejada abaixo do gráfico os intervalos que restam na etapa 3 do conjunto de Cantor.



7. Sombreie a iteração gráfica resultante dos intervalos de escape, pertencentes aos intervalos $\left[0,\frac{1}{9}\right]$ e $\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$.

8. O intervalo $\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)$ é um intervalo de escape, pois por iteração os seus extremos levam-nos para: $\frac{7}{27}\to\frac{7}{9}\to\frac{2}{3}$ e $\frac{8}{27}\to\frac{8}{9}\to\frac{1}{3}$.

Mostre como os extremos do intervalos $\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)$ escapam de uma forma semelhante.

9. Podemos ver anteriormente que após duas iterações gráficas, três subintervalos de $[0,1]$ escapam.

Quantos subintervalos teremos após a terceira iteração gráfica? E após a quarta iteração gráfica?

10. Escreva uma fórmula que relacione o número E, subintervalos de escape, com N, o número da etapa de iteração gráfica.

O que acontece a E quando N tende para infinito?

Esta tarefa pretende mostrar aos alunos uma forma diferente de obter o conjunto de Cantor, sem ser pelo método apresentado por matemático Georg Cantor. Este novo método é a iteração gráfica de funções.

A tarefa está dividida em duas partes: a 1ª parte, as três primeiras questões, onde é descrito o método de construção do conjunto de Cantor, na 2ª parte, restantes questões, apresenta-se o novo método de construção do conjunto de Cantor – iteração gráfica de funções, utilizando uma função definida por ramos, conhecida com a função Tenda.

Na segunda parte da tarefa pretende-se que o aluno mostre, através da iteração gráfica, que os pontos que pertencem aos intervalos intermédios abertos retirados em cada etapa da construção do conjunto de Cantor, vão escapar do intervalo $[0, 1]$ e que os pontos que vão restando são, exactamente, os pontos que pertencem ao conjunto de Cantor.

A primeira parte da tarefa pode ser realizada por qualquer aluno, tanto do ensino básico, como do ensino secundário. Os alunos do 7º e 8º ano de escolaridade, podem realizar esta tarefa quando for leccionado o conteúdo ***Sequências e Regularidades*** e no 9º ano a quando da leccionação do conteúdo ***Noção de número real e recta real*** e ***Intervalos.***

No ensino secundário a tarefa pode ser realizada, essencialmente, no 11º ano, sendo que a 1ª parte pode ser resolvida quando se lecciona o tema ***Sucessões***, já a 2ª parte seria leccionada no tema – ***Iteração gráfica de funções***, trata-se de um tema facultativo, o qual só deverá ser leccionado se houver tempo. Uma vez que estes alunos já têm conhecimentos sobre funções definidas por ramos, conteúdo leccionado no 10º ano de escolaridade, podem aplicar esses conhecimentos na realização da tarefa, sendo que nesta parte da tarefa, não é tanto os seus conhecimentos sobre funções que o aluno terá que pôr em prática, mas sim os seus conhecimentos sobre intervalos e sobre o conjunto de Cantor.

Tarefa 7: *Iteração da Família de Funções Quadráticas*

Objectivos

- Identificar uma função.
- Analisar o gráfico uma função.
- Analisar o comportamento de uma função.
- Esboçar gráficos a partir de um gráfico dado através de transformações simples.
- Resolver problemas, envolvendo funções polinomiais

Procedimentos

1. Dividir a turma em grupos de trabalho, no máximo com quatro elementos cada.
2. Entrega-se a Ficha de Trabalho aos alunos.
3. Estes devem ler atentamente a ficha de trabalho e de seguida responder às questões propostas.
4. Os alunos resolvem a ficha de trabalho, seguindo as indicações dadas.
5. Fazer-se-á um debate sobre os resultados obtidos. Estes resultados devem ser obtidos dentro do grupo, por todos os elementos.

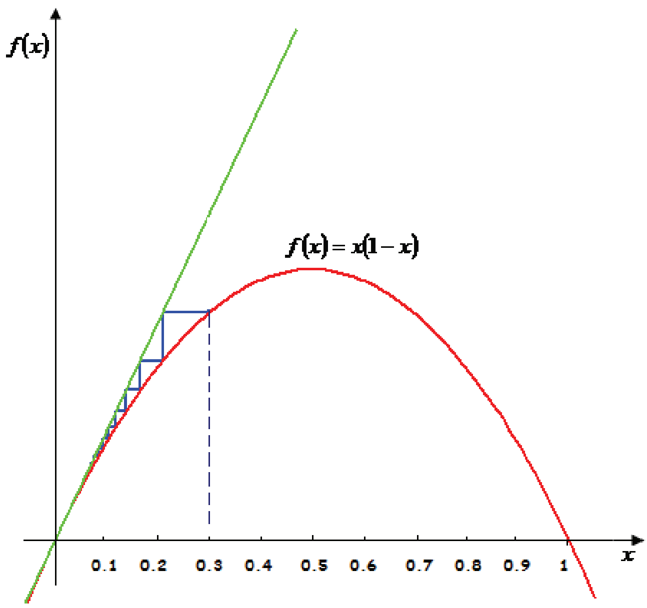
Ficha de Trabalho

Tarefa 7: *Iteração da Família de Funções Quadráticas*[3]

Certo tipo de funções são de interesse especial quando se estuda a iteração gráfica. Um certo tipo de conjunto obtêm-se através de funções do tipo $f(x) = ax(1-x)$. O coeficiente a é um parâmetro que determina a função específica dentro desse tipo.

Considere-se, primeiramente, a função $f(x) = ax(1-x)$ onde o parâmetro assume o valor $a = 1$. Nesta situação a recta $y = x$ é tangente à parábola, tocando-lhe num único ponto, o $(0,0)$.

O gráfico ao lado mostra a iteração gráfica do valor inicial $x_0 = 0{,}3$ que originou uma escada, que tende para a origem.



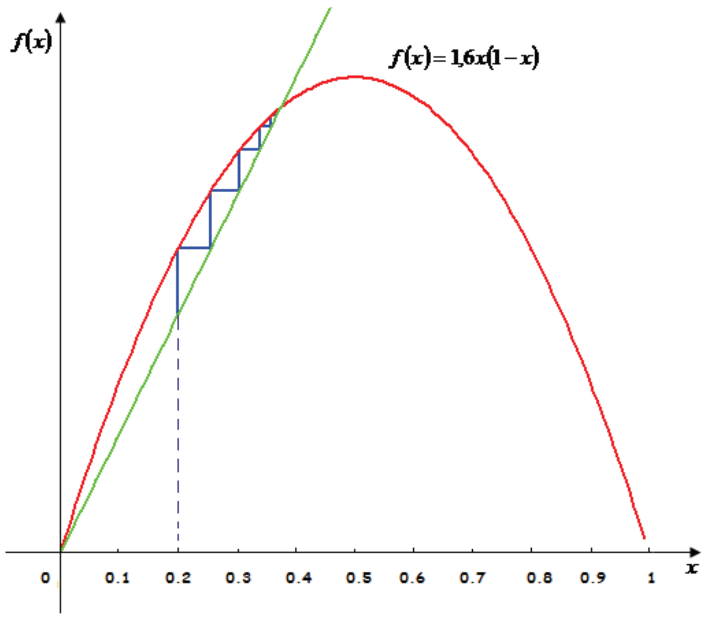
1. **1.** Observe o caminho feito pela iteração quando $f(x) = x(1-x)$ e $x_0 = 0{,}3$. Descreva o que observa.

2. **2.** Trace o caminho da iteração gráfica, agora, para $x_0 = 0{,}7$. Compare-o com o obtido para $x_0 = 0{,}3$.

[3] Actividade retirada do livro: *Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume Two*, de Heinz-Otto Peitgen; Evan Maletsky; Hartmut Jürgens; Terry Perciante; Dietmar Saupe e Lee Yunker.

3. Será que todo o valor inicial entre 0 e 1 origina uma escada a tender para o ponto $(0,0)$?

Quando $a=1.6$, o vértice da parábola $f(x)=1,6x(1-x)$ é maior. A recta $y=x$ intersecta o gráfico da função em dois pontos distintos, $(0,0)$ e $\left(\frac{3}{8},\frac{3}{8}\right)$. O gráfico seguinte mostra a iteração gráfica para o valor inicial $x_0=0,2$.



4. A iteração gráfica de $x_0=0,2$ apresenta um comportamento em escada ou em espiral?

*Um **ponto fixo** para uma função é um elemento x tal que $f(x)=x$.*

Para uma função real de variável real, um ponto fixo pode ser interpretado como um valor de x para o qual o gráfico de f e o gráfico de $y=x$ se intersectam.

Um ponto fixo pode ser ***atractivo*** ou **atractor** (diz-se ponto *fixo estável*) ou pode ser ***repulsivo*** ou ***repelente*** (diz-se ponto fixo *instável*).

