Universidade de Évora

Mestrado em Matemática Aplicada

SOMAS DIRECTAS ORTOGONAIS E TESTES F EM MODELOS DE EFEITOS FIXOS

Dissertação apresentada para obter o grau de Mestre em Matemática Aplicada pela Universidade de Évora

Dário Jorge da Conceição Ferreira

Évora, 2001

Universidade de Évora

Mestrado em Matemática Aplicada

SOMAS DIRECTAS ORTOGONAIS E TESTES F EM MODELOS DE EFEITOS FIXOS

Dissertação apresentada para obter o grau de Mestre em Matemática Aplicada pela Universidade de Évora

Dário Jorge da Conceição Ferreira

Évora, 2001

Dedicatórias

À Sra. Guilhermina Ferreira,

ao Sr. Joaquim Ferreira,

ao Sr. Oscar Ferreira,

à Dra. Sandra Ferreira,

respectivamente Mãe, Pai, Irmão e Esposa aqui citados em ordem alfabética.

Agradecimentos

A realização da presente dissertação é fruto de um trabalho persistente que, no entanto, está longe de me poder ser atribuído na integra. Assim, gostaria de deixar aqui expresso os meus sinceros agradecimentos, necessariamente aquém do devido, às pessoas que directa ou indirectamente contribuíram para a sua execução; embora consciente de que agradecendo a alguns, corremos sempre o risco de ignorar outros cuja contribuição foi também fundamental.

Ao Professor Doutor Tiago Mexia, Professor Catedrático da Universidade Nova de Lisboa, que, para além de meu orientador científico, considero também um grande amigo, quero expressar o meu profundo reconhecimento por todo o empenho, dedicação e total disponibilidade em transmitir os seus valiosos conhecimentos.

À minha esposa, Sandra Saraiva, deixo aqui um obrigado pela atenção e o testemunho da maior admiração pela motivação e conhecimentos que foram de grande valor.

Às minhas colegas Célia Nunes e Isabel Cristina, com quem há algum tempo estabeleci uma duradoura relação de amizade, agradeço a constante motivação e disponibilidade.

Aos meus colegas de mestrado, com realce especial para Ana Bela Santos, Célia Fernandes, Elsa Amaro e Paulo Ramos queria também deixar o meu vivo agradecimento pelo bom clima de trabalho que sempre me souberam proporcionar.

Sumário

Após introduzir os resultados algébricos e distribuições necessárias passa-se à construção dos testes F.

Nesta construção utilizam-se sistemáticamente partições ortogonais de espaços vectoriais, de forma a conseguir-se uma desagregação tão fina quanto possível da variação entre tratamentos no caso de modelos de efeitos fixos.

Apresentamos ainda uma aplicação dos nossos resultados aos planos completos equilibrados.

Abstract

We start by presenting the required algebraic and distribution theory results.

Then we get into F tests derivation for fixed effects models. Our treatment uses orthogonal partitions vectors subespaces in order to achieve the finest desagregation of the factors action.

We apply our results to balanced complete lay-outs.

Indice

Capítulo 1

Introdução

A teoria dos testes F e outras teorias relacionadas encontram-se em forte expansão; veja-se por exemplo Khuri, Mathew & Sinha (1998).

A utilização de instrumentos algébricos sofisticados é uma constante desse espaço, veja-se por exemplo as aplicações dos espaços quadráticos de matrizes, ver por exemplo Michalstai & Zmysloni (1996) e (1999).

Uma outra linha com interesse é a das manipulações matriciais que levam à construção de testes de Bartlett-Scheffé, ver por exemplo Seifert (1981), para o caso de componentes de variância.

No que segue desenvolveremos, para modelos de efeitos fixos, uma abordagem iniciada por Mexia (1988) em que se utiliza sistematicamente bases ortonormadas associadas a partições ortogonais de sub-espaços. Neste caso as bases decompõem–se em sub-bases, onde cada uma é base ortonormada dum dos espaços da partição. Esta teoria permite ainda desagregar o mais completamente possível a variação entre tratamentos. A nossa contribuição está na formulação da teoria em termos mais gerais do que os casos anteriormente considerados dos planos completos e dos factoriais de base prima já estudados, ver Mexia (1989), embora mostremos como é que os nossos resultados podem ser aplicados ao primeiro destes casos.

Capítulo 2

Resultados algébricos

2.1 Matrizes de projecção ortogonal

Se os vectores linha duma matriz A^0 constituirem uma base ortonormada para um sub-espaço ∇ poremos $A^0 \leftrightarrow \nabla$. Sendo $\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_s^n$ esses vectores linha poremos ainda

$$A^0 = \mathcal{L}(\vec{\alpha}_1^T, ..., \vec{\alpha}_s^T) \tag{2.1.1}$$

qualquer vector de ∇ será da forma

$$\vec{u}^n = \sum_{j=1}^{s} (\vec{\alpha}_j^T \vec{u}) \vec{\alpha}_j^n \tag{2.1.2}$$

e a projecção ortogonal de $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sobre ∇ será

$$\vec{v}_\nabla^n = \sum_{j=1}^{s} (\vec{\alpha}_j^T \vec{v}) \vec{\alpha}_j^n \tag{2.1.3}$$

Vê-se que

$$\vec{v}_\nabla^n = \left[\, \vec{\alpha}_1^n \vdots \; \cdots \; \vdots \vec{\alpha}_s^n \, \right] \tag{2.1.4}$$

pelo que a matriz de projecção ortogonal sobre ∇ será

$$Q(\nabla) = A^{0^T} A^0 \tag{2.1.5}$$

Sendo $\{\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_s^n\}$, como vimos, uma base ortonormada de ∇,

$$\{\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_s^n\} = b\perp(\nabla)$$

se ∇ for sub-espaço de Δ podemos completar $\{\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_s^n\}$ de forma a obtermos $\{\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_t^n\}$.

Estabeleçamos a

Proposição 1 *Sendo* $\nabla^\perp$ *o complemento ortogonal de* ∇ *tem-se*

$$\{\vec{\alpha}_{s+1}^n, \ldots, \vec{\alpha}_t^n\} = b\perp(\nabla^\perp \cap \Delta)$$

Demonstração:

Os vectores da forma

$$\sum_{j=s+1}^{t} (\vec{\alpha}_j^T \vec{v})\vec{\alpha}_j^n$$

são ortogonais a ∇ e pertencem a Δ, pertencendo pois a $\nabla^\perp \cap \Delta$.

Completemos $\{\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_t^n\}$ de forma a obtermos

$$\{\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_n^n\} = b\perp(\mathbb{R}^n)$$

Um vector $\vec{w}^n$ de $\nabla^\perp \cap \Delta$ terá de ser ortogonal a ∇ e, como

$$\{\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_s^n\} = b\perp(\nabla)$$

temos que

$$\vec{\alpha}_j^T \vec{v}^n = 0 \quad j = 1, \ldots, s$$

análogamente ter-se-á

$$\vec{\alpha}_j^T \vec{v}^n = 0 j = t+1, \ldots, n$$

já que

$$\{\vec{\alpha}_{t+1}^n, \ldots, \vec{\alpha}_n^n\} = b\perp(\mathbb{R}^n)$$

Assim os vectores de $\nabla^\perp \cap \Delta$ serão da forma

$$\sum_{j=s+1}^{t} (\vec{\alpha}_j^T \vec{v})\vec{\alpha}_j^n$$

Daqui conclui-se que os vectores $\vec{\alpha}_{s+1}^n, \ldots, \vec{\alpha}_t^n$ geram $\nabla^\perp \cap \Delta$ e, dado estes vectores serem mutuamente ortogonais com norma um, temos que

$$\{\vec{\alpha}_{s+1}^n, \ldots, \vec{\alpha}_t^n\} = b\perp(\nabla^\perp \cap \Delta)$$

□

Pondo

$$M^0 = \mathcal{L}(\vec{\alpha}_{s+1}^T, \ldots, \vec{\alpha}_t^T) \tag{2.1.6}$$

pode raciocinar-se como atrás para mostrar que

$$Q(\nabla^{\perp} \cap \Delta) = M^{0^T} M^0 \tag{2.1.7}$$

Estabeleçamos a partir daqui o bem conhecido resultado

Proposição 2 $Q(\nabla)$ *é simétrica e idempotente.*

Demonstração:

i) Temos que

$$Q^T(\nabla) = (A^{0^T}A^0)^T = A^{0^T}A^0 = Q(\nabla)$$

Logo $Q(\nabla)$ é simétrica.

ii) Temos que

$$Q^2(\nabla) = Q(\nabla)Q(\nabla) = A^{0^T}A^0A^{0^T}A^0 = A^{0^T}I_sA^0 = A^TA^0 = Q(\nabla)$$

Logo $Q(\nabla)$ é idempotente.

$\square$

Segue-se a

Proposição 3 *Se* $\nabla_1 \perp \nabla_2$ *então* $Q(\nabla)_1 Q(\nabla)_2 = 0_{n,n}$, *sendo* $0_{r,s}$ *a matriz nula do tipo* $r \times s$

Demonstração:

Temos que $\nabla_1 \perp \nabla_2$.

Então os vectores linha de $Q(\nabla)_1$ que pertencem a ∇_1 são ortogonais aos vectores coluna de $Q(\nabla)_2$ que pertencem a ∇_2.

Logo

$$Q(\nabla)_1 Q(\nabla)_2 = 0_{n,n}.$$

$\square$

2.2 Espaços imagem e de nulidade

O espaço imagem [de nulidade] duma matriz A será $E(A)[N(A)]$ podendo mostrar-se, ver SEBER (1980, pg 2), que

$$E(A^T) = N(A)^{\perp} \tag{2.2.8}$$

A matriz $A = \mathcal{L}(\vec{\gamma}_1^T, \ldots, \gamma_s^T)$ é horizontalmente livre se os seus vectores linha forem linearmente independentes. Por aplicação a estes vectores do processo de orto-normalização de Gram-Schmidt obtêm-se os vectores

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_1^n = \frac{1}{\|\vec{\gamma}_1^n\|}\vec{\gamma}_1^n \\ \vec{\alpha}_j^n = \dfrac{\vec{\gamma}_j^n - \sum_{i=1}^{j-1}(\vec{\alpha}_i^T - \vec{\gamma}_j)\vec{\alpha}_i^n}{\|\vec{\gamma}_j^n - \sum_{i=1}^{j-1}(\vec{\alpha}_i^T - \vec{\gamma}_j)\vec{\alpha}_i^n\|}; j = 2, \ldots, s \end{cases} \tag{2.2.9}$$

A matriz

$$A^0 = \mathcal{L}(\vec{\alpha}_1^T, \ldots, \alpha_s^T) \tag{2.2.10}$$

será a orto-normalizada de A.