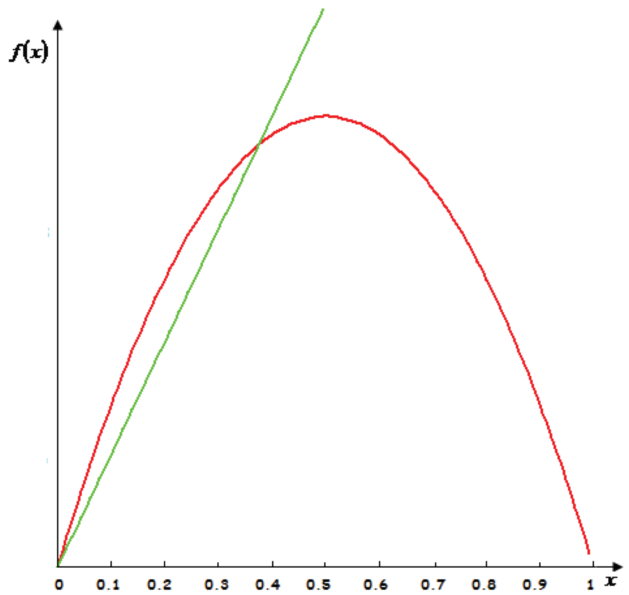
5. A origem é um ponto repulsivo fixo. Dê as coordenadas de outro ponto fixo. Este novo ponto fixo é repulsivo ou atractivo?

6. Na vizinhança dos dois pontos fixos, há intervalos de compressão ou expansão?

A representação gráfica de $f(x) = 1{,}6x(1-x)$ apresenta um ponto fixo atractivo na sua iteração gráfica, o $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

Quase todos os valores iniciais pertencentes ao intervalo $[0,1]$ produzem caminhos em escadaria para o ponto que é atractor. No entanto, existem duas excepções, ou seja, o ponto fixo $x_0 = \frac{3}{8}$, e o valor inicial $x_0 = \frac{5}{8}$ que após uma iteração termina no ponto fixo.

7. Use o método gráfico para determinar a pré-imagem para encontrar o ponto excepcional x_0, tal que a iteração gráfica começa em x_0 e termina no ponto fixo $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$, após a iteração.

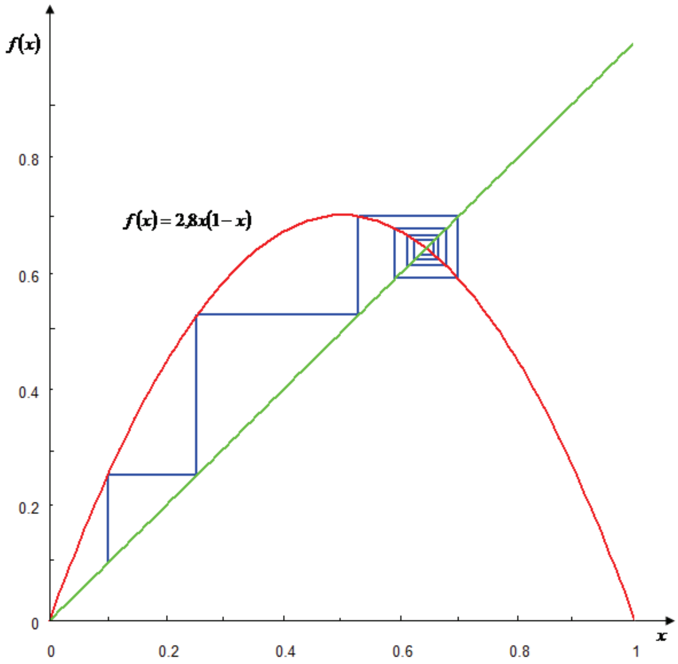


8. A seguinte iteração gráfica foi realizada com a função $f(x) = 2{,}8x(1-x)$. A iteração começa com o valor inicial $x_0 = 0{,}1$. Leia, atentamente, as sete primeiras iterações do gráfico.

Registe os pontos exactos, com duas casas decimais.

Descreva o comportamento apresentado.

A iteração é em escada ou em espiral?



$x_0 = 0{,}10$

$x_1 =$ ________

$x_2 =$ ________

$x_3 =$ ________

$x_4 =$ ________

$x_5 =$ ________

$x_6 =$ ________

$x_7 =$ ________

9. A parábola e a recta $y = x$ cruzam-se na origem. Determine as coordenadas do outro ponto de intersecção.

Este segundo ponto de intersecção é atractivo ou repulsivo?

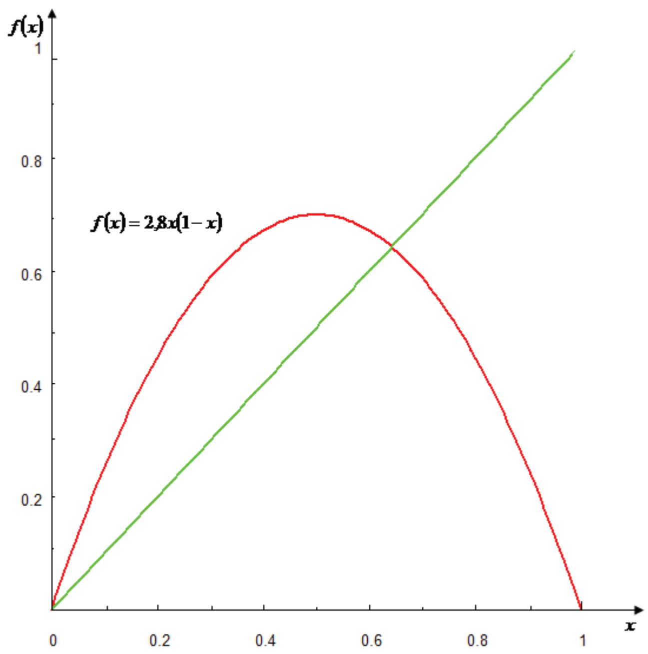
Existe compressão ou expansão do intervalo em torno desse ponto?

10. Usando o gráfico acima, faça outra iteração da função, mas agora com um ponto inicial à sua escolha.

Descreva o comportamento da iteração e compare-o com o comportamento apresentado nas questões 8 e 9.

11. Há caminhos em que a iteração não é em espiral para o ponto fixo! Além do ponto fixo, há um valor inicial que interage com o ponto fixo em apenas uma iteração. Há dois valores que fazem isso em duas iterações, e outros dois valores que o fazem em três iterações.

Use o método gráfico para encontrar as pré-imagens para determinar esses valores iniciais.

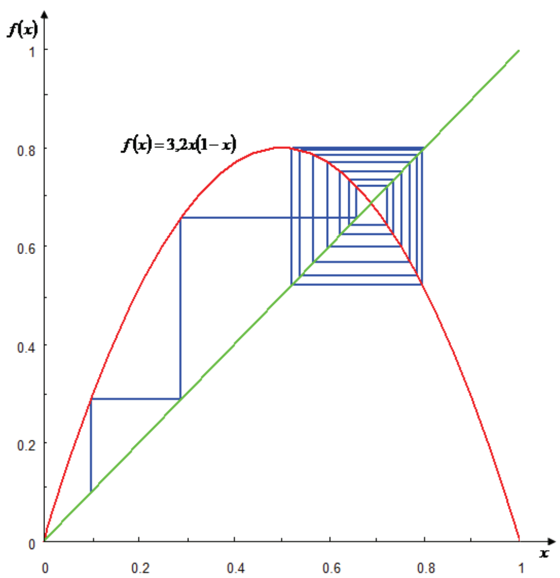


12. Explore o comportamento de iteração com os valores iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$. Especule sobre o comportamento de iteração para valores fora do intervalo $[0,1]$.

É surpreendente o quanto são diferentes os resultados que se obtém para um e um só valor de a pouco maior que 2,8.

13. A seguinte iteração gráfica foi realizada para a função $f(x) = 3{,}2x(1-x)$. O valor inicial é, novamente, $x_0 = 0{,}10$. Analise, atentamente, as sete primeiras iterações a partir do gráfico abaixo.

Registe os pontos, com duas casas decimais, no quadro à direita.



$x_0 = 0{,}10$

$x_1 =$ ________

$x_2 =$ ________

$x_3 =$ ________

$x_4 =$ ________

$x_5 =$ ________

$x_6 =$ ________

$x_7 =$ ________

14. Compare os valores iterados obtidos nesta tabela com os obtidos na tabela da questão 8. São iguais ou são diferentes?

15. Descreva o comportamento da iteração apresentada neste gráfico. É em escada ou em espiral? Existe um único ponto atractivo ou repulsivo? O intervalo é de compressão ou de expansão? Ocorreu um comportamento diferente do anterior?

Na iteração gráfica da função $f(x) = 3{,}2x(1-x)$, o caminho parece aproximar-se de uma caixa com um movimento em espiral no sentido dos ponteiros do relógio e para fora. Dois dos cantos dessa caixa estão sobre a recta $y = x$, enquanto que os outros dois estão localizados sobre o gráfico da função. Esta iteração gráfica mostra um novo comportamento periódico ou cíclico. Este comportamento interage para a frente e para trás aproximando-se de dois valores distintos de x. Os valores aproximados para esses dois pontos podem ser lidos a partir do gráfico. Eles identificam um ciclo de período 2, chamado de ***2-ciclo***, $x_a \rightarrow x_b \rightarrow x_a \rightarrow x_b \rightarrow x_a \rightarrow x_b \rightarrow \ldots..$ Assim, x_a e x_b satisfazem as equações $x_b = f(x_a) = 3{,}2x_a(1-x_a)$ e $x_a = f(x_b) = 3{,}2x_b(1-x_b)$.

Utilize o mesmo método gráfico da função $f(x) = 3{,}2x(1-x)$, para responder ás seguintes questões:

16. Desenhe no gráfico uma outra iteração, começando em $x_0 = 0{,}35$.

17. O comportamento da iteração feita na questão 16 é essencialmente o mesmo da questão 13?

Será que o caminho da iteração gráfica ainda parece convergir para a mesma caixa quadrada como antes?