Observe-se que os vectores $\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \alpha_s^n$ são combinações lineares dos $\vec{\gamma}_1^n, \ldots, \gamma_s^n$. Mostremos, por indução, que os $\vec{\gamma}_1^n, \ldots, \gamma_s^n$ também são combinações lineares dos $\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \alpha_s^n$:

Temos que

$$\vec{\gamma}_1^n = \|\vec{\gamma}_1^n\|\vec{\alpha}_1^n = c_{1,1}\vec{\alpha}_1^n$$

vamos admitir que

$$\vec{\gamma}_i^n = \sum_{j=1}^{i} c_{i,j}\vec{\alpha}_j^n, \quad i = 1, \ldots, m$$

então de

$$\vec{\alpha}_{m+1}^n = \frac{\vec{\gamma}_{m+1}^n - \sum_{l=1}^{m}(\vec{\alpha}_l^n \vec{\gamma}_{m+1}^n)\vec{\alpha}_l^n}{\|\vec{\gamma}_{m+1}^n - \sum_{l=1}^{m}(\vec{\alpha}_l^n \vec{\gamma}_{m+1}^n)\vec{\alpha}_l^n\|}$$

tem-se

$$\vec{\gamma}_{m+1}^n = \|\vec{\gamma}_{m+1}^n - \sum_{l=1}^{m}(\vec{\alpha}_l^n \vec{\gamma}_{m+1}^n)\vec{\alpha}_l^n\|\vec{\alpha}_{m+1}^n + \sum_{l=1}^{m}(\vec{\alpha}_l^n \vec{\gamma}_{m+1}^n)\vec{\alpha}_l^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{\gamma}^n_{m+1} = c_{m+1,m+1}\vec{\alpha}^n_{m+1} + c_{m+1,l}\vec{\alpha}^n_l$$

□

Como

$$\begin{cases} A^T = [\vec{\gamma}^n_1 \vdots \cdots \vdots \vec{\gamma}^n_s] \\ \\ A^{0T} = [\vec{\alpha}^n_1 \vdots \cdots \vdots \vec{\alpha}^n_s] \end{cases} \tag{2.2.11}$$

tem-se

$$E(A^T) = E(A^{0T}) \tag{2.2.12}$$

vindo, devido a (2.2.8)

$$N(A) = N(A^0) \tag{2.2.13}$$

Poremos

$$(\Omega, \omega) = N(A, B) \tag{2.2.14}$$

se se tiver

$$B = \begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ M \end{bmatrix} \tag{2.2.15}$$

com B horizontalmente livre, e se

$$\begin{cases} \Omega = N(A) \\ \omega = N(B) \end{cases} \tag{2.2.16}$$

Como ao aplicar o processo de orto-normalização aos vectores linha de B se começa pelos vectores linha de A, sendo $B^0[A^0]$ a orto-normalizada de $B[A]$ ter-se-á

$$B^0 = \begin{bmatrix} A^0 \\ \cdots \\ M^0 \end{bmatrix} \tag{2.2.17}$$

bem como

$$\begin{cases} \Omega = N(A^0) \\ \omega = N(B^0) \end{cases} \tag{2.2.18}$$

As matrizes A e A^0 [B e B^0] têm vectores linha linearmente independentes pelo que as suas características são iguais ao número de linhas. Assim se $\Omega[\omega]$ tiver dimensão $m[p]$, tem-se

$$\begin{cases} car(A) = car(A^0) = n - m \\ car(B) = car(B^0) = n - p \end{cases} \tag{2.2.19}$$

bem como

$$\begin{cases} A^0 = \mathcal{L}(\vec{\alpha}_1^T, \ldots, \vec{\alpha}_{n-m}^T) \\ B^0 = \mathcal{L}(\vec{\alpha}_1^T, \ldots, \vec{\alpha}_{n-p}^T) \end{cases} \tag{2.2.20}$$

Devido a (2.2.8) e (2.2.18) tem-se ainda

$$\begin{cases} \Omega^\perp = E(A^{0^T}) \\ \omega^\perp = E(B^{0^T}) \end{cases} \tag{2.2.21}$$

pelo que $\{\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_{n-m}^n\} = b^\perp(\Omega^\perp)$ e $\{\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_{n-p}^n\} = b^\perp(\omega^\perp)$. Como ω é subespaço de Ω, $\Omega^\perp$ será subespaço de $\omega^\perp$, assim

$$\{\vec{\alpha}_{n-m+1}^n, \ldots, \vec{\alpha}_{n-p}^n\} = b^\perp(\bar{\omega})$$

com

$$\bar{\omega} = (\Omega^\perp)^\perp \cap \omega^\perp = \Omega \cap \omega^\perp = \omega^\perp \cap \Omega \tag{2.2.22}$$

Os vectores linha de A constituem uma base ortonormada para um sub-espaço de ∇. Então, pondo $A \longleftrightarrow \nabla$ temos que $Q(\nabla) = A^T A$.

Ora

$$\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_{n-m}^n = b\perp(\Omega^\perp)$$

e

$$\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_{n-p}^n = b\perp(\omega^\perp)$$

logo

$$\vec{\alpha}_{n-m+1}^n, \ldots, \vec{\alpha}_{n-p}^n = b\perp(\bar{\omega})$$

tendo-se ainda

$$\begin{aligned} A^0 &= \mathcal{L}(\vec{\alpha}_1^{nT}, \ldots, \vec{\alpha}_{n-m}^{nT}) \longleftrightarrow \Omega^\perp \\ M^0 &= \mathcal{L}(\vec{\alpha}_{n-m+1}^{nT}, \ldots, \vec{\alpha}_{n-p}^{nT}) \longleftrightarrow \bar{\omega} \\ B^0 &= \mathcal{L}(\vec{\alpha}_1^{nT}, \ldots, \vec{\alpha}_{n-p}^{nT}) \longleftrightarrow \omega^\perp \end{aligned}$$

vindo

$$\begin{aligned} Q(\Omega^\perp) &= A^{0^T} A^0 \\ Q(\bar{\omega}^\perp) &= M^{0^T} M^0 \\ Q(\omega^\perp) &= B^{0^T} B^0 \end{aligned}$$

2.3 Somas directas ortogonais

Se dado $\vec{v}_i^n \in \nabla_i$, $i = 1, 2$, se tiver $\vec{v}_1^n \perp \vec{v}_1^n$ ter-se-á $\nabla_1 \perp \nabla_2$ e $\nabla_1 \cap \nabla_2$ reduz-se a $\vec{0}^n$ pelo que os vectores da forma $a_1\vec{v}_1^n + a_2\vec{v}_2^n$ constituirão o sub-espaço soma directa $\nabla_1 \boxplus \nabla_2$ de ∇_1 com ∇_2.

Poremos $\nabla_1 \boxplus \nabla_2$ para indicar que se trata duma soma directa de dois espaços ortogonais. Mais geralmente

$$\Delta = \boxplus_{l=1}^{L} \nabla_l \tag{2.3.23}$$

será o sub-espaço dos vectores da forma $\sum_{l=1}^{L} a_l \vec{v}_l^n$ com $\vec{v}_l^n \in \nabla_l$, $l = 1, \ldots, L$ se $\nabla_i \perp \nabla_j$ para $i \neq j$.

Com $m_l = dim(\nabla_l)$, $l = 1, \ldots, L$ pode completar-se

$$\{\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_{m_1}^n\} = b\perp(\nabla_1)$$

para obter

$$\{\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_{m_1}^n, \vec{\alpha}_{m_1+1}^n, \ldots, \vec{\alpha}_{m_1+m_2}^n\} = b\perp(\nabla_1 \boxplus \nabla_2)$$

e assim sucessivamente.

Temos no final uma base ortonormada para Δ que é a reunião de bases ortonormadas para os $\nabla_1, \ldots, \nabla_L$. Diremos que tal base ortonormada está associada à partição ortogonal de Δ dada por (2.3.23).

Estabeleçamos a seguinte proposição

Proposição 4 *Δ é espaço vectorial*

Demonstração: Considerando os vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \Delta$, com $\Delta = \boxplus_{l=1}^{L} \nabla_l$ tem-se

$$\vec{u} = \sum_{l=1}^{L} \vec{u}_l, \quad \vec{u}_l \in \nabla_l, \ l = 1, \ldots, L$$

$$\vec{v} = \sum_{l=1}^{L} \vec{v}_l, \quad \vec{u}_l \in \nabla_l, \ l = 1, \ldots, L$$

tendo-se então

$$a\vec{u} + b\vec{v} = a\sum_{l=1}^{L} \vec{u}_l + b\sum_{l=1}^{L} \vec{v}_l = \sum_{l=1}^{L} (a\vec{u} + b\vec{v}) = \boxplus_{l=1}^{L} \nabla_l$$

□

Seguindo-se a

Proposição 5 $Q(\triangle) = \sum_{l=1}^{L} Q(\nabla_l)$

Demonstração: Considerando o vector $\vec{v} \in \triangle$, temos

$$\triangle = \boxplus_{l=1}^{t} \nabla_l \Rightarrow \vec{v}_\triangle = \sum_{l=1}^{L} \vec{v}_{\nabla_l} \Leftrightarrow Q(\triangle)\vec{v} = \sum_{l=1}^{L} Q(\nabla_l)\vec{v} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q(\triangle) = \sum_{l=1}^{L} Q(\nabla_l)$$

□

Capítulo 3

Qui-quadrados e distribuições F

3.1 Misturas

Embora admitamos a existência de densidades, os resultados que iremos obter verificam-se quer as densidades estejam definidas ou não.

Dado um número finito ou infinidade numeravel de coeficientes $a_i \geq 0, \ i = 1, \dots,$ com soma 1, a distribuição

$$F(x) = \sum_{i=1} a_i F_i(x) \tag{3.1.1}$$

será mistura das $F_i(x), i = 1, \dots,$ e terá densidade

$$f(x) = \sum_{i=1} a_i f_i(x) \tag{3.1.2}$$

Caso estejam definidas as funções geradoras de momentos ter-se-á ainda

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx = \sum_{i=1} a_i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_i(x)dx = \sum_{i=1} a_i \varphi_i(t) \tag{3.1.3}$$

Se X tiver distribuição $F(x)$ pode admitir-se a existência duma variável "indicatriz" Z tal que

$$pr(Z = i) = a_i, i = 1, \dots \tag{3.1.4}$$

e que, quando $Z = i$, X tem distribuição $F_i(x)$. Com efeito

$$F(x) = pr(X \leq x) = \sum_{i=1} pr(Z = i) pr(X \leq x \ Z = i) = \sum_{i=1} a_i F_i(x) \tag{3.1.5}$$

3.2 Qui-quadrados não centrais

Sejam $X_i, \ldots, X_m$ variáveis normais, independentes, com valores médios $\mu_1, \ldots, \mu_m$ e variância 1. As variáveis $X_1^2, \ldots, X_m^2$ serão independentes com as funções geradoras de momentos

$$\varphi_{X_i^2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx^2} \frac{e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2}}}{\sqrt{2\Pi}} dx, i = 1, \ldots \tag{3.2.6}$$

ora

$$tx^2 - \frac{1}{2}(x-\mu_i)^2 = -\frac{(1-2t)x^2 - 2\mu_i x + \mu_i^2}{2} =$$
$$= -\frac{(1-2t)}{2}[(x - \frac{\mu_i}{1-2t})^2 - \frac{2t\mu_i^2}{(1-2t)^2}], i = 1, \ldots \tag{3.2.7}$$

vindo

$$\varphi_{X_i^2}(t) = e^{\frac{\mu_i^2 t}{(1-2t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1-2t}{2}(x-\frac{\mu_i}{1-2t})^2}}{\sqrt{2\Pi}} dx =$$
$$= \frac{e^{\frac{\mu_i^2 t}{(1-2t)}}}{\sqrt{1-2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1-2t}{2}(x-\frac{\mu_i}{1-2t})^2}}{\sqrt{\frac{2\Pi}{1-2t}}} dx = \frac{e^{\frac{\mu_i^2 t}{(1-2t)}}}{\sqrt{1-2t}}, i = 1, \ldots \tag{3.2.8}$$

já que a última função integranda é

$$n(\frac{\mu_i}{1-2t}, \frac{2\Pi}{1-2t}), i = 1, \ldots$$

e consequentemente, o integral correspondente entre $-\infty$ e $+\infty$ valerá 1. Como as variáveis $X_1^2, \ldots, X_m^2$ são independentes ter-se-á

$$\varphi_{\sum_{i=1}^m X_i^2}(t) = \prod_{i=1}^m \varphi_{X_i^2}(t) = \frac{e^{\frac{\delta t}{1-2t}}}{(1-2t)^{\frac{m}{2}}} \tag{3.2.9}$$

com

$$\delta = \sum_{i=1}^m \mu_i^2 \tag{3.2.10}$$

Diremos que $\sum_{i=1}^m X_i^2$ é um qui-quadrado com m graus de liberdade e parâmetro de não centralidade δ, $\chi^2_{m,\delta}$. Ora

$$\frac{\delta t}{1-2t} = -\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2(1-2t)} \tag{3.2.11}$$

pelo que

$$\varphi_{\chi^2_{s,0}}(t) = \frac{e^{-\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2(1-2t)}}}{(1-2t)^{\frac{m}{2}}} = e^{-\frac{\delta}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{\delta}{2})^j}{j!} \frac{1}{(1-2t)^{\frac{m+2j}{2}}} \tag{3.2.12}$$

Ora, como

$$\varphi_{\chi^2_{s,0}}(t) = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{s}{2}}} \tag{3.2.13}$$

tem-se

$$\varphi_{\chi^2_{m,\delta}}(t) = e^{-\frac{\delta}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{\delta}{2})^j}{j!} \varphi_{\chi^2_{m+2j,0}}(t) \tag{3.2.14}$$

isto é, a função geradora de momentos corresponde a uma mistura em que se tem, para a variável indicatriz

$$pr(Z=j) = e^{-\frac{\delta}{2}} \frac{(\frac{\delta}{2})^j}{j!}, j = 0, 1, \ldots \tag{3.2.15}$$

Z terá pois a distribuição de POISSON com parâmetro $\frac{\delta}{2}$. Quando $Z = j$ $\chi^2_{m,\delta}$ distribui-se como um qui-quadrado central ($\delta = 0$) com $m + 2j$ graus de liberdade.

Temos que

$$\chi^2_{m,\delta} \ (i) \ \chi^2_{m-1,\delta}$$

então obtem-se que

$$\mu(\chi^2_{m,\delta}) = \mu(\chi^2_{1,\delta}) + \mu(\chi^2_{m-1,0}) = 1 + \delta + m - 1 = m + \delta$$

Por outro lado, temos que

$$\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) - 2cov(X,Y)$$

e

$$X \ (i) \ Y \ \Rightarrow \ \sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$$

quando $X \sim \chi^2_{m,0}$, vem que

$$\mu(X^2) = m(m+2)\mu(X) = m$$

e

$$\sigma^2(\chi^2_{m-1,0}) = (m-1)(m+1) - (m-1)^2 = 2m - 2$$

e ainda

$$\sigma^2(\chi^2_{1,\delta}) = 2 + 4\delta$$

logo obtem-se que

$$\sigma^2(\chi^2_{m,\delta}) = \sigma^2(\chi^2_{1,\delta}) + \sigma^2(\chi^2_{m-1,0}) = 2 + 4\delta + 2m - 2 = 2m + 4\delta$$

3.3 Quocientes de qui-quadrados

Representamos por $\bar{F}(y/m, n, \delta)$ a distribuição do quociente

$$\mathcal{T} = \frac{\chi^2_{m,\delta}}{\chi^2_{n,0}} \qquad (3.3.16)$$

dos qui-quadrados independentes $\chi^2_{m,\delta}$ e $\chi^2_{n,0}$.

Observe-se que

$$\mathcal{F} = \frac{n}{m}\mathcal{T} = \frac{n}{m}\frac{\chi^2_{m,\delta}}{\chi^2_{n,0}} \qquad (3.3.17)$$

tem a distribuição F, com m e n graus de liberdade e parâmetro de não centralidade δ, tem-se pois

$$\mathcal{F} \sim F(y/m, n, \delta)$$

com

$$F(y/m, n, \delta) = \bar{F}(\frac{m}{n}y/m, n, \delta) \qquad (3.3.18)$$

Dado a variável Z indicatriz de $\chi^2_{m,\delta}$ ter distribuição de POISSON com parâmetro $\frac{\delta}{2}$ e, quando $Z = j$, $\chi^2_{m,\delta}$ distribui-se como um qui-quadrado $\chi^2_{m+2j,0}$ tendo $\mathcal{T}$ a distribuição $\bar{F}(y/m + 2, n, 0)$, tem-se

$$\bar{F}(y/m, n, \delta) = pr(\mathcal{T} \leq y) =$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} pr(Z = j) pr(\mathcal{T} \leq y/Z = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\frac{\delta}{2}} \frac{(\frac{\delta}{2})^j}{j!} \bar{F}(y/m + 2j, n, 0) \qquad (3.3.19)$$

Estabeleçamos a seguinte proposição

Proposição 6 $\bar{F}(y/m,n,\delta) > \bar{F}(y/m+2,n,\delta)$

Demonstração: Temos que

$$\bar{F}(y/m,n,\delta) = e^{-\frac{\delta}{2}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\frac{\delta}{2})^j}{j!} \bar{F}(y/m+2j,n,0)$$

então

$$\frac{\partial \bar{F}(y/m,n,\delta)}{\partial \delta} = -\frac{1}{2} e^{-\frac{\delta}{2}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\frac{\delta}{2})^j}{j!} \bar{F}(y/m+2j,n,0) +$$

$$+\frac{e^{-\frac{\delta}{2}}}{2} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\frac{\delta}{2})^{j-1}}{(j-1)!} \bar{F}(y/m+2j,n,0) =$$

$$= -\frac{1}{2}\bar{F}(y/m,n,\delta) + \frac{e^{-\frac{\delta}{2}}}{2} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\frac{\delta}{2})^{j-1}}{(j-1)!} \bar{F}(y/m+2j,n,0) =$$

(sendo $i = j-1$)

$$= -\frac{1}{2}\bar{F}(y/m,n,\delta) + \frac{e^{-\frac{\delta}{2}}}{2} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\frac{\delta}{2})^{i}}{i!} \bar{F}(y/m+2+2i,n,0) =$$

$$= -\frac{1}{2}\bar{F}(y/m,n,\delta) + \frac{1}{2}\bar{F}(y/m+2,n,\delta)$$

Considerando agora

$$\mathcal{T}^1 = \frac{\chi^2_{m,\delta} + \chi^2_{2,0}}{\chi^2_{n,0}} \sim \bar{F}(y/m+2,n,\delta)$$

e

$$\mathcal{T}^2 = \frac{\chi^2_{m,\delta}}{\chi^2_{n,0}} \sim \bar{F}(y/m,n,\delta)$$

como

$$pr(\mathcal{T}^2 < \mathcal{T}^1) = 1$$

obtem-se

$$\bar{F}(y/m,n,\delta) > \bar{F}(y/m+2,n,\delta)$$

□

Seguindo-se a

Proposição 7 *Tem-se que* $\frac{\partial \bar{F}(y/m,n,\delta)}{\partial \delta} < 0$

Demonstração: Temos que

$$\frac{\bar{F}(y/m,n,\delta)}{\partial\delta} = \frac{1}{2}\bar{F}(y/m+2,n,\delta) - \frac{1}{2}\bar{F}(y/m,n,\delta)$$

e

$$\bar{F}(y/m,n,\delta) > \bar{F}(y/m+2,n,\delta)$$

logo

$$\frac{\bar{F}(y/m,n,\delta)}{\partial\delta} < 0$$

□

Capítulo 4

Construção dos testes F

4.1 Hipóteses isoladas

Supondo que temos um vector $\vec{Y}^n \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}^n, \sigma^2 I_n)$ de observações sabendo-se que

$$\mathcal{P} : \vec{\mu}^n \in \Omega \tag{4.1.1}$$

e que, com $\omega \in \Omega$ se pretende testar

$$H_0 : \vec{\mu}^n \in \omega \tag{4.1.2}$$

tendo-se ainda

$$(\Omega, \omega) = N(A, B) \tag{4.1.3}$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ M \end{bmatrix} \tag{4.1.4}$$

é matriz horizontalmente livre.

Sejam A^0 e

$$B^0 = \begin{bmatrix} A^0 \\ \cdots \\ M^0 \end{bmatrix} \tag{4.1.5}$$

as ortonormalizadas de A e B. Com

$$\vec{\psi}^{m-p} = M^0 \vec{\mu}^n$$

$$\tilde{\vec{\psi}}^{m-p} = M^0 \vec{Y}^n$$

e

$$\tilde{\vec{\varphi}}^{n-m} = A^0 \vec{Y}^n$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{\vec{\varphi}}^{n-m} \\ \cdots \\ \tilde{\vec{\psi}}^{m-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^0 \vec{Y}^n \\ \cdots \\ M^0 \vec{Y}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^0 \\ \cdots \\ M^0 \end{bmatrix} \vec{Y}^n \sim$$

$$\sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} A^0 \\ \cdots \\ M^0 \end{bmatrix} \vec{\mu}^n ; \; \begin{bmatrix} A^0 \\ \cdots \\ M^0 \end{bmatrix} (\sigma^2 I_n) \begin{bmatrix} A^{0^T} & \vdots & M^{0^T} \end{bmatrix} \right) \tag{4.1.6}$$

ora, como $\vec{\mu}^n \in \Omega = N(A) = N(A^0)$, e

$$B = \begin{bmatrix} A^0 \\ \cdots \\ M^0 \end{bmatrix} (\sigma^2 I_n) \begin{bmatrix} A^{0^T} & \vdots & M^{0^T} \end{bmatrix} = B^0 (\sigma^2 I_n) B^{0^T} = \sigma^2 I_{n-p} \tag{4.1.7}$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{\vec{\varphi}}^{n-m} \\ \cdots \\ \tilde{\vec{\psi}}^{m-p} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \vec{0}^{n-m} \\ \cdots \\ \vec{\psi}^{m-p} \end{bmatrix}, \; \sigma^2 I_{m-p} \right) \tag{4.1.8}$$

pelo que as componentes deste vector conjunto são normais, independentes com variância σ^2. Tem-se pois

$$\tilde{\vec{\varphi}}^{n-m} \sim \mathcal{N}(\vec{0}^{n-m}, \sigma^2 I_{n-m})$$

independente de

$$\tilde{\vec{\psi}}^{m-p} \sim \mathcal{N}(\vec{\psi}^{m-p}, \sigma^2 I_{m-p})$$

resulta daqui que

$$\|\tilde{\vec{\varphi}}^{n-m}\|^2 = \sum_{i=1}^{n-m} \tilde{\varphi}_i^2 \tag{4.1.9}$$

é o produto de σ^2 por um qui-quadrado central com $n - m$ graus de liberdade,

$$\|\tilde{\vec{\varphi}}^{n-m}\|^2 \sim \chi^2_{n-m,0}$$

independente de

$$\|\vec{\tilde{\psi}}^{m-p}\|^2 = \sum_{j=1}^{m-p} \tilde{\psi}_j^2 \qquad (4.1.10)$$

que é o produto de σ^2 por um qui-quadrado com $m-p$ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade

$$\delta = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{m} \psi_j^2 = \frac{1}{\sigma^2}\|\vec{\tilde{\psi}}^{m-p}\|^2 \qquad (4.1.11)$$

assim ter-se-á

$$\mathcal{F} = \frac{n-m}{m-p}\frac{\|\vec{\tilde{\psi}}^{m-p}\|^2}{\|\vec{\tilde{\psi}}^{n-m}\|^2} \sim F(z/m-p, n-m, \delta) \qquad (4.1.12)$$

Estabeleçamos a seguinte proposição

Proposição 8 *H_0 verifica-se se e só se $\delta = 0$*

Demonstração: A é submatriz de uma matriz ortogonal

$$W = AD(k_1,\ldots,k_m)A^T = AD(k_1^{\frac{1}{2}},\ldots,k_m^{\frac{1}{2}})D(k_1^{\frac{1}{2}},\ldots,k_m^{\frac{1}{2}})A^T = WW^T$$

temos ainda

$$car(ADA^T) = car(A) = s$$

pois D é regular e como $W \sim s \times s$, W é regular

$$\vec{u}^T AD(k_1,\ldots,k_m)A^T\vec{u} = \|D(k_1^{\frac{1}{2}},\ldots,k_m^{\frac{1}{2}})A^T\vec{u}\| \geq 0$$

pelo que $AD(k_1,\ldots,k_m)A^T$ e a sua inversa $(AD(k_1,\ldots,k_m)A^T)^{-1}$ serão definidas positivas.

Assim H_0 verifica-se se e só se $\delta = 0$

□

Podemos construir a seguinte regra de teste para H_0

$$\begin{cases} \text{se} \quad \mathcal{F} \leq \mathcal{F}_{1-q,m,n} & \text{não se rejeita a hipótese testada} \\ \text{se} \quad \mathcal{F} > \mathcal{F}_{1-q,m,n} & \text{rejeita-se a hipótese testada} \end{cases}$$

obtendo-se assim um teste de nível q.

Seguindo-se a

Proposição 9 *O teste F é não distorcido*

Demonstração: Ora

$$\mathcal{F} \sim F(g/m, n, \delta)$$

vê-se que a potência do teste, isto é, a probabilidade de se rejeitar a hipótese depende de δ, vindo

$$Pot(\delta) = pr(\mathcal{F} > \mathcal{F}_{1-q,m,n}) = 1 - F(\mathcal{F}_{1-q,m,n}/m, n, \delta)$$

tendo-se

$$\frac{\partial Pot(\delta)}{\partial \delta} > 0$$

pelo que a potência cresce com δ.

Como H_0 só se verifica se $\delta = 0$, o teste é não distorcido.