É em espiral para dentro ou para fora da caixa? Ainda há compressão no intervalo?

18. Como é a iteração para os valores iniciais $x_0 = 0{,}65$ e $x_0 = 0{,}35$. Compare-as.

Descreva a iteração gráfica para cada um dos seguintes valores iniciais:

19. $x_0 = 0{,}6875$

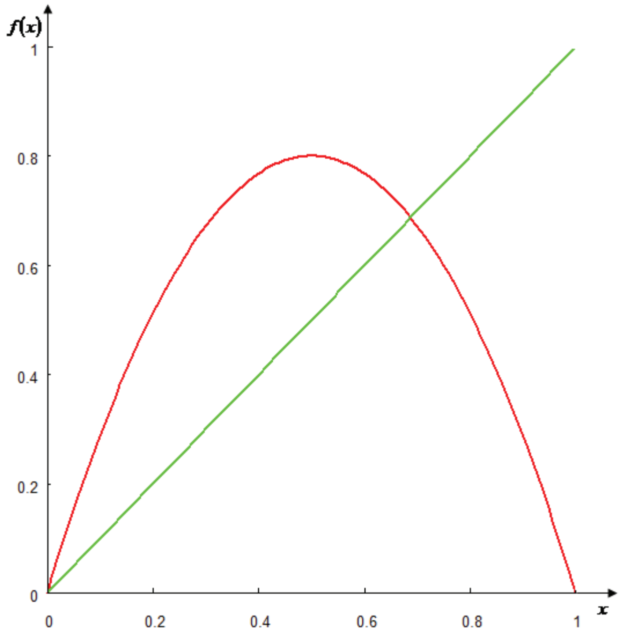
20. $x_0 = 1$

21. $x_0 < 0$

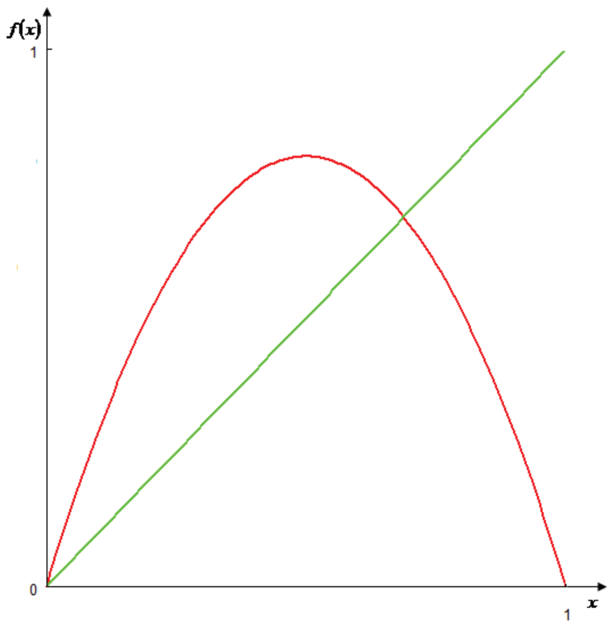
22. $x_0 > 1$

23. Quantos valores iniciais dessa iteração são pontos repulsivos fixos dentro da caixa quadrada em, exactamente, uma, duas ou três iterações?

Utilize o método gráfico para encontrar as pré-imagens para determinar esses valores iniciais.



24. Na parábola $f(x) = 2{,}8x(1-x)$, utilize o método gráfico para encontrar as pré-imagens para determinar valores iniciais que iteram, exactamente, sobre a caixa quadrática em 1, 2 e 3 iterações.



Esta tarefa deverá ser realizada essencialmente por alunos do ensino secundário, pois a iteração gráfica de funções, quando leccionada será no 11º ano de escolaridade.

A família de funções quadráticas apresenta, sob iteração, um comportamento que ajuda na compreensão do caos que por vezes existe num sistema dinâmico. Nesta tarefa é dada uma especial atenção a esse tipo de funções, onde o parâmetro a assume os valores $2{,}8$; $3{,}2$ e 4, note-se que só estes valores são representativos deste tipo de funções com o parâmetro a a variar entre, $1 < a < 4$ e que estas apresentam comportamentos semelhantes. Ao iterar a função $f(x) = 2{,}8x(1-x)$ para a maioria dos valores pertencentes ao intervalo fechado $[0{,}1]$ obtêm-se um resultado interessante. Tem um comportamento iterativo que a longo prazo leva sempre para um único valor, $0{,}6429...$

Com base na observação dos resultados obtidos, pretende-se que o aluno consiga identificar que esta função converge para um único valor, um ponto fixo, ao qual se chama atractor, e que este se verifica para aquelas funções cujo parâmetro a varia entre 1 e 3.

Ao iterar a função $f(x) = 3{,}2x(1-x)$ para a maioria dos valores no intervalo fechado $[0{,}1]$ obtêm-se um resultado diferente. Pois esta função tem a longo prazo um comportamento iterativo que nos conduz sempre aos mesmos dois valores, $0{,}799455...$ e $0{,}513044...$ Este comportamento oscilante, a longo prazo, é periódico, denominado período-2 atractor, que irá ocorrer para aquelas funções cujos valores de parâmetro a varia entre 3 e $3{,}4494...$

Quando se faz a iteração de um desses valores produzirá sempre o outro.

As duas funções estudadas na tarefa são $f(x) = 2{,}8x(1-x)$ e $f(x) = 3{,}2x(1-x)$ que têm um comportamento iterativo muito previsível e ilustram comportamentos estáveis em sistemas dinâmicos.

O caminho da iteração gráfica inicia no eixo dos x, no valor inicial x_0. A partir daí, ele move-se para frente e para trás entre a função e a diagonal $y = x$. Para encontrar as sucessivas iterações, estendem-se sucessivos segmentos de recta verticais no caminho da iteração até o eixo dos x. Segue-se o caminho da iteração com cuidado, especialmente o comportamento em espiral, para ter certeza de que as iterações sucessivas são listadas na ordem correcta. Nesta tarefa, o ponto de intersecção da parábola e a diagonal serve como atractor ou repulsor, dependendo do valor do parâmetro a na função quadrática $f(x)=ax(1-x)$. A mudança do comportamento do caminho da iteração altera-se com as alterações do parâmetro a.

Pretende-se que o aluno identifique que alguns padrões de iteração em espiral para um atractor são mais rápidos do que outros, dependendo da escolha dos valores iniciais. Quando o parâmetro a em $f(x)=ax(1-x)$ é 2,8 o atractor de um único ponto que é periódico (ponto fixo), é o $0{,}6428...$ Este é o valor de x no ponto de intersecção da função com a diagonal.

Quando o parâmetro a é de 3,2, há um ciclo de período-2: $0{,}5130... \rightarrow 0{,}7994... \rightarrow 0{,}5130... \rightarrow 0{,}7994... \rightarrow ...$ Este caminho da iteração, geralmente em espirais, conduz-nos em direcção a uma caixa quadrada definida por estes valores. O ponto fixo da função serve, agora, como um repelente. O atractor consiste, agora em dois dos pontos acima identificados.

Tarefa 8: *Iteração Gráfica na Calculadora Gráfica*

Objectivos

- Identificar uma função.
- Analisar o gráfico uma função.
- Analisar o comportamento de uma função.
- Esboçar gráficos a partir de um gráfico dado através de transformações simples.
- Resolver problemas, envolvendo funções polinomiais
- Utilizar a calculadora gráfica no estudo de funções.

Procedimentos

1. Dividir a turma em grupos de trabalho, no máximo com quatro elementos cada.
2. Entrega-se a Ficha de Trabalho aos alunos.
3. Estes devem ler atentamente a ficha de trabalho e de seguida responder às questões propostas.
4. No inicio da ficha de trabalho é pedido aos alunos que introduzam o programa de acordo com a calculadora que este possua. É pedido ao aluno que tenha o máximo de cuidado na introdução do programa na calculadora, pois um comando mal introduzido é suficiente para que o programa não funcione correctamente.
5. Os alunos resolvem a ficha de trabalho, seguindo as indicações dadas.
6. Fazer-se-á um debate sobre os resultados obtidos. Estes resultados devem ser obtidos dentro do grupo, por todos os elementos.

Ficha de Trabalho

Tarefa 8: *Iteração Gráfica na Calculadora Gráfica*[4]

As calculadoras gráficas fornecem uma forma rápida de iterar graficamente a família de funções quadráticas do tipo $f(x) = ax(1-x)$. Elas permitem um estudo prático sobre o comportamento das funções com poucas ou muitas iterações.

1. Introduza o programa de acordo com a sua calculadora, no menu PROGM:

Linha	CASIO	TEXAS INSTRUMENTS
1		:ClrDraw
2	Fix 3	:Fix 3
3	Range 0, 1, 1, 0, 1, 1	:0 $\rightarrow$ Xmin
4		:1 $\rightarrow$ Xmax
5		:0 $\rightarrow$ Ymin
6		:1 $\rightarrow$ Ymax
7	"A="? $\rightarrow$ A	:Disp "A="
8		:Input A
9	"I="? $\rightarrow$ I	:Disp "I="
10		:Input I
11	Graph Y=AX(1-X)	:DrawF AX(1-X)
12	Graph Y=X	:DrawF X
13	0 $\rightarrow$ N	:0 $\rightarrow$ N
14	0 $\rightarrow$ K	:0 $\rightarrow$ K
15	K=0=>Goto2	:If K=0
16		:Goto 2
17	Lbl 1	:Lbl 1
18	AI-AII $\rightarrow$ I	:AI-AII $\rightarrow$ I
19	N+1 $\rightarrow$ N	:n+1 $\rightarrow$ N
20	N<K=>Goto 1	:If N<K
21	Plot I,I	:Goto 1
22	Goto 3	:Goto 3
23	Lbl 2	:Lbl 2
24	Plot I,0	:Line(I, 0, I, I)
25	Lbl 3	:Lbl 3
26	AI-AII $\rightarrow$ J	:AI-AII $\rightarrow$ J
27	Plot I, J	:Line(I, I, I, J)
28	Line	:Line(I, J, J, J)
29	Plot J,J:Line Δ	:Pause
30	J Δ	:Disp J
31		:Pause
32	J $\rightarrow$ I	:J $\rightarrow$ I
33	N+1 $\rightarrow$ N	:N+1 $\rightarrow$ N

[4] Actividade retirada do livro: *Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume Two*, de Heinz-Otto Peitgen; Evan Maletsky; Hartmut Jürgens; Terry Perciante; Dietmar Saupe e Lee Yunker.

```
34   N<K+12=>Goto 3          :If N<K+12
35                           :Goto 3
36                           :End
```

Explicação:

Linha	**1 - 6**	Inicia e define o domínio e o intervalo da janela de visualização do gráfico.
	7 -12	Inicia o parâmetro a, o valor inicial x_0 e desenha a função parábola e a recta.
	14 - 22	Realiza um certo número de iterações K sem as mostrar.
	23 - 35	Fornece 12 iterações com gráficos e exibe o valor actual de x.

Siga estes passos consoante a marca da sua calculadora:

- Digite a, o valor do parâmetro ou coeficiente para a função $f(x) = ax(1-x)$.
- Digite o valor inicial x_0.
- Prima ENTER ou EXE, consoante a marca da calculadora.
- Depois de cada passo de iteração, prima ENTER ou EXE para continuar o processo.

Até este ponto, vimos vários comportamentos de iteração gráfica para a parábola, todos determinados pelo valor inicial e pelo valor do parâmetro a. Nos exercícios seguintes, vamos confirmar as nossas observações e alargar a gama de fenómenos encontrados na iteração da função quadrática.

2. Depois de introduzir o programa na sua calculadora, vamos executá-lo com os valores dos parâmetros utilizados nas tarefas *"Iteração da Família de Funções Quadráticas"* e *"A Família das Funções Quadráticas e o Caos"*.
Compare os resultados obtidos agora com os resultados obtidos através dos gráficos.
Para $a = 1{,}6$ comece com o valor inicial, $x_0 = 0{,}2$ e para $a = 2{,}8$, $a = 3{,}2$ e $a = 4{,}0$ com o valor inicial, $x_0 = 0{,}1$.

3. Utilize o programa, com o valor inicial $x_0 = 0{,}1$, para decidir qual o comportamento em cada iteração para o parâmetro dado.
Preencha o seu valor na tabela seguinte.

$a =$	1,50	2,90	3,24	3,90
Caos				
Período-2 atractor				
Ponto fixo, em espiral				
Ponto fixo, em escada				

Para os vários parâmetros, as primeiras iterações não começam logo a revelar o seu comportamento final. Neste caso, pode ajudar se se realizar um determinado número de pré-iterações antes de realmente traçar o caminho de iteração. Isto irá diminuir o efeito transitório de uma escolha em particular para o valor inicial.

4. Mude o valor de K, na linha 14 no seu programa, para $K = 100$ pré-iterações antes da sua execução. Execute o programa com $a = 3{,}5$ e para os valores iniciais $x_0 = 0{,}2$; $x_0 = 0{,}3$ e $x_0 = 0{,}4$. Descreva os resultados e dê os valores de x do atractor periódico.

5. Tendo ainda o mesmo valor para K, da questão anterior, teste os valores de a indicados na tabela e decida qual o comportamento em cada iteração para o parâmetro dado.

$a =$	2,95	3,05	3,50	3,68	3,74	3,80	3,84
Caos							
Período-5 atractor							
Período-4 atractor							
Período-3 atractor							
Período-2 atractor							
Ponto Fixo							

O objectivo desta tarefa é o uso da calculadora gráfica para gerar a iteração gráfica, pois é uma ferramenta muito poderosa para a visualização e exploração da iteração gráfica de funções. Desta forma pode-se dar mais atenção à comparação entre os comportamentos iterativo observados na calculadora e as iterações feitas com lápis e régua no papel.

A calculadora pode, ainda, ser utilizada para fazer iteração numérica rápida sobre as funções para que o comportamento das funções possa ser explorado através do estudo dos padrões numéricos.

Na introdução do programa na calculadora deve-se ter muito cuidado, pois se um comando estiver mal introduzido o programa vai dar erro.

Na questão dois é pedido aos alunos que voltem a resolver as tarefas *"Iteração da Família de Funções Quadráticas"* e *"A Família das Funções Quadráticas e o Caos"* e verifique se o comportamento apresentado agora é igual ao apresentado nessas tarefas, ou houve alterações.

A questão três pede ao aluno que identifique o comportamento da iteração a curto prazo e como é que ele muda à medida que o valor do parâmetro a aumenta.

Tanto na questão dois como na questões três o programa mostra as iterações a partir do valor inicial dado.

Na questão quatro pede-se que o aluno altere o valor de K para 100, isto significa que activou um processo tardio de 100 iterações antes de começar a traçar o gráfico. Este facto permite que se faça um estudo mais atento ao comportamento dinâmico de longo prazo.

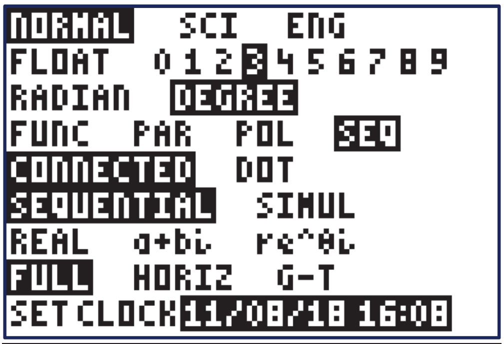
A questão cinco mostrar como o comportamento dinâmico muda drasticamente à medida que o parâmetro a se aproxima rapidamente de 4. O aluno verifica que há uma mudança rápida da ordem para o caos. No entanto, este facto não é assim tão linear como pode parecer à primeira vista. Há um sequência de duplicação do período de 1 para 2, para 4, para 8 e assim por diante. Mas quando o parâmetro a se aproxima de 4, os atractores com diversos períodos parecem alternar-se para a frente e para trás com o comportamento caótico de uma forma mais complexa.

Esta actividade mostra a transição da ordem para o caos, como o aumento do parâmetro a para 4, o que não é algo fácil.

Nota:

Caso um ou mais alunos apresentem dificuldades na introdução do programa e estes tenham uma calculadora gráfica da marca Texas Instruments, pode resolver esta tarefa procedendo do seguinte modo:

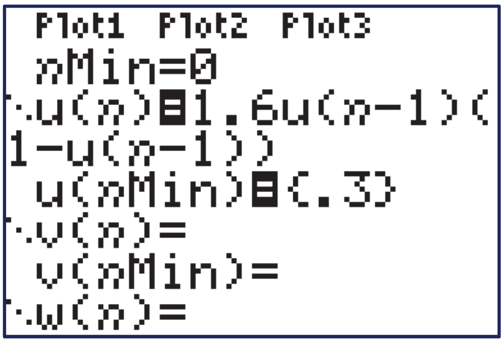
Começam por colocar a calculadora no modo sequência, e para isso clicam na tecla **MODE** a seguir seleccionam **SEQ**, tal como mostra a figura

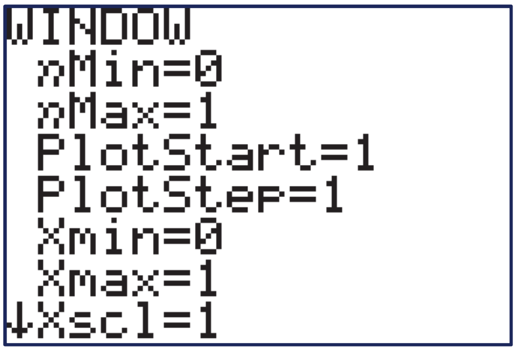


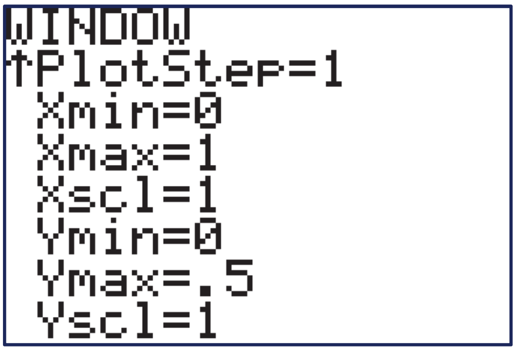
e depois saem do **MODE.**

Estando a calculadora TI neste modo, esta tem um ***web plot*** no menu **FORMAT**, que permite fazer iterações**.**