$\square$

4.2 Familias ortogonais de hipóteses

Continuando a admitir ter-se um vector $\vec{Y}^n \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}^n, \sigma^2 I_n)$ de observações, com

$$\mathcal{P} = \vec{\mu}^n \in \Omega \tag{4.2.13}$$

existindo uma partição ortogonal

$$\Omega = \boxplus_{l=1}^{L} \bar{\omega}_l \tag{4.2.14}$$

A partir dos sub-espaços $\bar{\omega}_l, \quad l = 1, \ldots, L$ definamos os sub-espaços

$$\omega = \Omega \cap \ \bar{\omega}_l^{\perp}, l = 1, \ldots, L \tag{4.2.15}$$

e as hipóteses

$$H_{0,l} : \vec{\mu}^n \in \omega_l, l = 1, \ldots, L \tag{4.2.16}$$

as quais constituirão uma família ortogonal de hipóteses.

Com $m_l = dim(\bar{\omega}_l) \quad l = 1, \ldots, L$ ponhamos

$$\begin{cases} \bar{m}_0 = & 0 \\ \bar{m}_h = & \sum_{l=1}^{h} m_l \end{cases} \quad (4.2.17)$$

e $\bar{m} = \bar{m}_L$, com

$$\{\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_{\bar{m}}^n\} = b\bot(\Omega)$$

associada à partição ortogonal (4.2.14), tem-se

$$\{\vec{\alpha}_{\bar{m}_{l-1}+1}^n, \ldots, \vec{\alpha}_{\bar{m}_l}^n\} = b\bot(\bar{\omega}_l), \quad l = 1, \ldots, L$$

logo

$$M_l = \mathcal{L}(\vec{\alpha}_{\bar{m}_{l-1}+1}^T, \ldots, \vec{\alpha}_{\bar{m}_l}^T) \leftrightarrow \bar{\omega}_l, \quad l = 1, \ldots, L \quad (4.2.18)$$

Completemos $\{\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_{\bar{m}}^n\}$ de forma a obter-se

$$\{\vec{\alpha}_1^n, \ldots, \vec{\alpha}_{\bar{m}}^n, \vec{\alpha}_{\bar{m}+1}^n, \ldots, \vec{\alpha}_n^n\} = b\bot(R^n)$$

tem-se então

$$\{\vec{\alpha}_{\bar{m}+1}^n, \ldots, \vec{\alpha}_{\bar{n}}^n\} = b\bot(\Omega^\bot)$$

vindo

$$A = \mathcal{L}(\vec{\alpha}_{\bar{m}+1}^T, \ldots, \vec{\alpha}_n^T) \leftrightarrow \Omega^\bot \quad (4.2.19)$$

com

$$\begin{cases} \vec{\psi}_l^{m_l} = & M_l\vec{\mu}^n; \quad l = 1, \ldots, L \\ \tilde{\vec{\psi}}_l^{m_l} = & M_l\vec{Y}^n; \quad l = 1, \ldots, L \\ \tilde{\vec{\varphi}}^{n-\bar{m}} = & A\vec{Y}^n \end{cases} \quad (4.2.20)$$

pode raciocinar-se como atrás para mostrar que

$$\mathcal{F}_l = \frac{n-\bar{m}}{m_l}\frac{\|\tilde{\vec{\psi}}_l^{m_l}\|^2}{\|\tilde{\vec{\varphi}}^{n-m}\|^2} \sim F(y/m_l, n-\bar{m}, \delta_l), \quad l = 1, \ldots, L \quad (4.2.21)$$

com

$$\delta_l = \frac{1}{\sigma^2}\|\vec{\psi}_l^{m_l}\|^2, \quad l = 1, \ldots, L \quad (4.2.22)$$

Estabeleçamos a seguinte proposição

Proposição 10 *Temos que* $\tilde{\vec{\psi}}_l^{m_l} \sim \mathcal{N}(\vec{\psi}_l^{m_l}, \sigma^2 I_{m_l})$ *independente de* $\tilde{\vec{\varphi}}_l^{n-\bar{m}} \sim \mathcal{N}(\vec{0}^{n-\bar{m}}, \sigma^2 I_{n-\bar{m}})$, $l = 1, \ldots, L$

Demonstração: Ora

$$\tilde{\vec{\psi}}_l^{m_l} = M_l \vec{Y}^n$$

e

$$\tilde{\vec{\varphi}}^{n-\bar{m}} = A\vec{Y}^n$$

sendo

$$\begin{bmatrix} \tilde{\vec{\psi}}_l^{m_l} \\ \cdots \\ \tilde{\vec{\varphi}}^{n-\bar{m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_l \\ \cdots \\ A \end{bmatrix} \vec{Y}^n$$

tendo-se ainda que

$$\begin{bmatrix} \tilde{\vec{\psi}}_l^{m_l} \\ \cdots \\ \tilde{\vec{\varphi}}^{n-\bar{m}} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\vec{\psi}}_l^{m_l} \\ \cdots \\ \tilde{\vec{\varphi}}^{n-\bar{m}} \end{bmatrix}, \sigma^2 I_{m_l+n-\bar{m}} \right)$$

então

$$\begin{bmatrix} M_l \\ \cdots \\ A \end{bmatrix} (\sigma^2 I_n) \begin{bmatrix} M_l^T & \vdots & A^T \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} I_{m_l} & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}$$

e poranto

$$\Sigma(\tilde{\vec{\psi}}^{m_l}, \tilde{\vec{\varphi}}^{n-\bar{m}}) = \sigma^2 0_{m_l, n-\bar{m}}$$

□

Seguindo-se a

Proposição 11 $\|\tilde{\vec{\psi}}_l^{m_l}\|^2 = \|\vec{Y}_{\bar{\omega}_l}^n\|^2$, $l = 1, \ldots, L$

Demonstração:

$$\|\tilde{\vec{\psi}}_l^{m_l}\|^2 = \tilde{\vec{\psi}}_l^{m_l T} \tilde{\vec{\psi}}_l^{m_l} = \vec{Y}^{n^T} M_l^T M_l \vec{Y}^n = \vec{Y}^{n^T} Q(\bar{\omega}_l) \vec{Y}^n =$$

$$= \vec{Y}^{n^T} Q(\bar{\omega}_l)^T Q(\bar{\omega}_l) \vec{Y}^n = \vec{Y}_{\bar{\omega}_l}^{n^T} \vec{Y}_{\bar{\omega}_l}^n = \|\vec{Y}_{\bar{\omega}_l}^n\|^2$$

□

Vindo agora a

Proposição 12 $H_{0,l}$ *verifica-se se e só se* $\delta_l = 0$

Demonstração: Temos que

$$\vec{\mu}^n \in \Omega = \omega_l \boxplus \bar{\omega}_l$$

Ora

$$\vec{\mu}^n = \vec{\mu}^n_{\omega_l} + \vec{\mu}^n_{\bar{\omega}_l} \in \omega_l$$

se e só se

$$\vec{\mu}^n = \vec{0}^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{\mu}^n_{\bar{\omega}_l}\|^2 = \vec{0}^n \Leftrightarrow \|Q(\bar{\omega}_l)\vec{\mu}^n\|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\mu}^{n^T} Q(\bar{\omega}_l)^T Q(\bar{\omega}_l)\vec{\mu}^n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mu}^{n^T} Q(\bar{\omega}_l)\vec{\mu}^n = 0 \Leftrightarrow \vec{\mu}^{n^T} M_l^T \vec{\mu}^n = 0 \Leftrightarrow \|M_l\vec{\mu}^n\|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\psi}_l = M_l\vec{\mu}^n = \vec{0}$$

□

4.3 Generalização das hipóteses

Comecemos pelo caso das hipóteses isoladas. Como H_0 se verifica se e só se

$$\delta = \frac{1}{\delta^2}\|\vec{\psi}^{m-p}\|^2 = 0 \tag{4.3.23}$$

podemos escrever esta hipótese como

$$H_0 : \vec{\psi}^{m-p} = \vec{0}^{m-p} \tag{4.3.24}$$

Uma generalização directa desta hipótese será, com $\vec{\psi}_0^{m-p}$ dado

$$H_0(\vec{\psi}_0^{m-p}) : \vec{\psi}^{m-p} = \vec{\psi}_0^{m-p} \tag{4.3.25}$$

Observe-se que, como

$$\vec{\psi}^{m-p} = M^0\vec{\mu}^n$$

temos que

$$\vec{\psi}^{m-p} \in E(M^0)$$

pelo que será de aceitar que

$$\vec{\psi}_0^{m-p} \in E(M^0)$$

Ter-se-á então

$$\vec{\psi}_0^{m-p} = M^0\vec{b}^n \tag{4.3.26}$$

Como ω é subespaço de Ω tem-se o espaço vectorial quociente $\frac{\Omega}{\omega}$. Dado $\vec{b}^n \in \Omega$, os vectores $\vec{b'}^n$ tais que

$$\vec{b'}^n - \vec{b}^n \in \omega$$

constituem a classe de congruência $[\vec{b}^n]$, $\frac{\Omega}{\omega}$ é formado por estas classes de congruência. Seguindo-se a

Proposição 13 *Se a* $[\vec{b}^n]$ *fizermos corresponder* $M^0\vec{b}^n$ *estabelecemos um isomorfismo entre* $\frac{\Omega}{\omega}$ *e* $E(M^0)$

Demonstração: Chamando λ a essa correspondência temos

$$[\vec{b}^n]_{\omega_l} \overset{\lambda}{\longleftrightarrow} M^0\vec{b}^n$$

- Vamos ver se é aplicação linear:

  Ora
  $$\lambda([\vec{b}^n]_{\omega_l}) = M_l^0\vec{b}^n$$
  então
  $$\begin{aligned}\lambda(a_1[\vec{b}_1^n]_{\omega_l} + a_2[\vec{b}_2^n]\omega_l) &= \lambda([a_1\vec{b}_1^n + a_2\vec{b}_2^n]) = \\ = M_l^0(a_1\vec{b}_1^n + a_2\vec{b}_2^n) &= a_1M_l^0\vec{b}_1^n + a_2M_2^0\vec{b}_2^n = \\ &= a_1\lambda([\vec{b}_1^n]_{\omega_l}) + a_2\lambda([\vec{b}_2^n]_{\omega_l})\end{aligned}$$
  logo λ é uma aplicação linear.

- Vamos ver agora se λ é injectiva:

  Ora, sendo
  $$\lambda([\vec{b}_1^n]_{\omega_l}) = \lambda([\vec{b}_2^n]_{\omega_l})$$
  então
  $$M_l^0\vec{b}_1^n = M_l^0\vec{b}_2^n$$
  pelo que
  $$M_l^{0^T}M_l^0\vec{b}_1^n = M_l^{0^T}M_l^0\vec{b}_2^n$$
  vindo
  $$(\vec{b}_1^n)_{\bar{\omega}_l} = (\vec{b}_2^n)_{\bar{\omega}_l}$$
  temos ainda que
  $$\vec{b}_1^n = (\vec{b}_1^n)_{\omega_l} + (\vec{b}_1^n)_{\bar{\omega}_l}$$
  e
  $$\vec{b}_2^n = (\vec{b}_2^n)_{\omega_l} + (\vec{b}_2^n)_{\bar{\omega}_l}$$
  então
  $$\vec{b}_1^n - \vec{b}_2^n = (\vec{b}_1^n)_{\omega_l} - (\vec{b}_2^n)_{\omega_l}$$
  tendo-se que
  $$[\vec{b}_1^n]_{\omega_l} = [\vec{b}_2^n]_{\omega_l}$$
  logo λ é injectiva.

- Falta ver se λ é sobrejectiva:

  Ora, sendo
  $$\vec{v}^{s_l} = E(M_l^0) \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow \vec{v}^{s_l} = M_l^0 \vec{z}^n \Leftrightarrow M_l^{0^T} \vec{v}^{s_l} = \underbrace{M_l^{0^T} M_l^0}_{Q(\omega_l)} \vec{z}^n = \vec{z}^n_{\omega_l}$$
  sendo
  $$\lambda([\vec{z}^n_{\omega_l}]) = M_l^0 M_l^{0^T} M_l^0 \vec{z}^n = M_l^0 \vec{z}^n = \vec{v}^{s_l}$$
  logo λ é sobrejectiva.

Então λ é uma aplicação linear. □

Podemos pois admitir que
$$\vec{b}^n \in \Omega$$
e como H_0 equivale a ter-se
$$M^0 \vec{\mu}^n = M^0 \vec{b}^n.$$
vê-se que esta hipótese pode ser escrita como
$$H_0 : \vec{\mu}^n \in [\vec{b}^n] \tag{4.3.27}$$
Ora
$$\tilde{\vec{\psi}}^{m-p} - \vec{\psi}_0^{m-p} \sim \mathcal{N}(\vec{\psi}^{m-p} - \vec{\psi}_0^{m-p}, \sigma^2 I_{m-p})$$
independente de
$$\tilde{\vec{\varphi}}^{n-m} \sim \mathcal{N}(\vec{0}^{n-m}, \sigma^2 I_{n-m})$$
Tem-se pois
$$\|\tilde{\vec{\psi}}^{m-p} - \vec{\psi}^{m-p}\|^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{m-p}, \delta(\vec{\psi}_0^{m-p})$$
com
$$\delta(\vec{\psi}_0^{m-p}) = \frac{1}{\sigma^2} \|\vec{\psi}^{m-p} - \vec{\psi}_0^{m-p}\|^2 \tag{4.3.28}$$
independente de
$$\|\tilde{\vec{\varphi}}^{n-m}\|^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{n-m,0}$$
A estatística
$$\mathcal{F} = \frac{n-m}{m-p} \frac{\|\tilde{\vec{\psi}}^{m-p} - \vec{\psi}_0^{m-p}\|^2}{\|\tilde{\vec{\varphi}}^{n-m}\|^2} \tag{4.3.29}$$

terá distribuição

$$F(y/m-p, n-m, \delta(\vec{\psi}_0^{m-p}))$$

O parâmetro de não centralidade anula-se se e só se H_0 se verificar.

Quando se passa para famílias ortogonais de hipóteses têm de se considerar os espaços vectoriais quociente $\frac{\Omega}{\omega_l}$, $l=1,\ldots,L$ constituídos pelas classes de congruencia $[\vec{b}^n]_l$, $l=1,\ldots,L$. Com

$$\vec{\psi}_{0,l}^{m_l} = M_l^0 \vec{b}^n, \quad l=1,\ldots,L \tag{4.3.30}$$

as hipóteses

$$H_{0,l}(\vec{\psi}_{0,l}^{m_l}) : \vec{\psi}_l^{m_l} = \vec{\psi}_{0,l}^{m_l}, \quad l=1,\ldots,L \tag{4.3.31}$$

podem ser rescritas como

$$H_{0,l}(\vec{\psi}_{0,l}^{m_l}) : \vec{\mu}^n [\vec{b}^n]_{\omega_l}, \quad l=1,\ldots,L \tag{4.3.32}$$

tendo-se

$$\mathcal{F}_l = \frac{n-\bar{m}}{m_l} \frac{\|\tilde{\vec{\psi}}_l^{m_l} - \vec{\psi}_{0,l}^{m_l}\|^2}{\|\tilde{\vec{\varphi}}^{n-\bar{m}}\|^2} \sim F(y/m_l n - \bar{m}, \delta(\vec{\psi}_{0,l}^{m_l})), \quad l=1,\ldots,L \tag{4.3.33}$$

com

$$\delta(\vec{\psi}_{0,l}^{m_l}) = \frac{1}{\sigma^2}\|\vec{\psi}_l^{m_l} - \vec{\psi}_{0,l}^{m_l}\|^2, \quad l=1,\ldots,L \tag{4.3.34}$$

Estes parâmetros de não centralidade anulam-se quando e só quando se verificam as correspondentes hipóteses testadas.

4.4 Heterocedasticidade controlada

Vamos agora admitir que se tem

$$\vec{Z}^m \sim \mathcal{N}(\vec{\eta}^n, \sigma^2 C)$$

como C conhecida e regular, independente de

$$S \sim \sigma^2 \chi^2_{y,0}$$

e que, com ∇ sub-espaço de $\mathbb{R}^m$ se quer testar

$$H_0 : \vec{\eta}^m \in \nabla = N(W) \tag{4.4.35}$$

com W horizontalmente livre. Ponhamos

$$\begin{cases} \vec{\psi}^s = W\vec{\eta}^m \\ \tilde{\vec{\psi}}^s = W\vec{Z}^m \end{cases} \tag{4.4.36}$$

vindo

$$\tilde{\vec{\psi}}^s \sim \mathcal{N}(\vec{\psi}^s, \sigma^2 WCW^T)$$

independente de S.

Estabeleçamos a

Proposição 14 *WCW^T é definida positiva*

Demonstração: Temos que

$$C = P^T D(r_1, \ldots, r_n)P$$

com $r_1, \ldots, r_n > 0$, vindo

$$C^{\frac{1}{2}} = P^T D(r_1^{\frac{1}{2}}, \ldots, r_n^{\frac{1}{2}})P$$

então

$$WCW^T = WC^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}W^T = (WC^{\frac{1}{2}})(WC^{\frac{1}{2}})^T$$

tendo-se

$$car(\underbrace{WCW^T}_{l\times l}) = car(WC^{\frac{1}{2}}) = car(W) = l$$

sendo que WCW^T é regular.

Por outro lado

$$\vec{\mu}^T WCW^T \vec{\mu} = \vec{\mu}^T WCW^T \vec{\mu} = \vec{\mu}^T (WC^{\frac{1}{2}})(WC^{\frac{1}{2}})^T \vec{\mu} =$$

$$= \|WC^{\frac{1}{2}}\vec{\mu}\|^2 \geq 0$$

concluindo-se assim que WCW^T é definida positiva

□

Seguindo-se a

Proposição 15 *Tem-se* $\tilde{\vec{\psi}}^T (WCW^T)^{-1} \tilde{\vec{\psi}} \sim \sigma^2 \chi^2_{s,\delta}$ *com* $\delta = \frac{1}{\sigma^2} \vec{\psi}^T (WCW^T) \vec{\psi}$

Demonstração: Como WCW^T é definida positiva $(WCW^T)^{-1}$ também é definida positiva. Assim com P diagonalizadora ortogonal de WCW^T ter-se-á

$$P(WCW^T)P^T = D(r_1, \ldots, r_s)$$

sendo $D(r_1, \ldots, r_s)$ a matriz diagonal cujos elementos principais são os valores próprios $r_j > 0, \quad j = 1, \ldots, 0$ de WCW^T. Vê-se ainda que

$$P(WCW^T)^{-1}P^T = D(r_1^{-1}, \ldots, r_s^{-1})$$

e que

$$(WCW^T)^{-1} = P^T D(r_1^{-1}, \ldots, r_s^{-1})P$$

Ponhamos agora

$$\begin{cases} \vec{\lambda}^s = D(r_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, r_s^{-\frac{1}{2}})P\vec{\psi}^s \\ \tilde{\vec{\lambda}}^s = D(r_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, r_s^{-\frac{1}{2}})P\tilde{\vec{\psi}}^s \end{cases}$$

vindo

$$\tilde{\vec{\lambda}}^s \sim \mathcal{N}(\vec{\lambda}^s, \sigma^2 I_s)$$

já que

$$D(r_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, r_s^{-\frac{1}{2}})P(\sigma^2 WCP^T)P^T D(r_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, r_s^{-\frac{1}{2}}) =$$
$$= \sigma^2 D(r_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, r_s^{-\frac{1}{2}})D(r_1, \ldots, r_s)D(r_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, r_s^{-\frac{1}{2}}) = \sigma^2 I_s$$

Vê-se ainda que

$$\tilde{\vec{\psi}}^T(WCW^T)^{-1}\tilde{\vec{\psi}} = \tilde{\vec{\psi}}^T P^T D(r_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, r_s^{-\frac{1}{2}})D(r_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, r_s^{-\frac{1}{2}})P\tilde{\vec{\psi}} =$$
$$= \tilde{\vec{\lambda}}^T\tilde{\vec{\lambda}} \sim \sigma^2\chi^2_{s,\delta}$$

com

$$\delta = \frac{1}{\sigma^2}\|\tilde{\vec{\lambda}}^s\|^2$$

O resto da demonstração faz-se utilizando técnicas algébricas análogas. □

Vindo agora o

Corolário 1 *Tem-se* $\mathcal{F} = \dfrac{y}{s}\dfrac{\tilde{\vec{\psi}}^T(WCW^T)^{-1}\tilde{\vec{\psi}}}{s} \sim F(z/s, y, \delta)$

Demonstração: Basta observar que $\tilde{\vec{\psi}}$ é independente de s e consequentemente que $\tilde{\vec{\psi}}^T(WCW^T)^{-1}\tilde{\vec{\psi}} \sim \sigma^2\chi^2_{s,\delta}$ é independente de $s \sim \sigma^2\chi^2_{y,0}$ □

Como $\nabla = N(W)$ a hipótese H_0 pode ser rescrita como

$$H_0 : \vec{\psi}^s = \vec{0}^s \tag{4.4.37}$$

pelo que $\delta = 0$ quando e só quando H_0 se verifica.

Estabeleçamos a seguinte

Proposição 16 *Tem-se* $\delta = \frac{1}{\sigma^2}\vec{\psi}^T(WCW^T)^{-1}\vec{\psi}$

Demonstração: Ora

$$\tilde{\vec{\lambda}}^s \sim \mathcal{N}(\vec{\lambda}^s, \sigma^2 I_s)$$

e temos que

$$\tilde{\vec{\psi}}^T P^T D(r_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, r_s^{-\frac{1}{2}}) D(r_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, r_s^{-\frac{1}{2}}) P \tilde{\vec{\psi}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\tilde{\vec{\lambda}}_j}{\sqrt{r_j}}\right)^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{s,\delta}$$

pois as variáveis

$$\frac{\tilde{\vec{\lambda}}_j}{\sqrt{r_j}}, \quad j = 1, \ldots, s$$

são normais independentes com valores médios $\dfrac{\vec{\lambda}_j}{\sqrt{r_j}}$ e variância σ^2.

O parâmetro de não centralidade é dado por

$$\delta = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\vec{\lambda}_j}{\sqrt{r_j}}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \vec{\lambda}^T D(r_1^{-1}, \ldots, r_m^{-1}) \vec{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \vec{\psi}^T P^T D(r_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, r_s^{-\frac{1}{2}}) D(r_1^{-\frac{1}{2}}, \ldots, r_s^{-\frac{1}{2}}) P \vec{\psi} =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \vec{\psi}^T (WCW^T)^{-1} \vec{\psi}$$

□

Seguindo-se a

Proposição 17 *Tem-se* $\mathcal{F}' = \dfrac{y}{s} \dfrac{(\tilde{\vec{\psi}} - \vec{\psi})^T (WCW^T)^{-1} \tilde{\vec{\psi}} - \vec{\psi}}{s} \sim F(z/s, y, 0)$

Demonstração:

Temos que

$$\tilde{\vec{\psi}}^T (WCW^T)^{-1} \tilde{\vec{\psi}} \sim \sigma^2 \chi^2_{s,\delta}$$

e WCW^T é regular. Vindo que $\delta = 0$. Tendo-se então

$$(\bar{\vec{\psi}} - \vec{\psi})^T (WCW^T)^{-1} \bar{\vec{\psi}} - \vec{\psi} \sim \sigma^2 \chi^2_{s,0}$$

vindo

$$\mathcal{F}' = \frac{y}{s} \frac{(\bar{\vec{\psi}} - \vec{\psi})^T (WCW^T)^{-1} (\bar{\vec{\psi}} - \vec{\psi})}{s} \sim F(z/s, y, 0)$$

□

Temos então que

$$pr((\bar{\vec{\psi}} - \vec{\psi})^T (WCW^T)^{-1} (\bar{\vec{\psi}} - \vec{\psi}) \leq s\mathcal{F}_{1-q,s,y\frac{s}{y}}) =$$

$$= pr(\mathcal{F} = \frac{y}{s} \frac{(\bar{\vec{\psi}} - \vec{\psi})^T (WCW^T)^{-1} (\bar{\vec{\psi}} - \vec{\psi})}{S} \leq \mathcal{F}_{1-q,s,y}) = 1 - q$$

Como $(WCW^T)^{-1}$ é definida positiva, a desigualdade que figura no primeiro membro desta expressão define um elipsóide de confiança de nível $1 - q$ para $\vec{\psi}^s$.