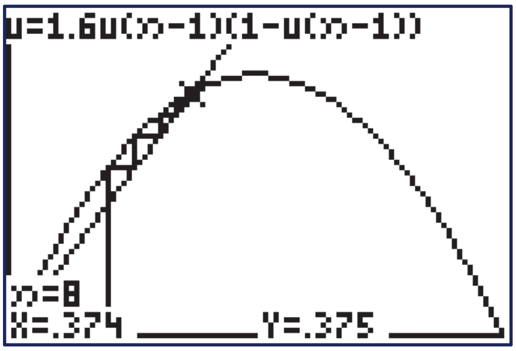
No modo *SEQUENCE,* introduz-se em $Y =$ a expressão indicada na tarefa e ajustando a janela de visualização ao valor do parâmetro a escolhido,

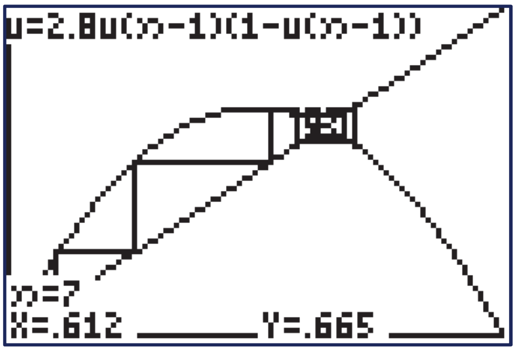


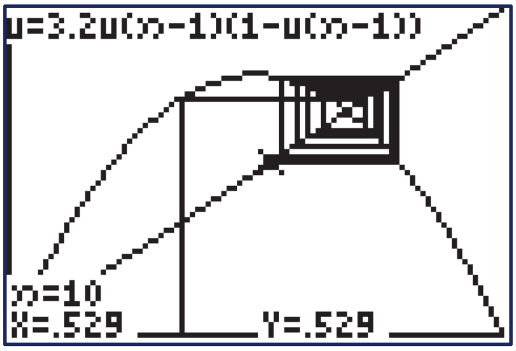


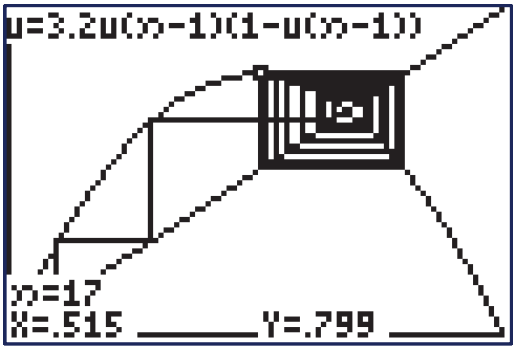


Obtemos os seguintes gráficos na questão 2:

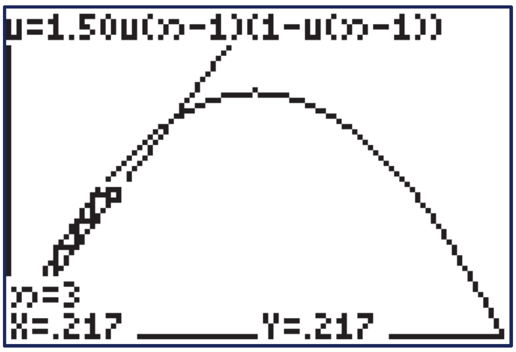


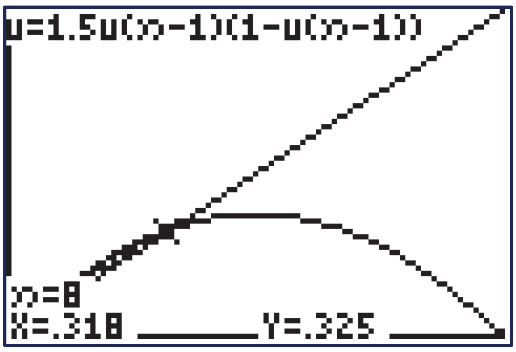


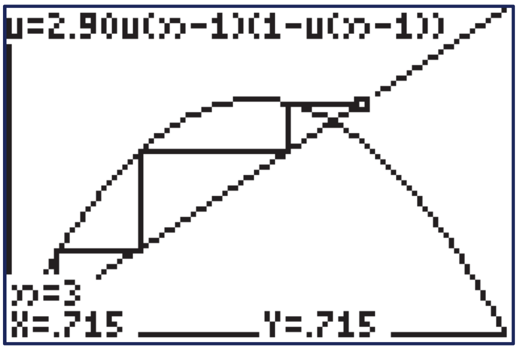


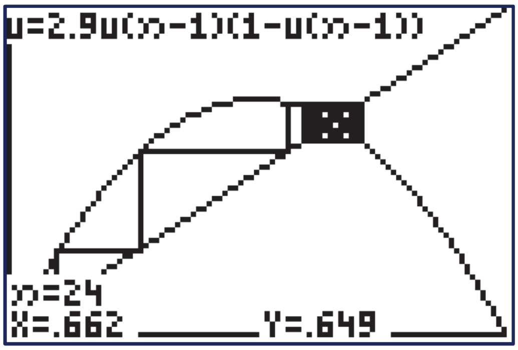


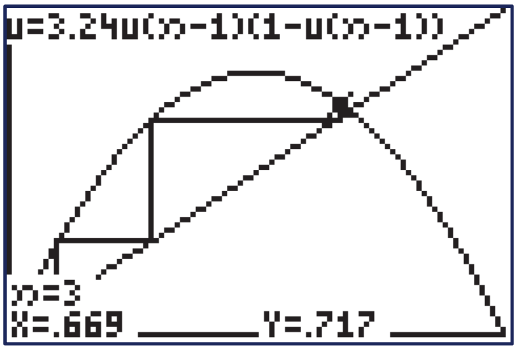
Na questão 3 obtêm-se os seguintes gráficos, para os valores indicados do parâmetro a .

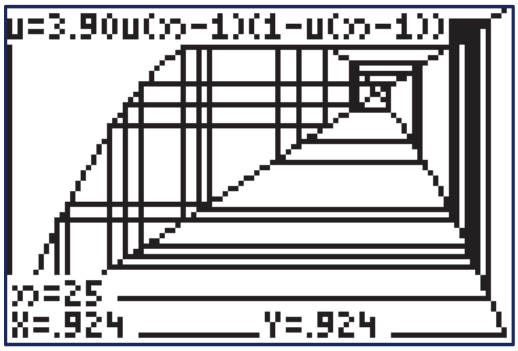


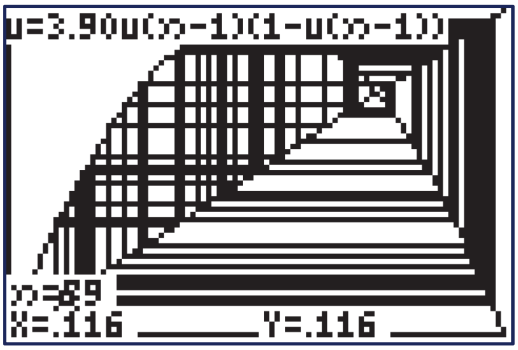



u=2.90u(n-1)(1-u(n-1))
n=3
X=.715
Y=.715


u=2.9u(n-1)(1-u(n-1))
n=24
X=.662
Y=.649


u=3.24u(n-1)(1-u(n-1))
n=3
X=.669
Y=.717


u=3.90u(n-1)(1-u(n-1))
n=25
X=.924
Y=.924


u=3.90u(n-1)(1-u(n-1))
n=89
X=.116
Y=.116

Tarefa 9: *Função Quadrática e o Conjunto de Cantor*

Objectivos

- Reconhecer que as propriedades das operações em ***Q*** se mantêm em ***R*** e aplicá-las na simplificação de expressões.
- Representar e interpretar intervalos de números reais, bem como a sua intersecção e reunião, simbólica e graficamente.
- Identificar uma função.
- Analisar o gráfico uma função.
- Analisar o comportamento de uma função.
- Esboçar gráficos a partir de um gráfico dado através de transformações simples.
- Resolver problemas, envolvendo funções polinomiais

Procedimentos

1. Dividir a turma em grupos de trabalho, no máximo com quatro elementos cada.
2. Entrega-se a Ficha de Trabalho aos alunos.
3. Estes devem ler atentamente a ficha de trabalho e de seguida responder às questões propostas.
4. Seguidamente faz-se uma abordagem diferente ao conjunto de Cantor, agora, através da iteração da *função quadrática.*
5. Os alunos resolvem a ficha de trabalho, seguindo as indicações dadas.
6. Fazer-se-á um debate sobre os resultados obtidos. Estes resultados devem ser obtidos dentro do grupo, por todos os elementos.

Ficha de Trabalho

Tarefa 9: *Função Quadrática e o Conjunto de Cantor*[5]

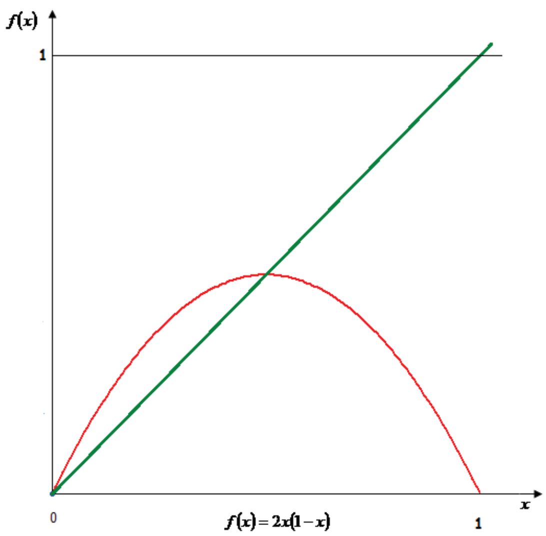
Os intervalos são conjuntos de pontos conexos, enquanto que o conjunto de Cantor é um conjunto de pontos desconexo. Dependendo do valor do parâmetro a, a iteração gráfica realizada na família de parábolas, $f(x) = ax(1-x)$, pode produzir tanto conjuntos prisioneiros como conjuntos de Cantor, onde os pontos são desconexos.