Utilizando a estatística $\mathcal{F}'$ juntamente com a região critica $]\mathcal{F}_{1-q,s,y}; +\infty[$ teremos um teste não distorcido de nível q se e só se pertencer ao elipsoide de confiança de nível $1 - q$, pelo que o teste F para H_0 goza de dualidade.

4.5 Heterocedasticidade controlada e famílias ortogonais de hipóteses

À semelhança da alínea anterior admitimos que se tem

$$\vec{Z}^m \sim \mathcal{N}(\vec{\eta}^m, \sigma^2 C)$$

com C regular e conhecida independente de

$$S \sim \sigma^2 \chi^2_{g,0}$$

tendo-se agora

$$R^m = \boxplus_{l=1}^{L} \nabla_l \tag{4.5.38}$$

as hipóteses

$$H_{0,l} : \vec{\eta}^m \in \omega_l = \nabla_l^{\perp};\ \ l = 1, \ldots, L \tag{4.5.39}$$

constituirão uma família ortogonal de hipóteses. Ponhamos

$$m_l = dim(\nabla_l); \quad l = 1, \ldots, L$$

bem como

$$\bar{m}_0 = 0$$

e

$$\bar{m}_h = \sum_{l=1}^{h} m_l$$

e admitamos que $\{\vec{\alpha}_1^m, \ldots, \vec{\alpha}_m^m\} = b\perp(R^m)$ está associada á partição ortogonal dada por (4.5.38). Tem-se então

$$M_l = L(\vec{\alpha}_{\bar{m}_{l-1}+1}, \ldots, \vec{\alpha}_{\bar{m}_l}) \leftrightarrow \nabla_l; \quad l = 1, \ldots, L \tag{4.5.40}$$

Tomemos

$$\begin{cases} \vec{\psi}_l^{m_l} = M_l \vec{\eta}^m; & l = 1, \ldots, L \\ \vec{\tilde{\psi}}^{m_l} = M_l \vec{z}^m; & l = 1, \ldots, L \end{cases} \tag{4.5.41}$$

vindo

$$\vec{\tilde{\psi}}^{m_l} \sim \mathcal{N}(\vec{\psi}_l^{m_l}, \sigma^2 M_l C M_l^T)$$

independente de

$$S \sim \sigma^2 \chi^2_{g,0}, \quad l = 1, \ldots, L$$

Pode mostrar-se que $M_l C M_l^T$ é definida positiva, $l = 1, \ldots, L$ e que

$$\vec{\tilde{\psi}}_l^T (M_l C M_l^T)^{-1} \vec{\tilde{\psi}}_l \sim \sigma^2 \chi^2_{m_l, \delta_l}, \quad l = 1, \ldots, L$$

com

$$\delta_l = \frac{1}{\sigma^2} \vec{\psi}_l^T (M_l C M_l^T)^{-1} \vec{\psi}_l; \quad l = 1, \ldots, L \tag{4.5.42}$$

independente de S. Assim

$$\mathcal{F}_l = \frac{y}{m_l} \frac{\vec{\tilde{\psi}}_l^T (M_l C M_l^T)^{-1} \vec{\tilde{\psi}}_l}{S} \sim F(g/m_l, y, \delta_l); \quad l = 1, \ldots, L \tag{4.5.43}$$

anulando-se δ_l quando e só quando H_0 se verifica.

Estabeleçamos a seguinte

Proposição 18 δ_l *anula-se quando e só quando* H_0 *se verifica.*

Demonstração: Temos que

$$\delta_l = \frac{1}{\sigma^2}\vec{\psi}_l^T(M_lCM_l^T)^{-1}\vec{\psi}_l; \quad l = 1, \ldots, L$$

Ora $\sigma^2(M_lCM_l^T)$ e consequentemente $M_lCM_l^T$ e $(M_lCM_l^T)^{-1}$ são matrizes definidas positivas. Logo δ_l anula-se quando e só quando H_0 se verifica.

□

Temos que

$$\mathcal{F}_l = \frac{g}{m_l}\frac{\tilde{\vec{\psi}}_l^T(M_lCM_l^T)^{-1}\tilde{\vec{\psi}}_l}{S} \sim F(y/m_l, g, \delta_l); \quad l = 1, \ldots, L$$

logo

$$pr(\tilde{\vec{\Psi}}_l^T(M_lCM_l^T)^{-1}\tilde{\vec{\psi}}_l \leq m_l\mathcal{F}_{1-q,m_l,g}\tfrac{S}{g}) =$$
$$= pr(\mathcal{F} \leq \mathcal{F}_{1-q,m_l,g}) = 1 - q$$

o que nos dá uma região de confiança de nível $1-q$, tendo-se assim um elipsoide de confiança de nível $1-q$ para $\vec{\psi}_l^{m_l}$. Tendo-se a seguinte regra de teste

$$\begin{cases} se\ H_0\ se\ verifica & \delta_l = 0 \\ para\ qualquer\ outra\ alternativa & \delta_l > 0 \end{cases}$$

Assim o teste com estatística $\mathcal{F}_l$ e região crítica $]\mathcal{F}_{1-q,m_l,g}, +\infty[$ terá potência

$$Pot(\delta_l) = 1 - F(\mathcal{F}_{1-q,m_l,g}/m_l, g, \delta_l)$$

tendo-se

$$Pot(0) = 1 - F(\mathcal{F}_{1-q,m_l,g}/m_l, g, 0) = 1 - (1-q) = q$$

logo tem nível q e como $F(y/r, s, \delta)$ decresce com δ, $Pot(\delta_l)$ cresce com δ_l. Tendo-se então que o teste é não distorcido.

δ_l define uma hipótese que não é rejeitada pelo teste F de nível q se e só se pertencer ao elipsoide de confiança de nível $1-q$, pelo que o teste F para H_0 goza de dualidade.

4.6 Famílias completas de hipóteses

Quando se tem uma família ortogonal de hipóteses tem-se uma partição ortogonal

$$\Omega = \boxplus_{l=1}^{L} \bar{\omega}_l \tag{4.6.44}$$

e a hipótese $H_{0,l}$ verifica-se se e só se $\vec{\mu}_{\bar{\omega}_l} = \vec{0}_l$ sendo

$$g_l = dim(\bar{\omega}_l) \tag{4.6.45}$$

o número de graus de liberdade para o teste de $H_{0,l}$ é g_l. Vamos agora "decompor"cada uma destas hipóteses em tantas sub-hipóteses quantos os respectivos graus de liberdade. Sendo $\vec{\alpha}_{l,1}, \ldots, \vec{\alpha}_{l,g_l}$ os vectores linha de $M_l \leftrightarrow \bar{\omega}_l$ temos a

Proposição 19 $H_{0,l}$ *verifica-se se e só se* $\vec{\alpha}^t_{l,j} \cdot \vec{\mu} = 0, \quad j = 1, \ldots, g_l$.

Demonstração: Basta observar que

$$\|\vec{\mu}_{\bar{\omega}_l}\|^2 = \|M_l\vec{\mu}\|^2 = \sum_{j=1}^{2l} (\alpha^t_{l,j} \cdot \vec{\mu})^2$$

□

Assim $H_{0,l}$ verifica-se se e só se se verifica as

$$H_{0,l,j} : \vec{\alpha}^t_{l,j} \cdot \vec{\mu} = 0$$

Podemos reunir as bases $\{\vec{\alpha}_{l,1}, \ldots, \vec{\alpha}_{l,g_l}\}$, $l = 1, \ldots, L$ dos $\bar{\omega}_l$ de forma a ter uma base $\{\vec{\alpha}^0_1, \ldots, \vec{\alpha}^0_m\}$ com $m = \sum_{l=1}^{L} g_l = dim(\Omega)$ e rescrever as hipóteses anteriores sob a forma

$$H'_{0,u} : \vec{\alpha^0_u}^t \cdot \vec{\mu} = 0, \quad u = 1, \ldots, m \tag{4.6.46}$$

Ponhamos

$$\bar{\bar{m}} = \{1, \ldots, m\} \tag{4.6.47}$$

dado $C \subseteq \bar{\bar{m}}$, $H_0(C)$ será hipótese que se verifica se $\vec{\alpha}^t_u \cdot \vec{\mu} = 0$ para todos os $u \in C$. As hipóteses iniciais pertencem a esta família completa.

Então

$$g(C) = \#(C) \tag{4.6.48}$$

será o número de graus de liberdade correspondente a $H_0(C)$. Sendo ainda $M(C)$ a matriz cujos vectores linha são os $\vec{\alpha}_u^0$ com $u \in C$, podemos pôr

$$H_0(C) : M_0(C)\vec{\mu} = \vec{0} \tag{4.6.49}$$

tendo-se para esta hipótese a estatística

$$\mathcal{F}(C) = \frac{g}{g(C)} \frac{\|M(C)\vec{Y}\|^2}{S} \tag{4.6.50}$$

com $g(C)$ e g graus de liberdade e parâmetro de não centralidade

$$\delta(C) = \frac{1}{\sigma^2}\|M(C)\vec{\mu}\|^2 \tag{4.6.51}$$

Observe-se que para as $H'_{0,u}$ se têm as estatísticas

$$\mathcal{F}_u = g\frac{(\vec{\alpha}_u^t\vec{Y})^2}{S}; \quad u = 1, \ldots, m \tag{4.6.52}$$

com 1 e g graus de liberdade e parâmetro de não centralidade

$$\delta_u = \frac{1}{\sigma^2}(\vec{\alpha}_u^t\vec{\mu})^2; \quad u = 1, \ldots, m \tag{4.6.53}$$

Verifica-se fácilmente que

$$\|M(C)\vec{v}\|^2 = \sum_{u \in C}(\vec{\alpha}_u^t\vec{v})^2 \tag{4.6.54}$$

logo

$$\begin{cases} \mathcal{F}(C) = \frac{1}{g(C)}\sum_{u \in C}\mathcal{F} \\ \delta(C) = \frac{1}{g(C)}\sum_{u \in C}\delta_u \end{cases} \tag{4.6.55}$$

A primeira destas expressões é interessante pois mostra que $\mathcal{F}(C)$ pode não ser significativa a um dado nível mas os testes para uma ou mais sub-hipóteses serem. Menos aparente é a possíbilidade inversa. Com efeito para os níveis usuais e números habituais de graus de liberdade tem-se

$$f_{1-\alpha,g(C),g} < f_{1-\alpha,1,g} \tag{4.6.56}$$

podendo ter-se

$$\begin{cases} \mathcal{F}_u < f_{1-\alpha,1,g}; & u \in C \\ \mathcal{F}(C) > f_{1-\alpha,g(C),g} \end{cases} \tag{4.6.57}$$

neste caso nenhuma sub-hipótese era rejeitada pois $H_0(C)$ era-o ao nível α.
Conclui-se daqui que convém testar hipóteses e sub-hipóteses simultaneamente. Aliás na aplicação que adiante faremos aos planos completos isso será posto em evidência.

4.7 Condensação

Até aqui considerámos dois tipos de modelos.

- No primeiro temos que
$$\vec{Y}^n \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}^n, \sigma^2 I_n)$$
com $\vec{\mu}^n \in \Omega$ e $dim(\Omega) = m$.

- No segundo temos que
$$\vec{Z} \sim \mathcal{N}(\vec{\eta}^m, \sigma^2 C)$$
com C conhecida e regular, independente de
$$S \sim \sigma^2 \chi^2_{g,0}$$

Vamos agora ver como o primeiro modelo se encaixa no segundo. Para isso completemos a matriz ortogonalizada

$$B^0 = \begin{bmatrix} A^0 \\ \cdots \\ M^0 \end{bmatrix} \tag{4.7.58}$$

de forma a ter-se uma matriz ortogonal

$$P^0 = \begin{bmatrix} B^0 \\ \cdots \\ B^{0\perp} \end{bmatrix} \tag{4.7.59}$$

tendo-se

$$A^0 \leftrightarrow \Omega^\perp$$

$$M^0 \leftrightarrow \bar{\omega}$$

e

$$B^{0\perp} \leftrightarrow \omega.$$

Podemos considerar ainda a matriz

$$A^{0\perp} = \begin{bmatrix} M^0 \\ \cdots \\ B^{0\perp} \end{bmatrix} \tag{4.7.60}$$

como os vectores linha $M^0[B^{0\perp}]$ constituem uma base ortonormada para $\bar{\omega}$, $[\omega]$ e $\Omega = \omega \boxplus \bar{\omega}$ tem-se

$$A^{0\perp} \leftrightarrow \Omega$$

logo

$$Q(\Omega) = (A^{0\perp})^T(A^{0\perp}) \tag{4.7.61}$$

Estabeleçamos a seguinte

Proposição 20 $M^0Q(\Omega) = M^0$

Demonstração: Ora

$$M^0Q(\Omega) = M^0(A^{0\perp})^T(A^{0\perp}) = M^0 \begin{bmatrix} M^0 \\ \cdots \\ B^{0\perp} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M^0 \\ \cdots \\ B^{0\perp} \end{bmatrix} =$$

$$= M^0 \begin{bmatrix} M^{0^T} & \vdots & B^{0\perp^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^0 \\ \cdots \\ B^{0\perp} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^0 \\ \cdots \\ B^{0\perp} \end{bmatrix} = M^0$$

□

Seguindo-se a

Proposição 21 $car(M^0(A^{0\perp})^T) = car(M^0)$

Demonstração: Como $M^0B^{0\perp^T}$ é nulo, tem-se

$$car(M^0(A^{0^T})) = car\left(M^0 \begin{bmatrix} M^{0^T} & \vdots & B^{0\perp^T} \end{bmatrix}\right) = car(M^0M^{0^T}) = car(M^0)$$

□

Como $car(M^0(A^{0\perp})^T) = car(M^0)$ temos que $M^0(A^{0\perp})^T$ é horizontalmente livre. Ora como

$$\vec{\mu}^n \in \Omega = N(A^0)$$

$$\begin{bmatrix} A^0\vec{y}^n \\ \cdots \\ A^{0\perp}\vec{y}^n \end{bmatrix} = P\vec{y}^n \sim \mathcal{N}(P^0\vec{\mu}^n;\ P^0(\sigma^2 I_n)P^{0^T}) =$$

$$= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} A^0\vec{\mu}^n \\ \cdots \\ A^{0\perp}\vec{\mu}^n \end{bmatrix};\ \sigma^2 I_n\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \vec{0}^{n-m} \\ \cdots \\ \vec{\eta}^m \end{bmatrix};\ \sigma^2 I_n\right) \tag{4.7.62}$$

onde

$$\vec{\eta}^m = A^{0\perp}\vec{\mu}^n$$

logo, com

$$\vec{z}^m = A^{0\perp}\vec{y}^n$$

tem-se

$$\vec{z}^m \sim \mathcal{N}(\vec{\eta}^n;\ \sigma^2 I_m)\ \ (i)\ \ S = \|A^0\vec{y}^n\|^2 \sim \sigma^2\chi^2_{n-m,0}.$$

Viu-se assim que o primeiro modelo se reduz a um caso particular do segundo.

Supondo que temos J amostras

$$Y_{j,1},\ldots,Y_{j,n_j}\ idd\ \sim\ n(\mu_j,\sigma^2),\ \ j = 1,\ldots,J$$

vamos ver como o segundo modelo se pode aplicar a este caso:

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} Y_{1,\cdot} \\ \cdots \\ Y_{J,\cdot} \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim n(y/\mu_1, \frac{\sigma^2}{n_1}) \\ (i) \\ \sim n(y/\mu_J, \frac{\sigma^2}{n_J}) \end{matrix}$$

sendo

$$S_1 = \sum_{l=1}^{M}(Y_{1,l} - Y_{1,\cdot})^2 \sim \sigma^2\chi^2_{n_1-1}$$

$$\vdots$$

$$S_J = \sum_{l=1}^{M}(Y_{J,l} - Y_{J,\cdot})^2 \sim \sigma^2\chi^2_{n_J-1}$$

tem-se

$$\vec{Z} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \cdots \\ \mu_J \end{bmatrix};\ \sigma^2\begin{bmatrix} \frac{1}{n_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{n_J} \end{bmatrix}\right)\ \ (i)\ \ S$$

Capítulo 5

Aplicação aos planos completos

5.1 Natureza dos delineamentos

Nestes delineamentos têm-se 2 factores com $J_1, \ldots, J_L$ níveis. Os tratamentos serão as combinações de níveis dos factores. Estes tratamentos podem ser identificados pelos vectores $\vec{j}^L$ com componentes $j_l = 1, \ldots, J_l$, $l = 1, \ldots, L$. Para cada tratamento toma-se uma amostra :

$$Y_{\vec{j}^L,1}, \ldots, Y_{\vec{j}^L,n_{\vec{j}^L}} \quad idd \quad \sim \quad n(y/\mu_{\vec{j}^L,\sigma^2})$$

Assim estas amostras serão constituídas por variáveis normais identicamente distribuídas. As várias amostras são supostas independentes e com a mesma variância. O valor médio varia de tratamento para tratamento. Para exprimir a acção dos factores sobre os valores médios recorre-se a vários parâmetros.

Começando por $L = 2$ podemos pôr

$$\mu_{j_1,j_2} = \mu_{\vec{j}^2}$$

bem como

$$\begin{cases} \mu_{j_1,\cdot} = \frac{1}{J_2}\sum_{j_2=1}^{J_2} \mu_{j_1,j_2} & j_1 = 1, \ldots, J_1 \\ \mu_{\cdot,j_2} = \frac{1}{J_1}\sum_{j_1=1}^{J_1} \mu_{j_1,j_2} & j_2 = 1, \ldots, J_2 \\ \mu_{\cdot,\cdot} = \frac{1}{J_1J_2}\sum_{j_1=1}^{J_1}\sum_{j_2=1}^{J_2} \mu_{j_1,j_2} \end{cases} \tag{5.1.1}$$

exprimindo-se a acção dos níveis dos dois factores pelos efeitos

$$\begin{cases} \alpha_{j_1,\cdot} = \mu_{j_1,\cdot} - \mu_{\cdot,\cdot} & j_1 = 1, \ldots, J_1 \\ \alpha_{\cdot,j_2} = \mu_{\cdot,j_2} - \mu_{\cdot,\cdot} & j_2 = 1, \ldots, J_2 \end{cases} \tag{5.1.2}$$

e a falta de aditividade (interacção) entre os níveis j_1 e j_2 dos dois factores por

$$\alpha_{j_1,j_2} = \mu j_1, j_2 - \mu j_1, \cdot - \mu\cdot, j_2 + \mu\cdot,\cdot, \quad j_1 = 1,\dots,J_1; \quad j_2 = 1,\dots,J_2 \tag{5.1.3}$$

pondo-se

$$\alpha_{0,0} = \mu_{\cdot,\cdot}$$

vê-se fácilmente que

$$\begin{aligned}\mu(\vec{j}^2) = \mu_{j_1,j_2} &= \mu_{\cdot,\cdot} + \alpha_{j_1,0}\alpha_{0,j_2} + \alpha_{j_1,j_2} = \alpha_{0,0} + \alpha_{j_1,0} + \alpha_{0,j_2} + \alpha_{j_1,j_2} = \\ &= \alpha(\vec{0}^2) + \alpha\left(\begin{bmatrix} j_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ j_2 \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}\right)\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

A esta equação dá-se o nome de equação de modelo.

Seja Γ_L a família dos vectores $\vec{j}^L$ atrás referidos e $\bar{\Gamma}_L$ a família dos vectores $\vec{v}^L$ com componentes $v_l = 0, 1, \dots, J_l$ $l = 1, \dots, L$.

Dado $\vec{j}^L \in \Gamma_L$ representemos por $\theta(\vec{j}^L)$ o conjunto dos vectores $\bar{\Gamma}_L$ obtidos anulando nenhuma, uma, algumas ou todas as componentes de $\vec{j}^L$. A expressão (5.1.4) generaliza-se para

$$\mu(\vec{j}^L) = \sum_{\vec{v}^L \in \theta(\vec{j}^L)} \alpha(\vec{v}^L) \tag{5.1.5}$$

onde $\alpha(\vec{0}^L)$ é a média dos valores médios l, se $\vec{v}^L$ tiver uma [mais que uma] componente não nula [componentes não nulas], $\alpha(\vec{v}^L)$ será o efeito correspondente ao nível indicado por essa componente [interacção entre os níveis correspondentes às componentes não nulas].

Tem-se então para $L = 3$ a seguinte equação de modelo:

$$\begin{aligned}\mu\left(\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix}\right) &= \alpha(\vec{0}^3) + \alpha\left(\begin{bmatrix} j_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \alpha\left(\begin{bmatrix} 0 \\ j_2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \alpha\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j_3 \end{bmatrix}\right) + \\ &+ \alpha\left(\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \alpha\left(\begin{bmatrix} j_1 \\ 0 \\ j_3 \end{bmatrix}\right) + \alpha\left(\begin{bmatrix} 0 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix}\right) + \alpha\left(\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

e para $L = 4$:

$$\mu\left(\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{bmatrix}\right) = \alpha(\vec{0}^4) + \alpha\left(\begin{bmatrix} j_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \alpha\left(\begin{bmatrix} 0 \\ j_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \alpha\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j_3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) +$$

$$+\alpha\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\j_4\end{bmatrix}\right)+\alpha\left(\begin{bmatrix}j_1\\j_2\\0\\0\end{bmatrix}\right)+\alpha\left(\begin{bmatrix}j_1\\0\\j_3\\0\end{bmatrix}\right)+\alpha\left(\begin{bmatrix}j_1\\0\\0\\j_4\end{bmatrix}\right)+$$

$$+\alpha\left(\begin{bmatrix}0\\j_2\\j_3\\0\end{bmatrix}\right)+\alpha\left(\begin{bmatrix}0\\j_2\\0\\j_4\end{bmatrix}\right)+\alpha\left(\begin{bmatrix}0\\0\\j_3\\j_4\end{bmatrix}\right)+\alpha\left(\begin{bmatrix}j_1\\j_2\\j_3\\0\end{bmatrix}\right)+$$

$$+\alpha\left(\begin{bmatrix}j_1\\j_2\\0\\j_4\end{bmatrix}\right)+\alpha\left(\begin{bmatrix}j_1\\0\\j_3\\j_4\end{bmatrix}\right)+\alpha\left(\begin{bmatrix}0\\j_2\\j_3\\j_4\end{bmatrix}\right)+\alpha\left(\begin{bmatrix}j_1\\j_2\\j_3\\j_4\end{bmatrix}\right)$$

Dado

$$C \subseteq \bar{\bar{L}} = \{1,\ldots,L\}$$

seja $\Gamma_L(C)$ o conjunto dos vectores $\bar{\Gamma}_L$ cujas componentes não nulas têm indices em C. Na interpretação destes delineamentos interessam-nos testar as hipóteses

$$H_0(C) : \alpha(\vec{v}^{\,l}) \equiv 0 \quad (\vec{v}^{\,l} \in \Gamma_L(C)) \tag{5.1.6}$$

Se $\#(C) = 1$, $H_0(C)$ será a hipótese de nulidade dos efeitos do factor com índice C.

Se $\#(C) > 1$, $H_0(C)$ será a hipótese de ausencia de interacções para as combinações de níveis dos factores com índices em C.