De uma forma muito intuitiva, um conjunto diz-se ***desconexo*** quando pode ser dividido em várias partes que nunca se tocam. Os conjuntos de Cantor formados através de iteração gráfica e mencionados acima são desconexos, pois há intervalos que são excluídos durante a sua construção.

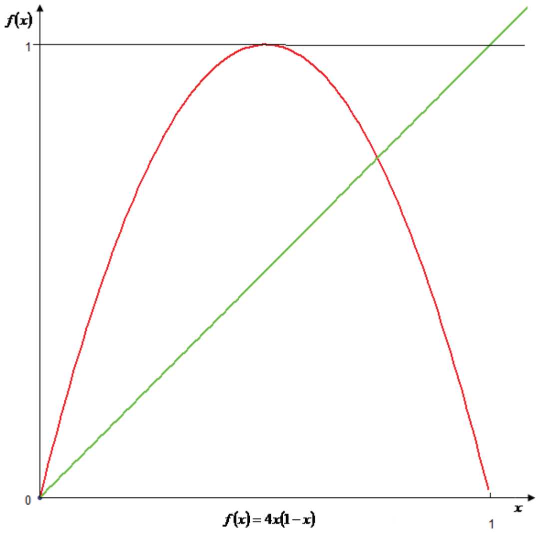
De facto, entre quaisquer dois pontos do conjunto de Cantor, existe um intervalo que não pertence ao conjunto de Cantor.

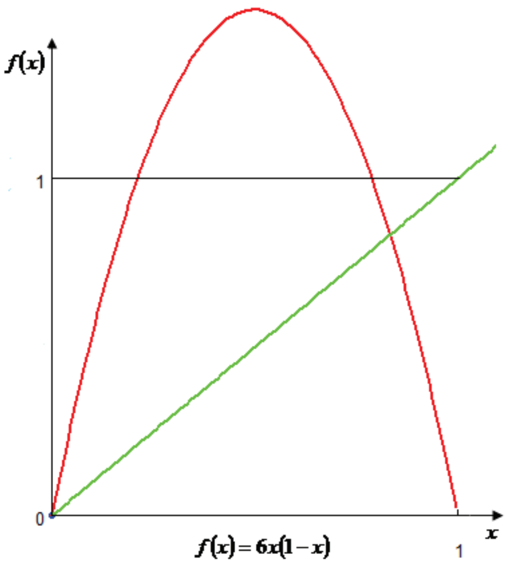
Portanto, o conjunto de Cantor é um conjunto totalmente desconexo. Usamos essa noção intuitiva de partido versus ininterrupta para diferenciar entre a "poeira" de pontos desconexos do conjunto de Cantor e os conjuntos prisioneiros, que são ininterruptos.

1. Mostre qual dos três gráficos seguintes têm valores de x no intervalo $[0,1]$ para o qual $f(x)$ não pertence ao intervalo $[0,1]$. Ou seja, identifique os pontos $x \in [0,1]$ para os quais $f(x) \notin [0,1]$.



[5] Actividade retirada do livro: *Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume Two*, de Heinz-Otto Peitgen; Evan Maletsky; Hartmut Jürgens; Terry Perciante; Dietmar Saupe e Lee Yunker.





2. Na tabela seguinte estão as expressões algébricas das representações gráficas anteriores. Use as suas expressões para determinar os sucessivos valores por iteração numérica, começando com os valores iniciais indicados na coluna x_0.

Função $f(x)$	x_0	$x_1 = f(x_0)$	$x_2 = f(x_1)$	$x_3 = f(x_2)$
$f(x) = 2x(1-x)$	$-0{,}5$	$-1{,}5$	$-7{,}5$	$-127{,}5$
	$1{,}5$			
$f(x) = 4x(1-x)$	$-0{,}5$			
	$1{,}5$	$-3{,}0$	$-48{,}0$	
$f(x) = 6x(1-x)$	$-0{,}5$			
	$1{,}5$	$-4{,}5$	$-148{,}5$	
	$0{,}9$	$0{,}54$		

3. Para cada uma das funções representadas na tabela, explique por que nenhum dos pontos dados pertence ao conjunto prisioneiro associado à função.

Intervalos invariantes existem para as duas primeiras funções representadas nas questões 1 e 2.

Na verdade, para estas duas funções, o conjunto prisioneiro consiste em nada mais do que o intervalo invariante maximal.

4. Use o teste da caixa na representação gráfica das duas primeiras funções para encontrar o intervalo invariante maximal $[b,c]$ tal que $f([b,c])$ é um subconjunto de $[b,c]$.

5. Os conjuntos prisioneiros são definidos pelos intervalos conexos ou desconexos?

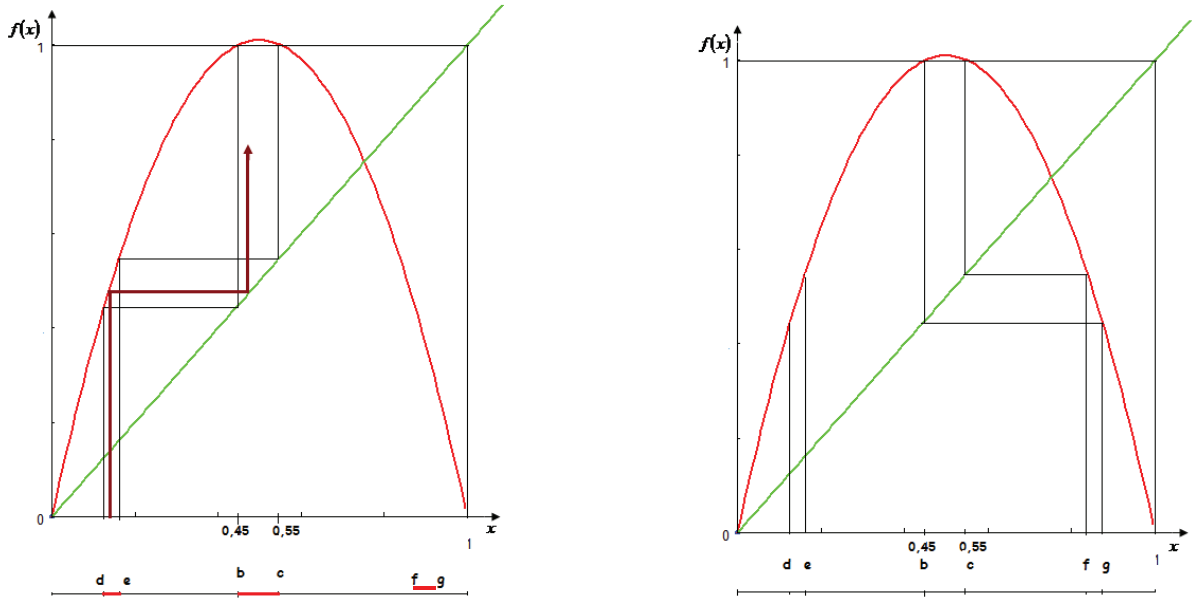
Quando o vértice da família de parábolas, $f(x)=ax(1-x)$, fica acima da recta $y=1$, esta estende-se para além de $[0,1]\times[0,1]$. Nestes casos o teste da caixa indica que não existem intervalos invariantes.

A função $f(x)=6x(1-x)$, representada na questão 3, fornece um exemplo dessa parábola.

Seguidamente iremos explorar a natureza dos conjuntos prisioneiros para a família de funções quadráticas, $f(x)=ax(1-x)$, onde o parâmetro a é escolhido de forma que não existe nenhum intervalo invariante.

Para este tipo de função quadrática, o gráfico seguinte, cada ponto do intervalo $(b,c)=(0{,}45;0{,}55)$ sai fora do intervalo $[0,1]$ numa iteração gráfica. Tal como se pode observar na gráfico da esquerda, o intervalo menor (d,e) sai fora do intervalo (b,c) numa iteração gráfica neste mesmo intervalo e saem fora do intervalo $[0,1]$ após a segunda iteração gráfica.

6. No gráfico abaixo, sombreie de fuga para os pontos do intervalo (f,g). A função representada é $f(x)=\dfrac{400}{99}x(1-x)$.