Estabeleçamos a seguinte

Proposição 22 $\sum_{j_1=1}^{J_1} \alpha_{j_1,0} = 0$

Demonstração: Ora

$$\sum_{j_1=1}^{J_1} \alpha_{j_1,0} = \sum_{j_1=1}^{J_1} (\mu_{j_1,\cdot} - \mu_{\cdot,\cdot}) = \sum_{j_1=1}^{J_1} \mu_{j_1,\cdot} - J_1\mu_{\cdot,\cdot} =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{J_1} \frac{1}{J_2} \sum_{j_2=1}^{J_2} \mu_{j_1,j_2} - J_1 \frac{1}{J_1 J_2} \sum_{j_1=1}^{J_1} \sum_{j_2=1}^{J_2} \mu_{j_1,j_2} =$$

$$= \frac{1}{J_2}\left(\sum_{j_1=1}^{J_1}\sum_{j_2=1}^{J_2}\mu_{j_1,j_2} - \sum_{j_1=1}^{J_1}\sum_{j_2=1}^{J_2}\mu_{j_1,j_2}\right) = \frac{1}{J_2}\cdot 0 = 0$$

□

Seguindo-se a

Proposição 23 $\sum_{j_2=1}^{J_2}\alpha_{0,j_2} = 0$

Demonstração: Temos

$$\sum_{j_2=1}^{J_2}\alpha_{0,j_2} = \sum_{j_2=1}^{J_2}(\mu_{\cdot,j_2} - \mu_{\cdot,\cdot}) = \sum_{j_2=1}^{J_2}\mu_{\cdot,j_2} - J_2\mu_{\cdot,\cdot} =$$

$$= \sum_{j_2=1}^{J_2}\frac{1}{J_1}\sum_{j_1=1}^{J_1}\mu_{j_1,j_2} - J_2\frac{1}{J_1J_2}\sum_{j_1=1}^{J_1}\sum_{j_2=1}^{J_2}\mu_{j_1,j_2} =$$

$$= \frac{1}{J_1}\left(\sum_{j_2=1}^{J_2}\sum_{j_1=1}^{J_1}\mu_{j_1,j_2} - \sum_{j_1=1}^{J_1}\sum_{j_2=1}^{J_2}\mu_{j_1,j_2}\right) = \frac{1}{J_1}\cdot 0 = 0$$

□

Vindo agora a

Proposição 24 $\sum_{j_1=1}^{J_1}\alpha_{j_1,j_2} = 0, \quad j_2 = 1,\ldots,J_2$

Demonstração: Temos

$$\sum_{j_1=1}^{J_1}\alpha_{j_1,j_2} = \sum_{j_1=1}^{J_1}(\mu_{j_1,j_2} - \mu_{j_1,\cdot} - \mu_{\cdot,j_2} + \mu_{\cdot,\cdot}) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{J_1}\mu_{j_1,j_2} - \sum_{j_1=1}^{J_1}\mu_{j_1,\cdot} - J_1\mu_{\cdot,j_2} + J_1\mu_{\cdot,\cdot} =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{J_1}\mu_{j_1,j_2} - \sum_{j_1=1}^{J_1}\frac{1}{J_2}\sum_{j_2=1}^{J_2}\mu_{j_1,j_2} - J_1\frac{1}{J_1}\sum_{j_1=1}^{J_1}\mu_{j_1,j_2} + J_1\frac{1}{J_1J_2}\sum_{j_1=1}^{J_1}\sum_{j_2=1}^{J_2}\mu_{j_1,j_2} =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{J_1}\mu_{j_1,j_2} - \frac{1}{J_2}\sum_{j_1=1}^{J_1}\sum_{j_2=1}^{J_2}\mu_{j_1,j_2} - \sum_{j_1=1}^{J_1}\mu_{j_1,j_2} + \frac{1}{J_2}\sum_{j_1=1}^{J_1}\sum_{j_2=1}^{J_2}\mu_{j_1,j_2} = 0$$

□

Seguindo-se a

Proposição 25 $\sum_{j_2=1}^{J_2} \alpha_{j_1,j_2} = 0, \quad j_1 = 1, \ldots, J_1$

Demonstração: Temos

$$\sum_{j_2=1}^{J_2} \alpha_{j_1,j_2} = \sum_{j_2=1}^{J_2} (\mu_{j_1,j_2} - \mu_{j_1,\cdot} - \mu_{\cdot,j_2} + \mu_{\cdot,\cdot}) =$$

$$= \sum_{j_2=1}^{J_2} \mu_{j_1,j_2} - \sum_{j_2=1}^{J_2} \mu_{\cdot,j_2} - J_2\mu_{j_1,\cdot} + J_2\mu_{\cdot,\cdot} =$$

$$= \sum_{j_2=1}^{J_2} \mu_{j_1,j_2} - \sum_{j_2=1}^{J_2} \frac{1}{J_1} \sum_{j_1=1}^{J_1} \mu_{j_1,j_2} - J_2 \frac{1}{J_2} \sum_{j_2=1}^{J_2} \mu_{j_1,j_2} + J_2 \frac{1}{J_1 J_2} \sum_{j_1=1}^{J_1} \sum_{j_2=1}^{J_2} \mu_{j_1,j_2} =$$

$$= \sum_{j_2=1}^{J_2} \mu_{j_1,j_2} - \frac{1}{J_1} \sum_{j_2=1}^{J_2} \sum_{j_1=1}^{J_1} \mu_{j_1,j_2} - \sum_{j_2=1}^{J_2} \mu_{j_1,j_2} + \frac{1}{J_1} \sum_{j_1=1}^{J_1} \sum_{j_2=1}^{J_2} \mu_{j_1,j_2} = 0$$

□

5.2 Aplicação do produto de KRONECKER

O produto de KRONECKER $A \otimes B$ ser-nos-á útil para mostrar que as $H_0(C)$ constituem uma família ortogonal de hipóteses associada a uma partição ortogonal

$$R^m = \boxplus_{C \subseteq \bar{L}} \nabla(C) \tag{5.2.7}$$

com $M = \prod_{l=1}^{L} J_l$.
Segue-se a

Proposição 26 *Tem-se que* $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$

Demonstração: Ora

$$(A \otimes B)^T = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & \ldots & a_{1,s}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1}B & \ldots & a_{r,s}B \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1}B^T & \dots & a_{r,1}B^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,s}B^T & \dots & a_{r,s}B^T \end{bmatrix} = A^T \otimes B^T$$

□

Seguindo-se agora a

Proposição 27 *Se* A_1A_2 *e* B_1B_2 *estiverem definidas tem-se*

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = (A_1A_2) \otimes (B_1B_2)$$

com $A_1 \otimes B_1 \sim r \times s$ *e* $A_2 \otimes B_2 \sim s \times t$

Demonstração: Temos que

$$A_1 \otimes B_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1}(1)B_1 & \dots & a_{1,s}(1)B_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1}(1)B_1 & \dots & a_{r,s}(1)B_1 \end{bmatrix}$$

e

$$A_2 \otimes B_2 = \begin{bmatrix} a_{1,1}(2)B_2 & \dots & a_{1,t}(2)B_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s,1}(2)B_2 & \dots & a_{s,t}(2)B_2 \end{bmatrix}$$

logo

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{s}(a_{1,j}(1)a_{j,1}(2))B_1B_2 & \dots & \sum_{j=1}^{s}(a_{1,j}(1)a_{j,t}(2))B_1B_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{s}(a_{r,j}(1)a_{j,1}(2))B_1B_2 & \dots & \sum_{j=1}^{s}(a_{r,j}(1)a_{j,t}(2))B_1B_2 \end{bmatrix} =$$

$$= (A_1A_2) \otimes (B_1B_2)$$

□

Seguindo-se o

Corolário 2 *O produto* $\otimes$ *de matrizes ortogonais dá matrizes ortogonais.*

Demonstração: Sendo P_1 e P_2 matrizes ortogonais, com $P_1 \sim r \times r$ e $P_2 \sim s \times s$ então

$$P_1 \otimes P_2 \sim (r \times s)(r \times s)$$

e

$$(P_1 \otimes P_2)(P_1 \otimes P_2)^T = (P_1 \otimes P_2)(P_1^T \otimes P_2^T) =$$
$$= (P_1 P_1^T) \otimes (P_2 P_2^T) = I_r \otimes I_s = I_{rs}$$

□

Vindo o

Corolário 3 *O produto* $\otimes$ *de matrizes ortogonais estandartizadas dá matrizes ortogonais estandartizadas.*

Demonstração: Sendo P_1 e P_2 matrizes ortogonais estandartizadas, com $P_1 \sim r \times r$ e $P_2 \sim s \times s$ então $P_1 \otimes P_2$ é uma matriz ortogonal, com

$$P_1 \otimes P_2 \sim (r \times s)(r \times s)$$

com elementos da primeira linha

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \times \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{rs}}$$

□

Ordenemos agora os valores médios dos tratamentos seguindo os indices

$$i(\vec{j}) = j_1 + \sum_{l=2}^{L} (j_l - 1) \prod_{h=1}^{l-1} J_h \qquad (5.2.8)$$

e dadas as matrizes ortogonais estandartizadas $P_1, \ldots, P_L$ com ordens $J_1, \ldots, J_L$ obtenhamos

$$\bar{P} = P_L \otimes (P_{L-1} \otimes \ldots \otimes P_1) \qquad (5.2.9)$$

Cada linha de $\bar{P}$ é obtida a partir de uma linha de cada uma das matrizes $P_1, \ldots, P_L$ tais que não foi a sua primeira linha que foi utilizada para obter essa linha de $\bar{P}$.

Seja $M(C)$ a sub-matriz de $\bar{P}$ formada pelas linhas associadas a $C \subseteq \bar{\bar{L}}$. Sendo $\vec{\mu}^m$, com $m = M$, o vector dos valores dos tratamentos ordenados de acordo com os indices $i(\vec{j}^L)$, pode mostrar-se que $H_0(C)$ pode ser rescrita como

$$H_0(C) : \vec{\psi}_0^{g(C)}(C) = \vec{0}^{g(C)} \qquad (5.2.10)$$

onde

$$\begin{cases} g(C) = \prod_{l \in C}(J_l - 1) \\ \vec{\psi}_0^{g(C)}(C) = M(C)\vec{\mu}^m \end{cases} \tag{5.2.11}$$

tomando-se $\prod_{l \in \emptyset} a_l = 1$.

Estabeleçamos a

Proposição 28 *A família das* $H_0(C)$ *com* $C \subseteq \bar{\bar{L}}$ *é uma família ortogonal de hipóteses.*

Demonstração: Com

$$\nabla(C) = E(M(C)^T)$$

tem-se

$$M(C) \leftarrow \nabla(C)$$

e como $\bar{P}$ é ortogonal, os seus vectores linha constituem uma base ortonormada para R^m, tendo-se pois a partição ortogonal dada por (5.2.7). Ora, atendendo a (5.2.10), $H_0(C)$ verifica-se se e só se

$$\vec{\mu}^m \in \omega(C) = \nabla(C)^\perp$$

o que completa a demonstração.

□

5.3 Construção dos testes

Seja $\vec{Y}^m$ o vector das médias dos tratamentos ordenados segundo indices $i(\vec{j}^L)$, tem-se

$$\vec{Y}^m \sim \mathcal{N}\left(\vec{\mu}^m,\ \sigma^2 D\left(\frac{1}{n_1}, \ldots, \frac{1}{n_m}\right)\right)$$

sendo $D\left(\frac{1}{n_1}, \ldots, \frac{1}{n_m}\right)$ a matriz diagonal cujos elementos principais são os inversos $\frac{1}{n_1}, \ldots, \frac{1}{n_m}$ das dimensões das amostras. Estas médias são independentes das somas dos quadrados dos residuos para a média das respectivas amostras.

Sendo $S_1, \ldots, S_m$ estas somas de quadrados de residuos ter-se-à ainda

$$S_i \sim \sigma^2 \chi^2_{n_i - 1, 0}, \quad i = 1, \ldots, m$$

sendo estes qui-quadrados independentes, logo

$$S = \sum_{i=1}^{m} S_i \sim \sigma^2 \chi^2_{g,0} \tag{5.3.12}$$

com

$$g = \sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) \tag{5.3.13}$$

estando pois verificadas as condições das alíneas 4.4 e 4.5 .

Bibliografia

[1] Khuri, A.I.; Mathew, T. & Sinha, B.K. (1998). *Statistical Tests for Mixed Linear Models.* John Willey & Sons, Nova York.

[2] Mexia, J. T.(1987). *Standardized orthogonal Matrices and the Decomposition of the sum of Squares for Treatments.* Trabalhos de Investigação, $N^O 2$. FCT/UNL.

[3] Mexia, J. T. (1988). *Controlled Heterocedasticity, Quotient Vector Spaces and F Tests for Hypothesis in Mean Vectors.* Trabalhos de Investigação, $N^O 1$. FCT/UNL.

[4] Mexia, J. T.(1995). *Introdução à Inferência Eatatística Linear.* Edições Lusófonas, Lisboa.

[5] Michalski, A. & Zmysloni, R. (1996). *Testing Hypothesis for Variance Components in Mixed Linear Models* . Statistics 27.

[6] Michalski, A. & Zmysloni, R. (1999). *Testing Hipothesis for Linear Functions of Paramters in Mixed Linear Models.* Tatra Mountain Mathematical Publications.

[7] Seifert, B. (1981). *Explicit Formulas of Exact Tests in Mixed Balanced ANOVA Models.* Biometrical Journal, 23.