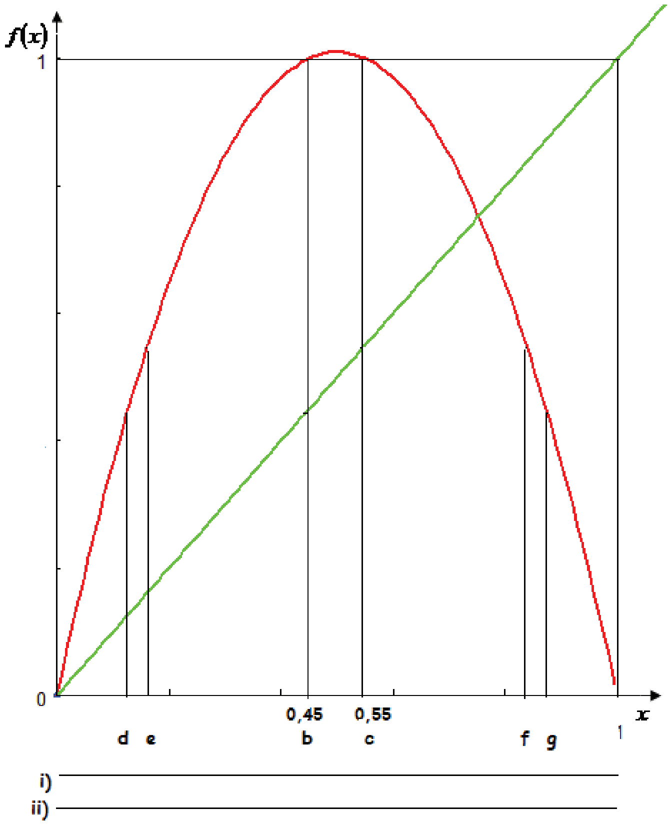


7. Na recta situada por baixo do gráfico da esquerda, as partes a negrito, representam os intervalos $(b,c),(d,e)$ e (f,g) que são iterados para fora do intervalo $[0,1]$. Utilize a recta situada abaixo do gráfico da direita, para marcar os intervalos $(b,c),(d,e)$ e (f,g) que depois de iterados saem do intervalo $[0,1]$.

8. Utilize o facto de que $f(d)=b$ e $f(e)=c$ para calcular numericamente e definir os extremos do intervalo $[0,1]$. Repita o mesmo processo para os extremos do intervalo (f,g).

Nos gráficos anteriores, os segmentos de recta horizontais foram estendidos a partir dos pontos de intersecção que as rectas $x=b$ e $x=c$ fazem com a recta $y=x$. Os pontos de intersecção dos segmentos de recta e da parábola dá-nos os extremos do intervalo (d,e). Quando estendemos os segmentos de recta para a direita vamos encontrar os extremos do intervalo (f,g).

9. No gráfico seguinte, localize e adicione rectas verticais, de modo a definir dois novos intervalos que saem de $[d,e]$ sob iteração gráfica. Repita o mesmo processo, mas agora, para o intervalo $[f,g]$.



Como esses novos intervalos percorrem os intervalos de escape, eles também iteram fora de $[0,1]$. Novamente a função é $f(x)=\dfrac{400}{99}x(1-x)$.

10. Estenda todos os segmentos de recta verticais no gráfico da questão 9, incluindo, tanto $x=0$ como $x=1$, sobre os dois segmentos de recta i) e ii), apresentados por baixo do gráfico. Sombreie sobre esses dois segmentos de recta os quatro novos intervalos, bem como os intervalos $(b,c),(d,e)$ e (f,g) no segmento de recta i).

Os pontos pertencentes aos intervalos marcados no segmento i) não fazem parte do conjunto prisioneiro, uma vez que iteram fora do intervalo $[0,1]$.

11. No segmento de recta ii), marque os intervalos que não marcou no segmento de recta i).

Todos os pontos do conjunto prisioneiro devem estar dentro dos intervalos marcados no segmento de recta ii). No entanto, nem todos os pontos pertencentes a estes intervalos estão no conjunto prisioneiro. Quando se iterar novamente, vão-se remover novos intervalos.

12. Os segmentos de recta i) e ii) exibem intervalos que surgem após a aplicação de três iterações gráficas para todos os pontos pertencentes ao intervalo $[0,1]$.

   a) Quantos intervalos iriam aparecer no primeiro segmento de recta i), tendo a propriedades de que eles escapam de $[0,1]$ em menos de cinco iterações?

   b) Quantos intervalos iriam aparecer no segmento de recta ii), tendo a propriedade de não escapar de $[0,1]$ em menos de cinco iterações?

13. Mostre que os extremos dos intervalos identificados pelos pontos b, c, d, e, f e g estão presos no intervalo $[0,1]$, determinando o único valor para o qual iriam todos, finalmente, iterar após muitas iterações gráficas.

É evidente que o valor máximo da função $f(x) = ax(1-x)$ determina a natureza do conjunto prisioneiro que é o resultado de um número infinito de iterações gráficas.

Quanto mais afastado e acima, estiver o valor máximo da função $f(x) = ax(1-x)$, em relação a recta $y = 1$, o conjunto prisioneiro dá-se uma mudança abrupta e surpreendente no intervalo $[0,1]$ que o torna no conjunto de Cantor, totalmente desconexo.

Cada função que tenha um máximo que esteja acima da recta $y = 1$, gera um conjunto de Cantor distinto.

Esta tarefa deverá ser realizada por alunos do ensino secundário, uma vez que a iteração gráfica de funções só poderá ser leccionada no 11º ano de escolaridade. Para a realização da tarefa o aluno necessita de conhecimentos sobre Funções Quadráticas, adquiridos no ano anterior e saber como construir o conjunto de Cantor e saber quais os seus elementos. Desta forma esta tarefa deverá ser leccionada depois do aluno já ter realizado as tarefas 2 e 7, pois nessas tarefas já se fez o estudo do conjunto de Cantor e da iteração da função Quadrática.

Na realização da tarefa os gráficos da função da forma $f(x) = ax(1-x)$, onde $a > 1$, são parábolas com concavidade virada para baixo e que intersectam o eixo dos xx nos pontos $x = 0$ e $x = 1$.

O aluno observa que quando $a = 1$, o vértice da parábola encontra-se abaixo da recta $y = 1$, logo o conjunto prisioneiro é o intervalo invariante $[0,1]$. No entanto, quando o parâmetro $a > 1$, o vértice da parábola fica acima da recta $y = 1$, o que nos facilita a visualização de quais os subintervalos pertencentes a $[0,1]$ que escapam para o infinito sob iteração gráfica.

Este método permite-nos ver que para cada subintervalo que escapa, outros subintervalos podem ser encontrados sob iteração desse intervalo que escapa.

O aluno deverá concluir que se se continuar este processo até ao infinito, partindo do intervalo unitário iremos obter o conjunto prisioneiro que é um conjunto conexo, onde o máximo se situa entre $y = \frac{1}{4}$ e $y = 1$. Este conjunto conexo é o intervalo invariante $[0,1]$. Também se obtém um conjunto prisioneiro que é um conjunto de pontos totalmente desconexo, quando o máximo da função é superior á recta $y = 1$.
O aluno deverá, ainda, concluir que para cada intervalo que escapa de $[0,1]$ao fim da $n - ésima$ iteração, existem dois novos intervalos de escape que pertencem a $[0,1]$ e que ficam em $[0,1]$ ao fim da $n + 1 - ésima$ iteração.

Tarefa 10: *Pontos Críticos*

Objectivos

- Reconhecer que as propriedades das operações em ***Q*** se mantêm em ***R*** e aplicá-las na simplificação de expressões.
- Representar e interpretar intervalos de números reais, bem como a sua intersecção e reunião, simbólica e graficamente.
- Identificar uma função.
- Analisar o gráfico uma função.
- Analisar o comportamento de uma função.
- Esboçar gráficos a partir de um gráfico dado através de transformações simples.
- Resolver problemas, envolvendo funções polinomiais

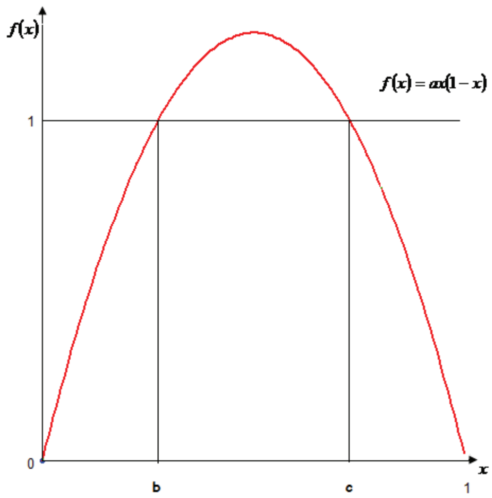
Procedimentos

1. Dividir a turma em grupos de trabalho, no máximo com quatro elementos cada.
2. Entrega-se a Ficha de Trabalho aos alunos.
3. Estes devem ler atentamente a ficha de trabalho e de seguida responder às questões propostas.
4. Os alunos resolvem a ficha de trabalho, seguindo as indicações dadas.
5. No final da realização da ficha de trabalho far-se-á um debate sobre os resultados obtidos. Estes resultados devem ser obtidos dentro do grupo, por todos os elementos.

Ficha de Trabalho

Tarefa 10: *Pontos Críticos*[6]

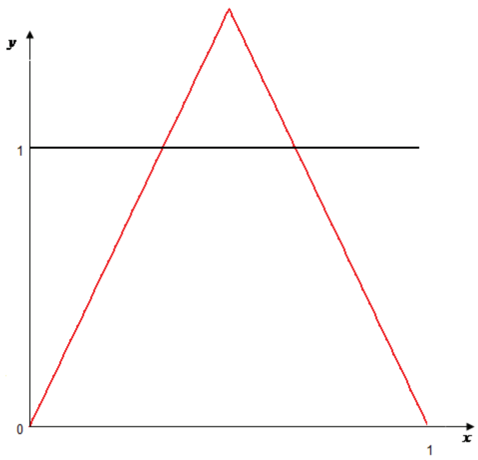
Já estudamos a família de funções quadráticas do tipo $f(x) = ax(1-x)$ onde $a \geq 1$. Para estas funções, o conjunto prisioneiro não contém pontos fora do intervalo $[0,1]$. Dependendo do valor atribuído ao parâmetro a, o conjunto prisioneiro é o intervalo inteiro invariante $[0,1]$ ou um conjunto de pontos desconexo partindo do intervalo $[0,1]$.

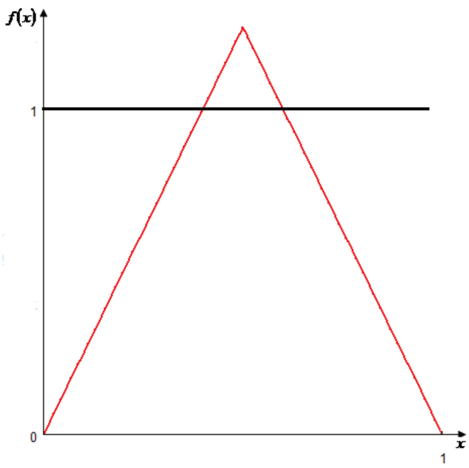


Esta actividade dá-nos uma forma simples para prever qual dos dois comportamentos ocorre.

A figura mostra um intervalo (b,c) centrado no ponto $x = 0{,}5$. Os pontos pertencentes a este intervalo deixam o intervalo $[0,1]$ após uma única iteração gráfica. As iterações seguintes destes pontos tendem para infinito.

1. Para cada uma das funções Tenda, abaixo, desenhe os segmentos de recta verticais, para definir um intervalo de pontos (b,c) que deixaria o intervalo $[0,1]$ depois de uma só iteração.





O valor máximo da função Tenda $f(x)$ afecta a largura do intervalo de escape (b,c)?

[6] Actividade retirada do livro: *Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume Two*, de Heinz-Otto Peitgen; Evan Maletsky; Hartmut Jürgens; Terry Perciante; Dietmar Saupe e Lee Yunker.

2. Quando o valor máximo de $f(x)$ diminui, o que acontece à largura do intervalo de escape (b,c)?

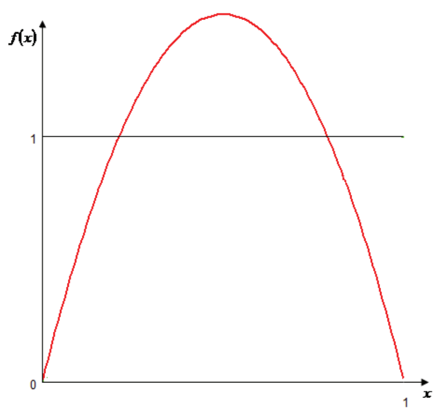
O valor absoluto dos gráficos apresentados na questão 1 têm equações do tipo $f(x)=a(0{,}5-|x-0{,}5|)$

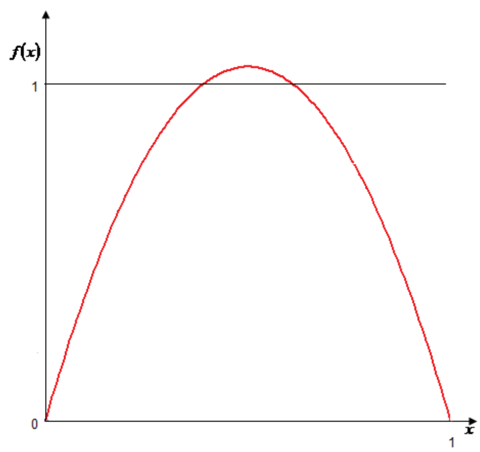
3. Qual é o máximo da função $f(x)=6(0{,}5-|x-0{,}5|)$? Quais são os extremos do intervalo de escape (b,c) pertencentes ao intervalo $[0,1]$? Qual é a sua largura?

4. Qual é o máximo necessário para que o intervalo de escape (b,c) das funções de valor absoluto deste tipo encolham até a um único ponto $x=0{,}5$?

5. Determine o valor máximo do parâmetro a na função $f(x)=a(0{,}5-|x-0{,}5|)$, necessário para que a curva de valor absoluto tenha a propriedade que $x=0{,}5$ não escape para infinito. Use os resultados da questão 4.

6. As parábolas abaixo, têm equações do tipo $f(x)=ax(1-x)$. Para cada uma dessas parábola, desenhe os segmentos de recta verticais para definir um intervalo de pontos (b,c) que deixaria o intervalo $[0,1]$ depois de apenas uma iterada gráfica.





7. Qual deverá ser o vértice da parábola para que o intervalo (b,c) diminua até ter um único ponto, $x=0{,}5$?

8. Qual deverá ser o valor do parâmetro a, na equação $y=ax(1-x)$ necessário para que a parábola possa ter a propriedade que $x=0{,}5$ não escapa para infinito? Determine o valor de a, assumindo que y é igual ao máximo determinado na questão 7, usando $x=0{,}5$.

O valor do parâmetro a é referido como uma barreira, se está na fronteira entre dois tipos de comportamento distintamente diferentes. O limite dos valores encontrados nas questões 5 e 8 são essas barreiras.

9. Escreva uma regra que descreva o comportamento da iteração gráfica, quando os valores são seleccionados para o parâmetro a que são nem mais nem menos do que o valor barreira.
Que efeitos tem sobre a iteração gráfica os valores do parâmetro que sejam maiores do que os valores barreira?

Para as funções $f(x) = ax(1-x)$ ou $f(x) = a(0,5 - |x - 0,5|)$ há apenas um ponto critico inicial que pode ser usado para determinar se existem alguns pontos pertencentes ao intervalo $[0,1]$ que escapam do intervalo sob iteração gráfica.

10. Para $f(x) = a(0,5 - |x - 0,5|)$, explique porque é que a abcissa critica inicial é $x = 0,5$. Qual é a abcissa critica inicial para $f(x) = ax(1-x)$?

O ponto critico inicial x_0 para a iteração gráfica, através de $f(x)$ ocorre no eixo dos xx no valor da abcissa para o qual $f(x)$ toma o seu valor máximo. Se a curva está acima da recta $y = 1$ nesse ponto, os pontos iniciais escapam e originam o conjunto prisioneiro que é o conjunto de Cantor.

Uma outra opção seria considerar os gráficos das funções $f(x) = ax(1-x^2)$ para $x \geq 0$ e $f(x) = ax$ para $x < 0$, estas funções exigem muitos cálculos, no entanto, apresentam algumas semelhanças com os gráficos da parábola. No entanto, ao contrário dos gráficos de $f(x) = ax(1-x)$, estes não apresentam simetria através dos seus pontos máximos. É justamente essa falta de simetria que dificulta a determinação do seu ponto critico. Felizmente, o cálculo fornece métodos para determinar os máximos relativos desse tipo de funções.

11. Considere a função $f(x) = ax(1 - x^2)$ para $x \geq 0$ e $f(x) = ax$ para $x < 0$. Através de métodos analíticos determine o máximo relativo de $f(x)$ dentro do intervalo $[0,1]$.

Que ponto critico inicial pertencente ao intervalo $[0,1]$ pode ser utilizado para determinar se todos os pontos existentes em $[0,1]$ escapam para o infinito sob iteração gráfica da função $f(x)$?

Esta tarefa deverá ser realizada essencialmente por alunos do ensino secundário, pois a iteração gráfica de funções, quando leccionada será no 11º ano de escolaridade. Para a realização da tarefa o aluno necessita dos conhecimentos sobre Funções, adquiridos no ano anterior e saber como construir e quais os elementos do conjunto de Cantor. Desta forma, esta tarefa deverá ser leccionada depois do aluno já ter realizado as tarefas 2, 6 e 9, pois nessas tarefas já se estudou o conjunto de Cantor, a função Tenda e a função Quadrática.

O objectivo desta tarefa é que o aluno descubra por si como localizar um único ponto crítico dentro do domínio de uma função quadrática ou semelhante que pode originar o conjunto de prisioneiro e dizer-nos se este é um intervalo invariante ou um conjunto de pontos desconexos.

Nesta tarefa estuda-se o que acontece se se reduzir a altura máxima das funções nos intervalos que escapam do intervalo [0,1] sob iteração gráfica. Uma vez que a altura máxima depende do valor do parâmetro a quando a função quadrática tem a seguinte forma $f(x)=ax(1-x)$, por outro lado, também se procura um valor para o parâmetro de barreira que divide as funções em intervalos invariáveis como seu conjunto prisioneiro e num conjunto de pontos desconexos.

Para este estudo a tarefa está dividida em duas partes, desta forma o aluno têm uma orientação para a trabalho pretendido e dessa forma conseguirá chegar mais facilmente às conclusões pretendidas. Das questões 1 até à 6, o aluno trabalhará com a função Tenda e das questões 7 à 10, utilizará no seu estudo a função quadrática.

Ao realizar esta tarefa pretende-se que o aluno conclua que para as parábolas que apresentam a concavidade voltada para baixo, definidas no intervalo $[0, 1]$, o ponto critico para a iteração é $x = 1/2$.

A iteração do ponto crítico revela se o conjunto prisioneiro é o intervalo de unidade (pois a iteração continua no intervalo $[0,1]$) ou totalmente desconectado (uma vez que a iteração escapa para o infinito).